

## СОДЕРЖАНИЕ

Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Шумы неба и чувствительность наземных радиотелескопов . . . . .	1773
Дурасова М. С., Лавринов Г. А., Чандаев А. К., Юдин О. И. Квазипериодические изменения интенсивности радиоизлучения Солнца на волне 3,3 см . . . . .	1782
Кисляков А. Г., Лебский Ю. В., Наумов А. И. Широкополосные супергетеродиные радиометры миллиметрового диапазона волн . . . . .	1791
Хрулев В. В., Хижнякова И. П. Измерение поглощения радиоволн в атмосфере на волне 31,9 см . . . . .	1798
Зайцев Ю. А., Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я. К вопросу о переходе к приближению геометрической оптики в электродинамике неоднородных анизотропных сред . . . . .	1802
Грошев В. Я., Кравцов Ю. А. О границах применимости асимптотических выражений в методе эталонных функций . . . . .	1812
Трахтенгерц В. Ю. Об индуцированном и комбинационном рассеянии радиоволн в ионосфере и магнитосфере . . . . .	1819
Чугунов Ю. В. Квазистатическая теория антенны в магнитоактивной плазме при наличии плазменного резонанса . . . . .	1829
Курятов В. Н., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г. Частотные характеристики колывевого лазера на колеблющейся подставке . . . . .	1839
Ардашев А. Ю., Кашин В. А., Скроцкий Г. В. Некоторые свойства узкого монохроматического светового пучка . . . . .	1848
Ерухимов Л. М., Урядов В. П. О частотной корреляции флуктуаций радиоволн за $n$ хаотическими экранами . . . . .	1852
Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С. Выбросы случайного скалярного поля . . . . .	1864
Малахов А. Н., Шепелевич Л. Г. Естественные флуктуации амплитуды и фазы колебания на выходе регенеративного двигателя частоты . . . . .	1871
Тамойкин В. В. Об излучении заряда в среде со случайными неоднородностями . . . . .	1879
Панченко Б. А. Дифракция электромагнитной волны при наклонном падении на перфорированный экран . . . . .	1884
Гиоргадзе Н. П., Ломинадзе Д. Г. Потери энергии заряженной частицей в слабонелинейной плазме . . . . .	1890
Мищустин Б. А. Синтез реактивного многополюсника по заданной матрице рассеяния . . . . .	1898

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Грязнов Ю. М., Лебедев О. Л. О синхронизации моноимпульсов излучения рубинового и неодимового лазеров с помощью просветляющегося жидкостного затвора . . . . .	1907
Бондаренко А. Н., Кривошеков Г. В., Смирнов В. А., Фолин К. Г. ОКГ на рубине с электрооптическим модулятором добротности и насыщающимся поглотителем в резонаторе . . . . .	1909
Литvak А. Г., Миронов В. А. О поверхностных волнах на границе раздела нелинейных сред . . . . .	1911

### Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. VIII, № 2, 3, 4, 1968 г . . . . .	1913
Содержание т. XI журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1968 г . . . . .	1918
Именной указатель т. XI журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1968 г . . . . .	1929

УДК 523.164.3

## ШУМЫ НЕБА И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ НАЗЕМНЫХ РАДИОТЕЛЕСКОПОВ

*Д. В. Корольков, Ю. Н. Парицкий*

Радиоизлучение атмосферы Земли, Галактики и Метагалактики можно характеризовать средней шумовой температурой и дисперсией, являющейся функцией пространственных координат и времени. Дисперсии пространственных и временных флуктуаций радиоизлучения атмосферы и пространственных флуктуаций излучения Метагалактики могут превышать дисперсию на выходе радиометра, обусловленную средним уровнем шума, и ограничивать чувствительность радиотелескопа. В статье приведены оценки дисперсии внешних шумов для радиотелескопов различных размеров. Показано, что при наблюдениях источником малых угловых размеров влияние флуктуаций излучения атмосферы может быть существенно уменьшено применением фильтрации пространственных частот флуктуаций с помощью антенны со сканирующей диаграммой. Пространственные флуктуации, обусловленные фоном метагалактических дискретных источников, уменьшаются при уменьшении телесного угла диаграммы антенны. Последнее может быть достигнуто и без увеличения собирающей поверхности антенны применением апертурного синтеза.

С увеличением чувствительности приемных устройств внешние шумы могут оказаться главным фактором, ограничивающим чувствительность радиотелескопа. К основным внешним источникам шумов мы относим излучение атмосферы Земли и излучение Галактики и Метагалактики. Эти источники шума можно характеризовать средней мощностью шума или средней шумовой температурой  $T_{\text{ш}}$  и дисперсией шумов  $\delta T_{\text{ш}}$ , которая в общем случае является функцией координат и времени. Внешние шумы в сумме с внутренними уордняются в полосе принимаемых частот  $\Delta f$  и интегрируются выходным фильтром низких частот с полосой  $\Delta F$  или постоянной времени  $\tau \sim 1/\Delta F$ . Таким образом, на выходе радиотелескопа имеют место флуктуации, обусловленные средней шумовой температурой радиометра  $T_{\text{ш}}$ , и их дисперсия определяет принципиальную чувствительность радиометра известной формулой

$$\Delta T = \frac{T_{\text{ш}}}{\sqrt{\Delta f \tau}}. \quad (1)$$

На практике, однако, дисперсия внешних шумов  $\delta T_{\text{ш}}$  может быть много больше, чем  $\Delta T$  из (1).

Рассмотрим с этой точки зрения основные внешние источники шумов.

### 1. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

В случае безоблачной атмосферы из-за наличия в ней локальных турбулентных неоднородностей коэффициент поглощения и температура вдоль луча зрения оказываются непостоянными. Наличие турбулентности приводит к пространственным и временным флуктуациям наблюданной яркостной температуры неба. В сантиметровом диапазоне волн вариации яркостной температуры равны [1, 2]

$$\delta T_{\text{атм}} \simeq (0,2 \div 1,0) \cdot 10^{-2} T_{\text{атм}} \sqrt{\cos z}, \quad (2)$$

где  $z$  — зенитный угол. Таким образом, флуктуации имеют порядок  $10^{-2}$ °К, что превышает чувствительность перспективных радиометров.

Некоторое уменьшение этих флуктуаций происходит при наблюдениях на радиотелескопах с достаточно большим раскрытием благодаря усреднению излучения неоднородностей на апертуре. Это усреднение можно рассматривать как подавление высокочастотных компонент пространственных флуктуаций радиоизлучения атмосферы антенной как пространственным фильтром нижних частот. Низкочастотные компоненты флуктуаций могут быть ослаблены при обработке записи прохождения источника через диаграмму антенны путем использования корреляции флуктуационного фона в интервале времени, равном длительности сигнала  $t_i$ . При этом подавляются частоты флуктуаций ниже частоты  $1/t_i$ , оценки эффективности такого подавления сделаны в [3].

Более существенное снижение влияния атмосферных флуктуаций может быть достигнуто применением разностного приема из двух смежных направлений, например, путем быстрого сканирования диаграммы антенны (модуляция качанием луча) или с помощью любой другой аналогичной операции, при которой антенну можно рассматривать как фильтр верхних пространственных частот (см. рис. 1). В случае антенны с большим линейным раскрытием всю атмосферу можно считать находящейся в зоне геометрической оптики, соответственно диаграммой антенны для атмосферных неоднородностей является распределение мощности на раскрытии.

Отнесем наблюдаемое с Земли распределение радиояркости атмосферы к картинной плоскости, находящейся на половине расстояния до «границы» атмосферы ( $L/2$ ). Угол качания луча диаграммы примем равным  $\delta\theta = n\theta_0$  при  $n > 1$ , чтобы глубина модуляции излучения полезного источника не падала много ниже 100% ( $\theta_0$  — ширина диаграммы антенны по половине мощности). При смещении диаграммы антенны на угол  $\delta\theta$  распределение поля ближней зоны в картинной плоскости смещается на величину  $D$  (рис. 1).

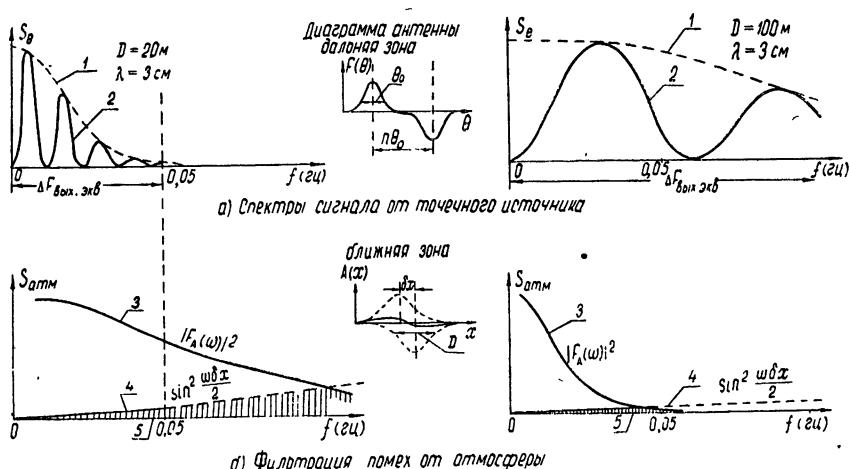


Рис. 1. Приведенные к временным частотам пространственные и частотные характеристики антенн для дальней и ближней зоны:

1)—спектр сигнала на выходе радиотелескопа при прохождении точечного источника через диаграмму антенны; 2)—то же при применении сканирования диаграммы; 3)—фильтрация нижних частот в спектре излучения атмосферы (сглаживание на раскрытии); 4)—фильтрация верхних частот (сканирование); 5)—оставшиеся в результате фильтрации флуктуации (интеграл для

$$\delta T_{\text{сгл}}^2 \text{ формула (3).}$$

$$\delta x = \frac{L}{2} \delta \theta = \frac{L}{2} n \theta_0 \simeq \frac{Ln\lambda}{2D},$$

где  $D$  — размер антенны. Считаем, что частота модуляции (качание луча) столь велика, что за период модуляции распределение яркости  $T(x)$  в картииной плоскости не меняется и не успевает сместиться относительно антенны за счет сноса ветром.

Интенсивность слаженных антенной флюктуаций выразим через энергетический спектр пространственных флюктуаций излучения атмосферы  $S_{\text{атм}}(\omega)$  и квадрат модуля коэффициента передачи антенны, как для фильтра пространственных частот:

$$\overline{T_{\text{срл}}^2} = \int_0^\infty S_{\text{атм}}(\omega) |F_{A-A}(i\omega)|^2 d\omega. \quad (3)$$

Если распределение мощности по раскрыву антенны  $A(x) = e^{-4x^2/D^2}$ , то пространственная частотная характеристика антенны для ближней зоны представляет собой фурье-преобразование от распределения поля в раскрыве и квадрат модуля ее равен

$$|F_A(i\omega)|^2 = e^{\frac{-\omega^2 D^2}{4}},$$

а в случае применения сканирования (рис. 1)

$$|F_{A-A}(i\omega)|^2 = e^{\frac{-\omega^2 D^2}{4}} 2 \sin^2 \frac{\omega \delta x}{2}. \quad (4)$$

Выигрыш, который дает фильтрация путем сканирования,

$$\frac{\overline{T_{\text{срл}}^2}}{\overline{T_{\text{атм}}^2}} = \frac{\int_0^\infty S_{\text{атм}}(\omega) |F_{A-A}(i\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty S_{\text{атм}}(\omega) |F_A(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (5)$$

Фактически из-за ограниченности времени наблюдений интегрирование следует вести от некоторой частоты  $\omega_1$  (соответствующей пространственным периодам порядка  $10^3 - 10^6$  м или временными порядка минут — часов) до граничной частоты  $\omega_{\text{гр}}$ , которая определяется частотной характеристикой антенны для ближней зоны и спектром  $S_{\text{атм}}(\omega)$ .

Заменив пределы интегрирования в (5) и применив обобщенную теорему о среднем, получим

$$\frac{\overline{T_{\text{срл}}^2}}{\overline{T_{\text{атм}}^2}} = 2 \sin^2 \frac{\omega_x \delta x}{2} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_{\text{гр}}} S_{\text{атм}} e^{\frac{-\omega^2 D^2}{4}} d\omega}{\int_{\omega_1}^{\infty} S_{\text{атм}} e^{\frac{-\omega^2 D^2}{4}} d\omega} + \frac{\int_{\omega_{\text{гр}}}^{\infty} S_{\text{атм}} e^{\frac{-\omega^2 D^2}{4}} 2 \sin^2 \frac{\omega \delta x}{2} d\omega}{\int_{\omega_1}^{\infty} S_{\text{атм}} e^{\frac{-\omega^2 D^2}{4}} d\omega} \leqslant 2 \sin^2 \frac{\omega_x \delta x}{2} + A, \quad (6)$$

где  $\omega_1 < \omega_x < \omega_{\text{гр}}$ ,  $\omega_{\text{гр}} \delta x \ll 1$ . Если пространственный спектр неоднородностей атмосферы в соответствии с современными представлениями [4, 5] считать пропорциональным  $\omega^{-\alpha}$ , где  $\alpha \simeq 2,7$  в диапазоне частот

от  $10^{-5}$  до  $10 \text{ гц}$  (пространственные периоды — от  $10^6$  до  $10^{-1}$  метра), а  $\omega_{\text{р}} \approx 2/D$ , то слагаемым  $A$  в (6) можно пренебречь. Выбрав для  $\omega_x$  максимальное значение на интервале  $\omega_1 - \omega_{\text{р}}$ , можем записать

$$\frac{\bar{T}_{\text{сгл}}^2}{T_{\text{атм}}^2} \leq 2 \sin^2 \frac{\omega_{\text{р}} \delta x}{2} \approx 2 \frac{\delta x^2}{D^2}. \quad (7)$$

Введем стандартные вариации температур  $\delta T_{\text{сгл}} = (\bar{T}_{\text{сгл}}^2)^{1/2}$ ,  $\delta T_{\text{атм}} = (T_{\text{атм}}^2)^{1/2}$  и запишем выигрыш, который дает фильтрация путем сканирования:

$$\frac{\delta T_{\text{сгл}}}{\delta T_{\text{атм}}} \leq \sqrt{2} \frac{\delta x}{D} = \frac{E n \lambda}{\sqrt{2} D^2} \quad (n > 1). \quad (8)$$

Можно показать, что с учетом временной фильтрации на выходе радиометра

$$\frac{\delta T_{\text{сгл}}}{\delta T_{\text{атм}}} \approx \sqrt{2} \left| \frac{\delta x}{\left( D^2 + \frac{\theta_0^2 v^2}{4 u^2} \right)^{1/2}} \right|.$$

Здесь  $v = 1 \div 5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$  — скорость сноса ветром турбулентных неоднородностей,  $u = 0,72 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$  — скорость прохождения источника через диапазону антены за счет вращения Земли. Однако для больших антенн с  $D > 20 \div 100 \text{ м}$   $D^2 \gg \theta_0^2 v^2 / 4 u^2$ , поэтому для оценок можно использовать (8).

Рис. 1 поясняет процесс фильтрации. Период функции  $\sin^2(\omega x/2)$  (и соответственно подавление нижних частот) зависит от амплитуды сканирования ближней зоны диаграммы  $\delta x$  относительно неоднородностей, причем, как уже указывалось, не рассматриваются величины  $\delta x$ , меньшие некоторого значения, определяемого из условия, что угол качения больше ширины диаграммы  $\delta\theta > \theta_0$ . Напомним, что снос ветром не учитывается, так как при достаточно высокой частоте модуляции смещением неоднородностей за период модуляции  $t_{\text{мод}}$  можно пренебречь ( $\delta x \gg vt_{\text{мод}}$ ).

Абсолютное значение сглаженных флуктуаций может быть определено подстановкой  $\delta T_{\text{атм}}$  из (2) в (8). На рис. 2 приведено отношение  $\delta T_{\text{сгл}}/\Delta T$  ( $\Delta T$  — чувствительность радиометра) в зависимости от  $\lambda$  и  $D$  при разных значениях шумовой температуры радиотелескопа; выше кривых при соответствующих значениях  $\lambda$  и  $D$  чувствительность определяется в основном атмосферными флуктуациями, ниже — шумами приемника.

В заключение приведем оценки для облачной атмосферы, считая, что при сплошной облачности можно воспользоваться формулой (8). В таблице 1 даны значения вариаций излучения облачной атмосферы для зенита  $\delta T_{\text{обл}}$  по оценкам [2], которые подтверждаются наблюдениями [2, 6], а также значения выигрыша  $\delta T_{\text{обл сгл}}/\delta T_{\text{обл}}$  и сглаженные значения флуктуаций  $\delta T_{\text{обл сгл}}$  при  $D = 300 \text{ м}$ .

Таблица 1

$\lambda \text{ (см)}$	0,4	0,8	3	10
$T_{\text{обл}} (\text{°К})$	150	60	4	0,4
$\delta T_{\text{обл}} (\text{°К})$	$12 - 17$	$5 - 7$	$0,3 - 0,5$	$0,03 - 0,05$
$\delta T_{\text{обл сгл}}/\delta T_{\text{обл}}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$\delta T_{\text{обл сгл}} (\text{°К})$	$(2,4 - 3,4) \cdot 10^{-3}$	$(2 - 2,8) \cdot 10^{-3}$	$(0,4 - 0,7) \cdot 10^{-3}$	$(0,15 - 0,25) \cdot 10^{-3}$

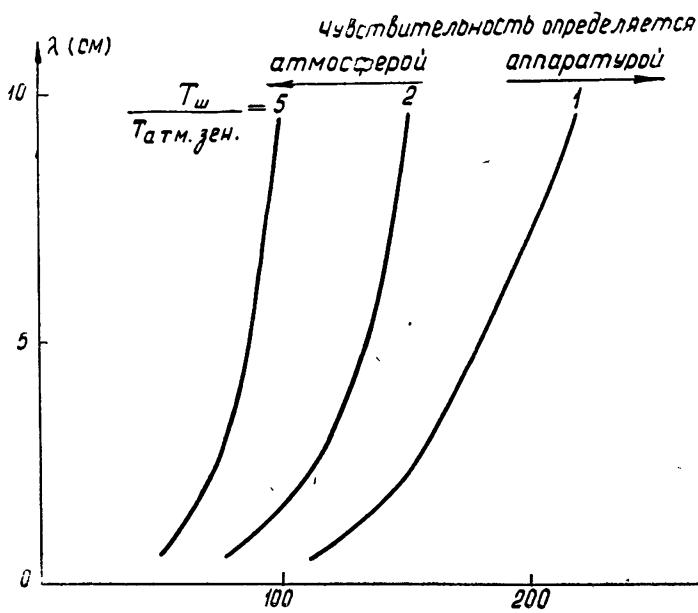


Рис. 2.

Произведенные оценки подтверждаются экспериментом. На рис. 3 приведены результаты одного из наблюдений на Большом пулковском

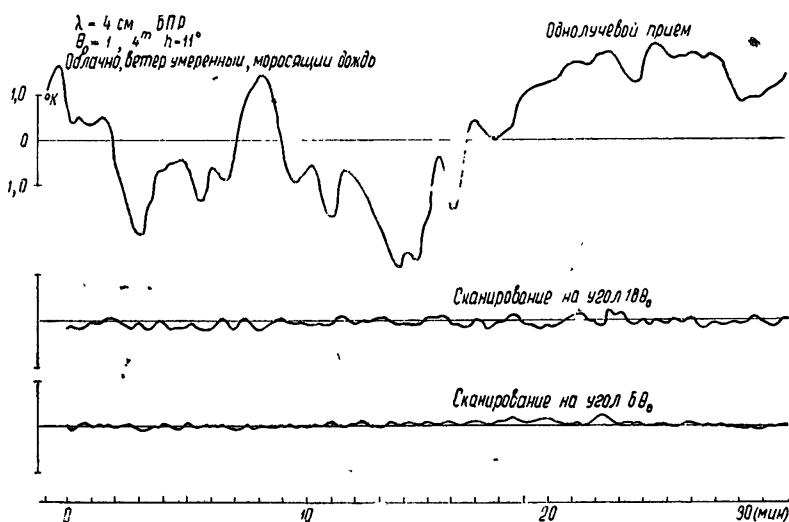


Рис. 3. Наблюдаемые флюктуации излучения облачной атмосферы на Большом пулковском радиотелескопе на волне 4 см.

радиотелескопе (БПР) на волне 4 см. В этом случае при угле сканирования  $\delta\theta = 6\theta_0$ , чувствительность практически полностью определяется приемником, флюктуации излучения облаков и дождя подавлены более чем в 30 раз.

## 2. ВЛИЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТАГАЛАКТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

Пространственные флюктуации излучения Метагалактики определяются случайным распределением большого числа слабых радиоисточников, имеющих столь малые угловые размеры, что можно считать их точечными для любого мыслимого радиотелескопа\*. Эти флюктуации не зависят от времени, но меняются случайным образом от точки к точке, поскольку при перемещении диаграммы направленности по небу меняется число источников, попадающих в телесный угол диаграммы. Ясно, что дисперсия этих шумов зависит как от статистических свойств слабых радиоисточников, так и от телесного угла диаграммы направленности радиотелескопа.

Необходимо заметить, что на выходе радиотелескопа эти флюктуации не могут быть отфильтрованы или ослаблены, так как выходные спектры как флюктуаций, так и сигнала одинаковы и определяются формой диаграммы направленности антенны. Невозможно также получить выигрыш проведением повторных записей прохождения источника через диаграмму, так как каждый раз будет повторяться одна и та же реализация пространственных флюктуаций.

Упрощенный расчет интенсивности флюктуаций шумов Метагалактики приведен в [7]. В [8] дан более строгий метод оценки этих шумов—дисперсии флюктуаций радиоизлучения Метагалактики (шумов «насыщения») для одной из возможных зависимостей числа радиоисточников  $L$  от плотности потока радиоизлучения  $P$ . Здесь мы приведем результаты оценки шумов «насыщения» для параболических зеркал различного размера в широком диапазоне волн для трех моделей мира (определяющих зависимости  $N—P$ ), выполненные аналогично [8].

Пусть дана зависимость  $N—P$ , т. е. кривая, определяющая число радиоисточников  $N$  в телесном угле диаграммы направленности радиотелескопа с плотностью потока больше некоторого значения  $P$ . Тогда дисперсия шумов

$$\delta p_{\text{мет}} = \left( \int P^2 dN \right)^{1/2}.$$

Были рассмотрены три модели мира с «параметром замедления»  $q = +1$ :

1) модель без учета эволюционных эффектов, с постоянным отношением числа радиогалактик к общему числу галактик в единице объема;

2) модель, учитывающая увеличение относительного числа радиогалактик (в 700 раз больше в момент  $0,1 T$ , где  $T$ —возраст Вселенной);

3) промежуточная модель, с меньшими эволюционными эффектами. Подробное описание трех моделей дано Оортом в [9].

На рис. 4 приведены результаты вычислений предельно слабых потоков  $p_{\min}$ , которые можно зарегистрировать с разрешающей способностью, соответствующей телесному углу диаграммы направленности параболического радиотелескопа  $\theta_0 \simeq \lambda^2/S$  ( $S \simeq D^2$ —собирающая поверхность радиотелескопа). Под минимально обнаружимым потоком мы понимаем здесь поток, в 5 раз превышающий пространственные флюктуации  $\delta p_{\text{мет}} = 5\delta p_{\text{мет}}$  (точность измерения 20%).

На основании рис. 4 на плоскости  $\lambda, S$  можно определить область, где пространственные флюктуации Метагалактики превосходят нормальную дисперсию шумов на выходе радиометра параболического радиотелескопа (рис. 5). Мы видим, что флюктуации фона слабых радиоисточников определяют чувствительность параболического радиотеле-

\* Сложные интерферометры с очень большими базами здесь не рассматриваются.

скопа вплоть до волны 3 см при площади  $S = 1000 \text{ м}^2$ . С увеличением площади влияние флюктуаций яркости Метагалактики падает. При

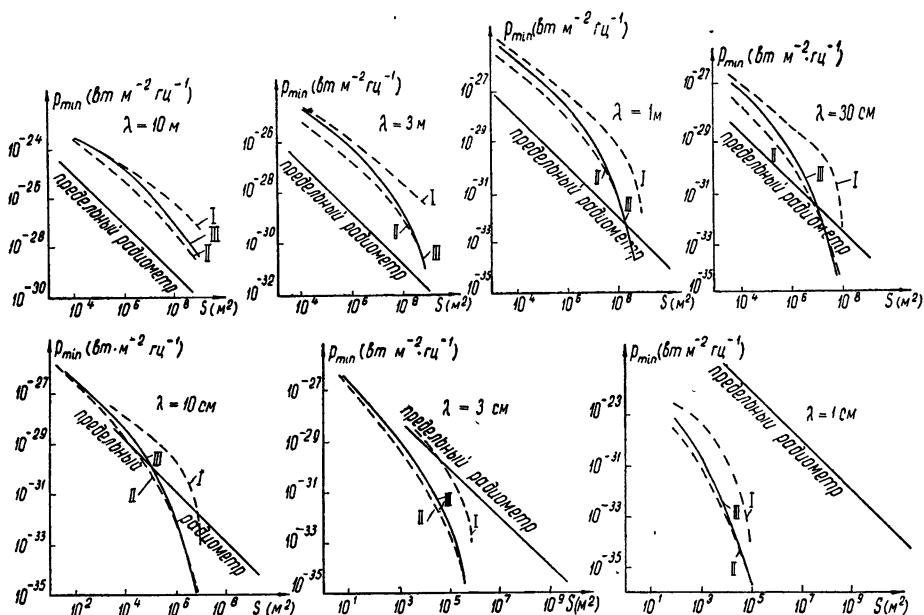


Рис. 4. Минимальный обнаружимый на фоне пространственных флюктуаций радиоизлучения Метагалактики поток от источника в зависимости от размеров антенны (для параболоида вращения, для трех моделей Вселенной).

$S = 10^{10} \text{ м}^2$  этими флюктуациями можно пренебречь вплоть до волны  $\lambda = 10 \text{ м}$ .

Уменьшение влияния пространственных флюктуаций можно получить путем введения «избыточного разрешения» [8], которое мы определим отношением

$$\eta = \frac{\lambda^2}{S} \frac{1}{\theta_0^2}.$$

Для параболоида  $\eta = 1$ , антены апертурного синтеза могут обеспечить  $\eta \gg 1$ . При достаточно большом  $\eta$  (т. е. при достаточно малом  $\theta_0^2$  при

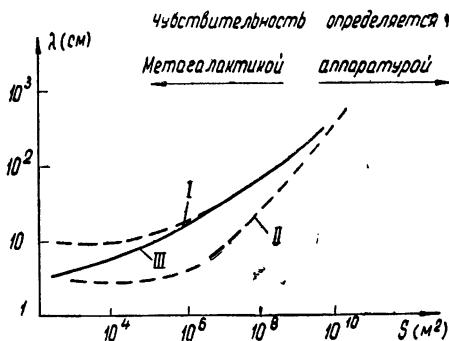


Рис. 5.

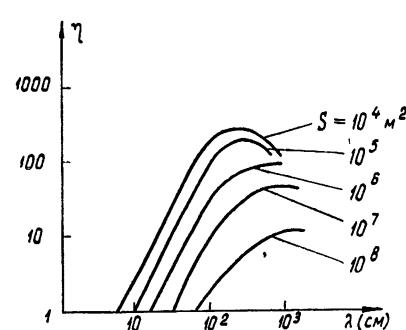


Рис. 6. Значения избыточного разрешения  $\eta$ , при которых устраняется влияние пространственных флюктуаций излучения Метагалактики.

фиксированной  $S$ ) число слабых источников, попадающих в синтезированную диаграмму, уменьшается пропорционально  $\theta_0$ . Необходимые значения  $\eta$  для различных площадей  $S$  приведены на рис. 6.

Флуктуации радиоизлучения атмосферы резко ухудшают чувствительность радиотелескопа на коротких волнах. Для их уменьшения при наблюдениях радиоисточников малых угловых размеров достаточно увеличить размер радиотелескопа хотя бы в одном направлении и применить сканирование диаграммы. Применение пространственной фильтрации сканированием позволяет эффективно использовать большие радиотелескопы даже в условиях сплошной облачности.

Флуктуации, обусловленные атмосферой, носят случайный характер во времени и могут уменьшаться также усреднением большого числа наблюдений. Флуктуации яркости Метагалактики преобладают на волнах по крайней мере длиннее 3—5 см. Единственный способ их подавления при умеренных размерах антенн — увеличение избыточного разрешения, т. е. применение систем апертурного синтеза. При использовании сверхбольших антенн влияние флуктуаций яркости атмосферы и Метагалактики резко уменьшается. На рис. 7 показана в зависимости

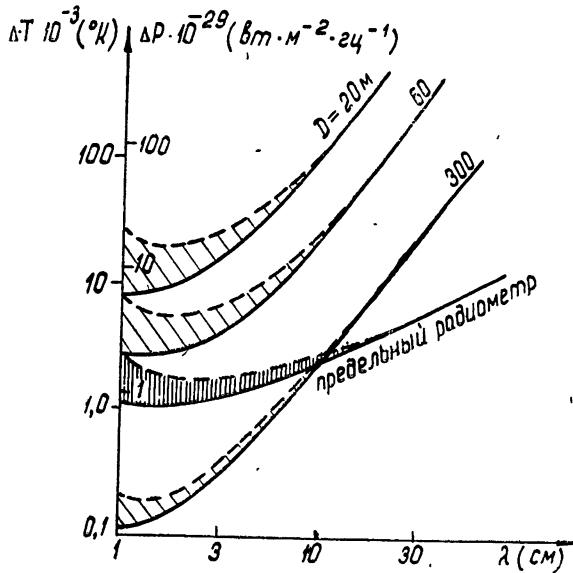


Рис. 7. Сравнение флуктуаций на выходе радиотелескопа, обусловленных излучением атмосферы (с учетом сканирования; пунктир — высокая влажность) и Метагалактики, с чувствительностью предельного радиометра.

от длины волны чувствительность радиотелескопов разных размеров при учете дисперсии шумов Метагалактики и атмосферы (с использованием сканирования диаграммы).

Существенно, что флуктуации яркости неба практически не ограничивают чувствительность наземных радиотелескопов при достаточно большом их размере (рис. 5), в то время как чувствительность оптических наземных\* телескопов уже сейчас близка к предельной, определяе-

\* Как указывается в [12], внеатмосферные телескопы будут иметь близкий к наземным предел по чувствительности из-за ошибок «гидрирования» (стандартное разрешение эквивалентно звезде  $\sim 24$  величины при телесном угле диаграммы порядка одной квадратной секунды).

мой дискретностью метагалактического фона, вследствие конечности разрешения. Ограничение наступает раньше в оптическом, а не в радиодиапазоне, из-за того, что яркость неба определяется более близкими объектами, для которых влияние кривизны пространства (приводящее к завалу кривой  $N-P$ ) меньше, чем для радиогалактик и квазаров.

С флуктуациями радиоизлучения Метагалактики столкнулись уже на целом ряде радиотелескопов вплоть до волны 21 см, например, на телескопе Крауса в Огайо (США) при  $\lambda = 21 \text{ см}$  и  $p_{\min} \approx 0.2 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$  [11].

Уменьшение влияния флуктуаций теплового излучения атмосферы на чувствительность радиотелескопов за счет сканирования недавно продемонстрировано в США при эксплуатации нового 42-метрового радиотелескопа на волне 2 см [10]. Мы вынуждены были применить сканирование при наблюдениях на Большом пулковском радиотелескопе, чтобы реализовать чувствительность радиометров на волнах 0,8; 2,0 и 4,0 см (рис. 3). Все это говорит о том, что в настоящее время проектирование радиотелескопов без учета флуктуаций шумов неба может привести к резкому снижению эффективности радиотелескопов.

В заключение авторы благодарят Н. Л. Кайдановского и А. А. Стоцкого за полезную дискуссию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 5, 765, № 6, 969 (1960).
2. Н. И. Ананов, А. Е. Башаринов, К. П. Кирдяшев, Б. Г. Кутузов, Радиотехника и электроника, 10, № 11, 1941 (1965).
3. К. П. Кирдяшев, Радиотехника и электроника, 12, № 8, 1487 (1967).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. J. H. W. Unger, Bell Syst. T. J., 45, № 9, 439 (!966).
6. T. Orlang, Publ. NRAO, № 14, 3 (1962).
7. S. von Hoegner, Publ. NRAO, № 2, 19 (1961).
8. С. Э. Хайкин, Ю. Н. Парицкий, Изв. ГАО АН СССР, 23, № 172, 87 (1964).
9. Ю. П. Псковский, Г. Б. Шоломицкий, сб. Наблюдательные основы космологии, изд. Мир, М., 1965.
10. J. W. M. Baars, Nature, 212, № 5061, 494 (1966).
11. J. D. Kraus, Radioastronomy, N. Y., McGraw-Hill, 1966.
12. R. N. Miller, Astrophys. J., 137, № 4, 1049 (1963).

Главная астрономическая обсерватория  
АН СССР

Поступила в редакцию  
30 июня 1967 г.

#### SKY NOISES AND SENSITIVITY OF GROUND RADIO TELESCOPES

D. V. Korol'kov, Yu. N. Pariyskii

The radio emission from the Earth atmosphere, the Galaxy and the Metagalaxy may be characterized by the average noise temperature and dispersion which is the function of space coordinates and time. The dispersion of spatial and time fluctuations of radio emission from the atmosphere and that of spatial fluctuations from the Metagalaxy may exceed the dispersion of the radiometer output caused by the mean noise level and restrict the sensitivity of the radio telescope. Estimations of the external noise dispersion for radio telescopes of different sizes are given. It is shown that when the sources of small angular dimensions are observed, the effect of radiation fluctuations from the atmosphere may be considerably reduced using filtration of spatial frequencies of fluctuations by means of antenna with scanning pattern. The spatial fluctuations caused by background of metagalactic discrete sources are decreased with narrowing the solid angle of radiation pattern. The latter may be reached without increasing the antenna collective area using the aperture synthesis.

УДК 523.164.32

## КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА НА ВОЛНЕ 3,3 см

*М. С. Дурасова, Г. А. Лавринов, А. К. Чандаев, О. И. Юдин*

Приводятся результаты экспериментального изучения флуктуаций потока радиоизлучения Солнца. Исследовались функции корреляции и спектры записей, относящихся к «спокойному» и «активному» Солнцу. Обнаружены квазипериодические изменения потока с периодами  $\sim 250$  и  $\sim 700$  сек. Изменения интенсивности в максимуме спектра коррелируют с изменениями солнечной активности. Обсуждается возможная связь наблюдавшихся явлений с другими проявлениями периодичности в движениях в атмосфере Солнца

Исследования различных динамических процессов в солнечной атмосфере и обусловленных ими явлений (хромосферные вспышки, всплески радиоизлучения и т. п.) представляют большой астрофизический и геофизический интерес [1, 2]. Одним из источников информации о солнечной хромосфере служит микроволновое радиоизлучение. В последние годы, наряду с изучением наиболее интенсивных и крупномасштабных процессов, большое внимание уделяется исследованию слабых возмущений [3–5].

На радиоастрономической станции НИРФИ в Зименках с 1963 г. проводилась работа, целью которой было изучение возможности применения методов статистической радиофизики к анализу временных изменений потока радиоизлучения Солнца. Наблюдения велись на волне 3,3 см. Основное внимание было обращено на отработку методики обнаружения и анализа слабых флуктуаций потока [6–8]. Была предпринята попытка обнаружения различий в автокорреляционных функциях и спектрах флуктуаций потока от «активного» и «спокойного» Солнца [9]. Основная трудность в этой работе была связана с малой интенсивностью исследуемых явлений. Это препятствовало уверенному выделению их на фоне изменений уровня сигнала, обусловленных такими причинами, как нестабильность аппаратуры, влияние условий распространения [10–14] и т. д.

Не менее сложную задачу представляет собой анализ полученных записей изменений потока радиоизлучения Солнца. Естественно было рассматривать эти записи как реализации случайного процесса и применять для их анализа спектрально-корреляционные методы. Принципиальная трудность при использовании этих методов связана с нестационарностью процессов на Солнце.

### 1. МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЙ И ОБРАБОТКА

Запись радиоизлучения производилась в режиме непрерывного слежения за Солнцем одновременно на двух радиотелескопах, расположенных на расстоянии 500 м друг от друга [6–8]. Усиление на обоих радиометрах устанавливалось таким, чтобы амплитуда флуктуаций была

достаточной для отсчета значений с ленты самописца со средней точностью не менее 10% и изменения показания самописцев на обоих радиотелескопах при одинаковых изменениях температуры на входе антены были одинаковы. Последующий анализ реализаций проводился на вычислительной машине БЭСМ-2.

В результате влияния различных факторов — систематической ошибки системы сопровождения, изменения усиления радиометра, нестабильности параметров, определяющих условия распространения радиоволн в атмосфере, и нестационарности самих процессов на Солнце — записи, как правило, также оказывались нестационарными.

Поэтому программа включала в себя обработку кривых методом скользящего усреднения [15] и нахождение отклонения первичной кривой в каждой измеренной точке от усредненной. В результате получалась новая реализация

$$y(t) = x(t) - \overline{x_{\Delta t}(t)},$$

где  $x(t)$  — первичная запись,  $\overline{x_{\Delta t}(t)}$  — кривая, полученная скользящим усреднением по интервалу  $\Delta t$ . Затем вычислялись автокорреляционные и взаимно корреляционные функции для одновременных записей с двух радиотелескопов, т. е.

$$B_{yy}(T, \tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} y(t) y(t+\tau) dt,$$

$$B_{yy'}(T, \tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} y(t) y'(t+\tau) dt,$$

где  $T$  — длина реализации,  $y(t)$  и  $y'(t)$  — реализация с разных телескопов,  $\tau < T$ . По вычисленным автокорреляционным и взаимно корреляционным функциям находился мгновенный энергетический спектр [16]

$$f_y(\omega) = \int_0^{\tau_1} B_{yy}(T, \tau) \left( 1 + \cos \frac{\pi \tau}{\tau_1} \right) \cos(\omega \tau) d\tau.$$

Полученные таким способом функции корреляции и спектры относятся к преобразованному процессу  $y(t)$ .

Рассмотрим, как эти функции корреляции и спектр связаны с функцией корреляции и спектром процесса на входе радиометра. Для простоты будем считать, что  $x(t)$  — стационарный процесс и  $\overline{x(t)} = 0$ . Обозначим автокорреляционную функцию и спектр этого процесса соответственно  $B_x(\tau)$  и  $f_x(\omega)$ . На выходе радиометра, считая, что спектр процесса до  $RC$ -фильтра остается равномерным (что оправдливо при  $\Delta\Omega_1 \gg \Delta\Omega$  [17]), будем иметь процесс  $x_1(t)$ . Соответствующие этому процессу функцию корреляции и спектр запишем в виде  $B_{x_1}(\tau)$  и  $f_{x_1}(\omega) = f_x(\omega) g(\omega)$ , где  $g(\omega)$  — спектральная характеристика интегрирующей  $RC$ -ячейки. Спектр усредненного процесса можно записать как

$$\overline{f_{x_1}}(\omega) = f_{x_1}(\omega) \Phi(\omega),$$

где  $\Phi(\omega) = \left( \sin \frac{k\omega\Delta t}{2} / \frac{k\omega\Delta t}{2} \right)^2$  — спектральная характеристика фильтра,

эквивалентного процессу скользящего усреднения [16].

Тогда автокорреляционную функцию и спектр процесса  $y(t) = x_1(t) - \overline{x_{\Delta t}(t)}$  можно записать в виде

$$B_y(t) = B_{x_1}(t) + B_{\overline{x}_{1\Delta t}}(t) - 2B_{\overline{x}_1 \overline{x}_{1\Delta t}} \simeq B_{x_1}(t) - B_{\overline{x}_{1\Delta t}}(t) \quad (1)$$

и

$$f_y(\omega) = f_{x_1}(\omega) - f_{\overline{x}_{1\Delta t}}(\omega) = f_x(\omega)g(\omega) - f_x(\omega)g(\omega)\Phi(\omega).$$

Отсюда интересующий нас спектр флюктуаций потока радиоизлучения на входе радиометра получается из соотношения (1)

$$f_x(\omega) = \frac{f_y(\omega)}{g(\omega)[1-\Phi(\omega)]}, \quad (2)$$

где функция

$$\alpha(\omega) = g(\omega)[1-\Phi(\omega)] = \frac{1}{1+(RC\omega)^2} \left[ 1 - \left( \frac{\sin \frac{k\omega\Delta t}{2}}{\frac{k\omega\Delta t}{2}} \right)^2 \right].$$

Эта функция может быть определена и экспериментально из измерения спектральной плотности флюктуаций мощности генератора шума на выходе радиометра.

Для определения точности оценки спектральной плотности находился 80-процентный доверительный интервал методом, использованным в [18].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ

Предварительные результаты наблюдений приведены в [9]. Наши наблюдения, проводившиеся при высотах Солнца над горизонтом  $15^\circ$ , показали, что по крайней мере часть наблюдавшихся изменений сигнала имеет солнечное происхождение. Полученные записи приводились к стационарному виду способом, указанным выше, после чего вычислялись оценки автокорреляционных и взаимокорреляционных функций и энергетических спектров для каждой пары реализаций, полученных на двух разнесенных радиотелескопах. На рис. 1 приведены автокорреляционные функции реализаций, полученных при записях флюктуаций генератора шума, «спокойного» и «активного» Солнца. Из рисунка видно, что автокорреляционные функции для «шумов» Солнца существенно отличаются по интенсивности от функции корреляции флюктуаций излучения генератора шума и, главное, в сигнале Солнца достоверно обнаружена периодическая компонента.

Для проверки коррелированности записи сигналов, полученных на разнесенных радиотелескопах, вычислялись взаимокорреляционные функции (рис. 2). В этих функциях, так же как и в автокорреляционных, обнаружаются квазипериодические составляющие с теми же периодами. Последнее свидетельствует о том, что эти составляющие связаны своим происхождением изменениям потока радиоизлучения.

Для определения частот квазипериодических компонент проводился спектральный анализ. Максимумы в спектрах флюктуаций, свидетельствующие о квазипериодических изменениях сигнала, присутствуют только в спектре флюктуаций радиоизлучения Солнца (рис. 3). Число максимумов в спектре меняется от одного до трех для различных реализаций. Наиболее часто наблюдается два максимума. Всего было обработано 45 реализаций. Средние значения периодов колебаний определялись по гистограмме распределения периодов осцилляций (рис. 4). По уточненным данным средние значения соответствующих периодов составляют  $\sim 250$  и  $\sim 700$  сек.

На разнесенных радиотелескопах наблюдения проводились с марта по май 1967 г. В этот период повышенная активность Солнца отме-

чалась с 22 февраля по 10 марта (группа № 65, 85) и с 20 марта по 1 апреля (группа № 101) [19]. В записях, относящихся к интервалам времени, соответствующим периодам активности, коррелированные низкочастотные флуктуации обнаруживались визуально. Анализ результатов наблюдений показал, что существует статистическая связь между появлением в одновременных парах записей коррелированных флуктуаций и прохождением через диск Солнца активных областей. О наличии

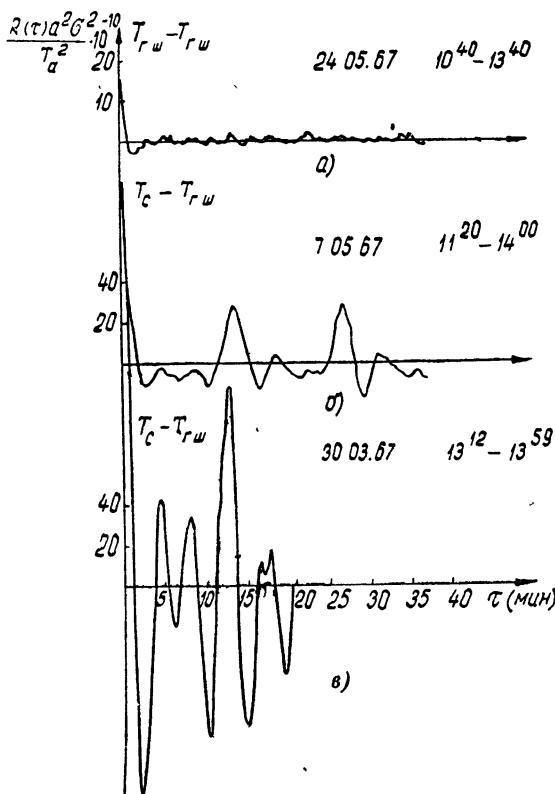


Рис. 1. Оценки автокорреляционных функций флуктуаций потока:

- а) излучения генератора шума,
- б) „спокойного“ Солнца,
- в) „активного“ Солнца.

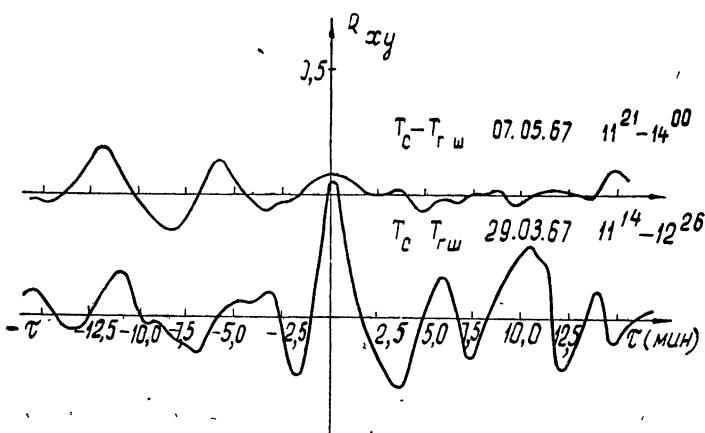


Рис. 2. Оценки взаимно-корреляционных функций.

такой связи свидетельствует увеличение средней дисперсии флюктуаций уровня сигнала от значения  $\bar{\sigma}_c \approx 3^{\circ}\text{K}$  при «спокойном» Солнце до  $\sigma_a \approx 4 \div 6^{\circ}$  при «активном». Величина среднего значения коэффициента взаимной корреляции записей с двух антенн также соответственно возрастает от  $R_c(0) \approx 0,1$  до  $R_a(0) \approx 0,5$  (рис. 5).

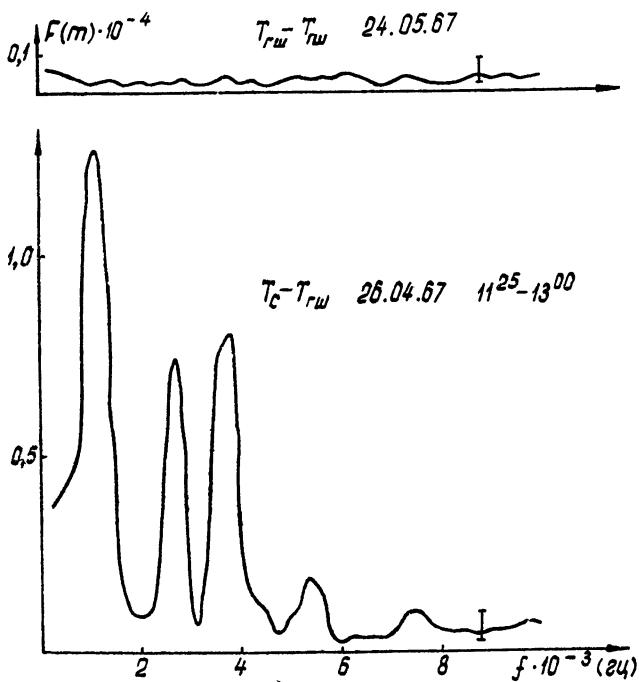


Рис. 3. Оценки спектральной плотности флюктуаций излучения генератора шума (вверху) и Солнца.

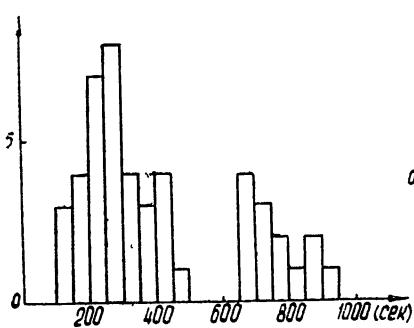


Рис. 4.

Рис. 4. Гистограмма периодов осцилляций интенсивности радиоизлучения Солнца. Ось ординат—число максимумов спектра в соответствующем интервале периодов.

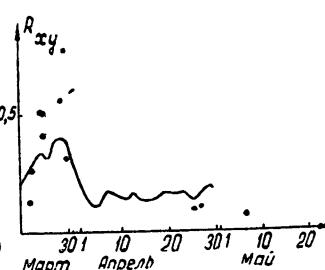


Рис. 5.

Рис. 5. Связь изменений коэффициентов взаимной корреляции флюктуаций сигнала от Солнца, записанных на разнесенных радиотелескопах (точки), с индексом активности Солнца в радиодиапазоне (сплошная линия—поток радиоизлучения Солнца на волне 10,7 см).

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Ввиду того, что вопрос о природе обнаруженных квазипериодических изменений потока радиоизлучения Солнца является наиболее важным на данном этапе исследований, необходимо было более тщательно, чем в [9], проанализировать результаты наблюдений с этой точки зрения.

Прежде всего следует отметить, что исследуемые флюктуации представляют собой не спорадическое, редко наблюдаемое явление, а существуют практически постоянно, и их интенсивность повышается с ростом активности Солнца. Общая картина развития этого явления выглядит следующим образом. При «спокойном» Солнце эти флюктуации проявляют себя в том, что интенсивность шумов на выходе радиометра заметно превышает интенсивность флюктуаций равновесного теплового излучения; при появлении на диске Солнца активных областей увеличивается амплитуда флюктуаций и появляются нестационарные изменения среднего уровня сигнала; дальнейшее развитие активности сопровождается появлением слабых микровсплесков с флюктуирующими профилем (это всплески, обычно регистрируемые и на других радиоастрономических станциях); интенсивность всплесков и флюктуаций уровня сигнала между всплесками продолжает нарастать, растет и частота появления всплесков; после распада активной области или ухода ее за западный край солнечного диска активность идет на убыль, всплески постепенно исчезают, флюктуации потока уменьшаются и переходят в шумы «спокойного» Солнца.

Систематическое повторение такой схемы развития активности Солнца в сантиметровом диапазоне и позволило предположить, что исследуемые флюктуации — солнечного происхождения.

Объяснить такую картину влиянием атмосферы Земли сложно. Для этого необходимо предположить, что а) есть корреляция между появлением на диске Солнца активных областей и увеличением числа и интенсивности неоднородностей в тропосфере (при этом невозможно объяснить тесную связь флюктуаций с микровсплесками солнечного происхождения) или б) увеличение амплитуды флюктуаций связано с более интенсивным «мерцанием» источника малых угловых размеров (активная область по сравнению со всем диском Солнца) в атмосфере Земли.

Оценки показали, что в нашем случае этот эффект может вызвать рост интенсивности флюктуаций не более, чем на 5—10 %. Экспериментальные данные показывают, что флюктуации возрастают в несколько раз.

Известно [20], что пространственный радиус корреляции поля флюктуаций амплитуды сигнала, распространяющегося в турбулентной среде, зависит от соотношения размера первой зоны Френеля  $\sqrt{\lambda L}$  и внешнего и внутреннего масштабов турбулентности ( $L_0$  и  $l_0$ ). В нашем случае  $L_0 > \sqrt{\lambda L} > l_0$  ( $10 \text{ м} < \sqrt{\lambda L} < 35 \text{ м}$ ). Условия нашего эксперимента соответствовали случаю, когда основное влияние оказывают неоднородности с размерами  $l \sim \sqrt{\lambda L}$ , относящиеся к экспериментально изученному интервалу изменений спектральной плотности структурной функции показателя преломления  $\Phi_n(x)$  [20]. В этом интервале  $\Phi_n(x) \sim x^{-11/3}$  и корреляционная функция флюктуаций амплитуды имеет характерный масштаб (радиус корреляции) порядка  $\sqrt{\lambda L}$ .

Влияние крупномасштабных неоднородностей в значительной степени ослаблено. Корреляция флюктуаций при разносе антенн на расстояние  $d \gg \sqrt{\lambda L}$  ( $d = 500 \text{ м}$ ) может быть объяснена тропосферным

механизмом, так как, по данным исследований Казе и Стейнберга [10–12], не наблюдается корреляции флюктуаций, заведомо обусловленных атмосферой, уже на расстояниях  $d \approx 200$  м.

Кроме того, наблюдающиеся в спектрах исследовавшихся нами флюктуаций 2–3 максимума не могут быть объяснены на основании известных экспериментальных данных о монотонности вида зависимости  $\Phi_n(x)$ . Хотя в области больших  $x$  ( $x \geq 2\pi/L_0$ ) вид не универсален и пока еще недостаточно данных для теоретического обобщения, есть экспериментальные данные о характере спектра  $\Phi_n(x)$  в интересующем нас участке [20], подтверждающие монотонность зависимости  $\Phi_n(x)$ . Это означает, что в спектре флюктуаций потока может быть только один максимум на частоте  $f \approx V_{\perp}/\sqrt{2\pi L}$ , где  $V_{\perp}$  — скорость перемещения неоднородностей поперек направления распространения волны. Сопоставление частот максимума в спектрах со значениями  $V_{\perp}$  показали, что корреляции между ними нет.

Сравнение временных спектров различных метеорологических характеристик со спектрами, полученными в результате наших экспериментов, также свидетельствует о том, что последние не могут быть объяснены влиянием тропосфера. На рис. 6 приведены частотные спектры флюктуаций температуры (а), коэффициента преломления (б) и потока радиоизлучения Солнца (в) по нашим данным [21]. Максимумы наших спектров попадают в район широкого и устойчивого «мезометеорологического минимума».

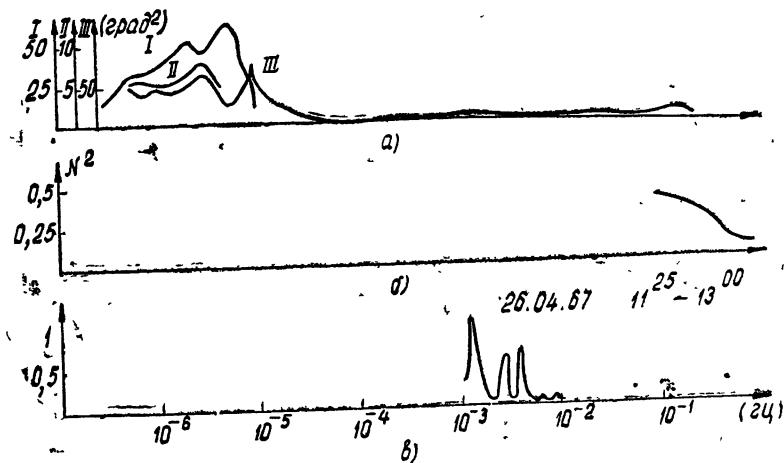


Рис. 6. Сравнение временных спектров флюктуаций различных метеорологических характеристик со спектром флюктуаций потока радиоизлучения Солнца:

- а) спектр пульсаций температуры;
- б) спектр пульсаций коэффициента преломления;
- в) спектр флюктуаций потока радиоизлучения Солнца.

Таким образом, анализ основных характеристик исследуемого явления показал, что для объяснения его влиянием неоднородностей тропосфера необходимо приписать полю флюктуаций показателя преломления в тропосфере такие специфические свойства, которые противоречат всем известным экспериментальным и теоретическим данным о влиянии тропосфера на распространение радиоволн. Все это заставляет отказаться от возможности объяснения квазипериодических изменений потока атмосферными причинами и позволяет утверждать, что эти изменения обусловлены движениями в атмосфере Солнца.

При исследованиях поля вертикальных скоростей и временных из-

менений магнитных полей на Солнце были обнаружены периодические колебания с периодами порядка нескольких минут [1, 22]. Изучение этих явлений позволило существенно уточнить представления о процессах в фотосфере и хромосфере Солнца [23]. Периоды обнаруженных изменений потока совпадают с периодами вертикальных колебаний слоев фотосферы и нижней хромосферы, открытых Лейтоном, Нойесом, Симоном [24] и Мишаром и Эвансом [25, 28], что указывает на возможную связь этих явлений.

В [26, 27] обсуждались возможные механизмы появления в спектре флуктуаций потока радиоизлучения Солнца «квазилиний». На основе полученных предварительных экспериментальных данных можно сделать некоторые оценки масштабов тех процессов на Солнце, которые могут привести к наблюдаемым эффектам. В таблице 1 приведены величины флуктуаций яркостных температур участков поверхности Солнца (элементов), которые необходимы для того, чтобы интенсивность квазипериодических флуктуаций потока соответствовала экспериментальным данным; здесь  $N$  — число элементов на диске Солнца,  $\Omega_0$  — угловой размер элемента в секундах дуги.

Таблица 1

$\Omega_0$	$N$	$10^6$	$10^8$	$10^{10}$	$10^5$	$10^8$
$1'' \times 1''$		$10^6$	$3 \cdot 10^5$	$10^5$	$3 \cdot 10^4$	$10^4$
$2'' \times 2''$		$2,5 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$
$5'' \times 5''$		$4 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^2$
$10'' \times 10''$		$10^4$	$3 \cdot 10^3$	$10^3$	$3 \cdot 10^2$	$10^2$

Левый верхний участок таблицы, отделенный сплошной линией, соответствует таким значениям  $\Delta T_a$  (°К), которые не могут быть реализованы на волне 3,3 см при равновесном излучении. Аналогично правый нижний участок ограничен максимально возможным числом элементов на диске Солнца при соответствующих их размерах. Вертикальная линия соответствует максимальному числу спикул в верхней хромосфере ( $N_{\text{сп}} \leq 5,6 \cdot 10^4$ ). Таким образом, наиболее вероятные характеристики элементов, приводящих к возмущениям в спектре флуктуаций «спокойного» Солнца, ограничены следующими пределами:

$$10^3 \text{ } ^\circ\text{K} < \Delta T_a < 2,5 \cdot 10^4 \text{ } ^\circ\text{K}; \quad 10^2 < N < 10^5; \quad 10'' \times 10'' < \Omega_0 < 2'' \times 2''.$$

В первом приближении эти оценки не противоречат современным представлениям о строении солнечной хромосферы. Поэтому, полученные результаты позволяют прийти к заключению, что обнаруженные в спектре флуктуаций потока радиоизлучения Солнца особенности обусловлены процессами в верхней хромосфере. Последнее подтверждается хорошим совпадением частот максимумов в спектрах флуктуаций потока радиоизлучения Солнца с максимумами в спектрах пульсаций поля скоростей и интенсивности линий излучения в хромосфере Солнца, полученных из оптических наблюдений [29]. Этот результат оказался неожиданным, так как известные в настоящее время данные о структуре и динамике хромосферы Солнца [1] не давали основания ожидать сохранения вида спектров движений при переходе от нижней хромосферы к верхней.

В заключение авторы считают своим долгом поблагодарить М. И. Кобрина за постановку задачи и постоянное внимание к этой работе и

В. В. Железнякова за участие в обсуждении полученных результатов и полезные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Пикельнер, УФН, 88, № 3, 505 (1966).
2. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
3. M. R. Kundu, Ann. d'Astrophys., 22, 1 (1959).
4. F. Droege, Zs. f. Astrophys., 66, 200 (1967).
5. Ю. Ф. Юровский, Изв. КРАО, 36, 103 (1967).
6. М. С. Дурасова, О. И. Юдин, Солнечные данные, № 7, 72 (1966).
7. М. С. Дурасова, Г. А. Лавринов, В. М. Шумкина, О. И. Юдин, Геомагнитизм и аэрономия, 4, № 5, 938 (1964).
8. М. С. Дурасова, Г. А. Лавринов, О. И. Юдин, Солнечные данные, № 12, 110 (1968).
9. О. И. Юдин, ДАН СССР.
10. J. Kazes, J. L. Steinberg, Compt. Rend., 240, № 5—8, 493 (1955).
11. J. Kazes, J. L. Steinberg, Compt. Rend., 245, № 6, 636 (1957).
12. J. Kazes, J. L. Steinberg, Compt. Rend., 245, № 7, 782 (1957).
13. J. Aarons, S. Basu, W. Kidd, R. Allen, Nature, 191, № 4783 (1961).
14. J. Aarons, J. P. Castelli, IRE Trans. Ant. Prop., AP-9, № 4, 390 (1961).
15. В. Н. Пугачев, Теория случайных функций, Гостехиздат, М., 1957.
16. R. B. Blackman, J. W. Tukey, The Bell. Syst. Techn. J., 37, № 1, 185 № 2, 485 (1958).
17. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, 25, вып. 3, 6 (1955).
18. N. Frank, Jr. Edmonds, Astrophys. J., 144, № 2, 733 (1966).
19. Солнечные данные, № 2, 3 (1967).
20. В. И. Тагарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной среде, изд. АН СССР, М., 1959.
21. Динамика крупномасштабных атмосферных процессов, изд. Наука, М., 1967.
22. А. Б. Северный, Астрон. ж., 44, № 3, 481 (1967).
23. Астрономия, Итоги науки и техники, изд. АН СССР, М., 1965.
24. R. B. Leighton, R. W. Noyes, G. W. Simón, Astroph. J., 135, 474 (1962).
25. J. W. Evans, R. Michard, Rep. at Berkley Meeting of IAU, Comm. 12, 1961.
26. О. И. Юдин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1180 (1967).
27. О. И. Юдин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 4, 617 (1968).
28. J. Vahn, M. Schwarzschild, Astrophys. J., 137, 901 (1963).
29. F. Q. Oggal, Astrophys. J., 143, № 3, 917 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 ноября 1967 г.

### QUASI-PERIODIC INTENSITY VARIATIONS OF RADIO EMISSION FROM THE SUN AT 3.3 cm WAVELENGTH

*M. S. Durasova, G. A. Lavrinov, A. K. Chandaev, O. I. Yudin*

The results of experimental study of radiation flux fluctuations from the Sun are presented. The correlation functions and recording spectra referring to quiet and active Sun are investigated. Quasi-periodic changes of the flux with the periods of about 250 and 700 sec are discovered. The intensity changes in a maximum of the spectrum correlate with the variations of the solar activity. A possible relation between the observed phenomena and other occurrences in the solar atmosphere periodical motions are discussed.

УДК 523.164

## ШИРОКОПОЛОСНЫЕ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫЕ РАДИОМЕТРЫ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ВОЛН\*

*А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, А. И. Наумов*

Сообщаются особенности и параметры двух перестраиваемых радиометров, работающих в диапазонах волн 1,8—2,7 мм и 3,7—5,7 мм. В радиометрах используются супергетеродинные приемники со смесителем на входе и высокой промежуточной частотой (3000 Гц). Чувствительность первого составляет  $1,5^{\circ}\text{K}$ , а второго— $0,7^{\circ}\text{K}$  при  $\tau = 1$  сек.

Наиболее чувствительными приемниками сигналов со сплошным спектром, работающими в коротковолновой части миллиметрового диапазона волн, являются полупроводниковые охлаждаемые приборы, действие которых аналогично работе некоторых тепловых приемников. Чувствительность охлажденного германиевого болометра, например, составляет (на волне 1,2 мм) около  $0,015^{\circ}\text{K}$  при постоянной времени выходной цепи  $\tau = 10$  сек [1]. Такая высокая чувствительность приемника достигается при полосе пропускания частот  $\approx 35\%$  от средней частоты полосы пропускания. Если использовать этот приемник для приема в более узкой полосе частот (что необходимо при исследовании спектров сигналов), то его флуктуационный порог чувствительности возрастает при уменьшении полосы.

В таблице суммированы данные литературы [1—4, 7—10] о чувствительности приемников различного типа при постоянной времени выходной цепи 1 сек. (в радиометрической схеме). Таблица позволяет сопоставить качества приемников как индикаторов излучения с гладким спектром и как сравнительно узкополосных (с полосой пропускания частот  $\Delta f = 1$  Гц) анализаторов спектра. В предпоследнем столбце таблицы приводятся значения чувствительности приемников по температуре  $\Delta T$ , соответствующие реализованным в этих приемниках величинам  $\Delta f$ .

Как видно из таблицы, наибольшей чувствительностью обладают приемники с охлажденным германиевым болометром и с антимонидом индия. Однако при сравнительно узкой полосе пропускания частот 1 Гц предпочтительно использовать супергетеродинный приемник, как это следует из данных последнего столбца таблицы. Наиболее чувствительным и узкополосным анализатором спектра мог бы быть мазер, однако трудности, связанные с его перестройкой в достаточно широком диапазоне длин волн, заставляют пока предпочесть супергетеродинный приемник со смесителем на входе.

Ниже приводится описание двух радиометров миллиметровых волн, перестраиваемых в диапазонах 3,7—5,7 мм и 1,8—2,7 мм. Эти радиометры могут использоваться в качестве анализаторов спектра миллиметрового излучения.

\* Дополненный текст сообщения, сделанного на V Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Харьков, 1965.

## 1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ РАДИОМЕТРОВ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

При разработке супергетеродинного приемника миллиметрового диапазона возникают следующие трудности.

- 1) Значительное затухание радиоволн миллиметрового диапазона при прохождении через различные элементы волноводного тракта (вентили, циркуляторы, мосты и т. д.).
- 2) Отсутствие пар смесительных диодов с идентичными параметрами по высокой и промежуточной частотам.
- 3) Большие собственные шумы генераторов, используемых в качестве гетеродинов.

Первая причина заставляет искать наиболее простую функциональную схему радиометра, в которой было бы сведено к минимуму количество различных элементов настройки, а также была минимальной длина волноводного тракта. Причины, перечисленные в пунктах 2 и 3, приводят к необходимости применения однотактных смесителей с достаточно высокой промежуточной частотой для уменьшения шумов гетеродина на промежуточной частоте. Следует отметить, что чрезмерное увеличение промежуточной частоты нецелесообразно, так как в этом случае могут возрасти потери преобразования, а также шум-фактор УПЧ.

Рассмотрим подробнее вопрос о выборе промежуточной частоты в супергетеродинном приемнике радиометра миллиметрового диапазона волн с точки зрения достижения максимальной чувствительности радиометра. Если промежуточная частота достаточно высока для того, чтобы можно было пренебречь собственными шумами гетеродина, то выражение для шум-фактора  $N$  супергетеродинного приемника с диодным смесителем на входе может быть записано в виде

$$N = L(F + t' - 1), \quad (1)$$

где  $L$  — потери преобразования,  $F$  — коэффициент шума УПЧ,  $t'$  — относительная шумовая температура диода смесителя.

Чувствительность модуляционного радиометра с таким приемником определяется выражением

$$\Delta T = \frac{\pi^2(N-1)T_0}{2\sqrt{\Delta f\tau}} \approx \frac{\pi T_0 L}{2\sqrt{\tau}} \left[ \frac{t'}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{F-1}{\sqrt{\Delta f}} - \frac{1}{L\sqrt{\Delta f}} \right], \quad (2)$$

где  $\Delta T$  — минимальное обнаружимое приращение эффективной температуры на входе радиометра,  $T_0 = 290^\circ\text{K}$ ,  $\Delta f$  — ширина полосы пропускания частот УПЧ,  $\tau$  — постоянная времени выходной цепи радиометра.

Таким образом, в явном виде промежуточная частота  $f$  не входит в выражение (2). Очевидно, что, чем выше  $f$ , тем большей, в принципе, может быть получена величина  $\Delta f$ , т. е.  $\Delta f = \varphi f$ , где  $\varphi$  — некоторый коэффициент. Хорошо известно также, что коэффициент шума усилителей СВЧ диапазона возрастает с ростом частоты. Поэтому можно предположить, что  $F = 1 + af^\alpha$ , где  $\alpha$  и  $a$  — некоторые коэффициенты, зависящие от типа усилителя. Пользуясь этими соотношениями и полагая, в первом приближении, что  $t'$  и  $L$  не зависят от  $f$ , можно оценить величину  $f$ , при которой  $\Delta T$  минимально. Нетрудно показать, что это имеет место при

$$f = f'_0 = \left[ \frac{t'}{a(2\alpha-1)} \right]^{1/\alpha}. \quad (3)$$

Итак, величина оптимальной промежуточной частоты определяется относительной шумовой температурой диода смесителя и коэффициен-

тами  $a$  и  $\alpha$ , которые характеризуют степень зависимости шум-фактора УПЧ от  $f$ .

Сделаем теперь некоторые количественные оценки. Предположим, что в качестве УПЧ применяется ЛБВ сверхвысокочастотного диапазона. Известно, что шум-фактор лучших ЛБВ на волнах 10 см и 3 см составляет около 2 и 4 соответственно. Пользуясь этими данными, мы можем найти параметры  $\alpha$  и  $a$  для ЛБВ; они оказываются равными  $\alpha \approx 0,92$  и  $a \approx 0,36 \text{ Гц}^{-0,92}$ . Из формулы (3) при  $t' = 2$  получаем  $f_0 \approx 7,6 \text{ Гц}$ .

Необходимо отметить, что сделанная оценка является довольно грубой (не учитывалась, например, зависимость потерь преобразования от  $f$  и т. д.). Однако ее можно использовать для ориентировочного расчета величины оптимальной промежуточной частоты, а также реализуемой при этой частоте чувствительности радиометра. Полагая  $d \approx 1$ , из (2) и (3) можно получить, что

$$\Delta T_{\min} \approx \pi T_0 L^* \sqrt{\frac{t' a}{\varphi \tau}}. \quad (4)$$

Формула (4) характеризует оптимальную чувствительность радиометра с ЛБВ в качестве УПЧ. Существенно, что  $\Delta T_{\min}$  наиболее резко зависит от  $L$  и в меньшей степени от других параметров.

Итак, усилитель промежуточной частоты приемника миллиметрового диапазона волн должен работать на сантиметровых волнах, если в качестве УПЧ применяется ЛБВ. Полоса пропускания частот ЛБВ сантиметрового диапазона достигает 1 Гц и более. Широкополосность приемника и его высокая промежуточная частота являются весьма полезными также и с той точки зрения, что в этом случае легче обеспечить отсутствие интерференции собственных шумов радиометра в тракте сигнала [11].

Как известно, интерференция собственных шумов в радиометрах приводит к возникновению интенсивных ложных сигналов, что вызывает нарушение стабильности работы радиометра и уменьшает его чувствительность [11]. Условием отсутствия интерференции является неравенство  $l > v/2\Delta f$ , где  $l$  — длина тракта между модулятором (или другим отражающим элементом) и смесителем,  $v$  — групповая скорость распространения электромагнитных волн в тракте и  $\Delta f$  — ширина полосы пропускания частот приемника радиометра. При достаточно большой величине  $\Delta f$  нетрудно удовлетворить этому неравенству. Остается вторая причина возникновения ложного сигнала — интерференция колебаний гетеродина при их распространении в тракте сигнала. Это явление приводит (в модуляционном радиометре) к модуляции постоянной составляющей тока смесителя и, следовательно, к модуляции собственного шума смесителя. Прохождение колебаний гетеродина в тракт сигнала можно устранить, применяя фильтр-пробку, настроенный на частоту гетеродина. При достаточно высокой промежуточной частоте добротность фильтр-пробки может быть не слишком большой.

Изложенные выше соображения были положены в основу при разработке радиометров миллиметрового диапазона волн, к описанию блок-схем которых мы сейчас перейдем.

## 2. БЛОК-СХЕМЫ И КОНСТРУКТИВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАДИОМЕТРОВ

Оба радиометра собраны по обычным, практически одинаковым схемам модуляционных радиометров. Калибровка их осуществляется от газоразрядного генератора шума. Эти же генераторы могут быть использованы для выравнивания эффективных шумовых температур на

входах приемников при открытом и закрытом модуляторе («подшумливания»), что необходимо для реализации «нулевого» метода измерений.

Устройство модуляторов аналогично описанному в [5]. Частота модуляции составляла 830 гц. В качестве фильтр-пробок на частоте гетеродина оказалось возможным использовать стандартные резонансные волномеры, работающие на отсос проходящей мощности. Гетеродинами служили лампы обратной волны типа ОВ-13 и ОВ-22 [6].

Смесители радиометров выполнены по однотактной схеме. Конструкция смесителя, работающего с промежуточной частотой, равной 3000 Мгц, аналогична описанной в работе [7]. Сигнал с выхода смесителя поступает на вход двухкаскадного усилителя промежуточной частоты, собранного на лампах бегущей волны 10-сантиметрового диапазона.

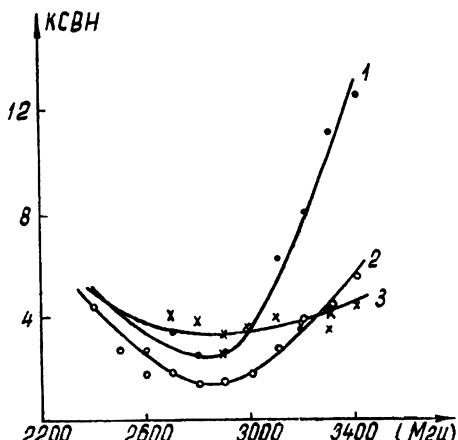


Рис. 1. КСВН смесителя 2-миллиметрового диапазона на промежуточной частоте (по выходу):

1) — выпрямленный ток 0,5 мА; 2) — 1,5 мА; 3) — 3 мА.

два порядка меньше, чем продетектированный собственный шум УПЧ. Последующие узлы радиометра выполнены по типовым схемам.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАДИОМЕТРОВ

Исследовались чувствительности радиометров, их диапазонные свойства, а также уровень «паразитной» модуляции и стабильность их работы.

Флуктуационный порог чувствительности определялся путем приема сигнала с известной эффективной температурой и последующего измерения отношения сигнала к шуму на выходе радиометров. В качестве эталонов радиоизлучения использовалась согласованная нагрузка в волноводе, нагретая до известной температуры, а также поглощающий материал, охлажденный до температуры кипящего азота. Чувствительность радиометра диапазона волн 3,7—5,7 мм составляла около 0,7°К при постоянной времени выходной цепи 1 сек, а радиометра диапазона волн 1,8—2,7 мм — около 1,5°К (при том же условии). Эти цифры относятся к средним длинам волн рабочих диапазонов радиометров.

Данные о чувствительности радиометров можно использовать для оценки качества работы преобразователей частоты. Из формулы (2) можно найти, что у приемника 4-миллиметрового диапазона  $N \approx 73$ , а приемник 2-миллиметрового диапазона имеет  $N \approx 156^*$ .

\* При вычислении  $N$  учитывалось, что в радиометре осуществляется одновременный прием как по прямому, так и по зеркальному каналам.

Коэффициент усиления обоих каскадов был равен 55 дБ, коэффициент шума, в зависимости от экземпляра применяемых ламп, составлял 5—6 единиц. Эквивалентная шумовая полоса пропускания УПЧ — около 600 Мгц, полоса частот, в которой КСВН смесителя (по выходу) был  $< 6$ , составляла около 1000 Мгц.

На рис. 1 представлен ряд частотных характеристик смесителя 2-миллиметрового диапазона по промежуточной частоте. Квадратичный детектор, выполненный на полупроводниковом СВЧ диоде, имеет ширину полосы пропускания около 1500 Мгц. Собственный шум детектора примерно на

Относительная шумовая температура смесителя измерялась с помощью радиометра 10-сантиметрового диапазона. Графики зависимости эффективной шумовой температуры смесителя 2-миллиметрового диапазона от тока через кристалл представлены на рис. 2. Экспериментально установлено, что оптимальный рабочий ток диода смесителя, соответствующий минимальному коэффициенту шума, заключается обычно в пределах 1—2 мА. При таком токе относительная шумовая температура смесителя  $t' \approx 2-3$  (рис. 2). Коэффициент шума УПЧ, как уже упоминалось выше, равен  $F = 5 \div 6$ . Пользуясь соотношением (1), можно оценить потери преобразования смесителя. В приемнике 4-миллиметрового диапазона  $L = 10 \div 12$ , а в приемнике 1,8—2,7 мм  $L = 22 \div 26^*$ .

Кривые на рис. 3 дают представление о диапазонных свойствах исследовавшихся радиометров. Из этих кривых видно, что на краях диапазонов чувствительности радиометров ухудшаются примерно вдвое.

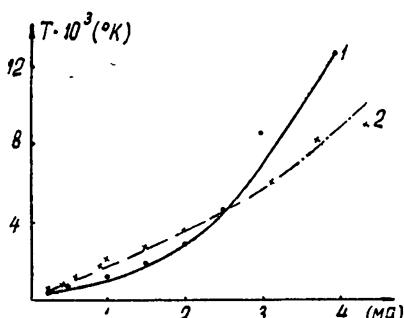


Рис. 2. Зависимость эффективной шумовой температуры смесителя от величины постоянного тока через диод. (Кривые 1 и 2 соответствуют различным рабочим точкам.)

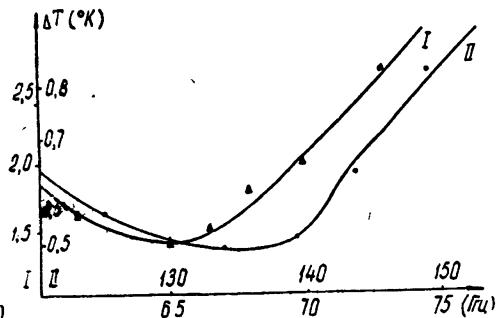


Рис. 3. Зависимость флюктуационных чувствительностей радиометров от рабочей частоты:

I — радиометр диапазона 1,8—2,7 мм; II — радиометр диапазона 3,7—5,7 мм. Кривая II рассчитана на основании данных КСВ смесителя по высокой частоте. Измерения чувствительности производились только на частоте 72,5 Гц.

Настройка фильтр-пробки на частоте гетеродина осуществлялась по минимуму паразитного сигнала, величина которого при достаточно точной настройке не превышала 5—10 °К. После достаточно длительного прогрева аппарата (1,5—2 часа) настройка фильтр-пробки хорошо сохраняется.

Несколько слов о возможностях улучшения чувствительности радиометров. Во-первых, потери преобразования в смесителях, по-видимому, могут быть существенно уменьшены [12]. Во-вторых, возможно значительное улучшение качества УПЧ вследствие применения в первом каскаде ЛБВ с более широкой полосой пропускания частот и низким коэффициентом шума. Реализация этих двух резервов позволит увеличить чувствительность широкополосного радиометра примерно на порядок.

Наконец, есть еще один эффективный путь увеличения чувствительности радиометров такого типа, заключающийся в применении охлажденного смесителя [15] (что позволит существенно уменьшить величину  $t'$  в формуле (1)) и параметрического усилителя в качестве УПЧ. Из выражения (1) видно, что множитель в круглой скобке при  $t' \ll 1$

\* В потери преобразования входят и потери в тракте сигнала, которые отдельно не измерялись. Величина их, по-видимому, не превышает 1—2 дБ.

и  $F \simeq 1$  становится приблизительно равным ( $F = 1$ ). Этот путь увеличения чувствительности связан, как и предыдущий, с необходимостью применения новых полупроводниковых материалов в смесителе. Исходя из данных раздела 1 (выражение (3), интересно отметить, что чем ниже  $t'$ , тем меньше оптимальная промежуточная частота и тем ближе к единице коэффициент шума, используемого УПЧ. Это говорит о необходимости применения в этом случае охлаждаемых параметрических усилителей в качестве УПЧ.

В заключение укажем, что описываемая аппаратура успешно применялась в ряде радиоастрономических исследований [13, 14].

Таблица 1

## Параметры радиометрических приемников миллиметрового диапазона волн

Тип приемника	$\lambda$ (мк)	Рабочая темпера- тура (°К)	$P_{\min}$ (вт)	$\Delta f$ (Гц)	$\Delta T$ (°К)	$\Delta T'$ (°К)	Примечания, ссылки
1	2	3	4	5	6	7	8
Оптико-акустиче- ский.	5	300	$3,7 \cdot 10^{-11}$	50	43	$2,1 \cdot 10^3$	[2]
То же	2	"	$2 \cdot 10^{-10}$	15	960	$1,4 \cdot 10^4$	[3]
Вакуумный барет- тер	2	"	$4 \cdot 10^{-11}$	15	190	$2,9 \cdot 10^3$	[3]
Угольный боло- метр	2	1,5	$10^{-11}$	15	48	720	[3]
Германиевый бо- лометр	2	2,15	$10^{-13}$	1	7,2	7,2	[2]
То же	1,2	2,15	$4 \cdot 10^{-14}$	87,5	0,05	4,1	[1]
Сверхпроводящий пленочный боло- метр	2	3,7	$3 \cdot 10^{-12}$	1	220	220	[2]
Антимонид индия	0,5	1,5	$10^{-12}$	1		72	[2]
То же	2	1,5	$10^{-12}$	15	4,8	70	[3]
То же	0,4—1,2	4	—	550	0,05	27,5	[4]
Циклотронный ре- зонанс в германии	8	4	$2 \cdot 10^{-12}$	1		145	[2]
Кристалл 3352 со смещением	2	300	$2,5 \cdot 10^{-11}$	15	120	$1,8 \cdot 10^3$	[3]
Супергеродин	4,3	"	$2,5 \cdot 10^{-16}$	0,1	1,5	0,15	[3]
То же	4,3	"	$6,5 \cdot 10^{-16}$	0,006	5	0,38	[8]
То же	3,3	"	$10^{-13}$	1,2	3	3,5	[9]
То же	3,2	"	$2 \cdot 10^{-13}$	0,01	7	0,7	[10]
То же	2,15		$1,2 \cdot 10^{-15}$	0,03	8,3	1,4	[3]
То же	2,15			1,5	0,9	1,10	[7]
То же	3,7—5,7		$1,2 \cdot 10^{-14}$	0,6	0,7	0,54	настоящая ра- бота
То же	1,8—2,7		$2,5 \cdot 10^{-14}$	0,6	1,5	1,15	настоящая ра- бота
ЛБВ типа Wy-224	4	300	$1,2 \cdot 10^{-16}$	30	0,4	—	[3] в разра- ботке
Мазер бегущей волны	3—4	—		0,4	0,15	—	[3] в разра- ботке

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. J. Low, Proc. IEEE, 53, № 5, 516 (1965).
2. E. H. Putley, Proc. IEEE, 51, № 11, 1412 (1965).
3. R. Meredith, F. L. Warne, IEEE Trans. MTT, MTT-1, № 5, 397 (1965).
4. Е. И. Попов, Изв. виц. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 862 (1965).

5. R. H. Dicke, The Review of Scientific Instruments, **51**, № 7, 268 (1946).
6. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Нигирев, В. А. Парилов, Г. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 4, 136 (1965).
7. M. Cohn, F. L. Wentworth, J. C. Wiltse, Proc. IEEE, **51**, № 9, 1227 (1963).
8. C. R. Grant, H. H. Corbett, J. E. Gibson, Astrophys. J., **137**, № 2, 620 (1963).
9. E. Epstein, Astron. J., **70**, № 9, 721 (1965).
10. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Astron. J., **70**, № 2, 177 (1965).
11. В. С. Троицкий, ЖТФ, **25**, вып. 8, 1426 (1955).
12. G. S. Messenger, Proc. IRE, **46**, № 6, 1116 (1958).
13. А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, Астрон. ж., **44**, вып. 4, 697 (1967).
14. А. Г. Кисляков, А. И. Наумов, Астрон. ж., **44**, вып. 6, 1324 (1967).
15. В. Н. Алфёев, Радиотехника низких температур, изд. Сов. радио, М., 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 января 1968 г.

## WIDE-BAND SUPER-HETERODYNE RADIOMETERS OF MILLIMETER RANGE

*A. G. Kislyakov, Yu. V. Lebskii, A. I. Naumov*

The peculiarities and parameters of two retuned radiometers operating in 1.8—2.7 mm and 3.7—5.7 mm wave range are reported. Radiometers use super-heterodyne receivers with the input mixer and high intermediate frequency (3000 MHz). The sensitivity of the first is  $1.5^{\circ}\text{K}$  and of the second is  $0.7^{\circ}\text{K}$  at  $\tau=1$  sec.

УДК 621.371.246

## ИЗМЕРЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ НА ВОЛНЕ 31,9 см

*B. B. Хрулев, И. П. Хижнякова*

Приведены результаты измерения поглощения радиоволн в атмосфере по собственному радиоизлучению последней на волне 31,9 см. Особое внимание уделено учету мешающих факторов, обусловленных радиоизлучением Земли (поляризованной и неполяризованной компонентами) и анизотропией боковых лепестков антенны, неоднородностью космического фона и инструментальными эффектами. В результате измерений получены следующие значения яркостной температуры атмосферы в зените  $T_3$  и коэффициента поглощения  $\kappa_0$ :  $T_3 = (2,2 \pm 0,3)^\circ\text{K}$ ,  $\kappa_0 = (0,0063 \pm 0,0009) \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ .

Измерению поглощения радиоволн дециметрового диапазона в атмосфере посвящено довольно большое число работ (см., например, [1, 2]). Тем не менее, вопрос о величине коэффициента поглощения все же нельзя считать полностью решенным. Дело в том, что коэффициенты поглощения, полученные разными авторами, сильно отличаются друг от друга. Кроме того, в ряде работ, результаты которых приведены в обзоре [1], получены коэффициенты поглощения, существенно превышающие по величине значения, предсказанные теорией.

Получение достоверных данных о величине коэффициента поглощения радиоволн в атмосфере стало особенно актуальным в связи с радиоастрономическими исследованиями реликтового метагалактического фона, имеющего температуру около 3°К. Как указано в работе [3], при использовании значений коэффициента поглощения, полученных в [4, 5], фактически исчезает равновесный реликтовый метагалактический фон на волне 20,7 см. Учитывая сказанное выше, мы провели измерения коэффициента поглощения радиоволн в атмосфере по ее собственному радиоизлучению на волне 31,9 см. В настоящей статье приводятся полученные результаты.

Измерения проводились в сентябре—ноябре 1967 г. на радиоастрономической станции НИРФИ в Старой Пустыни с помощью радиотелескопа с параболическим рефлектором диаметром 8 м, описанного в работах [6, 7]. Основные параметры радиотелескопа приведены в таблице.

Таблица 1

### Основные параметры радиотелескопа

Частота (Мгц)	Ширина полосы пропускания на уровне 0,5 по мощности (Мгц)	Флуктуационный порог чувстви- тельности при по- стоянной времении 16 сек (°К)	Ширина луча на уровне 0,5 по мощности	Скорость вращения облучателя
940	25	0,07	$2^{\circ}46' \times 2^{\circ}46'$	1 оборот за 5 минут

Радиотелескоп калибровался по дискретному источнику Кассиопея-А. Методика измерений коэффициента поглощения радиоволн в атмосфере по ее собственному радиоизлучению заключалась, как обычно, в регистрации изменений температуры антенны  $T_{\Sigma}(h)$  в зависимости от угла места в интервале углов  $6 - 60^\circ$ . В процессе измерений облучатель антенны непрерывно вращался для определения поляризованной компоненты радиоизлучения Земли. При определении изменений антенной температуры с высотой, обусловленных радиоизлучением атмосферы, особое внимание уделялось учету побочных эффектов, сопровождающих изменение угла места антенны радиотелескопа. Эти эффекты в основном обусловлены.

- 1) неполяризованным радиоизлучением Земли  $T_{\Phi}(h)$ , попадающим в боковые лепестки диаграммы направленности антенны;
- 2) поляризованной компонентой радиоизлучения Земли  $T_{\Phi}^{\text{пол}}(h, \chi)$  ( $\chi$  — позиционный угол облучателя);
- 3) неоднородностью космического фона;
- 4) реакцией приемника на изменение параметров антенного тракта при изменении высоты антенны.

Влияние неоднородности космического фона устранилось выбором участков небосвода с однородной яркостной температурой (высокие галактические широты), через которые проходила диаграмма направленности радиотелескопа при изменении угла места антенны. С помощью вентиляй между антенной и входом параметрического усилителя с общей развязкой порядка 80 дБ была исключена реакция приемника на изменение параметров антенного тракта с точностью до флюктуационного порога чувствительности радиометра. Погрешность измерения яркостной температуры атмосферы в зените  $T_{\Sigma}$ , обусловленная факторами (3) и (4), не превышала 2 %. Поляризованная компонента  $T_{\Phi}^{\text{пол}}(h, \chi)$  определялась методом, подробно рассмотренным в работе [6], и вычиталась из суммарной антенной температуры. Величина  $T_{\Phi}^{\text{пол}}(h, \chi)$  в пределах высот  $60 - 6^\circ$  изменялась соответственно от 0,5 до 2,5 К. Для определения  $T_{\Phi}(h)$  были привлечены следующие экспериментальные данные: 1) зависимость суммарной температуры  $T_{\Sigma}(h)$  от высоты при углах места  $h > 15^\circ$ ; 2) зависимость «поляризованного» побочного эффекта, сопровождающего измерения линейной поляризации космического радиоизлучения [8–10], от высоты антенны.

Как видно из рис. 1, начальный участок кривой зависимости  $T_{\Sigma}(h)$  от  $\text{cosec } h$  при  $h > 15^\circ$  отражает изменение  $T_{\Phi}(h)$ , обусловленное радиоизлучением Земли и анизотропией боковых лепестков антенны, так как при  $h > 15^\circ$  радиоизлучение атмосферы вносит сравнительно малый вклад в суммарную температуру антенны. Характер изменения  $T_{\Sigma}(h)$  в указанном интервале высот свидетельствует о линейной зависимости  $T_{\Phi}(h)$  с высотой при  $h > 15^\circ$ . Зависимость «поляризационного» побочного эффекта от высоты для антенн с параболическим рефлектором [8–10] показывает, что приблизительно линейная зависимость  $T_{\Phi}(h)$  от высоты сохраняется и для высот  $h < 15^\circ$ . Таким образом, можно приближенно считать

$$T_{\Phi}(h) \approx \alpha(h_0 - h). \quad (1)$$

Величину  $\alpha$  нетрудно найти из  $T_{\Sigma}(h)$  с помощью соотношения

$$\alpha = [(T'_{\Sigma})_{h_0} - \beta(T'_{\Sigma})_{h_1}], \quad (2)$$

где  $(T'_{\Sigma})_{h_0}$  — производная по  $h$  от  $T_{\Sigma}$  при  $h_0 = 60^\circ$ ,  $(T'_{\Sigma})_{h_1}$  — производная

по  $h$  от  $T_{\Sigma}$  при  $6^\circ < h_1 < 10^\circ$ ,  $\beta = \frac{\cos h_0 (\operatorname{cosec} h_0)^2}{\cos h_1 (\operatorname{cosec} h_1)^2}$ . Температура собственного теплового радиоизлучения атмосферы  $T_a(h)$  находится вычитанием  $T_{\Phi}(h)$  из  $T_{\Sigma}(h)$  (см. рис. 1). Экспериментальные значения  $T_{\Sigma}(h)$ ,  $T_{\Phi}(h)$  и  $T_a(h)$ , усредненные по 10 сериям измерений, приведены

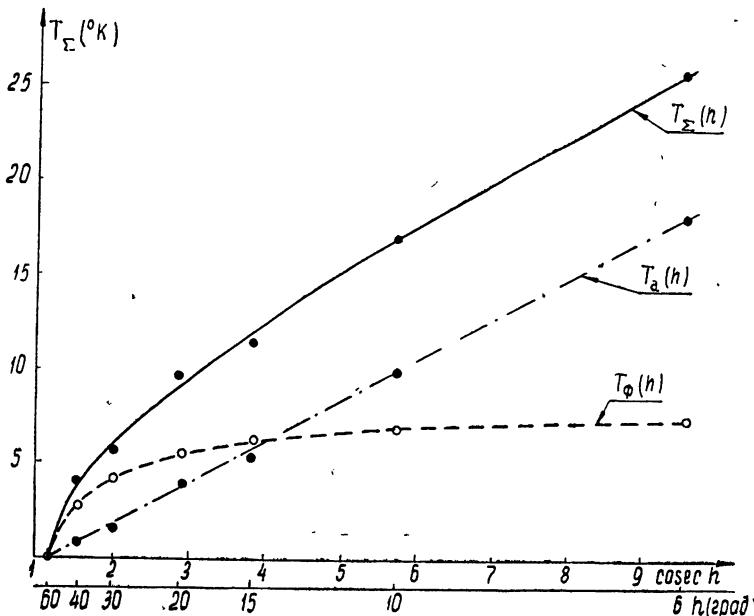


Рис. 1.

на рис. 1. Яркостная температура атмосферы в зените  $T_3$  определялась из  $T_a(h)$  с помощью соотношения  $T_3 = T_a(h_2) - T_a(h_1)$ , при  $\operatorname{cosec} h_2 = \operatorname{cosec} h_1 = 1$  и получилась равной

$$T_3 = (2.2 \pm 0.3) ^{\circ}\text{K}.$$

Поправка к величине  $T_3$  из-за учета  $T_{\Phi}(h)$  составила 7 %. Значение коэффициента поглощения радиоволн в атмосфере, обусловленное на волне 31,9 см поглощением в кислороде, вычислялось по формуле, приведенной в работе [1]:

$$x_0 = \frac{[T_a(h_2) - T_a(h_1)] 4,34}{(T_0 - 6,5 H) (\operatorname{cosec} h_2 - \operatorname{cosec} h_1) H} \frac{\partial b}{\text{км}},$$

где  $H$  — эффективная высота атмосферы, равная 6,5 км. В результате получилось следующее значение  $x_0$ :

$$x_0 = (0,0063 \pm 0,0009) \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}.$$

Теоретическое значение  $x_0$ , вычисленное на основании теории Ван-Флека [12] (полуширина линии поглощения  $\Delta\nu = 0,025 \text{ см}^{-1}$ ), равно

$$x_{0 \text{ теор}} = 0,0052 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}.$$

Найденное значение яркостной температуры атмосферы в зените находится в хорошем согласии с величиной  $T_3 = (2,3 \pm 0,2) ^{\circ}\text{K}$ , полученной в работе [13] на волне 20,7 см, и близко к предсказываемому теорией [14]. Анализ экспериментальных кривых  $T_{\Sigma}(h)$ , приведенных в работе [15],

показывает, что завышение авторами этой работы величин  $T_z$  почти в 2 раза является следствием некорректного учета отмеченных выше мешающих факторов.

Авторы благодарны В. А. Разину, под руководством которого была выполнена данная работа, С. А. Жевакину и А. П. Наумову за обсуждение результатов, а также А. Н. Родионову, А. А. Мельникову и А. И. Теплых, принимавшим участие в наблюдениях и обработке данных.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1244 (1967).
2. W. Y. Medd, D. N. Fort, J. Geophys. Res., **70**, № 20, 4749 (1966).
3. T. F. Howell, Y. R. Shakeshaft, Nature, **210**, 1318 (1966).
4. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 6, 1098 (1963).
5. В. Д. Кротиков, В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 5, 1044 (1965).
6. В. А. Разин, В. В. Хрулев, В. Т. Федоров, С. А. Волохов, А. А. Мельников, А. М. Пасека, Л. В. Пупышева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика **11**, № 10, 1461 (1968).
7. А. А. Мельников, В. А. Разин, Б. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
8. В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 10, 1473 (1968).
9. E. M. Berkhouijse, W. N. Brow, BAN, **17**, 185 (1963).
10. E. M. Berkhouijse, W. N. Brow, C. A. Muller, J. Tinbergen, BAN, **17**, 465 (1964).
11. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, № 2, 19 (1958).
12. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, № 7, 413 (1947).
13. A. A. Repzias, R. W. Wilson, Astron. J., **72**, 315 (1967).
14. D. C. Hogg, J. Appl. Phys., **30**, 1417 (1959).
15. Л. Н. Бондарь, В. Д. Кротиков, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 3, 437 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
27 декабря 1967 г.

### MEASUREMENTS OF RADIO WAVE ABSORPTION IN THE ATMOSPHERE AT 31.9 cm WAVELENGTH

V. V. Khrulev, I. P. Khizhnyakova

The results of measuring the radio wave absorption in the atmosphere by its own radiation at 31.9 cm wavelength are given. A special attention is paid to taking into account spurious factors caused by radiation from the Earth (polarized and non-polarized components) and anisotropy of the antenna side lobes, cosmic background inhomogeneity and instrumental effects. As a result of measurements, the values of the brightness temperature of the atmosphere in the zenith  $T_z = (9.2 \pm 0.3)^\circ\text{K}$ , and the absorption coefficient  $\alpha_0 = (0.0063 \pm 0.0009) \text{ db} \cdot \text{km}^{-1}$  have been obtained.

УДК 535.31:538 576.23

## К ВОПРОСУ О ПЕРЕХОДЕ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

*Ю. А. Зайцев, Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин*

Построено геометро-оптическое решение уравнений Максвелла для монохроматических нормальных волн в непоглощающей анизотропной среде, когда отсутствует поляризационное вырождение. Обращено внимание на то, что в этом случае существует только одно (комплексное) условие совместности уравнений первого приближения, из которого выводится уравнение сохранения плотности потока энергии и уравнение для фазы волны. Показано, что в анизотропном диэлектрике фаза волны не изменяется. Получено простое выражение для фазы в случае распространения высокочастотных волн в магнитоактивной плазме и установлена связь между этой фазой и углом поворота плоскости поляризации. Рассмотрен также случай слабопоглощающей анизотропной среды.

Вопрос о геометро-оптическом описании электромагнитных волн в неоднородных анизотропных (и, в частности, гиротропных) средах неоднократно обсуждался в литературе. В ряде работ (см., например, [3–5]) изучены плоские волны в плоскослоистых средах, т. е. рассмотрены одномерные задачи. Трехмерный случай для магнитогидродинамических волн был исследован в работах [6–8], но без рассмотрения поляризации волн.

Попытки проследить изменение поляризации электромагнитной волны вдоль луча были сделаны в [9] для анизотропного диэлектрика и в [10] для гиротропной среды. Анализ был проведен по схеме, использованной Рытовым [1] еще в 1938 г. для изотропной среды (см. также [2]). Именно, в работах [9, 10], как и в [1, 2], дисперсионное соотношение (т. е. уравнение эйконала для фазы волны  $\phi$ ) было получено из условия существования нетривиального решения для амплитуд нулевого приближения, а сами эти амплитуды находились из условия совместности уравнений для амплитуд первого приближения.

Однако в [9, 10], а также в [11], где рассматривались гиротропные среды со слабым поглощением, была упущена из виду одна существенная особенность задачи, а именно, отсутствие поляризационного вырождения в анизотропных средах, характерного лишь для изотропных сред. Выразилось это в следующем.

В изотропной среде система уравнений для амплитуд нулевого приближения имеет два линейно независимых собственных вектора. Эти собственные векторы можно выбрать ортогональными, и тогда они определяют две возможных взаимно-ортогональных поляризаций поперечных волн. Благодаря наличию двух собственных векторов, отвечающих одному и тому же вектору волновой нормали  $t = \nabla\phi / |\nabla\phi|$ , в изотропной среде следует записывать два условия совместности уравнений первого приближения. Следствием этих двух условий являются закон сохранения потока энергии в лучевой трубке и закон вращения векторов поля [1, 2]. Аналогичные следствия выводятся при решении уравнения Дира-

ка в квазиклассическом приближении [12] и при использовании геометро-оптического подхода к задаче о волнах в твердых телах [13].

В анизотропной среде возможно существование двух (если не учитывать пространственной дисперсии) нормальных волн. Каждая из этих волн имеет свой вектор волновой нормали  $\mathbf{t}$  и вполне определенную поляризацию. Поэтому для каждой из двух нормальных волн нужно записывать только одно (а не два, как в [9–11]) условие совместности уравнений первого приближения. В результате одно из приведенных в [9–11] условий совместности (какое именно — будет указано ниже) является лишним, а опирающийся на это условие вывод закона изменения поляризации волны — неверным.

В данной статье мы приведем правильное условие совместности уравнений первого приближения и выведем из него закон сохранения потока энергии в лучевой трубке и следствие, заключающееся в дополнительном изменении фазы волны в неоднородной гиротропной среде (в анизотропном диэлектрике этот эффект отсутствует). Эти результаты являются частным случаем результатов более общей теории, развитой в [14, 15] для немонокроматических волн в пространстве  $n$  измерений при наличии частотной дисперсии\*. Несмотря на это, мы все же сочли возможным опубликовать наши расчеты, исходя из следующих соображений. Во-первых, мы хотели бы исправить ошибки, допущенные в [9–11]. Во-вторых, желательно построить решение уравнений Маковелла в геометро-оптическом приближении в более привычных для физической литературы терминах, чем это было сделано в [14, 15].

Изменение фазы волны в гиротропной среде мы проиллюстрируем на примере квазипродольного распространения высокочастотных волн в магнитоактивной плазме. Кроме того, мы рассмотрим задачу о волнах в анизотропной среде со слабым поглощением.

## 1. УРАВНЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Уравнения Маковелла в случае монохроматических полей (для процессов  $e^{-i\omega t}$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -ik\mathbf{D}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -ik\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$ , а вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  связан с вектором напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  материальным уравнением  $D_i = \epsilon_{ik}(r, \omega)E_k$ . Сначала рассмотрим случай среды без поглощения, когда тензор эрмитов  $\epsilon_{ik}^* = \epsilon_{ki}$ .

Будем решать уравнения (1) методом геометрической оптики. Представим векторы напряженности электрического и магнитного поля в виде асимптотических рядов по степеням  $1/k$ :

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}^{(m)}}{(ik)^m} e^{ik\varphi}, \quad \mathbf{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}^{(m)}}{(ik)^m} e^{ik\varphi}. \quad (2)$$

Эйконал  $\varphi$  будем считать вещественной величиной, т. е. исключим из рассмотрения неоднородные волны. Подставив эти ряды в (1) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ , для амплитуд  $\mathbf{E}^{(m)}, \mathbf{H}^{(m)}$  получаем уравнения последовательных приближений:

\* Как сообщил авторам С. М. Рытов, подобные расчеты для анизотропной (но не гиротропной) среды были выполнены им еще до 1940 г., но не были опубликованы.

$$\begin{aligned} \nabla\varphi \times \mathbf{H}^{(m)} + \overset{\wedge}{\epsilon} \mathbf{E}^{(m)} &= -\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(m-1)} \equiv \mathbf{X}^{(m-1)}, \\ \nabla\varphi \times \mathbf{E}^{(m)} - \mathbf{H}^{(m)} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(m-1)} \equiv \mathbf{Y}^{(m-1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь принято, что величины с индексом  $m < 0$  тождественно равны нулю.

## 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Условие существования нетривиального решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \nabla\varphi \times \mathbf{H}^{(0)} + \overset{\wedge}{\epsilon} \mathbf{E}^{(0)} &= 0, \\ \nabla\varphi \times \mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{H}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

для амплитуд нулевого приближения  $\mathbf{E}^{(0)}$ ,  $\mathbf{H}^{(0)}$  можно записать как равенство нулю детерминанта

$$g \equiv \det \left\| (\nabla\varphi)^2 \delta_{ik} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \epsilon_{ik} \right\| = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой уравнение эйконала для анизотропных сред. Оно отличается от дисперсионного уравнения для плоских волн в однородных средах тем, что входящие в (5) величины  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$  и  $\epsilon_{ik}$  зависят от координат (предполагается, что в масштабе длины волны эта зависимость является медленной). Уравнение эйконала (5) естественно назвать «локальным дисперсионным уравнением» [14]. Решение этого уравнения методом Гамильтона с введением лучей описано, например, в [10, 11, 21]. Согласно этим работам, уравнению (5) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик (лучей)

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial g}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial g}{\partial r}, \quad (5a)$$

$$p \equiv \nabla\varphi.$$

Если  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\xi, \eta, \tau)$  удовлетворяет уравнениям (5а), то эйконал  $\varphi$  находится по формуле  $\varphi = \varphi_0(\xi, \eta) + \int p \frac{\partial g}{\partial p} d\tau$ , где  $\varphi_0(\xi, \eta)$  — начальный эйконал, заданный на исходной поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi, \eta)$ .

Для наших целей важно отметить известный результат, заключающийся в том, что в отсутствие пространственной дисперсии в анизотропной среде при заданном направлении нормали к фазовому фронту  $t = \nabla\varphi / |\nabla\varphi| = \mathbf{p} / |\mathbf{p}|$  локальное дисперсионное уравнение (5) имеет в общем случае два невырожденных (т. е. несовпадающих) решения относительно коэффициента преломления  $p = |\nabla\varphi|$ , что соответствует двум нормальным волнам, каждая из которых распространяется со своей фазовой скоростью. Следственно, каждому из этих корней отвечает один собственный вектор или, что то же, один вектор поляризации  $\mathbf{f}$  (в общем случае комплексный), характеризующий направление вектора напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E} = \Phi \mathbf{f}. \quad (6)$$

Комплексность  $\mathbf{f}$  означает, что волна имеет эллиптическую поляризацию. Направление вектора  $\mathbf{H}$  определяется из второго уравнения (4):

$$\mathbf{H} = \nabla\varphi \times \mathbf{E} = \Phi \mathbf{p} \times \mathbf{f} \quad (7)$$

(здесь и ниже под  $E$  и  $H$  мы будем понимать амплитуды нулевого приближения  $E^{(0)}$  и  $H^{(0)}$ ).

Отношения компонент вектора поляризации  $f$  можно найти из уравнения (4) (соответствующие выражения мы не приводим из соображений краткости). Важно подчеркнуть, что эти отношения однозначно определяются локальными свойствами среды и направлением волновой нормали  $t$ , которая может быть найдена из решения уравнения эйконала (5).

Отвечающий вектору  $f$  эллипс поляризации определенным образом ориентирован относительно выделенных направлений в среде (относительно магнитного поля в гиротропной среде или относительно оптических осей в анизотропном кристалле) и в общем случае не связан жестко с направлениями главной нормали и бинормали к лучу (последние зависят не только от величины компонент тензора  $\epsilon_{ik}$ , но и от скорости их изменения вдоль луча).

Вектор  $f$  удобно нормировать на единицу:  $ff^* = 1$ . При такой нормировке сумма квадратов главных полуосей эллипса поляризации равна единице. При этом, однако, произвол в выборе  $f$  устраняется не полностью, так как условию нормировки удовлетворяет и вектор  $fe^{i\beta}$ , где  $\beta$  — произвольная вещественная функция координат\*, от выбора которой зависит положение начальной точки отсчета на эллипсе поляризации в рассматриваемом участке пространства.

Этой неопределенности можно избежать, если одну из компонент вектора  $f$  считать вещественной величиной [10]. В качестве такой компоненты можно взять, например, одну из проекций  $f$  на координатные оси ( $x, y, z$ ), оси симметрии среды или на естественный трехгранник ( $t, n_1, b_1$ ), где  $t = \nabla\varphi / |\nabla\varphi| = p / |p|$ , а  $n_1$  и  $b_1$  — соответственно нормаль и бинормаль к линиям  $t$ . При практических расчетах удобнее считать вещественной компоненту  $f$ , направленную вдоль большой оси эллипса поляризации, которая, как известно, лежит в одной из плоскостей симметрии среды.

Таким образом, при наложенных ограничениях на  $f$  в нулевом приближении геометрической оптики неопределенным остается только комплексный скаляр  $\Phi$  в формулах (6) и (7). Очевидно, векторы  $E = \Phi f$  и  $H = \Phi(p \times f)$  не должны зависеть от направления вещественной компоненты  $f$ . Приведенные в разделах 3—5 расчеты находятся в согласии с этим требованием.

### 3. УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ

Подлежащий определению комплексный коэффициент  $\Phi$  можно определить из условия совместности уравнений для амплитуд первого приближения

$$\begin{aligned} \nabla\varphi \times H^{(1)} - \epsilon E^{(1)} &= -\operatorname{rot} H \equiv X^{(0)}, \\ \nabla\varphi \times E^{(1)} + H^{(1)} &= -\operatorname{rot} E \equiv Y^{(0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие совместности можно записать как условие ортогональности вектора  $(X^{(0)}, Y^{(0)})$  собственному 6-вектору системы уравнений, транспонированной по отношению к системе (4) [17], т. е. в силу предполагаемой эрмитовости тензора  $\epsilon_{ik}$  и вещественности  $\varphi$ , 6-вектору  $(E^*, -H^*)$ :

$$E^* X^{(0)} - H^* Y^{(0)} \equiv -E^* \operatorname{rot} H + H^* \operatorname{rot} E = 0. \quad (9)$$

\* В случае поляризационного вырождения, когда каждому направлению  $t$  отвечают два (как в изотропной среде) или более (как в пространстве  $n$  измерений,  $n > 3$ , [14]) векторов поляризации  $f_m$ , совокупность векторов  $f_m$  задается с точностью до унитарного преобразования [14].

6 - вектор  $(H^*, p^2 E^*)$  не является решением транспонированной системы уравнений (4), и поэтому записанное в [10, 11] по аналогии с изотропным случаем [1, 2] второе условие совместности

$$H^* X^{(0)} + p^2 E^* Y^{(0)} = - H^* \operatorname{rot} H - p^2 E^* \operatorname{rot} E = 0$$

для гиротропных сред является лишним. Учитывая, что в анизотропном диэлектрике векторы  $E$  и  $H$  вещественны, заключаем, что лишним является и полученное в [9] второе условие совместности\*

$$H X^{(0)} + p^2 E Y^{(0)} = - H \operatorname{rot} H - p^2 E \operatorname{rot} E = 0.$$

#### 4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ЛУЧЕВОЙ ТРУБКЕ

Равенство нулю вещественной части (9) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{div}(E^* \times H + E \times H^*) = 0, \quad (10)$$

в чем легко убедиться, прибавив к (9) комплексно-сопряженное уравнение и учитывая тождество  $\operatorname{div}(a \times b) = b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b$ . Уравнение (10), как известно, имеет смысл закона сохранения плотности потока энергии в лучевой трубке. Его можно записать в иной форме, используя соотношения (6) и (7):

$$\operatorname{div}(|\Phi|^2 s) = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} s &= f^* \times p \times f + f \times p \times f^* = 2p - f^*(pf) - f(pf^*) = \\ &= 2[p - f_1(pf_1) - f_2(pf_2)] \end{aligned} \quad (12)$$

— вещественный вектор, определяющий направление потока энергии,  $f = f_1 + i f_2$ , а  $f_1$  и  $f_2$  — вещественные векторы (такие, что  $(f_1 f_1) + (f_2 f_2) = 1$ ).

Можно показать, что вектор  $s$  параллелен вектору групповой скорости  $v_{gr}$  и вектору  $\frac{\partial g}{\partial p}$ :  $s = \alpha \frac{\partial g}{\partial p}$ , где  $\alpha$  — известная функция координат, которая может быть выражена через коэффициенты системы уравнений (4). Величина и направление вектора  $s$ , как и вектора поляризации  $f$ , однозначно определяются направлением единичного вектора волновой нормали  $t$ , начальными условиями и локальными свойствами среды.

#### 5. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗЫ ВДОЛЬ ЛУЧА

Уравнение (11) дает закон изменения квадрата модуля скалярной функции  $\Phi$ . Изменение же аргумента этой функции (по существу, добавки к фазе волны) можно установить, приравнив нулю мнимую часть (9). Положив  $\Phi = |\Phi| e^{i\delta}$  и вычитая из (9) комплексно-сопряженное выражение, после элементарных преобразований получаем следующее уравнение для  $\delta$ :

$$s \nabla \delta + M = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{Im}[f \operatorname{rot}(p \times f^*) + (p \times f^*) \operatorname{rot} f] = f_2 \operatorname{rot}(p \times f_1) - \\ &- f_1 \operatorname{rot}(p \times f_2) + (p \times f_1) \operatorname{rot} f_2 - (p \times f_2) \operatorname{rot} f_1. \end{aligned}$$

\* В действительности в работах [9–11] приведены несколько иные условия совместности, однако, будучи записанными в использованных здесь обозначениях, они эквивалентны приведенным выше лишним условиям.

Уравнение (13), записанное в виде

$$\frac{d\delta}{d\tau} = -\frac{M}{\alpha}, \quad (13a)$$

дает закон изменения фазы  $\delta$  вдоль луча.

Заметим, что «реактивные» члены, не подвергнутые анализу в [16] и [20], как раз и содержат в себе закон изменения фазы  $\delta$ . Уравнение же для  $\delta$  в диспергирующей среде для немонохроматических волн в пространстве  $n$  измерений ( $n \geq 3$ ), полученное в [14, 15], не имеет столь явной формы, как (13).

В неоднородном анизотропном диэлектрике, как известно, вектор поляризации  $f$  вещественен, т. е.  $f_2 = 0$ . Следовательно, для анизотропного диэлектрика  $\frac{d\delta}{d\tau} = 0$  и  $\delta = \text{const}$  вдоль луча. Фаза  $\delta$  постоянна также и в однородной гиротропной среде, но доказательство этого утверждения, которое мы здесь не приводим, оказывается довольно громоздким. Таким образом, дополнительное изменение фазы присущее только неоднородным гиротропным средам. То, что величины  $s$  и  $M$  в (13), вообще говоря, зависят от частоты, вовсе не означает, что фаза  $\delta$  дает поправки к фазовой скорости, обусловленные неоднородностью среды (доказательство см. ниже).

В магнитоактивной плазме изменение направления внешнего магнитного поля на обратное влечет за собой перемену знака у  $\delta$ . В самом деле, при замене  $H_0$  на  $-H_0$  вектор поляризации  $f$  переходит в  $f^*$  [10]:

$$f_1(-H_0) = f_1(H_0), \quad f_2(-H_0) = -f_2(H_0). \quad (14)$$

Вектор  $s$  при этом не изменится, тогда как величина  $M$  изменяет знак на противоположный. Вследствие эрмитовости  $\epsilon_{ik}$  коэффициент преломления  $p$  сохранит прежнее значение. В результате из (13) получим, что  $\delta(-H_0) = -\delta(H_0)$ .

Заметим, что фазу  $\delta$  можно было бы отнести не к скаляру  $\Phi$ , а непосредственно к вектору поляризации  $f$  и рассматривать вектор

$$F = fe^{i\delta} = F_1 + iF_2, \quad (15)$$

где  $F_1 = f_1 \cos \delta - f_2 \sin \delta$ ,  $F_2 = f_1 \sin \delta + f_2 \cos \delta$ . В этом случае из условия совместности (9) вместо (13) получаем следующее уравнение:

$$F_2 \operatorname{rot}(p \times F_1) + (p \times F_1) \operatorname{rot} F_2 - F_1 \operatorname{rot}(p \times F_2) - (p \times F_2) \operatorname{rot} F_1 = 0. \quad (16)$$

В несколько отличной от (16) форме оно было приведено в [10], где фактически был рассмотрен случай, описываемый соотношением (15).

Важно подчеркнуть, что вектор  $F$ , а стало быть и векторы  $E$  и  $H$  не зависят от условностей выбора вектора поляризации  $f_1$ , который, как сказано выше, определен с точностью до множителя  $e^{i\beta}$  [14]. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что векторы  $F = fe^{i\delta}$ , и  $\hat{F} = \hat{f}e^{i\hat{\delta}}$ , где  $\hat{f} = fe^{i\beta}$ , совпадают при любых  $\beta = \beta(x, y, z)$ . Легко видеть, что фаза  $\hat{\delta}$ , определяемая из (13а) при подстановке туда  $\hat{f} = fe^{i\beta}$ , равна  $\hat{\delta} = \delta - \beta$ , так что действительно  $\hat{F} = F$ . Следовательно, фаза  $\delta$  не дает поправок к фазовой скорости волны.

Вообще говоря, фаза волны  $\delta$  в анизотропной среде претерпевает изменения не только вследствие неоднородности среды, но также и при прохождении каустических поверхностей. Такие изменения фазы мы здесь не рассматриваем. Укажем только, что при прохождении волны вблизи простой каустики фазы появляется сдвиг  $\delta = -\pi/2$  (см. [14] и [19]).

## 6. ПРИМЕР. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В общем случае фаза  $\delta$  весьма сложным образом зависит от параметров среды и геометрических характеристик луча. Эта зависимость существенно упрощается при распространении волн высокой частоты в магнитоактивной плазме, когда  $u = \omega_H^2/\omega^2 \ll 1$ ,  $v = \omega_0^2/\omega^2 \ll 1$  ( $\omega_H = eH_0mc$  — гирочастота, а  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m$  — плазменная частота)\* и угол  $\tau$  между  $\mathbf{p}$  и статическим магнитным полем  $\mathbf{H}_0$  не очень близок к  $\pi/2$ , так что можно ограничиться рассмотрением магнитооптических эффектов первого порядка (это аналогично квазипротодальному приближению [3]). В этом случае нормальные волны обладают поляризацией, близкой к круговой, а продольная компонента электрического поля  $E_t = (tE)$  мала по сравнению с поперечной [3]. Это означает, что  $(tf) \approx 0$  и, как следствие,  $s \approx 2t$ . Тогда из формулы (13а) получаем

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{M}{2}. \quad (17)$$

Вычислим величину  $M$  сначала для волны с левой круговой поляризацией. Будем для определенности считать вещественной ту компоненту вектора поляризации, которая лежит в плоскости  $(sH_0)$ , касающейся одновременно луча и силовой линии внешнего магнитного поля. Посредством  $\Psi$  обозначим угол между вектором нормали к лучу  $\mathbf{n}$  и указанной плоскостью. Используя условие  $2(tf) \approx (fs) = 0$ , разложим вектор  $f = f_1 + if_2$  на компоненты вдоль  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$f = f_1 + if_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(n \cos \Psi - b \sin \Psi) - \frac{i}{\sqrt{2}}(n \sin \Psi + b \cos \Psi). \quad (18)$$

Подстановка (18) в (17) дает

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{d\Psi}{ds}, \quad (19)$$

где  $d\sigma$  — элемент длины луча (в изотропной среде  $d\sigma = V^- d\tau$ ),  $T$  — радиус кручения луча.

Еще более простое выражение получается при другом выборе  $f$ , при котором вещественная компонента  $f_2$  параллельна вектору нормали (мнимая компонента  $f_2$  при этом параллельна бинормали):

$$f = f_1 + if_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(n - ib). \quad (20)$$

При таком выборе направлений вещественной и мнимой компонент для волны, поляризованной по левому кругу, имеем

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{T}. \quad (21)$$

Для правополяризованной волны знак  $\delta$  в формулах (19) и (21) следует заменить на обратный.

Формула (21) по своему виду напоминает выражение  $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T}$ , полученное Рытовым [1, 2] для угла  $\theta$  между электрическим вектором

\* Требование  $u \ll 1$  не обязательно. Мы принимаем это условие для того, чтобы легче было перейти к изотропной среде (см. ниже).

линейно-поляризованной волны и нормалью  $\mathbf{n}$  в изотропной среде. Покажем, что при квазипротодольном распространении высокочастотных волн между  $\delta$  и  $\theta$  действительно существует определенная связь.

Представим поле электромагнитной волны в виде суммы двух волн, поляризованных по левому ( $E_+$ ) и правому ( $E_-$ ) кругу,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = |\Phi_+| \mathbf{f}_+ e^{i\delta} + \exp\left(ik \int_0^\sigma p_+ d\sigma\right) + |\Phi_-| \mathbf{f}_- e^{i\delta} - \exp\left(ik \int_0^\sigma p_- d\sigma\right). \quad (22)$$

При  $v = \omega_0^2/\omega^2 \ll 1$  и  $u = \omega_H^2/\omega^2 \ll 1$  коэффициенты преломления  $p_+$  и  $p_-$  близки друг к другу [3]:

$$p_\pm = 1 - \frac{1}{2}v \pm \frac{1}{2}v\sqrt{u}\cos\gamma.$$

В силу малости разности коэффициентов преломления  $\Delta p = p_+ - p_- = v\sqrt{u}\cos\gamma$  траектории лучей для обеих нормальных волн практически совпадают.

Пусть в начальной точке ( $\sigma = 0$ ) суммарное поле  $\mathbf{E}$  линейно поляризовано и  $|\Phi_+(0)| = |\Phi_-(0)|$ . Вследствие близости лучей можно считать, что равенство амплитудных множителей  $|\Phi_+(\sigma)|$  и  $|\Phi_-(\sigma)|$  сохраняется вдоль всей траектории. Обозначив  $|\Phi_+(\sigma)| = |\Phi_-(\sigma)| = |\Phi(\sigma)|/\sqrt{2}$  и подставив в (22) векторы поляризации  $\mathbf{f}_+ = (1/\sqrt{2})(\mathbf{n} - i\mathbf{b})$  и  $\mathbf{f}_- = (1/\sqrt{2})(\mathbf{n} + i\mathbf{b})$ , получаем

$$\mathbf{E} = |\Phi(\sigma)| (\mathbf{n} \cos\theta + \mathbf{b} \sin\theta) \exp\left[ik \int_0^\sigma \left(1 - \frac{1}{2}v\right) d\sigma\right], \quad (23)$$

где

$$\theta = \delta + \Psi,$$

$\theta$  — угол поворота плоскости поляризации,  $\delta = \delta_+ = -\delta_- = \int_0^\sigma d\sigma/T$  — дополнительный набег фазы, определяемый по формуле (21), а  $\Psi$  — фардаевский угол вращения плоскости поляризации:

$$\Psi = \frac{kT}{2} \int_0^\sigma \Delta p d\sigma = \frac{\omega}{2c} \int_0^\sigma \frac{\omega_H \omega_0^2}{\omega^3} \cos\gamma d\sigma = \frac{2\pi e^3}{m^2 c^2 \omega^2} \int_0^\sigma N H_0 \cos\gamma d\sigma.$$

Удельное вращение плоскости поляризации, т. е. величина  $\frac{d\theta}{d\sigma}$ , связано с характеристиками луча и среды следующим образом:

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{d\delta}{d\sigma} + \frac{d\Psi}{d\sigma} = \frac{1}{T} + \frac{k \Delta p}{2}. \quad (24)$$

В изотропной среде  $\Delta p = 0$  и формула (24) дает известный закон вращения плоскости поляризации Рытова\*:

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{T}.$$

\* Вообще говоря, переход от суперпозиции двух нормальных волн (22) к волнам в изотропной среде незакончен, поскольку при  $\Delta p \rightarrow 0$  нормальные волны нельзя считать независимыми друг от друга. Однако в случае гиротропного слоя этот переход допустим, так как их взаимодействием при  $\Delta p \rightarrow 0$  можно пренебречь [3].

Формулы (21) и (24) сохраняют силу и в оптически активной среде, в которой материальное уравнение имеет вид  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + i\eta(\mathbf{E} \times \mathbf{t})$  [18]. В этом случае в (24)  $\Delta p = \eta$ .

## 7. АНИЗОТРОПНАЯ СРЕДА СО СЛАБЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

В поглощающей анизотропной среде тензор диэлектрической проницаемости не является эрмитовым:  $\epsilon_{ik}^* \neq \epsilon_{ki}$ . Представим тензор  $\epsilon_{ik}$  в виде суммы  $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{\text{e}} + \epsilon_{ik}^{\text{a}}$ , где  $\epsilon_{ik}^{\text{e}} = (1/2)(\epsilon_{ki} + \epsilon_{ik}^*)$  — эрмитова, а  $\epsilon_{ik}^{\text{a}} = (1/2)(\epsilon_{ik} - \epsilon_{ki}^*)$  — антиэрмитова части тензора  $\epsilon_{ik}$ , и будем считать антиэрмитову часть  $\epsilon_{ik}^{\text{a}}$  малой величиной.

Для того, чтобы сохранить формальные разложения амплитуд поля по степеням  $1/k$ , положим  $\epsilon_{ik}^{\text{a}} = k^{-1} \eta_{ik}$ , что эквивалентно введению малого параметра  $\mu$  перед коэффициентом поглощения в работах [1, 2]. Материальное уравнение записывается теперь как  $D_i = \epsilon_{ik}^{\text{e}} E_k + k^{-1} \eta_{ik} E_k$ . В результате в уравнениях последовательных приближений (3) вектор  $\mathbf{X}^{(m-1)} = -\text{rot } \mathbf{H}^{(m-1)}$  заменится на  $-\text{rot } \mathbf{H}^{(m-1)} + i \hat{\eta} \mathbf{E}^{(m-1)}$ , а условие совместности (9) примет вид

$$\mathbf{E}^* \mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{H}^* \mathbf{Y}^{(0)} = -\mathbf{E}^* \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \text{rot } \mathbf{E} + i \mathbf{E}^* \hat{\eta} \mathbf{E} = 0. \quad (25)$$

Предполагается, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют системе уравнений (4), в которых тензор  $\epsilon_{ik}$  заменен на  $\epsilon_{ik}^{\text{e}}$ .

Такую же замену  $\epsilon_{ik}$  на  $\epsilon_{ik}^{\text{e}}$  нужно произвести и в локальном дисперсионном уравнении (5), при помощи которого находится эйконал  $\phi$  и траектории лучей. Отсюда следует, что в анизотропных средах поглощение влияет на ход лучей лишь во втором порядке малости, а в нулевом приближении теории возмущений картина лучей такая же, как и в непоглощающей среде. Для изотропных сред это было установлено Гильбертом [19].

В силу антиэрмитовости тензора  $\eta_{ik}$  величина  $i \mathbf{E}^* \hat{\eta} \mathbf{E}$  в (21) вещественна. Поэтому мнимая часть (21) при учете поглощения сохраняет прежний вид и фаза  $\delta$  по-прежнему подчиняется уравнению (13). Обращение в нуль вещественной части (25) дает закон сохранения энергии в виде

$$\text{div}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) - 2i \mathbf{E}^* \hat{\eta} \mathbf{E} = 0.$$

После подстановки  $\mathbf{E} = \Phi \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{H} = \Phi (\mathbf{p} \times \mathbf{f})$ , получаем

$$\text{div}(|\Phi|^2 \mathbf{s}) + |\Phi|^2 G = 0, \quad (26)$$

где  $\mathbf{s}$  определяется выражением (12), а

$$G = G^* = -2if_i^* \eta_{ik} f_k = -2ikf_i^* \epsilon_{ik}^a f_k.$$

Уравнение (26) допускает решение

$$|\Phi| = |\Phi_0| \sqrt{\frac{\alpha_0 D(0)}{\alpha D(\tau)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{G}{\alpha} d\tau\right), \quad D(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \tau)}, \quad (27)$$

в котором  $|\Phi_0|$ ,  $D(0)$  соответствуют начальным значениям, заданным на исходной поверхности  $S$ . Множитель  $[D(0)/D(\tau)]^{1/2}$  в (27) описывает изменение амплитуды  $|\Phi|$ , обусловленное необходимостью лучей, тогда как  $\exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{G}{\alpha} d\tau\right)$  связана с поглощением энергией в среде,

Как было показано в [11], выражение (27) сохраняет силу при изменении направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  на противоположное. Что же касается фазового сдвига  $\delta$ , то он не зависит от антиэрмитовой части тензора  $\epsilon_{ik}$ . Следовательно, соотношение  $\delta(-\mathbf{H}_0) = -\delta(\mathbf{H}_0)$  справедливо и в слабопоглощающей среде.

Независимость фазы  $\delta$ , а также вектора поляризации  $f$  от поглощающих свойств среды означает, что в первом порядке относительно антиэрмитовой части тензора  $\epsilon_{ik}$  поляризация волн в слабопоглощающей анизотропной среде та же, что и в непоглощающей среде. Это утверждение находится в согласии с выводом, сделанным Рытовым для изотропных сред [1, 2].

В заключение авторы выражают глубокую признательность С. М. Рытову и М. Л. Левину за полезное обсуждение и советы, которые были учтены нами при написании статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. М. Рытов, ДАН СССР, 18, 263 ((1938).
- 2 С. М. Рытов, Диссертация, ФИАН, М., 1940.
- 3 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
- 4 Дж. А. Ратклифф, Магнито-ионная теория и ее приложение к ионосфере, ИЛ, М., 1962.
- 5 K. G. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, 1961.
- 6 S. Weinberg, Phys. Rev., 126, 1899 (1962).
- 7 H. Poeverlein, Phys. Rev., 128, 956 (1962).
- 8 J. Bazer, J. Hurlsey, J. Geophys. Res., 68, 147 (1963).
- 9 Ю. А. Зайцев, Радиотехника и электроника, 7, № 1826 (1962).
- 10 Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1108 (1966).
- 11 Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 6, 756 (1967).
- 12 A. D. Galanin, J. Phys. (USSR), 6, 35 (1942).
- 13 М. Л. Левин, С. М. Рытов, Акуст. ж., 2, 173 (1956).
- 14 R. M. Lewis, Arch. Ratl. Mech. Anal., 20, 191 (1965).
- 15 R. M. Lewis, W. Pressman, J. Different. Equat., 3, 360 (1967).
- 16 Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965
- 17 Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, Гостехиздат, М., 1951.
- 18 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
- 19 В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965
- 20 С. М. Рытов, ЖЭТФ, 17, 930 (1947).
- 21 Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.

Радиотехнический институт АН СССР

Поступила в редакцию  
19 февраля 1968 г.

## ON THE USE OF GEOMETRICAL OPTICS APPROXIMATION IN ELECTRODYNAMICS OF INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA

*Yu. A. Zaitsev, Yu. A. Kravtsov, Yu. Ya. Yashin*

The geometrical-optics solution of Maxwell equations is built for monochromatic normal waves in a non-absorbing anisotropic medium when the polarization degeneration is absent. Attention is paid to the fact that in this case there exists the only (complex) condition of coincidence of the equations of the first approximation from which the equation of the energy flux density conservation is derived, as well as the equation for the wave phase. In an anisotropic dielectric, the wave phase is shown not to be changed. A simple expression for the phase is obtained for the case of high-frequency wave propagation in a magnetoactive plasma. The relation between this phase and the rotation angle of the polarization plane is established. The case of a weakly absorbing anisotropic medium is also considered.

УДК 538.56+51

## О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В МЕТОДЕ ЭТАЛОННЫХ ФУНКЦИЙ

*B. Я. Грошев, Ю. А. Кравцов*

Получены необходимые условия применимости асимптотических решений волнового уравнения, описывающих поведение поля в окрестности гладких участков каустической поверхности и в качестве эталонных использующих функции Эйри. Справедливость необходимых условий применимости проверена на примерах, допускающих точное решение (линейный гармонический осциллятор, круговая каустика, точечный источник в линейном слое).

Основная физическая предпосылка применения метода эталонных функций к волновым задачам формулируется следующим образом: приблизительно подобным лучевым конфигурациям отвечает приблизительно подобная структура поля. Использование этого принципа дает возможность отыскивать приближенное (как правило, асимптотическое) решение различных волновых задач в терминах уже известных решений специальным образом отобранных «эталонных» задач. Очевидно, рассчитывать на получение равномерного по всему пространству приближения можно только при условии, что эталонное решение описывает все качественные особенности задачи. В противном случае хорошее приближение к точному решению можно получить только в ограниченных областях пространства, в которых неучтенные эталонным решением особенности не очень существенны.

Благодаря физической наглядности метода эталонных функций, оказывается возможным сформулировать удобные эвристические критерии применимости тех или иных асимптотических выражений, полученных этим методом. Качественно условия применимости сводятся к требованию, чтобы наиболее существенные черты эталонной задачи сохранялись и в рассматриваемой задаче. Количественно же условия применимости могут быть представлены в виде неравенств, требующих малости изменения величин, являющихся константами в эталонной задаче, на расстояниях порядка характерного пространственного масштаба изменения поля. Например, для применимости метода геометрической оптики необходимо, чтобы поле  $u = Ae^{ikr}$  сохраняло структуру плоской волны в пределах любой области пространства с размерами порядка длины волны  $\lambda$ . Поскольку константами эталонной задачи являются здесь амплитуда  $A$ , градиент эйконала  $\nabla\varphi$  и диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$ , то в методе геометрической оптики эти три величины должны быть практически постоянны на расстояниях порядка  $\lambda$ .

В общем случае термин «константы эталонной задачи» следует понимать в широком смысле. Так, если в качестве эталонной функции берется решение волнового уравнения, отвечающее круговой каустике, то при решении какой-либо конкретной задачи нужно требовать «почти постоянства» радиуса кривизны в масштабе изменения эталонного поля\*.

\* Подобные соображения в сжатой форме были высказаны в [1].

Эвристические оценки описанного типа могут дать, вообще говоря, только необходимые, но не достаточные критерии применимости, поскольку даже при малых отклонениях от эталонных условий задача иногда приобретает новые качественные особенности, не описываемые эталонным решением. Этими особенностями можно, по-видимому, пре-небречь в ограниченных областях пространства, однако границы областей нельзя оценить путем сравнения с эталонной задачей. Классическим примером такого положения являются дифракционные явления, которые не учитываются приближением геометрической оптики, но могут привести к качественным изменениям картины поля даже при постоянстве  $A$ ,  $\nabla\varphi$  и  $\epsilon$  в масштабе  $\lambda$ . Причина заключается в том, что дифракционные явления характеризуются совершенно иным пространственным масштабом (например, радиусом первой зоны Френеля), которого нет в эталонной задаче для метода геометрической оптики (плоская волна в однородной среде).

Основываясь на сказанном выше, мы получим необходимые условия применимости асимптотических решений волнового уравнения, использующих функции Эйри [1-4].

Согласно [1-4], при наличии в неоднородной среде простой каустики, главный член асимптотического (в пределе коротких волн) решения скалярного волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 \epsilon u = 0 \quad (1)$$

дается формулой

$$u = V2^{-1/6} [g_0 v(-k^{2/3}\rho) + ig_1 k^{-1/3} v'(-k^{2/3}\rho)] \exp[i(k\theta + \pi/4)], \quad (2)$$

где  $v(t)$  — функция Эйри, удовлетворяющая уравнению  $v'' - tv = 0$ , а  $v'(t)$  — ее производная. Величины  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $g_0$  и  $g_1$  могут быть выражены через решения уравнений геометрической оптики.

Если  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — решения уравнений эйконала  $(\nabla\varphi_{1,2})^2 = \epsilon$ , а  $A_1$  и  $A_2$  — решения уравнения переноса  $\operatorname{div}(A_{1,2}^2 \nabla\varphi_{1,2}) = 0$ , удовлетворяющие определенным граничным условиям, то

$$\theta = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2), \quad \frac{2}{3} \rho^{3/2} = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1); \quad (3)$$

$$g_0 = \rho^{1/4} \frac{A_2 - iA_1}{V2}, \quad g_1 = \rho^{-1/4} \frac{A_2 + iA_1}{V2}. \quad (4)$$

Как известно, функция Эйри является точным решением волнового уравнения (1) в случае падения плоской волны на линейный слой с  $\epsilon = \epsilon(z) = \epsilon_0 - \epsilon_1 z$  [5, 6]:

$$u = Cv [k^{2/3} \epsilon^{1/3} (z - z_k)] \exp(ikx \sin \alpha), \quad (5)$$

где  $\alpha$  — угол падения, а  $C$  — постоянный амплитудный множитель. Каустическая поверхность представляет собой в данном случае плоскость  $z = z_k = \text{const}$ .

Из точного решения (5) следует, что эталонная задача характеризуется, во-первых, плоской формой каустической поверхности, во-вторых, постоянством амплитудного множителя  $C$ , в-третьих, постоянством  $\epsilon$  вдоль каустики, и, наконец, постоянством градиента  $\epsilon$  по нормали к каустике. Исходя из этого, мы потребуем выполнения следующих условий в окрестности каустики: в масштабе изменения поля 1) каустика должна быть почти плоской, 2) амплитудные множители  $g_0$  и  $g_1$  практически постоянны, 3) диэлектрическая проницаемость — почти по-

стоянная величина в направлении вдоль каустики и 4) градиент  $\epsilon$  мало меняется в поперечном к каустике направлении.

Сформулируем эти условия в виде неравенств. Обозначим через  $\Lambda$  характерный масштаб поля по нормали к каустике, т. е., по существу, пространственный масштаб изменения функции  $v$  ( $-k^{2/3}\rho$ ). Масштаб изменения поля вдоль каустики определяется длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$ . Обычно  $k\Lambda \gg 1$ , так что выполнение перечисленных выше условий для поперечного масштаба  $\Lambda$  автоматически влечет за собой выполнение этих условий и для продольного масштаба  $\lambda$ . Естественно поэтому считать масштабом изменения поля величину  $\Lambda$ .

Обозначим далее через  $\frac{\partial}{\partial n}$  производную по нормали к каустике,

через  $\nabla_{\parallel}$  — оператор дифференцирования в тангенциальном (по отношению к каустике) направлении, а через  $R_k$  — радиус кривизны каустики. В этих обозначениях условия 1)—4) принимают следующий вид:

$$1) R_k \gg \Lambda; \quad (6)$$

$$2) \Lambda \left| \frac{\nabla g_0}{g_0} \right| \sim \Lambda \left| \frac{\nabla g_1}{g_1} \right| \ll 1; \quad (7)$$

$$3) \Lambda \left| \frac{\nabla_{\parallel} \epsilon}{\epsilon} \right| \ll 1; \quad (8)$$

$$4) \Lambda \left| \frac{\partial^2 \epsilon / \partial n^2}{\partial \epsilon / \partial n} \right| \ll 1. \quad (9)$$

В одномерных задачах требуется, очевидно, только выполнение условия (9), которое мы перепишем в виде [7]

$$\Lambda \left| \frac{\epsilon''(z)}{\epsilon'(z)} \right| \ll 1, \quad (10)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $z$ . Неравенство (10) означает, что в окрестности точки поворота  $z = z_0$  в масштабе  $\Lambda$  отклонения профиля  $\epsilon(z)$  от линейного закона должны быть малыми. Оно является естественным обобщением условия  $\lambda |\epsilon'(z)/\epsilon(z)| \ll 1$  применимости метода геометрической оптики (метода ВКБ) к одномерным задачам в отсутствие точек поворота.

Приведем удобные формулы для характерного масштаба поля  $\Lambda$ , который определим как расстояние (по нормали) от каустики до точки, в которой достигается первый максимум функции Эйри  $v(t)$ .

Как известно,  $v(t)$  имеет максимум при значении аргумента  $t = 1,02$  [8]. Разложив  $t = -k^{2/3}\rho$  в ряд Тейлора по степеням расстояния до каустики  $\Lambda$  и ограничившись в этом разложении первым (линейным) членом, для  $\Lambda$  получаем приближенное уравнение  $k^{2/3} \frac{\partial \rho}{\partial n} \Lambda \simeq 1,02$ , откуда

$$\Lambda \simeq k^{-2/3} \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Как было показано в [10], для производной  $\frac{\partial \rho}{\partial n}$  имеет место следующая простая формула\*:

\* Это находится в согласии с результатами работы [9], в которой указано, что структура поля в окрестности каустики существенно зависит от эффективного радиуса кривизны  $R_{\text{эфф}} = |R_{\perp}^{-1} \pm R_k^{-1}|^{-1}$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = \left[ 2\varepsilon_k \left| \frac{1}{R_k} \pm \frac{1}{R_l} \right| \right]^{1/3}, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_k$  — значение диэлектрической проницаемости, а  $R_l$  — радиус кривизны луча в рассматриваемой точке на каустике. Знак плюс в формуле (12) относится к случаю, когда луч и каустика лежат по разные стороны от общей касательной к ним. В противном случае следует брать знак минус.

По-видимому, эта формула справедлива и в трехмерном случае, если под  $R_k$  понимать кривизну кривой, получающейся в результате сечения каустической поверхности плоскостью, соприкасающейся с лучом. В пользу этого предположения говорит и то, что с точностью до членов третьего порядка малости луч в окрестности каустики можно считать плоской кривой.

Справедливость полученных оценок мы проверили на примерах, допускающих точное решение. Асимптотическое решение в случае круговой каустики радиуса  $R_k = a$  в вакууме ( $\varepsilon = 1$ ) рассмотрено в работах [1, 3, 4]. В этой задаче масштаб поля  $\Lambda$  равен  $\sqrt[3]{a/2k^2}$ , так что условие малости  $\Lambda$  по сравнению с радиусом кривизны (6) запишется в виде

$$\frac{\Lambda}{a} = (2k^2 a^2)^{-1/3} \ll 1. \quad (13)$$

Остальные неравенства (7) — (9) при этом также выполнены.

Неравенство (13) утверждает, что эйри-асимптотика удовлетворительно аппроксимирует точное решение  $J_{ka}(kr) e^{ika}$  при  $ka \gg 1$  ( $J_{ka}$  — функция Бесселя порядка  $ka$ ). Оказывается, однако, что асимптотическое решение для круговой каустики дает хорошее приближение и при  $ka \sim 1$ . В качестве иллюстрации этого утверждения на рис. 1 дана радиальная часть асимптотической волновой функции при  $ka = 1$ . Там же приведена точная радиальная волновая функция  $J_1(kr)$  и радиальная часть геометро-оптического решения [1, 4], которое расходится на каустике  $r = a$ .

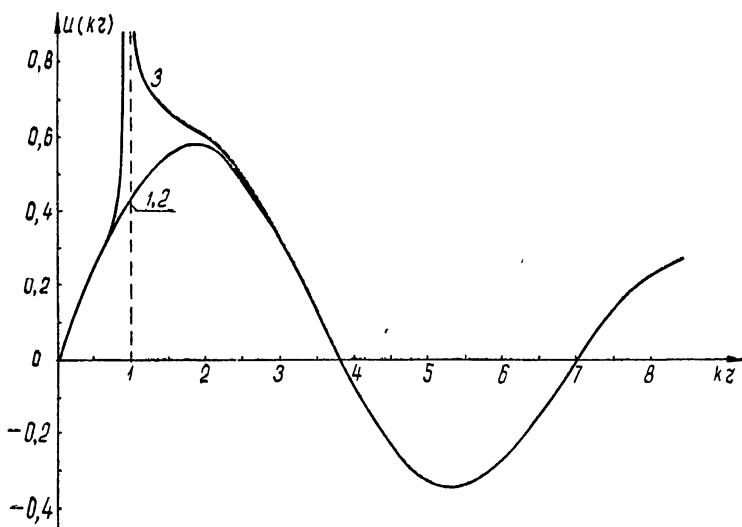


Рис. 1. Сравнение точного и приближенного решений в окрестности круговой каустики в вакууме ( $ka = 1$ ):

1) — точное решение; 2) — эйри-асимптотика; 3) — геометро-оптическое решение (кривые 2 и 3 совпадают с графической точностью).

Заметим, что расхождение между точным и приближенным решениями на каустике  $r = a$  достигает 10% при  $ka \sim 1/2$ . Таким образом, эйри-асимптотикой в этой задаче можно пользоваться даже при  $a = 1/2 k \approx \lambda/12$ , т. е. даже тогда, когда радиус каустики в 12 раз меньше длины волны. «Большой» параметр задачи  $M = a/\Lambda = (2k^2a^2)^{1/3}$  при этом равен 0,8.

Для точечного источника в линейном слое с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon_0 - \epsilon_1 z$ , расположенного в точке  $x_0, z_0$ , каустика имеет форму параболы  $4n_0^2(\epsilon_0 - \epsilon_1 z) = \epsilon_1^2(x - x_0)^2$ , где  $n_0^2 = \epsilon_0 - \epsilon_1 z_0$  [1, 4]. Масштаб поля  $\Lambda$  и радиус кривизны каустики определяются следующими выражениями:

$$\Lambda = \Lambda_0 \left[ 1 + \frac{\epsilon_1^2(x - x_0)^2}{4n_0^4} \right]^{1/2}, \quad R_k = R_{k0} \left[ 1 + \frac{\epsilon_1^2(x - x_0)^2}{4n_0^4} \right]^{3/2}.$$

Здесь  $R_{k0} = 2n_0^2/\epsilon_1$  и  $\Lambda_0 = (k^2\epsilon_1)^{-1/3}$  — значения  $R_k$  и  $\Lambda$  в вершине параболы. Можно показать, что неравенства (6) — (9), будут удовлетворены, если выполнено условие

$$M = \frac{R_{k0}}{\Lambda_0} = \frac{2(z_k - z_0)}{\Lambda_0} \gg 1, \quad (14)$$

которое имеет простой физический смысл: источник, расположенный в точке  $(x_0, z_0)$ , должен быть удален от вершины каустики  $(x_k, z_k)$  на расстояние, значительно превышающее масштаб поля  $\Lambda_0$ .

На рис. 2 показано поведение модуля точного [11] и приближенного [1, 4] решений в горизонтальной плоскости  $z = z_0$ , в которой расположен источник. При этом «большой» параметр задачи  $M$  равен единице, т. е. источник расположен на расстоянии  $\Lambda_0/2$  от вершины каустики. По оси абсцисс на рис. 2 отложен параметр  $\beta = \epsilon_1^2(x - x_0)^2 / 4n_0^4$  от источника. При  $\beta \rightarrow 0$  функции стремятся к бес-

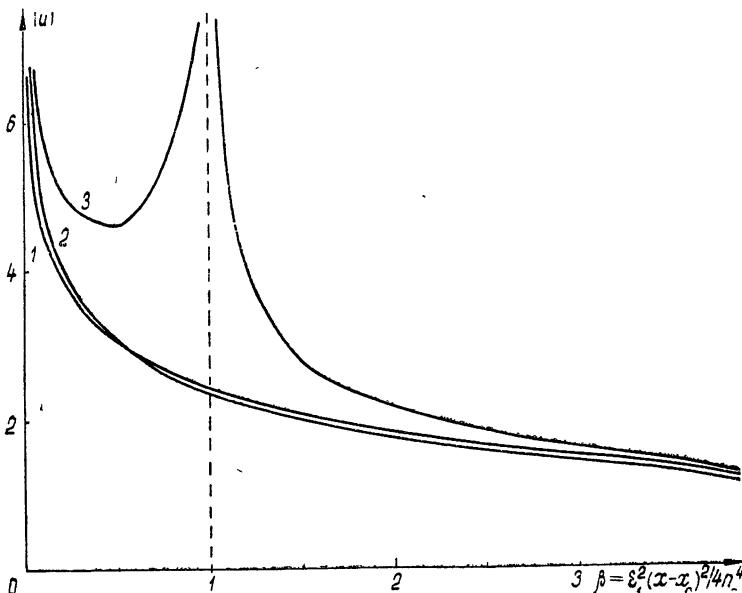


Рис. 2. Сравнение точного и приближенных решений для задачи об излучении точечного источника в линейном слое ( $z_k - z_0 = \Lambda_0/2$ ): 1) —точное решение; 2) —эйри-асимптотика; 3) —геометро-оптическое решение.

конечности как  $1/(|x - x_0|)^{1/2}$ . Расхождение между точным решением и эйри-приближением не превышает 12%. Для сравнения на рис. 2 показан модуль геометро-оптического решения [1, 4], которое на каустике (в данном случае при  $\beta = 1$ ) расходится.

В работе [10] была рассмотрена также эйри-асимптотика собственных функций линейного квантового осциллятора, который описывается уравнением Шредингера и имеет точное решение  $H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$  ( $H_n(\xi)$  — полиномы Эрмита, а  $\xi = (m\omega/\hbar)^{1/2} x$  — безразмерная координата) [12]. Условие применимости эйри-асимптотики, полученное при помощи неравенства (10), записывается в виде

$$[2(2n+1)^2]^{-1/3} \ll 1, \quad (15)$$

где  $n$  — квантовое число.

Оказалось, что асимптотические формулы, использующие функции Эйри, хорошо описывают волновую функцию даже для основного состояния ( $n = 0$ ), когда «большой» параметр задачи  $M = [2(2n+1)^2]^{1/3}$  равен 1,25. На рис. 3 показана точная волновая функция основного состояния  $e^{-\xi^2/2}$  и нормированное на единицу при  $\xi = 0$  приближенное асимптотическое решение, полученное методом эталонных функций. Расхождение между кривыми на рис. 3 не превышает 3%. При нормиров-

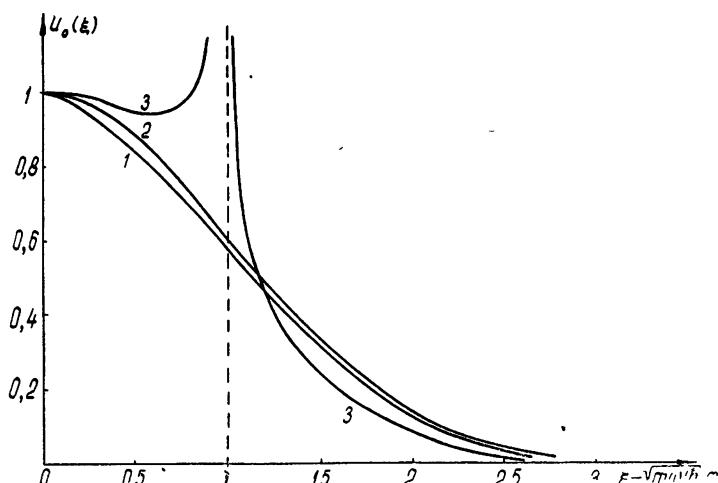


Рис. 3. Сравнение точного и приближенного решений для линейного квантового осциллятора в основном состоянии ( $n=0$ ):

1) — точное решение; 2) — эйри-асимптотика; 3) — квазиклассическое решение (приближение ВКБ).

ке  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\xi)|^2 d\xi = 1$  совпадение было бы еще более хорошим. Для сравнения на рис. 3 приведено квазиклассическое решение, которое расходится в точке поворота  $\xi = 1$ .

Таким образом, асимптотические решения, использующие функцию Эйри, неплохо аппроксимируют строгие решения волновых задач даже при условии, что большой параметр задачи сравним с единицей. Это указывает на возможность применения асимптотических выражений, полученных при помощи метода эталонных функций даже «на нижнем пределе» их применимости.

Авторы глубоко признательны С. М. Рытову за помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, Акуст. ж., 14, 1 (1968).
2. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 664 (1964).
3. D. Ludwig, Comm. Pure Appl. Math., 19, 215 (1966).
4. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
7. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 876 (1965).
8. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946; Таблицы функций Эйри, изд. АН СССР, М., 1946
9. T. Pearcey, Phil. Mag., 37, 311 (1946).
10. В. Я. Грошев, Дипломная работа, МФТИ, 1968.
11. Б. Т. Кормилицын, Радиотехника и электроника, 11, 1130 (1966).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Нерелятивистская теория, Физматгиз, М., 1963.

Радиотехнический институт АН СССР

Поступила в редакцию  
19 февраля 1968 г.

## APPLICABILITY LIMITS OF ASYMPTOTIC EXPRESSIONS IN THE METHOD OF STANDARD FUNCTIONS

*V. Ya. Groshev, Ya. A. Kravtsov*

The necessary conditions of applicability of wave equation asymptotic solutions describing the field behaviour in the vicinity of smooth parts of caustic surface and using the Airy functions as standard ones have been obtained. The validity of the necessary conditions of applicability is proved by the examples permitting an exact solution (linear harmonic oscillator, circular caustics, point source in a linear layer).

УДК 621.371.332.4

## ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ И КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЯНИИ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ И МАГНИТОСФЕРЕ

*В. Ю. Трахтенгерц*

Рассмотрены особенности индуцированного и комбинационного рассеяния высокочастотных радиоволн в ионосфере и магнитосфере. В случае комбинационного рассеяния на магнитосферных неравновесных плазменных шумах поперечники рассеяния могут значительно превысить классический поперечник рассеяния на свободных электронах. При этом более эффективным может оказаться метод исследования магнитосферной плазмы, основанный на приеме комбинационных частот рассеянного излучения, сдвинутых относительно исходной частоты на плазменную частоту и гармоники электронных гирочастот. Обсуждаются возможности детектирования плазменной турбулентности в ионосфере с помощью радиосигналов от ИСЗ.

В данной работе рассматриваются особенности индуцированного и комбинационного рассеяния радиоволн в ионосфере и магнитосфере, а также некоторые случаи генерации электромагнитного излучения плазменной турбулентностью.

Следует отметить, что отдельные вопросы, касающиеся комбинационного рассеяния радиоволн в ионосфере (в частности, рассеяние на тепловых плазменных флюктуациях, на ионозвуковых колебаниях в зоне полярных сияний и т. д.), в той или иной мере уже рассматривались рядом авторов [1-3].

В настоящей статье предпринята попытка единым образом подойти к вопросам рассеяния радиоволн в магнитосфере\*, исходя из представлений о магнитосфере как о слаботурбулентной плазме и используя математический аппарат слаботурбулентной плазмы. Такой подход кажется разумным, поскольку прохождение неоднородностей в магнитосфере, на которых происходит рассеяние, в большинстве случаев связано с разнообразными собственными колебаниями магнитосферной плазмы в виде звуковых, плазменных и электромагнитных волн. Энергия этих волн может намного превышать уровень тепловых флюктуаций. Причиной последнего обстоятельства служат различные плазменные неустойчивости, которые могут возникать в околоземной плазме (пучковые, анизотропные, дрейфовые, токовые и др.) [4].

Изучение рассеяния на указанных турбулентностях представляет интерес не только с точки зрения анализа искажения сигналов передающей станции, но и с точки зрения детектирования самих турбулентностей в различных областях магнитосферы. Выделение таких турбулентных областей в магнитосфере и определение уровня турбулентности очень важно для решения вопросов ускорения частиц в магнитосфере, динамики радиационных поясов, происхождения полярных сияний и т. д. Кроме того, рассматриваемые вопросы имеют прямое отношение к методу некогерентного рассеяния радиоволни, широко используемо-

\* Термин «магнитосфера» в данном случае объединяет околоземную плазму, начиная, примерно, с  $E$ -слоя и выше.

му в настоящее время для определения параметров ионосферной плазмы. Действительно, наличие низкочастотной турбулентности со спектром, примыкающим к нулевым частотам, может существенно изменить сечение обратного рассеяния и привести к неверной интерпретации результатов эксперимента\*.

Если в магнитосфере есть интенсивная высокочастотная плазменная турбулентность (на характерных частотах плазмы  $\omega = \omega_L, s\omega_H$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , где  $\omega_L = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$  — ленгмюровская частота электронов,  $N$  — концентрация электронов,  $\omega_H = eH/mc$  — электронная гирочастота), то более чувствительным и удобным может оказаться метод определения профиля концентрации и зависимости магнитного поля от высоты по комбинационному рассеянию на этих турбулентностях. Ниже мы остановимся на количественной оценке отмеченных эффектов.

Нужно отметить, что рассеяние радиоволн на турбулентной плазме безотносительно к магнитосфере рассматривалось в ряде работ [5–8]. В частности, в [7] подробно обсуждаются затрагиваемые в данной статье вопросы взаимодействия высокочастотных радиоволн с ленгмюровскими и ионозвуковыми волнами. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся самыми необходимыми формулами, отсылая за подробностями к [6, 7].

В конкретных расчетах будем исходить из известного в теории слаботурбулентной плазмы нелинейного уравнения переноса энергии, учитывающего квадратичные по энергии волн нелинейные эффекты [5, 6]:

$$v_{rp} \cos \chi \frac{dW_k}{dz} = a_k - \gamma_k W_k + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 V_{kk_1 k_2} W_{k_1} W_{k_2} + \\ + W_k \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \widetilde{V}_{kk_1 k_2} W_{k_2}, \quad (1)$$

где  $W = \int W_k d\mathbf{k}$  — плотность энергии волн в единице рассеивающего объема,  $d\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega$ ,  $d\Omega$  — элемент телесного угла, спектральная плотность энергии  $W_\omega(\omega, \Omega)$  связана с  $W_k$  простым соотношением  $W_\omega = W_k k^2 / v_{rp}$ ,  $v_{rp}$  — групповая скорость волн,  $\chi$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}_{rp}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  — волновые векторы соответственно рассеянной, падающей волн и собственных колебаний плазмы.

В уравнении (1) первые два члена соответствуют спонтанному и индуцированному рассеянию на частицах, последние члены описывают комбинационное рассеяние на заданных собственных колебаниях магнитосферной плазмы. В уравнении опущены члены, соответствующие линейному поглощению.

Применимость уравнения (1) определяется следующими условиями.

1. Плотность энергии электромагнитного поля в плазме должна быть достаточно малой, чтобы ток в плазме можно было разложить в ряд по возрастающим степеням амплитуды поля (борновское приближение).

2. Размер рассеивающей области должен быть много больше длины взаимодействующих волн.

3. Для записи третьего члена в указанном виде необходимо выполнение условия случайности фаз, т. е.  $l_\phi \ll L$  ( $l_\phi$  — длина цуга турбулентных пульсаций,  $L$  — характерный размер рассеивающей области).

Рассмотрим рассеяние на частицах, описываемое первыми двумя

\* В частности, к появлению ложных спорадических слоев ионизации, немонотонной зависимости концентрации электронов от высоты и т. д.

членами уравнения (1). Коэффициенты  $a_k$  и  $\gamma_k$  имеют следующий вид [6]\*:

$$a_k = \frac{c}{2\pi} \sum_j \int \sigma_k^j W_{k_1} dk_1; \quad (2)$$

$$\gamma_k = (2\pi)^3 \sum_j c \int \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \frac{\sigma_k^j}{T_j} W_{k_1} dk_1, \quad (3)$$

где  $\sigma_\omega = k^2 \sigma_{k_1} / v_{rp}$  — спектральный поперечник рассеяния единицы объема, индекс определяет сорт частиц,  $T_j$  — температура плазмы в энергетических единицах,  $k_1$  и  $k$  — соответственно волновые векторы падающей и рассеянной волн.

Как видно из выражения (3),  $\gamma_k$  может быть как больше ( $\omega > \omega_1$ ), так и меньше нуля ( $\omega < \omega_1$ ). В приближении заданного поля  $W_{k_1}$  на выходе слоя толщиной  $L$  будем иметь

$$W_k = \frac{a_k}{\gamma_k} \left[ 1 - \exp \left\{ - \int_0^L \gamma_k dz / v_{rp} \cos \chi \right\} \right]. \quad (4)$$

Таким образом, индуцированное рассеяние играет существенную роль, если оптическая толщина  $\tau_p = \int_0^L \gamma_k dz / v_{rp} \cos \chi$  для рассеяния больше единицы. При этом поперечник рассеяния резко возрастает. В случае  $\tau_p \ll 1$  получаются формулы, которые описывают обычное некогерентное рассеяние радиоволн. Например, при  $kD_e \ll 1$  ( $D_e = v_{Te}/\omega_L$  — дебаевский радиус,  $v_{Te} = \sqrt{T_e/m}$  — тепловая скорость электронов) и  $\omega \gg \omega_L$  имеем классический поперечник рассеяния ( $k_1 \uparrow k$ )

$$\sigma_\omega = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{N}{V2\pi} \frac{1}{|\Delta k| v_{Te}} \exp \left\{ - \frac{(\omega - \omega_1)^2}{2(\Delta k)^2 v_{Te}^2} \right\}, \quad (5)$$

$\Delta k = k_1 - k$ ,  $v_{Te} = \sqrt{T_e/M}$ ,  $M$  — масса ионов.

Оптическую толщину  $\tau_p$  нетрудно вычислить, если воспользоваться формулами (3) и (5). Полагая  $k_1 = -k$  (обратное рассеяние), получим

$$\tau_p \approx \frac{\sqrt{\pi}}{10} \frac{\omega_L^4 \tau W_0}{\omega^3 N T_i} \delta, \quad \delta = \begin{cases} 1 & \text{при } \Delta\omega \ll 2kv_{Te}, \\ (2kv_{Te}/\Delta\omega)^2 & \text{при } \Delta\omega > 2kv_{Te}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\tau$  — длительность посылки импульса ( $\Delta\omega/2\pi = 1/\tau$ ). Если выразить плотность энергии  $W_0$  падающей волны в единице объема через мощность излучения в импульсе  $P$  и эффективную площадь антенны  $S_{\text{эфф}}$ , будем иметь

$$\tau_{p \max} \approx \frac{\omega_0^4 S_{\text{эфф}}}{40 \pi^{3/2} \omega c^3 r^2} \frac{P \tau}{NT_i} \delta, \quad (6a)$$

$r$  — расстояние от антенны до рассеивающего объема.

Оценим оптическую толщину  $\tau_p$ , взяв в качестве примера параметры радиолокационной установки Иллинойса (США), используемой для

\* Предполагается, что рассеяние происходит на частицах равновесной ионосферной плазмы с максвелловским распределением по скоростям.

некогерентного рассеяния радиоволн [1]. Подставляя  $f = 41 \text{ МГц}$ ,  $P = 10^7 \text{ вт}$ ,  $\tau \sim 10^{-4} \text{ сек}$ ,  $S \sim 1,6 \cdot 10^4 \text{ м}^2$  и  $r \sim 300 \text{ км}$ , получим  $\tau_p \leq 0,1 \text{ д}$ . Коэффициент  $\delta$  зависит от ионного состава ионосферы на высоте 300 км. В случае атомарного кислорода  $\delta \sim 3 \cdot 10^{-2}$ , в случае водорода —  $\delta \sim 1$ . Если взять  $S_{\text{эфф}} \sim 10^6 \text{ м}^2$ , то индуцированное рассеяние может оказаться при вполне достижимых мощностях в несколько десятков мегаватт.

Рассмотрим теперь комбинационное рассеяние. В исследуемом приближении комбинационное рассеяние радиоволн возможно в том случае, если выполняются условия пространственно-временного синхронизма (условия Брэгга):

$$\omega = \omega_1 \pm \omega_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \quad (7)$$

( $\omega_2$  и  $\mathbf{k}_2$  — частота и волновой вектор в спектре плазменной турбулентности). Это обстоятельство отражено в выражении для вероятности комбинационного рассеяния  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ , которое содержит две  $\delta$ -функции:

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = V_0 \delta(\omega - \omega_1 \pm \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2). \quad (8)$$

Представим плотность энергии исходного электромагнитного импульса на больших расстояниях от антенны в следующем виде\*:

$$W_{\mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1 = W_{\omega_1} d\omega_1 d\Omega = \frac{W_{0\omega}}{V\pi} \exp \left\{ -\frac{(\omega_0 - \omega_1)^2}{(\Delta\omega)^2} \right\} \delta(\Omega - \Omega_0) d\omega_1 d\Omega, \quad (9)$$

В интересующем нас случае, как правило,  $W_k \ll W_{k_1}$ . Поэтому в дальнейшем вынужденное комбинационное рассеяние (последний член в уравнении (1)) не учитывается.

Если подставить (9) в уравнение (1), то для члена, описывающего комбинационное рассеяние, получим выражение

$$\begin{aligned} P_\omega &= \iint W_{\mathbf{k}_1} W_{\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = \\ &= V_0 \frac{W_{0\omega}}{V\pi} \exp \left\{ -\frac{(\omega \pm \omega_2 - \omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2} \right\} W_{\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{k}_1(\omega_1) = \mathbf{k}_1(\omega - \omega_2)$ , а спектральная интенсивность равна

$$W_{0\omega} = \frac{3PS_{\text{эфф}}\tau}{4\pi\lambda^2 r^2 c}, \quad \tau = \frac{1}{\Delta\omega}. \quad (11)$$

Если частота шумов  $\omega_2$  в плазме меньше  $\Delta\omega$ , то, как следует из (10), комбинационное рассеяние приведет к деформации и уширению первоначального спектра. В случае, когда  $\omega_2 \gg \Delta\omega$  ( $\Delta\omega \ll \omega_2$ ), возможно появление гармоник, отстоящих от основной частоты  $\omega_0$  на частоту шума  $\omega_2$ .

Исследуем некоторые конкретные случаи комбинационного рассеяния радиоволн на турбулентностях магнитосферной плазмы. Рассмотрим в качестве примеров комбинационное рассеяние на высокочастотных плазменных волнах с частотой  $\omega \sim \omega_L$ , на свистах ( $\omega \ll \omega_H$ ) и на ионозвуковых волнах с частотой, примыкающей к нулю (для неизотермической плазмы). При оценке поперечников рассеяния на плазменных и ионозвуковых волнах для простоты воспользуемся формулами изотропной плазмы для вероятности рассеяния  $V_0$ . В типичном

\* В качестве примера взят гауссовый спектр. Более общие формулы для произвольного вида исходного импульса можно найти в [7].

для магнитосферы случае  $\omega_L \gg \omega_H$  и для углов  $\alpha$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и магнитным полем  $\mathbf{H}$ , не близких к  $\pi/2$ , это вполне оправдано [9]\*.

Для удобства сравнения будем находить отношение полного поперечного комбинационного рассеяния  $\sigma_k = \int \sigma_\omega d\omega$  к классическому поперечнику комбинационного рассеяния  $\sigma_0 = e^2/mc^2)^2 N_e$ . В случае  $\omega_1 \gg \omega_L$  вероятность  $V_0$  рассеяния на высокочастотных плазменных волнах равна

$$V_0^{III} = (2\pi)^3 \frac{e^2 k_L^2}{8\pi m^2 \omega_1 \omega} \quad (k \downarrow \uparrow k_1). \quad (12)$$

Используя (1), (10) и (12), будем иметь ( $\Delta\omega \ll \omega_L$ )

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_0} \simeq (2\pi)^3 \frac{W_{k_L}}{m v_{\Phi L}^2}, \quad k_L = k - k_1 \simeq 2k, \quad v_{\Phi L} = \frac{\omega_L}{k_L}. \quad (13)$$

В случае теплового равновесия, когда  $W_{k_L} = T/(2\pi)^3$ , получим известный результат:

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_0} = (k_L D)^2, \quad D^{-2} = \frac{4\pi e^2 N}{T}, \quad (13a)$$

$T$  — температура в энергетических единицах.

Если в магнитосфере имеются надтепловые частицы, определяющие уровень плазменных флуктуаций, то в (13а) будет стоять температура надтепловых частиц, и  $\sigma_L/\sigma_0$  возрастает. Таким образом авторы работы [3] объясняют наблюдавшееся на эксперименте увеличение поперечника комбинационного рассеяния. В магнитосфере возможны различные плазменные неустойчивости, которые могут вызвать резкое увеличение уровня плазменных шумов. Разнообразный спектр плазменной турбулентности, связанной с пучковой, конусной и др. неустойчивостями [4], можно ожидать в авроральной зоне, вблизи нейтральных точек, в хвосте магнитосферы и т. д.

Запишем энергию плазменных волн, входящую в (13), в следующем виде:

$$\int W_{k_L} dk_L \simeq W_{k_L} k_L^3 \simeq \varepsilon N_r E, \quad k_L \sim \frac{\omega_L}{\sqrt{2E/m}} = \frac{\omega_L}{v_0}, \quad (14)$$

$$k_L = k - k_1,$$

где  $\varepsilon < 1$  — коэффициент пропорциональности,  $N_r$  и  $E$  — плотность и энергия частиц в геоэффективных потоках. Тогда

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_0} \simeq \pi^3 \varepsilon \frac{v_0^3 N_r}{\omega_L^3}. \quad (15)$$

Полагая, например,  $N_r \sim 10^4 \text{ см}^{-3}$ ,  $E \sim 1 \text{ кэв}$ ,  $N_r v_0 \sim 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ , получим  $\sigma_L/\sigma_0 \simeq 10^8 \varepsilon$ .

Если плазменные неустойчивости играют существенную роль в геофизических процессах, то энергия плазменной турбулентности должна

\* В условиях магнитосферы большой интерес представляет также случай  $\alpha \simeq \pi/2$ , когда возможно комбинационное рассеяние на циклотронных гармониках электронов и ионов.

составлять заметную долю от плотности кинетической энергии потоков геоэффективных частиц (с  $E \geq 1$  кэв), т. е.  $\epsilon$  может достигать значений  $10^{-2} - 1$ .

Таким образом, комбинационное рассеяние может служить чувствительным индикатором плазменной турбулентности в магнитосфере и в ряде случаев на много порядков превосходить по интенсивности некогерентное рассеяние радиоволн. Однако следует помнить, что комбинационное рассеяние возможно лишь при выполнении условий пространственно-временного синхронизма (7), которым не всегда можно удовлетворить. Первое необходимое условие при приеме обратного комбинационного рассеяния — это присутствие в спектре турбулентности волн с  $\mathbf{k}_L \parallel \mathbf{k}_1$ . Далее, если заданы фазовая скорость и частота плазменных волн, то комбинационное рассеяние возможно лишь в том случае, если рабочая частота  $f \leq \frac{\omega_L}{4\pi} \frac{c}{v_\Phi}$ . Например, при  $N \sim 3 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$ ,  $v_\Phi \sim 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $f \leq 25 \text{ Мгц}$ . С другой стороны  $f$  должна быть больше критической частоты  $F$ -слоя.

Аналогичным образом можно оценить комбинационное рассеяние на других типах собственных шумов магнитосферной плазмы. В частности, используя для вероятности рассеяния поперечных волн на ионозвуковых колебаниях, описываемых дисперсионным уравнением  $\omega_s = k_s v_s$  ( $v_s = \sqrt{T_e/M}$ ,  $k_s \ll k_L$ ), выражение

$$V_0^{tst} = \frac{(2\pi)^3}{32\pi} \left( \frac{e}{mv_{T_e}} \right)^2 \frac{\omega_L}{\omega\omega_1}, \quad (16)$$

получим

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_0} \simeq \frac{1}{2} (2\pi)^3 \frac{W_{k_s}}{T_e}, \quad k_s = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 \simeq 2\mathbf{k}; \quad (17)$$

т. е. поперечник комбинационного рассеяния начинает превосходить  $\sigma_0$ , как только  $W_{k_s}$  превысит уровень тепловых флуктуаций.

Оценим поперечник рассеяния на ионозвуковых волнах, используя данные эксперимента, осуществленного на американском спутнике P-11 [10]. Согласно [10] плотность энергии ионозвуковых волн в диапазоне 1,7—14,5 кгц нередко в  $10^3$  раз превышала уровень тепловых флуктуаций. Это соответствует (при выполнении условий синхронизма (7)) увеличению  $\sigma_s/\sigma_0 \sim 10^3$ .

Если частоты ионного звука не выходят за полосу приемного устройства, то возможна значительная ошибка в интерпретации экспериментов по некогерентному рассеянию. На более высоких частотах влияние ионозвуковых волн можно исключить. Действительно, условия (7) не могут быть выполнены, если  $k_s \simeq \omega_s/v < 2\omega/c$ . Полагая  $(\omega_s) \simeq \Delta\omega$ , получим, что частота, на которой не оказывается рассеяние,  $f \gtrsim (c/v_s) \Delta f$ . При  $\Delta f \sim 10^3 \text{ сек}^{-1}$  и  $v_s \sim 10^5 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$   $f \gtrsim 300 \text{ Мгц}$ .

Остановимся еще на одном случае комбинационного рассеяния на электромагнитных волнах УНЧ диапазона. Для простоты рассмотрим случай, когда волновые векторы перпендикулярны магнитному полю. Тогда вероятность комбинационного рассеяния равна

$$V_0^{tmt} = (2\pi)^3 \frac{\omega_0^4}{16\pi^2\omega\omega_1} \frac{n_M^2}{Nmc^2}, \quad (18)$$

а поперечник рассеяния

$$\frac{\sigma_M}{\sigma_0} \simeq (2\pi)^3 \frac{W_{k_M}}{mv_\Phi^2}, \quad k_M = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \quad v_\Phi \simeq \frac{c}{n_M}, \quad (19)$$

где показатель преломления  $n_M \approx \omega_L / V_{\omega_H} \Omega_H$ . В магнитосфере  $n_M^2 \sim 10^4 \div 10^5$ , т. е.  $\sigma_M / \sigma_0 > 1$  уже при  $T_{\text{эфф}} = (2\pi)^3 W_k > 10^2$  эв. Согласно экспериментальным данным [11], реальные температуры могут намного превосходить указанную величину. Однако на интересующих нас рабочих частотах нельзя удовлетворить условиям синхронизма при  $\mathbf{k} \downarrow \mathbf{k}_1$ . Поэтому электромагнитная УНЧ турбулентность не скажется на обратном рассеянии, однако может повлиять на прямое рассеяние (под малым углом).

Значительно проще удовлетворить условиям синхронизма в случае рассеяния под малыми углами по отношению к направлению падающей на рассеивающий объем волны, в частности при комбинационном рассеянии сигналов, передаваемых спутниками. Сделаем некоторые оценки для этого случая. Спектральная плотность потока рассеянного излучения на расстоянии  $r_0$  от спутника равна

$$S_\omega = \int \frac{P_\omega d\Sigma}{r_1^2} = \frac{V_0 \omega^2}{c^4} \int W_{k_2} \frac{S_{\omega_0} d\Sigma}{r_1^2}, \quad (20)$$

где  $P_\omega$  — спектральная мощность рассеянного излучения в единице объема (см. (10)),  $S_{\omega_0} = 3P_{\text{н}} \tau G_c / 4\pi r^2$  — плотность потока энергии в падающей волне на расстоянии  $r$  от спутника ( $G_c$  — коэффициент усиления антенны спутника),  $r_1$  — расстояние от элемента рассеивающего объема до приемной антенны, интегрирование ведется по объему, занятому рассеивающими неоднородностями,  $d\Sigma = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$  (см. рис. 1).

При  $a \gg L$  ( $a$  — расстояние от рассеивающего слоя до приемной антенны,  $L$  — толщина слоя)  $r_1 \approx a / \cos \tilde{\theta}$ . Тогда из (20) можно получить следующую формулу:

$$S_\omega = 2\pi V_0 \frac{\omega^2}{c^4} S_{\omega_0}(a) \widetilde{W}_{k_2} L, \quad (21)$$

где  $\widetilde{W}_{k_2} = G_{\text{нр}} \int W_{k_2}(\psi, \theta) \operatorname{tg} \theta \cos^2 \psi F_{\text{нр}} F_c \Phi(\omega, \psi) d\theta$ ,  $\psi = \theta - \tilde{\theta}$  — угол рассеяния;  $\Phi$  — спектр исходного сигнала;  $S_{\omega_0}(a) = 3P_{\text{н}} \tau G_c / 4\pi a^2$ ;  $F(\theta)$  — форма диаграммы антенны.

Используя выражения (12), (16) и (18) для  $V_0$ , нетрудно получить общую формулу для комбинационного рассеяния на плазменных, ионозвуковых волнах и на свистах:

$$S_\omega = \frac{\pi}{4} \frac{\omega_L^4 L}{c^4} \frac{\widetilde{W}_{k_2}}{m_j N v_{\Phi_a}^2} S_{\omega_0}(a), \quad (22)$$

где  $m_j$  — масса частиц, участвующих в плазменных колебаниях,  $v_{\Phi_a}$  — фазовая скорость волн, на которых происходит рассеяние.

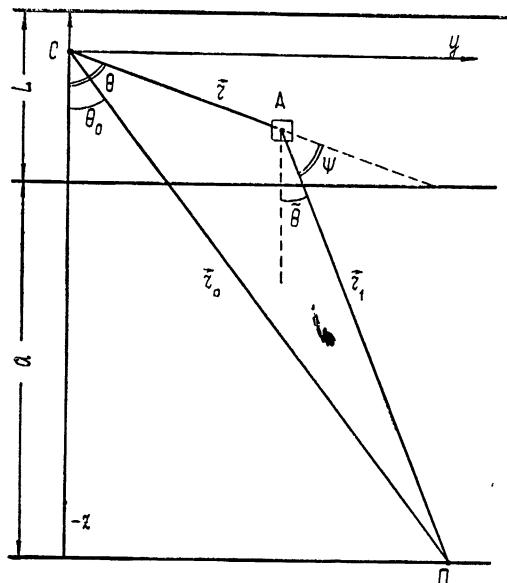


Рис. 1.

Зависимость  $\Phi$  от  $\phi$  в случае узкополосных сигналов  $\Delta\omega \ll \Delta\omega_2$  весьма существенна и приводит к появлению в (22), после интегрирования по  $\theta$ , малого множителя  $\Delta\omega/\Delta\omega_2$  ( $\Delta\omega_2$  — ширина спектра рассеянного сигнала).

Сделаем некоторые конкретные оценки.

*a) Рассеяние на высокочастотных плазменных волнах.* Пусть частота спутника  $f_c \sim 200 \text{ МГц}$ , плотность электронов в рассеивающей области  $N \sim 2,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ ,  $f_L \sim 3 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ ,  $v_\phi \sim 3 \cdot 10^9 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ . При этом  $k_L \sim 0,1 k$  и  $\bar{W}_{k_s} \simeq W_{k_s} \Delta\omega / k v_T e$ .

Полагая  $D_{np} \sim 10$ ,  $D_c \sim 3$ ,  $W_{k_s} k_L^3 \sim \varepsilon N_r E$ ,  $N_r v_0 \sim 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ , получим  $S_\omega \leq 10^{-7} \varepsilon S_{\omega_0}$  ( $\Delta\omega \sim 2\pi$ ).

Если  $P_n \sim 1 \text{ вт}$  и  $r_2 \sim 300 \text{ км}$ , то  $S_{\omega_0} \sim 10^{-12} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ .

На частоте  $f \sim 200 \text{ МГц}$  интенсивность космического фона  $S_{\omega_{k\phi}} \sim 10^{-23} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ . Таким образом,  $S_\omega / S_{\omega_{k\phi}} \sim 10^{-4} \varepsilon$ .

Из оценок можно сделать вывод, что, если увеличить мощность передатчиков на спутниках до  $10-10^2 \text{ вт}$ , то обнаружение достаточно интенсивной высокочастотной плазменной турбулентности с помощью сигналов, передаваемых со спутников, — вполне разрешимая задача.

### б) Рассеяние на ионном звуке.

Принимая  $f \sim 20 \text{ МГц}$ ,  $N \sim 3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ ,  $k_s \sim k = 4 \div 10 \text{ см}^{-1}$  и  $L \sim \sim 10^2 \text{ км}$ , с помощью (22) получим  $S_\omega \sim 10^{-(2+3)\varepsilon} S_{\omega_0}$ , где  $\varepsilon \simeq W_{k_s} k^3 / NT_e$ . Отметим, что флуктуации плотности в этом случае связаны с  $\varepsilon$  следующим соотношением:  $\Delta \bar{N}^2 / N^2 \simeq \varepsilon (\Delta k / k_s)$ .

Таким образом, проводя анализ спутниковых сигналов в полосе  $\Delta f \sim \omega_s / 2\pi^*$ , можно исследовать мелкомасштабные неоднородности с размером  $l \sim 1 \div 100 \text{ м}$ . Заметим, что в случае  $\omega_2 = 0$  из (20) — (22) получаются формулы для рэлеевского рассеяния на флуктуациях плотности [12].

Рассмотренное выше комбинационное рассеяние высокочастотных радиоволн является практически единственным способом наземного детектирования турбулентности магнитосферной плазмы. Если плазменные шумы возбуждаются на небольших высотах вблизи максимума  $F$ -слоя и ниже, то возможен прием электромагнитных шумов на частотах  $\omega_L \div 2\omega_L$ , связанный с конверсией продольных волн в поперечные.

Оценим мощность генерации электромагнитного излучения на первой и второй гармониках ленгмюровской частоты в ионосферных условиях. В случае нерелятивистских фазовых скоростей плазменных волн генерация второй гармоники будет особенно эффективной, если имеются интенсивные плазменные колебания со встречными направлениями волновых векторов, как, например, в случае конусной неустойчивости [4]. Предположим, что в плазме возбуждены плазменные колебания с частотой  $\sim \omega_L$  в узком угле  $\Delta\alpha$  относительно некоторого выделенного направления. Тогда, используя выражение для вероятности слияния двух плазменных волн [5, 6], можно получить следующую формулу для спектральной мощности генерации  $P_{2\omega_L}$  (см. также [13]):

$$P_{\omega_t \sim 2\omega_L} \simeq \left( \frac{v_{\Phi L}}{c} \right)^5 \frac{W_L^2 n_t}{m N v_{T_e}^2} \Delta\alpha \sin^2 \alpha_t \cos^2 \alpha_t, \quad (23)$$

\* При этом нужно отстраиваться от узкополосного ( $\Delta f \sim 1 \text{ Гц}$ ) прямого сигнала спутника.

где  $v_{\Phi_L} = \omega_L/k_L$ ,  $k_L$  — волновой вектор плазменных волн,  $\alpha_t$  — угол наблюдения, отсчитываемый от  $k_L$ ,  $W_L$  — плотность энергии плазменных волн в единице объема ( $k_L \sim \Delta k_L$ ),  $n$  — показатель преломления электромагнитной волны.

Вторая гармоника возбуждается в полосе частот  $\Delta\omega \simeq \omega_0 v_T^2/v_{\Phi}^2$ , однако из-за неоднородности концентрации в ионосфере будет излучаться широкий спектр частот. Максимальная плотность потока энергии  $S_{\omega}$  на расстоянии  $r$  от места генерации будет равна

$$S_{\omega \sim 2\omega_L} \simeq \frac{P_{\omega} v}{r^2} = \left( \frac{v_{\Phi}}{c} \right)^5 \frac{W_L^2}{m N v_{T_e}^2} \Delta f \frac{v}{r^2}, \quad (23a)$$

где  $v$  — объем, занятый плазменными волнами ( $v^{1/3} \ll r$ ).

Аналогичным образом можно найти мощность генерации электромагнитных волн на первой гармонике  $\omega_L$  при слиянии ленгмюровских и ионозвуковых колебаний. Используя формулы работы [5] для вероятности слияния (см. также [14])

$$P_{\omega_t \sim \omega_L} \simeq \left( \frac{v_{\Phi_L}}{c} \right)^5 \frac{n_t}{3\beta_{T_e}^2} \frac{W_L W_s}{m N v_{T_e}^2} \Delta \alpha \sin^2(\hat{k}_L \hat{k}_t), \quad k_s \simeq -k_L, \quad (24)$$

где  $\beta_{T_e} = v_{T_e}/c$ ;  $W_{L,s}$  — плотность энергии волн в единице объема ( $\Delta k_{L,s} \sim k_{L,s}$ );  $n_t$  — показатель преломления электромагнитной волны на частоте  $\omega \sim \omega_L$  ( $|\omega - \omega_L| \sim 3\omega (v_{T_e}/v_{\Phi_L})^2$ ).

Сделаем некоторые количественные оценки. Полагая  $v_{\Phi} \sim \sim 10^9 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $N \sim 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $\Delta \alpha \sim 0,2$ ,  $v \sim 10^8 \text{ км}^3$ ,  $r \sim 10^3 \text{ км}$ ,  $T_x \sim 2000^\circ$  и  $W_L \sim \epsilon N T_e$ , получим для потока энергии электромагнитных волн на второй гармонике  $\omega \simeq 2\omega_L$  следующую величину:  $S_{\omega} \sim 10^{-15} \epsilon^2 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$  ( $f \simeq 20 \text{ МГц}$ ). Таким образом, когда  $\epsilon \geq 10^{-3}$ , сигнал начинает превосходить уровень космического фона ( $S_{\omega_{\text{кф}}} \sim 10^{-21} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ ).

Следует заметить, что при рассмотрении генерации электромагнитных волн плазменной турбулентностью, особенно в случае слияния плазменных и ионозвуковых волн, необходимо учитывать затухание электромагнитных волн из-за столкновений. Поэтому приведенные формулы (23), (24) позволяют лишь сверху оценить интенсивность электромагнитного излучения.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Л. М. Ерухимову за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Некогерентное рассеяние радиоволн, изд. Мир, М., 1965.
2. D. T. Farley, J. Geophys. Res., **68**, № 22, 6083 (1963).
3. F. S. Perkins, R. E. Salpeter, K. O. Youngvess, Phys. Rev. Lett., **14**, 579 (1965).
4. В. Ю. Трахтенгерц, Диссертация, ГГУ, 1967.
5. В. Н. Цытович, УФН, **90**, вып. 3, 435 (1966).
6. Л. М. Коврижных, Тр. ФИАН, **32**, 173 (1966).
7. Л. М. Коврижных, ЖЭТФ, **49**, 1332 (1965).
8. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ, **48**, 1159 (1965).
9. В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖТФ, **36**, № 11, 1915 (1966).
10. F. L. Scarf, G. M. Crook, R. W. Fredricks, J. Geophys. Res., **70**, 3045 (1965).
11. R. A. Helliwell, Whistlers and Related Ionospheric Phenomena, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1964.

- 12 Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 3, 344 (1959).  
 13. R. E. Aamodt, W. E. Diamond, J. Nucl. Energy, Pt. 6, 147 (1964).  
 14. В. В. Зайцев, Астрон. ж., 43, 1148 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 августа 1967 г.

ON INDUCED AND COMBINATIONAL RADIO WAVE SCATTERING  
IN IONOSPHERE AND MAGNETOSPHERE

*V. Yu. Trakhtengerts*

The peculiarities of induced and combinational scattering of  $r-f$  radio waves in the ionosphere and magnetosphere are considered. For the case of combinational scattering by magnetospheric non-equilibrium plasma noises, the cross-sections of scattering may exceed considerably a classical cross-section of scattering by free electrons. Henceby, a method may appear more effective of investigating a magnetospheric plasma based on the reception of combinational frequencies of scattered radiation biased relative to the original frequency to the plasma frequency and the harmonics of electron gyro-frequencies. The possibilities of detecting plasma turbulence in the ionosphere using satellite radio signals are discussed.

УДК 533.951:621.396 67

## КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АНТЕННЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАЗМЕННОГО РЕЗОНАНСА

*Ю. В. Чугунов*

В квазистатическом приближении решается краевая задача для заряженного металлического эллипсоида вращения, помещенного в магнитоактивную плазму, в области частот, где возможно возбуждение плазменной волны. Обсуждаются условия применимости квазистатического приближения.

В последнее время в связи с многочисленными экспериментами, проводимыми в верхних слоях ионосферы, а также с зондовыми измерениями в лабораторной плазме, возник вопрос об определении электрических характеристик (например, импеданса) антенны, помещенной в магнитоактивную плазму. Во всех исследованиях, посвященных этому вопросу (см., например, [1-4]), рассмотрение ведется в квазистатическом приближении (все характерные размеры антенны малы по сравнению с длиной излучаемой электромагнитной волны). Последнее обстоятельство отчасти связано с трудностями более общего рассмотрения, но в большинстве случаев для антенн, используемых в верхних слоях ионосферы, на частотах  $\omega \leq \omega_0$  ( $\omega_0$  — ленгмюровская частота электронов) квазистатическое рассмотрение является достаточно хорошим приближением для определения импеданса.

В настоящее время краевые задачи для антенн в квазистатическом приближении рассмотрены для области частот, где отсутствует плазменный резонанс. Тем не менее, ряд экспериментальных данных по измерению импеданса антенны в ионосфере [6, 7] указывает на аномальное поведение электрических характеристик антенн при наличии плазменного резонанса (например, резкое возрастание действительной части импеданса). В связи со сказанным ясно, что большинство вопросов для антенн в резонансных областях осталось неисследованным.

В работе вычисляются поля и импеданс антennы в однородной бесстолкновительной магнитоактивной плазме в областях плазменного резонанса в условиях, когда можно не учитывать тепловое движение заряженных частиц среды. Обсуждается также справедливость принятого ниже квазистатического приближения.

1. Как известно, тензор диэлектрической проницаемости для магнитоактивной плазмы в системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль внешнего магнитного поля  $H_0$ , записывается в виде

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\omega) & i\varepsilon_2(\omega) & 0 \\ -i\varepsilon_2(\omega) & \varepsilon_1(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3(\omega) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В области частот, где  $\varepsilon_1(\omega)$  и  $\varepsilon_3(\omega)$  противоположны по знаку (назовем эту область частот гиперболической областью квазистатики), сле-

дует учитывать возможность возбуждения антенной плазменной волны\*. В холодной магнитоактивной плазме при фиксированной частоте  $\omega$  плазменная волна возбуждается лишь под одним направлением по отношению к направлению внешнего магнитного поля  $H_0$ .

Условия возбуждения таких волн изучены крайне недостаточно. В однородной изотропной плазме при учете теплового движения заряженных частиц среды величина импеданса на частоте  $\omega \sim \omega_0$  ( $\omega_0$  — ленгмюровская частота электронов) тонкой цилиндрической антенны найдена в [13]. В магнитоактивной плазме в направлении плазменного резонанса показатель преломления для одной из нормальных волн  $n(\omega, \theta)$  уходит в бесконечность. Следует, однако, отметить, что, хотя  $n(\omega, \theta) \rightarrow \infty$  в этом направлении, волна становится чисто продольной ( $\theta \neq 0$ ) и, следовательно, электрическое поле потенциальным, поэтому квазистатические уравнения остаются справедливыми и вблизи этого направления.

В квазистатическом приближении, когда электрическое поле  $E$  можно считать потенциальным, потенциал  $\varphi e^{-i\omega t}$  ( $E = -\nabla\varphi$ ) в плазме удовлетворяет уравнению

$$\epsilon_1(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \epsilon_1(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \epsilon_3(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Как нетрудно показать, функция Грина  $G(x, y, z)$  уравнения (2) в гиперболической области квазистатики имеет вид\*\*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} \pm \frac{1}{r [ |\epsilon_1 \epsilon_3| (\mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]^{1/2}} & (\mu^2 \cos^2 \theta > \sin^2 \theta) \\ - \frac{i}{r [ |\epsilon_1 \epsilon_3| (\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta)]^{1/2}} & (\mu^2 \cos^2 \theta < \sin^2 \theta) \end{cases}. \quad (3)$$

Здесь  $\mu^2 = \left| \frac{\epsilon_1(\omega)}{\epsilon_2(\omega)} \right|$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\cos^2 \theta = z^2/r^2$ , знак плюс выбирается в том случае, когда  $\epsilon_1(\omega) > 0$ ,  $\epsilon_3(\omega) < 0$ , знак минус — когда  $\epsilon_1(\omega) < 0$ ,  $\epsilon_3(\omega) > 0$ .

Функция Грина в форме (3) совпадает с точностью до постоянного множителя  $Q$  с полем  $\varphi$  для точечного заряда величины  $Q$ . Из формулы (3) видно, что направлениям  $\mu^2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ , которые соответствуют характеристикам уравнения (2), отвечает ток бесконечной поляризации. Из (3) также следует, что все пространство можно разделить на две области:  $\mu^2 z^2 > x^2 + y^2$ , где заряд и потенциал колеблются в фазе относительно друг друга, и  $\mu^2 z^2 < x^2 + y^2$ , где колебания заряда и потенциала на излучателе сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , что соответствует потерям энергии излучателя.

Наличие конуса потерь говорит о том, что даже в квазистатическом приближении в выражении для импеданса антенны должен появиться действительный член, эквивалентный сопротивлению излучения. Эти

\* Квазистатическое уравнение для потенциала поля (уравнение (2)) — эллиптического типа, когда  $\epsilon_1(\omega)$  и  $\epsilon_3(\omega)$  имеют одинаковые знаки, и гиперболического типа, когда  $\epsilon_1(\omega)$  и  $\epsilon_3(\omega)$  противоположны по знаку.

\*\* Функция Грина в форме (3) получена путем свертки по плоским волнам вида  $e^{ikr}$ , причем для определения правила обхода полюсов в комплексной плоскости  $k$  необходимо в  $\epsilon_1(\omega)$  и  $\epsilon_3(\omega)$  ввести слабое поглощение, а затем устремить его к нулю. В работе [8] при вычислении функции Грина была допущена ошибка, результатом которой является равенство нулю поля в области  $\mu^2 \cos^2 \theta < \sin^2 \theta$ .

потери связаны с излучением плаэменной волны, которая появляется при учете теплового движения частиц плазмы вблизи резонансных направлений.

2. Для определения квазистатического поля антенны конечных размеров в гиперболической области квазистатики необходимо знать решение краевой задачи Дирихле для уравнения (2) гиперболического типа.

Пусть антenna в виде несимметричного вибратора (штыря) представляет собой вытянутый эллипсоид вращения с полуосами  $L$  и  $a$  ( $L > a$ ), ориентированный под углом  $\alpha$  к направлению  $H_0$ . Для получения решения уравнения (2) при условии, что на поверхности антенны (проводнике)  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , преобразуем уравнение (2) в уравнение Лапласа, переходя к комплексным переменным с помощью введения координаты  $z' = i\mu z$ . В полученном комплексном пространстве можно использовать обычные электростатические методы решения краевых задач при заданной комплексной поверхности проводника. Тогда, вводя эллипсоидальные координаты и разделяя переменные в уравнении Лапласа, получаем [1]

$$\frac{d}{d\xi} R_\xi \frac{d\tilde{\varphi}}{d\xi} = 0, \quad (4)$$

где  $\tilde{\varphi} = \varphi(x, y, z')$ ,  $\xi$  — эллипсоидальная координата, причем  $\xi=0$  соответствует поверхности антенны. Затем, чтобы записать решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям на поверхности проводника и на бесконечности, необходимо вернуться в пространство  $x, y, z$ .

Рассмотрим подробнее некоторые конкретные случаи. Пусть антenna ориентирована вдоль внешнего магнитного поля  $H_0$ . Тогда  $R_\xi = (\xi + a^2) \sqrt{\xi - \mu^2 L^2}$ , а координата  $\xi$  определяется из уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi + a^2} - \frac{\mu^2 z^2}{\xi - \mu^2 L^2} = 1. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) запишем в виде

$$\varphi(x, y, z) = A \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{R_\xi}, \quad (6)$$

где  $\Gamma$  — контур интегрирования в комплексной плоскости  $\xi$ ,  $A$  — постоянная величина.

Из (5) и (6) видно, что в отличие от эллиптического случая  $\xi$  может принимать любое значение в комплексной области. Из (6) также следует, что в комплексной области  $\xi$  имеются особые точки подынтегрального выражения (6) типа полюса ( $\xi = -a^2$ ) и точки ветвления ( $\xi = \mu^2 L^2$ ). Проведем разрез в плоскости  $\xi$ , как показано на рис. 1, причем для однозначной связи  $\xi$  с  $x, y, z$  в качестве области определения  $\xi$  при  $\varepsilon_1(\omega) < 0, \varepsilon_3(\omega) > 0$  необходимо брать верхнюю полуплоскость комплексной области  $\xi$  и нижнюю полуплоскость — при  $\varepsilon_1(\omega) > 0, \varepsilon_3(\omega) < 0$ .

Заметим, что в бесконечно удаленной точке решения для  $\varphi(x, y, z)$  должны совпадать (за исключением направлений вблизи резонансного конуса) с полем точечного заряда в форме (3). Используя этот факт, а также определяя значения  $\sqrt{\xi - \mu^2 L^2}$  на верхнем и нижнем краях разреза, можно выбрать контуры интегрирования  $\Gamma$  и найти постоян-

ную величину  $A$ , в уравнении (6). Контуры интегрирования показаны на рис. 1. В результате для потенциала  $\varphi(x, y, z)$  в различных областях пространства после интегрирования по  $\xi$  в соответствии с (6) имеем

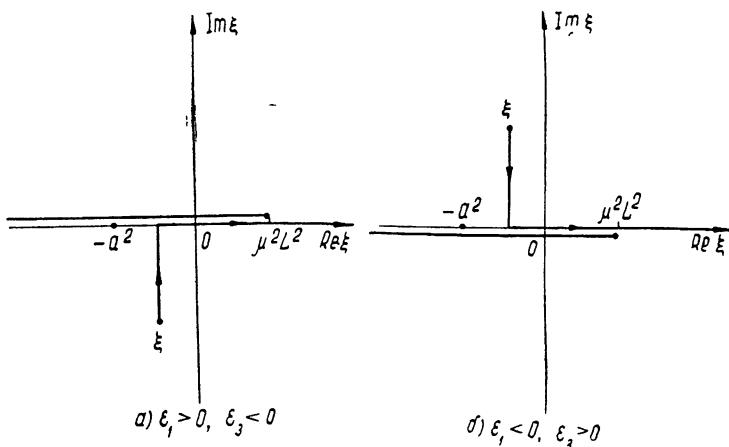


Рис. 1.

стях пространства после интегрирования по  $\xi$  в соответствии с (6) имеем

$$\text{a) } \operatorname{Re} \xi > \mu^2 L^2$$

$$\varphi = \frac{Q \arcsin [(\mu^2 L^2 + a^2)/(\xi + a^2)]^{1/2}}{i [|\epsilon_1 \epsilon_3| (\mu^2 L^2 + a^2)]^{1/2}}, \quad (7)$$

где  $Q$  — полный заряд на антенне ( $Q = \int \sigma dS$ ,  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда,  $S$  — поверхность антенны); в этой области пространства решение для  $\varphi$  не зависит от знаков  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$ ;

$$\text{б) } \mu^2 L^2 \geq \operatorname{Re} \xi > -a^2$$

$$\varphi = \frac{Q}{[|\epsilon_1 \epsilon_3| (\mu^2 L^2 + a^2)]^{1/2}} \left( \pm \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{\mu^2 L^2 - \xi}{\mu^2 L^2 + a^2}} - \frac{\pi i}{2} \right), \quad (8)$$

знак плюс выбирается, когда  $\epsilon_1(\omega) > 0, \epsilon_3(\omega) < 0$ , знак минус — при  $\epsilon_1(\omega) < 0, \epsilon_3(\omega) > 0$ ;

$$\text{в) } \operatorname{Re} \xi < -a^2$$

$$\varphi = \pm \frac{Q}{[|\epsilon_1 \epsilon_3| (\mu^2 L^2 + a^2)]^{1/2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{\mu^2 L^2 + a^2}{\mu^2 L^2 - \xi}}; \quad (9)$$

$$\text{г) } \operatorname{Re} \xi = -a^2$$

$$\varphi = \frac{Q}{[|\epsilon_1 \epsilon_3| (\mu^2 L^2 + a^2)]^{1/2}} \left( \pm \operatorname{Arth} \sqrt{1 - i \frac{\operatorname{Im} \xi}{\mu^2 L^2 + a^2}} - \frac{\pi i}{4} \right). \quad (10)$$

На рис. 2 изображена структура поля заряженного эллипсоида. Через точки  $z_0 = \pm \mu^{-1} \sqrt{\mu^2 L^2 + a^2}, x = y = 0$ , которым в пространстве соответствует полюс  $\xi = -a^2$ , проведены характеристики уравнения (2), которые касаются проводника в точках  $z = \pm \mu L^2 / \sqrt{\mu^2 L^2 + a^2}$ . При переходе через эти характеристики структура поля меняется. Окружности  $x^2 + y^2 = \mu^2 L^2 + a^2$  в плоскости  $xy$  соответствует точка ветвления

$\xi = \mu^2 L^2$ . В незаштрихованных областях  $\xi$  действительно, причем в областях I и II эквипотенциальными поверхностями являются эллипсоиды

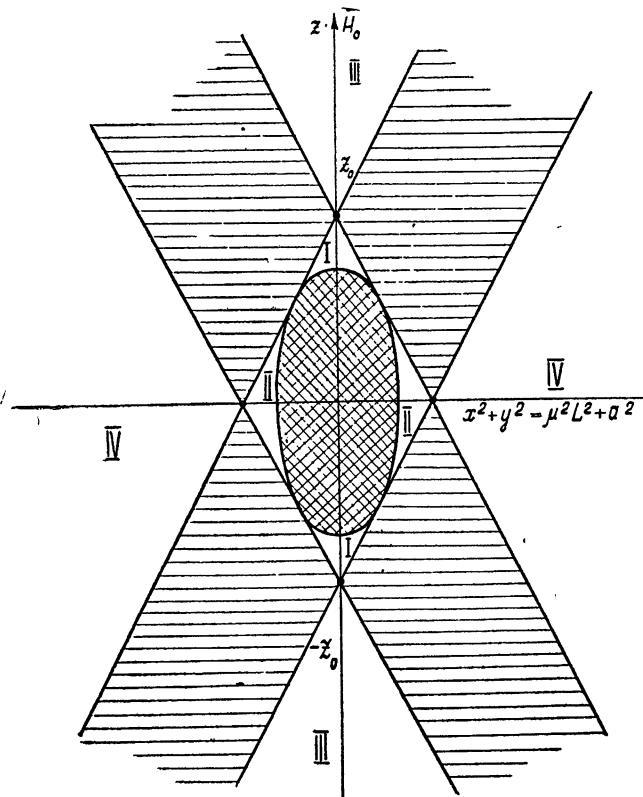


Рис. 2.

ды, в областях III—двуухполосные гиперболоиды, в областях IV—однополосные гиперболоиды вращения. В заштрихованных областях  $\xi$  комплексно. В точках  $z = \pm z_0$  имеется особенность для потенциала поля ( $\varphi \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow z_0$ ), а при переходе через характеристики претерпевает разрыв электрическое поле  $E$ . В бесконечно удаленной точке ( $r \rightarrow \infty$ ) для всех направлений  $\varphi \rightarrow 0$ \*.

Из формулы (8) для импеданса  $Z = -\varphi_0/i\omega Q$  получаем

$$Z_{\parallel} = \frac{1}{\omega [\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\mu^2 L^2 + a^2)]^{1/2}} \left[ \frac{\pi}{2} \pm i \ln \left( \frac{\mu L}{a} + \sqrt{\frac{\mu^2 L^2}{a^2} + 1} \right) \right]. \quad (11)$$

Знак плюс ( $\varepsilon_1(\omega) > 0, \varepsilon_3(\omega) < 0$ ) отвечает емкостному характеру реактанса антенны, знак минус ( $\varepsilon_1(\omega) < 0, \varepsilon_3(\omega) > 0$ ) — индуктивному. В соответствии со сказанным выше из (11) также следует, что в гиперболической области квазистатики импеданс антенны имеет действительную часть, отвечающую потерям антенны на возбуждение плазменных колебаний.

В случае антенны, ориентированной перпендикулярно внешнему магнитному полю  $H_0$ , комплексная плоскость  $\xi$  не содержит особых точек типа полюса. Подынтегральное выражение  $R_\xi = [(\xi + a^2) \times$

\* При  $r \rightarrow \infty$  потенциал  $\varphi(x, y, z)$  должен быть регулярной функцией на бесконечности [12]. Это требование необходимо для единственности поставленной задачи.

$\times (\xi + L^2)(\xi - \mu^2 a^2)]^{1/2}$  имеет только особенности типа точек ветвления, поэтому решение для  $\varphi(x, y, z)$  в этом случае конечно во всех точках пространства. Мы не будем выписывать решение уравнения (8) для всей области пространства, а ограничимся только выражением для поля, справедливым вблизи поверхности проводника ( $-a^2 < \xi \ll \mu^2 a^2$ ):

$$\varphi = \frac{Q}{[|\epsilon_1 \epsilon_3| (L^2 + \mu^2 a^2)]^{1/2}} \left[ \pm F \left( \arcsin \sqrt{\frac{\mu^2 a^2 - \xi}{\mu^2 a^2 + a^2}}, \sqrt{\frac{\mu^2 a^2 + a^2}{L^2 + \mu^2 a^2}} \right) - i F \left( \frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{L^2 - a^2}{L^2 + \mu^2 a^2}} \right) \right], \quad (12)$$

где  $F(\gamma, k)$  — эллиптический интеграл первого рода. Переменная  $\xi$  определяется из уравнения  $\frac{x^2}{\xi + a^2} + \frac{y^2}{\xi + L^2} - \frac{\mu^2 z^2}{\xi - \mu^2 a^2} = 1$ , причем знак плюс выбирается, как всегда, при  $\epsilon_1(\omega) > 0$ ,  $\epsilon_3(\omega) < 0$ .

Из (12) легко найти выражение для импеданса  $Z_{\perp}$ :

$$Z_{\perp} = \left[ F \left( \frac{\pi}{2}; \sqrt{\frac{L^2 - a^2}{L^2 + \mu^2 a^2}} \right) \pm i F \left( \operatorname{arctg} \mu; \sqrt{\frac{\mu^2 a^2 + a^2}{L^2 + \mu^2 a^2}} \right) \right] \times \{ \omega [|\epsilon_1 \epsilon_3| (L^2 + \mu^2 a^2)]^{1/2} \}^{-1}. \quad (13)$$

Для тонкой антенны  $L \gg a$ ,  $\mu L \gg a$ ,  $L \gg \mu a$  формулы импеданса  $Z_{\parallel}$  и  $Z_{\perp}$  совпадают с выражениями, полученными в приложении методом интегрального уравнения.

Интересны также случаи, когда  $\mu L \ll a \ll L$  (для антенны вдоль магнитного поля  $H_0$ ) и  $\mu a \gg L \gg a$  (для антенны, ориентированной перпендикулярно  $H_0$ ). В этих случаях величина импеданса

$$Z_{\parallel} \simeq \frac{\pi/2 \pm i \mu L/a}{\omega a \sqrt{|\epsilon_1 \epsilon_3|}}; \quad (14)$$

$$Z_{\perp} \simeq \frac{\pi/2 \pm i \ln(\mu a/L)}{\omega a |\epsilon_1|}. \quad (15)$$

определяется в основном наименьшим размером антенны (радиусом провода вибратора). Последнее обстоятельство связано с изменением характерного масштаба неоднородности поля.

Приведем также значение импеданса «тонкой» ( $L \gg a$ ,  $\mu L \gg a$ ,  $L \gg \mu a$ ) антенны при условии, что антенна ориентирована вдоль резонансного направления ( $\operatorname{tg}^2 \alpha = \mu^2$ ):

$$Z_p \simeq \frac{1 \pm i}{\omega (|\epsilon_1 \epsilon_3| \mu a L)^{1/2}}. \quad (16)$$

Легко видеть, что  $|Z_p| \gg |Z_{\parallel}|$ ,  $|Z_{\perp}|$  (например,  $\operatorname{Re} Z_p / \operatorname{Re} Z_{\parallel} \sim \sqrt{\mu L/a} \gg 1$ ). Последнее обстоятельство связано с тем, что, если направление стороннего поля совпадает с резонансным направлением, возникает интенсивная раскачка плазменных колебаний.

Заметим, что в случаях, когда антенна ориентирована параллельно направлению  $H_0$  или перпендикулярно к нему, распределение заряда по поверхности проводника не зависит от компонент тензора диэлектрической проницаемости.

3. В настоящей работе импеданс антенны вычисляется в квазистатическом приближении. Однако, зная распределение заряда (или тока) вдоль поверхности проводника, можно вычислить полные потери стороннего поля в объеме антенны

$$P = -\frac{1}{2} \int j^* E dV_a, \quad (17)$$

спределяя тем самым импеданс  $Z = 2P/|I_0|^2$ . Здесь  $I_0$  — амплитуда стороннего тока  $j_{ct}$ ,  $E$  — полное электрическое поле с учетом излучения электромагнитной волны.

Эта процедура позволяет оценить точность принятого квазистатического приближения. Например, в случае тонкой антенны с заданным распределением заряда в форме (П.3), ориентированной вдоль  $H_0$  в сильно замагниченной плазме ( $H_0 \gg \infty$ ), для полного сопротивления излучения получаем ( $k_0 L \ll 1$ ,  $k_0 = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света)

$$R \simeq \frac{\pi}{\omega L} - \frac{4k_0 L}{3c} (\pi - 2k_0 L). \quad (18)$$

Из выражений (11), (18) и (П.5) видно, что в данном примере квазистатическое приближение справедливо, если  $k_0 L \ll 1$ . В других случаях, как показывает анализ интеграла (17), для тонкой антенны в качестве условия применимости квазистатического приближения служит неравенство

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha) k_0 L \ll 1, \quad (19)$$

где  $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha)$  — некоторая плавная функция от компонент тензора диэлектрической проницаемости и угла  $\alpha$  между осью диполя и внешним магнитным полем  $H_0$ .

Отметим также, что приведенное выше рассмотрение справедливо (т. е. пространственная дисперсия несущественна), когда характерный масштаб неоднородности поля, связанный с конечными размерами излучателя, много больше параметров пространственной дисперсии  $v_T/\omega$ ,  $v_T/\omega_0$  и  $v_T/\omega_H$  ( $v_T$  — тепловая скорость заряженных частиц,  $\omega_H$  — гирочастота электронов). На частотах  $\omega \sim \omega_H$ ,  $\omega \sim \omega_0$  и  $\omega \sim (\omega_0^2 + \omega_H^2)^{1/2}$  масштаб изменения поля в каком-то из направлений становится равным нулю и необходим учет теплового движения частиц плазмы\*. В связи с этим ясно, что постановка задачи без учета теплового движения заряженных частиц не всегда справедлива и в ионосферных условиях допустима гораздо реже, чем квазистатика. С учетом теплового движения частиц плазмы связано также нарушение однородности плазмы вблизи антенны из-за оседания заряженных частиц на поверхности проводника. Однако рассмотрение этих вопросов, не входит в задачу настоящей работы и представляет собой тему для самостоятельного исследования.

В заключение следует отметить, что реальная антенна представляет собой симметричный вибратор. Однако, например, для «тонкой» антенны при условии  $d \gg a$  ( $d$  — расстояние между усами диполя)  $Z_{\text{сим}} = -2Z_{\text{несим}}$  [9]\*\*. Аналогичное соотношение выполнится и для проводников другой конфигурации при достаточном удалении их друг от друга (при условии, конечно, что  $\mu \sim 1$ ).

\* Указанные частоты соответствуют  $\mu = 0$  или  $\mu \rightarrow \infty$ , т. е. границе перехода от гиперболической к эллиптической области квазистатики

\*\* Под несимметричным вибратором подразумевается рассмотренная выше штыревая антенна.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А. А. Андронову, Ю. А. Рыжкову и В. Я. Эйдману за постоянный интерес к работе и дискуссии.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть тонкая цилиндрическая антenna ( $L \gg a$ ,  $2L$  — длина антенны,  $a$  — ее радиус) ориентирована под углом  $\alpha$  к направлению внешнего магнитного поля  $H_0$ . Запишем интегральное уравнение для распределения заряда по поверхности вибратора с помощью функции Грина в форме (3). Если предположить, что на поверхности проводника  $\varphi(r=r_0)=\varphi_0=\text{const}$ , а на поверхности бесконечной сферы  $\varphi \rightarrow 0$ , и учесть, что в магнитоактивной плазме нормальная компонента вектора индукции  $D_n$  на проводнике параллельна вектору  $E$  и равна [4]

$$D_n = -[\epsilon_1(\omega) \sin^2 \beta + \epsilon_3(\omega) \cos^2 \beta] \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (\text{П.1})$$

то решение уравнения (2) можно записать следующим образом:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \oint \sigma(r') C(r_0, r') dS'. \quad (\text{П.2})$$

Здесь  $\sigma(r') = D_n(r')/4\pi$  — поверхностная плотность заряда,  $\beta$  — угол между нормалью к поверхности антенны и магнитным полем  $H_0$ . Интегрирование в (П.2) производится по поверхности вибратора  $S'$ .

Решение интегрального уравнения (П.2), вообще говоря, представляет собой значительные трудности. Однако при  $\alpha \rightarrow 0$  в ряде случаев удается получить простые интегральные уравнения, из которых легко найти выражение для распределения заряда и, следовательно, импеданс антенны.

$$1) F > 0, \sqrt{F} L \gg a, \quad L \gg a,$$

где

$$F = \mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Тогда после интегрирования по углам в (П.2) получаем следующее интегральное уравнение для определения  $\sigma(\zeta)$  ( $\zeta$  — координата вдоль оси антенны,  $\zeta \neq \pm L$ ):

$$\frac{V|\epsilon_1 \epsilon_3| \sqrt{F} \varphi_0}{2\pi} = \sigma(\zeta) \left[ \mp \ln \frac{4(L^2 - \zeta^2)F}{a^2} - \pi i \right] + \int_{-L}^{+L} \frac{\sigma(\zeta') - \sigma(\zeta)}{|\zeta - \zeta'|} d\zeta'. \quad (\text{П.3})$$

Если также считать, что  $\ln(\sqrt{F} L/a) \gg 1$ , то легко написать решение уравнения (П.3) [1].

При этом в нулевом приближении  $\sigma(\zeta)$  пропорциональна  $\varphi_0 = \text{const}$ :

$$\sigma(\zeta) = \frac{V|\epsilon_1 \epsilon_3| \sqrt{F} \varphi_0}{2\pi \{ \mp \ln [4(L^2 - \zeta^2)F/a^2] - \pi i \}}, \quad (\text{П.4})$$

а полный заряд  $Q = 2\pi \int_{-L}^{+L} \sigma(\zeta) d\zeta$  с принятой здесь точностью равен

$$Q = \frac{V|\epsilon_1 \epsilon_3| \sqrt{F} L \varphi_0}{\ln(2\sqrt{F} L/a)} \left[ \pm 1 + \frac{\pi i}{2 \ln(2\sqrt{F} L/a)} \right]. \quad (\text{П.5})$$

Для импеданса  $Z$  из формулы (П.5) имеем

$$Z = \frac{\pi/2 \pm i \ln(2\sqrt{F}L/a)}{\omega \sqrt{|\epsilon_1\epsilon_3|} \sqrt{F}L}. \quad (\text{П.6})$$

$$2) F < 0, \sqrt{\tilde{F}}L \gg a, L \gg \mu a \quad (\tilde{F} = -F).$$

Аналогично вышесказанному получаем

$$\begin{aligned} \circ(\zeta) \simeq & \left( -i\varphi_0 \sqrt{\tilde{F}|\epsilon_1\epsilon_3|} \right) \times \\ & \times \left\{ 2\pi \left\{ \ln \left[ \frac{4\tilde{F}(L^2 - \zeta^2)}{a^2} \right] + 2\ln 2 - \ln \frac{\mu^2 + \tilde{F}}{\tilde{F}} \mp \right. \right. \\ & \left. \left. \mp 2i \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\sqrt{\tilde{F}}} \right\} \right\}^{-1}; \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

$$Z = \frac{\ln \left[ 2\tilde{F}L'a \sqrt{\mu^2 + \tilde{F}} \right] \pm i \operatorname{arctg} \left( \mu / \sqrt{\tilde{F}} \right)}{\omega \sqrt{|\epsilon_1\epsilon_3|} \sqrt{\tilde{F}}L}. \quad (\text{П.8})$$

В (П.3)—(П.8) верхний знак выбирается при  $\epsilon_1(\omega) > 0, \epsilon_3(\omega) < 0$ , нижний—при  $\epsilon_1(\omega) < 0, \epsilon_3(\omega) > 0$ .

Из этих выражений следует, что антенну в магнитоактивной плазме при наличии плазменного резонанса можно считать «тонкой», если выполняются неравенства  $L \gg \sigma \sqrt{F}L \gg a, L \gg \mu a$  и  $\ln(\sqrt{F}L'a) \gg 1$ . Отметим также, что (П.6) и (П.8) совпадают с формулами для импеданса, полученными в работе [1], в приближении заданного (равномерного) распределения заряда вдоль поверхности проводника.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. G. Balmain, IEEE Trans. Ant. Prop., AP-12, 605 (1964).
2. H. Statas, IEEE Trans. Ant. Prop., AP-12, 695 (1964).
3. J. P. Lafon, L'onde Electrique, 45, № 465, 1404 (1964).
4. T. R. Kaiser, Planet. Space Sci., 9, 639 (1964).
5. V. P. Pyati, H. Weil, Radio Science, 69D, 291 (1965).
6. R. G. Stone, R. R. Weber, J. K. Alexander, Planet. Space Sci., 14, № 7, 61 (1966).
7. H. Weil, L'onde Electrique, 45, № 465, 1397 (1965).
8. Б. П. Кононов, А. А. Рухадзе, Г. В. Солодухов, ЖТФ, 31, № 5, 565 (1961).
9. Ю. В. Чугунов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 10, № 1, 50 (1968).
10. E. Arbel, L. B. Felsen, Proc Symp. Electromagnetic Theory and Antennas, Pergamon Press, N. Y., 1963, p. 391.
11. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
12. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1966.
13. А. А. Андронов, В. Я. Эйдман, ЖТФ (в печати).

**QUASISTATIC THEORY OF ANTENNA IN A MAGNETOACTIVE PLASMA  
IN THE PRESENCE OF PLASMA RESONANCE***Yu. V. Chugunov*

The boundary problem is solved in a quasistatic approximation for the charged metallic ellipsoid of rotation placed in a magnetoactive plasma in the frequency range where a plasma wave may be excited. The applicability conditions of quasistatic approximation are discussed.

---

УДК 621.378.33

## ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА НА КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОДСТАВКЕ

*B. N. Курятов, P. С. Ланда, E. Г. Ларионцев*

Аналитически и методом электронного моделирования исследовалась возможность измерения малых угловых скоростей вращения с помощью кольцевого газового лазера, совершающего крутильные колебания относительно собственной оси. Показано, что ширина области захвата зависит от периода и амплитуды колебаний угловой скорости подставки и при некоторых значениях этих параметров обращается в нуль. Исследована зависимость частоты биений от измеряемой угловой скорости вращения.

В работах [1, 2] описан способ измерения малых скоростей вращения при помощи кольцевого газового лазера. Идея этого метода состоит в следующем. Кольцевой лазер помещается на подставку, совершающую крутильные колебания, амплитуда и частота которых таковы, что максимальное значение разности частот встречных волн оказывается больше ширины полосы синхронизации. Тогда в течение периода колебаний разность фаз между волнами будет изменяться, однако в отсутствие постоянной (или медленно меняющейся) составляющей угловой скорости суммарное изменение разности фаз за период колебаний равно нулю. Изменение разности фаз за период определяется лишь измеряемой постоянной составляющей угловой скорости. Поэтому, регистрируя значения разности фаз через интервалы времени, равные периоду колебаний, можно выделить эту постоянную составляющую скорости вращения.

В принципе малые угловые скорости вращения можно измерять и другими способами. Достаточно, например, сместить положение области захвата путем искусственного введения дополнительных потерь в одну из волн [3] или ввести дополнительную разность частот между встречными волнами с помощью невзаимного элемента [4]. Тогда режим биений будет существовать и в покоящемся кольцевом лазере. Вращение лазера приводит к изменению частоты биений. Чтобы зафиксировать это изменение, необходимо с большой точностью измерять частоту биений, а также поддерживать строго постоянную расстройку частоты, смещающей область захвата. Неизбежные погрешности ограничивают применимость этих методов при измерении малых скоростей вращения.

Метод измерения при помощи лазера на колеблющейся подставке принципиально отличается тем, что здесь имеет место не сдвиг области захвата, а ее существенное уменьшение. В настоящей работе исследовались возможности этого метода как аналитически, так и путем электронного моделирования на аналоговой машине. Показано, что при малых постоянных составляющих угловой скорости захват существует и при таком способе измерения, однако величина области захвата зависит от периода и амплитуды колебаний угловой скорости и при некоторых значениях этих параметров обращается в нуль.

## 1. РАСЧЕТ ОБЛАСТИ ЗАХВАТА

Запишем основные уравнения колебаний в кольцевом лазере [4-8]

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= \frac{\omega d}{2} (\eta_0 - \alpha a E_1^2 - \beta a E_2^2) E_1 + \frac{\omega d}{2} E_2 (m_1^{(r)} \cos \Phi + m_1^{(l)} \sin \Phi), \\ \dot{E}_2 &= \frac{\omega d}{2} (\eta_0 - \alpha a E_2^2 - \beta a E_1^2) E_2 + \frac{\omega d}{2} E_1 (m_2^{(r)} \cos \Phi - m_2^{(l)} \sin \Phi), \\ \dot{\Phi} &= \Omega + \frac{\omega d b_0}{2} a (E_2^2 - E_1^2) - \frac{\omega d}{2} \left( m_1^{(r)} \frac{E_2}{E_1} + m_2^{(r)} \frac{E_1}{E_2} \right) \sin \Phi + \\ &\quad + \frac{\omega d}{2} \left( m_1^{(l)} \frac{E_2}{E_1} - m_2^{(l)} \frac{E_1}{E_2} \right) \cos \Phi.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $E_1$ ,  $E_2$  и  $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$  — соответственно амплитуды и разность фаз встречных волн;  $\eta_0$  — относительное превышение уровня накачки над пороговым уровнем;  $\alpha a$ ,  $\beta a$  — параметры, характеризующие насыщение усиления из-за нелинейности активной среды; члены  $b_0 a E_1^2$  определяют зависимость частоты встречных волн от амплитуды поля;  $d$  — параметр, пропорциональный интенсивности накачки, при малых превышениях над порогом  $d \approx 1/Q$ , где  $Q$  — добротность резонатора;  $\Omega$  — расстройка собственных частот резонатора для встречных волн во вращающемся лазере;  $m_{1,2}^{(r)}$  и  $m_{1,2}^{(l)}$  — коэффициенты связи между встречными волнами за счет рассеяния.

Уравнения (1) справедливы в приближении слабого поля ( $\eta_0 \ll 1$ ), которое обычно выполняется в лазерных гироскопах. Связь из-за обратного рассеяния предполагается линейной и вводится феноменологически с помощью коэффициентов  $m_{1,2}^{(r)} + i m_{1,2}^{(l)}$ . Обоснование возможности замены исходной задачи с граничными условиями на зеркалах задачей с дополнительными членами связи в уравнениях (1) дано в работе [8].

Пусть  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2(t)$ , где  $\Omega_1$  — постоянная разность частот, пропорциональная постоянной составляющей скорости вращения,  $\Omega_2(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ . Будем считать, что максимальное значение суммарной разности частот  $\Omega_{\max}$  не очень велико, так что выполняется условие

$$\Omega_{\max} \ll \omega d \eta_0 = M \simeq \frac{\omega}{Q} \eta_0. \tag{2}$$

При этом условии фаза изменяется значительно медленнее, чем амплитуда, так что при всяком изменении фазы амплитуда успевает устанавливаться. Тогда в уравнениях (1) можно положить  $\dot{E}_1 = 0$  и  $E_2 = 0$ .

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$\begin{aligned}a (E_2^2 - E_1^2) &= - \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \left( m_1^{(r)} \frac{E_2}{E_1} - m_2^{(r)} \frac{E_1}{E_2} \right) \cos \Phi + \right. \\ &\quad \left. + \left( m_1^{(l)} \frac{E_2}{E_1} + m_2^{(l)} \frac{E_1}{E_2} \right) \sin \Phi \right].\end{aligned}\tag{3}$$

Подставляя (3) в третье уравнение системы (1) и полагая  $\frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \sim m^*$ ,

\* Это справедливо при достаточно больших расстройках относительно центра допплеровской линии, когда  $\alpha - \beta \sim 1$ .

получаем с точностью до членов порядка  $m^2$  следующее уравнение для разности фаз между встречными волнами:

$$\dot{\Phi} + A \cos \Phi + B \sin \Phi = \Omega_1 + \Omega_2(t), \quad (4)$$

где

$$A = \frac{\omega d b_0}{2(\alpha - \beta)} (m_1^{(r)} - m_2^{(r)}) - \frac{\omega d}{2} (m_1^{(l)} - m_2^{(l)}),$$

$$B = \frac{\omega d b_0}{2(\alpha - \beta)} (m_1^{(l)} + m_2^{(l)}) + \frac{\omega d}{2} (m_1^{(r)} + m_2^{(r)}).$$

Обозначим  $\Psi = \Phi + \arctg AB^{-1}$ ,  $\sqrt{A^2 + B^2} = \Omega_0$ . Тогда (4) примет вид

$$\dot{\Psi} + \Omega_0 \sin \Psi = \Omega_1 + \Omega_2(t). \quad (5)$$

В уравнении (5)  $\Omega_0$  представляет собой ширину полосы синхронизации в отсутствие колебаний подставки.

Рассмотрим два частных случая.

1) Колебания подставки синусоидальные, т. е.  $\Omega_2(t) = \Omega_2 \sin(\nu t)$ .

Предполагаем, что синхронизация имеет место, т. е. изменение  $\Psi$  за период колебаний  $T = 2\pi/\nu$  равно рулю. Это значит, что  $\Psi$  является периодической функцией с периодом  $T$ . Если нелинейный член в уравнении (5) мал, т. е.  $\Omega_0 \ll \Omega_2$ , то стационарное решение уравнения (5) можно приближенно искать в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \sin(\nu t + \chi). \quad (6)$$

Подставим (6) в (5) и разложим функцию  $\sin \Psi$  в ряд Фурье, ограничиваясь нулевой и первой гармониками:

$$\begin{aligned} \Psi_1 \nu \cos(\nu t + \chi) + \Omega_0 J_0(\Psi_1) \sin \Psi_0 + 2\Omega_0 J_1(\Psi_1) \cos \Psi_0 \sin(\nu t + \chi) = \\ = \Omega_1 + \Omega_2 \sin(\nu t). \end{aligned} \quad (7)$$

Приравнивая постоянные составляющие и коэффициенты при  $\sin(\nu t)$  и  $\cos(\nu t)$  в левой и правой частях (7), получим три уравнения относительно трех неизвестных  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$  и  $\chi$ :

$$\Omega_0 J_0(\Psi_1) \sin \Psi_0 = \Omega_1,$$

$$\Psi_1 \nu \cos \chi + 2\Omega_0 J_1(\Psi_1) \cos \Psi_0 \sin \chi = 0, \quad (8)$$

$$-\Psi_1 \nu \sin \chi + 2\Omega_0 J_1(\Psi_1) \cos \Psi_0 \cos \chi = \Omega_2.$$

Из второго и третьего уравнений системы (8) выразим  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$  через  $\chi$ :

$$\Psi_1 = -\frac{\Omega_2}{\nu} \sin \chi; \quad (9)$$

$$\cos \Psi_0 = -\frac{\Omega_2 \cos \chi}{2\Omega_0 J_1(\Omega_2 \sin \chi / \nu)}. \quad (10)$$

Соотношение (10) означает, что  $\cos \chi$  может изменяться в узких пределах от  $-2\Omega_0 J_1\left(\frac{\Omega_2}{\nu} \sin \chi\right) / \Omega_2$  до  $+2\Omega_0 J_1\left(\frac{\Omega_2}{\nu} \sin \chi\right) / \Omega_2$ . Так как вначале предполагали, что  $\Omega_0 \ll \Omega_2$ , то можно положить  $\cos \chi \approx 0$  и  $\sin \chi \approx 1$ . Тогда первое уравнение (8) примет вид

$$\Omega_1 = \Omega_0 J_0 \left( \frac{\Omega_2 T}{2\pi} \right) \sin \Psi_0. \quad (11)$$

Следовательно, ширина области захвата, т. е. максимально возможное значение  $\Omega_1$  равно

$$\Omega_{10} = \Omega_0 J_0 \left( \frac{\Omega_2 T}{2\pi} \right) \quad (12)$$

и при определенных значениях произведения  $\Omega_2 T$  ( $\Omega_2 T / 4 = 1,2\pi; 2,75\pi; 4,82\pi; \dots$ ) обращается в нуль.

2) Пилообразные колебания подставки.

В этом случае колебания имеют вид

$$\Omega_2(t) = \begin{cases} \Omega_2 & (0 \leq t \leq T/2) \\ -\Omega_2 & (T/2 \leq t \leq T) \end{cases}$$

и уравнение (5) разбивается на два уравнения для разных полупериодов:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_0 \sin \Psi_1 & (0 \leq t \leq T/2), \\ \dot{\Psi}_2 &= \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_0 \sin \Psi_2' & (T/2 \leq t \leq T). \end{aligned}$$

Очевидно, на границе решения уравнений должны удовлетворять условию

$$\Psi_1(T/2) = \Psi_2(T/2) = \Psi'.$$

Предположим, как и в первом случае, что имеется синхронизация, т. е.  $\Psi_2(T) = \Psi_1(0) = \Psi_0$ . Тогда получим систему двух уравнений относительно неизвестных  $\Psi_0$  и  $\Psi'$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Psi_0}^{\Psi'} \frac{dx}{\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_0 \sin x} &= \omega \frac{T}{2}, \\ \int_{\Psi'}^{\Psi_0} \frac{dx}{\Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_0 \sin x} &= \omega \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение этих уравнений следующее:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\Psi' - \Psi_0}{2} &= 2\Omega_2 \frac{\operatorname{tg}(a_1 T/4) \operatorname{tg}(a_2 T/4)}{a_2 \operatorname{tg}(a_1 T/4) + a_1 \operatorname{tg}(a_2 T/4)}, \\ \sin \frac{\Psi' + \Psi_0}{2} &= \frac{1}{\Omega_0} \left[ a_2(\Omega_2 + \Omega_1) \operatorname{tg} \frac{a_1 T}{4} - \right. \\ &\quad \left. - a_1(\Omega_2 - \Omega_1) \operatorname{tg} \frac{a_2 T}{4} \right] \left[ 4\Omega_2^2 \operatorname{tg}^2 \frac{a_1 T}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{a_2 T}{4} + \left( a_2 \operatorname{tg} \frac{a_1 T}{4} + a_1 \operatorname{tg} \frac{a_2 T}{4} \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$a_1 = [(\Omega_2 + \Omega_1)^2 - \Omega_0^2]^{1/2}, \quad a_2 = [(\Omega_2 - \Omega_1)^2 - \Omega_0^2]^{1/2}.$$

Граница полосы синхронизации определяется из условия  $\sin \frac{\Psi' + \Psi_0}{2} = 1$ , т. е.

$$\left[ a_2(\Omega_2 + \Omega_{10}) \operatorname{tg} \frac{a_1 T}{4} - a_1(\Omega_2 - \Omega_{10}) \operatorname{tg} \frac{a_2 T}{4} \right] \times \\ \times \left[ 4\Omega_2^2 \operatorname{tg}^2 \frac{a_1 T}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{a_2 T}{4} + \left( a_2 \operatorname{tg} \frac{a_2 T}{4} + a_1 \operatorname{tg} \frac{a_1 T}{4} \right)^2 \right]^{-1/2} = \Omega_0. \quad (15)$$

Ширина полосы синхронизации  $\Omega_{10}$  обращается в нуль при условии  $\operatorname{tg} x = 0$ , т. е.

$$x = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Здесь  $x = (T/4) \sqrt{\Omega_2^2 - \Omega_0^2} = a_0 T/4$ .

Если в уравнении (15) положить\*

$$\Omega_{10} \ll \sqrt{\Omega_2^2 - \Omega_0^2}, \quad \Omega_{10} T/4 \ll 1, \quad (17)$$

то можно получить явную зависимость ширины полосы синхронизации от амплитуды и периода колебаний угловой скорости подставки:

$$\Omega_{10} = \Omega_0 \frac{\sin x}{x} [(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2 \cos^2 x)]^{1/2} \left[ 1 - \varepsilon^2 \frac{\sin(2x)}{2x} \right]^{-1}, \quad (18)$$

где  $\varepsilon = \Omega_0/\Omega_2$ .

При  $\varepsilon \ll 1$  формула (18) упрощается:

$$\Omega_{10} = \Omega_0 \frac{\sin x}{x}. \quad (19)$$

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В работе [7] методом электронного моделирования исследовались режимы синхронизации и биений 'во вращающемся кольцевом газовом лазере. Та же электронная модель использовалась в настоящей работе для исследования частотных характеристик кольцевого лазера на колеблющейся подставке. Единственное изменение структурной схемы модели состоит в том, что в рассматриваемом случае расстройка частоты встречных волн задается в виде периодического сигнала при помощи генератора типа НГПК. Форма этого сигнала выбиралась либо синусоидальной, либо прямоугольной.

Как отмечалось выше, для выделения постоянной составляющей расстройки частоты, обусловленной измеряемой угловой скоростью, необходимо сравнивать значения разности фаз встречных волн через интервалы времени, равные периоду колебаний подставки. Оказалось удобным фиксировать значения разности фаз в моменты скачков величины расстройки при прямоугольной модуляции и в моменты прохождения синусоидой нулевых значений при синусоидальной модуляции расстройки.

Исследовались частотные характеристики модели неоно-гелиевого лазера с чистым изотопом неона при давлении смеси 3 мм рт. ст. ( $\gamma_{ab} \approx 200 \text{ M}Hz$ ,  $\gamma_a \approx \gamma_b \approx 40 \text{ M}Hz$ ) и расстройке относительно центра доплеровской линии излучения  $\mu = (\omega - \omega_0)/\gamma_{ab} = 1$  ( $\alpha = 0,452$ ,  $\beta = 0,231$ ,  $b_0 = 0,25$ ).

Из проведенных в первой части работы теоретических расчетов следует, что ширина области захвата зависит от двух параметров

\* Условия (17) всегда выполняются вблизи нулей полосы синхронизации  $\Omega_{10}$ : кроме того, если  $\varepsilon \ll 1$ , то эти условия при достаточно малых  $T$  справедливы во всей области изменения  $\Omega_{10}$ .

$x = (T/4) \sqrt{\Omega_2^2 - \Omega_0^2}$  и  $\epsilon = \Omega_0/\Omega_2$ . На аналоговой машине исследовалась зависимость ширины области захвата от параметра  $x$  при некоторых фиксированных значениях  $\epsilon$ . Результаты измерений на аналоговой машине ради краткости изложения в дальнейшем будем называть экспериментальными.

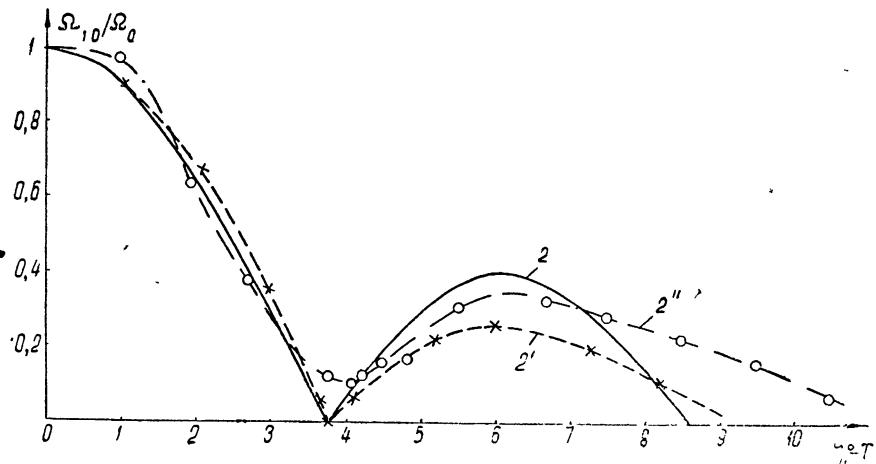


Рис. 1.

На рис. 1 приведены теоретические и экспериментальные зависимости ширины области захвата от параметра  $x$  при значении  $\epsilon = 0,175$  для синусоидальной модуляции (кривые 2, 2'). Как видно из этого рисунка, при данном значении  $\epsilon$  результаты моделирования достаточно точно согласуются с теоретическими расчетами. В случае прямоугольной модуляции такое соответствие имеет место и для больших значений параметра  $\epsilon$ .

В случае синусоидальной модуляции расстройки частоты теоретические расчеты применимы лишь при достаточно малых значениях параметра  $\epsilon$ . При больших значениях  $\epsilon$  результаты могут быть получены

лишь при помощи модели. Кривая 2'' на рис. 1 представляет собой измеренную таким образом зависимость ширины области захвата от  $x$  при  $\epsilon = 0,4$ . Эта зависимость отличается от рассчитанной по формуле (12) (кривая 2, рис. 1) в основном тем, что ширина области захвата ни в одной точке не обращается в нуль, а имеет конечное минимальное значение. Была исследована зависимость первого

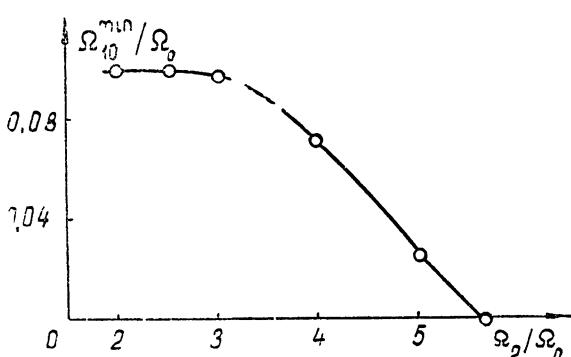


Рис. 2.

минимального значения области захвата от параметра  $\epsilon$ . Эта зависимость изображена на рис. 2. Оказалось, что в области значений  $\epsilon^{-1}$  от 2 до 3 минимальное значение ширины области захвата приблизительно постоянно и равно  $0,1 \Omega_0$ , затем при  $\epsilon^{-1} > 3$  оно уменьшается, обращаясь в нуль при  $\epsilon^{-1} \geq 5,7$ .

При помощи аналоговой машины исследовалась также зависимость измеряемой разности частот встречных волн от постоянной составляющей расстройки частоты  $\Omega_1$ , вне области захвата. Для случая синусоидальной модуляции полученные результаты изображены на рис. 3 при двух значениях периода модуляции ( $T_1 = 41/M$ ,  $T_2 = 20,3/M$ ). Величина связи между волнами была выбрана такой, что значение ширины области захвата в отсутствие модуляции равнялось  $\Omega_0 = 0,07 M$ . Амплитуда модуляции расстройки частоты равнялась  $\Omega_2 = 0,4 M$ .

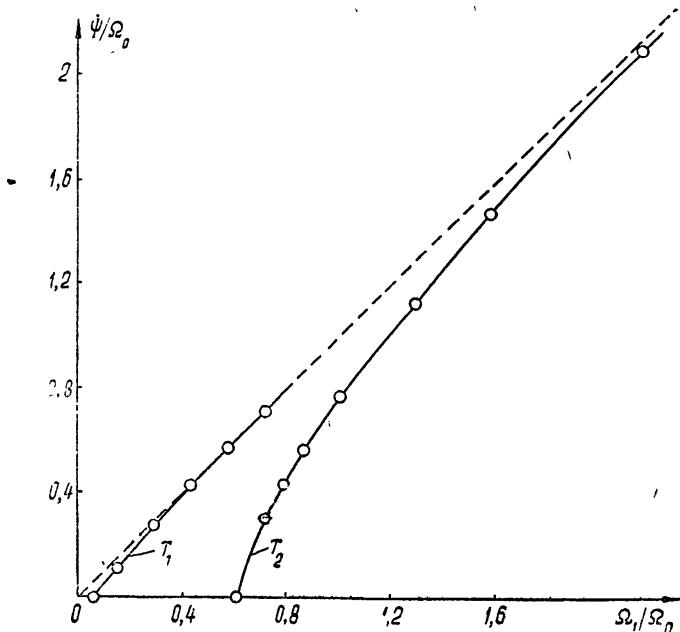


Рис. 3.

На основании приведенных характеристик можно сделать вывод, что рассматриваемым методом в принципе можно измерять малые угловые скорости, соответствующие расстройкам частоты, значительно меньшим ширины полосы синхронизации в отсутствие колебаний подставки.

Конечно, вопрос о влиянии случайных возмущений на точность измерения и на величину минимально возможных измеряемых угловых скоростей даже при больших  $x$  в рамках данного исследования остается открытым.

Здесь следует заметить, что диапазон угловых скоростей, измеряемых рассматриваемым методом, оказывается ограниченным не только снизу, но и сверху. Экспериментальные результаты показывают, что при величине расстройки  $\omega_1 \approx 1/2$  и  $\omega_1 \approx v$  происходит синхронизация измеряемой разностной частоты с частотой колебаний подставки. В области синхронизации измеряемая разность частот встречных волн остается постоянной при изменении величины расстройки  $\Omega_1$  и имеет значение  $v/2$  (или  $v$  при  $\omega_1 \approx v$ ). Ширина наблюдаемой области синхронизации увеличивается при увеличении связи, что при больших значениях параметров связи между волнами приводит к сильному искажению частотной характеристики.

На рис. 4 и 5 изображены частотные характеристики соответственно для синусоидальной и прямоугольной модуляции при той же амплитуде модуляции  $\Omega_2 = 0,4 M$ , но при вдвое большем значении параметра связи между волнами ( $\omega_0 = 0,16 M$ ).

Наиболее сильно меняются частотные характеристики при синусоидальной модуляции. Зависимость  $T_1$  на рис. 4 получена в области первого минимума ширины области захвата ( $T_1 = 48,3/M$ ). В случае прямоугольной модуляции частотные характеристики в области малых расстроек  $\Omega_1$  искажены в значительно меньшей степени, особенно при малых значениях  $\Omega_{10}$  (кривая  $T_1$ ,  $T_1 = 34/M$ ). Кривые  $T_2$  на рис. 4, 5 получены при  $T_2 = 30,4/M$  и  $T_2 = 45/M$  соответственно.

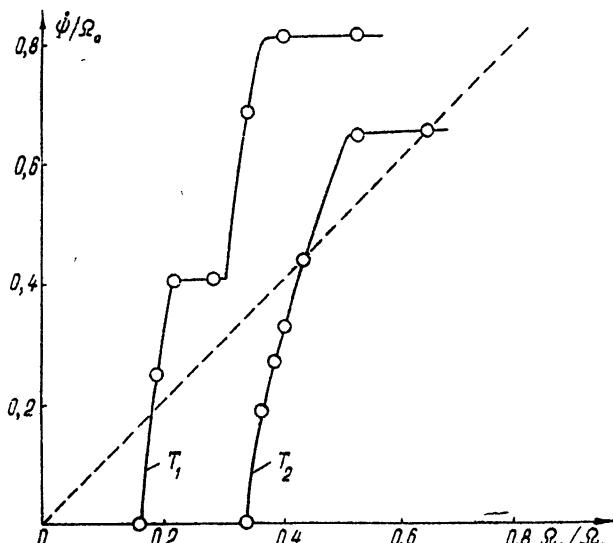


Рис. 4.

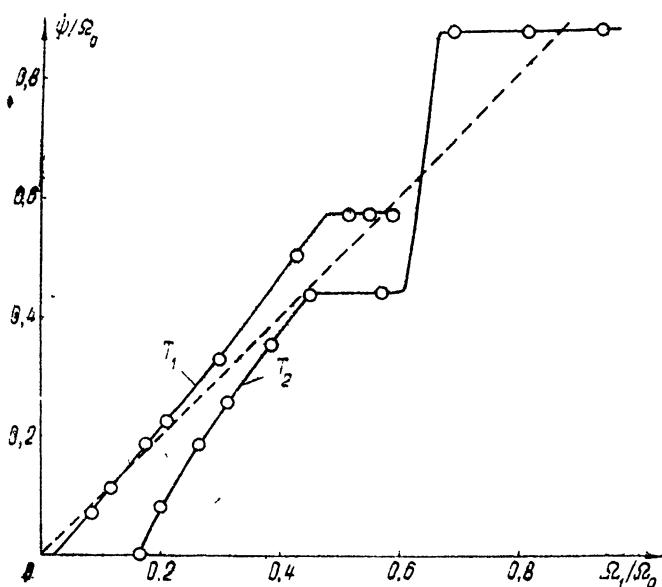


Рис. 5.

Проведенный нами анализ показал, что для эффективного снижения нижнего порога чувствительности необходимо обеспечить наиболь-

шее отношение  $\Omega_2/\Omega_0$ , в то же время для расширения рабочего диапазона измеряемых скоростей частота модуляции должна быть выбрана достаточно большой, чтобы не проявлялся эффект синхронизации разности частот, т. е. во всей рабочей области должно выполняться условие  $\Omega_1 \ll \nu$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Klass, Aviation Week and Space Technology, 1966.
2. D. Christiansen, Electronics, 1966.
3. Г. С. Круглик, К теории биений в колыцевом ОКГ, Минск, 1967.
4. P. H. Lee, J. G. Atwood, Quantum Electronics, QE-2, 235 (1966).
5. F. Agarowitz, Appl. Phys. Letters, 9, 55 (1966).
6. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, ЖЭТФ, 52, 1616 (1967).
7. П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Г. А. Чернобровкин, Радиотехника и электроника, 13, вып. 11, (1968).
8. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 11, № 4, 519 (1968).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
11 января 1968 г.

#### FREQUENCY CHARACTERISTICS OF A RING LASER ON A VIBRATING SUPPORT

*V. N. Kuryatov, P. S. Landa, E. G. Lariontsev*

The possibility of measuring small angular velocities of rotation by means of a ring gas laser performing rotation oscillations about its own axis is investigated analytically and by the method of electron modelling. The width of locking region is shown to depend on the period and amplitude of the vibrations of the support angular velocity and to turn into zero at some values of these parameters. The dependence of beat frequency on the angular velocity of rotation is studied.

УДК 535.339

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УЗКОГО МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СВЕТОВОГО ПУЧКА

*A. Ю. Ардашев, В. А. Кашин, Г. В. Скроцкий*

Найдены точные выражения для напряженностей электромагнитного поля узкого поляризованного монохроматического светового пучка. На примере основной пространственной моды выясняются некоторые его особенности. Оказывается, что линии тока энергии такого пучка обладают пространственной кривизной и кручением, причем полный набег фазы при распространении пучка от  $-\infty$  до  $+\infty$  равен  $\pi$ .

Для решения ряда задач, связанных с канализацией световых потоков, а также задач нелинейной оптики и голограмии, в которых используются ограниченные световые пучки, представления, развитые для плоских волн, оказываются недостаточными. Недавно в [1, 2] были получены решения скалярного уравнения для поля в оптическом резонаторе, определяющие распределение интенсивности по сечению и по длине пучка, а также форму фазовых поверхностей [3]. В работе [4] найдены составляющие электромагнитного поля узкого когерентного светового пучка в свободном пространстве и на примере основной пространственной моды выяснены некоторые его особенности.

Составляющие электрического поля циркулярно поляризованного монохроматического светового пучка, распространяющегося в направлении оси  $z$  в свободном пространстве, могут быть представлены в виде

$$E_x(r, t) \mp iE_y(r, t) = E_0 e^{\pm ik_0 z} \int_{-k_0}^{+k_0} G(k_x, k_y) \times \\ \times \exp [i(k_x x + k_y y) + iz(k_0^2 - k^2)^{1/2}] dk_x dk_y; \quad (1a)$$

$$E_z(r, t) = - \int (\partial_x E_x + \partial_y E_y) dz, \quad (1b)$$

где  $k_0 = \omega_0/c = 1/\lambda$  ( $\lambda = \lambda/2\pi$ ). Верхний знак здесь и далее соответствует правополяризованной, а нижний — левополяризованной волне. Функция  $G(k_x, k_y)$  определяет распределение энергии по сечению пучка. Ее вид зависит от граничных условий задачи. Решения (1a), (1b) удовлетворяют волновому уравнению. Составляющие напряженности магнитного поля могут быть найдены из уравнения Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{H}$ .

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  функция  $G(k_r, \varphi)$  может быть представлена в виде произведения обобщенного полинома Лагерра на гауссов множитель [2]. Разным комбинациям углового и радиального индексов полиномов соответствуют возможные пространственные моды пучка.

Для основной моды циркулярно поляризованного пучка

$$G(k_r) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi} \exp \left( -\frac{\sigma_0^2 k_r^2}{2} \right). \quad (2)$$

Тогда, согласно (1а),

$$E_x(r, t) \mp iE_y(r, t) = E_0 \sigma_0^2 e^{-i\omega_0 t} \int_0^{k_0} \exp\left(-\frac{\sigma_0^2 k_p^2}{2}\right) J_0(k_p \rho) \times \\ \times \exp\left(iz \sqrt{k_0^2 - k_p^2}\right) k_p dk_p, \quad (3)$$

где  $k_p^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $\sigma_0 = \text{const}$ ,  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $J_0$  — функция Бесселя.

При условии  $\sigma_0 k_0 \gg 1$ , реализующемся в оптическом диапазоне, основной вклад в интеграл (3) обусловлен значениями  $k_p \ll k_0$ . Ограничиваюсь квадратичными по  $k_p$  членами в разложении корня, находим

$$E_x(r, t) \mp iE_y(r, t) = E_0 \sigma_0^2 \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \times \\ \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma_0^2 k_p^2}{2} + i \frac{k_p^2}{2k_0} z\right) J_0(k_p \rho) k_p dk_p = \quad (4) \\ = E_0 \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2} - i \frac{k_p \rho^2}{2R} + i \arctg \frac{\bar{\lambda} z}{\sigma_0^2}\right) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)],$$

где  $\sigma(z) = \sigma_0 [1 + (\bar{\lambda} z / \sigma_0^2)^2]^{1/2}$  — эффективный размер светового пучка в поперечном сечении,  $R = \sigma_0^2 \sigma^2 / \bar{\lambda}^2 z$  — радиус кривизны волнового фронта на оси  $z$ . Продольная составляющая поля  $E_z(r, t)$  легко находится из (1б).

Составляющие электромагнитного поля могут быть записаны в виде [4]

$$E_x = A(\rho, z) \cos \Phi, \quad H_x = \pm A(\rho, z) \sin \Phi, \\ E_y = \mp A(\rho, z) \sin \Phi, \quad H_y = A(\rho, z) \cos \Phi, \quad (5)$$

$$E_z = A(\rho, z) B(\rho, z) \cos(\Phi + \alpha), \quad H_z = \pm A(\rho, z) B(\rho, z) \sin(\Phi + \alpha),$$

где

$$A(\rho, z) = E_0 \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right), \quad B(\rho, z) = -\frac{\bar{\lambda} \rho}{\sigma_0 \sigma},$$

$$\Phi(\rho, z, t) = -\omega_0 t + k_0 z + \frac{k_0 \rho^2}{2R} - \arctg \frac{\bar{\lambda} z}{\sigma_0^2},$$

$$\alpha = \pm \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{\sigma_0^2}{\bar{\lambda} z}.$$

Составляющие поля линейно или эллиптически поляризованного пучка легко получить путем сложения циркулярно поляризованных пучков противоположной поляризации.

Средняя по времени плотность энергии  $W(\rho, z)$  поля пучка равна

$$W(\rho, z) = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{A^2(\rho, z)}{4\pi} + \frac{A^2(\rho, z)B^2(\rho, z)}{8\pi} \quad (6)$$

и отличается от выражения для плотности энергии плоской поперечной волны вторым слагаемым, обусловленным существованием продольных составляющих электрического и магнитного полей. Вычисление средней по времени плотности потока энергии  $S$  приводит к выражениям

$$S_x(\rho, z) = -\frac{c}{4\pi} A^2(\rho, z) B(\rho, z) \cos \alpha,$$

$$S_y(\rho, z) = \mp \frac{c}{4\pi} A^2(\rho, z) B(\rho, z) \sin \alpha, \quad (7)$$

$$S_z(\rho, z) = \frac{c}{4\pi} A^2(\rho, z),$$

из которых видно, что поток энергии в направлении распространения пучка получается по форме таким же, как и для плоской поперечной волны соответствующей амплитуды. Существенное отличие пучка от плоской волны состоит в появлении поперечных составляющих  $S_x$  и  $S_y$ , что не приводит, однако, к излучению энергии в этих направлениях.

Решая уравнение

$$[ds, S] = 0,$$

находим выражения для линий тока  $s$  энергии

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \left( \frac{\bar{\lambda} z}{\sigma_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \varphi = \varphi_0 \pm \arctg \frac{\bar{\lambda} z}{\sigma_0^2}, \quad (8)$$

где  $\rho_0$  и  $\varphi_0$  — значения  $\rho$  и  $\varphi$  в горловине пучка ( $z = 0$ ).

Линии тока энергии представляют собой кривые с кручением  $\tau = \pm \bar{\lambda}/\sigma^2$  и кривизной  $\kappa = \bar{\lambda}^2 \rho_0/\sigma_0 \sigma^3$ , расположенные на поверхностях круговых гиперболических цилиндров, соосных направлению распространения пучка (рис. 1). Линии тока энергии (8) циркулярно поляризованного

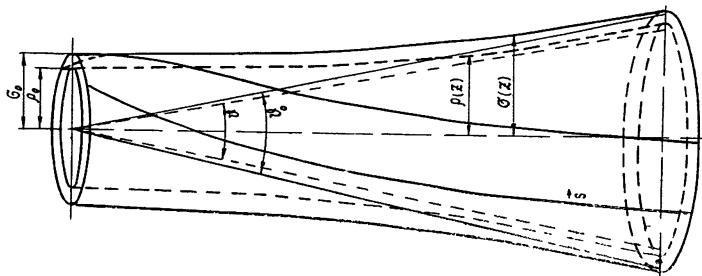


Рис. 1. Схематическое изображение узкого монохроматического светового пучка (основная мода):  $\sigma(z)$  — эффективный радиус пучка;  $s$  — линии тока энергии (8);  $\theta_0$  — угол раствора пучка,  $\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \bar{\lambda}/\sigma_0$ ;  $\theta$  и  $\rho(z)$  — асимптотический угол и радиус поперечного сечения гиперболического цилиндра (8), (9).

ванного пучка не совпадают с образующими этих цилиндров и приближаются к ним только асимптотически при  $z \rightarrow \infty$ . При перемещении вдоль пучка от  $-\infty$  до  $+\infty$  линии тока закручиваются на угол  $\pi$ . На отрезке  $-l_0, +l_0$  набег фазы равен  $\pi/2$ . Угол раствора асимптотического конуса определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\bar{\lambda} \rho_0}{\sigma_0^2}, \quad (9)$$

энергия поля, переносимая пучком, концентрируется около его оси.

Заметим, что, хотя линии тока энергии не прямолинейны, разность фаз между поперечными составляющими поля остается постоянной, что

гарантирует сохранение направления поляризации в случае линейно поляризованного пучка.

Кручение линий тока энергии циркулярно поляризованного пучка является необходимым следствием локализации энергии около его оси, приводящей к появлению продольных составляющих электрического и магнитного полей. Этот вывод справедлив для любого пучка с симметричной относительно  $z = 0$  каустикой и связан с появлением момента количества движения, переносимого пучком в направлении распространения. Это видно из того, что плотность момента количества движения равна

$$M_z = \frac{\rho}{4\pi c} S_\phi.$$

Полный набег фазы, как и в случае приближенного решения (5), составляет  $\pi$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Fox, T. Li, Bell Syst. Techn. J., 40, 453 (1961) (перевод, сб. Лазеры, ИЛ, М., 1963).
2. H. Kogelnik, T. Li, Proc. IEEE, 54, 1312 (1966).
3. G. Goubau, F. Schwerling, IRE Trans., AP-9, № 3, 248 (1961) (перевод, Зарубежная радиоэлектроника, № 11, 3 (1961)).
4. А. Ю. Ардашев, В. А. Кашин, Г. В. Скроцкий, ЖЭТФ, 55, вып. 3(9), 869 (1968).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
20 июля 1967 г.

#### SOME PROPERTIES OF NARROW MONOCHROMATIC LIGHT BEAM

*A. Yu. Ardashev, V. A. Kashin, G. V. Skro茨kii*

The exact expressions are found for the strengths of an electromagnetic field of a narrow polarized monochromatic light beam. Some peculiarities of the field are clarified by way of example of the main spatial mode. The energy current lines of such a beam appear to possess the spatial curvature and screwing, the phase shift being equal to  $\pi$  in propagation of the beam from  $-\infty$  to  $+\infty$ .

УДК 538.574.8

## О ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ РАДИОВОЛН ЗА $n$ ХАОСТИЧЕСКИМИ ЭКРАНАМИ

*Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов*

Проведен расчет функций частотной корреляции флуктуаций поля  $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}$  за  $n$  хаотическими экранами при произвольных возмущениях фазы. Показано, что функция  $|R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}|^2$  при бесконечном заполнении пространства хаотическими экранами увеличивается и стремится к насыщению. Проведено сопоставление полученных результатов с данными метода плавных возмущений. Сведения о  $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}$  могут быть непосредственно использованы для оценки расплывания импульса в слое с неоднородностями.

Как известно, при исследовании распространения радиоволн в статистических средах довольно часто возникает вопрос о нахождении свойств поля за слоем с хаотическими неоднородностями, имеющим конечную толщину. При решении таких задач обычно пользуются либо решением волнового уравнения для флюктуирующей части поля, полученным в известном приближении плавных возмущений [1-3], либо, используя решение граничной задачи, находят поле за слоем, заменяя последний хаотическим фазовым экраном [4-6].

Вместе с тем, при решении ряда практических задач, использование указанных выше приближений не всегда возможно. Например, в задаче о флюктуациях радиоволн, вызванных неоднородностями межпланетной и солнечной плазмы, использование модели фазового экрана не всегда может быть обосновано; вызывает сомнение и возможность использования приближения метода плавных возмущений ввиду больших флюктуаций фазы волны (на частотах  $f \leq 100$  Мгц) и большой толщины рассеивающего слоя [7]. Такая же ситуация имеет место при исследовании флюктуаций радиоволн, вызванных турбулентной атмосферой. В связи с этим в последнее время разрабатываются схемы более корректного учета многократного рассеяния в толстом слое с неоднородностями [2].

В настоящей работе рассмотрен вопрос о частотной корреляции флюктуаций радиоволн за  $n$  хаотическими экранами, расположеными на пути распространения волны. Во-первых, задача о дифракции волн на нескольких (в основном двух-трех) фазовых экранах представляет самостоятельный интерес (статистические характеристики поля волны, страженной от хаотической поверхности Луны и прошедшей через неоднородную ионосферу; характеристики поля волны, многократно отраженной от ионосферы и др.). Во-вторых, увеличивая число хаотических экранов и сохраняя при этом неизменным расстояние от точки приема до самого удаленного экрана, можно попытаться в пределе получить решение, приближенно описывающее статистические характеристики поля волны за толстым слоем с неоднородностями. Более того, поскольку параметры каждого экрана совершенно произвольны, с помощью по-

лученного решения можно найти приближенное поведение поля за толстым слоем с произвольным распределением параметров неоднородностей по его толщине.

Предположим, что изучение, прошедшее через слой с хаотическими неоднородностями, принимается в точке с координатами  $x_0, y_0, z_0^*$ . Если слой с неоднородностями достаточно тонкий и вызывает только возмущения фазы волны, то для описания поля на выходе такого слоя можно ограничиться приближением геометрической оптики и представить его в виде

$$E'(x_1, y_1, z_1) = A(x_1, y_1, z_1) \exp [ + i(\omega t - kz_1)] \exp [i\Delta S(x_1, y_1, z_1)], \quad (1)$$

где  $A(x_1, y_1, z_1)$  — поле на входе слоя,  $\Delta S(x_1, y_1, z_1)$  — возмущение фазы волны, вносимое неоднородностями слоя.

Поле волны в точке приема  $(x_0, y_0, z_0)$  в приближении малых углов рассеяния (приближение Кирхгофа) связано с полем  $E'(x_1, y_1, z_1)$  на выходе слоя (на экране) соотношением [4]

$$E(x_0, y_0, z_0) = \frac{i\omega}{2\pi(z_1 - z_0) c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E'(x_1, y_1, z_1) \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{i\omega}{2(z_1 - z_0) c} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\} dx_1 dy_1. \quad (2)$$

Предположим, что перед слоем, расположенным на высоте  $(z_1 - z_0)$  относительно наблюдателя, находится другой хаотический экран, вызывающий возмущение поля, равное  $\exp [i\Delta S(x_2, y_2, z_2)]$ . Тогда поле  $E(x_1, y_1, z_1)$  на входе первого слоя можно выразить через поле  $E'(x_2, y_2, z_2)$  аналогично (1) и (2)\*\*. Таким же образом можно представить поле на входе  $(n-1)$  экрана:

$$E(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = \frac{i\omega}{2\pi(z_n - z_{n-1}) c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E'(x_n, y_n, z_n) \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{i\omega}{2c(z_n - z_{n-1})} [(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2] \right\} dx_n dy_n, \quad (3)$$

где

$$E'(x_n, y_n, z_n) = E(x_n, y_n, z_n) e^{-ik\Delta z_n}.$$

Используя соотношения (1) — (3), легко получить выражение, связывающее поле волны в точке приема с возмущениями, вносимыми всеми хаотическими слоями. Однако в дальнейшем нас будет интересовать флюктуирующее поле  $f(x_0, y_0, 0)$ , непосредственно характеризующее флюктуации параметров волны в точке приема. Согласно [4],

$$f(x, y, z) = \frac{E(x, y, z) - \bar{E}(x, y, z)}{E_0(x, y, z)}, \quad (4)$$

\* Далее будем полагать, как правило,  $z_0 = 0$ .

\*\* Вообще говоря, при описании поля на втором экране необходимо учитывать сферичность рассеянных волн. Однако в случае малых углов рассеяния возмущение, вызванное вторым экраном, можно записать в виде  $\exp [i\Delta S(x_2, y_2, z_2)]$ .

где  $\overline{E(x, y, z)}$  — среднее поле волны,  $E_0(x, y, z)$  — поле волны в отсутствие неоднородностей. Используя (1) — (4), для флюктуирующего поля волны, прошедшей через  $n$  слоев с хаотическими неоднородностями, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 f(x_0, y_0, 0) = & \left( \frac{i\omega}{2\pi c} \right)^n \frac{1}{\prod_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})} \times \\
 & \times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{2^n} \left\{ \prod_{k=1}^n \exp [i\Delta S(x_k, y_k, z_k)] - \right. \\
 & \left. - \prod_{k=1}^n \overline{\exp [i\Delta S(x_k, y_k, z_k)]} \right\} \times \\
 & \times \exp \left[ - \frac{i\omega}{2c} \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}{z_k - z_{k-1}} \right] \prod_{k=1}^n dx_k dy_k. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Функции частотной корреляции флюктуаций амплитуды  $A$ , интенсивности  $I$  и фазы  $\Delta S$  можно выразить через корреляционные функции флюктуирующего поля [5]:

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\xi, \eta) = \overline{f_{\omega_1}(x, y, z) f_{\omega_2}^*(x + \xi, y + \eta, z)},$$

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}(\xi, \eta) = \overline{f_{\omega_1}(x, y, z) f_{\omega_2}(x + \xi, y + \eta, z)}.$$

Наиболее простые выражения при этом имеют место в двух предельных случаях:

$$\begin{aligned}
 \left\{ F_{A, \omega} \right\} & \simeq \left[ \frac{\left( \frac{\Delta A}{A} \right)_{\omega_1} \left( \frac{\Delta A}{A} \right)_{\omega_2}}{(\Delta S)_{\omega_1} (\Delta S)_{\omega_2}} \right] \simeq \frac{1}{2} \operatorname{Re} (R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*} \pm R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}) \\
 & (\overline{\Delta S_0^2} \ll 1); \tag{6a}
 \end{aligned}$$

$$F_{A, \omega} \simeq 0,91 F_{I, \omega} \simeq 0,91 |R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}|^2 \quad (\overline{\Delta S_0^2} \gg 1, D \gg 1). \tag{6b}$$

Здесь  $\overline{\Delta S_0^2}$  — средний квадрат флюктуаций фазы на выходе неоднородного слоя (в нашем случае на выходе экрана, ближайшего к точке наблюдения). Выражение (6b) справедливо в зоне Фраунгофера, когда поле в точке приема можно считать распределенным по нормальному закону.

Для вычисления корреляционных функций  $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\xi_0, \eta_0, 0)$ ,  $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}(\xi_0, \eta_0, 0)$  умножим в (5)  $f_{\omega_1}(x_0, y_0, 0)$  на функцию  $f_{\omega_2}^*(x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0, 0)$  (во втором случае — на  $f_{\omega_2}(x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0, 0)$ ) и проведем усреднение в полученных выражениях. Тогда после несложных преобразований найдем функции частотной корреляции флюктуирующего поля:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\xi_0, \eta_0, 0) \\ R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}(\xi_0, \eta_0, 0) \end{array} \right\} = \left[ \frac{i\omega_1 \omega_2}{2\pi c (\omega_2 \mp \omega_1)} \right]^n \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k \right) \times \\
 & \times \frac{1}{\prod_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[ \pm \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k(\xi_k, \eta_k) \right] - 1 \right\} \times \\
 & \times \exp \left[ -\frac{i\omega_1 \omega_2}{2c(\omega_2 \mp \omega_1)} \sum_{k=1}^n \frac{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2}{z_k - z_{k-1}} \right] \times \\
 & \times d\xi_1 \dots d\xi_n d\eta_1 \dots d\eta_n,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\beta_k = [\overline{(\Delta S)^2}_{\omega_1} + \overline{(\Delta S)^2}_{\omega_2}]_k, \quad \alpha_k = [\overline{(\Delta S)^2}_{\omega_1} \overline{(\Delta S)^2}_{\omega_2}]_k^{1/2},$$

$\rho_k(\xi_k, \eta_k)$  — нормированная функция неоднородностей слоя, функция  $\rho(\xi_k, \eta_k)$  учитывает, что различным экранам могут соответствовать различные масштабы неоднородностей.

При вычислении (7) сделано предположение о статистической независимости флуктуаций фазы, вызванных различными экранами (слоями)\*, и о нормальном законе распределения фазы на каждом экране (см. [4, 5]).

Выражения (6), (7) характеризуют поведение частотной корреляции флуктуаций принимаемого сигнала. Полагая в (6), (7)  $\omega_1 = \omega_2$ , можно получить корреляционные функции флуктуаций интенсивности (амплитуды) сигнала на одной частоте.

Используя (7), нетрудно показать (см. Приложение 2), что

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\xi_0, \eta_0, 0) = R_{ff^*}(\xi_0, \eta_0, 0) = \\
 & = \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k \right) \left\{ \exp \left[ \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k(\xi_0, \eta_0) \right] - 1 \right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Соотношение (8) отражает хорошо известный факт аддитивности углового спектра мощности рассеянного поля (который является фурье-образованием функции  $R_{ff^*}(\xi_0, \eta_0, 0)$ ).

В приближении малых возмущений фазы волны в слое  $\overline{(\Delta S)^2}_{\omega_1, \omega_2} \ll 1$  для функции корреляции  $\rho_k(\xi_k, \eta_k) = \exp[-(\xi_k^2 + \eta_k^2)/l_k^2]$ , где  $l_k$  — эффективный размер неоднородностей  $k$ -го слоя, решение (7) для  $\xi_0 = \eta_0 = 0$  имеет вид

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(0, 0, 0) \simeq \sum_{k=1}^n \alpha_k \left( \frac{1}{1 + \delta^2 D_k'^2} + i \frac{\delta D_k'}{1 + \delta^2 D_k'^2} \right), \tag{9}$$

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}(0, 0, 0) \simeq - \sum_{k=1}^n \alpha_k \left( \frac{1}{1 + D_k'^2} + i \frac{D_k'}{1 + D_k'^2} \right),$$

\* Такое предположение, очевидно, справедливо, поскольку толщина каждого слоя (представленного в виде фазового экрана) принимается много большей среднего размера неоднородностей среды [4].

где

$$D'_k = \frac{1}{1 - \delta^2} \frac{4\Delta z_k c}{\bar{\omega} l_k^2}, \quad \delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

$\Delta z_k$  — высота  $k$ -го экрана.

Решение, описывающее флюктуации волны на выходе непрерывного толстого слоя, можно найти из решения (9) для хаотических экранов, переходя в (9) к пределу при  $n \rightarrow \infty$  и сохраняя постоянной полную толщину слоя  $\Delta z = n\Delta z_n = \text{const}$  ( $\Delta z_n$  — расстояние между экранами). Очевидно, что при таком предельном переходе суммирование в (9) можно заменить интегрированием.

Полагая для простоты в (9)  $\delta = 0$  для случая  $\alpha(k) = \text{const}$  и  $l(k) = \text{const}$ , окончательно имеем

$$R_{ff^*}(0, 0, 0) = \overline{\Delta S_0^2}; \quad (9a)$$

$$R_{ff}(0, 0, 0) = -\overline{\Delta S_0^2} \left[ \frac{\arctg D}{D} + \frac{i}{2D} \ln(1 + D^2) \right], \quad (9b)$$

$\overline{\Delta S_0^2}$  — полный набег фазы волны в слое, вычисленный в приближении геометрической оптики  $D = 4\Delta z c / \bar{\omega} l^2$ . Отсюда легко получить известные выражения для амплитуды и фазы и их взаимной корреляции на выходе толстого слоя со слабыми неоднородностями\*. Нетрудно также убедиться в том, что в пределе при  $n \rightarrow \infty$  при условии  $\Delta z = n\Delta z_n = \text{const}$  выражение (8) примет вид

$$R_{ff^*} = \exp(-\overline{\Delta S_0^2}) \{ \exp[\overline{\Delta S_0^2} \rho(\xi, \eta)] - 1 \}. \quad (10)$$

Перейдем теперь к вычислению величины частотной корреляции. В интересующем нас случае сильных возмущений фазы при  $\alpha_0 = \sum_{k=1}^n \alpha(k) \gg 1$  выражение (7) может быть проинтегрировано для гауссова вида функции  $\rho_k(\xi_k, \eta_k)$ . Проводя вычисления, описанные в Приложении 2, получаем

$$\begin{aligned} R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}(\xi_0, \eta_0) &= (i)^n \exp \left[ -\frac{2\delta^2 \overline{\Delta S_0^2}}{(1 - \delta^2)^2} \right] \prod_{k=1}^n \frac{1}{(b_{k-1}^2 + x_k^2)^{1/2}} \times \\ &\times \exp \left( i \sum_{k=1}^n \arctg \frac{b_{k-1}}{x_k} \right) \exp \left[ -\frac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{l_\alpha^2 \gamma_{n-1}^2 (x_n^2 + b_{n-1}^2)} \right] \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{i(1 - \delta^2)}{\delta D} \left( \frac{x_n^2 + b_{n-1}^2 - b_{n-1}}{x_n^2 + b_{n-1}^2} \right) \frac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{l_\alpha^2} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\gamma_k^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2 (x_k^2 + b_{k-1}^2)}}, \quad b_0 = 1, \quad \gamma_0 = 1,$$

---

\*  $\left\{ \frac{\left( \frac{\Delta A}{A} \right)^2}{(\Delta S)^2} \right\} = R_{ff^*} \pm \operatorname{Re} R_{ff}, \quad 2 \frac{\Delta A}{A} \Delta S = \operatorname{Im} R_{ff}.$

$$l_a = \frac{l}{(\Delta S_0^2)^{1/2}}, \quad b_k = 2 - \frac{b_{k-1}}{x_k^2 + b_{k-1}^2}, \quad x_k = \frac{x_1}{\gamma_{k-1}^2}, \quad x_1 = \frac{\delta D \Delta S_0^2}{n^2(1-\delta^2)}.$$

На рис. 1—4 представлены результаты вычислений функции (11) на электронно-вычислительной машине при различном числе слоев на пути распространения волны (при неизменной полной толщине рассеивающего слоя  $\Delta z_0$  и полном набеге фазы волны в слое  $(\Delta S_0^2)^{1/2}$ ).

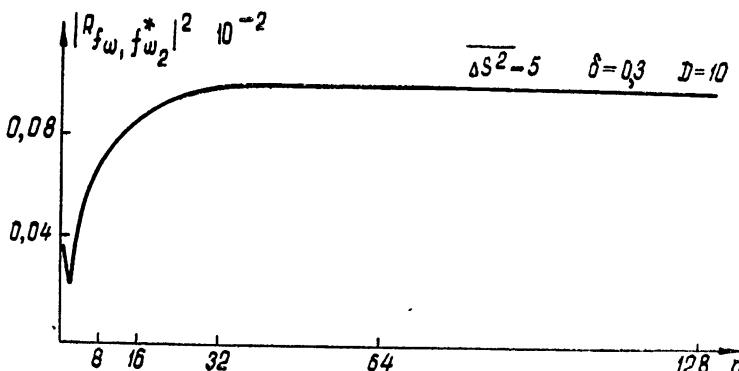


Рис. 1.

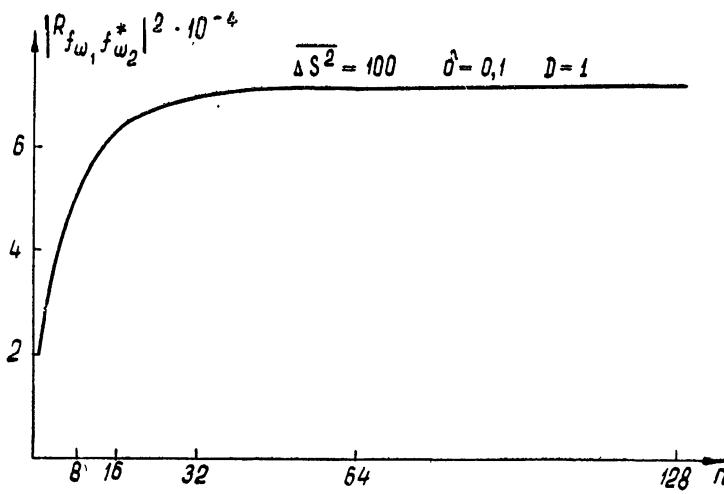


Рис. 2.

Из рис. 1, 2 видно, что наличие на пути распространения волны второго и третьего экрана в зависимости от расстояний между экранами и частотного интервала  $\delta$  может либо уменьшить, либо увеличить значение частотной корреляции. При дальнейшем увеличении числа экранов  $n$  функция  $|R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}|^2$  растет и затем достигает насыщения при больших значениях  $n$ . Естественно считать, что в области насыщения функции  $|R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}|^2$  примерно описывают поведение флуктуаций за

толстым слоем с неоднородностями\*. Таким образом, в непрерывном толстом слое величина частотной корреляции увеличивается по сравнению с величиной  $|R_{f_{\omega_1} f^*_{\omega_2}}|^2$ , наблюдаемой на расстоянии  $\Delta z$ , равном толщине слоя  $\Delta z_0$  за эквивалентным фазовым экраном.

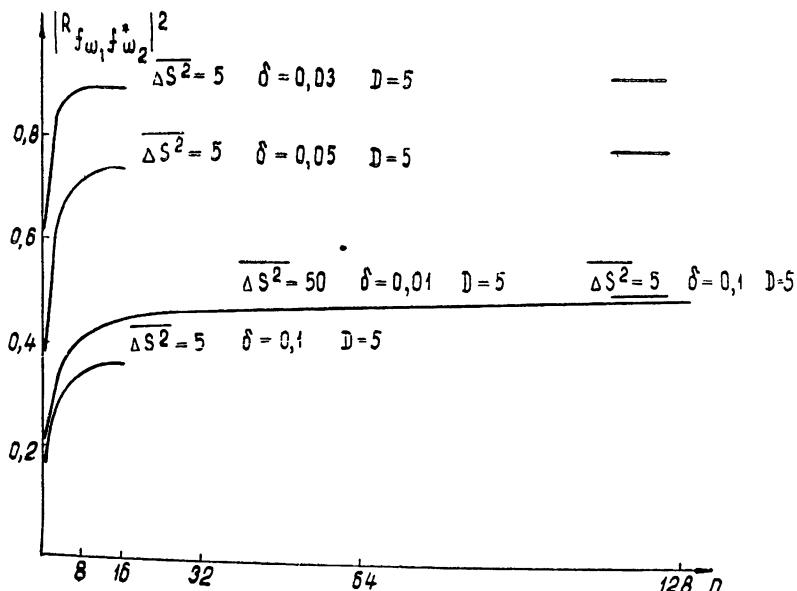


Рис. 3.

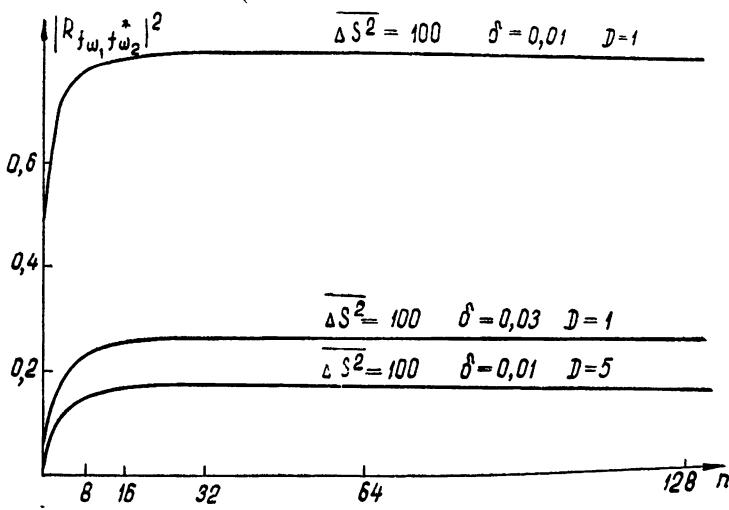


Рис. 4.

Полученные результаты непосредственно могут быть использованы при описании расплывания и статистических характеристик импульсного сигнала за толстым неоднородным слоем или при многократном от-

\* Используемый здесь переход аналогичен используемому в квантовой радиофизике предельному переходу к классическому описанию многоуровневой системы.

ражении сигнала от ионосферы, поскольку расплывание импульса из-за рассеяния определяется функцией  $R_{f_{\omega_1 \omega_2}} f^*$  [9].

Остановимся коротко на сопоставлении приведенных выше результатов с аналогичными результатами, полученными с помощью метода плавных возмущений.

Хорошо известно, что в этом приближении (для слоя любой толщины) флуктуации интенсивности радиоволн распределены по логарифмически нормальному закону (в области геометрической оптики логарифмически нормальный закон распределения может иметь место и в случае больших возмущений фазы волны). Учитывая этот факт, можно получить выражение для частотной корреляции флуктуаций интенсивности в приближении плавных возмущений фазы волны

$$R_{I, \omega} = \exp \left[ - \left( B_{\omega_1}^2 + B_{\omega_2}^2 - 2 \sqrt{B_{\omega_1}^2 B_{\omega_2}^2} \rho_{B_{\omega_1} B_{\omega_2}} \right) \right], \quad (12)$$

где  $B_{\omega_1}^2$ ,  $B_{\omega_2}^2$  и  $\rho_{B_{\omega_1} B_{\omega_2}}$  — средние квадраты и функция частотной корреляции флуктуаций уровня ( $B = \ln(A/A_0)$ ) — легко могут быть вычислены методом плавных возмущений [3]. С другой стороны, в зоне Фраунгофера (где распределение флуктуаций близко к нормальному) и при  $\Delta S_0^2 > 1$ , когда средним полем фактически можно пренебречь,  $|R_{f_{\omega_1 \omega_2}} f^*|^2 \approx R_{I, \omega}$ .

На рис. 3, на котором проведено сравнение данных о частотной корреляции флуктуаций, полученных двумя методами, видно, что при умеренных возмущениях фазы, когда  $\Delta S_0^2 \geq 1$ , еще наблюдается хорошее совпадение результатов. При  $\Delta S_0^2 \gg 1$  метод плавных возмущений приводит, по-видимому, к завышенным значениям частотной корреляции\*.

В заключение заметим, что функцию частотной корреляции флуктуаций интенсивности  $I_{\omega_1} I_{\omega_2}$  (и, как частный случай, дисперсию флуктуаций интенсивности) за  $n$  экранами можно найти непосредственно путем вычисления моментов четвертого порядка (Приложение 1).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

*Выход формулы (7) и выражения для  $I_{\omega_1} I_{\omega_2}$ . Для получения (7) умножим (5) на  $f^*(x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0, 0)$  (или  $f(x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0, 0)$ ) и перейдем к новым координатам  $x'_k - x_k = \xi_k$ ,  $y'_k - y_k = \eta_k$ ,  $x_k = x_k$ ,  $y_k = y_k$ . Усредня затем полученное выражение по всем  $x_k$  и  $y_k$ , в случае однородного статистического поля  $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  получим*

$$\begin{aligned} I_{\mp} = \left\{ \begin{array}{l} R_{ff^*}(\xi_0, \eta_0, 0) \\ R_{ff}(\xi_0, \eta_0, 0) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right\}^n \left( \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\pi c} \right)^{2n} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})^2} \times \\ &\times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{4n} \left\{ \begin{array}{l} R_{ff^*}(\xi_k, \eta_k) \\ R_{ff}(\xi_k, \eta_k) \end{array} \right\} \exp \left\{ - \frac{i}{2c} \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k - z_{k-1}} \right\} \times \end{aligned} \quad (\text{П.1.1})$$

$$\times [\Phi(x_k, x_{k-1}, \xi_k, \xi_{k-1}) + \Phi(y_k, y_{k-1}, \eta_k, \eta_{k-1})] \left\} \prod_{k=1}^n dx_k dy_k d\xi_k d\eta_k , \right.$$

\* При больших значениях  $\Delta S_0^2 \gg 1$  настоящие результаты расходятся с данными метода плавных возмущений.

где

$$\Phi(x_k, x_{k-1}, \xi_k, \xi_{k-1}) = \{(\omega_1 \mp \omega_2) x_k^2 - 2[(\omega_1 \mp \omega_2) x_{k-1} \pm \pm \omega_2(\xi_k - \xi_{k-1})] x_k + (\omega_1 \mp \omega_2) x_{k-1}^2 \pm 2\omega_2 x_{k-1}(\xi_k - \xi_{k-1}) \mp (\Pi.1.2)$$

$$\mp \omega_2(\xi_k - \xi_{k-1})^2\},$$

а функция  $\Phi(y_k, y_{k-1}, \eta_k, \eta_{k-1})$  имеет тот же вид, что и (П.1.2).

Проведем в (П.1.1) интегрирование по всем  $x_k$  и  $y_k$ . Легко видеть из (П.1.1) и (П.1.2), что эта операция сводится к взятию  $2n$  интегралов вида

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{i[a(x^2 + y^2) + bx + cy + d]\} dx dy =$$

$$= i\pi \frac{1}{a} \exp \left[ i \left( d - \frac{b^2 + c^2}{4a} \right) \right] \quad (\Pi.1.3)$$

и

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ (d=0)}} I = \delta(b, c). \quad (\Pi.1.4)$$

Заметим, что после каждого интегрирования по любым  $(x_k, y_k)$  функция  $\Phi(x_k, x_{k-1}, \xi_k, \xi_{k-1}) + \Phi(y_k, y_{k-1}, \eta_k, \eta_{k-1})$  переходит в  $\Phi(\xi_k, \xi_{k-1}, \eta_k, \eta_{k-1}) = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 \mp \omega_2} [(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2]$ . В результате после  $2n$  интегрирований по всем  $(x_k, y_k)$  получаем (7).

Вывод формулы для  $\overline{I_{\omega_1} I_{\omega_2}}$ , образуем из (3) выражение  $\overline{I_{\omega_1} I_{\omega_2}} = \overline{E_{\omega_1}(x_0, y_0) E_{\omega_1}^*(x_0, y_0) E_{\omega_2}(x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0) E_{\omega_2}^*(x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0)}$ , которое состоит из  $8n$  интегралов по переменным  $x_k, x'_k, p_k, p'_k, y_k, y'_k, q_k, q'_k$ . Переходя к разностным переменным (см. [10])

$$x'_k = x'_k, \quad U_{x_k} = x_k - x'_k, \quad V_{x_k} = p'_k - p_k, \quad \delta_{x_k} = p_k - x'_k,$$

$$y'_k = y'_k, \quad U_{y_k} = y_k - y'_k, \quad V_{y_k} = q'_k - q_k, \quad \delta_{y_k} = q_k - y'_k \quad (\Pi.1.5)$$

и полагая для простоты  $x_0 = y_0 = 0$ , получаем

$$\overline{I_{\omega_1} I_{\omega_2}} = \left( \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\pi c} \right)^{4n} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})^4} \times$$

$$\times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{8n} \exp [-\Phi(U_{x_k}, U_{y_k}, V_{x_k}, V_{y_k}, \delta_{x_k}^*, \delta_{y_k}^*)] \times$$

$$(\Pi.1.6)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{i\omega_1}{2c} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k - z_{k-1}} (F_x + F_y) + 2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{V_{x_k} \xi_0 + V_{y_k} \eta_0}{z_1 - z_0} \right] \right\} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^n dx'_k dy'_k dU_{x_k} dU_{y_k} dV_{x_k} dV_{y_k} d\delta_{x_k} d\delta_{y_k},$$

где

$$\mathbf{F}_x = 2i \left[ (U_{x_k} - U_{x_{k-1}}) - \frac{\omega_2}{\omega_1} (V_{x_k} - V_{x_{k-1}}) \right] (x'_k - x'_{k-1}) + \\ (\Pi.1.7)$$

$$+ (U_{x_k} - U_{x_{k-1}})^2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} [(V_{x_k} - V_{x_{k-1}})^2 + 2 (V_{x_k} - V_{x_{k-1}}) (\delta_{x_k} - \delta_{x_{k-1}})],$$

$F_y$  — аналогичная функция переменных  $y'_k, y'_{k-1}, U_{y_k}, U_{y_{k-1}}, V_{y_k}$ ,  
 $V_{y_{k-1}}, \delta_{y_k}, \delta_{y_{k-1}}$ ,

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \{ \beta_k + \alpha_k [\rho(V_{x_k} + \delta_{x_k}, V_{y_k} + \delta_{y_k}) - \rho(\delta_{x_k}, \delta_{y_k}) + \\ + \rho(U_{x_k} - \delta_{x_k}, U_{y_k} - \delta_{y_k}) - \rho(U_{x_k} - V_{x_k} - \delta_{x_k}, \\ (\Pi.1.8)$$

$$U_{y_k} - V_{y_k} - \delta_{y_k})] \} - \sum_{k=1}^n [(\overline{\Delta S})_{\omega_1}^2 \rho(U_{x_k}, U_{y_k}) - (\overline{\Delta S})_{\omega_2}^2 \rho(V_{x_k}, V_{y_k})].$$

При выводе (П.1.8) предполагается нормальный закон распределения фазы на каждом из статистически независимых экранов. Как легко видеть из (П.1.6), (П.1.7), интегрирование по всем  $x'_k, y'_k$  сводится к взятию интегралов типа (П.1.4), а последующее интегрирование по  $U_{x_k}, U_{y_k}$  — к вычислению

$$I = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(x, y) \delta(x - p_1, y - p_2) dx dy = \Phi'(p_1, p_2).$$

При этом все  $U_x, U_y$  переходят в  $\frac{\omega_2}{\omega_1} V_x, \frac{\omega_2}{\omega_1} V_y$ . После интегрирования по всем  $x'_k, y'_k, U_{x_k}, U_{y_k}$  получаем выражение для  $\overline{I_{\omega_1} I_{\omega_2}}$  в виде  $4n$  кратного интеграла по  $dV_{x_k} dV_{y_k} d\delta_{x_k} d\delta_{y_k}$ , которое для небольших  $n$  может быть сочтено на ЭВМ методами, аналогичными [8].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

*Выход формулы (8).* Рассмотрим один из  $n$  интегралов (7) для  $R_{ff^*}(\xi_0, \eta_0)$ :

$$I_k = \frac{i\omega_1 \omega_2}{2\pi c(\omega_2 - \omega_1)(z_k - z_{k-1})} \iint_{-\infty}^{+\infty} \{ \exp[\alpha_k \rho_k(\xi_k, \eta_k)] - 1 \} \times \\ (\Pi.2.1)$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{i\omega_1 \omega_2}{2c(z_k - z_{k-1})(\omega_2 - \omega_1)} [(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2] \right\} d\xi_k d\eta_k.$$

При  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  осциллирующий множитель в (П.2.1) является быстропеременной функцией, поэтому основной вклад в (П.2.1) дают значения подинтегральной функции при  $\xi_k = \xi_{k-1}, \eta_k = \eta_{k-1}$ . Пренебрегая изменениями  $\exp[\alpha_k \rho_k(\xi_k, \eta_k)]$ , имеем

$$I_k = \exp[\alpha_k \rho(\xi_{k-1}, \eta_{k-1})] - 1 \quad (\Pi.2.2)$$

и после взятия аналогичных интегралов по всем  $(\xi_k, \eta_k)$  получаем (8).

*Вывод формулы (11).* Рассмотрим подынтегральную функцию в (7)

$$\exp \left\{ -\alpha_0 \left[ 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp -(\xi'_k{}^2 + \eta'_k{}^2) \right] \right\}.$$

При  $\alpha_0 \gg 1$  функция отлична от нуля при условии, что член

$$F(\xi'_1, \dots, \xi'_n, \eta'_1, \dots, \eta'_n) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp -(\xi'_k{}^2 + \eta'_k{}^2) \ll 1.$$

Разложим функцию  $F(\xi'_1, \dots, \xi'_n, \eta'_1, \dots, \eta'_n)$  в ряд и ограничимся первым членом разложения, учитывая, что в области, существенной для интегрирования, все  $\xi'_k, \eta'_k \ll 1$ . Тогда в рассматриваемом приближении (которое особенно хорошо выполняется при  $\delta D < 1$ ) залишем интегралы для  $R_{ff^*}(\xi_0, \eta_0, 0)$  в следующем виде:

$$I_{(7)} = \frac{(ia)^n}{(2\pi c)^n \prod_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})} \exp \left[ -\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_0) \right] \times \quad (П.2.3)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_0} (\xi'_k{}^2 + \eta'_k{}^2) \right] \Phi(\xi_k, \eta_k) \prod_{k=1}^n d\xi_k d\eta_k,$$

где

$$a = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \Phi(\xi_k, \eta_k) = \exp \left[ -\frac{ia}{2c} \sum_{k=1}^n \frac{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2}{z_k - z_{k-1}} \right],$$

$$\xi'_k = \xi_k/l, \quad \eta'_k = \eta_k/l.$$

Каждый из интегралов (П.2.3) представляет собой интеграл типа (П.1.3), причем после каждого интегрирования получаются интегралы подобного же вида с некоторыми эффективными значениями коэффициентов  $a, b, c, d$ . Результирующее выражение можно представить в виде (11).

Авторы выражают благодарность В. А. Алимову за ценное замечание.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, 4, № 1, 88 (1959).
- Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 630 (1961).
- Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 4, № 11, 62 (1964).
- Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 1, 400 (1966).
- Л. М. Ерухимов, Астрон. ж. (в печати).
- Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
- В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 268 (1968).
- В. В. Писарева, Астрон. ж., 35, № 1, 112 (1958).

FREQUENCY CORRELATION OF RADIO WAVE FLUCTUATIONS BEHIND  $n$   
RANDOM SCREENS

L. M. Erukhimov, V. P. Uryadov

The functions of frequency correlation of the field fluctuations  $|R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}|^2$  behind  $n$  random screens are calculated at arbitrary phase perturbations. It is shown that when the random screens fill infinitely the space, the function  $|R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}|^2$  is increased and tends to saturate. The results obtained are compared with the data derived by smooth perturbation method. The data on  $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*}$  are directly usable to estimate a blurring of the impulse in the layer with irregularities.

*Примечание при корректуре.* В последнее время, в связи с открытием космических источников радиоизлучения малых угловых размеров (пульсары, квазары и др.), появились возможности изучения неоднородностей межзвездной среды с помощью эффектов рассеяния. В частности, с рассеянием радиоволн в ионизированных областях межзвездной среды (или в окрестности пульсаров) можно связать, по-видимому, минутные и суточные вариации интенсивности радиоизлучения пульсаров (Л. М. Ерухимов, В. В. Писарева, Радиофизика, в печаги). Кроме того, как показывают оценки, предположение о рассеивающих неоднородностях в короне пульсаров позволяет объяснить ряд особенностей тонкой структуры их излучения за счет расплывания импульсов из-за рассеяния. Результаты настоящей работы могут быть использованы для расчетов указанных эффектов.

УДК 538.56:519 25

## ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили

Строится теория случайных выбросов однородного и изотропного скалярного поля над достаточно высоким уровнем. Показано, что в этом случае многие статистические характеристики выбросов могут быть выражены через соответствующие характеристики «одномерного профиля» случайного поля. Вычислены средние значения «площади выбросов», плотности выбросов, расстояния между ближайшими выбросами и «объема выбросов».

## ВВЕДЕНИЕ

За последние годы получила широкое развитие теория выбросов случайных процессов  $\xi(t)$ , т. е. случайных функций одной независимой переменной  $t$  (см., например, монографию [1]). Вместе с тем в литературе, насколько нам известно, совершенно отсутствует какое-либо обобщение этой теории на случай вероятностных (случайных) полей. Построение теории выбросов случайных полей представляет, однако, практический интерес. В качестве примера назовем важную для практики задачу о распределении интенсивности электромагнитной волны при выходе ее из турбулентной среды. Если приемная система является распределенной и обладает «порогом срабатывания» по интенсивности излучения, то выборы случайной функции  $I(x, y)$  — интенсивности излучения в точке  $(x, y)$  плоскости приемной апертуры — могут явиться определяющим фактором в режиме работы приемной системы. Такая ситуация возникает, например, когда средний уровень интенсивности в пришедшей волне ниже порога срабатывания  $I_0$  приемной системы.

Ниже мы получим некоторые результаты, касающиеся статистических характеристик выбросов однородных и изотропных случайных полей  $f(x, y)$ . Причем нас будет интересовать наиболее важный для практики случай выбросов над достаточно высоким уровнем  $f_0$ , когда  $(f_0 - \bar{f})^2 \gg (f - \bar{f})^2$ . В этих условиях статистические характеристики выбросов функции  $f(x, y)$  удается связать с таковыми для «одномерного профиля» функции  $f(x, y)$ , т. е. случайной функции одной переменной  $\varphi(x) \equiv f(x, ax+b)$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные константы. Поскольку поле  $f(x, y)$  однородно и изотропно, без ограничения общности можно всегда положить  $a = 0$ . Случайная функция  $\varphi(x)$  является однородной и статистические характеристики ее выбросов хорошо изучены [1]. В дальнейшем нам потребуется знание среднего числа выбросов  $n(f_0)$  такой функции над заданным уровнем  $f_0$  на единице длины  $x$ . Эта величина, как известно [1], определяется формулой

$$n(f_0) = \int_0^\infty w(f_0, \varphi') \varphi' d\varphi', \quad (1)$$

где  $w(\varphi, \varphi')$  двумерная плотность совместного распределения  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x)$ ,

которая, очевидно, совпадает с плотностью совместного распределения для самого поля  $f(x, y)$  и производной  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , взятой в той же точке  $(x, y)$ .

Для гауссовского поля  $f(x, y)$  величина  $n(f_0)$  выражается непосредственно через его спектральную плотность и среднее значение  $\bar{f}$ . Действительно, в этом случае, согласно (1), имеем [1]

$$n(f_0) = \frac{\sqrt{V - R''(0)}}{2\pi} \exp[-(f_0 - \bar{f})^2/2\rho^2], \quad (2)$$

где  $R''(0)$ —вторая производная при  $\rho = 0$  от коэффициента автокорреляции  $R(\rho)$  случайной функции  $\varphi(x)$ , который, однако, должен совпадать с таковым для самого случайного поля  $f(x, y)$ , т. е.

$$R(\rho) = \frac{f(x + \xi, y + \eta) f(x, y) - (\bar{f})^2}{\sigma^2}, \quad (3)$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \sigma^2 = \bar{f}^2 - (\bar{f})^2.$$

Отсюда следует, что, если  $\Phi(x)$ —спектральная плотность поля  $f(x, y)^*$ , то

$$-R''(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^3 \Phi(x) dx / \int_0^\infty x \Phi(x) dx. \quad (4)$$

Такая простая связь между  $n(f_0)$  и  $\Phi(x)$  имеется только для гауссова поля  $f(x, y)$ . Тем не менее, далее мы будем считать, что характеристика поля  $n(f_0)$  нам известна.

### 1. СРЕДНЯЯ ПЛОТНОСТЬ ВЫБРОСОВ И СРЕДНЯЯ «ПЛОЩАДЬ» ОДНОГО ВЫБРОСА

Прежде всего, введем некоторые понятия и терминологию. Мы будем говорить, что в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  имеет место «выброс» функции  $f(x, y)$  над уровнем  $f_0$ , если на плоскости  $(x, y)$  существует ограниченная область  $D^*$  (вообще говоря, многосвязная) с конечной площадью  $S^*$ , заключающая внутри себя точку  $(x_0, y_0)$  и удовлетворяющая условию: для всех точек  $(x, y)$ , лежащих внутри области,  $f(x, y) > f_0$ , а для точек на ее границе  $f(x, y) = f_0$ .

Далее, если в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  существует выброс функции  $f(x, y)$ , то область  $D_{f_0}$ , обладающую указанными выше свойствами и минимальной из возможных при этом площадей, назовем «об-

\* Определение спектральной плотности  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \cos(k\rho) R(\rho) d^2\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho J_0(k\rho) R(\rho) d\rho,$$

$$\sigma^2 R(\rho) = \iint_{-\infty}^{\infty} \cos(k\rho) \Phi(x) d^2x = 2\pi \int_0^{\infty} x J_0(k\rho) \Phi(x) dx.$$

Формулы (2) и (4) имеют смысл только для достаточно плавно меняющихся полей  $f(x, y)$ , когда существуют производные  $f'_x$  и  $f'_y$  и интеграл в числителе (4) сходится. В дальнейшем мы всюду будем предполагать это условие выполненным.

ластью выброса», а ее площадь  $S(f_0)$  — «площадью выброса». «Объемом выброса»  $V(f_0)$  будем называть величину интеграла

$$V(f_0) = \int_{D_{f_0}} f(x, y) dx dy. \quad (5)$$

Ясно, что при невысоких уровнях  $f_0$  области выбросов  $D_{f_0}$ , вообще говоря, многосвязны, однако при повышении  $f_0$  вероятность «многосвязности» падает, и при достаточно высоких уровнях  $f_0$  можно считать, что подавляющее число выбросов имеет односвязные области  $D_{f_0}^i$ . Более того, поскольку рассматриваемое нами поле  $f(x, y)$  является изотропным, то при достаточно высоких уровнях  $f_0$  области  $D_{f_0}^i$  можно считать близкими к эллипсам со случайной площадью  $S_i$ , случайными значениями эксцентриситета  $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$  и случайной, но равномерной ориентацией главных осей.

Очевидно, что области выбросов  $D_{f_0}$  не пересекаются между собой (но могут касаться друг друга). Назовем «плотностью выбросов» случайного поля  $f(x, y)$  величину  $\bar{N}(f_0)$ , равную среднему числу областей  $D_{f_0}^i$  на единице площади плоскости  $(x, y)$ . Аналогично тому, как это имеет место в теории выбросов случайных процессов  $\xi(t)$ , существует соотношение между средней плотностью выбросов  $\bar{N}(f_0)$ , средней площадью одного выброса  $\bar{S}(f_0)$  и относительной «площадью пребывания»  $s(f_0)$  поля  $f(x, y)$  над уровнем  $f_0$ . Величина  $s(f_0)$  естественным образом определяется как предел при  $L \rightarrow \infty$  отношения суммы площадей  $S^{(i)}(f_0)$  областей  $D_{f_0}^i$  всех выбросов, заключенных внутри квадрата со стороной  $L$ , к его площади  $L^2$ . Тогда из определения  $\bar{N}(f_0)$  и  $\bar{S}(f_0)$  следует

$$\bar{S}(f_0) = \frac{s(f_0)}{\bar{N}(f_0)}. \quad (6)$$

Это соотношение представляет интерес (перестает быть тождеством), разумеется, только применительно к эргодическим полям  $f(x, y)$ , когда справедливо равенство (с вероятностью единица)

$$s(f_0) = \int_{f_0}^{\infty} w(f) df, \quad (7)$$

где  $w(f)$  — плотность распределения поля  $f(x, y)$ . В дальнейшем мы будем предполагать наличие у поля  $f(x, y)$  эргодических свойств, и, таким образом, соотношение (6) при условии (7) становится уравнением, связывающим  $\bar{S}(f_0)$  и  $\bar{N}(f_0)$ .

Для определения величин  $\bar{N}(f_0)$  и  $\bar{S}(f_0)$  через статистические характеристики поля  $f(x, y)$  нам необходимо кроме уравнения (6) иметь еще одно независимое уравнение. Это уравнение может быть получено для случая выбросов над достаточно высоким уровнем  $f_0$  и представляет собою связь между  $\bar{N}(f_0)$ ,  $\bar{S}(f_0)$  и средним числом выбросов  $n(f_0)$  «одномерного профиля»  $\varphi(x)$ , определяемым формулами (1) и (2).

Представим себе плоскость  $(x, y)$ , заполненную областями  $D_{f_0}$  отдельных выбросов поля  $f(x, y)$  над уровнем  $f_0$ . Среднее расстояние между соседними областями  $D_{f_0}$  (скажем, между их центрами тяжести) равно

$$\bar{l}(f_0) = \frac{1}{2 \sqrt{\bar{N}(f_0)}}. \quad (8)$$

Поскольку области  $D_{f_0}$  не перекрываются, могут иметь место только две ситуации:

1) средний размер областей

$$\sqrt{\bar{S}(f_0)} \ll \bar{l}(f_0), \quad (9)$$

2) средний размер областей

$$\sqrt{\bar{S}(f_0)} \sim \bar{l}(f_0). \quad (10)$$

Первый случай соответствует модели «двумерного газа», в то время как второй случай — «двумерной жидкости». Первый случай, очевидно, относится к достаточно высоким уровням  $f_0$  и, как уже говорилось выше, области  $D_{f_0}$  («частицы газа») при этом можно считать близкими к случайно ориентированным эллипсам с флюктуирующими размерами. В случае «жидкости» сильно флюктуируют не только размеры, но и сама форма ее «частиц» (областей  $D_{f_0}$ ).

Задача установления связи между  $\bar{N}(f_0)$ ,  $\bar{S}(f_0)$  и  $n(f_0)$ , очевидно, формально совпадает с задачей определения средней длины свободного пробега  $\lambda = n^{-1}(f_0)$  в рассматриваемой двумерной системе «частиц» через их плотность  $\bar{N}(f_0)$  и эффективный поперечник  $\bar{d}$ , зависящий от средней площади  $\bar{S}(f_0)$  «частицы». Известно, что эта задача имеет строгий количественный смысл только применительно к газам; в случае же жидкостей понятие средней длины свободного пробега  $\lambda$  имеет только качественный смысл. Такая же ситуация имеет место и в рассматриваемой нами задаче: полученные ниже результаты имеют строгий количественный смысл только применительно к высоким уровням  $f_0$ , но могут быть использованы для оценок по порядку величины и для случая малых уровней  $f_0 \sim (\bar{f}^2)^{1/2}$ .

На языке «газовой модели» величина  $n(f_0)$  есть вероятность одного соударения точечной частицы с частицей «газа» на единице длины и согласно результатам кинетической теории газов равна

$$n(f_0) = \bar{N}(f_0)\bar{d}. \quad (11)$$

Здесь  $\bar{d}$  — средний поперечник областей  $D_{f_0}$ , который необходимо связать со средней площадью  $\bar{S}(f_0)$ . Из общих соображений ясно, что ориентация областей  $D_{f_0}$  (эллипсов) не зависит от их размеров  $\varepsilon$  и  $S$ . После усреднения по равномерному распределению ориентаций для  $\bar{d}$  имеем

$$\bar{d} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \gamma(S) S^{1/2} w(S) dS; \quad (12)$$

$$\gamma(S) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{E(\varepsilon)}{\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}} p(\varepsilon/S) d\varepsilon. \quad (13)$$

Здесь  $E(\varepsilon)$  — полный эллиптический интеграл второго рода,  $p(\varepsilon/S)$  — условная плотность вероятности для  $\varepsilon$  при заданном значении площади эллипса  $S$ ,  $w(S)$  — плотность вероятности для  $S$ . Для весьма широкого класса распределений  $p(\varepsilon/S)$  значения функции  $\gamma(S)$  при всех возможных значениях  $S$  близки к единице. Это видно из следующего разложения функции  $\gamma(S)$  в ряд по моментам распределения  $p(\varepsilon, S)$ :

$$\gamma(S) = 1 + \frac{3}{64} \left[ \bar{\epsilon^4}(S) + \bar{\epsilon^6}(S) + \frac{235}{256} \bar{\epsilon^8}(S) + \frac{107}{512} \bar{\epsilon^{10}}(S) + \dots \right], \quad (14)$$

$$\bar{\epsilon^k}(S) = \int_0^1 \epsilon^k p(\epsilon/S) d\epsilon.$$

Таким образом, с достаточной для нас точностью функцию  $\gamma(S)$  можно положить тождественно равной единице\* и согласно (12) попеченик  $d$  определять так, как если бы области  $D_{f_0}$  были кругами. Из формулы (12) следует, что

$$\bar{d} = \alpha [\bar{S}(f_0)]^{1/2}, \quad (15)$$

где коэффициент  $\alpha$  — порядка единицы и определяется формой распределения  $w(S)$ . Для широкого класса распределений  $w(S)$ , имеющих вид

$$w(S) = AS^\nu e^{-BS} \quad (\nu > -\frac{1}{2}), \quad (16)$$

форм-фактор  $\alpha$  определяется выражением

$$\alpha(\nu) = \frac{2\Gamma(\nu + 3/2)}{\sqrt{\pi(\nu + 1)}\Gamma(\nu + 1)}. \quad (17)$$

В широком интервале значений  $\nu$  ( $-1/2 \leq \nu \leq 3/2$ ) значения  $\alpha$  не более чем на 10 % отличаются от единицы. При больших  $\nu$   $\alpha \approx 2/\sqrt{\pi e}$  ( $\alpha(0) = 1$ )

На основании (6) — (8), (11) и (15) получаем искомые соотношения:

$$\bar{S}(f_0) = \alpha^2 \frac{\left( \int_{f_0}^{\infty} w(f) df \right)^2}{n^2(f_0)}; \quad (18)$$

$$\bar{N}(f_0) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{n^2(f_0)}{\int_{f_0}^{\infty} w(f) df}; \quad (19)$$

$$\bar{l}(f_0) = \frac{\alpha}{2} \frac{\left( \int_{f_0}^{\infty} w(f) df \right)^{1/2}}{n(f_0)}. \quad (20)$$

Из этих формул следует, что условие применимости «газовой модели», т. е. самих этих формул, согласно (9) выражается неравенством

$$2 \left( \int_{f_0}^{\infty} w(f) df \right)^{1/2} \ll 1, \quad (21)$$

что, очевидно, соответствует выбросам над достаточно высоким уровнем  $f_0$ . Два гауссового поля  $f(x, y)$  условие (21) принимает вид

$$\left( \frac{\sigma}{f_0 - \bar{f}} \right)^{1/2} \exp [-(f_0 - \bar{f})^2/4\sigma^2] \ll 1 \quad (22)$$

\* Приведем пример. Пусть  $p(\epsilon/S) = \delta[\epsilon - \epsilon_0(S)]$  и  $\epsilon_0(S) = 0,87$  (большая ось эллипса вдвое длиннее короткой оси); при этом  $\bar{\epsilon^k}(S) = \epsilon_0^k(S)$  и учет в формуле (14) четырех заключенных в скобки членов приводит к значению  $\gamma = 1,06$ .

и выполняется при  $(f_0 - \bar{f})^2 \gg \sigma^2$ . Для гауссового поля формулы (18)–(20) и (2) при условии (22) дают

$$\bar{S}(f_0) = -\frac{2\pi\alpha^2}{R''(0)} \left(\frac{\sigma}{f_0}\right)^2; \quad (23)$$

$$\bar{N}(f_0) = -\frac{R''(0)}{\alpha^2(2\pi)^{3/2}} \frac{f_0}{\sigma} \exp[-(f_0 - \bar{f})^2/2\sigma^2]; \quad (24)$$

$$\bar{I}(f_0) = \frac{\alpha}{2} \frac{(2\pi)^{3/4}}{\sqrt{-R''(0)}} \left(\frac{\sigma}{f_0}\right)^{1/2} \exp[(f_0 - \bar{f})^2/4\sigma^2]. \quad (25)$$

## 2. СРЕДНИЙ «ОБЪЕМ ВЫБРОСА»

Представляет интерес оценить средний объем выброса, определяемый формулой (5). В задаче о распространении излучения в турбулентной среде ( $f(x, y) \equiv I(x, y)$  — интенсивность излучения) величина  $\bar{V}(f_0)$ , очевидно, определяет средний полный поток мощности в одном выбросе. Мы, разумеется, опять будем рассматривать выбросы только над достаточно высоким уровнем  $f_0$  и соответственно аппроксимировать функцию  $f(x, y)$  в области выброса  $D_{f_0}$  параболоидом. При этом, очевидно, имеем

$$\bar{V}(f_0) = \bar{S}f_0 + \frac{\bar{S}(f_{\max} - f_0)}{2} = f_0 \int_0^\infty \Gamma(S) S w(S) dS; \quad (26)$$

$$\Gamma(S) = \frac{1}{2} [1 + \bar{f}_{\max}(S)/f_0], \quad (27)$$

где  $f_{\max}$  — максимальное значение функции  $f(x, y)$  в области выброса, а  $\bar{f}_{\max}(S)$  — условное среднее  $f_{\max}$  при заданной площади выброса  $S$ . Поскольку  $\bar{f}_{\max}(0) = f_0$ , то  $\Gamma(0) = 1$ . Покажем, что дальнейшие члены разложения  $\Gamma(S) = 1 + a_1 S + \dots$  вносят пренебрежимо малый вклад в значение  $\bar{V}(f_0)$ . Подставляя это разложение в (26) и применяя функцию распределения (16), получаем

$$\bar{V}(f_0) = f_0 \bar{S}(f_0) \left(1 + a_1 \frac{+2}{+1} \bar{S} + \dots\right). \quad (28)$$

Оценим величину коэффициента  $a_1$ . Предполагая для простоты область выброса кругом, получаем

$$a_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\bar{f}''}{f_0},$$

где  $\bar{f}''$  — среднее значение второй производной функции  $f(x, y)$  внутри области  $D_{f_0}$  при заданной ее площади в направлении максимальной скорости изменения функции  $f$ . Далее, очевидно,  $\bar{f}'' \simeq R''(0)f_0$  и поэтому

$$a_1 \simeq -\frac{R''(0)}{4\pi}.$$

Следовательно, разложение (28) происходит по параметру  $R''(0)\bar{S}/4\pi$ , который для рассматриваемого нами случая выбросов над высоким

уровнем всегда мал по сравнению с единицей. Для гауссового поля  $t$ , согласно (23), этот параметр  $\sim (\sigma/f_0)^2$  и для  $\bar{V}(f_0)$  получаем

$$\bar{V}(f_0) = - \frac{2\pi\alpha^2}{R''(0)f_0} \sigma^2. \quad (29)$$

Все приведенное выше рассмотрение может быть распространено на случай локально однородных случайных полей  $f(x, y)$  с плавно меняющимися средними характеристиками. При этом, если  $\lambda = n^{-1}(f_0, r) \ll L_0$ , где  $L_0$  — масштаб плавного изменения характеристик поля, то формулы остаются справедливыми с заменой  $n(f_0) \rightarrow n(f_0, r)$  и  $w(f) \rightarrow w(t, r)$ . Далее легко может быть проведено обобщение на случай трехмерного случайного поля  $f(x, y, z)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио М., 1966.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
3 января 1968 г.

#### OUTBREAKS OF A RANDOM SCALAR FIELD

*F. V. Bouznikin, K. S. Gochelashvili*

The theory of outbreaks of the uniform and isotropic scalar field above a sufficiently high level is developed. In this case many statistical characteristics of outbreaks are shown to be expressed through the appropriate characteristics of a "unidimensional profile" of a random field. The mean values of the outbreak area, volume, density as well as the distance between two nearest outbreaks are calculated.

УДК 621.374.4

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ КОЛЕБАНИЯ НА ВЫХОДЕ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ДЕЛИТЕЛЯ ЧАСТОТЫ

*A. H. Малахов, Л. Г. Шепелевич*

Рассмотрено прохождение монохроматического колебания через регенеративный делитель частоты, обладающий тепловыми и дробовыми шумами. Определены характеристики флуктуаций амплитуды и фазы выходного колебания. Найден его спектр, состоящий из монохроматической линии и пьедестала, появляющегося из-за амплитудно-фазовых флуктуаций.

1. Как известно, возможность использования регенеративного приемника в качестве делителя частоты основана на явлении резонанса  $n$ -го рода [1], которое заключается в том, что внешняя ЭДС частоты  $n\omega$  вызывает в такой системе, настроенной на частоту  $\omega_1 \approx \omega$  колебание с частотой, в точности равной  $\omega$ . Наличие в регенеративном приемнике собственных шумов (естественных и технических) приводит к флуктуациям амплитуды и фазы выходного колебания делителя. Поэтому представляет несомненный интерес исследование флуктуационных характеристик и спектра этого колебания. Вместе с тем в литературе не имеется каких-либо данных о флуктуационных характеристиках и спектрах деленного колебания. Настоящая статья, посвященная исследованию влияния естественных шумов делителя на спектр выходящего колебания, в определенной степени восполняет этот пробел.

2. Рассмотрим регенеративный приемник, представляющий собой невозбужденный  $LC$ -генератор с контуром в цепи сетки. Пусть в этом контуре действует входное колебание—монохроматическая ЭДС с частотой  $2\omega_0$ . Общая схема делителя показана на рис. 1, где  $\epsilon_T$  — ЭДС теплового шума сопротивления,  $i_{dp}$  — дробовой шум лампы. Остальные

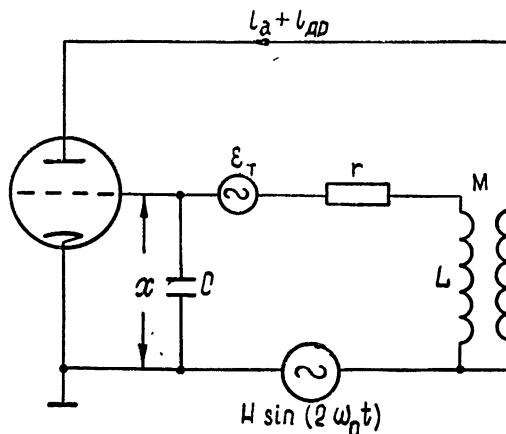


Рис. 1.

обозначения ясны из рисунка. Собственная частота колебательного контура  $\omega_1 = (LC)^{-1/2}$  близка к  $\omega_0$ . Таким образом, мы будем рассматривать деление частоты, связанное с резонансом второго рода.

Уравнение движения рассматриваемой системы

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 H \sin(2\omega_0 t) + \omega_1^2 E(t). \quad (1)$$

Здесь функция

$$F(x, \dot{x}) = 2\omega_0 \Delta x + (\delta_1 + \delta_2 x - \delta_3 x^2) \dot{x} \quad (2)$$

является малой по сравнению с левой частью (1). Она включает в себя расстройку, потери, обратную связь и нелинейности. Входящие в эту функцию параметры имеют следующий смысл:  $\Delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2\omega_0} \simeq \omega_0 - \omega_1$  — расстройка контура относительно субгармоники внешней ЭДС,  $\delta_1 = \omega_1^2 (MS_1 - rC)$ ,  $\delta_2 = 2\omega_1^2 MS_2$ ,  $\delta_3 = 3\omega_1^2 MS_3$ .

Величины  $S_1, S_2, S_3$  являются коэффициентами характеристики лампы, которую мы берем в виде

$$i_a = S_1 x + S_2 x^2 - S_3 x^3.$$

Заметим, что при рассмотрении автоколебаний генератора член  $x^2$  обычно не учитывается. Это связано с тем, что амплитуду автоколебаний определяют лишь нечетные члены характеристики лампы. В нашем случае, рассмотрения резонанса второго рода, учет этого члена принципиален, ибо, как будет видно из дальнейшего, именно коэффициент  $S_2$  (или  $\delta_2$ ) ответствен за эффект деления.

Малая случайная функция времени  $E(t)$  представляет естественные шумы схемы:

$$E(t) = \varepsilon_T + M \frac{di_{ap}}{dt}.$$

3. В рассматриваемой системе, как и во всякой колебательной системе, находящейся под внешним гармоническим воздействием нерезонансной частоты, возникают слабые вынужденные колебания с частотой внешней силы. Поэтому решение уравнения (1) записывается в виде

$$x = x_1 + y = \Lambda \sin(2\omega_0 t) + y, \quad \Lambda \simeq -H/3,$$

где

$$y = R \cos(\omega_0 t + \vartheta), \quad \dot{y} = -\omega_0 R \sin(\omega_0 t + \vartheta). \quad (3)$$

Здесь амплитуда  $R$  и фаза выходного колебания  $\vartheta$  являются медленными функциями времени по сравнению с  $\cos(\omega_0 t)$ .

Для  $R$  и  $\vartheta$  известными методами [2] нетрудно получить укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\frac{1}{2\omega_0} \Phi(R, \vartheta, \Lambda) - \frac{\omega_0}{2} a_s(t), \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{2\omega_0 R} \Psi(R, \vartheta, \Lambda) - \frac{\omega_0}{2R} a_c(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\Phi(R, \vartheta, \Lambda) = -2\omega_0 R \left[ -|\delta_1| - \frac{\delta_3}{4} R^2 - \frac{\delta_3}{2} \Lambda^2 - \frac{\delta_2}{2} \Lambda \sin(2\vartheta) \right],$$

$$\Psi(R, \vartheta, \Lambda) = 2\omega_0 R \left[ \Delta + \frac{\delta_2}{4} \Lambda \cos(2\vartheta) \right]. \quad (5)$$

Случайные функции  $a_s(t)$ ,  $a_c(t)$  связаны с  $E(t)$  следующим образом [3]:

$$\begin{Bmatrix} a_s(t) \\ a_c(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} 2E(x) \begin{Bmatrix} \sin(\omega_0 x + \vartheta) \\ \cos(\omega_0 x + \vartheta) \end{Bmatrix} dx, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Разбивая амплитуду и фазу колебания (4) на детерминированную и флуктуационную части

$$R = R_d + r, \quad \vartheta = \vartheta_d + \varphi,$$

для детерминированных частей получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{R}_d &= -\frac{1}{2\omega_0} \Phi(R_d, \vartheta_d, \Lambda), \\ \dot{\vartheta}_d &= -\frac{1}{2\omega_0 R_d} \Psi(R_d, \vartheta_d, \Lambda), \end{aligned} \quad (6)$$

из которых нетрудно найти следующие стационарные значения детерминированной амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} R_0^2 &= \frac{4}{\delta_3} \left\{ \pm \left[ \left( \frac{\delta_2 \Lambda}{2} \right)^2 - \Delta^2 \right]^{1/2} - |\delta_1| - \frac{\delta_3}{2} \Lambda^2 \right\}, \\ \operatorname{tg}(2\vartheta_0) &= \frac{\delta_3 (R_0^2 + B_0^2)}{16\Delta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$B_0^2 = A_0^2 \left( 1 + \frac{2\Lambda^2}{A_0^2} \right), \quad A_0^2 = \frac{4|\delta_1|}{\delta_3}.$$

Как известно, резонанс второго рода существует (чemu соответствует  $R_0^2 > 0$ ) лишь в ограниченной как сверху, так и снизу области значений  $\Lambda$ , т. е. резонанс второго рода обладает «порогом» и «потолком». Границные значения  $\Lambda_{1,2}$  зависят от расстройки  $\Delta$  и легко могут быть найдены из (7):

$$\Lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\delta_2}{\delta_3} \right)^2 - A_0^2 \right] \pm \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_2}{\delta_3} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_2}{\delta_3} \right)^2 - A_0^2 \right] - 4 \frac{\Delta^2}{\delta_3^2} \right\}^{1/2}.$$

Кроме того, резонанс второго рода имеет место лишь в некоторой полосе  $[-\Delta_0, +\Delta_0]$  расстройки частоты контура относительно субгармоники внешней ЭДС. Эта полоса  $2\Delta_0$  (полоса деления) может быть найдена из того условия, что амплитуда  $R_0$  должна быть действительной:

$$\Delta_0 = \left[ \left( \frac{\delta_2 \Lambda}{2} \right)^2 - A_0^4 \left( \frac{\delta_3}{4} \right)^2 \left( 1 + \frac{2\Lambda^2}{A_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Вне этой полосы существуют лишь слабые вынужденные колебания, ибо при принятой характеристике лампы асинхронное возбуждение автоколебаний оказывается невозможным.

4. Рассмотрим теперь амплитудные и фазовые флуктуации выходного колебания делителя в стационарном режиме, когда  $R_d = R_0$ ,  $\vartheta_d = \vartheta_0$ .

Введем относительные флуктуации амплитуды  $\alpha \equiv \rho/R_0$  и ограничимся случаем малых амплитудных и фазовых флуктуаций

$$\langle \alpha^2 \rangle \ll 1, \quad \langle \varphi^2 \rangle \ll 1. \quad (9)$$

Тогда на основании (4) и (6) можно получить следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -p_{11}\alpha - p_{12}\varphi + \frac{\omega_0}{2R_0} b_{\perp}(t), \\ \dot{\varphi} &= -p_{22}\varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} b_{\parallel}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{\omega_0} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right]_{\vartheta=R_0} = \frac{\delta_3 R_0^2}{4}, \\ p_{12} &= \frac{1}{\omega_0 R_0} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right]_{\vartheta=R_0} = -4\Delta, \\ p_{22} &= \frac{1}{\omega_0} \left[ \frac{\partial (\Psi/R)}{\partial \vartheta} \right]_{\vartheta=R_0} = \frac{\delta_3 (R_0^2 + B_0^2)}{4}, \\ \begin{cases} b_{\perp}(t) \\ b_{\parallel}(t) \end{cases} &= \{ \mp \} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} 2E(x) \begin{cases} \sin(\omega_0 x + \vartheta_0) \\ \cos(\omega_0 x + \vartheta_0) \end{cases} dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнений (10), положив  $b_{\perp}(t) \equiv b_{\parallel}(t) \equiv 0$ , легко найти условия устойчивости стационарного режима: условие устойчивости по фазе —  $p_{22} > 0$ ; условия устойчивости по амплитуде —  $p_{11}p_{22} > 0$ ,  $p_{11} + p_{22} > 0$ .

Поскольку внутри полосы деления  $p_{11} > 0$ ,  $p_{22} > 0$ , то, согласно (10), для амплитудных и фазовых флуктуаций существуют «возвращающие» силы, равные  $p_{11}\alpha$  и  $p_{22}\varphi$ , вследствие чего дисперсии  $\langle \alpha^2 \rangle$  и  $\langle \varphi^2 \rangle$  являются ограниченными, причем их значения тем меньше, чем меньше интенсивность действующих шумов. Поэтому решения полученных флуктуационных уравнений (10) не противоречат принятым условиям (9).

Случайная функция  $E(t)$  представляет естественные шумы системы, поэтому (см. [3])  $b_{\perp}(t)$ ,  $b_{\parallel}(t)$  можно считать случайными статистически независимыми делта-коррелированными стационарными процессами, обладающими спектральными плотностями, равными

$$S_{b_{\parallel}}(\omega) = S_{b_{\perp}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \left( 2kTr + \frac{eI_0\Gamma^2}{S_1^2 Z_{0e}} r \right),$$

$$S_{b_{\parallel} b_{\perp}}^0(\omega) = 0, \quad S_{b_{\parallel} b_{\perp}}^1(\omega) = 0,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $e$  — заряд электрона,  $Z_{0e}$  — резонансное сопротивление контура,  $I_0$  — постоянная составляющая анодного тока лампы,  $\Gamma^2$  — коэффициент депрессии дробового шума лампы.

Из флюктуационных уравнений (10) нетрудно получить следующие значения спектральных плотностей флюктуаций амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} S_a(\Omega) &= \frac{p_{12}^2 + p_{22}^2 + \Omega^2}{(p_{11}^2 + \Omega^2)(p_{22}^2 + \Omega^2)} \frac{D}{2\pi}, \\ S_\varphi(\Omega) &= \frac{1}{p_{22}^2 + \Omega^2} \frac{D}{2\pi}, \\ S_{a\varphi}^0(\Omega) &= \frac{p_{11} p_{22}}{(p_{11}^2 + \Omega^2)(p_{22}^2 + \Omega^2)} \frac{D}{2\pi}, \\ S_{a\varphi}^1(\Omega) &= \frac{-p_{12} \Omega}{(p_{11}^2 + \Omega^2)(p_{22}^2 + \Omega^2)} \frac{D}{2\pi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь величина

$$D = \frac{\omega_0^2}{2R_0^2} \left( 2kTr + \frac{eI_0\Gamma^2}{S_1^2 Z_{0e}} r \right)$$

имеет размерность частоты и по порядку величины равна естественной ширине спектральной линии свободного генератора (когда  $H = 0$  и выполнено условие самовозбуждения  $\delta_1 > 0$ ,  $R_0$  — амплитуда автоколебаний частоты  $\omega_0$ ).

Из полученных спектральных плотностей можно найти значение дисперсий

$$\begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= \frac{D}{2p_{11}} \left[ 1 + \frac{p_{12}^2}{p_{22}(p_{11} + p_{22})} \right], \\ \langle \varphi^2 \rangle &= \frac{D}{2p_{22}}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, учитывая соотношения между  $p_{ij}$ , что неравенства (9) будут выполнены, если  $D \ll p_{22}$ .

Таким образом, линейные приближения будут справедливыми, если естественная ширина спектральной линии свободного генератора много меньше величины  $p_{22}$ , которая, в свою очередь, по порядку величины равна  $\Delta_0$ .

Следует отметить, что справедливость линейного приближения не ограничивается малостью шумов. Поскольку возвращающие силы для фазы и амплитуды зависят от положения в зоне деления, стремясь к нулю на границах, то при приближении к границам области возникает неограниченный рост интенсивности амплитудных и фазовых флюктуаций, нарушая тем самым предпосылки (9) линеаризации уравнений. Поэтому вопрос о флюктуациях вблизи границ полосы деления может быть рассмотрен строго лишь в рамках нелинейной теории.

5. Полученные спектральные плотности амплитудно-фазовых флюктуаций позволяют теперь записать спектр выходного колебания рассмотренного регенеративного делителя.

Если квазигармоническое колебание обладает нормально распределенными, стационарными и стационарно связанными флюктуациями амплитуды и частоты и если фазовые флюктуации к тому же достаточно малы, то, как можно показать [3], спектр такого колебания имеет вид

$$W(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [\delta(\Omega) + S_a(\Omega) + S_o(\Omega) + 2S_{a\varphi}^l(\Omega)]. \quad (13)$$

Здесь частота  $\Omega$  отсчитывается от средней частоты колебаний,  $R_0$ —средняя амплитуда колебания.

Формулу (13) можно применить для нахождения спектра выходного колебания  $y$ , поскольку все вышеперечисленные условия выполнены (распределение по нормальному закону и стационарность  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  следуют из линейности флуктуационных уравнений и дельта-коррелированности и стационарности  $b_{\perp}(t)$ ,  $b_{\parallel}(t)$ ).

Подставляя (12) в (13), получаем следующее выражение для спектра выходного колебания:

$$W_y(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left[ \delta(\Omega) + \frac{2(\Omega + p_{12}/2)^2 + p_{11}^2 + p_{12}^2/2 + p_{22}}{(p_{11}^2 + \Omega^2)(p_{22}^2 + \Omega^2)} \frac{D}{2\pi} \right]. \quad (14)$$

Как следует из этой формулы, спектр выходного колебания регенеративного делителя состоит из монохроматической линии и пьедестала, появляющегося из-за амплитудных и фазовых флуктуаций (рис. 2).

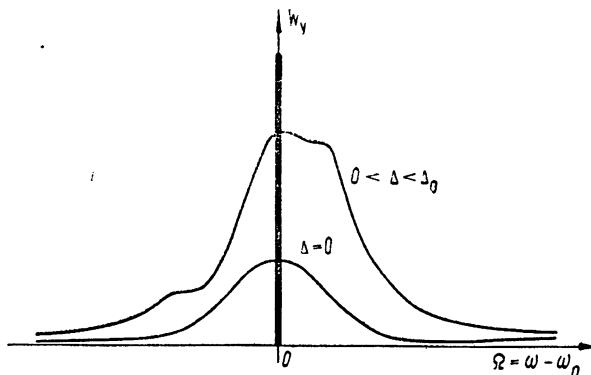


Рис. 2.

Пьедестал является несимметричным и эта несимметрия связана сстройкой  $p_{12}/2 = -2\Delta$ . Тем самым, при работе в центре полосы деления пьедестал симметричен, а его несимметрия тем больше, чем ближе значение расстройки к границам полосы деления.

Таким образом, если на входе рассмотренного делителя имеется монохроматическое колебание частоты  $2\omega_0$ , то на его выходе мы получаем монохроматическое колебание частоты  $\omega_0$  с пьедесталом (шириной  $p_{22}$ ), связанным с естественными шумами.

6. Мы рассмотрели случай невозбужденного регенеративного делителя, когда в отсутствие входного сигнала в системе нет автоколебаний. Не представляет труда аналогично рассмотреть случай возбужденной системы, чему соответствует  $\delta_1 > 0$ .

В этом случае мы имеем фактически режим синхронизации, при котором стационарная амплитуда и фаза равны

$$\begin{aligned} R_0^2 &= B_1 + \frac{2}{\delta_3} [(\delta_2 \Delta)^2 - 4\Delta^2]^{1/2}, \\ \operatorname{tg}(2\theta_0) &= \frac{\delta_3(R_0^2 - B_1)}{16\Delta}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$B_1 = A_0^2 \left( 1 - \frac{2\Lambda^2}{A_0^2} \right), \quad A_0^2 = \frac{4\delta_1}{\delta_3}.$$

Условия устойчивости этого стационарного режима принимают вид

$$p'_{11} + p'_{22} > 0, \quad p'_{11} p'_{22} > 0 \rightarrow 2R_0^2 - B_1 > 0,$$

$$p'_{22} > 0 \rightarrow R_0^2 - B_1 > 0.$$

Из условия, что  $R_0^2$  должно быть действительным, с учетом записанных выше неравенств получаем следующее выражение для деления, которая является теперь полосой синхронизации:

$$\Delta_1 = \frac{\delta_2}{2} \Lambda.$$

Как известно, для синхронизации не существует «порога», а «потолок» имеет более высокое значение, чем для деления, и флюктуационные уравнения имеют тот же вид (10), но значения коэффициентов  $p_{ij}$  теперь другие:

$$p_{ij} \rightarrow p'_{ij},$$

где

$$p'_{11} = \frac{\delta_3}{4} R_0^2 > 0, \quad p'_{12} = -4\Delta,$$

$$p'_{22} = \frac{\delta_3}{4} (R_0^2 - B_1) > 0. \quad (16)$$

В этих коэффициентах величина  $R_0$  определяется уравнением (15). Из сравнения (16) и (11) видно, что  $p'_{22} < p_{22}$ , это ведет к уменьшению полосы фазовых флюктуаций. Для амплитудных и фазовых флюктуаций так же, как и в несамовозбужденном случае, существуют и «возвращающие» силы, что ограничивает их величину внутри полосы деления.

С учетом замены  $p_{ij} \rightarrow p'_{ij}$  сохраняют свое значение и формулы (12), (14). Следовательно, и картина спектра выходного колебания  $u(t)$  принимает тот же вид (рис. 2).

Таким образом, с точки зрения флюктуационных характеристик выходного (деленного) колебания самовозбужденный делитель (когда мы фактически имеем синхронизацию на субгармонике) в рамках линейного приближения мало, чем отличается от регенеративного недовозбужденного делителя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, И. Д. Папалекси, ЖТФ, 2, 775 (1932).
2. И. М. Капчинский, Методы теории колебаний в радиотехнике, Госэнергоиздат, М., 1954.
3. А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968, § 4.4, § 5.2.

**NATURAL FLUCTUATIONS OF AMPLITUDE AND PHASE OF OUTPUT OSCILLATION OF REGENERATED FREQUENCY DIVIDER***A. N. Malakhov, L. G. Shepelevich*

The transmission of monochromatic oscillations through regenerated frequency divider with thermal and shot noises is considered. The characteristics of amplitude and phase fluctuations of output oscillation have been determined. The spectrum consisting of monochromatic line and pedestal arising from amplitude-phase fluctuations is found.

---

УДК 538.573

## ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

B. B. Тамойкин

Рассмотрено излучение заряда в хаотически неоднородной среде двумя методами. Первый метод основан на вычислении потока рассеянного излучения, а второй — на вычислении ионизационных потерь с использованием эффективной диэлектрической проницаемости. Показано, что учет конечного радиуса корреляции флуктуаций среды в первом методе или пространственной дисперсии мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости во втором приводит к конечному значению интенсивности излучения заряда, а роль  $\rho_{\min}$  — параметра «обрезания», входящего под логарифм в известные выражения для интенсивности излучения заряда, играет масштаб неоднородностей  $l$ .

Излучение заряженных частиц, движущихся в неоднородных средах, рассматривалось в ряде работ [1—4]. В них показано, что выражения для интенсивности излучения имеют логарифмическую особенность, так что соответствующие интегралы приходится «обрезать» на некотором параметре  $\rho_{\min}$ , который, как указывали авторы работ [1—4], определяется пределами применимости макроскопической электродинамики. Однако необходимость интегралов связана фактически с тем обстоятельством, что при выводе выражения для интенсивности излучения неявно принималось предположение о  $\delta$ -коррелированности флуктуаций среды.

В настоящей работе показано, что, если использовать «размытую» корреляционную функцию, то выражение для интенсивности излучения заряда остается конечным, а роль параметра  $\rho_{\min}$  играет масштаб корреляции  $l$ .

### 1. ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯДА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

При подсчете интенсивности излучения заряда можно воспользоваться известной формулой для спектральной плотности энергии излучения заряда [4]

$$W_\omega = \frac{\omega^4 \epsilon^{1/2} \overline{\Delta \epsilon^2}}{(4\pi)^2 c^3} \iint [E_0 - m(mE_0)]_{\rho=\rho_1} [E_0^* - m(mE_0^*)]_{\rho=\rho_2} \times \\ \times \Gamma_\epsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \exp \left[ -ik_0 V \bar{\epsilon} m(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + i \frac{\omega}{v} (z_1 - z_2) \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\Omega, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота,  $\epsilon$  — средняя диэлектрическая проницаемость,  $\overline{(\Delta \epsilon)^2}$  — среднеквадратичное значение флуктуаций  $\epsilon$ ,  $c$  — скорость света,  $E_0$  — невозмущенное поле движущегося по оси  $z$  заряда  $q$ ,  $\Gamma_\epsilon(\mathbf{r})$  — коэффициент корреляции флуктуаций  $\epsilon$ ,  $m$  — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения,  $v$  — скорость заряда,  $d\Omega$  — элемент телесного угла.

Как известно, поле заряда  $E_0$  можно представить в виде

$$E_0(\mathbf{r}) = \int E_0(\mathbf{x}) \exp [i\mathbf{x}\rho + i(\omega/v)z] d\mathbf{x}, \quad \rho = \{x, y, 0\}, \quad (2)$$

причем в простейшем случае изотропной среды без пространственной дисперсии [5]

$$E_{0z}(\mathbf{x}) = -\frac{i\omega q}{2\pi^2\epsilon} (1 - \epsilon\beta^2) \frac{1}{[x^2 + \omega^2 v^{-2}(1 - \epsilon\beta^2)]}; \quad (3)$$

$$E_{0\rho}(\mathbf{x}) = -\frac{iq}{2\pi^2 v \epsilon} \frac{x}{[x^2 + \omega^2 v^{-2}(1 - \epsilon\beta^2)]}. \quad (4)$$

Если подставить выражения (2) — (4) в (1) и ввести относительные координаты и координаты центра тяжести

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_0,$$

то по  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{x}_2$  легко удается провести интегрирование, и в результате получаем (для углового распределения)

$$W_\omega(\vartheta) = \frac{4\pi^4 \omega^4 \epsilon^{1/2} (\Delta\epsilon)^2}{c^3} \int [2 \sin^2 \vartheta |E_{0z}(\mathbf{x})|^2 + (1 + \cos^2 \vartheta) |E_{0\rho}(\mathbf{x})|^2], \\ \Phi_\epsilon(\mathbf{x} - k_0 V_\epsilon^- \mathbf{m}_\rho, \quad \omega/v - k_0 V_\epsilon^- m_z) d\mathbf{x}, \quad (5)$$

где  $m_\rho$  и  $m_z$  — проекции вектора  $\mathbf{m}$  на оси  $\rho$  и  $z$ ,

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Gamma_\epsilon(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (6)$$

— спектр корреляционной функции флуктуаций  $\epsilon$ .

Неточность выражений, приведенных в [1—4] и указывающих на логарифмическую расходимость интенсивности излучения, связана с тем, что в (5) пренебрегалось зависимостью  $\Phi_\epsilon(\mathbf{x})$  от  $\mathbf{x}$ . Это справедливо лишь в случае, когда флуктуации  $\epsilon$  среды  $\delta$ -коррелированы. Если же учесть, что в реальных условиях  $\Gamma_\epsilon(\mathbf{r})$  «размыта», то  $\Phi_\epsilon(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ , так что интегралы в (5) сходятся при больших  $\mathbf{x}$ .

Не ограничивая общности, можно предположить, что  $\Gamma_\epsilon(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/l^2)$ . Тогда выражение для углового распределения интенсивности излучения, отнесенной к единице пути заряда, приводится к виду

$$W_\omega(\vartheta) = \frac{\omega^4 q^2 (\Delta\epsilon)^2 l^3}{4 V_\epsilon^- v^8 c^3 \epsilon^{3/2}} \exp \left[ -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - V_\epsilon^- \beta^2) + \frac{\omega}{2v} k_0 V_\epsilon^- l^2 \cos \vartheta \right] \times \\ \times \int_0^\infty I_0(k_0 l V_\epsilon^- \sin \vartheta x) \left[ x^2 + \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \epsilon\beta^2) \right]^{-2} \times \\ \times \exp(-x^2) \left[ 2 \sin^2 \vartheta \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \epsilon\beta^2)^2 + (1 + \cos^2 \vartheta) x^2 \right] x dx, \quad (7)$$

где  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Рассмотрим вначале случай мелкомасштабных неоднородностей

$$k_0 l V_\epsilon^- \ll 1. \quad (8)$$

Тогда в (7) можно приближенно положить  $I_0(k_0 l V_\epsilon^- \sin \vartheta x) \simeq 1$ , в результате получаем

$$W_{\omega}(\vartheta) \simeq \frac{\omega^4 q^2 (\Delta\varepsilon)^2 l^3}{8 \sqrt{\pi} c^3 \varepsilon^{3/2}} \left\{ 2 \sin^2 \vartheta (1 - \varepsilon \beta^2) \left[ \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \varepsilon \beta^2) \operatorname{Ei} \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \varepsilon \beta^2) \right) + \right. \right. \\ \left. + \exp \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \varepsilon \beta^2) \right) \right] - (1 + \cos^2 \vartheta) \left[ \left( 1 + \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \varepsilon \beta^2) \right) \operatorname{Ei} \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - \varepsilon \beta^2) \right) + \exp \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \varepsilon \beta^2) \right) \right] \right\} \exp \left( \frac{\omega^2 l^2}{2v^2} \sqrt{\varepsilon} \beta \cos \vartheta \right), \quad (9)$$

где  $\operatorname{Ei}(x)$  — интегральная показательная функция.

Из (9) видно, что при  $(\omega^2 l^2 / 4v^2) \gg 1$  интенсивность излучения экспоненциально мала. При выполнении обратного неравенства она максимальна и равна

$$W_{\omega} = \int_0^{\pi} W_{\omega}(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \simeq \frac{\omega^4 q^2 (\Delta\varepsilon)^2 l^3}{3 \sqrt{\pi} v^2 c^3 \varepsilon^{3/2}} \left[ \ln \left( \frac{\omega l}{2v} \sqrt{1 - \varepsilon \beta^2} \right)^{-1/2} - \varepsilon \beta^2 \right]. \quad (10)$$

Таким образом, при  $\omega^2 l^2 / 4v^2 \ll 1$  получаются формулы, аналогичные полученным в [1-3], с тем лишь отличием, что роль параметра  $\rho_{\min}$  играет величина  $l/2$ .

В условиях, когда выполняется неравенство

$$k_0 l \sqrt{\varepsilon} \gg 1 \quad (11)$$

(крупномасштабные неоднородности), из (7) следует, что излучение практически отлично от нуля лишь при  $(\omega^2 l^2 / 4v^2) (1 - \sqrt{\varepsilon} \beta)^2 \leq 1$ . Это неравенство при дочеренковских скоростях заряда с учетом (11) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\omega^2 l^2}{16v^2} (1 - \varepsilon \beta^2)^2 \leq 1, \quad (12)$$

причем  $\omega^2 l^2 / 4v^2 \gg 1$ . Из выражения (7) видно также, что излучение сосредоточено в узком интервале углов  $\vartheta \approx 2/k_0 l \sqrt{\varepsilon} \ll 1$ . Поэтому в (7) можно приближенно положить  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1$ , а пределы интегрирования распространить до бесконечности. В результате получим

$$W_{\omega} \simeq - \frac{\omega^2 q^2 (\Delta\varepsilon)^2 l}{4 \sqrt{\pi} c^3 \varepsilon^{3/2}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\omega^2 l^2}{8v^2} (1 - \varepsilon \beta^2)^2 \right] \operatorname{Ei} \left[ -\frac{\omega^2 l^2}{8v^2} (1 - \varepsilon \beta^2)^2 \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[ -\frac{\omega^2 l^2}{8v^2} (1 - \varepsilon \beta^2)^2 \right] \right\} \exp \left[ \frac{\omega^2 l^2}{16v^2} (1 - \varepsilon \beta^2)^2 \right]. \quad (13)$$

В частности, при  $(\omega^2 l^2 / 8v^2) (1 - \varepsilon \beta^2)^2 \ll 1$  выражение для интенсивности излучения заряда упрощается и принимает вид

$$W_{\omega} \simeq \frac{\omega^2 q^2 (\Delta\varepsilon)^2 l}{4 \sqrt{\pi} c^3 \varepsilon^{3/2}} \left\{ 2 \ln \left[ \frac{\omega l}{2 \sqrt{2} v} (1 - \varepsilon \beta^2) \right]^{-1} - 1 \right\}. \quad (14)$$

Следовательно, и в случае крупномасштабных неоднородностей интенсивность излучения заряда не имеет логарифмической расходимости при больших  $x$ .

## 2. МЕТОД ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

Интенсивность излучения заряда в среде с неоднородностями можно получить также, используя тензор эффективной диэлектрической про-

ницаемости  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  [6]. Как известно [5], общее выражение для потерь энергии заряда имеет вид

$$W_\omega = \frac{2q^2}{\pi v^2} \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 + \omega^2/v^2)} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, x)} - \frac{\beta^2 x^2}{[x^2 + (\omega^2/v^2)(1 - \epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, x))]} \right\}, \quad (15)$$

где  $x$  — поперечное волновое число,  $\omega/v = k_z$ ,  $\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, x)$ ,  $\epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, x)$  — продольная и поперечная эффективные диэлектрические проницаемости случайно неоднородной среды. В работах [3, 7] при вычислении потерь энергии заряда в неоднородной среде не учитывалась пространственная дисперсия мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости, что приводило к необходимости «обрезать» интегралы при  $x \simeq x_{\max} \sim \sim 1/\rho_{\min}$ . Это допустимо, если расстояние, на котором существенно изменяется поле заряда, велико по сравнению с масштабом изменения свойств среды  $l$ . Однако вблизи оси движения поле заряда изменяется резко, и поэтому пространственная дисперсия мнимой части  $\epsilon_{\text{эфф}}(\omega, x)$  становится существенной; как мы увидим ниже, учет ее приводит кходимости интеграла в (15) при больших  $x$ .

Перепишем (15) в виде

$$W_\omega \simeq \frac{2q^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 + \omega^2/v^2)} \left\{ \frac{\epsilon_1(\omega, x)}{\epsilon^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \beta^4 \epsilon_2(\omega, x) x^2 \left[ x^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \epsilon \beta^2) \right]^{-2} \right\}, \quad (16)$$

где  $\epsilon_1(\omega, x)$  и  $\epsilon_2(\omega, x)$  — мнимые части продольной и поперечной эффективных диэлектрических проницаемостей соответственно, имеющие особенно простой вид в случае мелкомасштабных неоднородностей ( $k_0 l \sqrt{\epsilon} \ll 1$ ) [6]:

$$\epsilon_1(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_2(\omega, \mathbf{k}) \simeq \frac{1}{3p} \frac{(\Delta \epsilon)^2}{\epsilon} p_0^3 \int_0^\infty \Gamma_\epsilon(x) x \sin px dx. \quad (17)$$

Здесь  $p = kl$ ,  $p_0 = k_0 l \sqrt{\epsilon}$ . В частности, для гауссовой функции корреляции  $\Gamma_\epsilon(x) = e^{-x^2}$

$$\epsilon_1(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{(\Delta \epsilon)^2}{\epsilon} p_0^3 \exp(-p^2/4). \quad (18)$$

Подстановка (18) в (16) приводит к следующему выражению для потерь энергии заряда

$$W_\omega = \frac{\omega^4 q^2 (\Delta \epsilon)^2 l^3}{3 \sqrt{\pi} v^2 c^3 \epsilon^{3/2}} \left\{ \left[ 1 - \frac{k_0^2 l^2 \epsilon}{4} (1 - \epsilon \beta^2) \right] \operatorname{Ei} \left[ -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \epsilon \beta^2) \right] - \right. \\ \left. - \epsilon \beta^2 \exp \left[ -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \epsilon \beta^2) \right] \right\}, \quad (19)$$

которое при выполнении неравенства  $(\omega l/v) \ll 1$  переходит в формулу (10).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Капица, ЖЭТФ, 39, 1367 (1960).
2. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН Арм. ССР, 14, 103 (1961).
3. В. В. Тамойкин, С. Б. Бирагов, ЖЭТФ, 44, 1544 (1963).

- 4 В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 2, 257 (1963).
- 5 С. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М., 1961.
- 6 Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, 656 (1965).
- 7 В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 8, № 1, 42 (1965)

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
8 января 1968 г.

## ON CHARGE RADIATION IN A MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

V. V. Tamoykin

The radiation from a charge in a random inhomogeneous medium is considered by two methods. The first method is based on calculation of the flux of scattered radiation and the second one is based on calculation of ionization losses using the effective dielectric permittivity. It is shown that when the finite radius of fluctuation correlation of the medium in the first method or the spatial dispersion of the imaginary part of the effective dielectric permittivity in the second is taken into account, the finite value of the intensity of the charge radiation is obtained. The scale of inhomogeneities plays the role of "cutoff" parameter  $\rho_{\min}$  entering the logarithm in the known expressions for the radiation intensity of the charge.

УДК 538.56

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПРИ НАКЛОНОМ ПАДЕНИИ НА ПЕРФОРИРОВАННЫЙ ЭКРАН

*Б. А. Панченко*

Получено выражение для коэффициента прохождения плоской электромагнитной волны при наклонном падении на перфорированный металлический экран. Произведены численные расчеты коэффициента прохождения в диапазоне частот вблизи первого резонанса структуры

Задача о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем экране с периодически расположенными отверстиями рассматривалась в [1–3]. При решении использовались прямые вариационные методы и задача сводилась к системе линейных алгебраических уравнений. Однако такой путь решения при высоких порядках системы уравнений требует слишком больших затрат времени. Известные результаты расчетов [2, 3] относятся к случаю нормального падения волны, когда распределение поля в отверстиях задано в виде одной пробной функции и задача решается в первом приближении. При наклонном падении волны, особенно в случае перпендикулярной поляризации, задать подходящий вид функции распределения поля в отверстии трудно, так как эта функция должна быть комплексной и зависеть от угла падения волны. Поэтому применение вариационного метода к решению таких задач оказывается сложным, несмотря на стационарный характер расчетных формул.

Известен, однако, другой метод решения аналогичных задач — вариационно-итерационный [4], когда в вариационном методе в качестве пробной функции используется решение итерационным методом интегрального уравнения относительно распределения поля в щели.

### 1. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННО-ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА К РАСЧЕТУ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОХОЖДЕНИЯ

Вариационно-итерационным методом решается задача о прохождении плоской электромагнитной волны через проводящий экран с периодически расположенными прямоугольными отверстиями. Вектор  $E$  падающего поля перпендикулярен плоскости падения (рис. 1). Период решетки —  $A$ ,  $B$ , размеры отверстий —  $a$ ,  $b$ .

Интегральное уравнение распределения поля вдоль отверстия можно записать в виде [5]

$$\int_{-b/2}^{b/2} N(y, y') U(y') dy' = H_y(y), \quad (1)$$

где

$$H_y(y) = \int_{-a/2}^{a/2} H_y(x, y) \Phi(x) dx, \quad (2)$$

$$N(y, y') = 2 \iint_{-a/2}^{a/2} \Phi(x) \Gamma_{yy}(x, y; x', y') \Phi(x') dx dx',$$

$H_y(x, y)$  — продольная относительно щели составляющая напряженности магнитного поля падающей волны;  $\Gamma_{yy}$  — скалярная компонента тензорной функции Грина области по одну сторону от экрана;  $\Phi(x) = (1/\pi) [(a/2)^2 - x^2]^{-1/2}$  — электростатическая функция, описывающая поперечную зависимость напряженности электрического поля в щели.

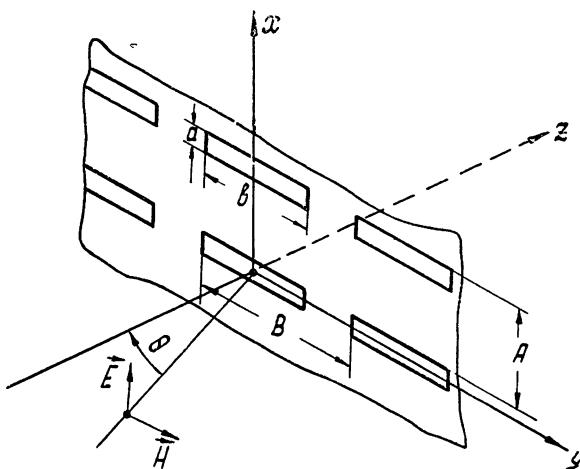


Рис. 1.

Учитывая характерную для функции Грина логарифмическую особенность, ядро уравнения можно переписать в виде [4]

$$N(y, y') = 2[\alpha^{-1} a(y, y') + b(y, y')], \quad (3)$$

где

$$\alpha = [2 \ln(kd/4)]^{-1}, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

$$a(y, y') = -\frac{1}{2\pi jk} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta(y - y').$$

Наличие в (3) логарифмического множителя позволяет построить итерационный процесс для определения неизвестной функции  $U(y)$ . В первом приближении интегральное уравнение сводится к дифференциальному

$$\left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U(y) = -j\omega\mu\epsilon a H_y(y) \quad (4)$$

при граничных условиях  $U(y) = 0$ , когда  $\pm b/2$ .

Решение обыкновенного неоднородного уравнения (4) получено методом вариации постоянных и с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$U(y) = U' + iU'' = \left[ \cos(ky \sin \theta) - \frac{\cos\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\cos \frac{kb}{2}} \cos ky \right] + \quad (5)$$

$$+ j \left[ \sin(ky \sin \theta) - \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\sin \frac{kb}{2}} \sin kb \right].$$

Вернемся к вопросу выделения логарифмической части в ядре уравнения (2). Компонента функции Грина в рассматриваемом случае равна [3]

$$\Gamma_{yy} = j \frac{(k^2 + \partial^2/\partial y^2)}{\omega \mu AB} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[jk_x(x-x') + jk_y(y-y')]}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2)^{1/2}},$$

$$k_x = \frac{2\pi m}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n}{B} - k \sin \theta.$$

Принимая во внимание асимптотическое поведение членов ряда по  $m$  и разложение в ряд дельта-функции  $\delta(y - y') = \frac{1}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_y(y-y')}$ , ядро можно записать как

$$N(y, y') = j \frac{k^2 + \partial^2/\partial y^2}{\pi \omega \mu} \delta(y - y') \ln\left(\frac{2A}{\pi a}\right) + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k^2 - k_y^2}{AB \omega \mu (k_y^2 - k^2)^{1/2}} \times \\ \times e^{ik_y(y-y')} + 2j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k^2 - k_y^2) J_0(m\pi A/a)}{AB \omega \mu} \times \\ \times \left[ \frac{J_0(m\pi A/a)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2)^{1/2}} - \frac{1}{k_x} \right] e^{ik_y(y-y')}, \quad (6)$$

$J_0(x)$  — функция Бесселя. Нетрудно видеть, что из первого слагаемого (6) выделяется логарифмический член  $a^{-1} a(y, y')$ .

Рассмотрим коэффициент прохождения через перфорированный экран, определив его как отношение мощности, падающей на экран, к мощности, прошедшей через отверстия в экранированную часть пространства. В [6, 7], вариационным методом получены формулы для коэффициента прохождения через отверстия  $T = (2\pi/kS) \operatorname{Im} \bar{A}$ , где  $\bar{A}$  — комплексная амплитуда поля. В наших обозначениях выражение для  $T$  имеет вид

$$T = \operatorname{Re} \left[ \frac{AB \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} U(y) N(y, y') U^*(y') dy dy'}{\cos \theta \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_{-b/2}^{b/2} U(y) \exp(jk_y \sin \theta) dy \int_{-b/2}^{b/2} U^*(y') \exp(-jk_y \sin \theta) dy'} \right]^{-1}, \quad (7)$$

$U^*(y)$  означает комплексно-сопряженную функцию, что физически эквивалентно распределению поля в щели при падении волны с противоположной стороны экрана.

После интегрирования и преобразований в (7) с учетом (5) и (6) получим

$$T = \operatorname{Re} \left[ j \frac{kAkB \cos \theta}{\pi C_0} \ln \left( \frac{2A}{\pi a} \right) - j \frac{1}{\cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{C_n}{C_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{k_y}{k} \right)^2 - 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} J_0 \left( \frac{m\pi a}{A} \right) \left[ J_0 \left( \frac{m\pi a}{A} \right) \left[ \left( \frac{k_x}{k} \right)^2 + \left( \frac{k_y}{k} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} - \frac{1}{k_x/k} \right] + \right. \\ \left. + \delta_n \left[ \left( \frac{k_y}{k} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right]^{-1}, \quad (8)$$

где

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$C_n = \frac{2}{\sin kb} \left\{ \left[ \frac{1}{k_y/k + \sin \theta} - \frac{k_y/k}{(k_y/k)^2 - 1} \right] \sin kb \sin \left( \frac{k_y}{k} + \sin \theta \right) \frac{kb}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(k_y/k)^2 - 1} \left[ \cos \left( \frac{k_y}{k} - \sin \theta \right) \frac{kb}{2} - \cos kb \cos \left( \frac{k_y}{k} + \sin \theta \right) \frac{kb}{2} \right] \right\}.$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

По формуле (8) произведены численные расчеты. На рис. 2, 3 приведены частотные графики коэффициента прохождения по напряжению  $T_u = \sqrt{T}$  для двух перфорированных структур, отличающихся размерами отверстий. Резонансный характер прохождения волны сохраняется при изменении угла  $\theta$ , однако величина коэффициента прохождения заметно уменьшается с ростом  $\theta$  при незначительном смещении резонанса в область высоких частот по сравнению со случаем нормального падения. Эти особенности поведения  $T$  при наклонном падении отмечены при экспериментальных измерениях [2]. Увеличение длины щели смещает резонанс в область низких частот, несколько уменьшая чувствительность параметров резонансной кривой к изменению угла падения волны (рис. 3).

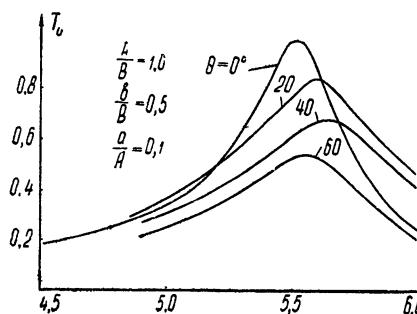


Рис. 2.

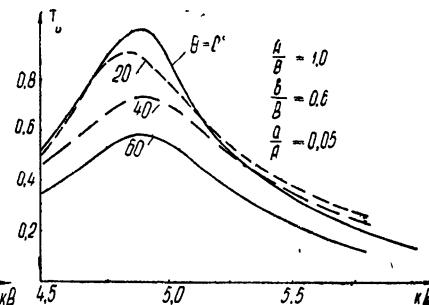


Рис. 3.

Учитывая, что резонансная частота мало меняется с изменением угла падения, можно дать приближенную формулу для расчета величины коэффициента прохождения в точке резонанса в зависимости от угла падения:

$$T_{\text{pes}} \simeq \left[ 1 + \operatorname{Re} \left\{ \sec \theta \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{2\pi}{kB_{\text{pes}}} - \sin \theta \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right]^{-1}.$$

Это выражение справедливо в области частот вблизи первого параллельного резонанса структуры.

В заключение остановимся на сравнительной оценке вариационного и вариационно-итерационного методов. Дать строгую оценку результатов, полученных этими методами, трудно, так как оба метода являются приближенными, а получить точное решение задачи, по которому можно было бы сравнивать, не представляется возможным.

Применение вариационно-итерационного метода в первом приближении дает регулярный способ улучшения сходимости рядов за счет своевременного выделения логарифмической особенности в ядре уравнения и возможность нахождения пробной функции распределения поля вдоль отверстия. Выбор функции, описывающей поперечную зависимость поля в отверстии с учетом особенностей поля на краях, позволяет рассчитывать случаи не только экспоненциально узких, но и просто узких отверстий [4].

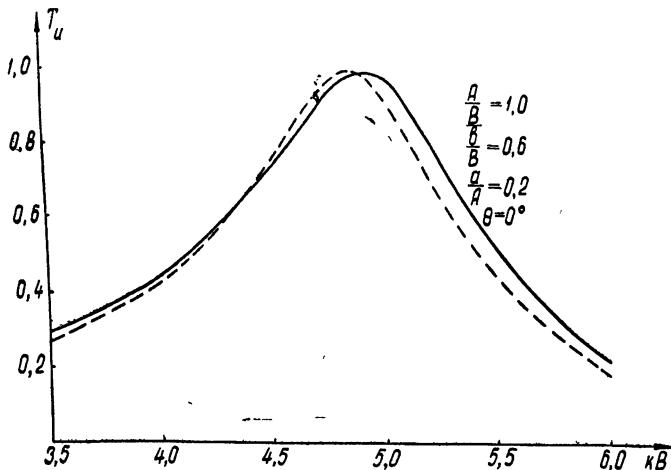


Рис. 4.

На рис. 4 приведены графики частотной зависимости коэффициента прохождения, полученные различными методами. Сплошная кривая рассчитана по формуле (8), пунктирная — по формулам, полученным в [3] вариационным методом при распределении поля в отверстии в виде функции  $\Phi(x) = \text{const}$ ,  $U(y) = \cos(\pi/b)y$ .

Как показали дальнейшие расчеты, основная доля расхождений при определении  $T_u$  для сравнительно широких отверстий связана с некорректностью выбора вида функции  $\Phi(x)$ . Расхождения  $T_u$  при  $\Phi(x) = \text{const}$  и  $\Phi(x) = (1/\pi) |(a/2)^2 - x^2|^{-1/2}$  для  $a/A = 0,05$  могут составлять 1—2%, для  $a/A = 0,1 - 8 - 12\%$ , для  $a/A = 0,2 - 15 - 20\%$ . Из расчетов следует также, что величина расхождений  $T_u$  при различных пробных функциях незначительно увеличивается с ростом угла  $\theta$  в случае наклонного падения.

Хотя отмеченные расхождения не являются абсолютной ошибкой, они в какой-то мере позволяют судить о погрешностях вычислений различными способами и отдать предпочтение вариационно-итерационному методу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. B. Kieburts, A. Ishimaru, IRE Trans., AP-9, № 6, 606 (1961).
2. L. L. Oh, C. D. Lunden, C. Chion, Microwave J., 7, № 4, 62 (1964).
3. Б. А. Панченко, Радиотехника и электроника, 12, № 4, 721 (1967).
4. И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 10, № 2, 260 (1965).
5. Я. Н. Фельд, ЖТФ, 17, № 9, 1051 (1947).
6. H. Levine, J. Schwinger, Phys. Rev., 74, № 8, 958 (1948).
7. C. Huang, R. D. Kodis, H. Levine, J. Appl. Phys., 26, № 2, 151 (1955).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию  
5 февраля 1968 г.DIFFRACTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE AT OBLIQUE  
INCIDENCE ON A PERFORATED SCREEN*B. A. Panchenko*

The expression is derived for the transmission coefficient of an electromagnetic wave at oblique incidence on a perforated metal screen. Numerical calculations of the transmission coefficient in the frequency range near the first resonance of the structure are made.

---

УДК 533.922

## ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ В СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАЗМЕ

*Н. П. Гиоргадзе, Д. Г. Ломинадзе*

Рассматривается влияние нелинейных эффектов на энергетические потери пролетающих через неограниченную изотропную плазму сгустков или небольших скоплений заряженных частиц. Слабая нелинейность плазмы проявляется во взаимодействии генерируемых частицей полей линейного приближения. Определены парциальные вклады всех возможных процессов нелинейного взаимодействия генерированных частицей волн и полей. Показано, что наиболее существенная поправка к поляризационным потерям линейного приближения обусловлена нелинейным продольным полем, возникшим в результате взаимодействия двух продольных волн линейного приближения.

Электродинамика движения заряженной частицы через плазму рассматривалась в ряде работ [1-3]. При этом для описания плазмы использовалась линейная теория. Ограничение рамками линейного приближения естественно, поскольку возмущения, вносимые движением даже тяжелого многозарядного иона еще слишком малы, чтобы нелинейные свойства плазмы могли играть заметную роль.

Совершенно иначе может обстоять дело при прохождении через плазму плотных сгустков или небольших скоплений заряженных частиц. Скопления частиц, пространственные размеры которых меньше минимальной длины волны излучения, могут рассматриваться как некий эффективный заряд. Если величина этого заряда достаточно велика, то возмущения, вносимые в плазму, могут оказаться значительными, вследствие чего возникает необходимость в учете нелинейных свойств плазмы.

Влияние нелинейных свойств плазмы, помещенной в металлический волновод, как на черенковские, так и на поляризационные потери энергии сгустком заряженных частиц было рассмотрено в работах [4, 5].

В настоящей работе рассматривается влияние нелинейных эффектов на энергетические потери пролетающего через неограниченную изотропную плазму эффективного заряда  $q$  массы  $M$ .

Учитываются лишь высокочастотные ветви колебаний, вследствие чего роль ионов сводится к образованию нейтрализующего фона, а температура электронов всюду, где это возможно, предполагается равной нулю (тепловое движение частиц, как известно, слабо сказывается на характере электронных колебаний изотропной плазмы). При этом используется несколько иной, чем в [4, 5], подход и определяются парциальные вклады всех возможных процессов нелинейного взаимодействия генерированных частицей волн и полей.

1. Исходная система уравнений, описывающая высокочастотные колебания в рамках простой гидродинамической модели плазмы без столкновений, может быть представлена в виде

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{4\pi}{c} q u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\frac{e}{m} E - \frac{e}{mc} [VH], \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla(NV) = 0, \quad (1)$$

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = q \left( E + \frac{1}{c} \left[ \frac{dR}{dt}, H \right] \right),$$

где  $u = \frac{dR}{dt}$  — мгновенная скорость заряда,  $j = -eNV$ , а остальные обозначения стандартны и не требуют пояснений. Из последнего уравнения системы (1) следует хорошо известное выражение для изменения в единицу времени энергии заряда:

$$W = quE(ut, t). \quad (2)$$

Гидродинамическая модель является, как известно, приближенной, правильно отражающей характер высокочастотных волновых процессов в областях прозрачности. Поэтому длины волн продольных возмущений должны быть ограничены условием  $\lambda \gg \lambda_D$ , поскольку при  $\lambda \leq \lambda_D$ , согласно кинетической теории, эти волны сильно затухают. Что касается поперечных волн, то в нерелятивистской изотропной плазме без столкновений эти волны распространяются без затухания. Однако для удобства мы ограничимся рассмотрением поперечных волн с  $\lambda \gg \lambda_D$ , что не оказывает существенного влияния на результаты. Далее, в соответствии с плазменной моделью системы заряженных частиц следует считать  $N_D \gg 1$ , где  $N_D$  — число частиц в сфере Дебая. Наконец, полагая массу заряда достаточно большой и ограничиваясь нулевым по параметру  $1/M$  приближением, можно пренебречь обратным влиянием электромагнитного поля на заряд и считать его скорость постоянной.

Ограничиваюсь рассмотрением слабонелинейной плазмы и пренебрегая сперва нелинейными членами, получим обычную систему уравнений, описывающих движение заряда в линеаризованной плазме. Решение этой системы уравнений в представлении Фурье

$$E(r, t) = \int \frac{dk d\omega}{(2\pi)^4} E(k, \omega) \exp[-i(\omega t - kr)],$$

$$E(k, \omega) = \int dr dt E(r, t) \exp[i(\omega t - kr)]$$
(3)

имеет вид

$$E_1^l(k, \omega) = -\frac{8\pi^2 i \omega^2 q k}{k^2 [(\omega + i0)^2 - \Omega^2]} \delta(\omega - ku),$$

$$E_1^{tr}(k, \omega) = \frac{8\pi^2 i \omega q [k[ku]]}{k^2 [(\omega + i0)^2 - \Omega^2 - k^2 c^2]} \delta(\omega - ku),$$

$$V_1(k, \omega) = \frac{8\pi^2 eq}{mk^2} \left\{ \frac{[k[ku]]}{(\omega + i0)^2 - \Omega^2 - k^2 c^2} - \frac{k\omega}{(\omega + i0)^2 - \Omega^2} \right\} \delta(\omega - ku),$$

$$N_1(k, \omega) = -\frac{8\pi^2 eq N_0}{m [(\omega + i0)^2 - \Omega^2]} \delta(\omega - ku), \quad \Omega^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m},$$
(4)

где бесконечно малая положительная мнимая часть у  $\omega$  обеспечивает обход полюсов в соответствии со слабым затуханием волн в областях прозрачности.

2. Слабая нелинейность плазмы проявляется во взаимодействии генерируемых частицей полей линейного приближения. Система уравнений, описывающих это взаимодействие, имеет вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_2 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H}_2 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} - \frac{4\pi e N_0}{c} \mathbf{V}_2 - \frac{4\pi e N_1}{c} \mathbf{V}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial t} + (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1 &= -\frac{e}{m} \mathbf{E}_2 - \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_1 \mathbf{H}_1], \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + N_0 (\nabla \mathbf{V}_2) &= -\nabla (N_1 \mathbf{V}_1), \end{aligned} \quad (5)$$

откуда для фурье-компонент нелинейных поправок к полям находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2'(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{c^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}Q(\mathbf{k}, \omega))}{\mathbf{k}^2[\Omega^2 - (\omega + i0)^2]}, \\ \mathbf{E}_2^{tr}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{c^2 [\mathbf{k}[\mathbf{k}Q(\mathbf{k}, \omega)]]}{\mathbf{k}^2[(\omega + i0)^2 - \mathbf{k}^2 c^2 - \Omega^2]}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2, \\ \mathbf{Q}_1(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{16\pi i q^2 e^3 N_0(\mathbf{k}u)}{m^2 c^2} \delta(\omega - \mathbf{k}u) \int \frac{d\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} \frac{1}{[(\Delta \mathbf{k}u + i0)^2 - \Omega^2]} \times \\ &\times \left\{ \frac{[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'u]]}{(\mathbf{k}'u + i0)^2 - \Omega^2 - \mathbf{k}^2 c^2} - \frac{\mathbf{k}'(\mathbf{k}'u)}{(\mathbf{k}'u + i0)^2 - \Omega^2} \right\}, \\ \mathbf{Q}_2(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{8\pi i q^2 e^3 N_0 \mathbf{k}}{m^2 c^2} \delta(\omega - \mathbf{k}u) \int \frac{d\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2 \Delta \mathbf{k}^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{([\Delta \mathbf{k} [\Delta \mathbf{k}u]] [\mathbf{k}'[\mathbf{k}'u]])}{[(\Delta \mathbf{k}u + i0)^2 - \Omega^2 - \Delta \mathbf{k}^2 c^2] [(k'u + i0)^2 - \Omega^2 - k^2 c^2]} + \right. \\ &+ \frac{(\mathbf{k}' \Delta \mathbf{k}) (\mathbf{k}'u) (\Delta \mathbf{k}u)}{[(\Delta \mathbf{k}u + i0)^2 - \Omega^2] [(k'u + i0)^2 - \Omega^2]} - \\ &- \left. \frac{2(\Delta \mathbf{k}u) (\Delta \mathbf{k}[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'u]])}{[(\Delta \mathbf{k}u + i0)^2 - \Omega^2] [(k'u + i0)^2 - \Omega^2 - k'^2 c^2]} \right\}, \\ \Delta \mathbf{k} &= \mathbf{k} - \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом в соответствии со сказанным выше должны иметь место соотношения  $|\mathbf{k}| \ll k_D$ ,  $|\mathbf{k}'| \ll k_D$ ,  $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \ll k_D$ . Последнее из этих условий сильно усложняет процедуру интегрирования. В целях упрощения оно снимается, что на 1/4 увеличивает область интегрирования. Мы надеемся, что это упрощение не оказывается на порядке величины результатов, но мы не делали попытки оценить вносимую ошибку.

Соотношения (6) и (7) совместно с (2) и (3) позволяют теперь определить изменение в единицу времени энергии пролетающего через плазму эффективного заряда, связанное с нелинейностью среды. Как

будет видно из дальнейшего, наиболее существенной поправкой к поляризационным потерям линейного приближения

$$W = -\frac{q^2 \Omega^2}{u} \ln \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{v_T}{u}$$

( $v_T$  — тепловая скорость частиц) (мы ограничиваемся той частью потерь, которая связана с коллективными эффектами) является поправка, обусловленная нелинейным продольным полем, возникшим в результате взаимодействия двух продольных волн линейного приближения. Приступим к вычислению этой поправки.

Фурье-компоненты соответствующего электрического поля может быть выделена из (6) и имеет вид

$$\begin{aligned} E^{u \rightarrow l}(k, \omega) = & \frac{8\pi i q^2 e^3 N_0 k \delta(\omega - ku)}{m^2 [(\omega + i0)^2 - \Omega^2]} \int \frac{dk'}{[(k'u + i0)^2 - \Omega^2] [(\Delta ku + i0)^2 - \Omega^2]} \times \\ & \times \left[ \frac{(ku)(k'u)(kk')}{k^2 k'^2} + \frac{(ku)(\Delta ku)(k\Delta k)}{k^2 \Delta k^2} + \frac{(k'u)(\Delta ku)(k'\Delta k)}{k'^2 \Delta k^2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Направляя без ограничения ось  $z$  вдоль  $u$ , для соответствующей части потерь получим

$$W^{u \rightarrow l} = \frac{i q^3 e^3 N_0}{2\pi^3 m^2 u^3} \int dk_{\perp} dk'_{\perp} \int \frac{x dx}{(x + i0)^2 - k_0^2} \tilde{J}(x, k_{\perp}, k'_{\perp}), \quad (9)$$

где

$$\tilde{J}(x, k_{\perp}, k'_{\perp}) = \int_{-k_D}^{k_D} \frac{\tilde{F}(x, x', k_{\perp}, k'_{\perp}) dx'}{[(x' + i0)^2 - k_0^2] [(x - x' + i0)^2 - k_0^2]}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, x', k_{\perp}, k'_{\perp}) = & \left[ \frac{xx' (k_{\perp} k'_{\perp} + xx')}{(k_{\perp}^2 + x^2) (k'_{\perp}^2 + x'^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{x(x - x') (k_{\perp} \Delta k_{\perp} + x(x - x'))}{(k_{\perp}^2 + x^2) (\Delta k_{\perp}^2 + (x - x')^2)} + \frac{x'(x - x') (k'_{\perp} \Delta k_{\perp} + x'(x - x'))}{(k'_{\perp}^2 + x'^2) (\Delta k_{\perp}^2 + (x - x')^2)} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$k_0 = \Omega/u, \quad x \equiv k_z.$$

Интегрирование (10) по контуру, соответствующим образом обходящему полюса, дает

$$\begin{aligned} \tilde{J} = \tilde{P}(x, k_{\perp}, k'_{\perp}) + i \frac{\pi}{2k_0 x} \left[ \frac{\tilde{F}(x, -k_0, k_{\perp}, k'_{\perp}) + \tilde{F}(x, x + k_0, k_{\perp}, k'_{\perp})}{x + 2k_0} - \right. \\ \left. - \frac{\tilde{F}(x, k_0, k_{\perp}, k'_{\perp}) + \tilde{F}(x, x - k_0, k_{\perp}, k'_{\perp})}{x - 2k_0} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\tilde{P}(x, k_{\perp}, k'_{\perp}) = P \int_{-k_D}^{k_D} \frac{\tilde{F}(x, x', k_{\perp}, k'_{\perp}) dx}{(x'^2 - k_0^2) ((x - x')^2 - k_0^2)} \quad (13)$$

( $P$  — символ главного значения). Поскольку при больших  $x'$  подынтегральная функция ведет себя как  $1/x'^4$ , интегрирование можно приблизенно распространить до бесконечности. Тогда (13) приводится к виду

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, k_{\perp}, k'_{\perp}) = \pi \operatorname{Re} \left\{ i \left[ - \frac{x(k_{\perp}k'_{\perp} + ik'_{\perp})}{(x^2 + k_{\perp}^2)(k'^2_{\perp} + k_0^2)[(x - ik'_{\perp})^2 - k_0^2]} + \right. \right. \\ + \frac{x(k_{\perp}\Delta k_{\perp} - i\Delta k_{\perp})}{(x^2 + k_{\perp}^2)(\Delta k_{\perp}^2 + k_0^2)[(x + i\Delta k_{\perp})^2 - k_0^2]} - \\ - \frac{(x - ik'_{\perp})(k'_{\perp}\nabla k_{\perp} + ik'_{\perp}(x - ik'_{\perp}))}{(k'^2_{\perp} + k_0^2)[(x - ik'_{\perp})^2 - k_0^2][(ik'_{\perp} - x)^2 + \Delta k_{\perp}^2]} + \\ \left. \left. + \frac{(x + i\Delta k_{\perp})(k'_{\perp}\Delta k_{\perp} - i\Delta k_{\perp}(x + i\Delta k_{\perp}))}{[(x + i\Delta k_{\perp})^2 + k_{\perp}^2][(x + i\Delta k_{\perp})^2 - k_0^2](\Delta k_{\perp}^2 + k_0^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) видно, что  $\tilde{P}(x, k_{\perp}, k'_{\perp})$  является четной функцией  $x$ , действительна и не содержит полюсов на действительной оси  $x$ . Во втором же слагаемом (12) наличие малого затухания учтем, заменив там, где это необходимо,  $x \rightarrow x + i0$ .

Подставляя теперь (12) в (9) и учитывая четность  $\tilde{P}(x, k_{\perp}, k'_{\perp})$ , после несложных вычислений найдем

$$\begin{aligned} W^{u \rightarrow i} = \frac{q^3 e^3 N_0}{2\pi^2 m^2 u^3} \left\{ \int dk_{\perp} dk'_{\perp} \tilde{P}(k_0, k_{\perp}, k'_{\perp}) - \frac{1}{k_0} P \int \frac{dk_{\perp} dk'_{\perp} dx}{x^2 - k_0^2} \times \right. \\ \times \left. \left[ \frac{F(x, -k_0, k_{\perp}, k'_{\perp})}{x + 2k_0} - \frac{F(x, k_0, k_{\perp}, k'_{\perp})}{x - 2k_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Интегрирование по  $x$  в последних 2 слагаемых можно осуществить, если, учитывая быстрое убывание подынтегральной функции, распространить пределы интегрирования до бесконечности. Тогда

$$\begin{aligned} P \int \frac{F(x, -k_0, k_{\perp}, k'_{\perp}) dx}{(x^2 - k_0^2)(x + 2k_0)} = - \\ - \pi k_0 \operatorname{Re} \left\{ i \left[ - \frac{(k_{\perp}k'_{\perp} - ik_{\perp}k_0)}{(ik_{\perp} + 2k_0)(k_{\perp}^2 + k_0^2)(k'^2_{\perp} + k_0^2)} + \right. \right. \\ + \frac{(k'_{\perp}\Delta k_{\perp} - ik_0\Delta k_{\perp})}{(k'^2_{\perp} + k_0^2)[(-k_0 + i\Delta k_{\perp})^2 - k_0^2](k_0 - i\Delta k_{\perp})} - \\ - \frac{(ik_{\perp} + k_0)[k_{\perp}\Delta k_{\perp} + ik_{\perp}(ik_{\perp} + k_0)]}{k_0(ik_{\perp} + 2k_0)(k_{\perp}^2 + k_0^2)[(ik_{\perp} + k_0)^2 + \Delta k_{\perp}^2]} - \\ \left. \left. - \frac{(-k_0 + i\Delta k_{\perp})[k_{\perp}\Delta k_{\perp} + i\Delta k_{\perp}(-k_0 + i\Delta k_{\perp})]}{k_0[(-k_0 + i\Delta k_{\perp})^2 + k_{\perp}^2][(-k_0 + i\Delta k_{\perp})^2 - k_0^2](k_0 + i\Delta k_{\perp})} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

а второй интеграл получается заменой в (16)  $k_0 \rightarrow -k_0$ .

Можно показать, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int dk_{\perp} \int dk'_{\perp} F(k_{\perp}, k'_{\perp}) &\equiv \int dk_{\perp} \int dk'_{\perp} F(k_{\perp}, k_{\perp} - k'_{\perp}) \equiv \\ &\equiv \int dk_{\perp} \int dk'_{\perp} F(k_{\perp} - k'_{\perp}, k_{\perp}). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя это обстоятельство и учитывая (16), выражение (15) можно привести к виду

$$\begin{aligned} W^{ll \rightarrow l} &= \frac{2q^3 e^3 N_0}{\pi m^2 u^3} \int dk_{\perp} dk'_{\perp} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left\{ \left[ - \frac{k_0^2 k'_{\perp}}{(k_{\perp}^2 + k_0^2)(k_{\perp}^2 + k_0^2)(k_{\perp}^2 + 4k_0^2)} - \right. \right. \\ &- \frac{i(k_0 + ik'_{\perp})^2}{(k_{\perp}^2 + k_0^2)(2k_0 + k'_{\perp})[(k_0 + ik'_{\perp})^2 + k_{\perp}^2]} + \\ &+ k_{\perp} k'_{\perp} \left[ \frac{2k_0^2}{k'_{\perp}(k_{\perp}^2 + k_0^2)(k_{\perp}^2 + k_0^2)(k_{\perp}^2 + 4k_0^2)} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{k_0^2 + 2ik_0 k'_{\perp}}{k'_{\perp} k_0 [(k_0 + ik'_{\perp})^2 + k_{\perp}^2](k_{\perp}^2 + k_0^2)(2k_0 + ik'_{\perp})} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Интегрируя теперь (18) по области  $|k_{\perp}| < k_D$ ,  $|k'_{\perp}| < k_D$ , получим

$$W^{ll \rightarrow l} = \frac{4\pi q^3 e^3 N_0 k_D}{m^2 u^3} [\ln 4 + \alpha F^{ll \rightarrow l}(\alpha)], \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} F^{ll \rightarrow l}(\alpha) &\simeq \operatorname{arctg} \frac{2}{\alpha} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{3} \ln \frac{1}{\alpha} \times \\ &\times \left( 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2\alpha} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{4}{3} \ln \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{3} \pi \ln 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что при получении (19) опущены члены порядка  $\alpha^2$ . Сохранение этих членов не имеет смысла, поскольку в законе дисперсии продольных волн линейного приближения мы пренебрели тепловой поправкой, имеющей тот же порядок.

Теперь для отношения нелинейной части потерь к линейной находим

$$\xi \simeq \frac{|Z|}{4N_D} \alpha^2 \frac{\ln 4 + \alpha F^{ll \rightarrow l}(\alpha)}{\ln(1/\alpha)}, \quad (21)$$

где  $N_D = \pi N_0 / k_D^3 \gg 1$  — число частиц в «цилиндре Дебая».

Из (21) следует, что при наиболее благоприятном выборе параметров, когда  $\alpha^2 = 5 \cdot 10^{-2}$  и  $N_D \sim 10$ , нелинейные поправки к потерям становятся существенны при  $Z \sim 100$ . При других значениях параметров роль нелинейного взаимодействия резко ослабляется. Заметим еще, что знак потерь связан со знаком эффективного заряда [4, 5] и для положительных зарядов рассмотренный нелинейный процесс уменьшает потери энергии.

Участие в нелинейном взаимодействии одного поперечного поля в  $\beta^2 = (u/c)^2$  раз уменьшает нелинейные потери. В частности, для парциального вклада в потери, вносимого продольным нелинейным полем, возникшим в результате взаимодействия линейных продольного и поперечного полей, в старшем по параметрам  $\beta = u/c$  и  $\gamma = v_t/c$  приближении после аналогичных выражений находим

$$W^{tr \rightarrow l} \simeq -\frac{4\pi q^3 e^3 N_0 k_D}{m^2 u^3} \beta^2 \ln 4, \quad (22)$$

а для вклада, вносимого поперечным нелинейным полем, образованным в результате взаимодействия двух продольных полей линейного приближения, получим

$$W^{ll \rightarrow tr} \simeq \frac{4\pi q^3 e^3 N_0 k_D}{m^2 u^3} \beta^2 \ln 2. \quad (23)$$

Выпишем еще парциальные вклады от взаимодействия с участием двух поперечных полей. Эти вклады отличаются от (20) наличием множителя  $\beta^4$  и имеют вид

$$W^{tr \rightarrow tr} \simeq \frac{\pi q^3 e^3 N_0 k_D}{m^2 u^3} \beta^4 \ln 2; \quad (24)$$

$$W^{tr l \rightarrow tr} \simeq -\frac{\pi q^3 e^3 N_0 k_D}{m^2 u^3} \beta^4 \ln 4. \quad (25)$$

Из сравнения уравнений (22) — (25) с уравнением (19) следует, что наличие множителей  $\beta^2$  и  $\beta^4$  делает парциальные вклады, связанные с участием по крайней мере одного поперечного поля, несущественными. В особенности при  $v_t \ll c$ , когда для скоростей заряда, при которых нелинейные поправки вообще могут быть ощутимы, этот множитель ничтожно мал. Отсюда можно заключить, что в рассматриваемом случае единственным существенным нелинейным процессом может оказаться процесс образования нелинейной продольной волны продольными волнами линейного приближения.

Полученные выше соотношения для когерентных потерь относятся к случаю, когда размеры сгустка не превосходят дебаевскую длину волны, что соответствует почти точечному заряду. Если же размеры сгустка  $a$  больше дебаевской длины  $\lambda_D$ , то при определении когерентной части потерь интегрирование в (18) следует ограничить значением  $k_{\max} = 1/a$ , меньшим  $k_D$ . Для когерентных потерь, обусловленных генерацией продольного поля продольными полями линейного приближения, тогда получим

$$W^{ll \rightarrow l} \simeq \frac{4\pi q^3 e^3 N_0}{m^2 u^3 a} [\ln 4 + \tilde{\alpha} F^{ll \rightarrow l}(\tilde{\alpha})] \quad (\tilde{\alpha} = k_0 a), \quad (26)$$

а для отношения нелинейной части потерь к линейной —

$$\xi = \frac{|Z| e^2}{ma u^2} \frac{[\ln 4 + \tilde{\alpha} F^{ll \rightarrow l}(\tilde{\alpha})]}{\ln(1/\tilde{\alpha})}. \quad (27)$$

Легко видеть, что отношение нелинейных потерь к линейным уменьшится при этом в  $a/\lambda_D$  раз. Однако вклад нелинейных потерь при этом может оказаться весьма существенным за счет большого ( $\sim 10^6$ ) заряда сгустка.

В заключение авторы выражают благодарность Э. В. Гедалину и Г. Е. Гургенишвили, принявшим участие на первом этапе работы, а также В. П. Силину и А. Д. Патарая за полезные обсуждения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, **23**, 1161 (1952); А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Уч. зап. ХГУ, Тр. физ. отд., **7**, 5 (1958).
2. А. А. Коломенский, ДАН СССР, **106**, 982 (1956); А. Г. Ситенко, А. А. Коломенский, ЖЭТФ, **30**, 511 (1956).
3. S. K. Maimaitag, Proc. Phys. Soc., **76**, 657 (1960).
4. В. И. Мирошниченко, Укр. физ. ж., **8**, 1268 (1963).
5. В. И. Мирошниченко, ЖТФ, **34**, 1537 (1964).

Институт физики АН Грузинской ССР

Поступила в редакцию  
25 декабря 1967 г.

### ENERGY LOSSES OF A CHARGED PARTICLE IN A WEAKLY-NONLINEAR PLASMA

*N. P. Giorgadze, D. G. Lominadze*

The authors consider the influence of nonlinear effects on the energy losses of clusters or small clouds of charged particles transiting through an unbounded isotropic plasma. A weak nonlinearity of plasma is displayed in the interaction of the fields of a linear approximation generated by a particle. Partial contributions of all possible processes of nonlinear interactions between waves and fields generated by the particle are determined. It is shown that the more essential correction to the polarization losses of the linear approximation is due to a nonlinear longitudinal field arising from the interaction of two longitudinal waves of the linear approximation.

УДК 621.372.6

## СИНТЕЗ РЕАКТИВНОГО МНОГОПОЛЮСНИКА ПО ЗАДАННОЙ МАТРИЦЕ РАССЕЯНИЯ

*Б. А. Мишустин*

Показано, что схему произвольного реактивного многополюсника, характеризуемого унитарной матрицей рассеяния, можно составить в виде каскадного соединения простейших многополюсников — четырехполюсников и восьмиполюсников с двумя парами развязанных и согласованных зажимов. Параметры простейших многополюсников и последовательность их включения определяются на основе преобразований заданной матрицы рассеяния, переводящих ее столбцы в координатные векторы.

Многополюсник СВЧ в общем случае представляет собой схему, позволяющую осуществить одновременное питание нескольких нагрузок от одного или нескольких источников высокочастотных колебаний. Каждый многополюсник характеризуется матрицей рассеяния, которая определяет амплитуды и фазы возбуждения нагрузок и связь между источниками колебаний, т. е. внешние параметры многополюсника. Под синтезом многополюсника мы будем понимать составление схемы, которая имеет требуемые внешние параметры и состоит из элементов, легко выполнимых практически.

Наиболее просто составить схему развязывающего многополюсника, у которого имеются две равные группы согласованных и развязанных между собой зажимов. Регулярные методы синтеза такого многополюсника обсуждаются в [1]. В настоящей работе рассматривается метод синтеза произвольного реактивного многополюсника, характеризуемого унитарной матрицей рассеяния.

Как видно уже на простейших примерах, задача синтеза не имеет единственного решения — существуют различные схемы, описываемые одной и той же матрицей рассеяния. Мы ограничимся одной определенной структурой синтезируемого многополюсника в виде каскадного соединения простых элементарных многополюсников: восьмиполюсников с двумя парами развязанных и согласованных зажимов и четырехполюсников — отрезков линий передач и фиксированных фазовращателей. Такие элементарные многополюсники всегда могут быть выполнены при заданных внешних параметрах.

Каждая конкретная схема многополюсника обладает требуемой матрицей рассеяния, вообще говоря, только на одной частоте, т. е. является одночастотной. Величина рабочей полосы частот зависит от структуры схемы, от широкополосности ее элементов, от последовательности их соединения и др. и в настоящей работе не обсуждается.

### 1. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Схему искомого многополюсника мы будем составлять последовательно, подключая один за другим элементарные многополюсники. Преобразование матрицы рассеяния при подключении очередного элементарного многополюсника можно рассчитать, используя соотношения для каскадного соединения многополюсников, которые мы здесь рассмотрим.

Пусть  $[S_1]$  и  $[S_2]$  — матрицы рассеяния двух многополюсников, соединенных каскадно (рис. 1), а  $[S]$  — матрица рассеяния всего соединения.

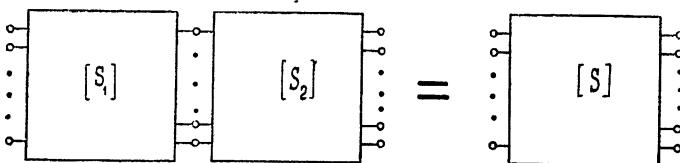


Рис. 1. Каскадное соединение многополюсников.

Представим  $[S_1]$  и  $[S_2]$  в блочном виде, разбив матрицы на клетки в соответствии с группами их свободных зажимов и зажимов, участвующих в соединении:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} [R_1] & [T_1]_t \\ \hline \vdots & \vdots \\ [T_1] & [R'_1] \end{bmatrix}, \quad [S_2] = \begin{bmatrix} [R_2] & [T_2]_t \\ \hline \vdots & \vdots \\ [T_2] & [R'_2] \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Матрицы-блоки  $[R_1]$ ,  $[R'_1]$ ,  $[R_2]$  и  $[R'_2]$  являются квадратными и симметрическими, причем матрицы  $[R'_1]$  и  $[R'_2]$  имеют одинаковый порядок, равный числу зажимов, участвующих в каскадном соединении. Порядок матрицы  $[R_1]$  равен числу свободных зажимов первого многополюсника, порядок матрицы  $[R'_2]$  — соответственно числу свободных зажимов второго. В общем случае матрицы  $[T_1]$ ,  $[T_1]_t$ ,  $([T_1]_t$  — матрица, транспонированная по отношению к  $[T_1]$ ),  $[T_2]$  и  $[T_2]_t$  могут быть прямоугольными.

Матрицу  $[S]$  также удобно представить в блочном виде, разделив ее на клетки в соответствии с группами зажимов, относящихся к первому или второму многополюснику:

$$[S] = \begin{bmatrix} [R] & [T]_t \\ \hline \vdots & \vdots \\ [T] & [R'] \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Нетрудно установить, что блоки матрицы  $[S]$  связаны с блоками матриц  $[S_1]$  и  $[S_2]$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} [R] &= [R_1] + [T_1]_t \{ [E] - [R_2] [R'_1] \}^{-1} [R_2] [T_1], \\ [T] &= [T_2] \{ [E] - [R'_1] [R_2] \}^{-1} [T_1], \\ [R'] &= [R'_2] + [T_2] \{ [E] - [R'_1] [R_2] \}^{-1} [R'_1] [T_2]_t. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $[E]$  — единичная матрица, порядок которой равен числу соединенных зажимов многополюсников.

Для синтеза многополюсника мы будем использовать частные фор-

мы соотношений (3), когда равны нулю либо матрица  $[R'_1]$ , либо  $[R_2]$ . Если  $[R'_1] = [0]$ , то

$$\begin{aligned}[R] &= [R_1] + [T_1], [R_2] [T_1], \\ [T] &= [T_2] [T_1], \quad [R'] = [R'_2].\end{aligned}\quad (4)$$

Если  $[R_2] = [0]$ , имеем

$$\begin{aligned}[R] &= [R_1], \quad [T] = [T_2] [T_1], \\ [R'] &= [R'_2] + [T_2] [R'_1] [T_2].\end{aligned}\quad (5)$$

## 2. СОСТАВЛЕНИЕ СХЕМЫ МНОГОПОЛЮСНИКА

Пусть синтезируемый многополюсник  $P$  описывается унитарной матрицей рассеяния  $[S]$ . Выберем какой-либо из зажимов многополюсника и перенумеруем зажимы таким образом, чтобы коэффициенту отражения по выбранному зажиму соответствовал элемент  $s_{11}$  матрицы  $[S]$ . (Мы будем считать, что  $|s_{11}| < 1$ , в противном случае первый зажим является входом обособленного шлейфа и фактически необходимо синтезировать схему с числом зажимов, на один меньшим.) В качестве первого элемента многополюсника  $P$  мы возьмем четырехполюсник с матрицей рассеяния

$$[S_1] = \begin{bmatrix} s_{11} & \sqrt{1 - |s_{11}|^2} \\ \sqrt{1 - |s_{11}|^2} & -s_{11}^* \end{bmatrix}, \quad (6)$$

а сам многополюсник  $P$  будем рассматривать как каскадное соединение первого четырехполюсника и некоторого многополюсника  $P_1$ , матрицу которого обозначим через  $[S_2]$ .

Согласно принятому выше делению на блоки матриц многополюсников, участвующих в каскадном соединении, получаем

$$[R_1] = s_{11}, \quad [T_1] = [T_1]_t = \sqrt{1 - |s_{11}|^2}, \quad [R'_1] = -s_{11}^*. \quad (7)$$

Поскольку  $[R] = s_{11} = [R_1]$ , мы имеем дело с вариантом каскадного соединения, когда  $[R_2] = [0]$ , и для определения блоков матрицы  $[S_2]$  можем воспользоваться формулами (5). Подставляя в (5) равенства (7), находим

$$[T_2] = \frac{1}{\sqrt{1 - |s_{11}|^2}} [T], \quad [R'_2] = [R'] + \frac{s_{11}^*}{1 - |s_{11}|^2} [T] [T]_t. \quad (8)$$

Выделив из многополюсника  $P$  один четырехполюсник, мы будем теперь составлять схему нового многополюсника  $P_1$  с более простой матрицей рассеяния, которая имеет равным нулю по крайней мере первый диагональный элемент — блок  $[R_2]$ . Для того, чтобы можно было применить формулы (3) — (5) без изменения индексов и на втором этапе синтеза (т. е. при синтезе многополюсника  $P_1$ ), мы будем обозначать матрицу рассеяния многополюсника  $P_1$  снова через  $[S]$ , матрицу рассеяния выделяемого на этом этапе элементарного многополюсника — через  $[S_1]$ , а матрицу остающейся части схемы — через  $[S_2]$ .

Выберем какие-либо два зажима многополюсника  $P_1$  и обозначим их в матрице  $[S]$  номерами 1 и 2, а зажиму, которому соответствует нулевой коэффициент отражения, сообщим последний номер  $n$ . Представим многополюсник  $P_1$  в виде каскадного соединения развязывающего восьмиполюсника с матрицей рассеяния  $[S_1]$  и некоторого нового

многополюсника  $P_2$  с матрицей рассеяния  $[S_2]$ , причем матрицу  $[S_1]$  расчитаем таким образом, чтобы первый элемент последней строки матрицы  $[S_2]$  оказался равным нулю.

Матрица рассеяния любого развязывающего восьмиполюсника может быть записана следующим образом:

$$[S_1] = e^{j\psi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & \cos t & e^{j\psi} \sin t \\ 0 & 0 & | & e^{j\psi_2} \sin t & -e^{j(\psi_1+\psi_2)} \cos t \\ \hline \cos t & e^{j\psi_2} \sin t & | & 0 & 0 \\ e^{j\psi_1} \sin t & -e^{j(\psi_1+\psi_2)} \cos t & | & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Следовательно, блоки матрицы  $[S_1]$

$$\begin{aligned} [R_1] &= [R'_1] = [0], \\ [T_1] &= e^{j\psi} \begin{bmatrix} \cos t & e^{j\psi_2} \sin t \\ e^{j\psi_1} \sin t & -e^{j(\psi_1+\psi_2)} \cos t \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

и для расчета матрицы  $[S_2]$  можно воспользоваться формулами (4).

Подставив в (4) соотношения (10), для блоков матрицы  $[S_2]$  получаем

$$\begin{aligned} [T_2] &= [T] [T_1]^{-1}, \quad [R_2] = [T_1]^{-1} [R] [T_1]^{-1}, \\ [R'_2] &= [R']. \end{aligned} \quad (11)$$

Из первого равенства в (11) легко найти значения параметров матрицы  $[T_1]$ , необходимые для того, чтобы первый элемент последней строки матрицы  $[S_2]$  оказался равным нулю. Для  $t$  и  $\psi_2$  получаются следующие уравнения:

$$\operatorname{tg} t = \left| \frac{s_{n1}}{s_{n2}} \right|, \quad \psi_2 = \pi - \arg \frac{s_{n1}}{s_{n2}}, \quad (12)$$

где  $s_{n1}$  и  $s_{n2}$  — первые два элемента последней строки матрицы рассеяния  $[S]$  многополюсника  $P_1$ . Фазовые углы  $\psi$  и  $\psi_1$  оказываются при этом несущественными и могут быть выбраны из соображения наиболее простой конструкции восьмиполюсника.

Таким образом, мы определили параметры и место включения в синтезируемой схеме первых двух элементарных многополюсников — четырехполюсника с матрицей рассеяния (6) и развязывающего восьмиполюсника с матрицей рассеяния (9). Оставшаяся часть схемы — многополюсник  $P_2$  — описывается матрицей рассеяния, которая содержит в последней строке два нулевых элемента. Следующий этап синтеза заключается в выделении из многополюсника  $P_2$  развязывающего восьмиполюсника с такими параметрами, чтобы оставшийся многополюсник  $P_3$  имел матрицу рассеяния с тремя нулевыми элементами в последней строке. Для этого нужно выбрать два каких-либо зажима многополюсника  $P_2$  и перенумеровать все зажимы таким образом, чтобы выбранные зажимы имели в матрице рассеяния номера 1 и 2, а нулевые элементы матрицы рассеяния занимали последние места в последней строке. Представив затем многополюсник  $P_2$  как каскадное соединение развязывающего восьмиполюсника, подключенного к зажимам 1 и 2, получим схему, изображенную на рисунке.

мам 1 и 2, и некоторого многополюсника  $P_3$ , по формулам (12) необходимо найти такие параметры восьмиполюсника, чтобы оказался равным нулю первый элемент последней строки матрицы рассеяния многополюсника  $P_3$ . Нулевые элементы, полученные на предыдущих этапах, остаются при этом без изменения, поскольку принадлежат матрице  $[R'_2]$ , не изменяющейся, как видно из формул (11), при выделении восьмиполюсника.

После  $n - 1$  этапа (в общем случае) мы придем к многополюснику  $P_{n-1}$ , матрица рассеяния которого содержит в последней строке только один отличный от нуля элемент. В силу унитарности матрицы рассеяния любого реактивного многополюсника этот элемент имеет вид  $e^{-i\alpha}$ , который свидетельствует о том, что в многополюснике  $P_{n-1}$  имеется прямое соединение двух зажимов через фазовращатель с фазовой задержкой  $\alpha$ . Выполнив это соединение, мы закончим первую серию этапов синтеза многополюсника  $P$ , получив «в остатке» многополюсник  $P_n$  с уменьшенным на два числом зажимов. Матрица рассеяния этого многополюсника получается вычеркиванием двух строк и двух столбцов, содержащих элементы  $e^{-i\alpha}$ , в матрице рассеяния многополюсника  $P_{n-1}$ .

Дальнейший процесс синтеза повторяет первые этапы с той разницей, что вместо многополюсника  $P$  необходимо рассматривать многополюсник  $P_n$  с соответствующей ему матрицей рассеяния. После следующей серии этапов выделения элементарных многополюсников мы опять придем к такому многополюснику  $P_{2n-3}$ , матрица рассеяния которого будет содержать в последней строке только один отличный от нуля элемент. Соединив в соответствии с этой матрицей два зажима многополюсника  $P_{2n-3}$ , мы получим многополюсник  $P_{2n-2}$ , у которого число зажимов на четыре меньше, чем у исходного многополюсника  $P$ . Выполнив еще одну серию этапов синтеза, мы получим многополюсник, у которого число зажимов на шесть меньше, чем у  $P$ , и т. д. до тех пор, пока число зажимов очередного синтезируемого многополюсника не снизится до двух или одного. Последним многополюсником в составляемой схеме оказывается, таким образом, четырехполюсник или шлейф (двухполюсник).

### 3. ПРИМЕР

Для иллюстрации рассмотренного метода синтеза многополюсных схем поставим схему десятиполюсника  $P$  с матрицей рассеяния

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & e^{i120^\circ} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & e^{-i120^\circ} & e^{-i120^\circ} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & e^{i120^\circ} & 1 \\ 1 & e^{-i120^\circ} & e^{i120^\circ} & 0 & 0 \\ e^{i120^\circ} & e^{-i120^\circ} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Такой десятиполюсник имеет два развязанных между собой и согласованных входных зажима (4 и 5) (рис. 2), при возбуждении которых на входных зажимах 1, 2 и 3 реализуются два трехфазных распределения напряжений.

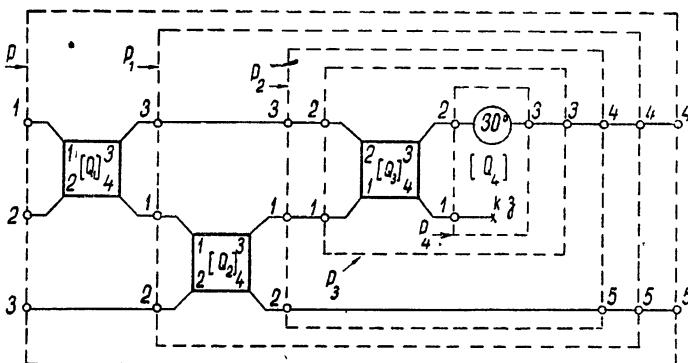


Рис. 2. Последовательность внутренних многополюсников в схеме многополюсника  $P$ .

Поскольку два последних элемента в последней строке матрицы  $[S]$  уже равны нулю, на первом этапе синтеза мы выделим из многополюсника  $P$  развязывающий восьмиполюсник, подключив его к зажимам 1 и 2 (рис. 2), и рассчитаем его параметры таким образом, чтобы включенный с ним каскадно десятиполюсник  $P_1$  имел матрицу рассеяния с первым элементом пятой строки, равным нулю. Применив для расчета матрицы рассеяния восьмиполюсника формулы (12), мы получим

$$[Q_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 1 & e^{-j120^\circ} \\ 0 & 0 & | & e^{-j60^\circ} & 1 \\ 1 & e^{-j60^\circ} & | & 0 & 0 \\ e^{-j120^\circ} & 1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

(Для определенности здесь принято  $\phi=0$  и  $\psi_1=-120^\circ$ .) Подставив блоки матрицы  $[Q_1]$  (14) в формулы (11), мы найдем матрицу рассеяния многополюсника  $P_1$ :

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^{j60^\circ} & j\sqrt{3} & \sqrt{6}e^{j30^\circ} & 3\sqrt{2}e^{-j30^\circ} & 0 \\ j\sqrt{3} & e^{j120^\circ} & \sqrt{2}e^{j60^\circ} & -\sqrt{6} & 2\sqrt{6}e^{-j120^\circ} \\ \sqrt{6}e^{j30^\circ} & \sqrt{2}e^{j60^\circ} & 2 & 2\sqrt{3}e^{j120^\circ} & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2}e^{-j30^\circ} & -\sqrt{6} & 2\sqrt{3}e^{j120^\circ} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6}e^{-j120^\circ} & 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Изменим нумерацию входов десятиполюсника  $P_1$  следующим образом: 1→3, 2→1, 3→2, 4→4 и 5→5 (рис. 2). Тогда матрица рассеяния (15) примет вид

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} e^{j120^\circ} & \sqrt{2}e^{j60^\circ} & j\sqrt{3} & -\sqrt{6} & 2\sqrt{6}e^{-j120^\circ} \\ \sqrt{2}e^{j60^\circ} & 2 & \sqrt{6}e^{j30^\circ} & 2\sqrt{3}e^{j120^\circ} & 2\sqrt{3} \\ j\sqrt{3} & \sqrt{6}e^{j30^\circ} & 3e^{j60^\circ} & 3\sqrt{2}e^{-j30^\circ} & 0 \\ -\sqrt{6} & 2\sqrt{3}e^{j120^\circ} & 3\sqrt{2}e^{-j30^\circ} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{6}e^{-j120^\circ} & 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Если теперь присоединить развязывающий восьмиполюсник с матрицей рассеяния

$$[Q_2] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}e^{-j120^\circ} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}e^{-j60^\circ} & 1 \\ 1 & \sqrt{2}e^{-j60^\circ} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}e^{-j120^\circ} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

к зажимам 1 и 2 десятиполюсника  $P_1$ , матрица рассеяния оставшегося десятиполюсника  $P_2$  будет иметь в последней строке единственный ненулевой элемент

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j120^\circ} & 0 & j & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ j & 0 & e^{j60^\circ} & \sqrt{2}e^{-j30^\circ} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}e^{-j30^\circ} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Следовательно, в десятиполюснике  $P_2$  зажимы 2 и 5 соединены только между собой (без фазовращателя, поскольку фаза ненулевого элемента равна 0). После выполнения этого соединения остается составить схему шестиполюсника  $P_3$  (рис. 2) с матрицей рассеяния

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j120^\circ} & j & -\sqrt{2} \\ j & e^{j60^\circ} & \sqrt{2}e^{-j30^\circ} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}e^{-j30^\circ} & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Используя матрицу рассеяния (19), мы определим по формулам (12) параметры матрицы рассеяния  $[Q_3]$  последнего развязывающего восьмиполюсника в синтезируемой схеме десятиполюсника  $P$ :

$$[Q_3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & e^{-j150^\circ} \\ 0 & 0 & e^{-j30^\circ} & 1 \\ 1 & e^{-j30^\circ} & 0 & 0 \\ e^{-j150^\circ} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Тогда матрица рассеяния оставшейся части шестиполюсника  $P_3$ —матрица шестиполюсника  $P_4$  (рис. 2)—будет содержать только по одному отличному от нуля элементу в каждой строке:

$$[Q_4] = \begin{bmatrix} e^{j120^\circ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j30^\circ} \\ 0 & e^{-j30^\circ} & 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с этой матрицей зажимы 2 и 3 шестиполюсника  $P_4$  должны быть соединены через фазовращатель с фазовой задержкой  $30^\circ$ , а к первому зажиму должен быть подключен реактивный шлейф, обеспечивающий коэффициент отражения  $p = e^{j120^\circ}$  (например, короткозамкнутый шлейф длиной  $\lambda/12$ , где  $\lambda$  — длина волны).

Матрицы рассеяния  $[Q_1]$ ,  $[Q_2]$ ,  $[Q_3]$ ,  $[Q_4]$  определяют все элементы, участвующие в схеме синтезируемого десятиполюсника  $P$ , а структура их соединений непосредственно следует из порядка отыскания элементов.

Четырехполюсники и развязывающие восьмиполюсники, из которых составляется схема синтезируемого многополюсника, являются наиболее простыми из многополюсных схем и легко реализуются конструктивно по матрицам рассеяния. Развязывающий восьмиполюсник с любыми параметрами можно выполнить, например, из направленного ответвителя с соответствующим коэффициентом связи и трех фиксированных фазовращателей. В принципе схему многополюсника можно составлять и из более крупных элементов, например, развязывающих двенадцатиполюсников. Однако их практическое выполнение сложнее, чем восьмиполюсников. Вопрос о выборе элементов, составляющих схему, так же как проблема оптимальной последовательности их соединения, связан с рассмотрением частотных характеристик схемы и выходит за рамки настоящей работы, цель которой заключалась в построении какого-либо регулярного алгоритма составления схемы реактивного многополюсника по заданной матрице рассеяния.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Мишустин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 10, № 12, 1737 (1967).

## REACTIVE MULTIPORT NETWORK SYNTHESIS BY THE GIVEN SCATTERING MATRIX

*B. A. Mishoustin*

It is shown that the scheme of arbitrary reactive multiport network characterizing by the unitary scattering matrix may be composed in the form of cascade connection of the simplest multiport network (2-port and 4-port circuits with two pairs of bypass and matched terminals). The parameters of the simplest multiport network and the succession of their connecting is determined on the basis of transformation of the given scattering matrix converting its columns into coordinate vectors.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.378 32

**О СИНХРОНИЗАЦИИ МОНОИМПУЛЬСОВ ИЗЛУЧЕНИЯ РУБИНОВОГО  
И НЕОДИМОВОГО ЛАЗЕРОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОСВЕТЛЯЮЩЕГОСЯ  
ЖИДКОСТНОГО ЗАТВОРА**

Ю. М. Грязнов, О. Л. Лебедев

Одновременная генерация гигантских импульсов лазеров используется в экспериментах по нелинейной оптике, в частности, при смещении световых волн рубинового и неодимового лазеров с целью получения фиолетового излучения ( $\lambda=420 \text{ нм}$ ) [1, 2]. Для синхронизации гигантских импульсов рубинового и неодимового лазеров использовалась вращающаяся призма [1–3], однако существует более простой способ синхронизации — с помощью просветляющегося пассивного затвора. Этим способом были синхронизированы моноимпульсы излучения рубиновых лазеров [4, 5].

В настоящей работе исследуется возможность синхронизации гигантских импульсов рубинового и неодимового лазеров с помощью просветляющегося пассивного жидкостного затвора. В качестве такого затвора используется раствор нового просветляющегося красителя — бромированного фталоцианина [6].

Спектр этого раствора имеет две характерные полосы поглощения: широкую коротковолновую полосу в области излучения рубинового лазера ( $\lambda_{\max}=645 \text{ нм}$ ) и узкую длинноволновую в области излучения неодимового лазера ( $\lambda_{\max}=1022 \text{ нм}$ ). Раствор бромированного фталоцианина просветляется в области длинноволновой полосы поглощения под действием излучения неодимового лазера. Это свойство использовано для получения гигантских импульсов [6]. Длинноволновая полоса с  $\lambda_{\max}=1022 \text{ нм}$  исчезает также под действием излучения рубинового лазера, что позволяет применить этот раствор для синхронизации моноимпульсов излучения рубинового и неодимового лазеров. Бромированный фталоцианин, в отличие от применяемых в настоящее время для модуляции добротности резонатора неодимового лазера полиметиновых красителей, обладает практически неограниченной стабильностью и легче просветляется.

На рис. 1 приведена схема экспериментальной установки. Неодимовый (II) и рубиновый (III) лазеры синхронизируются с помощью задающего рубинового лазера (I). Модуляция добротности резонаторов осуществляется пассивными жидкостными затворами: раствором бромированного фталоцианина (для неодимового лазера) и раствором хлористого фталоцианина галлия (для рубиновых лазеров). Луч рубинового лазера I направляется на кювету 2 с раствором бромированного фталоцианина и просветляет его на  $\lambda=1060 \text{ нм}$ , формируя гигантский импульс неодимового лазера II, который следует за моноимпульсом задающего лазера I с некоторой временной задержкой  $\Delta t_{12}$ . Часть излучения лазера I подается на пассивный жидкостный затвор 3 рубинового лазера III; образующийся при этом моноимпульс запаздывает по отношению к импульсу задающего лазера на  $\Delta t_{13}$ .

На рис. 2B приводится зависимость временного интервала  $\Delta t_{12}$  между моноимпульсами задающего рубинового и неодимового лазеров от плотности мощности излучения рубинового лазера. Две кривые сняты при разных значениях энергии накачки неодимового лазера. При пропускании кюветы с раствором бромированного фталоцианина  $T_0 = 61\%$  и плотности мощности падающего на кювету излучения задающего рубинового лазера  $\sim 15 \text{ Mвт} \cdot \text{см}^{-2}$  временной сдвиг  $\Delta t_{12}$  составлял 260–300 нсек (рис. 2B, нижняя кривая). Измерения проводились на цифровом измерителе временных интервалов И2-18, абсолютная погрешность измерений которого составляет  $\pm 20 \text{ нсек}$ . С уменьшением плотности мощности излучения временная задержка увеличивается, при этом разброс значений  $\Delta t_{12}$  возрастает, поскольку ослабляется влияние стороннего рубинового излучения и процесс развития моноимпульса неодимового лазера становится менее управляемым.

На рис. 2 показана аналогичная зависимость для пары рубиновых лазеров, I и III. Задержки  $\Delta t_{13}$  порядка 160–200 нсек получались при значительно меньших

плотностях излучения задающего рубинового лазера ( $50-80 \text{ квт} \cdot \text{см}^{-2}$ ). Это объясняется тем, что раствор хлористого фталоцианина галлия легко просветляется на очень низких плотностях мощности\*.

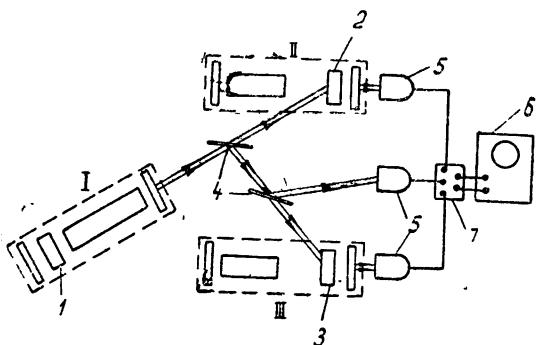


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

I—задающий рубиновый лазер;  
II, III—синхронизируемые неодимовый и рубиновый лазеры соответственно;

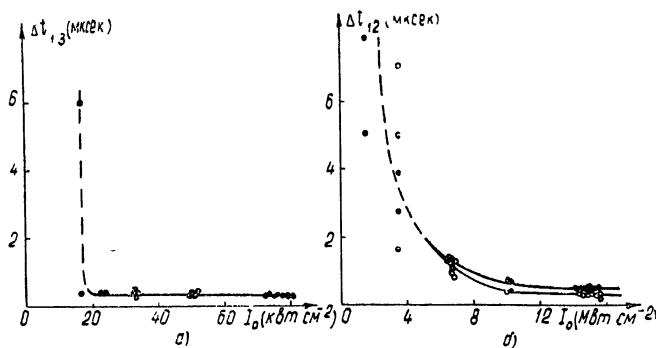
1, 2, 3—просветляющиеся жидкостные затворы (1—расгвор хлористого фталоцианина галлия в нитробензоле,  $T_0=6\%$ ; 2—раствор бромированного фталоцианина,  $T_0=61\%$ ; 3—раствор хлористого фталоцианина галлия в нитробензоле,  $T_0=62\%$ ),

4—стеклянные делительные пластины;

5—фотозелектронные умножители ФЭУ-28;

6—измерительный прибор;

7—переключатель, позволяющий любую пару из трех ФЭУ подключить к измерительному прибору.



Подбором параметров системы можно добиться равенства временных интервалов  $\Delta t_{1,2}$  и  $\Delta t_{1,3}$ . Тем самым будет обеспечена синхронизация моноимпульсов излучения неодимового (II) и рубинового (III) лазеров при одновременной подаче на их пассивные затворы излучения от задающего рубинового лазера.

На рис. 3 приведена осциллограмма двух синхронизированных гигантских импульсов рубинового (верхний луч) и неодимового лазеров. При этом лазеры, используемые в схеме, имели следующие характеристики.

\* Интересно отметить, что при потоках порядка нескольких десятков  $\text{kвт} \cdot \text{см}^{-2}$  не удалось связать моноимпульсы двух рубиновых лазеров, используя в качестве просветляющегося пассивного затвора широко применяемый в настоящее время раствор фталоцианина ванадила, поскольку при этих потоках он не просветляется.

Задающий рубиновый лазер I: кристалл рубина  $15 \times 240 \text{ мм}$ ; плотность мощности выходного излучения  $\sim 15 \text{ Мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ ; длительность импульса — 30 нсек; пропускание пассивного жидкостного затвора — раствора хлористого фталоцианина галлия —  $T_0 = 6\%$ .

Неодимовый лазер II: неодимовый стержень из стекла КГСС-7  $10 \times 120 \text{ мм}$ ; длительность — 120 нсек; плотность мощности выходного излучения —  $6-8 \text{ Мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ ; на пассивный затвор 2 направлялось излучение рубинового лазера I  $\sim 15 \text{ Мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ .

Рубиновый лазер III: кристалл рубина  $10 \times 120 \text{ мм}$ , длительность  $\sim 100 \text{ нсек}$ ; плотность мощности выходного излучения —  $2-3 \text{ Мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ ; на пассивный затвор 3 падает излучение рубинового лазера I  $\sim 80 \text{ квт} \cdot \text{см}^{-2}$ .

Режимы подкачки и величины пропускания пассивных затворов 2 и 3 выбирались такими, чтобы в отсутствие излучения задающего лазера I лазеры II и III находились на пороге генерации.

Следует отметить, что условия описанного эксперимента нельзя считать оптимальными для осуществления наилучшей синхронизации моноимпульсов. Эксперимент проводился на маломощных лазерах. Улучшая характеристики излучения синхронизируемых лазеров (например, увеличивая энергию накачки и используя более концентрированные просветляющие растворы), можно уменьшить величины временных задержек развития моноимпульсов  $\Delta t$  и сделать синхронизацию более жесткой.

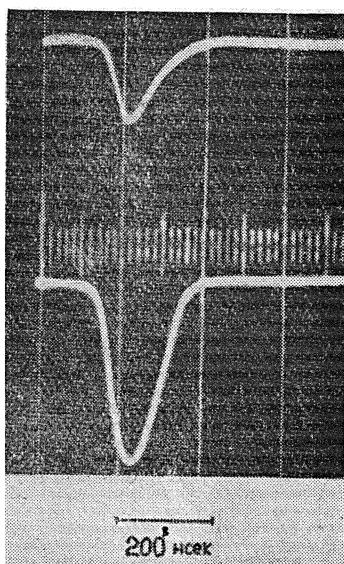


Рис. 3. Оциллограмма синхронизированных моноимпульсов рубинового (верхний луч) и неодимового лазеров при одновременной подаче на их пассивные затворы излучения задающего рубинового лазера.

В заключение авторы выражают благодарность А. А. Частову за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Гольдин, В. Г. Дмитриев, В. К. Тарасов, Н. В. Шкунов, Доклад на II Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Новосибирск, 1966
2. Н. Н. Беляева, В. А. Демидов, М. А. Новиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 294 (1967).
3. Nieuwland Tjon, D. Kehl, Appl. Optics, 5, 168 (1966).
4. H. Opointer, W. Kaiser, Phys. Lett., 21, 638 (1966).
5. David W. Gregg, Thomas Scott, J. Appl. Phys., 37, 3750 (1966).
6. О. Л. Лебедев, Ю. М. Грязнов, А. А. Частов, Оптика и спектроскопия, 24, 315 (1968).

Поступила в редакцию  
28 февраля 1968 г.

УДК 621.378 32

#### ОКГ НА РУБИНЕ С ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИМ МОДУЛЯТОРОМ ДОБРОТНОСТИ И НАСЫЩАЮЩИМСЯ ПОГЛОТИТЕЛЕМ В РЕЗОНАТОРЕ

*А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошечков, В. А. Смирнов, К. Г. Фолин*

Известно, что применение насыщающихся поглотителей в качестве пассивных модуляторов добротности резонатора ОКГ позволяет получить большую спектральную плотность мощности и в сочетании с другими методами селекции типов колебаний обеспечивает одномодовый режим генерации [1, 2].

Однако большая нестабильность времени развития генерации  $\tau$  (от начала импульса накачки до начала нелинейного развития гигантского импульса) в некоторых случаях исключает применение таких модуляторов добротности. В настоящей работе предложен метод стабилизации времени развития генерации и приведены предварительные результаты его экспериментального исследования.

В эксперименте использовался ОКГ на рубиновом стержне длиной 120 м.м. и диаметром 12 м.м. Одно из зеркал имело коэффициент отражения 0,99, в качестве второго использовалась кварцевая подложка. Для модуляции добротности в резонатор помещалась кювета с раствором фталоцианина в нитробензоле. Спектр излучения регистрировался эталоном Фабри-Перо с областью дисперсии 0,5 см<sup>-1</sup>. Измеренная ширина генерируемой спектральной линии составляла 0,07 см<sup>-1</sup> (рис. 1а).

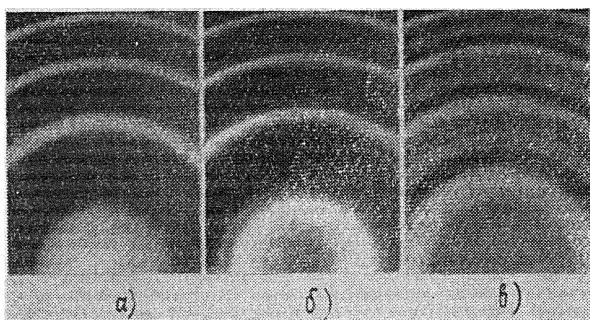


Рис. 1. Интерферограммы спектра выходного излучения:

а) — в резонаторе ОКГ находится кювета с раствором фталоцианина (начальное пропускание — 18%); б) — в резонаторе ОКГ находится электрооптический затвор с начальным пропусканием 15% и кювета с раствором фталоцианина; в) — модуляция осуществляется только электрооптическим затвором.

Время  $\tau$ , измеренное с помощью ФЭУ и осциллографа С1-8, равнялось в среднем 450 мксек. Отклонения от этой величины наблюдались в пределах  $\pm 100$  мксек при одинаковых условиях.

В работе [3] сужение спектра излучения ОКГ с пассивным модулятором добротности объясняется большим временем линейного развития генерации  $\tau_d$ , к концу которого отношение интенсивностей  $P_m$ - и  $P_n$ -типов колебаний, имеющих несколько различных начальные потери  $\alpha_m$ ,  $\alpha_n$  (например, из-за неоднородностей в активной среде), дается выражением

$$\frac{P_m}{P_n} = \left( \frac{1 - \alpha_m}{1 - \alpha_n} \right)^q, \quad (1)$$

где  $q$  — число переходов. По оценкам [3] для ОКГ с пассивным переключателем добротности  $q \sim 720$ , а для ОКГ с активным переключателем  $q \sim 30-35$ . С учетом того, что время линейного развития  $\tau_d$  в случае пассивного модулятора составляет 3—5 мксек можно предположить, что основной причиной нестабильности времени появления гигантского импульса по отношению к началу импульса накачки является нестабильность времени выполнения пороговых условий генерации,  $\tau - \tau_d$ .

Для ослабления влияния указанных нестабильностей в резонатор ОКГ помещался дополнительно электрооптический затвор. В этом случае время от момента открывания затвора и до появления гигантского импульса изменялось в пределах от 160 до 325 нсек, а ширина спектра — от 0,08 до 0,3 см<sup>-1</sup>, что объясняется тем, что описанный в [3] механизм сужения спектра в данном случае почти не проявляется из-за существенного сокращения времени линейного развития генерации, поскольку пороговые условия выполняются после открывания электрооптического затвора.

Для увеличения  $\tau_d$  начальное пропускание электрооптического затвора устанавливалось равным 15%. При этом время от момента открытия затвора до появления гигантского импульса жестко стабилизировалось и составляло  $164 \pm 2$  нсек, а флуктуации ширины спектральной линии исчезали и она составляла 0,07 см<sup>-1</sup> (рис. 1б).

Когда кювета с фталоцианином убиралась из резонатора, заметного уменьшения ширины спектра не наблюдалось. Это, вероятно, объясняется тем, что фталоцианин, по-видимому, увеличивает разницу в начальных коэффициентах потерь  $\alpha_m$ ,  $\alpha_n$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Микаэлян, Ю. Г. Турков, В. Г. Савельев, Письма в ЖЭТФ, 6, 675 (1967)
2. V. Daneri, C. A. Sacchi, O. Svelto, IEEE J. Quant. Electr., QE-2, 290 (1966).
3. W. R. Sooy, Appl. Phys. Lett., 7, 36 (1965).

Институт физики полупроводников  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
11 марта 1968 г.

УДК 621.371.222

## О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

A. Г. Литвак, B. A. Миронов

Известно, что в безграничной однородной среде, диэлектрическая проницаемость которой зависит от амплитуды поля  $E$  как  $\epsilon = \epsilon_0 + \alpha|E|^2$ , при  $\alpha > 0$  возможна самофокусировка электромагнитных волн [1-3]. В частности, существуют автолокализованные волновые пучки, структура которых вдоль направления распространения не меняется. Решения уравнений Максвелла, описывающие структуру поля самоканализирующихся пучков, могут быть использованы для «конструирования» поверхностных волн, распространяющихся вдоль плоской границы раздела двух сред, хотя бы одна из которых нелинейна\*. Рассмотрению таких поверхностных волн и посвящена настоящая заметка.

1. Пусть полупространство  $x > 0$  заполнено линейной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , а  $x < 0$  — нелинейной средой с  $\epsilon = \epsilon_0 + \alpha|E|^2$ . Тогда амплитуда поля бегущих двухмерных ТЕ-волн  $E_y = E(x) \exp[i(\omega t - hz)]$  удовлетворяет уравнениям

$$\ddot{E}_1 + k_0^2 (\epsilon_1 - \gamma^2) E_1 = 0 \quad (\text{при } x > 0); \quad (1)$$

$$\dot{E}_2 + k_0^2 (\epsilon_0 + \alpha E_2^2 - \gamma^2) E_2 = 0 \quad (\text{при } x < 0), \quad (2)$$

первые интегралы которых при условии локализации поля вблизи границы (при  $\rightarrow \pm \infty E \rightarrow 0, \dot{E} \rightarrow 0$ ) имеют соответственно вид [2]

$$\dot{E}_1^2 + k_0^2 (\epsilon_1 - \gamma^2) E_1^2 = 0; \quad (1a)$$

$$\dot{E}_2^2 + k_0^2 \left( \epsilon_0 + \frac{\alpha E_2^2}{2} - \gamma^2 \right) E_2^2 = 0, \quad (2a)$$

где  $k_0 = \omega/c$ ,  $\gamma = h/k_0$ .

Так как при  $x = 0 E_1 = E_2$  и  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2$ , из (1a) и (2a) следует, что поле на границе  $E_r^2 = 2(\epsilon_1 - \epsilon_0)/\alpha$  целиком определяется параметрами сред. При  $\epsilon_1 < \epsilon_0$ , как и в линейном случае, поверхностная волна существовать не может.

Локализованное решение уравнения (2) представим в виде

$$E_2 = \frac{[2(\gamma^2 - \epsilon_0)/\alpha]^{1/2}}{\text{ch}[k_0 \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_0}(x + x_0)]}, \quad (3)$$

где  $x_0$  определяется из граничных условий при  $x = 0$ :

$$\text{th}[k_0 \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_0} x_0] = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1}}{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_0}}. \quad (4)$$

Величина  $\gamma$ , входящая в (3) и (4), определяется погонной (на единицу длины вдоль  $(y)$ ) мощностью, переносимой волной в  $z$ -направлении:

$$\frac{P}{P_0} = \gamma \left( \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1} + \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_0} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1}} \right), \quad (5)$$

\* Поверхностные ТЕ-волны на плоской границе раздела двух линейных изотропных сред ( $\mu=1$ ) не существуют. Учет нелинейности в поверхностной ТМ-волне, которая, как известно [4], существует в линейном случае, приводит к увеличению граничной частоты спектра и ограничению амплитуды поля [5].

где  $P_0 = c/8\pi k_0 \alpha$ . В оптическом диапазоне, где  $\sigma \approx 10^{-11} \div 10^{-13}$  ед. CGSE,  $P_0 \approx \simeq 10^8 \div 10^{10} \text{ вт} \cdot \text{см}^{-1}$ .

Исследование дисперсионного уравнения (5) показывает, что поверхностные волны существуют лишь при мощности, большей некоторой критической  $P_{kp} \approx P_0$ , так что при  $P > P_{kp}$  возможно распространение двух волн, различающихся амплитудой поля в максимуме и расстоянием  $x_0$  максимума от границы раздела.

2. Аналогично может быть решена и более общая задача о распространении поверхностей ТЕ-волны вдоль границы раздела двух нелинейных сред. Значения поля на границе определяются формулой  $E_r^2 = 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\alpha_1 - \alpha_2)$ , и, следовательно, поверхностная волна существует в двух следующих случаях:

$$1) \quad \epsilon_1 > \epsilon_2, \quad \alpha_1 < \alpha_2; \quad 2) \quad \epsilon_2 > \epsilon_1, \quad \alpha_1 > \alpha_2. \quad (6)$$

Дисперсионное уравнение в первом случае имеет вид

$$\frac{P}{P_0} = \gamma \left[ \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_2} + \beta \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1} \mp (\beta - 1) \left( \gamma^2 - \frac{\beta \epsilon_1 - \epsilon_2}{\beta - 1} \right)^{1/2} \right], \quad (7)$$

где  $P_0 = c/4\pi k_0 \alpha_2$ ,  $\beta = \alpha_2/\alpha_1$ , знак (+) относится к волне с максимумом поля при  $x > 0$ , а (-) — к волне с максимумом поля при  $x < 0$ . Как легко видеть из уравнения (7), поверхностные волны образуются при мощности, большей некой критической  $P_{kp}$ , и при  $P > P_{kp}$  возможно распространение двух волн с той лишь разницей, что максимумы поля расположены при  $x < 0$  (т. е. в нижней среде, обладающей меньшей нелинейностью  $\alpha_1 > \alpha_2$ ), если  $P_{kp} < P < P_0 \frac{\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}}{|\beta - 1|} \sqrt{\beta \epsilon_1 - \epsilon_2} (\sqrt{\beta} + \beta)$ , и при любом знаке  $x$

(т. е. в любой из нелинейных сред), если  $P > P_0 \frac{\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}}{|\beta - 1|} \sqrt{\beta \epsilon_1 - \epsilon_2} (\sqrt{\beta} + \beta)$ . Все сказанное относится и ко второму случаю, если заменить  $x$  на  $-x$ ,  $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$ ,  $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ .

3. К сожалению, столь же подробное исследование поверхностных ТМ-волн провести не удается, поскольку аналитическое решение системы нелинейных уравнений для компонент поля может быть найдено лишь при  $\gamma^2 - \epsilon_0 \ll 1$ , когда структуры волн ТЕ- и ТМ-типов совпадают. Однако из соответствующего дисперсионного уравнения можно все-таки установить факт существования конечной величины поля на границе и, следовательно, критической мощности. Последнее ясно и из рассмотрения распространения волн в кусочно-однородной среде с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_0 + \alpha |E|^2$  и  $\epsilon_0$  ( $E$  — некое характерное поле), такими, что  $\epsilon_0 + \alpha |E|^2 > \gamma^2 > \epsilon_1$  и  $\epsilon_0 < \gamma^2$ .

Таким образом, рассмотренные поверхностные волны, в отличие от волн в линейном случае, характеризуются «жестким» режимом возникновения. Формально при  $\epsilon_0 = \epsilon_1$  может иметь место и «мягкий» режим появления поверхностного поля ( $E_r = 0$ ), но, поскольку  $\alpha$  очень мало ( $\alpha \approx 10^{-16} \text{ см}^2 \cdot \text{в}^{-2}$ ), различие между  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_1$ , например, даже в девятом знаке дает конечное значение для поля на границе  $E_r \approx 10^3 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$ .

Заметим, в заключение, что существование критической мощности, по-видимому, можно проанализировать экспериментально достаточно простым способом, если, например, плавно изогнутую (в масштабе  $\lambda$ ) поверхность раздела сред «подсветить» ножевым лазерным пучком, тогда при  $P > P_{kp}$  часть энергии пучка должна захватываться поверхностным полем и таким образом проникать в область геометрической тени\*.

Авторы признательны М. А. Миллеру и В. И. Таланову за полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
- В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 564 (1964).
- R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лишин, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957.
- Ю. Р. Аланакян, ЖТФ, 37, 817 (1967).
- А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 675 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
30 января 1968 г.

\* На наш взгляд, наиболее удобной для подобного эксперимента является граница раздела кристаллического кварца и нитробензола, диэлектрические проницаемости которых при  $\lambda = 0,589 \text{ мк}$  различаются лишь в пятом знаке.