

Замеченная опечатка в № 2 за 1968 г.

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
174	12 13 снизу	... к максимуму ...	... к минимуму ...

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г., Гришкевич Л. В., Ерухимов Л. М., Митяков Н. А.</b> Некоторые результаты ионосферных исследований в НИРФИ с 1957 по 1967 гг . . . . .	169
<b>Гетманцев Г. Г., Караванов В. С., Сазонов Ю. А., Тарасов А. Ф.</b> Частотный спектр космического радиоизлучения в диапазоне 10—207 $M\mu$ на высоких галактических широтах . . . . .	191
<b>Демьяненко Л. Н., Станкевич К. С., Шипуля О. Н.</b> Мерцания дискретных источников в тропосфере . . . . .	200
<b>Лещанский Ю. И., Лебедева Г. Н.</b> Исследование поглощения дециметровых и сантиметровых радиоволн в грунте . . . . .	205
<b>Тавдигидзе Т. Л.</b> Рассеяние низкочастотных продольных волн на заряженных частицах в магнитоактивной плазме . . . . .	209
<b>Файнштейн С. М.</b> Об усилении электромагнитных волн потоком заряженных частиц при переходном излучении в неоднородной магнитоактивной среде . . . . .	217
<b>Красовицкий В. Б., Линецкий А. Р.</b> К вопросу о получении инверсной заселенности уровней в трехуровневой системе . . . . .	224
<b>Коваленко Е. С., Пуговкин А. В.</b> К теории нестационарных колебаний в оптическом квантовом генераторе . . . . .	232
<b>Показаньев В. Г., Якуб Л. И., Скроцкий Г. В.</b> Магнитный резонанс в оптически ориентированном $He^3$ . . . . .	239
<b>Крупнов А. Ф., Скворцов В. А., Синегубко Л. А.</b> Исследование режимов работы двухрезонаторного генератора со встречными пучками . . . . .	244
<b>Фрадкин Э. Е., Янкаускас З. К.</b> Усиление модулированного светового сигнала . . . . .	251
<b>Митюгов В. В., Морозов В. П.</b> Кvantовый электромагнитный канал связи с аддитивным шумом . . . . .	260
<b>Алимов В. А., Ерухимов Л. М.</b> О форме и статистических характеристиках импульсного сигнала за слоем с хаотическими неоднородностями . . . . .	268
<b>Чаевский Е. В.</b> Статистическая матрица рассеяния для многоэлементного отражателя . . . . .	279
<b>Шестопалов В. П., Щербак В. В.</b> Матричные операторы в задачах дифракции. I	285
<b>Шестопалов В. П., Щербак В. В.</b> Матричные операторы в задачах дифракции. II (теория открытых резонаторов) . . . . .	296
<b>Калмыкова С. С., Луговой А. В.</b> Поверхностная волна в волноводе с импедансом, меняющимся вдоль длины . . . . .	306
<b>Котосонов Н. В., Власов Б. И.</b> О возможности применения полупроводникового термозонда для исследования распределения потока энергии в волноводах . . . . .	311
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Орлов Ю. И.</b> О фокусирующих свойствах полуограниченного плазменного линейного слоя в случае внутреннего источника . . . . .	31
<b>Беспалов В. И.</b> О предельных параметрах импульсов, генерируемых ОКГ в стационарном режиме с захватом мод . . . . .	320
<b>Розенберг В. И.</b> О диэлектрической проницаемости воды на длине волны 1,2—1,6 $\mu\mu$ . . . . .	322
<b>Информация</b>	
<b>Аннотации статей, помещенных в ж. «Геомагнетизм и аэрономия», т. VII, № 5, 1967 г.</b> . . . . .	324

УДК 621.371.3

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИОНОСФЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В НИРФИ с 1957 по 1967 гг.

*Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Л. В. Гришкевич,  
Л. М. Ерухимов, Н. А. Митяков*

### ВВЕДЕНИЕ

Интенсивные ионосферные исследования в НИРФИ начались в 1957 г. с начала Международного Геофизического Года. Первые систематические наблюдения проводились методом вертикального зондирования. Регулярно снимались высотно-частотные характеристики ионосферы. В этот же период начались измерения дрейфов ионосферных неоднородностей, а также были организованы исследования ионосферных неоднородностей с помощью дискретных источников космического радиоизлучения преимущественно в декаметровом диапазоне волн. Одновременно наблюдалась ионосферная регулярная и нерегулярная рефракция радиоволн при малых и больших зенитных углах дискретных источников.

С 1961 г. в НИРФИ началось систематическое изучение структуры ионосферы путем приема сигналов ИСЗ в УКВ и КВ диапазонах. Большой материал о регулярной и неоднородной структуре ионосферных слоев был получен, в частности, методом дифференциального эффекта Допплера (измерения разности фаз сигналов кратных частот) с использованием сигналов как советских (Космос-1, 2, Электрон-1, 3), так и американских (Эксплорер-22) спутников. С помощью сигналов ИСЗ измерялись важнейшие параметры ионосферных неоднородностей: высота, размеры, относительные флуктуации электронной плотности и т. д.

С 1959 г. и по настоящее время в НИРФИ исследуется ионосферное поглощение радиоволн, которое является одной из важнейших характеристик состояния ионосферных слоев. Исследования проводятся, в основном, радиоастрономическим методом, однако в отдельные периоды велись также и измерения методом вертикального зондирования.

Ионосферные исследования проводились преимущественно на загородной базе НИРФИ вблизи г. Горького. Вместе с тем значительная часть экспериментальных данных была получена в экспедициях в различных районах СССР, а также в Тихом океане. Характерная особенность ионосферных исследований НИРФИ заключается в том, что 1) определение различных ионосферных параметров производилось, как правило, комплексно, т. е. с использованием различных методов; 2) многие измерения велись в течение длительного периода времени, охватывающего последний полуцикл солнечной активности; 3) некоторые измерения относятся к значительному интервалу широт от экватора до полярных районов.

Несмотря на то, что обзор содержит преимущественно данные измерений 1957—1967 гг., часть результатов (ионосферные измерения во время солнечных затмений) относится к 1954—1956 гг.

Необходимо отметить, что обзор охватывает лишь некоторые основные области экспериментальных ионосферных исследований, выполненных в НИРФИ. В обзор не включены, в частности, результаты наблюдений  $z$ -компонент отраженных от ионосферы сигналов и некоторые другие эпизодические исследования. Кроме того, в обзоре не представлены многочисленные теоретические исследования сотрудников НИРФИ в области физики ионосферы и ионосферного распространения радиоволн.

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ $E$ - И $F$ -ОБЛАСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ МЕТОДОМ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

*Состояние ионосферы и солнечная активность.* Наблюдения за состоянием ионосферы методом вертикального зондирования проводятся в НИРФИ с марта 1958 г. по программе международных исследований МГГ—МГС—МГСС. Зондирование ионосферы осуществляется с помощью стандартной автоматической ионосферной станции типа «АИС». Материалы первичной обработки ионограмм в виде таблиц и  $f$ -графиков, а также ионограммы за периоды РМД регулярно отсылаются в Мировой центр хранения данных (МЦД-Б2). Систематические наблюдения за состоянием слоев  $E$ ,  $F1$  и  $F2$  ионосферы позволили установить определенные закономерности в их поведении в различное время суток и года в зависимости от фазы цикла солнечной активности.

На рис. 1 и 2 в качестве иллюстраций представлены суточные изменения (время 45°E) месячных медианных значений критических частот  $f_0E$ ,  $f_0F1$  и  $f_0F2$  в периоды весеннего и осеннего равноденствия (март, сентябрь), а также летнего и зимнего солнцестояния (июнь, декабрь). Рис. 1 наглядно показывает характерные для средних широт различия в суточном ходе  $f_0F2$  как в зависимости от времени года, так и от фазы цикла солнечной активности. В частности, аномально вы-

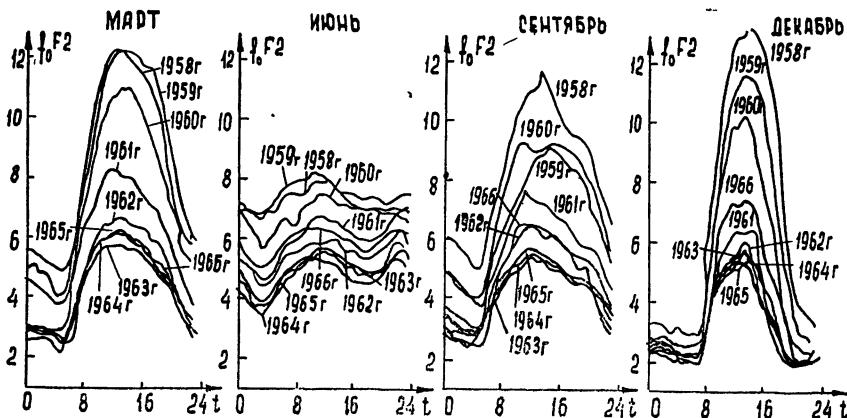


Рис. 1.

сокие значения  $f_0F2$  в полуденные часы в декабре по сравнению с соответствующими значениями  $f_0F2$  в июне наблюдались лишь в годы максимума солнечной активности (1958—1960 гг.). В период спада солнечной активности (1961—1965 гг.) значения  $f_0F2$  в полдень в декабре не превышали и даже были несколько меньше соответствующих значений  $f_0F2$  в июне. Слой  $F1$  в годы максимума солнечной активности в марте и сентябре возникал в  $F$ -области очень редко, тогда как в период спада солнечной активности

слой  $F1$  наблюдался регулярно. Суточные изменения критических частот  $f_0E$  и  $f_0F1$  были сходны и определялись зенитным углом Солнца.

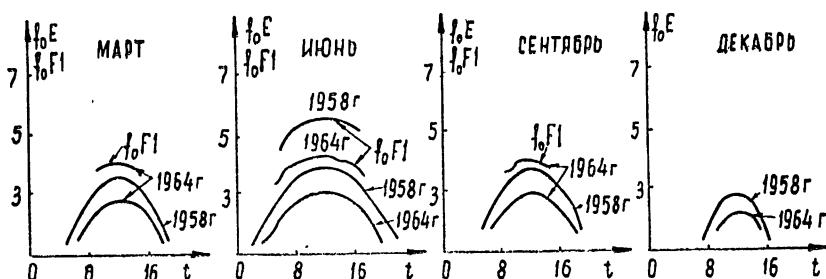


Рис. 2.

*Ионосферные эффекты во время солнечных затмений.* В периоды солнечных затмений 30 июня 1954 г., 2 декабря 1956 г., 15 февраля 1961 г. и 20 мая 1966 г. в Горьком проводились наблюдения за состоянием ионосферы. Обстоятельства затмений и ход критических частот слоев  $E$ ,  $F1$  и  $F2$  ионосферы в контрольные дни и в дни затмений приведены в работах [1,2]\*. В таблице 1 в процентах представлены наибольшие отклонения значений критических частот  $f_0E$ ,  $f_0F1$  и  $f_0F2$  в моменты максимальной фазы затмений по сравнению с медианами тех же величин в контрольные дни.

Таблица 1

Дата затмения $\Delta f_0(\%)$	30/VI-54 г.	2/XII-56 г.	15/XII-61 г.	20/V-66 г.
$E$	—	18	35	19
$F1$	27	—	—	20
$F2$	20	18	17	16

Для периодов затмений 30 июня 1954 г. и 2 декабря 1956 г. был произведен пересчет высотно-частотных характеристик ( $h'f$ ) в  $N(h)$ -профили. Это позволило использовать уравнение баланса ионизации для оценки эффективных коэффициентов рекомбинации  $\alpha_{\text{эфф}}$  в слоях  $E$ ,  $F1$  и  $F2$  ионосферы. В итоге для  $\alpha_{\text{эфф}}$  были получены следующие значения.

Таблица 2

Дата затмения $\alpha_{\text{эфф}} (\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1})$	30/VI-54 г.	2/XII-56 г.
$E$	—	$0,25 \cdot 10^{-8}$
$F1$	$10^{-8}$	—
$F2$	$10^{-9}$	$0,2 \cdot 10^{-9}$

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ $F$ -ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Станции вертикального зондирования ионосферы позволяют получить сведения о состоянии ионосферы лишь до высоты максимума слоя  $F2$  (250 — 350 км). Изучение верхней части ионосферы началось прак-

\* Материалы ионосферных наблюдений во время солнечного затмения 20 мая 1966 г. подготавливаются к печати.

тически в последние 6 — 7 лет благодаря запускам спутников, специально предназначенных для такого рода исследований. Наряду с бортовыми методами, которые дают сведения о локальных характеристиках среды, широкое применение получили методы наземного приема сигналов радиопередатчиков, установленных на ИСЗ. Наземные методы основаны на эффектах, возникающих при распространении радиоволн в ионосфере. Изучение этих эффектов позволяет получить интегральные характеристики среды до высоты спутника. Поскольку состояние нижней части ионосферы можно определить по данным станций вертикального зондирования, то спутниковые данные (при условии полета ИСЗ выше максимума слоя  $F_2$ ) могут быть использованы для изучения верхней части ионосферы.

*Методика ионосферных исследований с помощью наземного приема сигналов ИСЗ.* В методе дисперсионного радиоинтерферометра на Земле измеряется разность фаз сигналов кратных частот  $\omega_1 = m_1\omega$  и  $\omega_2 = m_2\omega$  ( $m_1$  и  $m_2$  — целые числа) передатчика ИСЗ. В приемном устройстве частоты сигналов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  приводятся к одной и той же частоте  $m_1 m_2 \omega$ , после чего оба сигнала поступают на фазометр. Определенная таким способом разность фаз сигналов когерентных частот оказывается пропорциональной интегральной концентрации электронов от пункта приема до спутника:

$$\Phi = A \int_0^{r_c} N dr, \quad (1)$$

где  $A = \frac{2\pi e^2}{mc\omega} \left( \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_1} \right)$  — коэффициент, зависящий от выбора частот.

Выражение (1) справедливо на достаточно высоких частотах, когда показатель преломления радиоволн в ионосфере  $n = \left( 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \right)^{1/2}$  мало отличается от единицы (точнее,  $2\pi e^2 N / m\omega^2 \ll \cos^2 \varphi$ , где  $\varphi$  — угол падения волны на слой). Как правило, величина  $\Phi \gg 1$ . Действительно,

например, при  $f_1 = \omega_1/2\pi = 20 \text{ MГц}$ ,  $f_2 = \omega_2/2\pi = 40 \text{ MГц}$  и  $\int_0^{r_c} N dr = 10^{13} \text{ эл. см}^{-3}$  значение  $\Phi \simeq 6 \cdot 10^3$ .

В процессе эксперимента можно лишь определить приращение  $\Delta\Phi$  для какого-либо интервала времени, т. е.

$$\Delta\Phi = A \int_0^{r_c} N dr - \Phi_0 \simeq \frac{A}{\cos \varphi_m} \int_0^{z_c} N dz - \Phi_0, \quad (2)$$

где  $z_c$  — высота спутника. Задача сводится к нахождению  $\Phi_0$  по экспериментальным значениям  $\Delta\Phi(t)$  и известным эфемеридам спутника  $z_c(t)$  и  $\varphi(t)$ . В работах [3—5] подробно изложена методика обработки записей  $\Delta\Phi(t)$  и показано, что при некоторых предположениях (в частности, при постоянном градиенте электронной концентрации вдоль тра-

ектории движения ИСЗ  $\int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} dz = \text{const}$ ) можно определить вели-

чину  $\int_0^{z_c} N dz$  и значение горизонтального градиента  $\int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} dz$ .

Примерно таким же способом находятся интегральные характеристики среды по вращению плоскости поляризации радиоизлучения ИСЗ (эффект Фарадея). Если спутник излучает линейно-поляризованный сигнал, то при прохождении через ионосферу плоскость поляризации волны будет поворачиваться вследствие разности показателей преломления обыкновенной и необыкновенной компонент. Угол поворота плоскости поляризации в квазипротодальном приближении равен

$$\theta = \frac{\omega}{2c} \int_0^z (n_2 - n_1) dr = \frac{2\pi e^3}{mc^2 \omega^2} \int_0^z NH_0 \cos \gamma dr, \quad (3)$$

где  $\gamma$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и магнитным полем Земли  $\mathbf{H}_0$ .

Поскольку величины  $H$  и  $\gamma$  известны, то измерение  $\theta$  позволяет вычислить интегральную концентрацию электронов  $\int_0^z N dz$  (см., напри-

мер, [6]). Сравнительная простота измерений величины  $\theta$  (для записи фарадеевских федингов сигнала ИСЗ необходим лишь приемник с дипольной антенной и самописец) способствует их широкому применению в целях исследования ионосферы. В работе [3] предложено проводить измерения эффекта Фарадея на двух близких частотах, что позволяет исключить неопределенность начального значения разности фаз обыкновенной и необыкновенной волн. Там же предлагается определять электронную концентрацию межпланетного газа, используя метод группового запаздывания радиоволн на двух частотах\*.

*Результаты исследований ионосферы с помощью ИСЗ.* Исследования ионосферы путем измерения разности фаз сигналов когерентных частот и анализа фарадеевских федингов сигналов ИСЗ начались в НИРФИ с марта 1962 г., когда был запущен спутник «Космос-1» с передатчиком сигналов когерентных частот 20 и 90 Мгц. Наблюдения за спутниками «Космос-1» и «Космос-2» проводились первоначально в Крыму [8]. В феврале—марте 1964 г. были организованы одновременные наблюдения в Крыму и в Горьком за ИСЗ «Электрон-1» [9, 10]. Спутник «Электрон-3» [11] наблюдался в Горьком в июле—октябре 1964 г. Запуск полярного ионосферного спутника «Эксплорер-22» позволил провести серию наблюдений за состоянием полярной ионосферы (Мурманск) и ионосферы средних широт (Горький) в период 1965—1966 гг. [12, 13]. Высота спутников «Электрон-1» и «Электрон-3» изменилась в период наблюдений от 700 до 2000 км, а спутника «Эксплорер-22» — от 890 до 1070 км.

На рис. 3 приведены усредненные значения  $N_n = \int_0^{z_c} N dz$  в различные сезоны 1964—1966 гг. в зависимости от времени суток (левая часть рисунка). На правой части рисунка нанесены изменения электронной концентрации  $N_m$  в максимуме слоя F2 (по данным станций вертикального зондирования ионосферы в Горьком и Мурманске) за те же периоды времени.

Из графиков четко видно, как изменяются величины  $N_n$  и  $N_m$  в зависимости от времени суток и сезона. Характер поведения  $N_n$  и  $N_m$  различен. Это вызвано вариациями эффективной толщины ионосферы  $\tau = N_n/N_m$ . Летом средняя эффективная толщина  $\tau = 350 \div 400$  км, в равноденствие  $\tau \approx 250$  км, а зимой  $\tau \approx 200$  км. В Горьком электронная концентрация в максимуме слоя F2, как правило, выше,

\* Эта идея недавно была реализована [7].

чем в Мурманске. Основные аномалии в поведении интегральной электронной концентрации в Мурманске имеют место в утренние и, в основном, в вечерние часы летнего и осеннего периодов. В остальные периоды характер поведения  $N_n$  и  $N_m$  в Мурманске качественно одинаков и хорошо согласуется с известными представлениями о полярной ионосфере.

Если предположить, что выше максимума слоя F2 электронная концентрация спадает по экспоненциальному закону  $N = N_m \exp\left(-\frac{z-z_m}{H}\right)$ , то можно определить приведенную высоту верхней ионосферы  $H$  и построить профили электронной концентрации. В качестве иллюстрации на рис. 4 показаны усредненные  $N(h)$ -профили для

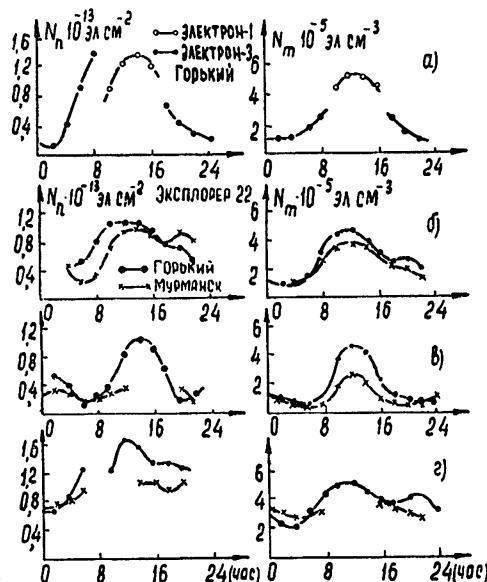


Рис. 3. Зависимость  $N_n$  и  $N_m$  от времени суток:

а) февраль — октябрь 1964 г., б) август — октябрь 1965 г., в) ноябрь — декабрь 1965 г., г) июнь — июль 1966 г.

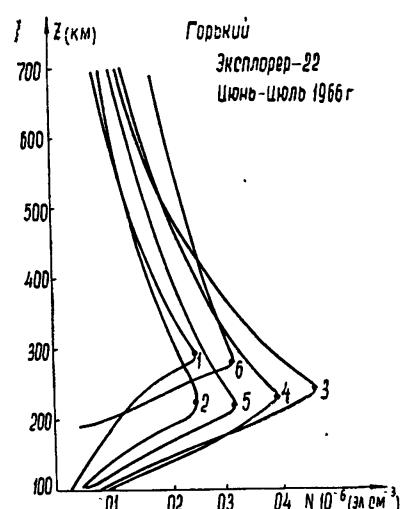


Рис. 4. Усредненные  $N(h)$ -профили для различных периодов суток:

1) 00—04 час; 2) 04—08 час; 3) 08—12 час;  
4) 12—16 час; 5) 16—20 час; 6) 20—24 час.

разных периодов суток по наблюдениям ИСЗ «Эксплорер-22» в Горьком летом 1966 г. Нижняя часть профилей рассчитана на ЭВМ БЭСМ-2 по данным станции вертикального зондирования в Горьком.

Приведенные результаты относятся к периоду, близкому к максимуму солнечной активности. Представляет интерес поведение интегральной электронной концентрации  $N_n$  в условиях изменяющейся солнечной активности. На рис. 5 представлены зависимости  $N_n$  от времени суток для различных сезонов в период с 1958 по 1966 г. Графики, соответствующие 1964—1966 гг., построены по данным НИРФИ. Остальные кривые заимствованы из различных источников: 1959 г. — данные работ [14, 15], 1960 г. — работы [16, 17], 1962 г. — работа [18]. Все результаты относятся к наблюдениям на умеренных широтах. Существенно, что значения интегральной электронной концентрации увеличиваются с ростом активности Солнца. Полуденные значения  $N_n$  изменяются более чем в 5 раз, что, примерно, соответствует изменению электронной концентрации в максимуме слоя F2 ( $N_m = 1,24 \cdot 10^4 \cdot f_0 F2$ , см. рис. 1).

Важной особенностью ионосферы является наличие в ней горизонтальных градиентов электронной концентрации [4, 8, 11]. Проведенные

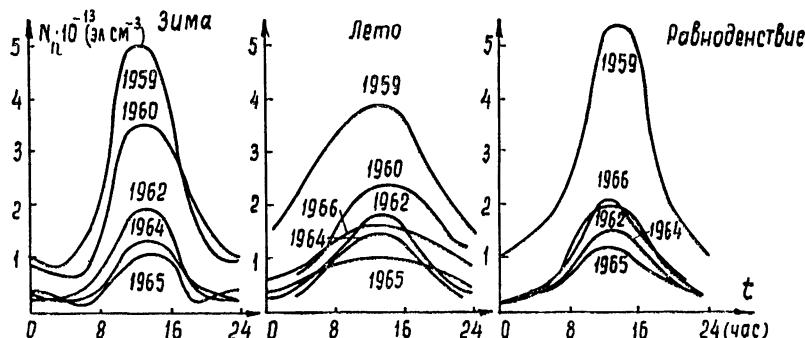


Рис. 5.

в НИРФИ измерения дали возможность получить сведения о величинах  $\frac{dN_n}{dx} = \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} dz$ . Регулярные градиенты на восходе и заходе Солнца составляют, например,  $dN_n/dx = (1 \div 3) \cdot 10^4 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Электронная концентрация изменяется также в зависимости от широты. На средних широтах электронная концентрация уменьшается по направлению к полюсу, причем в полдень величина  $dN_n/dx = -3 \cdot 10^4 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$  [9]. Тенденция уменьшения электронной концентрации сохраняется вплоть до широт 65 — 70°. На больших широтах эта тенденция нарушается и начинается возрастание  $N_n$  с ростом широты. Этот эффект обусловлен дополнительной корпскулярной ионизацией полярной ионосферы и особенно ярко выражен ночью [13]. Кроме регулярных горизонтальных градиентов, отмечаются также нерегулярные градиенты, обусловленные наличием в ионосфере неоднородностей различных масштабов (от нескольких км до сотен км). Величина нерегулярных градиентов составляет  $dN_n/dx \simeq (1 \div 5) \cdot 10^4 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$  и в среднем не зависит от масштаба неоднородностей [8] (подробнее об ионосферных неоднородностях см. раздел 3).

### 3. ИОНОСФЕРНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ И ИОНОСФЕРНЫЕ ДРЕЙФЫ

Исследования неоднородной структуры ионосферы с помощью классического метода зондирования с Земли, а также путем «просвещивания» ее радиоизлучением внеземных источников, выполненные в 1950—1960 гг. (особенно в период Международного Геофизического Года), позволили получить богатый экспериментальный материал о дрейфах ионосферных неоднородностей и установить ряд важных для теории происхождения неоднородностей закономерностей. Вместе с тем, оставалось еще много нерешенных вопросов экспериментального и теоретического характера, которые определили дальнейшее развитие работ в этой области. Прежде всего, это касается проблем, связанных с определением конкретных характеристик неоднородностей, особенно мелкомасштабных (с размерами порядка или меньше нескольких километров).

Как известно, при исследовании неоднородной структуры ионосферы радиофизическими методами параметры неоднородностей в основном определяются из анализа дифракционной картины на поверхности

Земли [19]. Однако структура дифракционной картины существенно зависит как от соотношения между масштабом неоднородностей и размером зоны Френеля, так и от величины возмущений фазы волны в неоднородном слое. В случае зондирования ионосферы задача усложняется еще и тем, что при расчете флуктуаций волны в слое необходим корректный учет влияния областей ионосферы, расположенных вблизи уровня отражения радиоволн [20]. Пренебрежение этими обстоятельствами может привести к существенным ошибкам при определении параметров ионосферных неоднородностей. Таким образом, для определения основных параметров мелкомасштабных неоднородностей (спектр размеров, относительные флуктуации электронной концентрации) необходимы подробный анализ структуры дифракционной картины и проведение взаимно дополняющих друг друга экспериментов.

Поскольку размер зоны Френеля и величина возмущений фазы волны в слое являются функциями частоты, такие эксперименты могут опираться на измерения флуктуаций принимаемого сигнала на нескольких частотах. Кроме того, измерения флуктуаций сигнала на разных частотах дают возможность исследовать фокусирующие свойства более крупных неоднородностей ионосферы. При этом весьма перспективными представляются наблюдения за флуктуациями дискретных источников радиоизлучения на низких частотах ( $f < 30 \text{ M} \cdot \text{Гц}$ ), где особенно существенно оказывается влияние ионосферы. Использование относительно низких частот позволяет также получить сведения о слабых неоднородностях дневной ионосферы.

Одним из важных способов экспериментального исследования ионосферных неоднородностей являются измерения их высотного распределения. Эффективное решение этой задачи может быть осуществлено с помощью наблюдений за сигналами ИСЗ в пространственно разнесенных точках [21]. Ввиду большой скорости спутника и его конечной высоты скорость дрейфа дифракционной картины на Земле вдоль направления движения ИСЗ определяется (при известной кинематике движения спутника) высотой расположения неоднородностей  $z_n$ . Данный метод измерений высоты  $z_n$  позволяет, с одной стороны, выделить и исследовать неоднородности, расположенные выше максимума  $F2$ -слоя, т. е. в области высот, недоступных для изучения методом зондирования ионосферы с Земли, и, с другой стороны, более полно исследовать неоднородности, расположенные в нижней части  $F2$ -слоя ионосферы.

В свете сказанного большое значение приобретает дальнейшее развитие теории дифракции радиоволн на неоднородностях ионосферы, в частности, изучение корреляционных свойств случайного поля на разных частотах за рассеивающим слоем, исследование влияния области отражения на формирование случайного поля и др.

*Исследование ионосферных дрейфов методом вертикального зондирования.* Для изучения движений в  $E$ - и  $F$ -областях ионосферы использовался метод вертикального зондирования и пространственно разнесенный метод с малой базой; амплитуды отраженных «единичных» сигналов (обыкновенная или необыкновенная компонента) одновременно регистрировались в нескольких (трех, четырех и более) пунктах, удаленных друг от друга на расстояние  $\sim 100 - 200 \text{ м}$ . Присутствие в ионосфере мелкомасштабных неоднородностей ионизации с линейными размерами  $\sim 500 - 1000 \text{ м}$  являлось причиной того, что после отражения радиоволн от ионосферы на поверхности Земли возникала нерегулярная дифракционная картина. Ее движение относительно пунктов приема вызывало замедления амплитуд принимаемых сигналов  $R(x, y, t)$ . При определенных предположениях с помощью записей  $R(x, y, t)$  можно было вычислить скорость и направление движения дифракционных кар-

тии и определить характеристики движений мелкомасштабных ионосферных неоднородностей.

Систематические исследования движений в ионосфере проводились в НИРФИ с июля 1957 г. по январь 1960 г. в соответствии с программой МГГ—МГС. Аппаратура, методика наблюдений и способ обработки экспериментальных данных описаны в [22—25]. Результаты исследований, выполненных на станции Горький ( $\varphi = 56^{\circ}09'N$ ;  $\lambda = 44^{\circ}17'E$ ), опубликованы в [23—25] и заключаются в следующем.

1. Величины скоростей движений в *E*- и *F*-областях ионосферы составляли  $30 - 150 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Движения со скоростями  $\geq 150 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$  наблюдались редко и в основном в периоды геомагнитных возмущений.

2. Гистограммы скоростей движений в *F*-области, построенные для каждого сезона, оказались очень сходными. Однако значения средних скоростей движений зимой и весной были несколько больше, чем летом и осенью, и соответственно равнялись  $92 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $88 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $82 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $82 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Некоторое увеличение скорости движений в *F*-области в зимнее время года по сравнению с весной имело место и в 1955—1956 гг. [23]. Средняя величина скорости движений в *E*-области оказалась равной  $85 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ \*.

3. Анализ гистограмм направлений движений в *F*-области для двух периодов суток (00—07 часов, 18—23 часа; 08—17 часов) показал, что для обоих интервалов суток направления движения были распределены примерно равномерно\*\*.

4. Гистограммы направлений движений в *F*-области, построенные для каждого сезона, оказались подобными. Днем (11—14 часов) направления движений были распределены довольно равномерно. В вечерние, ночные и предутренние часы (19—23 часа, 00—06 часов) преобладали движения на запад ( $260 - 280^\circ$ ). В остальное время суток наблюдался значительный разброс в направлениях движений с некоторым преимуществом западных и восточных дрейфов.

5. В периоды ионосферно-магнитных возмущений скорости дрейфов в *E*-области увеличивались до  $200 - 250 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ , а в *F*-области они достигали  $300 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$  и более. С ростом *K*-индекса средняя скорость движений в *F*-области постепенно возрастала, тогда как в *E*-области при изменении *K*-индекса от 1 до 4 она оставалась постоянной и значительно возрастала только при  $K > 4$ .

*Некоторые результаты изучения ионосферных неоднородностей методом вертикального зондирования.* О свойствах ионосферных неоднородностей (размеры, форма, ориентация в пространстве) можно судить на основании изучения пространственно-временных характеристик дифракционных картин, которые возникают на поверхности земли при отражении радиоволн от нерегулярной ионосферы. Для этих целей амплитуды «единичных» сигналов  $R(x, y, t)$  (обыкновенная или необыкновенная компонента) одновременно регистрировались в 7 приемных антеннах, которые различным образом устанавливались на местности. Наименьшее расстояние между антеннами составляло 50 м, а наибольшее достигало 500—700 метров. Обстоятельства эксперимента и методика анализа записей замираний амплитуд  $R(x, y, t)$  описаны в работах

\* При изучении движений в *E*-области было получено мало данных, поэтому разделение их по сезонам не проводилось.

\*\* Здесь и ниже время  $45^\circ E$ .

[26–30] \*. Всего за период наблюдений (1959–1961 гг.) было получено около 250 серий записей  $R(x, y, t)$  при различной конфигурации антенных полей. Наблюдения проводились за  $F$ -областью ионосферы. Часть записей  $R(x, y, t)$  была использована для вычисления авто- и кросс-корреляционных функций  $\rho(\tau)$  и  $\rho(\xi, \eta, \tau)$ , что позволило оценить средние размеры неоднородностей и степень их анизотропии. При этом предполагалось, что линии равной корреляции  $\rho(\xi, \eta) = \rho_0$  представляли собой концентрические эллипсы. Детальное изучение записей  $R(x, y, t)$ , полученных в различное время суток и года, явилось основанием для следующих выводов.

1. Дифракционные картины, образующиеся при отражении радиоволн от  $F$ -области ионосферы, как правило, имели отчетливо выраженную анизотропную структуру. Линии характерных значений амплитуд таких картин довольно упорядоченно были ориентированы относительно направления С—Ю. Последнее обстоятельство указывает на то, что неоднородности ионизации в  $F$ -области вытянуты в направлениях, близких к магнитным силовым линиям. Степень анизотропии таких неоднородностей, определяемая величиной эксцентриситета эллипса равной корреляции  $\rho(\xi, \eta) = \rho_0$ , в среднем составляла 2–2,5.

2. Временные изменения амплитуд сигналов  $R(x, y, t)$  в антенах, удаленных друг от друга в направлении С—Ю на расстояние 240 м, были сходными. Коэффициенты взаимной корреляции между ними составляли 0,5–0,7. В таких случаях средние размеры ионосферных неоднородностей в этом направлении превышали 500 м (за размеры неоднородностей принималась величина удвоенного радиуса пространственной корреляции на уровне 0,5).

3. Средне-квадратичные значения углов рассеяния ( $\theta_0$ ) радиоволн, отраженных от  $F$ -области ионосферы при вертикальном зондировании, составляли 1–2°. Значения  $\theta_0$  определялись путем расчета с использованием коэффициента взаимной корреляции амплитуд сигналов в двух пространственно разнесенных точках [27].

4. Анализ сходства записей  $R(x, y, t)$ , полученных в антенах, удаленных друг от друга на расстояние 500–700 м в направлении В—З, показал, что в большинстве случаев дифракционные картины перемещались относительно пунктов наблюдения как целое, без каких-либо значительных изменений своей структуры в процессе движения\*\*. Это дает основание считать, что в  $F$ -области ионосферы вряд ли существуют турбулентные движения. Время переноса характерных деталей дифракционных картин между пунктами наблюдения составляло ~5–10 сек. Следовательно, «время жизни» мелкомасштабных неоднородностей в  $F$ -области в таких случаях было не меньше 10 сек.

5. Изучение структуры дифракционных картин и особенностей их движения привело к заключению, что в динамике мелкомасштабных неоднородностей имеется много общего с волнообразными процессами.

\* В работах [26–30] обращается внимание на то, что корреляционный метод обработки записей  $R(x, y, t)$  в том виде, как он используется при исследовании ионосферных дрейфов, не позволяет получить достоверные данные о направлении и скорости движений ионосферных неоднородностей, так как этот метод сконструирован формальным образом. Конкретные примеры соответствующей обработки экспериментальных записей  $R(x, y, t)$ , представленные в работах [28–30], наглядно иллюстрируют это обстоятельство. В частности, показано, что значения параметра  $V_c$ , определяемые в результате обработки записей  $R(x, y, t)$ , нельзя использовать для доказательства существования или отсутствия турбулентных движений в ионосфере, а также при оценках «времени жизни» ионосферных неоднородностей и выяснении роли диффузии как возможного механизма разрушения неоднородностей.

\*\* Восточно-западное расположение антенн позволяло изучать структуру дифракционных картин в направлении, близком к направлению их движения, поскольку над Горьким в  $F$ -области ионосферы преобладали восточно-западные дрейфы.

В этой связи следует отметить, что неоднородности в  $F$ -области в основном перемещались в направлениях, почти перпендикулярных к среднему направлению их вытянутости.

*Изучение неоднородностей радиоастрономическим методом и с помощью ИСЗ.* В 1959—1960 гг. в Горьком проводились измерения флюктуаций радиоизлучения источника Кассиопея-А на частотах 13; 18,6 и 25 МГц под малыми зенитными углами и интерферометрические наблюдения источника Лебедь-А на частоте 29,7 МГц под углами, близкими к горизонту. В 1963 г. определялись флюктуации интенсивности радиоизлучения Кассиопеи-А на шести фиксированных частотах (13; 18,3; 24,3; 30; 40,6; 54 МГц). В 1964 г. был осуществлен комплекс измерений флюктуаций интенсивности радиоизлучения Кассиопеи-А на частоте 25 МГц на трех пространственно разнесенных антенах.

Исследования неоднородной структуры ионосфера с помощью приема сигналов ИСЗ на три пространственно разнесенные антенны проводились с 1961 г. Принимались сигналы советских и американских спутников («Эксплорер-7», «Дискаверер-36», «Космос-1, 2», «Электрон-1, 3») на частоте  $f \approx 20$  МГц. Начиная с 1964 г., изучение неоднородностей электронной концентрации в ионосфере радиоастрономическим методом на частотах 13,25 и 40 МГц и с помощью наземного приема сигналов ИСЗ в разнесенных точках осуществлялось также в экспедиционном пункте в г. Мурманске. Кроме этого, в 1962—1964 гг. в Горьком и в Крыму, а в 1965—1967 гг. в Горьком и Мурманске с помощью измерений разности фаз сигналов когерентных частот бортовых передатчиков ИСЗ были проведены исследования крупномасштабных ионосферных неоднородностей. С марта 1967 г. одновременно с измерениями в Горьком и Мурманске произведена серия наблюдений за сигналами ИСЗ на частотах 20, 40 и 41 МГц в г. Ашхабаде.

Для приема флюктуаций радиоизлучения дискретных источников использовались многовибраторные синфазные [31] и ромбические [32] антенны. Прием сигналов ИСЗ осуществлялся на обычные петлевые вибраторы.

Ниже приводятся основные результаты этих исследований.

*Морфологические характеристики флюктуаций.* Наблюдения за источником Кассиопея на частотах 13; 18 и 25 МГц в 1959—1965 гг. показали, что на этих частотах на широте Горького флюктуации регистрируются в любое время суток. Уровень дневных флюктуаций увеличивается с понижением частоты. Для иллюстрации на рис. 6 приведены временные зависимости индекса флюктуаций на частоте 25 МГц для Горького (1962—1965 гг.) и для Мурманска (1964—1965 гг.). Легко видеть, что для Мурманска суточный ход флюктуаций выражен слабее, чем для Горького. Этот результат подтверждается измерениями амплитудных и фазовых флюктуаций сигналов ИСЗ, проведенными в Горьком и Мурманске в 1965 г. [12, 33], и наряду с результатами, полученными другими авторами (см. [34, 35]), свидетельствует об умень-

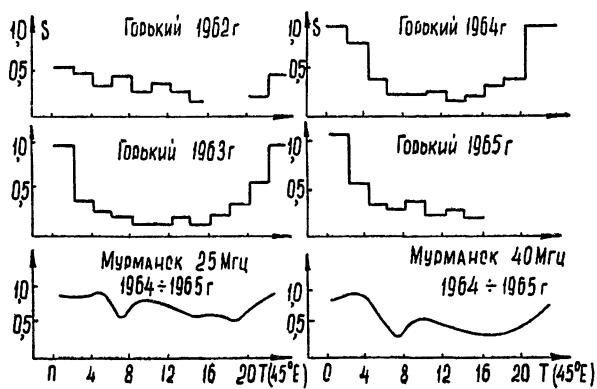


Рис. 6.

шении суточного хода флюктуаций при переходе от умеренных и высоким широтам.

Имеются различия в суточном ходе флюктуаций, вызванных неоднородностями разных масштабов. Например, флюктуации интенсивности [31] и фазы [22] радиосигналов, вызванные неоднородностями с размерами  $l \geq 50 \text{ км}$ , имели даже в Горьком примерно одинаковую интенсивность и частоту появления в дневные часы.

Уровень флюктуаций существенно увеличивается при переходе от умеренных к высоким широтам. Так, в 1964—1965 гг. индекс флюктуаций в Мурманске был больше, чем в Горьком, примерно в 2 раза в ночные и около 5 раз в дневные часы. О существенном широтном ходе дневных флюктуаций свидетельствуют результаты измерений амплитудных флюктуаций сигналов ИСЗ в Горьком, Мурманске в 1965 г. [33] и в Ашхабаде, Горьком, Мурманске в марте 1967 г. [36] (см. рис. 7). Довольно интересным, на наш взгляд, является наличие среднеширотного максимума флюктуаций на геомагнитных широтах  $\Phi \approx 48\text{--}52^\circ$ , который наблюдался в ночные и предутренние часы [36]. Значительным широтным вариациям подвержены также фазовые флюктуации, особенно флюктуации, вызванные фокусирующими неоднородностями с размером порядка 5—20 км [11, 12].

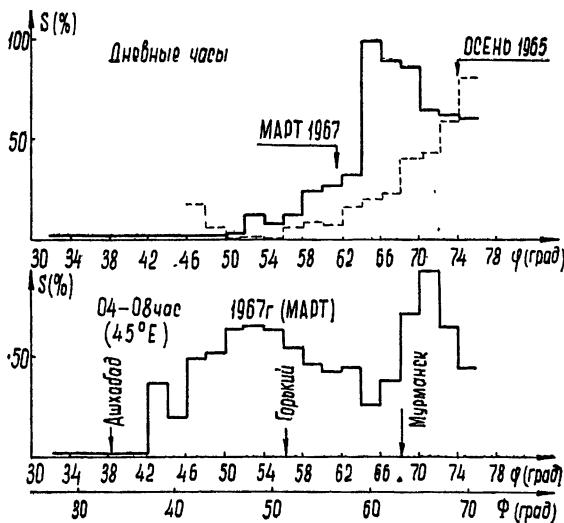


Рис. 7. Зависимость индекса флюктуаций  $S$  от широты подыоносферной точки на высоте  $z_h \approx 300 \text{ км}$ ;  $\varphi$  и  $\Phi$  — соответственно географическая и геомагнитная широты.

Флюктуации в среднем увеличиваются с ростом возмущений магнитного поля Земли, хотя в ряде случаев связь с магнитными возмущениями носит сложный характер [35]. Например, для Мурманска  $S(K_p > 20)/S(K_p < 10) \approx 1,6$  днем и соответственно 1,3 ночью\*. Скорость флюктуаций в среднем линейно растет с ростом величины вариаций горизонтальной составляющей магнитного поля  $\Delta H$  в вечерние и ночные часы (осенние наблюдения) и не зависит от  $\Delta H$  в утренние и дневные часы (весна) [39].

*Параметры ионосферных неоднородностей.* Для определения основных параметров ионосферных неоднородностей (высота, спектр размеров, флюктуации электронной концентрации) использовались результаты измерений флюктуаций сигналов ИСЗ на разнесенных антенах, а также данные о флюктуациях интенсивности дискретных источников (Кассиопея-А) на ряде фиксированных частот.

\*  $K_p$  — планетарный индекс возмущенности магнитного поля.

Изучение высотного распределения неоднородностей, проводившееся в 1961—1962 гг. и 1964—1965 гг. в Горьком и в 1965 г. в Мурманске [10, 33, 37—39], показало, что неоднородности ионосферы, вызывающие сцинтиляции радиозвезд и сигналов ИСЗ, расположены в  $F_2$ -слое ионосферы, и лишь небольшая часть сцинтиляций вызвана неоднородностями ионосферного  $E$ -слоя. В среднем неоднородности часто регистрируются в области толщиной 150—200 км, расположенной вблизи максимума  $F_2$ -слоя. Довольно часто неоднородности регистрируются в изолированных областях («patches»), вертикальный размер которых может быть меньше 100 км. Интересно отметить, что в периоды сильных геомагнитных возмущений, особенно в дневные часы, увеличивается вклад неоднородностей, расположенных на больших высотах ( $z_h > 300$  км). Это хорошо видно из рис. 8, на котором показаны высоты неоднородностей (Горький, Мурманск, 1965 г.) для различных периодов геомагнитной активности [33]. На рис. 9 приведены данные о частотной зависимости среднего квадрата флуктуаций интенсивности сигнала, которые сопоставляются с результатами статистической теории дифракции радиоволн [39—41]. Можно видеть, что результаты эксперимента хорошо согласуются с теоретическими расчетами для неоднородной среды с га-

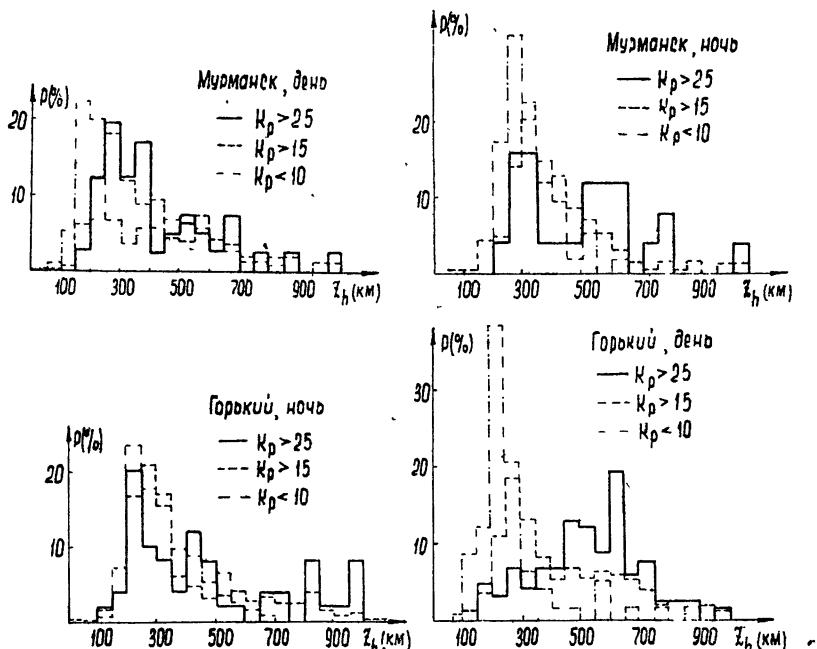


Рис. 8.

уссовой функцией корреляции и стандартным размером  $l \approx 1$  км. В ряде случаев, однако, экспериментальные данные свидетельствуют о наличии в ионосфере (особенно в периоды возмущений) широкого спектра мелкомасштабных неоднородностей (турбулентного характера). С другой стороны, наблюдаются ярко выраженные квазисинусоидальные неоднородности, характеризуемые одним масштабом. Измерения на многих частотах позволили также оценить размеры и концентрацию в более крупных ( $l \geq 5$  км), фокусирующих неоднородностях [42].

Для определения параметров крупномасштабных неоднородностей использовались результаты измерений флуктуаций разности фаз сигна-

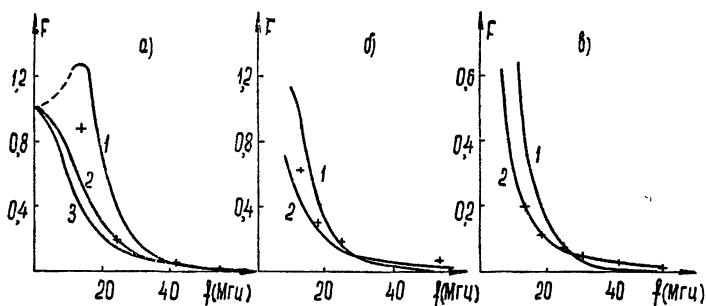


Рис. 9. Зависимость  $F = (\bar{I}^2 - \bar{I}'^2)/\bar{I}^2$  от рабочей частоты для 17/IX-63 г. (а), 29/X-63 г. (б) и 30/X-63 г. (в).

Крестиками обозначены экспериментальные значения  $F$ . Теоретические кривые на рис. 9а соответствуют: 1)  $l = 2 \text{ км}$ ,  $(\Delta S)_0^2 = 0,6$ ; 2)  $l = 1,2 \text{ км}$ ,  $(\Delta S)_0^2 = 0,13$ ; 3)  $l = 0,8 \text{ км}$ ,  $(\Delta S)_0^2 = 0,079$ . На рис. 9б кривая 1) соответствует  $l = 2 \text{ км}$ ,  $(\Delta S)_0^2 = 0,55$ , 2)  $l = 0,8 \text{ км}$ ,  $(\Delta S)_0^2 = 0,09$ ; на рис. 9в: 1)  $l = 2 \text{ км}$ ,  $(\Delta S)_0^2 = 0,14$ ; 2)  $l = 0,8 \text{ км}$ ,  $(\Delta S)_0^2 = 0,04$  (значения набега фазы в слое  $(\Delta S)_0^2$  соответствуют частоте 25 Мгц).

лов когерентных частот [8, 10, 12, 43], данные о фарадеевских федингах на разнесенных антенах [5], наблюдения за флуктуациями углов прихода радиоизлучения источника Лебедь-А [44], исследования флуктуаций интенсивности радиоизлучения дискретных источников на относительно низких частотах [31, 45]. По результатам этих измерений относительные флуктуации  $\Delta N_n/N_n$  полного столба электронов, вызванные неоднородностями с размерами порядка 100 — 200 км, составляли примерно  $(1 \div 5) \cdot 10^{-2}$ . В ночные часы значения  $\Delta N_n/N_n$  больше, чем днем. С приближением к зоне полярных сияний величины  $\Delta N_n/N_n$  возрастили. Крупномасштабные неоднородности иногда имели ярко выраженную квазипериодическую структуру [31, 43]. Интересно отметить, что, согласно [43], частота появления квазисинусоидальных крупномасштабных неоднородностей резко уменьшилась на  $\Phi \geq 64^\circ$ .

Характерные значения относительных флуктуаций концентрации  $\frac{\Delta N}{N}$

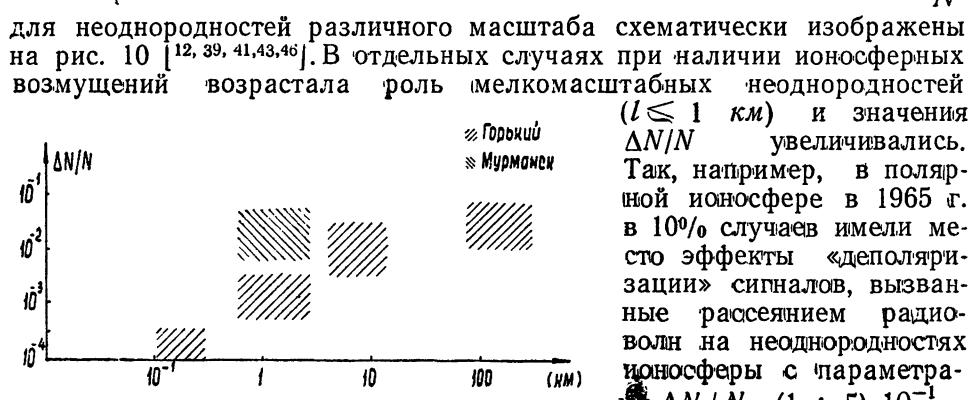


Рис. 10.

$(l \leq 1 \text{ км})$  и значения  $\Delta N/N$  увеличивались. Так, например, в полярной ионосфере в 1965 г. в 10% случаев имели место эффекты «деполяризации» сигналов, вызванные рассеянием радиоволн на неоднородностях ионосферы с параметрами  $\Delta N/N \sim (1 \div 5) \cdot 10^{-1}$ ,  $l \sim 1 \text{ км}$ .

#### 4. ИОНОСФЕРНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ РАДИОВОЛН И ЕГО СВЯЗЬ С СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТЬЮ

Исследования поглощения радиоволн в ионосфере, как известно, имеют большое значение для решения практических вопросов радиосвязи на волнах, отражающихся или проходящих через ионосферу. Вместе с тем, измерения величины поглощения радиоволн в ионосфере являются существенным источником информации о самой ионосфере и о происходящих в ней процессах.

Исследования ионосферного поглощения радиоволн производились в НИРФИ двумя методами — радиоастрономическим и методом импульсного зондирования. Наиболее обширные измерения проводились при помощи первого из этих методов в Горьком (с 1959 г.), а также во время экспедиций в Евпатории (зима 1961 г.), в экваториальных широтах (лето 1962 г.) и в зоне полярных сияний (Мурманск, 1964—1966 гг.). Импульсный метод применялся в Зименках в 1959, 1962 и 1965 гг. одновременно с радиоастрономическим, главным образом, в целях определения вклада различных слоев ионосферы в интегральное поглощение радиоволн, проходящих через ионосферу.

Радиоастрономические наблюдения осуществлялись, как правило, на нескольких фиксированных частотах, основными из которых были 9, 13, 18,6 и 25 Мгц. Антенные системы в большинстве случаев имели размеры диаграмм направленности  $\sim 25^\circ \times 35^\circ$  либо  $\sim 25^\circ \times 18^\circ$  по уровням половинной мощности. Приемно-регистрирующая аппаратура описана в [47]. Методика обработки результатов наблюдений была близкой к общепринятой (см., например, [48]). Величина поглощения по этой методике находилась из сравнения интенсивности  $I$  принимаемого сигнала с интенсивностью  $I_0$ , определенной для того же звездного времени при условии минимального поглощения радиоволн в ионосфере:

$$\Gamma = 10 \lg (I_0/I) (\text{дБ}).$$

Для определения  $I_0$ , как известно, продолжительность наблюдений должна быть порядка года. Поэтому в период сравнительно кратковременных экспедиций в Евпатории и в экваториальных широтах величина интегрального поглощения измерялась методом двух частот [49, 50]. Метод двух частот был использован также для предварительной обработки данных наблюдений 1959 г. в Зименках [51]\*.

*Регулярное поглощение радиоволн в ионосфере.* Радиоастрономические измерения величины поглощения одновременно на нескольких фиксированных частотах позволили установить, что в диапазоне частот от 6 Мгц и выше при нормальных условиях в ионосфере справедлив (в пределах ошибок измерений) закон обратной квадратичной зависимости поглощения от частоты [53]. Суточный ход  $\Gamma(t)$  поглощения космического радиоизлучения по данным наблюдений в Горьком во все сезоны года характеризовался монотонным увеличением поглощения до околовиденного максимума и последующим плавным спадом во второй половине дня [53]. В дневные часы суток наблюдалось соотношение  $\Gamma(t) \sim \cos^k \chi$ , где  $\chi$  — зенитный угол Солнца; значения показателя  $k$  равны в 1960—1965 гг. в среднем  $\sim 1,1$  для летних,  $\sim 1,05$  для равноденственных и  $\sim 0,7$  для зимних месяцев. Ночью, при критических частотах ионосферы  $f_0F2$ , меньших 6—7 Мгц, величина поглощения не

\* Необходимо напомнить, однако, что поглощение радиоволн в ионосфере определяется радиоастрономическим методом относительно некоторого минимального (ночного) уровня поглощения, хотя в принципе и существует возможность абсолютных его измерений [52]. Минимальныйочный уровень поглощения, по-видимому, весьма незначителен (не превышает нескольких десятых долей децибела в декаметровом диапазоне волн).

превышала нескольких десятых долей децибела. Величина полуденного поглощения зависела от времени года и степени активности Солнца. Сезонные и более долговременные изменения в величине поглощения показаны на рис. 11, где представлены медианные месячные значения полуденного поглощения на частоте  $13,2 \text{ МГц}$  с 1959 по 1965 гг.\*. Как видно из рис. 11, в 1961—1965 гг. поглощение было минимальным зимой, увеличиваясь в летние месяцы примерно в два раза. В 1959—1960 гг. имела место иная сезонная зависимость  $\Gamma(t)$ : максимум поглощения был зарегистрирован зимой, а минимум — летом. При переходе от 1959—1960 гг. к 1964—1965 гг. наблюдалось существенное понижение величины поглощения (в 2—3 раза для летних и в 4—5 раз для зимних месяцев года).

Полученные результаты были сопоставлены с данными измерений поглощения радиоволн импульсным методом на частоте  $2,2 \text{ МГц}$  и с теоретическими расчетами [54, 55]. В период сравнительно высокой активности Солнца (1959—1960 гг.) на результаты измерений поглощения

большое влияние оказывал слой  $F2$  ионосферы. В летние месяцы 1959—1960 гг., когда критические частоты ионосферы были порядка  $7—9 \text{ МГц}$ , вклад  $F$ -области был соизмерим с вкладом нижележащих

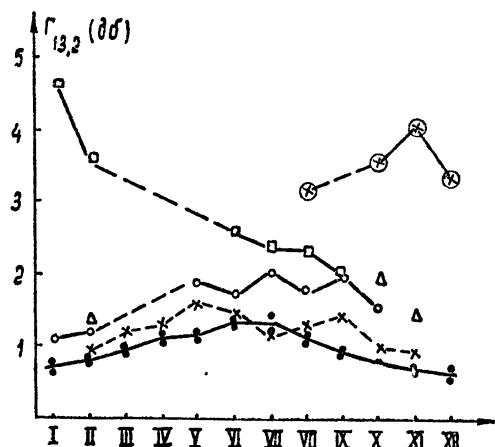


Рис. 11. Среднемесячные значения величины поглощения на частоте  $13,2 \text{ МГц}$  в 1959—1965 гг.

\* (в кружке)—1959 г.; □—1960 г.; Δ—1961 г.; ○—1962 г.; ×—1963 г.; ●—1964—1965 гг.). Римскими цифрами обозначены порядковые номера месяцев года.

слоев ионосферы, а осенью 1959 г. и зимой 1959—1960 гг., когда значения  $f_0F2$  достигали  $12—13 \text{ МГц}$ , на слой  $F2$  приходилось более половины всего интегрального поглощения радиоволн, проходящих через ионосферу. Повышение поглощения в слое  $F2$  при переходе от лета к зиме в 1959 г. не только скомпенсировало сезонное уменьшение  $\Gamma(t)$  в слоях  $D$  и  $E$ , но и вызвало инверсию в годовом ходе интегрального поглощения радиоволн.

В последующие годы критические частоты  $f_0F2$  снизились до  $5—7 \text{ МГц}$ , и в дневные часы поглощение проходящих через ионосферу радиоволн определялось в основном нижними слоями ионосферы\*\* [53, 56].

\* В 1959 г. и зимой 1960 г. поглощение определялось на частоте  $18,6 \text{ МГц}$ . Для построения рис. 11 результаты наблюдений пересчитаны на частоту  $13,2 \text{ МГц}$  по формуле  $\Gamma_{13,2} = \Gamma_{18,6} \cdot (13,6/18,6)^2$ .

\*\* Так, в октябре 1965 г. на слой  $F2$  приходилось лишь около 25% интегрального поглощения. Расчет величины поглощения для октября 1965 г. проводился при помощи электронно-счетной машины. Профиль электронной концентрации  $N(h)$  находился по данным высотно-частотных характеристик и по результатам наблюдений сигналов ИСЗ на когерентных частотах. Для слоя  $F2$  было рассмотрено несколько моделей распределения электронной температуры с высотой. Зависимость эффективного числа соударений электронов с нейтральными молекулами в нижней ионосфере была взята из литературных данных. Результаты измерений поглощения радиоастрономическим и импульсным методами оказались в удовлетворительном согласии с расчетными данными [55].

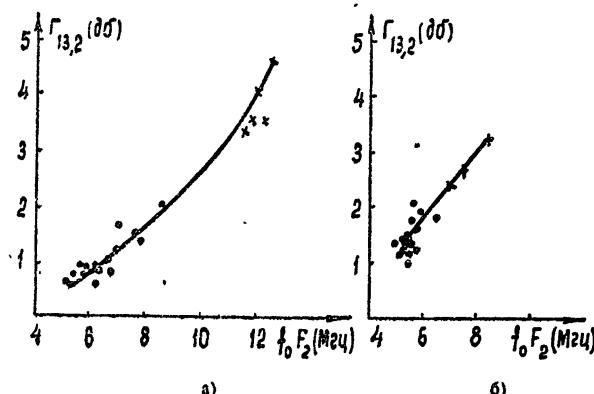


Рис. 12.  
— × — 1959—60 гг., — · — 1961—65 гг.

В целом зависимость медианных значений месячных величин поглощения на частоте 13,2 Мгц от соответствующих значений  $f_0F_2$  показана на рис. 12а для зимних и на рис. 12б для летних месяцев 1959—1966 гг. [53]. Значительное влияние слоя  $F_2$  на результаты измерений поглощения космического радиоизлучения было отмечено и во время экваториальной экспедиции летом 1962 г. [50]. В частности, зависимость величины поглощения от широты имела два максимума по обе стороны от экватора, соответствующих широтному распределению  $f_0F_2$ . Результаты долговременных изменений  $\Gamma(t)$  довольно хорошо коррелируют с такими параметрами солнечной активности, как относительные числа солнечных пятен и поток радиоизлучения Солнца в сантиметровом диапазоне волн. В частности, для летних месяцев наблюдалась приблизительно линейная зависимость между медианными величинами полуденного поглощения и сглаженными числами солнечных пятен. Данные наблюдений указывают также на наличие 27-дневной повторяемости периодов повышенного поглощения радиоволн [53].

В работе [49] приводятся результаты измерений поглощения космического радиоизлучения в ионосфере во время солнечного затмения 15 февраля 1961 г. Уменьшение поглощения  $\Delta\Gamma$  на частоте 13 Мгц в Евпатории, где фаза затмения была максимальной, составило около 0,48 дБ (приблизительно 30% от значения полного поглощения). В Горьком эффект затмения был несколько меньше (0,35 дБ). Аналогичные данные были получены во время солнечного затмения 20 мая 1966 г. в Горьком; изменение величины поглощения было равно 0,5 дБ на частоте 13 Мгц при полном поглощении  $\sim 1,5$  дБ.

Все результаты, о которых речь шла выше, относились к вертикальному прохождению радиоволн через ионосферу. Относительные измерения интенсивности радиоизлучения дискретного источника Лебедь-А при больших зенитных углах, проведенные в 1959—1960 гг. на частоте 29,7 Мгц, показали, что для пересчета величины поглощения при наклонном прохождении радиоволн через ионосферу можно пользоваться формулами геометрико-оптического приближения [32].

*Аномальное поглощение радиоволн в ионосфере.* Во время измерений в Горьком в 1959—1963 гг. было зарегистрировано около сотни внезапных вспышек ионосферного поглощения радиоволн (эффект Деллинжера) [57]\*. Случаи аномального поглощения радиоволн почти всегда совпадали с возникновением хромосферных солнечных вспышек. При этом интервал времени между появлением хромосферных вспышек и на-

\* В 1965 году была отмечена лишь одна небольшая вспышка поглощения, в 1964 г. вспышки поглощения вообще отсутствовали.

чалом ионосферных возмущений для большинства событий не превышал  $\pm 3$  минут со средним значением, близким к нулю. Промежуток времени между моментами максимумов этих двух событий в среднем был близок к двум минутам. Для большого количества вспышек удалось определить частотную зависимость поглощения радиоволн в диапазоне 6—25 Мгц [58]. Почти во всех случаях она соответствовала закону обратной квадратичной зависимости от частоты.

Распределение числа возмущений по максимальным величинам поглощения  $\Gamma_{\max}$  показывает весьма быстрое уменьшение появляемости событий с ростом  $\Gamma_{\max}$  (см. рис. 13; заштрихованная часть на рис. 13 построена по данным наблюдений 1961—1963 гг.). Наиболее часто вспышки поглощения регистрировались в околополуденные часы. Продолжительность возмущений варьировалась в больших пределах — от нескольких минут до нескольких часов. Для ряда вспышек был произведен анализ временного хода  $\Gamma(t)$  в период восстановления ионосферы в невозмущенное состояние. Оказалось, что значения  $\alpha N_0$  ( $\alpha$  — эффективный коэффициент рекомбинации, а  $N_0$  — электронная концентрация на высотах слоя аномальной ионизации, отвечающая условиям невозмущенной ионосферы) изменялись в пределах  $(1,5—8) \times$

$\times 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$  со средним значением  $\alpha N_0 = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ . Во многих случаях (в первую очередь для наиболее интенсивных вспышек) дополнительное ионизирующее излучение продолжало существовать и после максимума вспышки поглощения, замедляя процесс восстановления к нормальным условиям.

В Горьком во время мировых магнитных бурь было отмечено также несколько случаев аномального поглощения аврорального вида [59—62]. Более обширные сведения об этом виде ионосферных возмущений были получены в 1964—1966 гг. по наблюдениям в зоне полярных сияний в Мурманске ( $\Phi' \approx 64^\circ \text{N}$ )<sup>\*</sup> [63—65]. Регистрация аврорального поглощения в Мурманске производилась одновременно на частотах 9, 13, 25 и 40 Мгц. На рис. 14 показано распределение появляемости  $W(\Gamma > \Gamma_i)$  аномального поглощения на частоте 9 Мгц с величиной поглощения  $\Gamma$ , большей заданных значений  $\Gamma_i$ . Серия кривых I относится ко всем дням наблюдений, кривые II построены по результатам измерений в «сильно» возмущенные дни (когда средняя за сутки величина поглощения на частоте 9 Мгц была более 2 дБ), кривые III соответствуют наблюдениям в дни со средней величиной поглощения, меньшей 2 дБ. Крестиками обозначены данные  $W(\Gamma > \Gamma_i)$  для равноденственных периодов года, прямоугольники относятся к зиме 1964—1965 гг., точки и кружки — к летним месяцам 1964 и 1965 гг.

Как видно из рис. 14, появляемость аномального поглощения радиоволн в период минимума солнечной активности (1964—1965 гг.) была довольно высокой, а в «сильно» возмущенные дни (составлявшие около 15% всего времени наблюдений) аномальная ионизация ионосферы происходила почти непрерывно. Дни, когда возмущения пол-

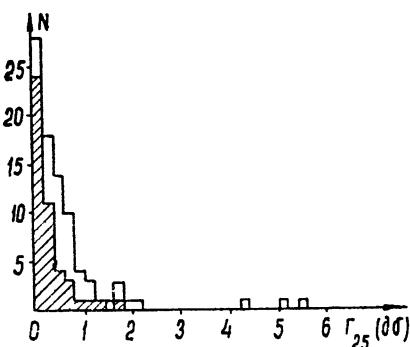


Рис. 13.

\* Исследования аномального поглощения радиоволн в зоне полярных сияний проводились совместно с Полярным геофизическим институтом Кольского филиала АН СССР.

Как видно из рис. 14, появляемость аномального поглощения радиоволн в период минимума солнечной активности (1964—1965 гг.) была довольно высокой, а в «сильно» возмущенные дни (составлявшие около 15% всего времени наблюдений) аномальная ионизация ионосферы происходила почти непрерывно. Дни, когда возмущения пол-

\* Исследования аномального поглощения радиоволн в зоне полярных сияний проводились совместно с Полярным геофизическим институтом Кольского филиала АН СССР.

нностью отсутствовали, встречались очень редко. Наиболее часто аномальное поглощение регистрировалось в дневные часы суток. Имелась, однако, определенная тенденция к смещению суточного максимума частоты появления в сторону утренних иочных часов по мере увеличения интенсивности возмущений. Наименьшие значения  $W$  приходились на вечерние часы суток. В суточном ходе появления аномального поглощения имелись некоторые сезонные изменения, наиболее ярко выраженные для «сильно» возмущенных дней.

Одновременные наблюдения на четырех частотах в Мурманске позволили получить сведения о частотной зависимости аврорального поглощения радиоволн [64]. В большинстве случаев ( $\sim 70\%$ ) значения показателя частотной зависимости  $n$  уменьшались от  $n \sim 2$  на частотах  $25-40$  Мгц до  $n \sim 0,8-1,8$  на частотах  $9-13$  Мгц. В  $20\%$  всех измерений соблюдался закон обратной квадратичной зависимости, а в  $10\%$  значения  $n$  были меньше 2 на всех частотах и сравнительно мало изменялись в каждом конкретном случае при переходе от высоких к низким частотам.

Зависимости  $\Gamma(\omega)$  со значениями показателя  $n < 2$  на всех частотах могут быть объяснены появлением аномальной ионизации в нижней части слоя  $D$ , где эффективное число соударений электронов с нейтральными молекулами  $v$  соизмеримо с рабочими частотами  $\omega$ . Очевидно также, что закон  $\Gamma(\omega) \sim \omega^{-2}$  соответствует возникновению ионизации на достаточно больших высотах, где  $v^2 \ll \omega^2$ . Случай, когда показатель  $n$  существенно изменяется при переходе от высоких к низким частотам (от  $n \sim 2$  до  $n \sim 0,8-1,5$ ) не могут, как показали расчеты, реализоваться для однородной в горизонтальном направлении модели слоя с дополнительной ионизацией. Такого рода зависимости  $\Gamma(\omega)$ , однако, появляются при наличии неоднородной структуры слоя в горизонтальном направлении. Более «плавные» изменения  $n$  от  $\sim 2$  до  $\sim 1,6-1,8$  могли быть следствием как неоднородной структуры слоя, так и влияния эффективного числа соударений на высотах, где  $\omega \sim v^*$ . Результаты измерений показывают, что имеются некоторые отличия в суточном и сезонном ходе появления различных типов частотной зависимости.

В 1966 г. 7 июля и 2 сентября в Мурманске были зарегистрированы две вспышки аномального поглощения третьего вида (поглощение в полярной шапке, ППШ). Вторая из них (сентябрьская) была более интенсивной: величина поглощения на частоте 9 Мгц в дневные часы была более 20 дБ, тогда как 7 июля она не превышала 5 дБ. Имелась, по-видимому, заметная разница и в энергетическом спектре частиц, ответственных за ионизацию, поскольку показатель частотной зависимости  $\Gamma(\omega) \propto \omega^{-n}$  для июльской вспышки был равен  $n \sim 1,4$ , тогда как для сентябрьской вспышки он был близок к  $n = 1,1$ . Появление корпускулярного потока произошло в обоих случаях спустя час—полтора после начала эффекта Деллинжера, что заметно на рис. 15, где представле-

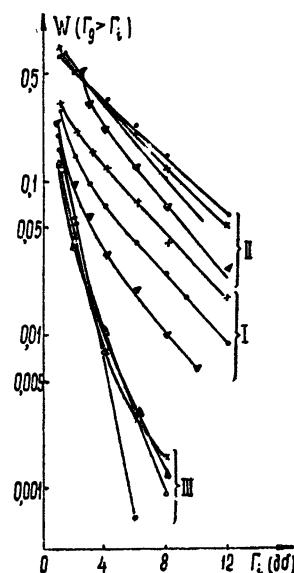


Рис. 14.

\* Наличие горизонтальных неоднородностей слоя аномальной ионизации было отмечено во многих случаях во время наблюдений в Лопарской с антеннами, имеющими разные диаграммы направленности [65].

временной ход дополнительного поглощения  $\Gamma(t)$  в Горьком на частоте 13 МГц (кривая 1) и в Мурманске на частоте 9 МГц (кривая 2). (В Горьком ППШ не наблюдалось.) В течение первого часа после начала эффекта Деллинжера зависимости  $\Gamma(t)$  в обоих пунктах практически совпадали. Позднее в Лопарской величина поглощения стала больше, что свидетельствовало, по всей вероятности, о появлении дополнительной ионизации; вызванной корпускулярным потоком. В обоих случаях аномальное поглощение радиоволн существовало несколько дней подряд.

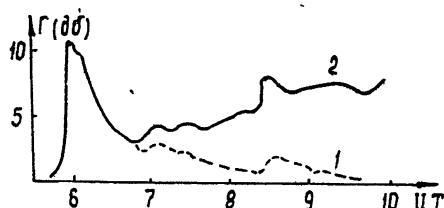


Рис. 15.

Информации о распределении электронной концентрации  $N(h)$  в нижней ионосфере. В работах [66, 67] была решена задача о нахождении  $N(h)$  по результатам измерений  $\Gamma(\omega)$  радиоастрономическим методом на ряде фиксированных частот. Практически предложенный метод применим к определению профиля  $N(h)$  аномальной ионизации (однородной в горизонтальном направлении) на высотах порядка 40–60 км. В работе [67] приведены примеры нахождения  $N(h)$ .

Приведенные в обзоре результаты ионосферных исследований НИРФИ, по мнению авторов, позволяют получить наглядное представление о важнейших характеристиках ионосферы в период последнего полуцикла солнечной активности. За недостатком места, к сожалению, не представляется возможным сопоставление приведенных в обзоре данных с аналогичными данными, полученными другими авторами как в СССР, так и за рубежом. Вместе с тем, многие результаты являются, по-видимому, оригинальными в том смысле, что аналогичные данные до последнего времени не были опубликованы в литературе. Это относится, в частности, к систематическим измерениям интегральной электронной концентрации в полярной ионосфере, нахождению высоты неоднородностей электронной концентрации на умеренных и полярных широтах, определению зависимости относительных флуктуаций электронной концентрации в ионосферных неоднородностях от размера неоднородностей и т. д. Измерения интегрального ионосферного поглощения радиоволн в НИРФИ на средних широтах являются, вероятно, наиболее надежными как в отношении точности измерений, так и в отношении их систематичности и полноты.

Публикуемые в обзоре результаты ионосферных исследований получены большим коллективом сотрудников, которым авторы выражают свою признательность за плодотворное участие в проводившихся работах.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. В. Гришкевич, Н. А. Митяков, Г. Г. Никифорова, Полные солнечные затмения 25 февраля 1962 г. и 30 июня 1954 г., изд. АН СССР, 347 (1958).
- В. А. Васин, Л. В. Гришкевич, Геомагнетизм и аэрономия, 1, № 6, 949 (1961).
- Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 6, 949 (1960).
- Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 5, 858 (1963).

5. Л. М. Ерухимов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 556 (1964).
6. Э. Е. Митякова, Геомагнетизм и аэрономия, 4, № 4, 667 (1964).
7. V. R. Eshleman, O. K. Garriott, R. L. Leadabrand, A. M. Petersen, J. Geophys. Res., 71, № 13, 3325 (1966).
8. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 5, 816 (1963).
9. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Космические исследования, 4, № 2, 249 (1966).
10. Л. М. Ерухимов, Н. А. Митяков, Э. Е. Мигякова, сб. Исследование космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 147.
11. Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 7 (1967).
12. Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, В. А. Череповицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1070 (1967).
13. Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, В. А. Череповицкий, Доклад на Все-союзной конференции МГСС, 1967.
14. О. К. Гарриот, Распределение электронной концентрации в ионосфере и экзосфере, изд. Мир, М., 1964, стр. 257.
15. W. J. Ross, J. Geophys. Res., 65, 2601 (1960).
16. J. V. Evans, G. N. Taylor, Proc. Roy. Soc., A-263, 189 (1961).
17. G. N. Taylor, Proc. Roy. Soc., A-279, 497 (1964).
18. F. H. Niberg, W. J. Ross, J. Geophys. Res., 71, 2243 (1966).
19. A. Hewish, Proc. Roy. Soc., 214A, 494 (1952).
20. Н. Г. Денисов, Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 4, 695 (1966).
21. K. C. Yeh, C. W. Swenson, J. Geophys. Res., 64, 2281 (1959).
22. Л. В. Гришкевич, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 3, 13 (1958).
23. Л. В. Гришкевич, Н. А. Митяков, Тр. СФТИ, вып. 37, 185 (1959).
24. Л. В. Гришкевич, В. Д. Гусев, Ю. В. Кушнеревский, С. Ф. Миркотан, сб. Исследования ионосферы и метеоров, изд. АН СССР, № 2, 19 (1960).
25. Л. В. Гришкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 608 (1961).
26. Л. В. Гришкевич, сб. Ионосферные исследования, изд. АН СССР, № 9, 54 (1961).
27. Л. В. Гришкевич, Геомагнетизм и аэрономия, 2, № 5, 909 (1962).
28. Л. В. Гришкевич, сб. Ионосферные исследования, изд. Наука, № 13, 129 (1964).
29. Л. В. Гришкевич, сб. докладов научного симпозиума по ионосфере, изд. Ростовского университета, 14 (1961).
30. Л. В. Гришкевич, Диссертация, Горьковский университет, 1963.
31. Г. М. Артемьева, В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов, М. А. Иткина, Ю. С. Коробков, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 5, 836 (1963).
32. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 6, 994 (1961).
33. Н. Н. Баковина, Л. М. Ерухимов, сб. Ионосферные исследования (в печати).
34. Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 5, 839 (1962).
35. G. G. Getmantsev, L. M. Eroukhimov, Annals of the IGSY. (in press).
36. Л. М. Ерухимов, Ю. С. Коробков, О. И. Максименко, Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, В. П. Урядов, Геомагнетизм и аэрономия 8, № 1, 1968.
37. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 2, № 4, 638 (1962).
38. Л. М. Ерухимов, Космические исследования, 3, 584 (1965).
39. Л. М. Ерухимов, Диссертация, Горьковский университет, 1965.
40. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 4, № 1, 75 (1964).
41. Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по верхней атмосфере, Алма-Ата, 1965; Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
42. Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 4, 693 (1965).
43. Э. Е. Митякова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
44. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
45. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 2, 400 (1966).
46. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 5, 733 (1960).
47. В. В. Беликович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
48. Инструкция по обработке записей интенсивности космического радиоизлучения, под ред. В. М. Дриапского, АНИИ, Л., 1965.

49. Г. М. Артемьева, В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов, Ю. С. Коробков, Геомагнетизм и аэрономия, 2, № 1, 58 (1962).
50. Ю. С. Коробков, В. В. Писарева, Геомагнетизм и аэрономия, 5, 173 (1965).
51. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 6, 957 (1960).
52. Е. А. Бенедиктов, Радиотехника и электроника, 4, № 7, 1201 (1959).
53. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
54. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 1, 44 (1961).
55. Г. П. Комраков, Л. А. Скребкова, А. В. Толмачева, сб. Ионосферные исследования (в печати).
56. Ю. С. Коробков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 186 (1965).
57. Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
58. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 5, 940 (1966).
59. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 2, 333 (1960); 4, № 4, 763 (1961).
60. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, А. В. Толмачева, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 4, 698 (1966).
61. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 399 (1966).
62. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, А. В. Толмачева, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 3, 600 (1966).
63. В. В. Беликович, А. А. Белобородова, Е. А. Бенедиктов, Г. А. Петрова, З. М. Пятси, З. Ц. Рапопорт, А. В. Толмачева, сб. Ионосферные исследования (в печати).
64. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Г. А. Петрова, З. Ц. Рапопорт, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
65. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, З. Ц. Рапопорт, сб. Комплексные исследования полярной ионосфера (в печати).
66. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Л. В. Родыгин, Геомагнетизм и аэрономия, 4, 788 (1964).
67. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 мая 1967 г.

УДК 523.165·523.85

## ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ДИАПАЗОНЕ 10—207 Мгц НА ВЫСОКИХ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ШИРОТАХ

*Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. А. Сазонов, А. Ф. Тараков*

Дается описание антенн, аппаратуры и методики измерений частотного спектра, выполненных авторами в диапазоне частот 40—207 Мгц. Согласно проведенным измерениям средний спектральный индекс радиоизлучения в диапазоне частот 40—207 Мгц  $\alpha = 0,57 \pm 0,04$ . Сопоставление результатов измерений с результатами других авторов показывает, что с ростом частоты от 10 до 207 Мгц спектральный индекс распределенного космического радиоизлучения на высоких галактических широтах меняется сравнительно мало.

Частотный спектр распределенного космического радиоизлучения является, как известно, одной из основных его характеристик. Измерениям спектра посвящено большое количество работ, однако до последнего времени результаты различных измерений имели большой разброс, что затрудняло их использование для теоретических исследований. Ниже перечислены некоторые основные факторы, лимитирующие точность абсолютных измерений интенсивности космического радиоизлучения и определяющие, следовательно, точность измерений спектрального индекса радиоизлучения.

1. При использовании в измерениях относительно сложных антенн с достаточно узкой диаграммой направленности трудно с необходимой точностью определить потери в антенах.

2. В случае применения антенн, обладающих заметным уровнем излучения в боковые лепестки, возникает необходимость учитывать влияние на результаты измерений радиоизлучения Земли, попадающего в боковые лепестки.

3. Диодные шумовые генераторы, используемые для калибровки приемной аппаратуры, как правило, необходимо в свою очередь калибровать по излучению эталонной согласованной с приемником нагрузки («черного тела»). Подобная прямая калибровка возможна, однако, лишь в диапазоне относительно низких шумовых температур ( $T_{ш} \leqslant 700^{\circ}\text{K}$ ).

Измерения спектра космического радиоизлучения, результаты которых приведены ниже, были выполнены в НИРФИ в 1965—66 гг. Методика измерений была такова, что она позволяла свести к минимуму ошибки, связанные с перечисленными выше факторами, влияющими на точность измерений. В качестве приемных антенн использовались полуволновые диполи, подвешенные на высоте 0,25  $\lambda$  над металлическими экранами. При этом боковые лепестки отсутствовали, а КПД антенн был близок к единице. Разумеется, что в данном случае определялось значение спектрального индекса, усредненное по значительной области небосвода, но, как известно, угловые вариации спектрального индекса в области высоких галактических широт незначительны.

Диодные шумовые генераторы, применяющиеся для калибровки приемников, в свою очередь сами калибровались по излучению плечевых сопротивлений специальной конструкции, нагревавшихся до температуры порядка  $400^{\circ}\text{C}$ . При измерениях эффективных температур небосвода на относительно низких частотах применялись делители мощности измерявшегося космического радиоизлучения.

В самое последнее время было опубликовано несколько работ, также посвященных измерению частотного спектра распределенного космического радиоизлучения [1-4]. Методика измерений в этих работах весьма близка к той, которая использовалась авторами данной статьи. Сопоставление результатов измерений, выполненных в НИРФИ, с данными работ [1-4] позволяет сделать достаточно полные выводы о спектре распределенного космического радиоизлучения в диапазоне  $10-207\text{ M}\text{g}\text{c}$  на высоких галактических широтах.

### 1. АНТЕННЫ И РАДИОПРИЕМНАЯ АППАРАТУРА

В процессе измерения спектра космического радиоизлучения на частотах  $40, 95, 151$  и  $207\text{ M}\text{g}\text{c}$  использовались простые полуволновые горизонтальные дипольные антенны, установленные на высоте примерно  $0,25\lambda$  над квадратными металлическими экранами с размерами  $2\lambda \times 2\lambda$ . Приемные диполи были несколько укорочены по сравнению с  $\lambda/2$  и длины их равнялись примерно  $0,45\lambda$  при диаметрах диполей около  $0,0037\lambda$ . Металлические экраны были собраны из параллельных диполям проводов с расстоянием между проводами  $0,013\lambda$ . Все приемные диполи были ориентированы в северо-южном направлении. Поскольку входы радиоприемников были несимметричными, для перехода от симметричных диполей к несимметричному фидеру были использованы четвертьволновые коаксиальные стаканы. Для уменьшения потерь сами диполи и четвертьволновые стаканы были посеребрены.

Приемные антенны были относительно широкополосными. В пределах полос пропускания радиоприемников по высокой частоте ( $\Delta f/f$  для всех приемников составляло около  $10^{-2}$ ) КСВ антенн был не больше 1,05. Параметрами регулировки антенн для достижения возможно более малых КСВ были высота расположения диполей над экранами (варьировавшаяся в процессе настройки в пределах  $0,005\lambda$ ), а также длина диполя (изменявшаяся примерно на  $0,003\lambda$ ). Для измерения интенсивностей радиоизлучения на всех четырех фиксированных частотах от  $40$  до  $207\text{ M}\text{g}\text{c}$  использовались модуляционные измерители сигналов сплошного спектра, собранные по одной и той же блок-схеме, изображенной на рис. 1.

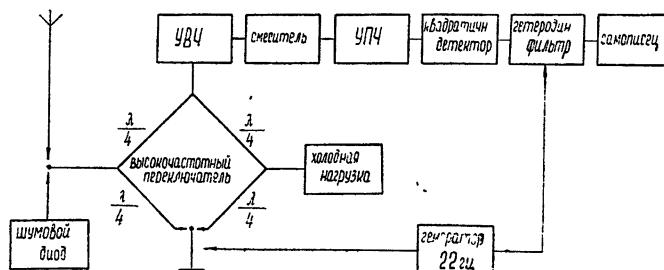


Рис. 1.

В целях уменьшения влияния интерференционной нестабильности на результаты измерений входы всех приемников (усилителей высокой

частоты) имели сопротивление 75 ом, равное волновому сопротивлению соединительных кабелей, импедансу антенн и шумовых генераторов. Коэффициент шума радиоприемников был при этом около пяти на всех частотах. Как уже отмечалось выше, ширины полос пропускания приемников были значительно меньше ширин полос пропускания антенно-фидерного тракта, так что особенности формы частотной характеристики антенно-фидерного тракта в процессе измерений можно было не учитывать.

Все коаксиальные соединительные кабели (антенный, к шумовому генератору и к 75-омной нагрузке) были одинаковой длины (около 20 м) и находились в одинаковых температурных условиях. Шумовой генератор, использовавшийся для калибровки радиоприемников, был собран на ламповом диоде 2Д2С, вмонтированном в специально разработанную высокочастотную коаксиальную головку. Диодный шумовой генератор использовался как вторичный источник шумового напряжения для калибровки аппаратуры в процессе измерений. В свою очередь он периодически калибровался по шумам пленочного 75-омного сопротивления, собранного на стеклянной основе и заключенного в специальную высокочастотную коаксиальную головку, помещающую в термостат, температура которого могла повышаться до 450°C. Эта конструкция использовалась, следовательно, в качестве первичного шумового эталона. В ней был предусмотрен максимум возможного, чтобы свести к минимуму отвод тепла из термостата и тем самым уменьшить ошибки, связанные с неравномерностью нагрева сопротивления.

Постоянная времени установок в процессе измерений была около 3 сек. Дополнительное усреднение записей, приводившее к фактическому росту результирующей постоянной времени, производилось при обработке записей.

## 2. МЕТОДИКА И ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения спектра космического радиоизлучения производились в октябре—ноябре 1965 г. В целях контроля измерения были повторены вновь в октябре—ноябре 1966 г. Методика измерений заключалась в непрерывной записи уровня космического радиоизлучения на указанных выше фиксированных частотах и периодической калибровке радиоприемной аппаратуры по сигналам диодного шумового генератора.

Каждые сутки на частотах 207 и 151 Мгц измерения проводились, начиная с 5 час 30 мин и до 12 час 30 мин звездного времени, а на частотах 95 и 40 Мгц — с 8 час 30 мин до 13 час 30 мин звездного времени. Минимум радиоизлучения наблюдался на всех частотах приблизительно в одно и то же звездное время — 11 час 30 мин. Этому звездному времени соответствуют галактические координаты  $l_{\text{II}} = 136^{\circ}$  и  $b_{\text{II}} = +59^{\circ}$ .

В процессе измерения уровня радиоизлучения каждые 30 мин радиоприемники калибровались по сигналам диодного шумового генератора. При этом шумовой генератор включался на вход переключателя радиоприемника вместо антенны, а в другом плече переключателя постоянно находилась 75-омная согласованная нагрузка, имевшая комнатную температуру. На частотах 40, 95 Мгц измеряемые эффективные температуры небосвода даже в области минимума радиоизлучения были больше шумовой (комнатной) температуры «холодного» шумового генератора, так что в процессе калибровки уровень шумов генератора доводился непосредственно до уровня космического радиоизлучения.

На частоте 207 Мгц всегда и на частоте 151 Мгц в области минимума радиоизлучения измеряемые эффективные температуры были

меньше комнатной температуры. Вследствие этого при определении уровня измеряемого радиоизлучения с помощью шумового генератора фаза разностного сигнала генератора и «холодной» 75-омной нагрузки, включенной в высокочастотный переключатель, отличалась на  $180^\circ$  от фазы разностного сигнала 75-омной нагрузки и измеряемого радиоизлучения. В данной ситуации нужно было быть уверенным в том, что переключатель и гетеродинный фильтр установки полностью симметричны по отношению к фазе низкочастотной модуляции измеряемых разностных сигналов. Требующаяся симметризация проверялась и устанавливалась неоднократно в процессе проведения измерений.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, диодный шумовой генератор периодически калибровался по шумам первичного шумового эталона, конструкция которого была описана выше. При этом эталонное сопротивление нагревалось до  $300^\circ\text{C}$  и его шумы сравнивались с показаниями диодного шумового генератора. Сравнение производилось на всех частотах, на которых велись измерения. В процессе калибровки было установлено, что шумовой сигнал диодного генератора всегда был больше расчетного значения и расхождения между шумами генератора и эталонного сопротивления определяются коэффициентами  $40 \text{ M}\text{Гц} - 1,00$ ;  $95 \text{ M}\text{Гц} - 1,01$ ;  $151 \text{ M}\text{Гц} - 1,03$ ;  $207 \text{ M}\text{Гц} - 1,07$ .

При проведении абсолютных измерений по изложенной выше методике необходимо, естественно, обращать большое внимание на достижение равенства импедансов антенны, шумового генератора и эквивалентной нагрузки, включаемых на вход измерителя. При подготовке эксперимента все перечисленные выше элементы были тщательно проверены путем измерения коэффициента стоячей волны в устройствах, в которых они служили нагрузками (КСВ для всех перечисленных элементов не превышал 1,05). Кроме того, в процессе подготовки к измерениям производилась прямая экспериментальная проверка отсутствия различных паразитных эффектов, которые могли бы быть обусловлены неравенством импедансов нагрузок, генераторов и антенн.

При проведении измерений было обращено большое внимание на измерение температур эквивалентной нагрузки и нагрузки диодного шумового генератора. Кроме того, эквивалентная нагрузка и нагрузка генератора были размещены в одном и том же держателе, так что их температуры в процессе измерений были всегда практически одинаковы. Переходя к оценкам точности измерений спектрального индекса, рассмотрим прежде всего систематические ошибки измерений.

1) Коррекции амплитудной и частотной характеристики диодного шумового генератора по шумам теплового эталона и применению на частоте  $40 \text{ M}\text{Гц}$  делителя мощности принимаемого сигнала производились с погрешностью  $\Delta T/T$ , не превышающей  $\pm 2\%$ . В эту двухпроцентную погрешность входят также ошибки, связанные с неточностью регистрации уровней сигналов по показаниям выходных приборов (самописцев) приемных установок, обусловленной, в частности, несимметрией переключателя и балансного смесителя, и систематическая ошибка отсчета анодного тока диодного шумового генератора..

2) При определении значений эффективных температур небосвода на различных фиксированных частотах в них вводились поправки, связанные с учетом поглощения измеряемого космического радиоизлучения в дипольной антенне и симметрирующем четвертьвольновом стакане ( $\sim 1\%$ ) [5] и «просачиванием» радиоизлучения через проволочный антенный отражатель (около  $0,3\%$ ). При этом предполагалось, что конечность размеров экрана не вносит заметных ошибок, что согласуется

с утверждениями работ [2, 3]\*. Несмотря на то, что систематические ошибки в определении уровня радиоизлучения, связанные с учетом поглощения радиоизлучения в антenne и отражателе, как мы видим, вообще говоря, малы, вместе с тем, точно учесть их крайне трудно. По существу учет этих погрешностей может быть произведен с ошибкой, которая может оказаться порядка величины самой погрешности. Таким образом, можно считать, что результатирующая неучтенная погрешность в определении  $\Delta T/T$ , связанная с неидеальностью использовавшейся антennes, равна примерно  $\pm 1\%$ .

3) Учет поглощения космического радиоизлучения в ионосфере может дать, согласно проделанным оценкам, заметный эффект лишь на частоте 40  $M\Gamma$ , поскольку к тому же измерения в 1965 и 1966 гг. произошли в ночные и утренние часы, когда ионосферное поглощение минимально. Максимальное поглощение в эти часы на частоте 40  $M\Gamma$  для применявшейся в измерениях дипольной антennes с широкой диаграммой направленности не должно превышать 2%, а в среднем оно должно быть в 1,5—2 раза меньше [6]. Вследствие этого измеренные значения уровня космического радиоизлучения были увеличены на 1%, а неучтенная погрешность в определении  $\Delta T/T$  на частоте 40  $M\Gamma$  вряд ли превышает 0,5%.

4) Произведенный авторами анализ систематических погрешностей, обусловленных другими факторами (различием в фидерах, идущих к антenne и шумовому генератору, появлением реактивной составляющей во входном сопротивлении антennes на краях полосы пропускания радиоприемных устройств и т. д.), показывает, что они пренебрежимо малы и их можно не учитывать при оценке точности определения спектрального индекса.

Случайные ошибки измерений были обусловлены погрешностями отсчета анодного тока диодного шумового генератора, неточным учетом разницы температур «холодной» нагрузки диодного генератора и 75-омной нагрузки-эквивалента, погрешностями отсчета уровня сигнала на шкале самописца, влиянием погодных условий на результаты измерений, проявлявшихся особенно заметно на наиболее высокой частоте 207  $M\Gamma$ , и т. д. Точная теоретическая оценка всех этих случайных погрешностей связана с большими трудностями и к тому же вряд ли необходима в условиях многократных измерений.

Построение гистограмм частоты повторения различных значений спектральных индексов, определявшихся из сравнения измеренных значений интенсивностей радиоизлучения на двух соседних частотах, показало, что они описываются гладкой колоколообразной кривой, близкой к нормальному закону распределения случайных величин. Стандартное отклонение от среднего (наиболее вероятного) значения  $\alpha$  по измерениям, например, на частотах 151 и 95  $M\Gamma$  равно 0,015. То же самое значение стандарта получается и при измерениях на частотах 40—95  $M\Gamma$ . Несколько большее значение стандарта — 0,04 получается при определении  $\alpha$  по данным измерений на частотах 151 и 207  $M\Gamma$ . Поскольку измерения  $\alpha$  на разных частотах производились многократно, а стандартное случайное отклонение от его среднего значения достаточно мало, можно считать, что при нахождении  $\alpha$  по измерениям на частотах 151—95 и 95—40  $M\Gamma$  случайные ошибки при нахождении среднего значения  $\alpha$  можно практически не учитывать. При определении

\* В процессе проведения описываемых экспериментов ставился также прямой опыт, когда размеры экрана были значительно увеличены. Увеличение размеров экрана практически не сказалось на величине уровня регистрируемого радиоизлучения и величине входного сопротивления вибратора (КСВ на входе вибратора резко зависел от высоты расположения вибратора над экраном).

ний же  $\alpha$  на частотах 151—207 Мгц среднее значение  $\alpha$  из-за случайных ошибок определено с погрешностью  $\pm 0,005$ .

Резюмируя все сказанное выше относительно точности измерения значений эффективных температур небосвода в процессе описываемых измерений, следует считать, что суммарная систематическая погрешность определения эффективных температур должна быть около (3—3,5%). Что же касается случайных ошибок измерений эффективных температур, то они, как было только что показано, из-за усреднения вследствие большого количества проведенных измерений не вносят заметной ошибки при определении  $\alpha$ , и поэтому их практически можно не учитывать.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В приводимой ниже таблице даны средние значения минимальных эффективных температур небосвода на соответствующих частотах, отвечающих звездному времени 11 час 30 мин и галактическим координатам  $l_H = 136^\circ$  и  $b_H = +59^\circ$ .

Таблица 1

Частота (Мгц)	40	95	151	207
Эффективная температура (град К)	$8480 \pm 300$	$942 \pm 30$	$284 \pm 9$	$125 \pm 4$

Как уже отмечалось выше, измерения на частотах 151 и 207 Мгц проводились ежесуточно примерно в течение семи часов, причем за время наблюдения вследствие вращения небосвода эффективная температура изменялась приблизительно на 20%. Более наглядное представление об изменениях эффективной температуры за период наблюдений дает приведенный на рис. 2 график, на котором по оси абсцисс отложены значения эффективной температуры на частоте 207 Мгц, а по оси ординат — значения температур, отвечающие одним и тем же периодам времени, на частоте 151 Мгц.

Как видно из графика, экспериментальная зависимость достаточно хорошо аппроксимируется прямой линией, что свидетельствует об отсутствии значительных угловых вариаций спектрального индекса при перемещении приемной диаграммы направленности по небосводу в течение времени наблюдения. Аналогичные зависимости могут быть построены и для любой другой пары частот, на которых проводились измерения. Эти зависимости вполне ана-

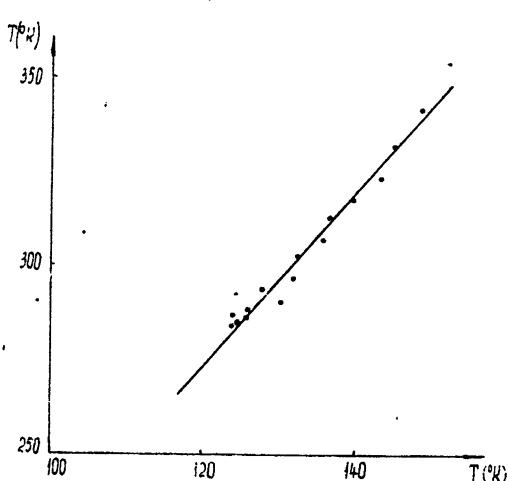


Рис. 2.

логичны графику, приведенному на графике рис. 2, к сожалению, слишком мал для того, чтобы им можно было воспользоваться для разделения галак-

тической и метагалактической составляющих радиоизлучения по методу, предложенному в [7]. Отметим все же, что, если продолжить на рис. 2 прямую в сторону малых значений эффективных температур, то она проходит примерно через начало координат. Таким образом, представленная на рис. 2 зависимость скорее всего свидетельствует об отсутствии значительной по величине изотропной компоненты радиоизлучения.

На рис. 3 по данным об эффективных температурах, приведенных в таблице и пересчитанных в значения интенсивности распределенного космического радиоизлучения, в логарифмическом масштабе построен частотный спектр космического радиоизлучения. На рисунке вертикальными черточками отмечены пределы, характеризующие точность измерений.

Как видно из рис. 3, наклон частотного спектра и, следовательно, характеризующий этот наклон спектральный индекс приблизительно одинаковы во всем интервале частот от 40 до 207 Мгц. Если пренебречь вообще изменением  $\alpha$  в этом диапазоне частот, то по графику или таблице легко определить, что  $\alpha = 0,57$ , а погрешность этого значения  $\delta\alpha \pm 0,04$ .

Вместе с тем имеется, вероятно, некоторая тенденция роста спектрального индекса при переходе от низких частот к высоким. Так, например, если с помощью графика рис. 3 найти значение спектрального индекса на частотах в районе 40 Мгц, он оказывается равным 0,54, в то время как на частотах вблизи 200 Мгц спектральный индекс равен 0,62. Подобные изменения спектрального индекса не выходят за пределы погрешности измерений, но, по всей вероятности, отражают истинную тенденцию уменьшения спектрального индекса по мере перехода от относительно высоких частот УКВ диапазона к частотам относительно низким.

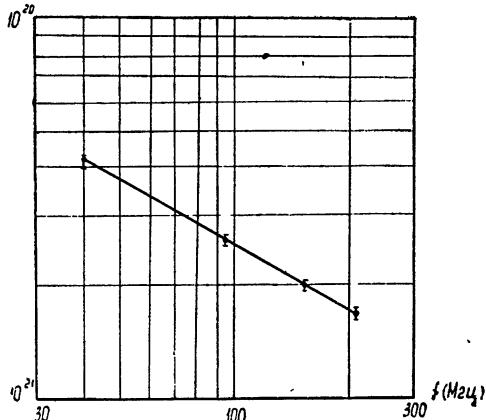


Рис. 3.

#### 4. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ АВТОРОВ. ВЫВОДЫ

Представляется интересным сравнить результаты, полученные в этой работе, с результатами других авторов, полученными в последние годы. Ю. С. Коробковым в НИРФИ в 1964 г. частотный спектр космического радиоизлучения был измерен в диапазоне 40—6,3 Мгц в области Млечного Пути, центр которой имел координаты  $l_{II} = 98,5^\circ$ ,  $b_{II} = -5,3^\circ$  [1]. Непосредственное точное сопоставление эффективных температур, полученных в [1], со значениями, полученными в настоящей работе, не представляется возможным, так как измерения проводились с помощью антенн разной конструкции и относятся к разным участкам небосвода. Что же касается спектральных индексов интенсивности радиоизлучения, то, согласно работе Ю. С. Коробкова,  $\alpha = 0,5 \pm 0,2$  на частоте 40 Мгц, что совпадает с результатами настоящей работы. При уменьшении частоты,

согласно [1], спектральный индекс плавно уменьшается до  $\alpha = 0,4$  на  $f = 18 \text{ M}\mu\text{s}$  и  $\alpha = 0,2$  на  $f = 13 \text{ M}\mu\text{s}^*$ .

В недавно опубликованной работе Андрю [3] измерения спектра производились в диапазоне частот от 10 до  $38 \text{ M}\mu\text{s}$ . Измерения относятся к области высоких галактических широт северной галактической полусфера и выполнялись с помощью простых дипольных антенн, аналогичных по конструкции антеннам, применявшимся в настоящей работе. Для диапазона  $38-10 \text{ M}\mu\text{s}$  Андрю на основании своих измерений дает спектральный индекс  $\alpha = 0,43 \pm 0,03$ . Комбинируя данные об интенсивностях радиоизлучения, полученные им на частотах  $38-10 \text{ M}\mu\text{s}$ , с данными Партона [4], Андрю утверждает, что в широком диапазоне частот  $10-178 \text{ M}\mu\text{s}$  в области высоких галактических широт северной галактической полусфера  $\alpha = 0,43 \pm 0,03$ , причем  $\alpha$  слегка увеличивается с ростом частоты и несколько уменьшается на относительно низких частотах.

По данным [2] на высоких галактических широтах в южной галактической полусфере в диапазоне частот от 14,1 до  $85 \text{ M}\mu\text{s}$  спектральный индекс интенсивности радиоизлучения меняется от  $0,51 (+0,15-0,05)$  на высоких частотах до  $0,3 \pm 0,2$  на низких частотах. Измерения в [2] проводились с помощью простых дипольных антенн, аналогичных использованным в настоящей работе.

Партон в работе [4] подвергает ревизии результаты измерений Тартла и др. [7], согласно которым спектральный индекс в северной галактической полусфере в интервале частот от 40 до  $178 \text{ M}\mu\text{s}$  резко меняется, увеличиваясь с ростом частоты от нуля до 0,9. Вводя поправки на частотную характеристику диодного шумового генератора, применявшегося в [7] для калибровки аппаратуры, Партон приходит к заключению о том, что на частотах в диапазоне  $13-100 \text{ M}\mu\text{s}$  спектральный индекс приблизительно постоянен и равен  $0,38 \pm 0,05$  и возрастает до  $\alpha \approx 0,9$  на частоте около  $400 \text{ M}\mu\text{s}$ . В резком противоречии с результатами Партона и результатами настоящей работы находятся данные работы [8], согласно которым в северной галактической полусфере в диапазоне частот  $10-30 \text{ M}\mu\text{s}$   $\alpha \approx (0-0,28)$ , в то время как на частотах  $30-50 \text{ M}\mu\text{s}$   $\alpha \approx (0,6-0,77)$ .

Несмотря на имеющийся значительный разброс значений спектральных индексов, измеренных разными авторами, на основе опубликованных данных и данных, полученных в настоящей работе, можно, как нам представляется, сделать достаточно конкретный вывод о характере частотного спектра распределенного космического радиоизлучения в области относительно высоких галактических широт.

В широком диапазоне частот приблизительно от 10 до  $207 \text{ M}\mu\text{s}$  спектральный индекс  $\alpha$  меняется слабо и в диапазоне частот  $40-207 \text{ M}\mu\text{s}$   $\alpha \approx 0,57 \pm 0,04$ . На более низких частотах ( $f \leq 10 \text{ M}\mu\text{s}$ )  $\alpha$ ,

\* Авторы настоящей работы провели в начале 1966 г. предварительные измерения интенсивностей космического радиоизлучения на частотах 18 и  $25 \text{ M}\mu\text{s}$  на горизонтальную дипольную antennу в области высоких галактических широт и получили значение спектрального индекса  $\alpha = 0,6 \pm 0,2$ . Подчеркнем еще раз, что эти измерения носили предварительный характер и точность их относительно невелика.

Е. А. Бенедиков любезно предоставил авторам неопубликованные экспериментальные кривые относительного изменения уровня распределенного космического радиоизлучения на различных фиксированных частотах декаметрового диапазона, обусловленного перемещением небосвода относительно вертикальной диаграммы направленности приемных антенн, использованных для измерений спектра Ю. С. Коробковым. С помощью этих кривых авторы трансформировали результаты измерений Ю. С. Коробкова в область высоких галактических широт  $\alpha = +59$  и для диапазона частот  $9-40 \text{ M}\mu\text{s}$  получили спектральный индекс  $\alpha = 0,6 \pm 0,2$ . Несмотря на относительно малую точность измерений  $\alpha$  в декаметровом диапазоне, эти измерения, во всяком случае, свидетельствуют о том, что на декаметровых волнах  $\alpha \geq 0,4$ .

вероятно, несколько меньше, но заведомо  $\alpha > 0,4^*$ . Это общее заключение хорошо согласуется, в частности, с результатами более ранних измерений спектра космического радиоизлучения, выполненных Эйджи и Смитом [9] и Балдином [10].

С точки зрения дальнейших измерений частотного спектра распределенного космического радиоизлучения на относительно высоких галактических широтах наибольший интерес по мнению авторов представляют измерения относительно малых угловых вариаций спектрального индекса и измерения спектрального индекса в диапазоне дециметровых волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Коробков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 5, 982 (1964).
2. K. W. Yates and R. Wielebinski, Aust. J. Phys., 19, 389 (1966).
3. B. H. Andrew, Mon. Not. R. Astr. Soc., 132, 79 (1966).
4. C. R. Pighton, Mon. Not. R. Astr. Soc., 133, 463 (1966).
5. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 2, 257 (1960).
6. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 1, 44 (1961).
7. A. J. Turtle, J. F. Pugh, S. Kenderdine, I. I. K. Pauliny-Toth, Mon. Not. R. Astr. Soc., 124, 297 (1962).
8. R. Parthasarathy and G. M. Lerfeld, Mon. Not. R. Astr. Soc., 129, 395 (1965).
9. R. Adgie and F. Smith, Observatory, 76, 181 (1956).
10. J. E. Baldwin, Report on the International Conference on Cosmic Rays, Japan, 1961.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
12 января 1967 г.

#### FREQUENCY SPECTRUM OF COSMIC RADIOEMISSION IN 10—207 MHz RANGE AT HIGH GALACTIC LATITUDES

G. G. Getmantsev, V. S. Karavanov, Yu. A. Sazonov, A. F. Tarasov

There is given a description of antennas, apparatus and methods of measurement of the frequency spectrum which was made by the authors in the frequency range of 40—207 MHz. According to the measurements made, the average spectral index of the radioemission at 40—207 MHz is  $\alpha = 0.57 \pm 0.04$ . Comparison with the results obtained by the other authors shows that at the high galactic latitudes the spectral index of distributed cosmic radiation with the growth of frequency from 10 to 207 MHz varies comparatively small.

\* Следует, впрочем, отметить, что в работах [2—4] речь идет об  $\alpha$  для галактического радиоизлучения. В настоящей же работе измерялся спектральный индекс полного радиоизлучения.

УДК 551.593.12

## МЕРЦАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ТРОПОСФЕРЕ

Л. Н. Демьяненко, К. С. Станкевич, О. Н. Шипуля

В течение года изучались тропосферные мерцания при заходах и восходах дискретных источников Лебедя-А, Тельца-А и Ориона на длине волны  $\lambda = 30 \text{ см}$ . Получены зависимости индекса и скоростей мерцания от зенитного угла и их сезонные вариации. Из сопоставления кривой индекса мерцаний с функцией вида  $z(\sec\phi)^{1/2}$  определена высота слоя с неоднородностями, которая оказалась равной  $10 \text{ км}$  для летнего периода и  $3 \text{ км}$  — для зимнего.

Во время приема радиоизлучения внеземных источников на больших зенитных углах ( $\phi > 85^\circ$ ) наблюдается явление мерцания, которое, по всей вероятности, связано с прохождением радиоволн через слой тропосферных неоднородностей нетурбулентного характера [1]. Известно, что мерцания этого типа не зависят от длины волны (в пределах сантиметрового и дециметрового диапазонов), показывая достаточно высокую корреляцию пиков и нулей на сильно разнесенных волнах (например, на частотах  $2980 \text{ МГц}$  и  $1200 \text{ МГц}$  [2]); установлена в общих чертах зависимость скоростей и индексов мерцаний от зенитного угла. Однако имеющихся данных совершенно недостаточно для составления общей картины явления, к тому же они часто приводят к противоречивым замечаниям.

К числу таких запутанных вопросов относится высота слоя, на которой находятся неоднородности, вызывающие мерцания:  $1 \text{ км}$  [2],  $10 \text{ км}$  [3] и  $100 \text{ км}$  [4].

Сезонные характеристики мерцаний исследовались в [5] с антенной, имевшей ширину диаграммы  $1,7^\circ$  на частоте  $915 \text{ МГц}$ . Наиболее интенсивные мерцания на низких углах (порядка  $1^\circ$ ) в этой работе не изучались.

Настоящая работа предпринята с целью дальнейшего накопления экспериментального материала для выяснения сезонных вариаций индекса мерцаний и скоростей. В течение года по несколько дней каждого месяца на длине волны  $\lambda = 30 \text{ см}$  проводились наблюдения мерцаний при заходах и восходах дискретных источников Лебедь-А, Телец-А и Орион на высотах от  $0^\circ 20'$  до  $6^\circ$ . Измерения проводились с антенной, имевшей ширину диаграммы направленности по уровню половинной мощности около  $40'$ , в качестве радиометра использовался измеритель малых шумов типа П5-9 с чувствительностью около  $1^\circ\text{К}$  при постоянной времени  $1 \text{ сек}$ . С этой же постоянной времени проводились наблюдения. С целью выяснения зависимости эффекта мерцаний от ширины диаграммы некоторые измерения были выполнены с шириной диаграммы  $50'$ . При определении высотных зависимостей мерцаний источник, как правило, сопровождался; в качестве контрольных измерений пользовались также прохождениями источника через неподвижную диаграмму.

При обработке результатов измерений применялась принятая в литературе методика [2]. Амплитудные характеристики описывались индексом мерцания  $f = (A_{\max} - A_{\min})/(A_{\max} + A_{\min})$ , где  $A_{\max}$  и  $A_{\min}$  ампли-

туды регистрируемого сигнала в соседних максимуме и минимуме. Типичный вид графика для индекса мерцаний источника Телец-А приведен на рис. 1. Другой характеристикой являлся период мерцаний, опре-

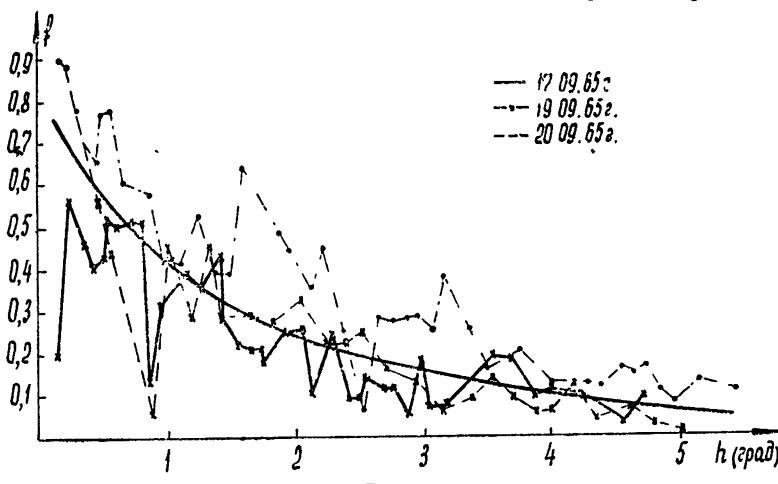


Рис. 1.

деляемый как время между двумя соседними минимумами, или скорость мерцаний — величина, обратная периоду. Зависимость периода мерцания от высоты представлена на графике рис. 2, на котором нанесены средние периоды мерцаний источника Лебедь-А за декабрь, январь и апрель. Период мерцаний в интервале  $0^{\circ}30' - 1^{\circ}$  в среднем составляет около 3 минут и уменьшается с ростом высоты до 30—40 сек на высоте  $4-5^{\circ}$ .

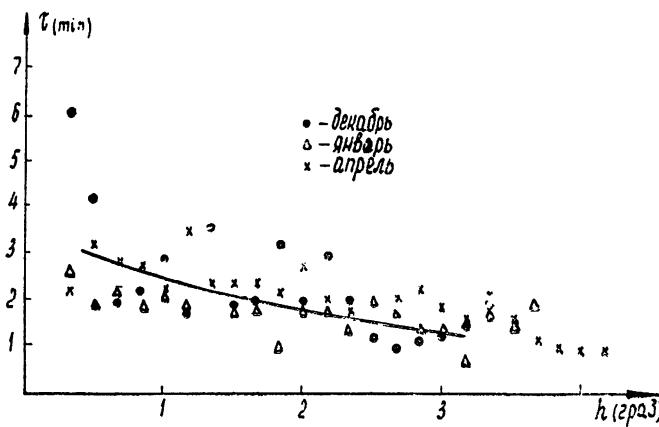


Рис. 2.

При годичных наблюдениях источника Лебедь-А получена зависимость индекса мерцаний от времени года. Было обнаружено увеличение мерцаний примерно в 1,5 раза в летние месяцы. На рис. 3 нанесены средние месячные индексы для углов места  $0^{\circ}30'$  и  $1^{\circ}$ , которые иллюстрируют сезонный ход мерцаний. Средние месячные периоды мерцаний для этих же углов представлены на рис. 4; они не обнаруживают сезонных вариаций. Вышеприведенные сезонные данные эксперимента не совпадают с выводами [5], где отмечается, что зимой флюктуации в 3 ра-

за быстрее, чем летом и индекс мерцаний имеет два максимума зимой и летом.

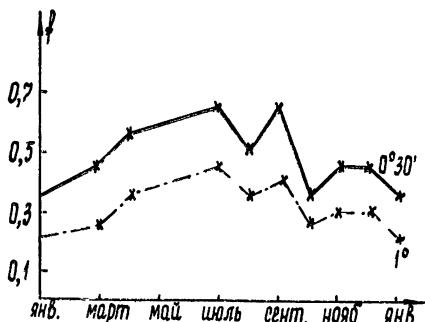


Рис. 3.

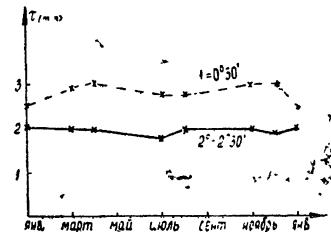


Рис. 4.

Измерения мерцаний на малых углах были также проведены с антенной, имевшей ширину диаграммы  $50'$ . При этом индекс мерцаний сохранился таким же, как приведено выше, а средний уровень сигнала определялся соответствующей эффективной площадью антенны. В [1] отмечалось, что неоднородности в тропосфере представляют собой тонкие слои с размерами порядка нескольких сотен метров, которые действуют, как собирательные линзы, фокусируя поток от источника на антенну. Из приведенного выше эксперимента следует, что фокус таких линз много больше расстояния до антennы. Поэтому, пользуясь оптической терминологией, можно сказать, что антenna перехватывает сходящийся пучок пропорционально своей площади, а не эффективной площади неоднородности, как это имело бы место в случае фокусировки на антенну.

Как было отмечено выше, весьма большая неопределенность существует в оценке высот слоя, вызывающего мерцания. Поэтому весьма важно, используя данные о сезонном изменении индекса мерцаний, определить высоты слоев и их зависимость от времени года. На рис. 5 представлены средние графики индексов мерцаний для летнего (верхняя кривая) и зимнего (нижняя кривая) сезонов. На этих же графиках отложена зависимость  $z(\sec \varphi)^{1/2}$ , где  $z$  — наклонная дальность из точки наблюдения до мерцающего слоя,  $\varphi$  — зенитный угол. Наилучшее совпадение экспериментальных и вычисленных кривых получается при высоте неоднородностей  $h = 10 \text{ км}$  в летний период и  $h = 3 \text{ км}$  в зимний.

Индекс мерцаний зависит также от угловых размеров дискретных источников: так при наблюдении радиоизлучения Луны на низких углах мерцания полностью отсутствуют и максимальны для источника Лебедь-А. Индекс мерцания источника Телец-А на 20—30% меньше, чем у Лебедя. Этим обстоятельством можно воспользоваться для обнаружения ярких деталей на протяженных дискретных источниках. Такая задача существует для Крабовидной туманности. Во время покрытия ее Луной на частоте 38 Мгц была обнаружена весьма яркая деталь, которую не удалось выделить на частотах дециметрового и сантиметрового диапазонов, хотя некоторые данные свидетельствовали о ее существовании [6]. С целью выявления этой детали были сделаны сравнительные измерения индексов мерцаний Крабовидной туманности и туманности Ориона, центральная часть которой представляет собой источник с угловыми размерами, близкими к Крабовидной туманности. Графики индексов

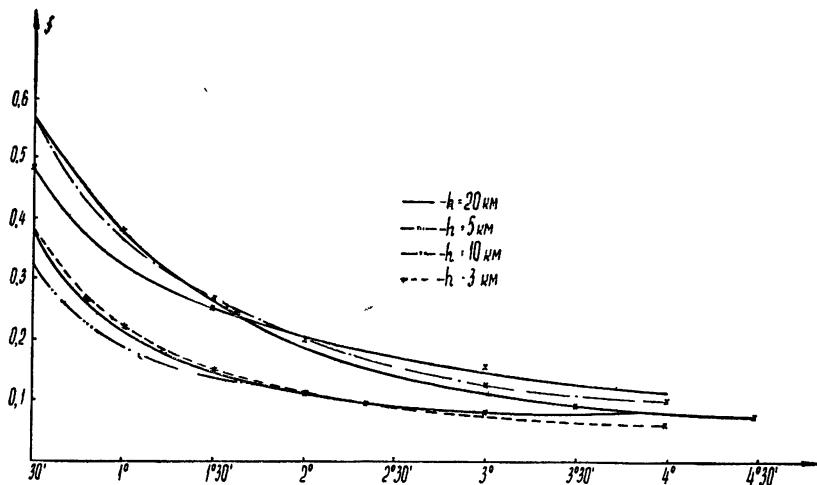


Рис. 5.

мерцаний представлены на рис. 6. Из них видно, что мерцания источника Телец-А несколько больше, чем у Ориона. При равенстве угловых

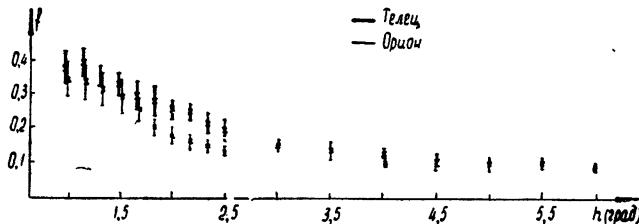


Рис. 6.

размеров источников различие в мерцаниях можно объяснить наличием в Крабовидной туманности точечного источника, дающего поток, составляющий 4—5 % от потока всей туманности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Aarons, Radio astronomical and satellite studies of the atmosphere, North-Holland publishing Company-Amsterdam, 1963.
2. J. P. Castelli, J. Aarons H. M. Silverman, J. Atm. Terr. Phys., **26**, № 12, 1198 (1964).
3. I. Kazes, J. L. Steinberg, C. R. Acad. Sci., Paris, **245**, 782 (1957).
4. H. J. A. Chivers, R. D. Davies, J. Atm. and Terr. Phys., **24**, № 261, 580 (1962).
5. H. C. Ko, Proc. IRE, **48**, 1871 (1960).
6. В. П. Ласточкин, Э. Б. Лукин, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Астрон. ж., **42**, 705 (1965).

## SCINTILLATION OF DISCRETE SOURCES IN TROPOSPHERE.

*L. N. Dem'yanenko, K. S. Stankevich, O. N. Shipoulya*

Troposphere scintillations at setting and rising the discrete sources Cygnus-A, Taurus-A, Orion were observed at the wavelength  $\lambda = 30$  cm during the year. The dependences of the index and velocity of scintillations on the zenith angle have been obtained, as well as their seasonal variations. The height of the layer with irregularities, which appeared to be equal to 10 km for summer period and 3 km for the winter one, was established from the comparison of the scintillation index curve with the function  $z(\sec \varphi)^{1/2}$ .

---

УДК 621.371.166

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ДЕЦИМЕТРОВЫХ И САНТИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В ГРУНТЕ

*Ю. И. Лещанский, Г. Н. Лебедева*

Экспериментально найдена зависимость поглощения радиоволн в грунте от влажности и частоты. Показано, что в диапазоне  $\lambda = 0,8 \div 80 \text{ см}$  поглощение на пути, равном длине волны в свободном пространстве, возрастает по мере укорочения волны. Максимум мнимой части диэлектрической проницаемости грунта имеет место в диапазоне 1,5—2 см. В интервале влажности от нескольких процентов до 15—20% поглощение в исследованном диапазоне волн пропорционально влажности. Приведены формулы для ориентировочного расчета коэффициента поглощения грунта для волн  $\lambda = 0,8 \text{ см} \div 60 \text{ м}$ .

Исследование проводилось путем помещения образцов грунта в короткозамкнутый отрезок волновода или коаксиальной линии с последующим определением его электрических свойств при помощи измерительной линии соответствующего диапазона волн.

Известно, что в средах с потерями поле плоской волны затухает по мере распространения в них в соответствии с выражением

$$E = E_0 e^{-qr},$$

где  $E_0$  — напряженность поля при  $r = 0$ ;  $q$  — коэффициент поглощения;  $r$  — расстояние. При этом коэффициент поглощения  $q$  в неперах на метр может быть найден на любых длинах волн по формуле

$$q = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon^2 + (60\lambda\sigma)^2} - \epsilon)}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве в метрах,  $\epsilon$  — относительная электрическая проницаемость, а  $\sigma$  — удельная электрическая проводимость грунта в сименсах на метр [1].

Если считать, что измеренные на низкой частоте электрические параметры грунта  $\epsilon$  и  $\sigma$  не изменяются во всем диапазоне радиочастот, то из этого выражения следует, что в диапазоне дециметровых и сантиметровых радиоволн, когда  $\lambda$  достаточно мала,

$$q \approx 60\pi\sigma/\sqrt{\epsilon}, \quad (2)$$

а в диапазоне длинных волн

$$q \approx 2\pi\sqrt{30\sigma/\lambda}. \quad (3)$$

Построенная по формулам (1), (2) и (3) для грунта средней влажности (влажность которого составляет примерно 10% по отношению к весу абсолютно сухого грунта, а электрические параметры, измеренные на низкой частоте,  $\epsilon \approx 10$  и  $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ сим} \cdot \text{м}^{-1}$ ) кривая поглощения радиоволн в децибелах на метр от частоты имеет вид, приведенный на рис. 1 (точки 1, 2, 3'—8'). Из этой кривой видно, что, начиная с частоты  $10^7 \text{ Гц}$  (точка 3') и выше, в области применимости формулы (2), где кривая

проведена пунктиром, коэффициент поглощения остается постоянным и составляет приблизительно  $1,5 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ . Однако известно, что, начиная приблизительно с этих же частот, величины  $\epsilon$  и  $\sigma$  нельзя уже считать постоянными из-за проявляющихся на этих и более высоких частотах резонансных свойств молекул воды, содержащейся во влажном грунте.

Проведенные эксперименты показали, что в грунте средней влажности при длине волны 80 см коэффициент поглощения равен  $15 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$  (точка 4 на рис. 1), т. е. в десять раз больше, чем это соответствует пунктирной кривой (точка 4'), при длине волны 10 см (точка 5 на рис. 1) —  $100 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$  и при длине волны 3 см (точка 6 на рис. 1) —  $730 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ .

Точки 4—8 получены в результате измерений. От точки 4 кривая проведена к точкам 2 и 3' ориентировочно.

Полученная зависимость показывает, что для грунтов средней влажности область значений  $\epsilon$  и  $\sigma$ , соответствующих низким частотам, определяется частотами порядка  $5 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ .

На более высоких частотах по мере укорочения  $\lambda$  проводимость  $\sigma$  быстро растет. В связи с этим для расчета коэффициента поглощения на этих длинах волн следует, вообще говоря, пользоваться полной формулой (1), в которую надо подставлять  $\epsilon(\lambda)$  и  $\sigma(\lambda)$ , найденные для интересующей нас длины волны.

Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения от частоты.

Практически для ориентировочных расчетов коэффициентов поглощения грунтов в диапазоне от самых длинных волн до волн порядка 50 см можно пользоваться, как это показано прямой тонкой линией на рис. 1, формулой (3), которую удобнее представить в виде

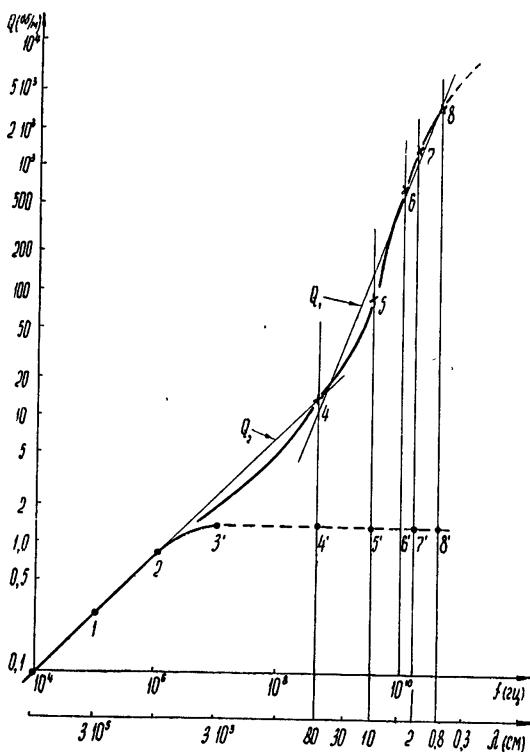
$$Q_2 \left( \frac{\partial \sigma}{\lambda} \right) \approx 295 V \sigma / \lambda. \quad (3a)$$

В эту формулу следует подставлять значение  $\sigma$  грунта заданной влажности, соответствующее низким частотам.

Для волн от 80 до 0,8 см при расчете коэффициентов поглощения грунтов можно применять эмпирическую формулу

$$Q_1 \left( \frac{\partial \sigma}{\lambda} \right) \approx 2,62 \frac{(\epsilon - 3,0)^{0,635}}{\lambda^{1,24}}, \quad (4)$$

где под  $\epsilon$  понимается значение электрической проницаемости грунта заданной влажности, соответствующее низким частотам. Выражение (4) относится к другой прямой, показанной также тонкой линией на рис. 1.



и приближенно аппроксимирующей фактическую кривую в диапазоне от 80 до 0,8 см.

Ошибка, возникающая при применении приближенных формул (3а) и (4), видна из рис. 1. Поправка на  $\epsilon$ , введенная в формуле (4) и равная 3,0, представляет собой среднюю электрическую проницаемость сухого грунта.

Из выражения (4) следует, что в исследованном диапазоне волн поглощение на пути, равном длине волны в свободном пространстве, возрастает по мере укорочения длины волны.

Исследования показали, что мнимая часть электрической проницаемости грунта —  $\eta = [60 \lambda \sigma(\lambda)]$  имеет максимум в диапазоне 1,5—2 см (рис. 2), что находится в полном соответствии с результатами теоретических исследований Дебая [2] для воды.

Пропорциональность между коэффициентами поглощения и влажностью образцов наблюдалась для всех исследованных случаев (при изменении влажности от нескольких процентов до 15—20%) во всем исследованном диапазоне частот. В качестве иллюстрации на рис. 3 приведены результаты измерения коэффициента поглощения грунта от влажности (в процентах), отнесенной к весу абсолютно сухого грунта, —  $p (\%)$  для волны 2 см. Точки, соответствующие одним и тем же результатам, отмечены на рис. 1, 2 и 3 одинаковыми цифрами.

В заключение следует отметить, что исследования проводились на грунте, имеющем плотность  $1,75 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  и содержащем поглощенные

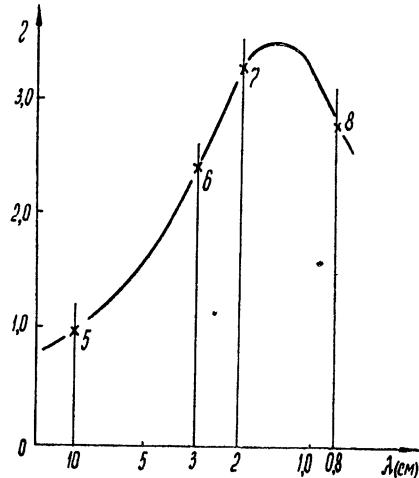


Рис. 2.

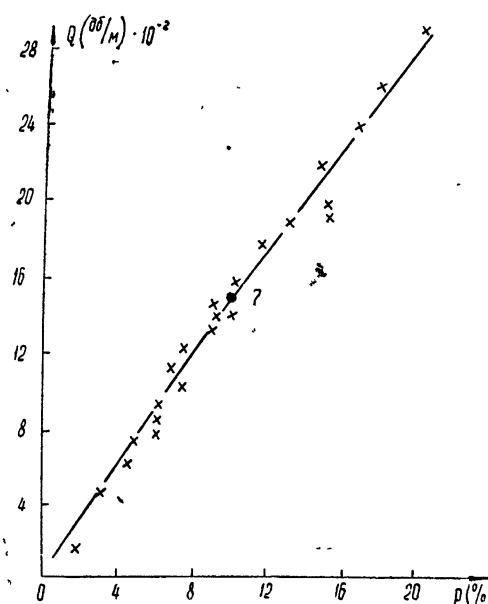


Рис. 3.

основания Ca и Mg, количество которых в миллиграммэквивалентах на 100 г абсолютно сухого грунта соответственно равнялось 4,5 и 1,8.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Долуханов, Распространение радиоволн, изд. Связь, М., 1965.
2. П. Дебай и Г. Закк, Теория электрических свойств молекул, Объединенное научно-техническое издательство, М.—Л., 1936.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
6 июля 1965 г.,  
после переработки  
3 августа 1967 г.

### INVESTIGATION OF GROUND ABSORPTION OF DECIMETER AND CENTIMETER RADIO WAVES

*Yu. I. Leschanscy, G. N. Lebedeva*

There is found experimentally by one and the same method the dependence of the radio wave ground absorption upon the humidity and frequency. The absorption along the path, equal to the wavelength in a free space, is shown to increase with the wave shortening in the range of  $\lambda = 0,8 \pm 80$  cm. The maximum of the imaginary part of the complex ground permittivity is observed in the range of 1.5—2 cm. The absorption in the wave range investigated is proportional to the humidity when the humidity changes from some percents up to 15—20%. The formulae are given for the tentative calculations of the ground absorption coefficients for the waves  $\lambda = 0,8$  см  $\pm$  60 м.

УДК 533.922

## РАССЕЯНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН НА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦАХ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*Т. Л. Тавдигриძе*

Рассматривается излучение заряда, движущегося в магнитоактивной плазме, в которой возбуждены низкочастотные продольные колебания. Оцениваются потери энергии заряда в неизотермической плазме, а также обсуждается вопрос об ускорении заряженной частицы в слаботурбулентной плазме.

1. Изучение нелинейных эффектов очень существенно и представляет большой интерес для исследования многих задач динамики плазмы. Нелинейные эффекты включают в себя такие процессы, как эффективное рассеяние продольной волны заряженной частицей, преобразование продольной волны в поперечную и т. п. В работах многих авторов, рассматривающих эти вопросы, исследуется изотропная плазма. Поэтому представляет интерес изучение нелинейных процессов в магнитоактивной плазме, в частности, — рассеяния продольной волны заряженной частицей в постоянном внешнем магнитном поле\*.

В настоящей работе рассматривается излучение заряда, движущегося в магнитоактивной плазме, в которой возбуждены низкочастотные продольные колебания. Оцениваются потери энергии заряда в неизотермической плазме.

2. Рассмотрим сильно неизотермическую плазму ( $T_e \gg T_i$ ). Известно [2], что для такой плазмы при условиях 1)  $k v_a \ll \omega_a$  (длина волны значительно больше лармортова радиуса электронов и ионов), 2) частота волны не близка к ионной гирочастоте  $\omega_i$ , 3)  $v_i \ll \omega/k_z \ll v_e$  ( $v_e$ ,  $v_i$  — тепловые скорости электронов и ионов соответственно,  $|\omega|/k_z$  — фазовая скорость волны вдоль магнитного поля) для собственных частот продольных колебаний  $\omega = \omega(k, \vartheta)$  получается следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega_j(k, \vartheta) = \frac{1}{2} (\omega_s^2 + \omega_i^2) \pm \frac{1}{2} [(\omega_s^2 + \omega_i^2)^2 - 4\omega_s^2\omega_i^2 \cos^2 \vartheta]^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\omega_s = k v_s$  — частота звуковых колебаний в неизотермической плазме при длине волны, значительно большей дебаевского радиуса,  $v_s = (\pi T_e/m_i)^{1/2}$  — скорость звука в неизотермической плазме.

Для определения потерь энергии быстрого заряда в неизотермической плазме, в которой возбужден спектр колебаний (1), воспользуемся выражением для потерь энергии заряженной частицей в магнитоактивной плазме в поле продольной волны:

$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^6}{T} \int \frac{dk d\omega}{k^2} |(kj)|^2 \delta(A). \quad (2)$$

\* Излучение при прохождении заряженной частицы в изотропной плазме было исследовано в работе [1].

Выражение  $A$  для продольных колебаний (1) имеет вид

$$A = 1 + \frac{2\Omega_e^2}{k^2 v_e^2} - \frac{\Omega_i^2 \cos^2 \vartheta}{\omega^2} - \frac{\Omega_i^2 \sin^2 \vartheta}{\omega^2 - \omega_i^2},$$

$$\Omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}, \quad \Omega_i^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_i},$$
(3)

$\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}_0$ . Потери энергии (2) равны работе, совершающейся током в созданном им самим поле, усредненной за интервал времени  $T \rightarrow \infty$ , так как после усреднения по случайным фазам продольных волн слаботурбулентной плазмы окончательное выражение не должно зависеть от времени.

Для получения потерь энергии необходимо считать  $j(\mathbf{k}, \omega)$  в (2) током, который создается в плазме зарядом  $e_a$  с учетом возмущения движения заряда продольными волнами слаботурбулентной плазмы:

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{k}' d\omega' \Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') E_j(\mathbf{k}', \omega').$$
(4)

Необходимо учесть, что  $\Lambda_{ij}$  состоит из 2-х частей, каждая из которых соответствует определенному механизму рассеяния [4]:

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') = \Lambda_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') + \Lambda_{ij}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega').$$
(5)

Первый из механизмов представляет собой процесс рассеяния первичных плазменных волн на заряженной частице плазмы. Для нахождения тока, вызванного этим процессом, необходимо определить движение заряда в постоянном поле  $\mathbf{H}_0$  и поле  $E(r, t)$  плазменной волны. Траекторию  $r(t)$  заряда можно представить как движение в постоянном магнитном поле  $r_H(t)$ , на которое накладываются колебания  $r_E(t)$  в поле первичной плазменной волны:

$$r(t) = r_H(t) + r_E(t).$$

Подробный расчет тока для процесса рассеяния приведен в работе автора и Цинцадзе [3], где проведены конкретные оценки потерь энергии заряда в слаботурбулентной плазме, в которой возбуждены высокочастотные продольные колебания.

Второй механизм рассеяния, дающий вклад в излучение тока, соответствует взаимодействию поля заряда, создающего поляризационный экранирующий эффект, с полем первичных плазменных волн. Нелинейное рассеяние, возникающее в результате этого взаимодействия, описывается нелинейным током

$$\begin{aligned} j_i^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) &= \int d\mathbf{k}' d\omega' \Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') E_j(\mathbf{k}', \omega'), \\ \Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') &= [S_{ij,s}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') + \\ &+ S_{is,j}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega', \mathbf{k}', \omega')] E_s^q(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'). \end{aligned}$$
(6)

Нелинейный ток пропорционален как внешнему полю продольных волн  $E(\mathbf{k}', \omega')$ , так и полю заряда  $E_s^q$ .

В данной работе рассматривается излучение заряда в сильном магнитном поле  $k_\perp \omega_\perp \ll 1$ . Поэтому воспользуемся выражением тензора электропроводности  $S_{ij,s}$  для сильного магнитного поля, компоненты которого выписаны в [4, 5]. Поле заряда  $E^q(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')$  найдем из уравнений Максвелла, используя то обстоятельство, что рассматриваются лишь продольные волны:

$$\left( \delta_{ji} k^2 - k_i k_j - \epsilon_{ij} \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_j^q = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_i.$$
(7)

Отсюда

$$E_l^q = - \frac{i4\pi c}{\omega - \omega'} (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_l \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}') j_0}{|(\mathbf{k} - \mathbf{k}')_l \epsilon_{ij} (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_j|}. \quad (8)$$

Здесь  $j_0$  — ток заряда, движущегося по винтовой линии; в сильном магнитном поле его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{e}{(2\pi)^3} \frac{v_\perp}{2} \{ \delta[\omega - \omega' - (k_z - k'_z) v_{0z} - \omega_a] + \delta[\omega - \omega' - \\ &\quad - (k_z - k'_z) v_{0z} + \omega_a] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_y &= \frac{e}{(2\pi)^3} \frac{iv_\perp}{2} \{ -\delta[\omega - \omega' - (k_z - k'_z) v_{0z} - \omega_a] + \delta[\omega - \omega' - \\ &\quad - (k_z - k'_z) v_{0z} + \omega_a] \}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$j_z = \frac{e}{(2\pi)^3} v_z \delta[\omega - \omega' - (k_z - k'_z) v_{0z}].$$

Из всего вышеизложенного следует, что выражение для  $|(\mathbf{k}j)|_\alpha^2$  в формуле (2) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{k}j)|_\alpha^2 &= \left| \int d\mathbf{k}' d\omega' \{ \Lambda_\alpha(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') - ik_l S_{ljs} k'_j E_s^q \} \Phi(\mathbf{k}', \omega') \right|^2, \\ \Phi(\mathbf{k}', \omega') &= -i \frac{\mathbf{k}' E(\mathbf{k}', \omega')}{k^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\Lambda_\alpha(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega')$  соответствует первому механизму рассеяния и имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') &= -\frac{e^2}{m_\alpha (2\pi)^3 \gamma} \left\{ \frac{k_\perp k'_\perp}{2} \left( \frac{\exp(i(\varphi' - \varphi))}{\gamma + \omega_a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\exp(-i(\varphi' - \varphi))}{\gamma - \omega_a} \right) + \frac{k_z k'_z}{\gamma} \right\} \delta[\omega - \omega' - (k_z - k'_z) v_{0z}], \end{aligned} \quad (11)$$

$\gamma = k_z v_{0z} - \omega$ ,  $k_\perp$ ,  $k_z$ ,  $\varphi$  — цилиндрические координаты волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Индекс  $\alpha$  указывает на то, является ли заряженная частица электроном ( $\alpha = e$ ) или ионом ( $\alpha = i$ ).

Отличные от нуля симметризованные компоненты нелинейного тензора  $S_{ljs}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{zzz}^i &= -\frac{e^3 n_0}{2m_i^2 \omega' \omega''} \left( \frac{k_z}{\omega} + \frac{k'_z}{\omega'} + \frac{k''_z}{\omega''} \right), \\ S_{z\pm\mp}^i &= -\frac{e^3 n_0}{m_i^2 \omega (\omega' \mp \omega_i)(\omega'' \mp \omega_i)} \left[ \frac{k'_z}{\omega'} (\omega' \mp \omega_i) + \frac{k''_z}{\omega''} (\omega'' \mp \omega_i) \right], \\ S_{\pm z\mp}^i &= -\frac{e^3 n_0}{m_i^2} \left[ \frac{k'_z}{(\omega'' \pm \omega_i)^3} + \frac{k''_z}{(\omega' \pm \omega_i)^3} \right], \\ S_{\pm\mp z}^i &= -\frac{e^3 n_0 \omega}{m_i^2 \omega' \omega'' (\omega \mp \omega_i)} \left\{ \frac{k_z}{\omega \mp \omega_i} - \frac{2k_z}{\omega} + \frac{k'_z}{\omega'} + \frac{k''_z}{\omega''} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$S_{\pm \mp z}^e = - \frac{e^3 n_0}{m_e^2 v_e^2 k_z k'_z k''_z} \left\{ \frac{k_z'^2}{\omega'} + \frac{k_z''^2}{\omega''} \right\},$$

$$S_{zzz}^e = S_{z\pm\mp}^e = S_{\mp z\pm}^e = 0.$$

Ионная часть тензора электропроводности  $S_{ijz}$  получена из выражения  $S_{ijz}$  для сильного магнитного поля  $k_z v_e / \omega_a \ll 1$  (формула (Д.3) в [5]) с помощью  $f_0^l = n_0 \delta(v_z)$ , так как рассматривается сильно неизотермическая плазма  $T_e \gg T_i$  и можно считать ионы холодными. Электронную часть тензора получим, используя в качестве  $f_0$  максвелловскую функцию и разлагая интегралы типа

$$\int \frac{\exp(-x^2)}{x - \beta} dx$$

в области  $\beta \ll 1$  ( $\beta = \omega/k_z v_e$ ) с точностью до членов первого порядка по  $\beta$ . Скорость  $v_0$  частицы, на которой рассеивается плазменная волна, предполагается большой по сравнению с фазовой скоростью продольной волны ( $v_0 \gg \omega/k_z$ ). Для такой частицы закон сохранения выполняется лишь для процесса поглощения двух колебаний с близкими друг к другу по величине значениями  $k_z$  и  $k'_z$ :

$$\frac{\omega - \omega' + p\omega_a}{k_z - k'_z} = v_0. \quad (13)$$

Поэтому для быстрой частицы  $v_0 \gg \omega/k_z$  потери энергии содержат только рассеянное излучение  $Q_R$ . Для вычисления последнего ограничиваемся квадратичным по амплитуде волны членом, в связи с чем изменением дисперсионных свойств, обусловленным взаимодействием волн плазмы (которому соответствует нелинейная поправка  $\Delta A$ , формула (6) статьи [3], пропорциональная, в свою очередь,  $|\Phi(k', \omega')|^2$ ), можно пренебречь.

Ниже будет рассмотрено два случая: 1) движение электрона в магнитоактивной плазме ( $\omega_a = \omega_e$ ), для которого мы подсчитаем черенковские ( $p = 0$ ) потери энергии  $Q_e$ ; 2) движение иона ( $\omega_a = \omega_i$ ), для которого будут вычислены потери энергии  $Q_i$  в случае  $p = 0, 1, 2$  и т. д. Ввиду сложности выражения, которое получается для рассеянного излучения  $Q_R$  (в дальнейшем индекс  $R$  опускаем) после подстановки  $|\Phi(kj)|^2$  в виде (10) в формулу (2), оценим потери энергии для отдельных частных случаев уравнения (1).

Рассмотрим сначала случай  $\omega_i \gg \omega_s$  — гирочастота ионов гораздо больше частоты ионного звука. Из дисперсионного соотношения (1) для спектра колебаний получим

$$\omega_1 = \omega_i + \frac{1}{2} \frac{\omega_s^2}{\omega_i} \sin^2 \theta,$$

$$\omega_2 = \omega_s \cos \theta.$$

При этом можно различить четыре типа процессов.

Рассмотрим процесс рассеяния первичной продольной волны частоты  $\omega_2$  на заряде с превращением в продольную волну частоты  $\omega_1$  (обозначим такой процесс  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ ). Для указанного процесса потери энергии при рассеянии волны на электроне записутся в виде

$$\begin{aligned}
Q_e = & \frac{e^4}{m_e^2 2\pi} \int \int \frac{dk dk' \Phi^2(k')}{k^2 |dA/d\omega|_{\omega=\omega_1}} \frac{\omega_1}{(k_z v_{0z} - \omega_i)^2} \left\{ \frac{k_\perp^2 (k'_\perp)^2}{4} \left( \frac{1}{(k_z v_0 + \omega_e)^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(k_z v_0 - \omega_e)^2} \right) + \frac{k_z^2 (k'_z)^2}{(k_z v_{0z} - \omega_i)^2} \right\} \delta [\omega_i - (k_z - k'_z) v_{0z}] + \\
& + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^3}{T m_e} \int \frac{dk dk' \Phi^2(k') k_z^2 (k'_z)^2}{k^2 |dA/d\omega|_{\omega=\omega_1} (k_z v_0 - \omega_i)^2} [(iS_{zzz} E_z^q)^* + iS_{zzz} E_z^q] \times \quad (15) \\
& \times \delta [\omega_i - (k_z - k'_z) v_{0z}] + \\
& + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^6}{T} \int \frac{dk dk' \Phi^2(k')}{\omega k^2 |dA/d\omega|_{\omega=\omega_1}} k_\perp^2 (k'_\perp)^2 S_{+-z} S_{+-z}^* (k, k', k - k') |E_z^q(k - k')|^2.
\end{aligned}$$

При рассеянии на ионе

$$\begin{aligned}
Q_i = & \frac{e^4}{m_i^2 2\pi} \int \frac{dk dk' \Phi^2(k') \omega_1}{k^2 (dA/d\omega)_{\omega=\omega_1} (k_z v_{0z} - \omega_i)^2} \left\{ \frac{k_\perp^2 (k'_\perp)^2}{4} \left( \frac{1}{k_z v_{0z}^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(k_z v_{0z} - 2\omega_i)^2} \right) + \frac{k_z^2 (k'_z)^2}{(k_z v_{0z} - \omega_i)^2} \right\} \delta [\omega_i - (k_z - k'_z) v_{0z}] + \\
& + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^3}{T} \frac{e^2}{m_i} \int \frac{dk dk' \Phi^2(k') k_z^2 (k'_z)^2 ((iS_{zzz}^i E_z^q)^* + iS_{zzz}^i E_z^q)}{k^2 |dA/d\omega|_{\omega=\omega_1} (k_z v_{0z} - \omega_i)^2} + \quad (16) \\
& + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^3}{T} \frac{e^2}{m_i} \int \frac{dk dk' k_\perp^2 (k'_\perp)^2 \Phi^2(k') ((iS_{+-z}^i E_z^q)^* + iS_{+-z}^i E_z^q)}{k^2 |dA/d\omega|_{\omega=\omega_1} (k_z v_0 - \omega_i) (k_z v_0 - 2\omega_i)} + \\
& + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^6}{T} \int \frac{dk dk' \Phi^2(k') k_\perp^2 (k'_\perp)^2}{\omega k^2 |dA/d\omega|_{\omega=\omega_1}} S_{+-z}^i S_{+-z}^{i*} |E_z^q|^2.
\end{aligned}$$

Выражения (15) и (16) для потерь энергии получены после интегрирования по  $\omega$  уравнения (2) с заменой  $|(\mathbf{k}j)|^2$  выражением (10). Заметим, что в результате усреднения по фазам отличны от нуля лишь члены с  $S_{zzz}^i$  в (15) и с  $S_{+-z}^i$ ,  $S_{zzz}^i$  в (16). При получении последних слагаемых в (15) и в (16) была проведена оценка компонент тензора электропроводности (12) для процесса  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$  и выбрана по порядку величины наибольшая из компонент для данного процесса —  $S_{+-z}^i$ . Далее в выражениях (15) и (16) в интеграле по  $\mathbf{k}$  можно провести интегрирования по углу  $\varphi$  и по  $k_z (dk = k_\perp dk_\perp dk_z d\varphi)$ , а в интеграле по  $k_\perp$  ограничить верхний предел интегрирования величиной  $k_d = \sqrt{m/M} \Omega_e/v_e$  (обратным дебаевским радиусом).

Следует отметить, что в формулу для поля заряда  $E^q$  входит величина  $|(\mathbf{k} - \mathbf{k}')_i e_{ij} (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_j| = (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 A(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , причем  $A$  зависит от разности волновых векторов и  $A(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0$  уже не является дисперсионным уравнением, т. е. решение его не дает собственных частот плазменных колебаний.

Для процесса  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$

$$\begin{aligned}
A = & 1 + \frac{2\Omega_e^2 x^2}{(k_z - k'_z)^2 v_e^2} - \frac{\Omega_i^2 x^2}{(\omega_1 - \omega'_2)^2} - \frac{\Omega_i^2 (1 - x^2)}{(\omega_1 - \omega'_2)^2 - \omega_i^2}, \quad (17) \\
x^2 = & \frac{(k_z - k'_z)^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}.
\end{aligned}$$

В общем виде нельзя найти простые выражения для той части потерь энергии, которая обусловлена нелинейным рассеянием. Поэтому рассмотрим два предельных случая квазипротодольного распространения волн:

$$\text{а) } x^2 \ll 1, \quad \text{б) } x^2 = 1.$$

Обозначим первые члены выражений (15) и (16) через  $Q_1^e$  и  $Q_1^i$  соответственно (потери энергии электрона и иона при колебании частицы в поле плазменных волн). Остальные члены в  $Q^e$  и  $Q^i$  обозначим через  $Q_2^e$  и  $Q_2^i$ . Они соответствуют нелинейному рассеянию.

Для процесса  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$  при  $x^2 \ll 1$  нелинейные потери  $Q_2^e$  и  $Q_2^i$  отсутствуют и потери энергии определяются лишь членами  $Q_1^e$  и  $Q_1^i$ , оценка которых дает

$$Q_1^e = \frac{e^4 n \times T_e}{10 M^2 v_0^3} \eta \left\{ \left( \frac{v_e}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{v_s}{v_e} \right)^2 \right\}; \quad (18)$$

$$Q_1^i = \frac{e^4 n \times T_e}{10 v_0^3 M^2} \frac{m}{M} \eta \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2, \quad (19)$$

где  $\eta = W_L / n \times T_e$  — малый параметр, а  $W_L$  — энергия продольных первичных волн,

$$W_L = \int d\mathbf{k}' |E(\mathbf{k}')|^2.$$

Для другого предельного случая  $x^2 \rightarrow 1$  получим

$$Q_e = \frac{e^4 n \times T_e}{M^2 v_0^3} \eta \left\{ \left( \frac{v_e}{v_0} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{v_s}{v_e} \right)^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{m}{M} \right)^3 \frac{\Omega_i^4}{(\Delta\omega)^4} - \frac{v_s}{v_0} \left( \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{\Omega_i}{\omega_i} + \frac{\omega_i^2}{\Omega_i^2} \right) \right\}; \quad (20)$$

$$Q_i = \frac{e^4 n \times T_e}{m^2 v_0^3} \frac{m}{M} \eta \left\{ \frac{1}{10} \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Omega_i^4}{16(\Delta\omega)^4} - \frac{v_s^2}{v_0 v_e} \right\}. \quad (21)$$

Разность  $\Delta\omega = \omega - \omega_i \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_s^2}{\omega_i} \sin^2 \Theta$  является малой величиной, так как  $\omega_i \gg \omega_s$ ,  $\Theta \ll 1$ . Первые члены описывают рассеяние из-за колебаний заряда, а два последних члена — нелинейное рассеяние, причем для данного процесса нелинейное рассеяние является более существенным.

Аналогичным образом можно найти потери энергии для остальных процессов ( $x^2 \rightarrow 1$ ). Для процесса рассеяния продольной волны без изменения частоты ( $\omega_1 \rightarrow \omega_1$ ):

$$Q_e = \frac{e^4 n \times T_e}{M^2 v_0^3} \eta \left\{ \frac{1}{25} \left( \frac{v_e}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{v_s}{v_e} \right)^2 \frac{\Omega_e^2}{\omega_e^2} + \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Omega_i^2}{(\Delta\omega)^2} - \frac{m}{M} \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2 \frac{\Omega_i^2}{\omega_i^2} \right\}; \quad (22)$$

$$Q_i = \frac{e^4 n \times T_e}{M^2 v_0^3} \frac{m}{M} \eta \left\{ \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{\Omega_i^2}{(\Delta\omega)^2} - \frac{v_e}{v_0} \frac{\omega_i}{\Omega_i} \right\}. \quad (23)$$

Для процесса  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$  получим

$$Q_e = \frac{e^4 n \times T_e}{10 M^2 v_0^2} \eta \left\{ \frac{1}{v_0} \left( \frac{v_e}{v_0} \right)^2 + \frac{1}{v_0} \left( \frac{v_s}{v_e} \right)^2 \frac{\Omega_e^2}{\omega_e^2} - \frac{1}{v_s} \right\} + \frac{M n e^4 v_{0z}}{4 m^2 v_e^2} \eta; \quad (24)$$

$$Q_i = \frac{e^4 n \times T_e}{M^2 v_0} \eta \left\{ \frac{m}{8 M v_0} \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2 - \frac{1}{3 v_s} \right\} + \frac{M e^4 n v_{0z}}{4 m^2 v_e^2} \eta. \quad (25)$$

Для процесса  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$

$$Q_e = \frac{e^4 n \times T_e}{25 v_0^3 M^2} \eta \left\{ 2 \left( \frac{v_e}{v_0} \right)^2 + \left[ \frac{\Omega_e^2}{\omega_e^2} \frac{v_s}{v_e} - \frac{\Omega_i}{\omega_i} \frac{v_s}{v_0} \right] \frac{v_i}{v_e} \right\}; \quad (26)$$

$$Q_i = \frac{e^4 n \times T_e}{25 v_0^3 M^2} \frac{m}{M} \eta \left\{ 3 \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2 - \left( \frac{v_s}{v_0} \right) \left( \frac{v_s}{v_e} \right) \frac{\Omega_i}{\omega_i} \right\}. \quad (27)$$

Во всех процессах, кроме последнего, нелинейное рассеяние намного превосходит рассеяние из-за колебаний заряда в поле волн. Лишь для процесса (26) рассеяние из-за колебаний заряда в поле волн, которому соответствуют первые два слагаемых, больше нелинейного рассеяния (третье слагаемое в (26)).

Иной результат имеет место при рассеянии волны с частотой  $\omega_1$  на ионе ( $\Omega_i \approx \omega_i$ ) с излучением волны  $\omega_2$ . Нелинейное рассеяние (второй член (27)) превосходит рассеяние из-за колебаний заряда в поле волн; кроме того, заряд приобретает энергию от волны и ускоряется (знак минус у второго члена (27)). Аналогичное явление было отмечено в слаботурбулентной магнитоактивной плазме для магнитогидродинамических волн.

Все вышеизложенные результаты относились к частному случаю  $\omega_i \gg \omega_s$ . В заключение рассмотрим другой предельный случай  $\omega_s \gg \omega_i$ . Уравнение (1) для собственных частот будет иметь вид

$$\omega_1 = \omega_s + \frac{\omega_i^2}{\omega_s} \sin^2 \vartheta, \quad (28)$$

$$\omega_2 = \omega_i \cos \vartheta.$$

Производя расчеты, аналогичные предыдущему случаю, и оставляя наибольшие по порядку величины члены, для процесса рассеяния первичной волны частоты  $\omega_2$  на заряде с излучением продольной волны частоты  $\omega_1$  получим

$$Q_e = \frac{e^4 n \times T_e}{M^2 v_0^3} \eta \left\{ \frac{1}{10} \left( \frac{v_e}{v_0} \right)^2 + \frac{m}{M} \frac{\Omega_e^2}{\omega_e^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{v_s}{v_0} \frac{\Omega_i^2}{\omega_i^2} \right\}; \quad (29)$$

$$Q_i = \frac{e^4 n \times T_e}{M^2 v_0^3} \frac{m}{M} \eta \left\{ \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{v_s}{v_0} \frac{\Omega_i^2}{\omega_i^2} - \frac{1}{10} \frac{M}{m} \frac{\Omega_i}{\omega_i} \right\}. \quad (30)$$

Для данного процесса  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$  рассеяние из-за колебаний заряда в поле волны, которому соответствуют первые два члена (29), пре-восходит нелинейное рассеяние — третий член (29). При рассеянии низкочастотной волны частоты  $\omega_2$  на ионе с излучением волны  $\omega_1$  ион при-обретает энергию и ускоряется (аналогично  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  для  $\omega_i \gg \omega_s$ ).

Автор выражает искреннюю благодарность Н. Л. Цинцадзе за руко-водство и постоянную помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Гайлитис, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 47, 1468 (1964).
2. Д. Г. Ломингадзе, К. И. Степанов, ЖТФ, 34, 1823 (1964).
3. Т. Л. Тавдгиридзе, Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ, 36, 1155 (1966).
4. В. Н. Цытович, А. Б/Шварцбург, ЖЭТФ, 49, 797 (1965).
5. Н. П. Гиоргадзе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 241 (1966).

Институт физики АН Груз. ССР

Поступила в редакцию  
23 июня 1966 г.,  
после исправления  
26 июля 1967 г

**SCATTERING OF LOW-FREQUENCY LONGITUDINAL WAVES ON CHARGED PARTICLES IN MAGNETOACTIVE PLASMA**

*T. L. Tavagiridze*

Radiation of a charge moving in a magnetoactive plasma with low-frequency longitudinal oscillations excited is considered. The energy losses of the charge in a non-isothermal plasma are estimated. The problem of charged particle acceleration in a weakly-turbulent plasma is discussed.

УДК 533.925

## ОБ УСИЛЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПОТОКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ СРЕДЕ

C. M. Файнштейн

Рассматривается задача об усилении электромагнитных волн потоком частиц, пронизывающих границу двух магнитоактивных сред. Вычислена энергия электромагнитных волн, излучаемых в магнитоактивной плазме в направлении постоянного магнитного поля частицей, движущейся по винтовой линии. Показано, что при определенных условиях возможно эффективное взаимодействие волн с потоком заряженных частиц. Рассмотрение проводится методом коэффициентов Эйнштейна.

Известно (см. [1, 2]), что в системе из двух плазм, пронизываемых квазинейтральным потоком заряженных частиц, возможно усиление плазменных и электромагнитных волн, связанных с переходным излучением частиц на резкой границе сред; в случае изотропных плазм усиление волн невелико, так как показатель преломления волн близок к единице; в магнитоактивной плазме показатель преломления может быть велик, поэтому представляет интерес исследование вопроса об усилении электромагнитных волн потоком заряженных частиц при переходном излучении в неоднородной магнитоактивной среде. Таким образом, задача ставится в следующем виде: имеется резкая граница двух плазм при температуре  $T$ , которые пронизываются слабым\* квазинейтральным потоком заряженных частиц с равновесной скоростью  $V_0$  и температурой  $T_s$ ; плазмы помещены в постоянное\*\* магнитное поле  $H_0$ , перпендикулярное границе (рис. 1); необходимо вычислить коэффициент поглощения (усиления) волн в такой системе.

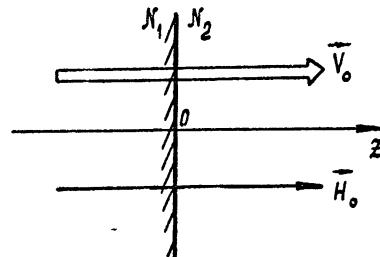


Рис. 1.

1. Коэффициент поглощения (усиления) нормальных волн, распространяющихся перпендикулярно границе во второй среде, имеет вид [1]

\* Концентрация частиц потока должна быть настолько мала по сравнению с концентрацией основных плазм, чтобы поток не вносил вклад в показатель преломления волн — это одно из условий применимости метода коэффициентов Эйнштейна (см. [3]).

\*\* Так как показатель преломления волн в магнитоактивной плазме зависит от  $H_0$ , то излучение должно возникать и в однородной по плотности среде, в которой есть область резкого изменения магнитного поля от  $H_{01}$  до  $H_{02}$ ; естественно, что ширина переходной области должна быть много меньше длины волны.

$$\mu^{0,e} = \frac{16\pi^3 c^2}{[n_{0,e}^{(2)}]^2 \omega^2 x(T_s)_\parallel} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon_\omega^{0,e}(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}) |\mathbf{v}_\parallel| \left( 1 - \frac{V_0}{v_\parallel} - \frac{v_{(T_s)_\parallel}^2}{v_\perp^2} \right) dv_\parallel dv_\perp, \quad (1)$$

$$f(\mathbf{v}) = N_s \left( \frac{2\pi x}{m} \right)^{-3/2} (T_s^{-1/2})_\parallel (T_s^{-1})_\perp \exp \left\{ - \left[ \frac{m(v_\parallel - V_0)^2}{2x(T_s)_\parallel} + \frac{mv_\perp^2}{2x(T_s)_\perp} \right] \right\}.$$

Здесь  $n_{0,e}^{(2)}$  — показатель преломления обычной и необыкновенной волн для второй среды;  $V_0$  — равновесная скорость потока;  $\epsilon_\omega^{0,e}(\mathbf{v})$  — спектральная компонента потока энергии обычной и необыкновенной волн, которая излучается во вторую среду перпендикулярно границе при пересечении ее частицей;  $v_\parallel$  — проекция скорости, перпендикулярная границе;  $v_\perp$  — проекция скорости, перпендикулярная  $v_\parallel$ ;  $N_s$  — равновесная концентрация частиц в потоке;  $v_{T_s}$  — средняя тепловая скорость частиц потока, равная  $(xT_s/m)^{1/2}$ ;  $x$  — постоянная Больцмана.

Таким образом, задача свелась к определению функции  $\epsilon_\omega^{0,e}(\mathbf{v})$ .

В работе [4] вычислена энергия излучения при наклонном падении частицы на границу изотропных сред; в [5, 6] рассмотрены случаи нормального падения частицы на одноосный кристалл и магнитоактивную плазму; в рассматриваемом случае частица движется по винтовой линии вдоль магнитного поля и пересекает границу плазмы под некоторым углом к координатным осям  $x, y, z$  (рис. 2).

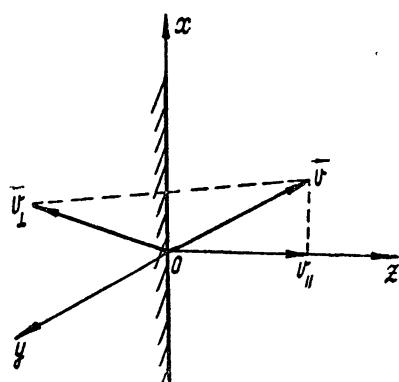


Рис. 2.

2. Исследуем поле излучения движущейся частицы в указанной системе при условии, что это поле не влияет на движение частицы.

Пусть плоскость  $z = 0$  является границей плазмы с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_{ij}^{(1)}(\omega)$  ( $z < 0$ ) и  $\epsilon_{ij}^{(2)}(\omega)$  ( $z > 0$ ). Тензор\*  $\epsilon_{ij}$  в системе координат, где магнитное поле  $\mathbf{H}_0$  направлено по  $z$ , имеет следующий вид [7]:

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\epsilon = 1 - \sum_a \frac{\omega_{ra}^2}{\omega^2 - \omega_{Ha}^2}, \quad g = - \sum_a \frac{\omega_{Hx} \omega_{0a}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{Ha}^2)},$$

\* Мы рассматриваем случай, когда тепловым движением частиц основной плазмы в выражениях для  $\epsilon_{ij}(\omega)$  можно пренебречь ( $v_T/v_\Phi \ll 1$ , где  $v_\Phi$  — фазовая скорость волны (см. [7])).

$$\eta = 1 - \sum_a \frac{\omega_{0a}^2}{\omega^2}, \quad \omega_{0a}^2 = \frac{4\pi N_a e_a^2}{m_a}, \quad \omega_{Ha} = \frac{e_a H_0}{m_a c}.$$

Частица движется с нерелятивистской скоростью  $v$  ( $v \ll c$ ) по винтовой линии из первой среды во вторую (рис. 2). Запишем уравнения Maxwella для анизотропной среды:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)),$$

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E},$$

$$\mathbf{v}(t) = \{-v_\perp \sin(\Omega_H t + \varphi_0), v_\perp \cos(\Omega_H t + \varphi_0), v_\parallel\},$$

$$\mathbf{r}_e(t) = \{r_0 \cos(\Omega_H t + \varphi_0), r_0 \sin(\Omega_H t + \varphi_0), v_\parallel t\},$$

$$r_0 = \frac{v_\perp}{\Omega_H}, \quad v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \Omega_H = \frac{eH_0}{mc},$$

$\varphi_0$  — фаза, характеризующая скорость частицы в момент пересечения плоскости  $z = 0$ .

Разлагаем все переменные в интегралы Фурье. Тогда система неоднородных уравнений Maxwella примет вид

$$\left( k^2 \delta_{mn} - k_m k_n - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{mn} \right) E_n = \frac{ie}{2\pi^2 c^2} \tilde{v}_m; \quad (3a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \mathbf{E}], \quad (3b)$$

где  $\mathbf{k}_m$  — проекция волнового вектора на координатную ось;  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера;  $m$  принимает значения  $x, y, z$ ;

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= -\frac{v_\perp}{2i} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\varphi_0 s) \left\{ J_{s+1}(x_0 r_0) \exp\left[i(s+1)\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right] - \right. \\ &\quad \left. - J_{s-1}(x_0 r_0) \exp\left[i(s-1)\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right] \right\} \delta(\omega - \omega_s); \\ \tilde{v}_y &= \frac{v_\perp}{2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\varphi_0 s) \left\{ J_{s+1}(x_0 r_0) \exp\left[i(s+1)\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \right. \\ &\quad \left. + J_{s-1}(x_0 r_0) \exp\left[i(s-1)\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right] \right\} \delta(\omega - \omega_s); \\ \tilde{v}_z &= v_\parallel \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\varphi_0 s) J_s(x_0 r_0) \exp\left[is\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right] \delta(\omega - \omega_s); \end{aligned}$$

$J_s(x_0 r_0)$  — функция Бесселя;  $x_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ;  $\gamma = \arctg(k_y/k_x)$ ;  $\omega_s = k_z v_\parallel + s \Omega_H$ ;  $s = 0, \pm 1, \dots$ .

Из формулы (3а) следует:

$$E_n = q_{nm}^{-1} \tilde{v}_m \frac{ie\omega}{2\pi^3 c^2}, \quad (4)$$

$$q_{nm}^{-1} = \left( k^2 \delta_{mn} - k_m k_n - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{mn} \right)^{-1}.$$

Решения (4) не удовлетворяют граничным условиям в плоскости  $z = 0$ , поэтому к ним необходимо добавить решения однородного уравнения и из граничных условий найти поле излучения [8]. Используя связь электрического и магнитного полей (3б), запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскости  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{y,0}^{(1)} - \tilde{E}_{y,0}^{(2)} + \tilde{E}_{y,e}^{(1)} - \tilde{E}_{y,e}^{(2)} &= C_1, \\ L_0^{(1)} \tilde{E}_{y,0}^{(1)} - L_0^{(2)} \tilde{E}_{y,0}^{(2)} + L_e^{(1)} \tilde{E}_{y,e}^{(1)} - L_e^{(2)} \tilde{E}_{y,e}^{(2)} &= C_2, \\ (\lambda_0^{(1)} L_0^{(1)} - k_x M_0^{(1)}) \tilde{E}_{y,0}^{(1)} - (\lambda_0^{(2)} L_0^{(2)} - k_x M_0^{(2)}) \tilde{E}_{y,0}^{(2)} + & \\ + (\lambda_e^{(1)} L_e^{(1)} - k_x M_e^{(1)}) \tilde{E}_{y,e}^{(1)} - (\lambda_e^{(2)} L_e^{(2)} - k_x M_e^{(2)}) \tilde{E}_{y,e}^{(2)} &= C_3, \\ (k_y M_0^{(1)} - \lambda_0^{(1)}) \tilde{E}_{y,0}^{(1)} - (k_y M_0^{(2)} - \lambda_0^{(2)}) \tilde{E}_{y,0}^{(2)} + (k_y M_e^{(1)} - \lambda_e^{(1)}) \tilde{E}_{y,e}^{(1)} - & \\ - (k_y M_e^{(2)} - \lambda_e^{(2)}) \tilde{E}_{y,e}^{(2)} &= C_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\tilde{E}_{y,0,e}^{(1),(2)}$  — проекция поля обыкновенной (необыкновенной) волны на ось  $y$  в соответствующей среде (верхний индекс);  $L_{0,e}^{(1),(2)} = \tilde{E}_x/\tilde{E}_y$ ;  $M_{0,e}^{(1),(2)} = \tilde{E}_z/\tilde{E}_y$  — коэффициенты поляризации, определяемые из уравнения (3а) без правой части;  $\lambda_{0,e} = \pm(\omega^2/c^2 n_{0,e}^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ ;  $n_{0,e}$  — показатель преломления обыкновенной (необыкновенной) волны (см. [7]). Знак  $\lambda$  выбирается из условия конечности решения во всем пространстве при наличии затухания [8]. Функции  $C_{1,2,3,4}$  выражаются через решения неоднородных уравнений (3а):

$$\begin{aligned} C_1 &= E_y^{(2)} - E_y^{(1)}, \quad C_2 = E_x^{(2)} - E_x^{(1)}, \\ C_3 &= k_z(E_x^{(2)} - E_x^{(1)}) + k_x(E_z^{(2)} - E_z^{(1)}), \\ C_4 &= k_y(E_z^{(2)} - E_z^{(1)}) + k_z(E_y^{(1)} - E_y^{(2)}). \end{aligned}$$

Решая систему (5), найдем спектральную компоненту электрического поля обыкновенной и необыкновенной волн в обеих средах:

$$\tilde{E}_{y,0,e}^{(1),(2)} = \frac{\Delta_{0,e}^{(1),(2)}}{\Delta}.$$

Здесь  $\Delta_{0,e}^{(1),(2)}$  и  $\Delta$  определители системы (5), которые являются функциями от  $k_r$ ,  $k_y$ ,  $\omega$ . Полное поле как функцию координаты  $r$  ( $0, 0, R$ ) и частоты можно вычислить, проинтегрировав выражение для спектральных компонент по  $k_r$ ,  $k_y$  методом стационарной фазы [8, 9] и учитя, что  $d\omega = dk_z/v_{\perp}$ . Необходимо заметить, что поле излучения вдоль  $H_0$  может

иметь особенность, связанную с наличием двух стационарных точек (см. [10]).

После интегрирования получим поле излучения вдоль магнитного поля далеко от границы во второй среде:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{y,0,e}^{(2)} = & -\frac{e n_{0,e}^{(2)} v_{\perp}}{\pi c [n_{0,e}^{(1)} + n_{0,e}^{(2)}]} \frac{2}{R} \exp(i\omega n_{0,e}^{(2)} R/c) \left| 1 + \frac{\varepsilon^{(2)}}{\eta^{(2)}} \mp \left| \frac{g^{(2)}}{\eta^{(2)}} \right| \right|^{-1} \times \\ & \times (A_{0,e} \cos \varphi_0 + iB_{0,e} \sin \varphi_0), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\tilde{E}_{x,0,e}^{(2)} = \mp i \tilde{E}_{y,0,e}^{(2)},$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2} [\beta_z^2 (1 + \beta_z n_0^{(1)} + \sqrt{u_H}) (M - N) + (\beta_z n_0^{(1)} + 1 - \sqrt{u_H}) (C - D)],$$

$$B_0 = \frac{1}{2} [\beta_z^2 (1 + \beta_z n_0^{(1)} + \sqrt{u_H}) (M - N) - (\beta_z n_0^{(1)} + 1 - \sqrt{u_H}) (C - D)],$$

$$M = \frac{(n_0^{(2)})^2 - (n_e^{(2)})^2}{[(1 + \sqrt{u_H})^2 - \beta_z^2 (n_0^{(2)})^2] [\beta_z^2 (n_e^{(2)})^2 - (1 + \sqrt{u_H})^2]},$$

$$C = \frac{\beta_z^2 [(n_e^{(2)})^2 + (n_0^{(2)})^2] - 2(1 - \sqrt{u_H})^2}{[(1 - \sqrt{u_H})^2 - \beta_z^2 (n_0^{(2)})^2] [\beta_z^2 (n_e^{(2)})^2 - (1 - \sqrt{u_H})^2]},$$

$N$  и  $D$  получаются из  $M$  и  $C$  заменой индекса (2)  $\rightarrow$  (1);

$$A_e = \frac{1}{2} [(1 + \beta_z n_0^{(1)} + \sqrt{u_H}) (C' - D') + \beta_z^2 (1 + \beta_z n_0^{(1)} - \sqrt{u_H}) (M' - N')],$$

$$B_e = \frac{1}{2} [(1 + \beta_z n_0^{(1)} + \sqrt{u_H}) (C' - D') - \beta_z^2 (1 + \beta_z n_0^{(1)} - \sqrt{u_H}) (M' - N')],$$

$$\sqrt{u_H} = \frac{\Omega_H}{\omega}, \quad \beta_z = \frac{v_z}{c}, \quad n_{0,e}^2 = \varepsilon \mp g,$$

$C'$  и  $D'$ ,  $M'$  и  $N'$  получаются из  $C$  и  $D$ ,  $M$  и  $N$  заменой  $\sqrt{u_H} \rightarrow -\sqrt{u_H}$ .

Выражение для спектральной плотности энергии излучения в единице телесного угла во вторую среду имеет вид

$$\frac{dW_{\omega}^{0,e}}{d\Omega} = \varepsilon_{\omega}^{0,e}(v) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [EH^*], \quad (7a)$$

$$\varepsilon_{\omega}^{0,e}(v) = \frac{e^2 (n_{0,e}^{(2)})^3 v_{\perp}^2}{2\pi^2 c (n_{0,e}^{(1)} + n_{0,e}^{(2)})^2} \frac{4(A_{0,e}^2 \cos^2 \varphi_0 + B_{0,e}^2 \sin^2 \varphi_0)}{|1 + \varepsilon^{(2)}/\eta^{(2)} \mp |g^{(2)}/\eta^{(2)}||^2}.$$

При отсутствии анизотропии формула (7a) совпадает с результатом [4] для волны, распространяющейся перпендикулярно границе.

Рассмотрим некоторые предельные случаи выражения (7a).

а)  $\beta_z^2 n^2 \ll 1$ ;  $\sqrt{u_H} = \Omega_H/\omega \ll 1$ . Из первого неравенства следует, что в обеих средах не выполняется условие черенковского излучения; второе неравенство означает, что во время пролета границы вектор скорости частицы не успевает значительно повернуться около направления  $H_0$ ; в этом приближении формула (7a) примет простой вид:

$$\varepsilon_{\omega}^{0, e}(\mathbf{v}) = \frac{e^2 (n_{0, e}^{(2)})^3 \beta_z^4 \beta_{\perp}^2}{2\pi^2 c (n_{0, e}^{(1)} + n_{0, e}^{(2)})^2} 4 \left\{ \cos^2 \varphi_0 [(n_{e, 0}^{(2)})^2 - (n_{e, 0}^{(1)})^2]^2 + \right. \\ \left. + \sin^2 \varphi_0 [(n_{0, e}^{(2)})^2 - (n_{0, e}^{(1)})^2]^2 \right\} \left| 1 + \frac{\varepsilon^{(2)}}{\eta^{(2)}} \mp \left| \frac{g^{(2)}}{\eta^{(2)}} \right| \right|^{-2}, \quad (76)$$

где  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ .

Выражение (76) определяет энергию излучения нерелятивистской заряженной частицы на высоких частотах ( $\omega \gg \Omega_H$ ).

б) Пусть  $\beta_z^2 n^2 \ll 1$ , но  $\Omega_H/\omega \gg 1$  (рассматриваем излучение низкочастотных волн). При выполнении этих условий получим

$$\varepsilon_{\omega}^{0, e}(\mathbf{v}) = \frac{e^2 (n_{0, e}^{(2)})^3 \beta_z^4 \beta_{\perp}^2}{2\pi^2 c (n_{0, e}^{(2)} + n_{0, e}^{(1)})^2} 4 [(n_0^{(2)})^2 - (n_0^{(1)})^2 + (n_e^{(2)})^2 - \\ - (n_e^{(1)})^2]^2 \left| 1 + \frac{\varepsilon^{(2)}}{\eta^{(2)}} \mp \left| \frac{g^{(2)}}{\eta^{(2)}} \right| \right|^{-2} (\sqrt{u_H})^{-6}. \quad (7b)$$

Формула (7b), в частности, верна для излучения магнитогидродинамических волн заряженной частицей. Когда  $\sqrt{u_H} = \Omega_H/\omega \sim 1$ , соответствующие формулы легко получить из (7a).

Интересен случай, когда излучение частиц происходит в системе идеальный проводник — плазма или вакуум — плазма. Выражения для  $\varepsilon_{\omega}(\mathbf{v})$  получаются тогда из (7a) путем предельного перехода  $(n^{(1)})^2 \rightarrow \infty$  (проводник — плазма) или  $(n^{(1)})^2 = 1$  (вакуум — плазма).

3. Приведем формулы для коэффициента поглощения (усиления) волн, которые получаются из (1) подстановкой (7b), (7b) и интегрированием по  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}^*$ :

$$\mu^{0, e} = -128\pi^2 e^2 n_{0, e}^{(2)} N_s V_0^3 v_{(T_s) \perp}^2 v_{(T_s) \parallel}^2 \{ [(n_{0, e}^{(2)})^2 - (n_{0, e}^{(1)})^2]^2 + \\ + [(n_{e, 0}^{(2)})^2 - (n_{e, 0}^{(1)})^2]^2 \} \{ x(T_s) \parallel \omega^2 (n_{0, e}^{(1)} + n_{0, e}^{(2)})^2 c^5 \times \\ \times |1 + \varepsilon^{(2)}/\eta^{(2)} \mp |g^{(2)}/\eta^{(2)}||^2\}^{-1} < 0, \quad (8a)$$

$$\mu^{0, e} = -256\pi^2 e^2 n_{0, e}^{(2)} N_s V_0^3 v_{(T_s) \perp}^2 v_{(T_s) \parallel}^2 [(n_0^{(1)})^2 - (n_0^{(2)})^2 + (n_e^{(1)})^2 - \\ - (n_e^{(2)})^2]^2 \{ x(T_s) \parallel \omega^2 (n_{0, e}^{(1)} + n_{0, e}^{(2)})^2 c^5 |1 + \varepsilon^{(2)}/\eta^{(2)} \mp \\ \mp |g^{(2)}/\eta^{(2)}||^2 (\sqrt{u_H})^6\}^{-1} < 0. \quad (8b)$$

Выражение  $\mu^{0, e}$  переходит в формулу, полученную в [1], если пренебречь анизотропией плазм\*\*. В случае изотропных сред  $n^2 = 1 - \omega_0^2/\omega^2 \leq 1$ , поэтому усиление волн невелико; в плазме же с магнитным полем возможно эффективное усиление электромагнитных волн.

Автор признателен М. С. Коннеру, просмотревшему рукопись статьи, а также В. В. Железнякову, В. В. Тамойкину, Ю. В. Чугунову, В. К. Юллатову за полезные замечания, сделанные при обсуждении данной работы.

\* Формулы (1), (8a), (8b) получены при условии  $V_0 \gg v_{T_s}$ ; если  $V_0 \rightarrow 0$ , можно показать, что  $\mu > 0$ , т. е. система равновесна; это следует из закона Кирхгофа, который необходимо видоизменить применительно к рассматриваемому вопросу; при произвольном соотношении между  $V_0$  и  $v_{T_s}$  явное выражение для коэффициента усиления получить не удается из-за неинтегрируемости (1).

\*\* В [1] допущена опечатка: выражение для  $\mu$  необходимо умножить на  $2\pi V_0^3 v_{(T_s) \parallel}^{-5/2}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Файнштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 19 (1965); 9, № 2, 403 (1966).
2. В. М. Яковенко, Укр. физ. ж., 11, 679 (1966).
3. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 1, 14 (1959).
4. В. Е. Пахомов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 3, 484 (1962).
5. В. Е. Пахомов, ЖЭТФ, 36, № 6, 1853 (1959).
6. В. М. Яковенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 657 (1964).
7. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, Вопросы теории плазмы, вып. 3, Атомиздат, М., 1963.
8. Г. М. Гарифян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
9. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953, стр. 46.
10. В. Ф. Алексин, В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, Изв. выс. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 6, 1135 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
19 декабря 1966 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE AMPLIFICATION BY CHARGED PARTICLE  
FLOW FOR TRANSIENT RADIATION IN AN INHOMOGENEOUS  
MAGNETOACTIVE MEDIUM

*S. M. Fainstein*

The author considers the electromagnetic wave amplification by a particle flow piercing the interface of two magnetoactive media. The energy of electromagnetic waves radiated by a particle, moving along a screw line, in a magnetoactive plasma in the direction of a constant magnetic field has been calculated. It is shown that an effective interaction of waves with the charged particle flow is possible under definite conditions. Consideration is made by means of the Einstein coefficient method.

УДК 621.378.001

## К ВОПРОСУ О ПОЛУЧЕНИИ ИНВЕРСНОЙ ЗАСЕЛЕННОСТИ УРОВНЕЙ В ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ

*В. Б. Красовицкий, А. Р. Линецкий*

Рассмотрена задача о возбуждении трехуровневой системы плоской волной, частота которой близка к наибольшей из собственных частот системы. Показано, что при этом система может быть приведена в инвертированное состояние. Исследована возможность получения инверсной заселенности уровней с помощью коллективных колебаний, возбуждаемых пучком в среде.

Басовым и Прохоровым (1955) [1], а несколько позднее Бломбергением (1956) [2] была высказана идея о возможности создания трехуровневого мазера, работающего в непрерывном режиме. Существо этой идеи [2] заключалось в том, что нелинейная активная среда, представляющая собой совокупность молекул с тремя энергетическими уровнями  $E_1 < E_2 < E_3$ , находится в высокочастотном электрическом поле с частотой  $\omega$ , близкой к наибольшей из частот среды  $\Omega_{31} = (E_3 - E_1)/\hbar$ . При этом, если амплитуда поля достаточно велика, происходит выравнивание заселенностей уровней  $E_1$  и  $E_3$  (хотя в начальный момент число частиц с энергией  $E_1$  преобладало). Следовательно, появляется возможность для спонтанных переходов частиц с уровня  $E_3$  на  $E_2$ . Тем самым могут создаться условия, когда число частиц на уровне  $E_2$  превысит число частиц на  $E_1$ , и любые малые возмущения электрического поля с частотой  $\Omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$  будут усиливаться.

Ниже мы рассмотрим эту задачу, предполагая, что система трехуровневых молекул находится в поле плоской поперечной волны с частотой  $\omega = \Omega_{31}$  и фазовой скоростью, равной скорости света, и определим условия, при которых может быть получена инверсная заселенность уровней (переход  $E_2 \rightarrow E_1$ ), а также время перехода системы в инвертированное состояние.

Во второй части работы обсуждается вопрос о возможности инверсии системы с помощью пучка заряженных частиц, который в режиме пучковой неустойчивости генерирует продольную волну с частотой  $\Omega_{31}$ . В этом случае, как показано ниже, за счет эффектов коллективного взаимодействия пучка со средой можно получить инверсию на уровнях  $E_2$  и  $E_1$ .

Ниже мы считаем молекулы холодными и не учитываем диссипативных процессов, предполагая, что расстройка  $\Delta_{lk} = \omega_{lk} - \Omega_{lk}$  велика по сравнению с шириной линии поглощения вещества  $\gamma_{lk}: |\Delta_{lk}| \gg \gamma_{lk}$ .

1. Для решения поставленной выше задачи необходимо рассмотреть самосогласованную систему уравнений, состоящую из уравнений движения среды в электрическом поле и уравнений для полей. При этом мы воспользуемся «полуклассической» теорией, в которой среда описывается уравнениями квантовой механики, а уравнения для полей остаются классическими [3].

Будем искать решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 - \hat{\mu}E) \Psi, \quad (1)$$

описывающее поведение молекулы в электрическом поле, в виде

$$\Psi(r, t) = A(t) \Psi_1(r) + B(t) \Psi_2(r) + C(t) \Psi_3(r) \quad (2)$$

( $A$ ,  $B$  и  $C$  — комплексные функции времени).

При этом уровни энергии среды  $E_1 < E_2 < E_3$  определяются как средние значения оператора  $\hat{H}_0$ :  $E_i = \langle \Psi_i^* | \hat{H}_0 | \Psi_i \rangle$ , а дипольный момент молекулы имеет вид

$$\mathbf{d} = \langle \Psi^* | \hat{\mu} | \Psi \rangle = \mu_{13}(AC^* + A^*C) + \mu_{12}(AB^* + A^*B) + \mu_{23}(BC^* + B^*C), \quad (3)$$

где  $\mu_{ik}$  — средние значения оператора дипольного момента  $\hat{\mu}$  ( $\mu_{ik} = \langle \Psi_i^* | \hat{\mu} | \Psi_k \rangle$ ), соответствующие переходам  $i \rightarrow k$  ( $\mu_{ik} = \mu_{ki}$  при  $i \neq k$ ;  $\mu_{ii} = 0$ ).

Подставляя (2) в (1) и умножая обе части (1) на  $\Psi_i(r)$ , после усреднения по  $r$  получим систему уравнений для коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dA}{dt} &= E_1 A - (\mu_{12} B + \mu_{13} C) E, \\ i\hbar \frac{dB}{dt} &= E_2 B - (\mu_{12} A + \mu_{23} C) E, \\ i\hbar \frac{dC}{dt} &= E_3 C - (\mu_{13} A + \mu_{23} B) E. \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (3) описывает поведение трехуровневой молекулы во внешнем электрическом поле. Решая ее, можно определить коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  и тем самым дипольный момент молекулы  $\mathbf{d}$ .

Для того, чтобы перейти к рассмотрению процессов, происходящих в среде, состоящей из трехуровневых молекул, необходимо ввести вектор поляризации среды  $\mathbf{P} = N\mathbf{d}$  ( $N$  — число молекул).

Самосогласованная система уравнений при этом будет состоять из уравнений системы (3) и уравнения Максвелла для поля, включающего в себя поляризационный ток:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Решение системы уравнений (3), (4) будем искать в виде бегущих поперечных волн, распространяющихся со скоростью света, с медленно меняющимися со временем (за период высокочастотного поля) амплитудами:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) = & \epsilon_{13}(t) \sin \left[ \Omega_{13} \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] + \epsilon_{12}(t) \sin \left[ \Omega_{12} \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] + \\ & + \epsilon_{23}(t) \sin \left[ \Omega_{23} \left( t - \frac{z}{c} \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$A = a(t) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} E_1 \left( t - \frac{z}{c} \right) \right], \quad B = b(t) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} E_2 \left( t - \frac{z}{c} \right) \right],$$

$$C = c(t) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} E_3 \left( t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

(здесь  $a$ ,  $b$  и  $c$  — действительные коэффициенты).

Подставляя (5) в (3) и (4), усредняя по периодам высокочастотных полей  $T_{ik} = 2\pi/\Omega_{ik}$ , получим нелинейную систему уравнений для коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  и амплитуд полей  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{13}$  и  $\epsilon_{23}$ :

$$\dot{a} = \frac{1}{2\hbar} (\mu_{12} b \epsilon_{12} + \mu_{13} c \epsilon_{13}), \quad \dot{\epsilon}_{12} = 4\pi\Omega_{12} \mu_{12} Nab,$$

$$\dot{b} = \frac{1}{2\hbar} (-\mu_{12} a \epsilon_{12} + \mu_{23} c \epsilon_{23}), \quad \dot{\epsilon}_{13} = 4\pi\Omega_{13} \mu_{13} Nac, \quad (6)$$

$$\dot{c} = -\frac{1}{2\hbar} (\mu_{13} a \epsilon_{13} + \mu_{23} b \epsilon_{23}), \quad \dot{\epsilon}_{23} = 4\pi\Omega_{23} \mu_{23} Nbc.$$

При выводе системы (6) мы пренебрегли членами, квадратичными по  $\mu_{ik}$  (безразмерным параметром разложения является  $\alpha_{ik} = (2N\mu_{ik}^2/\hbar\Omega_{ik})^{1/2}$ ).

Система уравнений (6) описывает собственные колебания в трехуровневой системе (нестационарный режим)\*. Используя уравнения этой системы, можно получить интегралы движения

$$a^2 - \frac{1}{8\pi N \hbar} \left( \frac{\epsilon_{12}^2}{\Omega_{12}} + \frac{\epsilon_{13}^2}{\Omega_{13}} \right) = Q_1, \quad b^2 + \frac{1}{8\pi N \hbar} \left( \frac{\epsilon_{12}^2}{\Omega_{12}} - \frac{\epsilon_{23}^2}{\Omega_{23}} \right) = Q_2, \quad (7)$$

$$c^2 + \frac{1}{8\pi N \hbar} \left( \frac{\epsilon_{13}^2}{\Omega_{13}} + \frac{\epsilon_{23}^2}{\Omega_{23}} \right) = Q_3.$$

( $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  — константы, зависящие от начальных условий), отражающие собой закон сохранения энергии в системе среда—поле и закон сохранения вероятностей

$$E_1 a^2 + E_2 b^2 + E_3 c^2 + \frac{1}{8\pi N \hbar} \left( \frac{\epsilon_{12}^2}{\Omega_{12}} + \frac{\epsilon_{13}^2}{\Omega_{13}} + \frac{\epsilon_{23}^2}{\Omega_{23}} \right) = W_0, \quad (8)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Несложно показать, что система уравнений (6) эквивалентна системе трех нелинейных уравнений второго порядка, описывающих собой три связанных нелинейных осциллятора с частотами  $q_{12} = \sqrt{2N\mu_{12}^2\Omega_{12}/\hbar}$ ,  $q_{13} = \sqrt{2N\mu_{13}^2\Omega_{13}/\hbar}$ ,  $q_{23} = \sqrt{2N\mu_{23}^2\Omega_{23}/\hbar}$ , а задача о собственных колебаниях в трехуровневой системе может быть сведена к задаче о трех связанных двухуровневых системах [7].

2. Рассмотрим теперь задачу о «подсветке» системы внешней попечечной волнной частоты  $\Omega_{13}$  (в этом случае необходимо считать  $\epsilon_{13}(t) = \epsilon_0$ ). Кроме того, мы предположим, что вероятность перехода на ча-

\* Трехуровневые системы в сильных электрических полях (стационарный режим) рассмотрены в работах Файна [4], а преобразование частот в нелинейных (нерезонансных) средах — в работах Хохлова [5] и Бломбергена [6].

стоте  $\Omega_{12}$  мала по сравнению с вероятностями переходов  $\Omega_{13}$  и  $\Omega_{23}$ , т. е.  $\mu_{12} \ll \mu_{13}, \mu_{23}$ , и пренебрежем вначале членами, пропорциональными  $\mu_{12}$ . При этом система уравнений (6) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{\mu_{13} \varepsilon_0}{2\hbar} c, & \dot{b} &= \frac{\mu_{23} \varepsilon_{23}}{2\hbar} c, \\ \dot{c} &= -\frac{1}{2\hbar} (\mu_{13} \varepsilon_0 a + \mu_{23} \varepsilon_{23} b), & \varepsilon_{23} &= 4\pi \Omega_{23} \mu_{23} bc.\end{aligned}\quad (9)$$

Систему уравнений (9) можно упростить, если воспользоваться законом сохранения вероятностей (8). Выражая тогда  $b$  через  $a$  и  $c$  и вводя безразмерные переменные, получим

$$\begin{aligned}\ddot{a} + a &= -\frac{1}{4} \frac{q^2}{\Omega_{23} \omega_0} \sqrt{1 - a^2 - \dot{a}^2} \varepsilon_0, \\ \dot{\varepsilon} &= 4\pi \frac{\Omega_{23}}{\omega_0} \sqrt{1 - a^2 - \dot{a}^2} \dot{a},\end{aligned}\quad (10)$$

где  $\omega_0 = \mu_{13} \varepsilon_0 / 2\hbar$ ,  $q^2 = 2N\mu_{23}^2 \Omega_{23} / \hbar$ , а точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$ . Подставляя  $\varepsilon$  из второго уравнения в первое, получим нелинейное уравнение третьего порядка для  $a$ :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\ddot{a} + a}{(1 - a^2 - \dot{a}^2)^{1/2}} = -\frac{\pi q^2}{\omega_0^2} \dot{a} (1 - a^2 - \dot{a}^2)^{1/2},$$

которое с помощью замены  $b = \sqrt{1 - a^2 - \dot{a}^2}$  и  $da = \dot{a} d\tau$  может быть приведено к линейному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 b}{da^2} - \frac{\pi q^2}{\omega_0^2} b = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11), удовлетворяющее начальным условиям  $b(0) = b_0$  и  $\dot{b}(0) = 0$ , имеет вид

$$b(\tau) = b_0 \operatorname{ch} \left[ \frac{\sqrt{\pi} q}{\omega_0} (a - a_0) \right]$$

и является дифференциальным уравнением первого порядка относительно  $a$ :

$$\dot{a} = \pm \sqrt{1 - a^2 - b_0^2 \operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\sqrt{\pi} q}{\omega_0} (a - a_0) \right]}. \quad (12)$$

Мы предположим, что в начальный момент  $\tau = 0$  почти все частицы находятся на нижнем уровне ( $a_0 \approx 1$ ,  $b_0 \ll 1$ ,  $c_0 = \dot{a}_0 = 0$ ), и будем искать решения (12), при которых заселенность уровня  $E_2$  растет ( $b \rightarrow 1$ ,  $a \rightarrow 0$ ). Минимальное (максимальное) значение  $a = a_{\min}$  можно определить из условия  $\dot{a}(a_{\min}) = 0$ . Полагая в (12)  $\dot{a} = 0$ , получим следующее алгебраическое уравнение, определяющее  $a_{\min}$ :

$$1 - a_{\min}^2 - b_0^2 \operatorname{ch}^2 \left[ \frac{\sqrt{\pi} q}{\omega_0} (a_{\min} - a_0) \right] = 0. \quad (13)$$

Решение этого уравнения зависит от соотношения между параметрами  $q$  и  $\omega_0$ . В случае, когда  $\sqrt{\pi}q \ll \omega_0$ , производя замену  $\operatorname{ch}[\sqrt{\pi}q(a_{\min} - a_0)/\omega_0] \approx 1$ , получим  $a_{\min} = \sqrt{1-b_0^2} = \mp a_0$ , т. е. система совершает колебательное движение с точками поворота  $a = \pm a_0$ .

К тому же результату можно прийти непосредственно из уравнений системы (10). Действительно, пренебрегая членом, пропорциональным  $q^2$  в первом уравнении системы, получим  $a(\tau) = a_0 \cos \tau$  и  $\dot{a} = -a_0 \sin \tau^*$ .

Однако, несмотря на то, что заселенность уровня  $E_1$  периодически обращается в нуль, заселенность уровня  $E_2$  остается неизменной:

$$b^2 = 1 - a^2 - \dot{a}^2 = 1 - a_0^2 = b_0^2.$$

В обратном предельном случае  $\omega_0 \ll \sqrt{\pi}q$  уравнение (13) может иметь решение  $a_{\min} \ll a_0$ . Пренебрегая величиной  $a_{\min}$  по сравнению с  $a_0$  под аргументом гиперболического косинуса, получим

$$a_{\min}^2 = 1 - b_0^2 \operatorname{ch}^2 \left( \sqrt{\pi} a_0 \frac{q}{\omega_0} \right) \ll 1, \quad b_{\max}^2 = b_0^2 \operatorname{ch}^2 \left( \sqrt{\pi} a_0 \frac{q}{\omega_0} \right) \approx 1. \quad (14)$$

Как следует из (13),  $a_{\min}$  тем меньше, чем больше отношение  $q/\omega_0$ . Однако при  $q/\omega_0 \rightarrow \infty$  и  $b_0 \neq 0$  уравнение (13) не имеет решения (это соответствовало бы значению  $b > 1$ ), поэтому максимальное значение  $q/\omega_0$  (при заданном  $b_0$ ) можно найти из условия  $a_{\min} = 0$ :

$$b_0 \operatorname{ch} \left( \sqrt{\pi} a_0 q / \omega_0 \right) = 1.$$

Рассмотренный выше эффект допускает простое физическое объяснение. В сильном электрическом поле частоты, близкой к  $\Omega_{13}$ , частицы периодически переходят с уровня  $E_1$  на уровень  $E_3$  с частотой  $\omega_0$ , т. е. за время  $T_0 \sim 1/\omega_0$  [8]. При этом появляется возможность спонтанного перехода  $E_3 \rightarrow E_2$ , время которого обратно пропорционально частоте собственных колебаний системы  $q_{23} = \sqrt{2N\mu_{23}\Omega_{23}/\hbar}$ ,  $T_{23} \sim 1/q_{23}$ . Однако, если  $T_0 \ll T_{23}$ , то частицы будут возвращаться на уровень  $E_1$ , не успевая попасть на  $E_2$ . Поэтому заселенность уровня  $E_2$  начнет изменяться только тогда, когда время  $T_{23}$  сравняется с  $T_0$ . Эффективность рассматриваемого метода получения инверсной заселенности уровней возрастает при  $T_{23} \ll T_0$ , так как в этом случае каждая частица, попавшая на уровень  $E_3$ , перейдет на  $E_2$ . Таким образом, под действием внешней поперечной волны частоты  $\Omega_{13}$  населенность уровня  $E_2$  растет от начального значения  $b_0^2 \ll 1$  до значения  $b_{\max} \sim 1$ , причем время перехода системы в инвертированное состояние оказывается порядка  $T_0 \sim 1/\omega_0$ .

Как было показано выше, инверсная заселенность уровней может быть получена, если  $q_{23} > \omega_0$ . Это условие (совместно с условием пренебрежения собственными колебаниями с частотой  $q_{13} (\omega_0 \gg q_{13})$ ) приводит к следующему ограничению на амплитуду поля  $\epsilon_0$ :

$$\hbar\Omega_{13}N \ll \frac{\epsilon_0^2}{8\pi} < \frac{\mu_{23}^2}{\mu_{13}^2} N\hbar\Omega_{23}. \quad (15)$$

Очевидно, что условие (15) может быть выполнено только при  $\mu_{13} < \mu_{23}$ , так как  $\Omega_{13}$  всегда больше  $\Omega_{23}$ \*\*.

\* Этот случай соответствует задаче о двухуровневой системе в сильном электрическом поле [8].

\*\* Следует отметить, что учет диссипации энергии волны с частотой  $\Omega_{13}$  может существенно изменить условия получения инверсной заселенности уровней в системе. Поэтому рассмотренное выше приближение справедливо лишь при условии, что характеристическое время процесса  $T_0$  мало по сравнению с временем затухания волны:  $T_0 \ll 1/\gamma_{13}$ , где  $\gamma_{13}$  — декремент затухания волны.

До сих пор мы не учитывали спонтанных переходов с уровня  $E_2$  на  $E_1$ , считая, что время перехода  $T_{12} \sim 1/q_{12}$  велико по сравнению с  $T_0$ :  $T_{12} \gg T_0$ .

После того, как заселенность уровня  $E_2$  превысит заселенность  $E_1$  ( $b^2 \gg a^2$ ), задача сводится к исследованию спонтанных переходов в двухуровневой системе с начальными условиями  $b^2 = 1$ ,  $a^2 = 0$  [7]. Решая ее, можно определить максимальные напряженности полей, излучаемых на частоте  $\Omega_{12}$ .

Необходимую систему уравнений можно получить, полагая в системе (6)  $\mu_{23} = \mu_{13} = 0$ ,  $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$  и  $c = 0$ :

$$\dot{a} = \frac{1}{2\hbar} \mu_{12} b \epsilon_{12}, \quad \dot{b} = -\frac{1}{2\hbar} \mu_{12} a \epsilon_{12}, \quad \dot{\epsilon}_{12} = 4\pi \Omega_{12} \mu_{12} N a b. \quad (16)$$

Производя в (16) замену переменного  $a = \sin \left[ \frac{1}{2} \varphi(t) \right]$ ,  $b = \cos \left[ \frac{1}{2} \varphi(t) \right]$

(условие нормировки  $a^2 + b^2 = 1$  при этом выполняется автоматически), получим два уравнения первого порядка  $\dot{\epsilon}_{12} = 2\pi \Omega_{12} \mu_{12} N \sin \varphi$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{1}{\hbar} \mu_{12}^2 \epsilon_{12}$ , эквивалентные нелинейному уравнению второго порядка для  $\varphi(t)$ :

$$\ddot{\varphi} - q_{12}^2 \sin \varphi = 0, \quad q_{12}^2 = \frac{2\pi N \mu_{12}^2 \Omega_{12}}{\hbar}. \quad (17)$$

Первый интеграл этого уравнения имеет вид

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0^2 + 4q_{12}^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (18)$$

Полагая в (18)  $\varphi = \pi$ , можно определить  $\varphi_{\max}$ , а тем самым и  $\epsilon_{12\max}$ :

$$\epsilon_{12\max} = \sqrt{\epsilon_{12}^2(0) + 8\pi N \hbar \Omega_{12}}. \quad (19)$$

Отметим, что в начале процесса ( $\varphi \ll 1$ ), согласно уравнению (17), электрическое поле экспоненциально нарастает с показателем экспоненты, равным  $q_{12}$ .

3. Рассмотрим теперь вопрос о возможности получения инверсной заселенности уровней в трехуровневой системе с помощью электронного пучка, генерирующего (в режиме пучковой неустойчивости) продольную волну с частотой  $\Omega_{13}$ .

Исходная система уравнений по-прежнему состоит из уравнений состояния среды (3) и уравнений Максвелла (4) для полей  $E_{23}$  и  $E_{12}$ , которые необходимо дополнить уравнением для поля  $E_{13}$ , учитывающим наличие пучка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (E_{13} + 4\pi P_{13}) + \omega_0^2 E_{13} = 0, \quad (20)$$

где  $v_0$  — начальная скорость пучка,  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$  — ленгмюровская частота пучка. (Это уравнение можно получить путем совместного решения линеаризованных уравнений движения, уравнения непрерывности и уравнения Пуассона.) Решение (3), (4) и (20) будем искать в виде бегущих электромагнитных волн с зависящими от времени амплитудами. Кроме того, предположим, что вся рассматриваемая система помещена в замедляющую структуру, так что фазовая скорость  $v_\phi$  электромагнитных волн в системе меньше скорости света:  $v_\phi < c$ . При этих

предположениях уравнения для  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  останутся такими же, как в (6), а из уравнения (20) получим

$$\dot{\varepsilon}_{13} = -4\pi\omega_0 N \mu_{13} ac. \quad (21)$$

При выводе (21) мы считали, что выполнено следующее соотношение между скоростью пучка  $v_0$  и фазовой скоростью волны:  $\Omega_{13}(v_0/v_\phi - 1) = \omega_0$  (условие аномального эффекта Допплера [9]), т. е. частота волны  $\Omega_{13}$ , пересчитанная в систему отсчета пучка, движущегося со скоростью, большей фазовой скорости волны, равна собственной частоте колеабионного пучка  $\omega_0$ .

Мы снова предположим, что  $\mu_{13} \ll \mu_{23}$ ,  $\mu_{23}$ , и, как и в разделе втором, не будем рассматривать переходов  $E_2 \rightarrow E_1$ . Тогда полная система уравнений рассматриваемой задачи принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\mu_{13}}{2\hbar} \varepsilon_{13} \sqrt{1-a^2-b^2}, & \dot{\varepsilon}_{13} &= 4\pi\omega_0 N \mu_{13} a \sqrt{1-a^2-b^2}, \\ \dot{b} &= \frac{\mu_{23}}{2\hbar} \varepsilon_{23} \sqrt{1-a^2-b^2}, & \dot{\varepsilon}_{23} &= -4\pi\Omega_{23} N \mu_{23} b \sqrt{1-a^2-b^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где мы воспользовались условием нормировки:  $c = \sqrt{1-a^2-b^2}$ .

Поля  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  можно исключить из уравнений (22), если воспользоваться соотношениями

$$\varepsilon_{13} = \sqrt{8\pi N \hbar \omega_0 (a_0^2 - a^2)}, \quad \varepsilon_{23} = \sqrt{8\pi N \hbar \Omega_{23} (b^2 - b_0^2)}, \quad (23)$$

которые можно получить из уравнений (22). Подставляя (23) в (22), получим два нелинейных уравнения для  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \sqrt{\frac{2\pi N \mu_{13} \omega_0}{\hbar}} \sqrt{(a_0^2 - a^2)(1-a^2-b^2)}, \\ \dot{b} &= \sqrt{\frac{2\pi N \mu_{23} \Omega_{23}}{\hbar}} \sqrt{(1-a^2-b^2)(b^2 - b_0^2)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Первый интервал (24) можно получить, если почленно разделить одно уравнение на другое и проинтегрировать:

$$a = a_0 \cos \left( \frac{\mu_{13}}{\mu_{23}} \sqrt{\frac{\omega_0}{\Omega_{23}}} \operatorname{arcch} \frac{b}{b_0} \right). \quad (25)$$

Подставляя  $a$  из (25) в (24), получим нелинейное уравнение первого порядка для  $b$ :

$$b = \sqrt{\frac{2\pi N \mu_{23} \Omega_{23}}{\hbar}} b \left\{ 1 - b^2 - a_0^2 \cos^2 \left( \frac{\mu_{13}}{\mu_{23}} \sqrt{\frac{\omega_0}{\Omega_{23}}} \operatorname{arcch} \frac{b}{b_0} \right) \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Если считать, что в начальный момент частица находилась на уровне  $E_1$  ( $a_0 \approx 1$ ,  $b_0 \ll 1$ ), то с течением времени число частиц на уровне  $E_2$  возрастает. Максимальную заселенность уровня  $E_2$  можно найти из условия  $b(b_{\max}) = 0$ :

$$1 - b_{\max}^2 - a_0^2 \cos^2 \left( \frac{\mu_{13}}{\mu_{23}} \sqrt{\frac{\omega_0}{\Omega_{23}}} \operatorname{arcch} \frac{b_{\max}}{b_0} \right) = 0. \quad (27)$$

Оптимальное соотношение между плотностью пучка и параметрами среды можно получить, полагая в (27)  $b_{\max} = 1$ :

$$\frac{\mu_{1,3}}{\mu_{2,3}} \sqrt{\frac{\omega_0}{\Omega_{1,3}}} \operatorname{arccch} \frac{1}{b_0} = \frac{\pi}{2}. \quad (28)$$

Физическая возможность инверсии с помощью пучка можно объяснить следующим образом. Пучок заряженных частиц, движущийся в диэлектрике со скоростью, большей фазовой скорости в среде, неустойчив: энергия его движения переходит в энергию электромагнитной волны. При этом молекулы среды могут поглощать энергию волны, если ее частота близка к одной из собственных частот, и переходить на более высокие энергетические уровни [7].

В заключение отметим, что, так как переход системы с уровня  $E_1$  на  $E_3$  происходит за время  $T_0 \sim (\sqrt{\Omega_{1,3}/\omega_0})/q_{1,3}$ , а время спонтанного перехода  $E_3 \rightarrow E_1$  (с излучением поперечной волны)  $T_{1,3} \sim 1/q_{1,3}$ , для того, чтобы рассматриваемый механизм инверсии работал, необходимо использовать пучки достаточно большой плотности:  $\omega_0 > \Omega_{1,3}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Басов, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 28, 249 (1955).
2. N. Blombergen, Phys. Rev., 104, 324 (1956).
3. E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE, 51, 126 (1963).
4. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, М., 1964, стр. 1962.
6. J. A. Armstrong, N. Blombergen, J. Dusing, P. S. Pershan, Phys. Rev., 127, 1918 (1962).
7. В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко, ЖЭТФ, 48, 353 (1965).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963, стр. 173.
9. J. Neufeld, Phys. Rev., 116, 785 (1959).

Поступила в редакцию  
9 января 1967 г.

#### A PROBLEM OF OBTAINING THE INVERSE REPOPULATION OF LEVELS IN THREE-LEVEL SYSTEM

V. B. Krasovitskii, A. R. Linetskii

There is considered a problem of exciting a three-level system by a plane wave, the frequency of which is close to the highest of the natural frequencies of the system. It is shown that in this case the system may be transformed into inverted state. The possibility of obtaining the inverse repopulation of levels by means of collective oscillations excited by a beam in a medium is investigated.

УДК 621.378.001

## К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОПТИЧЕСКОМ КВАНТОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ

*E. С. Коваленко, A. B. Пуговкин*

Рассматриваются малые нестационарные колебания в ОКГ на твердом теле с учетом пространственной неоднородности инверсии населенностей при генерации произвольного числа мод. Показано, что из всех возможных стационарных состояний устойчивым является только одно. Для малых колебаний относительно этого устойчивого состояния найдены частоты осцилляций выходного излучения и времена их затуханий. Анализируется зависимость спектра осцилляций и времен затуханий от числа генерируемых мод и уровня накачки.

В большинстве работ [<sup>1-3</sup>], посвященных исследованию нестационарных колебаний в лазерах на твердом теле, рассматривается одномодовый режим. Однако известно, что почти все ОКГ генерируют одновременно на многих модах. Это обстоятельство является наиболее важным, и учет его при сколько-нибудь детальном анализе процессов в ОКГ является обязательным.

Рассмотрение нестационарных процессов в ОКГ для многомодового случая осложняется тем, что лазер является существенно распределенной системой, в которой малые изменения разности населенностей с периодом  $\lambda/2$  по оси кристалла приводят к значительной связи между отдельными модами. Последнее уже учитывалось [<sup>4-6</sup>] при рассмотрении стационарных колебаний. При исследовании нестационарных процессов учет неоднородности населенностей проведен для случая одной или двух мод [<sup>4, 7</sup>]. При этом решение ограничено либо качественным анализом уравнений, либо их численным интегрированием.

Случай малых нестационарных колебаний в ОКГ при генерации произвольного числа мод рассмотрен в [<sup>10</sup>]. Предполагалось, что накачка мала, пространственной неоднородностью равновесной разности населенностей можно пренебречь и параметр накачки  $\alpha$  принять равным 1. При этом расчет частот осцилляций выходного излучения и соответствующих декрементов затухания сведен к вычислению некоторого определителя и доведен до конца в случае равных амплитуд всех мод в спектре генерируемых колебаний.

Ниже мы также ограничимся случаем малых колебаний относительно равновесного режима при произвольном числе мод. Однако в отличие от [<sup>10</sup>] накачка не предполагается малой и расчет нестационарных колебаний доводится до той же степени точности, которая получена при исследовании многомодового стационарного режима в [<sup>5, 8</sup>]. Такой расчет позволяет проверить устойчивость различных видов стационарных колебаний, получить спектр возможных частот осцилляций выходного излучения и времена затухания при учете пространственной неоднородности разности населенностей рабочих уровней ОКГ.

В основу анализа нестационарных колебаний берутся скоростные уравнения Танга [<sup>4</sup>]. В общем случае эти уравнения имеют вид

$$\dot{N}_\lambda + \gamma_\lambda N_\lambda = D g_\lambda N_\lambda \int_0^L A_\lambda^2 n dz, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (n - n_0) = - 2D \sum_\lambda g_\lambda N_\lambda n A_\lambda^2$$

$$(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где  $N_\lambda$  — число фотонов в  $\lambda$ -моде;  $\gamma_\lambda$  — затухание резонатора;  $T_1$  — время продольной релаксации;  $n$  — разность населенностей рабочих уровней;  $n_0$ ,  $D$  — величины, определяемые накачкой;  $g_\lambda$  — функция, описывающая форму линии;  $A_\lambda^2 = 1 - \cos(2k_\lambda z)$ ;  $k_\lambda$  — волновое число  $\lambda$ -моды;  $L$  — длина кристалла.

Уравнения (1) не являются точными. Их ограниченность непосредственно вытекает из результатов более строгого рассмотрения процессов в ОКГ, полученных в [7, 9, 11, 12]. Тем не менее можно полагать, что при генерации на аксиальных модах и не очень большой длине резонатора система (1) описывает работу модели, достаточно близкую к реальному лазеру.

Полагая в (1) производные по  $t$  равными нулю, получим уравнения, определяющие стационарные колебания. Таких колебаний бесчисленное множество, однако, как видно из дальнейшего, почти все они неустойчивы.

Пусть генерируются первые  $(2k+1)$  мод, симметричных относительно центра линии люминесценции. Число фотонов в  $\lambda$ -моде в этом случае определяется из (1) и будет равно [5]

$$\bar{N}_\lambda = \frac{\beta(\alpha - \beta/g_\lambda)/g_\lambda}{\alpha D T_1} \quad (\lambda = 0, \pm 1, \dots, \pm k), \quad (2)$$

$$\bar{N}_\lambda = 0 \quad (|\lambda| > k),$$

где  $\alpha = DLn_0/\gamma$  — параметр накачки,

$$\beta = \frac{\alpha}{2 \sum_{|\lambda|<k} (1/g_\lambda)} \left[ 2k + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} \sum_{|\lambda|<k} (1/g_\lambda)} \right]. \quad (3)$$

Здесь принято, что потери для всех мод одинаковы.

При рассмотрении нестационарных колебаний полагаем

$$\begin{aligned} N_\lambda(t) &= \bar{N}_\lambda + x_\lambda, \\ n(t) &= \bar{n} + \Delta n, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x_\lambda$  и  $\Delta n$  — малые величины. В линейном приближении для  $x_\lambda$  и  $\Delta n$  получим уравнения

$$\dot{x}_\lambda = D g_\lambda \bar{N}_\lambda \int_0^L \Delta n A_\lambda^2 dz, \quad (5)$$

$$\dot{\Delta n} + \frac{1}{T_1} \frac{n_0}{\bar{n}} \Delta n = - 2D \bar{n} \sum_\lambda g_\lambda x_\lambda A_\lambda^2,$$

решения которых отыскиваем в виде

$$\Delta n = \bar{\Delta n} \exp(p\tau), \quad x_\lambda = \bar{x}_\lambda \exp(p\tau), \quad \tau = \frac{t}{T_1}.$$

В результате для определения  $p$  и  $x_\lambda$  получим

$$\begin{aligned} px_\lambda + \sum_{\lambda'} a_{\lambda\lambda'}(p) \bar{x}_{\lambda'} &= 0 \quad (|\lambda| \leq k), \\ \left[ p + \Gamma \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} g_\lambda \right) \right] \bar{x}_\lambda &= 0 \quad (|\lambda| > k), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\lambda\lambda'}(p) &= 2UT_1^2 g_\lambda g_{\lambda'} \bar{N}_\lambda \int_0^L \frac{A_\lambda^2 A_{\lambda'}^2 \bar{n}}{p + n_0/\bar{n}} dz, \\ \Gamma &= \gamma T_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (6) распадаются на две независимые системы для генерируемых и негенерируемых мод. Из уравнений для негенерируемых мод находим

$$p_\lambda = -\Gamma \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} g_\lambda \right) \quad (|\lambda| \geq k+1).$$

Граница устойчивости

$$p_\lambda = 0$$

определяет некоторое  $\lambda = j(\alpha, k)$ , для которого решение не обязательно целое. Очевидно, неравенство

$$j > k + 1$$

является необходимым условием неустойчивости генерации  $2k+1$  моды. В случае

$$k < j < k + 1 \quad (8)$$

режим является устойчивым по отношению к малым отклонениям числа фотонов негенерируемых мод от нулевых равновесных значений. Наконец, генерация при  $j < k$  невозможна, поскольку при этом число фотонов в модах с  $j < \lambda \leq k$  отрицательно.

Итак, необходимым условием устойчивости генерации  $2k+1$  моды является неравенство (8). В частности, из (8) непосредственно следует, что при

$$\alpha > \frac{(1 + \xi^2)^2}{1 - \xi^2}, \quad \xi = \frac{\delta v}{\Delta v} \quad (9)$$

одномодовый режим неустойчив. В (9)  $\delta v$  — расстояние между модами,  $\Delta v$  — ширина линии. Генерация  $2k+1$  моды неустойчива вне интервала накачек

$$\frac{(1 + k^2 \xi^2)^2}{1 - \xi^2 k (8k^2 - 3k - 2)/3} < \alpha < \frac{[1 + (k+1)^2 \xi^2]^2}{1 - \xi^2 (k+1) (8k^2 + 13k + 3)/3}. \quad (10)$$

Для нахождения достаточного условия устойчивости необходимо рассмотреть первую группу уравнений (6). В общем случае интеграл

в (7) точно не вычисляется. Разлагаем подынтегральное выражение по параметру

$$\frac{\beta - 1}{\beta} \sum_{|\lambda| < k} m_\lambda \cos(2k_\lambda z),$$

где  $m_\lambda$  — относительное число фотонов в  $\lambda$ -моде,

$$m_\lambda = \frac{g_\lambda N_\lambda}{\sum_\lambda g_\lambda N_\lambda}.$$

Ограничиваюсь первыми двумя членами разложения, получим

$$a_{\lambda\lambda'} = rg_\lambda m_\lambda \left[ 1 + \frac{\delta_{\lambda\lambda'}}{2} - t(m_\lambda + m_{\lambda'}) \right].$$

В последнем соотношении введены обозначения

$$r = \frac{\Gamma(\beta - 1)}{p(p + \beta)} \frac{\alpha}{\beta}, \quad t = \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta - 1}{p + \beta} + \frac{\beta - 1}{\beta} \right].$$

В большинстве случаев ширина генерируемой линии значительно меньше ширины линий люминесценции. При этом величина  $\beta$  оказывается очень близкой к  $\alpha$  и различием между  $g_\lambda$  при вычислении характеристических чисел  $p$  можно пренебречь. Тогда уравнения для  $\bar{x}_\lambda$  примут вид

$$\bar{x}_\lambda \left( 1 + \frac{1}{2} rm_\lambda \right) + rm_\lambda (1 - tm_\lambda) \sum_{\lambda'} \bar{x}_{\lambda'} - trm_\lambda \sum_{\lambda'} m_{\lambda'} \bar{x}_{\lambda'} = 0 \quad (|\lambda| \leq k). \quad (11)$$

Система  $2k + 1$  уравнений (11) легко сводится к двум уравнениям относительно сумм  $\bar{x}_\lambda$  и  $m_\lambda \bar{x}_\lambda$ . Приравнивая определитель последних нулю, получим характеристическое уравнение для  $p$ :

$$\frac{(p + 2\alpha - \alpha^2)^2}{2p(p + \alpha)(p + 2\alpha)[(\alpha + 1)p + 2\alpha] + 2\Gamma(p + \alpha)^2\alpha^3 - \bar{m}^2\Gamma(\alpha - 1)^2(p + 2\alpha)^2} + \\ + \frac{(\alpha - 1)m_0/2}{p(p + \alpha) + \frac{1}{2}(\alpha - 1)\Gamma m_0} + \sum_{\lambda=1}^k \frac{(\alpha - 1)m_\lambda}{p(p + \alpha) + \frac{1}{2}(\alpha - 1)m_\lambda\Gamma} = 0, \quad (12)$$

где

$$\bar{m}^2 = \sum_{|\lambda| < k} m_\lambda^2.$$

Уравнение (12) может быть использовано лишь при  $k > 0$ . При  $k = 0$ , т. е. при генерации одной моды, интеграл (7) вычисляется строго, так что уравнение для  $p$  будет иметь вид

$$p + \frac{\Gamma\alpha}{\alpha - 1} \left[ 1 + \frac{1}{p\sqrt{2\alpha - 1}} + \frac{(p + 1)^2}{p\sqrt{(p + 2\alpha - 1)(p + 1)}} \right] = 0. \quad (13)$$

Квадратный корень в (13) определен на плоскости  $p$ , разрезанной по вещественной оси между точками

$$1 - 2\alpha < p < -1,$$

причем при  $p$  вещественных и больших  $-1$ ,  $\sqrt{(p+1)(p+2\alpha-1)}$  берется со своим арифметическим значением.

После несложных преобразований решение (13) сводится к отысканию корней полинома четвертой степени. Применяя критерий Рауса—Гурвица, убедимся, что все корни  $p$  имеют отрицательные вещественные части. Это означает, что (9) является не только необходимым, но и достаточным условием неустойчивости одномодового режима. При вычислении  $p$  из уравнения (13) следует принять во внимание, что величина  $\Gamma \sim 10^4 \div 10^5$ . Поэтому в выражении

$$p = -\delta \pm i\omega$$

для  $\delta$  и  $\omega$  можно ограничиться старшими членами в разложениях по степеням  $\Gamma/\sqrt{\Gamma}$ . В результате получим

$$\omega = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha-1} \left( 2 - \alpha - \frac{1}{\sqrt{2\alpha-1}} \right)}; \quad (14)$$

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-2 + 1/\sqrt{2\alpha-1}}. \quad (15)$$

Выражение (14) для частоты осцилляций  $\omega$  оказывается несправедливым лишь для очень малых значений  $\alpha - 1 \sim 1/\sqrt{\Gamma}$ , когда необходимо учесть более высокие члены разложения.

Аналогичным образом анализируется (12). Это уравнение имеет степень  $2k+4$ . Можно убедиться, что  $2k+2$  корней (12) имеют порядок  $\Gamma^{1/2}$  и два корня порядка 1. Появление двух последних корней есть дефект вычислений, связанный с разложением интеграла (7) в ряд и удержанием лишь конечного числа членов. Эти два корня должны быть отброшены.

При нахождении частот осцилляций можно пренебречь затуханием. Тогда, полагая

$$p = \sqrt{\frac{\Gamma}{2} (\alpha-1) \zeta}$$

и удерживая в (12) старшие члены разложения по  $\Gamma^{-1/2}$ , получим

$$\frac{1}{(\lambda^2-1)\zeta + 2\alpha^2 - \bar{m}^2(\alpha-1)^2} + \frac{m_0}{\zeta + m_0} + \sum_{\lambda=1}^k \frac{2m_\lambda}{\zeta + m_\lambda} = 0. \quad (16)$$

Функция, стоящая в левой части (16), очевидно, имеет  $k+2$  полюса, расположенных на вещественной оси. Любой из корней (16) заключен в интервале между двумя полюсами

$$\begin{aligned} -m_{\lambda+1} &> \zeta_\lambda > -m_\lambda, \\ -m_0 &> \zeta_{k+1} > -\frac{2\alpha^2 - \bar{m}^2(\alpha-1)^2}{\alpha^2 - 1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому все  $\zeta_\lambda$  вещественны и отрицательны и определяют частоты осцилляций  $\omega_\lambda = ip_\lambda$ .

Затухание осцилляций может быть исследовано путем удержания в (12) двух членов разложения по  $\Gamma^{-1/2}$ . Формулы, которые при этом получаются, громоздки и здесь не выписываются. Анализ их показыва-

ет, что все вещественные части корней  $\delta_\lambda$  отрицательны. Таким образом, неравенства (8) или (10) являются необходимым и достаточным условием устойчивости генерации  $2k+1$  моды.

На рис. 1 представлена зависимость частот осцилляций и соответствующих декрементов затухания от параметра накачки для случая генерации одной и трех мод. При генерации одной моды частота осцилляций наиболее высокая и приблизительно в  $(3/2)^{1/2}$  раза больше той, которая следует из рассмотрения генерации без учета неоднородности разности населенностей рабочих уровней. Характер зависимости от  $\alpha$  сохраняется. При генерации трех мод осцилляции уже двухчастотные. Одна из частот близка к одномодовому случаю, вторая значительно меньше.

С увеличением числа мод спектр осцилляций усложняется, но в нем можно выделить две группы частот. Первая, высокочастотная, состоит из одной линии, расположенной вблизи одномодовой частоты осцилляций. Остальные лежат весьма близко друг к другу в низкочастотной области. С ростом числа мод разница в частотах этих двух групп увеличивается. Качественно картина та же, что и в случае малых накачек, когда неоднородностью равновесной разности населенностей можно пренебречь [10]. Количественно частоты осцилляций даются уравнением (16). Спектр частот осцилляций для генерации различного числа мод приведен на рис. 2.

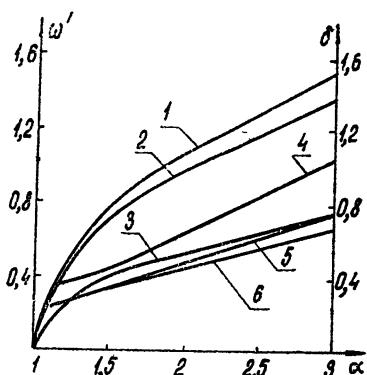


Рис. 1. Зависимость  $\omega' = \omega\Gamma^{-1/2}$  и  $\delta$  от параметра накачки  $\alpha$  при различном числе генерируемых мод:

1— $\omega'(\alpha)$  при  $j=0$ ; 2, 3— $\omega'(\alpha)$  при  $j=1$ ;  
4— $\delta(\alpha)$  при  $j=0$ ; 5, 6— $\delta(\alpha)$  при  $j=1$ .

Для одномодового режима затухание осцилляций растет с увеличением накачки. При генерации трех мод затухание осцилляций уменьшается, причем характер зависимости величины затухания от параметра накачки сохраняется.

Физический смысл различных решений может быть выяснен на основе анализа соотношений (11), (16). При этом обнаруживается, что высокочастотная составляющая спектра соответствует колебаниям интенсивности выходного излучения. В системе возможны также процессы перераспределения энергии между различными модами. Эти процессы протекают значительно медленнее и им соответствуют низкочастотные составляющие спектра осцилляций.

Таким образом, проведенные расчеты дают условия устойчивости различных видов стационарных колебаний и показывают, что в случае многомодовой генерации осцилляции выходного излучения сильно

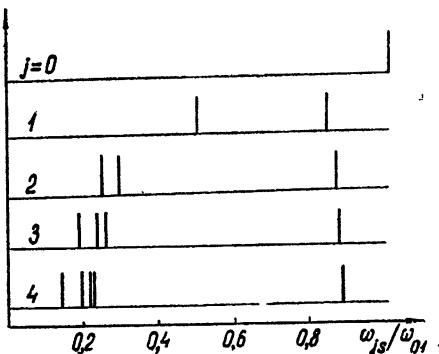


Рис. 2. Спектр частот осцилляций при генерации различного числа мод. При вычислениях принято  $j=k+1$  и  $\alpha=1,05$ .

усложняются. Поскольку отдельные спектральные составляющие осцилляций независимы, то их форма может приобрести случайный характер. Возможно, что в некоторых случаях для описания выходного излучения достаточно учесть колебания только около одного из стационарных состояний, включающего в себя  $(2k+1)$  моду, так как все прочие виды колебаний имеют время затухания или раскачки порядка периода осцилляций.

### ЛИТЕРАТУРА

1. H. Statz, G. de Mars, *Quantum Electronics*, № 4, 1960.
2. В. Н. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 70 (1965).
3. А. Н. Ораевский, А. В. Успенский, Труды ФИАН, Квантовая радиофизика, 31, 96 (1965).
4. C. L. Tang, H. Statz, G. de Mars, J. Appl. Phys., 34, 2289 (1963).
5. Б. Л. Лифшиц, В. Н. Цикунов, ЖЭТФ, 49, 1843 (1965).
6. В. С. Машкевич, Основы кинетики излучения лазеров, Наукова думка, Киев, 1966.
7. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, ДАН СССР, 162, 781 (1965).
8. Ю. А. Ананьев, Б. М. Седов, ЖЭТФ, 48, 782 (1965).
9. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 49, 1535 (1965).
10. Б. Л. Лифшиц, В. Н. Цикунов, Укр. физич. ж., 10, 1267 (1965).
11. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 81 (1965).
12. Е. С. Коваленко, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 10, № 2, 197 (1967).

Поступила в редакцию  
12 сентября 1966 г.

### TO THE THEORY OF NON-STATIONARY OSCILLATIONS IN SOLID-STATE LASER

*E. S. Kovalenko, A. V. Pougovkin*

Small non-stationary oscillations in a solid-state laser are considered with taking into account spatial inhomogeneities of popularity inversion in generating an arbitrary number of modes. It is shown that of all possible stationary states only one is stable. There have been found the frequency of oscillations of output radiation and their die-away times for small oscillations relative to this stable state. The dependence of oscillation spectrum and the die-away times on a number of generating modes and pumping level is analized.

УДК 539.285

## МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В ОПТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННОМ $\text{He}^3$

*В. Г. Показаньев, Л. И. Якуб, Г. В. Скроцкий*

Рассматривается магнитный резонанс в системе оптически ориентированных атомов  $\text{He}^3$ . Обсуждается возможность наблюдения магнитных переходов в ортогелии и в ядерной системе парагелия.

Изучение магнитного и оптического резонанса в  $\text{He}^3$  привлекает в настоящее время все большее внимание. Это обусловлено не только новыми возможностями в исследовании его различных физических свойств, но и рядом практических применений.

Ориентация атомов  $\text{He}^3$  в  $2^3S_1$  состоянии при оптической накачке невелика. Это связано с наличием весьма эффективного механизма релаксации, который обусловлен обменом метастабильностью в  $2^3S_1$  состоянии с атомами в основном состоянии. Характерное время релаксации  $\tau_p = 10^{-6}$  сек [1] много меньше времени тепловой релаксации  $\tau_e = 10^{-4}$  сек.

Обменные столкновения атомов ортогелия с атомами парагелия приводят к значительной поляризации ядер в основном состоянии. В состоянии равновесия устанавливается определенная зависимость между степенью ориентации метастабильных атомов и ядер. Это обстоятельство является существенным при попытке изучить поведение ядерной системы на основе наблюдения соответствующих изменений в ортогелии. Сюда следует отнести детектирование магнитного резонанса на ядерных подуровнях по изменению сигнала накачки в ортогелии. Это явление положено в основу создания магнетометра [2, 3], в котором нет оптического сдвига резонанса, поскольку оптическое излучение не действует непосредственно на подуровни, между которыми вызывается резонанс.

Степень ориентации атомов определяется многими факторами, в том числе составом света. При облучении атомов светом, вызывающим  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$  переходы, ориентация атомов, как показывают оценки, очень мала. Если свет вызывает только переходы  $2^3S_1 - 2^3P_0$  ( $D_0$ -линия), то степень ориентации увеличивается. Такие переходы можно возбудить, облучая ячейку с  $\text{He}^3$  светом  $\text{He}^4$ . Из анализа относительных вероятностей переходов нетрудно заметить, что при облучении  $D_0$  светом можно выделить один подуровень с преимущественным заселением. Выделение такого подуровня особенно желательно при рассмотрении многоуровневой системы. Это в значительной степени упрощает интерпретацию физических результатов, получаемых на практике.

В настоящей работе рассматривается магнитный резонанс на оптически ориентированных атомах ортогелия в слабых магнитных полях и обсуждается возможность наблюдения магнитных переходов как в ортогелии, так и в ядерной системе парагелия.

Действие радиочастотного поля в радиооптическом резонансе, как известно, проявляется в изменении интенсивности  $z$ -луча и модуляции поперечного луча. Нужно заметить, что в общем случае модуляция обнаруживается не только на частоте радиочастотного поля  $\omega_0$ , но и на кратных частотах. Это следует из того факта, что радиочастотное поле создает когерентность не только между соседними магнитными подуровнями, но и между подуровнями с  $\Delta m_F > 1$ . Наряду с этим радиочастотное поле производит еще сдвиг пика резонансной кривой. Рассмотрим эти вопросы для  $\text{He}^3$ .

Предположим, что вращающееся радиочастотное поле частоты  $\omega_0$  приложено в плоскости, перпендикулярной к направлению поля  $H_0$ . Частота  $\omega_0$  порядка частоты зеемановских переходов между подуровнями сверхтонкого уровня  $F = 3/2$  ( $F = I + S$ , где  $I$  — ядерный,  $S$  — электронный моменты).

Гамильтониан атома имеет вид

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1(t), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(t) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \Omega_s S_+ + \Omega_I I_+ \right) \exp(-i\omega_0 t) + \left( \Omega_s S_- + \Omega_I I_- \right) \exp(i\omega_0 t) \right], \\ \Omega_s &= \gamma_s H_1, \quad \Omega_I = \gamma_I H_1, \quad S_{\pm} = S_x \pm iS_y, \end{aligned}$$

$H_1$  — амплитуда радиочастотного поля,

$$\tilde{H}_0 = -a(IS) + \gamma_s H_0 S + \gamma_I H_0 I.$$

В последнем соотношении  $a$  — константа сверхтонкого взаимодействия,  $\gamma_s$  и  $\gamma_I$  — гиромагнитные отношения электронного и ядерного моментов.

Решение уравнения Шредингера дает

$$\Psi(t) = \exp(-iF_z\omega_0 t) \exp(-i(\tilde{H}_0 + \Omega_s S_x + \Omega_I I_x - \omega_0 F_z) t) \Psi(0). \quad (2)$$

Первый экспоненциальный оператор в выражении (2) диагонален в представлении  $F_z$ . Оценка второй экспоненты связана с диагонализацией матрицы энергии, представленной оператором  $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \Omega_s S_x + \Omega_I I_x - \omega_0 F_z$ . Диагонализация этой матрицы в представлении  $F_z$  приводит к секулярному уравнению 6-ой степени [4]. К сожалению, точное решение этого уравнения получить нельзя. Однако, как упоминалось выше, для наших целей достаточно рассмотреть систему трех уровней сверхтонкого мультиплета с  $F = 3/2$ , а именно,  $(F, m_F) = (3/2, 3/2), (3/2, 1/2), (3/2, -1/2)$ . Уровень  $(3/2, 3/2)$  с преимущественным заселением. Энергии этих уровней в постоянном магнитном поле (обозначим их через  $E_1, E_2, E_3$  соответственно) находятся из уравнения

$$\begin{aligned} E \left( 1 \pm \frac{1}{2}, m_F \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{2} + 2\gamma_s H_0 m_F \mp \frac{3}{2} a \left( 1 + \frac{8}{9} m_F x + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4}{9} x^2 \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$x = (\gamma_s - \gamma_I) H_0 / a.$$

Тогда уравнение шестой степени сводится к кубическому уравнению [5]. Обозначая собственные значения  $\tilde{H}$  через  $(E_2 + \omega_0/2)$ , получим

$$\begin{vmatrix} \Delta\omega - \sigma & A & 0 \\ A & -\sigma & B \\ 0 & B & -\Delta\omega - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{\Omega_s}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{2}{9} x \right), \quad B = \frac{2}{3} \Omega_s, \quad \Delta\omega = \frac{1}{2} (E_1 - E_3) - \omega_0.$$

Уравнение (4) записано в приближении слабого магнитного поля ( $x \ll 1$ ). Оно имеет три корня:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2r \cos \left[ \frac{1}{3} (\pi - \varphi) \right], \\ \sigma_2 &= 2r \cos \left[ \frac{1}{3} (\pi + \varphi) \right], \\ \sigma_3 &= -2r \cos (\varphi/3), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$r = \left[ \frac{\Delta\omega^2}{3} + \frac{\Omega_s^2}{27} \left( 7 + \frac{4}{3} x \right) \right]^{1/2}, \quad \cos \varphi = \frac{\Delta\omega \Omega_s^2}{18r^3} \left( 1 - \frac{4}{3} x \right).$$

Предположим, что в момент времени  $t=0$  атом находится на подуровне ( $F, m_F$ ) = (3/2, 3/2). Тогда, опуская несложные вычисления, состояние системы можно записать в виде

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} C_{11} \exp \left( -i \frac{3}{2} \omega_0 t \right) \\ 0 \\ C_{21} \exp \left( -i \frac{\omega_0}{2} t \right) \\ 0 \\ C_{31} \exp \left( i \frac{\omega_0}{2} t \right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$C_{kl} = \sum_j \alpha_j^{(k)} \alpha_j^{(l)} \exp(-i\sigma_j t) \exp \left( -i \left( E_3 - \frac{\omega_0}{2} \right) t \right),$$

$$\alpha_j^{(1)} = \frac{A}{\sigma_l - \Delta\omega} \alpha_j^{(3)} = \frac{A}{B} \frac{\sigma_l + \Delta\omega}{\sigma_l - \Delta\omega} \alpha_j^{(5)}, \quad (7)$$

$$\alpha_j^{(5)} = \left[ 1 + \frac{(\sigma_l + \Delta\omega)^2}{B^2} + \left( \frac{A}{B} \right)^2 \left( \frac{\sigma_l + \Delta\omega}{\sigma_l - \Delta\omega} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Коэффициенты  $\alpha_j^{(k)}$  определяют собственные состояния оператора  $\tilde{H}$  и зависят от резонансных условий.

На основании выражения (6) можно найти вероятность того, что атом покинет подуровень  $m_F = 3/2$  под действием радиочастотного возмущения:

$$W = 1 - |C_{11}|^2. \quad (8)$$

Эта вероятность обусловлена переходами с изменением квантового числа на единицу и на две. Первые представляют собой обычные переходы, вторые — двойные. Как следует из общей теории многоквантовых переходов [6], под действием радиочастотного поля резонанс должен смещаться. В нашем приближении ( $x \ll 1$ ) для двойных переходов сдвиг не обнаруживается. При обычных переходах он пренебрежимо мал. Тогда можно принять, что

$$\sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 = -\sigma_3 = [\Delta\omega^2 + \alpha\Omega_s^2]^{1/2},$$

и вероятность  $W$  равна

$$W = \frac{8}{9\alpha} \frac{\Omega_s^2}{\Delta\omega^2 + \alpha\Omega_s^2} \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\Delta\omega^2 + \alpha\Omega_s^2} t \right] + \\ + \frac{1}{9} \frac{\Omega_s^4}{(\Delta\omega^2 + \alpha\Omega_s^2)} \sin^2 \left[ \sqrt{\Delta\omega^2 + \alpha\Omega_s^2} t \right], \quad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{9} \left( 7 + \frac{4}{3} x \right).$$

Это общеизвестные выражения для простых и двухквантовых переходов.

Радиочастотное поле, действующее на систему с угловым моментом  $F$ , вызывает вынужденную прецессию его поперечной составляющей. Свойства света, прошедшего через систему в поперечном к полю  $H_0$  направлении, как раз определяются поперечной компонентой  $F_{\perp}$  общего углового момента. Отсюда следует, что вынужденная прецессия приводит к модуляции поперечного угла. Нетрудно убедиться, что для рассматриваемых трех уровней вероятность нахождения системы в собственном состоянии оператора  $F_x$ , принадлежащем собственному значению  $3/2$ , определяется выражением

$$W' = \frac{1}{8} \{ 1 + 2|C_{31}|^2 + 2|C_{51}|^2 + 2\sqrt{3} \operatorname{Re} [(C_{11}^* C_{31} + \\ + \sqrt{3} C_{31}^* C_{51}) \exp(i\omega_0 t)] + 2\sqrt{3} \operatorname{Re} (C_{11}^* C_{51} \exp(2i\omega_0 t)) \}. \quad (10)$$

Вероятность осциллирует с частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Из формулы (10) видно, что в экспериментах с пересекающимися лучами в поперечном луче следует ожидать компоненты, модулированные с частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Модуляция на частоте  $2\omega_0$  очевидно является модуляцией Демельта [7]. Модуляция на частоте  $2\omega_0$  отражает когерентность между подуровнями  $m_F = 3/2$  и  $-1/2$ , создаваемую двухквантовыми переходами. В нашем приближении ( $x \ll 1$ ) в излучении будут присутствовать одновременно обе компоненты, так как рассматриваемые уровни эквидистанты. Интенсивность компонент, модулированных с частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ , зависит как от одноквантовых, так и от двухквантовых переходов.

В заключение обсудим вопрос о возможности детектирования резонанса в основном состоянии  $\text{He}^3$ . Хорошо известно, что ориентация атомов в метастабильном состоянии  ${}^2S_1$  находится в определенной зависимости от состояния ядер гелия в основном состоянии. Если между ядерными магнитными подуровнями индуцируются радиочастотные переходы, то это скажется не только на величине продольной составляющей общего углового момента ортогелия, но и на величине поперечной составляющей. А это, в свою очередь, приведет к уменьшению интен-

сивности постоянной и модулированных компонент прошедшего через систему поперечного пучка света. Кроме того, указанное обстоятельство, по-видимому, может оказаться весьма полезным для наблюдения свободной прецессии макроскопического ядерного момента парагелия, а также спинового эха.

### ЛИТЕРАТУРА

1. F. D. Colegrove, P. Franken, Phys. Rev., **119**, 680 (1960).
2. L. Schearer, F. D. Colegrove, Phys. Rev., **127**, 512 (1962).
3. L. Schearer, F. Colegrove, G. Walters, Rev. Sci. Instr., **34**, 60 (1963).
4. Г. В. Скроцкий, В. Г. Показаньев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, № 6, 1106 (1964).
5. Г. В. Скроцкий, В. Г. Показаньев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, № 6, 1111 (1964).
6. W. Franzen, M. Alam, Phys. Rev., **133**, A 460 (1964).
7. H. Dehmelt, Phys. Rev., **105**, 1924 (1957).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию  
8 августа 1966 г.

### MAGNETIC RESONANCE IN OPTICALLY ORIENTED He<sup>3</sup>

*V. G. Pokazan'ev, L. I. Yakub, G. V. Skrotskii*

The magnetic resonance in the system of optically oriented He<sup>3</sup> atoms is considered. The possibility to observe the magnetic transitions in orthogelium and nuclear system of paragelium is discussed.

УДК 621.376.33

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ДВУХРЕЗОНАТОРНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА СО ВСТРЕЧНЫМИ ПУЧКАМИ

*A. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко*

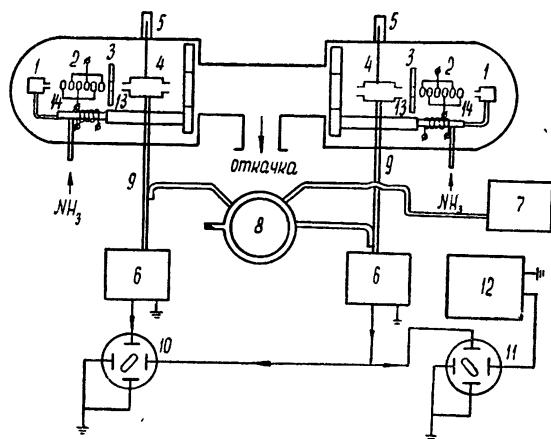
Для рамзееевой схемы аммиачного молекулярного генератора со встречными пучками экспериментально получен выигрыш в эффективной добротности линии в 2,5 раза по сравнению с обычным генератором. Исследовано влияние насыщения на добротность линии и зону синхронного режима. Показано, что максимальная добротность линии получается в случае симметричного режима генератора.

Повышение стабильности частоты колебаний в молекулярных генераторах за счет сужения спектральной линии в рамзееевых схемах со встречными пучками исследовалось в работах [1—4]. В них была доказана принципиальная работоспособность таких генераторов, т. е. было получено сужение линии по сравнению с исходной в однорезонаторном генераторе. Однако в этих работах использовались короткие резонаторы ( $l_0 \sim 3$  см) и малые расстояния между ними ( $l \sim 15$  см). Это не позволяло получить выигрыш в абсолютной величине эффективной добротности линии по сравнению с обычно применяющимся молекулярным генератором с одиночным резонатором длиной порядка 10 см. Очевидно, что применение более сложной двухрезонаторной схемы будет оправдано только в том случае, если с ее помощью удастся повысить абсолютное значение добротности линии. В описанном ниже эксперименте за счет сужения ширины спектральной линии крутизна изменения частоты колебаний генератора при одновременной перестройке резонаторов была уменьшена примерно в 2,5 раза по сравнению с обычным генератором с резонатором длиной 10 см.

1. Для исследования двухрезонаторного двухпучкового генератора нами была построена установка, блок-схема которой приведена на рис. 1. Генератор работал на переходе  $J = 3, K = 3$  аммиака  $N^{14}H_3$ . При конструировании генератора учитывались результаты предварительных исследований систем формирования длинных пучков активных молекул [5] и коэффициента ослабления интенсивности пучка по мере увеличения его длины [6]. В соответствии с [5] молекулярные пучки формировались источниками 1, у которых диаметр и длина канала равны 0,15 мм, и отстоящими от них на 20 мм кольцевыми сортирующими системами 2 длиной 40 мм и внутренним диаметром 3,5 мм. Расстояние между кольцами равнялось радиусу кольца. Напряжение на сортирующих системах, как правило, поддерживалось порядка 25—30 кв. Для уменьшения соударений молекул в резонаторе перед ним помещалась холодная диафрагма 3 с отверстием около 4 мм. Резонаторы 4 имели длину 10 см и добротность порядка  $6 \div 8 \cdot 10^3$ . Расстояние между ними равнялось 35 см. Каждый резонатор мог перестраиваться механизмом настройки 5 и был связан с отдельным приемником 6. На оба приемника для наблюдения биений подавались также колебания вспомогательного молекулярного генератора 7. Развязка осуществлялась гибридным коль-

цом 8 и направленными ответвителями 9. Продетектированные биения с одного приемника поступали на вертикальные, а с другого — на горизонтальные пластины осциллографа 10, с помощью которого контролировалось наличие режима взаимной синхронизации колебаний в резонаторах генератора. При синхронных колебаниях в обоих резонаторах частоты биений, поступающих с обоих приемников, совпадали и на экране осциллографа наблюдался неподвижный эллипс. Биения от одного из приемников поступали также на одну пару пластин осциллографа 11, на вторую пару пластин которого подавались колебания звукового генератора 12 для измерения частоты биений по фигурам Лиссажу.

Рис. 1. Блок-схема установки двухрезонаторного молекулярного генератора со встречными пучками.



Система подачи аммиака была аналогична [7]. Аммиак для очистки намораживался в трубках 14, которые при работе подогревались электронагревателем, и к источникам поступал испаряющийся чистый аммиак. Запаса намороженного аммиака хватало на 8–10 часов работы. Откачка установки осуществлялась одним насосом ЦВЛ-100, расположенным в центре установки, и дюарами с жидким азотом 13. Вакуум без пучков равнялся  $6 \div 7 \cdot 10^{-7}$  мм рт. ст., а с рабочими пучками  $2 \div 3 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст. Пролетное пространство между резонаторами и места расположения резонаторов экранировались от действия электрического и магнитного полей. Необходимость такой экранировки установлена в [8].

2. Нас интересовал режим монохроматических колебаний в резонаторах, взаимно синхронизованных по частоте\*. В этом случае для определения оптимального соотношения параметров генератора, при котором выигрыш в эффективной добротности линии максимальен, проводился анализ уравнений двухрезонаторного молекулярного генератора со встречными пучками (см. Приложение 1). Анализ показал, что оптимальной является симметричная схема генератора, когда все его элементы (источники пучка, сортирующие системы и т. д.) одинаковы. Выигрыш в эффективной добротности линии для симметричного генератора в приближении малого сигнала равен [9]

$$G = \frac{1 + 7\chi + 6\chi T/\tau}{1 + 3\chi},$$

\* В двухрезонаторном молекулярном генераторе существует большое многообразие колебательных режимов. Например, в нашем случае при включении двух пучков и некоторой расстройке резонаторов можно было добиться бигармонического режима колебаний, причем разностная частота могла перестраиваться в пределах нескольких кГц.

где  $\chi(l)$ —коэффициент ослабления пучка при пролете расстояния  $l$  между резонаторами,  $T = l/v$ —время пролета молекулой расстояния между резонаторами,  $\tau$ —время пролета молекулой резонатора. Исходя из этого выражения и экспериментально полученного коэффициента ослабления пучка [6], можно подсчитать ожидаемую величину выигрыша в эффективной добротности линии. Для нашей установки  $\chi = 0,13$ ,  $T/\tau = 3,5$  и  $G = 3,3$ , что меньше максимального значения  $G = 3,5$  [6], так как по техническим причинам расстояние между резонаторами было несколько больше оптимального. Отметим, что полученная по этой формуле величина выигрыша означает, что при одновременной перестройке обоих резонаторов в одну сторону на величину, равную расстройке резонатора в однорезонаторном генераторе, расстройка частоты колебаний от центра линии в таком генераторе должна быть в  $G$  раз меньше, чем в генераторе с одним резонатором.

Для измерения величины выигрыша применялась следующая методика. Вначале по биениям со вспомогательным генератором определялась крутизна перестройки частоты колебаний каждым резонатором при работе их в однопучковом однорезонаторном режиме (для этого отключался встречный пучок). Перестройка частоты колебаний для каждого из резонаторов оказалась линейной по отношению к перемещению настроичного стержня резонатора. Исходная крутизна перестройки для одного резонатора равнялась  $450 \text{ гц}$  на  $0,01 \text{ мм}$  смещения стержня, а для другого —  $272 \text{ гц}$ . Различие вызвано разной конструкцией механизма настройки. Для получения синхронного режима производилась настройка каждого резонатора на центр спектральной линии по максимуму амплитуды колебаний при выключенном встречном пучке. Такой настройки было достаточно, чтобы при включении обоих пучков генератор находился в режиме взаимной синхронизации колебаний в резонаторах. При этом на экране осциллографа 10 наблюдался неподвижный эллипс.

После включения обоих пучков и получения синхронного режима колебаний оба резонатора поочередно перестраивались на определенную величину, и при этом измерялась перестройка частоты колебаний генератора. По полученным данным для каждого резонатора подсчитывалось уменьшение крутизны перестройки по сравнению с исходной  $G_1$  и  $G_2$ . Можно показать, что при такой методике измерений, если добротности резонаторов примерно одинаковы, величина выигрыша в эффективной добротности линии определяется как

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}.$$

При случайной установке интенсивностей пучков крутизна перестройки уменьшалась, как правило, неодинаково для обоих резонаторов. Часто наблюдались режимы, когда перестройка частоты почти полностью определялась одним из резонаторов, а перестройка второго мало влияла на частоту колебаний генератора.

Крутизна перестройки для определяющего частоту резонатора при этом часто уменьшалась примерно вдвое по сравнению с исходной. Симметрирование генератора проводилось подбором такого соотношения интенсивностей пучков, при котором выигрыши  $G_1$  и  $G_2$ , измеренные для каждого резонатора, были одинаковы. При этом компенсировалась случайная асимметрия установки, возникающая, например, при ее юстировке или из-за небольшого различия элементов генератора.

Измеренное при малых амплитудах колебаний значение выигрыша в эффективной добротности линии для каждого из резонаторов оказа-

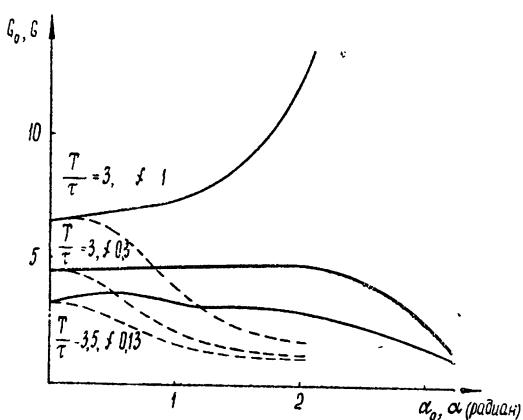
лось равным 5, а общий выигрыш  $G = 2,5$ . Отличие экспериментального результата от расчетного ( $G = 3,3$ ), по-видимому, можно объяснить сложной структурой спектральной линии  $J = 3, K = 3, \Delta F = 0$  аммиака  $N^{15}H_3$ , которая не учитывалась при расчете выигрыша. Структура этой линии исследовалась в [8], где было установлено, что в отсортированном пучке она состоит практически из двух компонент, отстоящих на  $1586 \pm 80$  гц. Рамзееурская же ширина компонент в нашем случае порядка 1000 гц. Таким образом, форма линии в нашей установке определялась наложением двух неразрешенных интерференционных рамзееуских кривых, что должно уменьшать эффективную добротность линии. Переход на изотопный аммиак  $N^{15}H_3$  в этой установке позволит, по-видимому, приблизиться к расчетному значению выигрыша.

3. В реальных молекулярных генераторах могут осуществляться такие режимы, при которых эффект насыщения становится значительным. Результаты теоретических расчетов в этом случае сильно зависят от выбора той или иной функции распределения молекул по скоростям в отсортированном пучке, реальный вид которой неизвестен. На рис. 2 это проиллюстрировано расчетными зависимостями выигрыша от амплитуды колебаний генератора для монокинетического пучка (сплошные линии) и для распределения вида\*

$$[(\bar{v})^2/v^3] \exp(-\bar{v}/v).$$

Для выяснения оптимального режима генератора представляло интерес экспериментальное исследование его работы при различных амплитудах колебаний. С этой целью исследовалась зависимость крутизны перестройки колебаний от интенсивности пучков при сохранении симметричного режима. При изменении интенсивности пучков более чем на порядок, что соответствовало интервалу от порога генерации до максимальной амплитуды колебаний, величина выигрыша практически не изменялась. Отсутствие заметного изменения выигрыша с увеличением насыщения свидетельствует о том, что распределение молекул по скоростям в реальной установке двухрезонаторного молекулярного генератора приближается скорее к монокинетическому, нежели к обычно используемому при расчетах  $[(\bar{v})^2/v^3] \exp(-\bar{v}/v)$  (см. рис. 2).

Рис. 2. Зависимость выигрыша в эффективной добротности линии двухрезонаторного генератора от амплитуды его колебаний  $\xi$ . Сплошные линии—монокинетический пучок, пунктирные—пучок с распределением по скоростям  $(\bar{v})^2/v^3) \exp(-\bar{v}/v)$ . Здесь  $\alpha_0 = |\mu_{12}| \xi \tau_0 / \hbar$ ,  $\alpha = |\mu_{12}| \xi \tau / \hbar$ ,  $\tau_0$ —время пролета через резонатор для монокинетического пучка,  $\tau$ —в случае распределения молекул по скоростям.



\* Результаты расчета для монокинетического пучка приводятся в Приложении 2, расчет с распределением вида  $[(\bar{v})^2/v^3] \exp(-\bar{v}/v)$  проведен в [9].

Увеличение интенсивности пучка не изменяло величину выигрыша, но заметно влияло на величину области синхронного режима. При малых амплитудах генерации каждый резонатор без срыва синхронного режима можно было перестраивать в таких пределах, которые соответствовали перестройке частоты на 500—800 гц в однорезонаторном генераторе. При увеличении же амплитуды колебаний до максимальной зона существования синхронного режима уменьшалась более чем на порядок, и настройка на режим синхронизации была весьма затруднена.

Проведенные исследования показали, что основной причиной, ограничивающей выигрыш в эффективной добротности в таких системах, является уменьшение интенсивности пучка активных молекул с увеличением длины пучка\*. Поэтому, например, несмотря на то, что была получена генерация при удалении резонатора на 70 см от сортирующей системы [5], уменьшение коэффициента ослабления пучка  $\chi$  с расстоянием ограничивает оптимальное расстояние между резонаторами, двадцатью пятью—тридцатью сантиметрами [6]. Дальнейшее совершенствование таких систем, по нашему мнению, должно идти по пути устранения влияния ослабления пучка.

Отметим, что в принципе осуществимы режимы, когда  $\chi \geq 1$ . Такое повышение величины  $\chi$  позволило бы приблизить выигрыш в эффективной добротности к предельному значению  $\sim 2T/\tau$ . Добиться значений  $\chi \geq 1$  можно, например, применив весьма короткую сортирующую систему. Тогда при пролете такой системы активные молекулы получат толчок к оси системы, а пассивные — к периферии, т. е. изменятся направления векторов скоростей молекул. Однако благодаря малой длине системы на выходе ее почти не произойдет пространственного разделения активных и пассивных молекул и избыток активных молекул в первом резонаторе будет мал. В пространстве между резонаторами пассивные молекулы успеют уйти из пучка, так что во второй резонатор попадут в основном активные молекулы. А так как  $\chi$  определяется, по существу, как отношение абсолютного превышения числа активных молекул над пассивными во втором резонаторе к такому же превышению в первом, то величина  $\chi$  в этом случае может быть больше единицы. Разумеется, практическое осуществление таких режимов потребует проведения специальных исследований.

Авторы благодарят Б. В. Громова за помощь при налаживании экспериментальной установки.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Уравнения двухрезонаторного молекулярного генератора со встречными пучками получены в приближении малого сигнала для стационарного режима. При выводе использовалось общее решение уравнений, описывающих состояние двухуровневой квантовомеханической системы при гармоническом возмущении [10]\*\*:

$$\Delta\omega_1 \mathcal{E}_1 = (\omega/2) R_1 \left[ -2\chi_1 \mathcal{E}_2 \tau_2 \sin \varphi + 6\chi_1 \mathcal{E}_2 \tau_2 \epsilon T \cos \varphi + \right. \\ \left. + 3\chi_1 \mathcal{E}_2 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2) \epsilon \cos \varphi + \chi_1 \mathcal{E}_1 \tau_1^2 \epsilon + \mathcal{E}_1 \tau_1^2 \epsilon \right]; \quad (П.1а)$$

\* Основной причиной ослабления интенсивности пучка активных молекул, по мнению авторов, является его угловая расходимость в пролетном пространстве между резонаторами. Рассмотрение процессов формирования пучка при «линзовом» описании сортирующей системы [12] дает зависимость  $\chi(l)$ , которая удовлетворительно согласуется с экспериментальными результатами, полученными в [9]. (Расчет приводит к гиперболической зависимости параметра  $\chi$  от расстояния между резонаторами; экспериментальная кривая спадает несколько круче). Отсутствие полной фокусировки молекул в удаленный резонатор объясняется неодинаковым взаимодействием молекул с различными квантовыми числами  $M_J$  с полем сортирующей системы и имеющимся разбросом молекул в пучке по скоростям. Кроме того, следует учесть, что сортирующая система не является идеальной «собирающей линзой», что приводит к дополнительной расфокусировке пучка.

\*\* В другой форме и иным методом эти уравнения получены в [11].

$$\frac{\varepsilon_1}{Q_1} = R_1 (\chi_1 \varepsilon_1 \tau_1 + 2 \chi_1 \varepsilon_1 \tau_2 \cos \varphi + \chi_1 \varepsilon_2 \tau_2 \sin \varphi + \varepsilon_1 \tau_1); \quad (\text{П.1в})$$

$$\Delta\omega_2 \varepsilon_2 = (\omega/2)R_2 [2 \chi_2 \varepsilon_1 \tau_1 \sin \varphi + 6 \chi_2 \varepsilon_1 \tau_1 \varepsilon T \cos \varphi + 3 \chi_2 \varepsilon_1 \tau_1 (\tau_1 + \tau_2) \varepsilon \cos \varphi + \chi_2 \varepsilon_2 \tau_2^2 \varepsilon + \varepsilon_2 \tau_2^2 \varepsilon]; \quad (\text{П.1в})$$

$$\frac{\varepsilon_2}{Q_2} = R_2 (\chi_2 \varepsilon_2 \tau_2 + 2 \chi_2 \varepsilon_1 \tau_1 \cos \varphi + \chi_2 \varepsilon_1 \tau_1 \varepsilon T \sin \varphi + \varepsilon_2 \tau_2). \quad (\text{П.1г})$$

Здесь  $\Delta\omega_l = \omega_{l2} - \omega_l$ ,  $\varepsilon = \omega_{l2} - \omega$  — расстройки резонаторов и частоты колебаний генератора относительно частоты перехода  $\omega_{l2}$ ;  $Q_l$ ,  $\varepsilon_l$ ,  $\tau_l$  — добротность, амплитуда поля, время пролета резонатора;  $T$  — время пролета между резонаторами;  $\varphi$  — разность фаз колебаний в резонаторах;  $R_l = 4\pi\rho_l |\mu_{l2}|^2 \hbar^{-1}$ ,  $\mu_{l2}$  — матричный элемент дипольного момента перехода,  $\rho_l$  — плотность молекул, попадающих сразу из сортирующей системы в резонатор;  $\chi_l = \chi\rho_l/\rho_l$ ,  $\chi$  — коэффициент ослабления пучка при пролете расстояния между резонаторами. В случае, представляющем практический интерес,  $\tau/T \ll 1$  при одинаковой расстройке резонаторов  $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega$  (при этом  $|\varphi| \ll 1$ ) из (П.1а), (П.1в) для частоты колебаний генератора получим

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega Q_2}{12\chi Q_R} \left[ 2\chi(1 + n_q) + \chi \left( n_q n_\varepsilon n_\tau + \frac{1}{n_\varepsilon n_\tau} \right) + n_q n_p n_\varepsilon n_\tau + \frac{1}{n_p n_\varepsilon n_\tau} \right],$$

где

$$n_q = \frac{Q_1}{Q_2}, \quad n_p = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad n_\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad n_\tau = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad Q_R = \frac{\omega^2}{2}.$$

Легко показать, что крутизна перестройки минимальна при

$$n_\varepsilon n_\tau = 1/\sqrt{n_q} \text{ и } n_p = 1. \quad \text{Тогда}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega Q_2}{6\chi Q_R} [\chi(1 + n_q) + \sqrt{n_q}(1 + \chi)], \quad (\text{П.2})$$

а условия самовозбуждения (П.1б), (П.1г) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_1} &< R\tau_1(1 + \chi + 2\chi\sqrt{n_q}), \\ \frac{1}{Q_2} &< R\tau_2 \left( 1 + \chi + 2\chi \frac{1}{\sqrt{n_q}} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Если добротности резонаторов в генераторе различны ( $n_q \neq 1$ ) и условия самовозбуждения (П.3) выполнены, то нетрудно показать, что при той же интенсивности пучка ( $R = \text{const}$ ) условия самовозбуждения (П.3) будут выполняться и для симметричного молекулярного генератора, в котором более высокодобротный резонатор заменен низкодобротным, идентичным с уже имеющимся в установке. При этом, как видно из (П.2), крутизна перестройки частоты колебаний симметричного генератора меньше по сравнению с исходным несимметричным.

Таким образом, минимальная крутизна перестройки частоты колебаний молекулярного генератора с двумя резонаторами получается при условии  $n_q = 1$ ,  $n_p = 1$  и  $n_\varepsilon n_\tau = 1$ . Эти условия наиболее просто выполнить в полностью симметричной схеме генератора:  $n_q = n_p = n_\varepsilon = n_\tau = 1$ , т. е. когда все элементы генератора (сортирующие системы, резонаторы и т. д.) и интенсивности молекулярных пучков одинаковы.

2. Учет эффекта насыщения проводился только для симметричной схемы молекулярного генератора; задача решалась таким же методом, как и для случая малого сигнала. Для монокинетического пучка молекул выражение для выигрыша в эффективной добротности имеет вид

$$G_0 = \frac{1 + \cos \alpha_0}{1 - (\sin \alpha_0)/\alpha_0} \frac{1 - (\sin \alpha_0)/\alpha_0 + \chi [1 + (\sin \alpha_0)/\alpha_0 - (\sin 2\alpha_0)/\alpha_0 + (T\alpha_0 \sin \alpha_0)/\tau]}{1 - \cos \alpha_0 + \chi (\cos \alpha_0 - \cos 2\alpha_0)}.$$

Здесь  $\alpha_0 = |\mu_{12}| \varepsilon \tau_0 / \hbar$ ,  $\varepsilon$  — амплитуда поля в резонаторе,  $\tau_0$  — время пролета молекулы через резонатор. Усреднение по скоростям с распределением вида  $(\bar{v})^2 v^{-3} \exp(-\bar{v}v^{-1})$  приводит к выражению для выигрыша, совпадающему с [9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. Holuj, H. Adams, S. N. Kalga, J. Appl. Phys., **33**, 2370 (1962).
2. А. Ф. Мухамедгалиева, Г. М. Страховский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 4, 824 (1965).
3. А. Ф. Мухамедгалиева, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, Письма ЖЭТФ, **1**, 22 (1965).
4. А. Ф. Мухамедгалиева, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 2, 302 (1966).
5. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 4, 824 (1966).
6. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 1, 141 (1967).
7. Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, В. Ю. Судзиловский, Приборы и техника эксперимента, № 3, 245 (1965).
8. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 1, 142 (1967).
9. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, ЖТФ, **36**, 557 (1966).
10. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
11. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
12. G. Becker, B. Fischer, Zs. für angew. Phys., **19**, 537 (1965); **20**, 71 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
9 января 1967 г.

THE STUDY OF OPERATION REGIMES OF TWO-RESONATOR  
MOLECULAR GENERATOR WITH OPPOSITE BEAMS

*A. F. Kroupnov, V. A. Skvortsov, L. A. Sinegoubko*

The gain in the effective *Q*-factor of a line which is 2.5 times greater as compared with a common generator was experimentally obtained for Ramsey scheme of ammonia molecular generator. The influence of saturation on the line quality and the zone of synchronized regime was investigated. It is shown that the maximal quality of the line is achieved in the case of a symmetrical regime of the generator.

УДК 621.378.5

## УСИЛЕНИЕ МОДУЛИРОВАННОГО СВЕТОВОГО СИГНАЛА

Э. Е. Фрадкин, З. К. Янкаускас

Показано, что в оптическом квантовом усилителе (ОКУ), в отличие от обычных радиотехнических усилителей, при достаточно большой интенсивности несущей ( $\beta' = d^2 T_1 T_2 E_0^2 / \hbar^2 > 8$ ) существует область частот амплитудной модуляции (АМ)  $\Omega \sim dE_0 / \hbar$ , в которой глубина модуляции растет с ростом длины ОКУ. Максимальный инкремент глубины модуляции  $M^{-1} \partial M / \partial x$  пропорционален выражению  $\alpha' T_2 / T_1$ , где  $\alpha'$  — линейный коэффициент усиления. При  $T_2 \rightarrow 0$  рост глубины модуляции стремится к нулю. Нелинейные искажения АМ сигнала в этом случае имеют порядок величины отношения  $\epsilon = \beta' T_1^{-2} / \Omega^2$ . При  $\epsilon \ll 1$  искажения очень малы. При усилении фазомодулированного светового сигнала изменение индекса модуляции обусловлено лишь конечностью ширины спектральной линии вещества. Никакие дополнительные нелинейные эффекты в этом случае не возникают ( $m \ll 1$ ).

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается усиление слабо модулированного светового сигнала при помощи однопроходного оптического квантового усилителя (ОКУ) на твердом теле\*. В отличие от существующих работ [1—4] по теории ОКУ исследуется полная система укороченных дифференциальных уравнений для поля, поляризации и инверсной населенности уровней выделенного перехода активного вещества без пре-небрежения какими-либо производными.

Так как в ОКУ поле излучения само зависит от поляризации, необходимо решать совместную задачу для поляризации и поля. Предполагая, что на вход подан слабо модулированный непрерывный световой сигнал, естественно ожидать, что в ОКУ распространяется модулированное излучение, амплитуда, фаза и глубина модуляции которого меняются при распространении. При таком предположении (в дальнейшем показано, что оно оправдано) исследование разбивается на две части. Первой частью является расчет поляризации выделенного перехода активного вещества под воздействием модулированного поля излучения. При малой глубине модуляции задача эквивалентна нахождению поляризации под воздействием суммы монохроматических сильного и двух слабых полей, фазы которых определенным образом скоррелированы в зависимости от рода модуляции (амплитудная или частотная модуляция). Впервые расчет такого рода для некоррелированных полей производился в [5].

Вторая часть состоит в решении уравнений поля, в которые подставлено выражение для поляризации через поле, определенное в первой части. При этом определяются законы изменения амплитуды, фазы и глубины модуляции излучения при распространении в ОКУ. Показа-

\* Работа докладывалась на IV Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн в феврале 1967 г. в Харькове.

но, что в отличие от обычных радиотехнических усилителей, где при усилении амплитудномодулированного сигнала глубина модуляции уменьшается с приближением амплитуды несущей к насыщению [7], в квантовом усилителе (КУ) уменьшение глубины модуляции незначительно  $\sim (\Omega T_1)^{-2}$ , если частота модуляции  $\Omega$  лежит в интервале  $T_1^{-1} \ll \Omega \ll (T_1 T_2)^{-1/2}$ . Малость нелинейных искажений модулированного сигнала в КУ объясняется большой инерционностью инверсной населенности (время инерционности  $T_1$ ), благодаря чему уменьшение инверсной населенности (эффект насыщения) определяется лишь средним (а не мгновенным) полем. В силу этого нелинейное усиление несущей и боковых частот оказывается практически одинаковым (с точностью до конечной ширины линии отличие порядка  $\Omega^2 T_2^2$ ). Более того, при достаточно большой интенсивности несущей  $E_0^2 > 8\hbar^2/d^2 T_1 T_2$  (где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $d$  — дипольный момент перехода), и частотах модуляции  $\Omega > 3.5(T_1 T_2)^{-1/2}$  существует такая область значений  $E_0^2$  и  $\Omega$ , в которой глубина модуляции возрастает (см. рис. 1), т. е. боковые частоты усиливаются сильнее несущей. В этой области можно так подобрать параметры КУ, чтобы рост глубины модуляции происходил на всей длине КУ (см. раздел 2).

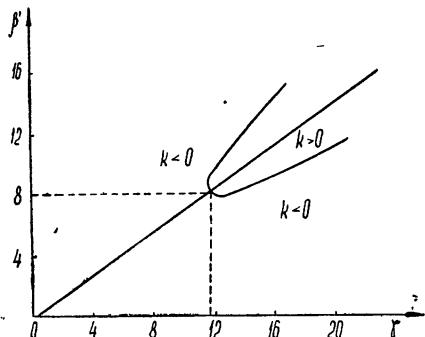


Рис. 1. График кривой  $\gamma^2 - 3\gamma\beta' + 2\beta'^2 + 2\beta' = 0$ , отделяющей область роста глубины модуляции  $k > 0$  от области  $k < 0$  ( $\gamma = \Omega^2 T_1 T_2$ ,  $\beta' = d^2 T_1 T_2 E_0^2(x)/\hbar^2$ ). После переноса начала координат в точку  $\beta'_0 = 4$ ,  $\gamma_0 = 6$  и поворота на угол  $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3$  уравнение кривой запишется в виде  $(\beta'/7)^2 - (\gamma'/1,1)^2 = 1$ .

При усилении фазомодулированного сигнала индекс модуляции уменьшается с ростом длины КУ с коэффициентом, обратно пропорциональным квадрату ширины линии усиления  $T_2^{-2}$  (см. раздел 4). Отметим, что вся теория применима также к усилению радиочастотного модулированного сигнала в парамагнитном КУ, если частота модуляции  $\Omega$  много меньше частоты несущей\*\*  $\omega$  ( $\Omega \ll \omega$ ).

## 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА

Поле  $\mathcal{E}$  и поляризацию активного вещества  $Q$  запишем в виде

$$\mathcal{E}(x, t) = E(x, t) \cos [\omega t + \phi(x, t)],$$

$$Q(x, t) = P(x, t) \cos [\omega t + \psi(x, t)],$$

где  $E$ ,  $\phi$  и  $P$ ,  $\psi$  — медленно меняющиеся по сравнению с частотой  $\omega$  амплитуды и фазы поля и поляризации.

\* Здесь  $T_1$  — продольное время релаксации ( $T_1^{-1}$  — ширина уровней инверсной населенности атомного перехода),  $T_2$  — поперечное время релаксации ( $T_2^{-1}$  — ширина линии спонтанного излучения атома). В твердотельной среде  $T_2 \ll T_1$ .

\*\* Недавно в работе [8] было экспериментально показано, что в парамагнитном КУ искажения радиочастотного модулированного сигнала очень малы при частоте модуляции  $\Omega \gg T_1^{-1}$ .

Полагая, что несущая оптическая частота  $\omega$  совпадает с центром линии активного вещества  $\omega_0$ , в случае однопроходного усилителя бегущей волны для медленных переменных получаем систему дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} + \delta E = 2\pi\omega_0 P \sin(\psi - \varphi); \quad (1a)$$

$$E \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -2\pi\omega_0 P \cos(\psi - \varphi); \quad (1b)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{T_2} P = \frac{d^2}{\hbar} N E \sin(\psi - \varphi); \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} P = \frac{d^2}{\hbar} N E \cos(\psi - \varphi); \quad (1d)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (N - N_0) = -\frac{1}{\hbar} P E \sin(\psi - \varphi), \quad (1e)$$

где  $N$  — инверсная населенность,  $N_0$  — накачка,  $T_1$  и  $T_2$  — времена релаксации вещества,  $\delta$  — коэффициент нерезонансных потерь,  $d$  — dipольный момент активной частицы. Нам необходимо решить систему (1) при граничных условиях

$$E(t, x=0) = F(t); \quad (2)$$

$$\varphi(t, x=0) = f(t). \quad (3)$$

Конкретный вид функций  $F(t)$  и  $f(t)$  зависит от рода модуляции (амплитудная или фазовая модуляция).

## 2. УСИЛЕНИЕ АМПЛИТУДНОМОДУЛИРОВАННОГО (АМ) СИГНАЛА ПРИ МАЛОЙ ГЛУБИНЕ МОДУЛЯЦИИ

В этом случае граничные условия (2), (3) имеют вид

$$E(t, x=0) = E_0 [1 + M \sin(\Omega t)] \quad (\Omega \ll \omega); \quad (4)$$

$$\varphi(t, x=0) = 0. \quad (5)$$

При малой глубине модуляции ( $M \ll 1$ ) будем искать решение для  $E$  в установившемся режиме в виде бегущей волны

$$E(t, x) = E_0(x) \{1 + M(x) \sin[\Omega t + \theta(x)]\} \quad (\tau = t - x/c), \quad (6)$$

где амплитуда несущей  $E_0(x)$ , глубина модуляции  $M(x)$  и фаза низкочастотной огибающей  $\theta(x)$  предполагаются функциями от  $x$ .

При усилении АМ сигнала (в случае  $\omega = \omega_0$ ) значения фаз

$$\varphi = 0, \quad \psi = \pi/2 \quad (7)$$

являются точными решениями системы (1), и нам остается рассмотреть систему из трех дифференциальных уравнений (1a), (1b), (1d) с учетом условий (7).

a) *Расчет поляризации и инверсной населенности.* Решение для  $N$  и  $P$  системы (1b), (1d) ищем в виде

$$N(x, \tau) = N_{cr}(x) [1 + r(x, \tau)]; \quad (8)$$

$$P(x, \tau) = P_0(x) [1 + q(x, \tau)] \quad (\tau = t - x/c), \quad (9)$$

где главные члены  $N_{ct}(x)$  и  $P_0(x)$  зависят только от  $x$ , а малые по сравнению с единицей добавки  $r(x, \tau)$ ,  $q(x, \tau)$  учитывают эффект модуляции.

Подставляя (6) — (9) в (1в) и (1д), получаем главные члены

$$P_0(x) = \frac{d^2 T_2}{\hbar} N_{ct}(x) E_0(x); \quad (10)$$

$$N_{ct}(x) = \frac{N_0}{1 + \beta E_0^2(x)}, \quad \beta = \frac{d^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \quad (11)$$

и систему дифференциальных уравнений для малых поправок (точка означает дифференцирование по времени)

$$\dot{q} + T_2^{-1} q = T_2^{-1} \{M(x) \sin [\Omega\tau + \theta(x)] + r\}; \quad (12)$$

$$\dot{r} + T_1^{-1} r = \beta E_0^2(x) \{q + M(x) \sin [\Omega\tau + \theta(x)]\}. \quad (13)$$

Решая систему (12), (13), находим  $q$  и  $r$ . Приведем выражение для  $q$ :

$$q = \{S(x) \sin [\Omega\tau + \theta(x)] + C(x) \cos [\Omega\tau + \theta(x)]\} M(x); \quad (14)$$

$$S(x) = 1 - \Omega^2 T_2^2 + \frac{\beta E_0^2(x)}{[1 + \beta E_0^2(x)]^2 + (\Omega T_1)^2} \{-2[1 + \beta E_0^2(x)] + 3\Omega^2 T_1 T_2\}; \quad (15)$$

$$C(x) = \Omega \left\{ \frac{2\beta E_0^2(x) T_1}{[1 + \beta E_0^2(x)]^2 + (\Omega T_1)^2} - T_2 \right\}. \quad (16)$$

При выводе (15) и (16) учтено, что для ОКУ на твердом теле

$$\beta E_0^2(x) \frac{T_2}{T_1} \ll 1 \quad \text{и} \quad \Omega \ll T_2^{-1}. \quad (17)$$

*б) Распространение сигнала.* Подставляя (6) — (9) в (1а), получаем с учетом (10), (11) и (14)

$$\frac{\partial}{\partial x} E_0(x) + \frac{\partial}{c} E_0(x) = \frac{2\pi\omega_0}{c} P_0(x) = \frac{\alpha' E_0(x)}{1 + \beta E_0^2(x)}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} M(x) = \frac{\alpha'}{1 + \beta E_0^2(x)} [-1 + S(x)] M(x); \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta(x) = \frac{\alpha'}{1 + \beta E_0^2(x)} C(x), \quad \alpha' = 2\pi\omega_0 d^2 N_0 T_2 / \hbar c, \quad (20)$$

которые описывают изменение с ростом  $x$  амплитуды несущей  $E_0(x)$ , глубины модуляции  $M(x)$  и фазы низкочастотной огибающей  $\theta(x)$ .

Решение уравнения (18) хорошо известно [3], и оно здесь не обсуждается.

Закон изменения глубины модуляции  $M(x)$  в первом приближении определяется знаком коэффициента  $k = -1 + S(x)$ . При  $k < 0$  глубина модуляции с ростом  $x$  падает, при  $k > 0$  глубина модуляции растет. На основе (15) имеем для  $k$ :

$$k = -\Omega^2 T_2^2 + \frac{\beta E_0^2(x)}{[1 + \beta E_0^2(x)]^2 + (\Omega T_1)^2} \{-2[1 + \beta E_0^2(x)] + 3\Omega^2 T_1 T_2\}. \quad (21)$$

Первый член  $-\Omega^2 T_2^2$  здесь описывает известное явление [7] уменьшения глубины модуляции при прохождении АМ сигнала через колебательную систему. Уменьшение это происходит потому, что поле на несущей частоте, совпадающей с центром линии, при прохождении некоторой длины вдоль ОКУ без учета нелинейности усиливается больше, нежели поля на боковых частотах  $\omega_0 \pm \Omega$ .

Второй член возникает при учете нелинейных эффектов. Условие

$$k = 1 - S(x) > 0 \quad (22)$$

позволяет определить область значений  $\gamma = \Omega^2 T_1 T_2$  и  $\beta'$ , в которой  $k$  положителен. С учетом (17) из (21), (22) находим уравнение, определяющее границы этой области ( $k = 0$ ) на плоскости ( $\gamma$ ,  $\beta'$ ):

$$\gamma^2 - 3\gamma\beta' + 2\beta'(1 + \beta') = 0, \quad \gamma = \Omega^2 T_1 T_2. \quad (23)$$

График кривой (23) представляет собой гиперболу, изображенную на рис. 1. Одна ветвь гиперболы целиком лежит в области отрицательных  $\beta'$  и физического смысла не имеет. Другая ветвь ограничивает область положительных  $\gamma$  и  $\beta'$ , в которой  $k > 0$ . Из рис. 1 и уравнений (22), (23) следует, что при  $\beta' > 8$  всегда существует интервал частот амплитудной модуляции, где  $k > 0$ . Границы интервала  $\gamma_1 \div \gamma_2$  определяются заданным значением  $\beta'$ :

$$\gamma_{1,2} = (\Omega_{1,2}^2 T_1 T_2) = \frac{3\beta' \pm \sqrt{\beta'(\beta' - 8)}}{2}. \quad (24)$$

Имеет место и обратное утверждение: при  $\gamma > 11,6$  всегда существует интервал интенсивности для амплитуды несущей  $\beta'_1 \div \beta'_2$  (напомним, что  $\beta' = d^2 T_1 T_2 E_0^2(x)/\hbar^2$ ), где  $k > 0$ .

Границы интервала в этом случае определяются заданным значением  $\gamma$ :

$$\beta'_{1,2} = \frac{3\gamma - 2 \pm \sqrt{4 - 12\gamma + \gamma^2}}{4}, \quad (25)$$

причем нижняя из границ  $\beta'_{1,2}$  всегда больше 8.

Максимальное значение  $k$  при заданном  $\gamma$  или заданном  $\beta'$  находится на оси гиперболы. Приближенно

$$k_{\max} = \frac{3}{4} \left( \frac{2}{9} \beta' - \frac{5}{3} \right) \frac{T_2}{T_1}. \quad (26)$$

Максимальный инкремент модуляции согласно (19), (26) равен

$$\max M^{-1} \partial M / \partial x \simeq \frac{3}{4} \alpha' \frac{T_2}{T_1} \frac{2\beta'/9 - 5/3}{1 + \beta'} \rightarrow \frac{\alpha'}{6} \frac{T_2}{T_1}, \quad \beta' \gg 8. \quad (27)$$

Рассмотрим более подробно сам процесс усиления. С ростом длины усилителя  $x$  растет интенсивность несущей  $\beta' = d^2 T_1 T_2 E_0^2(x)/\hbar^2$  (см. (18)) и соответственно меняются границы интервала частот модуляции  $\Omega_1 \div \Omega_2$ , в котором наблюдается рост глубины модуляции. В таком усилителе глубина модуляции АМ сигнала, частота модуляции которого удовлетворяет условию  $\Omega^2 T_1 T_2 > 11,6$ , в одной части КУ растет,

в другой — уменьшается. Однако в двух случаях можно добиться эффекта роста глубины модуляции по всей длине усилителя.

1) Квантовый усилитель насыщен по отношению к несущей, т. е.  $\beta'_{\text{вх}} = \beta'_{\text{нас}}$ . Тогда интенсивность несущей постоянна по всей длине усилителя  $\beta' = \beta_{\text{нас}}$ , и в согласии с (24) интервал частот модуляции  $\Omega_1 \div \Omega_2$  фиксирован. Глубина модуляции на частоте  $\Omega$  ( $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ ) будет расти с длиной усилителя до тех пор, пока при  $M \leq 1$  не начнут сказываться нелинейные по  $M$  члены, опущенные в уравнении (19).

2) Для АМ сигнала с частотой модуляции  $\Omega$  ( $\Omega^2 T_1 T_2 > 11,6$ ) из (25) определяем интервал  $\beta'_1 \div \beta'_2$ , где  $k > 0$ . Если теперь задать интенсивность несущей  $\beta'_{\text{вх}} = \beta'_1$ , а длину усилителя выбирать из условия  $\beta'_{\text{вых}} = \beta'_2$ , то рост глубины модуляции будет наблюдаться по всей длине ОКУ.

Эффект углубления модуляции был получен благодаря учету при решении системы (1) запаздывания поляризации по отношению к населенности, т. е. учету производной поляризации  $\dot{P}$  в уравнении (1в)\*; в силу этого эффект углубления модуляции пропорционален отношению  $T_2/T_1$  (см. (26), (27)).

### 3. УСИЛЕНИЕ АМ СИГНАЛА ПРИ $T_2 \rightarrow 0$

При  $T_2 \rightarrow 0$  (что с высокой степенью точности осуществляется в ОКУ на рубине, где  $T_2 \sim 10^{-11}$  сек и  $T_1 \sim 10^{-3}$  сек) рост глубины модуляции исчезающе мал. Покажем, что в этом случае изменения АМ сигнала в ОКУ определяются отношением  $\beta T_1^{-2}/\Omega^2$  и очень малы (если  $T_1^{-2} \beta \ll \Omega^2 \ll T_2^{-1} \rightarrow \infty$ ) даже при больших насыщениях по несущей ( $\beta' > 1$ ) и достаточно большой модуляции ( $M \leq 1$ ).

Так как  $T_2 \rightarrow 0$ , то в уравнении (1в) можем пренебречь производной  $\dot{P}$  и получить вместо (1в), (1д) систему уравнений переноса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2\delta\rho = \sigma c \rho N ; \quad (28)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (N - N_0) = -2\sigma\rho N, \quad (29)$$

где введена интенсивность потока фотонов  $\rho = cE^2/\hbar\omega 8\pi$  и эффективный поперечник рассеяния  $\sigma = 4\pi T_2 \omega_0 d^2/\hbar c$ .

Нам необходимо решить систему (28), (29) при граничном условии

$$\rho(t, x=0) = \rho_0 [1 + k \sin(\Omega t)], \quad (30)$$

т. е. рассмотреть усиление АМ сигнала. При этом значение глубины модуляции  $k$  здесь может быть произвольным.

Исследуем, при каких  $\Omega$  решение (28), (29) для  $\rho$  можно записать в виде

$$\rho(t, x) = \rho_0(x) [1 + k \sin \Omega(t-x/c)], \quad (31)$$

где  $k$  практически постоянно. Подставляя (31) в (29), получаем

$$\frac{\partial N}{\partial t} + T_1^{-1} (N - N_0) = -2\sigma N (1 + k \sin \Omega\tau) \quad (\tau = t - x/c). \quad (32)$$

\* В работе [6] было показано, что учет производной поляризации  $\dot{P}$  приводит к существованию некоторой граничной частоты  $\Omega_{\text{гр}} \sim (T_1 T_2)^{-1/2}$  такой, что генерация двух стационарных мод в генераторе бегущей волны оказывается возможной при разности частот мод, большей  $\Omega_{\text{гр}}$ .

Точное решение (32) в установившемся режиме можно записать в виде

$$N = T_1^{-1} N_0 \left[ I_0 \left( \frac{\beta' k}{\Omega T_1} \right) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} I_p \left( \frac{\beta' k}{\Omega T_1} \right) \cos(p\Omega\tau) \right] \left\{ \frac{T_1}{1+\beta'} I_0 \left( \frac{\beta' k}{\Omega T_1} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \left( -\frac{\beta' k}{\Omega T_1} \right) [n^2\Omega^2 + T_1^{-2}(1+\beta')^2]^{-1/2} \cos(n\Omega\tau - \varphi_n) \right\}, \quad (33)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_n = n\Omega/(1+\beta') T_1^{-1}, \quad \beta' = \frac{d^2}{\hbar^2} T_1 T_2 E_0^2(x),$$

а  $I_n$  — гиперболические функции Бесселя. Из последнего выражения видно, что разность населения при гармонической модуляции поля содержит бесконечное число гармоник. Однако при  $\Omega \gg T_1^{-1} \beta'$  (в том числе и для  $k \sim 1$ ) все функции пренебрежимо малы по сравнению с функцией нулевого порядка  $I_0$ , значение которой близко к единице. В этом случае разность населения определяется постоянной частью (33), которая равна

$$N = N_{\text{пост}} = \frac{N_0}{1+\beta'}. \quad (34)$$

Подставляя (31) и (34) в (28), находим уравнение для  $\rho_0(x)$ :

$$\frac{\partial \rho_0(x)}{\partial x} + 2\delta\rho_0(x) = \frac{2\sigma N_0}{1+\beta'} \rho_0(x), \quad (35)$$

которое идентично с (18).

Итак, при  $\Omega \gg T_1^{-1} \beta'$  входной сигнал (30) усиливается по закону (31) для любой глубины модуляции, т. е. ОКУ усиливает сигнал без нелинейных искажений, несмотря на то, что усилитель насыщен по отношению к несущей ( $\beta' \geq 1$ ). Таким образом, в случае глубокой модуляции также проявляется инерционность инверсной населения.

#### 4. УСИЛЕНИЕ ФАЗОМОДУЛИРОВАННОГО (ФМ) СИГНАЛА

Границные условия (2), (3) в случае ФМ сигнала запишем следующим образом:

$$E(t, x=0) = E_0, \quad \varphi(t, x=0) = m \cos(\Omega t). \quad (36)$$

Решение для  $\varphi(t, x)$  в установившемся режиме пишем в виде

$$\varphi(x, t) = m(x) \cos[\Omega(t-x/c) + \Phi(x)]. \quad (37)$$

Естественно предположить, что в случае ФМ поля фаза поляризации  $\psi$  получит небольшую добавку по сравнению с соотношением (7):  $\psi = \pi/2 + \theta(x, t)$ . Вследствие малости  $\varphi$  и  $\theta$  в первом приближении можем положить  $\sin(\psi-\varphi) \approx 1$ ,  $\cos(\psi-\varphi) \approx -\theta + \varphi$ . Тогда из (1a) и (1d) получаем уравнение (18) для амплитуды  $E_0(x)$  с граничным условием (36), а для  $\varphi$  и  $\theta$  систему из двух уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\alpha'}{1+\beta E_0^2(x)} (\theta - \varphi), \quad \alpha' = \frac{2\pi\omega_0 d^2 N_0 T_2}{\hbar c}; \quad (38)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -T_2^{-1} (\theta - \varphi). \quad (39)$$

Система (38), (39) при учете (37) сводится к уравнениям для  $m(x)$  и  $\Phi(x)$ :

$$\frac{\partial m(x)}{\partial x} = \frac{\Omega^2}{T_2^{-2} + \Omega^2} \frac{\alpha'}{1 + \beta E_0^2(x)} m(x); \quad (40)$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{\alpha'}{1 + \beta E_0^2(x)} \frac{T_2^{-1} \Omega}{T_2^{-2} + \Omega^2}. \quad (41)$$

Из уравнения (40) следует, что с ростом  $x$  индекс модуляции уменьшается для всех  $\Omega$ . При  $\Omega \ll T_2^{-1}$  это уменьшение незначительно (для однопроходного ОКУ порядка  $\sim (10-10^2) \Omega^2 T_2^2 \text{ см}^{-1}$ ).

Недавно появилась статья [9], в которой рассматривается теория усиления радиочастотного слабо модулированного сигнала в парамагнитном КУ. Методика расчета в [9] близка к нашей. Система уравнений (15) работы [9], описывающая распространение модулированного сигнала в усиливающей среде, в случае  $T_2^{-1} \gg T_1^{-1}$  эквивалентна уравнениям (18)-(20) и (40), (41) нашей работы, если в нашем уравнении (18) пренебречь нерезонансными потерями. Неучет потерь в усилителе означает, что теория, развитая в [9], годится лишь в случае, когда интенсивность несущей в КУ далека от насыщения. Пренебрежение потерями позволило легко проинтегрировать систему (15).

Выводы [9], касающиеся усиления сигнала при фазовой (частотной) модуляции, совпадают с нашими результатами. В случае амплитудной модуляции в отличие от наших результатов (см. раздел 2), авторы [9] утверждают, что при любой частоте модуляции  $\Omega$  усиление боковых частот  $g$  меньше усиления несущей  $G$ . Покажем, что вывод авторов [9] основан на математической неточности, допущенной при обсуждении величины отношения  $g/G$ . В [9] для  $g$  дано выражение

$$g = \left| G^{\frac{1/2}{1-i\Omega T_2}} \left[ \frac{(1-i\Omega T_2)(1-i\Omega T_1) + V_{\text{bx}}^2}{(1-i\Omega T_2)(1-i\Omega T_1) + GV_{\text{bx}}^2} \right]^{\frac{1}{2} + \frac{1/2}{1-i\Omega T_2}} \right|^2$$

(в наших обозначениях  $V^2 = \beta'$ ). Из приведенной формулы для  $g$  легко можно получить расчетную формулу для отношения  $g/G$ :

$$g/G = G^{-\frac{(\Omega T_2)^2}{1+(\Omega T_2)^2}} \left[ \frac{(1+V_{\text{bx}}^2 - \Omega^2 T_1 T_2)^2 + \Omega^2 (T_1 + T_2)^2}{(1+GV_{\text{bx}}^2 - \Omega^2 T_1 T_2)^2 + \Omega^2 (T_1 + T_2)^2} \right]^{\frac{1+(1/2)(\Omega T_2)^2}{1+(\Omega T_2)^2}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\Omega T_2}{1+(\Omega T_2)^2} \operatorname{arctg} \frac{(G-1) V_{\text{bx}}^2 \Omega (T_1 + T_2)}{\Omega^2 (T_1 + T_2)^2 + (1+GV_{\text{bx}}^2 - \Omega^2 T_1 T_2)(1+V_{\text{bx}}^2 - \Omega^2 T_1 T_2)} \right\}.$$

Найдем  $g/G$ , соответствующее нашим условиям:  $T_2 \ll T_1$ ,  $GV_{\text{bx}}^2 \ll T_1/T_2$  и  $(\Omega T_2)^2 \ll 1$ ,  $\Omega^2 T_1 T_2 \sim 1$ . Тогда

$$g/G = 1 - (\Omega T_2)^2 \ln G + (G-1) V_{\text{bx}}^2 \left[ \frac{3T_2}{T_1} - \frac{(G+1) V_{\text{bx}}^2 + 2}{\Omega^2 T_1^2} \right].$$

Из условия  $g/G > 1$  получим уравнение для границы области значений  $\Omega$ ,  $V_{\text{bx}}^2$  и  $G$ , при которых усиление боковых компонент сильнее усиления несущей:

$$-\gamma^2 \ln G + 3(G-1) V_{\text{bx}}^2 \gamma - (G^2 - 1) V_{\text{bx}}^4 - 2(G-1) V_{\text{bx}}^2 = 0, \quad (42)$$

где  $\gamma = \Omega^2 T_1 T_2$ . (Условие (42) переходит в условие (23) нашей работы при  $G \geq 1$ ,  $\ln G \approx G - 1$ .) Из анализа (42) следует, что  $g/G$  больше единицы при выполнении условий

$$\frac{\ln G}{G-1}(G+1) < \frac{9}{4}, \quad V_{\text{вх}}^2 > \frac{8}{9(G-1)/\ln G - 4(G+1)}, \quad \Omega^2 T_1 T_2 > \frac{3}{2} \frac{G-1}{\ln G} V_{\text{вх}}^2. \quad (43)$$

Таким образом, имеется область параметров КУ, не отмеченная в [9], где усиление боковых частот  $g$  больше усиления несущей  $G$ .

Приведенные в работе [9] графики коэффициента усиления боковых компонент  $g$  как функции от  $G$  правильны лишь для частот модуляции  $\Omega \ll (T_1 T_2)^{-1/2} V_{\text{вх}}^2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, ЖЭТФ, 50, 23 (1966).
- E. L. Steele, W. C. Davis, J. Appl. Phys., 36, 348 (1965).
- E. O. Schulz-Du Bois, BSTJ, 43, 625 (1964).
- R. V. Avizonis, R. L. Grotbeck, J. Appl. Phys., 37, 687 (1966).
- Г. И. Кузнецова, С. Г. Раутян, ЖЭТФ, 49, 1605 (1965).
- С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, ФТТ, 8, 2655 (1965).
- И. С. Гоноровский, Радиотехнические цепи и сигналы, изд. Сов. радио, М., 1963.
- Н. В. Карлов, Б. Б. Крынецкий, Т. И. Кузнецова, Л. В. Ширков, Радиотехника и электроника, 12, 364 (1967).
- Н. В. Карлов, Т. И. Кузнецова, Радиотехника и электроника, 12, 284 (1967).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
8 декабря 1966 г.

#### AMPLIFICATION OF MODULATED LIGHT SIGNAL

*E. E. Fradkin, Z. K. Yankauskas*

Unlike the ordinary radio technical amplifiers it is shown that at a sufficiently large carrier intensity ( $\beta' = d^2 T_1 T_2 E_0^2 / \hbar^2 > 8$ ) there exists in laser the frequency range of the amplitude modulation  $\Omega \sim dE_0 / \hbar$ , in which the depth of modulation increases with the growth of the laser length. The maximal increment of the modulation depth  $M^{-1} \partial M / \partial \chi$  is proportional to  $\alpha' T_2 / T_1$ , where  $\alpha'$  is the linear amplification factor. With  $T_2 \rightarrow 0$ , the growth of the modulation depth vanishes. Then, the nonlinear distortions of an amplitude-modulation signal is of the order of magnitude  $\epsilon = \beta' T_1^{-2} / \Omega^2$ . At  $\epsilon \ll 1$  the distortions are very small. When amplifying the phase modulated light signal, the variation of the modulation index is dictated only by the finiteness of the spectral line width of the material. In this case there do not arise any additional nonlinear effects ( $m \ll 1$ ).

*Примечание при корректуре.* Особенности усиления амплитудномодулированного светового сигнала в случае, когда частота несущей  $\omega$  не совпадает с центром линии усиления  $\omega_0$ , рассмотрены в работе Э. Е. Фрадкина и З. К. Янкаускаса: Опт. и спектр., 23, 489 (1967). Вопросу об усиении модулированного светового сигнала в газовом квантовом усилителе посвящена работа Э. Е. Фрадкина, З. К. Янкаускаса: ЖТФ, 38, 356 (1968).

УДК 621.396.23.001

## КВАНТОВЫЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ КАНАЛ СВЯЗИ С АДДИТИВНЫМ ШУМОМ

*B. B. Митюгов, B. P. Морозов*

На простой модели найдена матрица плотности смеси когерентного сигнала с аддитивным стационарным шумом. Выведены формулы для распределения вероятности ошибки приема при различных статистических свойствах помех. В случае тепловых шумов найдено количество передаваемой по каналу информации, что позволило оценить эффективность системы связи, использующей когерентные сигналы.

Как известно [1-3], пропускная способность системы связи, использующей электромагнитное излучение с мощностью  $P$  в полосе частот ( $\omega_0 - \Delta/2, \omega_0 + \Delta/2$ ) при мощности шумов  $N$ , определяется формулой

$$C = h_{\max}(P + N) - h_{\max}(N), \quad (1)$$

где

$$h_{\max}(P) = \frac{\Delta}{2\pi} \left[ \left( \frac{2\pi P}{\hbar\omega_0\Delta} + 1 \right) \ln \left( \frac{2\pi P}{\hbar\omega_0\Delta} + 1 \right) - \frac{2\pi P}{\hbar\omega_0\Delta} \ln \frac{2\pi P}{\hbar\omega_0\Delta} \right]. \quad (2)$$

Естественно поставить вопрос, насколько скорость передачи информации может приближаться к  $C$  в реальной физической ситуации при использовании сигналов того или иного типа.

Подобная задача для канала, в котором излучение ослабляется, но шумы отсутствуют, была рассмотрена в [4] применительно к сигналам с заданными числами фотонов и когерентным сигналам. Ниже излагается обобщение результатов [4] для когерентных сигналов на случай, когда в канале присутствуют шумы.

Как и прежде [4], выберем модель, в которой потоки излучения, послываемые источниками сигнала и шума, имеют одно и то же направление распространения, но различные поляризации, соответствующие которым переменные обозначим индексами 1 и 2.

Пусть на приемник падает суперпозиция сигнала и шума, что в нашей модели соответствует фиксации некоторой промежуточной поляризации, повернутой на угол  $\varphi$  относительно первой и, следовательно, на  $\pi/2 - \varphi$  относительно второй. В этом случае канонические координаты  $x_1^\lambda$  и  $x_2^\lambda$  осцилляторов поля исходных поляризаций окажутся связанными с координатами  $y_1^\lambda$  и  $y_2^\lambda$  осцилляторов поля повернутой указанным образом поляризации линейным ортогональным преобразованием

$$y_i^\lambda = \sum_{k=1,2} c_{ik} x_k^\lambda, \quad (3)$$

матрица которого

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Если сигнал и шум статистически независимы и состояния их осцилляторов описываются операторами плотности  $\hat{\rho}_1$  и  $\hat{\rho}_2$ , то оператор плотности суммарного излучения выражается произведением  $\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2$ , а матрицу плотности излучения на выходе канала можно найти, если перейти к переменным  $y_1^\lambda$  и  $y_2^\lambda$  и вычислить шпур по  $y_2^\lambda$ , т. е.

$$\rho_{y_1 y_1'} = \text{Sp}_{y_2} \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \quad (4)$$

(Здесь и в дальнейшем индекс  $\lambda$  мы опускаем.)

Найденная таким образом матрица плотности описывает состояние излучения, которое возникает на выходе канала при условии, что на входе передатчиком было создано состояние, заданное оператором  $\hat{\rho}_1$ . При этом оператор  $\hat{\rho}_2$  характеризует статистические свойства шумов, среди которых в дальнейшем мы будем рассматривать лишь стационарные, т. е. потребуем, чтобы  $\hat{\rho}_2$  коммутировал с гамильтонианом излучения.

Знание матрицы плотности излучения на выходе канала дает возможность вычислить любые его статистические характеристики. Однако при решении задач теории информации достаточно знать условные вероятности результатов измерений, производимых в процессе приема, при заданном сигнале на входе. Если каждый раз измерение редуцирует исходное состояние излучения к некоторому чистому, то в общем случае эти условные вероятности могут быть представлены в виде (см. [5])

$$\rho_{(k/s)} = g_s \text{Sp} \hat{\rho}_s \hat{\rho}_k, \quad (5)$$

где  $\rho_s$  описывает состояние, индуцируемое заданным сигналом на выходе канала,  $\hat{\rho}_k$  — получающееся при измерении чистое состояние, а  $g_s$  — весовой множитель, одинаковый для тех «выходных» состояний  $\hat{\rho}_k$ , волновые функции которых принадлежат одному и тому же ортогональному набору. В нашем случае роль  $\hat{\rho}_s$  играет оператор, получаемый по формуле (4), а набор  $\hat{\rho}_k$  с соответствующими весами определяется характером измерений, производимых в процессе приема.

## 1. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ И ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ДЛЯ КОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА

Пусть на входе канала создается состояние излучения, у которого на интервале времени  $T$  с максимально допустимой постоянной точностью задана напряженность поля  $\langle \mathcal{E}(t) \rangle^*$ . Если ввести безразмерные комплексные амплитуды осцилляторов поля

$$a = i(\pi c T)^{-1/2} \int_T \langle \mathcal{E}(t) \rangle \exp(-i\omega t) dt, \quad (6)$$

то матрицы плотности, соответствующие такому состоянию в  $x_1$ -представлении, можно записать в виде [4, 5]

$$\rho_{x_1 x_1'} = \left( \frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{\omega}{2\hbar} (x_1^2 + x_1'^2) \right] + \quad (7)$$

\* Такое состояние часто называют когерентным или каноническим сигналом [6].

$$+ \hbar^{-1} (ax_1 + a^*x'_1) - \frac{(\operatorname{Re} a)^2}{\hbar\omega} \Big].$$

Для матрицы плотности шума выберем выражение

$$\rho_{2x_2x'_2}^{(k)} = \left( \frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} (2^k k!)^{-1} \exp \left[ -\frac{\omega}{2\hbar} (x_2^2 + x'^2_2) \right] \times \times H_k \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x_1 \right) H_k \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} x'_1 \right), \quad (8)$$

соответствующее состоянию с определенной энергией каждого из осцилляторов. Выбор такого состояния шума удобен тем, что полученные при этом результаты могут быть обобщены на случай любых стационарных шумов простым суммированием, так как

$$\rho_{2x_2x'_2} = \sum_k \rho_k \rho_{2x_2x'_2}^{(k)}, \quad (9)$$

где  $\rho_{2x_2x'_2}$  — матрица плотности произвольного стационарного шума, а  $\rho_k$  — ее собственные значения.

Найдем матрицу плотности излучения на выходе канала в указанном случае. Переходя в произведении  $\rho_{1x_1x'_1} \rho_{2x_2x'_2}$  к переменным  $y_1, y_2$ , а затем вычисляя шпур по  $y_2$ , получим

$$\begin{aligned} \rho_{y_2y'_1}^{(k)} &= \left( \frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\omega}{2\hbar} (y_1^2 + y'^2_1) + \hbar^{-1} (ay_1 + a^*y'_1) \times \right. \\ &\quad \times \cos \varphi - \frac{(\cos \varphi \operatorname{Re} a)^2}{\hbar\omega} \Big\} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^l \binom{k}{r} \binom{k}{l} (\sin \varphi)^{r+l} \times \\ &\quad \times (\cos \varphi)^{2k-r-l} 2^{k-r} (k-r)! (2^k k!)^{-1} \left( -\frac{\sin \varphi \operatorname{Re} a}{\sqrt{\hbar\omega}} \right)^{l-r} \times \\ &\quad \times L_{k-l}^{l-r} \left( -2 \frac{\sin^2 \varphi [\operatorname{Re} a]^2}{\hbar\omega} \right) \left[ H_r \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y_1 \right) H_l \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y'_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + H_l \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y_1 \right) H_r \left( \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y'_1 \right) \right] \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{rl} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $L_{k-l}^{l-r}$  — полиномы Лагерра.

Теперь предположим, что приемник регистрирует когерентные сигналы, т. е. редуцирует состояние излучения к чистому, описываемому в  $y_1$ -представлении матрицей плотности вида (7) с некоторыми произвольными амплитудами  $a$ . Найдем вероятность фиксации такого состояния приемником при измерении излучения с матрицей плотности  $\rho_{y_1y'_1}^{(k)}$ , (10).

Условные вероятности  $p(k/s)$ , определяемые формулой (5), в этом случае зависят от непрерывных параметров  $a, a^*$  и поэтому имеют смысл плотности вероятности. Поскольку все значения  $a$  физически равноправны, весовой множитель должен быть взят постоянным и опре-

делен из условия нормировки  $p(\tilde{a}/a)$  в пространстве  $\tilde{a}$ . Поэтому в нашем случае

$$p_{(a/a)}^{(k)} = \text{const} \int_{(k/a)} \rho_{y_1 y_1}^{(k)} \tilde{\rho}_{y_1' y_1'} dy_1 dy_1', \quad (11)$$

где  $\rho_{y_1 y_1}^{(k)}$ , определяется формулой (10), а  $\tilde{\rho}_{y_1 y_1'}$  имеет вид (7) с амплитудами  $\tilde{a}$ . Учитывая сказанное, после интегрирования получим

$$\begin{aligned} p_{(a/a)}^{(k)} &= \text{const} \exp \left( -\frac{|\tilde{a} - a'|^2}{2\hbar\omega} \right) (\cos \varphi)^{2k} \times \\ &\times L_k^0 \left( -\frac{|\tilde{a} - a'|^2 \sin^2 \varphi}{2\hbar\omega \cos^2 \varphi} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $a' = a \cos \varphi$  — амплитуда сигнала на выходе канала.

Как было замечено выше, с помощью формулы (12) можно найти вероятность ошибки  $p(\tilde{a}/a)$  для любых стационарных шумов, поскольку в общем случае  $p(\tilde{a}/a) = \sum_k p_{(a/a)}^{(k)}$ . Например, если  $\rho_k$  представляет собой распределение Пуассона

$$\rho_k = e^{-\bar{k}} \frac{\bar{k}^k}{k!}, \quad (13)$$

что имеет место, когда шумы представлены стационарным ансамблем когерентных состояний заданной амплитуды, то для вероятности ошибки с помощью (12) легко получить выражение

$$\begin{aligned} p(\tilde{a}/a) &= \text{const} \exp \left( -\frac{|\tilde{a} - a'|^2}{2\hbar\omega} \right) I_0 [2(|\tilde{a} - a'|^2 \bar{k} \times \\ &\times \sin^2 \varphi / 2\hbar\omega)^{1/2}], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Наиболее интересным с прикладной точки зрения является случай, когда  $\rho_k$  представляет собой равновесное распределение, т. е.

$$\rho_k = (\bar{k} + 1)^{-1} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{k} + 1} \right)^k. \quad (15)$$

Проводя для этого случая, как и прежде, вычисления с помощью (12), найдем

$$\begin{aligned} p(\tilde{a}/a) &= [2\pi\hbar\omega (\bar{k} \sin^2 \varphi + 1)]^{-1} \times \\ &\times \exp [-|\tilde{a} - a'|^2 / 2\hbar\omega (\bar{k} \sin^2 \varphi + 1)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Отличие этой формулы от классического выражения для вероятности ошибки при наличии аддитивного гауссова шума заключается лишь в том, что здесь добавляется «квантовый шум» со спектральной интенсивностью  $\hbar\omega$ .

Таким образом, мы нашли распределение  $\tilde{p}(a/a)$  для теплового шума, исходя из общей схемы рассмотрения стационарных шумов. Ниже мы исследуем этот случай как наиболее интересный подробнее несколько иным методом, который может представлять самостоятельный интерес.

## 2. ТЕПЛОВЫЕ ШУМЫ

Прежде чем приступить к рассмотрению приема когерентного сигнала на фоне теплового шума, рассмотрим следующую абстрактную схему.

Пусть состояние системы одинаковых линейных осцилляторов описывается оператором плотности, который доставляет максимум энтропии при заданных средних значениях канонических координат, импульсов и квадратов этих величин. Если теперь перейти к новой системе осцилляторов, координаты которой связаны с исходными линейным ортогональным преобразованием, то может быть сформулирована следующая теорема\*.

Оператор плотности состояния любого из осцилляторов новой системы также максимизирует энтропию, если заданы средние значения его координаты, импульса и их квадратов; эти средние выражаются через параметры, фиксированные в исходной системе осцилляторов как соответствующие классические значения.

Доказательства этой теоремы приведено в Приложении. Из нее, в частности, сразу следует доказанная в работах [4,7] устойчивость монохроматического с тепловым распределением по энергиям и когерентного излучений по отношению к ослаблению. Действительно, матрицы плотности этих излучений могут быть получены, если потребовать максимума энтропии при фиксации средней энергии осциллятора поля в первом случае и значений зависящей от времени напряженности поля  $\langle \mathcal{E}(t) \rangle$  вместе с дисперсией этой величины  $\langle \mathcal{E}^2(t) \rangle - \langle \mathcal{E}(t) \rangle^2$  — во втором [5].

Поскольку излучение на выходе канала с коэффициентом передачи  $\varsigma$ , меньшим единицы, является подсистемой по отношению к исходному [4], на основании сформулированной теоремы заключаем, что тепловое распределение по энергиям осциллятора поля остается тепловым, но со средней энергией, уменьшенной в  $\varsigma$  раз, а напряженность поля когерентного сигнала падает в  $\varsigma^{1/2}$  раз. В нашей модели роль коэффициента передачи играет величина  $\cos^2 \varphi$ .

С помощью указанной теоремы, но более косвенным путем, можно показать, что имеет место устойчивость стационарного излучения, собственные значения матрицы плотности которого распределены по Пуассону (13). Для этого достаточно составить стационарный ансамбль когерентных сигналов и воспользоваться их устойчивостью по отношению к ослаблению.

Теперь снова обратимся к задаче о приеме когерентного сигнала на фоне аддитивного теплового шума. Сформулированная выше теорема непосредственно обосновывает предположение В. Л. Стефанюка [8] о том, что матрица плотности смеси сигнала с аддитивным шумом максимизирует энтропию при заданных значениях напряженности поля сигнала и суммарной спектральной энергии. Решая указанную вариационную задачу, можно найти матрицу плотности излучения на выходе канала в виде

\* Вообще говоря, справедлива более общая теорема, относящаяся к произвольным линейным системам, однако ее доказательство выходит за рамки настоящей статьи.

$$\begin{aligned} \rho_{y_1 y'_1} = & \left( \frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} \left( \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{\omega}{2\hbar} \frac{1 + \sigma^2}{1 + \sigma^2} (y_1^2 + y'^2_1) + \right. \\ & + y_1 \hbar^{-1} \frac{a - a^* \sigma}{1 + \sigma} \cos \varphi + y'_1 \hbar^{-1} \frac{a^* - a \sigma}{1 + \sigma} \cos \varphi + \frac{\omega}{\hbar} \frac{2\sigma}{1 - \sigma^2} y_1 y'_1 - \\ & \left. - \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \frac{(\operatorname{Re} a \cos \varphi)^2}{\hbar \omega} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\sigma = \frac{\bar{k} \sin^2 \varphi}{1 + \bar{k} \sin^2 \varphi}$ , что для условной вероятности  $p(\tilde{a}/a)$ , приводит к выражению (16).

Теперь перейдем к вычислению количества информации, переносимого в единицу времени когерентными сигналами при наличии в канале шума. При этом, как обычно, ограничимся рассмотрением случая, когда спектральные плотности сигнала и шума равны нулю всюду вне узкого частотного интервала  $\left(\omega_0 - \frac{\Delta}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta}{2}\right)$ , а внутри этого интервала шум обладает свойствами равновесного.

То обстоятельство, что выражение для вероятности ошибки  $p(\tilde{a}/a)$  в этом случае по форме совпадает с классическим, позволяет избежать непосредственного расчета и по аналогии с [9] сразу записать формулу потока информации, максимального при заданных мощностях сигнала  $P$  и шума  $N$ , в виде

$$I = \frac{\Delta}{2\pi} \ln \frac{2\pi(P + N) + \hbar\omega_0\Delta}{2\pi N + \hbar\omega_0\Delta}. \quad (18)$$

При большей мощности шума (18) переходит в известное классическое выражение

$$I = \frac{\Delta}{2\pi} \ln \frac{P + N}{N}, \quad (19)$$

а в противоположном предельном случае  $N \rightarrow 0$  в отличие от (19) приводит к конечной скорости передачи информации в канале без помех.

Для оценки эффективности системы связи, использующей когерентные сигналы, вычислим отношение найденной выше величины потока информации к пропускной способности канала  $C$  (1).

В классической области, когда  $P$  и  $N$  велики в сравнении с  $\hbar\omega_0\Delta$ ,

$$\eta = \frac{I}{C} = 1 - O(N^{-2}, P^{-2}), \quad (20)$$

т. е. определенная указанным образом эффективность системы связи, использующей когерентные сигналы, близка к единице. В противоположном предельном случае  $P, N \ll \hbar\omega_0\Delta$

$$\eta \simeq \left\{ 1 - \ln \frac{2\pi(P + N)}{\hbar\omega_0\Delta} - \frac{N}{P} \ln \left( 1 + \frac{P}{N} \right) \right\}^{-1}. \quad (21)$$

Любопытно, что в последнем случае эффективность, согласно формуле (21), возрастает с увеличением мощности шумов. Здесь, однако, нет никакого противоречия, поскольку скорость передачи информации при увеличении  $N$  падает, хотя и медленнее, чем пропускная способность канала.

Из формул (20), (21) видно, что использование когерентных сигналов для передачи информации в канале с шумом целесообразно лишь в классической области, а в квантовой эффективность такой системы связи мала.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем сформулированную выше теорему. Пусть  $\rho^{\wedge}$  — оператор плотности системы одинаковых линейных осцилляторов частоты  $\omega$ , максимизирующей энтропию  $H = -\text{Sp} \rho^{\wedge} \ln \rho^{\wedge}$  при фиксированных средних значениях координат и импульсов

$$\bar{x}_i = \text{Sp} \rho^{\wedge} \hat{x}_i, \quad \bar{p}_i = \text{Sp} \rho^{\wedge} \hat{p}_i, \quad (\text{П.1})$$

их квадратов

$$\bar{x}_i^2 = \text{Sp} \rho^{\wedge} \hat{x}_i^2, \quad \bar{p}_i^2 = \text{Sp} \rho^{\wedge} \hat{p}_i^2 \quad (\text{П.2})$$

и нормировке  $\text{Sp} \rho^{\wedge} = 1$ .

Требование максимальности энтропии приводит к тому, что  $\rho^{\wedge}$  распадается на произведение операторов плотности отдельных осцилляторов  $\rho^{(i)}$ , каждый из которых должен удовлетворять уравнению

$$\ln \rho^{(i)} = -(1 + \eta_i) - (\alpha_i \hat{x}_i + \beta_i \hat{p}_i + \gamma_i \hat{x}_i^2 + \chi_i \hat{p}_i^2), \quad (\text{П.3})$$

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  и  $\eta_i$  — неопределенные множители Лагранжа, которые находятся из условий (П.1), (П.2) и нормировки.

Если с помощью уравнений (П.3) найти собственные функции и собственные значения операторов  $\rho^{(i)}$ , можно записать их матрицы в  $x_i$ -представлении:

$$\begin{aligned} \rho_{x_i x'_i}^{(i)} &= \left( \frac{\gamma_i \tanh \gamma_i}{\pi \hbar^2 \chi_i} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_i^2 + x'^2_i) \left( \frac{\gamma_i}{\hbar^2 \chi_i} \right) \operatorname{cth} 2\gamma_i - \right. \\ &\quad \left. - (x_i + x'_i) \frac{\alpha_i \tanh \gamma_i}{2\hbar^2 \chi_i} + x_i x'_i \frac{\gamma_i}{\hbar^2 \gamma_i \sinh 2\gamma_i} - \frac{i \beta_i}{2\hbar \chi_i} (x_i - x'_i) - \frac{\alpha_i^2 \tanh \gamma_i}{4\hbar^2 \gamma_i \chi_i} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Перейдем теперь к переменным  $y_j$ , связанным с  $x_i$  линейным ортогональным преобразованием  $y_j = \sum_i c_{ji} x_i$ . Учитывая, что при линейном преобразовании координат операторы импульсов преобразуются с помощью транспонированной обратной матрицы  $c_{ij}^{-1} = c_{ji}$ , можно найти закон, по которому преобразуются при переходе к новой системе осцилляторов средние значения:

$$\begin{aligned} \bar{y}_j &= \sum_i c_{ji} \bar{x}_i, \quad \bar{r}_j = \sum_i c_{ji} \bar{p}_i, \\ \bar{y}_j^2 &= \sum_{i, k} c_{ji} c_{jk} \bar{x}_i \bar{x}_k, \quad \bar{r}_j^2 = \sum_{i, k} c_{ji} c_{jk} \bar{p}_i \bar{p}_k, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где  $r_j$  — импульсы, канонически сопряженные с  $y_j$ . Легко видеть, что средние преобразуются по тому же закону, что и классические значения соответствующих параметров.

Для того, чтобы найти матрицу плотности, описывающую состояние осциллятора с координатой  $y_k$ , нужно записать с помощью (П.4) оператор плотности всей системы в  $\{x_i\}$ -представлении  $\rho \{x_i, x'_i\} = \prod_i \rho_{x_i x'_i}^{(i)}$ , перейти к переменным  $y_j$ , а затем вычислить шпур по всем новым переменным, исключая  $y_k$ .

Проводя указанные выкладки, можно убедиться, что выражение для  $\rho_{y_k y_k}^{(k)}$ , по форме совпадает с (П.4), следовательно, оператор  $\rho^{(k)}$  удовлетворяет вариационному

уравнению вида (П.3), т. е. обеспечивает максимум энтропии при фиксированных значениях  $\bar{y}_k$ ,  $\bar{r}_k$ ,  $\bar{y}^2$  и  $\bar{r}_k^2$  которые, в свою очередь, определяются соотношениями (П.5).

Таким образом, теорема доказана.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. P. Gordon, Proc. IRE, 50, 9, 1898 (1962).
2. Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин, ДАН СССР, 149, № 6, 1299 (1963).
3. Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин, сб. Теория передачи информации, изд. АН СССР, вып. 16, 1964.
4. С. И. Боровицкий, В. В. Митюгов, Проблемы передачи информации, 3, № 1, 35 (1967).
5. В. В. Митюгов, Проблемы передачи информации, 2, № 3, 48 (1966).
6. Р. Глаубер, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
7. H. Takahasi, Advances in communication systems, 1, Los Angeles, 1965.
8. B. L. Stefaniuk, Проблемы передачи информации, 2, № 1, 58 (1966).
9. K. Шенон, Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 декабря 1966 г.

### QUANTUM ELECTROMAGNETIC COMMUNICATION CHANNEL WITH ADDITIVE NOISE

*V. V. Mityugov, V. P. Morozov*

The density matrix of a coherent signal with additive stationary noise has been found using a simple model. The formulae for the probability distribution of the reception errors have been derived for different statistic properties of noise. The quantity of information transmitted by the channel has been found for the case of thermal noises that permitted one to estimate the efficiency of the communication channel using the coherent signals.

УДК 538.56 . 519.25

## О ФОРМЕ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА ЗА СЛОЕМ С ХАОТИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*B. A. Алимов, L. M. Ерухимов*

Показано, что при распространении импульса излучения в свободном пространстве за слоем с хаотическими неоднородностями (или при отражении от такого слоя) могут происходить существенные изменения формы импульса и его корреляционных (пространственно-временных и частотных) характеристик. Рассмотрены примеры прямоугольного и колоколообразного импульсов.

Известно, что в гармонической волне, прошедшей через слой со случайными неоднородностями, возникают флуктуации амплитуды и фазы. Характеристики флуктуаций существенно зависят от частоты волны и расстояния, проходимого волной в свободном пространстве за неоднородным слоем. В связи с этим при распространении импульса в свободном пространстве за слоем с хаотическими неоднородностями будет изменяться корреляция между флуктуациями разных спектральных составляющих импульса, что приведет к изменению формы и статистических свойств импульсного сигнала. Эти изменения в ряде случаев могут существенно превышать аналогичные изменения формы сигнала и его корреляционных характеристик в самом неоднородном слое\*. Поэтому при изучении влияния неоднородностей на распространение импульса необходимо учитывать эффекты, возникающие при распространении волны в свободном пространстве, разделяющем неоднородный слой и плоскость наблюдения.

Изменения (и довольно значительные) характеристик немонодроматического сигнала могут происходить и при полном внутреннем отражении от слоя с неоднородностями. Это связано с влиянием хаотических неоднородностей, расположенных вблизи уровня отражения, на корреляцию между флуктуациями различных монохроматических составляющих импульсного сигнала [3].

Рассмотрению указанных вопросов и посвящена настоящая работа.

### 1. ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Пусть модулированный сигнал  $E_0(r, t)$  проходит через слой с хаотическими неоднородностями показателя преломления и принимается антенным устройством, расположенным на расстоянии  $L$  от слоя. Поле сигнала на выходе приемного устройства представим в виде разложения Фурье:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

\* Вопрос о влиянии случайных неоднородностей среды на форму импульса, распространяющегося в такой среде, был рассмотрен в работах [1, 2].

где  $E(\omega)$  — спектральная составляющая импульса на выходе антенного устройства. Используя (1), легко найти среднее значение интенсивности принимаемого сигнала:

$$\bar{J}(t) = \overline{EE^*}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{E(\omega_1) E^*(\omega_2)} \exp[i(\omega_1 - \omega_2)t] d\omega_1 d\omega_2. \quad (2)$$

Усреднение здесь проводится по ансамблю неоднородностей. Представим далее поле волны на выходе антенного устройства  $E(\omega)$  как сумму среднего поля  $\overline{E(\omega)}$  и флюктуирующей составляющей

$$f(\omega) = [E(\omega) - \overline{E(\omega)}]/E_0(\omega),$$

где  $E_0(\omega)$  — поле волны на выходе приемного устройства при отсутствии случайных неоднородностей в слое. Тогда корреляционную функцию спектральных компонент импульса можно записать следующим образом:

$$R_{E_{\omega_1} E_{\omega_2}^*} = \overline{E(\omega_1) E^*(\omega_2)} = [\overline{E(\omega_1)} \overline{E(\omega_2)} + E_0(\omega_1) E_0^*(\omega_2)] R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}. \quad (3)$$

Здесь  $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}$  — функция частотной корреляции комплексно-сопряженных флюктуирующих полей на выходе приемного устройства.

Обычно ширина частотного спектра импульса  $\Delta\omega$  много меньше несущей частоты  $\omega_0$ , поэтому можно пренебречь различием величин средних полей в пределах полосы частот  $\Delta\omega$ . Используя это обстоятельство и проводя в (2) замену переменных  $\omega_2 - \omega_1 = \Omega$ ,  $\omega_1 + \omega_2 = 2\bar{\omega}$ , для средней интенсивности принимаемого сигнала получаем следующее выражение (см. также (3) и [4]):

$$\bar{J}(t) = \Sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{P}(\bar{\omega}, \Omega) + G(\bar{\omega}, \Omega) R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega)] \exp[-i\Omega(t-L/c)] d\bar{\omega} d\Omega, \quad (4)$$

где  $\Sigma$  — эффективная площадь приемной антенны,  $F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\bar{\omega}, \Omega) d\bar{\omega}$  — спектральная плотность нерассеянной мощности принимаемого сигнала, функция  $G(\bar{\omega}, \Omega) = |E_0(\omega_1) E_0^*(\omega_2)|/\Sigma^2$  характеризует спектр мощности исходного сигнала,  $\Omega L/c$  — разность фазовых набегов (для волн частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) на длине трассы  $L$  ( $c$  — скорость света).

В дальнейшем будем предполагать, что слой с неоднородностями, вызывающими флюктуации принимаемого излучения, изменяет только фазы гармонических составляющих импульсного сигнала. В этом случае соотношение (4) можно записать в следующей форме [4]:

$$\bar{J}(t) = \Sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{\omega}, \Omega) \{ \exp[-(\bar{\Delta S})_{\omega_0}^2] + R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega) \} \exp[-i\Omega(t-L/c)] d\bar{\omega} d\Omega, \quad (5)$$

где  $(\bar{\Delta S})_{\omega_0}^2$  — средний квадрат флюктуаций фазы волны частоты  $\omega_0$ . Из формулы (5) следует, что при малых фазовых возмущениях  $(\bar{\Delta S})_{\omega_0}^2 \ll 1$  форма огибающей сигнала практически не искажается\*. Когда возмущения фазы велики  $(\bar{\Delta S})_{\omega_0}^2 \gg 1$ , средняя форма принимаемого

\* При  $(\bar{\Delta S})_{\omega_0}^2 \ll 1$   $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega) \simeq (\bar{\Delta S})_{\omega_0}^2 \rho_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega)$ , где  $\rho_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega)$  — нормированный коэффициент частотной корреляции, т. е.  $|R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega)| \ll 1$  [4].

сигнала определяется вторым слагаемым в формуле (5)\*. При этом спектр огибающей в среднем характеризуется модулем величины

$$F(\Omega) = R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{\omega}, \Omega) d\bar{\omega} \exp(i\Omega L/c).$$

Следовательно, ширина среднего спектра огибающей сигнала зависит от радиуса частотной корреляции  $\Omega_k$  (характерного масштаба изменения функции  $|R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega)|$ ). Величина  $\Omega_k$  существенно уменьшается с увеличением расстояния  $L$ , проходимого импульсом в свободном пространстве за слоем [4], что вызывает сжатие среднего спектра огибающей и, как следствие этого, уширение средней длительности импульса излучения.

Ниже мы рассмотрим расплывание колокольного и прямоугольного импульсов при распространении за слоем со случайными неоднородностями. Все расчеты будут проводиться для случая приемной антенны с гауссовой характеристикой направленности и сильных возмущений фазы волны в слое\*\*. Тогда, используя результаты работ [3, 4], легко показать, что функция  $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\Omega)$  имеет вид

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*} = \exp[-(1 - \gamma_s(\delta)) (\overline{(\Delta S)^2}_{\omega_0})] \left[ \frac{4k_1^2 + 1}{(4k_1^2 + 1)^2 + (\Omega/2\omega_0)^2 D_2^2} + \right. \\ \left. + i \frac{\Omega D_2 / 2\omega_0}{(4k_1^2 + 1)^2 + (\Omega/2\omega_0)^2 D_2^2} \right]. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\delta = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_1 + \omega_2)$ ,  $k_1 = h \sqrt{\overline{(\Delta S)^2}_{\omega_0}}/l$  ( $h$  и  $l$  — средние размеры антенны и неоднородностей в слое),  $D_2 = D \overline{(\Delta S)^2}_{\omega_0}$ ,  $D = 4cL/\omega_0 l^2$  — волновой параметр,  $\gamma_s(\delta)$  — параметр, учитывающий раскорреляцию флуктуаций фазы волны при отражении последней от неоднородного слоя [3]. Для слоя с линейным изменением электронной концентрации по высоте  $N(z) = -z/L_0$  согласно [3].

$$\gamma_s(\delta) = \begin{cases} 1 - \frac{16 \delta^2 L_0^2}{l^2 \ln(8L_0/l)} & \left( \frac{4\delta L_0}{l} < 1 \right) \\ \ln(1/\delta)/\ln(8L_0/l) & \left( 4\delta L_0/l > 1 \right) \end{cases}, \quad (7)$$

где  $L_0$  — толщина слоя. В дальнейшем, поскольку мы рассматриваем узкополосные импульсы ( $\delta \ll 1$ ), будем считать, что  $\gamma_s(\delta)$  определяется верхним соотношением (7).

*1. Колокольный импульс.* Спектральная амплитуда для колокольного импульса имеет вид

$$A = A_0 \exp \left[ - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Omega_0} \right)^2 \right], \quad (8a)$$

\* Это справедливо, когда приемное устройство имеет не очень узкую диаграмму направленности и, следовательно, принимаемая рассеянная мощность сигнала  $P_s$  значительно больше нерассеянной  $\bar{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\bar{\omega}, 0) d\bar{\omega}$  (см. (4) и [4]).

\*\* Ниже при проведении конкретных вычислений мы будем также предполагать, что функция корреляции флуктуаций фазы волны в слое имеет гауссову форму  $R_s(r) = (\Delta S)^2 \exp(-r^2/l^2)$ .

где  $\Omega_0$  и  $A_0$  характеризуют спектральную ширину и амплитуду импульса. Выражение для спектра мощности исходного сигнала (4) можно записать следующим образом:

$$G(\bar{\omega}, \Omega) = A_0^2 \exp \left[ -\frac{\Omega^2}{2\Omega_0^2} - 2 \left( \frac{\bar{\omega} - \omega_0}{\Omega_0} \right)^2 \right]. \quad (86)$$

Подставляя (6) и (8б) в выражение (5), после интегрирования получаем для нормированной величины интенсивности

$$\bar{I}(t) = \frac{(4k_1^2 + 1) \bar{J}(t)}{(A_0 \Sigma \sqrt{\pi \Omega_0 \Omega_1})^2} = \sqrt{2\pi} P \exp [2(P^2 + P\alpha)] \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{2}P + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (9)$$

где  $\Phi$  — интеграл вероятности,

$$P = \frac{\omega_0}{\Omega_1} \left( \frac{4k_1^2 + 1}{D_2} \right), \quad \Omega_1 = \frac{\Omega_0}{(1 + 2a^2 \Omega_0^2)^{1/2}},$$

$$a^2 = \frac{4L_0^2 (\Delta S_{\omega_0}^2)}{l^2 \omega_0^2 \ln(8L_0/l)}, \quad \alpha = \left( \frac{L}{c} - t \right) \Omega_1.$$

Таким образом, форма импульса за хаотическим экраном с сильными фазовыми флуктуациями не остается гауссовой. На рис. 1 приведен график зависимости величины  $\bar{I}(t)$  от параметра  $\alpha$  для разных значений  $P$ . Из хода кривых этого графика можно сделать следующие выводы. С увеличением дистанции  $L$  (уменьшением направленности приемной антенны  $h/l$ ) импульс уширяется, интенсивность в максимуме падает. Происходит запаздывание сигнала во времени. (Импульс сдвигается как целое относительно оси абсцисс.)

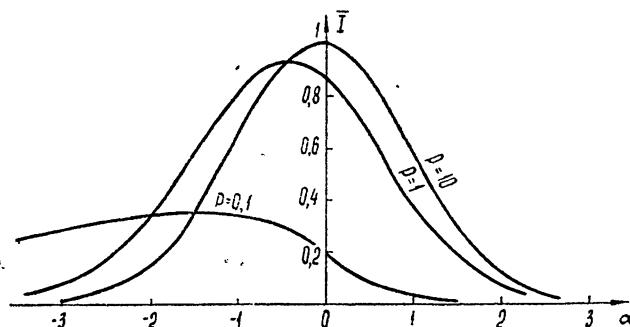


Рис. 1.

2. Прямоугольный импульс. Представим спектральную амплитуду узкополосного прямоугольного импульса в форме

$$A = A_0 \frac{\sin[(\omega - \omega_0)T/2]}{\pi(\omega - \omega_0)},$$

где  $T$  — ширина импульса. Тогда для спектра мощности  $G(\bar{\omega}, \Omega)$  получим

$$G(\bar{\omega}, \Omega) = \left( \frac{A_0}{\pi} \right)^2 \frac{\cos(T\Omega/2) - \cos[T(\bar{\omega} - \omega_0)]}{(\bar{\omega} - \omega_0)^2 - \Omega^2/4}, \quad (10)$$

После подстановки в (5) соотношений (6), (10) и интегрирования для нормированной величины интенсивности  $\bar{I}(t) = \bar{J}(t)(4k_1^2 + 1)/(A_0\Sigma)^2$  получаем

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) = \frac{1}{2} & \left\{ \Phi\left(\frac{\beta+1}{4b}\right) - \Phi\left(\frac{\beta-1}{4b}\right) + \exp[(\beta+1)P_1] \left[ 1 - \Phi\left(\gamma a + \frac{\beta+1}{4b}\right) \right] - \right. \\ & \left. - \exp[(\beta-1)P_1] \left[ 1 - \Phi\left(\gamma a + \frac{\beta-1}{4b}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\beta = (L/c - t)/T$ ,  $b = a/T$ ,  $\gamma = 2\omega_0(4k_1^2 + 1)/D_2$ ,  $P_1 = \gamma T/2$ .

На рис. 2 изображена зависимость величины  $\bar{I}(t)$  от параметра  $\beta$  для случаев отражения (пунктир;  $b = 1$ ,  $\gamma a = 2$ ) и прохождения прямоугольного импульса через неоднородный слой (сплошные кривые)\*. Как видно из рис. 2, изменения формы импульса существенно различны для этих случаев. Это объясняется тем, что при отражении от слоя происходит значительное искажение фазы волны из-за хаотических неоднородностей, расположенных вблизи уровня отражения [3]. Если сигнал немонохроматичен, это приведет к дополнительному искажению его формы, которое также обусловлено распространением импульса в свободном пространстве за слоем. Для прямоугольного импульса это дополнительное изменение формы довольно существенно (см. рис. 2).

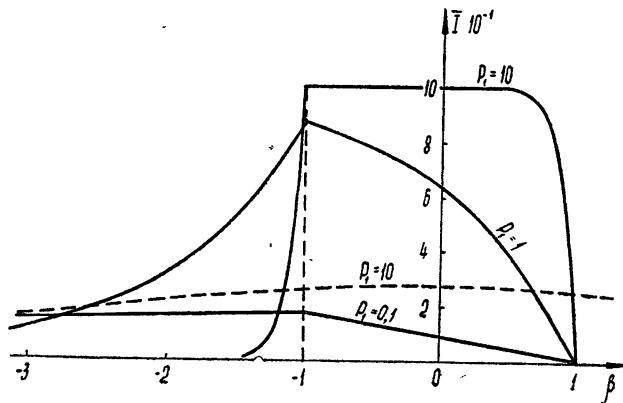


Рис. 2.

## 2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Немонохроматичность излучения должна оказывать влияние на корреляционные характеристики принимаемого сигнала. Действительно, дифракционное поле в плоскости наблюдения в этом случае представляется суперпозицией дифракционных полей, образованных волнами разной частоты. Поэтому радиус частотной корреляции для такой структуры дифракционного поля (флуктуаций) будет отличаться от соответствующей величины для монохроматического излучения и, следовательно, должны иметь место определенные отличия корреляционных характеристик для импульсного сигнала от случая приема монохроматического

\*При рассмотрении вопроса о форме импульса, прошедшего через слой с неоднородностями, необходимо пользоваться соотношением (6) с параметром  $\gamma_s(\beta) = 1$  (см. (7)) и формулой (11) при  $a = b = 0$ .

излучения. Рассмотрим этот вопрос на примерах временной (пространственной) и частотной корреляций флюктуаций принимаемого сигнала.

*1. Пространственно-временная функция корреляции.* Предположим, что в двух точках плоскости, разнесенных на расстояние  $\xi$ , интенсивности (точнее, энергии) импульсов, принимаемых в различные моменты времени, разделенные интервалом  $\tau$ , соответственно равны

$$\begin{aligned} \tilde{J}(0, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) E^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega_1) E^*(\omega_2) \exp[i(\omega_1 - \omega_2)t] d\omega_1 d\omega_2 dt = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega, 0, 0) d\omega, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{J}(\xi, \tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega, \xi, \tau) d\omega. \quad (12a)$$

Из (12) и (12a) легко получить выражение для искомой корреляционной функции:

$$R_I(\xi, \tau) = \overline{\tilde{J}(0, 0) \tilde{J}(\xi, \tau)} = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{I, \omega}(\xi, \tau) d\omega_1 d\omega_2, \quad (13)$$

где  $R_{I, \omega}(\xi, \tau)$  — функция частотной корреляции интенсивностей спектральных компонент импульсов.

Рассмотрим корреляцию флюктуаций интенсивности импульсных сигналов для случая отражения волн от неоднородного слоя с линейным профилем средней электронной концентрации, вызывающего сильные фазовые флюктуации волны ( $(\Delta S)_{\omega_0}^2 \gg 1$ ). Предполагаем, что неоднородности в слое движутся со скоростью  $V$  вдоль  $\xi$ . В этом случае, используя (6) и результаты работ [3, 5], можно показать, что в зоне Фраунгофера

$$R_{I, \omega}(\xi', \tau) = A_0^4 \exp \left\{ - \sum_{i=1}^2 2 \left( \frac{\omega_i - \omega_0}{\Omega_0} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2 \overline{(\Delta S)}_{\omega_0}^2 \left[ 1 - \gamma_s(\delta) + \frac{(\xi')^2}{1 + (\delta D_2)^2} \right] \right\} \frac{1}{1 + (\delta D_2)^2}.$$

Подставляя это выражение для  $R_{I, \omega}(\xi', \tau)$  в (13) и проводя интегрирование по одной из переменных, имеем

$$R_I(\xi', \tau) = A_0^4 (2\pi)^2 V \pi \Omega_0 \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \left[ \Omega^2 \left( \frac{1}{\Omega_0^2} + 2a^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2(\xi')^2 \overline{(\Delta S)}_{\omega_0}^2}{1 + (D_2/2\omega_0)^2 \Omega^2} \right] \right\} \frac{d\Omega}{1 + (D_2/2\omega_0)^2 \Omega^2}. \quad (14)$$

Результаты численного интегрирования по формуле (14) представлены на рис. 3. Здесь изображена зависимость коэффициента корреляции интенсивностей двух импульсов  $r_I(\xi') = R_I(\xi')/R_I(0)$  от параметра  $\xi' = (\xi - V\tau)/l$  при  $D = 10$ ,  $\Omega_0/\omega_0 = 10^{-4}$  для разных значений  $\overline{(\Delta S)}_{\omega}^2$  (сплошные кривые) и аналогичная зависимость для монохроматического сигнала (пунктир). Из сравнения этих графиков видно, что примене-

ние импульсных сигналов незначительно увеличивает пространственно-временную корреляцию между флюктуациями принимаемого излучения.

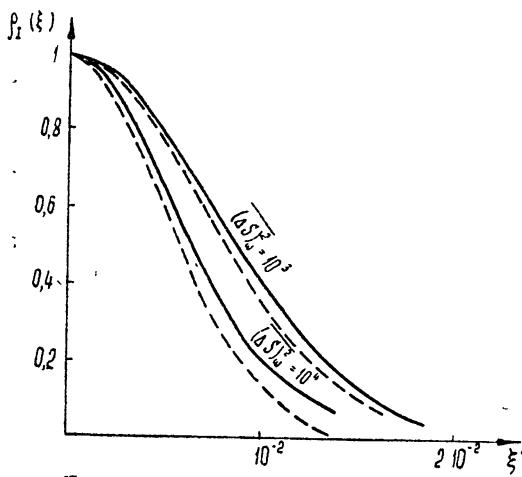


Рис. 3.

С другой стороны, величина флюктуаций  $\bar{I}^2 - \bar{I}^2/\bar{I}^2$  для импульсного излучения может существенно отличаться от соответствующей характеристики монохроматического сигнала. Действительно, проводя в (14) интегрирование при  $\xi' = 0$  и учитывая соотношение (12), получаем

$$N = \bar{I}^2 - \bar{I}^2/\bar{I}^2 = 2V\pi Pe^{4P^2} [1 - \Phi(2P)], \quad (15)$$

где  $P = \omega_0/\Omega_1 D_2$ ,  $\Omega_1 = \Omega_0/(1+2a^2\Omega_0^2)^{1/2}$ . Из сравнения (15) и (9) видно, что зависимость величины флюктуаций  $N$  от параметра  $P$  аналогична функциональной зависимости  $\bar{I}(P)$  при  $\alpha=0$ . Поэтому (см. (15) и рис. 1) при использовании импульсных сигналов малой длительности величина флюктуаций может существенно уменьшиться по сравнению с величиной  $N = 1$  для монохроматического излучения. Значительное уменьшение величины флюктуаций импульсного сигнала может быть обусловлено сильными фазовыми возмущениями в слое с неоднородностями\* или большим расстоянием от этого слоя до точки наблюдения.

2. Частотная корреляция флюктуаций. Пусть два импульса (с несущими частотами  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ ) проходят через слой со случайными неоднородностями и принимаются антенным устройством, расположенным на расстоянии  $L$  от слоя. Тогда для интенсивностей этих двух импульсов на выходе приемного устройства имеем (см. (12)).

$$\tilde{I}_{\omega_{0k}} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega_{0k}, \omega) d\omega \quad (k = 1, 2).$$

Выражение для искомой функции частотной корреляции при этом будет иметь вид

$$R_{I, \omega} = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} R'_{I, \omega}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \quad (16)$$

\* Это обстоятельство может оказаться чрезвычайно важным при исследовании неоднородной структуры ионосферы методом импульсного зондирования.

где  $R'_{I, \omega}(\omega_1, \omega_2) = \overline{I(\omega_01, \omega_1)} \overline{I(\omega_02, \omega_2)}$  — функция корреляции интенсивностей спектральных компонент двух импульсов с разными несущими частотами ( $\omega_01$  и  $\omega_02$ ) на выходе антенного устройства.

Рассмотрим частотную корреляцию между флуктуациями двух колокольных импульсов (ширина спектра каждого импульса  $\Omega_0$ ), отраженных от неоднородного слоя с сильными фазовыми возмущениями. Тогда в случае малого относительного разноса несущих частот импульсов  $\delta = (\omega_02 - \omega_01)/(\omega_01 + \omega_02)$  ( $\omega_0 = (\omega_01 + \omega_02)/2$ ), учитывая (6) и [4], в зоне Фраунгофера имеем

$$R'_{I, \omega} = (A_0 \Sigma)^4 \exp \left\{ -2 \left[ \left( \frac{\omega_1 - \omega_01}{\Omega_0} \right)^2 + \left( \frac{\omega_2 - \omega_02}{\Omega_0} \right)^2 + [1 - \gamma_s(\delta)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \overline{(\Delta S)^2}_{\omega_0} \right] \right\} \frac{1}{(4k_1^2 + 1)^2 (\delta D_2)^2}. \quad (17)$$

Подставляя выражение для  $R'_{I, \omega}$  в (16) и проводя интегрирование, находим (при  $\delta D_2 \ll 1$ )

$$R_{I, \omega} = 2\pi \frac{(A_0 \Sigma)^4 (\pi \Omega_0)^2}{(4k_1^2 + 1)^2} \frac{1}{(1 + \Omega_0^2/\Omega_1^2)^{1/2}} \exp \left[ - \frac{(\omega_02 - \omega_01)^2}{\Omega_0^2 + \Omega_1^2} \right],$$

где  $\Omega_1 = \frac{\omega_01 + \omega_02}{[32L_0^2 \overline{(\Delta S)^2}_{\omega_0} / l^2 \ln(8L_0/l) + D_2^2/(4k_1 + 1)^2]^{1/2}}$ .

Отсюда для коэффициента частотной корреляции  $\rho_{I, \omega} = R_{I, \omega}(\delta)/R_{I, \omega}(0)$  получаем

$$\rho_{I, \omega} = \exp \left[ - \left( \frac{\omega_02 - \omega_01}{\Omega} \right)^2 \right].$$

Здесь  $\Omega = (\Omega_0^2 + \Omega_1^2)^{1/2}$  — радиус частотной корреляции принимаемых двух импульсных сигналов. Из выражения для величины  $\Omega$  видно, что применение импульсных сигналов улучшает частотную корреляцию принимаемого излучения. Это объясняется увеличением радиуса частотной корреляции немонохроматического излучения по сравнению с монохроматическим ( $\Omega > \Omega_1$ ).

В случае прохождения импульсных сигналов (с несущими частотами  $\omega_01$  и  $\omega_02$ ) через слой с неоднородностями выражение для коэффициента частотной корреляции на выходе приемного устройства легко можно получить из соотношений (16) и (17) (при  $\gamma_s(\delta) = 1$ ). В результате несложных преобразований имеем (см. [6])

$$\rho_{I, \omega} = \frac{u(x, y)}{u(0, y)}, \quad (18)$$

где

$$x = (\omega_02 - \omega_01)/\Omega_0, \quad y = (4k_1^2 + 1)(\omega_01 + \omega_02)/\Omega_0 D_2,$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ye^{-t^2} dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента частотной корреляции  $\rho_{I, \omega}$  от величины  $\delta$  для разных значений параметров  $D_2 = D_2/(4k_1 + 1)$  и  $\Omega_0/\omega_0$  (кривые 1, 2 построены для  $\Omega_0/\omega_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_2 = 10^2$

и  $D'_2 = 10^3$ ; кривая 3 — для  $D'_2 = 10^3$ ,  $\Omega_0/\omega_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ). Из хода кривых следует, что частотная корреляция принимаемого излучения существенно увеличивается при уменьшении длительности используемых импульсных сигналов (ср. кривые 2 и 3). Подобное улучшение частотной корреляции принимаемых импульсных сигналов происходит и при уменьшении фазовых возмущений в слое с неоднородностями или при увеличении направленности приемной антенны. Последний вывод является непосредственным следствием результатов работы [4].

Выше везде говорилось о статистических характеристиках флуктуаций импульса на выходе приемного устройства. Однако практически всегда (в различного рода экспериментах с использованием немо-

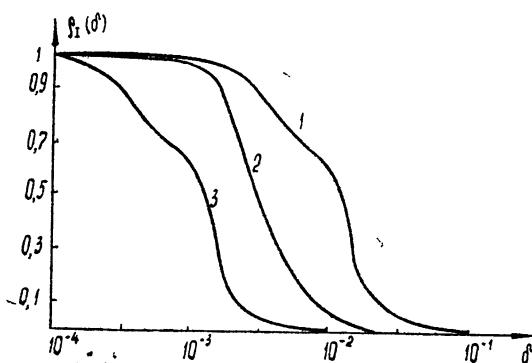


Рис. 4.

нохроматических сигналов) работают с приемно-излучающими системами. Влияние направленности передающей антенны на статистические свойства флуктуаций импульсного сигнала на выходе приемного устройства просто учесть, если известно влияние передающего устройства на частотную корреляцию флуктуаций принимаемого монохроматического излучения или, другими словами, известна функция частотной корреляции  $R'_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}}$  на выходе приемной антенны при использовании направленного передающего устройства (см. (6)). Выражение для  $R'_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}}$  легко получить, следуя [4]. В результате несложных преобразований находим

$$R'_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}} = \frac{1}{\prod_{l,k=1}^2 \Sigma_{\omega_l}^l \Sigma_{\omega_k}^k} \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_{0\omega_1} f^*_{0\omega_2}}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \times \\ \times R_{k\omega_1 \omega_2}^1(\xi_1, \eta_1) R_{k\omega_1 \omega_2}^2(\xi_2, \eta_2) d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2. \quad (19)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\Sigma_{\omega}^l$  и  $\Sigma_{\omega}^2$  — эффективные площади приемной и передающей антенн на частоте  $\omega$ ;  $\xi_1, \eta_1$  и  $\xi_2, \eta_2$  — пространственные сдвиги вдоль координатных осей  $x, y$  в плоскостях приемного и передающего устройств соответственно;  $R_{k\omega_1 \omega_2}^{1,2}(\xi_1, \eta_1, 2)$  — корреляционные функции регулярной освещенности апертур приемной и передающей антенн [4];  $R_{f_{0\omega_1} f^*_{0\omega_2}}(\xi_1, \eta_1, 2)$  — функция частотной корреляции флуктуаций излучения точечного источника, расположенного в плоскости передающего устройства, на входе приемной антенны [4, 7]. Общее выражение для  $R'_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}}(\xi_1, \eta_1, 2)$  довольно громоздко и здесь не приводится. В частном случае, когда передающая и приемная антенны расположены на одинаковом расстоянии  $L$  от неоднородного слоя и имеют одинаковые диаграммы направленности гауссовой формы

$$R_k(\xi, \eta) = \frac{\Sigma^2}{4\pi h^2} \exp - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4h^2},$$

вычисления по формуле (19) приводят к следующему результату:

$$R'_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}} = R_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}} (\sqrt{2} k), \quad (20)$$

где  $R_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}} (k = h/l)$  — функция частотной корреляции флюктуаций излучения точечного источника на выходе приемного устройства с гауссовой характеристикой направленности (источник и антenna находятся на одинаковом расстоянии  $L$  от слоя с неоднородностями) [4].

Используя результаты работы [4] и соотношение (20), можно сделать следующее заключение. При использовании направленного передающего устройства частотная корреляция флюктуаций принимаемого монохроматического излучения улучшается. Отсюда непосредственно следуют соответствующие выводы относительно статистических свойств импульсного сигнала при использовании передающей антенны. Так, например, использование направленного передающего устройства уменьшает величину флюктуаций принимаемого импульсного излучения.

В заключение отметим, что приведенные в настоящей работе результаты могут быть использованы при исследовании нерегулярной структуры ионосферы методами импульсного зондирования, а также при изучении ионосферного распространения модулированных сигналов КВ диапазона. Измеряемый радиус частотной корреляции флюктуаций радиоволн при вертикальном зондировании ионосферы (особенно в периоды возмущенной ионосферы) может быть порядка и меньше 10  $K\text{c}$  [8], т. е. сравним с шириной частотного спектра зондирующего импульса, что, согласно (17), (11), (15), может привести к существенным изменениям средней формы импульса и корреляционных характеристик принимаемого сигнала. Как показывают расчеты, рассмотренная выше задача легко может быть обобщена также на случай наклонного отражения волн от линейного слоя. Кроме ионосферного приложения, настоящие расчеты могут быть использованы для определения характеристик импульсного сигнала при отражении волн от хаотических поверхностей с плавным наклоном (например, от нерегулярных поверхностей планет). Функция частотной корреляции при этом описывается выражением (6), в котором  $\overline{(\Delta S)^2}_{\omega_0} = (4\pi)^2/\lambda^2 \bar{h}^2$ ,  $1 - \gamma_s(\delta) = 4\overline{(\Delta S)^2}_{\omega_0} \delta^2$  и, в случае отражения от сферической поверхности с радиусом  $R_0 \ll L$ , волновой параметр  $D \approx 4cR_0/\omega_0 l^2$  [7] ( $\bar{h}^2$  — среднеквадратичное значение отклонений высоты отражающих уровней от среднего).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Т. А. Широкова, Акуст. ж., 9, 101 (1963).
2. Г. С. Кноллап, J. Appl. Phys., 36, 3704 (1965).
3. Н. Г. Денисов, Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, 695 (1966).
4. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, 620 (1967).
5. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
6. В. Н. Фадеева, Н. М. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятности, Гостехиздат, М., 1954.
7. Л. М. Ерухимов, Диссертация, Горький, 1965.
8. В. Д. Гусев, С. Ф. Миркотан, Радиотехника и электроника, 1, 743 (1956).

**THE SHAPE AND STATISTICAL CHARACTERISTICS OF PULSE SIGNAL  
BEHIND THE LAYER WITH RANDOM IRREGULARITIES***V. A. Alimov, L. M. Eroukhimov*

It is shown that when a pulse of radiation is propagating in a free space behind the layer with random irregularities (or when reflecting from such a layer), considerable variations of its shape and correlation (space-time and frequency) characteristics may take place. Examples of rectangular and Gauss pulses have been considered.

---

УДК 512.831 : 537.228

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНОГО ОТРАЖАТЕЛЯ

*E. B. Чаевский*

Показано, что для полного статистического описания поля, рассеянного случайным многоэлементным отражателем, достаточно задать специальную матрицу из 16 элементов. Обсуждаются эксперименты, с помощью которых можно провести измерения элементов этой матрицы.

Для описания рассеивающих свойств регулярных отражателей удобно использовать матрицу рассеяния [1]. Эта матрица позволяет определить поле в точке приема при произвольной поляризации падающего поля. Естественным обобщением матрицы рассеяния на случай системы случайных отражателей является совокупность параметров, позволяющая полностью описать статистические свойства рассеянного поля при любой поляризации поля падающего. В работе определяется такая совокупность параметров для многоэлементного случайного отражателя и выясняются некоторые статистические свойства рассеянного поля.

### 1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Пусть случайные отражатели сосредоточены в области  $V$ , передающая антenna расположена в точке  $T$ , приемная в точке  $N$ . Расстояние между областью  $V$  и точками  $T, N$  предполагается достаточно большим, чтобы выполнились неравенства, справедливые для фраунгоферовой зоны. Введем декартовы координаты  $X'Y'Z'$  и  $XYZ$  в точках  $T$  и  $N$  соответственно так, чтобы оси  $Z'$  и  $Z$  пересекались с объемом  $V$ . Будем предполагать, что апертура передающей антенны совпадает с плоскостью  $X'Y'$ , апертура приемной — с плоскостью  $XY$ .

Если  $e'_x, e'_y$  — единичные орты вдоль осей  $X', Y'$ , поле в раскрыве передающей антенны можно представить в виде

$$E' = q_x \cos \Omega e'_x + q_y \cos (\Omega + \alpha) e'_y, \quad (1.1)$$

где  $\Omega = \omega t$ ;  $\omega$  — круговая частота колебаний;  $t$  — время;  $q_x, q_y, \alpha$  — параметры, характеризующие интенсивность и поляризацию поля.

Пусть  $D_m$  — матрица рассеяния  $m$ -го отражателя из области  $V$ . Чтобы не выписывать множители, характеризующие убывание поля с расстоянием и т. п., включаем их в матрицу рассеяния. Это означает, что, если отражает только  $m$ -ый элемент, рассеянное поле  $E_m$  в плоскости  $XY$  определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} E_{mx} \\ E_{my} \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ D_m \begin{pmatrix} q_x \\ q_y e^{i\alpha} \end{pmatrix} e^{i\Omega} \right\}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\operatorname{Re}$  — реальная часть выражения. Предполагая, что полное рассеянное поле  $E$  определяется только однократными отражениями от элементарных рассеивателей, получаем

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_m D_m \begin{pmatrix} q_x \\ q_y e^{i\alpha} \end{pmatrix} e^{i\Omega} \right\}, \quad (1.3)$$

где суммирование проводится по всем элементарным отражателям.

Пусть

$$D_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \exp(i\varphi_{1m} + il_m), & a_{2m} \exp(i\varphi_{2m} + il_m) \\ a_{3m} \exp(i\varphi_{3m} + il_m), & a_{4m} \exp(i\varphi_{4m} + il_m) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где  $a_{sm}$ ,  $\varphi_{sm}$ ,  $l_m$  — вещественные параметры, причем  $a_{sm}$ ,  $\varphi_{sm}$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) характеризуют отражающие свойства  $m$ -го элемента, а  $l_m$  — геометрический набег фазы. Тогда формулу (1.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \Omega - A_2 \sin \Omega, \\ E_y &= A_3 \cos \Omega - A_4 \sin \Omega, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= q_x \sum_m a_{1m} \cos(\varphi_{1m} + l_m) + q_y \sum_m a_{2m} \cos(\varphi_{2m} + \alpha + l_m), \\ A_2 &= q_x \sum_m a_{1m} \sin(\varphi_{1m} + l_m) + q_y \sum_m a_{2m} \sin(\varphi_{2m} + \alpha + l_m), \\ A_3 &= q_x \sum_m a_{3m} \cos(\varphi_{3m} + l_m) + q_y \sum_m a_{4m} \cos(\varphi_{4m} + \alpha + l_m), \\ A_4 &= q_x \sum_m a_{3m} \sin(\varphi_{3m} + l_m) + q_y \sum_m a_{4m} \sin(\varphi_{4m} + \alpha + l_m). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Четырехмерный вектор  $A$ , очевидно, полностью определяет рассеянное поле. Соответственно, статистические свойства вектора  $E$  определяются вероятностной плотностью распределения векторов  $A$ . Как видно из (1.6), вектор  $A$  является суммой большого числа независимых случайных векторов, и в силу центральной предельной теоремы распределение случайных векторов  $A$  — нормальное. С другой стороны, нормальное распределение вполне определяется первыми двумя моментами. Следовательно, для полного статистического описания поля  $E$  в точке приема достаточно определить  $\langle A_s \rangle$  и  $\langle A_s A_r \rangle$ , где индексы  $s, r$  принимают значения от 1 до 4, а скобки  $\langle \rangle$  обозначают усреднение по реализациям случайных отражателей.

Примем следующие предположения относительно свойств элементарных отражателей: случайные геометрические набеги фаз  $l_m$  для различных элементарных отражателей независимы; для каждого отражателя случайные набеги фаз  $l_m$  не зависят от его отражающих свойств (т. е. от величин  $a_{sm}$ ,  $\varphi_{sm}$ ) и распределены равномерно в интервале  $[0, 2\pi]$ . Тогда, как показывают прямые вычисления по формулам (1.6), все  $\langle A_s \rangle$  обращаются в нуль, а из 10 различных в общем случае моментов типа  $\langle A_s A_r \rangle$  независимыми оказываются лишь четыре. Обозначая их через  $a_s$ , матрицу моментов  $\langle A_s A_r \rangle$  можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где моменты  $\langle A_s A_r \rangle$  расположены на пересечении строки  $s$  и столбца  $r$ .

Выражения для  $a_s$ , получаемые из (1.6), удобно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \lambda_{11} q_x^2 + 2 [\lambda_{12}^+ \cos \alpha - \lambda_{12}^- \sin \alpha] q_x q_y + \lambda_{22}^- q_y^2, \\
 a_2 &= \lambda_{33}^- q_x^2 + 2 [\lambda_{34}^+ \cos \alpha - \lambda_{34}^- \sin \alpha] q_x q_y + \lambda_{44}^+ q_y^2, \\
 a_3 &= \lambda_{13}^+ q_x^2 + [(\lambda_{14}^+ + \lambda_{23}^+) \cos \alpha + (\lambda_{23}^- - \lambda_{14}^-) \sin \alpha] q_x q_y + \lambda_{24}^+ q_y^2, \\
 a_4 &= \lambda_{14}^- q_x^2 + [(\lambda_{14}^- + \lambda_{23}^-) \cos \alpha + (\lambda_{14}^+ - \lambda_{23}^+) \sin \alpha] q_x q_y + \lambda_{24}^- q_y^2.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \lambda_{sr}^+ &= \frac{1}{2} \sum_m \langle a_{sm} a_{rm} \cos(\varphi_{rm} - \varphi_{sm}) \rangle, \\
 \lambda_{sr}^- &= \frac{1}{2} \sum_m \langle a_{sm} a_{rm} \sin(\varphi_{rm} - \varphi_{sm}) \rangle, \\
 \lambda_{ss} &\equiv \lambda_{ss}^+.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Все независимые коэффициенты  $\lambda_{sr}^+$ ,  $\lambda_{sr}^-$  удобно объединить в матрице  $\Lambda$ , определенной как

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}^+ & \lambda_{13}^+ & \lambda_{14}^+ \\ \lambda_{12}^- & \lambda_{22}^- & \lambda_{23}^+ & \lambda_{24}^+ \\ \lambda_{13}^- & \lambda_{23}^- & \lambda_{33}^- & \lambda_{34}^+ \\ \lambda_{14}^- & \lambda_{24}^- & \lambda_{34}^- & \lambda_{44}^+ \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Из (1.7) — (1.10) можно сделать заключение, что при фиксированной поляризации передатчика статистические свойства поля в точке приема описываются четырьмя коэффициентами  $a_s$ . Чтобы полностью определить статистические свойства поля при произвольной поляризации передатчика, необходимо и достаточно знать 16 элементов матрицы  $\Lambda$ . По аналогии с регулярной задачей матрицу  $\Lambda$  естественно называть статистической матрицей рассеяния.

Матрица рассеяния, как известно, описывает не только решение исходной задачи, но и решение задачи, получающейся в результате перестановки местами корреспондирующих пунктов. Если поместить наблюдателя в точке  $T$ , а источник в точке  $N$ , матрицей рассеяния  $D'_m$  для  $m$ -го отражателя будет матрица, транспонированная по отношению к  $D_m$ . Это обстоятельство позволяет определить и соответствующую статистическую матрицу рассеяния  $\Lambda'$  через  $\Lambda$ . Можно показать, что матрица  $\Lambda'$  получается из матрицы  $\Lambda$ , если в (1.10) поменять местами индексы 2 и 3.

В радиолокационном случае матрицы  $D_m$  и  $D'_m$ ,  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  должны совпадать, поэтому число независимых элементов в них уменьшается. В матрице  $D_m$  в этом случае  $a_{2m} = a_{3m}$ ,  $\varphi_{2m} = \varphi_{3m}$  и, согласно (1.9),

$$\begin{aligned}
 \lambda_{12}^+ &= \lambda_{13}^+, & \lambda_{22}^- &= \lambda_{33}^- = \lambda_{23}^+, & \lambda_{24}^+ &= \lambda_{34}^+, \\
 \lambda_{12}^- &= \lambda_{13}^-, & \lambda_{23}^- &= 0, & \lambda_{24}^- &= \lambda_{34}^-.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Таким образом, в радиолокационном случае статистическая матрица рассеяния определяется девятью элементами.

Матрица  $\Lambda$  характеризует интенсивность рассеянного поля и деполяризующие свойства многоэлементного отражателя. Для анализа только поляризационных свойств отражателя удобно провести нормировку

матрицы  $\Lambda$ . В качестве постоянного для всех элементов делителя можно взять полусумму диагональных элементов.

Простым по своим деполяризующим свойствам отражателям соответствуют простые по структуре матрицы  $\Lambda$ . Например, если все элементарные отражатели деполяризуют падающее поле как идеально отражающая плоскость, непосредственно из (1.4), (1.9) получаем

$$\lambda_{11} = \lambda_{44} = \lambda_{14}^+ = 1, \quad (1.12)$$

а остальные элементы нормированной матрицы  $\Lambda$  обращаются в нуль.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим связь введенных в предыдущем разделе коэффициентов  $a_s$  и матрицы  $\Lambda$  с обычно измеряемыми величинами — средними по реализациям отражателей и высокочастотному полю мощностями на выходах антенн эллиптической поляризации. Пусть  $Q_x, Q_y$  — напряжения, наводимые на зажимах приемной антенны электрическими полями единичной амплитуды, ориентированными вдоль осей  $X, Y$  соответственно. Величины  $Q_x, Q_y$  удобно представить в виде

$$Q_x = h \cos \gamma \cos \Omega, \quad Q_y = h \sin \gamma \cos (\Omega - \psi), \quad (2.1)$$

где  $h$  — действующая высота антенны, а параметры  $\gamma, \psi$  описывают поляризационные свойства приемной антенны. Будем считать, что при различных поляризациях приемной антенны ее действующая высота остается постоянной. Тогда, если обозначать чертой усреднение по периоду высокочастотного поля, согласно [2] для мощности  $P$  на выходе детектора имеем

$$P = [\overline{\cos \gamma E_x(\Omega) + \sin \gamma E_y(\Omega - \psi)}]^2, \quad (2.2)$$

где для краткости опущены постоянные множители и  $E_x, E_y$  — соответствующие компоненты принимаемого электрического поля. Подставляя в (2.2)  $E_x, E_y$  из (1.5) и усредняя по  $\Omega$ , получаем

$$P = \frac{1}{2} \left\{ (A_1^2 + A_2^2) \cos^2 \gamma + (A_3^2 + A_4^2) \sin^2 \gamma + \right. \\ \left. + 2 \sin \gamma \cos \gamma [(A_1 A_3 + A_2 A_4) \cos \psi + (A_1 A_4 - A_2 A_3) \sin \psi] \right\}. \quad (2.3)$$

Усредним (2.3) по реализациям случайных отражателей. Учитывая (1.7), находим

$$\langle P \rangle = a_1 \cos^2 \gamma + a_2 \sin^2 \gamma + 2 \sin \gamma \cos \gamma [a_3 \cos \psi + a_4 \sin \psi]. \quad (2.4)$$

Если прием ведется на антенну линейной поляризации,  $\psi$  в (2.4) следует положить равным нулю, поэтому

$$\langle P \rangle = a_1 \cos^2 \gamma + a_2 \sin^2 \gamma + 2 a_3 \sin \gamma \cos \gamma. \quad (2.5)$$

Согласно (2.5), чтобы определить коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$ , достаточно провести измерения средних принимаемых мощностей линейно поляризованной антенной для трех различных ориентаций. При этом однозначно определяется средняя интенсивность, принимаемая линейно поляризованной антенной с любой другой ориентацией. Чтобы определить  $a_4$ , согласно (2.4), необходимо произвести еще одно измерение  $\langle P \rangle$  на эллиптически поляризованной ( $\psi \neq 0$ ) антенне.

Определив  $a_1, a_2, a_3, a_4$  при четырех различных поляризациях передающей антенны, в результате решения линейной системы уравнений

(1.8) находим все элементы матрицы  $\Lambda$ . При этом, как видно из (1.8), по крайней мере одна из поляризаций передатчика должна быть эллиптической ( $\alpha \neq 0$ ).

Формулу (2.5) можно представить в виде

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) + \frac{1}{2} \rho \cos [2(\gamma - \gamma_0)], \quad (2.6)$$

где  $\rho = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_3^2}$ , а угол  $\gamma_0$  определяется уравнениями

$$\sin (2\gamma_0) = 2 \frac{a_3}{\rho}, \quad \cos (2\gamma_0) = \frac{a_1 - a_2}{\rho}. \quad (2.7)$$

Таким образом, максимальная средняя мощность достигается в линейной антенне, наклоненной под углом  $\gamma = \gamma_0$  к оси  $X$  (направление максимальной интенсивности). Минимальная средняя мощность принимается линейно поляризованной антенной при  $\gamma = \gamma_0 + \pi/2$ .

В связи с тем, что в плоскости  $XY$  есть избранное направление, естественно ожидать, что описание случайного электрического поля упростится, если рассмотрение проводить в декартовой системе координат  $X_0, Y_0$  с осью  $X_0$ , ориентированной по направлению максимальных интенсивностей. Непосредственные расчеты по формулам (1.5), (1.7) действительно показывают, что матрица (1.7) в этой системе координат содержит только три независимых момента. Если  $a_s^0$  — соответствующие элементы матрицы (1.7) в системе координат  $X_0, Y_0$ , то  $a_s^0$  выражаются через  $a_s$  соотношениями

$$\begin{aligned} a_1^0 &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \rho), \\ a_2^0 &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2 - \rho), \\ a_3^0 &= 0, \quad a_4^0 = a_4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогично тому, как из (2.5) были определены ориентации линейно поляризованных антенн, принимающих из случайного поля в среднем максимальную и минимальную мощности, исходя из (2.4), можно определить параметры эллиптически поляризованных антенн, обладающих этим свойством. Для антенны, принимающей максимальную мощность,  $\gamma = \gamma_{\max}$ ,  $\psi = \psi_{\max}$ , где  $\gamma_{\max}$ ,  $\psi_{\max}$  определяются уравнениями

$$\sin (2\gamma_{\max}) = 2 \frac{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}{\sqrt{\rho^2 + 4a_4^2}}, \quad \cos (2\gamma_{\max}) = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{\rho^2 + 4a_4^2}}, \quad (2.9)$$

$$\sin \psi_{\max} = \frac{a_4}{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}, \quad \cos \psi_{\max} = \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}. \quad (2.10)$$

Для антенны, принимающей минимальную мощность,  $\gamma = \gamma_{\max} + \pi/2$ ,  $\psi = \psi_{\max}$ . Предельные значения  $\langle P \rangle$  даются формулой

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} [(a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4(a_3^2 + a_4^2)}]. \quad (2.11)$$

При изучении средних интенсивностей, принимаемых различными приборами из случайного поля эллиптически поляризованных плоских волн, в оптике, обычно, используется четырехмерный вектор Стокса  $S$ .

Согласно [3] и (1.5), (1.7), его компоненты связаны с параметрами  $a_s$  соотношениями

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle \bar{E}_x^2 \rangle + \langle \bar{E}_y^2 \rangle = a_1 + a_2, \\ S_2 &= \langle \bar{E}_x^2 \rangle - \langle \bar{E}_y^2 \rangle = a_1 - a_2, \\ S_3 &= 2 \langle \overline{E_x(\Omega) E_y(\Omega)} \rangle = 2a_3, \\ S_4 &= 2 \left\langle \overline{E_x(\Omega) E_y \left( \Omega - \frac{\pi}{2} \right)} \right\rangle = 2a_4. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Соответственно, формулы (2.9) — (2.11) можно получить из теорем Стокса [3] и теорем [2], отражающих свойства антенн эллиптической поляризации. Однако прямые расчеты здесь быстрее приводят к цели.

Согласно (2.12), вектор Стокса в рассматриваемом случае полностью определяет статистические свойства случайного поля. Но это обстоятельство явилось лишь следствием специальных предположений о виде случайного поля и не носит общего характера. Например, если бы случайное поле содержало регулярную составляющую, вектор Стокса для такой задачи имел бы по-прежнему четыре компоненты, а для полного статистического описания случайного поля потребовалось бы уже семь параметров (добавилось бы три параметра, характеризующие интенсивность и поляризацию регулярной компоненты).

В работе рассматривался ансамбль сложных отражателей. Но все выводы, очевидно, применимы и к одному отражателю, если его отдельные элементы случайным образом перемещаются в пространстве и процесс является стационарным и эргодическим. Можно показать, что отраженные от сложного объекта поля по своим статистическим свойствам эквивалентны квазимохроматическим случайным полям, рассматриваемым в [4]. Поэтому конкретные статистические распределения различных параметров отраженного поля можно получить непосредственно из [4] в результате подстановок (см. [4], стр. 84)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{a_1}, \quad \sigma_y = \sqrt{a_2}, \\ r_{xy} &= \frac{a_3}{\sqrt{a_1 a_2}}, \quad S_{xy} = \frac{a_4}{\sqrt{a_1 a_2}}. \end{aligned}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- Дж. Р. Менцер, Дифракция и рассеяние радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1958.
- Антенны эллиптической поляризации, сб. статей, перев. с англ. под редакцией А. И. Шпунтова, ИЛ, М., 1961.
- С. Чандraseкар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
- Д. Б. Канарейкин, Н. Ф. Павлов, В. А. Потехин, Поляризация радиолокационных сигналов, изд. Сов. радио, М., 1966.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
29 июля 1966 г.

#### STATISTICAL MATRIX OF SCATTERING FOR MULTI-ELEMENT REFLECTOR

*E. V. Chaevskii*

It is shown that for a full statistical description of the field scattered by a random multi-element reflector a special matrix of 16 elements is given. The experiments for measuring the elements of this matrix are discussed.

УДК 517.433:535 4

## МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ. I\*

B. P. Шестопалов, B. B. Щербак

Рассмотрено рассеяние волн на сложных дифракционных структурах, составленных из более простых, для которых решение соответствующих граничных задач считается известным. Показано, что с помощью матричных операторов, отнесенных к каждой отдельной неоднородности, можно полностью описать дифракционные свойства структуры в целом.

1. Изучение рассеяния волн сложными препятствиями представляет трудную и зачастую неразрешимую прямыми методами задачу. В то же время для отдельных частей сложной структуры решение дифракционной задачи может быть получено. Поэтому возникает проблема построения решения дифракционной задачи для сложной структуры в целом по известным решениям для ее частей.

Поскольку амплитуды волн дифракционного спектра и взаимные реакции частей структуры можно характеризовать векторами амплитуд поля, то процесс рассеяния волн на таких препятствиях описывается операторами взаимного преобразования волн. Эти операторы являются матричными в случае дискретного и интегральными в случае непрерывного спектров.

Вполне очевидно, что операторы преобразования могут быть использованы для анализа рассеяния волн на сложной структуре, если определены дифракционные свойства ее частей. Эта идея известна в теории дифракции. В работах Кинбера [1, 2], Пейса и Митры [3], Машковцева [4], Иванова [5], Таланова [6] развиваются различные подходы к решению этой проблемы. В [4] при решении задачи о сложных волноводных неоднородностях используется матрица рассеяния. Аналогичный метод учета многократных дифракций развит в [1, 2] применительно к внешним задачам. Для этого производится рациональный выбор базисных волн, позволяющий в определенном приближении описывать открытые системы матричными, а не интегральными операторами.

В данной работе обсуждается вопрос о применении матричных операторов для решения в строгой постановке задач дифракции волн на сложных структурах. Рассматривается класс задач, для которых возможно точное разложение полей по дискретному набору волн. Результатом решения указанных задач является вычисление взаимных коэффициентов преобразования элементарных волн на исследуемой неоднородности. Следовательно, дифракционные свойства неоднородностей при этом полностью описываются матричными операторами, составленными из коэффициентов преобразования. При помощи указанных операторов для любой одиночной неоднородности можно выразить амплитуды рассеянного на ней поля через амплитуды дифрагирующего поля следующим образом:

$$c_i = \sum_j L_j^i d_j. \quad (1)$$

\* Доклад на IV Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Харьков, 1967.

Здесь  $\mathbf{d}_j$  — вектор амплитуд волн, набегающих на неоднородность из  $j$ -ой области пространства;  $\mathbf{c}_i$  — вектор амплитуд рассеянного поля в  $i$ -ой области. Матрица  $L_j^i$ , составлена из коэффициентов преобразования волн  $j$ -ой области в волны  $i$ -ой области и действует на векторы амплитуд по правилу умножения матрицы бесконечного порядка на бесконечный столбец. Предполагается, что пространство разделяется на несколько областей, связанных между собой через неоднородности. В частности, соотношения (1) могут описывать преобразование волн на неоднородности, находящейся на стыке двух или большего количества волноводов. Матричные операторы  $L_j^i$  будем в дальнейшем называть дифракционными матричными операторами.

Назовем задачу о рассеянии волн на сложной структуре в целом основной задачей, а вспомогательными дифракционными задачами будем называть задачи по определению дифракционных спектров. Необходимыми условиями точного решения основной задачи являются строгое решение вспомогательных задач, а также отсутствие дополнительных ограничений на параметры сложной структуры в целом.

Вспомогательные дифракционные задачи, как правило, могут быть разрешены при помощи известных методов теории дифракции [7–9]. Для решения основной задачи поля в каждой области пространства следует записать в виде разложений по заданным наборам волн. Сшивание решений для полей при помощи соотношений типа (1) приводит к получению уравнений относительно неизвестных векторов амплитуд волн дифракционных спектров. Теперь отыскание амплитуд сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Способ сшивания в данном случае заключается в том, что на неоднородностях сшиваются не сами поля, а записываются соотношения между их амплитудами. При этом получаются уравнения, непосредственно пригодные для численных расчетов. Последнее оказывается возможным благодаря тому, что, определяя элементы операторов  $L_j^i$ , мы тем самым фактически интегрируем уравнения поля еще до сшивания решений.

Схема использования матричных операторов в данной работе (в силу характера ее приложения) имеет некоторые отличия от аналогичных схем в [1, 2] и [4]. В частности, каждой из неоднородностей сложной структуры сопоставляется не матрица рассеяния в целом, а несколько матричных операторов  $L_j^i$ , включающих в себя только индексацию по типам волн. Вводятся также операторы, характеризующие распространение или затухание волн в областях между неоднородностями. При учете многомодового характера колебаний индексация по типам волн может быть достаточно сложной (особенно для многомерных спектров волн). В этих условиях произведенное разделение операторов значительно упрощает структуру каждого из них.

Для рассматриваемого класса задач спектр дифракционного поля обычно представляется конечным числом пространственных волн и бесконечным количеством поверхностных волн (в случае волноводных задач это распространяющиеся волноводные волны и экспоненциально затухающие волны). В отличие от [4] здесь учитываются не только пространственные, но и поверхностные гармоники поля. Учет поверхностных волн для ряда задач имеет принципиальное значение.

В несколько ином плане матричные операторы использованы в работе [3], где решение получается в форме операторных рядов. Существенным недостатком метода [3] является то, что свертка операторных рядов производится уже после их построения. Это не позволяет применить указанный метод к анализу сложных разветвленных систем. В то же время в данной работе, как и в работах [1, 2] и [4], свертка многократных дифракций заключена в самом решении.

Предлагаемый метод решения основной задачи пригоден не только для анализа рассеяния волн на неоднородностях волновода, но обобщается также на случай плоских и цилиндрических периодических структур в свободном пространстве. При этом вычисления можно провести для случая, когда период структуры соизмерим с длиной волны, т. е. когда коротковолновые или длинноволновые приближения уже недействительны.

Использование указанного метода позволяет решать задачи дифракции, а также задачи о собственных колебаниях для широкого класса конфигураций, в том числе и для таких, для которых при помощи других методов решения не получено. В частности, возможно исследование структур, периодических в двух и более направлениях, структур со смешанным (дискретно-непрерывным) спектром, а также неоднородностей, которые могут быть получены сближением простых препятствий. Важно отметить при этом, что математическое обоснование полученных решений для сложных структур следует из их наличия для более простых структур.

2. Для иллюстрации метода рассмотрим его применение к расчету дифракции волн на двух неоднородностях, последовательно расположенных в волноводном тракте (рис. 1). Будем считать, что решение задачи дифракции любой волноводной волны на каждой из этих неоднородностей известно. Иными словами, известны матричные операторы преобразования волн для каждой из этих неоднородностей в отдельности. Рассмотрим теперь основную задачу.

Пусть на двойную неоднородность рис. 1 с обеих сторон набегает полный спектр волноводных волн, возбуждаемых источниками, расположенными в первом и третьем волноводах на конечном или бесконечном расстоянии от неоднородностей. В таком случае полное поле дифракции в области «1» (справа от источников), в области «3» (слева от источников) и в области «2» следует соответственно искать в виде

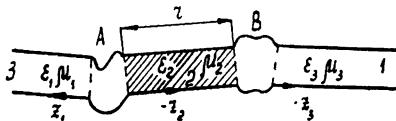


Рис. 1.

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_n \{\varepsilon_n^{(1)} \exp(-i\gamma_n^{(1)} z_1) + A_n \exp(i\gamma_n^{(1)} z_1)\} \psi_n^{(1)}, \\ \psi_3 &= \sum_n \{B_n \exp(-i\gamma_n^{(3)} z_3) + \varepsilon_n^{(3)} \exp(i\gamma_n^{(3)} z_3)\} \psi_n^{(3)}, \\ \psi_2 &= \sum_n \{C_n \exp(-i\gamma_n^{(2)} z_2) + D_n \exp(i\gamma_n^{(2)} (z_2 + r))\} \psi_n^{(2)}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $C_n$ ,  $D_n$  и  $A_n$ ,  $B_n$  — неизвестные амплитуды дифрагированного поля (соответственно для внутренней и внешних областей);  $\varepsilon_n^{(1)}$  и  $\varepsilon_n^{(3)}$  — заданные амплитуды дифрагирующего поля (для поперечных сечений  $z_1 = 0$  и  $z_3 = 0$  волноводов);  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  — обозначения осей систем координат, для которых оси  $Oz_i$  параллельны осям соответствующих волноводов;  $\psi_n^i(x_i, y_i)$  — зависимости поля для волн в  $i$ -ом волноводе ( $i = 1, 2, 3$ ) от  $x_i$ ,  $y_i$ ;

$$\gamma_n^{(i)} = \sqrt{\tilde{(kn_i)^2} - (k_n^{(i)})^2} \quad (3)$$

— продольные постоянные распространения этих волн, где  $\tilde{k}$  — волновое число, а  $\tilde{n}_i$  — показатели преломления сред.

Волноводные волны будем пока нумеровать в порядке возрастания величин  $k_n$ , т. е. в порядке возрастания их критических частот. В зависимости от знака « $\pm$ » в экспонентах  $\exp(\pm i\gamma_n z)$  будем называть эти волны прямыми или обратными. Для определенности ветвь квадратного корня в (3) выбирается (при вещественном ( $\tilde{k} \tilde{n}$ )) так, чтобы  $\gamma_n$  или  $-i\gamma_n$  были неотрицательными вещественными числами, а зависимость от времени берется в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

Здесь учитываются незатухающие ( $\gamma_n$  — вещественно) и экспоненциально затухающие ( $\gamma_n$  — чисто мнимая величина) волны, так что полный спектр волн является бесконечным. Бесконечным в связи с этим будет и порядок матриц, порождающих дифракционные операторы. Для дальнейшего существенным является предположение, что с помощью известных математических методов можно решить задачи дифракции

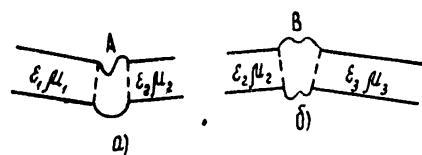


Рис. 2.

на неоднородностях «A» или «B» (рис. 2а, б) всех волноводных волн как незатухающих, так и затухающих. Кроме того, предполагается, что решения этих вспомогательных дифракционных задач (рис. 2а, б) удовлетворяют теореме о комплексной мощности [10] и другим необходимым физическим условиям.

Обозначим через  $R_A$  оператор преобразования прямых волн первой области в обратные волны этой области, а  $\hat{R}_A$  — оператор преобразования на неоднородности «A» обратных волн второй области в прямые волны этой области. Пусть  $T_A$  и  $\hat{T}_A$  — операторы передачи из первого волновода во второй и наоборот. Аналогичные операторы преобразования волн на неоднородности «B» обозначим  $R_B$ ,  $\hat{R}_B$ ,  $T_B$ ,  $\hat{T}_B$ , где символ над  $R$  и  $T$  отмечает операторы преобразования из обратных волн третьей области. Для дальнейшего необходимо также вести оператор  $e$ , порождаемый диагональной матрицей, составленной из коэффициентов

$$e_n = \exp(i\gamma_n^{(2)} r). \quad (4)$$

Прежде чем воспользоваться соотношениями типа (1) на неоднородностях, обсудим некоторые особенности распространения волн в таких сложных структурах. Рассмотрим процессы вблизи неоднородности «A». В установившемся режиме на нее слева набегает полный спектр волн, амплитуды которых в поперечном сечении  $z_1=0$  равны  $\epsilon_n^{(1)}$ , а справа — полный спектр волн с амплитудами  $D_n e_n$  (при  $z_2=0$ ). Соответственно от неоднородности «A» при этом в обе стороны также уходят волноводные волны.

Источником волн, набегающих на неоднородность «A» слева, является неоднородность «B», возбуждающая эти волны не за счет сторонних сил, а за счет энергии дифрагирующих на ней волн (в том числе и волн, идущих от неоднородности «A»). Действительно, если бы неоднородности «B» не было, то при  $\epsilon_n^{(3)}=0$  не было бы и волн, набегающих справа на неоднородность «A». Для решения задач дифракции волны природа источников дифрагирующего поля не имеет принципиального значения. Поэтому мы можем обычным образом выразить ампли-

туды уходящих от неоднородности «*A*» волн через амплитуды  $\varepsilon_n^{(1)}$  и  $D_n e_n$ , т. е.

$$\mathbf{A} = R_A \varepsilon^{(1)} + \hat{T}_A e \mathbf{D}; \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = T_A \varepsilon^{(1)} + \hat{R}_A e \mathbf{D}. \quad (6)$$

Аналогичные рассуждения можно провести для неоднородности «*B*». В таком случае и для этой неоднородности получаем уравнения

$$\mathbf{D} = R_B e \mathbf{C} + \hat{T}_B \varepsilon^{(3)}; \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = T_B e \mathbf{C} + \hat{R}_B \varepsilon^{(3)}. \quad (8)$$

Характерным для полученных уравнений (5)–(8) является то обстоятельство, что уравнения (6) и (7) содержат только неизвестные векторы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$ . Следовательно, найдя из (6) и (7) амплитуды волн внутренней области и подставив их в (5) и (8), мы сразу же получим  $A_n$  и  $B_n$ . Тем самым определяются дифракционные операторы двойной неоднородности, зная которые, тем же способом можно исследовать еще более сложные структуры, частью которых является рассмотренная.

Рассмотрим теперь уравнения (6) и (7). Для простоты ограничимся случаем  $\varepsilon_n^{(3)} = 0$ . При этом, исключая из (6), (7)  $\mathbf{D}$ , получим уравнение для определения  $\mathbf{C}$ :

$$\{I - \hat{R}_A e R_B e\} \mathbf{C} = T_A \varepsilon^{(1)}, \quad (9)$$

где  $I$  — единичная матрица. Отсюда  $\mathbf{D}$  находится по формуле

$$\mathbf{D} = R_B e \mathbf{C}. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) может быть представлено в виде

$$\mathbf{C} = \Phi T_A \varepsilon^{(1)}, \quad (11)$$

где  $\Phi$  — матричный оператор, обратный оператору  $\{I - \hat{R}_A e R_B e\}$ . Для  $\Phi$  возможно представление в виде ряда

$$I + \hat{R}_A e R_B e + (\hat{R}_A e R_B e)^2 + \dots \quad (12)$$

Другая возможная форма решения состоит в следующем. При развертывании матричных произведений в явном виде получаем вместо (9) бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую

при  $\varepsilon_n^{(1)} = \delta_n^p$  ( $\delta_n^p = \begin{cases} 1, & n = p \\ 0, & n \neq p \end{cases}$ ) можно записать в следующей форме:

$$C_p - \sum_n C_n \sum_k \hat{R}_{A, k}^* e_k R_{B, n}^* e_n = T_p^*. \quad (13)$$

Здесь  $\hat{R}_{A, n}^*$ ,  $R_{B, n}^*$  и  $T_p^*$  — элементы матриц  $\hat{R}_A$ ,  $R_B$  и  $T_A$  соответственно. Форма представления решения в виде системы линейных алгебраических уравнений более удобна для проведения численных расчетов\*.

\* Решение системы линейных алгебраических уравнений методом исключения при расчетах на ЭВМ требует меньших затрат машинного времени, чем обращение матрицы такого же порядка, даже если решается система с несколькими различными, правыми частями (соответствующими разным  $p$ ), как это может иметь место в случае системы (13).

Коэффициенты  $e_n$ , начиная со значения  $n$ , соответствующего первой затухающей волне спектра, быстро убывают с ростом  $n$ . Поэтому при  $r \neq 0$ , пренебрегая в (13) малыми величинами, мы можем для расчетов заменить бесконечную систему уравнений на соответствующую систему конечного порядка. Для обоснования законности такого усечения достаточно, например, доказать (основываясь на свойствах коэффициентов  $\hat{R}_n^m$ ,  $R_n^m$  и параметров  $e_n$ ), что система (13) удовлетворяет теоремам Кох [1], а ее определитель отличен от нуля. В разделе 4 возможность доказательства существования решения задачи показана на примере тонких диафрагм в волноводе.

Если  $r$  не очень мало, то для получения достаточной точности вычислений можно пренебречь экспонентами, соответствующими всем затухающим волнам. В частности, если в спектре содержится только одна незатухающая волна, то, удерживая в (13) лишь одну экспоненту, получим простое решение:

$$C_0 = \frac{T_0^p}{1 - \hat{R}_0^0 e_0 R_0^0 e_0}; \quad (14)$$

$$C_m = T_m^p \quad (m \neq 0). \quad (15)$$

Поскольку количество незатухающих волн спектра зависит от отношения поперечных размеров волновода к длине волны, то максимальное количество уравнений, удерживаемых в (13), определяет пределы применимости решения. При использовании для расчетов ЭВМ численный анализ возможен для широкого диапазона частот, включая частоты, при которых становятся справедливыми коротковолновые асимптотики.

Отметим, что решение задачи дифракции для структуры рис. 1 в предельном случае, когда длина  $r$  среднего волновода устремляется к нулю, представляет особый интерес. Использование такого предельного перехода дает возможность исследования сложных неоднородностей, которые можно разбить на совокупность более простых только при помощи данного искусственного приема. В то же время, при  $r = 0$  все экспоненты  $e_n$  обращаются в единицу, что может затруднить доказательство существования решения. Кроме того, при  $e_n \equiv 1$  коэффициенты при неизвестных в (13) убывают сравнительно медленно, поэтому при урезании данной бесконечной системы приходится удерживать большее количество уравнений и неизвестных для обеспечения заданной точности вычислений.

3. Описанная на примере структуры рис. 1 методика может быть перенесена и на случай более сложных конфигураций, в частности, на случай, когда отрезок волновода, ограниченный двумя неоднородностями, связан через них не с двумя, а с большим количеством полубесконечных волноводов. В этом случае количество уравнений для определения амплитуд внутренних волн не изменится. Увеличивается только количество равенств типа (5), (8), выраждающих амплитуды волн во внешних волноводах через амплитуды внутреннего и дифрагирующего полей.

В более сложных структурах между неоднородностями может быть заключено большее количество волноводов. При этом соответственно увеличивается порядок системы уравнений для определения амплитуд внутренних волн. В частном случае, когда сложная волноводная структура не имеет внутренних разветвлений, численный анализ может быть упрощен за счет сведения решения задачи к последовательному анали-

зу двойных неоднородностей. Вычислив, например, дифракционные операторы двух двойных неоднородностей, можно затем, считая их элементарными, получить решение для соответствующей системы из четырех неоднородностей, расположенных последовательно в волноводном тракте. Применяя многократно такой прием, можно получить решение для любого числа  $M$  последовательно расположенных неоднородностей. Использование указанного приема упрощает схему вычислений и позволяет значительно уменьшить объем расчетов (вместо двух систем уравнений очень большого порядка решается последовательно  $2M-2$  систем, имеющих в  $M$  раз меньший порядок, что при расчете на ЭВМ требует в  $M^2$  меньших затрат машинного времени).

Рассмотрим теперь случай периодических структур в свободном пространстве. При дифракции волн на плоских периодических решетках возможно разложение поля в дискретный спектр по пространственным и поверхностным плоским волнам. Поэтому анализ двух или нескольких параллельных друг другу периодических решеток в свободном пространстве практически не отличается от анализа двух или нескольких диафрагм в регулярном волноводе [12, 13]. В общем случае одним из необходимых условий применимости метода является возможность разложения полного поля в ряд Фурье по известным функциям вида

$$\psi_n(\xi, \eta) \varphi^\pm(\gamma_n \zeta), \quad (16)$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  — ортогональные координаты, а знак  $\pm$  в (16) указывает направление распространения элементарных волн вдоль оси  $\zeta$ . Если, например, в системе рис. 1 регулярные отрезки волноводов заменить расширяющимися плоскими волноводами, то зависимость элементарных волн от продольной координаты  $\zeta$  будет описываться функциями Ханкеля соответственно первого или второго рода в зависимости от  $\pm$ . При этом оператор  $e$  будет для прямых и обратных волн выражаться через различные функции. В случае дифракции цилиндрических волн на двух или более соосных цилиндрах с периодическими щелями в качестве функций  $\varphi^\pm(\gamma_n \zeta)$  также выбираются функции Ханкеля ( $\zeta$  в этом случае — радиальная координата).

Остановимся на вопросе нумерации элементарных волн. Индекс  $n$  является простым индексом в случае одномерного спектра скалярных волн. В случае волноводных задач поля электромагнитных волн чаще представляются двумерным спектром волн обеих поляризаций. При этом индекс  $n$  в (2) и аналогичные индексы в (13) представляют собой двойные индексы, а функции (2) представляют собой вектор-функции, состоящие из двух компонент (потенциал  $E$ -поляризованных и потенциал  $H$ -поляризованных волн).

Рассмотрим также (на примере системы рис. 1) случай, когда элементарные волны не имеют четкого разделения на незатухающие и затухающие. Пусть величина  $\tilde{k}n$  в (3) является комплексным числом. Это возможно, например, если комплексными являются показатели преломления сред  $\tilde{n}_i$  (среды с потерями) или когда источники монохроматического поля экспоненциально затухают во времени ( $\tilde{k}$  — комплексно). В этих случаях физический смысл имеет ветвь квадратного корня в (3), удовлетворяющая условиям  $3\pi/4 > \arg \gamma_n > 0$  при  $3\pi/2 > \arg(\gamma_n)^2 > 0$  и  $0 > \arg \gamma_n > -\pi/4$  при  $0 > \arg(\gamma_n)^2 > -\pi/2$  [14]. Волны по-прежнему будем разделять на прямые и обратные в зависимости от знака экспонент  $\exp(\pm i\gamma_n z)$ . Существующие методы, с помощью которых можно решить вспомогательные дифракционные задачи, применимы также и для комплексных  $\tilde{k}$  и  $\tilde{n}_i$ . Таким образом, рассмотренный здесь метод также

может быть распространен на случай комплексных  $\tilde{k}$  и  $\tilde{n}_i$ . Последнее обстоятельство позволяет анализировать не только вынужденные колебания в системе рис. 1, но и случай, когда сторонних источников нет, а в системе существует затухающее во времени колебание.

4. Рассмотрим некоторые конфигурации, являющиеся частными случаями структуры рис. 1. Простейшей из таких структур является плоскопараллельный слой среды в плоском волноводе (рис. 3а). По-

скольку плоская граница раздела в таком волноводе не вызывает преобразования из одной волноводной волны в другие, то матричные операторы в случае элементарной неоднородности рис. 4а выражаются просто. в численные коэффициенты. Поэтому в случае дифракции в структуре рис. 3а одной волноводной волны, заменяя в (9) вектор амплитуд на единственную амплитуду, получим про-

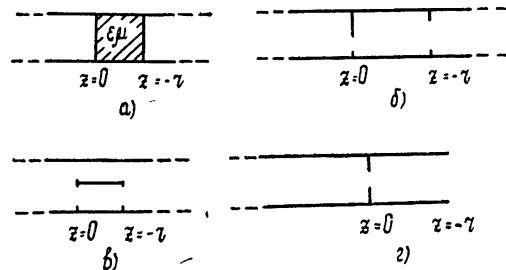


Рис. 3. Двойные неоднородности в прямоугольном или плоском волноводе.

стое решение, такое же, как мы получили бы, применяя к анализу системы рис. 3а метод разделения переменных.

В случае ленточной диафрагмы в прямоугольном волноводе (рис. 4б) отличны от нуля взаимные коэффициенты преобразования для одномерных наборов ( $l = \text{const}$ ) волн

$$\psi_{nl}^E = \operatorname{sh} \left( i \frac{\pi n}{a} x \right) \operatorname{ch} \left( i \frac{\pi l}{b} y \right) \exp(\pm i \gamma_{nl} z) \quad (17)$$

или волн

$$\psi_{nl}^H = \operatorname{ch} \left( i \frac{\pi n}{a} x \right) \operatorname{sh} \left( i \frac{\pi l}{b} y \right) \exp(\pm i \gamma_{nl} z). \quad (18)$$

Здесь  $\gamma_{nl} = \sqrt{\tilde{k}^2 - (\pi n/a)^2 - (\pi l/b)^2}$ ;  $a$  и  $b$  — размеры волновода; ось  $Oy$  параллельна щелям диафрагмы. Указанные коэффициенты преобразования удовлетворяют условиям

$$\hat{R}_n^v = R_n^v, \quad R_{nlE}^v + \delta_n^v = T_{nlE}^v, \quad R_{nlH}^v = \delta_n^v - T_{nlH}^v, \quad \delta_n^v = \begin{cases} 1, & n = v \\ 0, & n \neq v \end{cases} \quad (19)$$

и могут быть определены при помощи метода задачи Римана—Гильберта [9]. Подставляя их в уравнения (13), получим решение для двойной ленточной диафрагмы, изображенной на рис. 3б.

Если же щели двух диафрагм не параллельны друг другу (как на рис. 3б), а взаимно перпендикулярны, то решение представляется двумерным спектром волноводных волн обеих поляризаций. Соответствующая этому случаю система линейных алгебраических уравнений, которая мо-

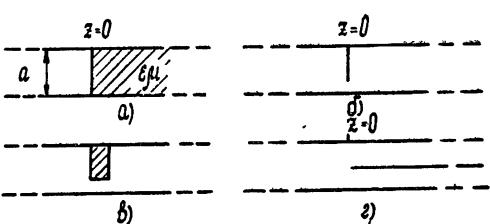


Рис. 4. Простейшие волноводные неоднородности.

жет быть получена из (13), приведена в [12]. Мы ограничимся здесь рассмотрением более простого случая дифракции скалярных волн, для которых коэффициенты преобразования на одиночной диафрагме совпадают с  $R_{nH}^v$  и  $T_{nH}^v$ . Тогда, заменяя в (13) простые индексы  $n, v, p$  на соответствующие двойные  $(n, m)$ ,  $(v, \mu)$ ,  $(p, l)$ , а также, учитывая, что (в силу свойств ленточных диафрагм) в суммах  $\sum_k \hat{R}_{A,k}^v e_k R_{B,n}^\mu e_n$  в (13) отличен от нуля только один член, имеем

$$C_{\nu\mu} - \sum_{n,m} C_{nm} [\hat{R}_{A,n\mu}^v e_{n\mu} R_{B,mn}^\mu e_{nm}] = \delta_l^\mu T_{A,pl}^v. \quad (20)$$

Отсюда, согласно (10), амплитуды  $D$  определяются по формулам

$$D_{np} = \sum_m C_{nm} R_{B,mn}^\mu e_{nm}. \quad (21)$$

Анализируя приведенные в [9] уравнения для коэффициентов (19), нетрудно установить следующие оценки для этих коэффициентов при больших  $n$  и  $v$ :

$$|R_n^v| < \frac{c}{|v-n|} \sqrt{\frac{n}{v}} \quad (v \neq n), \quad |R_n^n| < c. \quad (22)$$

Учитывая, что в данном случае

$$e_{nm} = \exp \left[ ir \sqrt{\tilde{k}^2 - (\pi n/a)^2 - (\pi m/b)^2} \right], \quad (23)$$

легко показать, что при  $r \neq 0$  определители бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, полученные из (13) для анализа двойных диафрагм обоих типов, являются нормальными [11]. Это более сильное условие, чем выполнение теорем Кох. С другой стороны, исходя из теоремы о комплексной мощности, можно доказать (при помощи методики, предложенной в [3]) сходимость операторного ряда (12) в случае рассматриваемых конфигураций (как при  $r \neq 0$ , так и при  $r = 0$ ).

Исследование конфигурации, изображенной на рис. 3в, можно провести на основании решения задачи для системы рис. 4г, которое получается при помощи метода Винера—Хопфа [7]. При этом, если перегородка находится точно посередине волновода, систему рис. 3в при анализе полей, обладающих симметрией относительно плоскости этой перегородки, можно рассматривать как частный случай системы рис. 1.

5. Остановимся также на конфигурации, изображенной на рис. 5 (волновод с открытым концом и диафрагмой), в которой роль третьего волновода играет свободное пространство, где поле не может быть разложено в ряд Фурье. Вообще говоря, развитый здесь метод можно формально применить и к случаю непрерывных спектров дифракции. При этом, однако, придем к задаче обращения интегрального, а не матричного оператора. Если рассматривать открытый конец плоского волновода в качестве элементарной волноводной неоднородности, то из четырех операторов, которые ему можно сопоставить, только  $R_B$  (оператор отражения волноводных волн) будет матричным оператором. Поскольку остальные три оператора не стоят в (6) и (7) множителями при векторах  $C$  и  $D$ , то в случае структуры рис. 5, считая ее разновидностью структуры рис. 1, мы также приходим к задаче обращения матричного оператора. При анализе дифракции волноводных волн в системе рис. 5 поля в первой и второй области разлагаем в одномерный спектр волн

$$\left\{ \exp\left(i \frac{\pi n}{a} x\right) \pm \exp\left(-i \frac{\pi n}{a} x\right) \right\} \exp\left[\pm iz \sqrt{\tilde{k}^2 - (\pi n/a)^2}\right], \quad (24)$$

*E*- или *H*-поляризованных в направлении *y*. Операторы  $R_A$  и  $R_B$  можно получить, воспользовавшись результатами [9] и [7]. Причем оператор  $R_B$  сохраняет не только поляризацию, но и симметрию поля относительно оси волновода. Этим же свойством обладает и  $R_A$ , если диафрагма симметрична.

Считая, что в третьей области существуют только волны, уходящие от открытого конца волновода, уравнения для отыскания амплитуд волноводных волн получим в виде (9), (10) и (5). Зная амплитуды  $C_n$  волн, набегающих на открытый конец волновода, можно (в силу принципа суперпозиции) определить и поле, излученное из волновода [7]. Для структуры рис. 5 здесь даны некоторые из результатов численного расчета. Представленные графики показывают возможность согласования при помощи диафрагмы волновода со свободным пространством без применения рупора (рис. 5, точка  $x = 1,25$ ). Для предельного случая  $r = 0$  рассматриваемой структуры (рис. 6) численными методами проверялась сходимость решения, для чего в (13) удерживалось соответственно четыре или восемь уравнений и неизвестных. Для указанного диапазона частот результаты совпадали с графической точностью.

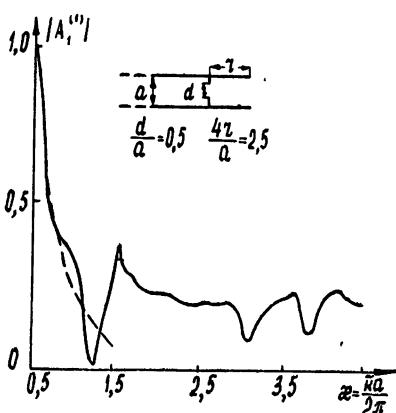


Рис. 5. Зависимость модуля коэффициента отражения  $TM_{1,0}$ -волны от параметра  $x$  для открытого плоского волновода с симметричной диафрагмой. Штрихами изображена та же зависимость в случае отсутствия диафрагмы.

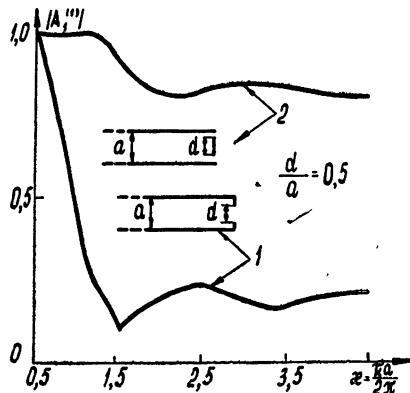


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, для  $TE_{1,0}$ -волны при  $r=0$ .

Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Марченко, Г. Н. Гестрину и Е. Я. Хруслову за внимание и помощь при выполнении этой работы. Авторы также искренне благодарны Б. Е. Кинберу за полезное обсуждение и замечания по существу работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 9, № 9, 1594 (1964).
2. Б. Е. Кинбер, Рефераты докладов, III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Тбилиси, 1964, стр. 75.
3. J. R. Pace and R. Mittra, Proc. Symp. Quasioptics, Politech, Inst. of Brooklyn, 1964, p. 121.

4. Б. М. Машковцев, Радиотехника, 17, № 6, 3 (1962).
5. Е. А. Иванов, IV Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Харьков, 1967, стр. 12.
6. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 2, 260 (1965).
7. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
8. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962).
9. В. П. Шестопалов, В. В. Щербак, Радиотехника и электроника, 9, № 6, 1282 (1966).
10. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
11. Л. В. Конторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М., 1962.
12. В. В. Щербак, сб. Радиотехника, Харьков, № 1, 101 (1966).
13. В. В. Щербак, сб. Радиотехника, Харьков, № 4, 41 (1967).
14. О. А. Третьяков, Кандидатская диссертация, Госуниверситет, Харьков, 1963.

Харьковский институт радиоэлектроники.

Поступила в редакцию  
21 декабря 1966 г.

### MATRIX OPERATORS IN PROBLEMS OF DIFFRACTION. I

*V. P. Shestopalov, V. V. Shcherbak*

The paper deals with wave scattering on complex diffraction structures consisting of more simple structures for which the solution of the corresponding boundary problems is known. It is shown that the diffraction properties of the structure in the whole may be described by means of the matrix operators referring to each individual inhomogeneity.

УДК 517.433:535.4

## МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ. II (ТЕОРИЯ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ)

B. P. Шестопалов, B. B. Щербак

С помощью метода, предложенного в [1], решена задача о собственных колебаниях в открытом ленточном резонаторе. На ЭВМ произведено систематическое вычисление корней дисперсионного уравнения. Показано, что асимптотическое решение, полученное в [2], представляет собой частный случай развитой теории.

### ВВЕДЕНИЕ

Имеющиеся в настоящее время теоретические работы по открытым резонаторам посвящены, в основном, нахождению коротковолновых асимптотик решения [2—5] и оставляют в стороне собственно дифракционную область. Вместе с тем, знание свойств открытых резонаторов в условиях, когда размеры системы сравнимы с длиной волны, необходимо для ряда приложений, в частности, в измерительной технике.

Простейшей моделью открытого резонатора является ленточный резонатор, изображенный на рис. 1а. Исследование этой системы проводилось ранее различными методами для случая, когда ее размеры  $a$  и  $d$  намного больше длины волны  $\lambda$  и, кроме того,  $a \gg d$ .

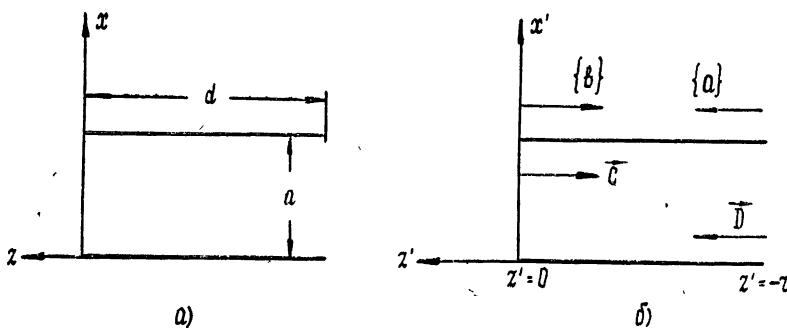


Рис. 1. Ленточный резонатор в свободном пространстве.

Строгая формулировка задачи о собственных колебаниях в ленточном резонаторе возможна в виде сингулярного интегрального или интегродифференциального уравнения относительно функции распределения тока на металле [2, 6].

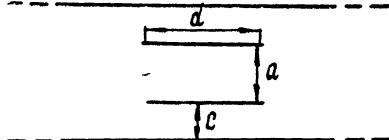
В данной работе приведено решение задачи о собственных колебаниях ленточного открытого резонатора с помощью метода, развитого в [1]. Ленточный резонатор рассматривается как отрезок плоского волновода с двумя концами ( $z=0$  и  $z=-d$ ), открытыми в свободное пространство. Поле внутри волновода ищется в виде разложения по

дискретному набору волноводных волн, а во внешнем пространстве — в виде разложения в непрерывный спектр. Сопоставляя обоим концам волновода операторы преобразования волн, можно записать уравнения относительно неизвестных амплитуд разложения поля. Подобная формулировка задачи о колебаниях в ленточном резонаторе позволяет заменить непосредственное решение интегральных уравнений [2, 6] двумя более простыми задачами, а именно: 1) определением операторов преобразования волн на открытом конце полубесконечного плоского волновода и 2) конструированием решения для открытого ленточного резонатора на основании имеющегося решения для полубесконечного волновода. Первая из указанных задач сводится к решению сингулярных интегральных уравнений [2, 6] для полубесконечного волновода. В этом случае интегральные уравнения [2, 6] могут быть строго решены при помощи метода факторизации [7].

Решение второй задачи приведено ниже. Оно сводится к определению собственных значений и собственных векторов некоторого матричного оператора, для нахождения которого необходимо обратить интегральный оператор. Если же пренебречь в системе рис. 1 взаимодействием волн через внешнее пространство (т. е. влиянием токов, за текающих на внешнюю сторону лент), то необходимость обращения интегрального оператора отпадает. Это позволяет избежать громоздких вычислений и в то же время вычислять при  $d \gg \lambda$  характеристики любых собственных колебаний системы, в том числе и колебаний, не доступных для исследования другими методами. При этом величина  $a/\lambda$  практически может быть произвольной.

Для открытого ленточного резонатора, находящегося внутри плоского бесконечного волновода (рис. 2), задача полностью описывается матричными операторами. В этом случае учет внешней связи не создает дополнительных вычислительных трудностей и ограничение на  $d/\lambda$  может быть снято.

Рис. 2. Ленточный резонатор между двумя плоскостями.



### 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Введем безразмерные параметры

$$r = 2\pi \frac{d}{a}, \quad x \tilde{n} = \frac{\tilde{k}a}{2\pi} \tilde{n} = \frac{a}{c} f \tilde{n}, \quad (1)$$

а также безразмерные координаты  $x' = x2\pi/a$ ,  $z' = z2\pi/a$ . Здесь  $\tilde{n}$  — комплексный показатель преломления безграничной среды, в которую погружен открытый резонатор;  $f$  — комплексная частота колебания;  $c$  — скорость света;  $\tilde{k} = 2\pi f/c$  — волновое число. В безразмерных координатах ширина волновода равна  $2\pi$ , длина —  $r$  (рис. 1б), а продольная и поперечная постоянные распространения волноводных волн равны соответственно  $\gamma'_{s+2m} = [(x \tilde{n})^2 - (s/2+m)^2]^{1/2}$  и  $(s+m)$ , где  $s=0$  или  $1$ , а  $m$  — целые числа. Штрих у величин  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $\gamma'_{s+2m}$  в дальнейшем опускаем.

Для  $\gamma_{s+2m}$  выбирается ветвь квадратного корня, удовлетворяющая условиям  $3\pi/4 > \arg \sqrt{A} > 0$  при  $3\pi/2 > \arg A > 0$  и  $0 > \arg \sqrt{A} > -\pi/4$  при  $0 > \arg A > -\pi/2$ . При этом, если  $\mathbf{n}$  вещественно, то волноводные волны четко разделяются на незатухающие (пространственные), для которых  $\gamma_{s+2m}$  вещественно, и затухающие (поверхностные), имеющие минимую постоянную распространения. Если же  $\mathbf{n}$  имеет небольшую минимую часть, то волноводные волны разделяются на пространственные и поверхностные в зависимости от того, вблизи нуля или  $\pi/2$  находится значение  $\arg \gamma_{s+2m}$ .

При выбранном значении квадратного корня и зависимости от времени  $\sim e^{-i\omega t}$  направление распространения волноводных волн определяется знаком  $\exp(\pm i\gamma_{s+2m}z)$ . При этом для волн, у которых  $3\pi/4 > \arg \gamma_m > \pi/4$ , направление распространения совпадает (независимо от знака  $\text{Im } \mathbf{n}$ ) с направлением их затухания, для остальных — с направлением векторов Умова—Пойнтинга.

Для дальнейшего существенно, что задача о дифракции волноводных волн на открытом конце плоского волновода может быть решена и в случае комплексных значений  $\mathbf{n}$  [7]. Причем результатом решения этой задачи может быть вычисление коэффициентов преобразования волн, распространяющихся к открытому концу волновода, в каждую из волноводных волн, распространяющихся в противоположном направлении.

Рассмотрим собственные колебания, для которых  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ . Известно, что открытый конец волновода сохраняет четность волноводного поля. В связи с этим поля для четных ( $s = 0$ ) или нечетных ( $s = 1$ ) колебаний внутри волновода запишем в следующем виде:

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \{ C_{s+2m} \exp(-i\gamma_{s+2m} z) + D_{s+2m} \exp[i\gamma_{s+2m}(z+r)] \} \psi_{s+2m}. \quad (2)$$

Здесь для  $E_y$ -поляризованных колебаний  $E_y \equiv \psi$ ,  $H_y \equiv 0$ ,  $\psi_{s+2m} = \sin[(s+2m)x]$ , а для  $H_y$ -колебаний  $E_y \equiv 0$ ,  $H_y \equiv \psi$ ,  $\psi_{s+2m} = \cos[(s+2m)x]$ . Остальные компоненты поля выражаются через  $E_y$  и  $H_y$  из уравнений Максвелла.

Во внешнем пространстве поля представляются непрерывным спектром волн, расходящихся от каждого из открытых концов волновода во все стороны, в том числе и по направлению к противоположному концу. Для учета связи через внешнее пространство необходимо задать внешнее поле в области  $-r < z < 0$ . Оно однозначно определяется заданием функции распределения тока  $J^{bh}(z)$  на внешней стороне лент и граничного условия

$$[H^{bh}, n] = \frac{4\pi}{c} J^{bh}. \quad (3)$$

Разложение функции тока в интеграл Фурье запишем в следующем виде:

$$J^{bh}(z) = \int_{-\infty}^0 b(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma + \int_0^{\infty} a(\gamma) \exp[i\gamma(z+r)] d\gamma, \quad (4)$$

где  $b(\gamma)$  — амплитуды ( $H$ -составляющей) внешнего поля при  $z=0$  для волн, распространяющихся от левого конца волновода к правому;  $a(\gamma)$  — амп-

литуды внешнего поля при  $z = -r$  для волн, распространяющихся в противоположном направлении.

Таким образом, заданы поля для открытого ленточного резонатора (рис. 1б), удовлетворяющие граничным условиям на металлических лентах. Для определения амплитуд этих полей и комплексной частоты колебаний воспользуемся операторными соотношениями работы [1]. В рассматриваемом случае имеем следующие уравнения:

$$\mathbf{C} = Re\mathbf{D} + \hat{F}_e \{ a \}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = Re\mathbf{C} + \hat{F}_e \{ b \}, \quad (6)$$

$$\{ b \} = Fe\mathbf{D} + W_e \{ a \}, \quad (7)$$

$$\{ a \} = Fe\mathbf{C} + W_e \{ b \}. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  — векторы амплитуд прямых и обратных волноводных волн;  $e$  — оператор распространения волноводных волн, порождаемый диагональной матрицей, составленной из  $\exp(i\gamma_m r)$ ;  $R$  — матричный оператор отражения волноводных волн от открытого конца плоского волновода (матричные операторы действуют на векторы амплитуд по правилу умножения матрицы на столбец). Кроме того,  $\{ b \}$  и  $\{ a \}$  — амплитуды прямых и обратных внешних волн в области  $-r < z < 0$ ;  $\epsilon$  — оператор распространения внешних волн (интегральный оператор с ядром  $e^{iz}$ );  $W$  — оператор рассеяния внешних волн на открытом конце волновода;  $\hat{F}$  — оператор возбуждения волновода внешними волнами, связанный с преобразованием непрерывного спектра волн в дискретный;  $F$  — оператор излучения из открытого конца волновода (преобразование из дискретного спектра в непрерывный).

Мы будем в первую очередь интересоваться амплитудами внутреннего поля и комплексной частотой колебаний. Поэтому, исключая из (5)–(8)  $\{ a \}$  и  $\{ b \}$ , получим уравнения

$$\{ -I \pm Re \pm L + G \} \mathbf{C} = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{D} = \pm \mathbf{C}, \quad (10)$$

где знак  $\pm$  соответствует колебаниям с различной симметрией поля относительно плоскости  $z = -r/2$ ;  $I$  — единичный оператор, а

$$G = \hat{F}_e \Phi F, \quad L = \hat{F}_e \Phi W_e F$$

— матричные операторы, для определения которых нужно обратить интегральный оператор  $I - W_e W_e^* = I/\Phi$ .

При развертывании в (9) произведений матриц на вектор в явном виде получим бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $C_m$ . Приравнивая нуль определитель этой системы, установим уравнение для определения значений комплексной безразмерной частоты  $x$ :

$$\det \{ -I \pm Re \pm L + G \} = 0. \quad (11)$$

Для каждого собственного значения  $x$  соответствующий ему набор амплитуд  $C_m$  определяется из решения исходной однородной системы уравнений (9).

Следует отметить, что для рассматриваемой структуры операторы преобразования волн зависят от поляризации и четности поля. Поэтому в зависимости от продольной симметрии поля (знак  $\pm$  в (9)–(11)), поперечной симметрии поля (значение  $s$  в (2)) и поляризации получаем

восемь независимых характеристических уравнений (11), соответствующих колебаниям различных типов симметрии.

Основной трудностью при вычислении собственных частот является проблема обращения оператора  $I - W \epsilon W \epsilon$ , отображающего процесс многократного рассеяния внешних волн на открытых концах волновода. Приближенный анализ внешней связи заключается в учете конечного числа рассеяний, т. е. конечного числа членов разложения

$$\Phi = I + W \epsilon W \epsilon + (W \epsilon W \epsilon)^2 + \dots . \quad (12)$$

Из физических соображений ясно, что при каждом рассеянии большая часть энергии внешних волн, колеблющихся между рассеивателями, теряется на излучение в бесконечность. Поэтому следует ожидать хорошей сходимости ряда (12). В приближении однократного рассеяния получим

$$G \simeq \hat{F} \epsilon F, \quad L \simeq 0. \quad (13)$$

Решение еще более упростится, если вообще пренебречь внешней связью. Действительно, если длина резонатора  $r$  достаточно велика, то в первом приближении можно пренебречь полем, излученным из одного конца волновода вблизи другого конца (это поле уменьшается вдоль стенки волновода пропорционально некоторой степени  $1/z$  [7]). В таком случае, полагая  $\epsilon \equiv 0$ , вместо (5) и (6) получим уравнения

$$C = Re D, \quad (14)$$

$$D = Re C, \quad (15)$$

откуда, вместо (9), имеем

$$\{-I \pm Re\} C = 0. \quad (16)$$

Косвенный метод проверки точности рассматриваемого приближения состоит в вычислении внешнего тока по найденному из (16) набору амплитуд  $C$  и в выяснении того, насколько мал ток, затекающий на внешнюю поверхность лент со стороны одного конца волновода, вблизи второго конца.

2. Применимый в данной работе метод может быть использован при анализе собственных колебаний в других типах открытых резонаторов. В частности, он применим для цилиндрической трубы конечного размера или дискового резонатора. Операторные уравнения при этом остаются те же. Иными будут лишь функции, по которым разлагается поле, и решения вспомогательных задач по определению операторов преобразования.

Рассмотрим структуру, состоящую из открытого ленточного резонатора, помещенного внутри плоского волновода (рис. 2). Для этой структуры поле внутри ленточного резонатора ищем в виде (2). Поле в области  $-r < z < 0$  внешнего волновода удовлетворяет на лентах граничному условию (3). Однако токи на внешней стороне лент открытого резонатора теперь выражаются не в виде интеграла Фурье (4), а при помощи ряда Фурье:

$$J^{BH}(z) = \sum_{m>0} \{ b_m \exp(-i\omega_{s+2m} z) + a_m \exp[i\omega_{s+2m} (z+r)] \}, \quad (17)$$

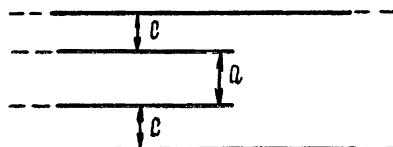
где

$$\omega_{s+2m} = \left[ (\tilde{n})^2 - \left( \frac{a}{a+2c} \right)^2 \left( \frac{s}{2} + m \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Использование операторных равенств типа (5)–(8) приводит те-

перь к уравнениям, в которых непрерывные наборы амплитуд заменены дискретными, а интегральные операторы — матричными. Дифракционные операторы, необходимые при анализе структуры рис. 2, находятся из решения соответствующих граничных задач для структуры рис. 3. Указанные граничные задачи можно решить строго (они эквивалентны задачам о разветвлении плоского волновода [7]).

Рис. 3. Полубесконечный плоский волновод между двумя плоскостями.



Существенное отличие структуры рис. 2 от структуры рис. 1 заключается в том, что при заданной ширине ( $a+2c$ ) внешнего бесконечного волновода связь между открытыми концами ленточного резонатора через внешнее пространство отлична от нуля даже при неограниченном увеличении  $d/\lambda$ . Поскольку, однако, эта связь описывается матричными операторами, то ее можно легко учесть, решая операторные уравнения в их полном виде.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При дальнейшем анализе собственных колебаний в ленточном резонаторе ограничимся исследованием уравнений, в которых внешняя связь не учитывается. Разворачивая (16) в явном виде, получим бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$-C_{s+2p} \pm \sum_{m>0} R_{s+2m}^{s+2p} e_{s+2m} C_{s+2m} = 0, \quad (19)$$

где  $R_{s+2m}^{s+2p}$  — элементы матричного оператора  $R$ , которые определены в [7]. Характеристическое уравнение в данном приближении имеет вид

$$\det \{ -I \pm Re \} = 0. \quad (20)$$

Поскольку  $d/\lambda$  в принципе не может быть существенно меньше  $1/2$ , то в (19) и (20) будут отличны от нуля экспоненты  $e_{s+2m}$ , соответствующие лишь пространственным волноводным волнам. Количество последних при заданном максимальном значении  $a/\lambda$  не превышает целой части отношения  $a/2\lambda$ . Тогда, пренебрегая малыми величинами, заменим бесконечную систему (19) соответствующей ей системой конечного порядка. В частности, если только одна гармоника спектра является незатухающей, то из (19) получим лишь одно уравнение.

С ростом  $a/\lambda$  растет количество учитываемых в системе (19) уравнений. Это обстоятельство, однако, не является серьезным препятствием при численном анализе на ЭВМ. Кроме того, при больших  $a/\lambda$  возможно дополнительное усечение системы (19) за счет отбрасывания членов с малыми номерами  $m$ . В этой связи следует остановиться на случае колебаний, частоты которых близки к критическим частотам волноводных волн, т. е.

$$2\tilde{x}n \simeq 2M + s, \quad (21)$$

где  $M$  — целое число. В этом случае, пренебрегая в  $R$  всеми элементами, кроме  $R_{s+2M}^{s+2M}$  [2, 7], получим из (20) простое уравнение

$$R_{s+2M}^{s+2M} e_{s+2M} = \pm 1, \quad (22)$$

из которого, в частности, вытекает асимптотическое решение [2].

Уравнение (22) не учитывает многоволновую природу колебаний открытого ленточного резонатора. Для серии собственных значений, получаемых из (22), точность их вычисления уменьшается с ростом номера корня. Возникает вопрос, каков характер отличия корней, получаемых из (20), от корней уравнения (22) и каково истинное соотношение между амплитудами волн дифракционного спектра.

На ЭВМ был произведен расчет собственных значений и соответствующих им наборов амплитуд  $C_{s+2m}$  при  $n = 1$  в диапазоне  $\text{Re } \chi \leq 4,5$ . Для этого в системе (19) удерживались пять уравнений. В качестве начальных приближений для поиска корней использовались значения  $\chi$ , равные  $\chi_{n,s+2m}^0 + \xi_{n,s+2m}$ . Здесь

$$\chi_{n,p}^0 = \left[ \left( \frac{r}{\pi n} \right)^2 + \left( \frac{p}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (23)$$

— собственные значения одноволновых  $E_{n,p}$ - или  $H_{n,p}$ -колебаний закрытого резонатора, изображенного на рис. 4;

$$\xi_{n,p} = 2(\chi_{n-2,p} - \chi_{n-2,p}^0) - (\chi_{n-4,p} - \chi_{n-4,p}^0)$$

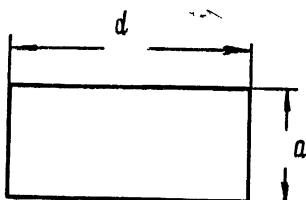


Рис. 4. Закрытый двумерный резонатор.

— комплексные экстраполяционные поправки;  $\chi_{n,p}$  — точные значения корней для многоволновых  $E_{n,p}$ - или  $H_{n,p}$ -колебаний системы рис. 1. Четные значения индекса  $n$  соответствуют знаку «+» в уравнениях (19) и (20).

На рис. 5 и 6 изображены диаграммы распределения корней для  $E$ - и  $H$ -колебаний четности  $s = 1$ . На этих диаграммах серии корней  $\chi_{n,s+2m}$  с одинаковым индексом  $s + 2m$  группируются в ветви, начинающиеся в точках  $2\chi = 1 + 2m$ . (Не показанные здесь ветви корней  $\chi_{n,2m}$  начинаются в точках  $\chi = m$ .) Все корни имеют отрицательную мнимую часть, растущую при увеличении индекса  $n$ . Это нарастание сильнее в случае  $E$ -колебаний.

Для  $H$ -колебаний заметен резкий разброс положений корней в ветвях, объясняющийся многоволновой природой колебаний. Эта нерегулярность в расположении корней отсутствует только в случае  $H_{n,1}$ -колебаний в области  $\chi < 1,5$ , поскольку спектр этих колебаний содержит лишь одну незатухающую волну. Периодичность в отклонении корней определяется биениями между фазовыми набегами  $\gamma_{s+2m} r$  волноводных волн на длине резонатора  $r$ . В связи с этим зависимости  $\text{Im } \chi$  для корней  $H$ -колебаний от параметра  $r$  (не показанные здесь) также имеют осциллирующий характер.

Размах отклонений корней характеризует различие между точными собственными значениями и приближенными, найденными из (22). На рис. 6 вдоль ветвей корней  $s + 2m = 7$  и  $s + 2m = 5$  проведены плавные линии «1», на которых располагаются корни уравнения (22). Линии «2» указывают положения корней, получаемых по асимптотическим

формулам [2]. Заметим, что приближенные формулы для поправок к корням уравнения (22), учитывающих многомодовость, можно получить из (20) с помощью метода малых возмущений. Для  $E$ -колебаний нерегулярность в распределении корней практически отсутствует. Это объясняется тем, что в матрице  $R$  в случае  $E$ -поляризации недиагональные элементы (по отношению к диагональным) значительно меньше, чем в случае  $H$ -поляризации [7]. Таким образом, многоволновая природа  $E$ -колебаний проявляется слабее.

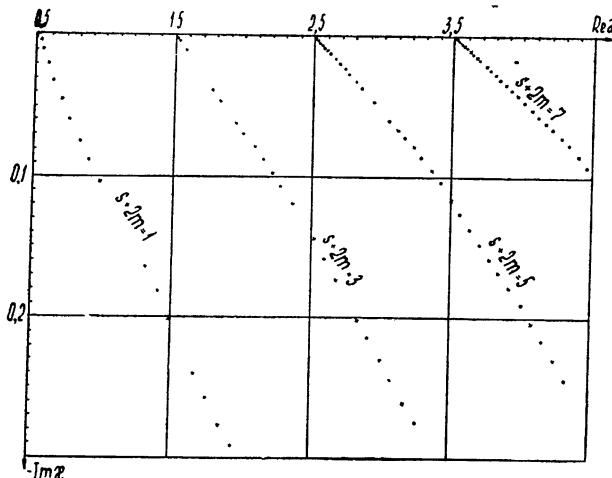


Рис. 5. Собственные значения  $E_{n, s+2m}$ -колебаний от крытого ленточного резонатора при  $d/a=5$ . (Крестики соответствуют нечетным значениям индекса  $n$ , точки—четным.)

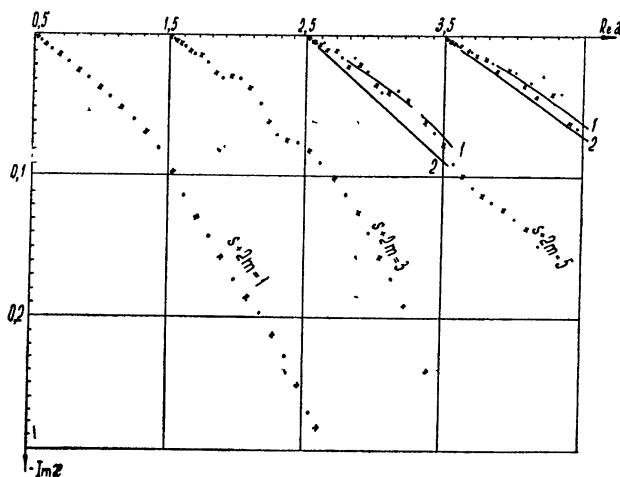


Рис. 6. Собственные значения  $H_{n, s+2m}$ -колебаний при  $d/a=5$ . (Обозначения те же, что и на рис. 5.)

Рассмотрим теперь распределение амплитуд волн дифракционного спектра. Назовем волноводную волну, номер которой совпадает с индексом колебания  $s + 2m$ , главной волной спектра. В [2] амплитуды всех волн спектра, кроме главной, полагались равными нулю. Реальное соотношение между амплитудами следующее. Все амплитуды отличны от

нуля, хотя для колебаний с малым значением индекса  $n$  главная амплитуда имеет самую большую величину (особенно при больших  $m$ ). С ростом  $n$  при заданном  $m$  роль неосновных незатухающих гармоник возрастает (таблица 1), соответственно увеличивается разброс в распределении корней (рис. 6) по мере роста реальной части корней. При росте  $n$  также сильно увеличивается амплитуда первой из затухающих волн спектра до тех пор, пока эта волна не превращается в незатухающую (переход  $\text{Re } z_{n, s+2m}$  через точку  $2x = s + 2m + 2$ ). После этого амплитуда указанной волны резко уменьшается, в то время как в спектрах новой серии колебаний, появляющихся после прохождения критической точки, эта волна играет ведущую роль.

Таблица 1

Собственные значения  $H_{n,7}$ -колебаний (для нечетных  $n$ ) и соответствующие им наборы амплитуд  $C_{1+2m}$ , отнесенных к  $C_1$ . ( $C_7$  для данных колебаний является амплитудой главной гармоники.)

$n$	$\text{Re } z$	$\text{Im } z$	$ C_3 $	$ C_5 $	$ C_7 $
1	3,501	$-0,6256 \cdot 10^{-4}$	11,53	17,10	900,3
3	3,512	$-0,5569 \cdot 10^{-3}$	11,52	17,01	250,2
5	3,533	$-0,1628 \cdot 10^{-2}$	11,50	16,91	162,1
7	3,564	$-0,3581 \cdot 10^{-2}$	11,50	16,84	114,0
9	3,607	$-0,5784 \cdot 10^{-2}$	11,44	16,48	82,03
11	3,658	$-0,7792 \cdot 10^{-2}$	11,37	16,03	61,25
13	3,719	$-0,1272 \cdot 10^{-1}$	11,33	15,80	51,84
15	3,769	$-0,1439 \cdot 10^{-1}$	11,24	15,24	41,47
17	3,870	$-0,2289 \cdot 10^{-1}$	11,20	14,98	36,32
19	3,953	$-0,2300 \cdot 10^{-1}$	11,08	14,37	30,13
21	4,057	$-0,3347 \cdot 10^{-1}$	11,00	13,96	26,27
23	4,146	$-0,4123 \cdot 10^{-1}$	10,93	13,63	23,72
25	4,268	$-0,3977 \cdot 10^{-1}$	10,80	13,02	20,22

Зависимости отношений амплитуд спектра от длины резонатора  $r$  для  $H$ -колебаний имеют осциллирующий характер. При этом с ростом  $r$  амплитуда главной гармоники, отнесенная к амплитуде нулевой волны, в среднем линейно нарастает, а величины остальных амплитуд колеблются около постоянных значений.

Выше приведены численные результаты для случая  $n=1$ . При изменении показателя преломления всего пространства величина  $\tilde{n}$  является инвариантом. Таким образом, если  $\text{Im } \tilde{n}$  отрицательно, в системе возможны нарастающие колебания. На практике образцы оптически активной среды, для которых  $\text{Im } \tilde{n} < 0$ , занимают конечный объем внутри резонатора. Для анализа такого случая необходимо решить граничную задачу для более сложной конфигурации, включающей в себя границы раздела сред. Простейшая из таких конфигураций изображена на рис. 7. Для нее решение получается при замене в (5) оператора  $R$  матричным оператором отражения от границы раздела сред, расположенной перед открытym концом волновода. Однако, если  $\tilde{n}$  мало отлич-

чается от единицы, то можно приближенно считать произведение  $\tilde{n}$  не зависящим от  $y$  и воспользоваться численными результатами, полученными для системы рис. 1.

Рис. 7. Плоскопараллельный слой среды в ленточном резонаторе.



Результаты данной работы переносятся на случай распространения ТМ и ТЕ волн в полосковых линиях передачи. Действительно, конфигурацию рис. 1 можно рассматривать как однородную полосковую линию, по которой волны могут распространяться в направлении  $y$ . Способ решения граничной задачи для интересующего нас случая  $\frac{d}{dy} = \text{const} \neq 0$  не отличается от способа решения для случая  $\frac{d}{dy} = 0$ .

При этом оказывается, что  $(\tilde{n})^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$  является инвариантом. Таким образом, вычисленные здесь собственные частоты колебаний являются одновременно критическими частотами собственных волн полосковой линии.

Авторы выражают глубокую благодарность Б. Е. Кинберу за ценные замечания и советы при окончательном оформлении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопалов, В. В. Щербак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2 285 (1968).
2. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 44, № 2, 487 (1963).
3. A. G. Fox, F. Li, Bell Syst. Techn. J., 40, № 2, 453 (1961).
4. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell Syst. Techn. J., 40, № 2, 489 (1961).
5. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. Х. Хенл, А. Мауз, К. Вестфаль, Теория дифракции, перев. с нем., изд. Мир, М., 1964.
7. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
8. А. Т. Фиалковский, ДАН СССР, 168, № 6, 1300 (1966).

Харьковский институт радиоэлектроники

Поступила в редакцию  
21 декабря 1966 г.

#### MATRIX OPERATORS IN DIFFRACTION PROBLEMS. II

V. P. Shestopalov, V. V. Shcherbak

The problem of free oscillations in open tape resonator has been solved by means of the method proposed in [1]. The asymptotic solution derived in [2] is shown to be a particular case of the theory developed.

УДК 621.372.821.1

## ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА В ВОЛНОВОДЕ С ИМПЕДАНСОМ, МЕНЯЮЩИМСЯ ВДОЛЬ ДЛИНЫ

*C. С. Калмыкова, A. B. Луговой*

Отыскание полного поля при рассеянии аксиально-симметричной  $E$ -волны в волноводе с импедансом, экспоненциально меняющимся вдоль длины, сведено к задаче Гильберта—Привалова со смещением. Получено решение этой задачи в общем виде. Вычислены коэффициенты отражения в длинноволновом случае для различных характерных областей изменения импеданса.

Изучение рассеяния и трансформации электромагнитных волн на неоднородном участке волновода представляет интерес для теории согласования волноводов, теории антенн поверхностных волн, а также задач береговой рефракции. Распространение электромагнитных волн в проводящих волноводах с медленным изменением параметров рассмотрено в монографии [1]. Дифракция электромагнитных волн на скачке импеданса исследовалась в целом ряде работ (см. [2, 3]).

Если возникает необходимость уменьшить коэффициент отражения от неоднородности; например, при возбуждении плазменного волновода коаксиальным [4], то желательно делать область перепада импеданса конечной (плотность плазмы может стремиться к заданному значению по экспоненциальному закону). Поэтому представляет интерес теоретическое рассмотрение вопроса о рассеянии электромагнитной волны на участке с плавно меняющимся импедансом.

В данной работе решена задача о распространении поверхностной волны вдоль цилиндрического волновода, импеданс которого, начиная с какой-то точки, изменяется по экспоненциальному закону. Полученное решение исследовано в предельных случаях малых и больших размеров переходной области.

Рассмотрим бесконечный ( $-\infty < z < \infty$ ) цилиндр радиуса  $a$ , импеданс которого в области  $z < 0$  постоянен и равен  $Z_-^\infty$ , а в области  $z > 0$  определен следующим образом:

$$Z_+(z) = Z_+^\infty - (Z_+^\infty - Z_-^\infty) e^{-\xi z}, \quad (1)$$

где  $Z_+^\infty$  — заданный импеданс правого волновода при  $z \rightarrow \infty$ . Цилиндр скружен идеально проводящим кожухом радиуса  $b$ .

Пусть из  $z = -\infty$  распространяется аксиально-симметричная  $E$ -волнна, продольная компонента которой равна\*

$$E_z^{\text{пад}} = \left[ I_0(\beta r) - \frac{I_0(\beta b)}{K_0(\beta b)} K_0(\beta r) \right] \exp[i(\gamma z - \omega t)], \quad (2)$$

$$\beta^2 = \gamma^2 - k^2.$$

\* Временной множитель  $e^{-i\omega t}$  далее опущен.

Полное поле будем искать в виде суммы падающей волны и суперпозиции плоских волн, определяющей рассеянные поля [5]:

$$\begin{aligned} E_z &= E_z^{\text{пад}} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \left[ I_0(vr) - \frac{I_0(vb)}{K_0(vb)} K_0(vr) \right] e^{itz} dt, \\ H_{\varphi} &= H_{\varphi}^{\text{пад}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik}{v} h(t) \left[ I_1(vr) + \frac{I_0(vb)}{K_0(vb)} K_1(vr) \right] e^{itz} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Подчиним это поле импедансным граничным условиям на поверхности стержня:

$$\begin{aligned} E_z &= Z_{-}^{\infty} H_{\varphi} & (z < 0), \\ E_z &= Z_{+}(z) H_{\varphi} & (z > 0). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив выражения для полей (3) в граничные условия (4) и воспользовавшись леммой Винера—Пэли, получим следующую краевую задачу для определения амплитуды Фурье  $h(t)$  рассеянного поля:

$$\psi^{+}(t) = \frac{\Delta_{+}(t)}{\Delta_{-}(t)} \varphi^{-}(t) - \frac{\delta}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{-}(\tau) d\tau}{\Delta_{-}(\tau) [\tau - (t - i\xi)]} + \frac{A\delta}{2\pi i} \left( \frac{1}{(t - \gamma - i\xi)} - \frac{1}{t - \gamma} \right), \quad (5)$$

где

$$\Delta_{\pm} = \frac{v}{ik} \frac{\Delta_0(t)}{\Delta_1(t)} - Z_{\pm}^{\infty}, \quad \delta \equiv Z_{+}^{\infty} - Z_{-}^{\infty},$$

$$\Delta_n(t) = I_n(va) + (-1)^{n+1} \frac{I_0(vb)}{K_0(vb)} K_n(va), \quad (6)$$

$$h(t) = \frac{v}{ik} \frac{\varphi^{-}(t)}{\Delta_1(t) \Delta_{-}(t)}, \quad A = \frac{ik}{\beta} \Delta_1(\gamma),$$

$\psi^{+}$  и  $\varphi^{-}$  представляют граничные значения функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной  $t$ .

После интегрирования (5) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi^{+}(t) &= \varphi^{-}(t) - \frac{\delta \varphi^{-}(t)}{\Delta_{-}(t)} + \frac{\delta \varphi^{-}(t - i\xi)}{\Delta_{-}(t - i\xi)} - \delta \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi^{-}(-\gamma_p)}{[\Delta_{-}]'_{-\gamma_p} (t + \gamma_p - i\xi)} + \\ &\quad + \frac{A\delta}{2\pi i} \left( \frac{1}{t - \gamma - i\xi} - \frac{1}{t - \gamma} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\gamma_p$  — решения дисперсионного уравнения левого волновода  $\Delta_{-}(\pm \gamma_p) = 0$ . Соотношение (7) можно рассматривать как неоднородную задачу сопряжения, свободный член которой, в отличие от обычной задачи этого типа, содержит не известную функцию, а искомую, заданную на контуре, смешенном относительно действительной оси. Решая (7) обычным способом [6], приходим к функциональному уравнению, определяющему  $\varphi^{-}(t)$ :

$$\Phi(t) = - \frac{\delta}{\Delta_{+}(t)} \Phi(t - i\xi) + \frac{F(t)}{\Delta_{+}(t)}, \quad (8)$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{\varphi^-(t)}{\Delta_-(t)},$$

$$F(t) = \delta \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi^-(-\gamma_p)}{[\Delta_-]_{-\gamma_p}'} \left( \frac{1}{t+\gamma_p-i\xi} - \frac{1}{t+\gamma_p} \right) - \frac{A\delta}{2\pi i} \left( \frac{1}{t-\gamma-i\xi} - \frac{1}{t-\gamma} \right).$$

Функциональное уравнение (8) эквивалентно бесконечной системе алгебраических уравнений относительно  $\varphi^-(t-ni\xi)$  с условием  $\varphi^-(\infty) = 0$ . Так как на кольце  $r = a$ ,  $z = 0$  отсутствуют сторонние источники, то компонента Фурье поля при  $t \rightarrow \infty$  должна стремиться к нулю, чтобы энергия поля оставалась ограниченной (условие Мейкслера). Поэтому

$$\Phi(t-ni\xi) = -\frac{\delta}{\Delta_+(t-ni\xi)} \Phi[t-(n+1)i\xi] + \frac{F(t-ni\xi)}{\Delta_+(t-ni\xi)} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Полученная система уравнений для функций  $\Phi(t-ni\xi)$  — треугольного типа с определителем, равным единице. Выражение для  $\varphi^-(t)$  в этом случае находится в явном виде:

$$\varphi^-(t) = \Delta_-(t) \left[ Q(t) - \sum_{l=0}^{\infty} (-\delta)^l Q(t-li\xi) \Delta_-(t-li\xi) \prod_{q=0}^l \frac{1}{\Delta_+(t-qi\xi)} \right], \quad (10)$$

где

$$Q(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi^-(\gamma_p)}{[\Delta_-]_{-\gamma_p}'} \frac{1}{t+\gamma_p} - \frac{A}{2\pi i(t-\gamma)},$$

$\varphi^-(\gamma_p)$  — неизвестные постоянные, которые будут определены ниже. Найденное решение удовлетворяет исходной краевой задаче, в чем можно убедиться прямой подстановкой (10) в (5).

Используя (3), (6), (10), найдем выражение для поля в волноводе, например, в области  $z < 0$ :

$$H_\varphi = \frac{2\pi\beta}{k\Delta_{11}(\beta r)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Delta_{11}(v_p r)}{\Delta_{11}(v_p a)} \frac{\varphi^-(\gamma_p)}{[\Delta_-]_{-\gamma_p}'} \exp(-i\gamma_p z). \quad (11)$$

Неизвестные постоянные  $\varphi^-(\gamma_p)$  можно определить из условия аналитичности функции  $\varphi^-(t)$  в точках  $t = -\Gamma_m + qxi$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$  ( $\Gamma_m$  — решения дисперсионного уравнения правого волновода  $\Delta_+(t)=0$ ). Это условие дает следующую бесконечную систему алгебраических уравнений для нахождения  $\varphi^-(\gamma_p)$ :

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p(\Gamma_m) \frac{\varphi^-(\gamma_p)}{[\Delta_-]_{-\gamma_p}'} = D(\Gamma_m), \quad (12)$$

где

$$C_p(\Gamma_m) = \frac{1}{\Gamma_m - \gamma_p} - \sum_{l=1}^{\infty} (-\delta)^{l-1} \frac{\Delta_-(-\Gamma_m - li\xi)}{(\Gamma_m + li\xi - \gamma_p)} \prod_{q=1}^l \frac{1}{\Delta_+(-\Gamma_m - qi\xi)},$$

$$D(\Gamma_m) = \frac{A}{2\pi i} \left[ \frac{1}{\Gamma_m + \gamma} - \sum_{l=1}^{\infty} (-\delta)^{l+1} \frac{\Delta_-(-\Gamma_m - li\xi)}{\Gamma_m + li\xi + \gamma} \prod_{q=1}^l \frac{1}{\Delta_+(-\Gamma_m - qi\xi)} \right].$$

Определитель системы (12) обращается в нуль только при вырождении собственных чисел, соответствующих волнам левого или правого волновода ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma$ , или  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_s$ ), но при этом равны нулю все определители, образованные заменой элементов любого столбца матрицы из коэффициентов системы (12) свободными членами, поэтому и в этом случае система имеет решение. Можно показать, что при  $m \gg 1$  члены суммы в (12) убывают как  $1/m^2$ , а при  $p \gg 1$  коэффициенты  $C_p$  убывают как  $1/p$  и сходимость суммы в (12) обеспечивается стремлением к нулю  $\varphi(-\gamma_p)$  при  $|\gamma_p| \rightarrow \infty$ . При заданной точности расчета конкретного волновода можно ограничиться конечным числом неизвестных, а следовательно, и уравнений в системе (12).

При низких частотах ( $\omega b/c \ll 1$ ), когда в волноводе распространяется одна волна с волновым числом

$$\gamma^2 = k^2 + \frac{ikZ_{\pm}^{\infty}}{a \ln a/b},$$

в суммах (11) и (12) наибольший вклад дает слагаемое, соответствующее этой волне. Вычисленный коэффициент отражения  $K$  оказывается равным

$$K = - \frac{\Gamma - \gamma + \sum_{l=1}^{\infty} (-\delta)^l (\Gamma - \gamma + li\xi) \prod_{q=1}^l [(\Gamma + qli\xi)^2 - \Gamma^2]^{-1}}{\Gamma + \gamma + \sum_{l=1}^{\infty} (-\delta)^l (\Gamma + \gamma + li\xi) \prod_{q=1}^l [(\Gamma + qli\xi)^2 - \Gamma^2]^{-1}}. \quad (13a)$$

В предельных случаях  $(\xi/\gamma) \gg 1$  (длина перехода мала по сравнению с длиной волны в системе) и  $(\xi/\gamma) \ll 1$  из (13a) получаем

$$K = - \frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma + \gamma} + \frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma + \gamma} \frac{2\gamma}{2\Gamma + i\xi} \quad \left( \frac{\xi}{\gamma} \gg 1 \right), \quad (13b)$$

$$K = - \frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma + \gamma} + \frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma + \gamma + i\xi} \quad \left( \frac{\xi}{\gamma} \ll 1 \right). \quad (13c)$$

Эффекты, обусловленные конечной протяженностью переходной области, должны быть велики по сравнению с поправками порядка  $Z_{\pm}^{\infty}$ , определяющими точность импедансного приближения. Таким образом, из (13c) следует, что коэффициент отражения поверхностной волны меньше заданного значения  $R$ , если размеры переходной области  $L = 1/\xi$  удовлетворяют условию

$$L > \frac{\gamma - \Gamma}{R(\Gamma + \gamma)^2}.$$

Если  $\operatorname{Re} \xi \ll \operatorname{Im} \xi$ , то рассматриваемая задача переходит в задачу об отражении полубесконечной периодической импедансной поверхностью. Задача о распространении электромагнитных волн вдоль неограниченной поверхности, импеданс которой меняется по периодическому закону, была решена в работе [7]. Необходимо отметить также, что задача о рассеянии поверхностной волны на плоскости с импедансом, меняющимся по закону  $1/z$ , с помощью метода Кирхгофа была рассмотрена в [8]. В [9] методом поперечных сечений исследовано рассеяние поверхностной волны участком плоской поверхности с медленно меняющимся импедансом. Формула (13b) аналогична (32) работы [9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
2. М. А. Миллер, В. И. Галанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 5, 795 (1961).
3. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
4. С. С. Калмыкова, УФЖ, 9, 217 (1964).
5. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, изд. Сов. радио, М., 1953.
6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
7. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 5, 802 (1960).
8. L. B. Felsen, IRE Trans., AP-3, 148 (1955).
9. В. В. Шевченко, Акуст. ж., 9, 351 (1963).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
8 июня 1966 г.,  
после переработки  
17 июня 1967 г.

### SURFACE WAVE IN A WAVEGUIDE WITH AN IMPEDANCE CHANGING ALONG THE LENGTH

*S. S. Kalmykova, A. V. Logovoy*

The problem on the full field in scattering of axially-symmetric *E*-wave in a waveguide with an impedance varying exponentially along the length is reduced to Gilbert—Privalov's problem with displacement. The solution of the problem is obtained in a general form. The reflection coefficients are calculated for a long-wave case at different characteristic regions of impedance change.

УДК 621.372.8 09

## О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ТЕРМОЗОНДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ВОЛНОВОДАХ

*Н. В. Котосонов, Б. И. Власов*

Рассматривается возможность исследования распределения плотности потока мощности СВЧ в волноводных трактах методом распределенной согласованной нагрузки. Изучены тепловые характеристики тонкопленочных согласованных нагрузок. Экспериментально исследовано для двух случаев соотношение между потоком энергии и температурным рельефом согласованной нагрузки.

В настоящей статье рассматривается возможность использования тонкопленочной согласованной нагрузки для исследования распределения плотности потока мощности СВЧ в прямоугольном волноводе. В качестве распределенной нагрузки используется тонкая металлическая пленка, закрывающая все поперечное сечение волновода. Тонкая пленка на диэлектрической подложке сравнительно однородна по толщине и физическим параметрам, что обеспечивалось технологией изготовления, и согласована с волновым сопротивлением волноводного тракта.

Действие электромагнитного излучения на пленку приводит, главным образом, к ее нагреванию. Температура каждого бесконечно малого участка пленки пропорциональна потоку энергии, падающему на этот участок. Если пренебречь теплопроводностью пленки, учитывая лишь теплопередачу в окружающую среду при малых перепадах температур, то вдоль пленки формируется температурный рельеф, однозначно стабиляющий распределение падающего потока мощности излучения. Однако теплопроводность поглощающей пленки и диэлектрической подложки ведет к общему выравниванию градиента температуры вследствие теплопередачи от более нагретых участков к холодным. Это обстоятельство может служить причиной несоответствия температурного рельефа и распределения потока мощности СВЧ.

Представляет интерес установить степень отклонения температурного рельефа от закона распределения потока мощности СВЧ в зависимости от тепловых характеристик поглощающей пленки и подложки.

### 1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ

Для формирования температурного рельефа, в какой-то степени стабиляющего распределение потока мощности СВЧ в прямоугольном волноводе, может быть использована нагрузка в виде металлической пленки толщиной  $L$  на диэлектрической подложке, толщина которой  $H$  (рис. 1). Нагрузка имеет сопротивление, равное волновому сопротивлению тракта СВЧ, и расположена на расстоянии  $\lambda_g(n+1)/4$  от короткозамыкающего поршня (здесь  $\lambda_g$  — длина волны в волноводе). Пусть в волноводе возбуждается волна типа  $H_{10}$ . В этом случае величина по-

тока энергии через элемент площади  $dxdy$  поперечного сечения волновода имеет вид

$$dP(x, y) = A \sin^2 \frac{\pi x}{a} dxdy,$$

где  $a$  — ширина волновода,  $A$  — плотность потока.

Тогда для элемента пленки толщиной  $L$  с площадью  $dxdy$  составим уравнение теплового баланса в случае нестационарного процесса без учета влияния диэлектрической подложки. Обозначая интенсивность выделения тепла в единице объема пленки через  $\varphi$  и предполагая, что величина  $\varphi$  не меняется со временем и однородна по толщине (это справедливо, так как толщина скин-слоя  $\delta \gg L$ ), запишем уравнение следующим образом:

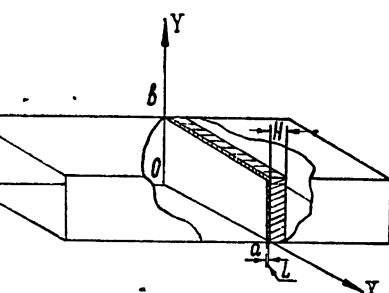


Рис. 1. Расположение согласованной пленки в волноводе.

При этом члены, входящие в уравнение (1), означают следующее:  $\varphi \sin^2(\pi x/a) dxdydt$  — количество тепла, выделяемое в пленке под действием излучения СВЧ;  $\eta dxdydt$  — количество тепла, теряемое пленкой путем лучеиспускания и свободной конвекции при небольших разностях переменной температуры и температуры окружающей среды, принятой равной нулю;  $Lc\rho (\partial u / \partial t) dxdydt$  — количество тепла, идущее на повышение температуры элемента;  $L\lambda (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) dxdydt$  — количество тепла, убывающее вследствие отвода его из элемента;  $Q$  — коэффициент поглощения;  $c$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — удельная плотность;  $\lambda$  — удельная теплопроводность;  $\eta$  — коэффициент теплообмена.

Уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\frac{du}{dt} = d^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - e^2 u + h \sin^2 \frac{\pi x}{a}, \quad (2)$$

где

$$d^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad e^2 = \frac{\eta}{Lc\rho}, \quad h = \frac{\varphi}{Lc\rho} = \frac{QA}{Lc\rho}.$$

В рассматриваемом случае начальное и граничные условия записываются в виде

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0.$$

Решение неоднородного линейного уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), можно представить в виде ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h \frac{2}{\pi m} [1 - (-1)^m] \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n (n-2)(n+2)} \times \\ \times \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \frac{1 - \exp\{-[e^2 + (m^2\pi^2/a^2 + n^2\pi^2/b^2) d^2] t\}}{[(m^2\pi^2/a^2 + n^2\pi^2/b^2) d^2 + e^2]}. \quad (4)$$

Формула (4) дает распределение температуры в плоскости  $XY$  для пленки, облучаемой потоком мощности СВЧ в случае прямоугольного волновода, температура которого принята равной температуре окружающей среды.

В целях упрощения рассмотрим одномерную задачу и установим закон распределения температуры вдоль каждой из координатных осей. Тогда линейное неоднородное уравнение, описывающее распределение температуры вдоль узкой стенки волновода,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - e^2 v + h \cos^2 \frac{\pi x}{a} \quad (5)$$

при начальном и граничных условиях

$$v(y, 0) = 0, \quad v\left(-\frac{b}{2}, t\right) = v\left(\frac{b}{2}, t\right) = 0 \quad (6)$$

будет иметь решение [1]

$$v(y, t) = \psi_0 \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch}(ky)}{\operatorname{ch}(kb/2)} \right] + \frac{2\psi_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(-1)^m - 1] b^2 k^2}{m(b^2 k^2 + m^2 \pi^2)} \times \\ \times \exp\left[-\left(e^2 + \frac{m^2 \pi^2 d^2}{b^2}\right) t\right] \sin\left[\frac{m\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right)\right], \quad (7)$$

где

$$k = \frac{e}{d}, \quad \psi_0 = \frac{h}{e^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a}.$$

По аналогии запишем распределение температуры вдоль широкой стенки волновода с помощью уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = d^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - e^2 w + h \cos^2 \frac{\pi x}{a}, \quad (8)$$

решение которого при условиях

$$w(x, 0) = 0, \quad w\left(-\frac{a}{2}, t\right) = w\left(\frac{a}{2}, t\right) = 0 \quad (9)$$

можно представить в виде следующего ряда:

$$w(x, t) = C_1 \cos^2 \frac{\pi x}{a} + C_2 \left( \sin^2 \frac{\pi x}{a} - \frac{\operatorname{ch}(kx)}{\operatorname{ch}(ka/2)} \right) + \frac{4\varphi_0}{\pi} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] a^2 k^2}{n(n^2 - 4)(a^2 k^2 + n^2 \pi^2)} \exp\left[-\left(e^2 + \frac{n^2 \pi^2 d^2}{a^2}\right) t\right] \times \\ \times \sin\left[\frac{\pi n}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right)\right], \quad (10)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{h}{e^2}, \quad C_1 = \frac{QA}{L\lambda} \left( 2 \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\eta}{L\lambda} \right) \left[ \left( 2 \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\eta}{L\lambda} \right)^2 - \left( 2 \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 \right]^{-1},$$

$$C_2 = \frac{QA}{L\lambda} 2 \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \left( 2 \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\eta}{L\lambda} \right)^2 - \left( 2 \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 \right]^{2-1}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  разложим в ряды по степеням малого параметра  $\pi^2/a^2 k^2 = \pi^2 L\lambda/a^2 \eta < 1$ :

$$C_1 = \frac{QA}{\eta} \left( 1 - 2 \frac{\pi^2}{a^2} \frac{L\lambda}{\eta} + 8 \frac{\pi^4}{a^4} \frac{L^2 \lambda^2}{\eta^2} - 32 \frac{\pi^6}{a^6} \frac{L^3 \lambda^3}{\eta^3} + \dots \right), \quad (11)$$

$$C_2 = \frac{QA}{\eta} \left( 2 \frac{\pi^2}{a^2} \frac{L\lambda}{\eta} - 8 \frac{\pi^4}{a^4} \frac{L^2 \lambda^2}{\eta^2} + 32 \frac{\pi^6}{a^6} \frac{L^3 \lambda^3}{\eta^3} - \dots \right). \quad (12)$$

Здесь  $QA/\eta$  — температура единицы поверхности пленки, находящейся в тепловом равновесии с окружающей средой, в которой выделяется тепловая мощность  $QA$  в случае отсутствия теплопередачи от соседних участков.

Первые слагаемые в (7), (10) соответствуют установившемуся тепловому состоянию, а вторые в виде бесконечных рядов — возрастанию температуры при  $t > 0$ . Степень отклонения установившегося температурного рельефа от закона распределения потока мощности СВЧ в основном определяется теплофизическими параметром пленки  $k = \sqrt{\eta/L\lambda}$ . Кривые рис. 2, согласно (7), (10), изображают теоретическое распределение температуры (в относительных единицах) металлических пленок никеля различной толщины, в которых поглощается поток мощности волны  $H_{10}$ , вдоль узкой (*a*) и широкой (*b*) сторон осевых сечений волновода. Для сравнения здесь же пунктирные кривые изображают относительное распределение потока энергии для волны  $H_{10}$ . Легко видеть, что при достаточно малых значениях параметра  $1/k$  постоянные  $C_1 \rightarrow QA/\eta$ ,  $C_2 \rightarrow 0$  в (11), (12) и на пленке возникает температурный рельеф, воспроизводящий распределение потока мощности излучения.

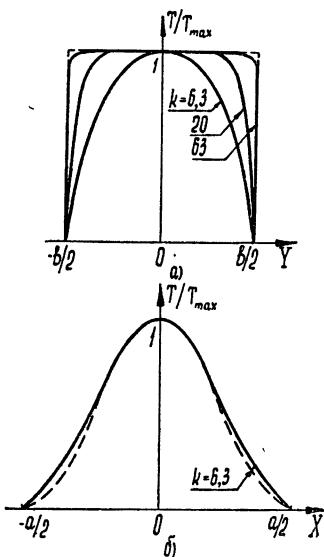


Рис. 2. Распределение температуры в зависимости от теплофизических свойств пленки.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для экспериментального изучения распределения потока мощности с помощью тонкопленочных нагрузок была использована схема, изложенная на рис. 3. Здесь кластронный генератор СВЧ — 1, измерительная линия — 2, аттенюаторы — 3, 4, потенциометр постоянного тока ППТН — 5, гальванометр — 6, согласованная пленка с термозондом — 7. В волноводе стандартного сечения  $10 \times 23 \text{ мм}$  возбуждалась волна  $H_{10}$  типа ( $f = 9,37 \text{ Гц}$ ). Постоянный (3) и переменный (4) аттенюаторы служат для обеспечения развязки и регулирования уровня потока мощности.

В ходе эксперимента исследовалось распределение температуры вдоль поглощающей пленки точечным полупроводниковым термозондом. Последний представлял собой параллелепипед ( $0,5 \times 0,5 \times 5$  мм) из термоэлектрического соединения CdSb [2] с подпаянными к торцам выводами ( $d_0 = 0,05$  мм), который крепился на поглощающей пленке припоем InGa. Тем самым обеспечивался надежный тепловой контакт термозонда с нагреваемой СВЧ потоком пленкой. Поскольку холодный конец и боковая поверхность термозонда находились в тепловом равновесии с окружающей средой, то разность температур  $\Delta T(x, y)$  между холодным и горячим концами можно представить в виде

$$\Delta T(x, y) = \left[ 1 - \frac{e_1}{e_1 \operatorname{ch}(e_1 l/d_1) + D d_1 \operatorname{sh}(e_1 l/d_1)} \right] T(x, y) = BT(x, y),$$

где  $d_1^2 = \lambda_1/c_1\rho_1$ ;  $e_1^2 = \eta_1 p/c_1 \sigma \rho_1$ ;  $D = \eta_1/\lambda_1$ ;  $l$ ,  $p$ ,  $\sigma$  — соответственно длина, периметр и площадь поперечного сечения термозонда;  $B$  — параметр, зависящий от теплофизических свойств материала и геометрических размеров термозонда;  $T(x, y)$  — температура горячего конца термозонда.

Для рассматриваемого случая нет необходимости в сложной системе термокомпенсации и термоизоляции, так как оба конца термозонда находятся в идентичных условиях по отношению к изменению температуры окружающей среды. Сигнал ЭДС  $E(x, y) = \sigma \Delta T(x, y)$  измерялся потенциометром ППТН-1 с точностью до 1—2 мкв. Так как коэффициент термозонда  $\alpha = 500$  мкв·град<sup>-1</sup>, то это позволяло уверенно регистрировать перепад температур в 0,01°C. Распределение температуры вдоль пленки исследовалось двояким образом: в первом случае на неподвижной пленке термозонд последовательно припаивался в разных точках, во втором — припаянный термозонд перемещался вместе с пленкой, геометрические размеры которой превосходили поперечное сечение волновода. Результаты измерений в том и другом случае совпадали в пределах точности эксперимента. В работе приведены экспериментальные данные, полученные путем перемещения пленки с термозондом в поперечном сечении волновода механической системой, отсчет по лимбам микровинтов которой осуществлялся с точностью до 0,01 мм. В пределах точности эксперимента, которая составила не более 3%, наличие дроссельного зазора во фланцах ( $L + H \approx 31,2$  мк), гораздо меньшего длины волны, а также перемещение термозонда не сказывались существенно на результатах измерений.

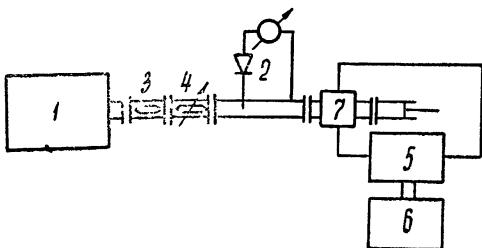


Рис. 3. Блок-схема измерений.

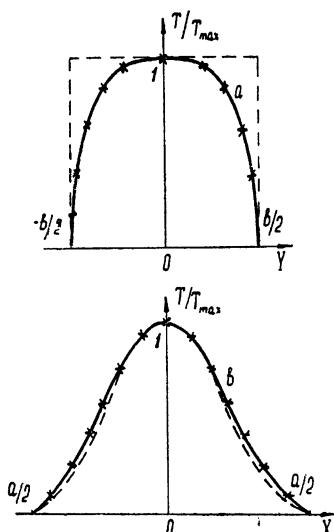


Рис. 4. Распределение температуры пленки в прямоугольном волноводе.

На рис. 4 представлены распределения

ния температуры пленки вдоль узкой (*a*) и широкой (*b*) сторон волновода в относительных единицах. Сплошные кривые соответствуют теоретическому распределению (7), (10) температуры вдоль поглощающей пленки с учетом теплофизических свойств слюдяной подложки толщиной в 31,2 мк, пунктирные кривые изображают распределение потока мощности СВЧ вдоль соответствующих сторон волновода, данные эксперимента изображены в виде крестиков. В пределах точности эксперимента наблюдается хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Однако при прочих равных условиях необходимо отметить более точное совпадение температурного рельефа с законом распределения потока энергии вдоль широкой стороны волновода. Это обстоятельство, по-видимому, обусловлено величиной градиента температуры вблизи границ тепловых контактов.

1. Рассмотрен температурный рельеф, образующийся на поглощающей пленке, для заданного закона распределения потока мощности СВЧ.
2. Выяснены условия, при которых наблюдается совпадение температурного рельефа и закона распределения потока.
3. Проведено экспериментальное исследование температурного рельефа, возникающего на согласованной пленке, для волны  $H_{10}$ .
4. Показана возможность применения полупроводникового термозонда для исследования распределения потока энергии СВЧ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П. В. Черпаков, Иж. физ. ж., № 5, 94 (1962)
2. С. М. Гусев, Г. В. Ракин, Сборник трудов I и II совещаний по термоэлектричеству, изд. АН СССР, М.—Л., 1963.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 марта 1966 г.

#### ON THE USE OF SEMICONDUCTING THERMOSONDE FOR THE INVESTIGATION OF UMOV-POYNTING'S FLUX DISTRIBUTION IN WAVEGUIDES

*N. V. Kotosonov, B. I. Vlasov*

The possibility of flux density distribution of SHF-power in waveguide tracts is considered by the method of distributed matched load. The heat characteristics of thin-film matched loads are studied. For two cases there experimentally investigated the relation between the Umov-Poynting's flux and temperature relief of the matched load.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 533.9.01

**О ФОКУСИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ПЛАЗМЕННОГО  
ЛИНЕЙНОГО СЛОЯ В СЛУЧАЕ ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА**

*Ю. И. Орлов*

В работах [1-4] в случае внешнего источника были исследованы особенности рефракции и фокусировки сферических волн в неоднородных средах: нарушение принципа локальности и возникновение на каустике узлов, точек возврата, петель или изолированных «каустических фокусов».

В данном сообщении рассматривается полубесконечный плазменный линейный слой

$$\epsilon(\omega, z) = 1 - a(\omega)z \quad (z \geq 0, \quad a = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \frac{dN}{dz} > 0) \quad (1)$$

в случае внутреннего источника ( $z = z_0 > 0, r = 0$  — цилиндрические координаты dipоля).

Как известно, рефракция сферических волн в безграничной неоднородной среде с  $\epsilon(z) = 1 - az$  ( $-\infty < z < \infty$ ) сопровождается «идеальной» фокусировкой поля и образованием неособой каустики. Можно показать, что плоская граница раздела  $z = 0$  оказывает на поле дополнительное фокусирующее влияние, благодаря чему на каустике в свободном пространстве могут появиться особые точки, анализируемые ниже.

Траектории лучей в линейном слое (1) представляют собой параболы [1, 5]

$$z = z_{ii} - \frac{a}{4z^2} (r - r_{ii})^2, \quad (2)$$

где  $a = \sin \theta_B = \sqrt{1 - \tau} \sin \theta_0$ ,  $z_{ii} = (1 - \alpha^2)/a$ ,  $r_{ii} = [(1 - \tau)/a] \sin(2\theta_0)$ ,  $\tau = az_0$ ,  $\theta_0$  — угол между направлением волновой нормали и положительным направлением оси  $z$  (угол выхода луча из источника),  $\theta_B$  — угол выхода луча из неоднородной среды,  $z_{ii}$  и  $r_{ii}$  — координаты точки поворота луча.

Уравнение рефракционной каустики (рефракаустики) семейства лучей (2) имеет вид

$$v = \frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{4(1 - \tau)} w^2, \quad (3)$$

где  $v = z/z_0$ ,  $w = r/z_0$ . Согласно (3) рефракаустика представляет собой поверхность параболоида вращения, пересекающего границу плазмы  $z = 0$  по окружности радиуса  $\tilde{r} = 2\sqrt{1 - \tau}/a$ . Рефракаустика (3) является неособой и по своему физическому смыслу представляет собой гладкую границу рефракционной тени. Из (2) и (3) находим  $\theta_0$  для лучей, проходящих через точки пересечения каустики (3) с границей  $z = 0$ :

$$\tilde{\theta}_0 = \arcsin [(2 - \tau)^{-1/2}]. \quad (4)$$

Существенно более сложными являются лучевая картина и форма каустики в свободном полупространстве  $z < 0$ . Уравнения каустики при  $z < 0$  имеют вид [4]

$$z = \cos^2 \theta_B \frac{dr_B}{d\theta_B},$$

$$r = r_B - \cos \theta_B \sin \theta_B \frac{dr_B}{d\theta_B}, \quad (5)$$

откуда для линейного закона (1) находим

$$\begin{aligned} v &= 2\tau^{-1} \cos^2 \theta_B \{ \cos(2\theta_B) + \cos \theta_B [\cos(2\theta_B) - \tau] (\cos^2 \theta_B - \tau)^{-1/2} \}, \\ w &= \tau^{-1} \sin(2\theta_B) [1 - \cos(2\theta_B)] + 2\tau^{-1} \sin \theta_B [\cos^2 \theta_B [1 + \tau - \\ &\quad - \cos(2\theta_B)] - \tau] (\cos^2 \theta_B - \tau)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом, как ясно из (5), каустика в свободном пространстве образуется только лучами с  $\tilde{\theta}_0 < \theta_0 < \pi/2$ , ибо лишь для них  $dr_B/d\theta_B < 0$ . При  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$   $dr_B/d\theta_B \rightarrow \infty$  и каустика (6) при  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$  асимптотически уходит на бесконечность. Уравнение асимпто-ты имеет вид

$$w = (2 - v) \tau^{-1/2} (1 - \tau)^{1/2}.$$

Существенно, что внешняя каустика (6) может иметь точки возврата, в которых каустика меняет свое направление на обратное, и может образовывать петлю. Для лучей, проходящих через точки возврата каустики, имеем  $dv/d\theta_B = 0$  ( $d\bar{w}/d\theta_B = 0$ ) откуда

$$\theta_{B1,2} = \arccos \left[ \frac{3 + 14\tau - 9\tau^2}{8(3 - 2\tau)} \pm \frac{3(1 - \tau)}{8(3 - 2\tau)} (1 - \tau)^{1/2} (1 - 9\tau)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Координаты  $r, z$  точек возврата определяются системой уравнений (6) и (7). Результаты расчетов, представленные на рис. 1—3, позволяют проследить эволюцию лучевой картины и каустики при изменении градиента  $a$  (рис. 2) и координаты источника  $z_0$  (рис. 3).

Как видно из рис. 1—3, меридиональное сечение каустики (6) имеет две точки возврата первого рода лишь при  $\tau < 1/9$ ; на каустике возникает петля, целиком расположенная при  $z < 0$ . Граница области тени в этом случае проходит по отдельным ветвям особой каустики, исходящим из «каустического узла». При  $\tau \rightarrow 1/9 - 0$  петли

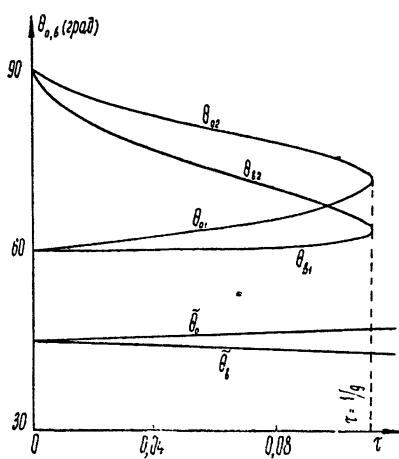


Рис. 1. Зависимость  $\tilde{\theta}_0$ , в и  $\theta_{01,2}$ ,  $\theta_{B1,2}$  для лучей, проходящих через особые точки каустики, от  $\tau$ .

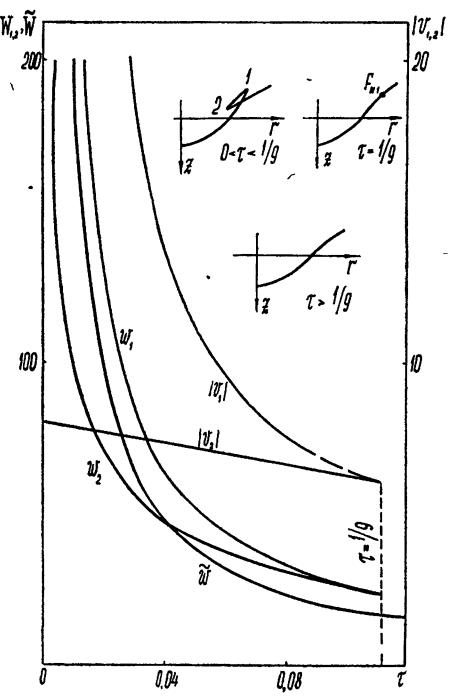


Рис. 2. Зависимость  $\tilde{w} = \tilde{r}/z_0$ , координат  $w_{1,2} = r_{1,2}/z_0$ ,  $v_{1,2} = z_{1,2}/z_0$  особых точек каустики и вида каустики от  $\tau$  (от величины  $a$  градиента  $\epsilon$  при  $z_0 = \text{const}$ ).

на меридиональном сечении каустики стягивается к «каустическому фокусу»  $F_{k1}$  (рис. 2, 4) с координатами  $\xi_{F_{k1}} \equiv ar_{F_{k1}} = 8/3$ ,  $\zeta_{F_{k1}} \equiv az_{F_{k1}} = -2/3$ , который оказывается «светлее» всех остальных точек, расположенных как на каустике, так и вне ее. При  $\tau > 1/9$  внешняя каустика, а следовательно, и совокупная каустика становятся неособыми. Напомним [1], что в случае внешнего источника «каустический фокус» возник при  $t = -\tau = 2/3$  в точке  $F_{k2}$  с координатами  $\xi_{F_{k2}} = \xi_{F_{k1}} = 8/3$ ,  $\zeta_{F_{k2}} = \zeta_{F_{k1}} = 1/9$  (рис. 4).

На рис. 4 приведены кривые  $0F_{k1}$ ,  $F_{k1}F_{k2}$ ,  $0F_{k2}$ , на которых при различных значениях параметра  $\tau \leq 0$  могут находиться точки возврата каустики. Результаты рис. 3, 4 и рис. 5 [1] показывают возможность обобщения лучевой теоремы взаимности, сформулированной В. М. Бабичем в [6], на случай особых каустик с узлами и точками возврата или с изолированными «каустическими фокусами». во взаимных точках при источнике одного и того же типа должен сохраняться характер особенности лучевого поля. Обобщенная лучевая теорема взаимности позволяет легко рассмотреть случай внутреннего источника в неоднородных средах, проанализированных в [1-4] для внешнего источника.

Резюмируя результаты данной работы и [1], отметим, что для линейного полубесконечного слоя (1) каустика сферической волны является неособой лишь при  $\tau > 1/9$  (внутренний источник) и  $\tau < -2/3$  (внешний источник); при  $-2/3 \leq \tau \leq 1/9$  образуется особая каустика.

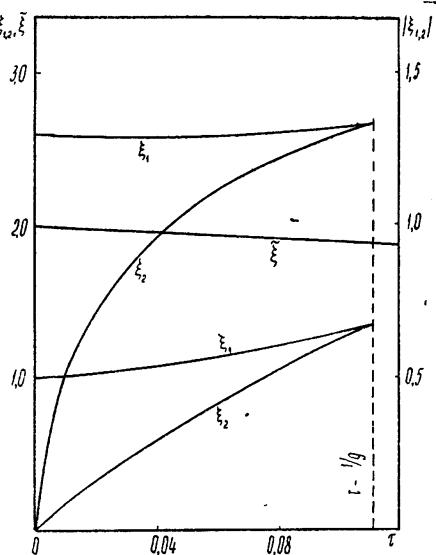


Рис. 3. Зависимость  $\tilde{\xi} = \tilde{ar}$  и координат  $\xi_{1,2} = ar_{1,2}$ ,  $\zeta_{1,2} = az_{1,2}$  особых точек каустики от  $\tau$  (от координаты  $z_0$  источника при  $a = \text{const}$ ).

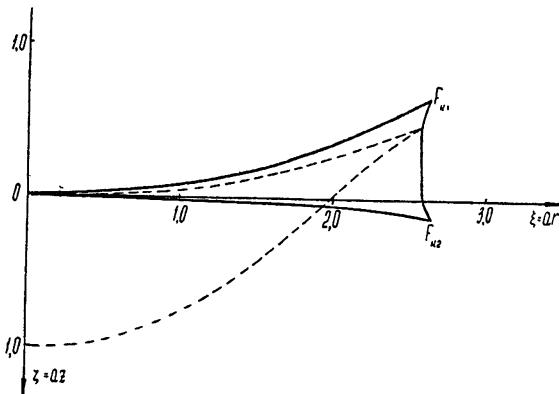


Рис. 4. Геометрическое место точек возврата каустики при изменении параметра  $\tau$  (пунктиром показана каустика при  $z_0 = 0$ ).

В заключение автор выражает признательность Г. Т. Маркову и Е. Н. Васильеву за внимание к работе и Ю. А. Кравцову за обсуждение вопросов, затронутых в статье.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 497 (1966).
2. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 657 (1966).
3. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 1036 (1966); 10, 30 (1967).

4. Ю. И. Орлов, Радиотехника и электроника, 11, 1157 (1966).
5. J. M. Kelso, Radio waves in the ionosphere, The University Press, Cambridge, 1961.
6. В. М. Бабич, сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 5, изд. ЛГУ, 1962, стр. 60.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
3 апреля 1967 г.

УДК 621.378.325

## О ПРЕДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ ИМПУЛЬСОВ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ОКГ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ С ЗАХВАТОМ МОД

*B. I. Беспалов*

1. Путем модуляции (или автомодуляции) параметров резонатора оптического квантового генератора (ОКГ) с частотой, равной (или кратной) разности частот соседних аксиальных мод, в настоящее время получены очень короткие (пикосекундные) импульсы света [1–8]. Теоретический анализ процесса получения таких импульсов [2, 9–13] основывается обычно на разложении поля в резонаторе в спектр по аксиальным модам, связанная генерация которых исследуется. Однако в случае импульсов, длительность которых значительно меньше времени их пробега через резонатор, представляется более естественным рассматривать их генерацию как процесс периодического высвечивания и последующего усиления одного импульса, бегающего по резонатору, т. е. перейти от спектрального описания к пространственно-временному. Ниже таким путем рассмотрена модель ОКГ бегущей волны с периодической модуляцией потерь, обусловленной периодическим изменением модуляя коэффициента отражения  $\rho(t)$  одного из зеркал резонатора.

2. Пренебрежем для простоты расплыванием импульса при его пробеге через резонатор и, кроме того, не будем учитывать дисперсию коэффициента усиления. Нетрудно видеть, что условием существования периодической последовательности импульсов будет равенство периода модуляции  $\tau_p$  и времени полного пробега импульса через резонатор  $\tau_u = 2L/v_{rp}(\omega)$ , где  $L$  — оптическая длина резонатора,  $v_{rp}(\omega)$  — групповая скорость импульса, средняя частота заполнения которого  $\omega$ . Отсюда следует, что с изменением  $\tau_p$  будет изменяться средняя частота заполнения импульсов, а с учетом зависимости коэффициента усиления активной среды от частоты — их интенсивность и форма. Очевидно, что с изменением функции  $\rho(t)$  или способа модуляции потеря характер генерации может существенно изменяться. Так, например, при синфазной модуляции потеря одновременно на обоих зеркалах резонатора эффект модуляции в значительной мере компенсируется, тогда как при противофазной модуляции — усиливается\*. Если функция  $\rho(t)$  в течение периода  $\tau_u$  имеет  $n$  максимумов, то за этот период возможна генерация нескольких пачек  $m < n$ . В частном случае  $\rho(t) = \rho(t + \tau_u/n)$  за время  $\tau_u$  будут генерироваться  $n$  одинаковых пачек, что соответствует одновременному нахождению в резонаторе  $n$  независимо бегающих (несфазированных) импульсов\*\*. Их фазировку можно осуществить с помощью дополнительного резонатора, связанного с основным и имеющего  $\tau_u = \tau_p$ . Качественное исследование различных возможностей, связанных с выбором  $\rho(t)$ , можно продолжить и дальше. Укажем еще лишь на возможность модуляции при  $k\tau_u = p\tau_p$ , где  $k$  и  $p$  — целые числа.

3. Количественное исследование стационарного режима при таком подходе сводится к нахождению решения системы интегро-дифференциальных уравнений для огибающей импульса и разности населеностей уровней. Соответствующие вычисления в рассматриваемом приближении довольно просты и приводят к следующим результатам.

Огибающая интенсивности импульса  $m(t)$  имеет следующую форму:  $m(t) = \rho'(t)/B_{s1}[1 - \rho(t)]$  при  $t_1 < t < t_2$ ,  $m(t) = 0$  при  $0 < t < t_1$ ,  $t_2 < t \leq \tau_u$ , где  $B_{s1}$  — коэффициент Эйнштейна,  $t_1$  и  $t_2$  определяются соотношениями

\* Интересно отметить, что при соответствующем выборе функции  $\rho(t)$  среднее от мгновенных значений коэффициентов отражения в этом случае может быть и константой.

\*\* Вопрос об устойчивости такого режима требует специального рассмотрения.

$$k_{1,0}\rho(t_1) = 1, \quad \rho'(t_2) = 0, \quad k_{1,0}\rho(t_2) = 1 + \frac{\tau_\rho}{T_1} \ln [k_{0,0}(t_2)].$$

Здесь  $T_1$  — эффективное время релаксации разности населенностей уровней,  $k_0$  — линейный коэффициент усиления активной среды при максимальной (для данного уровня возбуждения) инверсии населенностей. Величина  $k_{1,0}$  имеет смысл линейного значения коэффициента усиления перед прохождением импульса. Следовательно, условие  $k_{1,0}\rho(t_1) = 1$  выражает тот факт, что импульс начинается в момент, когда произведение коэффициента усиления на коэффициент отражения равно единице. Заканчивается импульс в момент  $t_2$ , когда функция  $\rho(t)$  имеет максимум. Таким образом, полная длительность импульса  $T_i$  равна  $t_2 - t_1$ . Интересно отметить, что в рассматриваемом приближении параметры генератора сказываются лишь на моменте начала импульса  $t_1$ , тогда как огибающая импульса целиком определяется видом функции  $\rho(t)$  на интервале  $t_1 < t < t_2$ .

Приведем некоторые численные оценки. Пусть

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{1 - \alpha \cos(2\pi t/\tau_i)}{1 + \alpha}$$

и  $L = 150 \text{ см}$  ( $\tau_i = 10^{-8} \text{ сек}$ ). Тогда для  $k_{0,0} = 1,05$  и  $T_1 = 10^{-7} \text{ сек}$  (параметры, типичные для Не-Не лазера на  $\lambda = 0,63$ ) найдем  $T_i = 2 \cdot 10^{-10} \text{ сек}$  ( $\tau_i/T_i = 50$ ) при  $\alpha = 1$  и  $T_i = 4 \cdot 10^{-10} \text{ сек}$  ( $\tau_i/T_i \approx 12$ ) при  $\alpha = 0,2$ . Для  $k_{0,0} = 3$  и  $T_1 = 10^{-3} \text{ сек}$  (параметры твердотельного лазера), найдем  $T_i = 10^{-11} \text{ сек}$  ( $\tau_i/T_i = 10^3$ ) при  $\alpha = 1$  и  $T_i = 2 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$  ( $\tau_i/T_i = 500$ ) при  $\alpha = 0,2$ . Для всех этих случаев форма импульса является треугольной с крутым передним фронтом. Средняя мощность при модуляции потеря равна мощности в непрерывном режиме (при  $\rho = f(t_2) = \rho_0$ ). Следовательно, максимальная мощность примерно в  $2\tau_i/T_i$  раз больше мощности непрерывного режима.

4. Длительность импульса в значительной мере определяется отношением  $\tau_i/T_1$ . Чем меньше указанная величина, тем короче импульс. Так как время  $T_1$  у твердотельных ОКГ примерно в  $10^4$  раз больше, чем у газовых, то при прочих равных условиях  $T_i$  твердотельного лазера в  $10^2$  раз меньше. Несмотря на это полученное при  $T_1 = 10^{-3} \text{ сек}$  значение  $T_i = 10^{-11} \text{ сек}$  еще существенно больше времени  $T_2$  (величины, обратной полосе усиления) для лазера на  $Nd$ -стекле ( $T_2 \sim 10^{-13} \text{ сек}$ ), поэтому дисперсия коэффициента усиления в этом случае практически не скажется на форме и длительности импульсов. Иначе обстоит дело с газовыми лазерами. Здесь  $T_2 \sim 10^{-9} \text{ сек} \geq T_i \sim 10^{-10} + 10^{-9} \text{ сек}$  и, следовательно, на длительности импульса и его форме зависимость коэффициента усиления от частоты будет сказываться.

В некоторых случаях существенную роль может играть фактор расплывания импульса при его распространении в диспергирующих элементах ОКГ. Соответствующие оценки этого эффекта сделаны в [13] и на них здесь останавливаться не будем.

5. В заключение подчеркнем то обстоятельство, что увеличение ширины полосы усиления и компенсация дисперсионного расплывания [13] не приводят, вообще говоря, к беспредельному сужению импульса. Для дальнейшего уменьшения  $T_i$  необходимо, кроме того, или существенное уменьшение величины  $\tau_\rho/T_1 \ln(k_{0,0})$ , или же модуляция потерь несинусоидальным сигналом, при котором время переключения потерь на зеркале порядка длительности импульса  $T_i$ . Однако уменьшение превышения над порогом (величины  $k_{0,0}$ ) приводит к падению мощности энергии в импульсе, а достаточно быстрое ( $\sim 10^{-13} \text{ сек}$ ) переключение потерь внешним сигналом трудно осуществимо. Эти ограничения отпадают при автомодуляции излучения в ОКГ с насыщающимся поглотителем. Здесь происходит автоматическое изменение потерь, скорость которого возрастает с ростом мощности в импульсе. В этом случае в стационарном режиме без учета дисперсии имеет место, как показал расчет, мгновенное переключение потерь. Импульс при этом имеет форму  $\delta$ -функции с конечной полной энергией  $W$ , определяемой соотношением

$$k_{1,0} - (k_{1,0} - 1) Y - (1 - k_{2,0}^{-1}) Y^{B_{s2}/B_{s1}} [k_{1,0} - (k_{1,0} - 1) Y]^{1-B_{s2}/B_{s1}} = k_{1,0}\rho,$$

в котором индексом «2» помечены величины, относящиеся к насыщающемуся 2-х уровневому поглотителю,  $Y = \exp\{-\rho B_{s1} W / (1 - \rho) v_{rp}\}$ .

Автор благодарен А. В. Гапонову и В. И. Таланову за обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. E. Hargrove, R. L. Fork, M. A. Pollak, Appl. Phys. Letters, 5, 4 (1964).
2. M. H. Crowell, IEEE Journal of Quantum Electronics, QE-1, 12 (1965).
3. H. W. Mocker, R. J. Collins, Appl. Phys. Letters, 7, 270 (1965).
4. E. O. Amman, B. J. Mc Murtry, M. K. Oshman, IEEE Journal of Quantum Electronics, QE-1, 263 (1965).
5. A. J. De Maria, D. A. Stetser, H. Neupau, Appl. Phys. Letters, 8, 174 (1966).
6. M. Di Domenico, J. E. Geusic, H. H. Marcos, R. G. Smith, Appl. Phys. Letters, 8, 180 (1966).
7. D. A. Stetser, A. J. De Maria, Appl. Phys. Letters, 9, 118 (1966).
8. O. L. Gaddy, E. M. Schaefer, Appl. Phys. Letters, 9, 280 (1966).
9. M. Di Domenico, J. of Appl. Phys., 35, 2870 (1964).
10. A. Yariv, J. of Appl. Phys., 36, 388 (1965).
11. S. E. Harris, O. P. Mc Duff, IEEE Journal of Quantum Electronics, QE-1, 245 (1965).
12. Л. Н. Магдич, ЖЭТФ, 51, 18 (1966).
13. В. С. Летохов, В. Н. Морозов, ЖЭТФ, 52, 1296 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 января 1967 г.

*Примечание при корректуре.* Пространственно-временной подход для описания стационарного процесса захвата мод в лазере с насыщающимся поглотителем был использован также в работе E. Garmine, A. Yariv „Laser Mode-looking with Saturable Absorbers“, IEEE J. of Quantum Electronics, QE-3, № 6, 222 (1967), опубликованной в период нахождения этого сообщения в печати.

Полученные в указанной работе на основе приближенных расчетов выводы согласуются с нашими результатами

УДК 621 378 325

## О ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ВОДЫ НА ДЛИНЕ ВОЛНЫ 1,2—1,6 м.м

B. I. Розенберг

В работе [1] приведены результаты измерений диэлектрической проницаемости  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$  воды для длины волны 1,2—1,6 м.м при температуре  $t = 16^\circ\text{C}$ . (табл. 1). При сопоставлении этих измерений с теоретическими авторы подчеркивают хорошую согласованность их со значениями, получаемыми по формулам Дебая

$$\epsilon' = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{1 + (\lambda_s/\lambda)^2}; \quad (1)$$

$$\epsilon'' = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_0) \lambda_s / \lambda}{1 + (\lambda_s/\lambda)^2}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 4,1, & \epsilon_s &= 78,5, \\ \lambda_s &= 2 \text{ см}, & t &= 16^\circ\text{C}, \end{aligned} \quad (3)$$

причем отмечается, что для параметров  $\lambda_s$  и  $\epsilon_s$  данные разных авторов практически совпадают, тогда как для  $\epsilon_0$  они различны

Таблица 1  
Диэлектрическая проницаемость воды при  $t = 16^\circ\text{C}$  по [1]

$\lambda$ (м.м.)	1,2	1,25	1,42	1,47	1,53	1,6
$\epsilon' \pm 0,5$	5,7	6,2	5,4	5,4	5,4	5,8
$\epsilon'' \pm 0,5$	5,5	6,4	6,9	6,9	7,4	7,4

Действительно, измерения статических констант  $\epsilon_s$  и  $\lambda_s$  в зависимости от температуры, проведенные с высокой точностью огромным числом исследователей (см., например, [2]), совпадают между собой.

Так, при  $t = 10^\circ\text{C}$   $\epsilon_s = 84,2$ , а при  $t = 20^\circ\text{C}$   $\epsilon_s = 80,36$ . Очевидно, что значение  $\epsilon_s$  при  $t = 16^\circ\text{C}$  должно лежать между ними, тогда как у авторов оно находится вне этого промежутка и соответствует  $t = 25^\circ\text{C}$ .

Авторами также ошибочно указано, что в работе [3] найдено значение  $\epsilon_0 = 5,86 \pm 0,74$ , а в работе [4] — значение  $\epsilon_0 = 4,16$ , что соответствует  $t = 20^\circ\text{C}$ . В работе [3] на основании обработки экспериментальных данных показано, что  $\epsilon_0 = 5,0 \pm 0,4$  и не варьируется с температурой. К той же цифре приходит Хастед [4] на основании обзора большого числа исследований по диэлектрическим свойствам воды.

Расчеты, проведенные по формулам (1) и (2) с константами (3), обнаруживают большое расхождение экспериментальных данных [1] с теоретическими. С другой стороны, в работах отечественных и зарубежных авторов экспериментально доказано, что формулы Дебая дают хорошее совпадение с результатами измерений до длины волны 1 м.м включительно. Небольшой обзор зарубежных результатов содержится в [5], там же указано на наилучшую постоянную  $\epsilon_0 = 5,5$ .

Таблица 2  
Диэлектрическая проницаемость воды при  $16^\circ\text{C}$  по Дебаю при  $\epsilon_0 = 5,5$

$\lambda$ (м.м.)	1,2	1,25	1,42	1,47	1,53	1,6
$\epsilon'$	5,77	5,80	5,88	5,91	5,94	5,98
$\epsilon''$	4,59	4,75	5,40	5,58	5,81	6,07

Обработка на ЭВМ значений  $\epsilon_s$  и  $\lambda_s$  по методу наименьших квадратов приводит к следующей аналитической зависимости от температуры.

$$\epsilon_s = 0,00081 t^2 - 0,40885 t + 88,2; \quad (4)$$

$$\lambda_s = 1,4662 \exp(-0,0634 t) + 0,000136 t^2 - 0,027296 t + 1,8735116. \quad (5)$$

Отсюда при  $t = 16^\circ\text{C}$  получаем

$$\epsilon_s = 81,87, \quad \lambda_s = 2,00 \text{ см.} \quad (6)$$

Значения  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  для  $16^\circ\text{C}$ , вычисленные при  $\epsilon_0 = 5,5$  по формулам Дебая (1), (2) для  $\epsilon_s$  и  $\lambda_s$  из (6), приведены в табл. 2. Сравнение данных табл. 1 и 2 показывает, что экспериментальные значения вещественной части диэлектрической проницаемости, полученные авторами [1] при  $t = 16^\circ\text{C}$ , хорошо согласуются с теоретическими, чего нельзя сказать о мнимой части диэлектрической проницаемости. Отметим здесь статью А. И. Хвостовой [6], в которой произведены измерения комплексной диэлектрической проницаемости воды на более коротких волнах ( $\lambda = 0,85 \text{ м.м.}$ ). Результаты [6] находятся в полном согласии со значениями, вычисленными по дебаевским формулам (1), (2) с константами из [4]. Заметим также, что трактовка и обозначение модуля диэлектрической проницаемости как коэффициента преломления не соответствуют его физическому смыслу и не являются общепринятыми.

## ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Горонина, Р. К. Белов, Э. П. Сорокина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 975 (1966).
2. С. Н. Соллие, J. B. Hasted, D. M. Ritson, Proc. Phys. Soc., 60, 71, 145 (1948).
3. Hill Norga E., Trans. Faraday Soc., 59, 344 (1963).
4. J. B. Hasted, Progress in dielectric, 3, 103 (1961).
5. J. E. Chamberlain, G. W. Chantry, H. A. Gebbie, N. W. Stone, T. B. Taylor, G. Wyllie, Nature, 210, 790 (1966).
6. А. И. Хвостова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 292 (1967).