

СОДЕРЖАНИЕ

Эшмурадов К. Классификация ячеек грубой трехмерной динамической системы без замкнутых траекторий	1619
Барсук Л. О., Белослудцев Н. М., Неймарк Ю. И., Салганская Н. М. Устойчивость неподвижной точки преобразования в критическом случае и некоторые особые бифуркации	1632
Бержицкий В. Н. К исследованию задачи об абсолютной устойчивости методом сечений пространства параметров	1642
Розенфельд А. С. Частотные характеристики устойчивых линейных цепей	1648
Розенфельд А. С. О спектрах незатухающих сигналов	1658
Алексеев А. С., Макарова Т. Б. К исследованию динамики одноконтурных нелинейных импульсных систем с интегрирующим звеном	1664
Клибанова И. М. Взаимная synchronization генераторов с целочисленным отношением частот	1676
Горюнов В. И., Воронкова Н. Н. К теории synchronization квазигармонического осциллятора с нелинейностью вида кубической параболы	1686
Пономаренко В. П., Шалфеев В. Д. Нелинейная система частотно-фазовой автоподстройки с широкой полосой захвата	1694
Сизов В. П. Об эффективности метода гармонического баланса при исследовании стационарных режимов фазовой автоподстройки частоты	1700
Евстигнеев Л. Ф., Королев В. И. К вопросу о регулировании скорости асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором	1710
Елеонский В. М., Оганесянц Л. Г. Определение области существования простых установившихся волн при активной RC-линии передачи	1718
Смирнова В. Н., Тай М. Л. К исследованию установившегося процесса в многомерной экстремальной системе при наличии помех	1723
Глебский Ю. В., Таланов В. А. Некоторые определения для описания систем, изменяющихся во времени	1730
Рябоконь В. П. Эвристическая программа для исследования игры на плоскости	1737
Дорошенко А. Н., Шигин А. Г. О математическом моделировании сложных управляемых систем	1747
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Белых В. Н., Шалфеев В. Д. Частотно-фазовая автоподстройка частоты с нелинейным фильтром в фазовой цепи управления	1756
Белых В. Н. О периодических решениях динамической системы второго порядка с непрерывными, кусочно-гладкими правыми частями	1760
Раковщик Л. С. О кусочно-постоянных управлениях	1762

УДК 517.9

КЛАССИФИКАЦИЯ ЯЧЕЕК ГРУБОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ

K. Эшмурадов

Устанавливается классификация ячеек системы трех дифференциальных уравнений без замкнутых траекторий, удовлетворяющей необходимым условиям грубоści

В настоящей работе, продолжающей исследования [4], устанавливается классификация ячеек системы дифференциальных уравнений без замкнутых траекторий

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z), \quad (1)$$

удовлетворяющей в области G необходимым условиям грубоści Γ сформулированным в [3].

Известно [4], что в состав границы любой ячейки входят один сток, один источник (связная область граничной поверхности без контакта π , если ячейка примыкает к этой поверхности) и конечное число седел*, усов и особых сепаратрис. Вид ячейки в значительной мере характеризуется числами n и k седел и особых сепаратрис, входящих в состав границы ячейки. Ниже для ряда первых значений k и любых n устанавливается число топологически различных типов внутренних ячеек и ячеек, примыкающих к граничной поверхности без контакта π а также их топологические виды.

Если в состав границы ячейки входят n седел, то будем говорить, что данная ячейка принадлежит n -му классу ($n = 0, 1, 2, \dots$). Если в состав границы ячейки входят k особых сепаратрис, то будем говорить, что данная ячейка принадлежит k -й группе ($k = 0, 1, 2, \dots$).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма 1. Если все сепаратрисы неустойчивого (устойчивого) седла являются неособыми и стремятся при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) к одному и тому же стоку (источнику), то рассматриваемое седло, его сепаратрисы и сток (источник) образуют гомеоморфную сфере поверхность S (топологическая структура разбиения поверхности S на траектории приведена на рис. 1а).

Лемма доказывается непосредственным построением гомеоморфизма между сферой и поверхностью S .

Лемма 2. Если все сепаратрисы устойчивого седла неособые и при $t \rightarrow -\infty$ покидают область G , то рассматриваемое седло, содержащееся в области G части его сепаратрис, множество γ точек пересечения указанных сепаратрис с граничной поверхностью без контакта π и об-

* В дальнейшем в силу топологической эквивалентности седел и седло-фокусов [2] будем опускать слова «или седло-фокус».

ласть II поверхности π , ограниченная кривой γ , образуют гомеоморфную сфере поверхность S_0 (рис. 1 б).

Поверхность S_0 получается из поверхности S вырезанием у последнего источника O^- некоторой поверхностью без контакта.

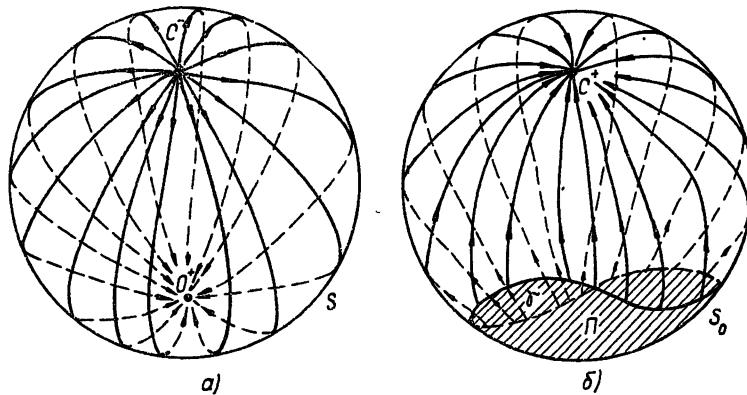


Рис. 1.

Лемма 3. Если неустойчивое (устойчивое) седло C , входящее в состав границы внутренней ячейки B , не имеет особых сепаратрис, то в состав границы ячейки B входят:

- 1) все сепаратрисы седла C , причем эти сепаратрисы при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) стремятся к стоку (источнику) ячейки B ;
- 2) точно один ус седла C , причем этот ус при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) стремится к источнику (стоку) ячейки B .

Действительно, пусть неустойчивое седло C , входящее в состав границы некоторой внутренней ячейки B , не имеет особых сепаратрис, т. е. все сепаратрисы седла C неособые. Тогда из лемм 3—6 работы [4] следует, что в состав границы ячейки B входят, по крайней мере, один ус и все сепаратрисы седла C . Откуда (в силу теоремы 3 работы [4]) следует, что все сепаратрисы седла C при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к стоку O ячейки B . Тогда, согласно лемме I, седло C , его сепаратрисы и сток O образуют гомеоморфную сфере поверхность S . Внутри (вне) S целиком содержится точно один ус седла C , а ячейка B может лежать целиком внутри либо целиком вне S . Откуда следует, что в состав границы ячейки B входит точно один ус седла C , причем этот ус (согласно теореме 3 работы [4]) при $t \rightarrow -\infty$ стремится к источнику ячейки B . Случай устойчивого седла получается заменой t на $-t$.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 4. Если неустойчивое (устойчивое) седло C , входящее в состав границы примыкающей к поверхности π ячейки B , не имеет особых сепаратрис, то в состав границы ячейки B входят:

- 1) все сепаратрисы седла C , причем эти сепаратрисы при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) стремятся к стоку ячейки B (покидают область G);
- 2) точно один ус седла C , причем этот ус при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) покидает область G (стремится к стоку ячейки B).

Пусть дано седло C , сепаратрисную поверхность которого обозначим через S , и пусть Σ — сфера достаточно малого радиуса с центром в седле C . Множество точек $S \cap \Sigma$ обозначим через σ . Заметим, что σ — простая гладкая замкнутая кривая на Σ и существует гомеоморфизм между множеством точек на σ и семейством сепаратрис седла C . Пусть M_1, M_2, \dots, M_n ($1 < n$ — конечное) — пронумерованная в порядке обхода система точек на σ , через которые проходят особые сепаратрисы, через

все остальные точки σ проходят неособые сепаратрисы. Множество неособых сепаратрис, проходящих через внутренние точки дуги, заключенной между точками M_i и M_{i+1} , будем называть простой связкой сепаратрис. Если седло C имеет только одну особую сепаратрису (т. е., если $v = 1$), то множество всех неособых сепаратрис седла C , в отличие от простой связки, будем называть нулевой связкой сепаратрис. Связку будем называть устойчивой (неустойчивой), если соответствующее седло C устойчивое (неустойчивое); связку будем называть внутренней (примыкающей к поверхности π или просто примыкающей), если все сепаратрисы данной связки целиком содержатся в области G (при $t \rightarrow -\infty$ покидают область G).

В силу предположений, сделанных в [3] относительно граничной поверхности без контакта π , всякая неустойчивая связка является внутренней, а устойчивая связка может быть как внутренней, так и примыкающей.

Все сепаратрисы любой внутренней связки имеют одни и те же ω - и α -пределные множества. Действительно, все сепаратрисы, принадлежащие одной и той же устойчивой внутренней связке Δ , являются сепаратрисами одного и того же устойчивого седла C , при $t \rightarrow -\infty$ не могут покидать область G (так как связка Δ внутренняя) и не могут стремиться к седлу (так как все они неособые). Далее, если хотя бы одна сепаратриса связки Δ входит в состав границы некоторой ячейки B , то из леммы 3 работы [4] следует, что все сепаратрисы связки Δ входят в состав границы ячейки B . Тогда (согласно теореме 3 работы [4]) все сепаратрисы связки Δ при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к источнику ячейки B . Аналогичное утверждение справедливо и в отношении неустойчивой внутренней связки.

Все сепаратрисы любой устойчивой примыкающей связки Δ имеют одно и то же ω -пределное множество и при $t \rightarrow -\infty$ покидают область G . Это следует из определения устойчивой примыкающей связки и теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий.

Рассмотрим, какие особые траектории входят в состав границ связок. В состав границы внутренней нулевой устойчивой связки входят: устойчивое седло C^+ , неустойчивое седло C^- , источник O^- , одна особая сепаратриса γ , идущая из C^- в C^+ , и оба уса седла C^- которые при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к источнику O^- (рис. 2б).

Обозначим через γ_i особую сепаратрису, проходящую через точку M_i дуги σ . При рассмотрении границ простой устойчивой связки возможны следующие два случая: 1) особые сепаратрисы γ_i и γ_{i+1} при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к одному и тому же неустойчивому седлу C^- ; 2) особые сепаратрисы γ_i и γ_{i+1} при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к двум различным неустойчивым седлам C_1^- и C_2^- . В первом случае в состав границы простой устойчивой внутренней связки входят устойчивое седло C^+ , неустойчивое седло C^- , источник O^- , две особые сепаратрисы γ_i и γ_{i+1} , идущие из C^- в C^+ , один ус седла C^- , стремящийся при $t \rightarrow -\infty$ к источнику O^- . Во втором случае в состав границы, простой внутренней устойчивой связки входят устойчивое седло C^+ , неустойчивые седла C_1^- и C_2^- , источник O^- , две особые сепаратрисы γ_i и γ_{i+1} , идущие из C^+ соответственно в C_1^- и C_2^- , и по одному усу каждого из седел C_1^- и C_2^- , стремящихся при $t \rightarrow -\infty$ к источнику O^- (рис. 2д, ж).

Всякая неустойчивая связка получается из соответствующей устойчивой связки заменой t на $-t$, а всякая примыкающая связка полу-

чается из соответствующей внутренней связки вырезанием у последней источника некоторой простой гладкой дугой без контакта l (рис. 2в, е, и).

Простую (нулевую) связку вместе с границей будем называть простым (нулевым) комплексом; комплекс будем называть устойчивым

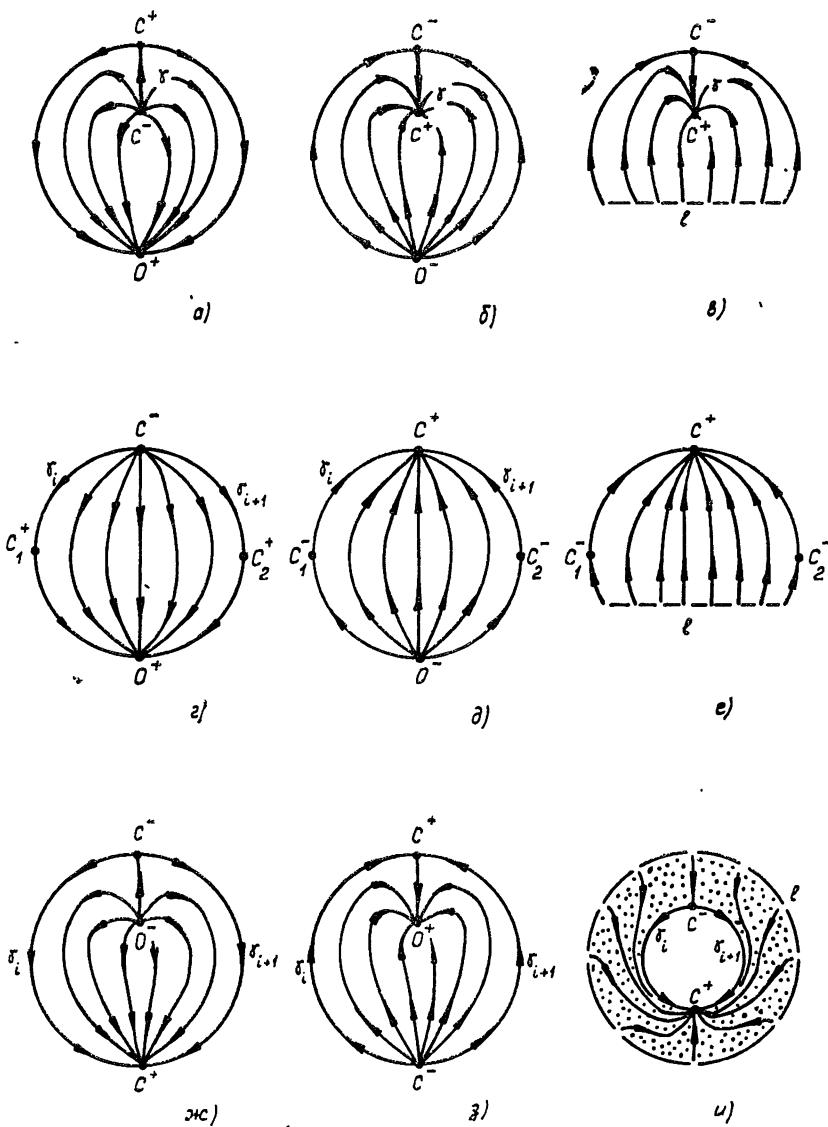


Рис. 2.

(неустойчивым), если соответствующая связка устойчивая (неустойчивая), и, наконец, комплекс будем называть внутренним (примыкающим), если соответствующая связка внутренняя (примыкающая). Простой комплекс будем называть простым комплексом первого рода, если входящие в состав границы соответствующей связки особые сепаратрисы имеют общие ω - и α -предельные точки. Простой комплекс будем называть простым комплексом второго рода, если входящие в состав

границы соответствующей связки особые сепаратрисы имеют общую $\omega(\alpha)$ -предельную точку и различные $\alpha(\omega)$ -предельные точки.

На рис. 2 приведены возможные типы комплексов: а) — нулевой внутренний неустойчивый, б) — нулевой внутренний устойчивый, в) — нулевой примыкающий устойчивый, г) — простой внутренний неустойчивый второго рода, д) — простой внутренний устойчивый второго рода, е) — простой примыкающий устойчивый второго рода, ж) — простой внутренний устойчивый первого рода, з) — простой внутренний неустойчивый первого рода, и) — простой примыкающий устойчивый первого рода.

Простой устойчивый примыкающий комплекс первого рода гомеоморфен кольцу, а все остальные комплексы гомеоморфны кругу. Комплексы на сепаратрисных поверхностях могут быть рассмотрены как двухмерные ячейки, приведенные в работе [1]. При рассмотрении ячеек используется следующее основное правило склеивания (или пересечения) комплексов: комплексы могут быть склеены (могут пересекаться) только по (одной или нескольким) одноименным траекториям и полутраекториям.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЯЧЕЕК

1) Ячейки нулевой группы. Не существует внутренних ячеек нулевого класса нулевой группы. При любом $n \geq 1$ в состав границы внутренней ячейки B n -го класса нулевой группы входят n седел C_1, C_2, \dots, C_n , все сепаратрисы каждого из которых являются неособыми и, в силу леммы 3, при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) стремятся к стоку (источнику) ячейки B . В силу этого каждое седло C_i ($i = 1, 2, \dots, n$), его сепаратрисы и сток (или источник), согласно лемме I, образуют гомеоморфную сфере поверхность S_i .

Ячейка B по определению связная и, следовательно, может лежать либо целиком внутри, либо целиком вне каждой из сфер S_1, S_2, \dots, S_n . Для того, чтобы сферы S_1, S_2, \dots, S_n выделяли связную область E (т. е. ячейку B) и все они входили в состав ее границы, необходимо и достаточно следующее их взаимное расположение: одна из этих сфер (пусть S_1) содержит внутри себя все остальные, ни одна из которых не содержит ни в одной другой, кроме S_1 . В любом другом варианте взаимного расположения все эти сферы не могут одновременно входить в состав границы одной и той же связной области B . В справедливости этих утверждений нетрудно убедиться непосредственным геометрическим построением.

Итак, пусть S_1 содержит внутри себя S_2, S_3, \dots, S_n и ни одна из последних не содержит ни в одной другой, кроме S_1 . Область, ограниченную сферой S_1 , обозначим через E_1 и $E_1 - \sum_{j=2}^n \bar{E}_j$ (где $\bar{E}_j = E_j \cup S_j$) обозначим через E . В силу приведенного выше построения ячейки B лежит целиком в E . Рассмотрим общий случай. Пусть m седел из n входящих в состав границы ячейки B неустойчивы и $n-m$ седел устойчивы. Неустойчивые (устойчивые) седла, входящие в границу ячейки B , обозначим через $C_1^-, C_2^-, \dots, C_m^-$ ($C_{m+1}^+, C_{m+2}^+, \dots, C_n^+$).

В состав границы ячейки B непременно выходят сток O^+ и источник O^- (в силу пункта 4 теоремы 2 работы [4]), m неустойчивых седел C_1^-, \dots, C_m^- и $n-m$ устойчивых седел C_{m+1}^+, \dots, C_n^+ (в силу сделанных предположений), m устойчивых и $n-m$ неустойчивых усов* (в силу леммы 3) и все сепаратрисы каждого из указанных седел (в силу леммы 3). В рассматриваемом варианте никакие другие особые элементы,

* Заузление и сложные сплетения усов внутри ячеек невозможны.

кроме перечисленных, в состав границы ячейки входит не могут. Действительно, так как ячейка B принадлежит n -му классу, то в состав ее границы входят точно n седел. В состав ее границы не могут входить усы или сепаратрисы, кроме указанных, так как в противном случае из лемм 4—6 работы [4] следует, что в границу входит, по крайней мере, еще одно седло, что противоречит нашему предположению о том, что рассматриваемая ячейка принадлежит n -му классу. В силу пункта 4 теоремы 2 работы [4], граница содержит точно один сток и один источник. Все содержащиеся в E траектории, кроме указанных выше усов, являются обычными и идут из источника O^- в сток O^+ , в силу пункта 2 теоремы 2 работы [4]. Полученную ячейку обозначим через $A_{m,n-m}$.

Таким образом, при фиксированном m внутренняя ячейка n -го класса нулевой группы осуществляется одним топологическим типом. Изменяя m от 1 до n , получаем n топологически различных типов внутренних ячеек n -го класса нулевой группы $A_{1,n-1}; \dots; A_{m,n-m}; \dots; A_{n,0}$. Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. При любом n существует n топологически различных типов внутренних ячеек n -го класса нулевой группы $A_{m,n-m}$ ($m = 1, 2, \dots, n$). В состав границы ячейки $A_{m,n-m}$ входят m неустойчивых седел, $n-m$ устойчивых седел, m устойчивых усов, $n-m$ неустойчивых усов и все сепаратрисы каждого седла, входящего в состав границы данной ячейки (вид соответствующей ячейки схематически изображен на рис. 3 а).

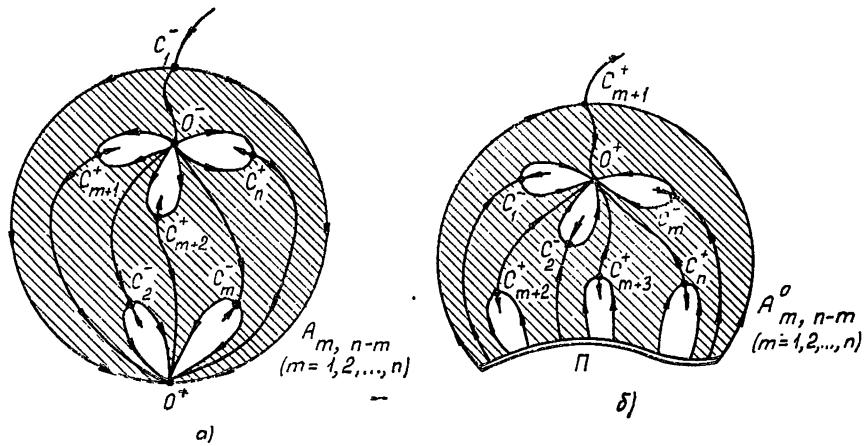


Рис. 3.

Вырезая источник (сток при замене t на $-t$) у ячейки $A_{m,n-m}$ соответствующей поверхностью без контакта μ (что возможно в силу теоремы 2 работы [4] и лемм 2 и 4), получаем следующую теорему.

Теорема 1а. При любом n существуют $n+1$ топологически различных типов, примыкающих к поверхности π ячеек n -го класса нулевой группы $A_{m,n-m}^0$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$). В состав границы ячейки $A_{m,n-m}^0$ входит, кроме элементов, входящих в состав границы ячейки $A_{m,n-m}$, n -связная область Π граничной поверхности без контакта π (рис. 3б).

Покажем, что область Π является n -связной. Действительно, поверхность μ пересекают сепаратрисные поверхности $n-m$ устойчивых седел и выделяют $(n-m)$ -связную область λ на μ . Далее, область λ пересекает точно один ус каждого из m неустойчивых седел. Откуда следует, что область Π на π является n -связной.

В тривиальном случае $n = 0$ существует единственная примыкающая к граничной поверхности без контакта π ячейка нулевой группы нулевого класса, которая совпадает с областью G . Граница этой ячейки состоит из стока и поверхности π .

2) Ячейки первой группы. Не существует внутренних ячеек первой группы нулевого и первого класса. Действительно, если в состав границы внутренней ячейки входит одна особая сепаратриса γ , то в состав границы должны входить, в силу леммы 6 работы [4], оба седла, для которых γ является сепаратрисой. Не существует также и внутренних ячеек первой группы второго класса. Действительно, в состав границы внутренней ячейки первой группы второго класса входят сток O^+ , источник O^- , устойчивое седло C^+ , неустойчивое седло C^- , одна особая сепаратриса γ , идущая из C^- в C^+ , оба уса каждого из седел C^- и C^+ , стремящиеся при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) к стоку O^+ (источнику O^-), и все неособые сепаратрисы каждого из седел C^- и C^+ , которые образуют внутреннюю устойчивую (неустойчивую) нулевую связку. В состав границы внутренней ячейки первой группы второго класса не могут входить никакие отличные от перечисленных особые элементы. Следовательно, особые траектории, входящие в состав границы внутренней ячейки второго класса второй группы, образуют один внутренний устойчивый нулевой комплекс и один внутренний неустойчивый нулевой комплекс, причем эти комплексы пересекаются по дуге, являющейся замыканием особой сепаратрисы γ , и, таким образом, не выделяют связную область, т. е. внутреннюю ячейку (рис. 4а). Вложив полученные выше (рис. 4а) пересекающиеся комплексы во внутрь ячейки

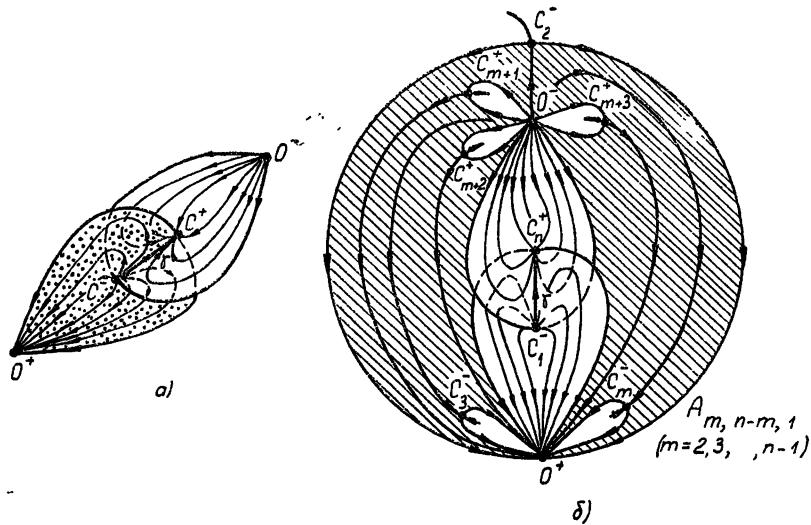


Рис. 4.

$A_{m-1, n-m-1}$ (при вложении требуется совпадение точек O^+ и O^- ячейки и пересекающихся комплексов), получим теорему.

Теорема 2. При любом $n \geq 3$ существуют $n-2$ топологически различных типов внутренних ячеек n -го класса первой группы $A_{m, n-m, 1}$ ($m = 2, 3, \dots, n-1$). В состав границы ячейки $A_{m, n-m, 1}$ входят m неустойчивых седел, $n-m$ устойчивых седел, одна особая сепаратриса, $m+1$ устойчивых усов, $n-m+1$ неустойчивых усов и все сепаратрисы каждого седла, входящего в состав границы данной ячейки (рис. 4б).

Не существует примыкающих к поверхности π ячеек первой группы нулевого и первого класса. Существует единственная примыкающая к поверхности π ячейка второго класса первой группы; в состав ее границы входят один внутренний неустойчивый нулевой комплекс и один примыкающий устойчивый нулевой комплекс, которые склеены по дуге, являющейся замыканием особой сепаратрисы γ (рис. 5а), и вся поверхность π . Пересекающиеся комплексы, приведенные на рис. 5а, получаются из пересекающихся комплексов, приведенных на рис. 4а, вырезанием у последних источника некоторой дугой без контакта l .

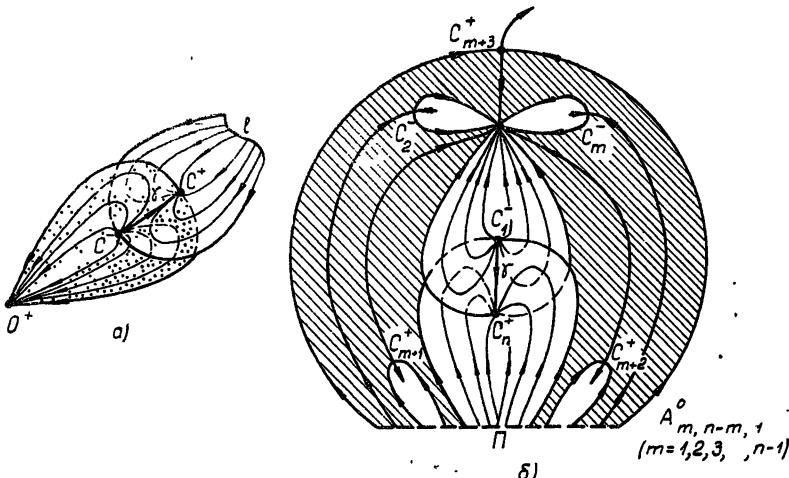


Рис. 5.

Вырезая источник у ячейки $A_{m,n-m,1}$ соответствующей поверхностью без контакта μ (или что то же самое, вложив приведенные на рис. 5а пересекающие комплексы во внутрь ячейки $A_{m-1,n-m-1}^0$), получим теорему.

Теорема 2а. При любом $n \geq 2$ существуют $n-1$ топологически различных типов, примыкающих к поверхности π ячеек n -го класса первой группы $A_{m,n-m,1}^0$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$). В состав границы ячейки $A_{m,n-m,1}^0$ входит, кроме элементов, входящих в состав границы ячейки $A_{m,n-m,1}$, ($n-1$)-связная область Π граничной поверхности без контакта π (рис. 5б).

3) Ячейки второй группы. Не существует внутренних ячеек второй группы нулевого и первого класса, так как в состав границы внутренней ячейки второй группы, в силу леммы 6 работы [4], должны входить, по крайней мере, два седла. В состав границы ячейки второй группы входят две особые сепаратрисы γ_1 и γ_2 . Если особые сепаратрисы γ_1 и γ_2 , входящие в состав границы ячейки любого класса второй группы, идут из одного и того же седла в одно и то же седло, то данную ячейку будем называть ячейкой первого рода, если из одного и того же седла в различные седла — ячейкой второго рода и, наконец, если из различных седел в различные седла — ячейкой третьего рода.

В состав границы внутренней ячейки второго класса второй группы первого рода входят устойчивое седло C^+ , неустойчивое седло C^- , две особые сепаратрисы γ_1 и γ_2 , идущие из C^- в C^+ , сток O^+ , источник O^- , по одному усов каждого из седел C^- и C^+ , по одной внутренней простой, соответственно неустойчивой и устойчивой связки неособых се-

паратрис седел C^- и C^+ . Перечисленные выше особые траектории образуют один простой неустойчивый внутренний комплекс первого рода и один простой устойчивый внутренний комплекс первого рода, которые склеены по гомеоморфной окружности кривой, составленной из γ_1 , γ_2 , C^- и C^+ , и составляют гомеоморфную сфере поверхность S (рис. 6а). Приведенное выше построение осуществляется единственным способом; в состав границы внутренней ячейки второго класса

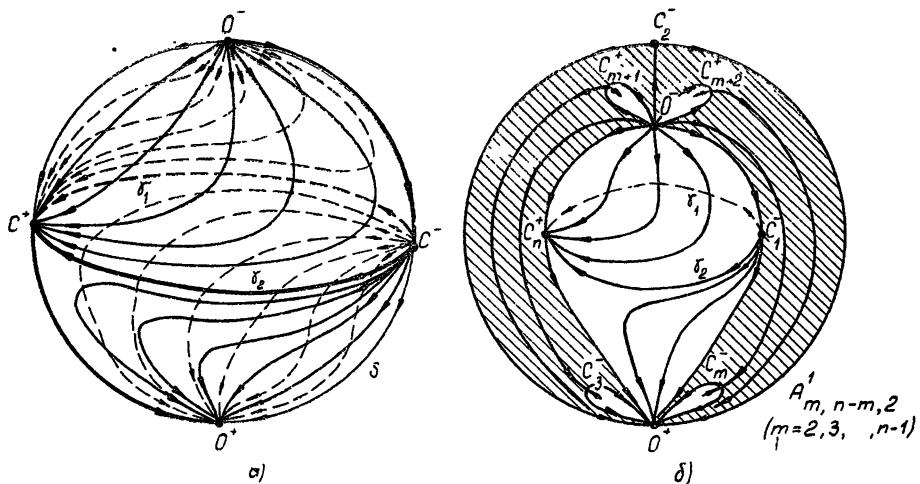


Рис. 6.

второй группы первого рода не могут входить особые элементы, отличные от вышеперечисленных. Следовательно, существует единственный топологический тип внутренних ячеек первого рода второго класса второй группы, граница каждой из которых состоит из поверхности S , полученной выше (рис. 6а). Вложив S во внутрь ячейки $A_{m-1, n-m-1}$, получим теорему.

Теорема 3. При любом $n \geq 3$ существуют $n - 2$ топологически различных типов внутренних ячеек n -го класса второй группы первого рода $A_{m, n-m, 2}$ ($m = 2, 3, \dots, n - 1$). В состав границы ячейки $A_{m, n-m, 2}$ входят m неустойчивых седел, $n - m$ устойчивых седел, две особые сепаратрисы, идущие из одного и того же седла в одно и то же седло, m устойчивых усов, $n - m$ неустойчивых усов, все сепаратрисы каждого из $m - 1$ неустойчивых и $n - m - 1$ устойчивых седел, входящих в состав границы данной ячейки, и часть неособых сепаратрис, одного неустойчивого и одного устойчивого седел, входящих в состав границы данной ячейки (рис. 6б).

Не существует внутренних ячеек второго класса второй группы второго рода, так как в состав границы внутренней ячейки второй группы второго рода, в силу леммы 6 работы [4] и определения ячейки второй группы второго рода, входят по крайней мере три седла. В состав границы внутренней ячейки третьего класса второй группы второго рода входят три седла, две особые сепаратрисы γ_1 и γ_2 , идущие из различных неустойчивых седел C^- и C^+ в одно и то же устойчивое седло C^+ , сток O^+ , источник O^- , два уса седла C^+ и нулевые внутренние неустойчивые связки сепаратрис седел C^- и C^+ . Перечисленные выше особые траектории образуют два неустойчивых нулевых внутренних комплекса, которые склеены по кривой, составленной из двух усов седла C^+ , седла C^+ и стока O^+ , и составляют гомеоморфную сфере

поверхность S_0 . Седло C^+ и его простая устойчивая внутренняя связка сепаратрис, седла C_1^- и C_2^- , источник O^- , по одному усов каждого из седел C_1^- и C_2^- , γ_1 и γ_2 образуют простой устойчивый внутренний комплекс, который склеен с поверхностью S_0 по дуге, составленной из γ_1 , γ_2 , C_1^- , C_2^- и C^+ . Поверхность составленной из выше-приведенных трех комплексов обозначим через S (рис. 7а). Приведенное выше построение осуществляется единственным способом и в состав границы внутренней ячейки третьего класса второй группы второго

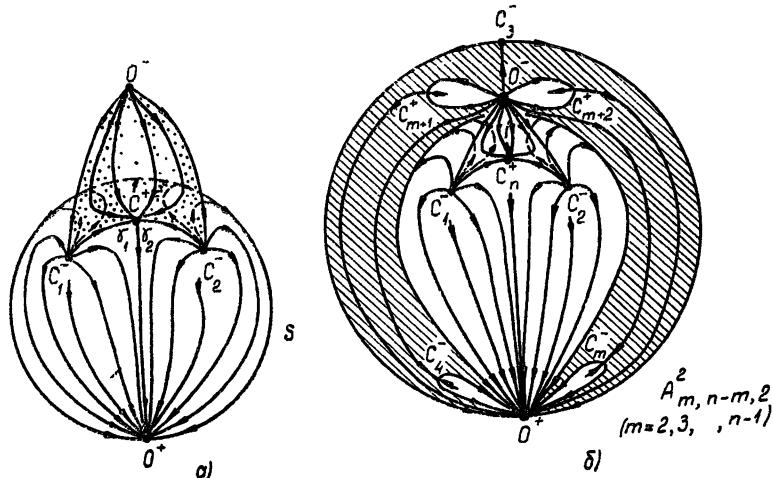


Рис. 7.

го рода не могут входить особые элементы, отличные от вышеперечисленных. Следовательно, при $n = 3$ существует единственный топологический тип внутренних ячеек третьего класса второй группы второго рода, граница каждой из которых состоит из (вывернутой наизнанку) поверхности S , полученной выше (рис. 7а). Вложив полученную выше (рис. 7а) поверхность S во внутрь ячейки $A_{m-2, n-m-1}$, получим следующую теорему.

Теорема 4. При любом $n \geq 3$ существуют $n - 2$ топологически различных типов внутренних ячеек n -го класса второй группы второго рода $A_{m, n-m, 2}^2$ ($m = 2, 3, \dots, n - 1$). В состав границы ячейки $A_{m, n-m, 2}^2$ входят m неустойчивых седел, $n - m$ устойчивых седел, две особые сепаратрисы, идущие из различных седел в одно и то же седло, m устойчивых усов, $n - m + 1$ неустойчивых усов, все неособые сепаратрисы каждого из m неустойчивых и $n - m - 1$ устойчивых седел, входящих в состав границы данной ячейки, и часть неособых сепаратрис одного устойчивого седла, входящего в состав границы данной ячейки (рис. 7б).

Не существует внутренних ячеек второго и третьего класса второй группы третьего рода, так как (в силу леммы 6 работы [4] и определения ячейки второй группы третьего рода) в состав границы внутренней ячейки второй группы третьего рода должны входить, по крайней мере, четыре седла. Не существует также внутренних ячеек четвертого класса второй группы третьего рода. Действительно, в этом случае в состав границы рассматриваемой ячейки входят сток O_+^+ , источник O_-^- , два неустойчивых C_1^- и C_2^- и два устойчивых C_3^+ и C_4^+ седла, две особые сепаратрисы γ_1 и γ_2 , идущие соответственно из C_1^- и C_2^- .

в C_3^+ и C_4^+ , внутренняя нулевая связка сепаратрис и оба уса каждого из седел C_1^- , C_2^- , C_3^+ и C_4^+ . Указанные особые траектории образуют два устойчивых и два неустойчивых нулевых внутренних комплекса, которые попарно пересекаются соответственно по дугам, составленным из C_1^- , γ_1 , C_3^+ и C_2^- , γ_2 , C_4^+ . В рассматриваемом случае в состав границы ячейки не могут входить особые траектории, отличные от вышеупомянутых. Следовательно, особые траектории, входящие в состав границы внутренней ячейки четвертого класса второй группы третьего рода, не могут выделить связную область, т. е. внутреннюю ячейку (рис. 8а). Вложив полученные выше четыре попарно пересекающиеся устойчивые и неустойчивые нулевые внутренние комплексы во внутрь ячейки $A_{m-2, n-m-2}$, получим теорему.

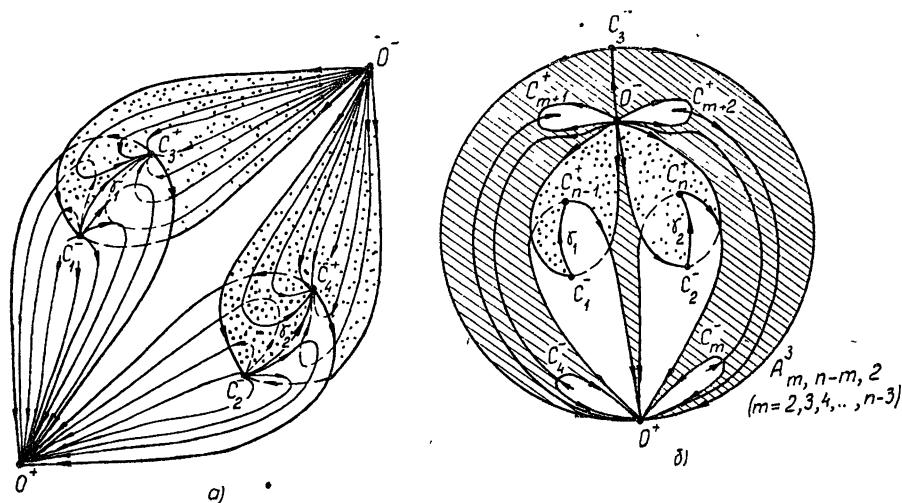


Рис. 8.

Теорема 5. При любом $n \geq 5$ существуют $n - 4$ топологически различных типов внутренних ячеек n -го класса второй группы третьего рода $A_{m, n-m, 2}^3$ ($m = 2, 3, \dots, n - 3$). В состав границы ячейки $A_{m, n-m, 2}^3$ входят m неустойчивых седел, $n - m$ устойчивых седел, две особые сепаратрисы, идущие из различных седел в различные седла, $m + 2$ устойчивых усов, $n - m + 2$ неустойчивых усов и все неособые сепаратрисы каждого устойчивого (неустойчивого) седла, входящего в состав границы данной ячейки (рис. 8б).

Не существует примыкающих к поверхности π ячеек второй группы нулевого и первого класса, второй группы второго класса второго рода, а также второго и третьего класса второй группы третьего рода. В справедливости этих утверждений можно убедиться, как и выше, обращаясь к лемме 6 работы [4] и определениям ячеек второй группы соответствующего рода. Остальные типы примыкающих к поверхности π ячеек второй группы получаются вырезанием источника (стока при замене t на $-t$) у соответствующих внутренних ячеек некоторой гладкой поверхностью без контакта. Имеют место теоремы.

Теорема 3а. При любом $n \geq 2$ существуют $n - 1$ топологически различных типов, примыкающих к поверхности π ячеек n -го класса второй группы первого рода; в состав границы каждой из этих ячеек входит, кроме элементов, входящих в состав границы ячейки $A'_{m, n-m, 2}$, $(n - 1)$ -связная область Π поверхности π (рис. 9а).

Теорема 4а. При любом $n \geq 3$ существуют $2(n-2)$ топологически различных типов, примыкающих к поверхности π ячеек n -го класса второй группы второго рода; в состав границы каждой из этих ячеек входит, кроме элементов, входящих в состав границы ячейки $A_{m,n-m,2}^2$, $(n-2)$ -связная область Π поверхности π (рис. 9б, 10а).

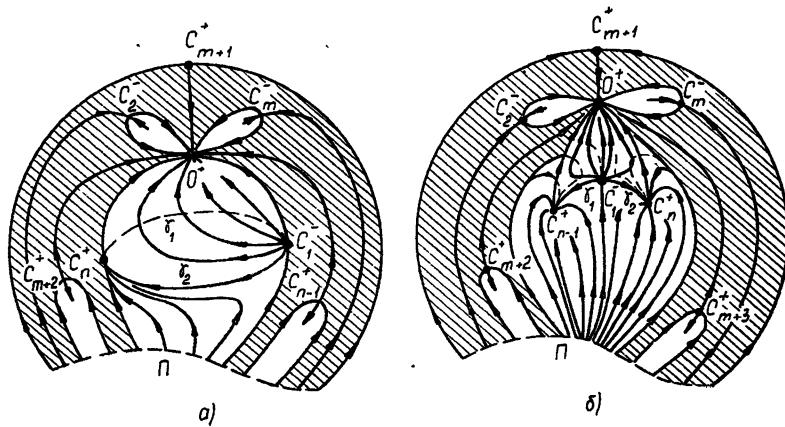


Рис. 9.

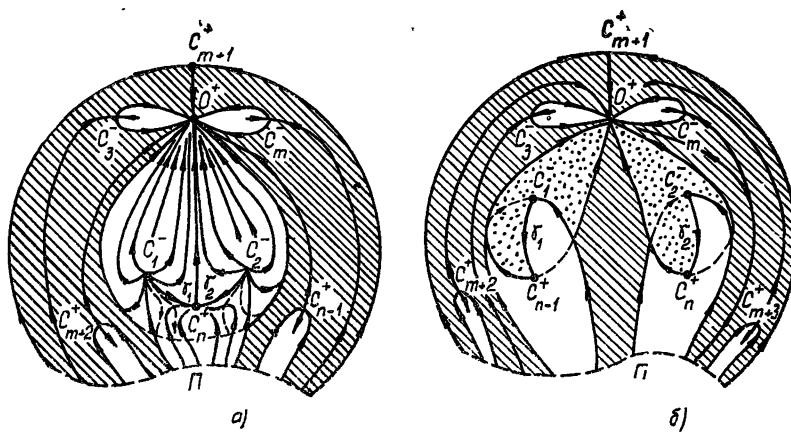


Рис. 10.

Теорема 5а. При любом $n \geq 4$ существуют $n-3$ топологически различных типов, примыкающих к поверхности π ячеек n -го класса второй группы третьего рода; в состав границы каждой из этих ячеек входит, кроме элементов, входящих в состав границы ячейки $A_{m,n-m,2}^3$, $(n-2)$ -связная область Π поверхности π (рис. 10б).

Число топологически различных типов ячеек n -го класса третьей, четвертой и так далее групп, а также их топологические виды устанавливаются аналогично.

Выражаю глубокую благодарность Ю. И. Неймарку за постановку задачи и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. Р. М. Минц, ДАН СССР, **124**, № 6, 1213 (1959)
3. К. Эшмурадов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 3, 333 (1968).
4. К. Эшмурадов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 7, 997 (1968).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 января 1968 г.

CLASSIFICATION OF CELLS OF STRUCTURALLY STABLE THREE
DIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM WITHOUT CLOSED TRAJECTORIES

K. Eshmooradov

The classification of cells of the three differential equations system without closed trajectories, meeting the necessary conditions of structural stability, is stated.

УДК 531.391

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ И НЕКОТОРЫЕ ОСОБЫЕ БИФУРКАЦИИ*

Л. О. Барсук, Н. М. Белослудцев, Ю. И. Неймарк, Н. М. Салганская

Устанавливаются условия сводимости исследований устойчивости и бифуркаций неподвижной точки отображения к таким же задачам для состояния равновесия системы дифференциальных уравнений. Кроме того, рассмотрены некоторые особые бифуркации, при которых такое сведение невозможно.

Как известно [2], область существования и устойчивости неподвижной точки преобразования ограничивается поверхностями N_{+1} , N_- и N_φ , соответствующими появлению у характеристического уравнения корня, равного единице, минус единице и двух комплексно-сопряженных корней $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$ ($0 < \varphi < \pi$) соответственно.

В общих предположениях при пересечении поверхности N_{+1} или N_{-1} происходит соответственно исчезновение неподвижной точки путем слияния ее с другой неустойчивой неподвижной точкой или смены ее устойчивости, сопровождающаяся рождением из нее или слиянием с ней двух двухкратных неподвижных точек. При пересечении граничной поверхности N_φ происходит смена устойчивости, сопровождающаяся рождением из неподвижной точки или слиянием с ней инвариантной замкнутой кривой. При этом будет ли иметь место рождение или слияние с неподвижной точкой двухкратных неподвижных точек или замкнутой инвариантной кривой зависит от того, устойчива или неустойчива неподвижная точка в критическом случае, соответствующем моменту пересечения граничной поверхности N_+ или N_φ [2, 3]. В работе [4] Сакера было обращено внимание на особенность бифуркаций в случаях, когда $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = \pi/2$.

В настоящей работе предлагается новый подход к изучению описанного круга вопросов. Он основывается на сведении задачи об исследовании устойчивости и бифуркаций неподвижной точки точечного преобразования к такой же задаче для состояния равновесия некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений*. В основе этого сведения лежит следующая теорема.

Теорема 1. Точечное отображение T вида

* Настоящая работа представляет собою соответствующую переработку основных результатов дипломных работ 1965—1966 гг Л. О. Барсука, Н. М. Белослудцева и Н. М. Салганской, выполненных под руководством Ю. И. Неймарка. Бифуркация неподвижной точки в случае $\varphi = 2\pi/3$ была рассмотрена ранее (1960) в дипломной работе А. М. Преображенской.

* Следует отметить, что к рассмотрению других критических случаев этот подход ранее использовался в работах [5, 6].

$$\begin{aligned}
 x_i = e^{z_i} x_i + \sum_{j, k=1}^n a_{ijk}^{(2)} x_j x_k + \sum_{l, k, s=1}^n a_{ljk}^{(3)} x_j x_k x_s + \dots + \\
 + \sum_{j, k, \dots, l=1}^n a_{ijk \dots l}^{(m)} x_j x_k \dots x_l + \dots \\
 (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{1}$$

может быть представлено, с точностью до членов порядка малости m , как отображение T_τ , соответствующее сдвигу фазовых точек на время τ вдоль фазовых траекторий некоторой системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{j, k=1}^n b_{ijk}^{(2)} x_j x_k + \sum_{l, k, s=1}^n b_{ljk}^{(3)} x_j x_k x_s + \dots + \\
 + \sum_{j, k, \dots, l=1}^n b_{ijk \dots l}^{(m)} x_j x_k \dots x_l + \dots \\
 (i = 1, 2, \dots, n),
 \end{aligned} \tag{2}$$

если только невозможно выполнение равенства

$$z_{j_1} + z_{j_2} + \dots + z_{j_p} - z_{j_{p+1}} = 2\pi r i \quad (r \neq 0), \tag{3}$$

где r — целое, $i = \sqrt{-1}$, ни для одного набора не более, чем $m+1$ целых чисел j_1, j_2, \dots, j_{p+1} ($1 \leq j_s < n, p \leq m$).

1. Докажем сформулированную выше теорему 1. Интегрируя методом последовательных приближений систему уравнений (2), найдем, что [7]

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_i = e^{\lambda_i \tau} x_i + \sum_{j, k=1}^n b_{ijk}^{(2)} \frac{\exp[(\lambda_j + \lambda_k) \tau] - \exp(\lambda_i \tau)}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} x_j x_k + \\
 + \sum_{j, k, s=1}^n \left\{ b_{ljk}^{(3)} \frac{\exp[(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s) \tau] - \exp(\lambda_i \tau)}{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s - \lambda_i} + \sum_{t=1}^n \frac{(b_{ijk}^{(2)} + b_{tkj}^{(2)}) b_{k+s}^{(2)}}{\lambda_t + \lambda_s - \lambda_k} \times \right. \\
 \times \left[\frac{\exp[(\lambda_t + \lambda_s + \lambda_j) \tau] - \exp(\lambda_i \tau)}{\lambda_t + \lambda_s + \lambda_j - \lambda_i} - \frac{\exp[(\lambda_k + \lambda_j) \tau] - \exp(\lambda_i \tau)}{\lambda_k + \lambda_j - \lambda_i} \right] \times \\
 \times x_j x_k x_s + \dots + \sum_{j, k, \dots, l=1}^n \left\{ b_{ijk \dots l}^{(m)} \frac{\exp[(\lambda_j + \dots + \lambda_l) \tau] - \exp(\lambda_i \tau)}{\lambda_j + \dots + \lambda_l - \lambda_i} + \right. \\
 \left. + F_{ijk \dots l}^{(m)}(b^{(2)}, b^{(3)}, \dots, b^{(m-1)}) \right\} x_j \dots x_l,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где через x_i обозначены начальные значения переменных, а через \bar{x}_i их значения спустя время τ , и через $F_{ijk \dots l}^{(m)}(b^{(2)}, b^{(3)}, \dots, b^{(m-1)})$ обозначено выражение, зависящее от $b_{ijk}^{(2)}, b_{ljk}^{(3)}$, причем нижние индексы опущены. Сравнивая (1) и (4), приходим к выводу, что для возможности указанного в теореме представления отображения T необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$\tau \lambda_i = z_i,$$

$$\begin{aligned}
 b_{ijk}^{(2)} &= \frac{z_j + z_k - z_i}{(e^{z_j+z_k-z_i})\tau} a_{ijk}^{(2)}, \\
 b_{ijks}^{(3)} &= \frac{z_j + z_k + z_s - z_i}{(e^{z_j+z_k+z_s-z_i})\tau} [a_{ijks}^{(3)} - F_{ijks}^{(3)}(b^{(2)})], \\
 &\dots \\
 b_{ijk\dots l}^{(m)} &= \frac{z_j + z_k + \dots + z_l - z_i}{(e^{z_j+\dots+z_l}-e^{z_i})\tau} [a_{ijk\dots l}^{(m)} - F_{ijk\dots l}^{(m)}(b^{(2)}, \dots, b^{(m-1)})]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

С помощью этих рекуррентных соотношений, если только выполнены условия теоремы 1, согласно которым не имеют места равенства (3), могут быть найдены требуемые величины $\tau > 0$, λ_i и коэффициенты $b_{ijk}^{(2)}, \dots, b_{ijk\dots l}^{(m)}$ дифференциального уравнения (2). Что и доказывает теорему 1.

2. Ради простоты ограничимся двухмерным случаем. Это ограничение по существу не на размерность точечного отображения, а на число корней с равным единице модулем [8]. Предполагается, что в критическом случае имеется только два корня $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$ ($0 < \varphi < \pi$) с равными единице модулями. Если φ несоизмеримо с π , то соотношения (3) не могут выполняться, следовательно, в этом случае возможно указанное представление точечного отображения T с точностью до величин любого порядка малости. Если же

$$\varphi = 2\pi r/(m+1), \quad (6)$$

где целые числа r и $m+1$ несократимые, такое представление возможно самое большее с точностью до членов, порядка m (m не включается).

Как известно [9], в рассматриваемом критическом случае устойчивость состояния равновесия систем дифференциальных уравнений (2) определяется знаком первой отличной от нуля ляпуновской величины. Если устойчивость или неустойчивость состояния равновесия определяется членами некоторого порядка, который, естественно, меньше m , то тем самым решается и вопрос об устойчивости в критическом случае неподвижной точки соответствующего точечного отображения. Действительно, как известно [9], в этом случае можно построить положительно-определенный многочлен V , производная от которого в силу дифференциальных уравнений представляет также многочлен, наименьшие степени которого образуют знакоопределенную функцию S порядка $2p$, знак которой определяется знаком соответствующей ляпуновской величины. Ясно, что функция V такова, что

$$V(Tx) - V(x) = V(Tx) - V(x) + \dots = \int_0^x \dot{V} dt + \dots = \int_0^x S dt + \dots, \quad (7)$$

где многоточия обозначают члены порядка более высокого, чем $2p$. Тем самым из устойчивости или неустойчивости состояния равновесия вспомогательных дифференциальных уравнений следуют соответственно устойчивости или неустойчивости неподвижной точки отображения.

В общем случае, когда первая ляпуновская величина отлична от нуля, устойчивость состояния равновесия определяется членами третьего порядка. Поэтому вопрос об устойчивости неподвижной точки в случае, когда он определяется членами третьего порядка, не может быть решен согласно предыдущему лишь при $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = \pi/2$, что соответст-

вует $m = 2$ и $m = 3$. (В первом случае невозможно уже представление квадратных членов, а во втором—третьей степени). Напротив, при всех остальных значениях $0 < \varphi < \pi$ соответствующее дифференциальное уравнение всегда представляет точечное отображение по крайней мере до членов четвертого порядка.

Итогом проведенного рассуждения является следующая теорема.

Теорема 2. Если состояние равновесия вспомогательного дифференциального уравнения (2) устойчиво или неустойчиво, то соответственно устойчива или неустойчива неподвижная точка отображения (1).

3. Теорема 1 позволяет свести вопрос о рождении инвариантной замкнутой кривой от неподвижной точки в момент смены ее устойчивости к изучению рождения периодического движения от состояния равновесия типа фокус в момент смены его устойчивости.

Действительно, допустим, что точечное отображение T представимо в виде T_τ до членов порядка m и $m \geq 4$ (т. е. $\varphi \neq 2\pi/3$ и $\varphi \neq \pi/2$). И пусть вопрос о рождении и устойчивости рождающегося периодического движения вспомогательного дифференциального уравнения, являющегося одновременно инвариантной кривой точечного отображения, определяется членами порядка $p < m$.

Точечное отображение T , в силу предположения, представимо в виде

$$T = T_\tau + \Omega_m, \quad (8)$$

где Ω_m порядка не ниже, чем m , а производные от Ω_m порядка не ниже $m - 1$. Ясно, что добавок Ω_m представляет лишь малые возмущения, которые не могут нарушать ни существования, ни устойчивости инвариантной кривой отображения T_τ (см. теоремы о сохраняемости инвариантных многообразий точечного отображения [10]).

4. Рассмотрим теперь более подробно точечное отображение плоскости в себя вида

$$\begin{aligned} \bar{u} &= e^z u + a u^2 + b' u v + c v^2 + d u^3 + k u^2 v + f u v^2 + g v^3 + \dots, \\ \bar{v} &= e^{z'} v + a' v^2 + b' u v + c' u^2 + d' v^3 + k' u v^2 + f' u^2 v + g' u^3 + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

где штрих обозначает комплексно-сопряженное число и $z = \mu + i\varphi$ ($0 < \varphi < \pi$).

Вспомогательное к этому точечному отображению (9) дифференциальное уравнение согласно формулам (5) при $\tau = 1$ и $\varphi \neq 2\pi/3$, $\varphi \neq \pi/2$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= z u + a \frac{z}{e^{2z} - e^z} u^2 + b \frac{z'}{e^{z+z'} - e^z} u v + c \frac{2z' - z}{e^{2z'} - e^z} v^2 + \\ &+ \frac{2z}{e^{3z} - e^z} \left[d + \frac{2a^2}{e^{2z} - e^z} - b c' \frac{2z - z'}{e^{z+z'} - e^z} \left(\frac{e^{3z} - e^{z+z'}}{2z - z'} - \frac{e^{3z} - e^z}{2z} \right) \times \right. \\ &\times \frac{1}{e^{2z} - e^z} \left. u^3 + \frac{z + z'}{e^{2z+z'} - e^z} \left\{ k - ab \left[2z' \left(\frac{e^{2z+z'} - e^{2z}}{z'} - \frac{e^{2z+z'} - e^z}{z + z'} \right) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + z \left(e^{z+z'} \frac{e^z - 1}{z} - e^z \frac{e^{z+z'} - 1}{z + z'} \right) \right] \frac{1}{(e^{2z} - e^z)(e^{z+z'} - e^z)} - \right. \\ &- b b' \frac{z}{(e^{z+z'} - e^z)(e^{z+z'} - e^{z'})} \left(e^{z+z'} \frac{e^z - 1}{z} - e^z \frac{e^{z+z'} - 1}{z + z'} \right) - \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 & -2cc' \frac{2z - z'}{(e^{2z'} - e^z)(e^{2z} - e^{z'})} \left(\frac{e^{2z+z'} - e^{2z'}}{2z - z'} - e^z \frac{e^{z+z'} - 1}{z + z'} \right) \} u^3 v + \\
 & + \frac{2z'}{e^{z+2z'} - e^z} \left[f - 2ac \frac{2z' - z}{(e^{2z} - e^z)(e^{2z'} - e^z)} \left(\frac{e^{z+2z'} - e^{2z}}{2z' - z} - \frac{e^{z+2z'} - e^z}{2z'} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - 2b'c \frac{2z - z'}{(e^{2z'} - e^z)(e^{z+z'} - e^{z'})} \left(\frac{e^{z+z'} - e^{z'}}{z} - \frac{e^{2z'+z} - e^z}{2z'} \right) \right] uv^2 + \\
 & + \frac{3z' - z}{e^{3z'} - e^z} \left[g - bc \frac{2z' - z}{(e^{z+z'} - e^z)(e^{2z'} - e^z)} \left(\frac{e^{3z'} - e^{z+z'}}{2z' - z} - \frac{e^{3z'} - e^z}{3z' - z} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - 2a'c \frac{z'}{(e^{2z'} - e^{z'}) (e^{2z'} - e^z)} \left(\frac{e^{3z'} - e^{2z'}}{z'} - \frac{e^{3z'} - e^z}{3z' - z} \right) \right] v^3 + \dots, \\
 & \frac{dv}{dt} = \left(\frac{du}{dt} \right)'.
 \end{aligned}$$

Как известно [2, 7], в критическом случае при $\mu = 0$ состояние равновесия устойчиво или неустойчиво в зависимости от некоторой величины g_0 , которая выражается через коэффициенты дифференциальных уравнений (10), записанных в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= zu + \tilde{a}u^2 + \tilde{b}uv + \tilde{c}v^2 + \tilde{d}u^3 + \tilde{k}u^2v + \tilde{f}uv^2 + \tilde{g}v^3 + \dots, \\
 \frac{dv}{dt} &= \left(\frac{du}{dt} \right)'
 \end{aligned} \tag{11}$$

следующим образом:

$$g_0 = \frac{2\pi}{\varphi} \operatorname{Re} \left(\tilde{k} + \frac{i}{\varphi} \tilde{a} \tilde{b} \right). \tag{12}$$

Выражая коэффициенты в (12) через коэффициенты исходного точечного отображения (9), согласно (10) найдем, что

$$g_0 = \frac{2\pi}{\varphi} \operatorname{Re} \left[ke^{-i\varphi} + ab \frac{e^{-i\varphi}(1 - e^{-i\varphi})}{1 + e^{i\varphi}} + bb' \frac{1}{e^{i\varphi} - 1} - 2cc' \frac{1}{1 - e^{3i\varphi}} \right]. \tag{13}$$

Это выражение g_0 с точностью до положительного множителя совпадает с выражением для так называемого коэффициента B , приведенного в работах [3, 8] и полученного другим образом.

При возрастании μ от $\mu = 0$ возможно рождение периодического движения из состояния равновесия. Имена, если $g_0 < 0$, то при возрастании от нуля происходит рождение u системы дифференциальных уравнений (10) или, что то же, что и (11), периодического движения от состояния равновесия

$$u = v = 0.$$

Вопрос о рождении периодического движения в данном случае приводится к исследованию точечного отображения прямой в прямую [1, 7, 11], которое может быть записано с точностью до величины $\mu^2\rho$ и $\mu\rho^3$ в виде ($\rho = \operatorname{Im} u$)

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho} &= \left(1 + \frac{2\pi}{\varphi} \mu \right) \rho + \mu \left[\frac{2\pi}{\varphi^3} \operatorname{Im} \left(-\tilde{a} - \tilde{b} + \frac{\tilde{c}}{3} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2\pi}{\varphi^2} \operatorname{Re} \left(\tilde{a} + \tilde{b} - \frac{\tilde{c}}{3} \right) \right] \rho^2 + g_0 \rho^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) находим выражение для неподвижной точки ρ^* :

$$\rho^* = \sqrt{-\frac{2\pi\mu}{\varphi g_0}} + \dots \quad (15)$$

Рождающееся периодическое решение может быть записано в виде

$$u(t) = i \sqrt{-\frac{2\pi\mu}{\varphi g_0}} e^{i\varphi t} + \dots \quad (16)$$

Согласно изложенному, знак коэффициента g_0 определяет не только устойчивость состояния равновесия дифференциальных уравнений (10) при $\mu = 0$, но и устойчивость неподвижной точки точечного отображения (9). От знака коэффициента g_0 зависит и рождение от неподвижной точки замкнутой кривой. Именно, это рождение имеет место при $g_0 < 0$ и возрастании μ от нуля.

5. Рассмотрим теперь особые случаи, соответствующие $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = \pi/2$, когда построение вспомогательного уравнения оказывается невозможным.

В случае $\varphi = 2\pi/3$ для третьей степени отображения (9) в полярных координатах ρ, Θ найдем, что

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= (1 + 3\mu)\rho + 3|c|\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \arg c - 3\Theta\right)\rho^2 + \dots, \\ \bar{\Theta} &= \Theta + 3|c|\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \arg c - 3\Theta\right)\rho + \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

где многоточие в первом выражении означает члены порядка $\mu\rho^2$ и $\mu^2\rho$, а во втором $\mu\rho$ и ρ^2 .

Пусть $c \neq 0$. Тогда исследование этого точечного отображения при достаточно малом μ приводит к результатам, изображененным на рис. 1.

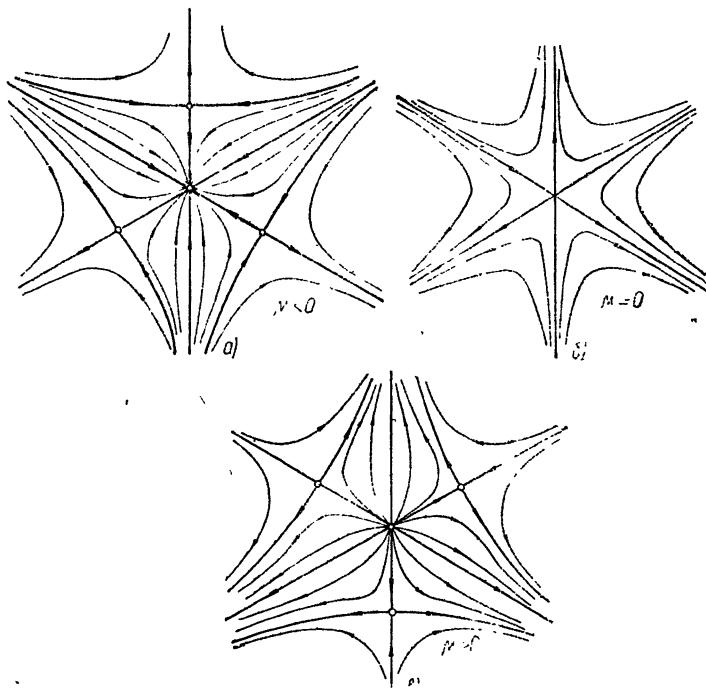


Рис. 1.

Рис. 1а соответствует случаю $\mu < 0$, рис. 1б—случаю $\mu = 0$ и рис. 1в—случаю $\mu > 0$. Неподвижные точки рассматриваемого отображения (17) седлового типа и имеют координаты

$$\begin{aligned} \rho^* &= |\mu| |c|^{-1} + \dots, \\ \Theta^* &= -\frac{1}{9} [(12j - 4)\pi + 3 \arg c] + \dots \quad (18) \\ (j &= 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Исследование второго особого случая, отвечающего $\varphi = \pi/2$, несколько сложнее. Как и в предыдущем случае, будем исследовать не само отображение (9), а его четвертую степень.

Итерируя преобразование (9) три раза, найдем, что

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (1 + 4\mu) u + 4Ku^2v + 4Gv^3 + \dots, \\ \bar{v} &= (1 + 4\mu) v + 4K'uv^2 + 4G'u^3 + \dots, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K &= -ik + ab(1+i) + cc'(-1+i), \\ G &= -ig + bc(1+i) + a'c(-1+i). \end{aligned}$$

В полярных координатах ρ, Θ точечное отображение (19) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^2 &= (1 + 8\mu)\rho^2 + 8\rho^4 \operatorname{Re}(K + Ge^{-i4\Theta}) + \dots, \\ \bar{\Theta} &= \Theta + 4\rho^2 \operatorname{Im}(K + Ge^{-i4\Theta}) + \dots, \quad (20) \end{aligned}$$

где многоточия соответственно означают члены порядка $\mu^2\rho^2$, $\mu\rho^3$ и $\mu\rho^2$.

Прежде всего найдем неподвижные точки преобразования (19) и исследуем их характер. Неподвижные точки (ρ^*, Θ^*) находятся, согласно (19), из уравнений, которые можно привести к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(K + Ge^{-i4\Theta^*}) &= 0, \\ \rho^{*2} &= -\mu \operatorname{Re}^{-1}(K + Ge^{-i4\Theta^*}), \quad (21) \end{aligned}$$

из которого следует, что искомые значения Θ^* могут быть найдены как те точки пересечения окружности

$$w = K + Ge^{-i4\Theta} \quad (0 \leq \Theta < 2\pi) \quad (22)$$

с действительной осью комплексной плоскости w , для которых $\mu \operatorname{Re} w < 0$.

Пользуясь выражением (19) для преобразования T^4 составляем характеристическое уравнение в неподвижной точке (u^*, v^*)

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} - 1 - \lambda & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - 1 - \lambda \end{array} \right|_{\substack{u=u^* \\ v=v^*}} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2\mu \left(1 - \frac{\operatorname{Re} K}{\operatorname{Re} w} \right) \lambda + \mu^2 \left(\left| 1 - \frac{2K}{\operatorname{Re} w} \right|^2 - |Ku^{*2} + 3Gv^{*2}|^2 \right) + \dots = 0. \quad (23)$$

Из этого уравнения могут быть найдены значения λ для каждой из

неподвижных точек отображения T^4 и тем самым выяснен их характер. Из (23) находим, что

$$1 + \lambda = 1 - \mu \frac{1 - \beta \pm (1 - 3\beta)}{1 + \beta} + O(\mu), \quad (24)$$

где

$$\beta = \pm (|G|^2 - \operatorname{Im}^2 K)^{1/2} \operatorname{Re}^{-1} K.$$

Число решений уравнения (21) зависит от одного параметра $\alpha = K |G|^{-1}$, а характер неподвижных точек — от величины $\beta = (1 - \operatorname{Im}^2 \alpha)^{1/2} \operatorname{Re}^{-1} \alpha$, т. е. в конечном счете все определяется одним комплексным параметром α .

На рис. 2 изображено разбиение плоскости параметра α на области D_1, D_2, D_3, D_4 и D_5 . В области D_1 при $\mu \neq 0$ имеется четыре неподвижных точки типа седло; в D_2 — при $\mu > 0$ восемь неподвижных точек, причем четыре седла чередуются с четырьмя устойчивыми узлами. В D_5 будет аналогичная картина при $\mu < 0$, но узлы будут неустойчивыми. В D_3 при $\mu > 0$ будет замкнутая устойчивая инвариантная кривая, как и в D_4 при $\mu < 0$, но здесь она уже будет неустойчивой. Неподвижных точек, кроме $u = v = 0$, в D_3 и D_4 не будет.

Для исследования поведения сепаратрис седел можно применить следующий метод. При достаточно малых $\mu \neq 0$ в некоторой окрестности $u = v = 0$ применима теорема 1, т. е. можно записать систему (10). Сепаратрисы будут решениями этой системы. При подробном изучении поведения сепаратрис выделяются следующие случаи. В D_1 сепаратрисы седел при любом $\mu \neq 0$ выходят из конечной окрестности начала координат. В D_2 при $\mu > 0$ сепаратрисы, выходящие из седел, попадают в устойчивые узлы, а в D_5 при $\mu < 0$ сепаратрисы, входящие в седла, выходят из неустойчивых узлов. Неподвижная точка $u = v = 0$ устойчива при $\mu < 0$ и неустойчива при $\mu > 0$.

Располагая полученными данными, можно установить расположение неподвижных точек T^4 , их характер, а также выяснить поведение сепаратрис седловых точек и установить существование замкнутой инвариантной кривой.

Ради краткости изложения, соответствие между областями разбиения параметра и качественно различными случаями поведения точечного отображения можно свести в следующую таблицу. При этом в рисунках, придененных для D_4 и D_5 , нужно везде сменить устойчивость на неустойчивость и наоборот. В областях D_3 и D_4 в нижней полуплоскости направление вращения инвариантных кривых меняется на противоположное.

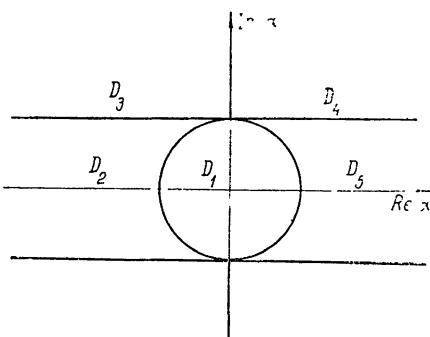


Рис. 2.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
$\mu < 0$	рис. 3а	рис. 4а	рис. 5а	рис. 5б*	рис. 46*
$\mu = 0$	рис. 3б	рис. 4а	рис. 5а	рис. 5а*	рис. 4а*
$\mu > 0$	рис. 3в	рис. 4б	рис. 5б	рис. 5а*	рис. 4а*

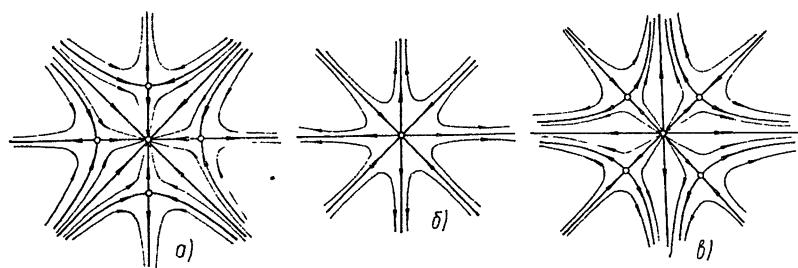


Рис. 3.

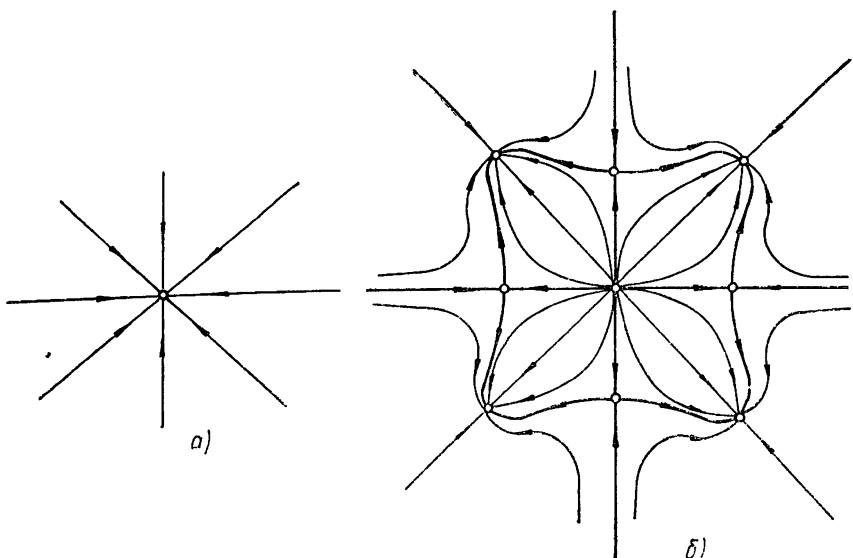


Рис. 4.

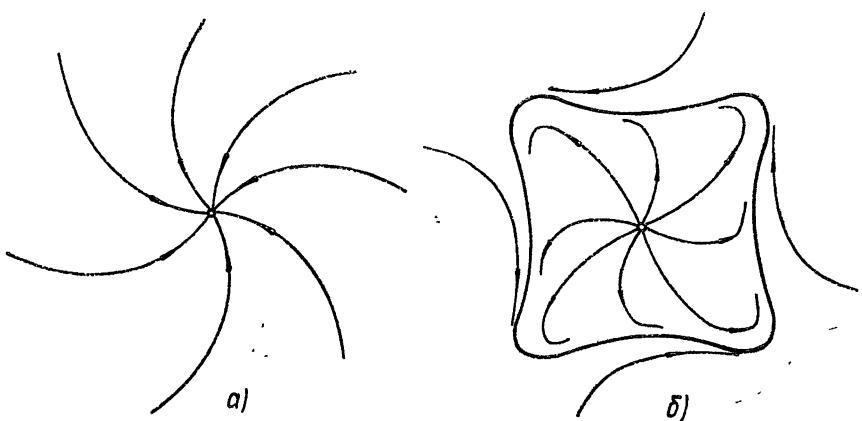


Рис. 5.

Ради краткости рисунки 4а*, 4б*, 5а*, 5б*, не приведены, но их можно легко получить, сменив направление стрелок на противоположное на рисунках 4а*, 4б*, 5а*, 5б*.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андропов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 1, 41; № 2, 95, № 5-6, 146 (1958).
3. Ю. И. Неймарк, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1963.
4. R. I. Sacker, On Invariant Surface and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1964.
5. С. Д. Киняпин, Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 20, № 9, 1153 (1959).
6. С. Д. Киняпин, Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 4, 694 (1960).
7. В. Н. Труженикова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 2, 356 (1962).
8. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 3, 507 (1959); 3, № 2, 342 (1960).
9. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, ОГИЗ, М.—Л., 1947.
10. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 3, 311, 321 (1967).
11. Л. О. Барсук, Тезисы докладов конференции молодых научных работников. Секц. физ.-мат. наук, Горький, 1966, стр. 26.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете.

Поступила в редакцию
17 января 1968 г.

STABILITY OF STEADY POINT OF TRANSFORMATION IN CRITICAL CASE AND SOME SPECIAL BIFURCATIONS

L. O. Barsuck, N. M. Belosludzev, Ju. I. Neymark, N. M. Salganskaya

The conditions are determined under which the problem of investigation of steady point of transformation stability and bifurcations may be reduced to analogous problems for equilibrium state of differential equations system.

УДК 531.391

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ

B. H. Бержицкий

Исходная система регулирования определенным подбором параметров (коэффициентов) ориентируется в пространстве этих параметров в сечениях второго рода [1, 2]. Отыскиваются необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости системы для рассматриваемых сечений. Для каждого из сечений строится область устойчивости в пространстве обобщенных параметров.

1. Рассмотрим систему [3]

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_k}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^n a_{k\alpha} \eta_\alpha + b_k f(\sigma) \quad (k=1, \dots, n), \\ \sigma &= \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \eta_\alpha, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где η_k ($k = 1, \dots, n$), σ — зависимые переменные, t — независимая переменная (время); предполагается, что система (1.1) удовлетворяет условиям:

1) $a_{k\alpha}, b_k, c_\alpha$ ($k, \alpha = 1, \dots, n$) — постоянные вещественные коэффициенты, часть из них или все являются параметрами;

2) $f(\sigma)$ — непрерывная функция, которая определена и удовлетворяет условиям существования и единственности решений системы (1.1) при всех начальных данных, а также условиям

$$0 \leq f(\sigma)/\sigma \leq x < +\infty \quad (\text{при } \sigma \neq 0), \quad f(0) = 0, \tag{1.2}$$

где x — положительная постоянная;

3) система (1.1) имеет единственное состояние равновесия

$$\eta_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \tag{1.3}$$

Нулевое решение (1.3) системы (1.1) будем считать асимптотически устойчивым в целом [14] (асимптотически и абсолютно устойчивым), если оно устойчиво по Ляпунову и все решения системы (1.1) обладают свойством

$$\begin{aligned} \eta_k(t) &\rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \\ -\infty < \eta_k(0) &< +\infty \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной нелинейностью изучалась в работах [2—16] и др.

В [3—8] различными методами найдены достаточные условия абсолютной устойчивости, которым в пространстве параметров системы

соответствуют некоторые области Q_i . Последние принадлежат и составляют часть искомой области устойчивости Q , определяемой необходимыми и достаточными условиями.

Для решения вопроса о том, насколько полно области Q_i соответствуют области Q , применялись различные косвенные методы [3, 7, 8], но они не дали полного ответа, так как область Q оставалась неизвестной.

Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости для систем второго и третьего порядка найдены в работах [9–11], вопрос о полноте областей Q_i для этих частных случаев решен в [8–11].

Для систем порядка n такие условия найдены в работах [8, 12, 13]. Однако в [12] область абсолютной устойчивости не приводится, а по результатам работы [13] получение области Q затруднительно.

Предложенный в [1, 2, 16] метод исследования систем управления (метод сечений пространства параметров) в применении к исследованию задачи об абсолютной устойчивости оказывается весьма эффективным и позволяет в условиях сечений решить оба вопроса этой задачи.

Преобразование [3]

$$\eta_\alpha = - \sum_{k=1}^n \frac{N_\alpha(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} x_k \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (1.5)$$

приводит систему (1.1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda_k x_k + f(\sigma) \quad (k = 1, \dots, n), \\ \sigma &= \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $N_\alpha(p) = \sum_{k=1}^n b_k D_{k\alpha}(p)$, $D_{k\alpha}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента строки k и столбца α определителя

$$D(p) \equiv \| a_{k\alpha} - \delta_{k\alpha} p \|, \quad (1.7)$$

где $\delta_{k\alpha}$ — символ Кронекера, λ_k — корни уравнения

$$D(p) = 0; \quad (1.8)$$

$$D'(\lambda_k) = \left. \frac{dD(p)}{dp} \right|_{p=\lambda_k}, \quad (1.9)$$

$$\gamma_k = - \frac{1}{D'(\lambda_k)} \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha N_\alpha(\lambda_k).$$

Преобразование (1.5) будет неособым при выполнении условий [1, 2]: а) корни λ_k ($k = 1, \dots, n$) уравнения (1.8) — простые, б) векторы $H, AH, \dots, A^{n-1}H$ — линейно независимы. Здесь $A \equiv \| a_{k\alpha} \|$ — $n \times n$ матрица, H — столбец чисел b_k ($k = 1, \dots, n$).

Полагая эти условия выполнеными, рассмотрение пространства коэффициентов $a_{k\alpha}, b_k, c_\alpha$ ($k, \alpha = 1, \dots, n$) (или части этого пространства, если некоторые коэффициенты фиксированы) заменим рассмотрением пространства коэффициентов λ_k, γ_k ($k = 1, \dots, n$). В этом пространстве построим сечения второго ряда $G_2^{(s, r)}$ [1, 2], определяемые уравнениями

$$\gamma_s \neq 0, \quad \gamma_r \neq 0, \quad \gamma_k = 0 \quad (k \neq s, k \neq r, k = 1, \dots, n). \quad (1.10)$$

В условиях построенных сечений $G_2^{(s,r)}$ система (1.6) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= \lambda_k x_k + f(\sigma) \quad (k = 1, \dots, n), \\ \sigma &= \gamma_s x_s + \gamma_r x_r.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Из (1.11) для x_s, x_r имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= \lambda_s x_s + f(\sigma), \\ \dot{x}_r &= \lambda_r x_r + f(\sigma), \\ \sigma &= \gamma_s x_s + \gamma_r x_r.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Таким образом, в условиях построенных сечений $G_2^{(s,r)}$ исследование устойчивости решения (1.3) системы (1.1) или ей эквивалентной (1.6) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения $x_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) системы (1.11).

2. Теорема. Пусть выполнены предварительные условия:

1) система (1.1) удовлетворяет наложенным на нее условиям 1, 2, 3;

2) уравнение (1.8) имеет n простых корней λ_k ($k = 1, \dots, n$), а векторы $H, AH, \dots, A^{n-1}H$ — линейно независимы, где $A \equiv ||a_{ka}|| - n \times n$ матрица, H — столбец чисел b_k ($k = 1, \dots, n$);

3) количество параметров среди коэффициентов a_{ka}, b_k , α ($k, \alpha = 1, \dots, n$) системы (1.1) достаточно для построения сечений второго рода.

Тогда нулевое решение (1.3) системы (1.1), рассматриваемой в условиях любого из сечений $G_2^{(s,r)}$, будет асимптотически устойчиво в целом в том и только в том случае, если выполнены условия

$$\begin{aligned}\lambda_s + \lambda_r + z(\gamma_s + \gamma_r) &< 0, \\ \lambda_s \lambda_r + z(\lambda_r \gamma_s + \lambda_s \gamma_r) &> 0, \\ \operatorname{Re} \lambda_k &< 0 \quad (k = 1, \dots, n).\end{aligned}$$

Доказательство. Предварительные условия теоремы обеспечивают эквивалентность систем (1.1), (1.6) и существование сечений $G_2^{(s,r)}$, в условиях которых система (1.6) принимает вид (1.11).

Из (1.11) выделим подсистему (1.12) и неособым преобразованием

$$\begin{aligned}y &= -\lambda_r \gamma_s x_s - \lambda_s \gamma_r x_r, \\ \sigma &= \gamma_s x_s + \gamma_r x_r\end{aligned}\tag{2.1}$$

приведем ее к виду

$$\dot{\sigma} = y + F(\sigma), \quad \dot{y} = -g(\sigma),\tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}F(\sigma) &= (\lambda_s + \lambda_r)\sigma + f(\sigma)(\gamma_s + \gamma_r), \\ g(\sigma) &= \lambda_s \lambda_r \sigma + f(\sigma)(\lambda_s \gamma_r + \lambda_r \gamma_s).\end{aligned}$$

На основании результатов работ [9, 10] следует, что нулевое решение системы (2.2) асимптотически устойчиво в целом в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned}F(\sigma)\sigma &< 0, \\ g(\sigma)\sigma &> 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm \infty} \left[F(\sigma) \operatorname{sgn} \sigma - \int_0^{\infty} g(\sigma) d\sigma \right] = -\infty.$$

Условия (2.3) в силу эквивалентности систем (1.12), (2.2) справедливы для абсолютной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.12) и в условиях границ (1.2), определяющих класс функций $f(\sigma)$, принимают вид

$$\lambda_s^2 + \lambda_r + \nu(\gamma_s + \gamma_r) < 0,$$

$$\lambda_s \lambda_r + \nu(\lambda_r \gamma_s + \lambda_s \gamma_r) > 0,$$

$$\operatorname{Re} \lambda_s < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_r < 0.$$

Покажем теперь, что утверждение теоремы справедливо и для остальных $n-2$ уравнений системы (1.11). В силу (1.2), (2.1) и установленного факта устойчивости системы (1.12) следует

$$f[\sigma(t)] \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (2.4)$$

и, кроме того, справедливо неравенство

$$|f[\sigma(t)]| < \delta \quad (2.5)$$

для любых $|x_s(0)| \leq \varepsilon$, $|x_r(0)| \leq \varepsilon$, где ε , $\delta(\varepsilon)$ — положительные числа.

Рассмотрим решение

$$x_k(t) = x_k(0) e^{\lambda_k t} + e^{\lambda_k t} \int_0^t f[\sigma(\tau)] e^{-\lambda_k \tau} d\tau \quad (k=1, \dots, n; k \neq s, k \neq r). \quad (2.6)$$

В силу [17] (стр. 81, 86) невозмущенное движение

$$\tilde{x}_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t f[\sigma(\tau)] e^{-\lambda_k \tau} d\tau \quad (k=1, \dots, n; k \neq s, k \neq r) \quad (2.7)$$

асимптотически устойчиво в целом в том и только в том случае, если

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad (k=1, \dots, n; k \neq s, k \neq r). \quad (2.8)$$

Однако в данном случае условия (2.8) достаточны для асимптотической устойчивости в целом решения $x_k=0$ ($k=1, \dots, n; k \neq s, k \neq r$) системы $n-2$ уравнений из (1.11), так как, во-первых, в силу (2.5) — (2.7) справедливы оценки

$$|\tilde{x}_k(t)| < -\frac{1}{\lambda_k} \delta, \quad |x_k(t)| < |x_k(0)| - \frac{1}{\lambda_k} \delta \quad (k=1, \dots, n; k \neq s, k \neq r)$$

при $0 \leq t < +\infty$ и, во-вторых, в силу (2.4)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}_k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_k t} \int_0^t f[\sigma(\tau)] e^{-\lambda_k \tau} d\tau = 0 \quad (k=1, \dots, n; k \neq s, k \neq r). \quad (2.9)$$

Справедливость (2.9) нетрудно показать [15], если для раскрытия неопределенности воспользоваться правилом Лопитала. Теорема доказана.

Построим области абсолютной устойчивости системы (1.1) в условиях сечений второго рода. Введем в рассмотрение обобщенные параметры

$$F = \lambda_s + \lambda_r + \kappa(\gamma_s + \gamma_r),$$

$$g = \lambda_s \lambda_r + \kappa(\lambda_s \gamma_r + \lambda_r \gamma_s).$$

При выполнении равенств $\gamma_k = 0$ ($k \neq s, k \neq r, k = 1, \dots, n$) и неравенств $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ($k = 1, \dots, n$) область абсолютной и асимптотической устойчивости решений (1.3) системы (1.1) для каждого из сечений $G_2^{(s,r)}$ в плоскости параметров F и g примет (в силу доказанной теоремы) вид, показанный на рисунке 1.

Область устойчивости является открытой.

Вопрос о продолжении областей абсолютной устойчивости, построенных в окрестности сечений рассмотрен в работах [15, 16].

Полученные результаты дают возможность:

в) в условиях сечений $G_2^{(s,r)}$ оценить эффективность применяемых достаточных условий устойчивости [3, 8] и, при необходимости, дополнить их;

б) полученные точные границы области абсолютной устойчивости можно использовать при синтезе автоматических систем с любой нелинейностью,

принадлежащей указанному выше классу, если представляется возможным ориентировать систему в пространстве параметров по указанным сечениям.

Рис. 1. Область абсолютной устойчивости системы (1.1) в плоскости параметров F, g .

В заключение автор благодарит Р. А. Нелепина за ряд замечаний, сделанных при подготовке статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Нелепин, Изв АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 123 (1964).
- 2 Р. А. Нелепин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 126 (1965).
3. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, М., 1951.
4. В. М. Попов, Автоматика и телемеханика, № 8, 961 (1961).
- 5 А. И. Лурье, Е. Н. Розенвассер, Тр I Конгресса ИФАК, 1, изд. АН СССР, М., 1961
- 6 А. К. Бедельбаев, Тр Конгресса ИФАК, 1, изд. АН СССР, М., 1961
7. А. М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, М., 1962
8. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1963.
9. Н. Н. Красовский, ПММ, 17, вып. 6, 651 (1953).
10. Н. Н. Красовский, 16, вып 5, 547 (1952)
11. Б. Ж. Майгарин, Автоматика и телемеханика, 24, вып. 6, 839 (1963).
- 12 В. А. Якубович, ДАН СССР, 135, № 1, 26 (1960).
13. В. А. Плисс, ДАН СССР, 103, № 1, (1955)
14. Н. П. Еругин, ПММ, 19, вып. 5, 599 (1955).

15. Р. А. Нелепин, Точные, аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем, Судостроение, Л., 1967.
16. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, изд. Наука, М., 1967.

Поступила в редакцию
1 февраля 1968 г.

TO THE PROBLEM OF ABSOLUTE STABILITY WITH THE USE
OF PARAMETERS SPACE SECTION

V. N. Berzickii

Initial system of control by definite choice of parameters (coefficients) is oriented in space of these parameters in type II sections [1, 2]. Necessary and sufficient conditions of absolute system stability for sections in question are determined. Stability range in space of generalized parameters is dirived for each of sections.

УДК 531.391

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

A. C. Розенфельд

Понятие частотной характеристики корректно определено в рамках классического преобразования Фурье для асимптотически устойчивых линейных цепей, поскольку импульсные характеристики только таких цепей являются абсолютно интегрируемыми функциями. Привлекая положения об обобщенных функциях, обсуждается возможность определения частотных характеристик линейных цепей, импульсные характеристики которых являются незатухающими, но ограниченными по модулю функциями времени. При этом понятие частотной характеристики получает корректное определение для всего класса устойчивых линейных цепей. Построены формулы для вычисления комплексной, вещественной и мнимой частотных характеристик любой устойчивой линейной цепи по соответствующей операторной передаточной функции

Комплексная частотная характеристика линейной цепи определяется в общем случае как спектральная плотность ее отклика на импульс типа дельта-функции, который принято называть импульсной характеристикой. В рамках такого определения классическое преобразование Фурье можно применять для анализа динамики линейных цепей, импульсные характеристики которых являются абсолютно интегрируемыми функциями. Это условие выполняется только для асимптотически устойчивых линейных цепей.

Наряду с классом асимптотически устойчивых цепей широко применяются модели в виде цепей, импульсные характеристики которых содержат незатухающие, но ограниченные по модулю составляющие и, следовательно, не являются абсолютно интегрируемыми функциями. При анализе фильтров рассматривают четырехполюсники без потерь и их каскадные соединения, длинные линии без потерь; в теории САР рассматривают консервативные и идеальные интегрирующие звенья и т. д. Такие модели также относятся к классу устойчивых линейных цепей, но в рамках классического преобразования Фурье понятие частотных характеристик для них оставалось неопределенным.

Трудности преобразования Фурье, обусловленные требованием абсолютной интегрируемости, были частично устранены теорией обобщенных функций [1]. Представляется целесообразным использовать новые возможности преобразования Фурье для обобщения понятия частотной характеристики на весь класс устойчивых линейных цепей. Необходимость такого обобщения отмечалась в [2, 3].

Импульсные характеристики линейных цепей описываются обобщенными функциями, которые можно представить в виде суммы регулярной и импульсной составляющих [4]:

$$k(t) = k(t) \cdot 1(t) + k^0 \delta(t) + k^1 \delta'(t), \quad (1)$$

где $k(t)$ — гладкая функция, определяющая мгновенные значения импульсной характеристики при $t > 0$, $1(t)$ — единичная функция Хевисайда, k^0, k^1 — амплитуды импульсов в виде дельта-функции и ее пер-

вой производной. Фигурные скобки служат отличием обобщенных функций.

Для устойчивых цепей $k(t)$ остается ограниченной при $t \rightarrow \infty$ и может быть представлена суммой

$$k(t) = k_3(t) + B_0 + \sum_{n=1}^N \dot{B}_n e^{j\omega_n t} + \dot{\dot{B}}_n e^{-j\omega_n t}, \quad (2)$$

в которой $k_3(t)$ — затухающая часть, предел которой при $t \rightarrow \infty$ равен нулю, B_0 — постоянная составляющая, \dot{B}_n , $\dot{\dot{B}}_n$ — комплексно-сопряженные числа, N — произвольное, целое, положительное число, так что тригонометрический ряд в правой части (2) содержит конечное либо бесконечное число слагаемых.

Если по крайней мере один из коэффициентов B_0 , \dot{B}_n , $\dot{\dot{B}}_n$ отличен от нуля, функция $k(t)$ не является абсолютно интегрируемой и ее спектральная плотность, с позиций классического преобразования Фурье, остается неопределенной. Однако, когда интеграл Фурье рассматривается как слабый предел*, спектральные плотности функций типа (2) получают четкое и надежное определение в классе обобщенных функций [1].

Найдем спектральную плотность функции $k(t)$, определяя интегралы

$$\begin{aligned} F_-[e^{j\omega_n t} \cdot 1(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{j(\omega_n - \omega)t}}{j(\omega_n - \omega)} - \frac{1}{j(\omega_n - \omega)} \end{aligned} \quad (3)$$

как слабые пределы. Для первого слагаемого правой части (3) такой предел существует и равен

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(\omega_n - \omega)t}{\omega_n - \omega} - j \frac{\cos(\omega_n - \omega)t}{\omega_n - \omega} \right] &= \\ &= \pi \delta(\omega_n - \omega) = \pi \delta(\omega - \omega_n), \end{aligned} \quad (4)$$

так что

$$F_-[e^{j\omega_n t} \cdot 1(t)] = \pi \delta(\omega - \omega_n) + \frac{1}{j(\omega - \omega_n)}. \quad (5)$$

Когда $\omega_n = 0$, обобщенная функция (5) представляет спектральную плотность единичной функции Хевисайда. Импульс такой спектральной плотности имеет разность ω^{-1} .

Комплексную частотную характеристику устойчивой линейной цепи определим как спектральную плотность $k\{t\}$, принимая, что изменения мгновенных значений импульсной характеристики в общем случае описываются суммой (2). Выполняя преобразование Фурье над каждым слагаемым $k\{t\}$ и учитывая (5), получим

$$F_-[k\{t\}] = K\{j\omega\} = k^1 j\omega + k^2 + K_3(j\omega) + \frac{B_0}{j\omega} + \pi B_0 \delta(\omega) +$$

* Определение слабой сходимости и обоснование равенства (4) даны в Приложении.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\dot{B}_\alpha}{j(\omega - \omega_\alpha)} + \frac{\ddot{B}_\alpha}{j(\omega + \omega_\alpha)} + \pi [\dot{B}_\alpha \delta(\omega - \omega_\alpha) + \ddot{B}_\alpha \delta(\omega + \omega_\alpha)] = \\
 & = K(j\omega) + \pi [B_0 \delta(\omega) + \sum_{\alpha=1}^N \dot{B}_\alpha \delta(\omega - \omega_\alpha) + \ddot{B}_\alpha \delta(\omega + \omega_\alpha)].
 \end{aligned} \quad (6)$$

Спектральная плотность $K_s(j\omega)$ затухающей части $k_s(t) \cdot 1(t)$ импульсной характеристики вычисляется обычным порядком и является дробно-рациональной либо мероморфной функцией параметра $j\omega$. Все полюсы такой функции расположены слева от мнимой оси комплексной плоскости.

Комплексная частотная характеристика устойчивой линейной цепи, согласно (6), является обобщенной функцией, которая содержит в общем случае как регулярную $K(j\omega)$, так и импульсную составляющие. Регулярная часть $K(j\omega)$ такой частотной характеристики является, как и $K_s(j\omega)$, дробно-рациональной либо мероморфной функцией $j\omega$, но может иметь простые полюсы на мнимой оси, когда импульсная характеристика цепи не затухает при $t \rightarrow \infty$. Если импульсная характеристика содержит импульсы $k^o \delta(t)$ либо $k^d \delta(t)$, в $K(j\omega)$ возникают неубывающие составляющие k^o либо $k^d j\omega$.

Обобщенная функция, описывающая комплексную частотную характеристику устойчивой линейной цепи общего вида, может содержать только импульсы типа дельта-функции. Координаты точек, в которых сосредоточены такие импульсы, совпадают с координатами полюсов $K(j\omega)$ на мнимой оси. При этом каждому такому полюсу соответствует один импульс в виде дельта-функции.

Комплексную частотную характеристику в виде обобщенной функции $K(j\omega)$ можно определять по операторной передаточной функции

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-pt} dt = K(p) = k^1 p + k^o + K_s(p) + \frac{B_0}{p} + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\dot{B}_\alpha}{p - j\omega_\alpha} + \frac{\ddot{B}_\alpha}{p + j\omega_\alpha}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразование Лапласа (7) выполнено над суммами (1) и (2). Изображение затухающей функции $k_s(t) \cdot 1(t)$ обозначено $K_s(p)$. Ветвь $K(p)$, содержащая полюсы на мнимой оси, представлена в сумме (7) своим разложением на простые дроби.

Сопоставляя суммы (6) и (7), можно сделать вывод, что регулярная часть $K(j\omega)$ комплексной частотной характеристики (6) можно вычислять путем подстановки $j\omega$ в передаточную функцию $K(p)$ вместо параметра p . Это очевидно для всех слагаемых $K(j\omega)$, кроме $K_s(j\omega)$. Но $K_s(j\omega) = [K(p)]_{p=j\omega}$ как спектральная плотность и изображение абсолютно интегрируемого оригинала $k_s(t) \cdot 1(t)$, так что такая подстановка всегда возможна и определяет $K(j\omega)$.

Амплитуды импульсов комплексной частотной характеристики $K(j\omega)$ отличаются от коэффициентов дробей суммы (7) только постоянным множителем π . Эти коэффициенты являются вычетами передаточной функции в полюсах, расположенных на мнимой оси комплексной плоскости.

Отмеченные связи между слагаемыми $K(j\omega)$ и $K(p)$ можно записать аналитически:

$$K\{j\omega\} = [K(p)]_{p=j\omega} + \pi \sum_{p=j\omega_a} \text{Res } K(p) \delta(\omega - \omega_a). \quad (8)$$

Формула (8) дает правило для определения комплексной частотной характеристики устойчивой линейной цепи общего вида по ее передаточной функции. При вычислении импульсной составляющей $K\{j\omega\}$ по формуле (8) суммирование проводится по всем полюсам передаточной функции, расположенным на мнимой оси. Передаточные функции асимптотически устойчивых линейных цепей таких полюсов не имеют, так что все $\text{Res } K(p) = 0$, и для таких цепей формула (8) представляет известное правило.

Частное решение дифференциального уравнения линейной цепи с постоянными параметрами, соответствующее воздействию $e^{i\omega t}$, равно $K(j\omega) e^{i\omega t}$. Комплексный коэффициент $K(j\omega)$ принято называть комплексной передаточной функцией и определять методом комплексных амплитуд. Комплексная и операторная передаточные функции связаны известной формулой $K(j\omega) = [K(p)]_{p=j\omega}$, что оправдывает принятые обозначения.

Комплексная передаточная функция, согласно (8), является регулярной составляющей комплексной частотной характеристики линейной устойчивой цепи общего вида. Поэтому для построения частотной характеристики такой цепи можно использовать метод комплексных амплитуд, на основе которого определяется $K(j\omega)$. Потом по формуле (8) определяется и импульсная составляющая спектральной плотности $K\{j\omega\}$.

Для асимптотически устойчивых цепей комплексная передаточная функция и спектральная плотность импульсной характеристики совпадают. Поэтому только для таких цепей каждое из этих понятий может рассматриваться в качестве определения комплексной частотной характеристики и достаточно для ее вычисления. Это положение в настоящее время широко применяется. Однако при рассмотрении устойчивых линейных цепей общего вида в качестве определения комплексной частотной характеристики следует принимать только понятие спектральной плотности импульсной характеристики.

В обобщенной функции $K\{j\omega\}$ обычным порядком можно выделить вещественную и мнимую части. Выполняя такую операцию в интеграле Фурье, получим

$$\begin{aligned} K\{j\omega\} &= \int_{0_-}^{\infty} k\{t\} e^{-i\omega t} dt = \int_{0_-}^{\infty} k\{t\} \cos(\omega t) dt - \\ &- j \int_{0_-}^{\infty} k\{t\} \sin(\omega t) dt = P\{\omega\} + jQ\{\omega\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Путем преобразования соотношения (6) вещественную $P\{\omega\}$ и мнимую $Q\{\omega\}$ частотные характеристики линейной цепи можно представить в виде обобщенных функций

$$P\{\omega\} = P(\omega) + \pi \{B_0 \delta(\omega) + \sum_{a=1}^N a_a [\delta(\omega - \omega_a) + \delta(\omega + \omega_a)]\}, \quad (10)$$

$$Q\{\omega\} = Q(\omega) + \pi \sum_{a=1}^N b_a [\delta(\omega - \omega_a) - \delta(\omega + \omega_a)], \quad (11)$$

регулярные части которых

$$P(\omega) = k^0 + P_s(\omega) + \sum_{a=1}^N \frac{b_a}{\omega - \omega_a} - \frac{b_a}{\omega + \omega_a}, \quad (12)$$

$$Q(\omega) = k^1 \omega + Q_s(\omega) - \frac{B_0}{\omega} - \sum_{a=1}^N \frac{a_a}{\omega - \omega_a} + \frac{a_a}{\omega + \omega_a}. \quad (13)$$

При записи формул (10)–(13) приняты обозначения

$$P_s(\omega) + jQ_s(\omega) = P_s(j\omega), \quad a_a + jb_a = \dot{B}_a, \quad a_a - jb_a = \dot{B}'_a.$$

Интегралы (9) показывают, что вещественная частотная характеристика является четной функцией частоты, мнимая частотная характеристика—нечетной функцией.

Из формул (12), (13) следует, что импульс типа дельта-функции импульсной характеристики (1) проявляется как постоянная составляющая $P(\omega)$. Импульс типа производной дельта-функции проявляется как линейно нарастающая компонента $Q(\omega)$. Незатухающая составляющая $k[t]$ порождает полюсы в вещественной и мнимой частотных характеристиках, которые расположены на мнимой оси.

Вещественная и мнимая частотные характеристики линейной цепи являются зависимыми функциями. Связи между ними устанавливаются обычным путем из формулы обращения спектральной плотности

$$\begin{aligned} k[t] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[j\omega] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos(\omega t) - \\ &- Q(\omega) \sin(\omega t)] d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \sin(\omega t) + Q(\omega) \cos(\omega t)] d\omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку импульсная характеристика цепи принимает только вещественные значения, интеграл у мнимой части (14) должен быть равен нулю. Таким путем получаем интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \sin(\omega t) + Q(\omega) \cos(\omega t)] d\omega = 0, \quad (15)$$

которое определяет связи между обобщенными функциями, описывающими вещественную и мнимую частотные характеристики устойчивой линейной цепи общего вида. По своей структуре соотношение (15) аналогично известному уравнению связи между $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ асимптотически устойчивой линейной цепи.

Формулу обращения (14) можно упростить. Учитывая равенство (15),

$$k[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos(\omega t) - Q(\omega) \sin(\omega t)] d\omega. \quad (16)$$

Интеграл (16) позволяет вычислять как регулярную, так и импульсную составляющие импульсной характеристики. Для определения регулярной составляющей достаточно располагать только вещественной $P(\omega)$

либо мнимой $Q\{\omega\}$ частотными характеристиками. Действительно, интеграл (16) равен нулю при $t < 0$, так что при $t > 0$ всегда имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |P\{\omega\} \cos(\omega t) + Q\{\omega\} \sin(\omega t)| d\omega = 0. \quad (17)$$

Рассматривая интегралы (16) и (17) совместно, получим формулы

$$k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{\omega\} \cos(\omega t) d\omega \quad (t \geq 0), \quad (18)$$

$$k(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\{\omega\} \sin(\omega t) d\omega \quad (t \geq 0) \quad (19)$$

для вычисления регулярной составляющей импульсной характеристики.

При исследовании асимптотически устойчивых линейных цепей широко применяются амплитудно- и фазо-частотные характеристики. Положения о таких частотных характеристиках, к сожалению, не удается обобщить на весь класс устойчивых цепей, поскольку для комплексных обобщенных функций типа $K\{j\omega\}$ не определены понятия модуля и фазы. Показательная форма записи возможна только для регулярной составляющей $K(j\omega)$ спектральной плотности $K\{j\omega\}$, которая является обычной комплексной функцией параметра $j\omega$.

Обобщенные функции можно умножить (делить) на числа и гладкие функции. Однако операции умножения и деления обобщенной функции на обобщенную функцию не всегда возможны [1]. Это ограничение вносит ряд особенностей в методику исследования линейных цепей с помощью преобразования Фурье, когда спектральная плотность воздействия и комплексная частотная характеристика цепи являются обобщенными функциями. Они будут рассмотрены в отдельной работе.

С целью пояснения методики применения полученных формул для построения частотных характеристик линейных цепей рассмотрим астатическое (интегрирующее) и консервативное звенья САР и их возможные реализации в виде электрических цепей.

Операторная передаточная функция астатического звена с постоянным коэффициентом усиления $K(p) = B_0/p$ [5] имеет один полюс в точке $p = 0$. Для построения комплексной частотной характеристики такого звена определяем комплексную передаточную функцию $K(j\omega) = B_0/j\omega$ и вычет $\text{Res}_{p=0} K(p) = B_0$. После подстановки этих величин в формулу (8) получим искомую характеристику

$$K\{j\omega\}^* = B_0/j\omega + \pi B_0 \delta(\omega). \quad (20)$$

Реализацией такого астатического звена может служить емкость цепи рис. 1, на входе которой действует источник тока. Передаточными функциями для напряжения выхода такой цепи служат операторное $1/pC$ либо комплексное $1/j\omega C$ сопротивления емкости. Комплексная, вещественная и мнимая частотные характеристики сопротивления емкости, согласно (20), равны

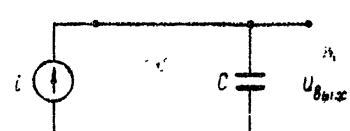


Рис. 1.

$$K_c\{j\omega\} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{\pi}{C} \delta(\omega), \quad (21)$$

$$P_c\{\omega\} = \frac{\pi}{C} \delta(\omega), \quad Q_c\{\omega\} = Q(\omega) = -\frac{1}{\omega C}. \quad (22)$$

Импульсная характеристика сопротивления емкости может быть восстановлена по любой из таких частотных характеристик. Например, подставляя $P_c\{\omega\}$ в (18) либо $Q_c\{\omega\}$ в (19), получим

$$k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{C} \delta(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \frac{1}{C} \quad (t \geq 0), \quad (23)$$

$$k(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sin(\omega t)}{\omega C} d\omega = \frac{1}{C} \quad (t > 0). \quad (24)$$

Из схемы рис. 1 непосредственно следует, что если источник создает ток $i\{t\} = \delta(t)$, напряжение на выходе представляет импульсную характеристику и равно $u\{t\} = \frac{1}{C} \cdot 1(t) = k(t) \cdot 1(t)$. Соотношения (22) — (24) дали ту же функцию.

Рассмотрим консервативное звено с постоянным коэффициентом усиления, операторная передаточная функция которого $K(p) = B/(p^2 + \omega_0^2)$ имеет полюсы $p_1 = j\omega_0$, $p_2 = -j\omega_0$. Вычеты $K(p)$ определяются обычным порядком и равны $\text{Res}_{p_1=j\omega_0} K(p) = \frac{B}{2j\omega_0}$, $\text{Res}_{p_2=-j\omega_0} K(p) = -\frac{B}{2j\omega_0}$. Для определения комплексной частотной характеристики достаточно комплексную передаточную функцию $K(j\omega) = B/(\omega_0^2 - \omega^2)$ и значения вычетов подставить в формулу (8)

$$K\{j\omega\} = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi B}{2j\omega_0} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (25)$$

Реализацией консервативного звена с постоянным коэффициентом усиления может служить цепь рис. 2, у которой операторная передаточная функция для напряжения емкости

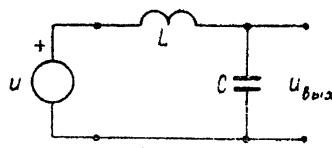


Рис. 2.

$$K_c(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2}. \quad (26)$$

Спектр (25) определяет частотные характеристики электрической цепи

$$K_c\{j\omega\} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + j \frac{\pi\omega_0}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]; \quad (27)$$

$$P_c(\omega) = P_c(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad Q_c(\omega) = \frac{\pi\omega_0}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (28)$$

Для построения импульсной характеристики напряжения емкости достаточно $Q_c(\omega)$ подставить в (19) и вычислить интеграл

$$\begin{aligned} k_c(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi\omega_0}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \sin(\omega t) d\omega = \\ &= \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (t \geq 0). \end{aligned} \quad (29)$$

Цель рис. 3, у которой

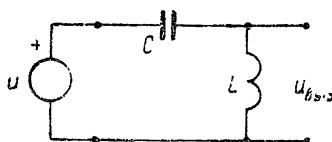


Рис. 3.

$$K_L(p) = \frac{pL}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2}, \quad (30)$$

может служить реализацией консервативного звена с коэффициентом усиления p^2 . Вычеты $K_L(p)$ определяются обычным порядком и равны

$$\operatorname{Res}_{p=j\omega_0} K_L(p) = j\omega_0/2, \quad \operatorname{Res}_{p=-j\omega_0} K_L(p) = -j\omega_0/2.$$

После подстановки комплексной передаточной функции и значений вычетов в формулу (8) получим

$$K_L(j\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} + j \frac{\pi\omega_0}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]; \quad (31)$$

$$P_L(\omega) = P_L(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad Q_L(j\omega) = \frac{\pi\omega_0}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (32)$$

Импульсная характеристика напряжения индуктивности $k_L(t)$ содержит импульс типа дельта-функции. Для построения такой обобщенной функции следует обратиться к интегралу (14) либо (16). Интеграл (19) и мнимая частотная характеристика $Q_L(\omega)$ дают возможность построить только регулярную составляющую $k_L(t)$, что непосредственно следует из (28) и (29), поскольку $Q_L(\omega) = -Q_c(\omega)$. Для определения регулярной и импульсной составляющих $k_L(t)$ используем интеграл (16)

$$\begin{aligned} k_L(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\omega^2 \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{\pi\omega_0}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \sin(\omega t) \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0^2 \cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega - \frac{\omega_0}{2} \sin(\omega_0 t) = \\ &= \delta(t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (33)$$

Интеграл от косинуса сходится в смысле обобщенных функций к $\delta(t)$ [1]. Интеграл от дробной части P_L взят по таблицам [6].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Слабая сходимость и слабые пределы

Последовательность функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, определенных и интегрируемых на интервале (a, b) , называется слабо сходящейся на (a, b) , если для всякой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (\text{П.1})$$

Функция $\varphi(x)$ называется слабым пределом такой последовательности, если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx. \quad (\text{П.2})$$

Рассмотрим последовательности функций

$$\frac{\sin(\omega t)}{\omega}, \quad \frac{\cos(\omega t)}{\omega}, \quad (\text{П.3})$$

когда параметр t неограниченно возрастает, пробегая положительные значения. Известно [7], что для любой непрерывной и ограниченной функции $f(\omega)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = f(0), \quad (\text{П.4})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \frac{\cos(\omega t)}{\omega} d\omega = 0. \quad (\text{П.5})$$

Поэтому последовательности (П.3) являются слабо сходящимися.

Слабым пределом последовательности $\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$ является функция $\varphi(\omega)$, для которой

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \varphi(\omega) d\omega = f(0). \quad (\text{П.6})$$

Такой предел принадлежит классу обобщенных функций и называется дельта-функцией, т. е. $\frac{1}{\pi} \varphi(\omega) = \delta(\omega)$.

Слабый предел $\cos(\omega t)/\omega$, согласно (П.2) и (П.5), равен нулю.

Эти положения обосновывают равенство (4), на основе которого определяются спектральные плотности функций типа (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.
2. А. М. Заседа́й, Радиотехника, 12, № 5, 80 (1957).
3. E. A. Guillemin, Synthesis of passive networks. J. Wiley, N.-Y., 1957.
4. А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон, Переходные процессы и обобщенные функции, изд. Наука, М., 1966.
5. М. А. Айзерман, Теория автоматического регулирования, изд. Наука, М., 1966.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
7. С. Бокнер, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962.

Одесский электротехнический
институт связи им. А. С. Попова.

Поступила в редакцию
14 ноября 1967 г.

FREQUENCY CHARACTERISTICS OF STABLE LINEAR NET WORKS.

A. S. Rosenfeld

The concept of frequency characteristic is correctly defined in terms of classic Fourier mapping for asymptotically stable linear net works, for impulse characteristics are absolutely integrable functions for such net works only. Using theorems on the generalized functions the possibility of definition of the linear net works frequency characteristics is discussed, the impulse characteristics of which are nondamping functions. The notion of frequency characteristics receives correct definition for all classes of stable linear net works at that. The formulas for computation of complex, real and imaginary frequency characteristics of any stable linear net works on the basis of sequential operator transmission function are derived.

УДК 531.391

О СПЕКТРАХ НЕЗАТУХАЮЩИХ СИГНАЛОВ

A. С. Розенфельд

Обсуждается методика построения спектров сигналов, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. Показана некорректность известной методики определения спектров таких сигналов путем введения «гасящего» множителя. Построены обобщенные формулы для определения спектров затухающих и незатухающих сигналов на основе таблиц изображений одностороннего преобразования Лапласа.

Понятие о спектральной плотности сигнала, которое часто называют кратко спектром, определено только для абсолютно-интегрируемых функций, если интеграл Фурье рассматривается как предел в смысле Коши—Римана. Это положение проявляется в виде требования затухания сигналов до нуля при неограниченном росте времени. Требование затухания сигналов существенно ограничивает возможности преобразования Фурье как инструмента анализа динамики линейных систем, поскольку воздействия и реакции таких систем достаточно часто описываются неубывающими функциями, например, гармоническими.

В учебной литературе [1–4] и в монографиях [5–6] ограничения, связанные с требованием абсолютно-интегрируемости сигналов, устраняют с помощью так называемого «гасящего» множителя в виде экспоненты e^{-at} ($a > 0$). Оставаясь в рамках определения интеграла Фурье как предела в смысле Коши—Римана, предлагают определять спектры незатухающих сигналов $f(t)$ как пределы Коши спектров вспомогательных функций $f(t)e^{-at}$ при $a \rightarrow 0$. Такой прием, как показано ниже, некорректен.

Ограничения, связанные с условием абсолютно-интегрируемости функций, удается устранить путем определения интеграла Фурье в более широком смысле, чем предел Коши—Римана. Такое построение выполнено, например, в работе [7]. Один из возможных подходов к решению задачи расширения возможностей преобразования Фурье дан теорией обобщенных функций [8, 9].

Некоторые возможности применения обобщенных функций для анализа линейных динамических систем были раскрыты в [10]. Продолжая это направление, были проанализированы возможности применения обобщенных функций для устранения отмеченных выше ограничений известной инженерной методики спектрального анализа линейных динамических систем. Результаты одного из этапов проведенной работы излагаются в настоящей статье.

Опираясь на определение интеграла Фурье как предела в смысле обобщенных функций, рассматривается простая методика построения спектров сигналов, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. Излагается правило определения спектров таких сигналов в виде обобщенных функций на основе таблиц изображений одностороннего преобразования Лапласа.

Рассмотрим соображения, которые привели к рекомендации опре-

делять спектры незатухающих сигналов с помощью гасящего множителя. Если сигнал $j(t)$ не затухает, но $f(t)e^{-at}$ является абсолютно-интегрируемой функцией, то интеграл Фурье такого вспомогательного сигнала

$$\int_0^\infty [f(t) e^{-at}] e^{-j\omega t} dt = F[f(t) e^{-at}] \quad (1)$$

сходится к пределу в смысле Коши—Римана и определяет спектр вспомогательного сигнала как обычную функцию комплексного параметра $a + j\omega$.

Рассматривая исходный сигнал $f(t)$ как предел $f(t)e^{-at}$ при $a \rightarrow 0$ и выполняя такую предельную операцию под знаком несобственного интеграла (1), приходим к соотношению

$$\int_0^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt = F[f(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} F[f(t) e^{-at}]. \quad (2)$$

Пределы в левой и правой части соотношения (2) определены в одинаковом смысле; для большего числа незатухающих сигналов (1) правые пределы являются обычными функциями ω . Если для таких сигналов справедливо равенство (2), то следует признать, что несобственный интеграл сходится в смысле Коши—Римана и в том случае, когда $f(t)$ не является абсолютно-интегрируемой функцией. Однако последнее утверждение несправедливо, так что в рамках принятого определения сходимости к пределу несправедливо и соотношение (2).

Ошибка, которая привела к неверному соотношению (2), скрыта в операции перехода к пределу под знаком несобственного интеграла, которая не всегда дозволена. Некорректность соотношения (2) проявляется уже при операциях с простейшими незатухающими сигналами. Определяя спектр единичной функции Хевисайда согласно (2), получим функцию $1/j\omega$, в то время как спектральная плотность такого сигнала, как показано далее, описывается обобщенной функцией $\pi\delta(\omega) - 1/j\omega$.

При анализе динамики линейных систем часто приходится рассматривать воздействия и реакции, незатухающие составляющие которых могут быть представлены в виде конечного числа полиномов типа

$$\begin{aligned} \psi(t) &= [A_0 + A_1 t + \dots + A_k t^k] e^{j\omega_v t} \cdot 1(t) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^k \left[\frac{d^{(\alpha)}}{d(j\omega_v)^{(\alpha)}} A_\alpha e^{j\omega_v t} \right] 1(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где A_α , ω_v — постоянные, k — произвольное, целое, положительное число. Производные вычисляются обычным порядком; производной порядка $\alpha = 0$ соответствует функция $A_0 e^{j\omega_v t}$.

Преобразование Фурье является линейной операцией; для построения спектра полинома (3) достаточно определить спектр его простейшего слагаемого

$$F[e^{j\omega_v t} \cdot 1(t)] = \int_0^\infty e^{j(\omega_v - \omega) t} dt = \frac{1}{j(\omega - \omega_v)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{j(\omega_v - \omega) t}}{j(\omega_v - \omega)}. \quad (4)$$

Предел правой части (4) не существует в классе обычных функций, и интеграл относится к категории расходящихся. Однако в классе обобщенных функций такой предел однозначно определен и выражается через дельта-функцию [9]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{j(\omega_v - \omega)t}}{j(\omega_v - \omega)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\cos(\omega_v - \omega)t}{j(\omega_v - \omega)} + \frac{\sin(\omega_v - \omega)t}{\omega_v - \omega} \right] = \pi \delta(\omega - \omega_v). \quad (5)$$

Поэтому в классе обобщенных функций интеграл (4) является сходящимся и представляется в виде суммы импульсной и регулярной составляющих

$$\int_0^\infty e^{j(\omega_v - \omega)t} dt = \pi \delta(\omega - \omega_v) + \frac{1}{j(\omega - \omega_v)}. \quad (6)$$

Обратное преобразование Фурье, выполненное над каждым слагаемым спектра (6), в сумме дает исходный сигнал

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\pi \delta(\omega - \omega_v) + \frac{1}{j(\omega - \omega_v)} \right] e^{j\omega t} d\omega = \\ & = \frac{1}{2} e^{-\omega_v t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_v t} \cdot [1(t) - 1(-t)] = e^{j\omega_v t} \cdot 1(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Интеграл от регулярной составляющей спектра (6) вычислен согласно теореме о вычетах. При этом учтен коэффициент 0,5, поскольку полюс подынтегральной функции $\omega = \omega_v$ расположен на границе контура интегрирования [11].

Располагая спектром элементарного незатухающего сигнала, спектры остальных слагаемых полинома (4) определяем как производные интеграла (6) по параметру $j\omega$:

$$\frac{d^{(2)}}{d(j\omega_v)^{(2)}} \int_0^\infty e^{j(\omega_v - \omega)t} dt = \pi j^2 \delta^{(2)}(\omega - \omega_v) + \frac{\alpha!}{[j(\omega - \omega_v)]^{\alpha+1}} \quad (8)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Спектром полинома $\psi_v(t)$, согласно (3), (6) и (8), является сумма

$$F[\psi_v(t)] = \sum_{\alpha=0}^k A_{\alpha v} \left\{ \pi j^2 \delta^{(2)}(\omega - \omega_v) + \frac{\alpha!}{[j(\omega - \omega_v)]^{\alpha+1}} \right\}. \quad (9)$$

Соотношения (6), (8), (9) и свойства линейности преобразования Фурье позволяют определять спектры относительно широкого класса сигналов, незатухающие составляющие которых могут быть представлены полиномами типа $\psi_v(t)$. Спектры таких сигналов содержат импульсные составляющие в виде дельта-функций и ее производных и являются обобщенными функциями частоты.

Спектры затухающих сигналов обычно определяются по таблицам изображений, составленным согласно правилам одностороннего преобразования Лапласа. Правило перехода от изображения к спектру сигнала дается формулой

$$F(j\omega) = [F(p)]_{p=j\omega}. \quad (10)$$

Результатом такой подстановки является обычная функция частоты, которая представляет спектр соответствующего затухающего оригинала. Это известное положение целесообразно обобщить так, чтобы по таблицам изображений одностороннего преобразования Лапласа можно было определять спектры как затухающих, так и незатухающих сигналов.

Обращаясь к этой задаче, сопоставим изображения слагаемых полинома (3) и их спектры, определенные формулами (6) и (8).

$$L[e^{j\omega_v t} \cdot 1(t)] = \int_0^\infty e^{j\omega_v t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p - j\omega_v}. \quad (11)$$

$$L[t^\alpha e^{j\omega_v t} \cdot 1(t)] = \frac{d^{(\alpha)}}{d(j\omega_v)^{(\alpha)}} \left\{ \frac{1}{p - j\omega_v} \right\} = \frac{\alpha!}{(p - j\omega_v)^{\alpha+1}} \quad (12)$$

$(\alpha = 1, 2, \dots, k).$

Изображения (11) и (12) являются дробно-рациональными функциями параметра p , которые имеют соответственно простой и кратный полюс в точке $p = j\omega_v$, мнимой оси. Аналогичную структуру имеют регулярные составляющие спектров (6) и (8). Для построения таких составляющих спектра неубывающего сигнала достаточно в изображении выполнить подстановку $p = j\omega$.

Отличием спектров (6) и (8) являются импульсные составляющие. При этом простому полюсу изображения (11) соответствует импульс в виде дельта-функции; полюсу кратности $\alpha + 1$ изображения (12) соответствует импульс в виде α -и производной дельта-функции. Особенности импульсов расположены в точке $\omega = \omega_v$, координата которой совпадает с координатой полюса изображения на мнимой оси. Амплитуды импульсов отличаются от коэффициентов изображений (11) и (12) постоянным множителем, равным $\frac{1}{\alpha!}$.

Отмеченные связи между изображениями и спектрами простейших сигналов, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции, позволяют обобщить формулу (10). Построим такие обобщенные формулы, поочередно рассматривая случаи, когда на мнимой оси расположены только простые, либо кратные полюсы изображений.

Все полюсы изображений сигналов, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции, расположены в левой полуплоскости и на мнимой оси. Когда на мнимой оси расположено конечное число m простых полюсов $j\omega_v$, изображения таких сигналов, согласно теореме о разложении на простые дроби, могут быть представлены в виде сумм типа

$$F(p) = F_s(p) + \sum_{v=1}^m \frac{B_v}{p - j\omega_v}, \quad (13)$$

где $F_s(p)$ — составляющая изображения, все полюсы которой расположены в левой полуплоскости, B_v — постоянные коэффициенты, которые вычисляются как вычет $F(p)$ при $p = j\omega_v$.

Функция $F_s(p)$ является изображением затухающей составляющей сигнала, поскольку все ее полюсы расположены в левой полуплоскости. Спектр такой составляющей можно определять согласно (10). Остальные слагаемые (13) отличаются от изображения (11) только постоянными коэффициентами B_v , соответствующие им спектры можно определять по формуле (6). Спектр полного сигнала, изображение которого представлено суммой (13), равен

$$F(j\omega) = [F_s(p)]_{p=j\omega} + \sum_{v=1}^m \frac{B_v}{j(\omega - \omega_v)} + \pi \sum_{v=1}^m B_v \delta(\omega - \omega_v) = \quad (14)$$

$$= [F(p)]_{p=j\omega} + \pi \sum_{v=1}^m B_v \delta(\omega - \omega_v).$$

Когда на мнимой оси расположено m полюсов $j\omega_v$, каждый кратностью k_v , изображение незатухающего сигнала может быть представлено в виде суммы типа

$$F(p) = F_s(p) + \sum_{v=1}^m \sum_{\alpha=0}^{k_v-1} \frac{B_{va}}{(p-j\omega_v)^{\alpha+1}}, \quad (15)$$

где $F_s(p)$ — изображение затухающей составляющей сигнала, B_{va} — постоянные коэффициенты, равные

$$B_{va} = \frac{1}{(k_v - 1 - \alpha)!} \left\{ \frac{d^{(k_v-1-\alpha)}}{dp^{(k_v-1-\alpha)}} [(p-j\omega_v)^{k_v} F(p)] \right\}_{p=j\omega_v} \quad (16)$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, k_v - 1).$$

Слагаемые суммы правой части (15) и изображения (11), (12) по своей структуре аналогичны и отличаются только постоянными коэффициентами. Согласно (6) и (8) спектр незатухающего сигнала, изображение которого имеет кратные корни на мнимой оси, можно определять по формуле

$$F(j\omega) = [F(p)]_{p=j\omega} + \pi \sum_{v=1}^m \sum_{\alpha=0}^{k_v-1} j^\alpha \frac{B_{va} - \delta^{(v)}(\omega - \omega_v)}{\alpha!}. \quad (17)$$

Соотношения (14), (17) устанавливают связи между изображениями и спектрами сигналов, все полюсы которых расположены в левой полу-плоскости и на мнимой оси. Они позволяют использовать таблицы изображений при выполнении операций прямого и обратного преобразования Фурье над сигналами, которые растут не быстрее степенной функции. Рассмотрим эти возможности на нескольких примерах.

1) Изображение единичной функции $1(t)$ равно $1/p$. Полюс изображения расположен в точке $p = 0$ мнимой оси, так что спектр такого сигнала можно определить по формуле

$$F[1(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega). \quad (18)$$

2) Изображение линейно нарастающей функции $kt \cdot 1(t)$ равно k/p^2 и имеет полюс в точке $p = 0$ кратности два. Спектр такого сигнала определяем по формуле (17), полагая $\alpha = 1$,

$$F[kt] = \frac{k}{(j\omega)^2} + k\pi j \delta'(\omega). \quad (19)$$

3) Изображение $\omega_0/(p^2 + \omega_0^2)$ синусоидальной функции $\sin(\omega_0 t) \cdot 1(t)$ имеет два простых полюса в точках $p_1 = +j\omega_0$ и $p_2 = -j\omega_0$. Вычеты в этих полюсах соответственно равны $1/2j$, $-1/2j$, так что спектр такой синусоиды, согласно (14), определяется суммой

$$F[\sin(\omega_0 t) \cdot 1(t)] = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (20)$$

4) Изображение «линейно нарастающей синусоиды» $t \sin(\omega_0 t) \cdot 1(t)$

равно $2\omega_0 p/(p^2 + \omega_0^2)^2$ и имеет на мнимой оси два полюса: $p_1 = +j\omega_0$, $p_2 = -j\omega_0$, каждый кратности два. Коэффициенты разложения такого изображения на простые дроби определяем согласно (16), т. е. $B_{11} = -1/2j$, $B_{10} = 0$, $B_{21} = -1/2j$, $B_{20} = 0$. Спектр сигнала определяем по формуле (17) в виде суммы регулярной и импульсных составляющих:

$$F[t \sin(\omega_0 t) \cdot 1(t)] = \frac{2j\omega\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} + \frac{\pi}{2} [\delta'(\omega - \omega_0) - \delta'(\omega + \omega_0)]. \quad (21)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Атабеков, Теоретические основы электротехники, ч. 1, изд. Энергия, М.—Л., 1966
2. И. С. Гоноровский, Радиотехнические цепи и сигналы, изд. Сов. радио, М., 1966
3. Г. В. Зевске, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов, Основы теории цепей, изд. Энергия, М.—Л., 1965
4. Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян, Теоретические основы электротехники, 1, изд. Энергия, М.—Л., 1966.
5. Э. Вебер, Переходные процессы в линейных цепях, изд. Сов. радио, М., 1958.
6. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, Физматгиз, М., 1962
7. С. Бокнер, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962.
8. Л. Шварц, Математические методы для физических наук, изд. Мир, М., 1965.
9. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1959.
10. А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон, Переходные процессы и обобщенные функции, изд. Наука, М., 1966.
11. Е. Г. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ГТТИ, М—Л., 1933.

Одесский электротехнический институт связи
им. А. С. Попеска.

Поступила в редакцию
10 июля 1967 г.

ABOUT THE SPECTRUM OF NONDAMPING SIGNALS

A. S. Rosenfeld

The technique of signal spectrum construction, increasing on infinity not quicker than power functions is discussed. The noncorrectness of the known technique of spectra definition of such signals by means of „damping“ multiplier is shown. Generalized formulas to derive the spectrum of damping and nondamping signals on the basis of tables of one side Laplacian transformation representation are given.

УДК 531.391

**К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ ОДНОКОНТУРНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ
С ИНТЕГРИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ**

A. С. Алексеев, Т. Б. Макарова

Методом точечных преобразований исследуется динамика одноконтурной импульсной системы управления с интегрирующим звеном и одной скалярной нелинейностью. В общем и некоторых частных случаях получены уравнения периодических движений, условия их устойчивости. Основное внимание удалено исследованию движений с периодом, вдвое большим периода импульсного элемента. Для простейших случаев полиномиальных нелинейностей приведены конкретные результаты.

В работах [1, 2] показаны некоторые преимущества, которыми обладает метод точечных преобразований в применении к исследованию динамики нелинейных импульсных систем произвольного порядка. Интерес к такого рода управляющим динамическим системам в настоящее время значительно возрос [3].

В работе методом точечных преобразований исследуется динамика (в основном простейшие периодические движения) нелинейной импульсной системы достаточно общего и распространенного вида, но настолько упрощенной, что для нее удается получить ряд интересных результатов.

1. Рассмотрим динамику нелинейной импульсной системы управления, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\mu), \\ \dot{\mu} &= \sum_{j=0}^{\infty} (g(t) + c^T x) \delta(t - j\tau), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где τ — константа (период идеального импульсного элемента), A — постоянная неособая матрица ($n \times n$), b и c — постоянные матрицы-столбцы ($n \times 1$), $x(t)$ — такой же столбец искомых функций, $\mu(t)$, $\varphi(\mu)$ и $g(t)$ — искомая, заданная и заданная периодическая с периодом, кратным τ , скалярные функции.

Уравнения (1.1) являются частным случаем уравнений (5) из [1] и представляют собой динамику одноконтурной идеальной импульсной системы управления, в цепи которой последовательно соединены суммирующее звено, идеальный импульсный элемент, имеющий период τ , идеальное интегрирующее звено, постоянная времени которого выбрана в качестве масштаба времени, статическое нелинейное звено с нелинейной характеристикой $\varphi(\mu)$ и линейное звено порядка n . Заметим, что от системы с различными реальными импульсными элементами обычно удается перейти к системе с идеальным элементом [4–6].

Решение системы (1.1) при $x(-0)=x^0$ и $\mu(-0)=\mu^0$ может быть записано [7, 8] в виде

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b \varphi(\mu(s)) ds, \quad (1.2)$$

$$\mu(t) = \mu^0 + \sum_{j=0}^{\lfloor t/\tau \rfloor} (g^j + c^T x^j) 1(t-j\tau),$$

где $g(j\tau-0) \equiv g^j$ и $x(j\tau-0) \equiv x^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), обозначая далее $\mu(j\tau-0) \equiv \mu^j$ и переходя аналогично [1] к соответствующему движению системы (1.1) точечному преобразованию в фазовом пространстве, осуществляющему с каждым тактом импульсного элемента, получим для $j=1, 2, \dots$

$$x^j = e^{A\tau} x^{j-1} + (e^{A\tau} - E) A^{-1} b \varphi(\mu^j), \quad (1.3)$$

$$\mu^j = \mu^{j-1} + g^{j-1} + c^T x^{j-1} = \mu^0 + \sum_{i=0}^{j-1} (g^i + c^T x^i). \quad (1.4)$$

Используя то обстоятельство, что матрицы A , A^{-1} и $e^{A\tau}$ попарно коммутативны [9], нетрудно указанное точечное преобразование, осуществляющее за время $T=m\tau$ при произвольном m , получить из (1.3) и (1.4) методом индукции в виде

$$x^m = e^{Am\tau} x^0 + (e^{A\tau} - E) A^{-1} \left[\sum_{j=1}^m \varphi(\mu^j) e^{(m-j)A\tau} \right] b, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mu^m &= \mu^0 + \sum_{j=0}^{m-1} g^j + c^T \left\{ \frac{e^{mA\tau} - E}{e^{A\tau} - E} x^0 - \right. \\ &\quad \left. - A^{-1} b \sum_{j=1}^m \varphi(\mu^j) + A^{-1} \left[\sum_{j=1}^m \varphi(\mu^j) e^{(m-j)A\tau} \right] b \right\}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где величины μ^j определены выражением (1.4).

2. Если теперь $T=m\tau$ кратно периоду управляющего воздействия $g(t)$ или $g(t)=0$, то для существования в системе (1.1) периодического движения с периодом $T=m\tau$ должна существовать у преобразования (1.5), (1.6) инвариантная точка, не являющаяся точкой меньшей кратности, т. е., в частности, должно выполняться соотношение

$$x^m = x^0 = x^*, \quad \mu^m = \mu^0 = \mu^*, \quad (2.1)$$

что совместно с (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6) определяет координаты изображающей точки на этом периодическом движении в моменты времени $k\tau$, $(k+1)\tau$, ..., $(k+m-1)\tau$ при произвольном целом k .

Устойчивость этого периодического движения [10] будет определяться принадлежностью внутренности единичного круга z -плоскости корней характеристического уравнения

$$\Delta_m(z) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^m}{\partial x^0} - Ez & \frac{\partial x^m}{\partial \mu^0} \\ \frac{\partial \mu^m}{\partial x^0} & \frac{\partial \mu^m}{\partial \mu^0} - z \end{pmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

в котором производные взяты в инвариантной точке.

Рассматривая точечные преобразования (1.5) и (1.6) в инвариантной точке (2.1), прежде всего следует заметить, что для соответствующих этой точке периодических движений (с периодом $T=m\tau$) исследуемой нелинейной импульсной системы (1.1) при условии $g(t+m\tau)=g(t)$ с необходимостью выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^m g(j\tau-0) = c^T A^{-1} b \sum_{j=1}^m \varphi(\mu^j), \quad (2.3)$$

а при условии $g(t)\equiv 0$, т. е. для «автономной» импульсной системы

$$\sum_{j=1}^m \varphi(\mu^j) = 0. \quad (2.4)$$

Это обстоятельство подчеркивает ту «симметрирующую» роль интегрирующего звена в системе (1.1), на которую еще в 1953 г. указывал Я. З. Цылкин при обсуждении вопросов теории релейных систем управления на 2 Всесоюзном совещании по автоматическому регулированию.

Таким образом, для нахождения периодических движений системы (1.1) с периодом $T=m\tau$ можно при условии (2.1) заменить (1.6), или одно из преобразований в (1.5) одним из условий (2.3) или (2.4) в зависимости от присутствия периодического управляющего воздействия $g(t)$.

Кроме того, удается в явном виде получить для системы (1.1) выражение для свободного члена характеристического уравнения (2.2). Положив в детерминанте (2.2) $z=0$, заметим, что матрица линилизированного в инвариантной точке (2.1) точечного преобразования (1.5), (1.6) есть произведение в обратном порядке матриц D_j , однократных линеаризованных в той же точке преобразований (1.3), (1.4). Поэтому свободный член характеристического уравнения (2.2) равен

$$\det e^{mA\tau}. \quad (2.5)$$

Действительно, для $j=1, 2, \dots, m$

$$\det D_j = \det \begin{Bmatrix} e^{A\tau} + (e^{A\tau} - E) A^{-1} b \varphi'(\mu^j) c^T & (e^{A\tau} - E) A^{-1} b \varphi'(\mu^j) \\ c^T & 1 \end{Bmatrix} = \det e^{A\tau}, \quad (2.6)$$

в чем нетрудно убедиться, вычитая из верхних n строк детерминанта (2.6) нижнюю строку, умноженную слева на столбец $(e^{A\tau} - E) A^{-1} b \times \varphi'(\mu^j)$.

3. Воспользуемся теперь полученными результатами для исследования периодических движений системы (1.1) с периодом $T=2\tau$ при условии $g=0$. В этом случае, полагая $m=2$ в (1.4), (1.5), (2.1) и (2.4), получим

$$x^2 = e^{2A\tau} x^0 + (e^{A\tau} - E) A^{-1} [\varphi(\mu^1) e^{A\tau} + \varphi(\mu^2)] b, \quad (3.1)$$

$$\varphi(\mu^1) + \varphi(\mu^2) = 0, \quad (3.2)$$

$$\mu^1 = \mu^0 + c^T x^0, \quad \mu^2 = \mu^0 + c^T (x^0 + x^1), \quad (3.3)$$

$$x^2 = x^0 \equiv x, \quad \mu^2 = \mu^0 \equiv \mu. \quad (3.4)$$

Таким образом, для состояний равновесия и периодических движе-

ний системы (1.1) с периодом $T=2\pi$ должны выполняться соотношения

$$x = a^{-1} A^{-1} b \varphi(\mu), \quad c^T x = \beta \varphi(\mu), \quad (3.5)$$

$$\varphi(\mu) + \varphi(\mu + \beta \varphi(\mu)) = 0, \quad (3.6)$$

где матрица

$$a = (e^{A\pi} + E) (e^{A\pi} - E)^{-1}, \quad (3.7)$$

а скаляр

$$\beta = c^T a^{-1} A^{-1} b. \quad (3.8)$$

Значения μ в инвариантной точке определяются уравнением (3.6), с помощью (3.5) в ней определяются остальные координаты x . Из условия (3.6) следует, что в рассматриваемой системе нет периодических движений в том случае, если нелинейная функция φ знакопределенна.

Пусть теперь функция φ является нечетной, тогда прежде всего у уравнения (3.6) существует решение, определяемое уравнением

$$\mu = -\frac{\beta}{2} \varphi(\mu) = -\frac{c^T x}{2}. \quad (3.9)$$

Пусть, далее, нечетная функция φ представляется в виде

$$\varphi(\mu) = -\varphi(-\mu) = \mu \psi(\mu), \quad (3.10)$$

где $\psi(\mu)$ — четная функция, тогда у уравнения (3.6) согласно (3.9), (3.10), имеется решение $\mu=0$ и решения, определяемые уравнениями

$$\psi(\mu) = 0, \quad \psi(\mu) = -2/\beta. \quad (3.11)$$

Первые из этих решений соответствуют состояниям равновесия, а решения последнего уравнения — симметричным периодическим движениям системы (1.1). Если теперь предположить, что $\varphi(\mu)$ есть полином степени $2k+1$, представляющий нечетную функцию, то $\psi(\mu)$ будет четным полиномом степени $2k$, а полином в (3.6) будет делиться на выражение

$$\mu \psi(\mu) (\psi(\mu) + 2/\beta). \quad (3.12)$$

После деления левой части (3.6) на произведение $\mu \psi(\mu)$ получим

$$1 + \beta \psi(\mu) (1 + \beta \psi(\mu)) + \frac{\psi(\mu(1 + \beta \psi(\mu)))}{\psi(\mu)}. \quad (3.13)$$

Учитывая четность и степень $2k$ полинома $\psi(\mu)$, можно записать

$$\psi(\mu(1 + \beta \psi(\mu))) = \psi(\mu) + \sum_{j=1}^k \frac{\psi^{(2j)}(0)}{(2j)!} \mu^{2j} \sum_{i=1}^{2j} C_{2j}^i \beta^i \psi^i(\mu), \quad (3.14)$$

поэтому уравнение, соответствующее (3.13) получится в виде

$$2 + \beta \psi(\mu) + (1 + \beta \psi(\mu)) \Phi(\beta, \mu) = 0, \quad (3.15)$$

где

$$\Phi(\beta, \mu) = \beta \mu^2 \sum_{j=1}^k \frac{\psi^{(2j)}(0)}{(2j)!} \mu^{2(j-1)} \sum_{i=1}^{2j} C_{2j}^i \beta^{i-1} \psi^{i-1}(\mu). \quad (3.16)$$

После деления левой части (3.15) на третий множитель (3.12) получим уравнение

$$1 + \Phi(\beta, \mu) - \frac{\Phi(\beta, \mu)}{2 + \beta \psi(\mu)} = 0, \quad (3.17)$$

из которого следует, что выражение (3.16) делится на этот множитель, т. е. третье слагаемое (3.17) представляется в виде

$$\beta \mu^2 \sum_{j=1}^k \frac{\psi^{(2j)}(0)}{(2j)!} \mu^{2(j-1)} \sum_{i=0}^{2(j-1)} \gamma_i^{2j} y^{2(j-1)-i}, \quad (3.18)$$

где $y = \beta\psi(\mu)$, а коэффициенты γ_i^{2j} вычисляются по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\gamma_0^{2j} = 1, \dots, \gamma_i^{2j} = C_{2j}^i - 2\gamma_{i-1}^{2j}. \quad (3.19)$$

Из факта деломости полинома (3.16) на $\beta\psi(\mu) + 2$ следует, в частности, справедливость соотношения

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{2j} (-2)^{i-1} C_{2j}^i = 0, \quad (3.20)$$

которая может быть установлена и непосредственно (см. Приложение 1).

Таким образом, в случае, когда нелинейность в системе (1.1) является полиномом и представима в виде (3.10), в уравнении (3.6) для нахождения инвариантных точек преобразования (1.5), (1.6) при $m = 2$ возможно отделение корней, определяемых с помощью (3.11), после чего оно примет вид

$$1 + \beta \mu^2 \sum_{j=1}^k \frac{\psi^{(2j)}(0)}{(2j)!} \mu^{2(j-1)} \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^{2j} C_{2j}^i \beta^{i-1} \psi^{i-1}(\mu) - \sum_{i=0}^{2(j-1)} \gamma_i^{2j} \beta^{2j-i-2} \psi^{2j-i-2}(\mu) \right] = 0, \quad (3.21)$$

в котором коэффициенты γ_i^{2j} определяются с помощью выражений (3.19), учитывая которые можно для (3.21) получить

$$1 + \beta \mu^2 \sum_{j=1}^k \frac{\psi^{(2j)}(0)}{(2j)!} \mu^{2(j-1)} \left[\sum_{i=0}^{2j-2} \delta_i^{2j} \beta^{i+2} \psi^{i+2}(\mu) + j(2j-1)\beta\psi(\mu) + 2j \right], \quad (3.22)$$

а коэффициенты δ_i^{2j} определять по формулам

$$\delta_i^{2j} = C_{2j}^{i+3} - \gamma_{2j-i-2}^{2j}. \quad (3.23)$$

Уравнения (3.22) среди своих решений содержат только те значения μ , которые дают инвариантные точки, соответствующие несимметричным периодическим движениям с периодом $T = 2\pi$.

Заметим, что для периодических движений с периодом $T = \tau$ и состояний равновесия системы (1.1) из (1.3) и (1.4) при $j = 1$, $g = 0$, или из (2.1) и (2.4) при $m = 1$, нетрудно получить

$$\varphi(\mu) = 0, \quad x = 0. \quad (3.24)$$

4. Характеристический детерминант (2.2), служащий для исследования устойчивости периодических движений системы (1.1), соответствующих инвариантным точкам (2.1), обладает свойством (2.5) и представим в виде

$$\Delta_m(z) = \det \begin{bmatrix} e^{mAt} - Ez & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix} + \hat{B}_m^*, \quad (4.1)$$

где матрица \hat{B}_m^* (см. Приложение 2) имеет ранг не выше единицы. Такое представление позволяет давать весьма простой, указанный в Приложении 2, способ его получения при любых m , упрощать, а в случае, когда матрица A диагонализирована, раскрывать аналогично тому, как это делается в [3] для линейных импульсных систем и $m=1$.

Так, например, для случая $m=2$ (см. Приложение 3) нетрудно получить [11] при

$$z \neq 1 + d\varphi_1' \quad (4.2)$$

$$\Delta_2(z) = (1 + d\varphi_1' - z) \times \quad (4.3)$$

$$\times \det \left\{ e^{2A\tau} - Ez - \frac{e^{A\tau} B c^T e^{A\tau} \varphi_1' + z[B c^T \varphi_2' (e^{A\tau} + E) + \varphi_1' e^{A\tau} B c^T + B c^T d \varphi_1' \varphi_2']}{1 + d\varphi_1' - z} \right\},$$

где

$$d = c^T B, \quad B = (e^{A\tau} - E) A^{-1} b, \quad (4.4)$$

$$\varphi_i' = \left. \frac{d\varphi}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_i^*} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Если же матрица A предварительно диагонализирована и ее ненулевые собственные значения α_j ($j = 1, 2, \dots, n$) различны, то детерминант (4.2) может быть раскрыт и представлен (Приложение 4) в виде

$$\begin{aligned} \Delta_n(z) = & -z \prod_{j=1}^n (e^{2\alpha_j\tau} - z) \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^n \frac{b_j c_j}{a_j} \frac{(e^{2\alpha_j\tau} - 1)^2}{e^{2\alpha_j\tau} - z} \left[a_j (\varphi_1' + \varphi_2') + \frac{b_j c_j}{\alpha_j} \varphi_1' \varphi_2' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где a_j — j -й элемент диагональной матрицы (3.7).

Выражение (4.5) дает в рассматриваемом случае характеристическое уравнение

$$1 - \frac{1}{z} + (\varphi_1' + \varphi_2') \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{e^{2\alpha_j\tau} - 1}{e^{2\alpha_j\tau} - z} + \varphi_1' \varphi_2' \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \frac{(e^{2\alpha_j\tau} - 1)^2}{e^{2\alpha_j\tau} - z} = 0, \quad (4.6)$$

$$\beta_j = b_j c_j / a_j,$$

определенное область устойчивости периодического движения при $m=2$. Границы D -разбиения по двум параметрам [10, 12] (в качестве которых могут быть взяты, скажем, φ_1' и φ_2' , $\varphi_1' + \varphi_2'$ и $\varphi_1' \varphi_2'$) определяют уравнения

$$(\varphi_1' + \varphi_2') \sum_{j=1}^n \beta_j + \varphi_1' \varphi_2' \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{a_j} = 0 \quad (4.7)$$

$$(z = 1),$$

$$2 + (\varphi_1' + \varphi_2') \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{e^{2\alpha_j\tau} - 1}{e^{2\alpha_j\tau} + 1} + \varphi_1' \varphi_2' \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \frac{(e^{2\alpha_j\tau} - 1)^2}{e^{2\alpha_j\tau} + 1} = 0 \quad (4.8)$$

$$(z = -1)$$

и при $z = e^{i\varphi} = x + iy$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \neq 0$, $-1 < x < 1$

$$1 + (\varphi'_1 + \varphi'_2) \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{e^{2\alpha_j \tau} - 1}{(e^{2\alpha_j \tau} - x)^2 + 1 - x^2} + \varphi'_1 \varphi'_2 \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \frac{(e^{\alpha_j \tau} - 1)^2}{(e^{2\alpha_j \tau} - x)^2 + 1 - x^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$1 + (\varphi'_1 + \varphi'_2) \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{e^{2\alpha_j \tau} (e^{\alpha_j \tau} - 1)}{(e^{2\alpha_j \tau} - x^2) + 1 - x^2} + \varphi'_1 \varphi'_2 \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \frac{e^{2\alpha_j \tau} (e^{\alpha_j \tau} - 1)^2}{(e^{2\alpha_j \tau} - x)^2 + 1 - x^2} = 0. \quad (4.10)$$

Уравнения (4.9) и (4.10), в частности, показывают, что граница $e^{i\varphi}$ отсутствует при условии $b_j c_j > 0$.

Заметим, что для исследования устойчивости периодических движений с периодом $T=\tau$ и состояний равновесия, аналогично предыдущему, легко получить из (1.3) и (1.4) при $z \neq 1$, что

$$\Delta_1(z) = (1-z) \det \left(e^{Az} - Ez - \frac{z\varphi'_1 B c^T}{1-z} \right) \quad (4.11)$$

и, кроме того, для диагональной матрицы A раскрыть $\Delta_1(z)$ в виде

$$\Delta_1(z) = -z \prod_{j=1}^n (e^{\alpha_j \tau} - z) \left(1 - \frac{1}{z} + \varphi'_1 \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{e^{\alpha_j \tau} - 1}{e^{\alpha_j \tau} - z} \right), \quad (4.12)$$

что при $z = 1$ (Приложение 4) и при $z = -1$ дает границы

$$\varphi'_1 = 0, \quad 2 + \varphi'_1 \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{a_j} = 0, \quad (4.13)$$

а для $z = e^{i\varphi}$ уравнения границ ($\varphi'_1 \neq 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{e^{\alpha_j \tau} - 1}{(e^{\alpha_j \tau} - x)^2 + 1 - x^2} &= 0, \\ 1 + \varphi'_1 \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{e^{\alpha_j \tau}}{(e^{\alpha_j \tau} - x)^2 + 1 - x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

5. В качестве примеров приведем результаты нахождения инвариантных точек μ_i по уравнению (3.6) для простейших нечетных функций $\varphi(\mu)$ в случае $g = 0$. Кружочком, звездочкой сверху, справа будут помечены инвариантные точки, определяющие соответственно состояния равновесия, симметричные и несимметричные периодические движения.

Значения x для них находятся из (3.5):

$$1) \quad \varphi(\mu) = k_1 \mu, \quad \mu^0 = 0; \quad (5.1)$$

$$2) \quad \varphi(\mu) = k_1 \mu + k_2 \mu^2, \quad \mu_1^0 = 0, \quad \mu_2^0 = -k_1/k_2; \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3,4}^* &= \{-(2\beta k_2 + k_1 k_2 \beta^2) \pm [(2\beta k_2 + k_1 k_2 \beta^2)^2 - \\ &\quad - 4\beta^2 k_2^2 (k_1 \beta + 2)]^{1/2}\} (2\beta^2 k_2^2)^{-1}; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$3) \quad \varphi(\mu) = \mu^3, \quad \mu_{1,2,3}^0 = 0, \quad \mu_{4,5}^* = \pm \sqrt[3]{-2/\beta}; \quad (5.4)$$

$$4) \quad \varphi(\mu) = \sqrt[3]{\mu}, \quad \mu_1^0 = 0, \quad \mu_{2,3}^* = \pm (\beta/2) \sqrt{-\beta/2}; \quad (5.5)$$

$$5) \quad \varphi(\mu) = \mu(k - \mu^2), \quad \mu_1^0 = 0, \quad \mu_{2,3}^0 = \pm \sqrt{k}; \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mu_{4,5}^* &= \pm \sqrt{2/\beta + k}, & \mu_{6,7}^* &= \pm \sqrt{(1 + \beta k + \gamma)/2\beta}, \\ \mu_{8,9}^* &= \pm \sqrt{(1 + \beta k - \gamma)/2\beta}; \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\gamma = \sqrt{(1 + \beta k)^2 - 4}, \quad (5.8)$$

где величина β определена в (3.8).

Условия существования указанных инвариантных точек выглядят в виде условий рациональности радикалов.

Исследование устойчивости для кратности рассмотрим для простейшего случая системы (1.1), когда $A = b = -1$, $g = 0$, и $c = 1$. Для $m = 2$ уравнение (4.6) дает условие устойчивости

$$-(1 + a^2) < a(\varphi'_1 + \varphi'_2) + \varphi'_1 \varphi'_2 < 0.$$

Условия устойчивости инвариантных точек в случаях 1—5 будут следующие.

1) $k_1 > -2a$, при $k_1 = -2a$ имеет место (подобно центру) континуум периодических движений.

2) Для $\mu_1^0 - 2a < k_1 < 0$, а для $\mu_2^0 \quad 0 < k_1 < 2a$.

Для μ_3^* (соответственно при $k_1 < -2a$ и $k_1 > 2a$) и для μ_4^* получим

$$-\sqrt{5a^2 + 1} < k_1 < 0, \quad 0 < k_1 < \sqrt{5a^2 + 1}. \quad (5.9)$$

3) Точка $\mu_{1,2,3}^0$ соответствует устойчивому состоянию равновесия, а $\mu_{4,5}^*$ — неустойчивому симметричному движению.

4) Точка μ_1^0 соответствует неустойчивому состоянию равновесия, а $\mu_{2,3}^*$ — устойчивому симметричному движению ($z_1 = 1$, $z_2 = -e^{-2\pi}$).

5) Для $\mu_1^0 - 2a < k < 0$, для $\mu_{2,3}^0 \quad 0 < k < a$, для симметричного движения, соответствующего точке $\mu_{4,5}$,

$$-3a < k < -2a. \quad (5.10)$$

Для несимметричных движений, соответствующих точкам $\mu_{6,7}^*$, $\mu_{8,9}^*$, условие устойчивости соответственно при $k > a$ и $k < -3a$ будет

$$-a - \sqrt{\frac{9a^2 + 1}{2}} < k < -a + \sqrt{\frac{9a^2 + 1}{2}}. \quad (5.11)$$

В заключение интересно отметить, что в последнем случае исследование симметричного периодического движения с $T = 4\pi$, где условия симметрии определяют равенства $x^0 = -x^2 = x^4$, $\mu^0 = -\mu^2 = \mu^4$, $x^1 = -x^3$, $\mu^1 = -\mu^3$, нахождение инвариантной точки приводит к уравнению четвертой степени, а детерминант (4.6) приводится к уравнению

$$z^2 - z \{1 + e^{-4\pi} - (1 - e^{-\pi})^4 [a^2(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - \varphi_1'^2 \varphi_2'^2]\} + e^{-4\pi} = 0, \quad (5.12)$$

условие устойчивости получается в виде

$$0 < a^2(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - \varphi_1'^2 \varphi_2'^2 < 2 \frac{1 + e^{-4\pi}}{(1 - e^{-\pi})^4}. \quad (5.13)$$

Заметим, наконец, что процедура исследования периодических движений импульсных систем, рассмотренная здесь и в [1, 2], во многом напоминает исследование таких движений в релейных системах [10].

Здесь только в силу изохронности точечных преобразований центр тяжести переносится на нелинейность, которая в релейных системах, наоборот, вносит известные упрощения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приведем прямое доказательство равенства (3.20) методом индукции, которое любезно предложил нам Ф. Ф. Минчук. Действительно, это равенство выполняется при $j = 1, 2, 3$. Предполагая его справедливость при $j = n$, покажем, что оно выполняется и при $j = n + 1$. Для этого воспользуемся известным равенством

$$C_{k+1}^m = C_k^{m-1} + C_k^m, \quad (\text{П.1.1})$$

из которого следует, что

$$C_{2n+2}^l = C_{2n}^{l-2} + 2C_{2n}^{l-1} + C_{2n}^l. \quad (\text{П.1.2})$$

Используя (П.1.2), для γ_{n+1} получим

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &\equiv \sum_{i=1}^{2n+2} (-2)^{i-1} C_{2n+2}^i = \\ &= \sum_{i=1}^{2n+2} (-2)^{i-1} C_{2n}^i + \sum_{i=1}^{2n+2} (-2)^{i-1} C_{2n}^{i-2} + 2 \sum_{i=1}^{2n+2} (-2)^{i-1} C_{2n}^{i-1}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.3})$$

Первое слагаемое здесь равно γ_n , поэтому, обозначая в (П.1.3) через B и C второе и третье слагаемые, покажем, что их сумма равна нулю.

Действительно,

$$B = 4 \sum_{i=1}^{2n+2} (-2)^{i-3} C_{2n}^{i-2} = 4 \left[(-2)^{-1} C_{2n}^0 + \sum_{i=3}^{2n+2} (-2)^{i-3} C_{2n}^{i-2} \right] = 4\gamma_n - 2. \quad (\text{П.1.4})$$

Третье слагаемое в (П.1.3) можно представить в виде

$$C = -4 \sum_{i=1}^{2n+2} (-2)^{i-2} C_{2n}^{i-1} = -4 \left[\sum_{i=2}^{2n+2} (-2)^{i-2} C_{2n}^{i-1} + (-2)^{-1} C_{2n}^0 \right] = 2 - 4\gamma_n. \quad (\text{П.1.5})$$

Из (П.1.4) и (П.1.5) следует, что $B + C = 0$, т. е. $\gamma_{n+1} = \gamma_n = 0$, что и требовалось доказать.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Действительно, после лицеаризации преобразования (1.6) в инвариантной точке (2.1) матрицу детерминанта $\Delta_m(z)$ (2.2) можно представить согласно (2.6) в виде

$$\begin{aligned} \prod_{j=m}^1 D_j &= \prod_{j=m}^1 (E_0 + B_j) = E_0^m + \sum_{j=1}^m E_0^{m-j} B_j E_0^{j-1} + \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m E_0^{m-j} B_j E_0^{j-i-1} B_i E_0^{i-1} + \dots + \sum_{l=1}^m \prod_{i>l} B_i E_0 \prod_{i<l} B_i + \\ &+ \prod_{j=m}^1 B_j = E_0^m + \tilde{B}_m, \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

где в обозначениях (4.4)

$$E_0 = \begin{pmatrix} e^{A\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_0^k = \begin{pmatrix} e^{kA\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} \varphi'_j B c^T & \varphi'_j B \\ c^T & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.2.2})$$

Матрицы B_j в (П.2.2) имеют ранг единицу, так как представимы в виде произведения столбца y_j на строку σ , где

$$y_j^T = (\varphi'_j B, 1), \quad \sigma = (c^T, 1) \quad B_j = (y_j \sigma). \quad (\text{П.2.3})$$

Поэтому матрица \tilde{B}_m в (П.2.1) также имеет ранг не выше единицы.

Заметим, что для вычислений матрицы детерминанта (2.2) при больших m удобнее использовать вместо (П.2.1) представление в прежних обозначениях

$$\begin{aligned} \prod_{j=m}^1 D_j &= \prod_{j=m}^1 (E_1 + \varphi'_j BC) = E_1^m + \sum_{j=1}^m \varphi'_j E_1^{m-j} B' CE_1^{j-1} + \\ &+ \sum_{i, j=1}^m \varphi'_i \varphi'_j E_1^{m-i} B' CE_1^{j-i-1} B' CE_1^{i-1} + \dots + \\ &+ \sum_{l=1}^m \prod_{i>l} \varphi'_i (B' C)^j E_1 \prod_{i<l} \varphi'_i (B' C)^i + (B' C)^m \prod_{j=1}^m \varphi'_j = E_1^m + B_m^*, \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

где матрица B дана в (4.4), а

$$C = \begin{pmatrix} c^T & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} e^{A\tau} & 0 \\ c^T & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1^k = \begin{pmatrix} e^{kA\tau} & 0 \\ c^T \sum_{j=1}^{k-1} e^{jA\tau} & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.2.5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Действительно, используя представления матрицы Δ_m в предыдущем приложении или непосредственно из (2.2), легко для $\Delta_2(z)$ в обозначениях (4.4) получить

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} e^{2A\tau} - Ez + e^{A\tau} B c^T \varphi'_1 + B c^T e^{A\tau} \varphi'_2 + B c^T \varphi'_2 + B c^T d \varphi'_1 \varphi'_2 \\ c^T e^{A\tau} + c^T d \varphi'_1 + c^T \\ e^{A\tau} B \varphi'_1 + B \varphi'_2 + B d \varphi'_1 \varphi'_2 \\ 1 + d \varphi'_1 - z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.3.1})$$

Умножая нижнюю строку (П.3.1) на столбец $B \varphi'_2$ и вычитая из верхней матрицы, получим

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} e^{2A\tau} - Ez + e^{A\tau} B c^T \varphi'_1 & e^{A\tau} B \varphi'_1 + B \varphi'_2 z \\ c^T e^{A\tau} + c^T + c^T d \varphi'_1 & 1 + d \varphi'_1 - z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.3.2})$$

Умножая, далее, правый столбец (П.3.2) справа на c^T и вычитая из левой матрицы, получим

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} e^{2A\tau} - Ez - B c^T \varphi'_2 z & e^{A\tau} B \varphi'_1 + B \varphi'_2 z \\ c^T e^{A\tau} + c^T z & 1 + d \varphi'_1 - z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.3.3})$$

Раскрывая теперь (П.3.3) по правилу раскрытия детерминантов коагулированных матриц [11], с учетом (4.2) нетрудно получить (4.3).

Заметим, что если умножить в (П.3.3) верхнюю матрицу слева на строку $c^T e^{-A\tau}$ и вычесть из нижней строки, детерминант (4.3) получится в виде

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} e^{2A\tau} - Ez - Bc^T \varphi'_2 z & e^{A\tau} B\varphi'_1 + B\varphi'_2 z \\ c^T z + c^T e^{-A\tau} z + c^T e^{-A\tau} Bc^T \varphi'_2 z & 1 - c^T e^{-A\tau} \varphi'_2 z - z \end{vmatrix}, \quad (\text{П.3.4})$$

который сразу показывает, что согласно (2.6) $\Delta_2(0) = \det e^{2A\tau}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Используя то обстоятельство, что третье слагаемое в детерминанте (4.2) является матрицей ранга не выше единицы, и предполагая сказанное в разделе 4 относительно диагональности матрицы A , раскроем (4.2) в виде суммы сумм взвешенных произведений основных элементов главной диагонали [3] и получим только одну сумму

$$\begin{aligned} \Delta_2(z) &= (1 - z + d\varphi'_1) \prod_{j=1}^n (e^{2a_j\tau} - z) \times \\ &\times \left\{ 1 - \sum_{j=1}^n b'_j c_j \frac{e^{2a_j\tau} \varphi'_1 + z[(e^{a_j\tau} + 1)\varphi'_2 + e^{a_j\tau} \varphi'_1 + b'_j c_j \varphi'_1 \varphi'_2]}{(1 - z + d\varphi'_1)(e^{2a_j\tau} - z)} \right\} = \\ &= \prod_{j=1}^n (e^{2a_j\tau} - z) \left[1 - z - \sum_{j=1}^n b'_j c_j \left(\frac{e^{2a_j\tau}}{e^{2a_j\tau} - z} - 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - z \sum_{j=1}^n b'_j c_j \frac{(e^{a_j\tau} + 1)\varphi'_2 + e^{a_j\tau} \varphi'_1 + b'_j c_j \varphi'_1 \varphi'_2}{e^{2a_j\tau} - z} \right] = \\ &= -z \prod_{j=1}^n (e^{2a_j\tau} - z) \left[1 - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^n b'_j c_j \frac{(1 + e^{a_j\tau})(\varphi'_1 + \varphi'_2) + b'_j c_j \varphi'_1 \varphi'_2}{e^{2a_j\tau} - z} \right], \end{aligned} \quad (\text{П.4.1})$$

где b'_j — элементы столбца B в (4.4), т. е.

$$b'_j = \frac{e^{a_j\tau} - 1}{a_j} b_j. \quad (\text{П.4.2})$$

Учитывая (П.4.2) из (П.4.1), легко получить (4.5).

Заметим теперь, что получению границ D -разбиения при $z = 1$ (4.7) и $z = -1$ (4.8) могут помешать соответственно случаи $\varphi'_1 = 0$ и $\varphi'_1 = -2/d$.

При $\varphi'_1 = 0$ из (П.3.1), умножая правый столбец его справа на строку $c^T(e^{A\tau} + E)$ и вычитая из левой матрицы, получим

$$\Delta_2(z, \varphi'_1 = 0) = \begin{vmatrix} e^{2A\tau} - Ez & B\varphi'_2 \\ c^T(e^{A\tau} + E)z & 1 - z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.4.3})$$

Раскрывая (П.4.3) при $Ez \neq e^{2A\tau}$, получим характеристическое уравнение в виде

$$\det (e^{2A\tau} - Ez) [1 - z - zc^T(e^{A\tau} + E)(e^{2A\tau} - Ez)^{-1}B\varphi'_2] = 0; \quad (\text{П.4.4})$$

которое при $z = 1$, учитывая (4.4), дает границу

$$c^T b \varphi'_2 = 0. \quad (\text{П.4.5})$$

Второй случай здесь не так прост и должен рассматриваться специально. Аналогичная ситуация имеет место при нахождении с помощью (4.11) границы D -разбиения при $z = 1$. Здесь также легко получить для детерминанта $\Delta_1(z)$

$$\Delta_1(z) = \det \left[D_1 - \begin{pmatrix} Ez & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} e^{A\tau} - Ez & B\varphi'_1 z \\ c^T & 1-z \end{vmatrix} \quad (\text{П.4.6})$$

после вычитания из верхней матрицы нижней строки, умноженной справа на $B\varphi'_1$. Из (П.4.6) при $Ez \neq e^{A\tau}$ получим характеристическое уравнение

$$\det(e^{A\tau} - Ez) [1 - z - zc^T(e^{A\tau} - Ez)^{-1}B\varphi'_1] = 0, \quad (\text{П.4.7})$$

которое при $z = 1$ дает границу

$$c^T B\varphi'_1 = 0, \quad (\text{П.4.8})$$

совпадающую с (4.13).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1217 (1966).
2. А. С. Алексеев, ДАН СССР (в печати).
3. П. В. Бромберг, Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования, изд. Наука, М., 1967.
4. Я. З. Цыпкин, Теория импульсных систем, Физматгиз, М., 1958.
Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963.
5. Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 23, № 12, 1565 (1962); 24, № 12, 1601 (1963).
6. Я. З. Цыпкин, ДАН СССР, 145, 52 (1962); 152, 302 (1963); 155, № 5, 1029 (1964).
7. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, ПММ, 20, 639 (1956).
8. Р. Белман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, М., 1962.
9. Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1951.
10. Ю. И. Неймарк, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 242.
11. В. Б. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, М., 1954.
12. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКБВИА, 1949.

Научно-исследовательский физико-технический
институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 декабря 1967 г.

ON THE RESEARCHES OF DYNAMICS OF ONE CONTOUR NON-LINEAR IMPULSE SYSTEMS WITH INTEGRAL LINK

A. S. Alekseyev, T. B. Makarova

With the pointtransformation method the dynamics of one contour impulse control system with integral link and one scalar nonlinearity is investigated. The equations of periodic motions, conditions of their stability are received for general and some particular cases. The most attention is paid to the investigation of motions with period, twice as great as the period of impulse element. Some detailed results are presented for the simplest cases of polynomial nonlinearities.

УДК 531.391 : 621.373

ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРОВ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ ЧАСТОТ

И. М. Клибанова.

Рассматривается взаимная синхронизация двух связанных томсоновских генераторов, у которых огижение частот свободных колебаний близко к отношению целых чисел. Для случая полиномиальной аппроксимации нелинейных характеристик генераторов получены выражения для амплитуд и фаз синхронных колебаний, частот синхронизации и «обобщенной» полосы синхронизации в зависимости от начальной расстройки.

Изучению возможных периодических и квазипериодических режимов в автоколебательных системах с двумя степенями свободы посвящено значительное количество работ (например, [1–11]). Из этих работ вопросы, связанные с особенностями поведения колебательных систем в случае, когда нормальные частоты системы кратны, рассмотрены лишь в [9, 10, 12]. В работе [10] методом Пуанкаре—Ляпунова дано общее рассмотрение систем с двумя степенями свободы с кратным отношением нормальных частот, а в [9] эта задача решается методом эквивалентной линеаризации (методом усреднения) на примере генератора, нагруженного на линейный колебательный контур. Вопросы взаимной синхронизации двух связанных генераторов с почти целочисленным отношением частот свободных колебаний, которые имеют определенный теоретический и практический интерес (особенно, как нам представляется, в связи с появлением многомодовых, высокостабильных генераторов), в этих работах не рассматривались. В [12] рассмотрен лишь частный случай этой задачи, когда воздействие высокочастотного генератора на работу системы связанных генераторов оказывается преобладающим.

В настоящей работе рассматривается взаимная синхронизация двух связанных генераторов, у которых отношение частот свободных колебаний близко к отношению целых чисел. Задача решается в предположениях, позволяющих свести рассмотрение к исследованию системы с двумя степенями свободы, близкой к линейной консервативной системе. Решение проводится приближенно, методом Ван-дер-Поля, а устойчивость найденных периодических движений исследуется по Ляпунову. Для случая полиномиальной аппроксимации нелинейных характеристик генераторов получены выражения для амплитуд и фаз синхронных колебаний, а также выражение для «обобщенной» полосы синхронизации.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим динамическую систему с двумя степенями свободы, близкую к линейной консервативной системе и описываемую следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + v_1^2 x - \kappa_1 \dot{y} &= v_1^2 f_1(x, \dot{x}), \\ \ddot{y} + v_2^2 y - \kappa_2 \dot{x} &= v_2^2 f_2(y, \dot{y}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $f_1(x, \dot{x})$, $f_2(y, \dot{y})$ — функции, описывающие потери и нелинейности в системе, ν_1 , ν_2 — парциальные частоты системы, x_1 , x_2 — коэффициенты связи.

Предполагаем потери и нелинейности системы достаточно малыми (в пределах применимости метода Ван-дер-Поля). Периодическое решение системы (1) будем искать для случая, когда $x_1, x_2 \ll 1$, а отношение частот близко к отношению взаимно-простых целых чисел: $\nu_2/\nu_1 \approx r/s$.

Приведем уравнения (1) к нормальным координатам ξ , η [2, 9] исходной консервативной системы, для чего произведем замену переменных x, y на ξ, η с помощью линейного преобразования

$$x = \xi + l_1\eta, \quad y = \eta + l_2\xi, \quad (2)$$

коэффициенты l_1, l_2 которого должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} x_2\nu_1^2 l_1^2 + (\nu_2^2 - \nu_1^2) l_1 - x_1\nu_2^2 &= 0, \\ x_1\nu_2^2 l_2^2 - (\nu_2^2 - \nu_1^2) l_2 - x_2\nu_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для случая слабой связи ($x_1, x_2 \ll 1$) можно записать (с точностью до величин второго порядка малости) приближенные выражения для коэффициентов преобразования l_1 и l_2 :

$$l_1 = \frac{x_1}{1 - \nu_1^2/\nu_2^2}, \quad l_2 = \frac{x_2}{1 - \nu_2^2/\nu_1^2}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что x_1, x_2 одного знака, тогда $l_1 l_2 < 0$.

Уравнения рассматриваемой системы при переходе к нормальным координатам принимают следующий вид:

$$\ddot{\xi} + n_1^2 \eta = \frac{1}{1 - k_1 k_2} [\nu_2^2 f_1(\xi + l_1\eta; \dot{\xi} + l_1\dot{\eta}) - \nu_2^2 k_1 f_2(\eta + l_2\xi; \dot{\eta} + l_2\dot{\xi})], \quad (5)$$

$$\ddot{\eta} + n_2^2 \xi = \frac{1}{1 - k_1 k_2} [\nu_2^2 f_2(\eta + l_2\xi; \dot{\eta} + l_2\dot{\xi}) - \nu_1^2 k_2 f_1(\xi + l_1\eta; \dot{\xi} + l_1\dot{\eta})], \quad (6)$$

где n_1, n_2 — нормальные частоты исходной консервативной системы, а $k_1 = l_1 n_1^2 / n_2^2$, $k_2 = l_2 n_2^2 / n_1^2$. Пользуясь методом Ван-дер-Поля, запишем периодическое решение системы (5), (6) в виде

$$\xi = A(t) \cos [\omega_1 t + \varphi_1(t)], \quad \dot{\xi} = -\omega_1 A(t) \sin [\omega_1 t + \varphi_1(t)], \quad (7)$$

$$\eta = B(t) \cos [\omega_2 t + \varphi_2(t)], \quad \dot{\eta} = -\omega_2 B(t) \sin [\omega_2 t + \varphi_2(t)], \quad (8)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — функции времени, а частоты колебаний ω_1 , ω_2 такие, что $\omega_2/\omega_1 = r/s$.

Подставляя (7), (8) в (5), (6), получаем уравнения для $\dot{A}(t)$, $\dot{B}(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= -\frac{1}{\omega_1} F_1 \sin (\omega_1 t + \varphi_1), \\ \dot{B}(t) &= -\frac{1}{\omega_2} F_2 \sin (\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{\varphi}_1(t) = -\frac{1}{\omega_1} F_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = -\frac{1}{\omega_2} F_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

где

$$F_1 = v_1^2 f_1 [A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + l_1 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2); -\omega_1 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - l_1 \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] - k_1 v_2^2 f_2 [B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + l_2 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1); -\omega_2 B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) - l_2 \omega_1 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1)] + 2\omega_1 \Delta_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (10)$$

$$F_2 = v_2^2 f_2 [B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + l_2 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1); -\omega_2 B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) - l_2 \omega_1 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1)] - k_2 v_1^2 f_1 [A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + l_1 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2); -\omega_1 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_2 l_1 B \sin(\omega_1 t + \varphi_1)] + 2\omega_2 \Delta_2 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (11)$$

$$\Delta_1 = \frac{\omega_1^2 - n_1^2}{2\omega_1} \simeq \omega_1 - n_1, \quad \Delta_2 = \frac{\omega_2^2 - n_2^2}{2\omega_2} \simeq \omega_2 - n_2 \text{ — расстройки частот}$$

синхронных колебаний системы относительно нормальных частот (множитель $(1 - k_1 k_2)^{-1} \simeq 1$ с точностью до величин второго порядка малости).

Поскольку правые части системы уравнений (9) малы по сравнению с частотами синхронных колебаний ω_1, ω_2 , амплитуды и фазы нормальных колебаний являются медленно меняющимися функциями времени в сравнении с $\cos(\omega_1 t), \cos(\omega_2 t)$. Отметим, что F_1, F_2 являются периодическими функциями явно входящего времени с периодом $T = \frac{2\pi s}{\omega_1} = \frac{2\pi r}{\omega_2}$. Если в дальнейшем принять, что r, s — небольшие целые числа, такие, что амплитуды и фазы нормальных колебаний мало меняются за период T , то от точных уравнений (9) для $\dot{A}, \dot{B}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ можно перейти к укороченным, усредняющим правые части (9) за период T .

Аппроксимируя нелинейные характеристики $f_1(x, \dot{x}); f_2(y, \dot{y})$ полиномами степени m_1 и степени m_2 соответственно по x, y

$$f_1(x, \dot{x}) = \dot{x} \sum_{i=1}^{m_1} a_i x^{i-1} = -[\omega_1 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + l_1 \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] \times \\ \times \sum_{i=1}^{m_1} a_i [A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B l_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^{i-1}, \quad (12)$$

$$f_2(y, \dot{y}) = \dot{y} \sum_{j=1}^{m_2} b_j y^{j-1} = -[\omega_2 B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + l_2 \omega_1 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1)] \times \\ \times \sum_{j=1}^{m_2} b_j [B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + l_2 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)]^{j-1} \quad (13)$$

и отбрасывая в уравнениях члены высшего порядка малости, получаем следующие укороченные уравнения для амплитуд и фаз нормальных колебаний:

$$\dot{A}(t) = v_1^2 \sum_{i=1}^{m_1} a_i A^i \frac{\omega_1}{2\pi s} \int_0^T \sin^2 z \cos^{i-1} z dz + \frac{C_{r+s-2}^{s-1}}{s 2^{r+s-1}} B^s A^{r-1} [v_1^2 l_1^s a_{r+s-1} - \\ - v_2^2 k_1 l_2^{r-1} b_{r+s-1}] \cos \theta, \quad (14)$$

$$\dot{B}(t) = v_2^2 \sum_{j=1}^{m_2} b_j B^j \frac{\omega_2}{2\pi r} \int_0^T \sin^2 z \cos^{l-1} z dz + \frac{C_{r+s-2}}{s 2^{r+s-1}} B^{s-1} A^r [v_2^2 l_2^r b_{r+s-1} - \\ - v_1^2 k_2 a_{r+s-1}] \cos \theta; \\ \dot{\varphi}_1(t) = -\Delta_1 + \frac{C_{r+s-2}}{r 2^{r+s-1}} B^s A^{r-2} [l_1^s v_1^2 a_{r+s-1} - k_1 l_2^{r-1} v_2^2 b_{r+s-1}] \sin \theta, \\ \dot{\varphi}_2(t) = -\Delta_2 - \frac{C_{r+s-2}}{r 2^{r+s-1}} B^{s-2} A^r [l_2^r v_2^2 b_{r+s-1} - k_2 l_1^{s-1} v_1^2 a_{r+s-1}] \sin \theta, \quad (15)$$

где $\theta = s\varphi_2 - r\varphi_1$ — «обобщенная» разность фаз* нормальных колебаний, а коэффициенты $a_i, b_j \ll 1$ в силу принятых предположений относительно малости потерь и нелинейностей в системе.

Из двух последних уравнений системы можно получить дифференциальное уравнение для $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \Delta - \frac{C_{r+s-2}}{2^{r+s-1}} B^{s-2} A^{r-2} \left[l_2^{r-1} b_{r+s-1} \frac{s}{r} (l_2 A^2 - l_1 B^2) v_2^2 + \right. \\ \left. - l_1^{s-1} a_{r+s-1} \frac{r}{s} (l_1 B^2 - l_2 A^2) v_1^2 \right] \sin \theta. \quad (16)$$

Здесь $\Delta = \frac{s^2 n_2^2 - r^2 n_1^2}{2s\omega_2} \approx s n_2 - r n_1$, назовем ее, по аналогии с θ , «обобщенной» начальной расстройкой нормальных частот.

Полученные уравнения (14), (15) являются нелинейными относительно амплитуд и фаз колебаний. Решение их в общем виде, даже при аппроксимации f_1 и f_2 полиномами третьей степени, оказывается весьма затруднительным. Поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда при $l_1 = l_2 = 0$ амплитуды колебаний A и B устойчивы по Ляпунову (т. е. применительно к системе двух связанных генераторов рассмотрим случай парциального возбужденных генераторов). Тогда естественно предположить, что наличие малой связи приводит к малым изменениям амплитуд нормальных колебаний. В соответствии с этим A и B представим в следующем виде:

$$A = A_0(1 + \alpha_0), \\ B = B_0(1 + \beta_0), \quad (17)$$

причем считаем, что $\alpha_0, \beta_0 \ll 1$. Через A_0, B_0 обозначены амплитуды колебаний при $l_1 = l_2 = 0$, а через α_0, β_0 — относительные изменения амплитуд из-за взаимной связи.

Подставляя в (14) — (16) выражения для амплитуд колебаний из (17) и линеаризуя укороченные уравнения по α_0 и β_0 , получаем следующие уравнения для $\alpha_0, \beta_0, \varphi_1, \varphi_2$:

$$\dot{\alpha}_0 = -p_1 \alpha_0 + \lambda_1 \cos \theta, \\ \dot{\beta}_0 = -p_2 \beta_0 + \lambda_2 \cos \theta; \quad (18)$$

* Этот термин заимствован из [9].

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\Delta_1 + \lambda_1 \sin \theta, \\ \dot{\varphi}_2 &= -\Delta_2 - \lambda_2 \sin \theta.\end{aligned}\quad (19)$$

Обобщенная разность фаз нормальных колебаний θ будет описываться уравнением

$$\dot{\theta} = \Delta - \lambda \sin \theta. \quad (20)$$

В (18) — (20) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}p_1 &= -v_1^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ — нечетное}}}^{m_1} i a_i A_0^{i-1} \epsilon_i, \\ p_2 &= -v_2^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ — нечетное}}}^{m_2} j b_j B_0^{j-1} \epsilon_j,\end{aligned}\quad (21)$$

p_1, p_2 имеют смысл прочности предельного цикла по амплитуде,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{C_{r+s-2}^{s-1}}{s 2^{r+s-1}} [l_1^s a_{r+s-1} v_1^2 - k_1 l_2^{r-1} b_{r+s-1} v_2^2] A_0^r B_0^{s-2}, \\ \lambda_2 &= \frac{C_{r+s-2}^{r-1}}{r 2^{r+s-1}} [l_2^r b_{r+s-1} v_2^2 - k_2 l_1^{s-1} a_{r+s-1} v_1^2] A_0^r B_0^{s-2}, \\ \lambda &= s \lambda_2 + r \lambda_1 = \frac{C_{r+s-2}^{r-1}}{2^{r+s-1}} \left[v_1^2 l_1^{s-1} a_{r+s-1} \frac{r}{s} (|l_1| B_0^2 + |l_2| A_0^2) - \right. \\ &\quad \left. - v_2^2 l_2^{r-1} b_{r+s-1} \frac{s}{r} (|l_2| A_0^2 + |l_1| B_0^2) \right] A_0^{r-2} B_0^{s-2} \operatorname{sgn} l_1,\end{aligned}\quad (22)$$

амплитуды свободных колебаний A_0 и B_0 находятся из уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ — нечетное}}}^{m_1} a_i A_0^{i-1} \epsilon_i &= 0, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ — нечетное}}}^{m_2} b_j B_0^{j-1} \epsilon_j &= 0,\end{aligned}\quad (23)$$

$$a \epsilon_i = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 z \cos^{i-1} z dz, \quad \epsilon_j = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 z \cos^{j-1} z dz.$$

Как видно из соотношений (21) — (23), порядок малости коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ определяется значениями чисел r и s : чем больше r и s , тем выше порядок малости коэффициентов уравнений (18) — (20). Поскольку рассматривается случай, когда $r \neq s$, то в выражениях (22) достаточно учесть лишь одно из слагаемых (второе даст лишь поправку в более высоком порядке малости)*. Так как уравнения совершенно симметричны относительно r и s , то приняв для определенности $r > s$, можно несколько упростить выражения (22):

$$\lambda_1 = v_1^2 l_1^s \frac{C_{r+s-2}^{s-1}}{s 2^{r+s-1}} a_{r+s-1} A_0^{r-2} B_0^s,$$

* Это означает, что можно пренебречь влиянием на взаимную синхронизацию комбинационных частот, возникающих на нелинейном элементе одного из генераторов. Сделанное предположение, в частности, справедливо, если $|l_1|$ и $|l_2|$ — одного порядка.

$$\lambda_2 = -v_1^2 k_2 l_1^{s-1} \frac{C_{r+s-2}}{r 2^{r+s-1}} a_{r+s-1} A_0^r B_0^{s-2}, \quad (24)$$

$$\lambda = v_1^2 l_1^{s-1} [|l_1| B_0^2 + |l_2| A_0^2] \frac{r}{s} \frac{C_{r+s-2}}{2^{r+s-1}} a_{r+s-1} A_0^{r-2} B_0^{s-2} \operatorname{sgn} l_1.$$

2. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Уравнения для стационарных амплитуд и фаз нормальных колебаний находим из условия $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\lambda_1}{p_1} \cos \theta_0, & \beta_0 &= \frac{\lambda_2}{p_2} \cos \theta_0, \\ \Delta_1 &= \lambda_1 \sin \theta_0, & \Delta_2 &= -\lambda_2 \sin \theta_0, \\ \Delta &= \lambda \sin \theta_0, & \theta_0 &= s\varphi_2 - r\varphi_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Устойчивость периодического режима колебаний системы исследуем по Ляпунову, не затрагивая вопроса об устойчивости периодического режима по отношению к большим возмущениям. Линеаризуя систему уравнений (18)–(20) около равновесных значений амплитуд и фаз колебаний и составляя характеристическое уравнение линеаризованной системы, находим корни γ_i характеристического уравнения:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -p_1, \quad \gamma_3 = -p_2, \quad \gamma_4 = -\lambda \cos \theta_0.$$

С учетом того, что $\gamma_1 = 0$, движение будет устойчивым по Ляпунову, если $\gamma_{2,3,4} < 0$ [13], т. е. если $p_1 > 0, p_2 > 0, \lambda \cos \theta_0 > 0$. Если $\lambda > 0$, то

устойчивые значения стационарной разности фаз лежат в пределах $(2k-1)\pi/2 \leq \theta_0 \leq (2k+1)\pi/2$ ($k = 0, 2, 4, \dots$). Если же $\lambda < 0$, то в пределах $(2k-1)\pi/2 \leq \theta_0 \leq (2k+1)\pi/2$ ($k = 1, 3, \dots$). Знак λ определяется знаком соответствующего коэффициента нелинейных характеристик правых частей уравнений (5), т. е. f_1 и f_2 .

Из соотношений (25) следует, что частоты синхронных колебаний ω_1 и ω_2 сдвигаются по отношению к нормальным частотам системы n_1 и n_2 в разные стороны, так как λ_1 и λ_2 одного знака. На рис. 1 (для наглядности) изображено положение «обобщенной» частоты синхронных колебаний по отношению к «приведенным» частотам $r n_1$ и $s n_2$ при различных значениях обобщенной начальной расстройки $\Delta \approx s n_2 - r n_1$. Максимальное значение обобщенной начальной расстройки нормальных частот системы, при котором имеет место синхронный режим, равно $\pm \lambda$. Назовем $\Delta_0 = 2|\lambda|$ «обобщенной» полосой синхронизации.

Периодический режим в рассматриваемой системе, как видно из соотношений (22), (25), обусловлен нелинейностью, благодаря которой в контурах возникают колебания на близких комбинационных частотах, которые и ответственны за появление

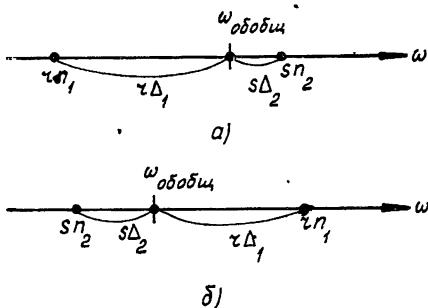


Рис. 1. Положение обобщенной частоты синхронных колебаний по отношению к «приведенным» нормальным частотам для случая $K > 1$:

а) $\Delta > 0$, б) $\Delta < 0$.

определенным характером нелинейности, благодаря которому в контурах возникают колебания на близких комбинационных частотах, которые и ответственны за появление

медленных членов в уравнениях (9): или $a_{r+s-1} \neq 0$, или $b_{r+s-1} \neq 0$. В этом смысле взаимная синхронизация генераторов с почти целочисленным отношением частот свободных колебаний аналогична взаимной синхронизации на близких частотах ($\nu_1 \approx \nu_2$), так как и в том, и в другом случае периодический режим в системе имеет место из-за того, что в контурах обоих генераторов образуются колебания на близких частотах.

Как следует из соотношений (25), значения α_{00} , Δ_1 пропорциональны λ_1 , значения β_{00} , Δ пропорциональны λ_2 , а Δ_0 пропорциональны λ , порядок малости которых, как отмечалось выше, определяется числами r и s . Следовательно, с ростом, так сказать, «сложности» комбинации, образующей в системе близкие частоты, эффект взаимной синхронизации уменьшается, т. е. α_{00} , β_{00} , Δ_0 становятся величинами более высокого порядка малости. Отсюда нетрудно сделать вывод о том, что синхронизация на комбинационных частотах (и $r \neq 1$ и $s \neq 1$) оказывается эффектом более высокого порядка малости, нежели синхронизация на гармониках, когда либо $r = 1$, либо $s = 1$ (см., например, (24)).

Полагая в (23) одну из связей равной нулю, приходим к обычной синхронизации: случай $l_1 = 0$ соответствует захвату первого генератора вторым, а случай $l_2 = 0$, наоборот, — второго генератора первым. Нетрудно заметить, что при $l_1 = 0$ получаем, что $\lambda_1 = \alpha_{00} = 0$, а обобщенная частота синхронных колебаний $\omega_{\text{общ}} = rn_1$, т. е. $\omega_1 = n_1$, а $\omega_2 = rn_1/s$ и полоса синхронизации $\Delta_0 = 2s|\lambda_2|$. При $l_2 = 0$ аналогично имеем $\lambda_2 = \beta_{00} = 0$, а обобщенная частота синхронизации $\omega_{\text{общ}} = sn_2$, т. е. $\omega_2 = n_2$, а $\omega_1 = sn_2/r$ и полоса синхронизации $\Delta_0 = 2r|\lambda_1|$.

Когда $l_1 \neq 0$ и $l_2 \neq 0$ полоса захвата оказывается равной сумме полос, соответствующих процессам односторонней синхронизации: $\Delta_0 = 2(s|\lambda_2| + r|\lambda_1|)$ (см. (25)). Отметим, что в случае взаимной синхронизации двух неидентичных генераторов (неидентичных по величине мощности колебаний, вносимой в контур одного генератора от другого: $1B_0^2 \neq l_2 A_0^2$) с близкими частотами полоса синхронизации равна разности полос, соответствующих односторонней синхронизации [7].

В задачах о синхронизации обычно по ряду признаков выделяют синхронизирующий и синхронизованный генераторы. При обычной синхронизации захваченным называют тот из генераторов, частота колебаний которого не меняется при изменении собственной частоты контура, а точно следует (в пределах полосы синхронизации) за частотой синхронизирующего генератора. Понятно, что этот критерий не может быть предложен для выделения «ведущего» и «ведомого» генераторов при их взаимной синхронизации, поскольку изменение парциальной частоты колебаний любого из генераторов приводит к изменению частоты синхронных колебаний.

В системе связанных неидентичных генераторов с близкими частотами ($\nu_1 \approx \nu_2$) под синхронизацией попимается одиночастотный режим на любой из двух возможных синхронных частот [7]. Поэтому синхронизирующими называют тот из генераторов, парциальная частота которого при любом значении начальной расстройки лежит ближе к частоте синхронных колебаний системы*.

Поскольку в рассматриваемой задаче под синхронным режимом работы понимается двухчастотный периодический режим, такое определение синхронизирующего генератора уже не имеет смысла. В этом случае синхронизующим следует назвать генератор, у которого «при-

* В качестве дополнительного признака указывают еще на уменьшение амплитуды колебания синхронизующего генератора по сравнению с амплитудой свободных колебаний, отмечая одновременное увеличение амплитуды синхронизованного генератора (при $\nu_1, \nu_2 > 0$).

веденная» частота нормальных колебаний (rn_1, sn_2) при любом значении обобщенной начальной расстройки лежит ближе к обобщенной частоте синхронных колебаний системы. Согласно этому при $s\Delta_1 < r\Delta_2$ синхронизующим будет первый генератор, а при $s\Delta_1 > r\Delta_2$ второй. Раскрывая эти неравенства с учетом соотношений (4), (24), (25) и вводя коэффициент взаимной связи $K = \omega_1 v_2^2 B_0^2 / \omega_2 v_1^2 A_0^2$, равный отношению мощностей колебаний, вносимых в контур одного генератора от другого, получаем, что значения $K > 1$ соответствуют случаю, когда синхронизующим является второй генератор, а $K < 1$ — случаю, когда синхронизующий — первый генератор. При $K = 0$ и $K = \infty$ приходим к случаю односторонней синхронизации одного генератора другим.

3. РАССМОТРЕНИЕ КОНКРЕТНОЙ СХЕМЫ

Применим полученные выше результаты к рассмотрению конкретной схемы двух индуктивно связанных генераторов, изображенной на рис. 2. Если пренебречь сеточными токами ламп, то эта схема, после приведения ее к безразмерному виду, будет описываться системой уравнений (1). Введем обозначения: u, v — напряжения на сетках ламп генераторов, $\Omega_{1,2} = (L_{1,2}C_{1,2})^{-1/2}$ — парциальные частоты колебаний, $\omega_1 = MC_2\Omega_1^2$; $\omega_2 = MC_1\Omega_2^2$ — коэффициенты связи.

В качестве характеристики анодного тока ламп принимаем, пренебрегая реакцией анода, кубическую параболу:

$$i_{a_1} = S_1 v (1 - \sigma_1 v^2), \quad i_{a_2} = S_2 u (1 - \sigma_2 u^2). \quad (26)$$

Здесь S_1, S_2 — крутизны ламповых характеристик. В этом случае размерные значения коэффициентов разложения правых частей уравнений системы \tilde{a}_i, \tilde{b}_j , полученные в соответствии с выражениями (12), (13), будут следующими:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= (M_1 S_1 - C_1 R_1), & \tilde{a}_2 &= 0, & \tilde{a}_3 &= -3\sigma_1 S_1 M_1, \\ \tilde{b}_1 &= (M_2 S_2 - C_2 R_2), & \tilde{b}_2 &= 0, & \tilde{b}_3 &= -3\sigma_2 S_2 M_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Как следует из соотношений (24), (25), в системе с подобным характером нелинейности возможен периодический режим только при отношении парциальных частот генераторов, близком к 1:3. В такой системе, конечно, возможен и периодический режим при соотношении $v_2/v_1 \approx 1$ но его рассмотрение не входит в нашу задачу и не описывается системой (21), (23).

Полагая, для определенности, $s = 1, r = 3$, запишем размерные значения для напряжений u, v на сетках ламп генераторов в синхронном режиме, полученные в соответствии с (2) и (8) с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned} v &= \tilde{A}_0 (1 + \beta_0) \cos(\tilde{\omega}_1 t) + l_1 \tilde{B}_0 \cos(3\tilde{\omega}_1 t + \theta_0), \\ u &= \tilde{B}_0 (1 + \beta_0) \cos(3\tilde{\omega}_1 t + \theta_0) + l_2 \tilde{A}_0 \cos(\tilde{\omega}_1 t). \end{aligned} \quad (28)$$

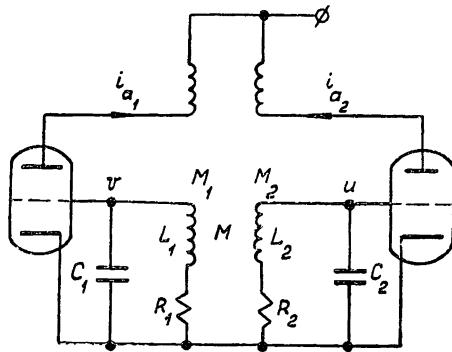


Рис. 2.

Здесь \tilde{A}_0 , \tilde{B}_0 , $\tilde{\omega}_1$ — приведенные к размерному виду значения соответственно амплитуд свободных колебаний генераторов и синхронной частоты первого генератора, равны (см. (23) — (25)):

$$\tilde{A}_0 = 2 \left(-\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_3} \right)^{1/2} = 2 \left(\frac{M_1 S_1 - R_1 C_1}{3 \sigma_1 S_1 M_1} \right)^{1/2}, \quad (29)$$

$$\tilde{B}_0 = 2 \left(-\frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_3} \right)^{1/2} = 2 \left(\frac{M_2 S_2 - R_2 C_2}{3 \sigma_2 S_2 M_2} \right)^{1/2};$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \tilde{n}_1^2 \left[\frac{1 - K}{1 - 9K(\tilde{n}_1^2/\tilde{n}_2^2)} \right]. \quad (30)$$

Значения α_{00} , β_{00} , θ_0 определяются из уравнений (25) с учетом (24), (26), (27):

$$\alpha_{00} = \frac{4}{3} \kappa_1 \left(\frac{M_2 S_2 - C_2 R_2}{M_1 S_1 - C_1 R_1} \frac{\sigma_1 S_1 M_1}{\sigma_2 S_2 M_2} \right)^{1/2} \cos \theta_0, \quad (31)$$

$$\beta_{00} = \frac{\kappa_2}{36} \left(\frac{M_1 S_1 - R_1 C_1}{M_2 S_2 - R_2 C_2} \right)^{3/2} \left(\frac{\sigma_2 S_2 M_2}{\sigma_1 S_1 M_1} \right)^{1/2} \cos \theta_0, \quad (32)$$

$$\theta_0 = \arcsin \Delta/\lambda. \quad (33)$$

Полоса синхронизации с параметрами схемы связана следующим соотношением:

$$\tilde{\Delta}_0 = \frac{3\Omega_1^2}{2} \left[3\kappa_1 \sigma_1 S_1 M_1 \left(\frac{M_1 S_1 - C_1 R_1}{\sigma_1 S_1 M_1} \frac{M_2 S_2 - C_2 R_2}{\sigma_2 S_2 M_2} \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \kappa_2 (M_1 S_1 - C_1 R_1) \left(\frac{M_1 S_1 - C_1 R_1}{M_2 S_2 - C_2 R_2} \frac{\sigma_2 S_2 M_2}{\sigma_1 S_1 M_1} \right)^{1/2} \right]. \quad (34)$$

В силу произвольности значения одной из синхронных фаз в выражениях (28) было положено $\varphi_{10} = 0$, тогда $\varphi_{20} = \theta_0$.

Для коэффициента взаимной связи K получаем следующее выражение:

$$K = \frac{C_2}{C_1} \frac{M_2 S_2 - C_2 R_2}{M_1 S_1 - C_1 R_1} \frac{\sigma_1 S_1 M_1}{\sigma_2 S_2 M_2}.$$

При $K \gg 1$ получаем решение задачи о синхронном делении частоты на три, полагая $K \ll 1$, приходим к задаче о синхронном умножении частоты на три. В заключение отметим, что поскольку полоса захвата при взаимной синхронизации, как было отмечено выше, равна сумме полос захвата, соответствующих односторонней синхронизации, то в рассматриваемом примере взаимную синхронизацию можно представить как наложение эффектов синхронного умножения и синхронного деления частоты на три.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Майер, Ученые записки ГГУ, вып. 2, 3 (1935).
2. А. А. Андronов, А. А. Витт, ЖТФ, 4, № 1, 122 (1934).
3. К. Ф. Теодорчик, Радиотехника, 1, 3 (1946).
4. Н. И. Есафов, ЖТФ, 17, № 7, 803 (1947).

5. В. И. Гапонов, ЖТФ, 6, № 5, 501 (1936).
6. Г. Н. Рапопорт, Радиотехника, 6, № 4, 53 (1951).
7. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 1, № 1, 88 (1956).
8. Н. К. Манешин, Р. В. Хохлов, Научн. докл. высш. шк. — Радиотехника и электроника, 3, 74 (1958).
9. А. Н. Крылов, Н. Н. Богоявленов, Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР, Киев, 1937.
10. М. Е. Жаботинский, ЖЭТФ, 20, № 5, 421 (1950).
11. Ю. И. Марченко, В. Т. Рубаник, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 679 (1965).
12. В. Т. Рубаник, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 6, № 2, 278 (1963).
13. А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖЭТФ, 3, № 5, 373 (1933).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
27 ноября 1967 г.

MUTUAL SYNCHRONIZATION OF OSCILLATORS WITH INTEGER FREQUENCY RATIO

I. M. Klibanova

Mutual synchronization of two linked Tomson oscillators with frequency ratio of free oscillations near to integer ratio is discussed. For the case of polynomial approximation of oscillators nonlinear characteristics the formulas are derived for amplitudes and phases of synchronous oscillations, frequencies of synchronization and for "generalized" band of synchronization according to the initial disorder.

УДК 531.391

К ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ВИДА КУБИЧЕСКОЙ ПАРАБОЛЫ

В. И. Горюнов, Н. Н. Воронкова

Рассматриваются вопросы существования и устойчивости решения с периодом внешней силы в одной задаче синхронизации квазигармонического осциллятора.

В работах [1, 2] исследованы вопросы существования и устойчивости периодического решения с периодом внешней силы в задаче синхронизации осциллятора с «подталкивающим трением» и кусочно-постоянной периодической внешней силой. В обеих из указанных работ точечные преобразования, к исследованию которых сводятся задачи, являются кусочно-гладкими в смысле [3]. Поэтому представляет определенный интерес методом, предложенным в [2], рассмотреть аналогичные вопросы в случае, когда точечное преобразование является гладким.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ТОЧЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha(1 - K_0^2 \dot{x}^2)] \dot{x} + \lambda \operatorname{sgn} [\sin(\tau/p)], \quad (1.1)$$

где $\alpha > 1$, $0 < \mu \ll 1$. К этому уравнению сводится исходное уравнение работы [1] при $S_0 > RC$, $\omega RC \ll 1$ и

$$i_a = S_0 \frac{di}{dt} - S \left(\frac{di}{dt} \right)^3. \quad (1.2)$$

Обозначения параметров уравнения (1.1) и исходного уравнения работы [1], при условии (1.2), связаны следующим образом: $\tau = \omega t$ — новое время, по которому в (1.1) точкой сверху обозначено дифференцирование, $\omega = (LC)^{-1/2}$, переменная $x = (S_0/S)^{1/2} K_0^{-1} \omega t$, $\mu = \omega RC$ — обобщенные потери, $\alpha = S_0/RC$ — приведенная крутизна ламповой характеристики, $K_0 = 2[(\alpha - 1)/\alpha]^{1/2}$ — амплитуда колебаний в исходной автономной задаче, $\lambda = (CS/LS_0)^{1/2} K_0^{-1} \Omega \varepsilon$ — обобщенная амплитуда внешней силы, $p = \omega/\Omega$ — обобщенный период внешней силы. Как и в [1, 2], не теряя общности, будем считать $\lambda \geq 0$.

Произведя в уравнении (1.1) в каждом из интервалов знакопостоянства внешней силы замену переменной $z = x - \lambda \operatorname{sgn} [\sin(\tau/p)]$, получим вспомогательное уравнение [2]

$$\ddot{z} + z = \mu [-1 + \alpha(1 - K_0^2 \dot{z}^2)] \dot{z}. \quad (1.3)$$

Исследуя уравнение (1.3) методом Ван-дер-Поля [4], приближенное решение уравнения (1.1) с точностью до μ^2 в каждом из интервалов знакопостоянства внешней силы получим в виде

$$x(\tau) = (1 + Ce^{-(\delta/\pi)\tau})^{-1/2} \cos(\tau + \vartheta) + \lambda \operatorname{sgn}[\sin(\tau/p)], \quad (1.4)$$

$$\dot{x}(\tau) = -(1 + Ce^{-(\delta/\pi)\tau})^{-1/2} \sin(\tau + \vartheta), \quad (1.5)$$

где $\delta = \mu(\alpha - 1)\pi$, а C и ϑ — постоянные интегрирования (постоянны лишь в интервалах знакопостоянства внешней силы). Будем считать, что (1.4) приближенно описывает непрерывные траектории уравнения (1.1), включая моменты переключения внешней силы.

Построим точечное преобразование плоскости $\tau = 0$ в плоскость $\tau = p\pi$, осуществляемое траекториями (1.4). При $\tau = 0$ имеем плоскость начальных условий

$$x_0 = (1 + C)^{-1/2} \cos \vartheta + \lambda, \quad (1.6)$$

$$\dot{x}_0 = -(1 + C)^{-1/2} \sin \vartheta. \quad (1.7)$$

Из (1.6), (1.7) следует, что точки плоскости начальных условий $-\infty < x_0 < +\infty$, $-\infty < \dot{x}_0 < +\infty$ однозначно задаются с помощью C и ϑ при $-1 < C \leq +\infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$. При $\tau = p\pi$ имеем плоскость $-x'$, $-\dot{x}'$, где

$$x' = -(1 + Ce^{-\delta p})^{-1/2} \cos(p\pi + \vartheta) - \lambda, \quad (1.8)$$

$$\dot{x}' = (1 + Ce^{-\delta p})^{-1/2} \sin(p\pi + \vartheta). \quad (1.9)$$

Уравнения (1.6)–(1.9) дают нам точечное преобразование S' точек x_0, \dot{x}_0 в точки x', \dot{x}' в параметрическом виде (параметры C и ϑ). Далее, поскольку уравнение (1.1) инвариантно относительно замены $x = -x'$, $\dot{x} = -\dot{x}'$, $t = t' + p\pi$, то имеют силу теоремы о движении «симметричного» осциллятора [5]. Последнее означает, что как и в [1, 2], преобразование точек x_0, \dot{x}_0 плоскости $\tau = 0$ в точки x_1, \dot{x}_1 плоскости $\tau = 2p\pi$ является двухкратнопримененным S' -преобразованием, и, следовательно, существование и устойчивость периодических решений с периодом внешней силы уравнения (1.1) определяются существованием и устойчивостью неподвижных точек S' -преобразования.

2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ S' -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

Неподвижные точки точечного преобразования задаются системой

$$\begin{aligned} x_0(C^*, \vartheta^*) &= x'(C^*, \vartheta^*), \\ \dot{x}_0(C^*, \vartheta^*) &= \dot{x}'(C^*, \vartheta^*). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя (1.6)–(1.9) в (2.1) и решая полученную систему, имеем

- 1) для нецелочисленного значения p

$$\lambda = -\frac{\sin(p\pi)\sqrt{A}}{2|\sin\vartheta^*|\sin(p\pi+\vartheta^*)} (\sin\vartheta^*\sin(p\pi+\vartheta^*) < 0), \quad (2.2)$$

$$C^* = -1 + \sin^2\vartheta^*/A, \quad (2.3)$$

где

$$A = [\sin^2(p\pi + \vartheta^*)e^{\delta p} - \sin^2\vartheta^*](e^{\delta p} - 1)^{-1}; \quad (2.4)$$

- 2) для целочисленных значений p и $\lambda \neq 0$

$$\lambda = (1/2) [(1 + C^*e^{-\delta p})^{-1/2} - (1 + C^*)^{-1/2}] \cos\vartheta^*, \quad \vartheta = 0, \pi \quad (p \text{ — нечетное}), \quad (2.5)$$

$$\lambda = (1/2) [(1 + C^*e^{-\delta p})^{-1/2} + (1 + C^*)^{-1/2}], \quad \vartheta = \pi \quad (p \text{ — четное}), \quad (2.6)$$

3) при нечетном p и $\lambda = 0 \vartheta^*$ — любое, а $C^* = 0$ и $+\infty$; из указанных двух значений C^* первое соответствует предельному циклу, а второе — тривиальному состоянию равновесия исходной автономной задачи;

4) при четном p (включая равенство нулю) и $\lambda = 0$ $C^* = +\infty$, ϑ^* любое и соответствует тривиальному состоянию равновесия исходной автономной задачи.

На рис. 1 приведены графики зависимости λ от C^* для (2.6) (пунктирная кривая) и λ от C^* для (2.5) (сплошная кривая). Локальный максимум λ во втором графике располагается при

$$C_m^* = e^{(\delta/3)p} (1 + e^{(\delta/3)p}) \quad (2.7)$$

и равен

$$\lambda_m = (1/2) \{ [1 + (1 + e^{-(\delta/3)p}) e^{-(\delta/3)p}]^{-1/2} - [1 + (1 + e^{(\delta/3)p}) e^{(\delta/3)p}]^{-1/2} \}. \quad (2.8)$$

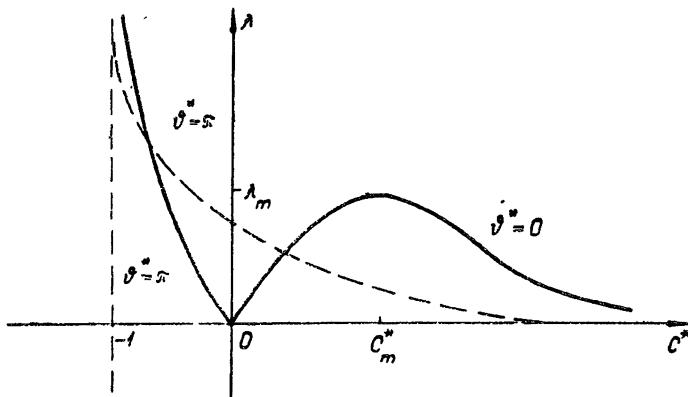


Рис. 1.

Используя условия $\lambda \geq 0$, $C^* > -1$, из (2.2) и (2.3) получаем следующие неравенства:

$$\sin^2(p\pi + \vartheta^*) e^{\delta p} - \sin^2 \vartheta^* \geq 0, \quad (2.9)$$

$$\sin(p\pi) \sin(p\pi + \vartheta^*) < 0, \quad (2.10)$$

$$\sin \vartheta^* \sin(p\pi + \vartheta^*)' < 0. \quad (2.11)$$

Из анализа совместности условий (2.9) — (2.11), следует, что область существования ϑ^* системы уравнений (2.2), (2.3) определяется следующими соотношениями:

$$0 < \bar{\vartheta}^* = \pi - \operatorname{arcctg} \left[\frac{\cos(p\pi) + e^{-(\delta/2)p}}{\sin(p\pi)} \right] < \vartheta^* < \pi \quad (2.12)$$

(при $\sin(p\pi) > 0$),

$$\pi < \vartheta^* \leq \pi - \operatorname{arcctg} \left[\frac{\cos(p\pi) + e^{-(\delta/2)p}}{\sin(p\pi)} \right] = \bar{\vartheta}^* < 2\pi \quad (2.13)$$

(при $\sin(p\pi) < 0$).

Нетрудно проверить, что в области существования ϑ^* системы (2.2), (2.3) зависимость C^* от ϑ^* имеет монотонный характер: убывающий при $\sin(p\pi) > 0$ и возрастающий при $\sin(p\pi) < 0$. Минимальное

значение $C^* \rightarrow -1$ имеет место при $\vartheta^* \rightarrow \pi$, максимальное значение $C^* = +\infty$ — при $\vartheta^* = \bar{\vartheta}^*$.

Зависимость λ от ϑ^* согласно (2.2) в области существования ϑ^* системы (2.2), (2.3) может иметь локальный минимум и локальный максимум. Значения ϑ^* , которым соответствуют указанные экстремумы, определяются соотношениями (2.12) или (2.13) и уравнением

$$f = \cos \vartheta^* \sin^3(p\pi + \vartheta^*) e^{p\vartheta} - \cos(p\pi + \vartheta^*) \sin^3 \vartheta^* = 0, \quad (2.14)$$

получающимся из условия $\frac{d\lambda}{d\vartheta^*} = 0$. Совместный анализ выражений

(2.12) — (2.14) показывает, что выражение (2.14) имеет место только в точках ϑ^* , лежащих внутри интервала существования ϑ^* системы (2.2), (2.3). Следовательно, граница в пространстве параметров p , δ , λ , на которой происходит исчезновение или появление локальных экстремумов, задается совместной системой уравнений (2.2), (2.12) — (2.14)

и уравнением $\frac{df}{d\vartheta^*} = 0$, принимающим после ряда неособых преобразований вид

$$\sin \vartheta^* \sin(p\pi + \vartheta^*) - 3 \cos(p\pi + \vartheta^*) \cos \vartheta^* = 0. \quad (2.15)$$

Характер графика зависимости λ от ϑ^* внутри простых интервалов по p , включающих нечетные целочисленные значения, приведен на рис. 2 (кривые 1, 2), и вне отмеченных интервалов — на рис. 2 (кривые 3, 4). Вычисления односторонней производной зависимости λ от ϑ^* согласно (2.2) при $\vartheta^* \rightarrow \bar{\vartheta}^*$ показывают, что односторонняя касательная к кривым (рис. 2) в точке $\bar{\vartheta}^*$ всегда вертикальна.

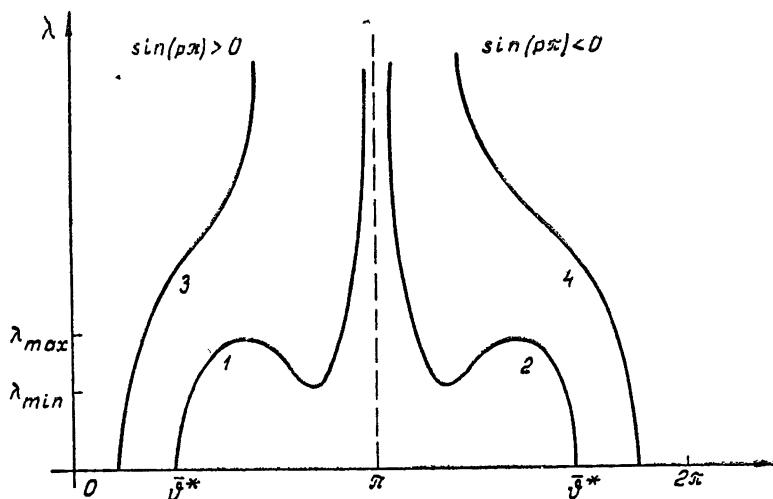


Рис. 2.

Согласно (2.2), (2.12) — (2.15), на рис. 3 в пространстве параметров p , δ , λ построены границы существования различного числа неподвижных точек точечного преобразования S' . Области существования трех неподвижных точек точечного преобразования S' лежат внутри сердце-

видных «зубьев». Вне «зубьев» существует одна неподвижная точка S' -преобразования.

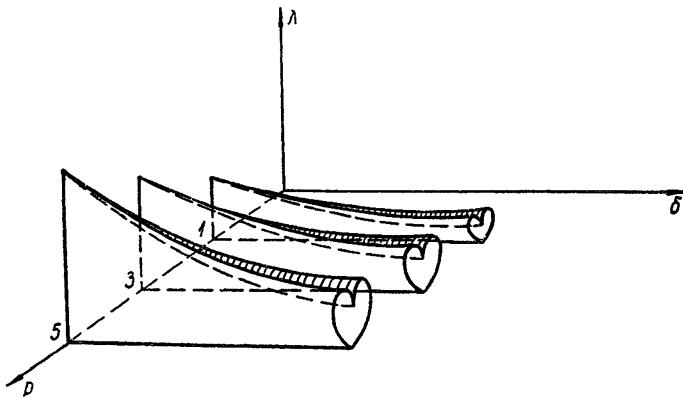


Рис. 3.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК S' -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Нетрудно аналогично [1, 2] получить характеристический полином [6], решающий вопрос устойчивости неподвижных точек C^* , ϑ^* S' -преобразования, в виде

$$Az^2 + Bz + C = 0, \quad (3.1)$$

где

$$A = (1 + C^*)^{-2},$$

$$\begin{aligned} B &= (1 + e^{-\delta p} + 2C^* e^{-\delta p}) [(1 + C^*)(1 + C^* e^{-\delta p})]^{-3/2} \cos(p\pi), \\ C &= e^{-\delta p} (1 + C^* e^{-\delta p})^{-2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Согласно (3.1) граница области устойчивости на плоскости p, C^* состоит из двух особых границ, получающихся из (3.1) при $z = \pm 1$ и имеющих соответственно вид

$$\begin{aligned} (1 + C^*)^{-2} \pm (1 + e^{-\delta p} + 2C^* e^{-\delta p}) [(1 + C^*)(1 + C^* e^{-\delta p})]^{-3/2} \times \\ \times \cos(p\pi) + e^{-\delta p} (1 + C^* e^{-\delta p})^{-2} = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

и простой границы

$$\begin{aligned} C^* &= e^{(\delta/2)p}, \\ 2 \cos \varphi + (1 + e^{-(\delta/2)p}) \cos(p\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где параметр φ меняется в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$.

4. АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ S' -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Используя симметричность движения, соответствующего неподвижной точке S' -преобразования, аналогично тому, как это сделано в [1, 2], легко найти, что значение амплитуды $H = |x_{\max}(C^*, \vartheta^*, \tau)|$ задается формулами

$$H = (1 + C^* e^{-(\delta/\pi)(\pi - \vartheta^*)})^{-1/2} - \lambda \quad (\text{при } 0 < p < 1), \quad (4.1)$$

$$H = (1 + C^* e^{-(\delta/\pi)(2\pi - \vartheta^*)})^{-1/2} + \lambda \quad (\text{при } p > 1 \text{ и } -1 < C^* \leq 0), \quad (4.2)$$

$$H = (1 + C^* e^{-(\delta/\pi)[\pi(N+1) - \theta^*]})^{-1/2} + \lambda. \quad (\text{при } p > 1, \sin(p\pi) < 0, C^* \geq 0), \quad (4.3)$$

$$H = (1 + C^* e^{-(\delta/\pi)(\pi N - \theta^*)})^{-1/2} + \lambda. \quad (\text{при } p > 1, \sin(p\pi) > 0, C^* \geq 0), \quad (4.4)$$

где N — целая часть p . Отметим, что при $N = 1$ (4.2) и (4.3), а при $N = 2$ (4.2) и (4.4) по форме записи совпадают. Как и в [1, 2], это объясняется наличием в каждый из полупериодов внешней силы единственного пересечения фазовой траекторией рассматриваемого движения плоскости $x = 0$ фазового пространства x, \dot{x}, t . При $C^* = 0$ зависимости (4.2) — (4.4) совпадают, что означает непрерывную зависимость H от p при смене знака C^* . Из других свойств зависимости H от p и λ можно отметить следующие:

- 1) если $H(p)$ существует то она непрерывна;
- 2) при конечных δ и λ для целочисленных значений p

$$H = 0 \quad (\text{при } p = 0), \quad (4.5)$$

$$H = (1 + C^* e^{-\delta})^{-1/2} + \lambda \quad (\text{при } p = 1, 2, 3, \dots \text{ и } C^* \geq 0), \quad (4.6)$$

$$H = (1 + C^* e^{-\delta(p-1)})^{-1/2} + \lambda \quad (\text{при } p = 1, 2, 3, \dots \text{ и } -1 < C^* \leq 0); \quad (4.7)$$

$$3) \frac{dH}{dp} > 0 \text{ при } p = 1, 3, 5, \dots \text{ и } C^*(C^* - \tilde{C}) > 0; \quad \frac{dH}{dp} < 0 \text{ при } p = 1, 3, 5, \dots \text{ и } C^*(C^* - \tilde{C}) < 0, \text{ где } 0 < \tilde{C} < C_m \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$\lambda(C = \tilde{C}) - 2(e^{\delta p} + \tilde{C}) \frac{d\lambda}{dC}(C = \tilde{C}) = 0, \quad (4.8)$$

а зависимость $\lambda(C)$ задается формулой (2.5) при $\theta^* = 0$;

$$4) \operatorname{sgn} \frac{dH}{dp} = \operatorname{sgn} C^* \quad (\text{при } p = 2, 4, 6, \dots);$$

5) при $p \rightarrow 1, 3, 5, \dots$ резонансные кривые с $\lambda \rightarrow 0$ имеют вид простых замкнутых кривых, которые при $p < p^* = (1/\delta) \ln(1 + 2e^\delta)$ вложены друг в друга, в противном случае замкнутые кривые, оставаясь простыми, с увеличением λ на плоскости p, H сначала целиком смещаются вверх, а при дальнейшем увеличении λ нижние части замкнутых кривых начинают смещаться вниз, в то время как верхние их части продолжают смещаться вверх.

5. ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ НА ПЛОСКОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ

Определение границ устойчивости на плоскости резонансных кривых p, H состоит в построении кривых, определенных соотношениями (4.1) — (4.4) и выделении областей, где выполнены условия (3.3) и (3.4).

Отметим ряд наиболее существенных свойств поведения границы устойчивости. При $p = 1, 3, 5, \dots$ уравнение особых границ (3.3) имеет два корня $C_1 = 0$ и $C_2 = C_m > 0$. Из (3.3) следует, что в рассматриваемом случае значений p $\frac{dC_1}{dp} = 0$, а $\frac{dC_2}{dp} \neq 0$. Используя отмеченные обстоятельства, нетрудно убедиться, что в этом случае на плоскости p, H C_1 и C_2 соответствуют особым границам устойчивости, совпадающим с $H_{\lambda_{\min}}$ и $H_{\lambda_{\max}}$ соответственно, где λ_{\min} и λ_{\max} — минимум и максимум графика зависимости $\lambda(\theta^*)$ (рис. 2). В согласии с выше сказанным из формул (2.1), (2.14) и (4.1), (4.4) следует, что $H_{\lambda_{\min}}$ и $H_{\lambda_{\max}}$ являются непрерывными функциями p в окрестности $p = 1, 3, 5, \dots$.

Кроме того, для $H_{\lambda_{\min}}$ имеют место соотношения (5.1) — (5.4) работы [2], а граница $H_{\lambda_{\max}}$ (при $p = 1, 3, 5, \dots$) является гладкой с

$$\frac{dH_{\lambda_{\max}}}{dp} \left[\frac{\pi}{\delta} \frac{dC_2}{dp} + C_2 \frac{d\vartheta^*}{dp} (C_2) \right] \frac{\partial H}{\partial \vartheta^*} (C_2). \quad (5.1)$$

Поскольку, в чем нетрудно убедиться, используя (3.3), $\frac{dC_2}{dp}$ пропорциональна δ , $\frac{dH}{d\vartheta^*} \sim \delta$, а остальные функции в (5.1) ограничены, то при $\delta \ll 1$ (в силу исходной постановки задачи) $\left| \frac{dH_{\lambda_{\max}}}{dp} \right| \ll 1$.

Совершая в (4.1), (4.3), (4.4), при условии (3.3), предельные переходы при $p \rightarrow 2, 4, 6, \dots$ и сравнивая получаемые результаты с (4.6), приходим к выводу, что при $p = 2, 4, 6, \dots$ граница устойчивости, соответствующая в (3.1) $z = 1$, на плоскости p, H непрерывна. Указанная граница при $p = 2, 4, 6, \dots$ в (3.3) соответствует корню $C_1 = 0$, $\frac{dC_1}{dp} = 0$, согласно (2.1), $\frac{d\lambda}{dp} = 0$ и, следовательно, согласно (4.3), (4.4), является гладкой с $\frac{dH}{dp} = 0$.

Граница устойчивости, соответствующая при $p = 2, 4, 6, \dots$ $C_2 = C_m$, для указанных значений p является также гладкой. Производная $\frac{dH}{dp}$ этой границы при $p = 2, 4, 6, \dots$ определяется формулой (5.1) с добавкой правой части равенства члена

$$\frac{d\lambda}{dp} = -\frac{1}{4} [(1 + C_2)^{-3/2} + e^{-\delta p} (1 + C_2 e^{-\delta p})^{-3/2}] \frac{dC_2}{dp}. \quad (5.2)$$

В случае $\delta \ll 1$ для рассматриваемой части границы при $p = 2, 4, 6, \dots$ $\left| \frac{dH}{dp} \right| \ll 1$.

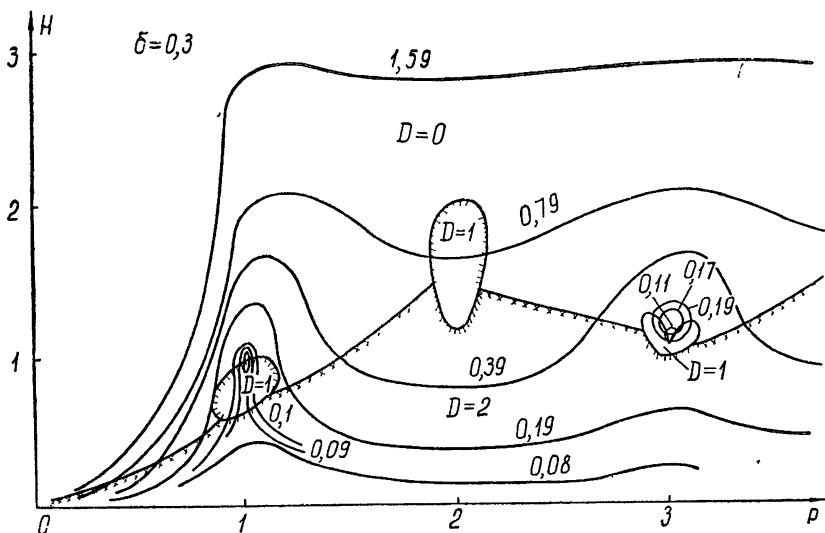


Рис. 4

Особая граница устойчивости, соответствующая в (3.3) $z = -1$, в окрестности $p = 0$ не существует. Простая граница устойчивости при $p = 0$ входит в точку $H = 0$. В последнем нетрудно убедиться, поскольку при $p \rightarrow 0$ для простой границы $C^* \rightarrow 1$ (см. (3.4)) и, кроме того, имеет место соотношение (4.5). Общая картина поведения резонансных кривых и границ устойчивости приведена на рис. 4. Как и в [1, 2] при $p > (i/\delta) \ln(1 + 2e^\delta)$ устойчивому движению соответствуют вышележащие ветви резонансных кривых. Знаком D обозначено число корней $|z| > 1$ полинома (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 5, 926 (1964).
2. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 7, 999 (1967).
3. З. С. Баталова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 4, 794 (1966).
4. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959, стр. 680.
5. Н. А. Железцов, ПММ, 13, вып. 1, 19 (1949).
6. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 1, 49 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 декабря 1967 г.

TO THE THEORY OF QUASIHARMONIC OSCILLATOR SYNCHRONIZATION WITH NONLINEARITY OF THE CUBIC PARABOLA

V. I. Goryunov, N. N. Voronkova

The questions of existence and stability of solution with period of outer force in the problem of quasiharmonic oscillator synchronization are considered.

УДК 531.391.3/4 + 621.396.6.078.6

НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ С ШИРОКОЙ ПОЛОСОЙ ЗАХВАТА

В. П. Пономаренко, В. Д. Шалфеев

Рассматривается динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с интегрирующими фильтрами в фазовом и частотном кольцах при нелинейных характеристиках фазового и частотного детекторов в случае, когда постоянная времени фильтра в фазовом кольце мала. Задача сводится к изучению нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при старшей производной. Устанавливается разбиение на траектории поверхности медленных движений. Доказывается асимптотическая устойчивость в целом состояния равновесия.

1. Одним из способов частичного разрешения противоречия между требованиями широкой полосы захвата и хорошей помехоустойчивости, имеющего место в системах фазовой автоподстройки, является введение дополнительного частотного кольца, т. е. переход к совместной системе частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1-3].

Уравнение, описывающее простейшую систему ЧФАП, при некоторых упрощающих предположениях может быть записано в виде [1, 2]

$$\dot{\varphi} + \Omega K_1(p) F(\varphi) + \Omega_1 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

Здесь φ — разность фаз подстраиваемого и эталонного генераторов, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ ($p \equiv \frac{d}{dt}$) — коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотной цепях управления соответственно, $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ — нормированные характеристики фазового и частотного детекторов, Ω и Ω_1 — максимальные расстройки, вырабатываемые в фазовой и частотной цепях управления, $\delta\omega$ — начальная расстройка.

В настоящей работе рассматривается система ЧФАП с интегрирующими RC -фильтрами $K_1(p) = (T_1 p + 1)^{-1}$, $K_2(p) = (T_2 p + 1)^{-1}$ при нелинейных характеристиках фазового и частотного детекторов $F(\varphi) = \sin \varphi$, $\Phi(p\varphi) = 2\beta_1 p\varphi [1 + (\beta_1 p\varphi)^2]^{-1}$ (T_1 и T_2 — постоянные времени, β_1^{-1} — расстройка, при которой напряжение на выходе частотного детектора максимально). В [2] рассмотрен случай малой постоянной времени фильтра в частотном кольце. Здесь рассмотрение проводится в предположении $T_1 \ll \min [T_2(1 + 2\beta_1\Omega_1)^{-1}, \sqrt{T_2\Omega_1^{-1}}]$, что имеет место, в частности, в случае, когда постоянная времени фильтра в фазовом кольце мала*.

Переходя к безразмерному времени $\tau = t \sqrt{\Omega T_2^{-1}}$, имеем вместо (1) систему

* Этот случай имеет и самостоятельный практический интерес. Так, в [4] дана система синхронизации фазы и частоты генератора с малой постоянной времени фильтра в фазовой цепи управления по сравнению с постоянной времени фильтра в частотной цепи.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= z,\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 \lambda_1^{-1} \dot{z} = \dot{\gamma} - \{1 + \varepsilon_1 [1 + b \beta \Phi'(y_1)]\} z - \lambda_1 (1 + \lambda_1^{-2} \cos \varphi) \eta - \sin \varphi - b \Phi(y_1), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= T_1 T_2^{-1}, \quad \lambda_1 = (\sqrt{\Omega T_2})^{-1}, \quad \gamma = \delta \omega \Omega^{-1}, \quad b = \Omega_1 \Omega^{-1}, \\ \beta &= \beta_1 \Omega, \quad y_1 = \beta \lambda_1 \eta, \quad \Phi(y_1) = 2y_1(1 + y_1^2)^{-1}, \\ \Phi'(y_1) &= 2(1 - y_1^2)(1 + y_1^2)^{-2}.\end{aligned}$$

Все параметры, входящие в (2), за исключением γ , по физическому смыслу являются положительными. Что касается относительной начальной расстройки γ , то достаточно рассмотреть только ее положительные значения, так как случай отрицательных расстроек сводится к случаю положительных заменой $\varphi = \bar{\varphi}$. При сделанном предположении относительно малости постоянной времени фильтра в фазовом кольце система (2) имеет малый параметр $\varepsilon_1 \lambda_1^{-1} \ll 1$ при старшей производной и ее исследование сводится к изучению быстрых и медленных движений [5, 6] в фазовом пространстве. Присутствие малого параметра в правой части последнего уравнения системы (2) сказывается на порядке приближения решений системы к поверхности медленных движений [7]. За фазовое пространство системы (2) в силу периодичности правых частей по координате φ может быть принята область трехмерного пространства φ, η, z , определяемая неравенствами $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Плоскости $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$ отождествляются.

2. Система быстрых движений после введения нового быстрого времени [5] может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 = \text{const}, \\ \eta &= \eta_0 = \text{const},\end{aligned}\quad (3)$$

$$\dot{z} = \gamma - z - \lambda_1 (1 + \lambda_1^{-2} \cos \varphi) \eta_0 - \sin \varphi_0 - b \Phi(\beta \lambda_1 \eta_0) \equiv R(\varphi_0, \eta_0, z).$$

Состояниями равновесия быстрых движений является поверхность медленных движений, определяемая уравнением

$$z = \gamma - \lambda_1 (1 + \lambda_1^{-2} \cos \varphi) \eta - \sin \varphi - b \Phi(\beta \lambda_1 \eta). \quad (4)$$

Поверхность (4) устойчива по отношению к быстрым движениям, поскольку $R_z' < 0$. Траектории на ней определяются «вырожденной» [6] системой

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= \gamma - \lambda_1 (1 + \lambda_1^{-2} \cos \varphi) \eta - \sin \varphi - b \Phi(\beta \lambda_1 \eta).\end{aligned}\quad (5)$$

В силу однозначности поверхности (4) по координате z и периодичности правых частей (5) по φ систему (5) будем рассматривать на фазовом цилиндре φ, η . Цилиндр рассматривается развернутым на часть плоскости $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Координаты состояний равновесия системы (5) определяются равенствами

$$\varphi_1 = \arcsin \gamma, \quad \eta_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma, \quad \eta_2 = 0. \quad (6)$$

Определяя характер состояний равновесия по корням соответствующих характеристических уравнений [5], устанавливаем, что состояние равновесия φ_1, η_1 при любых рассматриваемых значениях параметров есть устойчивый узел в силу выполнения неравенства $\lambda_1^2(1 + 2b\beta + + \lambda_1^{-2}\sqrt{1-\gamma^2})^2 - 4\sqrt{1-\gamma^2} > 0$, а состояние равновесия φ_2, η_2 — всегда седло. При $\gamma = 1$ узел φ_1, η_1 и седло φ_2, η_2 сливаются, образуя сложную особую точку типа седло-узел. При $\gamma > 1$ состояний равновесия нет.

3. Для дальнейшего изучения разбиения фазовой поверхности на траектории рассмотрим случай $b = 0$. В этом случае взаимно-однозначной заменой

$$\gamma = \lambda_1^{-1}(\gamma + \xi - \sin \varphi) \quad (7)$$

система (5) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \lambda_1^{-1}(\gamma + \xi - \sin \varphi), \\ \dot{\xi} &= -\lambda_1 \xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) имеет два состояния равновесия — устойчивый узел $(\arcsin \gamma, 0)$ и седло $(\pi - \arcsin \gamma, 0)$. Угловые коэффициенты сепаратрис в седле определяются равенствами

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -(\lambda_1^2 + \sqrt{1 - \gamma^2}). \quad (9)$$

Изоклины горизонтальных и вертикальных наклонов соответственно определяются уравнениями

$$\xi = 0, \quad \xi = \sin \varphi - \gamma. \quad (10)$$

Принимая во внимание (9) и (10) и определяя знаки производных $\frac{d\xi}{d\tau}$ и $\frac{d\varphi}{d\tau}$, в областях фазового цилиндра между изоклинами горизонтальных и вертикальных наклонов, однозначно устанавливаем расположение фазовых траекторий системы (8). Из характера поведения фазовых траекторий и расположения главных изоклинов следует, что при $\gamma < 1$ система (8) не имеет предельных циклов I и II рода. Состояние равновесия $(\arcsin \gamma, 0)$ системы (8) асимптотически устойчиво в целом на фазовом цилиндре*. Разбиение цилиндра на траектории системы (8) представлено для $\gamma < 1$ на рис. 1а. Пунктирной линией дана изоклина вертикальных наклонов. При $\gamma > 1$ состояний равновесия нет, изоклина вертикальных наклонов целиком расположена в области $\xi < 0$. Замкнутых траекторий, не охватывающих фазовый цилиндр, нет. Единственной замкнутой траекторией, охватывающей цилиндр, является траектория $\xi = 0$. Эта траектория есть устойчивый предельный цикл II рода. Расположение траекторий на фазовой поверхности при $\gamma > 1$ представлено на рис. 1б.

Обращаясь теперь снова к системе (5), в силу (7) устанавливаем, что при $b = 0, \gamma < 1$ для состояний равновесия φ_1, η_1 также имеет место асимптотическая устойчивость в целом на цилиндре. При $b = 0, \gamma > 1$ система (5) имеет единственный устойчивый предельный цикл II рода. Таким образом, фазовый портрет системы (5) при $b = 0$ также однозначно устанавливается. Расположение траекторий этой системы для $\gamma < 1$ и $\gamma > 1$ представлено на рис. 2а, б соответственно.

* Здесь для асимптотической устойчивости в целом достаточно потребовать, чтобы областью притяжения устойчивого состояния равновесия являлась вся поверхность фазового цилиндра за исключением неустойчивой особой точки — седла и точек, принадлежащих сепаратрисам, входящим в седло.

Из проведенного качественного исследования системы (5) следует вывод о величине полосы захвата рассматриваемой системы автоподстройки частоты при $b = 0$. Полоса захвата рассматриваемой системы равна полосе синхронизма $\gamma_s = 1$ в силу асимптотической устойчивости в целом состояния равновесия φ_1, η_1 при начальных расстройках $\gamma < 1$ и любых значениях параметра λ_1 .

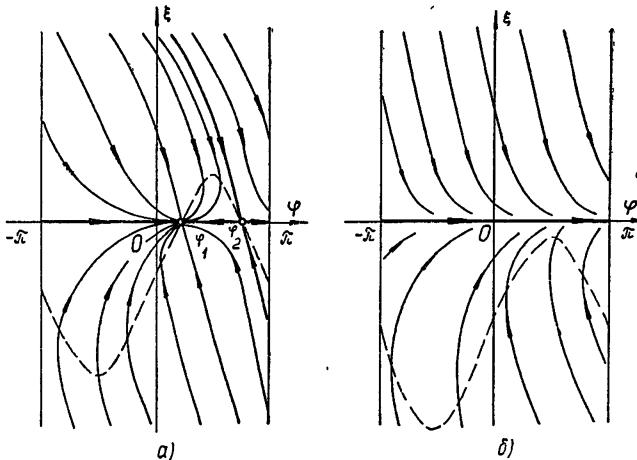


Рис. 1.

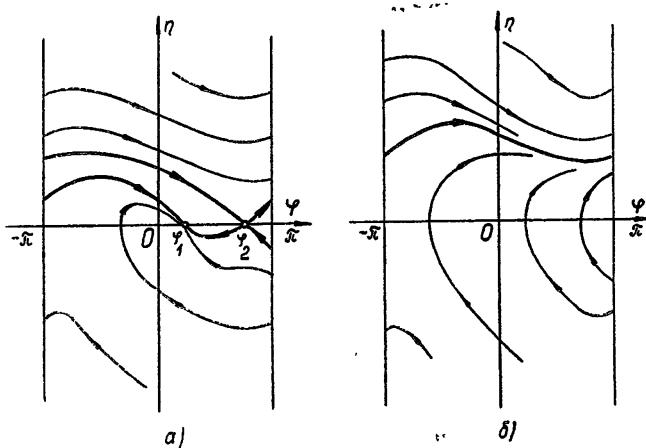


Рис. 2.

4. Перейдем к изучению фазового портрета системы (5) при $b > 0$. Координаты состояний равновесия системы (5) и их характер с изменением параметра b не изменяются. Касательные $x_{1,2}$ к сепаратрисам в седле φ_2, η_2 при возрастании параметра b поворачиваются по часовой стрелке, поскольку

$$\frac{\partial x_{1,2}}{\partial b} = -\lambda_1 \beta (1 \pm \alpha) < 0, \quad (11)$$

где

$$\alpha = \lambda_1 (\lambda_1^{-2} \sqrt{1-\gamma^2} - 1 - 2b\beta) [\lambda_1^2 (\lambda_1^{-2} \sqrt{1-\gamma^2} - 1 - 2b\beta)^2 + 4\sqrt{1-\gamma^2}]^{-1/2} < 1.$$

Определим разность направлений векторных полей системы (5) с ростом параметра b ($b_2 > b_1$)

$$R = \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)_{b=b_2} - \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)_{b=b_1} = -(b_2 - b_1) \Phi(\beta\lambda_1\eta) \eta^{-1}. \quad (12)$$

Так как $\Phi(\beta\lambda_1\eta) \eta^{-1} > 0$ для всех точек фазовой поверхности, то разность R на всем цилиндре имеет отрицательный знак. Следовательно, поворот векторного поля с увеличением параметра b происходит всюду по часовой стрелке. Принимая во внимание свойства (11) и (12), заключаем, что с ростом параметра b асимптотическая устойчивость в целом состояния равновесия φ_1, η_1 системы (5) сохраняется и, стало быть, фазовые портреты системы (5) при $b = 0$ и $b > 0$ одинаковы (рис. 2). Рассматриваемая система ЧФАП при всех $b > 0$ имеет полосу захвата, равную полосе синхронизма $\gamma_3 = 1$.

Отметим, что указанные свойства (11) и (12) поворота векторного поля системы (5) имеют место не только в случае, когда характеристика частотного детектора аппроксимирована функцией $\Phi(\beta\lambda_1\eta) = 2\beta\lambda_1\eta [1 + (\beta\lambda_1\eta)^2]^{-1}$, но и при любой другой нечетной функции $\Phi(\beta\lambda_1\eta)$, удовлетворяющей условию $\Phi(0) = 0$ и неравенствам

$$0 \leq \Phi(\beta\lambda_1\eta) \eta^{-1} \leq k \quad (0 < k \leq \infty). \quad (13)$$

Неравенство (13) означает, что на плоскости η, x кривая $x = \Phi(\beta\lambda_1\eta)$ лежит целиком в угле, образованном прямой $x = k\eta$ и осью η [8]. Следовательно, асимптотическая устойчивость в целом состояния равновесия φ_1, η_1 системы (5) имеет место при любых кусочно-непрерывных действительных функциях, определенных для всех действительных значений η , удовлетворяющих условию $\Phi(0) = 0$ и неравенствам (13). Указанным условиям удовлетворяют практически все известные характеристики частотных детекторов [9].

Таким образом, изучение динамики системы ЧФАП с малоинерционной фазовой целью управления приводит к рассмотрению нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при старшей производной. Исследование системы на поверхности медленных движений дает возможность установить, что полоса захвата изучаемой системы равна полосе синхронизма. В силу того, что устойчивое состояние равновесия при всех рассматриваемых значениях параметров узел, установление режима синхронизма в системе происходит с большим затуханием.

ЛИТЕРАТУРА

- М. В. Капранов, Научн. докл. высш. шк. — Радиотехника и электроника, № 2, 162 (1958).
- Л. Н. Белюстина, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 383 (1968).
- В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
- Arthur T. Klingberg, System to extend the control range of phase-locked oscillators, Motorola, Inc.; Пат. США, кл. 331-III, № 3241084, заявл. 29.10.62, опубл. 15.03.66.
- А. А. Андronов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, изд. второе, переработка и дополнения Н. А. Железцова, Физматгиз, М., 1959.
- Л. С. Понtryagin, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 605 (1957).
- Д. В. Аносов, Мат. сб., 50, № 3, 299 (1960).

8. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1963.
9. М. Р. Капланов, В. А. Левин, Автоматическая подстройка частоты, Госэнергиздат, М—Л, 1962.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 ноября 1967 г.

NONLINEAR SYSTEM FOR AUTOMATIC PHASE—FREQUENCY CONTROL
WITH WIDE RANGE OF ENTRAINMENT

V. P. Ponomaryenko, V. D. Shalfeev

This paper deals with the consideration of dynamics of the automatic phase-frequency control system with integrating filters in both phase and frequency control loops and with phase and frequency detectors having nonlinear characteristics for the case of time constant of a filter in frequency control loop being small. The problem is reduced to the investigation of a third order nonlinear differential equation with a small parameter in the highest order derivative term. Division of slow motions surface into trajectories is ascertained. Asymptotic stability in whole of equilibrium state is proved.

УДК 531.391.3/4 + 621.396.6 078.6

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

В. П. Сизов

Проведено исследование стационарных режимов системы фазовой автоподстройки частоты методом гармонического баланса. Путем сравнения полученных результатов с уже известными на ряде частных примеров выявлены возможности и границы применимости этого метода при решении задач о полосе захвата

Как известно, в системе фазовой автоподстройки частоты (ФАП), упрощенная блок-схема которой представлена на рис. 1 (здесь ЭГ—эталонный генератор, ПГ—подстраиваемый генератор, ФД—фазовый детектор, ФНЧ—фильтр низких частот), могут существовать два вида устойчивых режимов: синхронный и асинхронный (режим биений).

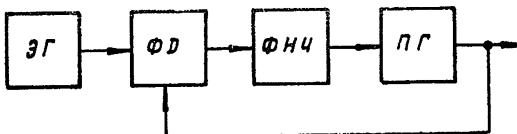


Рис. 1.

В силу нелинейности дифференциального уравнения, описывающего такую систему [1], нахождение условий, обеспечивающих переход от асинхронного режима к синхронному (представляющему наибольший практический интерес), оказывается тем более сложной задачей, чем выше порядок системы. При этом, если для систем ФАП второго (и первого) порядка имеется достаточно разработанный и эффективный метод исследования стационарных режимов—метод фазовой плоскости [1—4], то для систем более высоких порядков такой метод окончательно еще не развит.

Вполне понятны поэтом попытки многих авторов [5—8] применить для указанных целей метод гармонического баланса, высокая эффективность которого была неоднократно доказана при анализе различных нелинейных колебательных систем [9]. Однако полученные к настоящему времени результаты еще не позволяют с достаточным основанием судить об истинных возможностях и границах применимости его в этой конкретной области исследований. Рассмотрению данного вопроса и посвящена настоящая статья, в основу которой положена наглядная геометрическая интерпретация стационарных режимов ФАП, существенно облегчающая их анализ.

1. ДИАГРАММА СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ФАП

Стационарные режимы ФАП удобно характеризовать при помощи специальной диаграммы [1], представляющей собой зависимость частоты биений ω_b , т. е. разности между средней во времени частотой ПГ

и частотой ЭГ, от величины начальной расстройки генераторов ω_n , существовавшей до включения автоподстройки: $\omega_b = f(\omega_n)$.

Характер этой зависимости целиком определяется параметрами системы и, как известно из практики, может, например, иметь вид, показанный на рисунках 2а и 2б, где через ω_3 и Ω обозначены соответст-

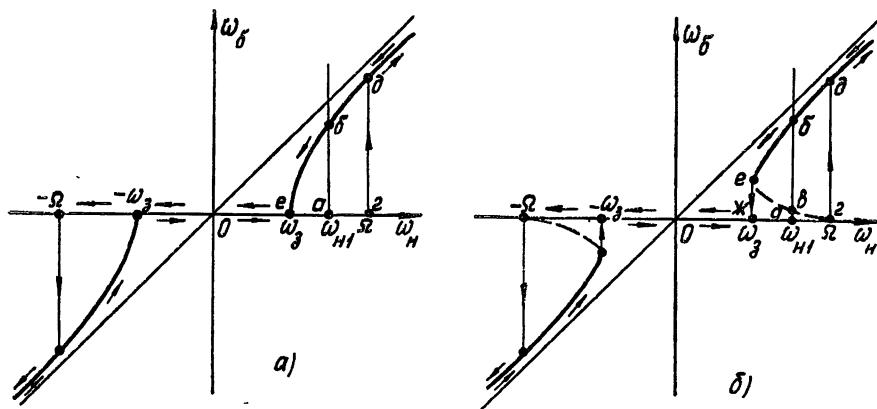


Рис. 2.

венно полоса захвата и полоса синхронизма ФАП. Первый из этих рисунков соответствует случаю, когда частота биений на границе захвата обращается в нуль (например, при использовании однозвездного интегрирующего фильтра [1]), а второй—случаю, когда граничная частота биений отлична от нуля (что может иметь место, например, при наличии в системе ФАП пропорционально-интегрирующего фильтра [4, 10]). Участку кривой, обозначенному на рис. 2б пунктиром, соответствуют неустойчивые стационарные асинхронные режимы ФАП*. Стрелками указано направление движения рабочей точки системы при квазистатическом изменении начальной расстройки ω_n .

Поскольку этим диаграммам присуща неоднозначность, то целесообразно перейти к новым координатам, а именно, построить на основе рис. 2 зависимость расстройки средней частоты ПГ относительно своего начального значения под действием кольца ФАП, т. е. вносимой расстройки $\Delta\gamma$, от частоты биений. (На рис. 2 $\Delta\omega$ равно расстоянию по вертикали от выбранной рабочей точки до асимптоты $\omega_b = \omega_n$, соответствующей отсутствию в системе автоподстройки). Эта зависимость, представляющая собой управляющую характеристику ФАП [1], выраженная в безразмерных величинах,

$$\Delta\gamma = f(\gamma_b), \quad (1)$$

где $\Delta\gamma = \Delta\omega/\Omega$, $\gamma_b = \omega_b/\Omega$, представлена на рисунках 3а и 3б. Точки пересечений ее с прямой обратной связи

$$\Delta\gamma = \gamma_n - \gamma_b, \quad (2)$$

где $\gamma_n = \omega_n/\Omega$, соответствуют равновесным режимам в системе. Можно показать [11], что при выполнении условия $\frac{d(\Delta\gamma)}{d\gamma_b} > -1$ эти точки определяют устойчивые стационарные режимы ФАП, а при $\frac{d(\Delta\gamma)}{d\gamma_b} < -1$ —

* Эти режимы не могут наблюдаться экспериментально. Их существование устанавливается лишь теоретическим анализом или численным решением соответствующего дифференциального уравнения [4, 10, 11].

неустойчивые. Полоса захвата γ_3 равна максимальному значению начальной расстройки γ_n , при котором еще отсутствуют точки пересечений при значениях $\gamma_6 \neq 0$, т. е. в системе возможны лишь синхронные ($\gamma_6 = 0$) стационарные режимы. В частности, на диаграмме рис. 3б γ_3

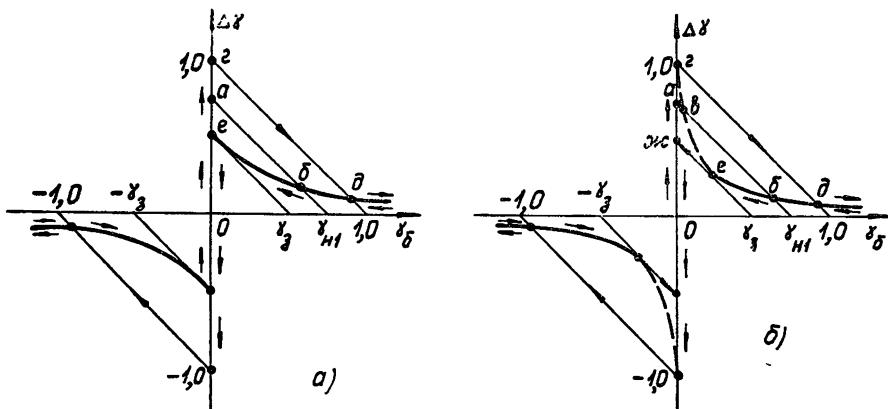


Рис. 3.

равна значению γ_n , при котором прямая обратной связи касается управляющей характеристики в точке e , где выполняется соотношение

$$\frac{d(\Delta\gamma)}{d\gamma_6} = -1, \quad (3)$$

являющееся в данном случае критерием захвата [1].

Основываясь на изложенной интерпретации стационарных режимов ФАП, попытаемся применить для построения управляющей характеристики (1) метод гармонического баланса. Сравнение получаемых при этом результатов с уже известными позволит дать достаточно объективную оценку его возможностей применительно к задаче отыскания полосы захвата.

2. ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФАП МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Дифференциальное уравнение ФАП относительно разности фаз θ на входе ФД в операторной форме имеет вид [1]

$$p\theta/\Omega + K(p) F(\theta) = \gamma_n, \quad (4)$$

где $K(p)$ — коэффициент передачи ФНЧ, $p \equiv \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования $F(\theta)$ — нормированная характеристика ФД.

В режиме биений текущее значение разностной частоты генераторов $p\theta$ периодически изменяется с частотой ω_6 . Поэтому в стационарном асинхронном режиме решение уравнения (4) можно записать в виде

$$\theta = \omega_6 t + a_1 \sin(\omega_6 t + \varphi_1) + a_2 \sin(2\omega_6 t + \varphi_2) + \dots, \quad (5)$$

где a и φ — амплитуды и фазы гармоник периодической составляющей θ .

На основе (5)

$$\sin \theta = \operatorname{Im}[e^{j\theta}] = \operatorname{Im}[e^{j\omega_6 t} e^{ja_1 \sin(\omega_6 t + \varphi_1)} e^{ja_2 \sin(2\omega_6 t + \varphi_2)} \dots],$$

где $\operatorname{Im}[x]$ обозначает мнимую часть комплексной функции x .

Отсюда, воспользовавшись известным соотношением [12]

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in\theta}, \quad (6)$$

где n — целые числа, находим

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sum_{n_1, n_2, \dots = -\infty}^{+\infty} J_{n_1}(a_1) J_{n_2}(a_2) \dots \sin [(1 + n_1 + 2n_2 + \dots) \omega_6 t + \\ &\quad + n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 + \dots]. \end{aligned} \quad (7)$$

Считая, как это обычно принято, характеристику ФД синусоидальной ($F(\theta) = \sin \theta$), подставляем (5) и (7) в (4) и производим замену оператора p на число $j\omega$, поскольку нас в данном случае интересуют только стационарные периодические режимы. Принимая во внимание, что постоянная составляющая нормированного выходного напряжения ФД, т. е. функции $\sin \theta$, равна вносимой расстройке $\Delta\gamma$, и учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} &- \gamma_6 [a_1 \cos(\omega_6 t + \varphi_1) + 2a_2 \cos(2\omega_6 t + \varphi_2) + \dots] = \\ &= \pm K(q\omega_6) \sum_{n_1, n_2, \dots = -\infty}^{+\infty} J_{n_1}(a_1) J_{n_2}(a_2) \dots \sin [q\omega_6 + \Psi(q\omega_6) \pm (n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 + \dots)], \end{aligned} \quad (8)$$

где q — номер гармоники частоты биений. ω_6 удовлетворяет соотношению $1 + n_1 + 2n_2 + \dots = \pm q$ ($q = 1, 2, \dots$), $K(q\omega_6)$ — модуль и фаза коэффициента передачи ФНЧ на частоте q -й гармоники.

Поскольку управляющая характеристика ФАП симметрична относительно начала координат, ограничим наше рассмотрение значениями $\gamma_6 > 0$.

Представляя каждую из частей уравнения (8) в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных членов с частотами $q\omega_6$, приравниваем коэффициенты при одноименных членах с одинаковыми номерами гармоник. В результате, ограничиваясь учетом только первых k гармоник, приходим к системе из k пар уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{q\gamma_6 a_q \sin \varphi_q}{K(q\omega_6)} &= \pm \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k = -\infty \\ (1+n_1+2n_2+\dots+k n_k = \pm q)}}^{+\infty} J_{n_1}(a_1) J_{n_2}(a_2) \dots J_{n_k}(a_k) \cos [\Psi(q\omega_6) \pm (n_1 \varphi_1 + \\ &\quad + n_2 \varphi_2 + \dots + n_k \varphi_k)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} - \frac{q\gamma_6 a_q \cos \varphi_q}{K(q\omega_6)} &= \pm \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k = -\infty \\ (1+n_1+2n_2+\dots+k n_k = \pm q)}}^{+\infty} J_{n_1}(a_1) J_{n_2}(a_2) \dots J_{n_k}(a_k) \sin [\Psi(q\omega_6) \pm (n_1 \varphi_1 + \\ &\quad + n_2 \varphi_2 + \dots + n_k \varphi_k)]. \end{aligned}$$

Выражения, записанные в круглых скобках под знаками сумм, означают, что из всех членов соответствующего ряда следует удержать лишь те, у которых индексы функций Бесселя удовлетворяют данному условию.

Эта система может быть решена, например, численно, после чего из (7) при условии $1 + n_1 + 2n_2 + \dots + k n_k = 0$ находим нормированную постоянную составляющую, т. е. искомую управляющую характеристику ФАП:

$$\Delta\gamma = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k=-\infty \\ (1+n_1+2n_2+\dots+kn_k=0}}}^{+\infty} J_{n_1}(a_1) J_{n_2}(a_2) \dots J_{n_k}(a_k) \sin(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 + \dots + n_k\varphi_k). \quad (10)$$

Поскольку в практических расчетах по методу гармонического баланса [5-9] обыкновенно пренебрегают действием гармоник с номерами выше k , получаемые результаты (в нашем случае — управляющая характеристика ФАП) носят приближенный характер. Точность их тем выше, чем большее количество гармоник учтено (чем выше k) и чем лучше фильтрация высших гармоник в системе. В этой связи необходимо отметить, что во всех работах по анализу асинхронных режимов ФАП методом гармонического баланса [5-8] авторами использовался только простейший частный случай этого метода, а именно, баланс по первой гармонике биений в пренебрежении всеми высшими гармониками, что, конечно, заведомо снижало достижимую точность результатов. Полученная нами система уравнений (9), (10) позволяет в принципе учесть любое желаемое количество гармонических составляющих и, следовательно, дать более полную оценку возможностей метода гармонического баланса применительно к конкретным задачам анализа ФАП.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОСЫ ЗАХВАТА ФАП МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПРИ УЧЕТЕ ТОЛЬКО ПЕРВОЙ ГАРМОНИКИ БИЕНИЙ

Положив в (9) и (10) $k = 1$ и приняв во внимание, что условию $1 + n_1 = \pm 1$ отвечают $n_1 = 0$ и $n_1 = -2$, а условию $1 + n_1 = 0$ — значение $n_1 = -1$, с учетом свойства функций Бесселя [12]

$$J_{-n}(a) = (-1)^n J_n(a) \quad (11)$$

получаем

$$\gamma_6 a \sin \varphi = K(\omega_6) \{J_0(a) \cos \Psi(\omega_6) - J_2(a) \cos [2\varphi + \Psi(\omega_6)]\}, \quad (12)$$

$$-\gamma_6 a \cos \varphi = K(\omega_6) \{J_0(a) \sin \Psi(\omega_6) - J_2(a) \sin [2\varphi + \Psi(\omega_6)]\}, \quad (13)$$

$$\Delta\gamma = J_1(a) \sin \varphi. \quad (14)$$

На основе этих уравнений при помощи таблиц [13] построены обобщенные графики рис. 4, представляющие собой зависимость вносимой

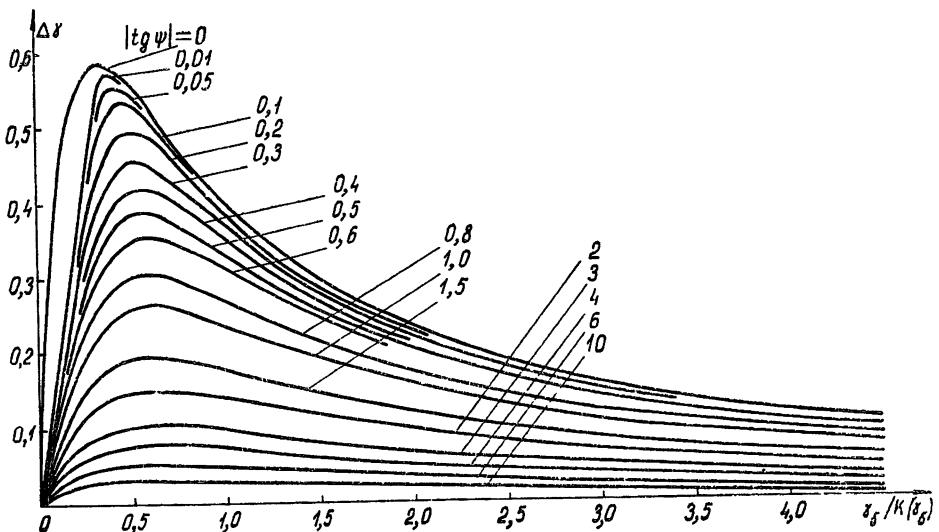


Рис. 4.

расстройки $\Delta\gamma$ от отношения частоты биений γ_b к модулю коэффициента передачи ФНЧ на этой частоте $K(\gamma_b)$ для фиксированных значений вносимого фильтром фазового сдвига Ψ . Полученные графики позволяют по заданным амплитудной и фазовой характеристикам ФНЧ построить управляющую характеристику ФАП, не прибегая к численному решению уравнений (12) — (14). Для этого достаточно для каждого из значений γ_b вычислить лишь величины $\gamma_b/K(\gamma_b)$, $\Psi(\gamma_b)$ и по графикам найти соответствующие им значения $\Delta\gamma$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) *ФАП с идеализированным ФНЧ: $K(p) \equiv 1$.* Аналитическое выражение для управляющей характеристики данной ФАП имеет вид [11] $\Delta\gamma = \sqrt{\gamma_b^2 + 1} - \gamma_b$. Соответствующая этому уравнению кривая приведена на рис. 5а пунктиром. Там же нанесена приближенная управляющая характеристика, (кривая I), построенная для данного случая методом гармонического баланса с использованием графика рис. 4.

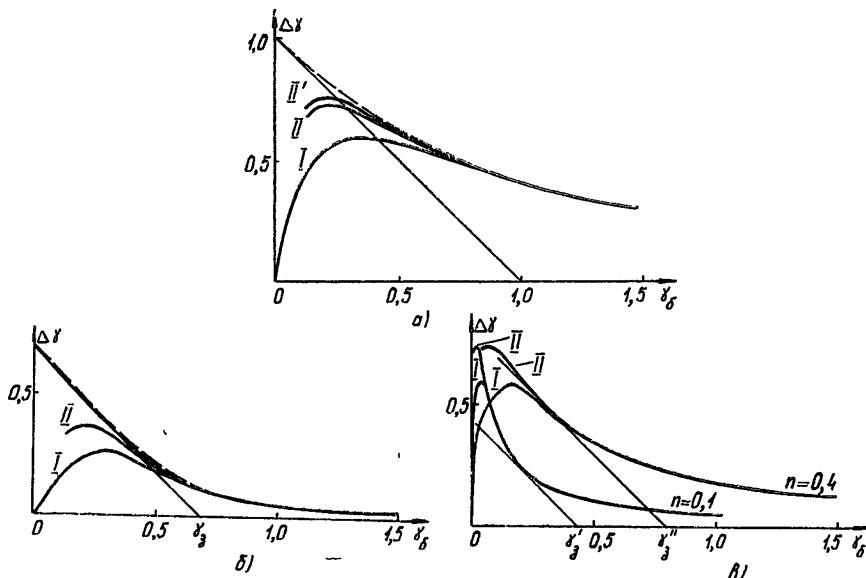


Рис. 5.

Очевидно, обе характеристики достаточно хорошо совпадают лишь для сравнительно больших значений γ_b , начиная, примерно, с $\gamma_b = 0.7$, когда $\Delta\gamma \leq 0.5$. Этот результат легко объясним, если учесть, что наличие постоянной составляющей в режиме биений указывает на асимметрию выходного напряжения ФД. Чем больше постоянная составляющая этого напряжения, тем сильнее выражены в нем высшие гармоники и тем больше, следовательно, получаемая погрешность.

В результате, как видно из рис. 5а, при любой начальной расстройке (вплоть до $\gamma_n = 0$) прямая обратной связи пересекает приближенную управляющую характеристику в точках, для которых $\gamma_b \neq 0$ и $\frac{d(\Delta\gamma)}{d\gamma_b} > -1$. Но, как отмечалось выше, таким точкам диаграммы соответствуют устойчивые асинхронные режимы ФАП, т. е. полоса захвата оказывается равной нулю (!).

Этот ошибочный результат говорит о неправомерности применения метода гармонического баланса с учетом только первой гармоники колебания для определения полосы захвата ФАП в том случае, когда

частота биений в системе в критическом режиме стремится к нулю (что, как известно, имеет место в ФАП с идеализированным фильтром), поскольку при этом колебания на выходе ФД далеки от монохроматических.

2) *ФАП с интегрирующим ФНЧ: $K(p) = 1/(1 + pT)$.* Приближенная управляющая характеристика данной ФАП при $\Omega T = 3$, построенная с использованием графиков рис. 4, приведена на рис. 5б (кривая 1).

Как известно [1], в такой системе с приближением начальнойстройки γ_n к полосе захвата γ_3 частота биений γ_6 понижается, стремясь к нулю. Учитывая, что при $\Omega T = 3$ $\gamma_3 \approx 0,68$ (см., например, [14]), нетрудно провести прямую обратной связи, которая является асимптотой управляющей характеристики ФАП для данного фильтра (тонкая прямая на рис. 5б)*.

И здесь картина получилась аналогичной той, которую мы наблюдали в системе ФАП с идеализированным фильтром. Любому значению $\gamma_n \neq 0$ соответствует устойчивое периодическое решение, и полоса захвата $\gamma_3 = 0$.

3) *ФАП с пропорционально-интегрирующим ФНЧ: $K(p) = (1 + nTp)/(1 + Tr)$.* Известно [10], что в такой системе частота биений на границе захвата обращается в нуль только при относительно малых постоянных времени T . При увеличении T , начиная с некоторого его значения, граничная частота биений становится отличной от нуля, и характер критического режима существенно изменяется. Поскольку случай нулевой граничной частоты биений в принципе не отличается от уже рассмотренных выше, то здесь для нас особый интерес будут представлять большие постоянные времени T , при которых в критическом режиме частота биений не равна нулю.

На рис. 5в приведены две управляющие характеристики ФАП, построенные приближенным методом гармонического баланса при $\Omega T = 100$ для $n = 0,1$ и $n = 0,4$ (кривые I).

Как видим, при $n = 0,1$ картина получилась существенно отличной от тех, которые мы наблюдали выше (ФАП с идеализированным и ФАП с интегрирующим фильтрами). Управляющая характеристика имеет неустойчивую ветвь, на которой $\frac{d(\Delta\gamma)}{d\gamma_6} < -1$, и применение критерия

(3) дает значение полосы захвата $\gamma_3 \approx 0,44$, что близко к результатам расчета в [10] и практически совпадает с теоретическим пределом, даваемым асимптотической формулой [11, 15]:

$$\gamma_3 = \sqrt{n(2-n)}. \quad (15)$$

При $n = 0,4$ неустойчивую ветвь на управляющей характеристике ФАП данным методом, т. е. методом гармонического баланса с учетом только первой гармоники биений, обнаружить уже не удается. Физически это связано с тем обстоятельством, что увеличение n приводит к возрастанию глубины модуляции частоты ПГ выходным напряжением ФД, и следовательно, расширяет спектр его колебаний. В результате, хотя частота биений в системе на границе полосы захвата и не равна нулю, тем не менее пренебрежение высшими гармониками спектра ПГ приводит к существенной погрешности в интересующей нас области управляющей характеристики ФАП. Однако в данном случае, в отличие от систем ФАП с нулевой граничной частотой биений, спектр колебаний ПГ на границе захвата остается дискретным, а не сплошным, что создает принципиальную возможность выявить неустойчивую ветвь

* Сэма управляющая характеристика будет лежать выше этой асимптоты, как условно показано на том же рисунке пунктиром.

управляющей характеристики при учете конечного числа высших гармоник биений.

4. УЧЕТ ВЫСШИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Полагая $k = 2$ и обозначая $n = n_2$, из (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_6 a_1 \sin \varphi_1 / K_1 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(-2n)} J_n \cos (\Psi_1 - 2n\varphi_1 + n\varphi_2) - \\ &- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(-2-2n)} J_n \cos [\Psi_1 + (2+2n)\varphi_1 - n\varphi_2], \\ -\gamma_6 a_1 \cos \varphi_1 / K_1 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(-2n)} J_n \sin (\Psi_1 - 2n\varphi_1 + n\varphi_2) - \\ &- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(-2-2n)} J_n \sin [\Psi_1 + (2+2n)\varphi_1 - n\varphi_2], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma_6 a_2 \sin \varphi_2 / K_2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(1-2n)} J_n \cos [\Psi_2 + (1-2n)\varphi_1 + n\varphi_2] - \\ &- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(-3-2n)} J_n \cos [\Psi_2 + (3+2n)\varphi_1 - n\varphi_2], \\ -2\gamma_6 a_2 \cos \varphi_2 / K_2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(1-2n)} J_n \sin [\Psi_2 + (1-2n)\varphi_1 + n\varphi_2] - \\ &- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(-3-2n)} J_n \sin [\Psi_2 + (3+2n)\varphi_1 - n\varphi_2]; \\ \Delta \gamma &= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{(-1-2n)} J_n \sin [(1+2n)\varphi_1 - n\varphi_2]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь для сокращения записи введены следующие обозначения: $K(\omega_6) = K_1$, $K(2\omega_6) = K_2$, $\Psi(\omega_6) = \Psi_1$, $\Psi(2\omega_6) = \Psi_2$, $J_{n_1}(a_1) J_{n_2}(a_2) = J_{n_1} J_{n_2}$. (Имея в виду последнее обозначение, следует помнить, что в общем случае $J_{n_1} J_{n_2} \neq J_{n_2} J_{n_1}$).

Правая часть каждого из уравнений (16) и (17) представляет собой ряд с бесконечным количеством членов, в которых коэффициентами служат произведения двух функций Бесселя $J_n J_{n'}$. Этот ряд весьма быстро сходится, что связано с известным свойством функций Бесселя быстро убывать с ростом индекса при фиксированном значении аргумента. Данное обстоятельство позволяет при практических расчетах без существенной потери точности ограничить ряды членами, в которых сумма модулей индексов функций Бесселя не превосходит некоторого фиксированного числа N , т. е. в правых частях (16) и (17) сохранить лишь члены, для которых выполняется условие

$$|n_1| + |n_2| \leq N. \quad (18)$$

К сожалению, в данном случае уже не представляется возможным на основе уравнений (16) и (17) построить обобщенные управляющие характеристики ФАП подобно тому, как это было проделано нами ранее при расчете в первом приближении (раздел 3), при изменении параметров ФНЧ численный расчет необходимо проводить заново.

На рис. 5 приведены управляющие характеристики ФАП, полученные численным решением системы (16) при условии (18) для $N = 2$

с последующей подстановкой найденных значений амплитуд и фаз гармоник в (17) для различных типов ФНЧ, рассмотренных в предыдущем разделе (кривые II на рис. 5).

Как видим, в системах ФАП с нулевой граничной частотой биений (рис. 5а и 5б) дополнительный учет второй гармоники биений не изменяет характера соответствующих кривых, построенных в первом приближении (т. е. с учетом только первой гармоники). Кроме того, обращает на себя внимание медленная сходимость получаемых приближений к реальной управляющей характеристике вблизи начала координат, что указывает на быстрое возрастание высших гармонических составляющих колебаний при понижении частоты биений.

Увеличение параметра N , т. е. учет большего числа членов в правых частях (16) и (17), улучшает второе приближение, получаемое при $N = 2$, весьма незначительно, что иллюстрируется кривой II', построенной для ФАП с идеализированным фильтром при $N = 4$ (рис. 5а).

Для ФАП с пропорционально-интегрирующим ФНЧ при $\Omega T = 100$ и $n = 0,4$ (гранична частота биений отлична от нуля) уточнение управляющей характеристики, полученное во втором приближении, оказалось весьма существенным, поскольку оно позволило обнаружить наличие неустойчивой ветви (рис. 5в), чего в первом приближении сделать не представлялось возможным. Применение критерия (3) в данном случае дает $\gamma_3 \approx 0,8$, что близко к результатам [10] и совпадает с теоретическим значением, получаемым из (15).

Аналогичным образом на основе исходных уравнений (9), (10) могут быть построены третье и более высокие приближения. Однако, как показывают расчеты, с понижением частоты биений, когда асимметрия напряжения на выходе ФД резко возрастает, степень уточнения управляющей характеристики, даваемого каждым последующим приближением, быстро уменьшается.

Подводя итог изложенному выше, можно сделать следующие основные выводы.

Метод гармонического баланса дает качественно правильные результаты при исследовании полосы захвата ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром при больших постоянных времени ΩT (на границе захвата $\gamma_6 \neq 0$).

При исследовании ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром при малых величинах ΩT , ФАП с интегрирующим фильтром и ФАП с идеализированным фильтром (на границе захвата $\gamma_6 = 0$) метод гармонического баланса не дает даже качественного совпадения с правильными результатами. Можно ожидать, что аналогичная картина будет наблюдаться и при других типах фильтров, обеспечивающих нулевую граничную частоту биений, поскольку спектр колебаний на границе захвата становится сплошным, и понятие гармоники фактически утрачивает свой физический смысл.

Выражая благодарность М. В. Капранову и М. В. Благовещенскому за существенные замечания и предложения, учтенные в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Капранов, Радиотехника, 11, № 12, 37 (1956).
2. W. J. Gruen, Proc. IRE, 41, № 8, 1043 (1953).
3. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 2, 277 (1959).
4. Н. А. Губарь, ПММ, 25, № 6, 1011 (1961).
5. Е. Л. Урман, Вестник электропромышленности, № 4, 54 (1957).
6. T. Niewiadomski, Archiwum Electrotechniki, 9, № 1, 51 (1960).
7. T. J. Rey, Proc. IRE, 48, № 10, 1760 (1960).

8. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
9. Е. П. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.
10. С. В. Первачев, Радиотехника и электроника, 8, № 2, 358 (1963).
11. В. П. Сизов, Электросвязь, № 1, 63 (1968).
12. Андре Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, пер. с фр., под ред. К. С. Шифрина, изд. Наука, М., 1964.
13. В. Н. Фаддеева, М. К. Гавурин, Таблицы функций Бесселя целых номеров, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
14. Giger, Zs. f. angewandte Math. und Phys., № 2, 37 (1956).
15. D. Richman, Proc. IRE, 42, № 1, 106 (1954).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
2 октября 1967 г.

ON THE EFFECT OF HARMONIC BALANCE METHOD IN THE RESEARCHES OF STATIONARY MODES OF THE PHASE FREQUENCY CONTROL

V. P. Sizov

The investigations of stationary modes of the phase frequency control system by harmonic balance method are made. Comparison of the experimental results with the known ones in some particular examples has revealed the possibilities and the limits for application of this method in solving the problems about band of entrainment.

УДК 62 — 50 : 621.313.333

К ВОПРОСУ О РЕГУЛИРОВАНИИ СКОРОСТИ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С КОРТОКЗАМКНУТЫМ РОТОРОМ

Л. Ф. Евстигнеев, В. И. Королев

Дается вывод формулы электромеханического момента асинхронного двигателя, скорость которого регулируется по схеме Л. Ф. Евстигнеева. Методика расчета может быть использована и для других схем

Асинхронные электродвигатели с короткозамкнутым ротором широко используются в промышленности благодаря исключительной простоте устройства, легкости обслуживания, экономичности, высокой надежности и хорошим эксплуатационным качествам.

Однако проблема плавного регулирования скорости вращения асинхронных короткозамкнутых электродвигателей в широком диапазоне изменения скоростей представляет большой практический и научный интерес.

Известные методы регулирования скорости асинхронных двигателей (например, изменение частоты питающей сети, импульсное, дросельное и др.) отличаются сложностью, громоздкостью и дороговизной, в связи с чем они применяются, как правило, в индивидуальных приводах.

В 1963 г. одним из авторов настоящей статьи был предложен принципиально новый способ регулирования скорости вращения ротора асинхронного двигателя, представляющий определенный интерес. Физическую сущность предложенного способа можно понять из следующего рассмотрения.

Как известно, движение ротора во времени описывается уравнением

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_s(\omega) - M_c(\omega),$$

где J — момент инерции вращающихся масс, ω — угловая скорость ротора.

Электромеханический момент и момент сопротивления, приложенные к валу двигателя, нелинейно зависят от скорости вращения. График зависимости $M_s = M_s(\omega)$ и $M_c = M_c(\omega)$ приведен на рис. 1 (сплошные линии).

Состояния равновесия находятся из уравнения $M_s(\omega) - M_c(\omega) = 0$, а устойчивость состояний равновесия определяется из следующих условий: при $\left(\frac{\partial M_s}{\partial \omega} \right)_0 < \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0$ состояние равновесия устойчиво, при $\left(\frac{\partial M_s}{\partial \omega} \right)_0 > \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0$ неустойчиво. Значения производных вычисляются в состояниях равновесия.

Если кривую $M_s = M_s(\omega)$ деформировать так, как показано на рис. 1 (пунктирная линия), то наряду с прежними состояниями равно-

весия появляется устойчивое состояние равновесия при $\omega = \omega'_{02}$ и неустойчивое при $\omega = \omega'_{01}$.

Если бы удалось перемещать провал на характеристики так, чтобы устойчивая скорость вращения ротора плавно изменялась в пределах $0 < \omega'_{02} < \omega_{02}$, то тем самым стало бы возможным регулировать скорость вращения ротора в широких пределах.

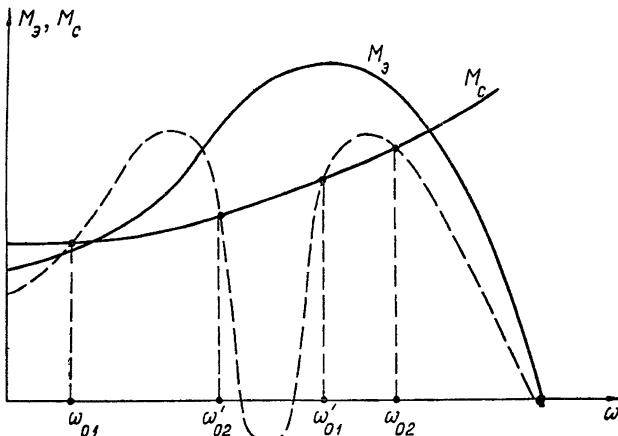


Рис. 1.

Деформация кривой $M_3 = M_3(\omega)$ с провалом была экспериментально обнаружена Гергесом (Görges) [1] для асинхронного двигателя с фазовым ротором и несимметричными активными сопротивлениями в фазах ротора. Устойчивая работа двигателя на скоростях $\omega = \omega'_{02}$ была названа явлением «застревания» и это явление имело место только на одной скорости, близкой к $\omega = \omega_{02}/2$.

В работах [2, 3] было указано, что провал на механической характеристике можно получить иначе. Если в одну из фаз многофазного асинхронного двигателя включить встречно-параллельно два вентиля и коммутировать их с частотой Ω ($0 < \Omega < \omega_0$, где ω_0 — частота питающей сети), тогда механическая характеристика такого двигателя будет иметь вид, показанный на рис. 1 (пунктирная линия).

Схема двигателя с таким питанием фаз статора приведена на рис. 2а, а на рис. 2б показана осциллограмма напряжения в коммутируемой фазе.

Для вывода аналитической зависимости $M_3 = M_3(\omega)$, отображающей кривую с провалом

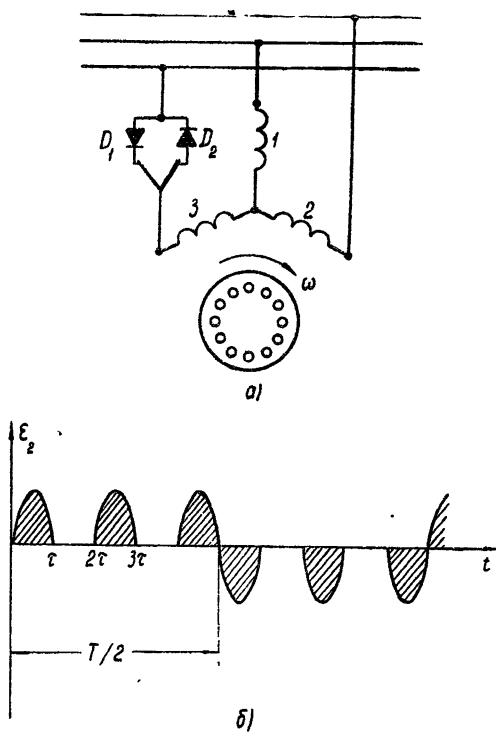


Рис. 2.

лом, рассмотрим двухфазный асинхронный двигатель, короткозамкнутый ротор которого представлен двумя одинаковыми обмотками* с взаимно перпендикулярными магнитными осями. Схема такого двигателя показана на рис. 3.

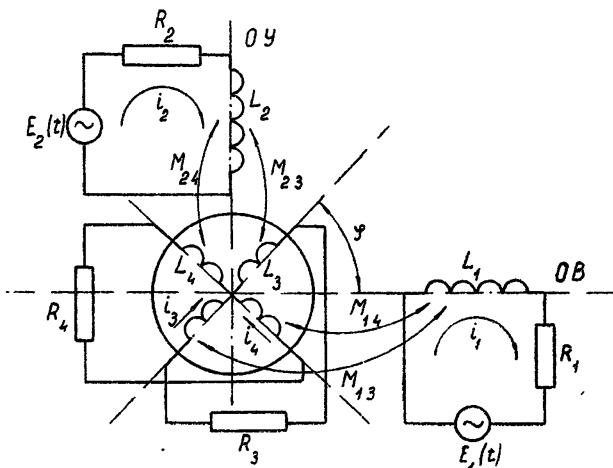


Рис. 3.

Обмотка возбуждения (ОВ) питается напряжением синусоидальной формы, а обмотка управления (ОУ)—напряжением, форма которого указана на рис. 2б. Магнитные оси обмоток возбуждения и управления сдвинуты в пространстве на угол 90° .

Составим уравнения движения двигателя, используя уравнение Лагранжа—Максвелла**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}, \quad (1a)$$

где L — функция Лагранжа, q_k , \dot{q}_k — соответственно обобщенные координаты и скорости, Q_k — обобщенные силы, Φ — функция диссипации.

Если в качестве обобщенных координат взять величины $q_1 = \int_0^t i_1 dt$, $q_2 = \int_0^t i_2 dt$, $q_3 = \int_0^t i_3 dt$, $q_4 = \int_0^t i_4 dt$, $q_5 = \varphi$, где i_1, i_2, i_3, i_4 — токи, φ — угол поворота ротора, то функция Лагранжа, функция диссипации и обобщенные силы будут иметь следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} L_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} L_4 \dot{q}_4^2 + M_{13}(\varphi) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + M_{14}(\varphi) \dot{q}_1 \dot{q}_4 + M_{23}(\varphi) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + M_{24}(\varphi) \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

* Известно, что электрическую машину с m -фазным статором и n -фазным ротором можно представить в виде двухфазной, если записать уравнение машины в квазикоординатах.

** Здесь и в дальнейшем точкой над переменной обозначено дифференцирование по времени.

$$\Phi = \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} R_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} R_4 \dot{q}_4^2 + \frac{1}{2} h \dot{\varphi}^2,$$

$$Q_1 = E_1(t), \quad Q_2 = E_2(t), \quad Q_3 = 0, \quad Q_4 = 0, \quad Q_5 = M_0,$$

$$E_1(t) = E_1 \cos(\omega_0 t), \quad E_2(t) = \sum_{n=1}^m b_n \sin(n \Omega t),$$

где J — момент инерции ротора двигателя, h — коэффициент вязкого трения. Физический смысл остальных величин ясен из рис. 3.

Выполняя соответствующие операции над функциями L , Φ и подставляя результаты в уравнение (1а), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [L_1 \dot{q}_1 + M_{13}(\varphi) \dot{q}_3 + M_{14}(\varphi) \dot{q}_4] + R_1 \dot{q}_1 &= E_1(t), \\ \frac{d}{dt} [L_1 \dot{q}_2 + M_{23}(\varphi) \dot{q}_3 + M_{24}(\varphi) \dot{q}_4] + R_1 \dot{q}_2 &= E_2(t), \\ \frac{d}{dt} [L_0 \dot{q}_3 + M_{13}(\varphi) \dot{q}_1 + M_{23}(\varphi) \dot{q}_2] + R_0 \dot{q}_3 &= 0, \\ \frac{d}{dt} [L_0 \dot{q}_4 + M_{14}(\varphi) \dot{q}_1 + M_{24}(\varphi) \dot{q}_2] + R_0 \dot{q}_4 &= 0, \\ J \ddot{\varphi} + h \dot{\varphi} &= \left(\frac{\partial M_{13}}{\partial \varphi} \dot{q}_1 + \frac{\partial M_{23}}{\partial \varphi} \dot{q}_2 \right) \dot{q}_3 + \left(\frac{\partial M_{14}}{\partial \varphi} \dot{q}_1 + \frac{\partial M_{24}}{\partial \varphi} \dot{q}_2 \right) \dot{q}_4. \end{aligned} \quad (1б)$$

Здесь предположено, что $L_1 = L_2$, $L_3 = L_4 = L_0$, $R_1 = R_2$, $R_3 = R_4 = R_0$.

Система уравнений (1б) — нелинейная с переменными коэффициентами, ее исследование представляет значительные трудности, поэтому введем некоторые упрощающие предположения.

1) Распределение магнитного поля в междужелезном пространстве такое, что $M_{13} = M_0 \cos \varphi$, $M_{14} = -M_0 \sin \varphi$, $M_{23} = M_0 \sin \varphi$, $M_{24} = M_0 \cos \varphi$.

2) Реакция якоря мала и, следовательно, $L_1 \dot{q}_1 \gg M_{13} \dot{q}_3 + M_{14} \dot{q}_4$, $L_1 \dot{q}_2 \gg M_{23} \dot{q}_3 + M_{24} \dot{q}_4$.

3) Наибольшая постоянная времени электрических контуров системы много меньше механической постоянной времени.

При сделанных предположениях уравнения (1б) принимают вид

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = E_1 \cos(\omega_0 t), \quad (2а)$$

$$L_1 \frac{di_2}{dt} + R_1 i_2 = \sum_{n=1}^m b_n \sin(n \Omega t), \quad (2б)$$

$$L_0 \frac{di_3}{dt} + R_0 i_3 = -M_0 \left(\frac{di_1}{dt} \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} i_1 \sin \varphi + \frac{di_2}{dt} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{dt} i_2 \cos \varphi \right), \quad (2в)$$

$$L_0 \frac{di_4}{dt} + R_0 i_4 = -M_0 \left(-\frac{di_1}{dt} \sin \varphi - \frac{d\varphi}{dt} i_1 \cos \varphi + \frac{di_2}{dt} \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} i_2 \sin \varphi \right), \quad (2г)$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + h \frac{d\varphi}{dt} = M_0 i_3 (i_2 \cos \varphi - i_1 \sin \varphi) - M_0 i_4 (i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi), \quad (2д)$$

где $\Omega = \omega_0(2k - 1)^{-1} = \omega_0 m^{-1}$ и k — число полупериодов напряжения питания управляющей обмотки, входящих в полупериод модулирующего сигнала. На рис. 2б $k = 3$.

Уравнения (2а) и (2б) не зависят друг от друга, а также не зависят от трех других уравнений (2в), (2г) и (2д).

Стационарное решение уравнений (2а) и (2б) запишется в виде

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 \sqrt{1 + \rho^2}} \cos(\omega_0 t - \theta),$$

$$i_2 = \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{R_1 \sqrt{1 + \rho_n^2}} \sin(n\Omega t - \theta_n),$$

где $\theta = \operatorname{arctg} \rho$, $\rho = \omega_0 L_1 / R_1$, $\theta_n = \operatorname{arctg} \rho_n$, $\rho_n = n\Omega L_1 / R_1$.

Ради упрощения выкладок в решении уравнения (2б) учтены только гармонические составляющие до $n = m$.

Подставляя токи i_1 и i_2 в уравнения (2в) и (2г), производя элементарные тригонометрические преобразования и полагая, что за период изменения электрических величин скорость вращения ротора $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2$ остается (в принятой идеализации) постоянной, стационарные решения уравнений (2в) и (2г) имеют вид

$$\begin{aligned} i_3 &= B_0 \omega_s \sin(\omega_s t - \theta - \psi) + B'_0 \omega'_s \sin(\omega'_s t - \theta - \psi') + \\ &+ \sum_{n=1}^{m-1} B_{1n} \omega_{s1} \sin(\omega_{s1} t - \theta_n - \psi_{1n}) - \sum_{n=1}^{m-1} B_{2n} \omega_{s2} \sin(\omega_{s2} t - \theta_n - \psi_{2n}), \\ i_4 &= -B_0 \omega_s \cos(\omega_s t - \theta - \psi) + B'_0 \omega'_s \cos(\omega'_s t - \theta - \psi') - \\ &- \sum_{n=1}^{m-1} B_{1n} \omega_{s1} \cos(\omega_{s1} t - \theta_n - \psi_{1n}) - \sum_{n=1}^{m-1} B_{2n} \omega_{s2} \cos(\omega_{s2} t - \theta_n - \psi_{2n}), \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$B_0 = \frac{M_0 \omega_s (E_1 + b_m)}{2R_0 R_1 \sqrt{(1+\rho^2)(1+\rho_s^2)}}, \quad B'_0 = \frac{M_0 \omega'_s (E_1 - b_m)}{2R_0 R_1 \sqrt{(1+\rho^2)(1+\rho'_s^2)}},$$

$$B_{1n} = \frac{M_0 \omega_{s1} b_n}{2R_0 R_1 \sqrt{(1+\rho_n^2)(1+\rho_{s1}^2)}}, \quad B_{2n} = \frac{M_0 \omega_{s2} b_n}{2R_0 R_1 \sqrt{(1+\rho_n^2)(1+\rho_{s2}^2)}},$$

$$\rho_s = \frac{L_0 \omega_s}{R_0} = \operatorname{tg} \psi, \quad \rho'_{s'} = \frac{L_0 \omega'_s}{R_0} = \operatorname{tg} \psi',$$

$$\rho_{s1} = \frac{L_0 \omega_{s1}}{R_0} = \operatorname{tg} \psi_{1n}, \quad \rho_{s2} = \frac{L_0 \omega_{s2}}{R_0} = \operatorname{tg} \psi_{2n},$$

$$\omega_s = \omega_0 - \omega_2, \quad \omega'_s = \omega_0 + \omega_2, \quad \omega_{s1} = n\Omega - \omega_2,$$

$$\omega_{s2} = n\Omega + \omega_2.$$

Подставив найденные значения токов в механическое уравнение (2д), получим

$$\begin{aligned}
 & J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + h \frac{d\varphi}{dt} = M_0 [B_0 \sin(\omega_s t - \theta - \psi) + B'_0 \sin(\omega'_s t - \theta - \psi') + \\
 & + \sum_{n=1}^{m-1} B_{1n} \sin(\omega_{s1} t - \theta_n - \psi_{1n}) - \sum_{n=1}^{m-1} B_{2n} \sin(\omega_{s2} t - \theta_n - \psi_{2n})] \times \\
 & \times [A_0 \sin(\omega_s t - \theta) - A'_0 \sin(\omega'_s t - \theta) + \sum_{n=1}^{m-1} A_n \sin(\omega_{s1} t - \theta_n) + \\
 & + \sum_{n=1}^{m-1} A_n \sin(\omega_{s2} t - \theta_n)] + M_0 [B_0 \omega_s \cos(\omega_s t - \theta - \psi) - \\
 & - B'_0 \omega'_s \cos(\omega'_s t - \theta - \psi') + \sum_{n=1}^{m-1} B_{1n} \omega_{s1} \cos(\omega_{s1} t - \theta_n - \psi_{1n}) + \\
 & + \sum_{n=1}^{m-1} B_{2n} \omega_{s2} \cos(\omega_{s2} t - \theta_n - \psi_{2n})] [A_0 \cos(\omega_s t - \theta) + A'_0 \cos(\omega'_s t - \theta) + \\
 & + \sum_{n=1}^{m-1} A_n \cos(\omega_{s1} t - \theta_n) - \sum_{n=1}^{m-1} A_n \cos(\omega_{s2} t - \theta_n)],
 \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A_0 = \frac{(E_1 + b_m) M_0}{2R_1 \sqrt{1 + \rho^2}}, \quad A'_0 = \frac{(E_1 - b_m) M_0}{2R_1 \sqrt{1 + \rho^2}}, \quad A_n = \frac{b_n M_0}{2R_1 \sqrt{1 + \rho_n^2}}.$$

Усредненное выражение, стоящее в правой части уравнения (3), по периоду наиболее низкой частоты ω_{s1} , получим выражение для электромеханического момента, действующего на валу двигателя:

$$\begin{aligned}
 \overline{M_s(\omega)} = & B_0 A_0 \omega_s \cos \psi - B'_0 A'_0 \omega'_s \cos \psi' + \\
 & + \sum_{n=1}^{m-1} B_{1n} A_n \omega_{s1} \cos \psi_{1n} - \sum_{n=1}^{m-1} B_{2n} A_n \omega_{s2} \cos \psi_{2n}.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Первые два слагаемых в правой части полученного выражения представляют электромеханический момент асинхронного двигателя в случае, когда магнитное поле, вращающееся с угловой частотой ω_0 , является эллиптическим. Для того, чтобы сделать это поле круговым, достаточно выполнить условие $b_m = E_1$.

Последние два слагаемых в выражении (4) дают суммарный электромагнитный момент для однофазного асинхронного двигателя, питаемого напряжением с циклической частотой Ω .

На рис. 4 проведено графическое сложение кривых, соответствующих отдельным членам выражения (4), где жирная линия обозначает суммарный момент. Пунктирной линией обозначена зависимость электромеханического момента от скорости вращения ротора ω_2 при питании обмоток статора напряжением с частотой ω_0 . Жирная линия с точками означает зависимость момента однофазного асинхронного двигателя при питании обмотки управления статора напряжением с частотой $\omega = \Omega$.

При изменении частоты коммутации вентиляй прогиб механической характеристики перемещается так, что положительному приращению частоты коммутации соответствует положительное приращение скорости

вращения ротора двигателя. Действительно, жирная линия с точками пересекает ось абсцисс при значении $\omega_2 = \Omega$, поэтому ее положение изменяется вместе с изменением частоты коммутации Ω .

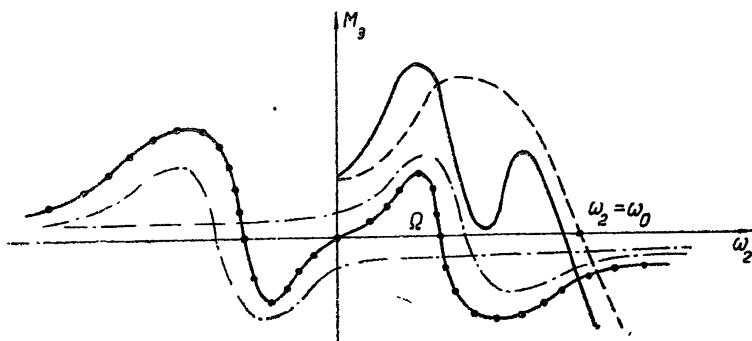


Рис. 4.

На рис. 5 приведены экспериментально снятые механические характеристики трехфазного асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором типа АОЛ-11/2, питаемого по схеме Л. Ф. Евстигнеева. Нетрудно видеть, что эти кривые качественно совпадают с теоретическими кривыми на рис. 4.

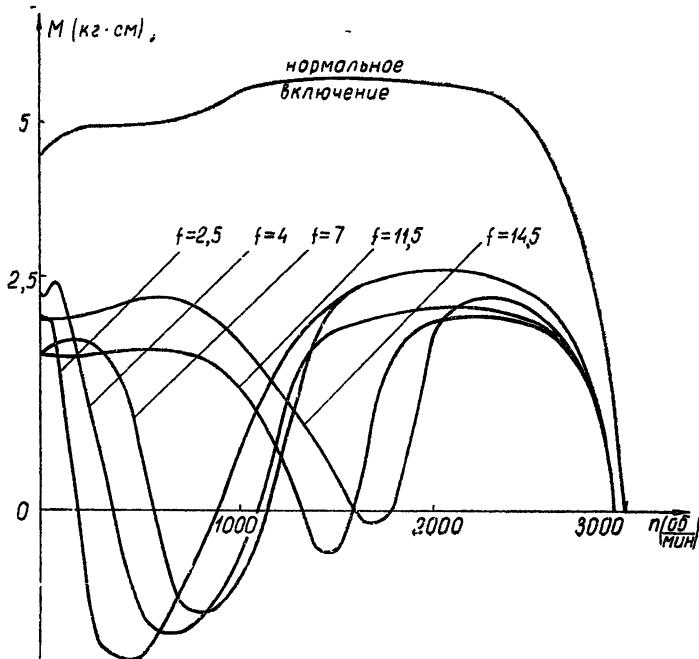


Рис. 5.

В заключение заметим, что в случае обычной схемы питания асинхронного двигателя выражение (4) переходит в известную формулу электромеханического момента [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Сергеев, Электрические машины, ГЭИ, М., 1962.
2. Л. Ф. Евстигнеев, Новый принцип регулирования скорости асинхронных электродвигателей, ГОСИНТИ, М., 1966
3. Л. Ф. Евстигнеев, Регулирование скорости асинхронных электродвигателей, ГОСИНТИ, М., 1966.
4. В. И. Андреев, Ю. А. Сабинин, Основы электропривода, ГЭИ, М., 1963

Горьковской государственный университет

Поступила в редакцию
28 ноября 1967 г.

TO THE PROBLEM OF REGULATION OF SPEED OF ASYNCHRONOUS
ENGINE WITH SHORTLY CLOSED ROTOR

L. F. Evtigneev, V. I. Korolev

The authors deduce a formula for electromechanic moment of asynchronous engine, the speed of which is regulated by the L. F. Evtigneev scheme. Computation technique can be applied to other schemes as well.

УДК 531.391 · 621.372

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОСТЫХ
УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН ДЛЯ АКТИВНОЙ
RC-ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ**

B. M. Елеонский, L. Г. Оганесьянц

Показано, что учет конечного наклона падающей ветви *N*-образной характеристики тока утечки в активной линии передачи приводит к установлению верхней границы для скорости распространения простых установившихся волн и к существенному изменению области существования негрубых фазовых траекторий по сравнению с той, которая была определена в работах [1, 2] для случая разрывной кусочно-линейной характеристики тока утечки.

Простые установившиеся волны в активных линиях передачи при наличии продольных потерь были рассмотрены в работах [1-3]. Для случая разрывной кусочно-линейной вольт-амперной характеристики тока утечки в активной *RC*-линии передачи скорость распространения и область существования простых установившихся волн были исследованы в работах [1, 2]. Однако в упомянутых работах рассмотрен идеализированный случай, соответствующий бесконечной величине отрицательной дифференциальной проводимости тока утечки, и нет ответа на вопрос, как изменяется область существования простых установившихся волн в зависимости от величины наклона падающей ветви *N*-образной характеристики тока утечки.

Согласно [2] уравнение, определяющее распределение потенциала φ в простой установившейся волне, имеет вид

$$-\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + uRC \frac{d\varphi}{d\eta} = RJ(\varphi). \quad (1)$$

Здесь u — скорость распространения волны, R — продольное сопротивление, C — емкость, $J(\varphi)$ — характеристика тока утечки, $\eta = x + ut$.

Рассмотрим следующую кусочно-линейную характеристику тока утечки:

$$RJ(\varphi) = \begin{cases} -\alpha\varphi & (0 < \varphi < \varphi_- \equiv \frac{\beta}{\alpha+\beta} \varphi_0) \\ \beta(\varphi - \varphi_0) & (\varphi_- < \varphi < \varphi_+ \equiv \frac{\beta\varphi_0}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}) \\ -\gamma(\varphi - 1) & (\varphi_+ < \varphi < 1) \end{cases}. \quad (2)$$

Параметр β определяет наклон падающей ветви вольт-амперной характеристики тока утечки. При $\beta \rightarrow \infty$ и $\alpha = \gamma$ соотношение (2) приводит к разрывной кусочно-линейной характеристике, исследованной ранее в работах [1, 2]. Нулям функции $J(\varphi)$, а именно $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = 1$, соответствуют однородные состояния равновесия активной *RC*-линии передачи.

На фазовой плоскости $\left(p = \frac{d\varphi}{d\tau}, \varphi \right)$ траектории, соответствующие простым установившимся волнам, определяются решениями уравнения

$$p \frac{dp}{d\varphi} = uRCp - RJ(\varphi), \quad (3)$$

которое эквивалентно исходному уравнению (1). Можно показать, что состояниям равновесия $p = 0, \varphi = 0$ и $p = 0, \varphi = 1$ соответствуют особые точки типа седло, а состоянию равновесия $p = 0, \varphi = \varphi_0$ — особая точка типа фокус, если

$$(uRC)^2 < 4R \left(\frac{dJ}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0},$$

или типа узел, если имеет место обратное неравенство

Простой установившейся волне, связанной с асимптотическим переходом активной линии передачи из состояния равновесия $p = 0, \varphi = 0$ в состояние равновесия $p = 0, \varphi = 1$, соответствует граничная задача об отыскании решения уравнения (3), такого, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \varphi = 0.$$

На фазовой плоскости данной граничной задаче соответствует задача отыскания фазовой траектории, представляющей собой сепаратрису, идущую из седла в седло и расположенную в верхней фазовой полуплоскости. «Сопряженной» граничной задаче о простой установившейся волне, связанной с асимптотическим переходом из состояния равновесия $p = 0, \varphi = 1$ в состояние $p = 0, \varphi = 0$, соответствует задача отыскания сепаратрисы, идущей из седла в седло, но расположенной в нижней фазовой полуплоскости.

В работе [4] показано, что скорость распространения простых установившихся волн, связанных с асимптотическим переходом активной линии из одного состояния равновесия в другое, ограничена сверху величиной

$$u_{\max} = (RC)^{-1} \left(4R \max_{\varphi} \frac{dJ}{d\varphi} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Иными словами, скорость распространения рассматриваемых простых волн ограничена сверху величиной, которая определяется наибольшим наклоном падающей ветви вольт-амперной характеристики тока утечки. Как для случая кусочно-линейной характеристики, так и для случая гладкой кривой $J(\varphi)$, обладающей единственной точкой перегиба, совпадающей с нулем функции $J(\varphi)$ при $\varphi = \varphi_0$, условие $u < u_{\max}$ совпадает с условием того, что особой точке $p = 0, \varphi = \varphi_0$ соответствует особая точка типа фокус [3]. Однако в общем случае разрешимость рассматриваемой граничной задачи не связана с типом особой точки $p = 0, \varphi = \varphi_0$.

Ниже для определенности рассмотрен случай, когда искомая траектория расположена в верхней фазовой полуплоскости. Уравнение (3) при токе утечки, определенном соотношениями (2), в каждой из полос фазовой плоскости $0 \leq \varphi \leq \varphi_+$, $\varphi_- \leq \varphi \leq \varphi_+$ и $\varphi_+ \leq \varphi \leq 1$ может быть присоединено. Выражения для соответствующих общих интегралов приведены, например, в книге [6]. Условие сопряжения сепаратрис седловых особых точек с дугами спиральных фазовых траекторий, принадлежащих особой точке фокус, на границах упомянутых

полос приводит к тому, что сепаратриса, идущая из седла в седло, существует, если имеет решение трансцендентное уравнение

$$\begin{aligned} & \ln \frac{\varphi_0}{1-\varphi_0} \sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}} \frac{[(uRC)^2+4\alpha]^{1/2}+uRC}{[(uRC)^2+4\gamma]^{1/2}-uRC}= \\ & = \frac{uRC}{[4\beta-(uRC)^2]^{1/2}} \left\{ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{[(uRC)^2+4\gamma]^{1/2}-uRC(1+\gamma/\beta)}{(\gamma/\beta)[4\beta-(uRC)^2]^{1/2}} + \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{arctg} \frac{[(uRC)^2+4\alpha]^{1/2}+uRC(1+\alpha/\beta)}{(\alpha/\beta)[4\beta-(uRC)^2]^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение последнего определяет скорость распространения простой установившейся волны.

Пусть $\beta \neq \infty$, что соответствует конечному наклону падающей ветви характеристики тока утечки. Введем обозначения $(uRC)^2 = 4\beta x^2$, $0 < x^2 < 1$, $r = \alpha/\beta$, $s = \gamma/\beta$ и перепишем уравнение (5) в виде

$$\begin{aligned} & \ln \frac{1-\varphi_0}{\varphi_0} \sqrt{\frac{1+r}{1+s}} = \ln \frac{\sqrt{x^2+r}+x}{\sqrt{x^2+s}-x} - \\ & - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left[-\pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+r}+(1+r)x}{r\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{x^2+s}+(1+s)x}{s\sqrt{1-x^2}} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как при изменении x от нуля до единицы правая часть уравнения изменяется от $\ln \sqrt{r/s}$ до ∞ , то для дальнейшего удобно ввести функцию

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{\sqrt{x^2+r}+x}{\sqrt{x^2+s}-x} - \ln \sqrt{\frac{r}{s}} - \\ & - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left[-\pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+r}+(1+r)x}{r\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{x^2+s}+(1+s)x}{s\sqrt{1-x^2}} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В новых обозначениях уравнение (6) принимает вид

$$f(x) = \ln \frac{1-\varphi_0}{\varphi_0} \sqrt{\frac{1+r}{1+s}} \sqrt{\frac{s}{r}}, \quad (8)$$

где $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=\infty$. Исследуем знак производной $f'(x)$. Находим, что

$$\frac{df}{dx} = (1-x^2)^{-3/2} F(x),$$

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \sqrt{1-x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+r}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+s}} \right) + \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+r}+(1+r)x}{r\sqrt{1-x^2}} + \\ & + \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{x^2+s}+(1+s)x}{s\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) очевидно, что $F(x)$ — положительная функция при всех $r, s \geq 0$ и $0 \leq x \leq 1$.

Таким образом, исследование показало, что функция $f(x)$ является

монотонно возрастающей неотрицательной функцией и $0 < f(x) < \infty$. Теперь уже не представляет труда сделать вывод о том, что решение уравнения (8) существует и единственно при

$$0 < \ln \frac{1 - \varphi_0}{\varphi_0} \sqrt{\frac{(1+r)s}{(1+s)r}} < \infty. \quad (10)$$

Решение данных неравенств приводит к заключению, что простые установившиеся волны, соответствующие сепаратрисе, идущей из седла в седло и расположенной в верхней полуплоскости, существуют, если «пороговый» потенциал тока утечки удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < \varphi_0 < \varphi_0^+, \\ \frac{1}{\varphi_0^+} \equiv 1 + \sqrt{\frac{(1+s)r}{s(1+r)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичная последовательность доказательств приводит к заключению, что простые установившиеся волны, соответствующие сепаратрисе, идущей из седла в седло и расположенной в нижней фазовой полуплоскости, существуют, если «псогородочный» потенциал тока утечки удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \varphi_-^0 < \varphi_0 < 1, \\ \varphi_-^0 \equiv \varphi_0^+. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, соотношения (11) и (12) полностью определяют область существования установившихся волн при конечном наклоне падающей ветви N -образной характеристики тока утечки.

При $\beta \rightarrow \infty$ уравнение (5) приводит к известному уравнению [2]

$$\frac{[(uRC)^2 + 4x]^{1/2} + uRC}{[(uRC)^2 + 4\gamma]^{1/2} - uRC} = \frac{1 - \varphi_0}{\varphi_0}, \quad (13)$$

решения которого определяют скорость распространения простой установившейся волны для случая разрывной кусочно-линейной характеристики тока утечки. Нетрудно убедиться в том, что при $\alpha = \gamma$ решение граничной задачи, принадлежащее верхней фазовой полуплоскости, существует, если $0 < \varphi_0 \leq 1/2$, причем $u \rightarrow 0$ при $\varphi_0 \rightarrow 1/2$ и $u \rightarrow \infty$ при $\varphi_0 \rightarrow 0$.

В случае симметричного источника ($\alpha = \gamma$) нетрудно убедиться, что $\varphi_0^+ \equiv \varphi_-^0 = 1/2$ и, следовательно, области существования не зависят от наклона падающей ветви вольтамперной характеристики. Для несимметричного источника ($\alpha \neq \gamma$) при $\beta \rightarrow \infty$ области существования определяются соотношением α/φ а при $\beta \rightarrow 0$ снова $\varphi_0^+ \equiv \varphi_-^0 \rightarrow 1/2$.

Наконец, пусть $\gamma \neq 0$, а $\alpha \rightarrow 0$, тогда $\varphi_0^+ \equiv \varphi_-^0 \rightarrow 1$. Следовательно, для знакопостоянного тока утечки, обращающегося в нуль при всех $\varphi < \varphi_0$, решения типа простых установившихся волн существуют для всех значений потенциала $0 < \varphi_0 < 1$. При $\varphi_0 \rightarrow 0$ скорость распространения простой установившейся волны $u \rightarrow u_{\max} = (RC)^{-1} \sqrt{4\beta}$. Отметим, что в данном случае простым установившимся волнам соответствуют фазовые траектории, расположенные в верхней полуплоскости, тогда как в нижней полуплоскости решения отсутствуют.

Таким образом, учет конечного наклона падающей ветви N -образ-

ной характеристики приводит к возникновению верхней границы для скорости распространения простых установившихся волн и к изменению области существования решений по сравнению с исследованным ранее идеализированным случаем разрывной характеристики тока утечки.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Scott, IRE, CT-9, № 2, 192 (1962).
2. Ю. И. Воронцов, И. В. Поляков, Радиотехника и электроника, II, № 9, 1957 (1966).
3. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 8, № 12, 2006 (1963).
4. В. М. Елеонский, ЖЭТФ, 53, вып. 8, 593 (1967).
5. В. М. Елеонский, Л. Г. Оганесьянц, ЖЭТФ, 54, вып. 2, (1968).
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Поступила в редакцию
3 июля 1967 г.

DEFINITION OF EXISTENCE DOMAIN OF SIMPLE STEADY WAVES FOR ACTIVE RC-LINE OF TRANSMISSION

V. M. Eleonskii, L. G. Oganisjanz

It is shown in the paper that the consideration of finite slope of falling branch of N-shaped characteristic of leakage current in active transmission line leads to the establishment of upper limit for the speed of propagation of simple steady waves and to the essential changes of existence domain of nonstructural phase trajectories in comparison with the domain defined in [1, 2] for the case of breakable piece-wise characteristic of leakage current.

УДК 62 — 506

**К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПРОЦЕССА
В МНОГОМЕРНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ
ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ***

B. N. Смирнова, M. L. Тай

Обобщены результаты работы [5]. Доказана теорема, которая позволяет определять установившиеся процессы в некотором классе безынерционных многомерных шаговых систем поиска. Приведены примеры.

Изучение влияния случайных помех на экстремальные системы посредством аппарата марковских цепей было начато Фельдбаумом [1] и исследовалось различными авторами [2—4] для более общих математических моделей одномерных безынерционных экстремальных систем. В [5] была сделана попытка анализа установившегося процесса в безынерционной дискретной многомерной системе при наличии помех.

Обобщая [5], в данной заметке изучается влияние случайных возмущений на установившийся процесс в более широком классе математических моделей многомерных экстремальных систем.

1. Рассмотрим экстремальную систему, предназначенную для отыскания и поддержания объекта с характеристикой $y = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке абсолютного минимума функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенной в области G :

$$\underline{N}_i \leq x_i \leq \bar{N}_i \quad (i = 1, n).$$

Будем предполагать, что работа экстремальной системы заключается в дискретном изменении на каждом шаге не более, чем одной из координат x_1, x_2, \dots, x_n на величину шага, равную плюс или минус единице,* и процесс поиска является марковским. Последнее условие выполняется при некоторых ограничениях на метод поиска и статистические характеристики помех и позволяет свести исследование установившегося процесса в принятой математической модели экстремальной системы к анализу стационарного распределения в многомерной марковской цепи с состояниями $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\underline{N}_i \leq x_i \leq \bar{N}_i$ и вероятностями перехода за один шаг P_x^y . Будем считать, что

1) при всех $x \in G$

$$\begin{aligned} P_i(1, x) &= P_{x_1, \dots, x_i+1, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_i+1, \dots, x_n} = g_i(1, x_i) S_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ P_i(-1, x) &= P_{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_i-1, \dots, x_n} = g_i(-1, x_i) S_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n); \end{aligned} \quad (1)$$

* В случае $S_i(x) \equiv 1$ (см. (1), (2)) работа была доложена на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике, Горький, 1967.

** Равенство шагов по всем координатам введено ради удобства записи и не налагает ограничений ввиду произвола чисел $\underline{N}_i, \bar{N}_i$.

2) функции $g_i(1, x_i)$, $g_i(-1, x_i)$, $S_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ положительны при всех $x \in G$ за исключением

$$g_i(1, \bar{N}_i) = g_i(-1, \underline{N}_i) = 0 \quad (2)$$

и

$$g_i(1, x_i) = g_i(-1, x_i) = 0 \quad (3)$$

при всех $x \notin G$;

3) при выполнении хотя бы одного из условий

$$a) |x_i - y_i| > 1,$$

$$b) |x_i - y_i| |x_j - y_j| \neq 0 \quad (i \neq j)$$

вероятность перехода

$$P_x^y = 0. \quad (4)$$

Условие 1) представляет собой обобщение условий, введенных в [5], а условия 2) и 3) являются следствиями предположений о работе экстремальной системы*.

При указанных предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема. Стационарное распределение $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в дискретной марковской цепи с вероятностями перехода P_x^y , удовлетворяющими условиям (1) — (4), вычисляются согласно

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \prod_{i=1}^n \left[\prod_{\beta=\underline{N}_i}^{x_i-1} \frac{g_i(1, \beta)}{g_i(-1, \beta+1)} \right], \quad (5)$$

где C — константа нормировки, определяемая из равенства

$$\sum_{x \in G} u(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1. \quad (6)$$

Доказательство. Имеем

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{y \in G} u(y_1, y_2, \dots, y_n) P_{y_1, y_2, \dots, y_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} \quad (7)$$

или

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{y \neq x} P_x^y = \sum_{y \neq x} u(y_1, y_2, \dots, y_n) P_y^x. \quad (8)$$

Будем искать решение системы (8) в виде

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \prod_{i=1}^n J_i(x_i), \quad J_i(\bar{N}_i) = 1, \quad (9)$$

где $J_i(x_i)$ — функции, подлежащие определению.

Согласно (1), (8), (9)

$$\sum_{i=1}^n S_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \prod_{\alpha \neq i} J_\alpha(x_\alpha) \{ [g_i(1, x_i) +$$

* Ниже приведен пример экстремальной системы, при исследовании которой выполняются условия теоремы. Заметим, что условие (1) накладывает существенное ограничение на характеристику экстремальной системы и выполняется, если характеристика — сепарабельная функция.

$$+ g_i(-1, x_i)] J_i(x_i) - g_i(-1, x_i + 1) J_i(x_i + 1) - \\ - g_i(1, x_i - 1) J_i(x_i - 1)\} = 0.$$

Используя обозначение

$$g_i(1, x_i) J_i(x_i) - g_i(-1, x_i + 1) J_i(x_i + 1) - \\ - [g_i(1, x_i - 1) J_i(x_i - 1) - g_i(-1, x_i) J_i(x_i)] \equiv G_i(x_i), \quad (10)$$

перепишем (9) в виде

$$\sum_{i=1}^n G_i(x_i) S_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \prod_{\alpha \neq i} J_\alpha(x_\alpha) = 0. \quad (11)$$

Проверкэй легко убедиться, что в силу (2) и (3)

$$\sum_{x_i=N_i}^{N_i} G_i(x_i) = 0. \quad (12)$$

Суммируя последовательно (11) по всем x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , принадлежащих G , и используя (12), получим следующую совокупность уравнений:

Так как $S_n(x_1, \dots, x_{n-1}) > 0$, $J_i(x_i) > 0$ ($i = \overline{1, n}$), то $G_n(x_n) = 0$ при любом x . Подставляя полученный результат в предпоследнее уравнение системы (13), находим $G_{n-1}(x_{n-1}) = 0$. Аналогичным образом получаем при всех x

$$G_n(x_n) = G_{n-1}(x_{n-1}) = \dots = G_1(x_1) = 0. \quad (14)$$

В предположении, что $J_i(N_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$, (14) дает

$$J_i(x_i) = \prod_{\alpha=N_i+1}^{x_i} \frac{g_i(1, \alpha-1)}{g_i(-1, \alpha)},$$

что завершает доказательство теоремы.

Доказанное равенство (5) означает, что при условиях (1)–(4) стационарное распределение в многомерной экстремальной системе есть произведение статистически независимых распределений по координатам x_i , ($i=1, n$). Это позволяет вычислять числовые статистические характеристики установившегося процесса в многомерной экстремальной системе.

мальной системе через известные в одномерном случае результаты [1, 3, 4], так как

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \{f(x_i)\}.$$

2. Доказанную теорему можно использовать для определения установившегося процесса в модели безынерционной многомерной экстремальной системы при наличии случайных помех, если характеристика

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_i) \quad (15)$$

и поиск экстремума осуществляется релаксационным методом с пробными шагами (измерениями) и постоянным по величине рабочим шагом.

Пробные измерения проводятся для того, чтобы найти существенную координату, которая изменится в одном из двух направлений на следующем рабочем шаге. Условия, при выполнении которых координата считается существенной, вообще говоря, разнообразны. В качестве примера укажем два из них. Будем считать координату i существенной в точке x , если

$$\begin{aligned} a) |\Delta z_i(x)| &= |z(x_1, \dots, x_i + \delta_i, \dots, x_n) - z(x)| > \bar{\varepsilon}_i, \\ b) \Delta z_i(x) \Delta z_i^-(x) &< 0, \quad |\Delta z_i^+(x)| > \tilde{\varepsilon}_i, \quad |\Delta z_i^-(x)| > \tilde{\varepsilon}_i, \\ \Delta z_i(x) &= z(x_1, \dots, x_i + \delta_i, \dots, x_n) - z(x), \\ \Delta z_i^-(x) &= z(x_1, \dots, x_i - \delta_i, \dots, x_n) - z(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где $z(x) = \Phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \xi$ — результат измерения характеристики в состоянии x , достигнутом после предшествующего рабочего шага,

$z(x_1, \dots, x_i \pm \delta_i, \dots, x_n)$ — после пробного шага, $\bar{\varepsilon}_i$, $\tilde{\varepsilon}_i$ и δ_i — фиксированные константы, значения которых находятся из условий, предъявляемых к экстремальной системе и априорной информации о $\Phi(x)$. После достижения состояния x экстремальная система измеряет значение $z(x) - \Phi(x) + \xi$ и переходит к определению существенной координаты посредством перебора (согласно какому-нибудь правилу (схеме)) координат x_1, x_2, \dots, x_n .

Найдем статистические распределения установившегося процесса в двух схемах экстремальных систем в предположении, что известны характеристика $\Phi(x)$ и плотность распределения помехи $\xi()$, причем значения помехи при любых измерениях, на основании которых принимается решение о дальнейшей работе системы, статистически независимы.

1) Пусть порядок перебора переменных при пробных измерениях фиксирован, т. с. не зависит от результатов предшествующих измерений и детерминирован. Для определенности примем, что этот порядок совпадает с нумерацией координат. Предположим, что рабочие шаги совершаются через равные промежутки времени, в течение которых либо проводятся пробные измерения с целью нахождения существенной координаты, либо, если она определена, ожидается очередной рабочий тakt, (если все координаты оказываются несущественными, то в течение следующего рабочего такта система остается в прежнем состоянии). Такая схема вполне возможна (хотя заведомо не оптимальна с точки зрения ее быстродействия) и анализ установившегося процесса в ней представляет интерес, прежде всего, для сравнения с установленшимся процессом в других схемах. Согласно описанной схеме, при сделанных предположениях в зависимости от условия существенности в случае а) имеем

$$\begin{aligned}
 P_1(\pm 1, x) &= P\{\pm \Delta z_1(x) < -\bar{\varepsilon}_1\}, \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\
 P_i(\pm 1, x) &= P\{\pm \Delta z_i(x) < -\bar{\varepsilon}_i\} \prod_{a=1}^{i-1} P\{|\Delta z_a(x)| < \bar{\varepsilon}_a\} \\
 &(i = \overline{2, n}),
 \end{aligned} \tag{17}$$

причем все $P_i(\pm 1, x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда для установленного процесса получаем

$$u(x_1, \dots, x_n) = \bar{c} \prod_{i=1}^n \bar{J}_i(x_i), \tag{18}$$

где

$$\bar{J}_i(x_i) = \prod_{a=N_i+1}^{x_i} \frac{P\{\Delta z_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a-1, \dots, x_n) < -\bar{\varepsilon}_i\}}{P\{\Delta z_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a, \dots, x_n) > \bar{\varepsilon}_i\}}, \tag{18a}$$

Как следует из (18), в присутствии достаточно существенных случайных помех при рассмотренной детерминированной схеме перебора в установленном режиме вероятнее обнаружить объект в состояниях, близких к оптимальному, в то время как без помех алгоритм может привести к зацикливанию.

Аналогично в случае б)

$$\begin{aligned}
 P_i(\pm 1, x) &= P\{\pm \Delta z_i^+(x) < -\bar{\varepsilon}_i\} P\{\pm \Delta z_i^-(x) > \bar{\varepsilon}_i\} \prod_{a=1}^{i-1} P_a(0, x) \quad (i = \overline{2, n}), \\
 P_1(\pm 1, x) &= P\{\pm \Delta z_1^+(x) < -\bar{\varepsilon}_1\} P\{\pm \Delta z_1^-(x) > \bar{\varepsilon}_1\},
 \end{aligned}$$

где $P_a(0, x) = 1 - P_a(1, x) - P_a(-1, x)$ ($a = \overline{1, n}$) и для установленного процесса находим

$$u(x_1, \dots, x_n) = \tilde{C} \prod_{i=1}^n \tilde{J}_i(x_i), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_i(x_i) &= \prod_{a=N_i+1}^{x_i} \frac{P\{\Delta z_i^+(x_1, \dots, x_{i-1}, a-1, \dots, x_n) < -\bar{\varepsilon}_i\}}{P\{\Delta z_i^+(x_1, \dots, x_{i-1}, a, \dots, x_n) > \bar{\varepsilon}_i\}} \times \\
 &\times \frac{P\{\Delta z_i^-(x_1, \dots, x_{i-1}, a-1, \dots, x_n) > \bar{\varepsilon}_i\}}{P\{\Delta z_i^-(x_1, \dots, x_{i-1}, a, \dots, x_n) < -\bar{\varepsilon}_i\}}.
 \end{aligned} \tag{19a}$$

В схеме 1) последний алгоритм, в отличие от а), не приводит к зацикливанию при отсутствии помех и является более целесообразным, поскольку $\tilde{J}_i(x_i) \simeq [\bar{J}_i(x_i)]^2$, если помеха симметрична и $\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_i$.

Отметим также, что, как следует из (18) — (19а), вероятность обнаружения системы в точке x при установившемся процессе не зависит от выбора порядка перебора координат.

2) Пусть при пробных измерениях выбор координаты производится случайно. Если фиксированы числа p_1, p_2, \dots, p_n , равные вероятностям того, что пробный шаг происходит по i -й координате, то для вероятностей перехода имеем

$$a) P_i(\pm 1, x) = p_i P[\pm \Delta z_i(x) < -\bar{\varepsilon}_i],$$

$$b) P_i(\pm 1, x) = p_i P[\pm \Delta z_i^+(x) < -\tilde{\varepsilon}_i] P[\pm \Delta z_i^-(x) > \tilde{\varepsilon}_i];$$

поскольку $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_i)$, выполняются условия доказанной теоремы и статистические описания установившихся процессов в соответствующих схемах 1) и 2) совпадают.

3. Выше всюду исследовался установившийся процесс в дискретной системе с фиксированными длительностью τ и величиной h каждого шага (для простоты считалось $\tau = h = 1$).

Поскольку разумный предельный переход при τ и h , стремящихся к нулю, в задачах о случайных блужданиях приводит к физически осмыслиенным результатам теории диффузии, естественно рассмотреть влияние случайных помех на непрерывную экстремальную систему, получающуюся после предельного перехода. Заметим, что предположение о марковости процесса поиска в пределе означает очень существенное ограничение на статистический характер помехи и, по-видимому, выполняется лишь для белого шума.

Дискретные аналоги коэффициентов сноса $A_i(x)$ и диффузии $B_{ij}(x)$ равны

$$A_i^\tau(x) = \frac{h}{\tau} [P_i(h, x) - P_i(-h, x)],$$

$$B_{ij}^\tau(x) = \frac{h^2}{\tau} [P_i(h, x) + P_i(-h, x)] [P_j(h, x) + P_j(-h, x)]$$

и в силу (1) — (4) имеют вид

$$A_i^\tau(x) = \frac{h}{\tau} a_i(x_i, h) S_i(h, x_1, \dots, \dot{x_n}),$$

$$B_{ij}^\tau(x) = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{ii}^\tau(x) = \frac{h^2}{\tau} b_i(x_i, h) S_i(h, x_1, \dots, \dot{x_{i-1}}, \dot{x_{i+1}}, \dots, \dot{x_n}),$$

где

$$a_i(h, x_i) = g_i(h, x_i) - g_i(-h, x_i), \quad b_i(h, x_i) = g_i(h, x_i) + g_i(-h, x_i).$$

Тогда для ограниченности $A_i(x)$ и $B_{ij}(x)$ достаточно потребовать существования и ограниченности пределов h^2/τ , $a_i(h, x_i)/h$, $S_i(h, x_i)$ при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$; плотность вероятности перехода многомерного марковского процесса в непрерывной системе поиска $f(t, y)$ удовлетворяет в области G уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ [a_i(y_i) f(t, \mathbf{y})] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} [b_i(y_i) f(t, \mathbf{y})] \right\} \times \\ \times S_i(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0, \quad (20)$$

а на границе области — условию равенства нулю нормальной составляющей потока

$$G = \{G_i(\mathbf{y})\} = \left\{ \left[a_i(y_i) f(t, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i(y_i) f(t, \mathbf{y})) \right] \times \right. \\ \left. \times S_i(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \right\}. \quad (21)$$

Тем же приемом, который был использован в дискретном случае, находим стационарное решение задачи

$$f(\mathbf{y}) = \frac{C}{\prod_{i=1}^n b_i(y_i)} \exp \left[2 \sum_{i=1}^n \int_{N_i}^{y_i} \frac{a_i(\xi)}{b_i(\xi)} d\xi \right]. \quad (22)$$

Распределение (22), как и в дискретном случае, позволяет определять математические ожидания и дисперсии вектора \mathbf{x} и потерю $Q[\Phi(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}^*)]$ экстремальной системы в установившемся процессе. Отметим, что (22) может оказаться полевым в качестве стационарного решения уравнение Фоккера-Планка в предположении, что коэффициенты сноса и диффузии удовлетворяют условиям.

$$A_i(\mathbf{y}) = a_i(y_i) S_i(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n), \\ B_{ii}(\mathbf{y}) = b_i(y_i) S_i(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n), \quad B_{ij}(\mathbf{y}) = 0.$$

В заключение выражаем признательность Ю. И. Неймарку за полезные замечания к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум, Автоматика и телемеханика, 20, № 8; 1056 (1959).
2. В. П. Тараканко, В. В. Матушевский, Тр. СФТИ, 44, 65 (1964).
3. А. А. Первозванский, Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, Физматгиз, М., 1962.
4. Г. А. Медведев, В. П. Тараканко, Вероятностные методы исследования экстремальных систем, изд. Наука, М., 1967.
5. В. Н. Смирнова, М. Л. Тай, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 7, 933 (1967).

Науко-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете Поступила в редакцию 4 октября 1967 г.

TO THE RESEARCH OF STEADY PROCESS IN THE MULTIDIMENSIONAL EXTREMAL SYSTEM WITH RANDOM NOISE

V. N. Smirnova, M. I. Tay

The generalization of researches (5) is presented. The proof of theorem that allows to define the steady processes in some class of noninertial multidimensional step search system is derived.

УДК 62—50

НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ, ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Ю. В. Глебский, В. А. Таланов

Статья может рассматриваться как одна из попыток введения некоторых определений, относящихся к общей теории систем. Рассматриваются примеры, иллюстрирующие применимость вводимых понятий для описания разнообразных систем, в частности, для описания некоторых задач теории расписаний. Показано, каким образом на основе этих понятий может быть выражен принцип оптимальности, применяемый в динамическом программировании.

Известно, что в настоящее время предпринимаются разнообразные попытки создания широких понятий, относящихся к так называемой общей теории систем (см., например, [1]). Данная статья может рассматриваться как одна из попыток этого рода.

В качестве «эвристической основы» в этой работе приняты следующие соображения.

1) Для описания изменяющихся во времени систем следует рассмотреть три сорта объектов: моменты времени, процессы и события. Моменты выражаются любыми действительными числами. Разницу между процессами и событиями можно высказать так. Процесс—это история (мыслимая или действительная) изучаемой системы или ее «части» за все времена. Событие—это то, что может происходить или не происходить в любой момент времени.

2) Каждая тройка объектов (процесс x , момент t и событие ξ) может удовлетворять некоторому условию инцидентности или же нет. Инцидентность данной тройки означает, что при протекании процесса x в момент t происходит событие ξ .

3) Различные процессы, вообще говоря, не исключают друг друга и могут протекать параллельно. Аналогично этому различные события, вообще говоря, могут происходить одновременно.

4) Для определения конкретной системы нужно из всей совокупности мыслимых процессов выделить некоторую часть, состоящую из процессов, являющихся «возможными реализациями» данной системы.

Исходя из этих соображений, строим некоторую теоретико-множественную иерархию определений. При этом подходе, который осуществляется здесь, приходится рассматривать два рода событий: элементарные и составные. Составные события не являются множествами процессов, (как это определяется в теории конечных автоматов, начиная с Клини), однако в известном смысле наше определение (п. 4) обобщает упомянутое определение. Системы задаются множеством элементарных событий и множеством возможных в системе процессов (п. 2).

В статье рассматриваются некоторые примеры, иллюстрирующие применимость вводимых понятий для описания разнообразных систем. В частности, в п. 3, показано, каким образом на основе этих понятий может быть обобщено функциональное уравнение Беллмана.

1. В основные определения, приводимые ниже, входит временной параметр t , значения которого мы называем моментами. Моменты могут быть любыми действительными числами. Произвольное множество моментов будем называть временем. Если t_0, t_1 — некоторые моменты, то время, состоящее из всех t , которые удовлетворяют неравенству $t_0 \leq t < t_1$, будем называть полусегментом.

Пусть E — некоторое испустое множество, элементы которого называются элементарными событиями.

Процессом (на E) будем называть любое множество пар (e, t) , где $e \in E$ и t — момент. Тот факт, что $(e, t) \in x$, где x — процесс, словесно выражается так: в процессе x в момент t происходит элементарное событие e . Для данных процесса x и момента t через $C(x, t)$ будем обозначать подмножество множества E , такое, что $e \in C(x, t)$ тогда и только тогда, когда $(e, t) \in x$. Будем говорить, что процесс x пуст в момент t , если $C(x, t)$ пусто. Будем говорить, что процесс протекает во времени T , если x пуст для всех $t \in T$.

Для данных процесса x и момента t через $w_t(x)$ будем обозначать такой процесс, что $C(w_t(x), s)$ пусто для $s > t$ и равно $C(x, t)$ для $s \leq t$. Очевидно, $w_t(x) \subseteq x$. Через $\theta(x, e)$ будем обозначать время такое, что $t \in (xe)$ тогда и только тогда, когда $(e, t) \in x$.

2. Если T — время, то через $V(T)$ будем обозначать множество процессов на E , протекающих во время T .

Системой будем называть пару объектов $S = (E, Z)$, где E — множество элементарных событий, а Z — множество процессов на E , называемое множеством реализаций системы S . Если $x \in Z$, то x называется реализацией системы S . Если $y \subseteq x$ и $x \in Z$, то y называется частичным процессом системы S .

Пример 1 (конечный автомат). Конечным автоматом называют совокупность объектов (A, B, C, b_0, F, G) , где A, B, C — взаимно пересекающиеся непустые конечные множества, $b_0 \in B$, F — функция, отображающая $A \times B$ в B , G — функция, отображающая $A \times B$ в C [2]. С конечным автоматом мы свяжем следующую систему $S = (E, Z)$.

Положим $E = A \cup B \cup C$. Обозначим через T_1 время, состоящее из моментов 1, 2, Тогда процесс x есть реализация системы S тогда и только тогда, когда:

- 1) $x \in V(T_1)$;
- 2) если x пуст при $t \in T_1$, то x пуст для всех $s > t$;
- 3) если $C(x, t)$ не пусто, то оно равно $\{a_t, b_t, c_t\}$, где $a_t \in A$, $b_t \in B$, $c_t \in C$, причем должны выполняться соотношения

$$b_t = F(a_t, b_{t-1}), \quad c_t = G(a_t, b_{t-1}).$$

Заметим, что реализации этой системы могут представлять собой как бесконечные, так и конечные последовательности.

Пример 2. Пусть имеется m машин и n деталей. Деталь с номером i проходит последовательно k_i обработок. Каждой паре индексов (i, j) , ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, k_i$) поставлены в соответствие действительное число $p_{ij} > 0$ (продолжительность j -й обработки i -й детали) и натуральное число $f(i, j)$, не большее m (номер машины, на которой производится эта обработка). Мы хотим описать такую систему обработки всех n деталей, в которой детали не допускают «пролеживания» и каждая машина может обрабатывать в любой момент не более одной детали.

Каждой паре (i, j) поставим в соответствие элементарное событие e_{ij} и пусть $E = \{e_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k_i\}$. Прежде чем определить требуемую систему $S = (E, Z)$, опишем некоторые частичные процессы системы. Именно, каждой детали i поставим в соответствие множество Y_i следующим образом: $y \in Y_i$, тогда и только тогда, когда:

- 1) упуст до некоторого момента $t(y) \geq 0$ (момента запуска i -й детали);
- 2) в процессе y происходят все элементарные события $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik_i}$, и только они;
- 3) если $(e_{ij}, t) \in y$, то t удовлетворяет неравенству

$$0 \leq t - t(y) - \sum_{v=1}^{i-1} p_{iv} < p_{ij}.$$

Таким образом, процесс $y \in Y_i$ представляет собой полную обработку i -й детали и однозначно определяется моментом запуска $t(y)$.

Наконец, процесс x является реализацией системы S тогда и только тогда, когда $x = y_1 U y_2 U \dots U y_n$, где $y_i \in Y_i$, и для всяких i , i, j, Y_i, j , из условий $(e_{ij}, t) \in x, (e_{i'j'}, t) \in x, f(i, j) = f(i', j')$ следует, что $i = i'$ и $j = j'$. О нахождении минимального срока обработки всех деталей в аналогичных задачах (с некоторыми модификациями) см., например, [3, 4].

3. В этом разделе выводится соотношение, выражающее принцип оптимальности, применяемый в динамическом программировании, и являющееся обобщением функционального уравнения Беллмана. Пусть имеется некоторая система $S = (E, Z)$. Множество всех частичных процессов системы S обозначим через $[Z]$. Систему $S' = (E, Q)$ назовем подсистемой системы S , если $Q \subseteq [Z]$. Систему $S' = (E, Q)$ назовем исчерпывающей подсистемой системы S , если 1) $Q \subseteq [Z]$ и 2) для любой реализации x системы S найдется реализация q системы S' , такая, что $q \subseteq x$. Пусть q — некоторый частичный процесс системы S . Через Z_q обозначим множество процессов p , таких, что $q \cup p \in Z$ и $q \cap p = \emptyset$.

Пусть на некотором множестве R_0 , таком, что $Z \subseteq R_0$, задан ограниченный снизу функционал $J(x)$. Пусть (E, Q) — некоторая исчерпывающая подсистема системы (E, Z) , такая, что $Q \subseteq R_0$. Для любых $q \in Q$ и $p \in Z_q$ определим функционал $J_q(p)$ как разность $J(q \cup p) - J(q)$. Нас будет интересовать задача нахождения величины $J_0 = \inf_{x \in Z} J(x)$, и если она достигается на множестве Z , то нахождения такой реализации x_0 системы S , что $J(x_0) = J_0$. В противном случае по любому $\epsilon > 0$ требуется найти $x_0 \in Z$, такое, что $J(x_0) < J_0 + \epsilon$.

В приведенных выше обозначениях принцип оптимальности формулируется следующим образом:

$$\inf_{x \in Z} J(x) = \inf_{q \in Q} [J(q) + \inf_{p \in Z_q} J_q(p)]. \quad (1)$$

Доказательство. Перепишем (1) в виде $\inf_{x \in Z} J(x) = \inf_{x \in Z} \inf_{q \in Q} \inf_{p \in Z_q} J(q \cup p)$

и введем следующие обозначения:

$$A = \inf_{x \in Z} J(x), \quad B_q = \inf_{p \in Z_q} J(q \cup p), \quad B = \inf_{q \in Q} B_q.$$

Заметим, что для любых p и q , таких, что $q \in Q$ и $p \in Z_q$, $J(q \cup p) \geq B$, так как $J(q \cup p) \geq B_q$, а $B_q \geq B$.

Покажем, что $A \leq B$. Пусть $A > B$. По определению точной нижней грани по любому $\epsilon > 0$ найдется $q_0 \in Q$, такое, что $B_{q_0} < B + \epsilon/2$, точно также найдется $p_0 \in Z_{q_0}$, такое, что $J(q_0 \cup p_0) < B_{q_0} + \epsilon/2$. Объединяя полученные неравенства, имеем $J(q_0 \cup p_0) < B + \epsilon$. С другой стороны, $J(q_0 \cup p_0) \geq A$. Отсюда и следует противоречие с предположением $A > B$.

Покажем теперь, что $A \geq B$. Пусть $A < B$. По определению точной нижней грани по любому $\epsilon > 0$ найдется процесс $x_0 \in Z$, такой, что

$J(x_0) < A + \varepsilon$. Далее, поскольку (E, Q) — исчерпывающая подсистема системы (E, Z) , найдется $q_0 \in Q$, такой, что $q_0 \subseteq x_0$. Пусть $p_0 = x_0 \setminus q_0$. Итак $J(x_0) = J(q_0 \cup p_0) < A + \varepsilon$, с другой стороны, $J(q_0 \cup p_0) > B$. Из этих двух неравенств вытекает противоречие с предположением $A < B$. Соотношение (1) доказано.

Покажем, как вывести функциональное уравнение Беллмана из соотношения (1). Задача динамического программирования обычно ставится следующим образом [5, 6]. Имеется множество состояний Ω , множество решений D и отображение L множества $\Omega \times D$ в множество действительных чисел, такое, что $L(\omega, \delta)$, где $\omega \in \Omega$, $\delta \in D$ представляет собой доход на некотором шаге, если мы, находясь в состоянии ω , принимаем решение δ . Далее, для каждого $\delta \in D$ имеется отображение T_δ множества Ω в самого себя, такое, что $\omega' = T_\delta(\omega)$ представляет собой новое состояние, в которое мы переходим из состояния ω , принимая решение δ .

N -шаговым поведением называется последовательность $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$, где $\delta_i \in D$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Если через $f_N(\omega)$ обозначить суммарный доход, полученный при использовании оптимального N -шагового поведения и при начальном состоянии ω , то основное функциональное уравнение записывается следующим образом:

$$f_N(\omega) = \max_{\delta \in D} \{L(\omega, \delta) + f_{N-1}(T_\delta(\omega))\}. \quad (2)$$

С задачей динамического программирования свяжем совокупность систем (Ω, Z^{t_1, t_2}) , где t_1, t_2 — натуральные числа и $t_1 < t_2$, а Z^{t_1, t_2} определяется следующим образом: $x \in Z^{t_1, t_2}$ тогда и только тогда, когда:

- 1) x — процесс на $V(T_1)$, где $T_1 = \{1, 2, \dots\}$;
- 2) Для любого целого $t \in [t_1, t_2]$ существует одно и только одно $e \in \Omega$, такое, что $(e, t) \in x$; будем обозначать его через $e(x, t)$, а для любого $t \in [t_1, t_2] \setminus C(x, t)$ пусто;
- 3) для любого $t \in I_1$, такого, что $t_1 \leq t < t_2$, существует решение $\delta \in D$, переводящее состояние $e(x, t)$ в $e(x, t+1)$.

На множестве Z^{t_1, t_2} определим функционал $J(x)$, равный суммарному доходу, если использовалось поведение, переводящее $e(x, t_1)$ в $e(x, t_1 + 1)$, $e(x, t_1 + 1)$ в $e(x, t_1 + 2)$... $e(x, t_2 - 1)$ в $e(x, t_2)$. Таким образом, функционал определен на множестве $R_0 = \bigcup_{t_1, t_2 \in T_0, t_1 < t_2} Z^{t_1, t_2}$.

Рассмотрим теперь систему (Ω, Z^N) и ее исчерпывающую подсистему (Ω, Z^2) . Нетрудно видеть, что $Z^N \subseteq R_0$, $Z^2 \subseteq R_0$, кроме того, $J_q(p) = J(p)$ и для любого $q \in Z^2$ $Z_q^N = Z^{2N}$, поэтому принцип оптимальности записывается в виде соотношения $\inf_{x \in Z^N} J(x) = \inf_{q \in Z^2} \{J(q) + \inf_{p \in Z^{2N}} J(p)\}$, которое эквивалентно уравнению (2).

Пример 3. В качестве примера на применение соотношения (1), отличного от обычной схемы динамического программирования, приведем задачу, рассмотренную в [7]. Имеется множество E работ $1, 2, \dots, N$, каждая из которых требует единицу времени на свое выполнение и не прерывается. Все работы выполняются последовательно на одной машине, причем работу k можно начинать не раньше момента τ_k , стоимость начала ее в момент t есть неубывающая функция $c_k(t)$. Требуется найти порядок выполнения работ и моменты их начала

s_1, s_2, \dots, s_N , чтобы $\sum_{i=1}^N c_i(s_i)$ принимала наименьшее значение. Для этой задачи определим систему (E, R_0) , где R_0 задается следующим образом: $x \in R_0$ тогда и только тогда, когда:

- 1) x — процесс на $V(T_2)$, где T_2 — множество неотрицательных действительных чисел;
- 2) для любого $t \in C(x, t)$ содержит не более одного элемента;
- 3) для любого $e \in E$ $\theta(x, e)$ есть интервал единичной длины, который будем обозначать $t^o(x, e)$, $t^o(x, e) + 1$, причем $t^o(x, e) \geq \tau_e$, либо $\theta(x, e)$ пусто.

На множестве R_0 определим функционал $J(x) = \sum_{e \in \theta(x, e)} c_e(t^o(x, e))$.

В работе [7] показано, что минимум этого функционала достигается на множестве Z ($Z \subseteq R_0$), определяемом следующим образом: $x \in Z$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 1)—3) из определения множества R_0 и условие 4) для любой работы $e_1 \in E$ либо $t^o(x, e_1) = \tau_{e_1}$, либо существует $e_2 \in E$ и существует целое положительное k , так что $t^o(x, e_1) = \tau_{e_1} + k$ и для любого целого v ($0 \leq v < k$) существует $e_3 \in E$, такое, что $t^o(x, e_3) = \tau_{e_3} + v$.

Определим множество Q , удовлетворяющее условиям (1)—3) из определения множества R_0 и условию 4'); для любого $e_1 \in E$ существует $e_2 \in E$, так что $t^o(x, e_1) = \tau_{e_2}$, если $\theta(x, e_1)$ непусто.

Нетрудно видеть, что $Q \subseteq R_0$, (E, Q) — исчерпывающая подсистема системы (E, Z) и для любого $q \in Q$ $Z_q \subseteq R_0$, кроме того, $J_q(p) = J(p)$, где $q \in Q$, $p \in Z_q$. Поэтому можно записать

$$\inf_{x \in Z} J(x) = \inf_{q \in Q} \{J(q) + \inf_{p \in Z_q} J(p)\}.$$

Алгоритм, неявно использующий это соотношение, предлагается в работе [7].

4. Пусть задано E . Произвольное множество пар (x, t) , где x — процесс на E , а t — момент, будем называть составным событием (на E) или просто событием. Если ξ — событие, то тот факт, что $(x, t) \in \xi$, выражается словами: в процессе x в момент t происходит событие ξ или событие ξ осуществляется в процессе x в момент t .

Будем говорить, что событие ξ есть событие без предвосхищения, если для всяких процесса x и момента t условие $(x, t) \in \xi$ равносильно условию $(w_t(x), t) \in \xi$ (т. е. тот факт, что $(x, t) \in \xi$, не дает никакой информации о протекании процесса x после t).

Пусть $F(x, t)$ — переменное высказывание, зависящее от переменных процесса x и момента t (возможно, $F(x, t)$ зависит от одной из этих переменных фиктивно). Тогда через $\{(x, t) / F(x, t)\}$ будем обозначать событие, состоящее из всех тех пар (x, t) , для которых $F(x, t)$ истинно.

Так как события — множества, то над ними можно производить обычные теоретико-множественные операции. В частности, для события ξ через $\bar{\xi}$ будем обозначать дополнение события ξ :

$$\bar{\xi} = \{(x, t) / (x, t) \notin \xi\}.$$

Кроме того, если ξ, η — события, то будем употреблять следующие обозначения:

$$\xi \rightarrow \eta = \bar{\xi} \cup \eta,$$

$$\xi \equiv \eta = (\xi \rightarrow \eta) \cap (\eta \rightarrow \xi).$$

Покажем, что ранее определенные объекты (элементарное событие, состояние, время и множество процессов) в известном смысле являются частными случаями событий. Определим следующие классы событий.

А) Каждому $e \in E$ поставим в соответствие составное событие

$\varepsilon(e) = \{(x, t) / (e, t) \in e\}$. В дальнейшем вместо $\varepsilon(e)$ будем писать e , так как из смысла выражения всегда ясно, идет ли речь об элементарном событии e или соответствующем ему составном $\varepsilon(e)$.

Б) Каждому времени T поставим в соответствие событие $\tau T = \{(x, t) / t \in T\}$.

В) Каждому множеству процессов X поставим в соответствие событие $\chi X = \{(x, t) / x \in X\}$.

Нетрудно убедиться, что события классов А, Б являются событиями без предвосхищения, а событие класса В таким, вообще говоря, не является.

5. Пусть ξ — событие. Через $\langle \xi \rangle$ будем обозначать множество всех тех процессов x , для которых $(x, t) \in \xi$ при всех моментах t . Нетрудно видеть, что для любых событий ξ и η выполняется следующее соотношение:

$$\langle \xi \cap \eta \rangle = \langle \xi \rangle \cap \langle \eta \rangle.$$

Отметим, что множество $\langle \xi \rightarrow \eta \rangle$ состоит из всех тех процессов x , для которых при всех t из условия $(x, t) \in \xi$ следует условие $(x, t) \in \eta$, а множество $\langle \xi \equiv \eta \rangle$ состоит из всех тех процессов x , для которых при всех t условие $(x, t) \in \xi$ равносильное условию $(x, t) \in \eta$.

Пусть ξ — событие, а x — процесс. Через $R(\xi, x)$ будем обозначать время осуществления события ξ в процессе x , определяемое следующим образом: $t \in R(\xi, x)$ тогда и только тогда, когда $(x, t) \in \xi$. Если ξ — событие и $p \geq 0$ — действительное число, то через $\sigma(\xi, p)$ будем обозначать событие, такое, что $(x, t) \in \sigma(\xi, p)$ тогда и только тогда, когда время $R(\xi, w_t(x))$ измеримо и его мера равна p (т. е. в процессе x до момента t событие ξ осуществлялось за время с общей длительностью p).

Пусть ξ — событие. Через $\varphi\xi$ будем обозначать событие, такое, что $(x, t) \in \varphi\xi$ тогда и только тогда, когда для всех $s > t$ неверно, что $(x, s) \in \xi$ (т. е. $(x, t) \in \varphi\xi$ означает, что в процессе x после t событие ξ не произойдет).

Нетрудно видеть, что если ξ — событие без предвосхищения, то $\sigma(\xi, p)$ есть также событие без предвосхищения, а $\varphi\xi$ таковым, вообще говоря, не является.

Пример 4 (одна из задач сетевого планирования). Пусть задано непустое конечное множество B работ. Каждой работе $b \in B$ поставлено в соответствие множество $A(b) \subseteq B$ работ, предшествующих b , причем циклов не образуется, т. е. не существует такой цепочки $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n = b_0$ работ для которой $b_{i-1} \in A(b_i)$ ($i=1, 2, \dots, n; n=0, 1, \dots$) (в частности, $b \in A(b)$). Пусть каждой работе b отвечают число $p(b) > 0$ (ее длительность) и число $q(b) \geq 0$ (интенсивность потребления ресурса в работе b). Задано число $r > 0$ (мощность ресурса), такое, что $\max_{b \in B} q(b) \leq r$. Обозначим через B_1 множество тех работ b , для которых $A(b)$ непусто.

За множество элементарных событий примем B . Процессу x на B в моменту t поставим в соответствие число

$$q(x, t) = \sum_{b \in C(x, t)} q(b)$$

(интенсивность потребления ресурса в процессе x в момент t). Для описания системы (B, Z) определим Z как пересечение $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4$, где множества X_i задаются следующим образом:

1) $x \in X_1$ тогда и только тогда, когда для всякого $b \in B$ множество $R(b, x)$ состоит из неотрицательных моментов и является объединением

конечного числа полусегментов (т. е. допускается конечное число перерывов в работе);

2) $X_2 = \prod_{b \in B} \langle \varphi b \equiv \sigma(b, p(b)) \rangle$ (т. е. все работы должны быть закончены);

3) $X_3 = \prod_{b \in B} \langle b \rightarrow \prod_{b' \in A(b)} \varphi b' \rangle$ (т. е. для производства работы b необходимо, чтобы все предшествующие работы были закончены);

4) $X_4 = \langle \{(x, t) / q(x, t) \leq r\} \rangle$ (т. е. интенсивность потребления ресурса не должна превышать мощности ресурса).

О нахождении минимального срока выполнения всех работ в аналогичных задачах см., например, [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Views on General Systems Theory, Proceedings of the Second Systems Symposium at Case Institute of Technology, 1964 (русский перевод, Общая теория систем, М., 1966).
2. Автоматы, ИЛ, М., 1956.
3. Д. А Супруненко, В. С. Айзенштат, А. С. Метельский, ДАН БССР, 6, № 9 (1962).
4. В. С. Талаев, Диссертация, Минск, 1965.
5. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.
6. Ч. Кэрр, Ч. Хоу, Количественные методы принятия решений в управлении и экономике, Мир, М., 1966.
7. В. Д. Гиновкер, ДАН БССР, 10, № 12, (1966).
8. С. И. Зуховицкий, И. А. Радчик, Математические методы сетевого планирования, Наука, М., 1965

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
22 ноября 1967 г.

SOME DEFINITIONS FOR DESCRIPTION SYSTEM CHANGE IN TIME

Ju. V. Glebskii, V. A. Talanov

The authors try to present some definitions relating to general theory of systems. Some examples illustrating the use of the given notions to describe various systems in particular, for description of some problems of scheduling theory are discussed. It is shown how the optimality principle in dynamic programming may be expressed in terms of these notions.

УДК 519.8

ЭВРИСТИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ИГРЫ НА ПЛОСКОСТИ

B. P. Рябоконь

Исследуется игра «шашки—Go-Bang» (крестики-нолики с критерием выигрыша 5 подряд стоящих знаков) на неограниченной плоскости. Ставится задача, существует ли выигрышная стратегия у игрока, делающего ход первым. Для решения подобных задач предлагается новая система эвристических построений—метод признаков. Основной частью метода являются содержательные приемы-эвристики, позволяющие значительно сократить число ветвей в дереве игры. В данной игре важно наличие двух фаз: «фазы развития» и «фазы форсирования выигрыша». Описывается эвристическая программа, решающая поставленную задачу, и приводятся конкретные результаты, полученные с помощью этой программы.

Рассматривается игра «шашки—Go-Bang» на неограниченной плоскости, которая вертикальными и горизонтальными линиями расчерчивается на клетки-квадраты. Играют два противника M и N . Игрок M первым делает ход, заполняя одну из клеток плоскости своим знаком-крестиком. Потом делает ход игрок N , ставя в одну из свободных клеток свой знак-нолик. Ходы совершаются попеременно. Выигрывает тот из противников, который первым в цепочке клеток (на одной из прямых линий—вертикальной, горизонтальной, диагональной) поставит подряд 5 своих знаков.

Право совершить ход первым дает игроку M некоторое преимущество, «инициативу в дебюте». Для всех игр с переменным совершением хода, в первую очередь, интересно выяснить, является ли преимущество игрока, делающего ход первым, решающим в том смысле, что позволяет ему всегда добиться выигрыша. При этом имеется в виду такое поведение обоих противников, когда они максимально используют свои возможности в игре. В данной работе решается проблема о том, может ли игрок M добиться выигрыша, если противники играют наилучшим образом, и, если это возможно, какое минимальное число ходов ему для этого потребуется.

В работе [1] рассматривалась игра с такими же правилами на квадрате 8×8 , свернутом в тор, а в работе [2] — на панели 19×19 . В этих статьях для выбора продолжений применены оценочные функции, в них не ставилась задача, сформулированная в настоящей работе.

Для решения указанной выше задачи предлагается метод, условно названный «методом признаков».

Работа состоит из шести частей. В первой части излагается метод признаков, во второй даются определения признаков. Третья часть содержит описание отбора предпочтимых продолжений, в четвертой определяются предварительные условия выигрыша. В пятой части дается описание алгоритма для исследования данной игры, а в шестой приводятся результаты, полученные при этом исследовании.

1. МЕТОД ПРИЗНАКОВ

Из-за неограниченности плоскости, на которой совершается данная игра, для решения поставленной задачи непригоден алгоритм, совершающий полный перебор всех возможных продолжений. Можно надеяться, что решение будет найдено, если схему перебора дополнить некоторым методом отбора продолжений, позволяющим значительно сократить общий перебор. Для того, чтобы такой метод отбора был определен полностью, необходимо задать: а) стандартное описание для всех возможных продолжений; б) преобразование или построение новых описаний при смене игровой ситуации; в) отношение порядка на множестве продолжений; г) последовательность сокращений числа членов во множестве продолжений.

Для описания продолжений чаще всего употребляются оценочные функции (обычно в виде полинома), зависящие от конечного числа параметров. В каждой новой ситуации в связи с изменением значений параметров значение оценочной функции вычисляется заново. Как правило, таким методом удается выделить единственное предпочтимое продолжение, однако не всегда возможно составить такое простое и достаточно хорошее описание.

В методе признаков свободным клаткам плоскости в зависимости от игровой ситуации приписывается определенный признак. При смене игровой ситуации совершается совокупность преобразований признаков. В зависимости от полного признака на множестве свободных клеток задается отношение частичного порядка, а с помощью системы эвристических построений из этого множества отбираются предпочтимые продолжения.

2. ВВЕДЕНИЕ ПРИЗНАКОВ

Согласно условию игры, любая клетка в некоторой ситуации может быть или занята одним из знаков противников или свободна. Признаки будут приписываться свободным клеткам панели. Рассмотрим одну из прямых линий, упоминавшихся в условии игры, например, горизонтальную, которая проходит через центр данной свободной клетки. Нас будут интересовать пятерки подряд стоящих клеток линии, содержащие данную клетку. Выделим из возможных пятерок множество тех из них, которые содержат или свободные клетки или клетки, занятые каким-либо одним знаком. Такие пятерки назовем рабочими. Отберем только те рабочие пятерки, которые содержат наибольшее число клеток, занятых одним знаком; назовем эти пятерки максимальными по отношению к данной свободной клетке. Данной клетке будет приписываться некоторый признак в зависимости от числа занятых клеток в максимальной пятерке и в зависимости от занятости граничных к ней клеток линии противоположным знаком. Признак зависит от знака занятых клеток максимальной пятерки, поэтому будем говорить, что клетке приписывается признак данного знака. Некоторой свободной клетке на данной линии могут быть приписаны два признака одного или различных знаков в зависимости от имеющегося числа максимальных пятерок. Признак не приписывается, если все пятерки, содержащие данную клетку, не имеют клеток, занятых каким-либо знаком. Не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением рабочих пятерок, содержащих только клетки, занятые крестиком. Все сказанное для них переносится по аналогии на рабочие пятерки с ноликами. Таким образом, ниже будут определяться признаки, зависящие от крестика. В качестве обозначений для признаков выбраны буквы A с двумя индексами. Верхний индекс будет являться одним из знаков, а нижний будет служить для

обозначения номера признака. Признаки упорядочены, этому соответствует нумерация. Старшим признаком является A_1^X , затем A_2^X и т. д.

Определение A_1^X . Если в максимальной пятерке четыре клетки заняты крестиком, то данной клетке приписывается признак A_1^X .
Пример.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		X	X	X		X		

A_1^X

Введем понятие окрестности к данной клетке. Под окрестностью к данной клетке на линии будем понимать множество клеток линии, состоящее из данной клетки, из четырех подряд расположенных клеток слева от данной клетки и четырех подряд расположенных клеток справа от нее. В примере, приведенном выше, изображена окрестность к клетке 5.

Признаки A_2^X и A_3^X приписываются свободной клетке в том случае, когда в максимальной пятерке имеется три клетки с крестиком.

Определения A_2^X и A_3^X . Данной клетке приписывается признак A_2^X , если при заполнении ее крестиком в окрестности к данной клетке у двух свободных клеток окажется признак A_1^X , и признак A_3^X , если при этом заполнении в окрестности к данной клетке признак A_1^X окажется только у одной.

В примере, приведенном выше, признаком A_2^X обладает клетка 2, а признаком A_3^X — клетки 1 и 8.

Признаки A_4^X и A_5^X приписываются в том случае, когда в максимальной пятерке имеются две клетки, занятые крестиком.

Определения A_4^X и A_5^X . Данной клетке приписывается признак A_4^X , если при заполнении ее крестиком в окрестности к данной клетке окажется свободная клетка с признаком A_2^X , и признак A_5^X , если при таком заполнении в окрестности к данной клетке окажется свободная клетка с признаком A_3^X .

Признаки A_6^X и A_7^X приписываются в том случае, когда в максимальной пятерке имеется только одна клетка с крестиком.

Определения A_6^X и A_7^X . Данной клетке приписывается признак A_6^X , если при заполнении ее крестиком в окрестности к данной клетке окажется свободная клетка с признаком A_4^X , и признак A_7^X , если при заполнении ее крестиком в окрестности к данной клетке окажется свободная клетка с признаком A_5^X .

Подобным же образом определяются признаки A_1^0 , A_2^0 , ..., A_7^0 .

Все семь признаков необходимы для организации работы программы преобразования признаков при смене игровой ситуации.

Если в клетке имеется на одной линии два одинаковых признака, то при оценке предпочтения, которое будет даваться клетке в выборе ее для совершения хода, они будут учитываться как один. Степень такого предпочтения будет определяться в зависимости от наличия в клетке признаков A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и A_5 или A_6 . Последние два одинаково влияют на степень предпочтения, поэтому их объединим в один признак B .

Для характеристики клетки по всем четырем направлениям вводятся две следующие последовательности:

$$1) \alpha_1 A_1^X, \quad \alpha_2 A_2^X, \quad \alpha_3 A_3^X, \quad \alpha_4 A_4^X, \quad \alpha_5 B^X,$$

$$2) \beta_1 A_1^0, \quad \beta_2 A_2^0, \quad \beta_3 A_3^0, \quad \beta_4 A_4^0, \quad \beta_5 B^0.$$

Здесь α_i и β_i числа ($0 < \alpha_i \leq 4$, $0 < \beta_i \leq 4$), обозначающие количества соответствующих признаков в клетке ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Вместо последовательностей 1 и 2 можно задать кортежи целых чисел $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$. Числа α_i и β_i удовлетворяют условию

$$0 \leq \sum_{i=1}^5 (\alpha_i + \beta_i) \leq 8,$$

что означает, что в клетке пятерки одной линии могут образовать не больше двух признаков.

Последовательности 1 и 2 или кортежи $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ образуют полный признак свободной клетки.

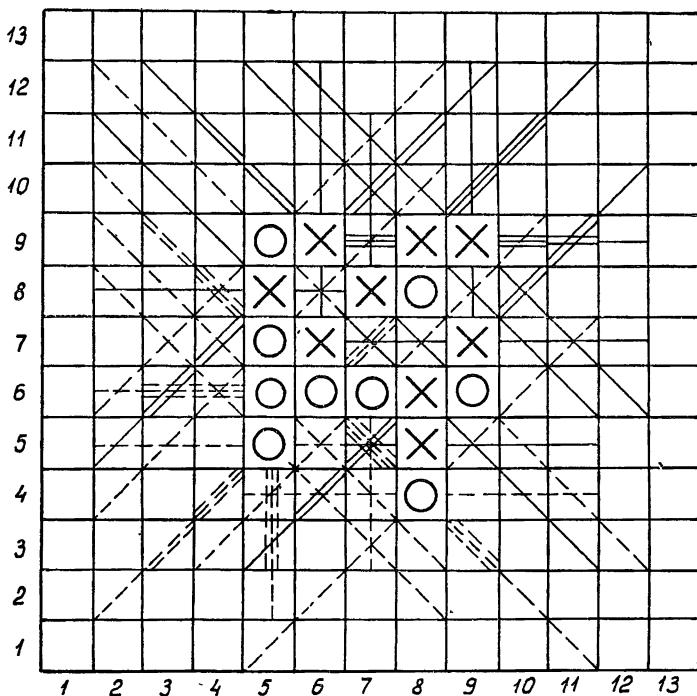


Рис. 1. Пример одной из игровых ситуаций после девятого хода игрока N . На рисунке приняты следующие обозначения:

$$\overline{\overline{\overline{\overline{A_3}}}} \quad A_3^X$$

$$\equiv \equiv \equiv \equiv A_2^0$$

$$\overline{\overline{A_4}} \quad A_4^X$$

$$\equiv \equiv \equiv \equiv A_3^0$$

$$\overline{A_5} \quad A_5^X, \quad A_6^X$$

$$= = = = A_4^0$$

$$- - - A_5^0, \quad A_6^0$$

$$- - - A_5^0, \quad A_6^0$$

На рис. 1 приводится игровая ситуация, возникающая после девятого хода противника N , и полные признаки отдельных клеток ситуации.

Таблица 1

<i>m</i>	Высказывательная форма
1	$(\alpha_1 > 0)$
2	$(\alpha_1 = 0) \wedge (\beta_1 > 0)$
3	$(\alpha_1 = 0) \wedge (\beta_1 = 0) \wedge (\alpha_2 > 0)$
4	$\bigwedge_{i=1,2} (\alpha_i = 0) \wedge (\beta_i = 0) \wedge \{(\alpha_3 > 1) \vee [(\alpha_3 = 1) \wedge (\alpha_4 > 0)]\}$
5	$\bigwedge_{i=1,2,4} (\alpha_i = 0) \wedge (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_3 = 1) \wedge (\beta_2 > 0)$
6	$\bigwedge_{i=1,2,4} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_3 = 1) \wedge (\alpha_5 > 0)$
7	$\bigwedge_{i=1,2} (\alpha_i = 0) \wedge (\beta_1 = 0) \wedge (\beta_2 > 0) \wedge [(\beta_3 > 0) \vee (\beta_4 > 0)] \wedge X$
8	$\bigwedge_{i=1,2} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,3,4} (\beta_i = 0) \wedge (\beta_2 > 0) \wedge (\beta_3 > 0) \wedge X$
9	$\bigwedge_{i=1,2} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,3,4,5} (\beta_i = 0) \wedge (\beta_2 > 0) \wedge X$
10	$\bigwedge_{i=1,2} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge \{[(\beta_3 = 1) \wedge (\beta_4 = 1)] \vee (\beta_3 > 1)\} \wedge X$
11	$\bigwedge_{i=1,2,3} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_4 > 1) \wedge Y$
12	$\bigwedge_{i=1,2,3} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_4 = 1) \wedge (\alpha_5 > 1) \wedge Y$
13	$\bigwedge_{i=1,2,3} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_4 = 1) \wedge (\alpha_5 = 1) \wedge Y$
14	$\bigwedge_{i=1,2,5} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge Y \wedge W$
15	$\bigwedge_{i=1,2,3} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2,3,4} (\beta_i = 0) \wedge W$
16	$\bigwedge_{i=1,2,3,4} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2,3} (\beta_i = 0) \wedge (\beta_4 > 1)$
17	$\bigwedge_{i=1,2,3,4} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_5 > 2) \wedge Z$
18	$\bigwedge_{i=1,2,3,4} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_5 < 3) \wedge (\beta_5 > 0) \wedge Z$
19	$\bigwedge_{i=1,2,3,4} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2,5} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_5 < 3) \wedge Z$
20	$\bigwedge_{i=1,2,3,4} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2,3,4} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_5 = 2)$
21	$\bigwedge_{i=1,2,3,4} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2,3,4} (\beta_i = 0) \wedge (\alpha_5 = 1)$
22	$\bigwedge_{i=1,2,3,4,5} (\alpha_i = 0) \wedge \bigwedge_{i=1,2,3,4} (\beta_i = 0) \wedge (\beta_5 > 0)$

$$X = (\alpha_3 = 1) \Rightarrow [(\alpha_4 = 0) \wedge (\alpha_5 = 0)]; \quad Y = [(\beta_3 = 1) \wedge (\beta_4 = 0)] \vee [(\beta_3 = 0) \wedge (\beta_4 > 0)];$$

$$W = [(\alpha_3 = 1) \wedge (\alpha_4 = 0)] \vee [(\alpha_3 = 0) \wedge (\alpha_4 = 1)]; \quad Z = [(\beta_3 = 1) \wedge (\beta_4 = 0)] \vee [(\beta_3 = 0) \wedge (\beta_4 = 1)]$$

3. ОТБОР ПРЕДПОЧТИМЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ

Процесс отбора предпочтимых продолжений среди всех продолжений, возможных в конкретной ситуации игры, осуществляется с помощью системы эвристических построений. Они расчленяют такой процесс отбора на четыре этапа. На каждом этапе происходит преобразование множества допустимых продолжений, которое выражается или в уменьшении числа рассматриваемых продолжений или в выделении среди них наиболее предпочтимых путем задания отношения частичного порядка.

На первом этапе для создания начального порядка на множестве свободных клеток строится некоторое упорядоченное семейство множеств. Отнесение клетки к одному из множеств осуществляется на основе ее полного признака. Для каждого множества задается описание полных признаков тех клеток, которые будут огнены к этому множеству. Такое описание выражается в виде высказывательной формы, составленной из высказываний относительно величин компонент кортежей $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$. Для каждого из игроков вводится свое семейство множеств: M_1 для игрока M и N_1 для игрока N . В таблице 1 приведено семейство M_1 , семейство N_1 получается из него заменой компонент α_i на β_i и β_i на α_i . Двадцать два множества определяются высказывательными формами, двадцать третье содержит клетки, получающиеся из клеток, занятых крестиком (ноликом), ходом шахматного коня, при этом они не имеют признаков, зависящих от крестика (нолика). Множества упорядочены по старшинству. Старшим является множество с $m = 1$, затем идет с $m = 2$ и т. д., в семействе N_1 это же справедливо для множеств с номерами соответственно $n = 1, n = 2$ и т. д.

На втором этапе семейство множеств ограничивается снизу. Это ограничение осуществляется для одного из противников в зависимости от номера старшего заполненного множества в семействе другого противника и выражается в задании номера, который будет означать нижнюю грань семейства. Вся система ограничений задается в виде таблицы. В таблице 2 приведена система ограничений для семейства M_1 .

Таблица 2

Номер n старшего заполненного множества в семействе N_1	1	3	$3 < n$ $n < 12$	$11 < n$ $n < 14$	$13 < n$ $n < 16$	17	20	21
Номер m множества — нижней грани в семействе M_1	2	9	13	15	17	20	21	23

В результате проведения преобразований первого и второго этапов получается ограниченное семейство упорядоченных множеств, причем каждое множество содержит свободные клетки, обладающие одинаковой степенью предпочтения быть выбранными данным противником для совершения хода. Дальнейшие эвристические построения должны быть направлены на то, чтобы сократить число членов в оставшихся множествах семейства и задавать на них некоторые отношения порядка. Эти построения имеют характер содержательных приемов или эвристик в их общепризнанном смысле «интуитивно оправданных процедур» (Гелентер [3]). Преобразование множеств с помощью эвристик составляет содержание третьего этапа преобразований.

Для описания эвристик необходимо ввести дополнительные понятия активной линии и клетки с контрударом (сокращенно КСК). Актив-

ная линия также может принадлежать разным знакам. Ниже вводится понятие активной линии крестика. Рассмотрим семерку подряд стоящих клеток: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, которую сокращенно обозначим через $\langle a_1 - a_7 \rangle$. В семерке $\langle a_1 - a_7 \rangle$ крайние клетки a_1 и a_7 могут быть свободными или занятами ноликами. В пятерке внутренних клеток a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 могут быть клетки или свободные или занятые крестиками, но число последних не должно превышать двух, и расположены они должны быть так, чтобы в свободных клетках не было признака старше A_5^X , который создавался бы максимальными пятерками данной линии. Объединим признаки A_3 и A_4 в один признак C ($C = A_3 \vee A_4$). Свободные клетки внутренней пятерки могут иметь признак C^X , создаваемый только максимальными пятерками других линий.

Активной линией крестика называется семерка с указанными свойствами, у которой внутренняя пятерка содержит такое количество клеток, занятых крестиком, и свободных клеток с признаком C^X , что при заполнении всех свободных клеток с признаком C^X крестиком во внутренней пятерке окажутся клетки с признаками A_1^X или A_2^X .

В ситуации на рис. 1 активными линиями крестика являются следующие две семерки клеток:

- 6,7; 7,7; 8,7; 9,7; 10,7; 11,7; 12,7;
- 12,7; 11,8; 10,9; 9,10; 8,11; 7; 12; 6,13.

Подобным же образом определяется активная линия для нолика.

В понятии «клетка с контрударом» также необходимо указывать принадлежность к знаку, поэтому правильнее говорить «клетка данного знака (крестика или нолика) с контрударом». Для определения КСК необходимо ввести понятие множества нейтрализации. Объединим признаки A_1 и A_2 в признак D ($D = A_1 \vee A_2$). Множеством нейтрализации к клетке с признаком D называется множество тех клеток, при заполнении которых противоположным знаком признак в данной клетке становится младше D . На рис. 1 клетка 5,7 обладает признаком A_2^0 , ее множество нейтрализации содержит клетки 8,4; 5,7; 3,9.

Клеткой крестика с контрударом называется свободная клетка с признаком C^X , при заполнении которой крестиком в окрестности к этой клетке возникает клетка с признаком D^X , множество нейтрализации которой содержит клетку с признаком C^0 . На рис. 1 клеткой крестика с контрударом является клетка 7,4.

Эвристика для множеств $m = 12$ и $m = 13$ — это разбиение их на подмножества клеток в зависимости от того, являются ли они клетками КСК и появляются ли на панели при их заполнении крестиком активные линии крестика. Эвристика для множеств $m = 17$ и $m = 20$ делит эти множества на два подмножества клеток по принципу, вызывает ли заполнение этих клеток крестиком появление активной линии крестика или нет.

Эвристика для множеств $m = 18$ и $m = 19$ делит эти множества на подмножества клеток в зависимости от того, входят ли эти клетки в активные линии нолика или нет. Список таких эвристик можно продолжить эвристиками для других множеств.

Предложенные выше эвристики являются приемами для анализа игры на один ход вперед. Для данной игры можно предложить многоходовые эвристики, играющие роль планов, которые направлены на осуществление определенных целей игры.

Они составляют содержание четвертого этапа. В данной игре существенно выделить две фазы: «фазу развития» и «фазу форсирования выигрыша».

Цели игрока M в первой фазе довольно многообразны, но суть их одна — подготовить условия для выигрыша. Примеры таких целей: накопление клеток с признаками C^\times и $B_1^\times, A_3^\times, A_4^\times$, получение активной линии и т. д. В фазе форсирования выигрыша преследуется цель исключения последовательности ходов, ведущих непосредственно к выигрышу. Например, получение своим ходом клетки с признаком D^\times с одновременным накоплением клеток с признаком C^\times с тем, чтобы они образовали активную линию. Одновременно могут ставиться цели помешать противнику перейти в фазу форсирования выигрыша.

4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫИГРЫША

При отборе выигрышных продолжений для уменьшения перебора имеет смысл выяснить предварительные условия выигрыша. Ниже будут сформулированы предварительные условия выигрыша игрока M в моменты, когда наступает его очередь совершить ход.

Условие 1. Множество $m = 1$ содержит хотя бы один элемент.

По условию 1 выигрыш достигается за один ход.

Дальнейшие условия будут формулироваться для случая, когда множество $m = 2$ пусто.

Условие 2. В семействе M_1 множества $m = 3$ или $m = 4$ содержат хотя бы один элемент.

Если не пусто множество $m = 3$, то выигрыш достигается за два хода. Если во множестве $m = 4$ у клетки компонента полного признака $\alpha_3 = 2$, то выигрыш достигается за два хода, если же компоненты этой клетки $\alpha_3 = 1$ и $\alpha_4 = 1$, то выигрыш достигается за три хода.

Для формулировки следующего условия необходимо ввести понятие доминирующей последовательности.

Доминирующей последовательностью для игрока M называем последовательность ходов игрока M , в которых осуществляется заполнение только клеток, имеющих признак A_3^\times .

Условие 3. У игрока M имеется доминирующая последовательность клеток, не являющихся КСК, которая приводит к ситуации, удовлетворяющей условиям выигрыша 1 или 2.

В игровой ситуации на рис. 1 игрок M имеет доминирующую последовательность, состоящую из хода в клетку 9,10. После этого хода в клетке 9,11 будут признаки A_3^\times и A_4^\times , т. е. будет выполняться условие выигрыша 2, которое приносит игроку M победу.

Остальные условия выигрыша будут формулироваться для случая, когда у игрока N нет доминирующей последовательности и множества $m = 7, m = 8, m = 9, m = 10$ пусты.

Условие 4. Множество $m = 11$ содержит хотя бы один член.

По этому условию выигрыш достигается за три хода. Для описания последнего условия удобно воспользоваться понятием результирующей активной линии. Результирующей активной линией назовем активную линию, содержащую столько клеток с признаком C^\times , не являющимися КСК, что заполнение их крестиком позволяет получить условия выигрыша 1 или 2.

Условие 5. У противника M имеется результирующая активная линия.

Разделим все активные линии на 3 типа: 1 тип: линии, содержащие две клетки с крестиком; 2 тип: линии, содержащие одну клетку с крестиком; 3 тип: линии, не содержащие клеток с крестиками.

В случае активной линии 1 типа выигрыш достигается за три хода, для линии 2 типа — выигрыш достигается в 4 хода, для линии 3 типа выигрыш достигается за 5 ходов.

В ситуации на рис. 1 линия а (см. стр. 1743) — линия второго типа, линия б — линия третьего типа.

5. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Изложенный выше метод признаков дает возможность использовать для исследования игры следующий алгоритм ограниченного перебора:

а) в каждой игровой ситуации исследуются только те продолжения, которые отбираются с помощью указанных эвристических построений (усечение дерева игры в ширину);

б) конечными ситуациями являются те, которые опознаются как выигрышные с помощью введенных предварительных условий выигрыша (усечение дерева игры в высоту).

Следует заметить, что используемые эвристические построения имеют следующие особенности. В семействах множеств каждого игрока имеются множества, содержащие только признаки своего знака, только признаки противника и те и другие. Введенные таким образом множества дают возможность различать клетки, которые будут выбираться для совершения хода в «наступательных», «защитных» и промежуточных периодах игры. В свою очередь, система ограничений для семейств множеств на втором этапе отбора продолжений подобрана таким образом, чтобы, с одной стороны, не рассматривать заведомо нецелесообразные продолжения, с другой стороны, чтобы не упустить наиболее выгодные из них. Эвристики третьего этапа позволяют отобрать наиболее предпочтимые продолжения среди клеток отдельных множеств. Построение четвертого этапа предназначено также и для того, чтобы в дебюте иметь возможность ограничить семейства множеств сверху, если не достигнуты условия перехода в фазу «форсирования выигрыша».

6. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Данная игра исследовалась с помощью описанного алгоритма программированием вручную. В дальнейшем планируется исследование на ЭВМ.

Предварительное рассмотрение, в котором было обследовано около тысячи вариантов игры, позволило получить следующие результаты.

1) Если противник N выбирает в игре независимое продолжение, т. е. продолжение, не направленное на препятствование образованию все более старших признаков у противника M , а на развитие своих старших признаков, то он неизбежно проигрывает.

Этот результат позволяет рассматривать игру не на всей бесконечной плоскости, а только в ограниченной области, представляющей собой квадрат из 31×31 клеток.

2) В обследованных вариантах игры противник M всегда добивался выигрыша своим 17 ходом. С большой вероятностью можно утверждать, что это всегда ему будет удаваться в данной игре.

Автор благодарит А. М. Бланка за помощь и советы, полученные при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. А б р а м я н, Х. К. Б р у т я н, Т. М. Т е р-М и к а э л я н, сб. Проблемы кибернетики, вып. 13, изд. Наука, М., 1965, стр. 131.
2. Р. В r a i f o r t, A. L u s s a n, Deuxième Congr. Assoc. franç. calcul et traitement. inform. afcalti. Paris, 1961, Paris, 1962, p. 221.
3. Г. Г е л е н т е р, сб. Вычислительные машины и мышление, изд. Мир, М., 1967, стр. 146.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 февраля 1968 г.

HEURISTIC PROGRAM FOR ANALYSING ONE GAME ON A PLANE

V. P. Ryaboco

The game „Go-Bang“ („crosses and zeroes“ with criterion of a win—five signs in a row) on the unlimited plane is investigated. The main problem is formulated as follows: is there any winning strategy for the gambler that moves the first? For the solution of the like problems a new system of heuristic construction—the method of indications—is offered. The essential part of the method are the plausible procedures heuristics, that allow considerable cut shortening of a number of branches in the game tree. The presence of two phases „the development phase“ and „the phase of the forced win“ is of great importance in the game. Then the heuristic program for the solution of this problem and experimental results obtained with the help of the program are described.

УДК 62 — 50 : 51

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

A. Н. Дорошенко, А. Г. Шигин

Рассматривается моделирующая система МС-1: структура языка и принципы организации интерпретирующей программы УМП-1, ориентированных на задачи временного (динамического) моделирования дискретных систем переработки информации. Язык МС-1 оформлен как язык блок-диаграмм. Каждый из блоков может включать набор операторов-функций, реализующих изменение состояний компонент моделируемой системы при входе в блок объектов, называемых элементами. В состав языка МС-1 включен оператор параллельности, расширены возможности языка в области описания процессов переработки информации и добавлен ряд новых стандартных функций. В интерпретирующую программу введены средства проверки синтаксиса и семантики описания модели. В статье даны примеры перевода описания модели с языка МС-1 на машинный язык, с которым работает интерпретирующая программа УМП-1. Описывается структура и принципы работы программы УМП-1.

Применение «классических» методов теории массового обслуживания для исследования сложных управляющих систем ограничено, так как процесс обработки потока информации, поступающего в такие системы, зависит от их состояния (эффект последствия). Поэтому в ходе проектирования и исследования систем, создаваемых на базе электроники и вычислительной техники, широко используется метод программного (цифрового) моделирования [¹⁻⁵].

Программное моделирование, реализуемое на универсальных ЦВМ, предполагает построение алгоритма, отображающего интересующие нас свойства системы, с целью сбора статистических данных о моделируемой системе.

Весь процесс создания и реализации модели управляющей системы на ЦВМ можно разбить на следующие этапы:

- 1) построение формализованной схемы моделируемого процесса и математической модели;
- 2) построение моделирующего алгоритма;
- 3) перевод описания моделирующего алгоритма на машинный язык и реализация моделирующей программы на ЦВМ;
- 4) анализ результатов, корректировка и оптимизация модели.

Эффективность выполнения этих этапов существенно повышается при наличии некоторого алгоритмического языка и соответствующей системы автоматизации программирования.

В работе рассматриваются язык и система программирования, ориентированные на реализацию так называемых временных (динамических) моделей сложных управляющих систем. Временными будем называть модели, в которых основное внимание уделяется временным характеристикам процессов, а не их содержательной имитации. Например, временная модель ЦВМ может не выполнять арифметических команд, отображая только логические условия, влияющие на продолжительность

протекания процессов обработки команд в соответствующих устройствах системы и на время выполнения их отдельных этапов.

Рассматриваемая ниже моделирующая система МС-1 является вариантом системы МС-0, созданной Т. П. Вьюшковой и Г. М. Кольнером в 1962 г. на базе известного языка GPSS и модернизированной при участии А. К. Полякова, Ф. Роска и авторов статьи в 1966 г.

Разработчики языка МС при его создании исходили из следующих положений.

1) Как и в GPSS [1], в язык МС не включены списковые структуры и операторы над ними.

2) Так как язык в основном был рассчитан на временное моделирование, его возможности в области описания вычислительных и информационно-логических алгоритмов ограничены.

3) Структура и оформление языка ориентированы на то, что переход от алфавитно-цифровой символики, удобной для восприятия человеком, на машинный язык, воспринимаемый интерпретирующей системой, осуществляется вручную. Это сказывается в том, что описание моделируемого процесса оформляется в виде блок-диаграммы, в языке используется греческий алфавит, состав операторов является, по сути дела, жестким набором стандартных функций, для каждой из которых при переходе к машинному языку интерпретирующей системы УПМ-1, разработанной для ЦВМ М-20, необходимо указать адрес соответствующей программы и адреса аргументов.

4) Наличие системы автоматизации программирования интерпретирующего типа обеспечило возможность внесения указаний о сборе статистики не непосредственно в описание модели, а в специальный раздел «указания о сборе статистики», что позволяет оператору изменить режим сбора статистики в процессе моделирования.

Хотя по своим возможностям язык МС существенно уступает таким языкам как SOL, Simscript, Simula, СЛЭНГ [2-4], простота системы автоматизации программирования в ряде случаев и более полное использование возможностей системы команд моделирующей ЦВМ обусловливают его применение в настоящее время. Более полное использование возможностей системы команд обеспечивается тем, что имеется возможность включения в состав операторов моделирующего варианта языка произвольной группы команд и, в частности, команд, изменяющих не только значения аргументов других операторов, но и сами операторы (программа изменяет саму себя).

В ходе модернизации языка в состав операторов языка включена стандартная функция оператора «параллельно», в систему автоматизации программирования введены средства проверки синтаксиса и семантики описания модели в динамике, созданы более мощные отладочные программы, что позволило повысить скорость моделирования приблизительно в два раза и существенно упростить процесс отладки моделей.

1. ОПИСАНИЕ ЯЗЫКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

При составлении модели моделируемый процесс разбивается на элементарные действия. Выполнение каждого элементарного действия в модели соответствует некоторому независимому шагу ее работы. Условие независимости шага означает, что после начала действия выполнение шага не может быть простоянено никакими другими процессами, происходящими в системе.

Работа исследуемой системы описывается с помощью блок-диаграммы. Каждому шагу работы модели соответствует один блок блок-схемы модели. Шаг выбирается из условий, что всякое элементарное действие в системе связано однозначно с отдельной компонентой системы.

Компонентой будем называть функциональные элементы, узлы, регистры, устройства моделируемой системы в зависимости от уровня ее детализации и от точности отображения моделью алгоритма решаемой задачи. Состояние компоненты в системе отображается ее индикатором.

При динамическом моделировании нет необходимости подробно рассматривать выполнение каждого процесса, достаточно учитывать лишь логику работы системы и время выполнения отдельных операций. Поэтому в большинстве случаев необходимо различать два состояния компонент: свободное, определяемое значением индикатора 0, и занятое (значение индикатора равно 1).

Некоторые компоненты могут иметь более чем два состояния (счетчики, регистры), в этом случае количество состояний индикаторов соответствует числу состояний компонент.

Индикаторы могут отображать как реальные компоненты, так и фiktивные, необходимые для организации модели. Весь набор индикаторов определяет взаимооднозначное соответствие множества состояний системы и модели. Результатом выполнения элементарного действия является изменение состояния компоненты, что в блоке отображается выполнением некоторой операции над соответствующим индикатором.

Каждому блоку блок-схемы модели может быть сопоставлена группа операторов типа функций ϕ, T, F , определяющих логические условия, которые должны проверяться перед началом выполнения шага, характеризующих время выполнения отдельных шагов или осуществляющих выбор пути дальнейшего выполнения процесса.

Совокупность индикаторов и блоков, объединенных в параллельно-последовательные цепи с учетом логических схем выполнения отдельных процессов, образует модель системы. Выполнение процесса в системе отображается перемещением по блок-схеме некоторого фiktивного элемента, характеризующего этот процесс, которое сопровождается проверкой условий, разрешающих или запрещающих вход в блок, и выполнением действий, указанных в блоке.

Определение 1. Элементом называется метка, характеризующая состояние процесса в модели системы с помощью шести переменных, которые определяют динамику (t), пространственную локализацию (N_{6a}) моделируемого процесса и некоторые другие свойства p_1, p_2, p_3, p_4 этого процесса; N_{6a} — номер блока, в котором находится элемент в текущий момент времени моделирования; t — время перемещения элемента в следующий блок модели; p_1 — параметр, указывающий очередьность выполнения процесса в реальной системе; p_4 — номер элемента, p_2 и p_3 — некоторые свойства, зависящие от конкретной задачи.

Элемент как информационная метка может интерпретироваться в зависимости от степени детализации моделируемой системы и от степени детализации информационных потоков, обслуживаемых компонентами системы. Элементу в реальной схеме могут соответствовать команды программы, группы команд, операнды и т. д.

Как уже указывалось, язык МС оформлен в виде языка блок-диаграмм. Совокупность операторов, отображающих отдельный шаг моделируемого процесса, описывается в виде блока. В состав блока может входить несколько операторов-функций и один вычислительный оператор.

Входной язык предусматривает использование специальных индикаторов для обозначения операторов-функций. Форма (язык) записи вычислительных операторов не определена. Ниже приводится описание операторов и блоков языка моделирования.

Определение 2.

$\langle \text{оператор} \rangle := \langle \text{функция} \rangle | \langle \text{простой сператор} \rangle | \langle \text{сложный оператор} \rangle$

$\langle \text{функция} \rangle := \langle \text{функция входа } \varphi \rangle | \langle \text{функция задержки } T \rangle | \langle \text{функция распределения } F \rangle$.

Функция входа φ определяет состояние занятости блока модели, а также другие логические условия, разрешающие или запрещающие перемещение элемента в блоке. Условие $\varphi = 0$ соответствует свободному входу в блок, условие $\varphi = 1$ указывает на то, что элемент должен задержаться (блокироваться) перед данным блоком.

В программе возможно использование следующих типов функций входа: $\varphi_1(x) = x$, где x — индикатор занятости компоненты:

$$\varphi_3(x, p_i) = \begin{cases} 0 & (\text{если } x \neq p_i) \\ 1 & (\text{если } x = p_i) \end{cases}$$

где p_i — значение i -го параметра элемента;

$$\varphi_2(x) = \overline{\varphi_1(x)},$$

$$\varphi_4(x, p_i) = \overline{\varphi_3(x, p_i)},$$

$$\varphi_5(x, t_0 - t_1) = \begin{cases} 0 & (\text{если } t_1 - t_0 \geq x) \\ 1 & (\text{если } t_1 - t_0 < x) \end{cases}$$

$$\varphi_6(x, t_1 - t_0) = \overline{\varphi_5(x, t_1 - t_0)},$$

где $t_1 - t_0$ — время перемещения элемента в блок;

$$\varphi_7(x, C) = \begin{cases} 0 & (\text{если } x \neq C) \\ 1 & (\text{если } x = C) \end{cases}$$

$$\varphi_8(x, C) = \overline{\varphi_7(x, C)},$$

где C — const.

Функция задержки T определяет время Δt задержки элемента в блоке, которое может быть постоянно ($\Delta t = \text{const}$), зависеть от некоторого параметра p , ($\Delta t = T(p)$), индикатора x ($\Delta t = T(x)$) или задаваться по некоторому закону распределения величины $\xi_{\text{сл}}$ ($\Delta t = T(\xi_{\text{сл}})$).

Функция распределения F задает условия подключения одного из возможных блоков (путей в блок-схеме) в зависимости от состояния системы или процесса. Возможны следующие типы функций распределения:

$$n = F(p_i),$$

$$n = F(x),$$

$$n = F(\xi_{\text{сл}}),$$

где n — номер пути следования элемента.

Для удобства реализации параллельных процессов, выполняющихся одновременно в различных компонентах системы, введена модифицированная функция распределения, названная функцией параллельности $F_{\text{пар}}$, которая служит для размножения элементов в определенный момент времени в том участке модели, который соответствует разветвлению некоторого процесса на несколько параллельных процессов в моделируемой системе.

Простой и сложный сператоры, которые являются разновидностями арифметического, служат для изменения состояния индикаторов и для изменения значений параметров элементов модели.

Простые операторы задаются из условия, что программно каждый из них реализуется одной командой моделирующей вычислительной машины (в нашем случае ЦВМ М-20).

Сложный оператор представляет собой набор команд—подпрограмму, обращение к которой как и выход из нее может осуществляться только через начальную и конечную команды.

Примеры. Простые операторы:

$x := 1$ } — занятие и освобождение компоненты системы, соответствует в модели принятию индикатором состояний 1 и 0;
 $x := 0$ }
 $x := p_i$ — присвоение значения параметра элемента индикатору x ;
 $p_i := x$ — присвоение значения индикатора параметру.

Сложные операторы:

$p_i := f(\xi_{ci})$ — присвоение параметру p_i значения функции случайного аргумента ξ_{ci} ;

$x := f(t)$ — присвоение индикатору значения функции, зависящего от времени t ;

$x := (x + 1) \bmod m$ — изменения значения счетчика.

Определение 3.

\langle блок $\rangle := \langle$ начальный блок НБ' $\rangle | \langle$ операционный блок ОБ $\rangle | \langle$ распределительный блок РБ $\rangle | \langle$ блок параллельности БП $\rangle | \langle$ конечный блок КБ \rangle .

Каждый из указанных блоков выполняет определенные действия над элементами в соответствии с составом операторов, включенных в этот блок.

НБ выполняет роль генератора элементов в модели: новый элемент \mathcal{E}_{i+1} формируется в НБ всякий раз, как только из него удаляется предыдущий \mathcal{E}_i , продвигаясь в следующий за НБ блок-последователь. Момент выхода t_i элемента из НБ соответствует началу некоторого процесса в системе, а элементу \mathcal{E}_{i+1} приписывается время t_{i+1} .

КБ служит для удаления элемента из модели, имитируя окончание некоторого реального процесса.

ОБ в общем случае может включать функцию входа, один сложный и произвольное множество простых операторов и функцию задержки. ОБ имитирует действия, происходящие в системе. В каждом конкретном случае некоторые из перечисленных операторов могут быть опущены.

Распределительный блок и блок параллельности включают в себя по одному оператору (распределения и параллельности).

П р и м е ч а н и е. При составлении блок-схемы модели необходимо учитывать, что: 1) в одном блоке индикатор определенной компоненты может употребляться лишь один раз; 2) каждый из указанных операторов, кроме простых, может использоваться в одном блоке один раз, а количество простых операторов в блоке не ограничивается; 3) блоки ОБ, РБ и КБ могут иметь произвольное количество входов, НБ и ОБ имеют по одному выходу, НБ не имеет входов, а КБ не имеет выходов, РБ может иметь произвольное количество выходов.

2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ УМП-1

Универсальная моделирующая программа УМП-1 осуществляет продвижение элементов по блокам модели. Один цикл работы программы УМП-1 соответствует шагу моделирования, выполняющему продвижение одного элемента в одном блоке модели.

Перемещение элемента из блока в блок совершаются по следующим правилам.

В начальном блоке создается элемент и записывается в таблицу

элементов ТЭ. Ему приписывается минимальное время t_{\min} , максимальный приоритет $p_{1 \max}$ и номер следующего за НБ блока, в который должен поступить элемент.

Выбор элемента из ТЭ в рабочие ячейки программы осуществляется по t_{\min} , а в случае равенства времен по $p_{1 \max}$. При условии равенства времен и приоритетов выбирается первый по списку элемент в ТЭ. Выбранный по такому принципу элемент соответствует ближайшему событию в моделируемой системе. Для вхождения элемента в блок (ОБ) проверяется условие $\varphi = 1$; при $\varphi = 1$ элемент блокируется, т. е. ему приписывается максимальное время, а при $\varphi = 0$ он переписывается в рабочие ячейки и меняет состояние своих характеристик и индикаторов в соответствии с операторами данного блока. УМП-1 состоит из двух частей (рис. 1): программы имитации процессов переработки информации; программы сбора и обработки статистических данных.

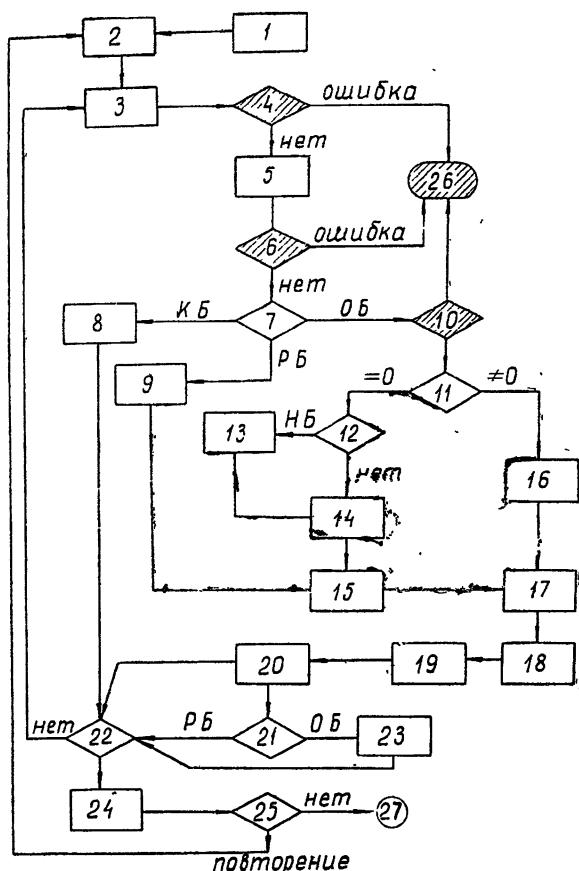


Рис. 1.

Программа имитации реализует моделирующий алгоритм и включает четыре ветви подпрограммы в соответствии с основными блоками языка описания модели:

- ветвь начального блока;
- ветвь операционного блока;
- ветвь распределительного блока;
- ветвь конечного блока.

Ветвь РБ состоит из пяти подпрограмм, соответствующих различ-

ным функциям, входящим в РБ. Выход на одну из них осуществляется по заданному условному числу (признаку F), определяющему тип функции.

Ветви ОБ и НБ состоят из наборов подпрограмм, выполняющих заданные операторы, входящие в состав блоков. Действие ОБ интерпретируется следующим образом. Сначала проводится анализ и выполнение функции входа. По значению этой функции производится блокировка элемента или перемещение его в блок. Дальше выполняется функция сложного оператора, а затем все простые операторы. В последнюю очередь выполняется функция времени и производится выполнение приращения времени на данном шаге. В данной ветви ОБ выполняется и подпрограмма ветви НБ. После определения значения функции входа, если оно разрешающее, проводится проверка местоположения элемента. Если элемент вошел в ОБ из НБ, то в данном НБ создается новый элемент. После этого продолжается выполнение остальных функций, как было описано выше.

Ветвь КБ подпрограмм производит удаление элемента из списка элементов и проводит перепись последнего элемента в списке на место удаленного, т. е. уплотнение записи элементов в памяти моделирующей ЦВМ.

Кроме описанных выше ветвей подпрограмм, программа имитации моделирования включает также следующие группы подпрограмм:

1) Подпрограмма начала моделирования:

создание начальных элементов в НБ;

задание текущих адресов в таблицах сбора статистики;

обращения к магнитным барабанам МБ для временного хранения модели и программы.

2) Подпрограммы проверки конца моделирования:

проверка на окончание (останов на каждом шаге, по состоянию индикатора или по времени);

двойной просчет;

проверка числа повторений.

3) Подпрограмма сбора и обработки статистики собирает данные о работе модели, обрабатывает их и выводит на печать основные характеристики отдельных узлов и моделируемой системы в целом.

Подпрограмма сбора статистики на каждом шаге моделирования отмечает 1) последовательные изменения состояний индикаторов и моменты времени, в которые происходят эти изменения (статистика X); 2) пути прохождения каждого из элементов по блокам модели и время выполнения каждого шага (статистика P); 3) изменения, происходящие в отдельных блоках в процессе моделирования (статистика N), N_1 — количество заблокированных элементов перед определенным блоком; N_2 — количество элементов, прошедших через данный блок; N_3 — последовательность элементов, прошедших через блок; N_4 — темп прохождения элементов; N_5 — последовательность элементов, заблокированных перед данным блоком.

Подпрограмма обработки статистики и печати результатов позволяет получать также характеристики:

загрузка устройств моделируемой системы;

очереди к отдельным устройствам (блокировка элементов в соответствующих блоках модели);

время перемещения элементов между двумя точками модели (от одного блока модели до другого).

С целью удобства эксплуатации программы и возможности активного вмешательства в ее работу в процессе моделирования предусмотрено управление режимами работы УМП-1 с пульта машины.

Для выявления динамических и статистических ошибок в УМП-1 введены подпрограммы контроля, проверяющие следующие условия.

- 1) Не пуста ли таблица элементов?
- 2) Не переполнена ли таблица элементов?
- 3) Не заблокированы ли все элементы?
- 4) Правильно ли задано начало блока?

Включается, кроме перечисленных выше, еще два вида контроля:

- 5) Контроль правильного задания подпрограммы функции.
- 6) Контроль правильной записи функций блока в ячейках моделирующей ЦВМ.

Введенные подпрограммы позволяют автоматически в процессе работы программы определять тип ошибки, допущенной при составлении модели или возникающей в процессе моделирования. Локализация ошибки приводит также к существенному сокращению времени отладки вновь составляемых моделей исследуемых систем.

Перед моделированием вся информация (указания о сборе статистики и ее обработке, о размерах таблиц и их печати и другие данные, определяющие работу программы) задается отдельным массивом, называемым титульным листом, и вводится в память ЦВМ.

Описание блок-схемы программы УМП-1

- 1) Создание элементов в начальных блоках модели.
- 2) Запись текущих адресов в таблицы.
- 3) Задание режима работы программы (управление с пульта).
- 4) Проверка состояния ТЭ, т. е. выявление ошибок 1 и 2 рода.
- 5) Нахождение элемента с $t_{\min}, p_{1 \max}$.
- 6) Выявление ошибок 3 типа.
- 7) Анализ типа блока.
- 8) Удаление элемента из ТЭ, уплотнение записи в ТЭ.
- 9) Выполнение функции распределительного блока.
- 10) Проверка записи операционного блока, т. е. выявление ошибок 4, 5, 6 типа.
- 11) Анализ функции входа, т. е. проверка наличия и состояния функции ϕ .
- 12) Определение типа предыдущего блока.
- 13) Создание нового элемента в НБ.
- 14) Выполнение функций и операторов операционного блока.
- 15) Продвижение элемента в следующий блок.
- 16) Блокировка элемента.
- 17) Перепись элемента из рабочих ячеек в ТЭ.
- 18) Подпрограмма печати на каждом шаге работы программы.
- 19) Сбор статистики.
- 20) Проверка условия блокировки элемента.
- 21) Определение типа блока (ОБ или РБ).
- 22) Проверка условия окончания моделирования.
- 23) Подпрограмма разблокировки.
- 24) Обработка и печать статистики.
- 25) Проверка условия повторения эксперимента.
- 26) Подпрограмма печати типа ошибок.
- 27) Окончание процесса моделирования,

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Gordon, Proc. EICC, 87 (1961).
2. D. E. Knuth, J. L. McNeley, IEEE Trans. Electron. Comp., EC-13, № 4, 401 (1964).
3. O. J. Dane, K. Nygaard, Communication ACM, 9, № 9, (1966),
4. Г. Марковиц, Б. Хауснер, Г. Кэрр, СИМСКРИПТ — алгоритмический язык для моделирования, М., 1966.
5. Л. А. Калиниченко сб. Теория автоматов, вып. 1, 1967.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
26 октября 1967 г.

ON THE MATHEMATICAL SIMULATION OF COMPLEX CONTROL SYSTEM

A. N. Doroshenko, A. G. Shigin

A simulation system MC-1 is considered: the structure of language and the bases of interpretive program UMP-I organisation oriented on temporal (dynamic) simulation of discrete systems for information processing. The language of MC-1 is organized in the form of flow-chart language. Each block may possess a choice of statement-functions realizing the state change of components of simulation system during the input of objects, called elements, into block. The language of MC-1 contains the statement of parallelism, language capabilities for information processing description are widened, some new determined functions are added. Some syntax and semantics control media are presented in the interpretive program. The translation of model description from MC-1 language into machine language that the interpretive program deals with is illustrated by examples. The structure and principles of UMP-I program operation are described. The particularities of MC-1 system are shown on dynamic model of BESM-4 computer.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 531.391.3/4 + 621.396.6.078.6

**ЧАСТОТНО-ФАЗОВАЯ АВТОПОДСТРОЙКА ЧАСТОТЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ
ФИЛЬТРОМ В ФАЗОВОЙ ЦЕПИ УПРАВЛЕНИЯ**

В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев

В радиотехнике для синхронизации генераторов широко применяются системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП). Противоречие между требованиями эффективной фильтрации помех и широкой полосы захвата, имеющее место в системах ФАП, можно отчасти устранить соответствующим выбором типа и параметров фильтра, а также системы автоподстройки в целом. Так для этой цели служит введение в тракт ФАП нелинейного фильтра взамен линейного [1-4], а также применение в обычной системе ФАП дополнительного частотного кольца [5-8], т. е. переход к совместной системе частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП). Изучение таких систем приводит к исследованию сложных нелинейных дифференциальных уравнений и проведено лишь для некоторых частных случаев. В настоящем сообщении рассматривается динамика совместной системы ЧФАП в том случае, когда в фазовой цепи управления применяется нелинейный фильтр, а постоянная времени фильтра в частотной цепи мала.

Блок-схема простейшей системы ЧФАП представлена на рис. 1. На выходе фазового детектора ФД вырабатывается управляющее напряжение, зависящее от разности

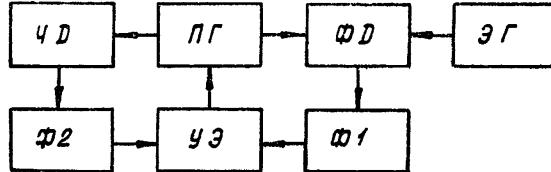


Рис. 1.

фаз φ колебаний подстраиваемого ПГ и эталонного ЭГ генераторов. На выходе частотного детектора ЧД вырабатывается управляющее напряжение, зависящее от расстройки текущей частоты ω ПГ относительно центральной частоты ЧД. Эти напряжения через фильтры Ф1 и Ф2 поступают на управляющий элемент. Будем рассматривать однозвездный RC -фильтр Ф1, состоящий из линейного сопротивления R_1 и нелинейной емкости $C_1(e_1)$, и однозвездный RC -фильтр Ф2, состоящий из линейного сопротивления R_2 и линейной емкости C_2 . Зависимость величины емкости $C_1(e_1)$ от напряжения e_1 (рис. 2) аналогично [3] представим в виде

$$C_1(e_1) = C_{10} G(e_1). \quad (1)$$

Здесь C_{10} — максимальное значение величины емкости, $G(e_1)$ — функция, описывающая вид нелинейной зависимости емкости от напряжения, нормированная так, что ее максимальное значение равно единице. Функцию $G(e_1)$ будем называть характеристикой нелинейной емкости.

Введем обозначения: $\delta\omega$ — начальная расстройка ПГ и ЭГ, $F(\varphi)$ и $\Phi(\varphi)$ — характеристики ФД и ЧД, нормированные так, что их максимальные значения равны единице, e_1 и e_2 — напряжения на емкостях фильтров в фазовой и частотной цепях управления, E_1 и E_2 — максимальные значения напряжений с выхода ФД и ЧД соответственно, Ω_1 и Ω_2 — максимальные расстройки, вырабатываемые в фазовом и частотном кольцах.

Учитывая принятые в [5] упрощающие предположения и вводя безразмерное время τ , напряжения на емкостях фильтров в фазовой и частотной цепях управления v и

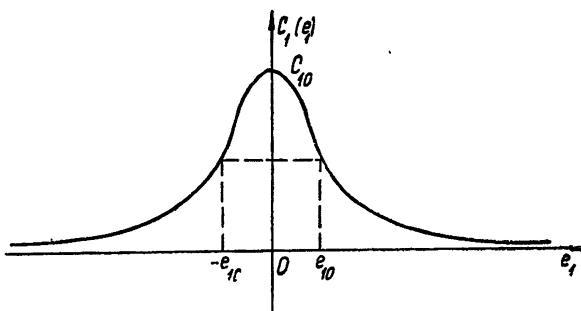


Рис. 2.

и соответственно и параметры γ , b , λ , ϵ , запишем дифференциальное уравнение рассматриваемой системы в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \gamma - v - bu, \\ G(v) \dot{v} &= \lambda [F(\varphi) - v], \\ \epsilon \lambda^{-1} \dot{u} &= \Phi(\varphi) - u,\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\tau &= t \sqrt{\frac{\Omega_1 R_1^{-1} C_{10}^{-1}}{1}}, \quad v = e_1 E_1^{-1}, \quad u = e_2 E_2^{-1}, \quad \gamma = \delta \omega \Omega_1^{-1}, \\ b &= \Omega_2 \Omega_1^{-1}, \quad \lambda = (\Omega_1 R_1 C_{10})^{-1/2}, \quad \epsilon = R_2 C_2 R_1^{-1} C_{10}^{-1}.\end{aligned}$$

Точками обозначено дифференцирование по τ .

Характеристика фазового детектора полагается синусоидальной $F(\varphi) = \sin \varphi$. Характеристика частотного детектора $\Phi(\varphi)$ является нелинейной функцией [8]. Считаем, что возрастающий участок характеристики $\Phi(\varphi)$ достаточно велик и отклонения частоты не превышают его размеров. На этом участке характеристику ЧД аппроксимируем прямой $\Phi(\varphi) = \beta \varphi^*$. Характеристику нелинейной емкости аппроксимируем функцией вида [4] $G(v, H) = (1 + v^2 H^{-2})^{-1}$. Здесь $H = e_1 \Omega_1^{-1}$ — величина напряжения на нелинейной емкости, представляющая некоторую условную границу участков характеристики емкости, соответствующих большой и малой величине емкости, отнесенная к величине максимального напряжения на выходе ФД. При сделанных предположениях система (2) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \gamma - v - bu = P(\varphi, v, u), \\ \lambda^{-1} \dot{v} &= (\sin \varphi - v)(1 + v^2 H^{-2})^{-1} \equiv Q(\varphi, v, u), \\ \epsilon \lambda^{-1} \dot{u} &= \beta(\gamma - v) - (1 + b\beta)u \equiv R(\varphi, v, u).\end{aligned}\quad (3)$$

Рассматривается случай [6], когда постоянная времени фильтра в частотном кольце мала: $R_2 C_2 \ll \min(R_1 C_{10}, \Omega_1^{-1})$. В этом случае система (3) имеет малый параметр $\epsilon \lambda^{-1} \ll 1$ при одной из производных; ее исследование сводится [9, 10] к изучению быстрых и медленных движений в фазовом пространстве. За фазовое пространство системы (3) в силу периодичности уравнений по φ может быть принята область трехмерного пространства φ, v, u , определяемая неравенствами $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Плоскости $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$ отождествляются.

Система быстрых движений имеет вид

* Влияние нелинейности характеристики ЧД может быть рассмотрено аналогично [9].

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 \equiv \text{const}, \\ v &= v_0 \equiv \text{const}, \\ \dot{u} &= \beta(\gamma - v) - (1 + b\beta). \end{aligned}\quad (4)$$

Здесь дифференцирование происходит по «быстрому» времени. Поверхность медленных движений

$$u = \beta(\gamma - v)(1 + b\beta)^{-1}, \quad (5)$$

точки которой являются состояниями равновесия быстрых движений (4), является устойчивой по отношению к быстрым движениям, так как $R_u(\varphi, v, u) = -(1 + b\beta) < 0$ [9, 10]. На поверхности медленных движений (5) траектории определяются «вырожденной» [9] системой

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= (\gamma - v)(1 + b\beta)^{-1}, \\ \dot{v} &= \lambda(\sin \varphi - v)(1 + v^2 H^{-2}). \end{aligned}\quad (6)$$

Система (6) заменой $v = \gamma - \lambda(1 + b\beta)z$ приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= z, \\ \dot{z} &= (1 + b\beta)^{-1} [\gamma - \lambda(1 + b\beta)z - \sin \varphi] \{1 + H^{-2}[\gamma - \lambda(1 + b\beta)z]^2\}. \end{aligned}\quad (7)$$

Пользуясь однозначностью поверхности медленных движений (5) по координате u и периодичностью правых частей (7) по φ , будем рассматривать систему (7) на цилиндрической фазовой поверхности с образующей, параллельной оси z . Цилиндр рассматривается развернутым на плоскость (φ, z) . Делая в (7) замену

$$\begin{aligned}\tau &= \tilde{z}(1 + b\beta)^{-1/2}, \quad z = \tilde{z}(1 + b\beta)^{-1/2}, \\ \lambda &= \tilde{\lambda}(1 + b\beta)^{-1/2}, \end{aligned}\quad (8)$$

приходим к системе

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{\tilde{z}} &= \tilde{z}, \\ \frac{d\tilde{z}}{d\tau} &= (\gamma - \tilde{\lambda}\tilde{z} - \sin \varphi) [1 + H^{-2}(1 + \tilde{\lambda}\tilde{z})^2]. \end{aligned}\quad (9)$$

Качественное исследование системы (9) проведено в [8]. Установлено, что на плоскости (φ, \tilde{z}) у системы (9) (а следовательно, и на плоскости (φ, z) у системы (7)) при $\gamma < 1$ всегда существуют устойчивое (типа фокус или узел) и неустойчивое (типа седло) состояния равновесия. Для значений параметров $\tilde{\lambda} > \tilde{\lambda}^*(\gamma)$ система (9) не имеет предельных циклов и траектории идут к устойчивому состоянию равновесия. Это соответствует установлению в системе ЧФАП стационарного режима синхронизма.

Для параметров $\tilde{\lambda} < \tilde{\lambda}^*(\gamma)$ на фазовой плоскости существует единственный устойчивый предельный цикл II рода. При этом в системе ЧФАП возможно при некоторых начальных условиях установление стационарного режима биений II рода, т. е. имеет

место выход из синхронизма. Кривая $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^*(\gamma)$, для точек которой на фазовой поверхности существует петля сепаратрисы седла II рода является бифуркационной. Указанный бифуркация сепаратрис является единственной, определяющей полосу захвата системы ЧФАП. В силу сделанной выше замены (8) можно утверждать, что при рассматриваемых положительных значениях параметров b и β справедливо неравенство $\tilde{\lambda} > \lambda$ и, следовательно, полоса захвата в исследуемой системе ЧФАП с нелинейным фильтром больше, чем в системе ФАП с таким же нелинейным фильтром. На рис. 3 дана зависимость полосы захвата от параметра $\Omega_1 R_1 C_{10} \equiv \lambda^{-2}$ при нескольких фик-

сированных значениях H для системы ФАП с нелинейным фильтром [3] (сплошные линии $b\beta = 0$) и системы ЧФАП с нелинейным фильтром (пунктирные линии $b\beta = 2$ сплошные линии $b\beta = 10$). Для сравнения штрихпунктирными линиями даны кривые зависимости полосы захвата для систем ФАП и ЧФАП с линейным RC -фильтром.

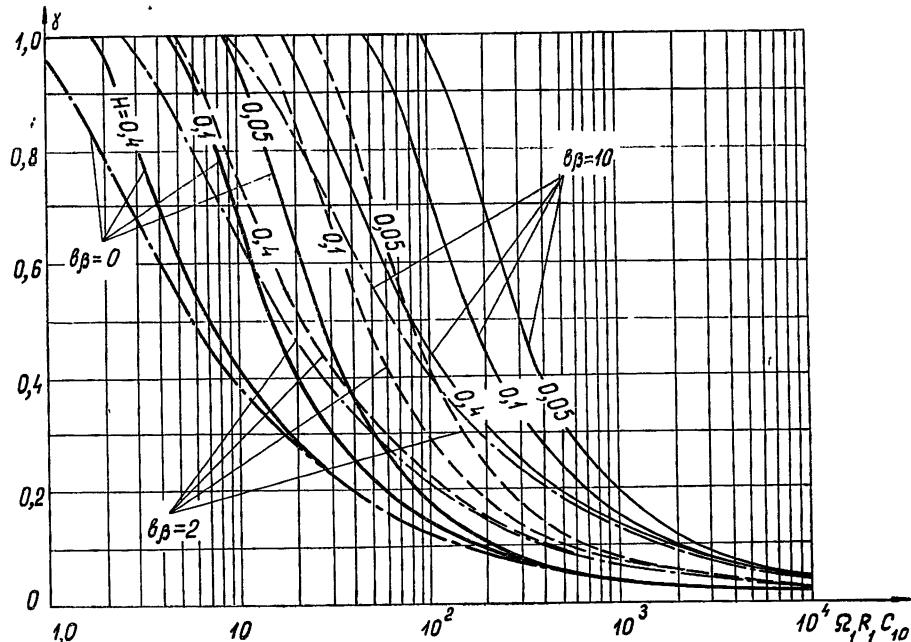


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Капранов, В. А. Иванов, Н. Н. Иванова, Радиотехника и электроника, 5, № 11, 1774 (1960).
2. Ю. В. Ульяновский, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 8, № 1, 96 (1965).
3. В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 407 (1968).
4. М. В. Капранов, Т. И. Наянова, Тезисы докладов на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике, Горький, 42, 1967.
5. М. В. Капранов, Научн. докл. высш. шк. — Радиотехника и электроника, № 2, 162 (1958).
6. Л. Н. Белюстина, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 383 (1968).
7. Л. Н. Белюстина, В. Д. Шалфеев, Тезисы докладов на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике, Горький, 30 (1967).
8. М. Р. Капланов, В. А. Левин, Автоматическая подстройка частоты, Госэнергоиздат, М.—Л., 1962.
9. Л. С. Понtryагин, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 605 (1957).
10. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, изд. второе, переработка и дополнения Н. А. Железцова, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 ноября 1967 г.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМИ, КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

B. N. Белых

Достаточным условием отсутствия периодических решений динамической системы второго порядка с гладкими правыми частями является критерий Бендинсона—Дюлака [1, 2].

В настоящем сообщении рассматривается аналогичное условие для системы с непрерывными, кусочно-гладкими правыми частями. Кроме того, исследуется вопрос об устойчивости предельных циклов, если они существуют.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

определенную в некоторой односвязной области G , разделенной на ряд областей d_j ($j = 1, 2, \dots, N_1$), границы которых состоят из конечного числа простых гладких дуг Γ_k ($k = 1, 2, \dots, N_2$); $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — гладкие в областях d_j , непрерывные и удовлетворяющие условию Липшица на кривых Γ_k функции

Теорема 1. Пусть в области G существует гладкая функция $B(x, y)$, такая, что выражение

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$$

знакопостоянно и одного знака во всех областях d_j . Тогда в области G не существует замкнутых траекторий системы (1).

Доказательство. Предположим противное, что в области G при указанных условиях существует замкнутая траектория L . Так как правые части системы (1) — непрерывные функции, кривая L гладкая. Тогда область, ограниченная кривой L , будет состоять из областей Ω_p ($p = 1, 2, \dots, m$), ограниченных непрерывными контурами γ_p , состоящими как из отрезков кривых Γ_k , так и из отрезков кривой L .

Рассмотрим выражение

$$J = \sum_{p=1}^m \oint_{\gamma_p} \left[\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \right] dx dy.$$

Так как подынтегральное выражение знакопостоянно и одного знака во всех d_j , следовательно, и во всех Ω_p , то $J \neq 0$. С другой стороны, по формуле Грина

$$J = \sum_{p=1}^m \oint_{\gamma_p} (-BQ dx + BP dy). \quad (2)$$

По каждому из отрезков кривых Γ_k интегрирование ведется дважды и при этом в разных направлениях. Поэтому ввиду непрерывности правых частей на кривых Γ_k выражение (2) примет вид

$$J = \sum_{q=1}^r \int_{\gamma_q} (-BQ dx + BP dy),$$

где γ_q — отрезки траектории L .

Так как криволинейный интеграл от выражения $-BQ dx + BP dy$, взятый по любому отрезку траектории L системы (1), равен нулю [2], то J равна нулю, что противоречит полученному ранее условию $J \neq 0$. Следовательно, в области G система (1) не имеет замкнутых траекторий*.

Рассуждениями, полностью аналогичными проведенными в [1, 2], нетрудно показать, что в случае, когда G — двусвязная область, теорема 1 устанавливает, что система (1) в области G не имеет предельных циклов первого рода и не может иметь более одного предельного цикла второго рода.

* В случае замкнутой кривой, представляющей собой «петлю», доказательство теоремы 1 аналогично доказательству, приведенному в [2].

Предположим, что система (1) имеет периодическое решение L и

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

— его параметрические уравнения*. Исследуем устойчивость этого решения.

Пусть дуги Γ_k имеют n общих точек с траекторией L и являются для нее кривыми без контакта. Пусть $\tilde{\Gamma}_i$ — отрезки кривых Γ_k в окрестности точек пересечения и

$$x = g_i(u_i), \quad y = h_i(u_i)$$

— их параметрические уравнения, причем функции $g_i(u_i)$ и $h_i(u_i)$ имеют непрерывные производные до второго порядка.

Точкам пересечения траектории L с дугами $\tilde{\Gamma}_i$ соответствуют значения $t = t$
 $u = u_{i0}$.

Пусть

$$u_{i+1} = f_{i+1}(u_i) \tag{3}$$

— функции соответствия между кривыми $\tilde{\Gamma}_i$ и $\tilde{\Gamma}_{i+1}$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Если

$$h = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))] dt < 0 (> 0),$$

предельный цикл системы (1) L устойчив (неустойчив).

Доказательство. Осуществим точечное преобразование кривой $\tilde{\Gamma}_1$ в себя в окрестности траектории L . Принимая во внимание равенства (3), запишем функцию последовательного этого точечного преобразования.

$$\bar{u}_1 = f_1(f_n(f_{n-1}(\dots f_2(u_1)) \dots)). \tag{4}$$

Устойчивость предельного цикла L определяет производная [1]

$$\frac{d\bar{u}_1}{du_1} = \frac{df_1}{du_n} \frac{df_n}{du_{n-1}} \dots \frac{df_2}{du_1}.$$

Но производные от функций соответствия (см. [3], стр. 338) равны

$$\frac{df_{i+1}}{du_i}(u_{i0}) = \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} \exp \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))] dt \right\},$$

где

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(t_i) & \dot{\psi}(t_i) \\ g'_i(u_{i0}) & h'_i(u_{i0}) \end{vmatrix}.$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_1}{du_1} &= \frac{\Delta_1}{\Delta_n} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \dots \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \times \\ &\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))] dt \right\}, \end{aligned}$$

где $t_{n+1} = t_1 + T$.

*В данном случае периодические с периодом T функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ принадлежат классу C_1 .

Ввиду непрерывности правых частей системы (1) на кривых $\tilde{\Gamma}_i$ коэффициент при экспоненте равен единице, поэтому замкнутая траектория L устойчива (неустойчива), если

$$\exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))] dt \right\} < 1 \quad (> 1).$$

Таким образом, если

$$h = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))] dt < 0 \quad (> 0),$$

пределный цикл L устойчив (неустойчив).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. А. А. Андронов, Е. А. Леонович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем, изд. Наука, М., 1966.
3. А. А. Андронов, Е. А. Леонович, Матем. сб., 48, (90), 335 (1959).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 января 1968 г.

УДК 62 — 50

О КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЯХ

Л. С. Раковицк

Пусть динамическая система описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

в котором A и B — непрерывные матрицы размерностей $n \times n$ и $m \times n$ соответственно; $x = x(t)$ — n -мерный вектор, описывающий состояние системы, $u = u(t)$ — m -мерный управляющий вектор

Динамическая система называется вполне управляемой в интервале $[0, T]$, если для любого начального положения (при $t = 0$) найдется управление $u(t)$, под воздействием которого система в момент $t = T$ окажется в начале координат

Условия управляемости при допущении непрерывных или измеримых управлений изучались рядом авторов [1]. В настоящей заметке изучаются условия, при которых система вполне управляема с помощью кусочно-постоянных управлений. Устанавливается, что если система вполне управляема с помощью непрерывных или измеримых управлений, то она вполне управляема и с помощью кусочно-постоянных управлений. В [2] установлено, что множество измеримых управлений, подчиненных условию $|u_i(t)| \ll 1$, ($i = 1, 2, m, n$), эквивалентно, с точки зрения управляемости системы, множеству измеримых же управлений, удовлетворяющих условию $|u_i(t)| = 1$.

1. Полная управляемость системы эквивалента $[1, 3]$ тому, что уравнение

$$\int_0^T a(t) u(t) dt = C, \quad (2)$$

$$a(t) = \Phi^{-1}(t) B(t),$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (1), имеет решение в допускаемом классе m -мерных вектор-функций при произвольном выборе вектора C .

Условие управляемости (УУ). Для того, чтобы уравнение (2) при любом векторе C имело кусочно-постоянное решение, необходимо и достаточно, чтобы нашлась по крайней мере одна система t_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, k_i$), $\sum_{i=1}^m k_i = n$

значений аргумента t из промежутка $[0, T]$, для которой вектор-столбцы $a_1(t_{11}), a_1(t_{12}), \dots, a_1(t_{1k_1}), \dots, a_m(t_{m1}), \dots, a_m(t_{mk_m})$ матрицы $a(t)$ линейно независимы.

Для доказательства необходимости условия допустим, что оно не выполнено. В этом случае максимальное число линейно независимых векторов указанного выше вида меньше n . Пусть t_{ik} обозначают соответствующие значения аргумента. При на-шем допущении $\sum_k k_i < n$.

Для любого t из $[0, T]$ и любого j ($j=1, 2, \dots, m$) имеем разложение

$$a_j(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{k_i} \lambda_{jik}(t) a_i(t_{ik}), \quad (3)$$

в котором $\lambda_{jik}(t)$ — некоторые непрерывные функции. Уравнение (2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{k_i} \left[\int_0^T \sum_{j=1}^m \lambda_{jik}(t) u_j(t) dt \right] a_i(t_{ik}) = C. \quad (4)$$

Поскольку векторов $a_i(t_{ik})$ меньше n , уравнение (4), а вместе с ним и (2), не могут быть разрешимы при любом векторе C . Необходимость условия установлена.

Пусть теперь УУ выполнено. В силу этого отличен от нуля определитель

$$D(t_{11}, \dots, t_{mk_m}) = \det \| a_1(t_{11}) \ a_1(t_{12}) \ \dots \ a_m(t_{mk_m}) \|.$$

Учитывая непрерывность векторов $a_j(t)$, можем, не нарушая общности, считать все числа t_{ik} различными.

Пусть отличные от нуля числа Δ_{ik} настолько малы, что $0 < t_{ik} + \Delta_{ik} < T$ и промежутки $(t_{ik}, t_{ik} + \Delta_{ik})$ не пересекаются. Рассмотрим кусочно-постоянное уравнение

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{ik} = \text{const} & (\text{если } t_{ik} < t < t_{ik} + \Delta_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, k_i) \\ 0 & (\text{для остальных случаев}) \end{cases}.$$

Если вектор $u(t)$ является решением уравнения (2), то для определения чисел u_{ik} получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{k_i} \left[\int_{t_{ik}}^{t_{ik} + \Delta_{ik}} a_i(t) dt \right] u_{ik} = C. \quad (5)$$

При достаточно малых Δ_{ik} определитель системы (5) отличен от нуля. Действительно, в противном случае

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\Delta_{ik} \rightarrow 0} (\Delta_{11} \dots \Delta_{mk_m})^{-1} \det \left| \left| \int_{t_{11}}^{t_{11} + \Delta_{11}} a_1(t) dt, \dots, \int_{t_{mk_m}}^{t_{mk_m} + \Delta_{mk_m}} a_m(t) dt \right| \right| = \\ &= \det \| a_1(t_{11}), a_1(t_{12}), \dots, a_1(t_{mk_m}) \| \neq 0. \end{aligned}$$

Противоречивость последнего соотношения доказывает достаточность условия управляемости.

Из сказанного выше вытекают следующие замечания.

1) Если уравнение (2) имеет решение (не обязательно кусочно-постоянное) при любой правой части, то УУ имеет место

2) Для того, чтобы уравнение (2) имело кусочно-постоянное решение при любой правой части C , необходимо и достаточно, чтобы вектор C был линейной комбинацией значений вектор-столбцов матрицы $a(t)$.

Покажем, в добавление к замечанию 1), что если система вполне управляема с помощью кусочно-непрерывных управлений, то она вполне управляема и с помощью непрерывных управлений. С этой целью рассмотрим область значений R_S оператора

$$S u = \int_0^T a(t) u(t) dt$$

на множестве всех непрерывных функций.

Пусть C_1, C_2, \dots, C_k ($k < n$) — максимальная ортонормированная система, лежащая в R_S . Легко видеть, что R_S совпадает с подпространством, порожденным векторами C_i , и что размерность R_S равна k .

Пусть система вполне управляема с помощью кусочно-постоянных управлений, но не является вполне управляемой с помощью непрерывных управлений. В этом случае $k < n$. Поэтому существует ненулевой вектор C_0 , ортогональный подпространству R_S , для которого уравнение (2) не разрешимо в непрерывных вектор-функциях.

Условие ортогональности вектора C_0 к R_S дает

$$\left(\int_0^T a(t) u(t) dt, C_0 \right) = 0$$

для любой непрерывной вектор-функции $u(t)$ ((\cdot, \cdot) — скалярное произведение).

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_0^T (u(t), a^*(t) C_0) dt = 0,$$

где a^* — матрица, сопряженная матрице a . Поскольку вектор $u(t)$ произволен, отсюда следует, что для всех t из $[0, T]$ $a^*(t) C_0 = 0$, т. е. что строки матрицы $a(t)$ линейно зависимы в промежутке $[0, T]$. Последнее обстоятельство показывает, что при любых t определитель $D(t_{1,1}, \dots, t_{m,k_m})$ равен нулю. В силу УУ система (1) не может быть вполне управляемой с помощью кусочно-постоянных управлений.

Теорема. Если система вполне управляема с помощью непрерывных или измеримых управлений, то она вполне управляема и с помощью кусочно-постоянных управлений и наоборот.

Из доказанной теоремы следует, что известные признаки управляемости [1, 4], установленные для непрерывных (измеримых) управлений, являются также признаками полной управляемости системы с помощью кусочно-постоянных управлений. Заметим, что с помощью несложных рассуждений эти признаки могут быть непосредственно выведены из установленного выше условия управляемости.

Доказанные в работе условие управляемости и теорема остаются в силе для любых систем, для которых связь между входным и выходным сигналами выражается формулой

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Athans, Optimal control, N.—Y., 1966.
2. J. P. La Salle, Ann. Mathem. studies, № 45, 1 (1960).
3. Р. Е. Калман, Тр. 1 Конгресса ИФАК, изд. АН СССР, М., 1961, стр. 521.
4. A. R. Stubberud, IEEE Trans. Appl. Industry, 83, 75, 411 (1964).

Ленинградский инженерно-экономический институт

Поступила в редакцию
6 декабря 1967 г.