

## СОДЕРЖАНИЕ

Гольнев В. Я., Парийский Ю. Н., Соболева Н. С. Наблюдения поляризованного радиоизлучения Юпитера на волне 6,6 см с помощью Большого Пулковского радиотелескопа . . . . .	1455
Разин В. А., Хрулев В. В., Федоров В. Т., Волохов С. А., Мельников А. А., Пасека А. М., Пупышева Л. В. Наблюдения поляризации космического радиоизлучения вблизи антицентра Галактики на волнах 70, 60 и 40 см . . . . .	1461
Хрулев В. В. Дополнительные замечания к методике измерения линейной поляризации космического радиоизлучения . . . . .	1473
Алексеев В. А., Гатэлюк Э. Д., Кротиков В. Д., Никонов В. Н., Троицкий В. С. Об одной возможности совмещения сигналов радионтерферометра с автономными приемниками . . . . .	1477
Басс Ф. Г., Вербицкий И. Л., Гуревич Ю. Г. К теории распространения электромагнитных волн в нелинейных средах . . . . .	1480
Всехсвятская И. С. О статистической модели сигналов, наклонно отраженных от ионосфера . . . . .	1490
Пермитин Г. В. О прохождении электромагнитных волн через плоский гиротропный слой (случай кратных волновых чисел) . . . . .	1498
Цытович В. Н., Корженевич И. М. Нелинейное взаимодействие волн в релятивистской плазме . . . . .	1505
Барсуков К. А., Свободина С. А. Излучение Вавилова—Черенкова в спиральном волноводе . . . . .	1522
Медведев Ю. А. Об отражении импульсного электромагнитного сигнала от плоской границы поглощающей среды . . . . .	1528
Романов Ю. А. К кинетической теории ограниченной плазмы . . . . .	1533
Александров А. Ф., Кузовников А. А. Исследование комплексной проводимости плазмы в области низких частот . . . . .	1544
Александров А. Ф., Кузовников А. А. Исследование слоев пространственного заряда методом плазменного конденсатора . . . . .	1548
Ораевский А. Н. Пучковый оптический квантовый генератор как стандарт частоты	1554
Кузнецова Т. И. К вопросу о сужении световых импульсов в лазере с безынерционным просветляющимся фильтром . . . . .	1560
Маркелов В. А. О чувствительности приемника типа счетчика числа выбросов	1567
Колачевский Н. Н., Румянцев В. Г. Магнитные шумы в тонких пермаллоевых пленках . . . . .	1574
Кравцов Ю. А. Геометрическая оптика сред с пространственной дисперсией (скалярная задача) . . . . .	1582
Гутман Т. Л. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на произвольно движущейся поверхности . . . . .	1592
Рязанцев К. А., Гилинский И. А. Возбуждение «обменных» колебаний при движении заряженной частицы в феррите . . . . .	1600
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Каплан А. Е. О генерации субгармоник высоких порядков в оптическом диапазоне	1604
Купчинов Н. Ф. О влиянии торможения электронов в ЛБВ на деформацию ленточного электронного потока . . . . .	1606

УДК 523.164.3

## НАБЛЮДЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЮПИТЕРА НА ВОЛНЕ 6,6 см С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШОГО ПУЛКОВСКОГО РАДИОТЕЛЕСКОПА

*В. Я. Гольнев, Ю. Н. Парийский, Н. С. Соболева*

Обнаружена значительная асимметрия поясов радиации Юпитера в поляризованном свете. Высказывается предположение о деформации поясов радиации солнечным ветром.

В январе—феврале 1967 года в Главной астрономической обсерватории с помощью Большого Пулковского радиотелескопа на волне 6,6 см были проведены измерения поляризованного радиоизлучения Юпитера. Видимый диаметр планеты составлял в это время  $\sim 0,72$  минуты дуги, ширина диаграммы антенны по уровню половинной мощности 2,4 минуты дуги (собственный интервал антенны  $\sim 1'$  [1]). Приемник с параметрическим усилителем на входе имел чувствительность 0,05°К при постоянной времени 3 секунды.

Антенная температура Юпитера в период наблюдений составляла 0,5°К. Для определения плоскости ожидаемой поляризации была использована зависимость плоскости линейной поляризации от долготы Юпитера  $I^{III}$  на волнах 11 и 21 см [2]. При наблюдениях регистрировался один параметр Стокса  $Q$ , однако положение анализатора выбиралось таким образом, чтобы другой параметр  $U$  был равен нулю. Параметр Стокса  $I$  (интенсивность неполяризованного излучения) регистрировался несколько раз в течение цикла измерений. На рис. 1 и 2 приведены кривые прохождения параметра  $I$  (средняя по четырем кривым) и па-

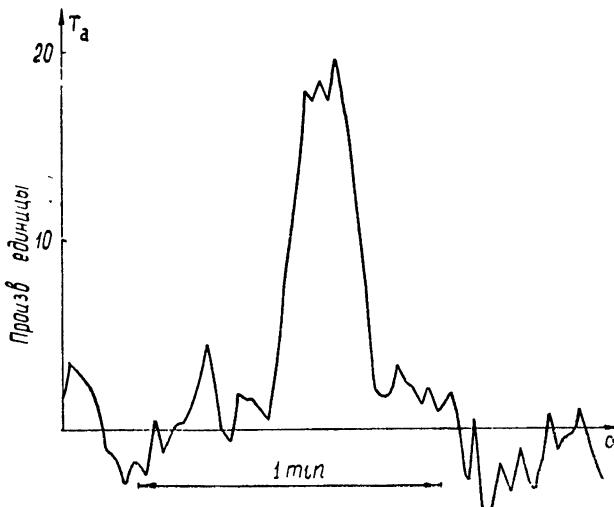


Рис. 1 Кривая прохождения Юпитера (интенсивность).

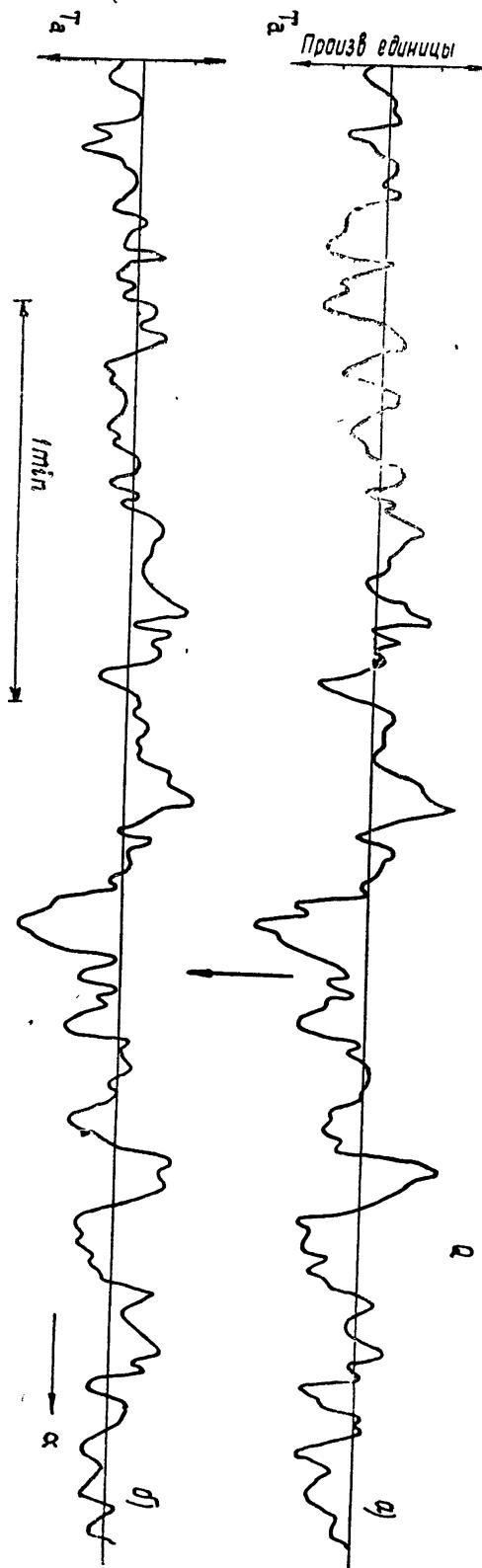


Рис. 2. Кривая прохождения Юпитера (параметр  $Q$ ). Стрелкой показано положение максимума параметра  $l$ .

раметра  $Q$  (средняя из 13 кривых (рис. 2а) и из 17 кривых (рис. 2б)). Величина и форма паразитного поляризованного сигнала определялась по двум источникам Дева-А и Таи-А (последний имеет сильный процент полезной поляризации, но его величина и позиционный угол хорошо известны). Сигнал этот имеет форму синусоиды, однако точную величину его определить не удалось из-за различия в условиях наблюдений Юпитера и опорных источников. Определена только верхняя граница паразитного сигнала. Поэтому кривые наблюдаемого поляризованного распределения были обработаны для двух крайних случаев: 1) амплитуда паразитного сигнала равна нулю и 2) амплитуда паразитного сигнала равна верхней границе (рис. 3, 4). Окончательные

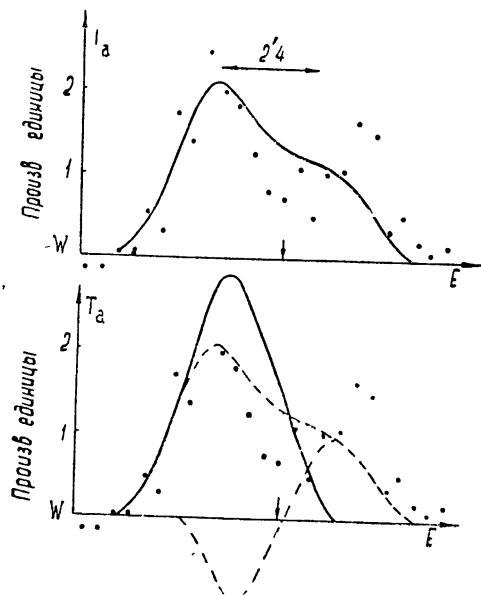
Рис. 3. Модель поляризованного источника Юпитера на волне 6,6 см: два источника на расстоянии 2',4 с отношением амплитуд 1:2. Стрелкой показано положение интенсивности. Предполагается, что паразитный поляризованный сигнал отсутствует.

Рис. 4. Модель поляризованного источника. Штрих-пунктирная кривая—паразитный сигнал, равный по амплитуде максимально возможной величине. Сплошная линия—поляризационная кривая после вычитания паразитного сигнала.

данные, полученные при этих двух предположениях, приведены в таблице.

Таблица 1

	I вариант	II вариант
Интегральный процент поляризации Юпитера на $\lambda=6,6$ см	$4,35 \pm 2$ (максимальная ошибка)	$4,35 \pm 2$
Процент поляризации восточной части поясов	$4,15 \pm 2$	0
Процент поляризации западной части поясов	$8,35 \pm 2$	$12,5 \pm 2$
Расстояние восточной части поясов от центра диска планеты	$1',0 \pm 0',2$	—
Расстояние западной части поясов от центра диска планеты	$1',4 \pm 0',2$	$1',4 \pm 0',2$
Угловой размер восточной части пояса	$< 1'$	$< 1'$
Угловой размер западной части пояса	$< 1'$	$< 1'$



Недостаточное отношение сигнал/шум, а также незнание точной величины паразитного сигнала не дают возможность получить истинное распределение поляризованного излучения Юпитера. Однако, несмотря на это, нам кажется, что некоторые выводы можно сделать уже сейчас.

1) Пояса радиации Юпитера на волне 6,6 см в «поляризованном свете» асимметричны как по яркости, так и по положению относительного центра диска. Восточная часть ближе к центру, чем западная.

2) Если предполагать, что процент поляризации западной и восточной частей поясов радиации одинаков и составляет  $\sim 20\%$  (как на более длинных волнах [2]), то западная часть ярче восточной примерно в 2 раза, а пояса радиации составляют примерно 0,2 по потоку от общего радиоизлучения планеты на этой частоте. Центр тяжести неполяризованного излучения смещен относительно центра диска планеты примерно на 6—8 секунд дуги.

3) Расстояние между максимумами поляризованного излучения Юпитера равно  $3,0 \pm 1,0$  диаметра планеты.

Интегральный процент поляризаций в 1,5—1,1 раза меньше, чем по наблюдениям Робертса и Комессарова (1965) [2] и в 2 раза меньше, чем по наблюдениям Дикеля (1966) [3]. Однако по данным Робертса [15] процент поляризации на Юпитере за последнее время, по-видимому, уменьшился.

В [2] найдено сильное отклонение закона изменения плоскости поляризации с долготой  $l^{(1)}$  от гармонического вследствие несовпадения магнитной оси с осью вращения. Там же предполагаются две возможности объяснения этого эффекта: либо ось диполя смещена относительно оси вращения планеты, либо пояса радиации асимметричны. Согласно нашим измерениям более вероятно второе объяснение.

Асимметрия поясов согласуется с наблюдениями Брансона на волне 21 см с разрешением 25 секунд дуги в Кэмбридже (в «неполяризованном свете», доклад на МАСе в Праге, 1967 г.): яркость западной части пояса оказалась больше восточной.

Измерения покрытия Юпитера Луной на волне 74 см в 1962 году в Австралии также показали, что западная часть поясов имеет более высокую поверхностную яркость и расположена дальше от центра диска Юпитера (3',5 от центра), чем восточная часть (2',5 от центра диска) [2]. При определении точной координаты для источника ЗО 273 по наблюдениям ряда внегалактических источников и Юпитеру в ГАО в 1963 году [4] обнаружилось расхождение между прямым восхождением, определенным по ряду источников и по Юпитеру. Причем координата по Юпитеру оказалась 4,5—5" более западной, чем по большому ряду источников; это может обозначать, что центр тяжести радиоизлучения Юпитера смещен к западу относительно центра диска планеты на 5". В пределах ошибок это также согласуется с настоящими измерениями.

Расстояние между максимумами поляризованного излучения по нашим наблюдениям несколько больше, чем следует из интерференционных наблюдений Берджа на волнах 10,4 и 21,2 см [5]. В то же время размеры компонент источника поляризованного излучения на волне 10,4 см несколько шире, чем на 6,6 см.

Следует подчеркнуть, что обнаруженная асимметрия поясов радиации Юпитера не зависит от долготы центрального меридиана Юпитера, т.е. не связана, например, с внеосевым положением магнитного диполя планеты [6]. Поэтому необходимо найти внешнюю регулярную силу, деформирующую магнитное поле Юпитера так, что пояса радиации смещаются против орбитального движения планеты. Возможным объяснением этого эффекта является действие солнечного ветра на магнито-

сферу Юпитера, подобно действию его на кометные хвосты типа I [7], на земную магнитосферу [8] и на радиогалактики [9]. При этом, однако, надо предположить, что направление ветра значительно отличается от радиального (см. рис. 5). Предполагаемое объяснение требует малой напряженности магнитного поля во внешней магнитосфере Юпитера ( $< 30 \gamma$ ) по аналогии с земной магнитосферой и при предположении, что давление ветра на орбите Юпитера не больше, чем у Земли.

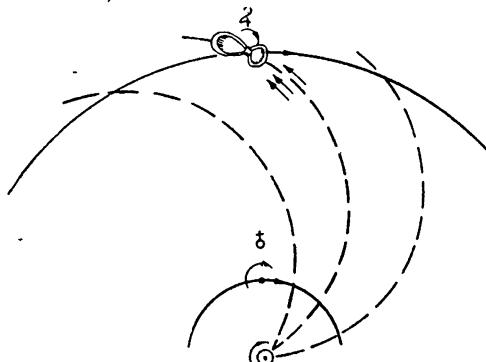


Рис. 5. Схематический чертеж взаимного расположения Юпитера, Земли и Солнца. Стрелками показано направление вращения и движения планет, а также направление солнечного ветра. Форма поясов радиации Юпитера искажена солнечным ветром.

ные изменения в связи с обнаружением Юпитера, нам представляется очень важным подтверждение асимметрии поясов радиации; целесообразно систематическое исследование вариации наблюдаемых параметров с солнечной активностью. (По вопросу о корреляции параметров радиоизлучения Юпитера в настоящее время имеются противоречивые данные [10, 11, 2, 12]).

В заключение отметим любопытный факт, связанный с асимметрией поясов радиации Юпитера: корреляция интенсивности длинноволнового радиоизлучения (всплески) с положением спутника Юпитера Ио. Как известно, интенсивность принимаемых на Земле декаметровых всплесков радиоизлучения Юпитера имеет максимум в те моменты, когда отклонение Ио от верхнего геоцентрического соединения составляло  $\sim 90$  и  $\sim 270^\circ$ . Если предположить, что направление солнечного ветра почти тангенциальное, то в эти моменты Ио будет пересекать наиболее интенсивные участки магнитосферы Юпитера и вызывать их возмущение. Как показано в [14], планеты и без магнитного поля могут взаимодействовать с движущейся намагниченной плазмой из-за конечной проводимости поверхности планеты. Сила взаимодействия будет зависеть от площади поперечного сечения планеты. Отметим, что длительность серии всплесков сравнима с примерным ожидаемым временем прохождения Ио через деформированную магнитосферу Юпитера. Другие спутники не вызывают возмущения, либо из-за малого сечения (Амальтея), либо из-за большого расстояния от планеты, где магнитосфера уже обрезана солнечным ветром.

Авторы выражают большую благодарность Липовке за помощь в наблюдениях и Н. Е. Гольневой за участие в обработке результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. N. Bracewell, J. A. Roberts, Austr. J. Phys., 7, № 4, 615 (1954).
2. J. A. Roberts, M. M. Komessaroff, Icarus, 4, 127 (1965).
3. J. R. Dickel, Aph. J., 148, № 2, part 1, 535 (1967).
4. В. Я. Гольнев, Ю. Н. Парицкий, Астрон. ж., 42, вып. 2, 305 (1965).

5. G. L. Berge, *Aph. J.*, **146**, № 3, 767 (1966).
6. J. W. Warwick, *Science*, **132**, 1250 (1960).
7. Л. Бирман, Космическая астрофизика, 189 (1962).
8. Е. Н. Паркер, Космическая астрофизика, 198 (1962).
9. Ю. Н. Парицкий, *Астрон. ж.*, **44**, № 5, 971 (1967).
10. R. M. Sloanaker, J. W. Bolland, *Aph. J.*, **133**, 649 (1961).
11. M. S. Roberts, *Astron. J.*, **67**, 280 (1962).
12. E. F. Mc Clain, J. H. Nichols, J. A. Waak, *Astron. J.*, **67**, 724 (1962).
13. G. A. Dulck, *Aph. J.*, **148**, № 1, part 1, 1239 (1967).
14. E. G. Bowen, *Proc. Astron. Soc. Australia*, **1**, № 1, 5 (1967).
15. И. А. Робертс, Доклад на МАС, Прага, 1967.

Главная астрономическая обсерватория  
АН СССР

Поступила в редакцию  
14 ноября 1967 г.

OBSERVATIONS OF JUPITER'S POLARIZED RADIATION AT 6.6 cm  
WAVELENGTH BY MEANS OF THE GREAT PULKOV RADIO  
TELESCOPE

*V. Ya. Gol'nev, Yu. N. Pariyskii, N. S. Soboleva*

A considerable asymmetry of Jupiter's radiation belts in a polarized light has been discovered. The assumption is made on the deformation of radiation belts by a solar wind.

УДК 523.164 4

## НАБЛЮДЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В БЛИЗИ АНТИЦЕНТРА ГАЛАКТИКИ НА ВОЛНАХ 70, 60 И 40 см

*B. A. Разин, B. B. Хрулев, B. T. Федоров, C. A. Волохов,  
A. A. Мельников, A. M. Пасека, L. B. Пупышева*

В сентябре—декабре 1965 г. с помощью параболического рефлектора диаметром 8 м были проведены измерения линейной поляризации космического радиоизлучения на частотах 437, 510 и 735 Мгц. Исследовалась область небосвода, ограниченная координатами  $\alpha = 1^{\text{h}} - 7^{\text{h}}$ ,  $\delta = 58^{\circ} - 70^{\circ}$  (центр области имеет галактические координаты  $l^{\text{II}} = 142^{\circ}$ ,  $b^{\text{II}} = +8^{\circ}$ ) Получены следующие результаты. 1) Степень поляризации существенно возрастает на частоте 735 Мгц по сравнению с ее значениями на более низких частотах. 2) Изменение степени поляризации с частотой в направлениях со значительной мерой вращения носит немонотонный характер. 3) Эффективная мера вращения межзвездной среды мала в центре области и увеличивается к ее краям. При  $l^{\text{II}} > 145^{\circ}$  мера вращения положительна, при  $l^{\text{II}} < 140^{\circ}$ —отрицательна (это уже отмечалось в работе [5]). 4) В центре области степень поляризации заметно возрастает с частотой при весьма малом изменении позиционного угла, что свидетельствует о сложной структуре области. 5) Угловые размеры области на уровне 0,5 по температуре поляризованной компоненты возрастают с увеличением частоты.

В период с 9 сентября по 30 декабря 1965 г. на радиоастрономической станции НИРФИ в Старой Пустыни были проведены измерения линейной поляризации распределенного космического радиоизлучения на частотах 437 Мгц (длина волны  $\lambda = 68,6$  см), 510 Мгц ( $\lambda = 58,8$  см) и 735 Мгц ( $\lambda = 40,8$  см). Поляризационные измерения на нескольких частотах позволяют, как известно [1—5], определить величину фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения в межзвездной среде, исследовать структуру межзвездного магнитного поля и получить информацию об ионизированном газе и релятивистских электронах в межзвездном пространстве.

Для наблюдений была выбрана область небосвода, ограниченная координатами  $\alpha_{1950} = 1^{\text{h}} - 7^{\text{h}}$ ,  $\delta = 58^{\circ} - 70^{\circ}$ . Это одна из известных областей [5—9], где поляризация космического радиоизлучения довольно велика (центр области имеет галактические координаты  $l^{\text{II}} = 142^{\circ}$ ,  $b^{\text{II}} = +8^{\circ}$ ). Ниже описаны аппаратура, методика наблюдений, редукция экспериментальных данных и полученные результаты.

### 1. АППАРАТУРА

Измерения поляризации космического радиоизлучения проводились с помощью параболического рефлектора диаметром 8 м с фокусным расстоянием 2,75 м, смонтированного на азимутально-угломестном поворотном устройстве.

Облучатели представляли собой полуволновые вибраторы, запитываемые симметричными щелями в коаксиальной линии, с рефлекторами

в виде дисков диаметром  $0,8 \lambda$ . В фокусе рефлектора облучатели крепились на цилиндрической трубе, внутри которой проходил антенный фидер, состоявший из коаксиальной линии переменной длины, кабеля с малыми потерями и коаксиального вращающегося соединения. Линия переменной длины служила для совмещения фазовых центров облучателей с фокусом рефлектора.

Изменение поляризации антennы осуществлялось путем вращения облучателей вокруг ее электрической оси. Позиционный угол облучателей регистрировался с погрешностью не более одного градуса.

Особое внимание уделялось симметрированию системы облучения и достижению постоянства параметров антенно-фидерного тракта при вращении облучателей. Ось трубы, на которой крепились облучатели, тщательно совмещалась с геометрической осью рефлектора; кроме того, труба достаточно жестко закреплялась у вершины параболического рефлектора без помощи тяг. Как показали измерения, при вращении облучателей направление электрической оси антennы изменялось не более, чем на две минуты дуги в интервале зенитных углов  $0\text{--}30^\circ$ .

Для проверки постоянства параметров антенно-фидерного тракта облучатели заменялись согласованной нагрузкой, которая затем вращалась, как и при поляризационных измерениях. При этом ни на одной из волн не наблюдалось изменений показаний выходного прибора, превышающих флюктуационный порог чувствительности радиометров.

Приемная аппаратура представляла собой радиометры модуляционного типа. В качестве эквивалента в радиометрах использовалось согласованное сопротивление, имевшее температуру окружающей среды. Для выравнивания эффективных температур антennы и эквивалента в антенный тракт через направленный ответвитель и плавный аттенюатор вводилась дополнительная мощность от газоразрядной трубы.

Основные параметры радиотелескопа указаны в табл. 1.

Таблица 1  
Основные параметры радиотелескопа

Частота (Мгц)	Ширина полосы пропускания на уровне 0,5 по мощности (Мгц)	Флюктуационный порог чувстви- тельности при по- стоянной времении 16 сек ( $^{\circ}\text{К}$ )	Ширина луча на уровне 0,5 по мощности	$D_{\text{гл}}$	$(1 - \beta_{\text{гл}})\eta$
437	6	0,15	$5^{\circ}30' \times 6^{\circ}20'$	1100	0,8
510	6	0,18	$4^{\circ}40' \times 5^{\circ}30'$	1600	0,8
735	10	0,13	$3^{\circ}10' \times 4^{\circ}00'$	3000	0,8

Приведенные в табл. 1 значения коэффициентов направленного действия (КНД) по главному лепестку на уровне — 20 дБ по мощности  $D_{\text{гл}}$  были вычислены как средние геометрические КНД, отвечающих диаграммам в  $E$ - и  $H$ -плоскостях:  $D_{\text{вл}} = \sqrt{D_H D_E}$ . Параметр  $(1 - \beta_{\text{гл}})\eta$ ,

\* Приближенное значение для  $D_{\text{гл}}$  с погрешностью не более нескольких процентов нетрудно получить, если можно аппроксимировать диаграмму направленности антены гауссовой кривой  $\exp[-(\zeta^2/(0,6 \theta_E)^2 - \xi^2/(0,6 \theta_H)^2)]$ .

$$D_{\text{гл}} = \frac{11,1}{\theta_E \theta_H},$$

где  $\theta_E$  и  $\theta_H$  — растворы главного луча антены по точкам половинной мощности в  $E$ - и  $H$ -плоскостях, выраженные в радианах.

где  $\beta_{rl}$  — фактор рассеяния вне главного лепестка,  $\eta$  — КПД антенно-фидерного тракта, был измерен по радиоизлучению дискретного источника Кассиопея-А. При этих измерениях аппаратура калибровалась с помощью нагреваемого согласованного сопротивления.

Радиоисточник Кассиопея-А использовался также в качестве эта-лонного во время поляризационных измерений для определения «температуры линейно-поляризованной компоненты космического радиоизлучения», усредненной по главному лепестку диаграммы направленности антенны:

$$T_a = \frac{n_a}{n_k} \frac{\lambda^2 S}{8\pi k} D_{rl}. \quad (1)$$

В формуле (1)  $n_a$  и  $n_k$  — показания выходного прибора, соответствующие интенсивности линейно-поляризованной компоненты космического радиоизлучения и интенсивности Кассиопеи-А,  $k$  — постоянная Больцмана,  $S$ -плотность потока радиоизлучения Кассиопеи-А, принимавшаяся равной  $5960 \cdot 10^{-23}$ ,  $5000 \cdot 10^{-23}$ ,  $3754 \cdot 10^{-23} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$  соответственно на частотах 437, 510 и 735 Мгц [10].

## 2. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

При измерениях поляризации космического радиоизлучения облучатель в фокусе рефлектора радиотелескопа непрерывно вращался с помощью мотора со скоростью один оборот за восемь минут. Позиционный угол облучателя отсчитывался от направления на зенит против часовой стрелки. Через каждые  $45^\circ$  давались метки позиционного угла облучателя. На ленте самописца регистрировались изменения антенной температуры, сопровождающие поворот облучателя. Через каждый час наблюдений производилась калибровка радиотелескопа по дискретному источнику Кассиопея-А, а также контрольные наблюдения либо области Полярной звезды, либо эталонной области с координатами  $l^h = 142^\circ$ ,  $b^h = +8^\circ$ .

Все наблюдения проводились в ночное время для устранения мешающего влияния Солнца.

Исследования распределения поляризованного радиоизлучения по небосводу проводились при фиксированных направлениях луча антенны в плоскости меридиана.

Если бы изменения антенной температуры  $\Delta T_a$ , сопровождающие поворот облучателя, были обусловлены только линейно-поляризованной компонентой космического радиоизлучения, то

$$\begin{aligned} \Delta T_a &= T_a \cos^2(\chi - \chi_a) = \frac{T_a}{2} [1 + \cos 2(\chi - \chi_a)] = \\ &= \frac{1}{2} (T_a + Q_a \cos 2\chi + U_a \sin 2\chi), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\chi = \Omega t$  — текущий позиционный угол облучателя,  $\Omega$  — угловая скорость вращения облучателя,  $t$  — время,  $\chi_a$  — позиционный угол направления колебаний электрического вектора в излучении,  $Q_a$  и  $U_a$  — параметры Стокса:

$$\begin{aligned} Q_a &= T_a \cos 2\chi_a, \\ U_a &= T_a \sin 2\chi_a. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих идеальных условиях поляризационные измерения заключались бы в определении  $T_{\lambda}$  и  $\chi_{\lambda}$  непосредственно из единичных записей  $\Delta T_a$  либо по амплитуде и фазе синусоиды, либо с помощью соотношений

$$T_{\lambda} = \sqrt{Q_{\lambda}^2 + U_{\lambda}^2}, \quad (4)$$

$$\chi_{\lambda} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{U_{\lambda}}{Q_{\lambda}}.$$

Параметры Стокса  $Q_{\lambda}$  и  $U_{\lambda}$  в свою очередь можно было бы определить по разностям температуры антенны при  $\chi = 0$  и  $90^\circ$ ,  $\chi = 45$  и  $135^\circ$ . Однако в действительности поляризационные измерения значительно сложнее, так как при повороте облучателя показания выходного прибора радиометра могут изменяться из-за различных побочных эффектов. Основные из них возникают по следующим причинам [1].

1) Антenna боковыми лепестками принимает частично поляризованное радиоизлучение Земли; кроме того, в принимаемом радиоизлучении может содержаться линейно-поляризованный компонент, возникающая вследствие отражения радиоволн от земной поверхности и местных предметов.

2) При изменении поляризации антены могут возникать изменения ее диаграммы направленности и импеданса.

3) Антenna температура может изменяться при вращении облучателя из-за асимметрии диаграммы направленности и неоднородного пространственного распределения источников радиоизлучения.

С учетом побочных эффектов выражение (2) должно быть дополнено несколькими членами, разложение которых в ряд Фурье дает серию гармоник. Сумма вторых гармоник характеризует побочный эффект, который нельзя отличить от поляризационного при единичном измерении. В формуле (2) величины  $Q_{\lambda}$  и  $U_{\lambda}$  заменяются суммой параметров Стокса, характеризующих поляризационные и побочные эффекты.

Для определения величины побочных эффектов были использованы следующие методы.

1) Наблюдалась область Полярной звезды, где поляризация космического радиоизлучения невелика. По результатам этих наблюдений определялась величина побочных эффектов при фиксированном положении антены радиотелескопа и контролировалась их стабильность. В частности, таким путем оценивалась роль побочного эффекта, возникающего из-за асимметрии боковых лепестков диаграммы направленности антены и неравномерного углового распределения яркостной температуры небосвода.

2) При нескольких азимутах в разное время делались «поляризационные разрезы» по высоте, т. е. проводились измерения поляризации космического радиоизлучения на высотах от  $20$  до  $90^\circ$  через десятиградусные интервалы. Учитывая хаотичность распределения поляризованной компоненты радиоизлучения по небосводу, можно ожидать, что усредненные «разрезы» дают зависимость характеристик побочных эффектов от азимута и высоты.

3) В широком интервале часовых углов наблюдалась область с координатами  $l^{\text{II}} = 142^\circ$ ,  $b^{\text{II}} = +8^\circ$ , имеющая значительную поляризацию. Сравнение результатов наблюдений этой области, проведенных в разное звездное время, дает возможность оценить относительную роль поляризационного и побочного эффектов, так как соотношение между ними изменяется со временем. Например, если побочный эффект постоянен, то на плоскости параметров Стокса точки, отвечающие

экспериментальным значениям  $Q$  и  $U$ , должны располагаться на окружности с радиусом, равным температуре поляризованной компоненты и с центром в точке, координаты которой характеризуют побочный эффект. В действительности ситуация оказывается несколько сложнее из-за того, что побочные эффекты зависят от азимута и высоты. Однако и в этом случае удается с достаточной точностью разделить поляризационный и побочные эффекты [11].

Данные о величине побочных эффектов, полученные разными методами, оказались в согласии друг с другом. Побочный эффект, возникающий из-за асимметрии главного лепестка диапраммы направленности антенны, оценивался расчетным путем.

Средние значения параметров Стокса, характеризующих суммарный побочный эффект  $Q_n$  и  $U_n$ , использовались для коррекции непосредственно измеряемых величин  $Q$  и  $U$ .

### 3. РЕДУКЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Обработка результатов наблюдений заключалась в определении температуры линейно-поляризованной компоненты космического радиоизлучения  $T_a$  и позиционного угла в новой галактической системе координат  $\chi_r$  по непосредственно регистрируемым измерениям антенной температуры  $\Delta T_a$ , сопровождающим поворот облучателя. Редукция экспериментальных данных осуществлялась в несколько этапов.

1) По разностям значений  $\Delta T_a$  при  $\chi = 0$  и  $90^\circ$ ,  $180$  и  $270^\circ$ ,  $45$  и  $135^\circ$ ,  $225$  и  $315^\circ$  определялись величины  $Q$  и  $U$ , соответствующие второй гармонике  $\Delta T_a$ :

$$Q = \frac{[\Delta T_a(0^\circ) - \Delta T_a(90^\circ)] + [\Delta T_a(180^\circ) - \Delta T_a(270^\circ)]}{2}, \quad (5)$$

$$U = \frac{[\Delta T_a(45^\circ) - \Delta T_a(135^\circ)] + [\Delta T_a(225^\circ) - \Delta T_a(315^\circ)]}{2}.$$

2) Из найденных по формуле (5) значений  $Q$  и  $U$  вычитались  $Q_n$  и  $U_n$ , характеризующие побочный эффект при данном азимуте и высоте точки наблюдения. Таким образом определялись параметры Стокса линейно-поляризованной компоненты космического радиоизлучения:

$$Q'_n = Q - Q_n, \quad (6)$$

$$U'_n = U - U_n.$$

3) По значениям  $Q'_n$  и  $U'_n$  с помощью формул (4) вычислялись температура и позиционный угол линейно-поляризованной компоненты радиоизлучения  $T'_n$  и  $\chi'_n$ .

4) Позиционный угол в горизонтальной системе координат  $\chi'_n$  преобразовывался в позиционный угол в галактической системе координат  $\chi''_r$ . Для этого к  $\chi'_n$  прибавлялся экваториальный параллактический угол  $q_s$  (угол с вершиной в исследуемой точке на небесной сфере между направлениями на зенит и северный полюс мира, отсчитываемый от последнего направления против часовой стрелки) и галактический параллактический угол  $q_r$  (угол между направлениями на северный полюс мира и северный полюс Галактики, отсчитываемый от последнего направления против часовой стрелки). Таким образом,

$$\chi''_r = \chi'_n + q_s + q_r. \quad (7)$$

Углы  $q_s$  и  $q_r$  вычислялись по формулам

$$\operatorname{tg} q_s = \frac{\cos \varphi \sin t}{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t}; \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} q_r = \frac{\cos b_0^{\text{II}} \sin (l_0^{\text{II}} - l^{\text{II}})}{\cos b^{\text{II}} \sin b_0^{\text{II}} - \sin b^{\text{II}} \cos b_0^{\text{II}} \cos (l_0^{\text{II}} - l^{\text{II}})}. \quad (9)$$

В этих выражениях  $\varphi$  — географическая широта места наблюдения  $t$  — часовой угол,  $\delta$  — склонение точки наблюдения,  $l^{\text{II}}$ ,  $b^{\text{II}}$  — ее галактические координаты, ( $l_0^{\text{II}} = 123^\circ$ ;  $b_0^{\text{II}} = 27^\circ 20'$ ) — галактические координаты северного полюса мира.

5) Определялся угол поворота плоскости поляризации космического радиоизлучения из-за эффекта Фарадея в ионосфере и вычислялся угол

$$\chi'_r = \chi''_r - \psi. \quad (10)$$

Подробнее об определении величины фарадеевского вращения в ионосфере будет сказано в конце этого раздела.

6) Найденные в пп. 3 и 5 величины  $T'_r$  и  $\chi'_r$  исправлялись с учетом постоянной времени радиометра  $\tau$ .

Постоянная времени радиометров определялась интегрирующим  $RC$ -фильтром, следующим за синхронным детектором. Если на вход  $RC$ -фильтра подано напряжение  $\cos(\omega t - \varphi)$ , то выходное напряжение определяется выражением

$$\frac{\cos(\omega t - \varphi - \operatorname{arctg} \omega \tau)}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}},$$

где  $R$  — сопротивление,  $C$  — емкость,  $\omega$  — циклическая частота. При измерениях линейной поляризации радиоизлучения  $\omega = 2\Omega$ ,  $\varphi = 2\chi_a$ , поэтому позиционный угол  $\chi'_r$  должен быть уменьшен на величину

$$\frac{\operatorname{arctg}(2\Omega\tau)}{2} \simeq \Omega\tau,$$

а наблюдаемую температуру поляризованной компоненты  $T'_r$  следует умножить на фактор

$$\sqrt{1 + (2\Omega\tau)^2} \simeq 1 + 2(\Omega\tau)^2.$$

7) Определялись средние значения  $\bar{T}_r$  и  $\bar{\chi}_r$  для исследуемой области по всем данным и оценивались погрешности измерений\*.

Остановимся теперь на вычислениях величины фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения в ионосфере. Прежде всего отметим, что на частотах выше 200 Мгц в ионосфере практически при всех углах  $\gamma$  между волновым вектором и направлением земного магнитного поля выполняется условие квазипродольности распространения радиоволн\*\*. В этом случае нормальные

\* В работах [5—9] средние значения  $\bar{T}_r$  и  $\bar{\chi}_r$  определяются через средние значения параметров Стокса. Эта не всегда корректная процедура может приводить к заниженным значениям температуры поляризованной компоненты.

\*\* На достаточно высоких частотах условие квазипродольности распространения радиоволн можно записать в виде  $\gamma < \frac{\pi}{2} - 2 \frac{\omega_H}{\omega}$  где  $\omega_H = eH/mc$  — гирочастота электронов. В ионосфере  $H \sim 0.4$  э,  $\omega_H \sim 7 \cdot 10^6$  гц. Таким образом, при  $f = \omega/2\pi = 200$  Мгц  $\gamma < 88^\circ$ .

волны можно считать поляризованными по кругу. При прохождении линейно-поляризованного излучения через ионосферу плоскость поляризации поворачивается на угол

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \int_0^L (n_2 - n_1) dl = \frac{K}{f^2} \int_0^L NH \cos \gamma dl, \quad (11)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления обычной и необыкновенной волн,  $f = \omega/2\pi$  — частота,  $c$  — скорость света,  $N$  — концентрация электронов в ионосфере,  $H$  — напряженность земного магнитного поля,  $L$  — путь, проходимый излучением в ионосфере. Коэффициент  $K = e^3/2\pi(mc)^4$ ,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. Если угол  $\psi$  выразить в градусах, частоту  $f$  в мегагерцах, а остальные величины в системе СГС, то  $K = 1,4 \cdot 10^{-6}$ .

Вычислить точно интеграл в формуле (11) не представляется возможным, так как концентрация электронов вдоль луча зрения в ионосфере может быть определена лишь весьма приближенно. Учитывая это обстоятельство, для упрощения вычислений примем сферически слоистую модель ионосферы ( $N$  зависит только от высоты  $h$  над поверхностью Земли). Далее, пренебрежем изменениями направления и величины земного магнитного поля вдоль луча зрения в пределах ионосферы и положим соответствующие элементы равными их значениям на высоте 400 км над наблюдателем, отвечающей приблизительно высоте максимума слоя F2 ионосферы. Для нахождения напряженности магнитного поля  $H$ , магнитного наклонения  $i$ , магнитного склонения  $\beta$  для Старой Пустыни использовалась работа [12].

Переходя в формуле (11) от интегрирования вдоль луча зрения к интегрированию по высоте над Землей, получаем приближенное выражение

$$\psi = \frac{K}{f^2} H \cos \gamma \overline{\sec z(h)} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} N(h) dh, \quad (12)$$

где  $z(h)$  — угол между лучом и вертикальным направлением на высоте  $h$ ;  $\overline{\sec z(h)}$  — среднее значение  $\sec z(h)$  в ионосфере:

$$\overline{\sec z(h)} = \frac{L}{h_{\max} - h_{\min}} = \frac{r}{h_{\max} - h_{\min}} \left( \sqrt{\left( 1 + \frac{h_{\max}}{2} \right)^2 - \sin^2 z} - \sqrt{\left( 1 + \frac{h_{\min}}{2} \right)^2 - \sin^2 z} \right); \quad (13)$$

$r$  — радиус Земли (6378 км);  $h_{\max}$  и  $h_{\min}$  — условные высоты нижней и верхней границ ионосферы (принятые равными 200 и 1000 км);

$$\cos \gamma = \cos z \sin i + \sin z \cos (A - \beta) \cos i, \quad (14)$$

$z$  и  $A$  — зенитный угол и азимут точки наблюдения.

Для удобства функция  $\Phi(z, A) = H \cos \gamma \overline{\sec z(h)}$  была протабулирована\*.

Полная концентрация электронов в ионосфере  $N_n = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} N(h) dh$

\* Некоторые сведения о функции  $H \cos \gamma \overline{\sec z(h)}$  приведены в работе [13].

определялась как произведение концентрации электронов в максимуме слоя F2 и эффективной толщины ионосферы  $D$ , т. е.

$$N_n = N_{\max} D = 1,24 \cdot 10^4 f_0 F2 D, \quad (15)$$

где  $f_0 F2$  — критическая частота слоя F2 — должна быть выражена в  $Mg\mu$  (при этом  $N_{\max}$  выражается в  $cm^{-3}$ ). Значения  $f_0 F2$  заимствовались из данных станции вертикального зондирования ионосферы, находящейся в Зименках вблизи г. Горького. Данные об эффективной толщине ионосферы были взяты из работы [14], где они получены по результатам наблюдений за спутниками.

Из формул (12) и (15) можно найти следующее выражение для угла поворота плоскости поляризации космического радиоизлучения в ионосфере:

$$[\Psi]_{\text{рад}} = 1,74 \cdot 10^3 [D]_{\text{км}} [\Phi(z, A)]_s \frac{(f_0 F2)^2}{f^2}. \quad (16)$$

Направление фарадеевского вращения плоскости поляризации излучения совпадает с направлением вращения электрического вектора в необыкновенной волне. В свою очередь в необыкновенной волне электрический вектор вращается в ту же сторону, что и электроны при их движении в магнитном поле  $H$ . Например, если магнитное поле направлено к наблюдателю, то из-за эффекта Фарадея плоскость поляризации излучения поворачивается против часовой стрелки. Этот случай имел место при измерениях поляризации космического радиоизлучения, поэтому угол  $\Psi$  вычитался из  $\chi_r$ .

В заключение этого раздела остановимся еще на одном моменте. Формулу (11), выражающую угол поворота плоскости поляризации радиоизлучения, часто записывают в виде  $\Psi = R \lambda^2$ . Параметр  $R$  принято называть «мерой вращения» среды, через которую проходят радиоволны [15]. Из формулы (11) находим

$$R = 8,1 \cdot 10^5 \int_0^L NH \cos \gamma dl. \quad (17)$$

Это выражение записано с учетом того, что ниже мы будем использовать меру вращения в качестве характеристики межзвездной среды: расстояние  $L$  должно быть выражено в парсеках,  $N$  — в  $cm^{-3}$ ,  $H$  — в эрстедах, при этом  $R$  получается в  $rad \cdot m^{-2}$ .

Знак меры вращения характеризует направление продольной компоненты магнитного поля. Если составляющая магнитного поля вдоль луча зрения направлена к наблюдателю, то мера вращения положительна.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная цель наблюдений состояла в исследовании частотной зависимости и углового распределения линейно-поляризованной компоненты космического радиоизлучения в окрестностях точки с координатами  $b^{\text{II}} = 142^\circ$ ,  $b^{\text{II}} = +8^\circ$  ( $\alpha = 3^h 48^m$ ;  $\delta = +64^\circ$ ). На каждой из рабочих частот (437, 510 и 735  $Mg\mu$ ) по два-три раза наблюдались сечения области по прямому восхождению от  $\alpha = 1^h$  до  $\alpha = 7^h$  при склонениях 58, 64 и  $70^\circ$ . Угловые размеры выбранной области значительно больше растворов диаграмм направленности антенны радиотелескопа на волнах 70, 60 и 40  $cm$ , а распределение линейно-поляризованной компонен-

ты в этом участке небосвода довольно однородно [5–9], поэтому можно ожидать, что усредненные по главному лучу антенны поляризационные параметры космического радиоизлучения не слишком сильно отличаются от локальных.

Результаты измерений представлены в табл. 2, 3 и на рис. 1.

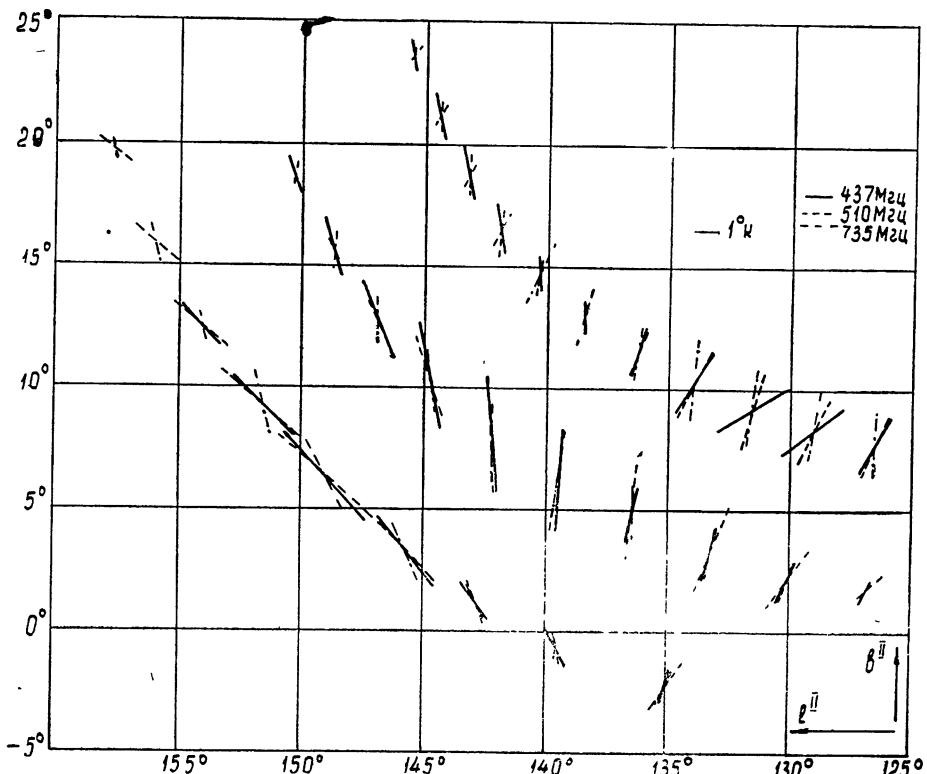


Рис. 1. Распределение линейно-поляризованной компоненты космического радиоизлучения в окрестностях точки с координатами  $l^{\text{II}} = 142^{\circ}$ ,  $b^{\text{II}} = +8^{\circ}$ .

В табл. 2 для отдельных точек, экваториальные и новые галактические координаты которых указаны в первых четырех столбцах, приведены значения температуры поляризованной компоненты, усредненной по главному лепестку диаграммы направленности антенны ( $T_{\text{л}}$ ), значения позиционного угла электрического вектора в экваториальной и новой галактической системах координат ( $\chi_{\text{э}}$  и  $\chi_{\text{г}}$ ) и значения меры вращения межзвездной среды  $R$ . Величина  $R$  вычислялась как среднее арифметическое мер вращения, найденных по разностям позиционных углов на частотах 437 и 735 МГц, 510 и 735 МГц.

На рис. 1 показано распределение линейно-поляризованной компоненты космического радиоизлучения в окрестностях точки с координатами  $l^{\text{II}} = 142^{\circ}$ ,  $b^{\text{II}} = +8^{\circ}$  по данным табл. 2. Координаты центров отрезков линий на рис. 1 совпадают с координатами соответствующих точек на небосводе; длины отрезков пропорциональны  $T_{\text{л}}$ , а углы, которые они образуют с направлением на северный галактический полюс, равны  $\chi_{\text{г}}$  (последние отсчитываются в направлении возрастающих долгот, т. е. против часовой стрелки).

В табл. 3 приведены угловые размеры области по прямому восхождению на уровне половинной температуры поляризованной компоненты.

Таблица 2  
Данные о поляризации радиоизлучения области небосвода в окрестностях точки с координатами  $\ell^{\text{I}} = 142^\circ$ ,  $b^{\text{II}} = +8^\circ$  на частотах 437, 510 и 735 МГц

$\delta$	$\alpha$	$b^{\text{II}}$	$\ell^{\text{I}}$	437' МГц		$T_n$ (°К)	$\chi_s$	$\chi_r$	510 МГц		$T_n$ (°К)	$\chi_s$	$\chi_r$	735 МГц		$R$ (рад. $\cdot$ м $^{-2}$ )
				$T_a$ (°К)	$\chi_s$				$\chi_s$	$\chi_r$				$\chi_s$	$\chi_r$	
58°	1h 18m	-4°,0	128°,1	1,1	0,2	16±4	-6±4	1,9±0,2	-35±4	-43±4	1,0±0,3	-7±4	-15±4	-2,7		
	1h 48m	-3,2	132,0	1,1	0,2	2,4±0,2	2,4±0,2	2,4±0,2	-20±4	-35±4	1,2±0,3	0±4	-15±4	-1,9		
	2h 18m	-2,2	135,0	1,5	0,2	56±4	28±4	1,0±0,2	-5±4	-27±4	1,6±0,3	13±4	-9±4	-0,8		
	2h 48m	-0,6	139,5	2,0	0,2	36±4	2,0±0,2	2,0±0,2	23±4	-5±4	1,2±0,3	40±4	+12±4	-0,4		
	3h 18m	1,3	142,8	4,0	0,2	82±4	41±4	3,8±0,2	55±4	21±4	1,2±0,3	58±4	24±4	+0,2		
	3h 48m	3,4	145,8	6,4	0,2	91±4	43±4	5,1±0,2	85±4	45±4	2,2±0,3	69±4	29±4	+1,2		
	4h 18m	6,4	149,0	5,1	0,2	97±4	45±4	4,2±0,2	98±4	47±4	3,0±0,3	73±10	27±10	+1,4		
	4h 48m	9,3	151,6	3,6	0,2	100±4	42±4	3,0±0,2	105±4	47±4	2,1±0,3	65±10	13±10	+2,5		
	5h 18m	12,5	154,1	2,3	0,2					48±4	1,5±0,3	68±10	10±10	+2,8		
	5h 48m	15,9	156,0	19,7	157,6				2,1±0,2	112±4	74±10	10±10	+3,7			
64°	6h 18m	23,4	158,9	1,0	0,2				1,5±0,2	119±4	52±4	80±10	13±10	+3,8		
	6h 48m			2,3	130,0				1,0±0,2	120±4	46±4	90±10	16±10	+2,9		
	1h 18m	1,8	126,8			-23±3	-23±3	2,0±0,2	-25±5	-30±5	1,2±0,3	-4±3	-22±3	-0,3		
	1h 48m			3,3	133,0	1,4	0,2	3,2±0,2	-10±5	-28±5	2,0±0,3	-17±5	-17±3	-0,1		
	2h 18m	4,9	136,4	2,4	0,2	+7±3	-15±3	4,0±0,2	+5±5	+16±2	2,3±0,3	+18±3	-9±3	-0,2		
	2h 48m	6,2	139,4	4,5	0,2	+15±2	-12±2	4,2±0,2	+30±2	-11±2	2,5±0,3	+30±3	-5±3	+0,06		
	3h 18m	8,1	142,2	5,0	0,2	+28±2	-3±2	4,3±0,2	+45±2	-5±2	2,5±0,3	+44±3	+4±3	+0,2		
	3h 48m	10,5	144,7	4,7	0,2	+49±2	+6±2	4,6±0,2	+65±2	+5±2	2,3±0,3	+56±2	+8±3	+0,5		
	4h 18m	12,8	146,9	3,6	0,2	+74±2	+11±2	3,5±0,2	+76±5	+17±2	2,3±0,3	+23±5	+5±5	+1,6		
	4h 48m	15,7	148,7	2,5	0,2	+80±5	+21±2	0,6±0,2	+81±5	+21±5	1,8±0,3	+55±5	+6±5	+2,1		
70°	5h 18m	18,7	150,3	1,8	0,2	+84±5	+19±5		+21±5	+23±5	1,5±0,3	+54±5	+6±5	+1,4		
	5h 48m								0,6±0,2	+81±5	+21±5	60±5	-5±5			
	1h 18m	7,7	126,5	2,5	0,3	-18±3	-34±3	-28±3	-28±3	-10±6	2,9±0,3	+6±5	-4±5	-1,5		
	1h 48m	8,2	129,0	3,5	0,3			-50±3	-50±3	-10±6	-26±6	2,7±0,3	+8±5	-2,1		
	2h 18m	9,1	131,5	3,40	0,3			-34±3	-56±3	-20±6	3,0±0,3	+12±5	-10±5	-2,8		
	2h 48m	10,2	133,9	2,90	0,3			-4±3	-32±3	-25±6	3,2±0,3	+23±5	-5±5	-1,8		
	3h 18m	11,5	136,2	2,2	0,3			+21±3	-16±3	-21±6	2,6±0,3	+28±5	-9±5	-1,0		
	3h 48m	12,9	138,4	1,3	0,3			+42±3	+1±3	-11±6	3,0±0,3	+26±5	-15±3	+0,3		
	4h 18m	14,6	140,3	1,6	0,3			+53±4	+1±4	+40±6	1,5±0,3	+24±5	-25±5	+1,6		
	4h 48m	16,5	142,9	2,0	0,3			+64±4	+9±4	+50±6	-5±6	2,8±0,3	+28±10	+2,1		
	5h 18m	18,8	143,2	2,2	0,3			+73±4	+12±4	+60±6	-1±6	1,2±0,3	+32±10	+2,5		
	5h 48m	21,1	144,4	1,9	0,3			+80±4	+11±4	+66±6	-3±6	0,8±0,3	+44±10	+2,1		
	6h 18m	23,7	145,5	1,5	0,3			+85±4	+9±4	+76±6	+0±6	0,5±0,3	+40±10	+3,1		

Таблица 3

Угловые размеры исследованной области Галактики по прямому восхождению на уровне половинной температуры поляризованной компоненты

Частота ( $M\text{гц}$ )	$\delta = 58^\circ$	$\delta = 64^\circ$
437 $M\text{гц}$	1 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup>	2 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>
510 $M\text{гц}$	2 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup>	2 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup>
735 $M\text{гц}$	2 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>	3 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>

Полученные результаты свидетельствуют о следующем.

1. Степень поляризации космического радиоизлучения области вблизи антицентра Галактики существенно возрастает на частоте 735  $M\text{гц}$  по сравнению с ее значениями на более низких частотах.

2. Возрастание степени поляризации с ростом частоты в направлениях со значительной мерой вращения проходит немонотонно.

3. Эффективная мера вращения межзвездной среды мала в центре области и увеличивается к ее краям, причем мера вращения положительна при  $\ell^{\text{II}} > 145^\circ$  и отрицательна при  $\ell^{\text{II}} < 140^\circ$ . Эта особенность уже отмечалась в работе [5].

4. В центре области степень поляризации космического радиоизлучения возрастает приблизительно в два раза на частоте 735  $M\text{гц}$ , по сравнению с ее значением на частоте 437  $M\text{гц}$ ; позиционный же угол меняется с частотой очень мало, что свидетельствует о сложной структуре области (см. табл. 4).

Таблица 4

Поляризационные параметры радиоизлучения центра области ( $\ell^{\text{II}} = 142^\circ$ ,  $b^{\text{II}} = +8^\circ$ ) в зависимости от частоты

Частота ( $M\text{гц}$ )	$\delta = 64^\circ$			$\alpha = 3^{\text{h}}48^{\text{m}}$
	$\chi_g$	$T_{\text{пол}} (^{\circ}\text{К})$	$T_{\text{непол}} (^{\circ}\text{К})$	$P = \frac{T_{\text{пол}}}{T_{\text{пол}} + 2T_{\text{непол}}}$
408 [8]	$0^\circ \pm 2^\circ$	$5,6 \pm 0,2$	42*	6,2 %
437 [табл. 2]	$6 \pm 2$	$5,0 \pm 0,2$	35	6,7
510 [табл. 2]	$5 \pm 2$	$4,6 \pm 0,2$	22	9,5
610 [5]	$4 \pm 2$	$1,62 \pm 0,11$	14	5,5
735 [табл. 2]	$4 \pm 5$	$2,5 \pm 0,3$	8	13,5
950 [11]	$2 \pm 4$	$1,65 \pm 0,2$	3,3	20
1407 [16]	$1,5 \pm 3$	$0,44 \pm 0,1$	1,36	14,0

5. Угловые размеры области на уровне 0,5 по интенсивности поляризованной компоненты заметно возрастают с увеличением частоты.

Результаты измерений поляризации космического радиоизлучения на частотах 437, 510 и 735  $M\text{гц}$  будут обсуждены в другой статье.

Авторы признательны Л. В. Гришкевичу за предоставление данных станции вертикального зондирования ионосфера.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Разин, Астрон. ж., 35, 241 (1958).
2. В. А. Разин, Астрон. ж., 35, 829 (1958).

\* Значение температуры неполяризованного излучения на частоте 408  $M\text{гц}$  взято из работы [5]. Температура неполяризованного фона на других частотах вычислялась по температуре на частоте 408  $M\text{гц}$  в предположении, что спектральный индекс равен 2,8.

3. D. S. Mathewson, D. K. Milne, Nature, **203**, 1273 (1964).
4. В. А. Разин, И. П. Хижнякова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 4, 822 (1965).
5. E. M. Berkhuijsen, W. N. Brouw, C. A. Muller, J. Tinbergen, BAN, **17**, 465 (1965).
6. G. Westerhout, C. L. Seeger, W. N. Brouw, J. Tinbergen, BAN, **16**, 187 (1962).
7. W. N. Brouw, C. A. Muller, J. Tinbergen, BAN, **16**, 213 (1962).
8. E. M. Berkhuijsen, W. N. Brouw, BAN, **17**, 185 (1963).
9. R. Wielebinskii, J. R. A. Shakeshaft. Mon. Not. R. Astr. Soc., **128**, 19 (1964).
10. J. W. M. Baars, P. G. Mezger, H. Wendker, Astroph. J., **142**, 122 (1965).
11. В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **11**, № 6, 814 (1968).
12. Таблицы элементов магнитного поля Земли, ИЗМИРАН СССР, 1955.
13. K. C. Yeh, V. H. Gonzalez, J. Geoph. Res., **65**, 3209 (1960).
14. Э. Е. Митякова, В А Череповицкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **10**, № 1, 7 (1967).
15. F. F. Gardner, J. B. Whitcoak, Nature, **197**, 1162 (1963).
16. R. G. Bingham, Mon. Not R. Astr. Soc., **134**, 327 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 августа 1967 г

### OBSERVATIONS OF COSMIC RADIO EMISSION NEAR GALACTIC ANTI-CENTER AT WAVELENGTHS OF 70, 60 and 40 cm

V. A. Razin, V. V. Khrulyov, V. T. Fyodorov, S. A. Volokhov, A. A. Mel'nikov,  
A. M. Paseka, L. V. Poupysheva

A linear polarization of cosmic radiation was measured at the frequencies of 437, 510 and 735 Mc/s using 8 m in diameter reflector during the period of September—December 1965. The region of the sky limited by the coordinates  $\alpha = 1^{\text{h}} - 7^{\text{h}}$ ,  $\delta = 58^{\circ} - 70^{\circ}$  (the center of the region has the galactic coordinates  $l^{\text{II}} = 142^{\circ}$ ,  $b^{\text{II}} = +8^{\circ}$ ) is investigated. The following results were obtained. 1) A degree of polarization considerably increases at the frequency of 735 Mc/s as compared with its values at the lower frequencies. 2) The change of the polarization degree with the frequency in the directions with considerable rotation measure has a nonmonotonic character. 3) The effective rotation measure of interstellar medium is small in the center of the region and increases to its edges. At  $l^{\text{II}} > 145^{\circ}$  the rotation measure is positive but at  $l^{\text{II}} < 140^{\circ}$  it is negative (as noted in the paper [5]). 4) In the center of the region the degree of polarization appreciably increases with the frequency at a very small variation of the position angle that indicates the complex structure of the region. 5) The angular dimensions of the region at the 0.5 level of the polarized component temperature increase with the growth of frequency.

УДК 523.164.4

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К МЕТОДИКЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

*B. B. Хрулев*

Обращается внимание на методику, позволяющую существенно упростить выделение линейно поляризованной компоненты космического радиоизлучения на фоне побочных эффектов.

Измерения распределения линейно поляризованной компоненты космического радиоизлучения обычно сводятся к снятию «разрезов» по прямому восхождению при различных склонениях  $\delta$ . Для учета побочных эффектов, сопровождающих подобные поляризационные измерения, целесообразно пользоваться опорными областями с известной поляризационной температурой  $T_c$  и экваториальным позиционным углом  $\chi_c^o$ . Способ определения  $T_c$  и  $\chi_c^o$  опорных областей с  $\delta > \varphi$  ( $\varphi$  — широта места) был рассмотрен в работе [1].

В настоящей статье обращается внимание на некоторые моменты, позволяющие существенно упростить методику и повысить точность измерений линейно поляризованной компоненты космического радиоизлучения областей с  $\delta < \varphi$ , для которых метод, описанный в [1], может оказаться неприменимым из-за отсутствия минимума переменной части антенной температуры, возникающей при поляризационных измерениях.

Будем, как и в работе [1], предполагать, что

1) главный лепесток диаграммы направленности антенны обладает круговой симметрией,

2) поляризация антенны изменяется путем вращения облучателя линейной поляризации,

3) во время измерений исследуемая область небосвода непрерывно сопровождается.

Вторая гармоника эффективной температуры на входе радиометра  $T_1$  представляет собой сумму полезного сигнала, обусловленного линейной поляризацией, и второй гармоники побочного эффекта:

$$T_1 = T_{\Sigma}(t) \cos 2[\chi - \chi_{\Sigma}(t)] = T_c \cos \{2[\chi + q(t) - \chi_c^o]\} + \\ + T_n(t) \cos \{2[\chi - \chi_n(t)]\}, \quad (1)$$

где  $T_{\Sigma}(t)$  — амплитуда второй гармоники переменной части антенной температуры;  $T_c$ ,  $T_n(t)$  — эффективные температуры, обусловленные соответственно линейно поляризованной компонентой и побочным эффектом;  $\chi$  — текущий позиционный угол облучателя;  $\chi_{\Sigma}(t)$  — позиционный (фазовый) угол второй гармоники переменной части антенной температуры;  $\chi_c^o$ ,  $\chi_n(t)$  — позиционные углы линейно поляризованной компоненты и побочного эффекта;  $q(t)$  — экваториальный параллактический угол;  $t$  — время. Величины  $T_c$  и  $\chi_c^o$  в выражении (1) постоянны, так как наблюдения ведутся за одной областью небосвода, а характеристи-

ки побочного эффекта  $T_n$  и  $\chi_n$  изменяются вдоль траектории движения области. В общем случае величин  $T_\Sigma(t)$  и  $\chi_\Sigma(t)$ , получаемых в процессе наблюдения за областью, недостаточно для определения  $T_c$  и  $\chi_c^0$ ; необходима дополнительная информация о побочном эффекте. Как показали измерения (см., например, [2-4]) в реальных условиях  $T_n$  и  $\chi_n$  зависят главным образом от угла места. При этом задача определения  $T_c$  и  $\chi_c^0$  существенно упрощается.

Действительно, выберем два момента времени  $t_1$  и  $t_2$ , для которых

$$T_n(t_1) = T_n(t_2), \quad \chi_n(t_1) = \chi_n(t_2). \quad (2)$$

Если изменением побочного эффекта от азимута можно пренебречь, то условия (2) выполняются для любых моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , взятых симметрично относительно времени кульминации области  $t_k$  независимо от значений скоростей изменения характеристик побочного эффекта, т. е.  $t_1 = t_k - \Delta t/2$ ,  $t_2 = t_k + \Delta t/2$ . С помощью векторной диаграммы на плоскости параметров Стокса  $Q$  и  $U$  (рис. 1) находим

$$T_c = \frac{a}{2 \sin |\Delta q|}; \quad (3)$$

$$\chi_c^0 = \chi_\Sigma(t_1) + \beta, \quad (4)$$

где

$$a = [T_\Sigma^2(t_1) + T_\Sigma^2(t_2) - 2T_\Sigma(t_1)T_\Sigma(t_2)\cos(2|\Delta\chi_\Sigma|)]^{1/2},$$

$$|\Delta q| = |q(t_2) - q(t_1)|, \quad |\Delta\chi_\Sigma| = |\chi_\Sigma(t_2) - \chi_\Sigma(t_1)|.$$

В выражении (4)  $\beta$  определяется величиной угла  $\gamma$  (см. рис. 1):

$$\beta = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{T_\Sigma(t_2) \sin(2|\Delta\chi_\Sigma|)}{a} \right) - 45^\circ \quad (\gamma < 90^\circ)$$

и

$$\beta = -\frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{T_\Sigma(t_2) \sin(2|\Delta\chi_\Sigma|)}{a} \right) + 45^\circ \quad (\gamma > 90^\circ).$$

При наличии зависимости  $T_n$  и  $\chi_n$  от азимута величины  $T_c$  и  $\chi_c^0$ , определенные с помощью формул (3) и (4), будут содержать систематические погрешности  $\Delta T_{\text{систем}}$  и  $\Delta \chi_{\text{систем}}$  ввиду нарушения условия (2). Однако в реальных условиях скорости изменения  $T_n$  и  $\chi_n$  из-за изменения азимута значительно меньше соответствующих скоростей, связанных с изменением высоты. Поэтому к  $T_c$  и  $\chi_c^0$ , определенным из (3) и (4), по существу, нужно найти лишь небольшие поправки. Приближенные выражения (несколько завышенные) для оценки  $\Delta T_{\text{систем}}$  и  $\Delta \chi_{\text{систем}}$  могут быть получены из векторной диаграммы (рис. 2):

$$|\Delta T_{\text{систем}}| \simeq \frac{b}{2 \sin |\Delta q|}, \quad (5)$$

$$|\Delta \chi_{\text{систем}}| \simeq \frac{1}{2} \frac{b}{a},$$

где

$$b = [(T'_n)]^2 + 4T_n^2(\chi'_n)^2]^{1/2} \Delta t,$$

$\Delta t = t_2 - t_1$ ;  $T'_n$ ,  $\chi'_n$  — соответственно средние скорости изменения  $T_n$  и  $\chi_n$

из-за изменения азимута в интервале  $\Delta t$ . Значения  $T'_n$  и  $\chi'_n$  определяются из зависимостей  $T_n(t)$  и  $\chi_n(t)$  в районе кульминации, которые легко получить, например, с помощью векторной диаграммы (рис. 1),

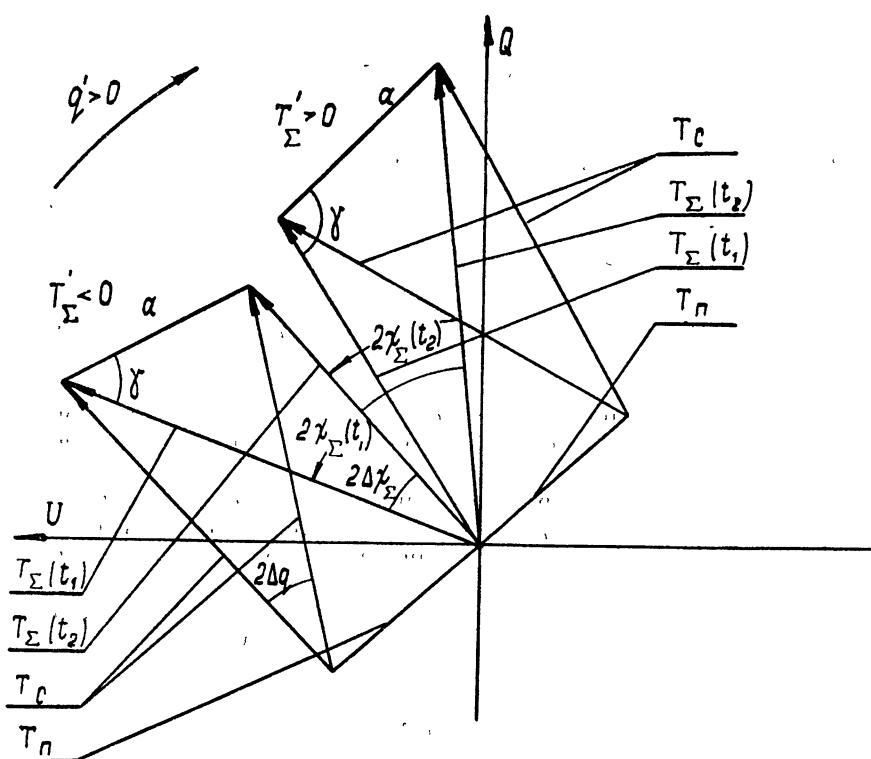
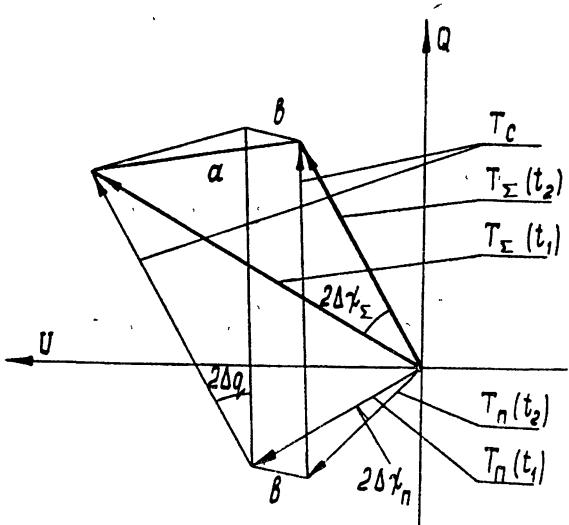


Рис. 1. Векторная диаграмма на плоскости параметров Стокса  $Q = T \cos(2\chi)$  и  $U = T \sin(2\chi)$  для определения  $T_c$  и  $\chi_c$ .

Рис. 2. Векторная диаграмма для определения поправок  $\Delta T_{\text{сист}}$  и  $\Delta \chi_{\text{сист}}$ , обусловленных зависимостью  $T_n$  и  $\chi_n$  от азимута.



пользуясь экспериментальными зависимостями  $T_{\Sigma}(t)$ ,  $\chi_{\Sigma}(t)$  и значениями  $T_c$  и  $\chi_c^{\circ}$ , полученными из (3) и (4).

Для проверки возможности практического использования данного способа выделения полезного сигнала на фоне побочных эффектов были проведены поляризационные наблюдения на волнах  $\lambda = 31,9 \text{ см}$  и  $\lambda = 40,8 \text{ см}$ . На волне  $\lambda = 31,9 \text{ см}$  исследовалась область в районе галактического Шпера с координатами: склонение  $\delta = 14^\circ$  и прямое восхождение  $\alpha = 14^{\text{h}}28^{\text{m}}$ ; на  $\lambda = 40,8 \text{ см}$  — область вблизи антицентра Галактики с координатами:  $\delta = 64^\circ$  и  $\alpha = 3^{\text{h}}48^{\text{m}}$ . Наблюдения проводились с той же антенной системой, что и в работе [1]. Результаты измерений приведены в табл. 1.

Таблица I

$\lambda (\text{см})$	Координаты области		$T_c (\text{°К})$	$\chi_c^{\circ} (\text{град})$
	$\delta$	$\alpha$		
31,9	$14^\circ$	$14^{\text{h}}28^{\text{m}}$	$1,7 \pm 0,3$	$24 \pm 4$
40,8	$64^\circ$	$3^{\text{h}}48^{\text{m}}$	$2,3 \pm 0,3$	$43 \pm 4$

Как показали наблюдения, систематическими погрешностями  $\Delta T_{\text{сист}}$  и  $\Delta \chi_{\text{сист}}$  в обоих случаях практически можно пренебречь с точностью 3%.

В настоящее время рассмотренный способ определения поляризационных характеристик наряду с методом, описанным в [1], используется при исследовании распределения линейной поляризации по небосводу на волне  $\lambda = 31,9 \text{ см}$ .

В заключение пользуясь случаем выразить глубокую признательность В. А. Разину за ряд критических замечаний и полезное обсуждение данной статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
2. В. А. Разин, В. В. Хрулев, В. Т. Федоров, С. А. Волохов, А. А. Мельников, А. М. Пасека, Л. В. Пупышева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 10, 1461 (1968).
3. G. Westerhout, C. L. Seeger, W. N. Brouw, J. Tinbergen, BAN, 16, 187 (1962).
4. W. N. Brouw, C. A. Muller, J. Tinbergen, BAN, 16, 213 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
27 ноября 1967 г.

#### ADDITIONAL CORRECTIONS TO THE METHOD OF MEASURING LINEAR POLARIZATION OF COSMIC RADIATION

V. V. Khroulev

Consideration is given to the method of simplifying in a considerable degree the discrimination of a linearly-polarized component of cosmic radiation against the background of spurious effects.

УДК 535.853.4

## ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ СОВМЕЩЕНИЯ СИГНАЛОВ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА С АВТОНОМНЫМИ ПРИЕМНИКАМИ

*В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлюк, В. Д. Кротиков,  
В. Н. Никонов, В. С. Троицкий*

Рассмотрена схема совмещения сигналов радиоинтерферометра с большой базой с автономными приемниками и с записью сигналов на магнитных лентах. Совмещение осуществляется на мишени запоминающей электронно-лучевой трубки с управлением скорости развертки, что позволяет компенсировать нестабильность скоростей магнитофонов. Для нахождения начала отсчета применяется управление моментом начала развертки, что позволяет осуществить относительный сдвиг записей

Основной трудностью получения высокой угловой разрешающей способности радиоинтерферометров путем увеличения расстояния между антеннами является сложность совмещения в анализаторе сигналов принимаемого излучения без нарушения фазовых соотношений, имеющих место на входах антенн. В обычных интерферометрах применяются линии связи между антеннами для передачи единого гетеродинного сигнала и выходных сигналов приемников. Расстояние между антеннами интерферометра подобного типа, и, следовательно, его разрешающая способность принципиально ограничены длиной линии связи, при которой нарушение фазовых соотношений между сигналами антенн, обусловленное флюктуациями электрических длин линий связи, не превышает допустимых значений.

Известен способ построения радиоинтерферометров с использованием автономных приемников с высокостабильными местными гетеродинами и записью сигналов на магнитной ленте в каждом пункте приема с последующим совмещением записей при обработке [1, 2]. Осуществление этого способа требует применения магнитофонов с относительной нестабильностью и неравенством средних значений их скоростей порядка  $10^{-4}$ — $10^{-5}$  и высокоточного временного совмещения записей при их обработке.

В настоящей работе рассматривается возможность совмещения сигналов радиоинтерферометра с автономными приемниками с записью сигналов промышленными магнитофонами, позволяющая исключить влияние нестабильности и неравенства средних значений скоростей магнитофонов на фазовые соотношения между сигналами, а также производить сдвиг во времени записанной информации для нахождения корреляции сигналов. Совмещение сигналов, записанных на магнитных лентах, осуществляется на мишени запоминающей электронно-лучевой трубки с последующим считыванием их суммы для получения интерферограммы. Для исключения фазовых искажений сигналов, обусловленных влиянием нестабильности скоростей магнитофонов, применяется управление скоростью развертки запоминающей электронно-лучевой трубы опорными сигналами одинаковой частоты, записанными совместно с информативными сигналами на магнитных лентах в каждом пункте приема. Частота опорного сигнала, по-

лученного от стандарта частоты, являющегося одновременно гетеродином, выбирается вблизи верхней границы полосы пропускания магнитофона. Для синхронизации записи применяются сигналы Службы Единого Времени (СЕВ), записанные на ту же магнитную ленту. Сдвиг во времени одного сигнала относительно другого при обработке для исключения ошибок синхронизации осуществляется ступенчатым сдвигом момента начала перезаписи с одного из магнитофонов на мишень запоминающей электронно-лучевой трубки путем управления началом развертки с помощью импульсной линии задержки регулируемой длительности до получения корреляции записанных сигналов.

Совмещение сигналов с магнитных лент и считывание их суммы осуществляется на последующих этапах: 1) перезапись сигнала с одного магнитофона на мишень запоминающей электронно-лучевой трубки в течение времени кадра  $T_k$ , определяемого информативной емкостью памяти трубы; 2) перезапись с другого магнитофона сигнала, соответствующего первому по времени записи; 3) считывание их суммы. Интервал времени  $\Delta T_k$  между первым и вторым этапами выбирается таким, чтобы за время обработки этапы 1 и 2 не перекрывались во времени из-за нестабильности и неравенства средних значений скоростей магнитофонов. Предварительный сдвиг одной из записей на время  $T_k + \Delta T_k$  осуществляется механически на длину ленты  $l = (1 - 1.5) V_{cp} \times (T_k + \Delta T_k)$ , где  $V_{cp}$  — средняя скорость магнитофонов. Обеспечение необходимой периодичности операций осуществляется электронными реле времени.

Блок-схема устройства, позволяющего осуществить описанный способ, приведена на рис. 1. Установка состоит из двух магнитофонов, фильтров для разделения информативных и опорных сигналов, ампли-

тудных селекторов для выделения сигналов СЕВ, электронных ключей, электронных реле времени, управляемой импульсной линии задержки, электронно-лучевой трубы с управляемой разверткой.

Электронные реле времени, работающие по принципу счета числа периодов опорных сигналов, управляют ключами  $K_1$  и  $K_2$ , обеспечивающими поочередное считывание с магнитофонов. Начало счета каждого электронного реле определяется импульсным сигналом СЕВ, записанным на данном магнитофоне.

Информативный сигнал с магнитофонов 1 или 2 через соответствующий ключ поступает на модулятор запоминающей электронно-лучевой трубы. Опорный сигнал с ключей  $K_1$  или  $K_2$  поступает в блок разверток на формирование ступенчатых напряжений строчной и кадровой разверток, которые

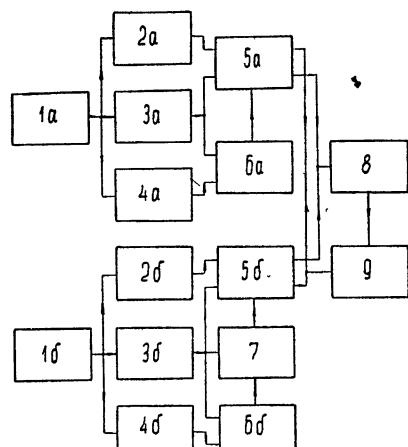


Рис. 1. Блок-схема устройства для совмещения сигналов:

1a, b — магнитофон; 2a, b — фильтры информативного сигнала; 3a, b — фильтры опорного сигнала; 4a, b — амплитудные селекторы сигналов СЕВ; 5a, b — ключ  $K_1$ ; 6a, b — ключ  $K_2$ ; 7a, b — электронное реле  $P_1$ ; 8a, b — электронное реле  $P_2$ ; 9a, b — линия задержки; 8 — блок развертки; 9 — зЭЛТ.

вырабатываются триггерными схемами с суммированием анодных токов. Длительность ступеньки определяется периодом опорного сигнала, а длительностью строки. Амплитуда ступеньки определяется параметрами

схемы, поэтому на данном интервале развертки укладывается определенное число периодов опорного сигнала независимо от скорости магнитофона. Такое формирование развертки из опорных сигналов (при условии их квазикогерентности при записи на магнитную ленту) обеспечивает сохранение фазовых соотношений информативных сигналов при их совмещении на мишени запоминающей электронно-лучевой трубки независимо от нестабильностей скоростей магнитофонов и неравенства их средних значений [3].

Для прохождения интервала ошибок синхронизации сигналов при их совмещении на мишени запоминающей электронно-лучевой трубки в канал управления считыванием со второго магнитофона включена управляемая импульсная линия задержки на триггерах с устанавливаемыми обратными связями, работающая по принципу счета числа  $N$  переходов опорного сигнала через нуль [4]. Импульсы с электронного реле  $P_2$  поступают на линию задержки и задерживают момент считывания со второго магнитофона на время  $N\tau$ , где  $\tau$  — период опорного сигнала. Установка обратных связей для изменения числа счета  $N$  осуществляется релейной схемой, которая меняет длительность задержки ступенями на величину, равную  $\tau$ , через время  $T$ , определяемое требуемой чувствительностью радиоинтерферометра. Точность и стабильность сдвига во времени записи одного сигнала относительно другого определяется частотой и стабильностью опорного сигнала при его записи и не зависит от скоростей магнитофонов.

Считывание суммы сигналов производится переводом трубы в режим считывания блоком управления. Таким образом, рассмотренный способ позволяет исключить влияние нестабильностей скоростей магнитофонов и осуществить автоматически сдвиг одной записи относительно другой, что дает возможность использования этого способа при построении радиоинтерферометра с большой базой с записью сигналов на магнитных лентах.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. И. Матвеенко, Н. С. Кардашев, Г. Б. Шоломицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 651 (1965)
- В. И. Слыши, УФН, 87, 3 (1965)
- В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлюк, В. Д. Кротиков, А. П. Барабанов, ПТЭ (в печати).
- В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлюк, В. Д. Кротиков, П. С. Живорा, ПТЭ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
30 ноября 1967 г.

#### ON SIGNAL MATCHING IN RÂDIO INTERFEROMETER SYSTEM WITH INDEPENDENT RECEIVERS

V. A. Alekseev, E. D. Gatelyuk, V. D. Krotikov, V. N. Nikonorov, V. S. Troitskii

A circuit for signal matching in a radio interferometer system of a large base with independent receivers and signal recording on magnetic tapes is considered. The matching is made on the target of a memory electron-beam tube with the rate scanning control that compensates instabilities of the tape recorder velocities. The relative shift of recordings to find the zero reference is realized by a control of the scanning beginning moment.

УДК 621.371.1

## К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

*Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Ю. Г. Гуревич*

Изучены возможные стационарные режимы, возникающие при распространении электромагнитных волн в твердом теле и плазме с диэлектрической проницаемостью, зависящей от модуля поля

При распространении электромагнитных волн в твердом теле и плазме в ряде случаев диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  зависит от квадрата электрического поля  $\Sigma$ , усредненного по времени, т. е.  $\epsilon$  есть функция от  $\bar{\Sigma}^2$ . При этом, естественно,  $\epsilon$  явно от времени не зависит.

В настоящей работе исследуется распространение электромагнитных волн в средах с такой диэлектрической проницаемостью.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В одномерном случае уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн в рассматриваемой среде, сводятся к волновому уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \epsilon \left( \bar{\Sigma}^2, \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $c$  — скорость света в вакууме,  $t$  — время,  $z$  — координата. Зависимость  $\epsilon$  от  $\frac{\partial}{\partial t}$  обусловлена наличием временной дисперсии среды.

Ограничимся стационарным случаем. Будем искать электромагнитное поле в среде в виде

$$\mathcal{E} = u(z) \cos(\omega t - S(z)),$$

где  $\omega$  — частота электромагнитного поля, или в виде

$$\mathcal{E} = E e^{-i\omega t} + E^* e^{i\omega t}, \quad (1.2)$$

где

$$E = 2u(z) e^{iS(z)}, \quad (1.3)$$

а знак  $*$  означает комплексное сопряжение.

В этом случае  $\bar{\Sigma}^2 = u^2(z)/2$  и, следовательно, диэлектрическая проницаемость является функцией от  $u$  и частоты поля  $\omega$ . В дальнейшем мы ее будем обозначать как  $\epsilon(u)$ . Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(u)$  вычислялась для различных случаев в ряде работ (см., например, [1-4]).

Подставив (1.2) в (1.1) и учитя, что  $\epsilon(u)$  от времени не зависит\*, для  $E$  получим следующее уравнение:

\* Поскольку  $\epsilon(u)$  от времени не зависит, отсутствуют эффекты, связанные с умножением частоты [5].

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(u) E = 0. \quad (1.4)$$

В дальнейшем для определенности предположим, что  $\varepsilon(u)$  — ограниченная монотонная функция  $u$ . Другие случаи сводятся к этому. Допустим сначала, что  $\varepsilon(u)$  — вещественная функция, т. е. пренебрежем диссипацией электромагнитного поля.

Подставляя  $E$  в форме (1.3) в (1.4) и приравнивая нулю вещественные и мнимые части получившегося уравнения, для  $u(z)$  и  $S(z)$  будем иметь следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} - u \left( \frac{dS}{dz} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(u) u &= 0, \\ 2 \frac{du}{dz} \frac{dS}{dz} + u \frac{d^2S}{dz^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Второе уравнение системы (1.5) имеет интеграл

$$u^2 \frac{dS}{dz} = M. \quad (1.6)$$

Заметим, что  $M$  с точностью до  $c^2/8\pi\omega$  совпадает с вектором Пойнтинга, т. е. уравнение (1.6) описывает закон сохранения плотности потока энергии вдоль оси  $z$ .

Предположим, что поле излучается только источником, расположенным на  $-\infty$ . Тогда очевидно, что энергия может переноситься электромагнитным полем только в положительном направлении, откуда следует, что  $M \geq 0$ .

Подставив  $\frac{dS}{dz}$  из (1.6) в первое из уравнений системы (1.5) и проинтегрировав его один раз, для определения  $u(z)$  имеем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \frac{M^2}{2u^2} + V(u) = W, \quad (1.7)$$

где

$$V(u) = \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^u \varepsilon(u) u \, du. \quad (1.8)$$

Решение уравнений (1.6) и (1.7) запишется следующим образом:

$$\sqrt{2} z = \int_{u_0}^u \frac{du}{\left[ W - V(u) - \frac{M^2}{2u^2} \right]^{1/2}}; \quad (1.9)$$

$$S = S_0 + M \int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 \left[ 2W - 2V(u) - \frac{M^2}{u^2} \right]^{1/2}}. \quad (1.10)$$

Здесь  $u_0$  и  $S_0$  — значения  $u(z)$  и  $S(z)$  при  $z = 0$ . Если  $u$  с ростом  $z$  возрастает, то в (1.9) и (1.10) перед корнем нужно брать знак плюс, если убывает — минус. Формулы (1.9) и (1.10) не явно определяют зависимость  $u$  и  $S$  от  $z$ , а следовательно, и  $E(z)$ .

Как видно из (1.9) и (1.10), математически рассматриваемая задача эквивалентна задаче о движении частицы в центральном поле с потенциальной энергией  $2V(u)$  ( $u$  — играет роль радиуса,  $S$  — угла,  $z$  — времени).

Исследуем поведение функций  $u(z)$  и  $S(z)$ . Это исследование совершенно аналогично проведенному в [6]. Ввиду этого мы воспользуемся аналогичной классификацией. Из (1.9) ясно, что в силу вещественности  $z$  подкоренное выражение должно быть положительно, т. е.

$$\Phi(u) = 2W - 2V(u) - \frac{M^2}{u^2} \geq 0, \quad (1.11)$$

причем  $\Phi(u_0)$  может быть как больше нуля, так и равно нулю. Предположим сначала, что  $\Phi(u_0) > 0$ . При  $M > 0$  уравнение  $\Phi(u) = 0$  обязательно имеет корень при  $u < u_0$ , так как при  $u \rightarrow 0$   $\Phi(u) \rightarrow -\infty$ . Обозначим этот корень через  $u'$ , причем  $u' > 0$ .

Если при  $u > u_0$  уравнение  $\Phi(u) = 0$  также имеет корень  $u = u''$  то функция  $u(z)$  будет осциллирующей с периодом, определяемым следующим соотношением:

$$b = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{u'}^{u''} \frac{du}{\left[ W - V(u) - \frac{1}{2} \frac{M^2}{u^2} \right]^{1/2}}. \quad (1.12)$$

Если же один из корней, например,  $u'$  — кратный, то  $u(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  будет асимптотически стремиться к  $u'$ . Это следует из того, что при  $u \rightarrow u'$   $z \rightarrow \infty$ . Для определения этой асимптотики в интеграле (1.9) необходимо выделить особенность (см. [1]). В случае, когда  $u'$  — корень кратности два, представим (1.9) в виде

$$z = - \int_{u_0}^{u'} \left[ \Phi^{-1/2}(u) - \left( \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(u')}{du^2} \right)^{-1/2} \frac{1}{u-u'} \right] du - \\ - \left( \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(u')}{du^2} \right)^{-1/2} \int_{u_0}^{u'} \frac{du}{u-u'}. \quad (1.13)$$

При этом первый интеграл сходится, поэтому верхний предел можно заменить на  $u'$ , а второй интеграл вычисляется непосредственно. В результате для  $E(z)$  при больших  $z$  получаем

$$E = \left\{ u' + (u_0 - u') Q \exp \left[ - \left( \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(u')}{du^2} \right)^{1/2} z \right] \right\} \exp \left\{ iS_1 + i \frac{M}{u'^2} z \right\}. \quad (1.14)$$

Здесь

$$Q = \exp \left\{ - \int_{u_0}^{u'} du \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(u')}{du^2} \right)^{1/2} \Phi^{-1/2}(u) - \frac{1}{u-u'} \right] \right\},$$

$$S_1 = S_0 - \frac{M}{u'^2} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(u')}{du^2} \right)^{-1/2} \left[ \frac{u_0 - u'}{u_0} + \ln \left( Q \frac{u_0}{u'} \right) \right] - \\ - M \int_{u_0}^{u'} \frac{du}{u^2} \left[ \Phi^{-1/2}(u) - \left( \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi(u')}{du^2} \right)^{-1/2} \frac{1}{u-u'} \right].$$

Когда  $u = u''$  является кратным корнем уравнения  $\Phi(u) = 0$ , асимптотика для  $E(z)$  получается из (1.14) заменой в выражении для  $Q$  знака перед интегралом на  $+$ . Во всех остальных случаях асимптотика вычисляется аналогично.

Заметим, что если  $M = 0$ , то  $u'$  уже не обязательно должно быть больше нуля, в частности,  $u'$  может равняться нулю или быть меньше нуля.

Пусть теперь  $\Phi(u_0) = 0$ . Если  $u_0$  — простой корень уравнения  $\Phi(u) = 0$ , то справедливы все выводы, сделанные выше. Если же  $u_0$  — кратный корень этого уравнения, то  $u(z) \equiv u_0$ . Действительно, из системы (1.5) видно, что  $u \equiv u_0$  является решением, а из (1.9) ясно, что других решений нет, так как при  $u \neq u_0$  интеграл в (1.9) расходится.

Исследуем более детально этот случай ( $M > 0$ ,  $\Phi(u_0) = \frac{d\Phi(u_0)}{du} = 0$ )

Заметим, что, если кратность корня  $u_0$  больше чем два, результаты получаются аналогичными. Из (1.6) с учетом (1.9) для  $S(z)$  получаем следующее выражение:

$$S(z) = knz + S_0. \quad (1.15)$$

Учитывая, что

$$u(z) \equiv u_0, \quad (1.16)$$

запишем поле  $E$  в виде

$$E = Ae^{iknz}. \quad (1.17)$$

Здесь

$$A = u_0 \exp(iS_0), \quad n = \frac{M}{ku_0^2}. \quad (1.18)$$

Из (1.18) видно, что  $n > 0$ . Формула (1.17) описывает плоскую волну. Используя условия  $\Phi(u_0) = \frac{d\Phi(u_0)}{du} = 0$ , получаем систему уравнений для определения  $M$  и  $W$  через  $u_0$ :

$$M = ku_0^2 \epsilon^{1/2}(u_0). \quad (1.19)$$

$$W = V(u_0) + \frac{1}{2} k^2 u_0^2 \epsilon(u_0).$$

Из первого уравнения системы (1.19) и определения  $n$  следует, что

$$n^2 = \epsilon(u_0). \quad (1.20)$$

Отсюда видно, что плоская волна распространяется лишь при тех  $u_0$ , для которых  $\epsilon(u_0) > 0$ . Исследуем, как влияет малое затухание в этом (последнем) случае. Запишем  $\epsilon(u)$  в виде  $\epsilon(u) = \epsilon_1(u) + i\epsilon_2(u)$ . Член  $\epsilon_2(u)$  учитывает диссипативное затухание. Поэтому условием малости затухания является условие  $\epsilon_2(u) \ll \epsilon_1(u)$ . Так как при  $\epsilon_2(u) = 0$  амплитуда поля  $u$  постоянна, наличие малого затухания может привести лишь к медленному изменению  $u(z)$ . С учетом затухания для определения  $u(z)$  и  $S(z)$  имеет место такая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} - u \left( \frac{dS}{dz} \right)^2 + k^2 \epsilon_1(u) u &= 0, \\ 2 \frac{du}{dz} \frac{dS}{dz} + u \frac{d^2S}{dz^2} + k^2 \epsilon_2(u) u &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В силу модленности изменения  $u$  с  $z$  можно в первом уравнении (1.21) пренебречь  $\frac{d^2u}{dz^2}$  по уравнению с  $u\left(\frac{dS}{dz}\right)^2$ , после чего для  $S$  получим следующее выражение:

$$S = k \int_{u_0}^u \sqrt{\varepsilon_1(u)} du + S_0. \quad (1.22)$$

Подставляя  $\frac{dS}{dz}$  из (1.22) во второе уравнение (1.21) и интегрируя, найдем в неявном виде  $u(z)$ :

$$-kz = \int_{u_0}^u \frac{\left(4\varepsilon_1(u) + u \frac{d\varepsilon_1(u)}{du}\right)}{2\varepsilon_2(u) \sqrt{\varepsilon_1(u)}} du. \quad (1.23)$$

Асимптотика  $u(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  имеет вид

$$u = u_0 Q \exp \left[ -\frac{k\varepsilon_2(0)}{2\sqrt{\varepsilon_1(0)}} z \right], \quad (1.24)$$

где

$$Q = \exp \left\{ \frac{\varepsilon_2(0)}{4\sqrt{\varepsilon_1(0)}} \int_0^{u_0} \frac{du}{u} \left[ \frac{4\varepsilon_1(u) + u \frac{d\varepsilon_1(u)}{du}}{\varepsilon_2(u) \sqrt{\varepsilon_1(u)}} - 1 \right] \right\}.$$

Исследуем теперь случай, когда  $M = 0$ . (При конкретном виде  $\varepsilon(u)$  этот случай рассматривался в [7, 8].) Из формулы (1.6) следует, что при  $M = 0$

$$S(z) \equiv S_0. \quad (1.25)$$

Предположим также, что  $\Phi(0) = 0$ . (Случай  $M = 0$  и  $\Phi(0) < 0$  приводит к осциллирующим решениям и исследован выше.) Из условий  $M = \Phi(0) = 0$  следует, что  $W = 0$ , и зависимость  $u(z)$  определяется формулой (см. (1.9))

$$-\sqrt{2}z = \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{-2V(u)}}. \quad (1.26)$$

Заметим, что, как следует из (1.11), при  $M = 0$   $\frac{d\Phi(0)}{du} = 0$ , т. е. в этом случае  $u=0$  — кратный корень уравнения  $\Phi(u)=0$ . Значит, при  $z \rightarrow \infty$   $u(z) \rightarrow 0$ . Заметив, что  $V(u)$  при  $u \rightarrow 0$  стремится к нулю как  $\frac{d^2V(0)}{2du^2} u^2$ , поведение  $u(z)$  при больших  $z$  описывается формулой

$$u = u_0 Q \exp(-k\sqrt{-\varepsilon(0)}z), \quad (1.27)$$

где

$$Q = \exp \left\{ \int_0^{u_0} \left[ \frac{k\sqrt{-\varepsilon(0)}}{\sqrt{-2V(u)}} - \frac{1}{u} \right] du \right\}.$$

Из формул (1.25) и (1.26) видно, что это решение существует, когда  $\varepsilon(0) < 0$ , и  $V(u)$  при  $0 < u \leq u_0$  меньше нуля. Физически это решение аналогично полному внутреннему отражению в линейном случае.

## 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ.

Рассмотрим падение электромагнитной волны из вакуума на полупространство с диэлектрической проницаемостью, зависящей от  $u$ . В качестве границы раздела вакуум — полупространство выберем плоскость  $z = 0$  (ось  $z$  направлена в глубь полупространства). Поле в вакууме удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2E}{dz^2} + k^2E = 0. \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения таково:

$$E = E_0 (e^{ikz} + Re^{-ikz}). \quad (2.2)$$

Здесь  $R$  — коэффициент отражения от границы раздела,  $E_0$  — амплитуда падающей волны, которая считается заданной.

Уравнение для поля в среде имеет вид (1.4), а его решение описывается формулами (1.9) и (1.10). Для определения констант интегрирования необходимо использовать граничные условия, в точке  $z = 0$  имеющие вид

$$E(-0) = E(+0), \quad \frac{dE(-0)}{dz} = \frac{dE(+0)}{dz}. \quad (2.3)$$

Остановимся на исследовании решений вида (1.17) и (1.25), (1.26). Когда поле в нелинейной среде описывается формулой (1.17), с помощью граничных условий (2.3) можно определить  $A$  и  $R$ . Подставляя в (2.3)  $E$ , из (2.2) и (1.7) получаем систему двух уравнений для  $A$  и  $R$ , решая которую, находим

$$A = \frac{2E_0}{1+n}, \quad R = \frac{1-n}{1+n}. \quad (2.4)$$

Из вещественности  $n$  следует, что  $A$  также вещественно. Приравнивая порознь вещественные и минимые части уравнения (1.18), получаем, что  $S_0 = 0$ , а  $A = u_0$ , т. е.

$$u_0 = \frac{2E_0}{1+n}. \quad (2.5)$$

Подставляя в формулу (1.20)  $u_0$  из (2.5), получаем уравнение для  $n$ :

$$n^2 = \varepsilon \left( \frac{2E_0}{1+n} \right). \quad (2.6)$$

Если функция  $\varepsilon(u)$  положительна при любом  $u$ , уравнение (2.6) всегда имеет решение, причем, если с ростом  $u$   $\varepsilon(u)$  возрастает, то это решение единственное (рис. 1а), а если  $\varepsilon(u)$  убывает, уравнение (2.6) имеет нечетное число решений ( $1, 3, 5, \dots$ ) (рис. 1б). Количество решений зависит от конкретного вида  $\varepsilon(u)$ .

В том случае, когда  $\varepsilon(u) < 0$  при  $u < u_1$  (т. е. при  $n > n_1 = (2E_0/u_1) - 1$ ), и  $\varepsilon(u) > 0$  при  $u > u_1$  ( $n < n_1$ ), уравнение (2.6) имеет единственное решение, когда  $E_0 > u_1/2$  (рис. 1в).

Наконец, если  $\varepsilon(u) > 0$  при  $u < u_2$  ( $n > n_2 = (2E_0/u_2) - 1$ ) и  $\varepsilon(u) < 0$  при  $u > u_2$  ( $n < n_2$ ), уравнение (2.6) имеет нечетное число решений при  $E_0 < u_2/2$  (рис. 1г). Если  $E_0 > u_2/2$  уравнение (2.6) либо вообще не имеет решения (рис. 1д), либо имеет их четное число (рис. 1е) в зависимости от конкретного вида  $\varepsilon(u)$ . Во всех остальных случаях плоская волна не может распространяться, так как  $\varepsilon(u_0) < 0$ .

Пусть теперь  $M = \Phi(0) = 0^*$ . Волна при  $z < 0$  имеет вид (2.2), а в среде описывается формулами (1.24) и (1.25). Подставляя поле в вакууме и в среде в граничные условия (2.3), получим систему из четырех вещественных уравнений для определения  $R$ ,  $S_0$  и  $u_0$ . Решая ее, имеем для  $R$  и  $S_0$ :

$$R = \frac{1 + [i\sqrt{-2V(u_0)/ku_0}]}{1 - [i\sqrt{-2V(u_0)/ku_0}]}, \quad \exp(iS_0) = \frac{2kE_0}{ku_0 - i\sqrt{-2V(u_0)}}. \quad (2.7)$$

Из первого равенства (2.7) видно, что  $|R| = 1$ .

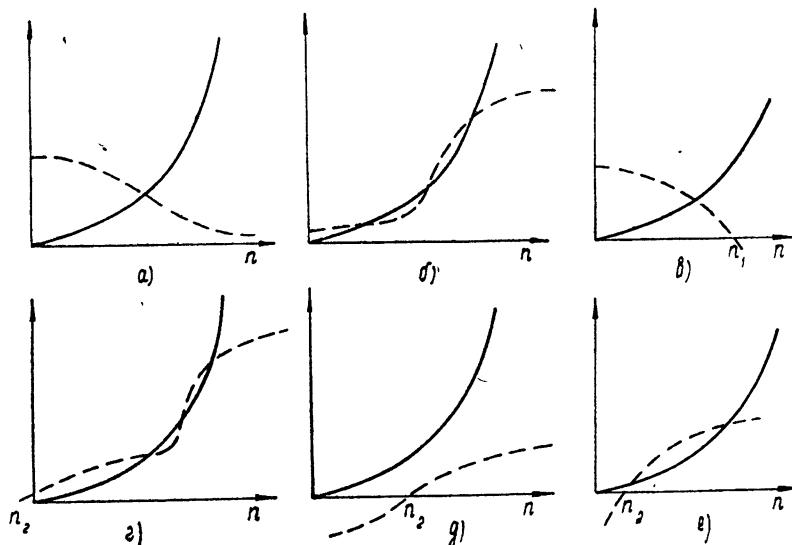


Рис. 1. Графическое решение уравнения (2.6).  
Сплошной линией нанесена функция  $n^3$ , пунктирной —  $\varepsilon(n)$ .

Для определения  $u_0$  имеем следующее уравнение:

$$k^2 E_0^2 \left( 2 - \frac{u_0^2}{2E_0^2} \right) = -V(u_0). \quad (2.8)$$

Если  $\varepsilon(u)$  отрицательно при любом  $u$ , уравнение (2.8) имеет единственное решение (рис. 2а). Если же  $\varepsilon(u) < 0$  при  $u < u_1$  и  $\varepsilon(u) > 0$  при  $u > u_1$ , когда  $E_0 < u_1/2$ , имеется единственное решение уравнения (2.8) (рис. 2б). В том случае, когда  $u_1/2 < E_0 < u_1^*/2$  ( $u_1^* > 0$ ) определяется условием  $V(u_1^*) = 0$ , уравнение (2.8) имеет нечетное число корней (рис. 2в). Наконец, при  $E_0 > u_1^*/2$  уравнение (2.8) либо вообще не имеет решений (рис. 2г), либо имеет их четное число (рис. 2д) в зависимости от конкретного вида функции  $\varepsilon(u)$  и величины амплитуды падающего поля  $E_0$ . В остальных случаях решение, соответствующее полному внутреннему отражению, не осуществимо, так как не выполняется условие  $\varepsilon(0) < 0$ . Учет малого затухания здесь не имеет смысла, так как может привести лишь к несущественному изменению зависимости  $E(z)$ .

Когда один из корней уравнения  $\Phi(u) = 0$  ( $u'$  или  $u''$ ) кратный и не равен нулю, учет малого затухания может быть проведен следующим

\* Этот случай исследовался в [9], где изучалось смещение границы прозрачности с увеличением амплитуды падающего поля. Вид функции  $\varepsilon(u)$  считался заданным.

образом: при достаточном удалении от плоскости  $z = 0$  волна становится плоской, поэточно применимы выводы случая  $M > 0$ ,  $\Phi(u_0) = \frac{d\Phi(u_0)}{du} = 0$  (см. (1.21) — (1.24)).

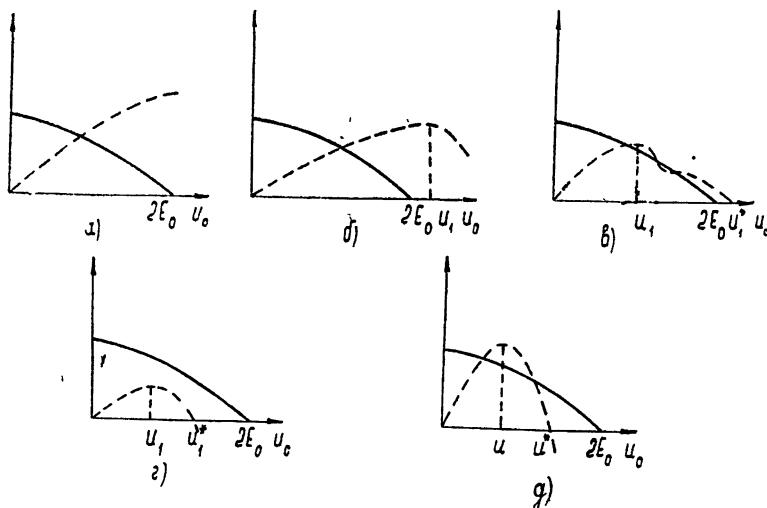


Рис. 2. Графическое решение уравнения (2.8).

Сплошная линия — функция  $k^2 E_0^2 (2 - u^2/2 E_0^2)$ , пунктира —  $V(u)$ .

Наконец, если  $u(z)$  — осциллирующая функция  $z$ , малое затухание учитывается аналогично тому, как это делалось в [9].

### 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим падение электромагнитной волны из вакуума на пластину толщиной  $a$ . Пластина ограничена плоскостями  $z = 0$  и  $z = a$ . При  $z < 0$  электромагнитное поле имеет вид (2.2). При  $0 < z \leq a$  поле определяется формулами (1.9) и (1.10). Наконец, при  $z > a$  поле должно быть найдено из уравнения (1.17). С учетом условия излучения для поля в области  $z > a$  имеем

$$E = E_3^{(0)} \exp[ik(z - a)]. \quad (3.1)$$

Границное условие на поле в точке  $z = 0$  имеет вид (2.3). В точке  $z = a$  оно получается из (2.3) заменой нуля на  $a$ . С помощью обычной процедуры, описанной выше, из граничных условий получаем следующие выражения для  $M$ ,  $W$ ,  $R$ ,  $S_0$ ,  $E_3^{(0)}$ :

$$M = ku_a^2, \quad W = V(u_a) + \frac{k^2 u_a^2}{2},$$

$$R = R_r + iR_i,$$

$$R_r = \frac{u_0^2 + u_a^2}{2E_0^2} - 1,$$

$$R_i = \frac{1}{2E_0^2} [4E_0 u_0^2 - u_0^4 - 2u_0^2 u_a^2 - u_a^4]^{1/2},$$

$$\cos S_0 = \frac{u_0^2 + u_a^2}{2E_0 u_0}, \quad (3.2)$$

$$E_3^{(0)} = u_a \exp \left\{ iS_0 + iku_a^2 \int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 [2V(u_a) + k^2 u_a^2 - 2V(u) - (k^2 u_a^4/u^2)]^{1/2}} \right\}.$$

Связь между  $u_0$  и  $u_a$  имеет вид

$$V(u_a) - V(u_0) = \frac{k^2}{2} (4E_0^2 - u_0^2 - 3u_a^2). \quad (3.3)$$

Здесь  $u_a$  — значение  $u(z)$  при  $z = a$ . Еще одна связь между  $u_0$  и  $u_a$  получается из формулы (1.9) при  $z = a$ :

$$a = \int_{u_0}^{u_a} \frac{du}{[2V(u_a) + k^2 u_a^2 - 2V(u) - (k^2 u_a^4/u^2)]^{1/2}}. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3), (3.4) и формулы (3.2) определяют произвольные константы, входящие в задачу. Функция  $\Phi(u)$  в формулах (1.9) и (1.10) для пластины такова:

$$\Phi(u) = 2V(u_a) + k^2 u_a^2 - 2V(u) - \frac{k^2 u_a^4}{u^2}. \quad (3.5)$$

Заметим, что  $\Phi(u_a) = 0$ . Дифференцируя (3.5), получим  $\frac{d\Phi(u_a)}{du} = 2k^2 u_a^2 [1 - \varepsilon(u_a)]$ , т. е. знак  $\frac{d\Phi(u_a)}{du}$  зависит от того, больше или меньше единицы  $\varepsilon(u_a)$ . Если  $\varepsilon(u_a) < 1$ , то  $\frac{d\Phi(u_a)}{du} > 0$  и, следовательно,  $u_a < u_0$ . Если же  $\varepsilon(u_a) > 1$ , то  $\frac{d\Phi(u_a)}{du} < 0$  и  $u_a > u_0$ .

В том случае, когда уравнение  $\Phi(u) = 0$  имеет единственный корень  $u = u_a$ , решение  $u(z)$  будет монотонным, причем при  $\varepsilon(u_a) > 1$   $u$  будет расти с ростом  $z$ , а при  $\varepsilon(u_a) < 1$  — убывать. Графическое исследование показывает, что  $\Phi(u) = 0$  имеет единственный корень, если  $\varepsilon(u) < 0$  при любых значениях  $u$ . При этом система (3.2) и уравнения (3.3), (3.4) имеют единственное решение.

Если уравнение  $\Phi(u) = 0$  имеет корень  $u = u_b$ , отличный от  $u_a$ , то функция  $u(z)$  будет колеблющейся с полупериодом

$$b = \int_{u_a}^{u_b} \frac{du}{[2V(u_a) + k^2 u_a^2 - 2V(u) - (k^2 u_a^4/u^2)]^{1/2}}. \quad (3.6)$$

Заметим, что  $u_b > u_a$  при  $\varepsilon(u_a) < 1$  и  $u_b < u_a$  при  $\varepsilon(u_a) > 1$ . При наличии двух корней уравнения  $\Phi(u) = 0$  вместо формулы (3.4) будем иметь

$$a = mb \pm \int_{u_0}^{u_a} \frac{du}{[2V(u_a) + k^2 u_a^2 - 2V(u) - (k^2 u_a^4/u^2)]^{1/2}} \quad (3.7)$$

или

$$a = mb \mp \int_{u_0}^{u_b} \frac{du}{[2V(u_a) + k^2 u_a^2 - 2V(u) - (k^2 u_a^4/u^2)]^{1/2}}.$$

Здесь  $m$  — число полусцилляций, укладывающихся в пластине. Если  $\epsilon(u_a) > 1$ , перед интегралом нужно брать верхний знак, а если  $\epsilon(u_a) < 1$  — нижний. Осциллирующее решение получается в том случае, когда  $\epsilon(u)$  положительно при любом  $u$ , либо когда  $\epsilon(u) < 0$  при  $u < u_1$  и  $\epsilon(u) > 0$  при  $u > u_1$ . При этом мы получаем семейство решений системы (3.2) и уравнений (3.3), (3.7), так как появляется новый параметр  $m$ .

В том случае, когда  $\epsilon(u) > 0$ ,  $u < u_2$  и  $\epsilon(u) < 0$  при  $u > u_2$ , функция  $\Phi(u)$  может иметь как один корень  $u = u_a$ , так и два ( $u_a$  и  $u_b$ ) в зависимости от конкретного вида  $\epsilon(u)$  и значения  $E_0$ .

Таким образом, мы проанализировали всевозможные стационарные решения. Возникает вопрос, какое из них реализуется при возбуждении поля в образце. Для получения ответа в нелинейном случае необходимо решать задачу с начальными условиями, т. е. рассмотреть процесс установления того или иного режима. Кроме того, существенно исследование решений на устойчивость.

Авторы благодарят С. П. Титову за помощь в оформлении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ, 51, 536 (1966).
2. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 45, 1243 (1963).
3. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрономия, 5, 70 (1965).
4. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 4, 675 (1966).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, изд. Наука, М., 1965.
7. Т. Ф. Волков, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 3, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 336.
8. S. A. Seff, Phys. Fluids, 3, 488 (1960).
9. В. П. Силин, ЖЭТФ, 53, 1662 (1967).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
1 августа 1967 г.

#### TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN NONLINEAR MEDIA

*F. G. Bass, I. L. Verbitskii, Yu. G. Gurevich*

Possible stationary regimes arising from propagation of electromagnetic waves in a solid body and plasma with the dielectric permittivity depending on the field modulus are studied.

УДК 621.371.25

## О СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ, НАКЛОННО ОТРАЖЕННЫХ ОТ ИОНОСФЕРЫ

*И. С. Всехсвятская*

На основании одномерной характеристической функции пуассонова процесса вычисляются статистические характеристики многолучевого сигнала, наклонно отраженного от ионосферы. Определены функции плотности вероятности и безразмерные отношения моментов огибающей. Теоретическая модель сопоставляется с экспериментальными данными по наклонному распространению коротких радиоволн.

Радиосигнал, отраженный от ионосферы, в большинстве случаев является многолучевым, т. е. напряженность поля принятой радиоволны  $E \sim \sum_i E_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), где  $E_i$  — напряженности поля отдельных лучей. Каждый луч имеет случайную амплитуду и фазу. Будем считать отдельные лучи статистически независимыми со случайными фазами, равномерно распределенными в интервале  $[0, 2\pi]$ . Основания для этого следующие. При получении широкого углового спектра волн за счет немонотонности изменения свойств ионосферы с высотой происходит разделение первичного пакета волн на несколько групп — собственно лучей. Иными словами, образуются неперекрывающиеся зоны Френеля, соответствующие лучам, внутри которых находятся независимо возникающие неоднородности, обусловливающие статистическую изменчивость отдельных лучей. В зависимости от физических условий в ионосфере процессы разбиения волновых пакетов на лучи и рассеяния в зоне отдельного луча могут быть выражены в различной степени. (Именно в связи с этим ниже будет рассматриваться не обязательно целочисленное количество лучей.) Тогда энергия суммарного процесса  $R^2 = \sum_i r_i^2$ , где  $R$  — огибающая процесса,  $r_i$  — огибающие отдельных компонент сигнала.

В данной постановке возникает задача определения функции плотности вероятности  $W(R)$  при заданных функциях плотности вероятности  $W(r_i)$ .

1. Рассмотрим статистическую модель однолучевого сигнала. Будем предполагать, что в точку приема волна приходит в виде зеркально-отраженной компоненты с амплитудой  $E_c$  и в виде пучка волн, рассеянных на неоднородностях, расположенных в зоне Френеля, образующих случайную компоненту сигнала. Согласно [1] будем считать случайную компоненту пуассоновым шумом. Принятая модель будет характеризоваться двумя параметрами:  $\beta^2 = E_c^2/2\sigma^2$  — отношением энергий зеркальной  $E_c^2$  и шумовой  $2\sigma^2 = r^2$  компонент сигнала и  $\nu/\alpha$  — отношением частоты следования импульсов  $\nu$ , образующих случайную компоненту, к декременту затухания  $\alpha$  отдельного импульса. Согласно центральной предельной теореме при  $\nu/\alpha \rightarrow \infty$  будем иметь переход к гаус-

сову шуму, т. е. параметр  $v/a$  связан с эксцессом функции плотности вероятности модели по отношению к гауссовой.

Одномерная функция плотности вероятности огибающей такого процесса может быть представлена с помощью преобразования Фурье—Бесселя [2]

$$W(r) = r \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) f(\lambda) d\lambda, \quad (1.1)$$

где  $f(\lambda)$  — одномерная характеристическая функция, которая согласно [2] дается следующим выражением:

$$f(\lambda) = J_0(\lambda E_c) \exp \left\{ v \int_0^\infty dt \int_0^\infty da w(a) [J_0(ar) - 1] \right\}. \quad (1.2)$$

Здесь интервал интегрирования по времени  $t$  выбирается бесконечным, исходя из соображений стационарности процесса;  $a$  — амплитуда отдельного импульса со средним значением  $a_0$  и функций плотности вероятности  $w(a)$ ;  $r^2 = \lambda^2 v^2(t)$ , где  $v(t)$  — форма отдельного импульса. Исходя из общих физических соображений относительно характера «жизни» ионосферных неоднородностей, а также удобства интегрирования выражения (1.2), примем

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-|t|} & (t > 0), \\ v(t) &= 0 & (t < 0); \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$w(a) = \frac{a}{a_0^2} K_0 \left( \frac{a}{a_0} \right), \quad (1.4)$$

где  $K_0(a/a_0)$  — функция Бесселя нулевого порядка третьего рода от минимого аргумента, имеющая при больших значениях аргумента асимптотическое выражение  $K_0(a/a_0) = \sqrt{\pi a_0}/2a \exp(-a/a_0)$  [3]. Согласно (1.3) и (1.4) нетрудно получить из (1.2)

$$f(\lambda) = \frac{J_0(\lambda E_c)}{[1 + a_0^2 \lambda^2]^{v/2}} = \overline{J_0(\lambda r)}. \quad (1.5)$$

В случае  $E_c = 0$ , согласно (1.1),

$$W(r) = \frac{r^{v/2} K_{1-v/2} (r/a_0)}{(a_0)^{1-v/2} 2^{v/2-1} \Gamma(v/2)}. \quad (1.6)$$

Параметры  $a_0$  и  $v/2$  являются модельными. Нам необходимо связать их с апостериорными параметрами сигнала, в частности, с моментами огибающей  $r$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Из рассмотрения выражения для характеристической функции  $f(\lambda)$  при  $E_c = 0$  нетрудно видеть, что дисперсия  $\sigma^2 = a_0^2 v/a$ , если учесть, что одномерная характеристическая функция гауссова процесса  $f(\lambda) = \exp(-\sigma^2 \lambda^2/2)$ . Кроме того, если левую и правую части (1.5) разложить по степеням  $\lambda$  и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях, то очевидно, что  $v/2 = 2/E_r$ , где  $E_r = \bar{r}^4/(r^2)^2 - 2$  — эксцесс функции плотности вероятности процесса, заданного принятой моделью, по сравнению с функцией плотности вероятности Рэлея. Это дает возможность записать формулы (1.5) и (1.6) в терминах апостериорных параметров

$$f(\lambda) = \frac{J_0(\lambda E_r)}{[1+E_c \bar{r}^2 \lambda^2/8]2/E_r}, \quad (1.7)$$

где

$$a_0^2 = E_r \bar{r}^2/8, \quad (1.8)$$

$$W(r) = \frac{1}{(2)^{1+2/E_r} \Gamma(2/E_r) a_0} \left( \frac{r}{a_0} \right)^{2/E_r} K_{1-2/E_r} \left( \frac{r}{a_0} \right).$$

Ранее, в работе [1] была предложена несколько иная модель пускового шума, отличающаяся от данной лишь видом функции  $w(a)$ . При больших значениях  $r/a_0$  обе модели совпадают, при малых значениях  $r/a_0$  последняя модель более адекватна физическим процессам, происходящим в ионосфере. Принятая в [1] модель хорошо оправдалась при интерпретации данных по вертикальному зондированию.

2. Прежде чем перейти к модели многолучевого сигнала, рассмотрим двухлучевую модель, у которой  $R^2 = r_1^2 + r_2^2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  имеют функции плотности вероятности (1.8). Для того, чтобы провести интегрирование, положим  $E_c = 0$ . Согласно правилу преобразования переменных

$$W(R) = \frac{R}{2} \int_0^{R^2} \frac{W(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \frac{W(\sqrt{R^2 - x})}{\sqrt{R^2 - x}} dx, \quad (2.1)$$

где  $x = r_1^2$ ,  $y = r_2^2$ ,  $W(x) = W(\sqrt{x})/2\sqrt{x}$ ,  $W(y) = W(\sqrt{y})/2\sqrt{y}$ ,  $R^2 = x + y$ . Используя (1.1), находим

$$W(R) = \frac{R}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_1 \lambda_2 d\lambda_1 d\lambda_2 f(\lambda_1) f(\lambda_2) \times \\ \times 2R^2 \int_0^{\pi/2} J_0(\lambda_1 R \sin \varphi) J_0(\lambda_2 R \cos \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \quad (2.2)$$

при  $x = R^2 \sin^2 \varphi$ .

Окончательно получаем

$$W(R) = R^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_1(R \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \lambda_1 \lambda_2 \frac{d\lambda_1}{[1+E_r \bar{r}^2 \lambda_1^2/8]^{2/E_r}} \times \\ \times \frac{d\lambda_2}{[1+E_r \bar{r}^2 \lambda_2^2/8]^{2/E_r}}. \quad (2.3)$$

Положим  $\bar{r}_1^2 = \bar{r}_2^2 = \bar{R}^2/2$  и  $E_{r_1} = E_{r_2} = E_r$ . Тогда знаменатель в (2.3) можно представить в виде

$$\left(1 + \frac{E_r \bar{r}^2 \lambda_1^2}{8}\right) \left(1 + \frac{E_r \bar{r}^2 \lambda_2^2}{8}\right) \simeq 1 + \frac{E_r}{8} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\bar{R}^2}{2} + O(E_r^2). \quad (2.4)$$

Если предположить, что в области, существенной для интегрирования,  $O(E_r^2) \ll 1$ , и положить  $\lambda_1 = \lambda \sin \psi$ ,  $\lambda_2 = \lambda \cos \psi$ , то

$$W(R) = \frac{R^2}{2} \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda R) \frac{d\lambda}{[1 + E_r \bar{R}^2 \lambda^2 / 16]^{2/E_r}}. \quad (2.5)$$

Этим методом можно сложить  $m$  лучей,  $R^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2$ , и можно без особого труда показать, что функция плотности вероятности для суммы  $m$  лучей есть

$$W_m(R) = \frac{R^m}{2^{m-1} \Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{\lambda^m J_{m-1}(\lambda R)}{[1 + E_r \bar{R}^2 \lambda^2 / 8m]^{2/E_r}} d\lambda. \quad (2.6)$$

При  $E_r = 0$ , как и следует ожидать, выражение (2.6) переходит в  $m$ -распределение Накагами [4]. При  $E_r = 0$  и  $m = 1$  (2.6) есть функция плотности вероятности Рэлея.

В случае наличия постоянного сигнала  $E_c \neq 0$  функция плотности вероятности (2.6) преобразуется к следующему виду:

$$W_m(R) = \frac{R^m}{(Vm)^{m-1} E_c^{m-1}} \int_0^\infty \lambda J_{m-1}(\lambda R) \frac{J_{m-1}(\sqrt{m} \lambda E_c)}{[1 + E_r \bar{R}^2 \lambda^2 / 8m]^{2/E_r}} d\lambda. \quad (2.7)$$

Принятая модель, приводящая к функции плотности вероятности (2.6), позволяет провести все дальнейшие интегрирования и получить в явном виде выражение для функции плотности вероятности  $W_m(R)$  и моментов огибающей  $\bar{R}^p$ :

$$W_m(R) = \frac{4}{(2)^{m+2/E_r} \Gamma(m) \Gamma(2/E_r) R_0} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{m+2/E_r - 1} K_{m-2/E_r} \left( \frac{R}{R_0} \right); \quad (2.8)$$

$$\bar{R}^p = \int_0^\infty R^p W_m(R) dR = (2R_0)^p \frac{\Gamma(m + p/2) \Gamma(2/E_r + p/2)}{\Gamma(m) \Gamma(2/E_r)}, \quad (2.9)$$

где

$$R_0^2 = E_r \bar{R}^2 / 8m.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\frac{\bar{R}^2}{R^2} = \frac{E_r m}{2} \frac{\Gamma^2(m) \Gamma^2(2/E_r + 1)}{\Gamma^2(m + 1/2) \Gamma^2(2/E_r + 1/2)}; \quad (2.10)$$

$$\frac{\bar{R}^4}{(\bar{R}^2)^2} = \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \left( 1 + \frac{E_r}{2} \right). \quad (2.11)$$

Основная особенность принятой модели состоит в том, что при  $R \rightarrow 0$  функция плотности вероятности (2.8) стремится к  $m$ -распределению Накагами [4]

$$W(R) = \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m)(\bar{R}^2)^m} \exp(-mR^2/\bar{R}^2), \quad (2.12)$$

а при  $R^2 \gg \bar{R}^2$  распределение (2.8) имеет более медленный закон убывания, чем (2.12). Иными словами, вероятность низких уровней сигнала всегда подчиняется закону больших чисел и при  $m = 1$  дает рэлеевское распределение огибающей  $R$ . Отклонение плотности вероятности от

закона Рэлея проявляется для больших значений  $R$ , что физически очевидно, поскольку вероятность высоких уровней мала.

Наряду с экспессом отдельного луча  $E_r$ , может быть введен экспесс суммарного процесса ( $m$ -лучевого):

$$E_R = \frac{\bar{R}^4}{(\bar{R}^2)^2} - 2 = \frac{1}{m} + \frac{E_r}{2} + \frac{E_r}{2m} - 1. \quad (2.13)$$

При  $m = 1$   $E_R = E_r$ , как и следовало ожидать. В случае  $E_r = 0$  параметр  $m$  представляет собой обратную величину нормированной дисперсии  $R^2$ , т. е.

$$m = \frac{(\bar{R}^2)^2}{(R^2 - \bar{R}^2)^2} = \frac{1}{\bar{R}^4 / (\bar{R}^2)^2 - 2} = \frac{1}{E_R + 1}, \quad (2.14)$$

и процесс в этом случае описывается  $m$ -распределением Накагами, для которого  $m \geq 1/2$ . Для  $m$ -лучевого процесса (2.13) параметр  $m$  может быть произвольной величиной.

3. Для иллюстрации применимости предлагаемой модели используются экспериментальные данные, полученные на трассах 1500—2000 км на частотах 10—19 Мгц в 1940—1941 гг. в Японии [4]. Приведенные экспериментальные данные были выбраны автором работы [4] для подтверждения его вывода о том, что в основном фединг КВ-радиосигнала на длинных трассах подчиняется  $m$ -распределению.

Для удобства рассмотрения измеренные распределения представлены на рис. 1 в системе логарифм-логарифмических координат для того, чтобы разрешались высокие и низкие уровни сигнала. Ордината и абсцисса выбраны таким образом, чтобы расчетные  $m$ -распределения представляли собой совокупность прямых линий, наклон которых пропорционален величине  $m$ . Для этого по оси абсцисс отложена величина  $\chi = M \ln(R/\sqrt{\bar{R}^2})$ , представляющая собой интенсивность принятого сигнала в децибелях, где  $M = 20 \lg_{10} e = 8,69$ , т. е.

$$\gamma = 20 \lg \frac{R}{\sqrt{\bar{R}^2}}.$$

По оси ординат отложена величина

$$W'(\chi) = \exp \left[ m \left( 1 + 2 \ln \frac{R}{\sqrt{\bar{R}^2}} - \frac{\bar{R}^2}{R^2} \right) \right],$$

которая, как нетрудно убедиться, связана с  $m$ -распределением (2.12) следующим соотношением:

$$W'(\gamma) = R W(R) \frac{\Gamma(m)}{2m^m}. \quad (3.1)$$

Видно, что  $W'(\chi) = 1$  при  $\chi = 0$ ; при  $\chi \rightarrow \pm \infty$   $W'(\chi)$  убывает. Для удобства при переходе через значения  $\chi = 0$  на графике  $W'(\chi)$  изменен знак.

На рис. 1 прямыми линиями обозначены соответствующие теоретические функции распределения (3.1) в зависимости от различных значений параметра  $m$ . Экспериментальные кривые представлены пунктирными линиями со стрелками-указателями внизу. Видно, что в большинстве случаев их закон изменения хорошо соответствует теоретическому распределению для различных значений  $m$  при  $-15 \text{ дБ} < \chi < +5 \text{ дБ}$ .

Вне этого интервала до 50 % кривых имеют более медленный законоубыния по сравнению с теоретическим. Это может объясняться тем фактом, что для величин  $R^2 \gg \bar{R}^2$  действует не закон распределения (2.12), а распределение (2.8), учитывающее более низкую вероятность высоких уровней сигнала.

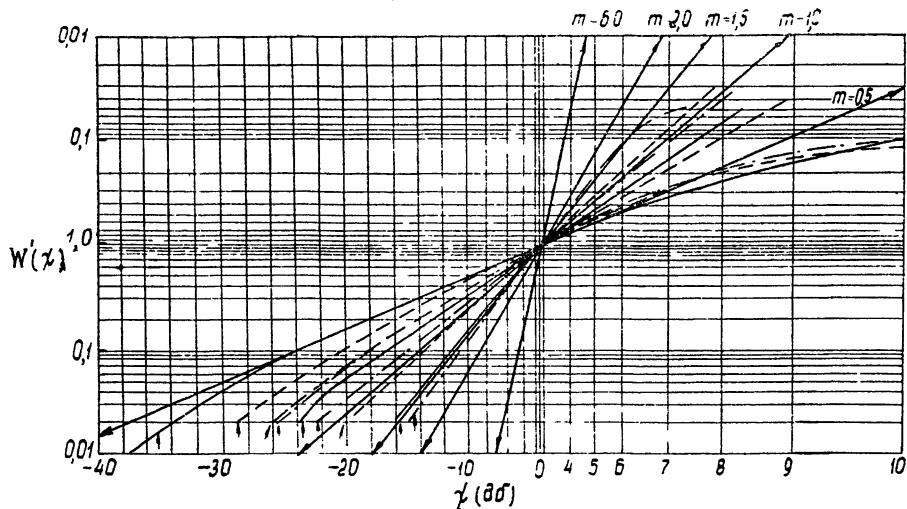


Рис. 1.

В связи с этим предположением был построен ряд зависимостей функции плотности вероятности  $W_m(R)$  (2.8). Зависимости строились в том же масштабе, который принят в работе [4] и описан выше. По аналогии с (3.1) функция плотности вероятности  $m$ -пуассонова распределения будет иметь следующий вид:

$$W_m \left( 10 \lg \frac{R^2}{\bar{R}^2} \right) / W_m(0), \quad (3.2)$$

где в соответствии с (2.8) функция  $W_m$  выражается через  $K_{m-2/E_r}$  — функцию Бесселя порядка ( $m - 2/E_r$ ) третьего рода от мнимого аргумента. Сложность табулирования функции (3.2) заключается в отсутствии достаточно полных таблиц для функции  $K_x()$  нецелочисленного порядка. Поэтому приходилось выбирать некоторые специальные значения параметров  $m$  и  $E_r$ . Кривые № 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 построены для следующих значений параметров (см. рис. 2):

Индекс на графике	$m$	$F_r$
1	0,5	4/3
2 ○	0,5	1
3 ×	1,5	1
4 △	1,5	4/7
5 ⊖	1	2
6 √	1,5	2/3
7 τ	1,5	1/3

На рис. 2 сплошными линиями построены кривые, соответствующие  $m$ -пуассонову распределению (2.8) для приведенных выше параметров

$t$  и  $E_r$ . Пунктирные линии изображают экспериментальные кривые (см. рис. 1).

На основании рис. 2 можно сделать вывод о том, что пуассонова модель дает хорошее согласие с экспериментальными данными в более широком интервале значений  $\chi$  ( $-30 \text{ дБ} < \chi < +10 \text{ дБ}$ ), чем  $t$ -распределение Накагами. В масштабе рис. 1 и 2, где  $t$ -распределение Накагами — прямые линии,  $t$ -пуассоновы распределения —

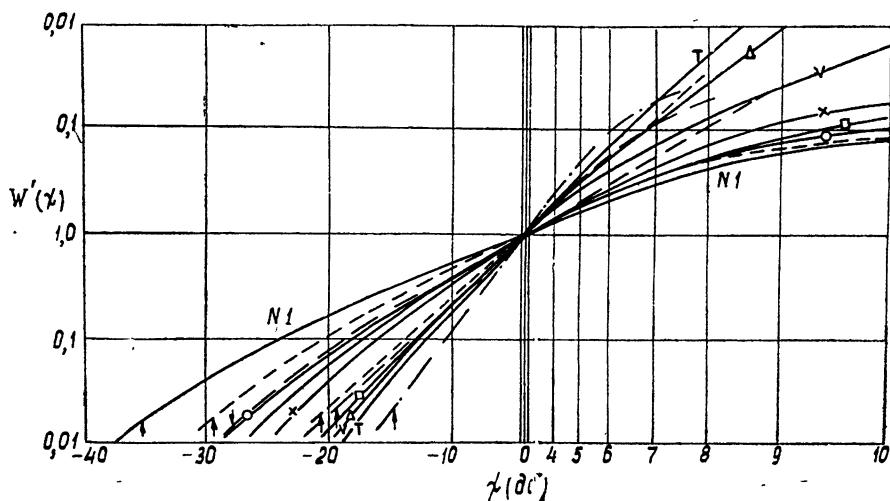


Рис. 2.

кривые линии и знак кривизны соответствует экспериментальному. В особенности хорошее совпадение наблюдается между экспериментальной кривой № 1 на рис. 1 и теоретической кривой с  $t=0,5$ ;  $E_r = 4/3$ . На рис. 2 обе эти кривые изображены единой линией, поскольку в интервале ( $-40 \div +10 \text{ дБ}$ ) эксперимент и теория дают совпадение с трехзначной точностью. Разумеется, для более полного анализа условий применимости  $t$ -пуассоновой модели необходима более широкая проверка с табулированной функцией  $W_t(R)$  для большего числа значений  $E_r$  и  $t$ . Но уже сейчас можно утверждать, что рассматриваемая здесь модель дает более точное описание во всех случаях КВ-связи или КВ-локации, когда значения сигнала, намного превышающие среднеквадратичные, играют существенную роль.

В заключение работы сделаем несколько замечаний. Выше использовались нецелочисленные значения  $t$ . С одной стороны, можно и не требовать, чтобы параметр  $t$  имел обязательно физический смысл числа лучей. С другой стороны, можно определить число лучей как целочисленное значение, например, величины  $t + 1/2$ . Более того, с учетом явлений рассеяния и просачивания, когда дискретный спектр волновых чисел имеет энергию, соизмеримую с непрерывным, можно признать физический смысл и нецелочисленного значения числа лучей. При этом существенными могут оказаться значения  $\beta$ . Проведенная здесь интерпретация базировалась на предположении, что для всех лучей  $\beta \ll 1$ . Использование более сложной формулы (2.7) в сочетании с характеристическим анализом [5], естественно, позволит добиться более точного согласия теории и эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Всехсвятская, Геомагнетизм и аэрономия, 2, № 4, 712 (1962).
2. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, М., 1961.

3. И. С. Градштейн, П. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963
4. Statistical Methods in Radio Wave Propagation, Pergamon Press, 1962.
- 5 И. С. Всехсвятская, Геомагнетизм и аэрономия, 2, № 4, 775 (1962)

Институт земного магнетизма, ионосфера и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию  
20 ноября 1967 г

ON STATISTICAL MODEL OF SIGNALS OBLIQUELY REFLECTED FROM  
THE IONOSPHERE

*I. S. Vsekhsvyatskaya*

The statistical characteristics of multi-beam signal obliquely reflected from the ionosphere are calculated on the basis of one-dimentional characteristic function of Poisson's process. The probability density function and dimensionless ratios of the envelope moments are determined. A theoretical model is compared with experimental data on an oblique propagation of short radio waves.

УДК 621.371.251

## О ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ ГИРОТРОПНЫЙ СЛОЙ (СЛУЧАЙ КРАТНЫХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ)

Г. В. Пермитин

Рассматривается задача о прохождении электромагнитных волн через плоские однородные гиротропные слои в случае кратных волновых чисел. Исследуются поляризационные и энергетические характеристики полученных решений

1. Известно [1], что в случае кратных волновых чисел одно из решений для плоской монохроматической волны может быть (при полном отсутствии вырождения или при степени вырождения меньшей степени кратности) записано в виде

$$E(t, z) = E_0 \frac{z}{d} \exp [i(\omega t - kz)]. \quad (1)$$

Решения типа (1) довольно подробно обсуждались в целом ряде работ [2-4]. В частности, для волн в замагниченной плазме они были получены в [2, 3]. В работе [4] с их помощью и терпретируются некоторые тонкие экспериментально наблюдаемые эффекты. И все же целый ряд вопросов, связанных с появлением таких решений в гиротропных средах, остается невыясненным. К их числу относится вопрос о «механизме» переноса энергии в полях типа (1) и, следовательно, вопрос о возбуждении таких полей в реальных системах.

В настоящей заметке мы постараемся пояснить эти моменты на примере задачи о нормальном падении плоской волны на плоский слой замагниченной плазмы, хотя, разумеется, многие выводы вполне могут быть распространены и на другие аналогичные системы.

2. Волновое уравнение для плоских однородных электромагнитных волн  $E = E(z) e^{i\omega t}$  в однородной магнитоактивной плазме может быть записано в форме [5]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 (AE_x + iCE_y) &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 (-iCE_x + BE_y) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $k_0 = \omega c$ ;  $ABC$  — некоторые комбинации компонент тензора диэлектрической проницаемости, приведенные, например, в [5]. При этом ось  $z$  совмещена с направлением волновой нормали, а внешнее постоянное магнитное поле  $H_0$  ориентировано в плоскости  $(y, z)$ . Подстановка в (2) решений в виде  $E_{x,y}(z) = E_{x,y}^{(0)} \exp(-ik_0 nz)$  приводит к характеристическому уравнению для показателя преломления  $n$

$$n_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (A + B) \pm \sqrt{\left(\frac{A - B}{2}\right)^2 + C^2}. \quad (3)$$

В плазменном варианте—это формула Апплетона—Хартри [5] для показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн. Кратные корни появляются при условии

$$2iC = A - B, \quad (4)$$

которому соответствуют следующие (критические) значения параметров плазмы:

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)_{kp} = v_{kp} = 1, \quad \left(\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\right)_{kp} = s_{kp} = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2 |\cos \alpha|}, \quad (5)$$

где  $u = \omega_H^2/\omega^2$ ,  $\alpha$ —угол между  $H_0$  и  $k$ ,  $\omega_0$ —лэнгмюровская частота для электронов,  $\omega_H$ —гиросчастота,  $\nu_{\text{эфф}}$ —эффективная частота соударений электронов\*.

Переходя к новым переменным  $x_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ ,  $y_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$

(поворот осей  $x, y$  на угол  $\pi/4$  вокруг оси  $z$ ) при критических значениях параметров (5) и обозначая  $2n_{kp}^2 = A + B$ ,  $\alpha_{kp} = A - B$ , вместо (2) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{x_n}}{dz^2} + k_0^2 n_{kp}^2 E_{x_n} &= -k_0^2 \alpha_{kp} E_{y_n}, \\ \frac{d^2 E_{y_n}}{dz^2} + k_0^2 n_{kp}^2 E_{y_n} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта система (6) и является предметом нашего обсуждения\*\*.

3. Сделаем, прежде всего, одно общее замечание. Система (6) существенно невзаимна. Формально второе уравнение (6) допускает решения, не зависящие от первого, в то время как первое уравнение является уравнением осциллятора, возбуждаемого полем  $E_y$  как сторонним\*\*\*. На первый взгляд ситуация кажется парадоксальной, несовместимой с уравнением энергетического баланса. Действительно, задаваясь конечной амплитудой поляризации  $E_y$ , можно сколь угодно сильно раскачать осциллятор  $E_x$ . Для того, чтобы разобраться в этом вопросе, следует прежде всего подробнее рассмотреть условия (5). Нетрудно убедиться, что они допускают несколько вариантов решений:

$$1) \quad s \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 1, \quad (7)$$

$$n_{1,2}^2 \rightarrow 1 - \frac{1}{1 \pm \sqrt{u}};$$

\* Для определенности и простоты мы ограничились рассмотрением элементарной модели слабоионизированной холодной плазмы (скажем, ионосферной) без учета движения ионов.

\*\* В дальнейшем мы будем опускать индексы « $n$ » и без оговорок работать в новой повернутой системе координат  $(x, y, z)$ .

\*\*\* Кстати, такая система может быть в принципе реализована на электронном аналоге, требующем, естественно, введения центрального элемента. Причем, во временном исполнении (замена  $z$  на  $t$ ) из-за комплекности параметра  $kp$  порядок системы увеличивается вдвое. Отметим, что создание подобных механических аналогов невозможно из-за принципиальной взаимности механических устройств.

$$2) \quad v \rightarrow 1, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad s_{kp} = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2 |\cos \alpha|} \rightarrow 0, \quad (8)$$

$$n_1^2 = n_2^2 = \sqrt{u} \frac{\sqrt{u} - i}{1 + u}.$$

В первом варианте, когда диссипация в среде игнорируется, выполнение условий (5) не приводит к (4) и, следовательно, к появлению кратных корней. Во втором варианте кратные корни появляются, но только при обязательном сохранении затухания в системе. Таким образом, результат (6) существенно зависит от порядка предельных переходов к критическим значениям параметров. С такой ситуацией приходится сталкиваться и в целом ряде других задач. Например, в неоднородных плазменных слоях, содержащих области с плавным переходом через значения  $\epsilon = 0$ , нетривиальным является предельный переход от наклонного падения электромагнитных волн к нормальному. Этот случай подробно рассмотрен в работе [6]. Общий рецепт, установленный там для «правильной» (в смысле физически приемлемой) последовательности предельных переходов, состоит в сохранении диссипативных членов до самого последнего этапа вычислений, что, в общем-то, даже и не требует особых комментариев. Следовательно, появление кратных волновых чисел в (2) и (6) всегда сопровождается комплексными значениями  $n_{kp}$ , и уравнение для второго осциллятора (6) имеет решения вида  $\exp(-ik_0 n'_{kp} z) \exp(-k_0 n''_{kp} z)$ , причем за ослабление поля ответственно как истинное поглощение в среде, так и эффективное поглощение, обусловленное перекачкой энергии в первый осциллятор (6).

Этот вывод может быть проиллюстрирован численно на примере задачи о падении плоской волны из вакуума на замагниченное плазменное полупространство  $z \geq 0$ . Однако мы пока не будем приводить здесь соответствующих формул, поскольку физически целесообразно подойти к рассматриваемому критическому состоянию (4) — (6), так сказать, со стороны, исходя из первоначальной системы уравнений (2) и рассматривая решения системы (6) как предельный случай решений (2) при стремлении к нулю параметров «расстройки» относительно критических значений. К тому же, если таким параметром является частота  $\omega$ , то случай малых расстроек позволяет одновременно обнаружить особенности прохождения сигналов с конечным спектром через такие системы.

4. Предположим, что вместо (4) соблюдается соотношение

$$2iC = A - B - 2\delta, \quad (9)$$

где

$$|\delta| \ll |A - B|, \quad \text{т. е. } |\delta| \ll |n_{kp}^2|.$$

Тогда система (2) с учетом (5) и новых обозначений (6) перепишется в виде

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 n_{kp}^2 E_x = -k_0^2 \alpha_{kp} E_y + k_0^2 \delta E_y, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 n_{kp}^2 E_y = -k_0^2 \delta E_x.$$

При  $\delta \rightarrow 0$  система (10) превращается в (6), а следовательно, и решения системы (10) переходят в соответствующие решения системы (6).

Но в (10) все вырождения уже сняты и значения показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн различны:

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= n_{kp} \pm \gamma, \\ \gamma &= \frac{1}{2n_{kp}} \sqrt{\alpha_{kp} \delta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответствующие этим показателям преломления поля оказываются эллиптически поляризованными:

$$E_{y_{1,2}} = \pm KE_{x_{1,2}} = \pm \frac{2n_{kp}}{\alpha_{kp}} \gamma E_{x_{1,2}}. \quad (12)$$

При нормальному падении электромагнитной волны на плазменное полупространство  $z > 0$  целесообразно различать два случая поляризации. Пусть падающая волна единичной амплитуды имеет только  $E_x$ -составляющую. Тогда при  $z > 0$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{1 + n_{kp}} [\exp(-ik_0\gamma z) + \exp(ik_0\gamma z)] \exp(-ik_0n_{kp}z), \\ E_y &= \frac{2n_{kp}}{\alpha_{kp}(1 + n_{kp})} \gamma [\exp(-ik_0\gamma z) - \exp(ik_0\gamma z)] \exp(-ik_0n_{kp}z). \end{aligned} \quad (13)$$

Если же падающая из вакуума волна имеет только  $E_y$ -составляющую, то при  $z > 0$  решение имеет вид

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{K(1 + n_{kp})} [\exp(-ik_0\gamma z) - \exp(ik_0\gamma z)] \exp(-ik_0n_{kp}z), \\ E_y &= \frac{1}{1 + n_{kp}} [\exp(-ik_0\gamma z) + \exp(ik_0\gamma z)] \exp(-ik_0n_{kp}z). \end{aligned} \quad (14)$$

В обоих случаях возникает картина пространственных биений с периодом  $l_6 \sim 2\pi/k_0|\gamma|$ , который всегда существенно больше длины волны  $\lambda = \frac{\lambda_0}{|n_{kp}|}$  в силу принятого приближения (9).

Пусть теперь характерная длина затухания  $l_3 = \lambda_0/\text{Im } n_{kp}$  тоже много меньше периода биений:  $l_3 \ll l_6$ . Тогда фактически все волновые процессы будут разыгрываться только на начальном участке огибающей и полная перекачка энергии из одной моды в другую не будет успевать происходить. Раскладывая выражения (13) и (14) по малому параметру  $k_0\gamma z$  и ограничиваясь только первыми членами разложения, получим решения резонансного типа. В случае  $E_x$ -поляризации падающей волны

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{1 + n_{kp}} \exp(-ik_0n_{kp}z) + O(|k_0\gamma z|^2), \\ E_y &= O(|k_0\gamma z|^2); \end{aligned} \quad (15)$$

в случае  $E_y$ -поляризации

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\alpha_{kp}}{2n_{kp}(1 + n_{kp})} k_0 z \exp(-ik_0n_{kp}z) + O(|k_0\gamma z|^2), \\ E_y &= \frac{1}{1 + n_{kp}} \exp(-ik_0n_{kp}z) + O(|k_0\gamma z|^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Эти выражения как раз и являются решениями вырожденной системы (6). Отсюда ясно виден и «механизм» образования резонансных решений, в общих чертах не отличающийся от «механизма» в аналогичных двухсвязных системах без диссипации\*, и пределы применимости этих решений, а заодно и системы уравнений (6).

Для того, чтобы пояснить процессы перекачки энергии, приведем выражение для среднего по времени потока энергии в  $z$ -направлении внутри плазменного полупространства (для  $E_y$ -поляризации падающей волны):

$$S_z = S_0 \left[ \cos^2 k_0 \gamma z + \frac{1}{2K^*} (1 - \cos 2k_0 \gamma z) \right] \exp(-2k_0 n'' z). \quad (17)$$

Здесь  $n_{kp} = n' - in''$  и  $\gamma$  для наглядности выбрана действительной.

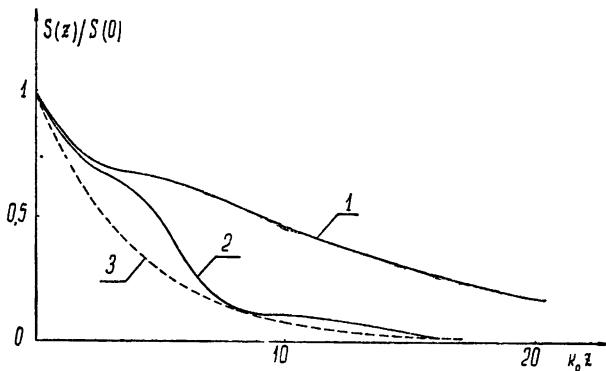


Рис. 1. Характерные зависимости потока энергии от координат:

- 1) случай кратных волновых чисел,
- 2) случай слабой расстройки параметров от критических значений,
- 3) обычное экспоненциальное спадание потока энергии с расстоянием.

На рис. 1 приведено несколько характерных распределений  $S_z(z)$  при различных значениях параметров\*\*. Как видно из этих графиков, наличие биений никогда не приводит к возрастанию суммарного потока энергии, т. е. во всех случаях непременно соблюдается неравенство

$$\frac{\partial S_z}{\partial z} < 0. \quad (18)$$

Ограничение (18), как следует из (17), универсально выполняется, если

$$\frac{\alpha_{kp} \alpha_{kp}^*}{4} < 4 (\operatorname{Im} n_{kp})^2 |n_{kp}|^2. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что для любой анизотропной плазмы с поглощением это условие автоматически соблюдается\*\*\*.

\* В обычных двухсвязных системах без диссипации существуют, как известно, только два характерных размера:  $\lambda$  — длина волны и  $l_6$  — пространственный период биений. Поэтому при снятии вырождения решения будут близки к критическим только на начальном участке  $z \ll l_6$ . В нашем же случае решения (13) и (14) близки к критическим во всем полупространстве  $z > 0$ .

\*\* Для того, чтобы иллюстрация выглядела более конкретной, мы ориентировались на значения параметров  $\sqrt{u} = 4$ ,  $s_{kp} \sim 10^{-2}$ , реализуемых в ионосферном слое  $E$  в диапазоне частот 1—5 Мгц.

\*\*\* Неравенство (19), очевидно, может быть получено из соотношений типа Крамера—Кронига, связывающих действительную и мнимую части показателей преломления в анизотропных гиротропных средах [7].

Таким образом, формула (17) вместе с (18) и (19) вполне корректно описывает результат энергетического взаимодействия осцилляторов (10), включая в предельном случае (6) неограниченную перекачку энергии из второго осциллятора системы (6) в первый. Действительно, если теперь устремить  $\gamma \rightarrow 0$ , то вместо (17) будем иметь

$$S_{z \text{ кр}} = S_0 \left[ 1 + \left| \frac{\alpha_{\text{кр}}}{2n_{\text{кр}}} \right|^2 (k_0 z)^2 \right] \exp(-2k_0 n'' z). \quad (20)$$

Соответствующее формуле (20) распределение  $S_z(z)$  изображено на рис. 1 верхней линией. Пунктирной линии соответствует обычное экспоненциальное спадание потока энергии с расстоянием.

5. В качестве второго примера приведем выражения для коэффициентов отражения и прохождения через плазменный слой конечной толщины ( $0 < z < L$ ), но все же достаточно тонкой по сравнению с  $1/k_0 \gamma$  при падении волны, имеющей только  $E_x$ -компоненту поля:

$$R_x = \frac{1}{\Delta} (1 - n^2) (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) [(1 + n)^2 e^{i\varphi} - (1 - n)^2 e^{-i\varphi}], \quad (21)$$

$$R_y = 0,$$

$$T_x = \frac{1}{\Delta} 4n [(1 + n)^2 e^{i\varphi} - (1 - n)^2 e^{-i\varphi}],$$

$$T_y = 0.$$

Если падающая волна имеет только  $E_y$ -компоненту поля, то

$$R_x = -\frac{1}{\Delta} \frac{\alpha}{n} \{ (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) [(1 + n)^2 e^{i\varphi} + (1 - n)^2 e^{-i\varphi}] - 4n i k_0 L (1 - n^2) \},$$

$$R_y = \frac{1}{\Delta} (1 - n^2) (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) [(1 + n)^2 e^{i\varphi} - (1 - n)^2 e^{-i\varphi}],$$

$$T_x = \frac{1}{\Delta} \{ -i k_0 L n [(1 + n)^2 e^{i\varphi} + (1 - n)^2 e^{-i\varphi}] + (1 - n^2) (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \}, \quad (22)$$

$$T_y = \frac{1}{\Delta} 4n [(1 + n)^2 e^{i\varphi} - (1 - n)^2 e^{-i\varphi}],$$

$$\Delta = [(1 + n)^2 e^{i\varphi} - (1 - n)^2 e^{-i\varphi}]^2.$$

В (21) и (22)  $\varphi = k_0 n L$ ,  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $T_x$ ,  $T_y$  — отношение амплитуд отраженных и проходящих волн к амплитуде падающей волны.

Характерным для выражений (21) и (22) является то, что и коэффициенты прохождения через слой, и коэффициенты отражения во втором случае (22) больше, чем в первом (21). Здесь ярко проявляется анизотропия поглощения. Уменьшая число соударений в плазме, а также угол между нормалью к слою и магнитным полем (так, чтобы выполнялись условия (4), (5)), можно свести потери в слое практически к нулю для поляризации волны  $E_x = 0$ ,  $E_y \neq 0$ . Для поляризации  $E_x \neq 0$ ,  $E_y = 0$  такой слой останется сильно поглощающим.

6. Рассмотренная выше задача о распространении электромагнитных волн в гиротропных системах с вырожденными значениями волновых чисел может быть весьма полезной в целом ряде приложений и прежде всего — при фактическом изучении характеристик прохождения сигналов через реальные (в частности, ионосферные) плазменные

слои. В связи с этим специальный интерес представляет «сшивание» полученных решений с решениями геометрооптического приближения внутри сред с плавными изменениями параметров, поскольку взаимодействие «нормальных» волн как раз и происходит при значениях параметров, близких к критическим [5].

В заключение автор выражает признательность М. А. Миллеру за постоянную помощь в работе.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дж Хейл, Колебания в нелинейных системах, изд. Мир, М., 1966.
2. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 34 (1965).
3. И. Г. Кондратьев, Диссертация, Горький, НИРФИ, 1965.
4. И. М. Дыкман, С. И. Пекар, ЖЭТФ, 37, № 2 (8), 510 (1959).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 1, 124 (1964).
7. В. Л. Гинзбург, Н. Н. Мейман, ЖЭТФ, 46, № 1, 243 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
14 августа 1967 г.

### ELECTROMAGNETIC WAVE TRANSMISSION THROUGH A PLANE GYROTROPIC LAYER (THE CASE OF MULTIPLE WAVE NUMBERS)

*G. V. Permitin*

The electromagnetic wave transmission through the plane uniform gyrotropic layers are considered for the case of multiple wave numbers. The polarization and energy characteristics of the solutions obtained are investigated.

УДК 533.9

## НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ

*В. Н. Цытович, И. М. Корженевич*

Рассматриваются нелинейные эффекты в плазме, состоящей из ультраквантитативистских электронов и нерелятивистских ионов, и в ультраквантитативистской электронно-ионной плазме. Функции распределения частиц плазмы предполагаются максвелловскими. Найдены вероятности нелинейных взаимодействий продольных и поперечных волн между собой, а также продольных волн с поперечными; рассмотрены взаимодействия волн с различными фазовыми скоростями. Показано, что непосредственная трансформация высокочастотных волн в плазменные может быть весьма эффективной.

Теория нелинейных взаимодействий электромагнитных волн в релятивистской плазме представляет интерес в связи с применением ее для решения ряда астрофизических задач. Согласно существующим представлениям, релятивистская плазма содержится во многих плотных горячих звездах. Вряд ли можно сомневаться в том, что плазма таких звезд находится в активном турбулентном движении, и, следовательно, в них интенсивно возбуждены различные турбулентные пульсации. По-видимому, открытые недавно квазизвездные объекты также находятся в активном турбулентном движении, и, согласно имеющимся представлениям, их ядро представляет собой релятивистскую плазму.

Динамику возбуждения и развития турбулентности нельзя изучить без анализа нелинейных взаимодействий турбулентных пульсаций между собой. Вместе с тем, до сих пор теория нелинейных взаимодействий в релятивистской плазме, насколько нам известно, не была развита. Линейная теория разработана достаточно подробно. Интерес к релятивистской плазме в свое время стимулировался рядом предложений об использовании ее для ускорения заряженных частиц [1]. В связи с этим были исследованы возможные спектры коллективных возбуждений в релятивистской плазме [2–5]. Нашей задачей является построение нелинейной теории взаимодействия этих коллективных степеней свободы. Специфической чертой релятивистской плазмы является то, что взаимодействие поперечных и продольных волн может быть весьма эффективным. Это значит, что излучательная диссипация турбулентных пульсаций может быть значительной. Такой вывод важен для возможной интерпретации излучения космических объектов.

В настоящей работе найдены вероятности нелинейных взаимодействий ленгмюровских волн с ленгмюровскими и поперечными, а также поперечных волн с поперечными; рассмотрены взаимодействия волн с различными фазовыми скоростями.

### 1. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

Опишем вначале кратко линейные колебания релятивистской плазмы, взаимодействие которых будет предметом исследования. Закон дис-

персии продольных и поперечных волн в плазме может быть найден из хорошо известных дисперсионных соотношений [2]\*

$$\operatorname{Re} \epsilon'(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} P \int dp \frac{(kv)^2}{\omega - kv} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \varepsilon} = 0; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{Re} \epsilon''(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} P \int dp \frac{[kv]^2}{\omega - kv} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \varepsilon} = \frac{k^2}{\omega^2}, \quad (1.2)$$

где  $P$ —символ главного значения,  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$ —соответственно продольная и поперечная диэлектрические проницаемости; суммирование производится по сортам частиц  $\alpha$  ( $\alpha = e, i$ , что соответствует электронам и ионам);  $e_{\alpha}$ —заряд частицы.

Ограничимся исследованием водородной плазмы ( $e_i = e_e$ ). Рассмотрим два предельных случая:

$$m_e \ll T_e \ll m_i, \quad T_i \ll T_e \ll m_i \quad (\text{A})$$

и

$$T_e \gg T_i \gg m_i, \quad (\text{B})$$

где  $m_e$ —масса электрона,  $T_e$ —электронная температура;  $m_i$ ,  $T_i$ —то же для ионов. Условие (А) соответствует случаю плазмы, состоящей из ультрарелятивистских электронов и нерелятивистских ионов; условие (Б) относится к ультрарелятивистской электронно-ионной плазме. В обоих случаях дисперсионные кривые поперечных и ленгмюровских волн имеют аналогичный вид. Типичные кривые изображены на рис. 1. Для отдельных участков кривых  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  и  $l_1$ ,  $l_2$  могут быть получены несложные аналитические выражения. Для участка спектра  $l_1$  из уравнения (1.1) находим

$$\omega^2 = \omega_{\alpha}^2 + (3/5) k^2 \quad (k \ll \omega), \quad (1.3)$$

где

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha} / 3 T_{\alpha}} \quad (1.4)$$

—релятивистская плазменная частота. Для участка  $l_2$

$$\omega = k - \frac{m_e^2}{T_e^2} \frac{k_0^2}{18\omega_e^2} (k - k_0) \quad \left( \frac{\omega}{k} - 1 \ll \frac{m_e^2}{2T_e^2} \right), \quad (1.5)$$

где

$$k_0^2 \simeq 3\omega_{\alpha}^2 \ln(2T_{\alpha}/m_{\alpha}). \quad (1.6)$$

Для поперечных волн аналогичным образом получаем на участке  $t_1$

$$\omega^2 = \omega_{\alpha}^2 + (6/5) k^2 \quad (k \ll \omega); \quad (1.7)$$

для  $t_2$ ,  $t_3$  и участка кривой между ними—

$$\omega^2 = (3/2) \omega_{\alpha}^2 + k^2 \quad (k \sim \omega). \quad (1.8)$$

\* Здесь и ниже  $\hbar = c = 1$ .

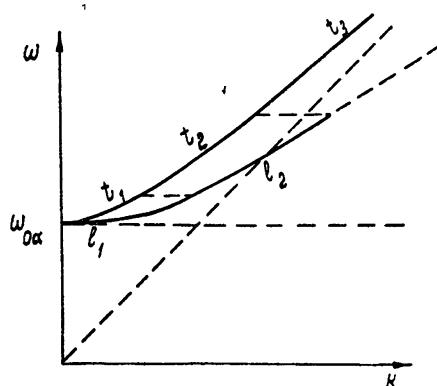


Рис. 1.

В случае (А) влияние ионов на закон дисперсии незначительно ( $\alpha = e$ ); в случае (Б) основной вклад в закон дисперсии вносят ионы ( $\alpha = i$ ). Фазовые скорости волн имеют вид

$$v_{\phi}^{l_1} = v_{\phi}^{l_1} \equiv v_{\phi} = \omega_a/k \gg 1,$$

$$v_{\phi}^{l_2} = 1 - \frac{m_e^2}{T_e^2} \frac{k_0^2}{18\omega_a^2} \frac{k - k_0}{k_0} \simeq 1,$$

$$v_{\phi}^{l_2} = \sqrt{1 + 3\omega_a^2/2k^2},$$

$$v_{\phi}^{l_1} = 1 + 3\omega_a^2/4k^2 \simeq 1.$$

Нелинейные взаимодействия электромагнитных волн сорта  $\sigma$  и  $\sigma'$  описываются следующим уравнением [6]:

$$\frac{\partial N_k^{\alpha}}{\partial t} = \sum_{\alpha} N_k^{\alpha} \int \frac{N_{k'}^{\alpha'} dk'}{(2\pi)^3} W_{p\alpha}^{\alpha\alpha'}(k, k') \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial p}(k - k') \frac{dp}{(2\pi)^3},$$

где  $W_{p\alpha}^{\alpha\alpha'}(k, k')$ —вероятность превращения волны  $\sigma$  с волновым вектором  $k$  в волну  $\sigma'$  с волновым вектором  $k'$  при рассеянии на частице  $\alpha$  импульса  $p$ . Эта вероятность может быть вычислена методом, описанным в [6].

Оказывается, что в случае (Б) волны рассеиваются главным образом на ионах: нелинейное рассеивание на ионах в  $(T_e/T_i)^6 \gg 1$ , а комптоновское—в  $(T_e/T_i)^3 \gg 1$  раз превышают соответствующие виды рассеяния на электронах. В случае (А) рассеяние происходит на частицах обоих сортов. Ниже в характеристики рассеяния, общие для обоих рассматриваемых видов плазмы, в случае (А) входят электронные величины ( $\alpha = e$ ), а в случае (Б)—ионные ( $\alpha = i$ ).

Заметим, что в рассмотренных случаях, в отличие от нерелятивистской плазмы [6], компенсация комптоновского и нелинейного рассеяний не имеет места. Это значительно увеличивает вероятность взаимодействия колебаний.

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН МЕЖДУ СОБОЙ

Вероятность взаимодействия ленгмюровских волн с волновыми векторами  $k$  и  $k_1$  при рассеянии на частице сорта  $\alpha$ , имеющей скорость  $v$ , равна [6]

$$W_{\alpha\alpha}^{ll}(k, k_1) = 32\pi^3 e_{\alpha}^4 |\Lambda^{ll}|^2 \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \left[ \frac{\partial \varepsilon^l(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_l(k)} \frac{\partial \varepsilon^l(\omega_1, \vec{k}_1)}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_1=\omega_l(k_1)} \right]^{-1},$$

где  $\omega_- = \omega - \omega_1$ ;  $\vec{k}_- = \vec{k} - \vec{k}_1$ ;  $\Lambda^{ll}$ —матричный элемент рассеяния, равный сумме матричных элементов комптоновского и нелинейного рассеяний.

Рассмотрим взаимодействие ленгмюровских волн с фазовой скоростью, значительно превышающей скорость света ( $l_1 l_1$ -взаимодействие), и с волновыми векторами  $k$  и  $k_1$ , близкими по абсолютной величине:

$$\Delta k \equiv k - k_1 \ll k^*. \quad (2.1)$$

Матричный элемент нелинейного рассеяния на электронах плазмы (А) и ионах плазмы (Б) равен

\* Здесь и ниже предполагается, что угол между волновыми векторами взаимодействующих волн порядка единицы.

$$\Lambda_{\mathbf{h}\mathbf{p}}^{l_1 l_1} = - \frac{1}{T_a k_-^2} \left\{ \cos \gamma \left[ 1 - \frac{\omega_-^2}{k_-^2} \epsilon^t(\omega_-, k_-) \right]^{-1} + \cos \alpha [\epsilon^t(\omega_-, k_-)]^{-1} \right\}. \quad (2.2)$$

Углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  определяются соотношениями (рис. 2)

$$\cos \alpha = (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)/k k_1, \quad \cos \beta = (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_-)/k_1 k_-, \quad \cos \gamma = (\mathbf{k}\mathbf{k}_-)/k k_-, \quad (2.3)$$

из которых следует

$$\beta = \alpha + \gamma, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{k}{k_1}. \quad (2.4)$$

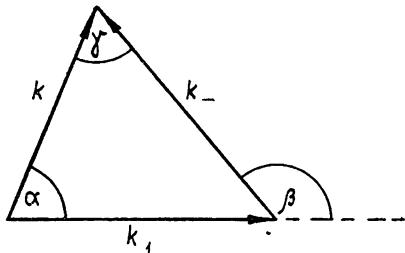


Рис. 2.

В случае (Б) отношение первого и второго слагаемых формулы (2.2), описывающих соответственно рассеяние через продольные и попеченные виртуальные волны, равно

$$v_\phi^2 |1 - (\Delta k/k)^2 \epsilon^t(\omega_-, k_-)|^{-1} \gg 1. \quad (2.5)$$

Для плазмы (А) при условии

$$\Delta k \ll \omega_e v_{Ti} \quad (v_{Ti} \sim \sqrt{T_i/m_i} \ll 1) \quad (2.6)$$

это отношение умножается на  $T_e/T_i \gg 1$ . Отношение матричных элементов нелинейного и комптоновского рассеяний в обоих случаях также равно (2.5). Скорость изменения числа волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{l_1}}{\partial t} = & -N_{\mathbf{k}}^{l_1} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^{l_1} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_a^2}{N_a T_a} v_\phi^3 \frac{\Delta k}{k_-} \cos^2 \gamma \frac{27\pi}{20} \left| 1 - \frac{9}{25} \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\Delta k}{k_- v_\phi} \right)^2 \epsilon^t(\omega_-, k_-) \right|^{-2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Эта формула применима к плазме (Б), а также к плазме (А) в области (2.6) при дополнительном условии

$$T_e^2 \leq m_i T_i, \quad (2.8)$$

позволяющем пренебречь рассеянием на ионах. Вероятность рассеяния растет с увеличением угла между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$  и достигает максимума при антипараллельных  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ .

Характерное обратное время взаимодействия равно в случае (Б)

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_1}}{N_i T_i} \frac{v_\phi^3 \Delta k / k}{1 + (v_\phi \Delta k / k)^2}, \quad (2.9)$$

и в случае (А) при условиях (2.6), (2.8)

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_1}}{N_e T_e} \frac{v_\phi^3 \Delta k / k}{1 + (v_\phi \Delta k / k^2)(1 - \Theta)}. \quad (2.10)$$

Здесь  $\Theta = T_e / \sqrt{T_i m_i}$ ,  $W$  — плотность энергии волн  $\sigma$ ,  $N_a T_a$  — плотность кинетической энергии частиц.

При условии

$$\Delta k \gg \omega_e v_{Ti} \quad (2.11)$$

матричный элемент нелинейного рассеяния на ионах плазмы (А)

$$\Lambda_{i \text{ h p}}^{l_1 l_1} = -\frac{1}{\omega_e^2 m_i} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_-^2} \left\{ \frac{\cos \alpha}{\epsilon^l(\omega_-, k_-)} - \frac{2k_1(k + k_-)}{k^2[(k_-/\omega_-)^2 - \epsilon^l(\omega_-, k_-)]} \right\}, \quad (2.12)$$

где  $\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 N_a/m_a}$  — ленгмюровская частота. Если выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \epsilon^l(\omega_-, k_-) \gg \operatorname{Im} \epsilon^l(\omega_-, k_-), \quad (2.13)$$

означающее отсутствие резонанса при рассеянии через продольную виртуальную волну, то нелинейное рассеяние на ионах происходит через продольную и поперечную волны, а на электронах — только через поперечную. Нелинейное рассеяние на ионах порядка комптоновского. Скорость изменения числа волн равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^{l_1}}{\partial t} = & -N_k^{l_1} \int \frac{N_{k_1}^{l_1} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{27\pi}{20} \frac{\Delta k}{\omega_e} \frac{k}{k_-} \left\{ \frac{v_\phi^4 \cos^2 \gamma}{|1 - (\omega_-/k_-)^2 \epsilon^l(\omega_-, k_-)|^2} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Theta^3 \left[ \cos \alpha - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_-^2} \left[ \frac{\cos \alpha}{\epsilon^l(\omega_-, k_-)} - \frac{2k_1(k + k_-)}{k^2[(k_-/\omega_-)^2 - \epsilon^l(\omega_-, k_-)]} \right] \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_1}}{N_e T_e} \frac{\Delta k}{\omega_e} \left\{ \frac{v_\phi^4}{(1 + v_\phi^2 T_e/m_i)^2 + (v_\phi \Delta k/k)^2} + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right\}. \quad (2.15)$$

При условии (2.8) вторым слагаемым, описывающим рассеяние на ионах, можно пренебречь.

Рассмотрим теперь резонансное рассеяние через продольную виртуальную волну, имеющее место в области (2.11) при условии

$$\operatorname{Re} \epsilon^l(\omega_-, k_-) \ll \operatorname{Im} \epsilon^l(\omega_-, k_-). \quad (2.16)$$

В этом случае ленгмюровская волна распадается на ленгмюровскую и ионнозвуковую  $\omega_s = k_s \sqrt{T_e/m_i}$ , причем выполняется условие распадного процесса  $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega_s(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ . Считая интенсивность ионнозвуковых волн малой, будем рассматривать лишь нелинейное взаимодействие двух ленгмюровских волн.

В случае изотропной функции распределения колебаний  $N_k^{l_1}$  скорость изменения числа волн оказывается равной

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^{l_1}}{\partial t} = & -N_k^{l_1} \int_{k-(10\sqrt{27})\omega_{Li}}^{k+(10\sqrt{27})\omega_{Li}} N_{k_1}^{l_1} k_1^2 \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{\pi^2}{2} \frac{\omega_- |\omega_-|}{k^2} \frac{m_i}{T_e} \times \\ & \times \frac{[1 + 9\sqrt{2/\pi} \Theta^3] (1 - \omega_-^2 m_i/2k_-^2 T_e)}{1 + \sqrt{2/\pi} \sqrt{m_i/T_e} (T_e/T_i) \exp(-T_e/T_i)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует рассеянию на электронах, второе — рассеянию на ионах. Второй член знаменателя мал при всех возможных значениях  $T_e$  и  $T_i$ , кроме весьма узкой области, которую мы не будем рассматривать\*. Пределы интегрирования следует учитывать только при условии  $k \gg \omega_{Li}$ , так как последняя фор-

\* При  $T_e/m_e = T_e/T_i = 3$  второе слагаемое знаменателя равно 2,5; при  $T_e/m_e = T_e/T_i = 7$  получаем уже 0,22.

мула получена в предположении (2.1). Если функция распределения волн  $N_{\mathbf{k}}^{l_1}$  мала при  $k_1$ , выходящих за пределы интегрирования, либо если  $k \leq \omega_{Ei}$ , то из формулы (2.17) следует

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_1}}{N_e T_e} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (2.18)$$

Формула (2.15), полученная в предположении (2.1), дает правильный порядок величины  $1/\tau$  также при  $\Delta k \sim k$ . В этом случае частота при нерезонансном рассеянии изменяется на  $\omega \sim k/v_\Phi$ . Отношение времен, необходимых для изменения частоты на такую величину при резонансном и нерезонансном рассеяниях, равно

$$\sqrt{T_e/m_i} (1 + \Theta^3/v_\Phi^2) (1 + \Theta^3)^{-1} \ll 1.$$

Это означает, что резонансное рассеяние значительно более вероятно, чем нерезонансное.

При взаимодействии продольных волн  $l_1$  и  $l_2$  в плазме (А), для которой выполняется условие (2.8), и в плазме (Б) матричный элемент нелинейного рассеяния через поперечную волну, в  $v_\Phi \ll 1$  раз превышающий матричные элементы нелинейного рассеяния через продольную волну и комптоновского рассеяния, равен

$$\Lambda_{\text{нр}}^{l_1 l_2} = -v_\Phi \varphi^{(a)} / T_a \omega_a^2,$$

где

$$\varphi^{(a)} = \left\{ 1 - \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| \left[ 1 - \left( \ln \frac{2T_a}{m_a} \right)^{-1} \right] \left[ 1 - \frac{\omega_-^2}{k_-^2} \epsilon'(w_-, k_-) \right] \right\}^{-1}.$$

Скорость изменения числа волн равна

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{l_1}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{l_1} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^{l_2} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_a^2}{N_a T_a} \frac{m_e^2}{T_e T_a} \frac{81\pi}{8\sqrt{3}} \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| v_\Phi^2 \left( \ln \frac{2T_a}{m_a} \right)^{3/2} |\varphi^{(a)}|^2. \quad (2.19)$$

Из последнего выражения получаем обратное время перекачки энергии:

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_a \frac{W^{l_1}}{N_e T_e} \frac{m_e^2}{T_e T_a} v_\Phi^2. \quad (2.20)$$

В общем случае плазмы (А) следует учесть комптоновское рассеяние на ионах. Матричный элемент нелинейного рассеяния через виртуальную поперечную волну, в  $v_\Phi \gg 1$  раз превышающий матричный элемент рассеяния через продольную волну, равен

$$\Lambda_{\text{нр}}^{l_1 l_2} = \frac{2v_\Phi \varphi_1}{\omega_e^2} \frac{T_e}{m_i^2},$$

$$\varphi_1 = \left( 2 \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| - 1 \right) \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega_-}{k_-} \right)^2 \epsilon'(\omega_-, k_-) \right] \ln \frac{2T_e}{m_e} \right\}^{-1}.$$

Скорость изменения числа волн при рассеянии

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{l_1}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{l_1} \int & \frac{N_{\mathbf{k}_1}^{l_2} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{m_e^2}{T_e^2} v_\Phi^2 \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| \frac{81\pi}{8\sqrt{3}} \times \\ & \times \left\{ |\varphi^{(e)}|^2 + \left| \frac{\cos \alpha}{v_\Phi} + \frac{2T_e}{m_i} \varphi_1 \right|^2 \Theta^3 \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Характерное обратное время перекачки равно

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_1}}{N_e T_e} \frac{m_e^2}{T_e^2} \left[ v_\phi^2 + \left( 1 + \frac{T_e}{m_l} v_\phi \right)^2 \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_l}} \right)^3 \right]. \quad (2.22)$$

Первые слагаемые формул (2.21) и (2.22), играющие основную роль при условии (2.8), определяют рассеяние на электронах, вторые слагаемые описывают рассеяние на ионах. Зависимость вероятности нелинейного рассеяния на частицах обоих сортов от положения волнового вектора  $k$  на кривой  $l$  одинакова (рис. 1).

Из закона дисперсии (1.5) следует, что для волн  $l_2 \Delta k \ll k$ . Рассмотрим взаимодействие таких волн в плазме (Б), а также в плазме (А), для которой выполнено условие (2.8), в предельном случае:

$$\Delta k \ll k v_{T_l}. \quad (2.23)$$

Матричный элемент нелинейного рассеяния оказывается равным

$$\Lambda_{hp}^{l_2 l_2} = -(3/2) \omega_a^2 (k^3 k_- T_a)^{-1} [F_t^{(\alpha)} + F_l^{(\alpha)} (\varepsilon^l(\omega_-, k_-))^{-1}], \quad (2.24)$$

где

$$F_t^{(\alpha)} = 2[\sin^2 \gamma / 8 - (1 - 4 \cos^2 \gamma) \ln \cos \gamma + (4 \cos^2 \gamma - 1 - 2 \cos^4 \gamma) \ln(2T_a/m_a)] / \cos^3 \gamma,$$

$$F_l^{(\alpha)} = 2[(1 - 4 \cos^2 \gamma) \ln \cos \gamma + \cos \alpha \ln(2T_a/m_a) + \cos^4 \gamma - 7 \cos^3 \gamma / 8 - 3 \cos^3 \gamma / 2 + 2 \cos \gamma] / \cos^3 \gamma.$$

Функции  $F_t^{(\alpha)}$  и  $F_l^{(\alpha)}$  описывают рассеяние соответственно через поперечную и продольную волны. В случае (Б) оба слагаемых в формуле (2.24) одинаковы по порядку величины; в случае (А)  $\varepsilon^l(\omega_-, k_-) \sim T_e/T_l \gg \gg 1$ , следовательно, преобладает рассеяние через поперечную волну. (Угол  $\gamma$ , будучи углом треугольника (рис. 2), не равен  $\pi/2$ , так как  $\Delta k \ll k$  и, кроме того,  $\alpha \sim 1$ .)

Нелинейное и комптоновское рассеяния имеют одинаковый порядок величины. Скорость изменения числа волн равна

$$\frac{\partial N_k^{l_2}}{\partial t} = -N_k^{l_2} \int \frac{N_{k_1}^{l_2} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_a^2}{N_a T_a} \frac{m_e^4}{T_e^2 T_a^2} \frac{\Delta k}{k_-} \frac{\pi}{96} \ln \frac{2T_a}{m_a} F^{(\alpha)}, \quad (2.25)$$

где

$$F^{(\alpha)} = 1 + \frac{2 \sin^2 \gamma}{\cos^3 \gamma} + F_l^{(\alpha)} + \frac{1}{2} (F_t^{(\alpha)})^2,$$

$$F_l^{(\alpha)} = \left( 2 \cos \gamma \ln \frac{2T_a}{m_a} \right)^{-1} \left[ F_t^{(\alpha)} + \frac{F_t^{(\alpha)}}{\varepsilon^l(\omega_-, k_-)} \right].$$

Как было сказано выше, в случае (А) при условии (2.23)  $\varepsilon^l(\omega_-, k_-) \gg 1$ , и вторым слагаемым функции  $F_l^{(\alpha)}$  можно пренебречь. Из формулы (2.25) получаем

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_a \frac{W^{l_2}}{N_a T_a} \frac{m_e^4}{T_e^2 T_a^2} \frac{\Delta k}{k}. \quad (2.26)$$

Если условие (2.23) не выполнено, обратное время взаимодействия в плазме (А) при условии (2.23) оказывается равным

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_2}}{N_e T_e} \frac{m_e^4}{T_e^4} \frac{\Delta k}{k} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_l}} \right)^3 \left[ \left( \frac{\Delta k}{kv_{T_l}} \right)^2 + \frac{T_e}{m_l} \right]^2 \right]. \quad (2.27)$$

В случае нерезонансного рассеяния (2.13) волн  $l_2$  в плазме (A) при условии

$$\Delta k \gg k v_{T_i} \quad (2.28)$$

необходимо учесть комптоновское рассеяние на ионах, а также нелинейное рассеяние через продольную волну, матричный элемент которого

$$\Lambda_{i\pi p}^{l_2 l_3} = -\cos \alpha [3m_i \omega_e \ln(2T_e/m_e) \epsilon^l(\omega_-, k_-)]^{-1} \quad (2.29)$$

в  $[\Delta k/k + T_e/m_i]^{-1} \gg 1$  раз больше матричного элемента рассеяния через поперечную волну. Скорость изменения числа волн равна

$$\frac{\partial N_k^{l_2}}{\partial t} = -N_k^{l_2} \int \frac{N_{k_1}^{l_3} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{m_e^4}{T_e^4} \frac{\Delta k}{k_-} \frac{\pi \ln(2T_e/m_e)}{96} \left[ |F^{(e)}|^2 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \times \right. \\ \left. \times \Theta^3 \cos^2 \alpha \left( 1 - \frac{\omega_{L_i}^2}{\omega_-^2 \epsilon^l(\omega_-, k_-)} \right) \right]. \quad (2.30)$$

Нелинейное рассеяние на электронах через продольную и поперечную волны имеет одинаковый порядок величины. Из формулы (2.30) следует

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_2}}{N_e T_e} \frac{m_e^4}{T_e^4} \frac{\Delta k}{k} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (2.31)$$

Если выполняется неравенство

$$T_e^2 \gg T_i m_i, \quad (2.32)$$

рассеяние происходит на ионах; в противоположном предельном случае преобладает рассеяние на электронах. Из сопоставления формул (2.27) и (2.31) видно, что рассеяние в случае (2.28) гораздо более вероятно, чем в случае (2.23).

При резонансном рассеянии (2.16) ленгмюровская волна распадается на ленгмюровскую и ионноэзувковую:

$$\omega_s = k_s \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \left[ 1 + \left( \frac{k_s}{\omega_{Le}} \right)^2 \frac{T_e}{m_e} \right]^{-1/2}. \quad (2.33)$$

Функцию распределения колебаний будем считать изотропной и отличной от нуля лишь в интервале  $k[1 - \sqrt{k^2/\omega_{L_i}^2 + m_i/4T_e}] \leq k_1 \leq k[1 + \sqrt{k^2/\omega_{L_i}^2 + m_i/4T_e}]$ . В интересующей нас области  $T_e$  и  $T_i$  обратное время  $l_2 l_2$ -взаимодействия

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_2}}{N_e T_e} \frac{m_e^4}{T_e^4} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (2.34)$$

Сравним это выражение с формулой (2.31), верной по порядку величины при  $\Delta k \sim k$ . Легко видеть, что отношение вероятностей резонансной и нерезонансной трансформации на одну и ту же частоту равно

$$\sqrt{T_e/m_i} \ll 1.$$

Из общих соотношений следует, что при рассеянии волн на равновесной плазме перекачка энергии происходит в сторону уменьшения частоты. В соответствии с этим в выражениях (2.7), (2.14), (2.17), (2.25), (2.30) знак производной  $\partial N_k^l / \partial t$  противоположен знаку  $\Delta k$ .

в формулах же (2.19) и (2.21) всегда  $\partial N_{\mathbf{k}}^l / \partial t > 0$  ( $\Delta k < 0$ ).

Сравнивая выражения (2.20) и (2.26) для обратных времен  $t_2 t_1$  и  $t_2 t_2$  взаимодействий в плазме (Б), видим, что вероятность трансформации волны  $t_2$  в волну  $t_1$  в  $v_{\phi}^2 (T_e T_i / m_e^2) (\mathbf{k} / \Delta \mathbf{k}) \gg 1$  раз превышает вероятность трансформации ее в волну  $t_2$ . Иначе говоря, волна должна не «скатываться» по дисперсионной кривой  $t$  (рис. 1), а «перешагнуть» некоторый ее участок. Вероятность такого «шага» возрастает с его величиной:  $1/\tau \sim v_{\phi}^2$ ; следовательно, перекачка энергии произойдет в область весьма больших фазовых скоростей.

Из сопоставления формул (2.22) и (2.31) следует, что и в случае (А) трансформация волны из области  $t_2$  в область  $t_1$  происходит с большей вероятностью за один акт рассеяния, чем постепенно.

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН С ПОПЕРЕЧНЫМИ

Вероятность рассеяния продольной волны на частице сорта  $\alpha$ , имеющей скорость  $\mathbf{v}$ , с превращением ее в поперечную волну равна

$$W_{\mathbf{v} \alpha}^{tt} = \frac{32 \pi^3 e_{\alpha}^4 |\mathbf{k}_1 \beta|^2}{k_t^2 k_t^2} \frac{\delta(\omega_- - \mathbf{k}_- \mathbf{v})}{(\partial/\partial \omega)[\omega^2 \epsilon^t(\omega, \mathbf{k})] |_{\omega=\omega_t(k)} (\partial/\partial \omega_1)[\epsilon^t(\omega_1, \mathbf{k}_1)] |_{\omega_1=\omega_t(k_1)}},$$

где  $\beta$  — векторный матричный элемент взаимодействия.

Наибольший интерес для приложений теории нелинейных взаимодействий представляет трансформация продольных волн в поперечные, а не обратный процесс. Ввиду того, что перекачка энергии происходит в сторону волн с меньшими частотами, ограничимся рассмотрением взаимодействия продольных и поперечных волн, у которых  $\omega_t < \omega_l$ . При  $t_1 t_1$ -взаимодействии, последнее неравенство выполняется только при условии  $k_1 > k \sqrt{2}$ \*. Предположим, что  $\delta k \equiv k_1 - k \sqrt{2} \ll 1$ . Матричный элемент нелинейного рассеяния на электронах плазмы (А) и ионах плазмы (Б) равен

$$\beta_{n,p}^{t,t_1} = - \frac{\omega_{\alpha}}{T_{\alpha} k_-} \left\{ \frac{k_1}{k_-} \frac{\kappa}{\epsilon^t(\omega_-, k_-)} + \frac{k_1}{5k_1} \left( \frac{k_1}{\omega_{\alpha}} \right)^2 \frac{f}{1 - (\omega_-/k_-)^2 \epsilon^t(\omega_-, k_-)} \right\}, \quad (3.1)$$

где

$$\kappa = (\mathbf{k}_- / k_-) \cos^3 \beta + (k_1 / k_1) \sin^2 \beta, \quad (3.2)$$

$$f = (k/k_1) \sin \alpha [\sin \beta \sin^2 \alpha / 2 - \cos \beta (1 - \sin 2\alpha)] - \sin \beta - 2 \cos \beta.$$

Число поперечных волн растет при этом со скоростью

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{t_1}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{t_1} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^{t_1} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\alpha}^2}{N_{\alpha} T_{\alpha}} \frac{9\pi}{16} \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| \left| f_3^{(\alpha)} \right|, \quad (3.3)$$

где

$$f_3^{(\alpha)} = \sin^2 \theta (1 + 3 \cos^2 \gamma) / 4 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + f_2^{(\alpha)} (\sin \gamma \cos \beta - \sin \alpha) - (f_2^{(\alpha)})^2, \quad (3.4)$$

$$f_2^{(\alpha)} = (k_1 / k_-)^2 \{ f_1 (\omega_{\alpha} / k_1)^2 [\epsilon^t(\omega_-, k_-)]^{-1} + (1/5) f \sin \alpha [1 - (\omega_- / k_-)^2 \epsilon^t(\omega_-, k_-)]^{-1} \};$$

$$f_1 = \sin \alpha \sin^2 \beta - \sin \gamma \cos^3 \beta. \quad (3.5)$$

В случае (Б) рассеяние происходит на релятивистских ионах через продольные и поперечные волны; комптоновское и нелинейное рассеяния одинаковы по порядку величины. Из формулы (3.3) получаем

\* В этом разделе  $\mathbf{k}$  — волновой вектор поперечной волны, а  $\mathbf{k}_1$  — ленгмюровской.

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_i \frac{W^{l_1}}{N_i T_i} \frac{\delta k}{\omega_i}. \quad (3.6)$$

Для плазмы (A) в предельном случае

$$\delta k \ll \omega_e v_{T_i} \quad (3.7)$$

в формулах (3.1) и (3.4) можно опустить первые члены, описывающие нелинейное рассеяние через продольную волну, так как соответствующий матричный элемент оказывается в  $T_e/T_i \gg 1$  раз меньше матричного элемента комптоновского рассеяния (нелинейное и комптоновское рассеяния одинаковы по порядку величины). При этом матричный элемент нелинейного рассеяния на ионах через продольную волну

$$\beta_{i \text{ n p}}^{l_1 t_1} = \mathbf{x}/v_{\phi}^{l_1} m_i \quad (3.8)$$

в  $v_{T_i} \omega_e / \delta k \gg 1$  раз больше, чем через поперечную. В предельном случае, противоположном (3.7), при условии (2.13) (т. е. при отсутствии резонанса) нелинейное и комптоновское рассеяния одинаковы по порядку величины; матричный элемент нелинейного рассеяния на ионах, происходящего через продольную и поперечную виртуальную волны, равен

$$\beta_{i \text{ n p}}^{l_1 t_1} = \frac{\mathbf{x}}{m_i} \frac{k_1}{\omega_e} \frac{\omega_{L_i}^2}{\omega_-^2} \{ [\epsilon^l(\omega_-, k_-)]^{-1} - 2[(k_-/\omega_-)^2 - \epsilon^l(\omega_-, k_-)]^{-1} \}. \quad (3.9)$$

Число волн при нерезонансном рассеянии на электронах и ионах растет со скоростью

$$\frac{\partial N_k^{l_1}}{\partial t} = N_k^{t_1} \int \frac{N_{k_1}^{l_1} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| \frac{9\pi}{16} \left[ |f_3^{(e)}| + \sqrt{\frac{32}{\pi}} \Theta^3 f_4 \right]. \quad (3.10)$$

При условии (3.7)  $f_4 = \cos^4 \beta (\sin \alpha - \sin \gamma \cos \beta)^2$ ; в противоположном предельном случае  $f_4 = |\sin \alpha + f_1(\omega_{L_i}/\omega_-)^2 \{ [\epsilon^l(\omega_-, k_-)]^{-1} - 2[(k_-/\omega_-)^2 - \epsilon^l(\omega_-, k_-)]^{-1} \}|^2$ . Характерное обратное время рассеяния равно

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_1}}{N_e T_e} \frac{\delta k}{\omega_e} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (3.11)$$

При резонансном рассеянии (2.16), как и в случае  $l_1 l_1$ -взаимодействия, распространяются ионнозвуковые волны  $\omega_s = k_s V T_e / m_i$ . Считая распределение волн изотропным, получим скорость увеличения числа поперечных волн:

$$\frac{\partial N_k^{t_1}}{\partial t} = N_k^{t_1} \int \frac{N_{k_1}^{l_1} k_1^2 dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{\pi^2}{8} \frac{\omega_-^2}{k k_1} \frac{m_i}{T_e} \left[ 1 + \frac{\Theta^3}{9} \sqrt{\frac{32}{\pi}} \right] f_1^2 \Big|_{\cos \alpha = x}, \quad (3.12)$$

где  $x = [k^2 + k_1^2 - \omega_-^2 m_i / T_e]/2k k_1$ ; углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в (3.5) связаны соотношениями (2.4). Если  $k \gg \omega_{L_i}$ , интеграл берется в пределах

$$k \sqrt{2} + 5\omega_{L_i} (\sqrt{2} - 1)/\sqrt{54} \leq k_1 \leq k \sqrt{2} + 5\omega_{L_i} (\sqrt{2} + 1)/\sqrt{54}. \quad (3.13)$$

Если же  $k \ll \omega_{L_i}$ , либо  $N_{k_1}^{l_1}$  мало вне интервала (3.13), интегрирование производится по всей области; при этом из (3.12) следует

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_1}}{N_e T_e} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (3.14)$$

При условии (2.32) как резонансное, так и нерезонансное рассеяния происходят на ионах; при выполнении обратного неравенства преобладает рассеяние на электронах. Сравнивая формулу (3.11), верную по порядку величины при  $\delta k \sim k$ , с формулой (3.14), получаем отношение вероятностей резонансной и нерезонансной трансформации на одну и ту же частоту  $\omega_- \sim k/v_\phi$ , равное  $v_\phi^2 \sqrt{T_e/m_i}$ .

Матричный элемент нелинейного рассеяния продольной волны  $I_2$  с превращением ее в поперечную волну  $t_1$  на плазме (А) при условии, обратном (2.32), а также на плазме (Б) равен

$$\beta_{\text{нр}}^{I_2 t_1} = T_\alpha^{-1} [(\mathbf{k}_-/\mathbf{k}_-) \psi_1^{(a)}(\mu) + (\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_1) \psi_2^{(a)}(\mu)], \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^{(a)}(\mu) = & - \frac{4 \sqrt{\ln(2T_\alpha/m_\alpha)}}{1 - |\mu|} \left[ \frac{1}{\epsilon^I(\mu)} - \frac{|\mu|}{1 - \mu^2 \epsilon^I(\mu)} \right] - \frac{2[\epsilon^I(\mu)]^{-1}}{\sqrt{3 \ln(2T_\alpha/m_\alpha)}} + \\ & + \left[ \frac{1}{\epsilon^I(\mu)} - \frac{1}{1 - \mu^2 \epsilon^I(\mu)} \right] \mu \left[ \left( 1 - 3\mu^2 + \frac{2\mu^2}{1 - |\mu|} \right) \ln \left| \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right| - \right. \\ & \left. - 6\mu + \frac{\mu}{|\mu|} \frac{4}{\sqrt{3 \ln(2T_\alpha/m_\alpha)}} \right], \end{aligned}$$

$$\psi_2^{(a)}(\mu) = [\epsilon^I(\mu)]^{-1} - [1 - \mu^2 \epsilon^I(\mu)]^{-1} [3 - 2 \ln(2T_\alpha/m_\alpha)] 2\mu/|\mu|.$$

Здесь  $\epsilon^I(\mu)$  и  $\epsilon^I(\mu)$  — поперечная и продольная диэлектрические проницаемости, зависящие от отношения  $\mu = \omega_-/k_- \simeq [3 \ln(2T_\alpha/m_\alpha)]^{-1/2} - 1$ . Нелинейное рассеяние на электронах плазмы (А) и ионах плазмы (Б) происходит через продольные и поперечные виртуальные волны и имеет тот же порядок величины, что и комптоновское рассеяние. Число поперечных волн растет со скоростью

$$\frac{\partial N_k^{t_1}}{\partial t} = N_k^{t_1} \int \frac{N_{k_1}^{I_2} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_\alpha k_1}{N_\alpha T_\alpha} \frac{m_e^2}{T_e T_\alpha} \frac{\pi}{8} \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| \psi^{(a)} \left( \frac{\omega_-}{k_-} \right), \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \psi^{(a)}(\mu) = & [\psi_1^{(a)}(\mu) - \psi_2^{(a)}(\mu)]^2 \sin^2 \alpha + \sqrt{3 \ln(2T_\alpha/m_\alpha)} \times \\ & \times [\psi_1^{(a)}(\mu) - \psi_2^{(a)}(\mu)] \sin^2 \alpha + 3 \ln(2T_\alpha/m_\alpha) [2 \sin^2 \alpha + \mu^2 (2 - 5 \sin^2 \alpha) + \mu^4 (3 \sin^2 \alpha - 2)]. \end{aligned}$$

Характерное обратное время взаимодействия равно

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_\alpha \frac{W^{I_2}}{N_\alpha T_\alpha} \frac{m_e^2}{T_e T_\alpha}. \quad (3.17)$$

В общем случае плазмы (А) необходимо учесть комптоновское рассеяние на ионах, в  $(m_i/T_e)^2 \gg 1$  раз превышающее нелинейное. Число волн при  $I_2 t_1$ -взаимодействии увеличивается с ростом скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^{t_1}}{\partial t} = & N_k^{t_1} \int \frac{N_{k_1}^{I_2} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{m_e^2}{T_e^2} \frac{\pi}{8} \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| \left[ \left| \psi^{(e)} \left( \frac{\omega_-}{k_-} \right) \right| + \sqrt{\frac{18}{\pi}} \times \right. \\ & \times \ln \left. \frac{2T_e}{m_e} \Theta^3 \sin^2 \alpha \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Обратное время перекачки энергии имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_2}}{N_e T_e} \frac{m_e^2}{T_e^2} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (3.19)$$

Как обычно, первые слагаемые в квадратных скобках формул (3.18), (3.19) относятся к электронам, вторые — к ионам плазмы (А).

Трансформация волны  $l_2$  в волну  $t_2$  возможна при условии  $\omega_t \leq \omega_i$ . Частоты взаимодействующих волн будем считать достаточно близкими ( $\omega_t - \omega_i \ll k_0$ ), что определяет положение участка  $t_2$  на кривой закона дисперсии поперечных волн (рис. 1). Комптоновское рассеяние на электронах плазмы (А), ионах плазмы (А) при  $|\omega_-| \gg k_0 v_{T_i}$  и ионах плазмы (Б) порядка нелинейного. Нелинейное рассеяние на электронах плазмы (А) при  $|\omega_-| \gg k_0 v_{T_i}$  и ионах плазмы (Б) происходит через продольную и поперечную волны; матричный элемент нелинейного рассеяния через поперечную волну на электронах плазмы (А) при  $|\omega_-|/k_- \gg v_{T_i}$  через продольную волну в  $[(\omega_-/k_-)^2 + T_e/m_i]^{-1} \gg 1$  раз больше, чем через поперечную. Для краткости приведем только обратное время перекачки при  $l_2 t_2$ -взаимодействии волн в плазме (Б),

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_i \frac{W^{l_2}}{N_i T_i} \frac{m_e^2}{T_e T_i} \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right|, \quad (3.20)$$

и в плазме (А) при условии (2.13) (отсутствие резонанса),

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_2}}{N_e T_e} \frac{m_e^2}{T_e^2} \left| \frac{\omega_-}{k_-} \right| \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (3.21)$$

В случае (2.16) резонансного рассеяния на электронах и ионах, аналогичного резонансному  $l_2 l_2$ -рассеянию, при условии  $v_{T_i} \gg (T_e/T_i) \times \exp(-T_e/T_i)$ , выполняющемуся практически всегда, для обратного времени взаимодействия имеем

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{l_2}}{N_e T_e} \frac{m_e^2}{T_e^2} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (3.22)$$

Сравнивая обратные времена (3.17) и (3.20) взаимодействия в плазме (Б), замечаем, что  $l_2 t_1$ -взаимодействие в  $k_-/|\omega_-| \gg 1$  раз вероятнее  $l_2 t_2$ -взаимодействия.

Вероятность нерезонансного  $l_2 t_2$ -взаимодействия в плазме (А) растет с  $|\omega_-|$ ; наиболее вероятным является рассеяние с изменением частоты на  $|\omega_-| \sim k_-$ . При этом формула (3.21) принимает вид обратного времени (3.19) трансформации волны  $l_2$  в волну  $t_1$ . Иначе говоря,  $l_2 t_1$ -взаимодействие гораздо вероятнее нерезонансного  $l_2 t_2$ -взаимодействия.

Покажем, что однократная  $l_2 t_1$ -трансформация более вероятна, чем постепенный «спуск» волны с многократным резонансным «переходом» с одной дисперсионной кривой на другую (рис. 1). Сделаем грубую оценку времени постепенной трансформации  $\tau'$ . Будем считать, что формула (3.22) качественно верна в интервале частот порядка  $k_0$ , на который должна уменьшиться частота волны. Учет взаимодействия в нижней части кривых, определяемого формулой (3.14), только увеличит время  $\tau'$ . При резонанском рассеянии частота уменьшается на  $\omega_- \sim k \sqrt{T_e/m_i}$ ; по мере уменьшения  $k$  «шаги» становятся все более мелкими. Полагая  $\omega_- \sim k_0 \sqrt{T_e/m_i}$  на всем протяжении постепенной транс-

формации, мы уменьшим  $\tau'$ . Итак, считая число шагов равным  $k_0/k_0 \sqrt{T_e/m_i} = \sqrt{m_i/T_e}$ , получаем

$$\tau' \sim \frac{1}{\omega_e} \frac{N_e T_e}{W^{t_2}} \frac{T_e^4}{m_e^4} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{m_i T_i}} \right)^3 \right].$$

Сравним это выражение с временем  $\tau$  однократного  $t_2 t_1$ -взаимодействия:  $\tau'/\tau > \sqrt{m_i/T_e} \gg 1$ .

Итак, при рассеянии волн  $t_2$  в обоих рассматриваемых видах плазмы однократная трансформация в область  $t_1$  оказывается более вероятной, чем проступенчатая.

#### 4. ВЗАЙМОДЕЙСТВИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН МЕЖДУ СОБОЙ

Вероятность рассеяния поперечной волны на частице  $\alpha$ , имеющей скорость  $v$  с превращением в поперечную волну равна [6]

$$W_{va}^{tt} = [32\pi^3 e_\alpha^4 \omega_1^2(k_1) \delta(\omega_- - kv) |e_i e_{ij} \beta_{ij}|^2] \{(\partial/\partial\omega) \times \\ \times [\omega^2 \epsilon'(v, k)]|_{\omega=\omega_t(k)} (\partial/\partial\omega_1) [\omega_1^2 \epsilon'(v_1, k_1)]|_{\omega_1=\omega_t(k_1)}\}^{-1}.$$

Здесь  $\beta_{ij}$  — матричный элемент взаимодействия;  $e$  и  $e_1$  — единичные векторы, перпендикулярные к волновым векторам взаимодействующих волн  $k$  и  $k_1$ . Усреднение производится по направлениям  $e$  и  $e_1$ .

Рассмотрим взаимодействие поперечных волн с фазовой скоростью, значительно превосходящей скорость света ( $t_1 t_1$ -взаимодействие), волновые векторы которых удовлетворяют условию (2.1). Приведем матричный элемент нелинейного рассеяния на электронах плазмы (А) и ионах плазмы (Б):

$$\beta_{ij}^{tt_1 t_1 p} = - \frac{\omega_\alpha}{T_\alpha k_-^2} \left\{ \frac{\lambda_{ij}}{\epsilon'(v_-, k_-)} + \frac{2 \sin^2 \alpha k_{1i}/k_1}{v_\phi^2 [1 - (\omega_-/k_-)^2 \epsilon'(v_-, k_-)]} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{k_{-i}}{k_-} \cos \beta + \frac{k_j}{k_-} (1 - 2 \cos \alpha \cos^2 \beta) \right] \right\}. \quad (4.1)$$

Нелинейному рассеянию на ионах плазмы (А) при условии (2.6) соответствует

$$\beta_{ij}^{tt_1 t_1 p} = |k_{-i} k_{-j} - \lambda_{ij}| / \omega_e m_i \quad (4.2)$$

и при условии (2.11) —

$$\beta_{ij}^{tt_1 t_1 p} = \lambda_{ij} g / \omega_e m_i, \quad (4.3)$$

$$g = (\omega_{Li}/\omega_-)^2 \{[\epsilon'(v_-, k_-)]^{-1} - 4[(k_-/\omega_-)^2 - \epsilon'(v_-, k_-)]^{-1}\}.$$

Здесь

$$\lambda_{ij} = [(k_{-i}/k_-)(1 + \sin^2 \alpha/4) - (k_{1i}/k_1) \sin^2 \beta \cos \beta] (k_{-j}/k_-). \quad (4.4)$$

Комптоновское и нелинейное рассеяния на всех рассматриваемых сортах частиц одинаковы по порядку величины. Нелинейное рассеяние происходит через оба вида виртуальных волн в случаях (Б) и (А) при условии (2.11). В случае (А) при условии (2.6) матричный элемент нелинейного рассеяния на ионах через продольную волну в  $(m_i/T_e) \times (k/\Delta k + v_{T_i}^{-2}) + v_\phi/v_{T_i} + v_{T_i} \omega_e/\Delta k \gg 1$  раз больше, чем через поперечную; матричный элемент нелинейного рассеяния через поперечную волну

в  $T_e/T_i \gg 1$  раз больше, чем через продольную. Скорость изменения числа волн при рассеянии в плазме (Б) равна

$$\frac{\partial N_k^{t_1}}{\partial t} = -N_k^{t_1} \int \frac{N_{k_1} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_i T_i} \frac{27\pi}{20} \frac{\Delta k}{k_-} \frac{1}{v_\phi} |g_1|, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= (1+\cos^2\alpha)/2 + \cos^2\beta + 3\sin^4\theta/8 + g_2(1+\cos^2\beta) + 2g_2^2, \\ g_2 &= (k/k_-)^2 [v_\phi^2 g_3 [\epsilon^i(\omega_-, k_-)]^{-1} + \\ &+ \sin^4\alpha (1-4\cos\alpha \cos^2\beta)[1-(\omega_-/k_-)^2 \epsilon^i(\omega_-, k_-)]^{-1}], \\ g_3 &= \sin^2\theta [1 - 3\sin^2\alpha/4]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из формулы (4.5) получаем обратное время взаимодействия:

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_i \frac{W^{t_1}}{N_i T_i} \frac{\Delta k}{\omega_i}. \quad (4.7)$$

Скорость изменения числа волн в случае рассеяния на плазме (А) равна при условии (2.13) (отсутствие резонанса)

$$\frac{\partial N_k^{t_1}}{\partial t} = -N_k^{t_1} \int \frac{N_{k_1}^{t_1} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{\Delta k}{k_- v_\phi} \frac{27\pi}{20} \left[ |g_1| + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \Theta^3 \left| \frac{1+\cos^2\alpha}{2} + g_4^2 \right| \right], \quad (4.8)$$

где  $g_4 = 3\sin^2\alpha \sin^2\beta/4$  — в случае (2.6) и  $g_4 = gg_3$  — в случае (2.11); обратное время перекачки

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{t_1}}{N_e T_e} \frac{\Delta k}{\omega_e} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{V T_i m_i} \right)^3 \right]. \quad (4.9)$$

В случае резонансного рассеяния (2.16), аналогичного резонансному  $l_1 l_1$ -рассеянию, во всех интересующих нас областях  $T_i$  и  $T_e$  в предположении изотропности распределения  $N_k^{t_1}$  скорость изменения числа волн равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^{t_1}}{\partial t} &= -N_k^{t_1} \int_{k-5\omega_{Li}/V\sqrt{27}}^{k+5\omega_{Li}/V\sqrt{27}} \frac{N_{k_1}^{t_1} k_1^2 dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e^2}{N_e T_e} \frac{m_i}{T_e} \frac{\omega_- |\omega_-|}{k^2} \times \\ &\times \frac{\pi^2}{2} \left[ 1 + 9 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Theta^3 \right] g_3^2 \Big|_{\cos\alpha=x}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где  $x = (k^2 + k_1^2 - \omega_-^2 m_i/T_e)/2kk_1$ ; углы связаны соотношениями (2.4). Из последней формулы получаем

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{t_1}}{N_e T_e} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{V T_i m_i} \right)^3 \right]. \quad (4.11)$$

В данном случае верно все сказанное о пределах интегрирования и об условиях справедливости оценки обратного времени перекачки и для случая резонансного  $l_1 l_1$ -взаимодействия. Из сравнения обратных времен перекачки (4.9) при  $\Delta k \sim k$  и (4.11) видно, что отношение вероятностей резонансной и нерезонансной трансформации на одну и ту же частоту  $\omega_- \sim k/v_\phi$  равно  $v_\phi^2 V T_e / m_i$ .

Наибольший интерес для изучения космического излучения астрофизических объектов представляют взаимодействия высокочастотных поперечных волн, так как такие волны легче наблюдаются методами радиоастрономии. Рассмотрим взаимодействия высокочастотной ( $t_3$ ) и низкочастотной ( $t_1$ ), а также двух высокочастотных поперечных волн ( $t_3t_3$ ).

При  $t_3t_1$ -взаимодействии комптоновское рассеяние на электронах плазмы (А) и ионах плазмы (Б) в  $(\omega_{t_3}/\omega_e)^4 \gg 1$  раз, а на ионах плазмы (А) — в  $(\omega_{t_3}/\omega_e)^2(m_i/T_e)^4 \gg 1$  раз больше нелинейного. Скорость изменения числа волн равна при рассеянии на плазме (А)

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{t_1}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{t_1} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^{t_3} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{t_1} \omega_e}{N_e T_e} \frac{9\pi}{16} \left[ \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^2 (5 + \cos^2 \alpha) + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \Theta^3 (1 + \cos^2 \alpha) \right], \quad (4.12)$$

а при рассеянии на плазме (Б) —

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{t_1}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{t_1} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^{t_3} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{t_1} \omega_i}{N_i T_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{t_3}} \right)^2 \frac{9\pi}{16} (5 + \cos^2 \alpha). \quad (4.13)$$

Из двух последних выражений получаем для случая (А)

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{t_3}}{N_e T_e} \left[ \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^2 + \left( \frac{T_e}{V T_i m_i} \right)^3 \right] \quad (4.14)$$

и для случая (Б)

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_i \frac{W^{t_3}}{N_i T_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{t_3}} \right)^2. \quad (4.15)$$

Чем больше первоначальная частота волны  $\omega_{t_3}$ , тем медленнее будет превращение ее в низкочастотную волну с  $\omega = \omega_e$  при рассеянии на электронах плазмы (А) и на плазме (Б). Рассеяние на плазме (А) волн с частотой  $\omega_{t_3} \ll \omega_e (\sqrt{m_i T_i / T_e})^{3/2}$  происходит на электронах, а волн с частотой  $\omega_{t_3} \gg \omega_e (\sqrt{m_i T_i / T_e})^{3/2}$  — на ионах. Вероятность  $t_3t_1$ -взаимодействия в случаях (А) и (Б) максимальна при параллельных и антипараллельных  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ .

В случае  $t_3t_3$ -взаимодействия при условии (2.1) комптоновское рассеяние на плазме (Б) в  $(\omega_{t_3}/\omega_i)^5 \gg 1$  раз больше нелинейного. Скорость изменения числа волн равна

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{t_3}}{\partial t} = - N_{\mathbf{k}}^{t_3} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^{t_3} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{t_3} \omega_i}{N_i T_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{t_3}} \right)^3 \frac{\Delta k}{k_-} \frac{9\pi}{8} \Phi, \quad (4.16)$$

где

$$\Phi = 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \gamma + 12 \sin \alpha \sin \gamma + 8 \sin \alpha \cos^2 \gamma [4E(\sin \gamma) - 3K(\sin \gamma)]/\pi;$$

$E(x) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}$  и  $K(x) = \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi})^{-1}$  — полные эллиптические интегралы. Обратное время перекачки энергии равно

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_i \frac{W^{t_3}}{N_i T_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_{t_3}} \right)^3 \frac{\Delta k}{k_-}. \quad (4.17)$$

При взаимодействии тех же волн в плазме (А) при отсутствии резонанса комптоновское рассеяние на электронах в  $[(\omega_{t_3}/\omega_e)^2 + T_e/T_i]^2 \gg 1$  раз в случае (2.23) и в  $(\omega_{t_3}/\omega_e)^2 [1 - (\omega_-/\omega_{E1})^2] \gg 1$  раз в случае (2.28) превышает нелинейное; комптоновское и нелинейное рассеяния на ионах одинаковы по порядку величины. Матричный элемент нели-

нейного рассеяния на ионах через продольную волну, который в  $\{(v_{t_1}^2 + \Delta k/k)^2 + (\omega_e/\omega_{t_1})^2(T_e/m_i)[(\Delta k/k v_{T_1})^2 + \Delta k/k + v_{T_1}^2]\}^{-1} \gg 1$  раз в случае (2.23) и в  $[(\omega_-/k_-)^2 - (T_e/m_i)(\omega_e/\omega_{t_1})]^{-1} \gg 1$  раз в случае (2.28) больше, чем через поперечную, равен  $\theta_{t_1 t_3}^{t_1 t_3} = -\lambda_{t_1} \Phi_1 / m_i \omega_{t_3}$ , где  $\lambda_{t_1}$  определяется формулой (4.4),  $\Phi_1 = [1 + (T_{t_1}/m_i)(k_-/\omega_{L_i})^2]^{-1}$  при условии (2.23) и  $\Phi_1 = [1 - (\omega_-/\omega_{L_i})^2]^{-1}$  — при условии (2.28). Число волн изменяется со скоростью

$$\frac{\partial N_k^{t_3}}{\partial t} = -N_k^{t_3} \int \frac{N_{k_1}^{t_3} dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{t_3} \omega_e}{N_e T_e} \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^3 \frac{\Delta k}{k_-} \frac{9\pi}{8} \times \\ \times \left[ \Phi + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left( \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2} + g_3^2 \Phi_1^2 \right) \Theta^3 \right]. \quad (4.18)$$

Характерное обратное время перекачки энергии равно

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{t_3}}{N_e T_e} \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^3 \frac{\Delta k}{k} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{m_i T_i}} \right)^3 \right]. \quad (4.19)$$

Вероятность взаимодействия увеличивается с ростом  $\Delta k$ ; очевидно, что рассеяние с изменением частоты на  $\omega_- \gg \omega_{t_1} v_{T_1}$  более вероятно, чем рассеяние с изменением на  $\omega_- \ll \omega_{t_3} v_{T_1}$ . Вероятность рассеяния как в случае (А), так и в случае (Б) уменьшается с ростом частоты взаимодействующих волн.

При резонансном  $t_3 t_3$ -рассеянии (2.16) в плазме (А), возможном лишь при условии (2.11), распространяется ионнозвуковая волна (2.33). Если функция распределения (2.33) изотропна, скорость изменения числа волн оказывается равной

$$\frac{\partial N_k^{t_3}}{\partial t} = -N_k^{t_3} \int_{k(1-\omega_{L_i}^2/k^2)}^{k(1+\omega_{L_i}^2/k^2)} \frac{N_{k_1}^{t_3} k_1^2 dk_1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_e \omega_{t_3}}{N_e T_e} \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^3 \frac{9\pi^2}{4} \frac{\omega_- |\omega_-|}{k_-^2} \frac{m_i}{T_e} \times \\ \times \left( 1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_{L_i}^2} \right) (1 + \nu)^{-1} \left[ \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^4 \frac{k^2}{\omega_-^2} \frac{T_e}{m_i} \left( 1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_{L_i}^2} \right) \frac{9}{8} \Phi_2 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \Theta^3 g_3^2 \right] \Big|_{\cos \alpha = x}, \quad (4.20)$$

где

$$\Phi_2 = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \{ 8 \sin^2 \alpha \cos^4 \beta + [(1 + 2 \cos^3 \alpha) / \cos \beta] \ln \cos^2 \beta + \\ + [\sin^3 \alpha + 2 \sin^2 \beta + \sin 4\alpha \cos^2 \beta / 2 - (1 - 2 \cos^3 \alpha) / \cos \beta] \ln \xi \},$$

$$\xi = \max \{ m_e^2 / 4T_e^2, 3\omega_e^2 / 8\omega_{t_3}^2 \},$$

$$\nu = \sqrt{2/\pi} \sqrt{m_i/T_i} (T_e/T_i) \exp [-(3T_e/T_i)(\omega_e/k_-)^2].$$

Если функция распределения колебаний мала вне области интегрирования, из формулы (4.20) получаем

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_e \frac{W^{t_3}}{N_e T_e} \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^3 \frac{1}{1 + \nu} \left[ \left( \frac{\omega_e}{\omega_{t_3}} \right)^4 + \left( \frac{T_e}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]. \quad (4.21)$$

Сравнивая формулы (4.19) при  $\Delta k \sim k$  и (4.21), находим отношение вероятностей резонансной и нерезонансной трансформаций на одну и ту же частоту:

$$\frac{\omega_\rho}{\omega_{t_3}} \sqrt{\frac{T_\rho}{m_i}} \frac{1}{1+\nu} \left[ \left( \frac{\omega_\rho}{\omega_{t_3}} \right)^4 + \left( \frac{T_\rho}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right] \left[ 1 + \left( \frac{T_\rho}{\sqrt{T_i m_i}} \right)^3 \right]^{-1} \ll 1.$$

Из сравнения формулы (4.13) и (4.17), (4.15) и (4.19) видно, что вероятность  $t_3 t_1$ -рассеяния на электронах плазмы (А) и ионах плазмы (Б) в  $(\omega_{t_1}/\omega_\alpha)(k/\Delta k) \gg 1$  раз, на ионах плазмы (А) — в  $(\omega_{t_1}/\omega_e)^3(k/\Delta k) \gg 1$  раз превышает вероятность  $t_3 t_3$ -рассеяния. Следовательно, чем выше частота  $\omega_{t_1}$ , тем более вероятно, что перекачка произойдет путем «перешагивания» в область частот  $\omega_\alpha$  (а не «сползания» по дисперсионной кривой), т. е. тем труднее будет наблюдать такую волну в излучении плазмы космических объектов. Подчеркнем, что этот результат справедлив для сколь угодно высоких частот  $\omega_{t_1}$ , если только интенсивность волн достаточна для того, чтобы на длине объекта произошла трансформация.

Таким образом, когерентное излучение релятивистской плазмы космических объектов скорее всего возможно лишь на частотах вблизи плазменной частоты. Подчеркнем, что при получении этих результатов функции распределения частиц плазмы предполагались максвелловскими. По-видимому, обычно существуют длинные хвосты у максвелловского распределения (космические лучи). Их наличие приводит к возможности индуцированного и спонтанного излучения плазмы на высоких частотах  $\omega \gg \omega_\alpha$ . Однако исследованные в настоящей работе нелинейные эффекты показывают, что интенсивности высокочастотных излучений ограничены сверху. Это ограничение связано с нелинейной трансформацией высокочастотного излучения в излучение вблизи плазменной частоты  $\omega_\alpha$  на максвелловской части функции распределения. Наблюдать излучение высоких частот можно лишь в том случае, если оптическая толщина относительно исследованных нелинейных взаимодействий значительно меньше единицы. Оценку оптической толщины  $L = ct$  можно получить из выражений (4.14), (4.15).

## ЛИТЕРАТУРА

- Г. И. Булкер, Атомная энергия, 5, 9 (1956).
- В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
- P. C. Clemmow, A. J. Willson, Proc. Cambridge Philos. Soc., 53, 222 (1958).
- P. C. Clemmow, A. J. Willson, Proc. Roy. Soc., 237, 117 (1956).
- В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 40, 1775 (1961).
- В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.

Харьковский государственный научно-исследовательский  
институт метрологии

Поступила в редакцию  
30 ноября 1967 г.

## NONLINEAR WAVE INTERACTION IN RELATIVISTIC PLASMA

V. N. Tsytovich, I. M. Korzhenevich

The nonlinear effects in plasma consisting of ultra-relativistic electrons and non-relativistic ions and of ultra-relativistic electron-ion plasma are considered. The distribution functions of plasma particles are assumed Maxwell's ones. The probabilities of nonlinear interactions of longitudinal and transverse wave between each other have been found, as well as longitudinal waves with transverse waves. The interaction between waves with different phase velocities are considered. It is shown that a direct transformation of high-frequency waves into plasma ones may be effective.

УДК 621.372.827 : 537.533

## ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

*К. А. Барсуков, С. А. Свободина*

Рассматривается излучение Вавилова—Черенкова, возникающее при движении заряда по оси круглого спирального волновода. Исследуются спектр и энергия излучения. Оценивается уширение линии излучения, вызываемое потерями в спиральном волноводе.

Теория взаимодействия электронных потоков с медленными волнами в спиральном волноводе хорошо известна, и этой теме посвящена обширная литература (см., например, [1]). В то же время представляется важной задача об излучении точечного заряда или когерентного струйка зарядов, движущихся в спиральном волноводе. Частично эта задача была рассмотрена в работе [2], однако отсутствие анализа полученных в ней результатов и ряд существенных опечаток затрудняют понимание свойств излучения Вавилова—Черенкова.

Ниже мы рассмотрим излучение точечного заряда, движущегося по оси спирального волновода со скоростью  $v$ . Пусть радиус волновода  $a$  и угол намотки спирали  $\vartheta$ , причем будем считать, что на поверхности спирального волновода выполняются приближенные граничные условия [3], позволяющие рассматривать ее как анизотропно проводящую поверхность.

В этом приближении нетрудно написать условие существования эффекта Вавилова—Черенкова. Именно, излучение имеет место, если скорость заряда равна фазовой скорости волны в спиральном волноводе. Если еще учесть, что заряд движется по оси волновода и поле излучения является осесимметричным, то указанное условие с помощью [3] запишется в виде

$$\frac{I_1(x) K_1(x)}{I_0(x) K_0(x)} = \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}, \quad (1)$$

где  $x = |\omega| \sqrt{1 - \beta^2} a/v$ .

Уравнение (1) определяет спектр излучения Вавилова—Черенкова, причем оно справедливо при

$$x \ll \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (2)$$

когда пространственный период поля в волноводе значительно больше периода спирали.

Решение уравнения (1) проиллюстрировано на рис. 1. Левая часть этого уравнения

$$y_1 = \frac{I_1(x) K_1(x)}{I_0(x) K_0(x)}$$

представляет стандартную функцию, вид которой не зависит от параметров задачи. Функция  $y_1$  монотонно растет от нуля при  $x = 0$  и имеет горизонтальную асимптоту при  $x \rightarrow \infty$  ( $y = 1$ ). Черенковская частота определяется как точка пересечения прямой

$$y_2 = \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}$$

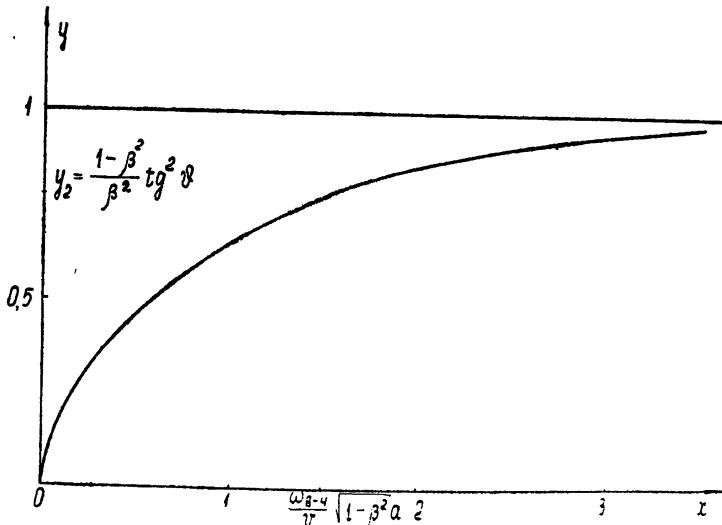


Рис. 1.

с кривой  $y_1$ . Из рис. 1 сразу видно, что решение (1) существует при условии

$$\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta < 1 \quad \text{или} \quad \beta > \sin \vartheta \quad (3)$$

и является единственным, т. е. заряд при движении по оси волновода излучает единственную черенковскую частоту. Этот вывод оказывается верным, если переменная  $x$  удовлетворяет неравенству (2), и излучение Вавилова—Черенкова является достаточно длинноволновым.

Полный спектр излучения заряда, движущегося по оси спирального волновода, слагается из частоты, определяемой (1), и частот дифракционного спектра, обусловленного дифракцией коротковолновой части поля движущегося заряда на спирали. Естественно, что последняя не учитывается в настоящем приближении и требует специального рассмотрения.

Заметим, что дифракционное излучение составит существенную часть потерь энергии заряда лишь при достаточно большой его скорости. В самом деле, парциальное поле частоты  $\omega$  в полном поле заряда сосредоточено в области около траектории заряда, определяемой эффективным радиусом  $r_\omega \approx v/\omega \sqrt{1 - \beta^2}$  или  $r_\omega \approx a/x$ . Если  $r_\omega < a$ , т. е.  $x > 1$ , то поле частоты  $\omega$  практически не взаимодействует со спиралью. Следовательно, при выполнении условия

$$1 < x \ll \operatorname{ctg} \vartheta \sqrt{1 - \beta^2} \quad (4)$$

полные потери заряда являются в основном потерями на излучение Вавилова—Черенкова и описываются настоящим приближением.

Условие (4) требует, чтобы  $\operatorname{ctg} \vartheta \sqrt{1 - \beta^2} \gg 1$ . Обычно в замедляющих спиралях  $\operatorname{ctg} \vartheta$  порядка 10—100, и это неравенство выполняется в довольно широкой области значений  $\beta$ . В самом деле,  $1/\sqrt{1 - \beta^2} \ll \operatorname{ctg} \vartheta$  и даже при релятивистской скорости заряда, когда кинетическая энергия заряда оказывается порядка его энергии покоя ( $1/\sqrt{1 - \beta^2} \sim 2-3$ ), приведенное выше неравенство остается еще справедливым.

Заметим, что при выполнении условия (4) функции Бесселя в (1) могут быть заменены их асимптотическими выражениями. Ограничиваюсь первыми двумя членами разложения  $u_1$ , получим явное выражение для частоты излучения Вавилова—Черенкова:

$$\omega_{\text{в-ч}} = \frac{\beta v \cos \vartheta}{a \sqrt{2(1 - \beta^2)(\beta^2 - \sin^2 \vartheta)}}. \quad (5)$$

Подстановка (5) в (4) при  $\sin \vartheta \ll 1$  приводит к неравенствам

$$1 < \frac{\beta}{\sin \vartheta} < \sqrt{2}, \quad \sqrt{\beta^2 - \sin^2 \vartheta} \gg \frac{\beta \sin \vartheta}{\sqrt{2(1 - \beta^2)}}, \quad (6)$$

которые определяют область применимости формулы (5),

Перейдем теперь к расчету интенсивности излучения Вавилова—Черенкова в спиральном волноводе. Поле движущегося заряда представим электрическим и магнитным векторными потенциалами  $A_\omega^e(0, 0, A_{\omega 0}^e + A_{\omega 1}^e)$ ,  $A_\omega^m(0, 0, A_{\omega 2}^m)$ , где  $\omega$  означает фурье-составляющую физической величины и  $A_{\omega 0}^e$  — потенциал заряда в вакууме. Векторы поля найдутся с помощью формул

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega &= -\frac{c}{i\omega} \left( \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_\omega^e + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}_\omega^e \right) - \operatorname{rot} \mathbf{A}_\omega^m, \\ \mathbf{H}_\omega &= -\frac{c}{i\omega} \left( \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_\omega^m + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}_\omega^m \right) + \operatorname{rot} \mathbf{A}_\omega^e. \end{aligned} \quad (7)$$

Собственное поле заряда, как нетрудно показать, определяется в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , связанной с осью волновода, соотношением

$$A_{\omega 0}^e = \frac{q}{\pi c} \exp(i\omega z/v) K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r\right), \quad (8)$$

где  $q$  — величина движущегося заряда и  $K_0(|\omega| r \sqrt{1 - \beta^2}/v)$  — модифицированная функция Бесселя. Скалярные функции  $A_{\omega 1}^e$  и  $A_{\omega 2}^m$ , которые являются решением однородных волновых уравнений, представляются в виде

$$\begin{aligned} A_{\omega 1}^e &= \exp\left(i \frac{\omega}{v} z\right) \begin{cases} A_1 I_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r\right) & (0 \leq r \leq a) \\ A_2 K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r\right) & (r > a) \end{cases}, \\ A_{\omega 2}^m &= \exp\left(i \frac{\omega}{v} z\right) \begin{cases} B_1 I_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r\right) & (0 \leq r \leq a) \\ B_2 K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r\right) & (r > a) \end{cases}. \end{aligned} \quad (9)$$

Неизвестные коэффициенты в (9) определяются из граничных условий на поверхности волновода [3] как анизотропно проводящего цилиндра:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{q}{\pi c} \frac{\alpha^2 K_0^2 \sin^2 \vartheta}{\alpha^2 \sin^2 \vartheta I_0 K_0 - k^2 \cos^2 \vartheta I_1 K_1}, \quad A_2 = \frac{I_0}{K_0} A_1, \\ B_1 &= -ik \frac{q}{\pi c} \frac{\alpha K_0 K_1 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\alpha^2 \sin^2 \vartheta I_0 K_0 - k^2 \cos^2 \vartheta I_1 K_1}, \quad B_2 = -\frac{I_1}{K_1} B_1, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$K_0 = K_0(\alpha a), \quad K_1 = K_1(\alpha a), \quad I_0 = I_0(\alpha a),$$

$$I_1 = I_1(\alpha a), \quad \alpha = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Потери энергии заряженной частицы проще всего могут быть теперь найдены по тормозящей силе, действующей на заряд со стороны поля излучения:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{4q^2 \omega_{B-\chi}}{av \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta} \times \\ &\times \frac{(1 - \beta^2)^{3/2} K_0^2}{(1/2 + I_1 K_1 / I_0 K_0)(I_0 K_1 - I_1 K_0) + \frac{1}{2}(I_2 K_1 - I_1 K_2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где аргументом функций Бесселя является величина

$$\alpha a = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \cdot a, \quad K_2 = K_2(\alpha a), \quad I_2 = I_2(\alpha a).$$

На рис. 2 представлена зависимость потерь энергии заряда как функция его скорости при различных значениях угла  $\vartheta$ , причем на оси ординат откладывается безразмерная величина  $\frac{dW}{dz} \frac{a^2}{q^2}$ , которая имеет физический смысл отношения тормозящей силы к силе взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $a$ . Из графика видно, что существуют оптимальные значения угла наклона  $\vartheta$  и скорости заряда  $v$ , при которых энергия излучения достигает максимума. При  $\beta \rightarrow \sin \vartheta$  энергия излучения резко падает. Максимальное значение тормозящей силы примерно в 1,5 раза превышает силу взаимодействия точечных зарядов, разделенных расстоянием  $a$ .

В заключение рассмотрим кратко вопрос об уширении линии излучения Вавилова—Черенкова, вызываемом конечной проводимостью материала спирали. Учет проводимости проведем с помощью уточненных граничных условий на поверхности спирального волновода, полученных Л. А. Вайнштейном. Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} E_s^{(2)} = E_s^{(1)} &= -2i \frac{\omega}{c} \ln \frac{d}{\pi b} a \operatorname{tg} \vartheta \left[ H_{\tau}^{(2)} - H_{\tau}^{(1)} - \frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial s} (E_r^{(2)} - E_r^{(1)}) \right] + \\ &+ \frac{\omega d}{2\pi b} (H_{\tau}^{(2)} - H_{\tau}^{(1)}), \\ H_s^{(2)} &= H_s^{(1)}, \quad E_{\tau}^{(2)} = E_{\tau}^{(1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где для определенности провод спирали считается круглым диаметра  $b$ ,  $d$  — шаг спирали,  $w$  — импеданс провода. Первое слагаемое в правой части первого уравнения (12) описывает результат усреднения поля в непосредственной близости от провода спирали, второе учитывает появление дополнительного тока за счет конечной проводимости провода.

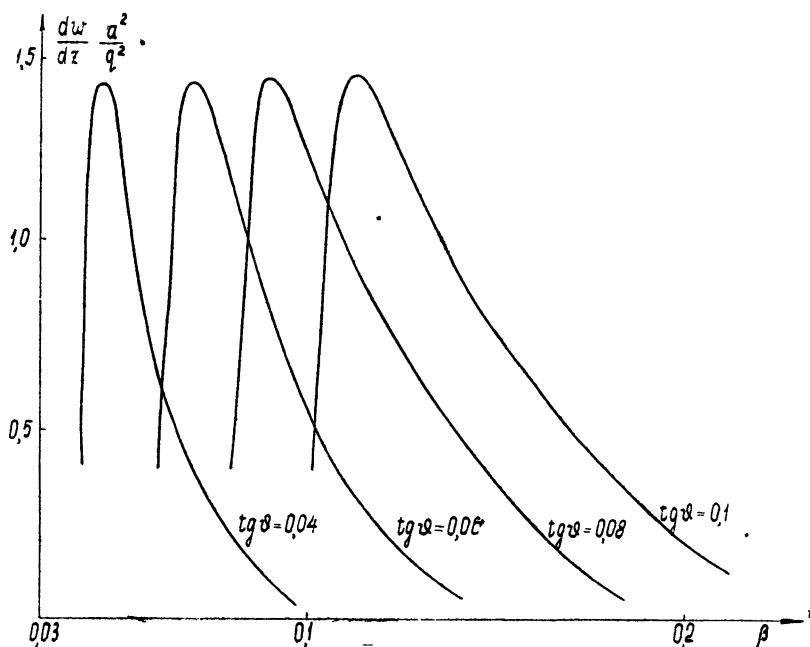


Рис. 2.

Фактически, этот член соответствует приближенным граничным условиям Леонтovichа.

Поле движущегося заряда с граничными условиями (12) находится аналогично предыдущему. Ширина линии определяется из требования, чтобы на ее крае величина энергии излучения уменьшалась в два раза по сравнению с центром линии. Не приводя для краткости соответствующего расчета, дадим выражение для полуширины линии в излучении Вавилова—Черенкова

$$\Delta\omega = \frac{w a^2 \omega_{B-\text{ч}} \sqrt{1 - \beta^2} \sin \vartheta}{\beta b \cos^3 \vartheta} \quad (13)$$

в предположении, что выполняются условия (12). То, что учет уширения линии оказывается существенным, видно из следующего примера. Пусть спираль выполнена медным проводом ( $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$  сек $^{-1}$ ) диаметром  $b = 0,01\pi$  см,  $a = 0,5$  см,  $\operatorname{tg} \vartheta = 0,1$ . Максимум излучения в этом случае приходится на  $\beta = 0,103$ ,  $\omega_{B-\text{ч}} = 3,4 \cdot 10^9$  сек $^{-1}$  и относительное уширение составляет  $\Delta\omega/\omega_{B-\text{ч}} = 10^{-3}$ , т. е. в радиодиапазоне эффект уширения линии довольно значителен.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, М., 1953.
2. В. Hakki, IRE Trans. Electron Dev., E-D-8, № 6, 497 (1961)
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957
4. Л. А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей, сб. 2, изд. АН СССР, М., 1963

Московский государственный педагогический институт  
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
3 декабря 1966 г.

VAVILOV- $\overset{\wedge}{\text{C}}\text{ERENKOV}$  RADIATION IN A HELICAL WAVEGUIDE

*K. A. Barsoukov, S. A. Svobodina*

Vavilov-Cerenkov radiation arising from a charge moving along the axis of a circular helical waveguide is considered. The spectrum and the energy of radiation are investigated. The radiation line broadening produced by losses in the helical waveguide is estimated.

---

УДК 621.371.162

## ОБ ОТРАЖЕНИИ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СИГНАЛА ОТ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Ю. А. Медведев

Рассмотрено отражение импульсного сигнала с электрическим вектором, перпендикулярным плоскости падения, от плоской границы поглощающей среды. Обсуждается вопрос о возможности оценки материальных параметров среды по форме отраженных импульсов.

1. Вопрос об отражении импульсного сигнала от плоской границы проводящей среды, имеющий ряд практических приложений, в настоящее время, насколько нам известно, рассмотрен неполно. Так в [1] найден отраженный импульс для случая вертикальной поляризации. Ниже рассматривается отражение импульсного сигнала при горизонтальной поляризации (электрический вектор перпендикулярен плоскости падения), а также обсуждается вопрос о возможности оценки материальных параметров среды по форме отраженных импульсов.

2. При нахождении характеристик отраженного сигнала  $E_2(\tau)$  (при произвольной форме падающего  $E_1(\tau)$ ) достаточно ограничиться изучением формы отраженного сигнала  $K(\tau)$ , когда падающий сигнал —  $\delta$ -функция, так как поле  $E_2(\tau)$  определяется тогда соотношением

$$E_2(\tau) = \int_0^\tau K(\tau - x) E_1(x) dx,$$

где  $\tau = t - kr$ ,  $k$  — волновой вектор.

Рассмотрим отражение плоской волны с  $\delta$ -функциональной зависимостью от времени, падающей под углом  $\theta$  на плоскую границу вакуума и однородной среды с проводимостью  $\sigma$ , электрической и магнитной проницаемостью  $\epsilon$  и  $\mu$  соответственно.

В случае горизонтальной поляризации, используя коэффициент отражения монохроматического поля из [2], имеем

$$K_\perp(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_\perp \sqrt{\omega} - \sqrt{\beta^2\omega + i\Sigma}}{\alpha_\perp \sqrt{\omega} + \sqrt{\beta^2\omega + i\Sigma}} e^{-i\omega\tau} d\omega,$$

где  $\alpha_\perp \equiv \mu \cos \theta$ ,  $\beta^2 = \mu \epsilon - \sin^2 \theta$ ,  $\Sigma = 4\pi\mu\sigma$ . Легко видеть, что  $K_\perp(\tau)$  можно представить в виде

$$K_\perp(\tau) = \frac{\alpha_\perp - \beta}{\alpha_\perp + \beta} \delta(\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_\perp \sqrt{\omega} - \sqrt{\beta^2\omega + i\Sigma}}{\alpha_\perp \sqrt{\omega} + \sqrt{\beta^2\omega + i\Sigma}} - \frac{\alpha_\perp - \beta}{\alpha_\perp + \beta} \right] e^{-i\omega\tau} d\omega,$$

причем оставшийся интеграл конечен при  $\tau \geq 0$ .

Замыкная контур интегрирования в нижней полуплоскости дугой большого радиуса и обходя линию разреза, соединяющую точки ветвления подынтегральной функции  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = -i\Sigma/\beta_2$  вдоль мнимой оси, получаем

$$K_{\perp}(\tau) = \frac{\alpha_{\perp} - \beta}{\alpha_{\perp} + \beta} \delta(\tau) - f_{\perp}(\tau), \quad (1)$$

где

$$f_{\perp}(\tau) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha_{\perp} \Sigma}{\beta^3} \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1 - \gamma x} \exp\left(-\frac{\Sigma\tau}{\beta^2}x\right) dx, \quad (2)$$

$$\gamma \equiv \frac{\beta^2 - \alpha_{\perp}^2}{\beta^2}$$

(полюс  $\omega_3 = -i\Sigma/\beta^2 - \alpha^2$  вклада не дает). Легко убедиться, что  $\int_0^{\infty} K_{\perp}(\tau) d\tau = -1$ , как и должно быть, поскольку коэффициент отражения  $V_{\perp} \rightarrow -1$  при малых частотах.

Интеграл в (2) выражается через гипергеометрические ряды и  $\beta$ -функцию [3]. В частном случае нормального падения и  $\varepsilon = \mu$  выражение для  $f_{\perp}(\tau)$  упрощается:

$$f_{\perp}(\tau) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}\tau\right) I_1\left(\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}\tau\right),$$

где  $I_1(x)$  — функция Бесселя от мнимого аргумента. Коэффициент при  $\delta$ -функции, естественно, равен коэффициенту отражения от плоской границы непоглощающей среды.

Функция  $f_{\perp}(\tau)$  изображена на рис. 1а при различных значениях угла падения  $\theta$  (кривые для углов  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$  неразличимы в масштабе графика) и на рис. 1б при разных  $\varepsilon$  и  $\mu$  (результаты численного счета). Время  $\tau$  измерено в величинах  $\tau_0 = \mu\varepsilon - \sin^2\theta/4\pi\mu$ .

Для сравнения приведем полученное аналогичным образом выражение для импульсного отклика  $K_{\parallel}(\tau)$  в случае вертикальной поляризации:

$$K_{\parallel}(\tau) = \frac{\alpha_{\parallel} - \beta}{\alpha_{\parallel} + \beta} \delta(\tau) - f_{\parallel}(\tau), \quad (3)$$

где

$$f_{\parallel}(\tau) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha_{\perp} \Sigma}{\beta^3} \int_0^1 \frac{(1 - \mu\varepsilon x/\beta^2) \sqrt{x(1-x)} \exp\left(-\frac{\Sigma}{\beta^2}\tau x\right)}{\mu^2(1-x)x/\beta^2 + (1 - \mu\varepsilon x/\beta^2)^2 \cos^2\theta} dx, \quad (4)$$

$$\alpha_{\parallel} \equiv \varepsilon \cos\theta.$$

При  $\theta \rightarrow 0$  функции  $f_{\parallel}$  и  $f_{\perp}$  совпадают. Соотношения (3) и (4) эквивалентны выражениям работы [1] для отклика на единичную функцию, найденную другим методом.

Функция  $f_{\parallel}(\tau)$  при различных параметрах изображена на рис. 2а и 2б.

3. Из выражений (2) и (4) видно, что  $f_{\parallel}(\tau)$  и  $f_{\perp}(\tau)$  зависят от времени  $\tau$  через безразмерную величину

$$y = \frac{4\pi\mu\sigma}{\mu\varepsilon - \sin^2\theta} \tau,$$

поэтому имеется принципиальная возможность оценки произведения  $4\pi\mu\sigma/(\mu\varepsilon - \sin^2\theta)$ , характеризующего материальные параметры поглощающей среды, по форме зарегистрированного отраженного сигнала при зондировании плоской границы короткими сигналами (с длительностью, меньшей  $(\mu\varepsilon - \sin^2\theta)/8\pi\mu\sigma$ ). Из приведенных рисунков видно, что безразмерная длительность сигнала  $y_{1/2}$  на уровне, соответствующем половине амплитуды при разных углах,  $\varepsilon$  и  $\mu$  меняется в пределах

$$1,5 \leq y_{1/2} \leq 2$$

— для горизонтальной поляризации и

$$1,3 \leq y_{1/2} \leq 5$$

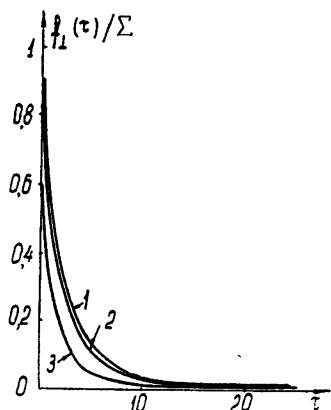


Рис. 15a. Функция  $f_{\perp}(\tau)$  при  $\theta = 30^\circ$ :  
1.— $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ; 2.— $\varepsilon = 5$ ,  $\mu = 1$ ;  
3.— $\varepsilon = 10$ ,  $\mu = 1$ .

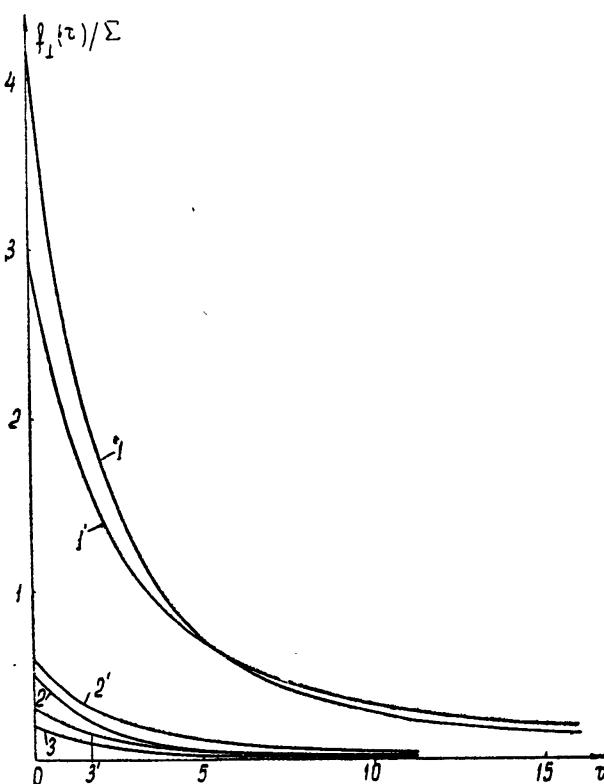


Рис. 16. Функция  $f_{\perp}(\tau)$  при  $\theta = 30^\circ$ :  
1.— $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ; 1'— $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 5$ ; 2.— $\varepsilon = 5$ ,  $\mu = 1$ ;  
2'— $\varepsilon = 5$ ,  $\mu = 5$ ; 3.— $\varepsilon = 10$ ,  $\mu = 1$ ; 3'— $\varepsilon = 10$ ,  $\mu = 5$ .

— для вертикальной поляризации. Поэтому, если  $T_{1/2}$  — измеренная полуширина отраженного импульса, то

$$\sigma \simeq (1,5 \div 2) \frac{\epsilon \mu - \sin^2 \theta}{4 \pi \mu T_{1/2}} \quad (5)$$

— для горизонтальной поляризации и

$$\sigma \simeq (1,3 \div 5) \frac{\epsilon \mu - \sin^2 \theta}{4 \pi \mu T_{1/2}} \quad (6)$$

— для вертикальной поляризации.

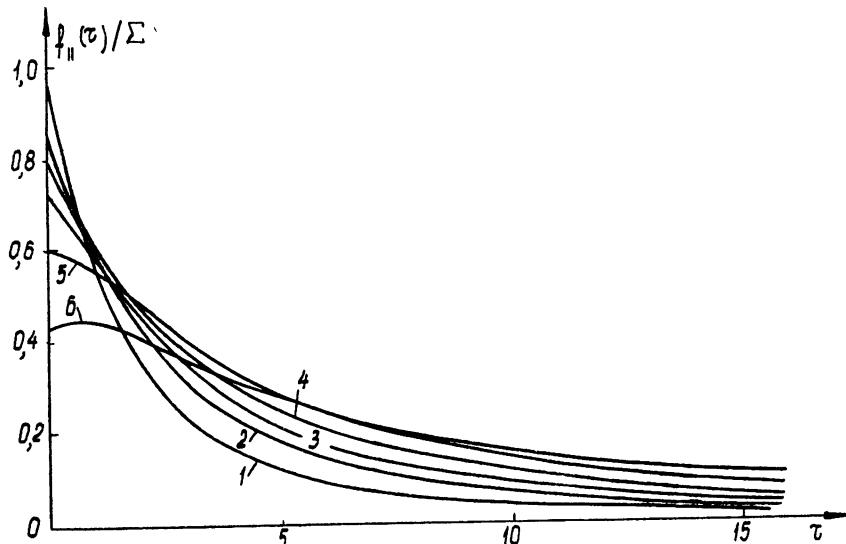


Рис. 2a. Функция  $f_{\parallel}(\tau)$  при  $\epsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ :

1.— $0^\circ < \theta < 30^\circ$ ; 2.— $\theta = 40^\circ$ ; 3.— $\theta = 50^\circ$ ; 4.— $\theta = 60^\circ$ ; 5.— $\theta = 70^\circ$ ; 6.— $\theta = 80^\circ$ .

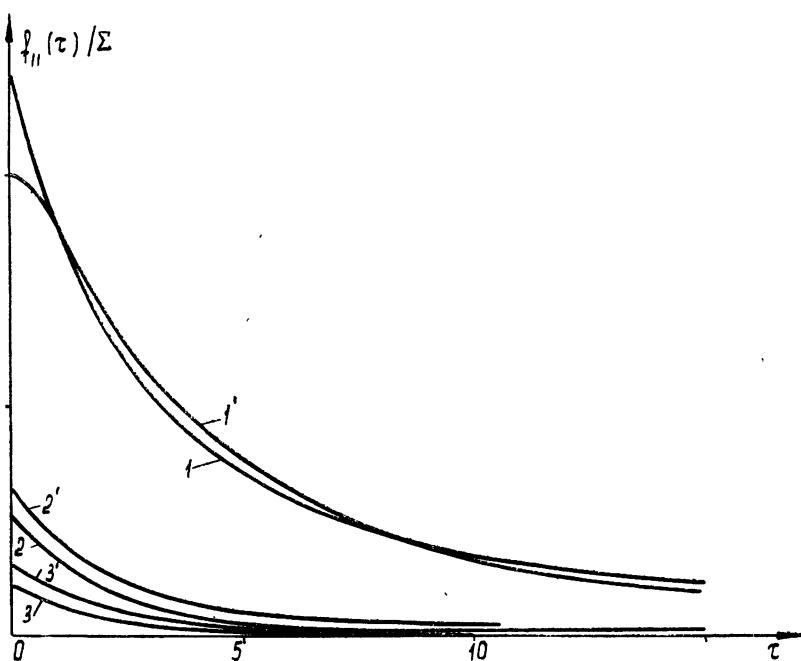


Рис. 2б. Функция  $f_{\parallel}(\tau)$  при  $\theta = 30^\circ$ :

1.— $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ; 1'— $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 5$ ; 2.— $\epsilon = 5$ ,  $\mu = 1$ ; 2'— $\epsilon = 5$ ,  $\mu = 5$ ;

3.— $\epsilon = 10$ ,  $\mu = 1$ ; 3'— $\epsilon = 10$ ,  $\mu = 5$ .

В большинстве случаев  $\mu \approx 1$ ,  $\epsilon \approx (1 \div 10)$ . Проводимость различных сред, как правило, меняется в значительно больших пределах, чем  $\epsilon$  и  $\mu$ , поэтому соотношения (5) и (6) могут быть использованы для оценок  $\sigma$  по величине  $T_{1/2}$ . При этом в случае горизонтальной поляризации имеется меньшая неопределенность.

При конкретных измерениях угол падения, как правило, может быть задан. Если к тому же две из величин  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  известны из каких-либо дополнительных данных, то третья может быть определена точнее по приведенным выше соотношениям и графикам.

Эта же комбинация параметров принципиально может быть определена из формы зарегистрированных «хвостов» импульсных откликов при больших  $\tau$ . Действительно, применяя метод перевала, например, к функции  $f_\perp(\tau)$ , получим, что при больших  $\tau$

$$f_\perp \sim y^{-3/2},$$

откуда искомый параметр может быть определен по нескольким значениям  $f_\perp(\tau)$  в последовательные моменты времени.

4. Приведенные соотношения могут быть полезны при рассмотрении отражения импульсных электромагнитных сигналов произвольной формы от поверхности Земли или других тел, а также, как это отмечено в [1], при анализе формы отраженных от ионосферы достаточно длинных сигналов.

В заключение автор благодарит В. В. Иванова за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Wait, Ch. Froese, J. Geophys. Res., **60**, 97 (1955).
2. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
3. И. Г. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений, ГИФМЛ, М., 1962, стр. 335

Поступила в редакцию  
30 июня 1967 г.

#### ON REFLECTION OF PULSE ELECTROMAGNETIC SIGNAL FROM A PLANE BOUNDARY OF ABSORBING MEDIUM

*Yu. A. Medvedev*

The author considers the reflection of a pulse signal with the electric vector perpendicular to the incidence plane from the plane boundary of the absorbing medium. The possibility of estimating the material parameters of the medium by the shape of the reflected pulses is discussed.

УДК 533.9.01

## К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Ю. А. Романов

Найдены поверхностные импедансы полуограниченной однородной изотропной плазмы при трех типах взаимодействия плазменных частиц с ее поверхностью (зеркальное отражение и два типа диффузного отражения). На основе этих импедансов исследованы спектр поверхностных волн, а также проникновение в плазму и отражение от нее объемных  $E$ -волн. Получены эффективные граничные условия, позволяющие ряд конкретных задач решать в квазигидродинамическом приближении. Проведенное рассмотрение с различными граничными условиями позволяет, с одной стороны, выяснить влияние того или иного фактора взаимодействия плазменных частиц с границей плазмы на ее электромагнитные свойства, а с другой — найти универсальные свойства ограниченной плазмы, т. е. свойства, слабо зависящие от конкретного вида граничных условий.

Настоящая работа посвящена исследованию в кинетическом приближении электромагнитных свойств полуограниченной однородной изотропной плазмы. Некоторые из затронутых в работе вопросов уже рассматривались в литературе [1—6]. Однако целый ряд аспектов, таких как влияние характера взаимодействия плазменных частиц с поверхностью плазмы на распространение  $E$ -волны, особенности двухкомпонентной плазмы и ряд других, остаются невыясненными. Здесь мы попытаемся в какой-то степени восполнить этот пробел.

### 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Взаимодействие плазменных частиц с границей плазмы будем описывать либо зеркальным, либо диффузным отражением. Если доля частиц, равная  $\rho$ , отражается зеркально, а остальная диффузно, то соответствующее граничное условие можно записать в виде [7]

$$f_1(v_n > 0) = \rho f_1(v_n < 0) - (1 - \rho) \Delta\mu \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (1)$$

где  $f_0$  и  $f_1$  — равновесная функция распределения частиц и отклонение от нее,  $\Delta\mu$  — отклонение химического потенциала отраженных частиц от равновесного значения,  $v_n$  — нормальная к границе плазмы компонента скорости плазменной частицы. При  $\rho = 1$  условие (1) соответствует зеркальному отражению; при  $\rho = 0$ ,  $\Delta\mu = 0$  — обычно используемому условию диффузного отражения, которое мы будем называть диффузным отражением второго типа; при  $\rho = 0$  и  $\Delta\mu$ , определяемому из условия равенства нулю нормальной составляющей тока на поверхности плазмы, — диффузному отражению первого типа.

Приведенные граничные условия обладают следующими отличительными особенностями. 1) При зеркальном отражении плазменные частицы уносят энергию, отображенную у электромагнитной волны, внутрь плазмы, а при диффузном отражении дополнительно к этому отдают ее отражающей поверхности. 2) При зеркальном отражении сохраняются параллельная границе плазмы компонента направленной скорости

отраженных частиц и градиент их пространственного распределения. При диффузном отражении первого типа направлена скорость отраженных частиц полностью теряется, но градиент их пространственного распределения сохраняется. При диффузном отражении второго типа полностью теряются обе из указанных величин. 3) При диффузном отражении второго типа на поверхности плазмы происходит захват плазменных частиц, отсутствующий при отражениях зеркальном и диффузном первого типа.

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим полуограниченную однородную плазму, занимающую область  $x_3 > 0$  и граничащую с однородной недиспергирующей средой, занимающей область  $x_3 < 0$ . Проницаемость граничащей среды обозначим через  $\epsilon_0$ . С точки зрения спектра данной системы представляют интерес следующие две задачи: 1) отражение от границы плазмы и прохождение через нее объемных волн; 2) распространение поверхностных волн. Обе задачи легко решаются, если известен поверхностный импеданс плазмы. К исследованию этой величины мы и перейдем.

Как обычно, разделим все возможные в данной системе волны на два класса:  $E$ -волны и  $H$ -волны. Не снижая общности, будем считать, что рассматриваемая волна распространяется в плоскости  $x_1x_3$  (объемная волна) либо в направлении  $x_1$  (поверхностная волна). Зависимость всех величин от координат и времени положим в виде  $\sim \psi(x_3) \exp[i(k_1 x_1 - \omega t)]$ .

Интересующие нас поверхностные импедансы получаются путем совместного решения системы уравнений Максвелла и кинетического уравнения при заданном законе взаимодействия плазменных частиц с поверхностью плазмы. Мы опустим соответствующие выкладки [8] и приведем конечные формулы. Для  $E$ -волн при отражениях зеркальном и диффузном первого и второго типов поверхностные импедансы определяются соответственно выражениями\*

$$Z_3 \equiv \frac{E_1(0)}{H_2(0)} = \frac{ic}{\pi\omega} \int \left\{ \frac{k_1^2}{k^2 \epsilon^l(\mathbf{k}, \omega)} + \frac{k_3^2}{k^2 [\epsilon^{tr}(\mathbf{k}, \omega) - (ck/\omega)^2]} \right\} dk_3; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Z_{11} = & \frac{ic}{\omega} \left\{ \frac{c^2 k_1^3}{\omega^2} (k_1 + i\lambda) \frac{\tau_-^2(-ik_1)}{\eta_-(\infty) \eta_-(-ik_1)} + k_1 (k_1 - i\lambda) \frac{\eta_-(-ik_1)}{\eta_-(\infty)} + \right. \\ & + k_1 (k_1 + s) \frac{\eta_-(\infty) \tau_-^2(-ik_1)}{\eta_-(-ik_1)} + \frac{\omega^2}{c^2 k_1} (k_1 - s) \eta_-(\infty) \eta_-(-ik_1) - 4k_1^2 \times \\ & \times \tau_-(-ik_1) + i2 \frac{\sigma_-^l(-ik_1) - \sigma_-^{tr}(-ik_1)}{\omega} \left[ k_1^2 \frac{\tau_-(-ik_1)}{\eta_-(\infty) \eta_-(-ik_1)} - \frac{\omega^2}{c^2} \right] \} \times (3) \\ & \times \left\{ \frac{c^2 k_1}{\omega^2} (k_1 + s) (k_1 + i\lambda) \frac{\eta_-(\infty) \tau_-^2(-ik_1)}{\eta_-(-ik_1)} - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{k_1} \left[ (k_1 - s) \eta_-(\infty) \eta_-(-ik_1) - i2k_1 \frac{\sigma_-^l(-ik_1) - \sigma_-^{tr}(-ik_1)}{\omega} (k_1 - i\lambda) \right] \}^{-1};$$

$$Z_{12} = \frac{ic}{\omega} \frac{k_1^2 \tau_-^2(-ik_1) - (\omega/c)^2 \eta_-^2(-ik_1)}{(k_1 - i\lambda) \eta_-^2(-ik_1) + (ck_1/\omega)^2 (k_1 + i\lambda) \tau_-^2(-ik_1)}, \quad (4)$$

\* Выражение (2) впервые получено и подробно исследовано в [1].

а фурье-компоненты электромагнитного поля внутри плазмы — формулами

$$\mathbf{H}_{(3)} = - \frac{2ik_3}{k^2 - \epsilon^{tr}(\mathbf{k}, \omega) \omega^2/c^2} \mathbf{H}_\tau(0), \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_{(3)} = \frac{2ic}{\omega} \frac{\mathbf{k}}{k^2 \epsilon^l(\mathbf{k}, \omega)} (\mathbf{k} [\mathbf{n} \mathbf{H}_\tau(0)]) - \frac{\omega}{ck^2} [\mathbf{k} \mathbf{H}_{(3)}];$$

$$\mathbf{H}_{(11)} = - \frac{ic}{\omega} \left\{ [\mathbf{n} \mathbf{E}_\tau(0)] + i \frac{\Delta\mu}{e} [\mathbf{n} \mathbf{k}] \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\tau_-(k_3)} + \frac{\lambda}{(k_3 - i0) \tau_-(k_3)} \right\} - i \frac{\mathbf{H}_\tau(0)}{(k_3 - i0) \tau_-(k_3)}, \quad (6)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{(11)} = \frac{\mathbf{k}}{k^2} \left\{ \frac{ic}{\omega \eta_+(\infty) \eta_-(k_3)} (\mathbf{k} [\mathbf{n} \mathbf{H}_\tau(0)]) + \frac{\Delta\mu}{e} \left[ \frac{\eta_-(\infty)}{\eta_-(k_3)} (k_3 - is) - k_3 \right] \right\} - \frac{i}{k^2} [\mathbf{k} [\mathbf{n} \mathbf{E}_\tau(0)]] - \frac{\omega}{ck^2} [\mathbf{k} \mathbf{H}_{(11)}],$$

$$\frac{\Delta\mu}{e} k_1 = \frac{(ck_1^2/\omega) \tau_-(-ik_1) \eta_-^{-1}(\infty) \eta_-^{-1}(-ik_1) - \omega/c + i(k_1 - i\lambda) Z_{11}}{(k_1 + s) \eta_-(\infty) \eta_-^{-1}(-ik_1) \tau_-(-ik_1) - k_1 + i\lambda} H_\tau(0);$$

$$\mathbf{H}_{(12)} = - \frac{ic}{\omega} [\mathbf{n} \mathbf{E}_\tau(0)] \left[ 1 - \frac{1}{\tau_-(k_3)} + \frac{\lambda}{(k_3 - i0) \tau_-(k_3)} \right] - i \frac{\mathbf{H}_\tau(0)}{(k_3 - i0) \tau_-(k_3)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_{(12)} = \frac{\mathbf{k}}{k^2} \left\{ \frac{ic}{\omega \eta_+(\infty) \eta_-(k_3)} (\mathbf{k} [\mathbf{n} \mathbf{H}_\tau(0)]) + \frac{j_n(0)}{\omega \eta_+(\infty) \eta_-(k_3)} \right\} - \frac{i}{k^2} [\mathbf{k} [\mathbf{n} \mathbf{E}_\tau(0)]] - \frac{\omega}{ck^2} [\mathbf{k} \mathbf{H}_{(12)}],$$

$$j_n(0) = -i\omega \left\{ \frac{ck_1}{\omega} - \frac{\eta_+(\infty) \eta_-(-ik_1)}{\tau_-(-ik_1)} \left[ \frac{\omega}{ck_1} - i \left( 1 - \frac{i\lambda}{k_1} \right) Z_{12} \right] \right\} H_\tau(0),$$

где

$$\ln \eta_{\pm}(k_3) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\mp i\alpha-\infty}^{\mp i\alpha+\infty} \ln \epsilon^l(k'_3) \frac{dk'_3}{k'_3 - k_3}, \quad \epsilon^l(k_3) = \eta_+(k_3) \eta_-(k_3),$$

$$\ln \tau_{\pm}(k_3) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\mp i\alpha-\infty}^{\mp i\alpha+\infty} \ln \left[ \frac{k'^2 - \epsilon^{tr}(k'_3) \omega^2/c^2}{k'^2 + \bar{\alpha}^2} \right] \frac{dk'_3}{k'_3 - k_3},$$

$$k^2 - \epsilon^{tr}(k_3) \omega^2/c^2 = (k_3^2 + \bar{\alpha}^2) \tau_+(k_3) \tau_-(k_3), \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}^{\pm}(k_3) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\mp i\alpha-\infty}^{\mp i\alpha+\infty} \sigma_{ij}(k'_3) \frac{dk'_3}{k'_3 - k_3}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-,$$

$$\lambda = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{k^2 - \epsilon^{tr}\omega^2/c^2}{k_3^2 + \alpha^2} dk_3, \quad s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\epsilon'(k_3)}{\epsilon_i} dk_3,$$

$$\alpha, \bar{\alpha} \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \bar{\alpha}, \quad k^2 = k_1^2 + k_3^2,$$

$E_r(0)$  и  $H_r(0)$  — значения тангенциальных составляющих полей на границе плазмы;  $\epsilon^{tr}$ ,  $\sigma^{tr}$  и  $\epsilon'$ ,  $\sigma'$  — поперечные и продольные диэлектрические проницаемости и проводимости плазмы соответственно;  $n$  — внешняя нормаль;  $\epsilon_i$  — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится плазма.

Выражения (2) — (7) справедливы как для нерелятивистской, так и релятивистской многокомпонентной плазмы (кроме формул (3) и (6), которые справедливы лишь для однокомпонентной плазмы). Ниже будем считать плазму нерелятивистской, максвелловской и либо однокомпонентной, либо двухкомпонентной. Кроме того, будем пренебречь столкновениями частиц.

### а) Однокомпонентная плазма

Выражения (2) — (8) в общем случае являются довольно сложными. Мы рассмотрим область частот и волновых векторов  $k_1$ , определяемую неравенствами\*

$$|\epsilon| \ll \beta_T^{-2} \gg 1, \quad (k_1 v_T / \omega)^2 \ll 1, \quad (9)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость плазмы без учета пространственной дисперсии,  $\beta_T = v_T/c$ ,  $v_T = \sqrt{2T/m}$  — тепловая скорость плазменных частиц. Область (9) целесообразно разделить на две частично перекрывающиеся

$$|\epsilon| \gg (k_1 v_T / \omega)^2; \quad (10)$$

$$|\epsilon| \ll 1. \quad (11)$$

В указанных областях формулы (2) — (4) существенно упрощаются:

$$Z_s \simeq \frac{c}{\epsilon \omega} \left( \lambda_{\perp} - i \frac{k_1^2 v_T}{\omega} \gamma_s \right) + \frac{\epsilon_i - \epsilon}{\sqrt{\pi}} \beta_T^3; \quad (12)$$

$$Z_{\perp} \simeq \frac{c}{\epsilon \omega} \left\{ \lambda_{\perp} + \frac{k_1 v_T}{\omega} \left[ (\lambda_{\perp} - ik_1) \gamma_{\perp} + ik_1 \left( 1 - \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_i}} \right)^2 (\beta_{\perp}' + i\beta_{\perp}'')^{-1} \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \left( \frac{k_1 v_T}{\omega} \right) \gamma_{\perp} + (\epsilon_i - \epsilon) \lambda_{\perp} v_T / (2 \sqrt{\pi} \epsilon \omega) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \left( 1 - \frac{ik_1}{\lambda_{\perp}} \right) \gamma_{\perp} k_1 v_T / \omega \right] \right\}^{-1}; \quad (13)$$

\* В области  $|\epsilon| \gg \beta_T^{-2}$  (аномальный скин-эффект) поверхностные импедансы определяются выражением [9]

$$Z_s \simeq \frac{8}{9} Z_{\perp} \simeq \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - i \right) \left( - \frac{\beta_T}{\sqrt{\pi} \epsilon} \right)^{1/3}. \quad (12a)$$

$$Z_{\alpha 2} \simeq \frac{c}{\varepsilon \omega} \left[ \lambda_{\perp} + \frac{k_1 v_T}{\omega} (\lambda_{\perp} - ik_1) \gamma_{\alpha} \right] \left\{ 1 + \frac{k_1 v_T}{\omega} \gamma_{\alpha} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_i - \varepsilon) \lambda_{\perp} v_T / (2 \sqrt{\pi} \varepsilon \omega) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{ik_1}{\lambda_{\perp}} \right) \gamma_{\alpha} k_1 v_T / \omega \right] \right\}^{-1}, \quad (14)$$

где

$$\gamma_{3, \perp} = \alpha'_{3, \perp} - i \alpha''_{3, \perp} \quad (15)$$

— в первой области и

$$\gamma_3 = \frac{i \omega}{\lambda_{\parallel} v_T} + i \varepsilon, \quad \gamma_{\alpha} = - \frac{3 \varepsilon_i}{2 \varepsilon} \frac{k_1 v_T}{\omega} + \frac{i}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3 \varepsilon_i}{2}} \times \\ \times \left[ \varepsilon - \frac{3 \varepsilon_i}{2} \left( \frac{k_1 v_T}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

— во второй области,

$$\lambda_{\perp} = \frac{\omega}{c} \left[ \frac{\varepsilon}{1 + (\varepsilon_i - \varepsilon) \beta_T^2 / 2} - \left( \frac{ck_1}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \lambda_{\parallel} = \left( \frac{2\varepsilon}{3\varepsilon_i} \frac{\omega^2}{v_T^2} - k_1^2 \right)^{1/2}, \\ \alpha'_3 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{\varepsilon \operatorname{Re} \varepsilon^I(z)}{|\varepsilon^I(z)|^2} \right] dz, \quad \alpha'_{\alpha} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| \frac{\varepsilon^I(z)}{\varepsilon_i} \right| dz, \\ \beta'_{\alpha} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| \frac{\varepsilon^I(z)}{\varepsilon_i} \right| \frac{dz}{z^2}, \quad \alpha''_3 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = - \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^I(z)}{|\varepsilon^I(z)|^2} dz, \quad (17) \\ \alpha''_{\alpha} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn} \operatorname{Re} \varepsilon^I(z) - \operatorname{sgn} \varepsilon] - \arctg \left[ \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^I(z)}{\operatorname{Re} \varepsilon^I(z)} \right] \right\} dz, \\ \beta''_{\alpha} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \operatorname{sgn} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon^I(z)}{\varepsilon_i} \right] + \arctg \left[ \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^I(z)}{\operatorname{Re} \varepsilon^I(z)} \right] \right\} \frac{dz}{z^2}.$$

Значения  $\alpha'_3$ ,  $\alpha''_3$ ,  $\alpha'_{\alpha}$ ,  $\alpha''_{\alpha}$ ,  $\beta'_{\alpha}$  и  $\beta''_{\alpha}$  как функции  $\omega/\omega_0$  приведены на рис. 1, 2. При  $\omega \gg \omega_0$   $\alpha_3 \simeq \alpha_{\alpha} \simeq 2(\varepsilon - \varepsilon_i)/\sqrt{\pi} \varepsilon_i$ . В области  $\varepsilon > 0$  можно считать  $\alpha'_3 = 0$ . (Соответствующая кривая на рис. 1 не приведена.)

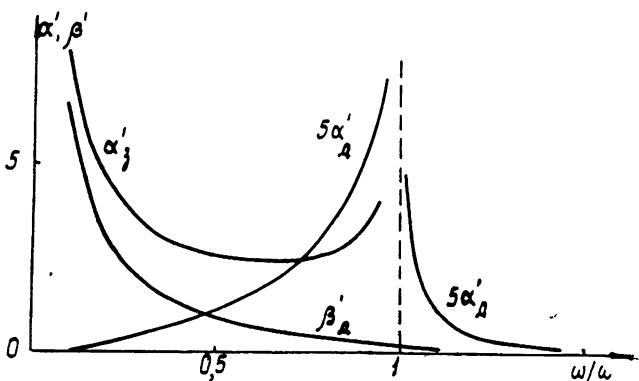


Рис. 1.

Сравнение формул (13) и (14) показывает, что вторая получается из первой при  $\beta_d \rightarrow \infty$ . В дальнейшем мы будем пользоваться этим обстоятельством и приводить результаты лишь для диффузного отражения первого типа.

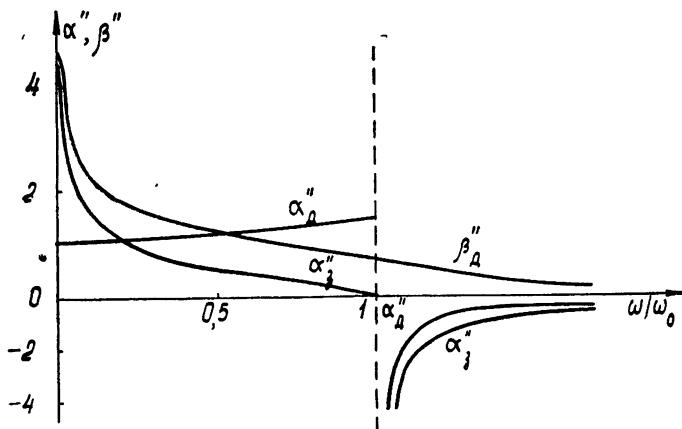


Рис. 2.

*Поверхностные волны.* Дисперсионное уравнение поверхностных волн, вытекающее из равенства поверхностных импедансов плазмы и граничащей с ней диэлектрической среды, имеет вид

$$Z = -(ic/\epsilon_0\omega)x_0, \quad (18)$$

где  $x_0 = (k_1^2 - \epsilon_0\omega^2/c^2)^{1/2}$ ,  $\operatorname{Re} x_0 > 0$ , а под  $Z$  подразумевается  $Z_3$ ,  $Z_{d1}$  либо  $Z_{d2}$  — в зависимости от типа граничных условий.

При решении уравнения (18) ограничимся областью частот, в которой фазовая скорость поверхностной волны значительно превышает тепловую скорость плазменных частиц ( $\omega \gg k_1 v_T$ ). В этой области поверхности импедансы с достаточной точностью определяются приближенными формулами (12) — (14). Подставляя последние в уравнение (18) и разрешая его относительно  $k_1$ , получим

$$k_1 \simeq (V_{\epsilon_0} \omega/c) [1 + A (1 + iV\sqrt{3}) (-\beta_T / V\sqrt{\epsilon})^{2/3}] \quad (19)$$

при

$$|\epsilon| \gg \beta_T^{-2}, \quad \epsilon < 0; \quad (19a)$$

$$k_1 \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}} \left[ 1 - \beta_T \frac{\epsilon\epsilon_0^2}{(\epsilon - \epsilon_0)(-\epsilon - \epsilon_0)^{3/2}} B\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] \quad (20)$$

при

$$k_1 v_T \ll \omega, \quad |\epsilon + \epsilon_0|^{3/2} \gg \epsilon^2 \beta_T, \quad \epsilon < -\epsilon_0; \quad (20a)$$

$$k_1 \simeq \frac{\omega}{c} \left[ \frac{-\epsilon}{\beta_T B(\omega/\omega_0)} \right]^{1/3} \quad (21)$$

при

$$v_T \ll \omega/k_1 \ll c/\sqrt{\epsilon_0}, \quad |\epsilon + \epsilon_0|^{3/2} \ll \epsilon^2 \beta_T; \quad (21a)$$

$$k_1 \simeq (1 + \epsilon/\epsilon_0) B^{-1}(\omega/\omega_0) \omega/v_T \quad (22)$$

при

$$v_T \ll \omega/k_1 \ll c/V\epsilon_0^{-1}, \quad |\epsilon + \epsilon_0|^{3/2} \gg \epsilon^2 \beta_T, \quad \epsilon > -\epsilon_0, \quad (22a)$$

где функции  $A$  и  $B$  в зависимости от типа граничных условий определяются соотношениями

$$\begin{aligned} B_3 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) &= \alpha'_3 - i\alpha''_3, \\ B_{\Delta 1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) &= \alpha'_{\Delta} + \frac{2\sqrt{-\epsilon/\epsilon_t} \beta''_{\Delta} - (1 + \epsilon/\epsilon_t) \beta'_{\Delta}}{\beta'^2_{\Delta} + \beta''^2_{\Delta}} - \\ &- i \left[ \alpha''_{\Delta} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\epsilon_t - \epsilon}{\epsilon_0} - \frac{2\sqrt{-\epsilon/\epsilon_t} \beta'_{\Delta} + (1 + \epsilon/\epsilon_t) \beta''_{\Delta}}{\beta'^2_{\Delta} + \beta''^2_{\Delta}} \right], \\ A_3 &= 4/27, \quad A_{\Delta} = 3/16, \end{aligned} \quad (23)$$

$\omega_0$  — ленгмюровская частота плазменных частиц. В частности, при  $\epsilon = -1$   $B_3 \approx 2,5 - i0,3$ ,  $B_{\Delta 1} \approx 2 - i$ ,  $B_{\Delta 2} \approx 0,5 - i1,8$ .

Формулы (19) — (22) показывают, что в качественном отношении все три типа граничных условий дают одинаковые результаты. Именно, без учета пространственной дисперсии поверхностные волны определяются дисперсионным уравнением

$$k_1 = (\omega/c) [\epsilon\epsilon_0/(\epsilon + \epsilon_0)]^{1/2} \quad (24)$$

и, следовательно, существуют лишь в области  $\epsilon < -\epsilon_0$ . Пространственная дисперсия приводит к расширению частотной области существования поверхностных волн, изменению скоростей их распространения и появлению специфического затухания. Особенно сильно пространственная дисперсия проявляется в области  $\epsilon \approx -\epsilon_0$ .

Рассмотрим затухание поверхностной волны. В отличие от затухания объемных продольных волн в неограниченной плазме оно неэкспоненциально, мало даже при малых  $k_1$ , что обусловлено сильным взаимодействием плазменных частиц с коротковолновыми гармониками электромагнитного поля поверхности волны. Из-за наличия этих гармоник в затухании принимают участие все электроны плазмы. (Для электрона произвольной скорости  $v$  всегда существует такая фурье-компоненты поля, для которой  $\omega = kv$ .) Исходя из этого, легко оценить величину интересующего нас затухания. Рассмотрим, например, квазистатическую область (21а). В этой области поле поверхностной волны проникает в глубь плазмы на расстояние  $\sim k_1^{-1}$ . Следовательно, время обновления плазменных частиц, обуславливающих волну, есть  $\tau \sim (k_1 v_T)^{-1}$ . Через время  $\tau$  плазменные частицы отдадут энергию, полученную от волны, либо поверхности плазмы, либо унесут на бесконечность, так что  $\tau$  и есть время жизни поверхностной волны.

Если в качественном отношении дисперсионные соотношения поверхностных волн, полученные при различных граничных условиях, одни и те же, то в количественном отношении они существенно отличаются друг от друга. А именно, величина затухания поверхностных волн при диффузном отражении больше, чем при зеркальном, а при диффузном отражении второго типа больше, чем при диффузном отражении первого типа. Такое поведение полностью объясняется отмеченными выше особенностями граничных условий. Для групповых скоростей выполняется обратное соотношение, что связано со второй особенностью граничных условий. Например, в квазистатической области затухания поверхностных волн (при фиксированном значении  $k_1$ ) при этих трех

граничных условиях относятся друг к другу, как 1 : 3 : 5, а групповые скорости — как 5 : 4 : 1. В этой области при диффузном отражении второго типа затухание проходит на длине волны, так что волна практически не распространяется, однако затухание за период колебания еще мало и поэтому данное возбуждение, как таковое, вполне реализуемо. В области предельно длинных волн ( $ck_1/V\epsilon_0 \ll \omega_0$ , но  $|\epsilon| \ll \beta_r^{-2}$ ) оба типа диффузного отражения приводят практически к одинаковым результатам, но сильно отличным от результатов при зеркальном отражении. Последнее объясняется тем, что в указанной области продольное поле составляет незначительную часть от полного поля поверхности волны, так что, во-первых, при зеркальном отражении пространственная дисперсия оказывается слабо (она в этом случае оказывается лишь на продольном поле) и, во-вторых, величина возникающего на поверхности плазмы заряда при диффузном отражении второго типа и, следовательно, его отличие от первого несущественны. В области (19а) все граничные условия приводят практически к одинаковым результатам.

*Отражение и проникновение объемных E-волн.* Отражение электромагнитных волн поверхностью плазмы, их проникновение в плазму и поглощение ею описываются комплексным коэффициентом отражения ( $R$ ), эффективной комплексной глубиной проникновения ( $\Lambda$ ) и поглощающей способностью плазмы ( $T$ ), которые связаны с поверхностным импедансом плазмы соотношениями

$$R = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z}, \quad \Lambda = \frac{ic}{\omega} Z, \quad (25)$$

$$T = 1 - |R|^2 = \frac{4 V\epsilon_0 \cos \vartheta \operatorname{Re} Z}{(\cos \vartheta + V\epsilon_0 \operatorname{Re} Z)^2 + \epsilon_0 (\operatorname{Im} Z)^2},$$

где  $Z_0 = \cos \vartheta / V\epsilon_0$  — поверхностный импеданс граничащей с плазмой среды,  $\vartheta$  — угол падения волны. Используя формулы (12) — (17), легко получить, что в области  $|\epsilon| \ll (k_1 v_r / \omega)^2$   $T_s \sim \beta_r^5$ ,  $T_d \sim \beta_r$ . При этом в случае зеркального отражения  $T$  определяется поглощением продольной части поля волны, а в случае диффузного отражения — поглощением поперечной части. В области  $\beta_r^{-2} \gg |\epsilon| \gg (k_1 v_r / \omega)^2$ ,  $\epsilon < \epsilon_0 \sin^2 \vartheta$   $T_s \sim \beta_r$ ,  $T_d \sim \beta_r$ ,  $T_d > T_s$ . При этом  $T$  определяется при зеркальном отражении поглощением продольной части поля волны, а при диффузном — как продольной, так и поперечной. Наконец, в области  $\epsilon > \epsilon_0 \sin^2 \vartheta$  при всех трех типах граничных условий поглощение в основном обусловлено возбуждением поперечных волн в плазме и слабо зависит от тепловой скорости плазменных частиц, если она не слишком велика.

### б) Двухкомпонентная плазма

Ограниченнная двухкомпонентная плазма, как и неограниченная, обладает рядом специфических особенностей по сравнению с однокомпонентной. В частности, аналогично объемным волнам в неограниченной плазме в ограниченной двухкомпонентной плазме существуют два типа поверхностных волн — низкочастотные и высокочастотные. Низкочастотные поверхностные волны подробно рассмотрены в [4, 6]. Здесь мы остановимся на высокочастотных волнах.

Известно, что объемные высокочастотные плазмоны в двухкомпонентной неограниченной плазме незначительно отличаются от объемных плазмонов в однокомпонентной плазме. Для поверхностных плазмонов положение иное. Дело в том, что высокочастотная поверхностная волна при фиксированных  $\omega$  и  $k_1$  может содержать пространственную

ную фурье-гармонику, соответствующую низкочастотному объемному плазмону. В результате возникает взаимосвязь высокочастотной поверхности и низкочастотной объемной волн. Другими словами, высокочастотная поверхность волна при своем распространении может возбуждать низкочастотную волну и наоборот. Этот эффект, естественно, должен привести к дополнительному затуханию высокочастотной поверхности волны.

Перейдем к количественному исследованию указанного эффекта. В качестве граничного условия выберем условие зеркального отражения. Дисперсионное уравнение «поверхностных» волн при этом будет иметь вид (18) с величиной  $Z$ , определяемой формулой (2). Рассмотрим область частот, удовлетворяющую неравенствам

$$\left(\frac{v_+}{v_-}\right)^2 \ll \left|\frac{\epsilon_+}{\epsilon_i}\right| \left(\frac{\omega}{\omega_-}\right)^2 \ll 1, \quad |\epsilon_+| \left(\frac{k_1 v_-}{\omega_-}\right)^2 \ll 1, \quad \omega < \omega_+, \quad (26)$$

где  $\omega_{\mp}$ ,  $v_{\mp}$  — ленгмюровские частоты и тепловые скорости электронов и ионов соответственно,  $\epsilon_{\pm} = \epsilon_i(1 - \omega_{\pm}^2/\omega^2)$ , остальные обозначения прежние. В указанной области из (18) получаем следующее приближенное дисперсионное соотношение для высокочастотной «поверхностной» волны:

$$k_1 \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}} \left\{ 1 + i \frac{v_-}{c} \frac{\epsilon \epsilon_0^2}{(\epsilon - \epsilon_0)(-\epsilon - \epsilon_0)^{3/2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \alpha''_3 - \frac{\epsilon}{\sqrt{2\epsilon_+(\epsilon_- - \epsilon_i)}} \right] \right\}. \quad (27)$$

Выражение (27) содержит два слагаемых, описывающих затухание волны. Первое слагаемое практически совпадает с затуханием поверхности волны в однокомпонентной плазме. Второе слагаемое обусловлено указанной выше перекачкой энергии высокочастотной поверхности волны в низкочастотные объемные плазмы. Отношение второго слагаемого к первому характеризуется величиной  $\sqrt{\epsilon_-/\epsilon_+} \gg 1$ , показывающей, что последний механизм затухания является основным.

### 3. ЭФФЕКТИВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В предыдущих разделах использовались точные выражения полей в полуограниченной плазме при различных типах взаимодействия плазменных частиц с ее поверхностью. Однако в ряде конкретных задач достаточно знать поля лишь на сравнительно больших расстояниях от границ плазмы, приближенные выражения которых могут быть легко найдены, исходя, например, из квазигидродинамического приближения, дополненного некоторыми эффективными граничными условиями. При этом существенным является следующее. Характер взаимодействия электронов с границей плазмы «чувствуется» лишь на расстоянии  $\sim v_T/\omega$ . На больших расстояниях структура электромагнитного поля определяется объемными свойствами плазмы и практически не зависит от конкретного характера границ. Последние сказываются лишь на амплитудах поля, которые могут быть найдены из некоторых эффективных граничных условий. Такие условия можно получить, сравнивая поля, описываемые формулами (5) — (7) на некотором достаточно большом расстоянии  $x_0$ , с полями на границе плазмы. При этом величина  $x_0$  выбирается такой, чтобы выполнялось соотношение

$$v_T^2/\omega \ll x_0 \ll \lambda_{\text{эфф}}, \quad (28)$$

где  $\lambda_{\text{эфф}}$  — характерное расстояние, на котором меняется поле в плазме вдали от ее границ; в частности, это длина волны соответствующего объемного возбуждения. На таких расстояниях структура электромагнитного поля определяется полюсами фурье-компонент (5) — (7), т. е. нулями  $\varepsilon^l$  и  $k^2 - \varepsilon^{lr} \omega^2 c^{-2}$ . (В случае однокомпонентной плазмы для поперечной и продольной составляющих поля она характеризуется соответственно множителями  $\exp[i(k_1 x_1 + \lambda_1 x_3)]$  и  $\exp[i(k_1 x_1 + \lambda_1 x_3)]$ .

Удерживая в (5) — (7) лишь полюсные слагаемые и сравнивая их с полями на границе плазмы  $E_\tau(0)$  и  $H_\tau(0)$ , легко получить необходимые граничные условия. В случае однокомпонентной плазмы для  $E$ -волн при зеркальном и диффузном законах отражения в области (9), (11) они имеют вид

$$E_{\tau(3)}^{(l)} - E_{\tau(3)}^{(e)} \simeq - \left( \frac{c^2 k_1^2}{\omega^2} \beta_T + \frac{\varepsilon_l - \varepsilon}{V\pi} \beta_T^3 \right) [n H_{\tau(3)}^{(l)}], \quad (29)$$

$$H_{\tau(3)}^{(l)} - H_{\tau(3)}^{(e)} \simeq \frac{\varepsilon - \varepsilon_l}{2} \beta_T^2 H_{\tau(3)}^{(l)}, \quad \varepsilon_l E_{n(3)}^{(l)} \simeq \varepsilon_0 E_{n(3)}^{(e)};$$

$$E_{\tau(\Delta)}^{(l)} \simeq E_{\tau(\Delta)}^{(e)}, \quad H_{\tau(\Delta)}^{(l)} - H_{\tau(\Delta)}^{(e)} \simeq \frac{\varepsilon_l - \varepsilon}{2} \beta_T [n E_{\tau(\Delta)}^{(l)}], \quad (30)$$

$$\varepsilon_l E_{n(\Delta)}^{(l)} \simeq \varepsilon_0 E_{n(\Delta)}^{(e)}.$$

Здесь индексы  $(l)$  и  $(e)$  соответствуют полям внутри и вне плазмы. В этой области оба типа диффузного отражения практически эквивалентны. Интересно отметить, что граничное условие для  $E_n$  одинаково при всех рассмотренных законах взаимодействия плазменных частиц с границей плазмы\* (ср. с [7]). Необходимость в самом этом условии связана с возможностью существования в данной частотной области кроме поперечной еще и продольной электромагнитной волны.

В области (9), (10) условия для  $H_\tau$  остаются теми же, условия для  $E_n$  — лишенные (так как в этой области продольная волна не существует), а для  $E_\tau$  они имеют вид

$$E_{\tau(3)}^{(l)} - E_{\tau(3)}^{(e)} \simeq \left[ i \frac{c^2 k_1^2}{\varepsilon \omega^2} (\alpha'_3 - i \alpha''_3) \beta_T - \frac{\varepsilon_l - \varepsilon}{V\pi} \beta_T^3 \right] [n H_{\tau(3)}^{(l)}]; \quad (31)$$

$$E_{\tau(\Delta)}^{(l)} - E_{\tau(\Delta)}^{(e)} \simeq i \frac{c^2 k_1^2}{\varepsilon \omega^2} \beta_T \left[ \alpha'_\Delta - i \alpha''_\Delta - \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_l})^2}{\beta'_\Delta + i \beta''_\Delta} \right] [n H_{\tau(\Delta)}^{(l)}]. \quad (32)$$

В заключение выражаю благодарность М. А. Миллеру за обсуждение основных результатов работы и полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, 41, 159 (1961).
2. А. Н. Кондратенко, В. И. Мирошниченко, ЖТФ, 36, 25 (1966).
3. В. И. Мирошниченко, ЖТФ, 36, 1008 (1966).
4. Ю. А. Романов, ФТТ, 5, 2988 (1963); 7, 970 (1965); ЖЭТФ, 47, 2119 (1964); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 242 (1964); 7, № 5, 828 (1964).
5. М. Ф. Горбатенко, В. И. Курялко, ЖТФ, 34, 1136 (1964).

\* Приведенные условия для  $E_n$  с достаточной точностью могут быть заменены условием  $E_n^{(l)} = 0$ , что совпадает с граничным условием, полученным в [1] для случая зеркального отражения. Условия для  $H_\tau$  совпадают с приведенными в [9] для случая нормального падения волны на границу плазмы.

- 6 А. Н. Кондратенко, Диссертация, ХГУ, 1965.
- 7 Ю. А. Романов, В. Ф. Дряхлушкин, ЖТФ (в печати).
- 8 Ю. А. Романов, Диссертация, ГГУ, 1966.
- 9 В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.

Научно-исследовательский физико-технический  
институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
22 мая 1967 г.

## TO THE KINETIC THEORY OF A CONFINED PLASMA

*Yu. A. Romanov*

The surface impedance of a half-confined uniform isotropic plasma at three types of interaction between plasma particles and its surface (mirror reflection and two types of diffusion reflection) are found. The spectrum of the surface waves as well as the penetration into plasma and reflection of volume  $E$ -waves from it are examined on the basis of these impedances. The effective boundary condition permitting the solution of a number of concrete problems in a quasi-hydrodynamic approximation have been obtained. The examination of different boundary conditions gives allowance: 1) to clarify the influence of one or the other factor of interaction between the plasma particles and the plasma boundary upon its electromagnetic properties, 2) to find universal properties of the bounded plasma, i. e. those which depend slightly on a concrete type of the boundary conditions.

УДК 533.9

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПЛАЗМЫ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЧАСТОТ

*A. Ф. Александров, A. A. Кузовников*

Приводятся результаты экспериментального исследования зависимости активной и реактивной составляющих импеданса плоского конденсатора, обкладки которого помещены в плазму и поддерживаются при потенциале пространства, от параметров плазмы для частоты поля, много меньшей плазменной. В условиях эксперимента импеданс конденсатора полностью определяется величиной локальной проводимости плазмы, что позволяет по данным эксперимента производить расчет эффективной частоты соударений электронов. Результаты такого расчета находятся в удовлетворительном согласии с данными о величине эффективных частот соударений, полученными независимым путем

В подавляющем большинстве работ по исследованию проводимости плазмы конденсаторным методом реактивная составляющая импеданса плазменного конденсатора определялась либо действием слоев пространственного заряда, либо наличием непроводящего зазора между исследуемой плазмой и пластинами конденсатора [1-4]. В этих условиях оказывается невозможным судить о диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon$  по величине реактивной составляющей импеданса плазменного конденсатора. Эксперименты [2], проведенные ранее в условиях, когда имелся непосредственный контакт плазмы с обкладками конденсатора (это достигалось тем, что обкладки конденсатора поддерживались при потенциале плазмы), носили чисто демонстрационный характер и ставили целью показать, что в области  $\omega < \omega_{Le}$  ( $\omega_{Le}$  — ленгмюровская частота электронов,  $\omega$  — частота поля) для плазмы  $\epsilon < 0$ . Поэтому представляется интересным провести количественное измерение комплексной проводимости плазмы методом плазменного конденсатора в условиях, когда эффект «слоев» отсутствует.

Измерения составляющих импеданса плазменного конденсатора проводились методом замещения на частоте  $f = 33$  Мгц с помощью описанной в [4] экспериментальной установки. Для устранения ионных слоев обкладки конденсатора поддерживались при потенциале пространства  $V_p$ .

Предварительные эксперименты показали, что с описанной в [4] конструкцией конденсатора невозможно проводить измерения при потенциале пластин, равном потенциалу пространства, поскольку при этом сильно искажалось состояние разряда (пластин конденсатора начинали играть роль анода). Поэтому были испробованы различные варианты конструкции конденсатора, которые должны были удовлетворить двум противоречивым требованиям. С одной стороны, площадь пластин  $S$  не должна быть слишком большой, а расстояние между ними  $l$  — слишком малым, чтобы избежать заметного искажения состояния плазмы в пространстве между обкладками. С другой стороны,  $S$  не должно быть слишком малым, а  $l$  — слишком большим, чтобы избежать появления большого поля рассеяния.

Эксперименты с конденсаторами различной конфигурации показали, что удовлетворить последнему требованию не удается. В качестве оптимальной была выбрана следующая конструкция конденсатора: кластины были выполнены в виде дисков диаметром 3 мм и располагались на расстоянии 2 см друг от друга.

Потенциал пространства в месте расположения обкладок измерялся с помощью обычной зондовой методики, причем в качестве зондов использовались сами обкладки конденсатора. Одновременно проводилось измерение концентрации электронов  $N$  и электронной температуры  $T_e$ . Для контроля производилось измерение параметров плазмы на оси трубы с помощью цилиндрического зонда. Найденные таким образом значения  $N$  и  $T_e$  оказались совпадающими в пределах ошибки измерений.

Исследования проводились при наполнении разрядной трубы гелием и неоном до давлений 0,8; 0,2; 0,08 и 0,05 мм рт. ст. При всех давлениях проводилось измерение изменения емкости конденсатора  $\Delta C$  при зажигании разряда в зависимости от силы разрядного тока. При давлениях 0,8 и 0,2 мм рт. ст. измерялась также величина активного сопротивления конденсатора  $R_{\parallel}$ , соответствующего параллельной эквивалентной схеме исследуемого конденсатора. Использование такой эквивалентной схемы в случае отсутствия слоев более удобно, поскольку при этом измеряется импеданс непосредственно самой плазмы. Измерение величины  $R_{\parallel}$  при низких давлениях провести не удалось из-за наличия сильных шумов плазмы.

Эксперименты показали, что во всех случаях реактивная составляющая импеданса конденсатора носила индуктивный характер. Это проявлялось в том, что для восстановления резонанса при зажигании разряда необходимо было увеличивать емкость градуированного конденсатора, т. е. величина  $\Delta C$  была отрицательна. При этом величина  $|\Delta C|$  значительно превосходила начальную емкость конденсатора, что соответствует большим отрицательным значениям  $\epsilon$  плазмы.

Результаты измерений  $\Delta C$  в зависимости от концентрации электронов  $N$  для давлений 0,8 и 0,2 мм рт. ст. представлены на рис. 1. Из приведенных графиков следует, что индуктивность плазмы увеличивается с ростом  $N$  по линейному закону. При фиксированной концентрации заряженных частиц с увеличением давления газа величина индуктивности плазмы уменьшается. Аналогичные результаты получены и при других давлениях.

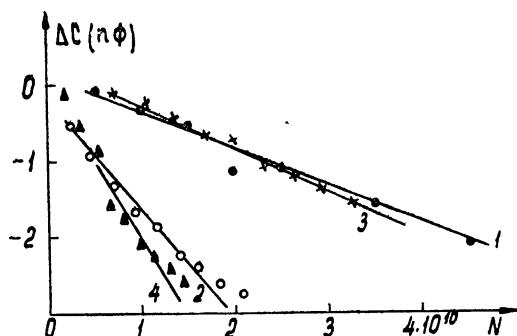


Рис. 1. Зависимость изменения емкости плазменного конденсатора  $\Delta C$  от концентрации электронов  $N$ :

- 1) — Не,  $p=0,8$  мм рт. ст.; 2) — Не,  $p=0,2$  мм рт. ст.; 3) — Ne,  $p=0,8$  мм рт. ст.; 4) — Ne,  $p=0,2$  мм рт. ст.

На рис. 2 представлена зависимость активной проводимости плазмы  $G = R_{\parallel}^{-1}$  от  $N$ . Видно, что с увеличением  $N$  происходит увеличе-

ние  $G$  по линейному закону. С увеличением давления при  $N=\text{const}$  активная проводимость уменьшается.

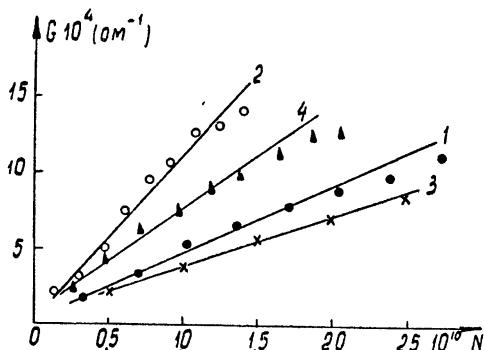


Рис. 2. Зависимость активной проводимости плазменного конденсатора  $G$  от  $N$ :

1) — He,  $p = 0,8 \text{ мм рт. ст.}$ ; 2) — He,  $p = 0,2 \text{ мм рт. ст.}$ ;  
3) — Ne,  $p = 0,8 \text{ мм рт. ст.}$   
4) — Ne,  $p = 0,2 \text{ мм рт. ст.}$

Полученные экспериментальные результаты легко объяснить на основе обычных выражений для  $\epsilon$  и  $\sigma$  плазмы [5]:

$$\epsilon = 1 - K_\epsilon \left( \frac{\omega}{v_e} \right) \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 + v_e^2}, \quad \sigma = K_\sigma \left( \frac{\omega}{v_e} \right) \frac{\omega_{Le}^2 v_e}{4\pi (\omega^2 + v_e^2)}, \quad (1)$$

где  $K_\epsilon$ ,  $K_\sigma$  — некоторые функции  $\omega/v_e$ , вид которых известен;  $v_e$  — эффективная частота соударений электронов с нейтралами. В случае плоского конденсатора  $\Delta C$  и  $G$  связаны с  $\epsilon$  и  $\sigma$  плазмы следующими соотношениями:

$$\Delta C = (\epsilon - 1) \frac{S}{4\pi l} = - K_\epsilon \left( \frac{\omega}{v_e} \right) \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 + v_e^2} \frac{S}{4\pi l}, \quad (2)$$

$$G = \sigma \frac{S}{l} = K_\sigma \left( \frac{\omega}{v_e} \right) \frac{\omega_{Le}^2 v_e}{\omega^2 + v_e^2} \frac{S}{4\pi l},$$

где  $S$  — площадь пластин конденсатора;  $l$  — расстояние между ними. В случае реально использованной геометрии конденсатора, сильно отличающейся от плоской, в формулах (2) отношение  $S/l$  должно быть заменено некоторым эффективным геометрическим фактором.

Легко видеть, что соотношения (2) полностью объясняют (в качественном отношении) наблюдаемый на эксперименте знак  $\Delta C$ , а также зависимость  $\Delta C$  и  $G$  от  $N$  и давления газа  $p$ , поскольку  $v_e \sim p$ . Последнее обстоятельство становится понятным, если учесть, что в условиях эксперимента при давлениях 0,8 и 0,2 мм рт. ст. выполнялось неравенство  $v_e^2 \geq \omega^2$ . Это видно из таблицы, в которой приведены параметры плазмы, соответствующие разрядному току 10 мА, и теоретические значения  $v_e$  (в He  $v_e = 2,3 \cdot 10^9 p \text{ сек}^{-1}$ , в Ne  $v_e$  рассчитывалось по величине средней тепловой скорости электронов).

Таблица 1

Род газа	Давление $p$ (мм рт. ст.)	$N$ ( $\text{см}^{-3}$ )	$T_e$ ( $^\circ\text{К}$ )	$v_e$ (теория) ( $\text{сек}^{-1}$ )	$v_e$ (эксперимент) ( $\text{сек}^{-1}$ )
He	0,8	$3,6 \cdot 10^9$	$3,8 \cdot 10^4$	$1,84 \cdot 10^9$	$1,2 \cdot 10^9$
	0,2	$1,6 \cdot 10^9$	$6 \cdot 10^4$	$4,6 \cdot 10^8$	$5,5 \cdot 10^8$
Ne	0,8	$3,7 \cdot 10^9$	$3,5 \cdot 10^4$	$9,3 \cdot 10^8$	$9,8 \cdot 10^8$
	0,2	$2,3 \cdot 10^9$	$4,5 \cdot 10^4$	$2,6 \cdot 10^8$	$4,5 \cdot 10^8$

К сожалению, провести количественный расчет  $\Delta C$  и  $G$  по формуле (2) не удалось, так как для определения входящего в них эффективного значения  $S/l$  требовалось измерение очень малой величины собственной емкости исследуемого конденсатора.

Однако из выражений (2) следует, что

$$-\frac{\Delta C}{G} = \frac{K_e}{K_\sigma} \frac{1}{\nu_e}, \quad (3)$$

т. е., исходя из результатов измерений  $\Delta C$  и  $G$ , можно определить  $\nu_e$ , поскольку отношение  $K_e/K_\sigma$  можно достаточно точно оценить, используя приведенные в [6] графики для приближенного значения  $\nu_e$ , которое получается из (3) при  $K_e/K_\sigma = 1$ . В случае же это отношение нужно сразу же положить равным единице, поскольку в Нé частота соударений не зависит от скорости электронов. Результаты такого расчета  $\nu_e$  приведены в таблице и находятся в удовлетворительном согласии с теоретическими значениями.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность А. А. Рухадзе за обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. Darrow, Bell Syst. Techn. J., 11, 576 (1932).
2. E. Appleton, F. Childs, Phil. Mag., 10, 969 (1930).
3. А. Ф. Александров, И. М. Яценко, Термофизика высоких температур, 3, 354 (1965).
4. А. Ф. Александров, А. А. Кузовников, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 11, № 10, 1547 (1968).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.

Московский государственный университет.

Поступила в редакцию  
21 июля 1967 г.

#### INVESTIGATION OF PLASMA COMPLEX CONDUCTIVITY IN LOW-FREQUENCY REGION

*A. F. Aleksandrov, A. A. Kuzovnikov*

The authors present the results of the experimental investigation of the dependence of active and reactive components of the impedance of a plane capacitor, the plates of which are in plasma and with the potential maintained to be equal that of the space, upon the plasma parameters when the field frequency is much less than the plasma frequency. Under the experimental condition, the capacitor impedance is completely determined by the value of the local plasma conductivity that permits one to calculate the effective collision frequency of electrons by the experimental data. The results agree satisfactorily with the data on the value of the effective collision frequencies obtained by independent way.

УДК 533.9 082

## ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЕВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА МЕТОДОМ ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА\*

*А. Ф. Александров, А. А. Кузовников*

Приведены результаты измерений толщины  $d_c$  слоев пространственного заряда вблизи погруженных в плазму электродов, полученные методом плазменного конденсатора. Исследована зависимость величины  $d_c$  от потенциала электродов  $V$  и параметров плазмы. Экспериментальная зависимость  $d_c$  от  $V$  находится в хорошем количественном согласии с теоретической для случаев, когда в слое осуществляется режим свободного пробега ионов и режим подвижности. Экспериментальная зависимость  $d_c$  от концентрации заряженных частиц в плазме не согласуется с теоретической, что объясняется влиянием вторичных процессов.

Первые экспериментальные работы по изучению комплексной проводимости содержащего плазму конденсатора [1] были посвящены проверке элементарной теории диэлектрических свойств плазмы [2]. Идея большинства из них состояла в применении к исследованию диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и проводимости  $\sigma$  плазмы радиочастотных методов измерения  $\epsilon$  и  $\sigma$  обычных диэлектриков. Однако первые полученные подобным методом результаты оказались весьма неожиданными: в большинстве случаев экспериментально измеренное методом плазменного конденсатора значение - ионизованного воздуха было больше единицы, в то время как из теории следует, что для плазмы всегда  $\epsilon < 1$ . Впервые правильное объяснение этому эффекту было дано Эпплтоном и Чайлдсом [3], которые показали, что наблюдаемое экспериментально увеличение  $\epsilon$  до значений, больших единицы, есть эффект ложный, связанный с образованием вблизи погруженных в плазму электродов слоев положительного пространственного заряда. Эти слои ведут себя как непроводящие зазоры, и эквивалентную схему плазменного конденсатора можно представить себе в виде двух ёмкостей, образованных слоями и соединённых между собой плазмой с большой активной проводимостью. Поскольку толщина слоев обычно мала по сравнению с расстоянием между обкладками конденсатора, ёмкость конденсатора определяется ёмкостью этих слоев. Это позволяет ожидать, что по величине ёмкости плазменного конденсатора можно судить о толщине слоев пространственного заряда. В настоящей работе с помощью такого метода исследуется зависимость толщины слоев пространственного заряда, образующегося около пластин плазменного конденсатора, от параметров плазмы и потенциала пластин.

### ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Измерение составляющих импеданса плазменного конденсатора проводилось методом замещения. Сущность использованной методики может быть пояснена с помощью схемы экспериментальной установки,

\* Работа доложена на Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы, Киев, 1966.

изображенной на рис. 1. Исследуемый конденсатор  $C_k$ , обкладки которого  $P_1$  и  $P_2$  помещены внутрь газоразрядной трубки, являлся частью резонансного контура, образованного катушкой индуктивности  $L_k = 1,6 \text{ мкГн}$  и параллельно соединенным конденсатором  $C_k$  и переменным градуированным конденсатором  $C_{\text{и}}$ , емкость которого могла меняться в пределах от 15 до 25  $\text{пФ}$  с точностью до 0,05  $\text{пФ}$ . Резонансный контур настраивался на частоту наполнения подаваемых на него импульсов напряжения высокой частоты, вырабатываемых генератором типа ГМВ (длительность импульсов—2 мксек, частота повторения—1 кци, частота наполнения—30 Мгц) и усиливаемых широкополосным усилителем типа УР-1М. Для регистрации величины высокочастотного напряжения, падающего на резонансном контуре, служила цепь, состоящая из усилителя с детектором, амплитудного дискриминатора и осциллографа СИ-1. Настройка контура в резонанс производилась изменением величины  $C_k$  и фиксировалась по максимуму амплитуды видеоимпульса на экране осциллографа. Связь резонансного контура с измерительной аппаратурой осуществлялась через разделительные емкости величиной 3  $\text{пФ}$ , необходимые для того, чтобы избежать шунтирующего действия подводящих проводов.

Амплитудный дискриминатор служил для повышения чувствительности регистрирующей схемы по отношению к весьма слабым изменениям амплитуды высокочастотного напряжения на резонансном контуре, связанным либо с изменением импеданса исследуемого конденсатора при изменении параметров плазмы, либо с изменением величины переменной емкости контура при его настройке в резонанс.

Исследуемый конденсатор состоял из двух молибденовых пластин размерами  $2 \times 5 \text{ см}^2$ , которые были введены внутрь разрядной трубы на расстоянии 10 см от анода. Пластины устанавливались симметрично относительно оси трубы и располагались параллельно друг другу на расстоянии 2 см. В пространство между обкладками конденсатора был введен цилиндрический зонд.

Разрядная трубка имела диаметр 5 см; расстояние между анодом и катодом составляло 40 см.

Экспериментальная установка содержала также дополнительную цепь для создания на обкладках исследуемого конденсатора необходимого постоянного потенциала, состоявшую из батареи аккумуляторов  $E$  и потенциометра  $R$ . Резонансные контуры  $K_1$  и  $K_2$  настраивались на несущую частоту измерительных импульсов и служили для предотвращения шунтирования измерительного контура цепью, вырабатывающей постоянное напряжение.

Использование в методе замещения измерительного сигнала в виде импульсов напряжения высокой частоты и применение амплитудной

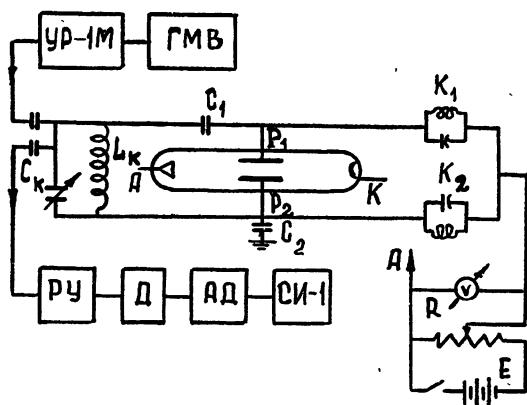


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:  
ГМВ—генератор импульсов высокой частоты; УР-1М—широкополосный усилитель; РУ—резонансный усилитель; Д—детектор; АД—амплитудный дискриминатор; СИ-1—осциллограф;  $C_k L_k$ —измерительный контур;  $P_1 P_2$ —исследуемый конденсатор;  $K_1$  и  $K_2$ —фильтры.

дискриминации позволило обеспечить высокую точность измерения составляющих импеданса конденсатора в условиях, когда вносимое в контур затухание велико. Особое внимание было уделено величине измерительного сигнала с тем, чтобы избежать появления нелинейных эффектов. Проверка показала полное (в пределах точности измерений) отсутствие нелинейных эффектов при всех использовавшихся значениях амплитуды измерительных импульсов.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью описанной методики были проведены измерения реактивной составляющей проводимости исследуемого конденсатора. Измерения проводились при наполнении разрядной трубки гелием (давление  $p = 0,05, 0,1$  и  $0,5 \text{ мм рт. ст.}$ ) и неоном (давление  $0,5 \text{ мм рт. ст.}$ ). Во всех случаях подробно исследовалась зависимость емкости конденсатора от потенциала пластин конденсатора  $V$  относительно потенциала плазмы. В неоне подробно исследовалась также зависимость емкости конденсатора  $C$  от силы разрядного тока  $I_p$ .

Для определения  $V$  фиксировался потенциал пластин  $V_0$  относительно анода трубы и с помощью метода зондов определялся потенциал пространства вблизи обкладок  $V_p$  (также относительно анода). При этом  $V = V_0 - V_p$ . Все измерения проводились при  $V < 0$ , что соответствует собиранию пластинами конденсатора положительных ионов плазмы.

Измерения показали, что во всех случаях при зажигании разряда происходит значительное увеличение емкости конденсатора. Если, исходя из представлений, впервые развитых в работе Эпплтона и Чайлдса [3], отнести наблюдаемое изменение емкости конденсатора к действию двух последовательно соединенных слоев положительного пространственного заряда, то по величине  $C$  можно легко определить толщину слоя  $d_c$ , пользуясь формулой плоского конденсатора. Тогда

$$d_c = \frac{S}{8\pi C}, \quad (1)$$

где  $S$  — площадь пластин конденсатора. В формуле (1) учтено также, что для используемой частоты поля диэлектрическая проницаемость ионного газа мало отличается от единицы.

Результаты расчетов величины  $d_c$ , проведенных по формуле (1), представлены на рис. 2, где изображена зависимость  $d_c$  от  $V$  для различных значений силы разрядного тока в случае разряда в неоне. Экспериментальные точки на графике представляют собой результат усреднения, проведенного не менее, чем по 5 независимым измерениям.

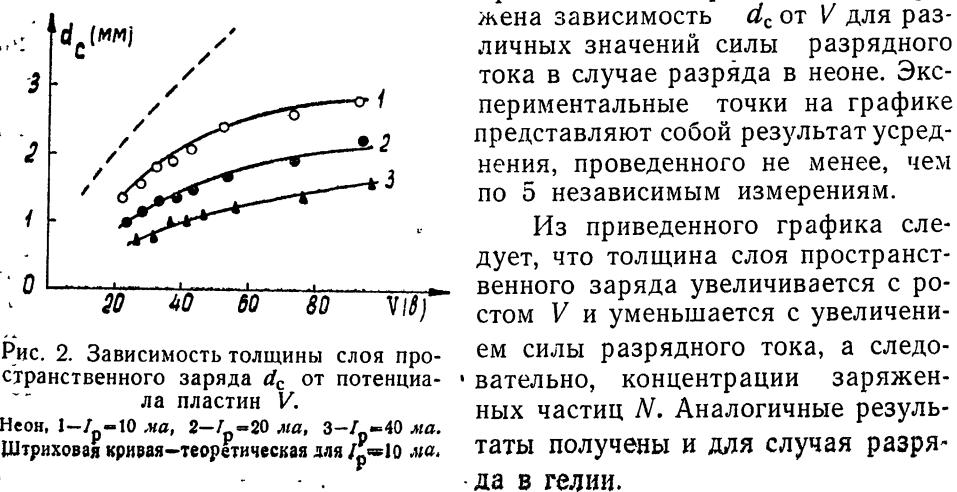


Рис. 2. Зависимость толщины слоя пространственного заряда  $d_c$  от потенциала пластин  $V$ .

Неон, 1— $I_p = 10 \text{ ma}$ , 2— $I_p = 20 \text{ ma}$ , 3— $I_p = 40 \text{ ma}$ . Штриховая кривая — теоретическая для  $I_p = 10 \text{ ma}$ .

Из приведенного графика следует, что толщина слоя пространственного заряда увеличивается с ростом  $V$  и уменьшается с увеличением силы разрядного тока, а следовательно, концентрации заряженных частиц  $N$ . Аналогичные результаты получены и для случая разряда в гелии.

Для более точного выяснения вида функций  $d_c(V)$  и  $d_c(N)$  строились зависимости  $\lg d_c$  от  $\lg I$  и  $\lg N$ . Соответствующие результаты представлены в виде графиков на рис. 3 и 4. Из рисунков видно, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямые линии. Это указывает на то, что зависимость  $d_c$  от  $V$  носит степенной характер:  $d_c \sim V^x$ . Аналогичным образом был установлен степенной характер зависимости  $d_c$  от  $N$ :  $d_c \sim N^y$ .

Показатели степени у  $V$  и  $N$  можно найти из наклона соответствующих прямых. Сплошные прямые на рис. 3 и 4 проведены с наклоном  $x = 0,75$  при  $p = 0,05$  мм рт. ст.,  $x = 0,62$  при  $p = 0,1$  мм рт. ст. и  $x = 0,6$  при  $p = 0,5$  мм рт. ст. Величина  $y$ , определенная для случая разряда в Ne, оказалась равной  $y \approx -0,48 \div -0,5$ .

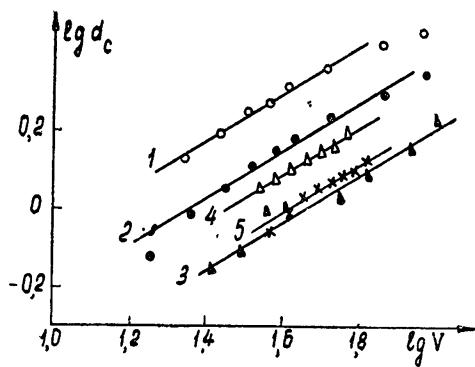


Рис. 3. Зависимость  $\lg d_c$  от  $\lg V$  при давлении  $p=0,5$  мм рт. ст.:

1—Ne,  $I_p=10$  ма, 2—Ne,  $I_p=20$  ма, 3—Ne,  $I_p=40$  ма, 4—He,  $I_p=5$  ма; 5—He,  $I_p=10$  ма. Наклон сплошных прямых равен 0,6.

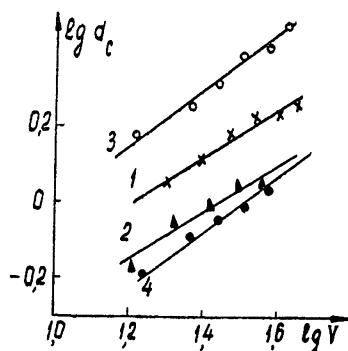


Рис. 4. Зависимость  $\lg d_c$  от  $\lg V$  в гелии:

1— $p=0,1$  мм рт. ст.,  $I_p=10$  ма; 2— $p=0,1$  мм рт. ст.,  $I_p=15$  ма; 3— $p=0,05$  мм рт. ст.,  $I_p=10$  ма; 4— $p=0,05$  мм рт. ст.,  $I_p=20$  ма. Сплошные прямые имеют наклон 0,62 при  $p=0,1$  мм рт. ст. и 0,75 при  $p=0,05$  мм рт. ст.

## ОБСУЖДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выясним характер движения ионов в слое, для чего предварительно сделим среднюю длину свободного пробега ионов  $\lambda_i$ . Величину  $\lambda_i$  можно определить из данных о подвижности ионов, считая, что температура ионов  $T_i \approx 1000^\circ\text{K}$  [4]. Производя соответствующие вычисления, получим, что в случае гелия при  $p = 0,05$  мм рт. ст.  $\lambda_i \approx 1$  мм; при  $p = 0,1$  мм рт. ст.  $\lambda_i \approx 0,5$  мм и при  $p = 0,5$  мм рт. ст.  $\lambda_i \approx 0,1$  мм. В случае неона при  $p = 0,5$  мм рт. ст. получаем  $\lambda_i \approx 0,08$  мм.

Сравнение длины свободного пробега ионов с экспериментально измеренной толщиной слоя показывает, что при давлении 0,5 мм рт. ст. режим движения ионов в слое должен быть близок к режиму свободного пробега. В случае  $p = 0,1$  мм рт. ст. ионы при движении в слое должны испытать несколько соударений, а при  $p = 0,5$  мм рт. ст. — много соударений, т. е. должен осуществляться режим подвижности.

В случае режима свободного пробега вольт-амперная характеристика слоя определяется известным законом «трех вторых». Если считать, что за границу слоя электрическое поле не проникает, то границы слоя достигает только хаотический ионный ток. В действительности, однако (см., например, [5, 6]), электрическое поле проникает за границу слоя, причем разность потенциалов  $V_s$  между границей слоя и не-

возмущенной плаэмой по порядку величины равна  $V_s = xT_e/e$ . Ионы, проходя разность потенциалов  $V_s$ , ускоряются и достигают границы слоя со скоростью, пропорциональной не ионной, а электронной температуре.

С учётом сделанного замечания, приравнивая выражения для плотности тока в слое и плотности ионного тока, поступающего из плаэмы на границу слоя, легко получить выражение для толщины слоя  $d_c$ :

$$d_c = \left( \frac{2}{9\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{\epsilon}{e x T_e} \right)^{1/4} \frac{V^{3/4}}{N^{1/2}}. \quad (2)$$

Таким образом, в случае режима свободного пробега наклон прямой, определяющей зависимость  $\lg d_c$  от  $\lg V$ , должен быть равен 0,75, что хорошо согласуется с экспериментальным значением  $x$  при  $p = 0,05$  мм рт. ст. В (2)  $\epsilon$  — основание натуральных логарифмов.

Проанализируем теперь результаты, полученные при давлении 0,5 мм рт. ст. В этом случае, как было установлено выше, скорость движения ионов в слое должна определяться их подвижностью. Если считать, что подвижность ионов  $b_i$  не зависит от напряженности электрического поля, то должно выполняться соотношение  $d_c \sim V^{2/3} N^{-1/3}$  (см., например, [4]). Подобная зависимость плохо согласуется с результатами экспериментов.

Как следует из результатов работы Фроста [7], зависимость  $b_i$  от напряженности электрического поля может быть представлена в виде

$$b_i = b_{i0} \left( 1 + a \frac{E}{p} \right)^{-1/2}, \quad (3)$$

где  $a$  — постоянная, зависящая от рода газа (в Не и Ne  $a = 0,04$ , если  $E$  и  $p$  выражены соответственно в единицах  $\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$  и  $\text{мм рт. ст.}$ ):

Величину напряженности электрического поля  $E$  в слое можно грубо оценить как  $V/d_c$ . Она оказывается во всех случаях больше 200  $\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$ , вследствие чего в (3) можно пренебречь единицей. Тогда, используя результаты, полученные Дроздовым [8], найдем

$$j_i = \frac{V \bar{5} b_{i0}}{18\pi \sqrt{3} a p} \frac{V^{3/2}}{d_c^{5/2}}. \quad (4)$$

В рассматриваемом случае относительно высокого давления газа в качестве плотности тока, достигающего границы слоя, следует взять выражение для хаотического ионного тока. Действительно, в силу большого числа соударений характер движения ионов вплоть до границы слоя должен оставаться приблизительно хаотическим. Тогда легко получить

$$d_c = \left( 4,8 \frac{a p e^2 8 \times T_i}{\pi M b_{i0}} \right)^{-1/5} \frac{V^{3/5}}{N^{2/5}}. \quad (5)$$

Даваемая формулой (5) зависимость  $d_c$  от  $V$  и  $N$  хорошо согласуется с экспериментальной зависимостью  $d_c$  от  $V$  при  $p = 0,5$  мм рт. ст. и гораздо лучше (по сравнению с формулами, полученными без учета зависимости  $b_i$  от  $E$ ) объясняет экспериментальную зависимость  $d_c$  от  $N$ . Тем не менее расхождение теоретической и экспериментальной зависимости  $d_c$  от  $N$  остается значительным. Это, по-видимому, связано с влиянием вторичных эффектов, таких как эмиссия электронов с обкладок конденсатора, вызванная попаданием метастабильных атомов и ионной бомбардировкой, и ионизация в слое. При этом ясно, что указанные эффекты должны слабо зависеть от  $V$  и влиять главным образом на зависимость  $d_c$  от  $N$ .

По формуле (5) был произведен численный расчет величины  $d_c$ , исходя из данных зондовых измерений (при  $I_p = 10 \text{ ма}$  в He— $N = 1,25 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 5 \cdot 10^4 \text{ К}$  и в Ne— $N = 3,5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 3,5 \cdot 10^4 \text{ К}$ ). Результаты расчета приведены на рис. 2 в виде штриховой кривой для  $I_p = 10 \text{ ма}$ . Видно, что в Ne имеется удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных значений  $d_c$ .

В случае He согласие значительно хуже. Так, при  $p = 0,5 \text{ мм рт. ст.}$  теоретические значения  $d_c$  более чем в четыре раза превосходят экспериментальные. При  $p = 0,5 \text{ мм рт. ст.}$  расчет, проведенный согласно (2) для силы разрядного тока 10 ма ( $N = 1,15 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ ;  $T_e = 113 \cdot 10^3 \text{ К}$ ), дает значение  $d_c$ , превосходящее экспериментальное более чем в 2 раза. Это служит указанием на то, что в действительности плотность тока, достигающего пластин конденсатора, значительно выше, чем было принято при расчете. Аналогичный результат был получен и в работе [6], в которой проводились измерения ионного тока насыщения на зонд. Следуя сделанному в этой работе выводу, указанное расхождение может быть объяснено эмиссией электронов с пластин конденсатора, называемой метастабильными атомами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. Darrow, Bell Sys. Tech. J., 11, 576 (1932).
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
3. E. Appleton, F. Childs, Phil. Mag., 10, 969 (1930).
4. А. Энгель, Ионизированные газы, Физматгиз, М., 1959.
5. D. Bohm, The Characteristics of Electrical Discharge in Magnetic Fields, Edited by Gurnthrie, Wakerling, N. Y., 1949.
6. Г. Шульц, С. Браун, ПСФ, 5 (1957).
7. L. S. Frost, Phys. Rev., 105, 354 (1957).
8. В. И. Дроздов, ЖТФ, 16, 407 (1946).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 июля 1967 г.

#### INVESTIGATION OF SPACE CHARGE LAYERS BY THE PLASMA CAPACITOR METHOD

A. F. Aleksandrov, A. A. Kuzovnikov

The measurement results of the layer thickness  $d_l$  of a space charge near the electrodes immersed into plasma are given. The measurements were carried out by the method of plasma capacitor. The dependence of the value  $d_l$  on the electrode potential  $V$  and plasma parameters are investigated. The experimental dependence of  $d_l$  on  $V$  is in good quantitative agreement with the theoretical one for the cases when there exist in the layer ion free transit and mobility regimes. The experimental dependence of  $d_l$  on the charged particle density in a plasma does not agree with the theoretical one due to the influence of the secondary processes.

УДК 621.378.3

## ПУЧКОВЫЙ ОПТИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ ГЕНЕРАТОР КАК СТАНДАРТ ЧАСТОТЫ

*A. N. Ораевский*

. Рассмотрены возможности создания пучковых квантовых генераторов оптического диапазона. Указано на ограничения длины волны и минимальной вероятности перехода, вытекающие из технических возможностей и требуемой стабильности частоты. Показано, что *R*-и *P*-ветви вращательно-колебательных переходов в молекулах имеют преимущество перед *Q*-ветвью с точки зрения стабильности частоты

1. С освоением квантовой электроники оптического диапазонастал вопрос о создании оптического стандарта длины и частоты. Из-за большой ширины спектральной линии люминесценции в оптическом квантовом генераторе частота генерируемого излучения задается собственной частотой резонатора и зависит от расстояния между зеркалами резонатора.

В работах [1, 2] найден способ «привязки» частоты генерируемого излучения оптического квантового генератора к вершине спектральной линии\*. Однако даже в газовых квантовых генераторах положение вершины спектральной линии зависит от давления в системе и других параметров. Поэтому создание абсолютного стандарта частоты и длины в оптическом диапазоне связано с разработкой пучкового квантового генератора, где практически отсутствуют соударения между атомами или молекулами вещества.

2. Технические возможности накладывают ограничения на выбор диапазона рабочих частот и интенсивность перехода атомов или молекул, пригодных для использования в пучковых системах.

Условие самовозбуждения пучкового квантового генератора с использованием плоско-параллельного резонатора имеет вид

$$\frac{8}{\pi} \frac{|\mu|^2}{\hbar} \frac{L}{\bar{v}} \frac{\theta}{1-r} \frac{n}{\Sigma} (e^{-E_m/kT} - e^{-E_n/kT}) > 1, \quad (1)$$

где  $\bar{v}$  — средняя тепловая скорость молекул в источнике молекулярного пучка,  $L$  — длина пространства, заполняемого в резонаторе молекулярным пучком,  $r$  — коэффициент отражения зеркал,  $n$  — плотность молекул в источнике молекулярного пучка,  $\mu$  — матричный элемент дипольного момента,  $\theta$  — угол раствора молекулярного пучка в плоскости зеркал резонатора,  $\Sigma$  — статистическая сумма атомов или молекул, используемых в квантовом генераторе,  $E_m$ ,  $E_n$  — рабочие

\* По-видимому, в случае спектральной линии, форма и ширина которой определяются эффектом Доппеля, частота излучения лазера с нерезонансной обратной связью [2] не будет совпадать с центром спектральной линии. Добиться совпадения генерируемой частоты с центром спектральной линии можно в лазере бегущей волны с нерезонансной обратной связью.

уровни вещества,  $T$  — температура, характеризующая заселенность уровней энергии. При  $L=50$  см,  $r=0,98$ ,  $v \approx 5 \cdot 10^4$  см·сек $^{-1}$ ,  $\theta = 0,1$  из условия (1) следует, что

$$|\mu|^2 > 3 \cdot 10^{-26} \frac{\Sigma}{n} (e^{-E_m/kT} - e^{-E_n/kT}). \quad (2)$$

Из объема порядка 1 м $^3$  вполне реально вести откачуку со скоростью  $10^{20}$  частиц·сек $^{-1}$  с использованием форкамеры для формирования молекулярного пучка. Плотность частиц в источнике молекулярного пучка площадью 50 см  $\times$  1 см, соответствующая потоку в  $10^{20}$  частиц·сек $^{-1}$ , равна  $2 \cdot 10^{14}$  частиц·см $^{-3}$ .

Дальнейшая оценка  $|\mu|^2$  по формуле (2) зависит от статистической суммы молекул или атомов. Для атомов в наиболее благоприятном случае  $\Sigma(e^{-E_m/kT} - e^{-E_n/kT}) \sim 1$  и

$$|\mu|^2 \geq 10^{-40} \text{ ед. CGSE}. \quad (3)$$

В случае использования колебательных переходов в молекулах нужно принимать во внимание вращательную статсумму, которая, как правило, велика даже для комнатных температур. Для молекул величина  $\Sigma(e^{-E_m/kT} - e^{-E_n/kT})$  лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен, так что, согласно (2),

$$|\mu|^2 \geq 10^{-39} \text{ ед. CGSE}. \quad (4)$$

Если принять, что 5—10 см — тот интервал, на котором можно сформировать пучок активных частиц с малым угловым раствором, то время жизни частиц в возбужденном состоянии не должно быть меньше

$$\tau \simeq \frac{5 \div 10}{5 \cdot 10^4} = (1 \div 2) \cdot 10^{-4} \text{ сек}. \quad (5)$$

Это накладывает ограничение на минимальную длину волны.

Вероятность спонтанного перехода равна

$$w_{\text{сп}} = \frac{32\pi^3}{3} \frac{|\mu|^2}{\hbar} \frac{1}{\lambda^3} \quad (6)$$

и не должна превышать  $\tau^{-1}$ . Из этого условия с учетом (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} \lambda &> 0,3 \mu && \text{в случае атомов}, \\ \lambda &> 1 \div 2 \mu && \text{в случае молекул}. \end{aligned} \quad (7)$$

Соударения между молекулами (атомами) и связанный с этим сдвиг вершины спектральной линии будет ограничивать предельно достижимую абсолютную стабильность частоты оптического квантового генератора. Это лимитирует предельный поток частиц из источника молекулярного пучка. Однако, если удельное смещение резонансной частоты из-за соударений не превышает  $10^{-10}$  гц·см $^{-3}$ , то вплоть до стабильности  $10^{-13} \div 10^{-14}$  следующее отсюда ограничение на длину волны укладывается в рамки условий (7).

3. Из обсуждавшихся в литературе методов получения инверсии населенности наиболее подходящими для пучковых систем являются следующие.

1) Пучок нагретых молекул влетает в вакуум и «остывает» за счет спонтанного излучения [3]. Если для каких-либо двух энергетиче-

ских уровней  $E_2$  и  $E_1$  в молекуле или атоме (рис. 1) выполнено соотношение  $\tau_2 > \tau_1$ , где  $\tau_{1,2}$  — времена радиационного распада уровней  $E_{1,2}$ , то в такой системе возникает инверсия населенностей по отношению к переходу  $2 \rightarrow 1$ .

2) Использование химических реакций для образования возбужденных молекул в источнике молекулярного пучка. В работе [4] показано, что химические реакции

- а)  $H + Cl_2 = HCl + Cl$ ,
- б)  $Cl + HJ = HCl + J$ ,
- в)  $H + Br_2 = HBr + Br$

приводят к инверсии населенностей колебательных уровней молекул  $HCl$  и  $HBr$ . При давлении в источнике до 1 мм рт. ст. можно так подобрать размеры источника молекулярного пучка, что реакция образования возбужденных молекул и выход их из источника будут протекать быстрее, чем колебательная релаксация в молекулах.

3) Пучок молекул пролетает через резонатор, возбуждаемый светом дополнительного лазера и инвертирует свою населенность [5]. Часть энергии квантового генератора, созданного на основе этого инвертированного пучка, можно использовать для фазовой стабилизации дополнительного лазера, так что вся система будет автоматически настраиваться на частоту, близкую к вершине спектральной линии молекулярного пучка.

Эти три способа в настоящее время нам представляются наиболее перспективными, хотя при благоприятных обстоятельствах могут быть использованы и другие методы получения пучков активных частиц, которыми в настоящее время весьма богата квантовая электроника, например, фотодиссоциация, электронное возбуждение и т. д.

4. Частота квантового генератора  $\nu$ , как известно, определяется формулой

$$\nu = \nu_l + \frac{Q_p}{Q_p + Q_l} (\nu_p - \nu_l), \quad (8)$$

где добротность линии  $Q_l$ , вообще говоря, зависит от интенсивности молекулярного пучка. ( $Q_p$  — добротность резонатора). Это дает возможность настраивать частоту генератора на частоту спектральной линии путем модуляции интенсивности молекулярного пучка. Точность такой настройки определяется точностью измерения девиации частоты квантового генератора при модуляции [6] и не зависит от соотношения  $Q_l$  и  $Q_p$ . Поэтому для кратковременной стабильности частоты не обязательно, чтобы в настраиваемом генераторе  $Q_l$  было значительно больше  $Q_p$ . Для этого достаточно того, чтобы в пределы ширины спектральной линии попадала только одна мода резонатора. Однако опорный генератор, используемый при настройке, должен иметь весьма высокую относительную стабильность частоты.

Ошибки в определении номинальной частоты пучкового квантового генератора связаны с изменением частоты генерации из-за эффекта бегущей волны, присутствия близких соседних спектральных линий, сдвига частоты генерации из-за допплер-эффекта второго порядка, влияния внешних электрических и магнитных полей.

Эффект бегущей волны для оптического квантового генератора можно разделить на «поперечный» и «продольный». «Поперечный» эффект подобен таковому для пучковых генераторов радиодиапазона [7] и возникает из-за неравномерности излучения молекул (атомов) вдоль

их движения. Этому эффекту будет способствовать непараллельность зеркал.

Используя расчет, проведенный в [7], можно показать, что сдвиг частоты из-за неравномерности излучения молекул по порядку величины равен

$$\frac{\Delta\nu_{\perp}}{\nu} \simeq \frac{1}{4\pi^2} (1-r) \frac{a}{L} \frac{\bar{v}}{c}, \quad (9)$$

где все обозначения те же, что и в формуле (1). Если  $r=98\%$ ,  $a=1$  см,  $L=50$  см,  $\bar{v} \simeq 4 \cdot 10^4$  см·сек $^{-1}$ , то  $\frac{\Delta\nu_{\perp}}{\nu} \sim 10^{-11}$ . Этот сдвиг может быть

уменьшен, как и в случае радиодиапазона, путем применения двух одинаковых встречных пучков [6, 7]. Непараллельность зеркал также вызывает дополнительный поток мощности вдоль направления распространения молекулярного пучка. Этот эффект существенно уменьшается при переходе от плоских зеркал к сферическим.

«Продольный» эффект бегущей волны может быть вызван появлением бегущей волны вдоль резонатора из-за разницы коэффициентов отражения зеркал и неточной юстировки молекулярных пучков. Если  $\Delta r$  — разность коэффициентов отражения, а  $\Delta\varphi$  — отклонение оси молекулярного пучка от перпендикуляра к оси резонатора, то

$$\frac{\Delta\nu_{\parallel}}{\nu} \simeq \frac{\bar{v}}{c} \frac{\Delta r}{r} \Delta\varphi. \quad (10)$$

По-видимому, сравнительно нетрудно изготовить два зеркала, у которых  $\frac{\Delta r}{r} \simeq 10^{-3}$ , и даже зеркала с  $\frac{\Delta r}{r} \simeq 10^{-4}$ , что при точности юстировки пучка  $\Delta\varphi \sim 10^{-2}$  (доли градуса) приводит к величине «продольного» сдвига  $\Delta\nu_{\parallel} = 10^{-12} \div 10^{-13}$ .

5. Имея в виду использование вращательно-колебательного спектра молекул для создания пучкового генератора, следует учитывать сдвиг частоты генерации, вызванный близлежащими линиями вращательно-колебательных переходов.

Сдвиг частоты, обусловленный соседними спектральными линиями, согласно [6], равен

$$\Delta\nu = \sum_i \frac{|\mu_i|^2 N_i}{|\mu|^2 N_0} \frac{1}{\nu_i - \nu_0} \left[ 1 + \frac{\mu_0^2 E_0^2}{\hbar^2 (\Delta\omega)^2} \right], \quad (11)$$

где  $\mu_i$  — матричный элемент дипольного момента для  $i$ -й линии,  $N_i$  — разность населенностей соответствующих уровней, переход между которыми обусловливает спектральную линию частоты  $\nu_i$ , индексом «0» обозначена линия, на которой происходит генерация,  $E_0^2$  — интенсивность генерируемого поля, а  $\Delta\omega$  — ширина спектральной линии. Формула (11) вычислена в предположении лоренцовой формы линии при условии  $|\nu - \nu_0| \gg \Delta\omega$ .

а) Случай  $Q$ -ветви вращательно-колебательных переходов:  $\Delta J = 0$ . Из-за того, что момент инерции молекулы зависит от колебательного состояния, для  $Q$ -ветви имеется целая серия линий, соответствующих различным значениям вращательного квантового числа  $J$ .

Для линейной молекулы частоты  $Q$ -ветви вращательно-колебательного спектра описываются зависимостью

$$\nu_J = \nu_0 + \Delta B J(J+1),$$

где  $\nu_0$  — колебательная частота невращающейся молекулы,  $\Delta B$  — разность вращательных постоянных для двух различных колебательных состояний.

Интенсивность различных вращательных компонент молекулы  $|\mu_B|^2 N_i \sim (J+1) \exp\left(-\frac{hBJ(J+1)}{kT}\right)^*$ , где  $T$  — температура в источнике молекулярного пучка. Поэтому формула (11) для переходов  $Q$ -ветви принимает вид

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta B} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{(J+1) \exp\left(-\frac{hBJ(J+1)}{kT}\right)}{(J_0+1) \exp\left(-\frac{hBJ_0(J_0+1)}{kT}\right)} \frac{1}{J(J+1) - J_0(J_0+1)} \eta, \quad (12)$$

$\eta = 1 + \frac{|\mu_0|^2 E^2}{\hbar^2 (\Delta\omega)^2}$  — пороговый коэффициент лазера, равный левой части формулы (1). Для получения приближенной аналитической формулы заменим суммирование в (12) интегрированием, что вполне можно сделать, если  $hB \ll kT$ . Тогда

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega^2}{8\pi^2 \Delta B} \frac{\eta}{J_0 + 1} \operatorname{Ei}\left[\frac{hB}{kT} J_0(J_0 + 1)\right]. \quad (13)$$

Здесь  $\operatorname{Ei}(x)$  — интегральная показательная функция.

Это смещение частоты генерации зависит от температуры и через  $\eta$  от интенсивности молекулярного пучка, коэффициента отражения зеркал и расстояния между ними. Если для генерации используется переход с максимальной интенсивностью, то  $J_0$  определяется из условия максимума величины  $(J_0 + 1) \exp\left(-\frac{hBJ_0(J_0+1)}{kT}\right)$  и при  $hB \ll kT$

равно  $\left(\frac{kT}{2hB}\right)^{1/2}$ . С учетом этого значения  $J_0$  при  $\eta > 1$ ,  $\Delta B \simeq 10^{-4} \text{ см}^{-1}$  и  $B \simeq 0,5 \text{ см}^{-1}$ , что является типичным для целого ряда молекул,

$$\Delta\nu = 10^3 \text{ Гц}. \quad (14)$$

Относительная стабильность частоты как функции температуры характеризуется величиной  $\delta(\Delta\nu) = \frac{d\Delta\nu}{dT} \Delta T$  и равна

$$\frac{\delta(\Delta\nu)}{\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \frac{\Delta T}{T}. \quad (15)$$

Для получения относительной стабильности частоты генерации не менее  $10^{-12}$  в диапазоне нескольких микрон в течение достаточно большого промежутка времени относительное изменение температуры источника молекулярного пучка не должно превышать 10 %. Для создания абсолютного стандарта частоты с той же стабильностью нужно знать абсолютное значение температуры источника пучка с точностью до 10 %.

б) Случай  $R$ -ветви (переход  $v = 1, J \rightarrow v = 0, J + 1$ ). Частота этого перехода

$$\nu_R = \nu_0 - 2\Delta B (J_0 + 1) - \Delta B J_0 (J_0 + 1). \quad (16)$$

Вблизи нее может оказаться компонента  $Q$ -ветви с вращательным квантовым числом, определяемым соотношением  $\nu_R = \nu_Q$  и равным

\* Здесь мы рассматриваем для определенности линейные молекулы,

$$J' = \left( \frac{2B}{\Delta B} J_0 + J_0^2 \right) \simeq \sqrt{\frac{2B}{\Delta B}} J_0. \quad (17)$$

Если  $J_0$  выбрано из условия максимальной интенсивности линии и равно  $\sim 50$ , то при  $\Delta B \simeq 10^{-4} \text{ см}^{-1}$   $J' = 300$ , что в 6 раз больше оптимального значения  $J_0$ . Следовательно, интенсивность этой компоненты в  $e^{55}$  раз меньше интенсивности основной компоненты и ее влияние на положение частоты генерации ничтожно мало. Ближайшая же интенсивная линия  $Q$ -ветви расположена на расстоянии порядка  $B$  и вызываемый ею сдвиг частоты на два—три порядка меньше, чем вычисленный по формуле (13).

в) Случай  $P$ -ветви (переход  $v=1, J \rightarrow v=0, J-1$ ). Частота перехода определяется формулой

$$\nu_P = \nu_0 + 2B(J_0+1) - \Delta B J_0 (J_0+1). \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что при всех значениях  $J$   $\nu_Q < \nu_0$ ,  $\nu_R > \nu_0$ , в то время как  $\nu_P > \nu_0$  при оптимальных значениях  $J_0 = (kT/2hB)^{1/2}$ . Поэтому для любого перехода  $P$ -ветви нет линий, отстоящих по частоте ближе, чем на величину  $B$ . Это обстоятельство обуславливает значительно меньший сдвиг частоты генерации при использовании  $P$ -, чем  $Q$ -ветви:

$$\Delta\nu \sim 1 \text{ Гц}.$$

Отсюда ясно, что переходы  $R$ - или  $P$ -ветвей вращательно-колебательных переходов молекул для создания стандарта частоты имеют существенное преимущество перед  $Q$ -ветвью.

Если же иметь в виду максимально достижимую стабильность частоты с помощью пучкового лазера, то следует ориентироваться на пучки атомов с простой структурой спектральной линии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. Shimoda, Estratta da Rendiconti della Scuola Internationale di Fisica „E. Fermi“, XXXI Corso.
2. Р. В. Амбарцумян, Н. Г. Басов, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ, 3, № 6, 262 (1966).
3. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, В. А. Щеглов, Письма в ЖЭТФ, 4, № 2, 61 (1966).
4. K. G. Anlauf, D. H. Maylotte, P. D. Racey, J. C. Polanyi, Phys. Lett., 24A, № 4, 208 (1967).
5. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ, 2, № 1, 6 (1965).
6. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
7. K. Shimoda, T. C. Wang, C. H. Townes, Phys. Rev., 102, № 5, 1203 (1956).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
21 августа 1967 г.

#### BEAM LASER AS A FREQUENCY STANDARD

A. N. Oraevskii

The possibilities of constructing a beam laser in an optical range are considered. The wavelength limitations and minimum probability of transition followed from the technical conditions and the required frequency stability are pointed out. The  $R$ - and  $P$ -branches of rotating-oscillating transitions in molecules are shown to have an advantage as compared with  $Q$ -branch from the viewpoint of the frequency stability.

УДК 621.378.3

## К ВОПРОСУ О СУЖЕНИИ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ЛАЗЕРЕ С БЕЗЫНЕРЦИОННЫМ ПРОСВЕТЛЯЮЩИМСЯ ФИЛЬТРОМ

*Т. И. Кузнецова*

Рассматривается развитие генерации из начального слабого поля в одномерном резонаторе, содержащем активный элемент, работающий в линейном режиме, и нелинейно поглощающий элемент, безынерционный по отношению к низкочастотным изменениям поля. Показано, что сокращение длительности исходного светового импульса происходит тем эффективнее, чем ближе коэффициент усиления к пороговой величине.

В настоящее время рядом авторов ведутся работы по изучению самосинхронизации мод в лазере с просветляющимся фильтром [1–4], причем экспериментальные исследования направлены на получение световых импульсов минимальных длительностей ( $\sim 10^{-13}$  сек). В работе [3] самосинхронизация излучалась не только экспериментально, но и теоретически. Были найдены фазовые соотношения для спектральных компонент поля, обусловливающие минимальное поглощение поля в фильтре. Однако вопрос о том, как усилование оптимальных фазовых соотношений протекает во времени, в [3] не рассматривался. Учет нестационарности безусловно позволил бы составить более четкое представление о процессе связывания мод при взаимодействии их с нелинейным веществом фильтра.

Здесь будет рассмотрена нестационарная задача для поля и просветляющегося фильтра, описывающая некоторые черты явления самосинхронизации.

Рассмотрим одномерную модель лазера. Пусть имеется плоско-параллельный резонатор с координатами зеркал  $x = 0, L$ . Представим поле излучения в виде

$$E = \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} [A(x, t) e^{ikx} + B(x, t) e^{-ikx}] \},$$

где  $k$  — волновое число одной из четных мод резонатора,  $\omega$  — частота этой моды.

Предположим, что нелинейно поглощающее вещество (фильтр) занимает область  $0 < x < l$ . В экспериментальных исследованиях, как правило, фильтр располагается именно таким образом — в непосредственной близости от одного из зеркал. Примем упрощение, часто используемое в литературе при описании просветляющихся фильтров: будем считать поглощающее вещество двухуровневым. Кроме того, допустим, что релаксационные процессы, влияющие на заселенности рабочей пары уровней фильтра, происходят быстрее, чем характерные изменения  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$ . При этом разность заселенностей  $N$  следит за мгновенными значениями  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$  и имеет вид

$$N = N_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} |A(x, t) e^{ikx} + B(x, t) e^{-ikx}|^2 \right]^{-1}. \quad (1)$$

(Для удобства записи мы считаем, что поле выражается в единицах, определяющих насыщение в фильтре.) По-видимому, в двухуровневой схеме конечная скорость процессов релаксации, приводящая к запаздыванию отклика фильтра на поле, могла бы лишь препятствовать сокращению импульсов.

Пусть в области  $x_1 < x < x_2$  находится активная среда. Как известно, в лазерах с просветляющимся фильтром нелинейность усиления проявляется при больших интенсивностях, чем нелинейность поглощения. Мы здесь будем считать усиление линейным. При таком подходе, разумеется, мы можем описать лишь некоторую начальную стадию развития генерации. Предположим также, что ширина линии усиления значительно превосходит спектральную ширину поля. Тем самым мы отказываемся от учета каких-либо искажений поля из-за активной среды. Однако на основании экспериментальных данных [3] можно считать, что активная среда действительно играет второстепенную роль в процессе самосинхронизации по сравнению с поглощающей средой.

Предположим, что фазовая скорость волн в резонаторе и коэффициенты отражения зеркал не зависят от частоты в рассматриваемом спектральном интервале. При этом граничные условия для поля на зеркалах запишем в виде

$$A(0, t) + R_1 B(0, t) = 0; \quad (2)$$

$$A(L, t) + R_2 B(L, t) = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты отражения  $R_1$  и  $R_2$  — положительные константы. Эти предположения о резонаторе, а также сформулированные выше допущения о свойствах активного вещества и поглощающего вещества позволяют нам рассматривать поле, не прибегая к разложению его на спектральные компоненты.

Перейдем к выводу уравнений для поля. Укороченные уравнения, описывающие изменение функций  $A$  и  $B$  в нелинейной среде фильтра, можно вывести из уравнений Максвелла, учитывая (1) и используя изложенный в [5-7] метод усреднения. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} &= -\frac{a}{2} \frac{k}{2\pi} \int_x^{x+2\pi/k} \left[ 1 + \frac{1}{4} |A(x, t) e^{ik\xi} + B(x, t) e^{-ik\xi}|^2 \right]^{-1} \times \\ &\quad \times [A(x, t) + B(x, t) e^{-2ik\xi}] d\xi, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} &= -\frac{a}{2} \frac{k}{2\pi} \int_x^{x+2\pi/k} \left[ 1 + \frac{1}{4} |A(x, t) e^{ik\xi} + B(x, t) e^{-ik\xi}|^2 \right]^{-1} [A(x, t) e^{2ik\xi} + B(x, t)] d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $a$  — коэффициент поглощения слабого поля (по интенсивности) на единице длины фильтра.

Будем считать, что в течение того времени, за которое волны проходят длину фильтра, функции  $A$  и  $B$  изменяются мало:

$$\frac{l}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{1}{A} \ll 1, \quad \frac{l}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{1}{B} \ll 1.$$

В таком случае в качестве решения уравнений (4) можно взять решение стационарной задачи [7], т. е. принять, что зависимость  $A$  и  $B$  от  $x$  определяется из соотношений

$$\sqrt{1 + (A+B)^2} - \sqrt{1 + (A-B)^2} = \text{const},$$

$$ax + A^2 - B^2 +$$

$$+ \ln \frac{(A+B)[\sqrt{1 + (A-B)^2} + 1] + (A-B)[\sqrt{1 + (A+B)^2} + 1]}{(A+B)[\sqrt{1 + (A-B)^2} + 1] - (A-B)[\sqrt{1 + (A+B)^2} + 1]} = \text{const}, \quad (5)$$

а зависимость  $A$  и  $B$  от  $t$  связана только с тем, что граничные условия для  $A$  и  $B$  при  $x = l$  зависят от времени.

Для краткости мы не будем приводить уравнения для  $A$  и  $B$  в области  $x > l$ , т. е. в той части резонатора, где среда линейна. Нетрудно убедиться, что при  $x > l$  функции  $A$  и  $B$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A(x, t) &= \psi \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ B(x, t) &= \varphi \left( t + \frac{x}{c} \right) \end{aligned} \right\} \quad l < x < x_1,$$

$$\left. \begin{aligned} A(x, t) &= \exp [b/2(x - x_1)] \psi \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ B(x, t) &= \exp [-b/2(x - x_1)] \varphi \left( t + \frac{x}{c} \right) \end{aligned} \right\} \quad x_1 < x < x_2, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} A(x, t) &= \exp [b/2(x_2 - x_1)] \psi \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ B(x, t) &= \exp [-b/2(x_2 - x_1)] \varphi \left( t + \frac{x}{c} \right) \end{aligned} \right\} \quad x_2 < x < L.$$

Здесь  $b$  — коэффициент усиления (по интенсивности) на единице длины активной среды.

Учитывая условие на зеркале (3) и требуя непрерывности  $A$  и  $B$  при  $x = l$ , получаем из (6)

$$\psi(t) = \psi \left( t - \frac{2L}{c} \right) R_2 \exp [b(x_2 - x_1)] \frac{A(l, t)}{B(l, t)}. \quad (7)$$

Здесь отношение  $\frac{A(l, t)}{B(l, t)}$  определяется из формул (5), условия  $A(l, t) = \psi(t)$  и условия на зеркале (2).

Уравнение (7) связывает значения амплитуды волны в моменты времени, отстоящие на время  $\frac{2L}{c}$ , за которое волна дважды проходит длину резонатора. Подчеркнем, что точки профиля волны, отстоящие во времени на величину, не кратную  $\frac{2L}{c}$ , никак между собой не взаимодействуют, т. е. каждый элемент профиля волны усиливается независимо от остальных. Это является следствием наших предположений о безынерционности фильтра и о малой его протяженности  $l$ .

При решении уравнения (7) ограничимся рассмотрением случая, когда

$$al \ll 1; \quad (8)$$

$$1 - R_1 \ll 1; \quad (9)$$

$$\exp [b/2(x_2 - x_1)] R_2 - 1 \ll 1. \quad (10)$$

Эти условия могут выполняться в экспериментах по самосинхронизации, и, в частности, они осуществлялись в [3]. Неравенство (8) позволяет найти явное выражение  $\frac{A(l, t)}{B(l, t)}$  через  $\psi(t)$ ; при условии (9) оно имеет наиболее простой вид:

$$\frac{A(l, t)}{B(l, t)} = R_1 - 2al \left\{ 1 + [\psi(t)]^2 + \sqrt{1 + [\psi(t)]^2} \right\}^{-1}. \quad (11)$$

Из (7) — (10) следует, что при двукратном проходе резонатора профиль волны изменяется мало, т. е. функция  $\psi(t)$  является квазипериодической с периодом  $2L/c$ . Нетрудно видеть, что условия (8) — (10) позволяют преобразовать разностное уравнение (7) в дифференциальное. Для этого преобразования введем вместо аргумента  $t$  два новых аргумента  $t'$  и  $\tau$ :

$$\begin{aligned} t &= t' - \tau, \\ 0 &< \tau < \frac{2L}{c}, \\ t' &= m \frac{2L}{c}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Аргумент  $\tau$  характеризует положение момента времени внутри периода,  $t'$  указывает на то, сколько раз волна прошла двукратное расстояние между зеркалами. Введем также новую функцию

$$y(\tau, t') \equiv [\psi(t)]^2 \quad (13)$$

и новые обозначения для констант

$$\begin{aligned} \alpha &= a \frac{l}{L} c, \\ \beta &= [R_1 R_2 \exp [b(x_2 - x_1)] - 1] \frac{c}{L}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (7) — (11) при учете (12) — (14) следует

$$\frac{dy}{dt'} = \beta y - \alpha y \frac{2}{1 + y + \sqrt{1 + y}}. \quad (15)$$

Начальные условия,  $y(0, t')$ , легко определить из (6) по заданному распределению  $A(x, 0)$ ,  $B(x, 0)$ . Но, поскольку интенсивность поля на выходе лазера пропорциональна, очевидно,  $[\psi(t)]^2 = y(\tau, t')$ , в дальнейшем нам удобнее будет говорить о распределении выходного сигнала в течение некоторого периода длительностью  $2L/c$ , принятого за начальный.

Интегрируя уравнение (15), находим

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha) t' = & \left[ \ln (\sqrt{1 + y} - 1) + \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \ln (1 + y + \sqrt{1 + y} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\alpha}{\beta} \right) + \frac{1/2 + \alpha/\beta}{\sqrt{1 + 8\alpha/\beta}} \ln \frac{2\sqrt{1 + y} + 1 + \sqrt{1 + 8\alpha/\beta}}{2\sqrt{1 + y} + 1 - \sqrt{1 + 8\alpha/\beta}} \right]_0^{t'}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) легко получить две области значений интенсивности, при которых происходит усиление с постоянным коэффициентом. При слабых полях, когда  $y \ll \frac{\beta - \alpha}{\beta}$ , интенсивность поля нарастает как  $\exp[(\beta - \alpha)t']$ , т. е. эффект просветления фильтра пренебрежимо мал. Напротив, в очень сильных полях, при  $\sqrt{y} \gg 1$ , фильтр полностью прозрачен, и интенсивность нарастает как  $\exp(\beta t')$ . В промежуточной области значений интенсивности коэффициент усиления изменяется от  $\beta - \alpha$  до  $\beta$ .

Из (16) можно вывести более простую формулу, связывающую области малых и больших интенсивностей. Полагая

$$y(\tau, 0) \ll \frac{\beta - \alpha}{\beta}, \quad \sqrt{y(\tau, t')} \gg 1, \quad (17)$$

приведем (16) к виду

$$y(\tau, t') = [y(\tau, 0)]^{\beta/(\beta-\alpha)} e^{\beta t'} 2^{\frac{\beta/2+\alpha}{\beta-\alpha}} \left( \frac{\beta - \alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta/2-\alpha}{\beta-\alpha}} \times \\ \times \left( \frac{3 + \sqrt{1 + 8\alpha/\beta}}{3 - \sqrt{1 + 8\alpha/\beta}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha/\beta}}} \frac{\beta/2+\alpha}{\beta-\alpha}. \quad (18)$$

Отсюда можно определить время, в течение которого происходит переход от малых к большим интенсивностям. Учитывая (17), условимся за начало этого отрезка времени выбирать такой момент, когда  $y(\tau, t'_1) = 0,1 \frac{\beta - \alpha}{\beta}$ , а за конец — момент, при котором  $y(\tau, t'_2) = 100$ .

Определенный таким образом промежуток времени, в течение которого проявляются нелинейные свойства фильтра, естественно назвать временем просветления. Если положим, например, что величина  $al$  — поглощение на длине фильтра в линейном режиме — составляет 20 %, а величина  $\frac{\beta - \alpha}{\beta}$  — превышение усиления над порогом — равняется 10 %, то

получим для времени просветления  $t'_{\text{просв}} = \frac{2L}{c} 30$  (здесь время просветления выражено через время  $2L/c$ , за которое волна дважды проходит длину резонатора). Если же считать  $al = 20\%$ ,  $\frac{\beta - \alpha}{\beta} = 1\%$ , то

$$t'_{\text{просв}} = \frac{2L}{c} 150.$$

Обратимся к вопросу о том, какие изменения профиля волны происходят при просветлении, т. е. как деформируется функция  $y(\tau)$  при многократном прохождении через систему. Как следует из (18), отношение интенсивностей в двух участках профиля после просветления будет равняться исходному отношению, возведенному в степень  $\frac{\beta}{\beta - \alpha}$ :

$$\frac{y(\tau_1, t')}{y(\tau_2, t')} = \left[ \frac{y(\tau_1, 0)}{y(\tau_2, 0)} \right]^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}. \quad (19)$$

Таким образом, если в исходном распределении имелось несколько максимумов, то параметр  $\frac{\beta}{\beta - \alpha}$  будет определять, в какой мере более слабые максимумы подавляются в процессе просветления. Если, например, превышение усиления над порогом составляет 1%, т. е.  $\frac{\beta}{\beta - \alpha} = 100$ , то отличия двух максимумов на 0,025 достаточно для того, чтобы в окончательном распределении эти максимумы отличались в 10 раз.

Из (19) также видно, что, если начальное распределение в окрестности точки  $\tau_1$  имеет вид куполообразной функции с шириной  $h_0$ ,

$$y(\tau, 0) = y(\tau_1, 0) - \left( \frac{\tau - \tau_1}{h_0} \right)^2,$$

то после просветления ширина его будет равняться

$$h = h_0 \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta}}. \quad (20)$$

При превышении усиления над порогом на 1% ширина, как видно из (20), будет в результате просветления уменьшаться в 10 раз.

Таким образом, параметр  $\frac{\beta - \alpha}{\beta}$  — относительное превышение усиления над порогом — оказывается весьма существенным параметром, определяющим, насколько сужаются световые импульсы при просветлении фильтра. Чем ближе усиление к пороговому, тем более узких импульсов можно ожидать. При рассмотренных величинах параметра  $\frac{\beta - \alpha}{\beta}$ , означающих, что близость коэффициента усиления к пороговому контролируется не с очень высокой точностью, в нашей модели получается весьма небольшое сужение световых импульсов.

В заключение остановимся на более наглядном выводе зависимости сужения импульсов от параметра  $\frac{\beta - \alpha}{\beta}$ . Напомним, что в рассматриваемой нами модели любой участок начального профиля поля изменяется независимо от остальных. Пусть значения исходной функции  $y(\tau, 0)$  в двух точках  $\tau_1$  и  $\tau_2$  таковы, что  $y(\tau_1, 0) < y(\tau_2, 0)$ . В процессе усиления  $y(\tau_1, t')$  сначала достигнет значения  $y(\tau_2, 0)$ , а затем будет повторять ход зависимости от  $t'$  величины  $y(\tau_2, t')$  с некоторым сдвигом во времени  $\Delta t'$ . Если в начальный момент поле было достаточно слабым, то этот сдвиг определяется из условия

$$y(\tau_1, 0) \exp [(\beta - \alpha) \Delta t'] = y(\tau_2, 0). \quad (21)$$

В дальнейшем, при  $t' > \Delta t'$  всегда будет выполняться соотношение

$$y(\tau_1, t') = y(\tau_2, t' - \Delta t'). \quad (22)$$

В пределе при достаточно больших значениях  $t'$ , когда достигнуты интенсивности, полностью просветляющие фильтр, имеет место равенство

$$y(\tau_2, t') = y(\tau_2, t' - \Delta t') \exp (\beta \Delta t'). \quad (23)$$

Объединяя (22) и (23) и находя  $\Delta t'$  из (21), получаем

$$y(\tau_1, t') = y(\tau_2, t') \exp(-\beta \Delta t') = y(\tau_2, t') \left[ \frac{y(\tau_1, 0)}{y(\tau_2, 0)} \right]^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}},$$

что представляет собой полученное ранее соотношение (19).

Таким образом, хотя полное описание развития генерации удается провести при условии, что поле изменяется медленно по сравнению с временем  $2L/c$ , выводы о деформации начального распределения следуют только лишь из предположения о безынерционности фильтра (по отношению к низкочастотным изменениям поля). Поэтому вывод об ограниченной эффективности сужения начального импульса справедлив не только при малых, но и при больших коэффициентах поглощения фильтра.

В рассмотренной здесь схеме эффективное сужение обеспечивается лишь при условии, что коэффициент усиления близок к пороговому.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. J. De Maria, D. A. Stetser, Н. Неупаи, Appl. Phys. Letter, 8, 174 (1966).
2. D. A. Stetser, A. J. De Maria, Appl. Phys. Letter, 9, 118 (1966).
3. Т. И. Кузнецова, В. И. Малышев, А. С. Маркин, ЖЭТФ, 52, 438 (1967).
4. J. A. Armstrong, Appl. Phys. Letter, 10, 16 (1967).
5. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, ЖЭТФ, 43, 1897 (1962).
6. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, 46, 962 (1964).
7. Т. И. Кузнецова, Э. Г. Раутиан, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 4, 682 (1964).

Физический институт АН СССР

Поступила в редакцию  
28 августа 1967 г.

#### ON LIGHT PULSE NARROWING IN LASER WITH AN INERTIALESS BLEACHABLE ABSORBER

*T. I. Kouznetsova*

The author considers the development of generation from the original weak field in one-dimensional resonator containing an active element operating in a linear regime and nonlinearly absorbing element inertialess relative to the low-frequency field variations. The duration shortening of the original light pulse is shown to take place the more effectively, the more close the amplification factor is to the threshold value.

УДК 621.375.7 — 621.3.089.52

## О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИЕМНИКА ТИПА СЧЕТЧИКА ЧИСЛА ВЫБРОСОВ

*B. A. Маркелов*

Оценивается чувствительность приемника, работающего по методу счета числа выбросов огибающей или фазы принятого сигнала. Прием сигнала осуществляется на фоне периодически нестационарного шума, что имеет место, если в качестве усилителя в приемной системе применен параметрический усилитель.

При большой величине требуемого времени обнаружения сигнала иногда более удобным оказывается использование дискретного накопления вместо обычно применяемого непрерывного. В этом случае принятая смесь сигнала с шумом тем или иным способом превращается в некоторую цифровую последовательность, которая суммируется счетчиком. Такая операция может быть осуществлена, например, при помощи квантования сигнала на несколько дискретных уровней. В простейшем случае уровней только два (бинарное накопление) — квантующее устройство периодически сравнивает огибающую принятого напряжения с некоторым порогом и выдает последовательность нулей и единиц (например, единицу, если огибающая превышает порог, нуль — если нет). Несмотря на наличие только одного порога, бинарный накопитель при приеме шумового сигнала, как показано в [1, 2], очень мало отличается по чувствительности от оптимального приемника.

Другим возможным способом дискретного накопления сигнала является суммирование числа выбросов принятого напряжения над определенным фиксированным уровнем. Приемник, работающий по такому принципу, описан, например, в [3]. По оценкам авторов, его чувствительность (для синусоидального сигнала) может быть сравнима с чувствительностью оптимального амплитудного обнаружителя.

Целью данной работы является рассмотрение приемника, осуществляющего обнаружение слабого сигнала (как синусоидального, так и шумового) путем счета числа выбросов огибающей или фазы суммы сигнала и шума. Сигнал и шум проходят предварительно через некоторую узкополосную линейную систему с периодически меняющимися в общем случае параметрами. В качестве такой системы здесь для простоты рассматривается одноконтурный параметрический усилитель (ПУ), работающий в вырожденном режиме, хотя это могут быть и некоторые другие более сложные системы.

### 1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Оценка чувствительности приемника будет производиться по величине отношения сигнал/шум (на выходе счетчика выбросов), для чего из статистических свойств выбросов достаточно знание среднего и дисперсии числа выбросов. Как известно [4], среднее число выбросов некоторого процесса  $\xi(t)$  за время  $T$  на уровне  $\xi_0$  равно

$$\langle N_{\xi_0}(T) \rangle = \int_0^T dt \int_0^\infty \dot{\xi} W(\xi_0, \dot{\xi}) d\dot{\xi}, \quad (1)$$

где  $W(\xi, \dot{\xi})$  — совместная плотность вероятности процесса и его производной, а дисперсия числа выбросов

$$D_{\xi_0}(T) = \langle N_{\xi_0}(T) \rangle - \langle N_{\xi_0}(T) \rangle^2 + \int_0^T \int_0^T S(t_1 t_2) dt_1 dt_2. \quad (2)$$

$$\text{Здесь } S(t_1 t_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{\xi}(t_1) \dot{\xi}(t_2) W[\xi_0, \dot{\xi}(t_1), \xi_0 \dot{\xi}(t_2)] d\dot{\xi}(t_1) d\dot{\xi}(t_2); \quad W[\xi_1 \dot{\xi}_1 \xi_2 \dot{\xi}_2]$$

— четырехмерная плотность вероятности процесса и его производной в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ ; косые скобки означают статистическое усреднение.

Для многих типов случайных процессов среднее число выбросов находится сравнительно легко; расчет для огибающей и фазы периодически нестационарного процесса приведена в [5]. Вычисление дисперсии — значительно более сложная задача. Однако в данном случае можно воспользоваться тем обстоятельством, что время наблюдения  $T$  существенно превышает время корреляции  $\tau_{\text{кор}}$  шума на выходе ПУ (сигнал слабый), и приближенно положить

$$D_{\xi_0}(T) \simeq \langle N_{\xi_0}(T) \rangle. \quad (3)$$

Действительно, при  $|t_1 - t_2| \gg \tau_{\text{кор}}$

$$S(t_1 t_2) \simeq \int_0^\infty \dot{\xi}(t_1) W[\xi_0 \dot{\xi}(t_1)] d\dot{\xi}(t_1) \int_0^\infty \dot{\xi}(t_2) W[\xi_0 \dot{\xi}(t_2)] d\dot{\xi}(t_2). \quad (4)$$

Если  $S(t_1 t_2)$  не имеет особенности при  $|t_1 - t_2| \rightarrow 0$ , то

$$\int_0^T \int_0^T S(t_1 t_2) dt_1 dt_2 \simeq \left\{ \int_0^T dt \int_0^\infty \dot{\xi} W(\xi_0 \dot{\xi}) d\dot{\xi} \right\}^2 = \langle N_{\xi_0}(T) \rangle^2, \quad (5)$$

поскольку вкладом в двойной интеграл области  $|t_1 - t_2| \sim \tau_{\text{кор}}$  при больших  $T$  можно пренебречь. Подстановка (5) в (2) и приводит к (3).

Для стационарного нормального процесса соотношение (5) выполняется (см. [6]). В рассматриваемом случае, для огибающей фазы периодически нестационарного нормального процесса, как показали численные расчеты, (5) становится справедливым уже при  $T > (5 \div 10) \tau_{\text{кор}}$ .

Учитывая (3), отношение сигнал/шум на выходе счетчика выбросов запишем в виде

$$(S/N)_{\text{вых}} = \frac{|\langle N_{\xi_0}(T) \rangle_{s+n} - \langle N_{\xi_0}(T) \rangle_n|}{\sqrt{D_{\xi_0}(T)}} = \frac{\langle \Delta N_{\xi_0}(T) \rangle}{\sqrt{\langle N_{\xi_0}(T) \rangle}}, \quad (6)$$

где индексы  $s$  и  $n$  означают сигнал и шум соответственно\*.

## 2. ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ ДЛЯ СЧЕТЧИКА ВЫБРОСОВ ОГИБАЮЩЕЙ

Пусть на вход ПУ поступает смесь принимаемого сигнала и шума, причем шум обладает равномерным в пределах полосы пропускания ПУ спектром. Запишем процесс на выходе ПУ в виде  $x(t) = E(t) \cos [\omega_0 t + \psi(t)]$ , где  $E(t)$  и  $\psi(t)$  — огибающая и фаза,  $\omega_0$  — середина полосы

\* Сигнал практически не влияет на величину дисперсии.

пропускания системы, совпадающая в данном случае с половиной частоты накачки ПУ. Рассмотрим три типа сигналов: синусоидальный, шумовой узкополосный (квазисинусоидальный) и шумовой широкополосный.

а) *Синусоидальный сигнал  $A \cos(\omega_0 t + \theta)$ , где  $A$  и  $\theta$  постоянны ( $\theta$  отсчитывается по отношению к фазе накачки).* Воспользовавшись результатами работы [5], среднее число выбросов огибающей  $E(t)$  над уровнем  $E_0$  за время  $T$  представим в виде

$$\begin{aligned} \langle N_p(T) \rangle &= \frac{\Omega T}{V\pi} \frac{\rho}{V\sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left(-\frac{a^2(1+\gamma \cos 2\theta)}{1+\gamma^2}\right) \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\left[\frac{\rho^2(1-\gamma \cos 2\psi)}{1-\gamma^2} - \frac{2\rho a \cos(\psi-\theta)}{V\sqrt{1+\gamma^2}}\right]\right\} d\psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\rho^2 = \frac{E_0^2}{\langle E^2 \rangle}$ ,  $\langle E^2 \rangle$  — средний квадрат огибающей при  $A = 0$ ;  $a = \frac{A}{V2\sigma}$ ,  $\sigma^2$  — мощность шума на входе в полосе пропускания ПТУ\*,  $\gamma$  — коэффициент нестационарности процесса, определяемый в данном случае уровнем накачки ПУ ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ;  $\gamma = 0$  соответствует стационарному процессу);  $\Omega$  — среднеквадратичная ширина спектра процесса, равная  $\Omega^2 = \int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 G(\omega) d\omega / \left(\int_0^\infty G(\omega) d\omega\right)^2$ ,  $G(\omega)$  — спектральная плотность средней мощности процесса.

При  $a = 0$

$$\langle N_p(T) \rangle = \frac{\Omega T}{V\pi} \frac{\rho}{V\sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1-\gamma^2}\right) I_0\left(\frac{\gamma\rho^2}{1-\gamma^2}\right). \quad (8)$$

Здесь и ниже  $I_n(z)$  — функция Бесселя мнимого аргумента. Приращение среднего числа выбросов под влиянием слабого сигнала, согласно (7), равно

$$\langle \Delta N_p(T) \rangle = \langle N_p(T) \rangle \left\{ \rho^2 \left[ 1 + \cos 2\theta \frac{I_1\left(\frac{\gamma\rho^2}{1-\gamma^2}\right)}{I_0\left(\frac{\gamma\rho^2}{1-\gamma^2}\right)} \right] - (1 + \gamma \cos 2\theta) \right\} \frac{a^2}{1+\gamma^2}. \quad (9)$$

Наибольшее приращение числа выбросов вызывает сигнал с фазами  $\theta = 0, \pi$ ; для этого случая и вычислим отношение сигнал/шум. Подставляя (8) и (9) в (6), получаем

$$(S/N)_{\text{вых}} = \sqrt{\langle N_p(T) \rangle} \left| \rho^2 + \frac{I_1\left[\frac{\gamma\rho^2}{1-\gamma^2}\right]}{I_0\left[\frac{\gamma\rho^2}{1-\gamma^2}\right]} - (1 + \gamma) \right| \frac{(S/N)_{\text{вх}}^2}{1+\gamma^2}, \quad (10)$$

где  $(S/N)_{\text{вх}} = a$ . Как показывают вычисления, максимальные значения  $(S/N)_{\text{вых}}$  (достигаемые в зависимости от  $\gamma$  при  $\rho = 1,8 \div 2$ ) равны

\* Имеется в виду эффективная полоса.

$$(S/N)_{\text{вых max}} = 0,5 \sqrt{\Omega T} (S/N)_{\text{вх}}^2 \quad (\gamma = 0); \quad (11a)$$

$$(S/N)_{\text{вых max}} = 0,67 \sqrt{\Omega T} (S/N)_{\text{вх}}^2 \quad (\gamma = 1). \quad (11b)$$

Чтобы придать формулам (11 а) и (11 б) более привычный вид, положим в них  $\Omega = \frac{\Delta_{\text{вх}}}{\sqrt{2\pi}}$  и  $T = \pi/\Delta_{\text{вых}}$ , где  $\Delta_{\text{вх}}$  — эффективная ширина полосы пропускания ПУ, а  $\Delta_{\text{вых}}$  — выходного интегрирующего (идеального) фильтра\*:

$$(S/N)_{\text{вых max}} = 0,55 \sqrt{\Delta_{\text{вх}}/\Delta_{\text{вых}}} (S/N)_{\text{вх}}^2 \quad (\gamma = 0); \quad (12a)$$

$$(S/N)_{\text{вых max}} = 0,75 \sqrt{\Delta_{\text{вх}}/\Delta_{\text{вых}}} (S/N)_{\text{вх}}^2 \quad (\gamma = 1). \quad (12b)$$

б) *Квазисинусоидальный сигнал (с медленно меняющимися амплитудой и фазой).* Предположим сначала, что амплитуда сигнала  $A$  постоянна, а меняется только фаза (медленно по сравнению с  $\Delta_{\text{вх}}^{-1}$ ). Усредняя в (9) по  $\theta$ , получим

$$(S/N)_{\text{вых}} = \sqrt{\langle N_p(T) \rangle} (\rho^2 - 1) \frac{(S/N)_{\text{вх}}^2}{1 + \gamma^2}, \quad (13)$$

откуда

$$(S/N)_{\text{вых max}} = 0,37 \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} (S/N)_{\text{вх}}^2 \quad (\gamma = 1). \quad (14)$$

При  $\gamma = 0$  выражение для  $(S/N)_{\text{вых}}$  совпадает с (12 а). Максимум  $(S/N)_{\text{вых}}$  достигается примерно при тех же значениях  $\rho$ , что и в предыдущем случае. Флуктуации амплитуды сигнала не меняют существенно результата, требуется только  $A$  заменить на  $\sqrt{\langle A^2 \rangle}$ .

в) *Сигнал шумовой широколосный.* Пусть наличие сигнала вызывает возрастание среднего квадрата огибающей на величину  $\langle \Delta E^2 \rangle$ . Как следует из (7) (при  $a = 0$ ), это приводит к приращению среднего числа выбросов, равному

$$\langle \Delta N_p(T) \rangle = \langle N_p(T) \rangle \left\{ \frac{\rho^2}{1 - \gamma^2} \left[ 1 - \gamma \frac{I_1 \left( \frac{\gamma \rho^2}{1 - \gamma^2} \right)}{I_0 \left( \frac{\gamma \rho^2}{1 - \gamma^2} \right)} \right] - 1 \right\} \frac{(S/N)_{\text{вх}}^2}{2}, \quad (15)$$

где

$$(S/N)_{\text{вх}}^2 = \frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{\langle E^2 \rangle}.$$

Отсюда

$$(S/N)_{\text{вых max}} = 0,7 \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} (S/N)_{\text{вх}}^2 \quad (\gamma = 0); \quad (16a)$$

$$(S/N)_{\text{вых max}} = 0,44 \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} (S/N)_{\text{вх}}^2 \quad (\gamma = 1). \quad (16b)$$

Сравним чувствительность рассматриваемого приемника с оптимальным\*\*; для данного типа сигнала это будет квадратичный детектор

\* Выражение для  $\Omega$  строго справедливо лишь для гауссовой формы спектра, в остальных случаях оно может служить лишь оценкой.

\*\* Здесь и в дальнейшем понимается оптимальность в смысле какого-либо из критериев отношения правдоподобия.

(совместно с согласованным фильтром на входе и идеальным интегратором на выходе). Логарифм отношения правдоподобия, формируемый оптимальным приемником, при большой величине времени наблюдения можно считать распределенным нормально. Это позволяет оценить его чувствительность для слабого сигнала по величине  $(S/N)_{\text{вых}}$ , определив ее как отношение приращения среднего значения логарифма правдоподобия, вызванного сигналом, к корню квадратному из его (логарифма) дисперсии. Нетрудно показать, что для квадратичного детектора

$$(S/N)_{\text{вых}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} (S/N)_{\text{вх}}^2, \quad (17)$$

где  $\Delta_{\text{вх}}$  и  $\Delta_{\text{вых}}$  — полосы пропускания фильтров до и после детектора соответственно\*.

Как видно, при приеме широкополосного шумового сигнала приемник, считающий выбросы огибающей, имеет практически такую же чувствительность, что и приемник с квадратичным детектором. Использование как в том, так и в другом ПУ приводит к ухудшению чувствительности примерно в 1,5 раза\*\*.

### 3. ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ ДЛЯ СЧЕТЧИКА ВЫБРОСОВ ФАЗЫ

Среднее число выбросов фазы  $\psi(t)$  процесса на выходе ПУ в отсутствие сигнала, согласно [5], равно

$$\langle N_{\psi_0}(T) \rangle = \frac{\Omega T}{4\pi} (1 - \gamma \cos 2\psi_0)^{-1/2}. \quad (18)$$

Из полученных там же результатов нетрудно найти приращение  $\langle N_{\psi_0}(T) \rangle$  под воздействием слабого синусоидального сигнала:

$$\langle \Delta N_{\psi_0}(T) \rangle = \langle N_{\psi_0}(T) \rangle \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}} \frac{\cos(\psi_0-\theta)}{\sqrt{1-\gamma \cos 2\psi_0}} a - \frac{(1+\gamma \cos 2\theta)}{1+\gamma^2} a^2 \right\}. \quad (19)$$

Рассмотрим два случая.

а) *Синусоидальный сигнал постоянной фазы.* Пусть  $\theta = 0$ . Тогда из (6) и (19) получим, пренебрегая членом с  $a^2$ ,

$$(S/N)_{\text{вых}} = \sqrt{\langle N_{\psi_0}(T) \rangle} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}} \frac{|\cos \psi_0| (S/N)_{\text{вх}}}{\sqrt{1-\gamma \cos 2\psi_0}}. \quad (20)$$

Максимум (20) достигается при  $\psi_0 = 0, \pi$ , причем

$$(S/N)_{\text{вых max}} = \frac{\sqrt{\Omega T}}{\pi} \frac{(1+\gamma)^{1/2} (1+\gamma^2)^{-1/2}}{(1-\gamma)^{1/4}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}} \simeq \frac{0,36}{(1-\gamma)^{1/4}} \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}. \quad (21)$$

Как известно (см., например, [8]), для оптимального фазового приемника синусоидального сигнала (прием осуществляется на фоне стационарного нормального шума) отношение сигнал/шум\*\*\* на выходе равно

\* В данном случае  $(S/N)_{\text{вых}}$  равно отношению приращения постоянной составляющей тока детектора, вызванного сигналом, к корню квадратному из дисперсии флюктуаций тока в полосе  $\Delta_{\text{вых}}$ .

\*\* О чувствительности системы ПУ + квадратичный детектор см. [7].

\*\*\*  $(S/N)_{\text{вых}}$  определено выше (см. рассуждения перед формулой (17)).

$$(S/N)_{\text{вых}} = \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}} \simeq \\ \simeq 0,88 \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}. \quad (22)$$

Здесь  $n$  — число независимых выборок шума и сигнала,  $\Delta_{\text{вх}}$  — эффективная ширина спектра шума.

Таким образом, при  $\gamma=0$  (в этом случае шум на выходе ПУ стационарен) рассматриваемый приемник уступает оптимальному в 2,5 раза по величине отношения сигнал/шум.

По мере увеличения  $\gamma$  как среднее число выбросов, так и  $(S/N)_{\text{вых}}$  неограниченно возрастают (при условии, что прочие входящие в (21) величины остаются неизменными)\*. Это объясняется тем, что полоса частот, фактически используемая приемной системой в нестационарном случае, значительно больше  $\Delta_{\text{вх}}^{**}$ .

б) *Синусоидальный сигнал с медленно меняющейся фазой.* После усреднения в (19) по фазе  $\theta$ , в результате чего пропадает член порядка  $a$ , получим, используя (6) и (18),

$$(S/N)_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{\Omega T}{4\pi}} \frac{(1+\gamma^2)^{-1}}{(1-\gamma \cos 2\psi_0)^{1/4}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}^2. \quad (23)$$

Очевидно, максимальное значение  $(S/N)_{\text{вых}}$

$$(S/N)_{\text{вых max}} = \sqrt{\frac{\Omega T}{4\pi}} \frac{(1+\gamma^2)^{-1}}{(1-\gamma)^{1/4}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}^2 \simeq \frac{0,32(1+\gamma^2)^{-1}}{(1-\gamma)^{1/4}} \sqrt{\frac{\Delta_{\text{вх}}}{\Delta_{\text{вых}}}} \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{вх}} \quad (24)$$

так же, как и в предыдущем случае, неограниченно возрастает при  $\gamma \rightarrow 1$ . При  $\gamma=0$  счетчик выбросов фазы уступает по чувствительности квадратичному детектору примерно в два раза.

Интересно отметить, что стохастический сигнал (с равномерно распределенной фазой) не изменяет функции распределения фазы смеси сигнала и шума, поэтому из нее (функции распределения) нельзя извлечь никакой информации о таком сигнале. В то же время путем измерения числа выбросов фазы можно, как видим, его обнаружить, если только он достаточно узкополосен (по сравнению с шумом).

### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

В статье рассмотрен приемник, работающий по методу счета числа выбросов огибающей или фазы принимаемого сигнала. При обнаружении случайного (широкополосного) сигнала счетчик выбросов огибающей почти эквивалентен по чувствительности приемнику с квадратичным детектором, оптимальному для сигналов такого типа. Чувствительность счетчика выбросов фазы в случае приема синусоидального сигнала примерно в 2,5 раза хуже чувствительности оптимального фазового обнаружителя.

Оценка чувствительности производилась по величине отношения сигнал/шум, что носит, вообще говоря, лишь качественный характер. Однако в рассмотренных случаях (синусоидальный и шумовой сигналы и большое время наблюдения) она совпадает с оценкой по строгим

\* Рост этот, однако, довольно медленный: при практически достижимых  $\gamma$  множитель  $(1-\gamma)^{-1/4}$  не превышает 2—3.

\*\* Причина расширения полосы, как можно показать, состоит в том, что при  $\gamma \approx 1$  существенно возрастает влияние крыльев кривой  $G(\omega)$  на число выбросов вблизи  $\psi_0=0, \pi$ .

статистическим критериям, поскольку одинаковые значения  $(S/N)_{\text{вых}}$  приведут (при одних и тех же порогах сравнения) к одинаковым ошибкам обнаружения, несмотря на различную структуру приемников.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. V. Harrington, Trans. IRE, IT-1, № 1, 1 (1955) (перевод в сб. Прием сигналов при наличии шума, ИЛ, М., 1960).
2. В. И. Бунимович, В. А. Морозов, Радиотехника и электроника, 7, 1873 (1962).
3. Н. И. Белоусов, Ю. С. Захаров, Изв. высш. уч. зав—Радиотехника, 8, 536 (1965).
4. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 9, 371 (1964).
5. В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 950 (1960).
6. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 9, 45 (1964).
7. В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 497 (1964).
8. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 августа 1967 г.

### ON SENSITIVITY OF ZERO CROSSING COUNTER RECEIVER

*V. A. Markelov*

The sensitivity of a receiver counting the envelope or phase zero crossings of the signal is estimated. The signal reception is realized against the background of periodically non-stationary noise that may occur if a parametric amplifier is used in the receiver.

УДК 621.391 822

## МАГНИТНЫЕ ШУМЫ В ТОНКИХ ПЕРМАЛЛОЕВЫХ ПЛЕНКАХ

*Н. Н. Колачевский, В. Г. Румянцев*

Экспериментально исследовано спектральное распределение магнитных шумов в однослоиных и двухслойных пленках, изготовленных испарением в вакууме сплава 79НМ, для различных амплитуд и частот перемагничивания. Установлено, что отношение сигнала к шуму в пленках существенно меньше соответствующего отношения в массивных материалах из того же сплава.

## ВВЕДЕНИЕ

Магнитным шумом обычно называют сплошную компоненту спектра мощности ЭДС индукции, возникающей в индикаторной катушке, которая навита на ферромагнитный образец, помещенный в периодически изменяющееся внешнее магнитное поле [1]. Можно считать установленным, что появление магнитного шума связано с флуктуационными, не повторяющимися в последовательных циклах перемагничивания процессами, происходящими при смещении междоменных границ [2]. Магнитный шум является важной характеристикой ферромагнитного образца, поскольку его интенсивность и спектральное распределение весьма чувствительны к незначительным изменениям макроскопической магнитной структуры и, следовательно, могут служить методом исследования процессов перемагничивания. С другой стороны, магнитный шум накладывает определенные ограничения на применение ферромагнитных сердечников в качестве чувствительных элементов в приборах, предназначенных для регистрации слабых сигналов. С этих точек зрения представляет интерес исследование магнитных шумов в тонких ферромагнитных пленках. Большинство реальных пленок, полученных путем конденсации испаренного материала на подложку в вакууме, обладает достаточно сложной доменной структурой в малых полях, и процессы смещения границ вносят значительный вклад в общее изменение намагченности. Явления неповторяемости процессов перемагничивания в последовательных циклах, которые должны приводить к появлению магнитного шума, неоднократно наблюдались в ферромагнитных пленках. Исследуя статистику эффекта Баркгаузена в пермаллоевой пленке, Форд и Паф обратили внимание на то, что скачки Баркгаузена при многократном перемагничивании не имеют фиксированной величины [3]. Неповторяемость в деталях доменной структуры пленок после завершения полного цикла отмечалась Пратоном [4], а также Кобелевым и Корсунским [5]. Подобные явления ранее замечались и в массивных образцах. Исследования спектрального распределения магнитного шума в массивных материалах в условиях квазистатического перемагничивания позволили выяснить некоторые основные закономерности этого явления [6, 7]. Представляет интерес установить правильность этих положений и для ферромагнитных пленок, доменная структура и процессы перемагничивания в которых обладают рядом особенностей, отличающих их от массивных образцов. Кроме того, имея в виду возможность применения ферромагнитных пленок в микроминиатюрной

технике, необходимо знать абсолютную величину интенсивности магнитного шума в пленках и отношение сигнал/шум (понимая под сигналом, например, уровень первой гармоники в спектре ЭДС индукции на выходе индикаторной катушки), чтобы сравнить эти характеристики с соответствующими значениями для массивных образцов из того же материала. Наконец, эксперименты с многослойными пленками открывают практические возможности исследования взаимодействия между слоями путем анализа корреляции магнитных шумов в этих слоях. Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию магнитных шумов в тонких пленках с целью выяснения упомянутых выше вопросов.

### 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Ферромагнитные пленки приготавливались методом термического испарения в вакууме сплава 79НМ с вольфрамового испарителя. В начале испарения создавалось разрежение порядка  $10^{-5}$  мм рт. ст. Пары металла конденсировались на подогретой до  $250^{\circ}\text{C}$  стеклянной подложке, в качестве которой использовались покровные стекла микроскопов. Подложка размерами  $15 \times 5 \times 0,13$  мм<sup>3</sup> очищалась химическим способом. Пленка имела форму круглого пятна диаметром 4,8 мм. Для создания магнитной анизотропии напыление производилось в присутствии постоянного магнитного поля с напряженностью 50 э. Толщина пленок оценивалась расчетным путем. Кроме однослойных пленок напылялись двухслойные с различной толщиной разделяющего слоя диэлектрического промежутка. В качестве диэлектрика использовался Mg F<sub>2</sub>. Измерения проводились с пленками, имеющими толщину ферромагнитного слоя около 3000 Å, как одиночными, так и двойными, разделенными диэлектрическими промежутками следующих толщин: № 1 —  $d_1 \approx 0$  (один слой непосредственно напылен на другой слой); № 2 —  $d_2 = 300$  Å; № 3 —  $d_3 = 0,13$  мм (напыление производилось на обе стороны стеклянной подложки). Спектральное распределение магнитного шума измерялось в диапазоне частот 1—200 кГц при помощи анализатора спектра с эффективной полосой пропускания фильтра 23 гц. Абсолютная калибровка схемы заключалась в сравнении спектральной плотности магнитного шума с спектральной плотностью равновесных тепловых шумов активного сопротивления.

Образец помещался в одной из индикаторных катушек и перемагничивался в легком направлении однородным магнитным полем, которое создавалось специальным соленоидом. Индикаторные катушки включались навстречу друг другу для компенсации первой гармоники сигнала (с целью ликвидировать возможные нелинейные искажения в анализаторе). Размеры плоских индикаторных катушек обеспечивали потокосцепление порядка 80% [8]. При выбранном значении постоянной времени выходного прибора 0,5 сек точность измерения спектральной плотности составляла около 20%. Вся система питалась от аккумуляторов и стабилизированных источников. Измерения обычно проводились следующим образом: анализатор спектра настраивался на выбранную частоту  $f$  (обычно — 2, 4, 10, 30, 100, 200 кГц), устанавливалась фиксированная частота перемагничивания  $f_0$  (0,3; 1,5; 7,5 кГц) и снималась зависимость спектральной плотности  $g(f)$  от амплитуды перемагничивающего поля  $H_0$ . Таким образом, спектральная плотность магнитного шума исследовалась как функция двух параметров  $f_0$  и  $H_0$ \*. Для исследования эф-

\* Аналогичные исследования на образцах подобного типа были проведены Потемкиным и Жигальским при значительно более высоких частотах перемагничивания [9]. Кроме того, в отличие от наших измерений, авторами этой работы изучался поперечный эффект.

фекта Баркгаузена в тех же пленках, на которых производились измерения магнитного шума, была собрана установка, представляющая собой некоторую модификацию схемы, описанной в работе [10]. Установка обеспечивала линейное нарастание магнитного поля, причем скорость нарастания могла изменяться в широких пределах. Обычно использовалась скорость  $(10^{-1} - 10^{-2}) \text{ э}\cdot\text{сек}^{-1}$ . Скачки Баркгаузена после значительного усиления визуально наблюдались на экране осциллографа.

## 2. МАГНИТНЫЙ ШУМ В ОДНОСЛОЙНЫХ ПЛЕНКАХ

На рис. 1 приведены семейства кривых, отражающих зависимость спектральной плотности магнитного шума от амплитуды приложенного

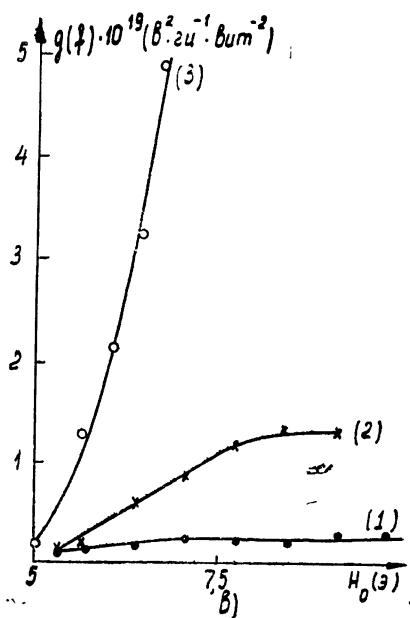
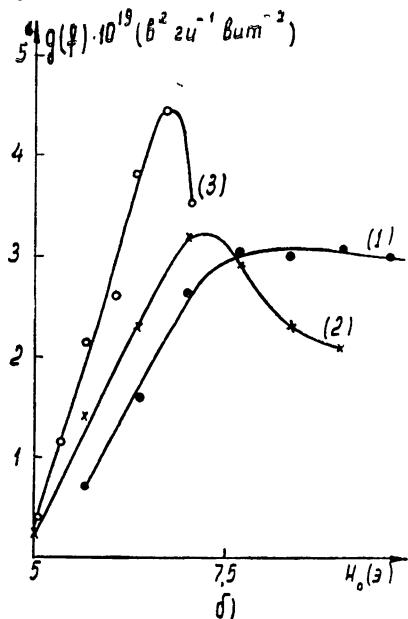
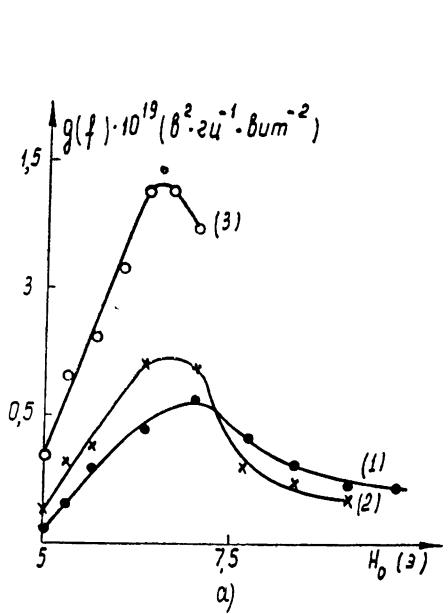


Рис. 1. Зависимости спектральной плотности магнитных шумов однослойной пленки от амплитуды перемагничивания:

a)  $f = 4 \text{ кгц}$ , б)  $f = 30 \text{ кгц}$ , в)  $f = 200 \text{ кгц}$ ; 1) —  $f_0 = 0,3 \text{ кгц}$ ; 2) —  $f_0 = 1,5 \text{ кгц}$ ; 3) —  $f_0 = 7,5 \text{ кгц}$ .

поля для разных частот перемагничивания. Обращает на себя внимание наличие характерных максимумов  $g(f)$  как функции  $H_0$ . Такие максимумы наблюдались ранее у массивных образцов и природа этого явления обсуждалась в ряде работ [11, 12]. При увеличении  $H_0$  существенную роль играют два основных фактора. Во-первых, увеличивается общее число скачков Баркгаузена, возникающих за цикл перемагничивания, что приводит к увеличению интенсивности шума. Во-вторых, интервал времени, в котором эти скачки происходят, сокращается, процесс перемагничивания с необходимостью становится более определенным во времени и интенсивность шума падает. В области малых значений  $H_0$  преобладает первый фактор, в области больших — второй. Указанные соображения можно проиллюстрировать фотографиями, которые приведены на рис. 2, представляющими собой осциллограммы напряжения на индикаторной катушке. Сигнал возникал в виде шумового всплеска, со-

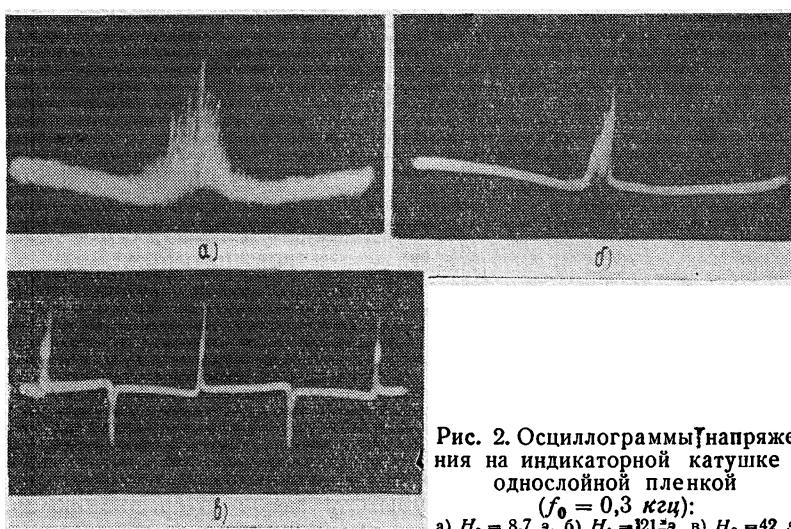


Рис. 2. Осциллограммы напряжения на индикаторной катушке с однослоиной пленкой ( $f_0 = 0,3 \text{ кци}$ ):  
а)  $H_0 = 8,7 \text{ э}$ , б)  $H_0 = 21 \text{ э}$ , в)  $H_0 = 42 \text{ э}$

стоящего из группы скачков Баркгаузена случайного неповторяющегося характера. С увеличением  $H_0$  отдельные скачки сливаются и флюктуации сигнала уменьшаются. Отметим, что аналогичным образом влияет на форму сигнала и увеличение частоты перемагничивания при  $H_0 = \text{const}$ .

На рис. 3 изображены спектры магнитных шумов пленочного образца. Для сравнения на рис. 3 приведены спектры шумов массивного образца из того же материала. У полученных спектров имеются как общие закономерности, так и ряд отличий. Отметим, прежде всего, что в области максимума спектральная плотность шума в пленке толщиной в  $3000 \text{ \AA}$  значительно выше, чем в массивном материале толщиной  $0,1 \text{ мм}$ . Легко показать, что на высоких частотах форма спектра магнитного шума определяется спектром одиночного скачка Баркгаузена, если можно считать отдельные скачки статистически независимыми.

Из сравнения кривых, изображенных на рис. 3, следует, что скачки в пленке более короткие, чем в массивном материале. Как для массивного материала, так и для пленки спектр по мере увеличения частоты

перемагничивания смещается в область более высоких частот, причем смещение сильнее для массивного материала. В массивном образце эти явления можно связать с влиянием скин-эффекта. При увеличении  $f_0$  перемагничивается все более тонкий поверхностный слой. В работе [13] показано, что скачки Баркгаузена по мере приближения к поверхности становятся все более короткими. Отсюда следует, что спектр должен смещаться в сторону более высоких частот с ростом частоты перемагничивания. Однако толщина нашей пленки существенно меньше толщины скин-слоя, и объяснить указанное смещение спектров влиянием скин-эффекта для пленок нельзя.

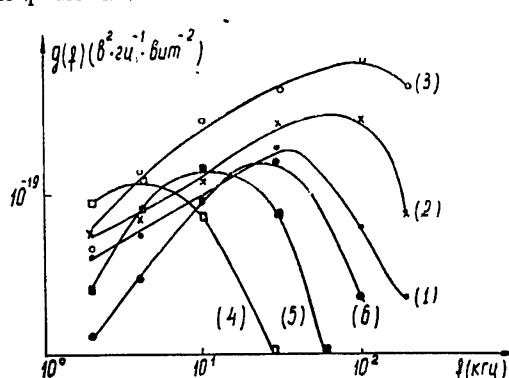


Рис. 3. Спектральное распределение магнитного шума однослоистой пленки (кривые 1, 2, 3) и массивного образца толщиной 0,1 мм из того же сплава (кривые 4, 5, 6):

1)  $-f_0=1 \text{ кгц}$ ; 2)  $-f_0=1,5 \text{ кгц}$ ; 3)  $-f_0=7,5 \text{ кгц}$  ( $H_0=6,6 \text{ э}$  для кривых 1, 2, 3); 4)  $-f_0=0,3 \text{ кгц}$ ; 5)  $-f_0=1,5 \text{ кгц}$ ; 6)  $-f_0=7,5 \text{ кгц}$  ( $H_0=12,2 \text{ э}$  для кривых 4, 5, 6).

Если предположить, что форма импульса может быть описана экспонентой  $e(t)=e^{-\lambda t} (t>0)$ \*, то для  $f \gg f_0$  можно написать [14]

$$g(\omega) = \frac{A}{\lambda^2 + \omega^2}, \quad (1)$$

где  $\lambda = 1/\tau_0$  ( $\tau_0$  — длительность скачка),  $\omega = 2\pi f$ . Из формулы (1) следует, что спектральная плотность убывает вдвое по сравнению с ее максимальным значением на частоте  $\omega_2 = \lambda = 1/\tau_0$ . Зная  $\omega_2$ , можно определить среднюю длительность скачка Баркгаузена  $\tau_0$ . В нашем случае для пленочного образца  $\tau_0 = 2 \text{ мксек}$ . Средняя длительность скачка была также определена непосредственно и оказалась порядка 3 мксек. Учитывая невысокую точность измерений, согласование результатов можно считать удовлетворительным. Общее число скачков при перемагничивании от  $-B_s$  до  $+B_s$  в пленке незначительно. Удалось сосчитать около 50 скачков. Скачки Баркгаузена происходили в диапазоне поля от 4 до 7 э. Предполагая макроскопическую симметрию петли гистерезиса, можно получить оценку для коэрцитивной силы пленки:  $H_c \approx 5,5 \text{ э}$ . Максимумы  $g(f)$  на рис. 1 несколько смещены относительно этого значения.

Сравним теперь отношение сигнал/шум для пленки и массивного образца. Под сигналом мы будем понимать амплитуду первой гармоники на выходе индикаторной катушки  $a_1$ . Отношение сигнал/шум рассчитано на 1 гц полосы пропускания. Для массивного образца на частоте 22,5 кгц это отношение порядка  $10^9$ , в то время как для пленки — порядка  $10^6$ . Таким образом, относительный уровень шумов в пленке в  $10^3$  раз больше, чем в массивном образце, что свидетельствует о существенной неповторяемости процессов перемагничивания в пленках.

\* Действительно, наблюдавшиеся скачки имели более сложную, сильно изрезанную форму, что свидетельствует о значительной неоднородности пленки.

### 3. МАГНИТНЫЕ ШУМЫ В ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛЕНКАХ

Взаимодействие полей рассеяния границ в двух пленках, разделенных диэлектрическим промежутком, должно приводить к корреляции магнитных шумов в этих слоях. В настоящей работе исследованы магнитные шумы в трех образцах, состоящих из двойных пленок. В пленке № 1 взаимодействие наибольшее, в пленке № 3 взаимодействия не должно быть [15], т. е. интенсивности шумов должны просто складываться. Зависимости спектральной плотности шумов от  $H_0$  для разных частот  $f$  и  $f_0$  имеют примерно такой же вид, как и для однослоевой пленки, за исключением № 3, у которой на низких частотах наблюдались два максимума спектральной плотности, что связано с некоторым различием в кюэрцитивных силах отдельных слоев.

На рис. 4—6 приведены спектры магнитных шумов для всех трех

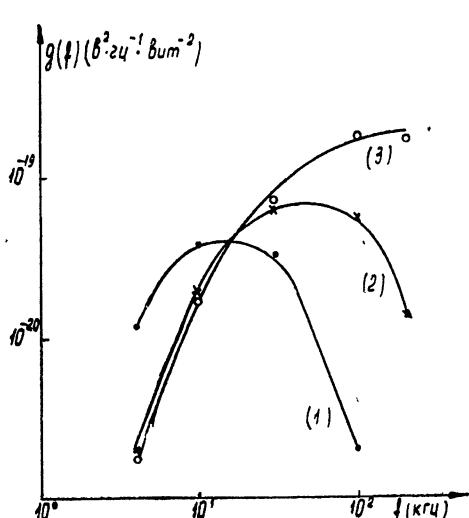


Рис. 4. Спектральное распределение магнитного шума двухслойной пленки № 1 ( $d = 0$ ):

1) —  $f_0=0,3$  кГц; 2) —  $f_0=1,5$  кГц; 3) —  $f_0=7,5$  кГц;  
 $H_0=7,7$  э.

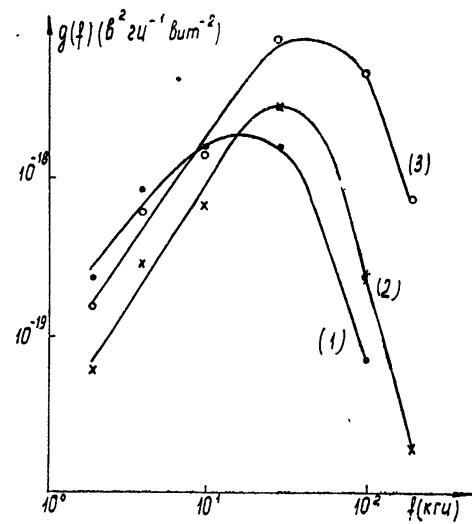
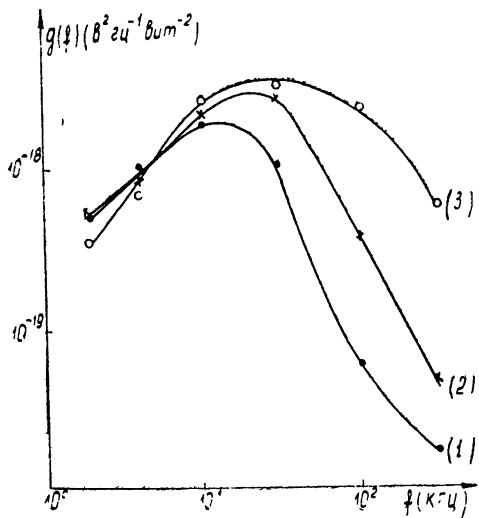


Рис. 5. Спектральное распределение магнитного шума двухслойной пленки № 2 ( $d = 300$  Å):

1) —  $f_0=0,3$  кГц; 2) —  $f_0=1,5$  кГц; 3) —  $f_0=7,5$  кГц;  
 $H_0=1,4$  э.

Рис. 6. Спектральное распределение магнитного шума двухслойной пленки № 3 ( $d = 0,13$  мм):

1) —  $f_0=0,3$  кГц; 2) —  $f_0=1,5$  кГц; 3) —  $f_0=7,5$  кГц,  
 $H_0=1,75$  э.



пленок. В целом формы спектров похожи друг на друга и на спектр однослоиной пленки. Имеются лишь различия в деталях. Так, например, у пленки № 1 смещение спектров в области высоких частот выражено сильнее, чем у других пленок. Как и у однослоиной пленки высокочастотный спад спектров определяется средней длительностью скачка Баркгаузена, которая была измерена непосредственно. Сравним теперь спектральные плотности шумов в максимумах при частоте перемагничивания  $f_0 = 300 \text{ гц}$ . Для пленки № 1  $g_{\max}(f) = 4 \cdot 10^{-20} \text{ в}^2 \cdot \text{гц}^{-1} \cdot \text{вит.}^{-2}$ , для пленки № 2  $- 1,8 \cdot 10^{-18} \text{ в}^2 \cdot \text{гц}^{-1} \cdot \text{вит.}^{-2}$ , для пленки № 3  $- 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ в}^2 \times \text{гц}^{-1} \cdot \text{вит.}^{-2}$ .

Таким образом, с уменьшением толщины диэлектрического промежутка интенсивность шумов уменьшается, т. е. имеется антикорреляция магнитных шумов в связанных пленках. Причиной антикорреляции может быть влияние полей рассеяния, создаваемых граничными слоями. Эти результаты нуждаются, однако, в дополнительном подтверждении, поскольку мы не уверены в полной идентичности условий, в которых изготавливались все слои, составляющие двойные пленки. Что касается отношения сигнал/шум, то какой-либо закономерной зависимости этого отношения от толщины диэлектрика мы не наблюдали. По порядку величины отношение сигнал/шум у двойных пленок такое же, как и у однослоиных.

Амплитудная зависимость и спектр магнитных шумов в тонких пермалюевых пленках не имеют качественного отличия от аналогичных характеристик в массивных образцах, когда частота перемагничивания лежит в области звуковых частот. Относительный уровень шума в пленках на несколько порядков выше шумов массивных материалов. Реальный путь снижения уровня магнитных шумов в пленках — перемагничивание в режиме однородного вращения, когда процессами смещения границ можно пренебречь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Грачев, ДАН СССР, 71, № 2, 269 (1950).
2. Н. Н. Колачевский, Тр. МФТИ, № 4, 17 (1959).
3. N. C. Ford, E. W. Rugh, J. Appl. Phys., 30, № 4, 270 (1959).
4. M. Prutton, Phil. Mag., 4, № 45, 1063 (1959).
5. В. В. Кобелев, А. А. Корсунский, Магнитные элементы устройств вычислительной техники, изд. АН СССР, М., 1961, стр. 85.
6. К. А. Горонина, А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 581 (1959).
7. Н. Н. Колачевский, В. В. Рождественский, Радиотехника и электроника, 8, № 1, 53 (1963).
8. В. В. Кобелев, Магнитные элементы устройств вычислительной техники, изд. АН СССР, М., 1961, стр. 131.
9. В. В. Потемкин, Г. П. Жигальский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 6, 809 (1967).
10. А. А. Грачев, К. А. Горонина, Н. Н. Колачевский, И. А. Андронова, ЖЭТФ, 27, № 3 (9), 313 (1954).
11. А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 71 (1958).
12. Н. Н. Колачевский, Радиотехника и электроника, 5, № 12, 1902 (1960).
13. К. М. Поливанов, А. М. Родичев, В. А. Игнатченко, ФММ, 9, № 5, 778 (1960).
14. G. Biorgi, D. Pescetti, J. Appl. Phys., 28, № 7, 777 (1957).
15. F. J. Friedlander, L. F. Silva, J. Appl. Phys., 36, № 3, р. II, 946 (1965).

MAGNETIC NOISES IN THIN PERMALLOY FILMS

*N. N. Kolachevskii, V. G. Roumyantsev*

The spectral distribution of magnetic noises in one and two-layer films factured by 79NM alloy evaporation in vacuum for different amplitudes and frequencies of the magnetic polarity reversal is experimentally investigated. The signal/noise ratio in films is found to be much less than that in solid materials of the same alloy.

---

УДК 535.31

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА СРЕД С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ (СКАЛЯРНАЯ ЗАДАЧА)

Ю. А. Кравцов

Дан вывод уравнений геометрической оптики для сред с пространственной дисперсией (скалярная задача). Указан способ решения этих уравнений. Получено асимптотическое решение при наличии простой каустики, выраженное через функции Эйри.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим скалярное интегро-дифференциальное уравнение

$$\Delta u(r) + k^2 \epsilon(r) u(r) = k^2 I[u], \quad k = \omega/c, \quad (1)$$

в котором через  $I[u]$  обозначен линейный интегральный оператор

$$I[u] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(r', r) u(r') d^3 r', \quad (2)$$

описывающий нелокальные свойства среды по отношению к скалярному полю  $u$ . В скалярной теории рассеяния на случайных неоднородностях этому уравнению удовлетворяет среднее<sup>1</sup> поле  $u(r) = \langle v(r) \rangle$ . В этом случае в качестве  $\epsilon(r)$  выступает средняя диэлектрическая проницаемость  $\langle \epsilon(r) \rangle$ . Ядро же  $f(r', r)$  интегрального оператора  $I[u]$  равно  $k^{-2} (2\pi)^3 M(r', r)$ , где  $M(r', r)$  — так называемый массовый оператор. В приближении Буре он равен произведению функции Грина в отсутствие флюктуаций  $G^0(r', r)$  на  $k^4$  и на функцию корреляций флюктуаций  $\mu(r) = \epsilon(r) - \langle \epsilon(r) \rangle$ :  $M(r', r) \simeq k^4 G^0(r', r) [\mu(r') \mu(r)]^{1/2}$ . К интегро-дифференциальному уравнению (1) приводят также квантовомеханические задачи с нелокальным потенциалом [5]. Кроме того, в электродинамике при некоторых специальных условиях уравнению (1) удовлетворяют отдельные компоненты векторов электрического и магнитного полей.

В отношении уравнения (1) едва ли можно рассчитывать на получение строгих решений. Естественно поэтому с самого начала прибегнуть к приближенным методам. Возможны следующие три подхода к задаче.

Во-первых, если  $|I[u]| \ll u$ , уравнение (1) можно решать методом возмущений, взяв в качестве нулевого приближения  $u_0$  решение уравнения  $\Delta u + k^2 \epsilon u = 0$ . В задачах теории многократного рассеяния это эквивалентно вычислению среднего поля во втором борновском приближении. Действуя методом возмущений, можно рассчитывать только на получение малых поправок к  $u_0$ , что не представляет большого практического интереса.

Во-вторых, в случае слабой пространственной дисперсии интегральный оператор  $I[u]$  можно приближенно заменить дифференциальным оператором невысокого порядка. Требование слабой пространственной дисперсии означает, что радиус пространственной дисперсии  $l$  должен

быть мал по сравнению с характерным масштабом изменения поля  $\lambda$ , так что условие слабой пространственной дисперсии записывается в виде

$$l \ll \lambda. \quad (3)$$

Замена нелокального члена дифференциальным оператором широко практикуется в теории плазменных колебаний и электродинамике (см., например, [6, 7]).

Наконец, в-третьих, при выполнении определенных условий «медленности» уравнение (1) можно решать методом геометрической оптики, отыскивая решение в виде  $u(r) = A(r)e^{ik\varphi(r)}$ . К настоящему времени опубликовано несколько работ [8–11], в которых при помощи метода геометрической оптики были проанализированы условия устойчивости неоднородной плазмы при наличии пространственной дисперсии. В этих работах, однако, оставлен открытым ряд вопросов как методического, так и конструктивного характера, в частности: а) нуждается ли вывод уравнений геометрической оптики для сред с пространственной дисперсией в каких-либо дополнительных предположениях, помимо обычно используемых; б) как выглядит уравнение переноса в диспергирующих средах и чем оно отличается от обычного; в) как нужно строить асимптотическое решение для поля в средах с пространственной дисперсией при наличии каустик или точек поворота.

В данной работе делается попытка ответить на эти (и некоторые другие) вопросы при следующих двух ограничениях: мы рассмотрим только скалярную задачу (1) и пренебрежем взаимодействием различных типов волн (в этих отношениях наша постановка задачи уже, чем в [8–11]).

## 1. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ЧЛЕНА

Пусть  $L$  — характерный масштаб изменения  $A(r)$  и  $\nabla\varphi(r)$ , т. е. амплитуды и нормали к фазовому фронту поля  $u(r) = A(r)e^{ik\varphi(r)}$ . Как известно, область применимости приближения геометрической оптики ограничена условием

$$\lambda \ll L, \quad (4)$$

смысл которого заключается в том, что в пределах небольшого объема протяженности  $\sim \lambda$  поле  $u = Ae^{ik\varphi}$  можно рассматривать как «почти плоскую» волну. Требование (4) подразумевает отсутствие резких изменений амплитуды  $A$  и, следовательно, малость поперечной диффузии амплитуды, достаточную плавность фазовых фронтов и плавность изменения  $\epsilon(r)$ :

$$\lambda \left| \frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \right| \leq \frac{\lambda}{L} \ll 1. \quad (5)$$

При  $u = Ae^{ik\varphi}$  и при выполнении условия (4) левая часть уравнения (1) может быть представлена в виде произведения быстро осциллирующего множителя  $e^{ik\varphi}$  на «медленную» функцию координат с характерным масштабом изменения  $L$ . Очевидно, такую же структуру должна иметь и правая часть (1). Мы сформулируем сейчас требования, предъявляемые к ядру  $f$ , и одновременно преобразуем нелокальный член  $\{u\}$  к нужной форме.

Прежде всего, выделим в ядре  $f$  разностную переменную  $r_1 \equiv r' - r$ , положив  $f = f(r_1, r)$ . Пусть  $l$  — характерный масштаб изменения  $f(r_1, r)$  по первому, а  $L_1$  — по второму аргументу (по существу,  $l$  — это

радиус пространственной дисперсии). Потребуем, далее, чтобы выполнялось неравенство

$$l \ll L. \quad (6)$$

Тогда в объеме диаметром  $\sim l$ , существенном для интегрирования в (2), поле  $u = A e^{ik\varphi}$  представляет собой «почти плоскую» волну. Поэтому в разложении

$$A(\mathbf{r}') = A(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{r}_1 \nabla)^n A(\mathbf{r}); \quad (7)$$

$$\varphi(\mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}) + \mathbf{r}_1 \nabla \varphi(\mathbf{r}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{r}_1 \nabla)^n \varphi(\mathbf{r}) \quad (8)$$

члены, содержащиеся в бесконечных суммах, следует рассматривать как поправочные (их относительная величина не превышает  $l/L$ ). В дальнейшем мы учтем их в виде возмущений.

Подстановка (7) и (8) в (2) и использование известных свойств преобразования Фурье приводит к следующему выражению для  $I[u]$ :

$$I[u] = e^{ik\varphi(\mathbf{r})} \left[ A(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \nabla \right)^n A(\mathbf{r}) \right] \times \\ \times \exp \left[ ik \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{-i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \nabla \right)^n \varphi(\mathbf{r}) \right] F(kp, r), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{p} \equiv \nabla \varphi(\mathbf{r}),$$

$$F(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{r}_1, r) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}\mathbf{r}_1} d^3 \mathbf{r}_1 \quad (10)$$

— преобразование Фурье ядра  $f(\mathbf{r}_1, r)$  по первому аргументу. Дифференциальный оператор  $\nabla$  действует в (9) только на непосредственно следующие за ним функции  $A(\mathbf{r})$  и  $\varphi(\mathbf{r})$ , а оператор  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  — на первый аргумент функции  $F(\mathbf{x}, r)$ .

Таким образом, мы заменили интегральный оператор (2) сложным дифференциальным оператором (9). Обозначим  $F(kp, r)$  через  $\Phi(p, r)$  и образуем формальные ряды по степеням  $1/k$  в показателе экспоненты и в амплитудном множителе, положив  $\mathbf{x} = kp$ . Воспользовавшись указанной выше малостью поправочных членов в (7) и (8), разложим экспоненту в ряд по степеням  $1/k$  и ограничимся в  $I[u]$  членами порядка  $1/k$ :

$$I[u] = e^{ik\varphi(\mathbf{r})} \left\{ A(\mathbf{r}) + \frac{1}{ik} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \nabla \right) A(\mathbf{r}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} A(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \nabla \right)^2 \varphi(\mathbf{r}) \right] + \dots \right\} \Phi(p, r). \quad (11)$$

Из (11) видно, что  $I[u]$  содержит быстро осциллирующий множитель  $e^{ik\varphi}$  и что характерный масштаб изменения выражения в фигур-

ной скобке порядка  $L$ . Такого же порядка и масштаб изменения  $\Phi(p, r)$  по первому аргументу. Потребуем теперь, чтобы выполнялось неравенство\*

$$L_1 \geq L. \quad (12)$$

Тогда нелокальный член  $[I_1]$  приобретает структуру, подобную структуре левой части уравнения (1). Неравенства (4), (6) и (12) в совокупности дают, таким образом, условия применимости приближения геометрической оптики для сред с пространственной дисперсией. Как будет ясно из дальнейшего, величина  $\epsilon_{\text{эфф}} = \epsilon - \Phi$  имеет смысл эффективной диэлектрической проницаемости среды. Поэтому условия (5) и (12) могут быть заменены одним неравенством:

$$\lambda \cdot \left| \frac{1}{\epsilon_{\text{эфф}}} \frac{\partial}{\partial r} \epsilon_{\text{эфф}} \right| \leq \frac{\lambda}{L} \ll 1. \quad (13)$$

Существенно, что отношение  $l/\lambda$  может меняться в достаточно широких пределах (но так, чтобы не нарушались неравенства  $\lambda \ll L$  и  $l \ll L$ ). Иными словами, приближение геометрической оптики охватывает случаи и слабой ( $l \ll \lambda$ ) и сильной ( $l \gg \lambda$ ) пространственной дисперсии. С этой точки зрения область применимости метода геометрической оптики шире, чем у приближения, опирающегося на замену нелокального члена  $[I_1]$  дифференциальным оператором.

## 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В результате проделанных выше формальных операций, приведших к выражению (11), мы можем теперь искать решение исходного уравнения (1) в виде асимптотического ряда

$$u(r) = \left[ A^{(0)}(r) + \frac{1}{ik} A^{(1)}(r) + \dots \right] e^{ik\varphi(r)}, \quad (14)$$

используя стандартную дебаевскую процедуру, т. е. приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ .

То обстоятельство, что  $\Phi(p, r) \equiv F(kp, r)$  зависит от  $k$  и при каждом дифференцировании по  $p$  появляется множитель  $k$ , который считается большим параметром задачи, не препятствует использованию дебаевской процедуры. Дело в том, что асимптотическое разложение в методе геометрической оптики проводится фактически по малому безразмерному параметру  $\mu \sim 1/kL$ . Масштаб  $L$  характеризует медленность изменения  $A$  и  $\varphi$ , т. е. степень отличия поля (14) от плоской волны в области диаметром  $\sim \lambda$  (в диспергирующих средах, как показано, появляется еще один малый параметр  $\mu_1 = l/L$ , имеющий такой же смысл для области диаметром  $\sim l$ ). Так как в диспергирующих средах величина  $k$  определяет не только величину малого параметра  $\mu = 1/kL$ , но и дисперсионные свойства среды, то при наличии дисперсии предельный переход  $\mu \rightarrow 0$  следует проводить, устремляя в бесконечность  $L$  при фиксированном  $k$ , т. е. при фиксированных дисперсионных свойствах среды\*\*.

Тем не менее, асимптотическая сходимость геометрооптического разложения к точному решению при  $\mu \rightarrow 0$  формально может быть опи- сана предельным переходом  $k \rightarrow \infty$ , если условиться, что разлагать

\* Напомним, что  $L$  — масштаб изменения ядра  $f(r_1, r)$  (а также и  $\Phi(p, r)$ ) по второму аргументу.

\*\* Аналогичные соображения справедливы и для сред, обладающих временной дисперсией: при увеличении  $L$  волновое число  $k = \omega/c$  в  $\epsilon(\omega, r) = \epsilon(ck, r)$  следует считать фиксированным.

в ряды по степеням  $1/k$  следует только те функции, в которые  $1/k$  входит в комбинации с оператором  $\nabla^*$ . Приведенные выше выкладки удовлетворяют этому требованию.

С учетом сделанных замечаний мы можем теперь подставить (11) и (14) в (1) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ . Эта операция непосредственно приводит к уравнению эйконала для  $\varphi(\mathbf{r})$

$$(\nabla\varphi)^2 = \varepsilon(\mathbf{r}) - \Phi(\nabla\varphi, \mathbf{r}) \quad (15)$$

и к бесконечной цепочке уравнений для амплитудных коэффициентов  $A^{(m)}(\mathbf{r})$ . Выпишем здесь только первое уравнение из этой цепочки, а именно — уравнение переноса для  $A(\mathbf{r}) \equiv A^{(0)}(\mathbf{r})$ :

$$2\nabla A \left( \nabla\varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) + A \left[ \Delta\varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial p} \nabla \right)^2 \varphi\Phi \right] = 0. \quad (16)$$

### 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

Уравнение (15) можно решить методом характеристик в форме Гамильтона. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon(\mathbf{r}) - \Phi(p, \mathbf{r})$  от  $p \equiv \nabla\varphi$  не препятствует использованию гамильтонова формализма (в механике этому соответствуют так называемые обобщенные потенциалы  $V(p, \mathbf{r})$ , зависящие от импульса). Введем гамильтониан  $H(\mathbf{r}, p) = \frac{1}{2} [p^2 - \varepsilon(\mathbf{r}) + \Phi(p, \mathbf{r})]$  и запишем канонические уравнения характеристик (лучей):

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p} = p + \frac{1}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{2} \left( \nabla\varepsilon - \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right). \quad (17)$$

Пусть известны решения  $\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{R}(\xi, \eta, \tau)$  и  $p(\tau) = P(\xi, \eta, \tau)$  этих уравнений, удовлетворяющие следующим начальным условиям:  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0(\xi, \eta)$ ,  $p(0) = \nabla\varphi_0(\xi, \eta)$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi, \eta)$  — уравнение поверхности  $S$ , на которой задан начальный эйконал  $\varphi_0 = \varphi_0(\xi, \eta)$ . Тогда из дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = p \frac{dr}{d\tau} = p^2 + \frac{1}{2} \left( p \frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) \quad (18)$$

находим эйконал  $\varphi$  вдоль луча  $\mathbf{r}(\tau)$ :

$$\varphi = \varphi_0(\xi, \eta) + \int_0^\tau \left[ p^2 + \frac{1}{2} \left( p \frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) \right] d\tau. \quad (19)$$

Как известно, в однородной среде [ $\varepsilon = \text{const}$ ,  $f = f(\mathbf{r}_1)$ ] уравнение эйконала (15) эквивалентно дисперсионному уравнению  $\mathbf{x}^2 = k^2[\varepsilon - F(\mathbf{x})]$  для волнового вектора  $\mathbf{x} = \mathbf{k}\mathbf{r}$ . Поэтому в неоднородной среде уравнение (15) можно рассматривать как «локальное» дисперсионное уравнение. Именно из этих соображений выводилось уравнение эйконала в работах [8–11].

\* Разумеется, этих условностей можно было бы избежать, если с самого начала ввести безразмерные координаты  $\xi_i = kx_i$  и безразмерный малый параметр  $\mu = 1/kL$ , а затем последовательно строить ряды возмущений, подобно тому, как это было сделано Рытовым в [12]. Здесь мы не будем этого делать, чтобы не усложнять систему обозначений и из соображений экономии места.

В однородной среде дисперсионное уравнение  $\mathbf{k}^2 = k^2[\epsilon - F(\mathbf{k})]$  допускает в общем случае несколько комплексных решений, отвечающих разным типам волн. Комплексность волнового вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$  в однородной среде, ответственная за ослабление поля  $u = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , может быть вызвана различными причинами (так, в задаче о среднем поле в теории многократного рассеяния комплексность  $\mathbf{k}$  обусловлена переходом энергии среднего поля в некогерентную составляющую поля). В неоднородной среде также следует ожидать, что  $\mathbf{p} = \nabla\varphi$  будет принимать комплексные значения. Поэтому построение геометрооптических решений для диспергирующих сред, вообще говоря, должно опираться на комплексные лучи [13, 14]. Лишь в случае слабого затухания интегрирование в (19) можно провести вдоль вещественных лучей, построенных в предположении  $\text{Im}\epsilon_{\text{эфф}} = 0$ .

#### 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Принимая во внимание, что  $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \nabla\varphi(\mathbf{r})$  и, следовательно,

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m},$$

имеем

$$\text{div} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_j \partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial p_j} = \left( \frac{\partial}{\partial p} \nabla \right)^2 \varphi \Phi + \left( \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi \quad (j, m = 1, 2, 3).$$

Учитывая это соотношение, а также то, что вдоль луча в соответствии с (17),  $\nabla A \left( \nabla\varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = \frac{dA}{d\tau}$ , запишем уравнение (16) в виде

$$-\frac{d}{d\tau} \ln A^2 = -\text{div} \left( \mathbf{p} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi. \quad (20)$$

Примем далее во внимание, что якобиан  $D(\tau) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi, \eta, \tau)}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\tau} \ln D(\tau) = \text{div} \left( \mathbf{p} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right), \quad (21)$$

в чем можно убедиться, используя уравнения (17). Из сравнения (20) и (21) следует, что

$$A = A_0(\xi, \eta) \left[ \frac{D(0)}{D(\tau)} \right]^{1/2} \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^\tau \left( \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(p, r) d\tau \right], \quad (22)$$

где  $A_0(\xi, \eta)$  — начальное значение амплитуды, заданное на поверхности  $S$ .

Как видно из (22), изменения амплитуды обусловлены не только геометрической расходностью лучей (фактор  $\left[ \frac{D(0)}{D(\tau)} \right]^{1/2}$ ), но и множителем  $\exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^\tau \left( \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi d\tau \right]$ . В однородной среде [ $\epsilon = \text{const}$ ,  $\Phi = \Phi(p)$ ], а также в отсутствие пространственной дисперсии

$\left[ \frac{\partial \Phi(p, r)}{\partial p} = 0 \right]$  этот множитель обращается в единицу. Физическая природа этого множителя и его связь с вектором Пойнгинга в диспергирующей среде могут быть установлены только из электродинамического рассмотрения. Этот вопрос обсуждается в работе [15].

### 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1) МЕТОДОМ ЭТАЛОННЫХ ФУНКЦИЙ

Известно, что при наличии простой каустики в среде без пространственной дисперсии волновая функция асимптотически выражается через функцию Эйри  $v(t)$  и ее производную [ $16-18$ ]. Ниже аналогичный результат получен методом эталонных функций и для диспергирующих сред.

Следуя работе Людвига [17], будем искать решение в виде\*

$$u(r) = C \int g(r, \xi) e^{ik\varphi(r, \xi)} d\xi, \quad (23)$$

где

$$\varphi(r, \xi) = \theta(r) + \xi\rho(r) - \xi^3/3, \quad g(r, \xi) = g_0(r) + \xi g_1(r), \quad (24)$$

а  $C$  — нормировочная константа. Разложим  $g(r', \xi)$  и  $\varphi(r', \xi)$  в степенные ряды, аналогичные (7) и (8), и преобразуем нелокальный член  $I[u]$  таким же образом, как и в разделе 1 (с тем отличием, что преобразование проводится под знаком интеграла по  $\xi$ ):

$$I[u] = C \int d\xi e^{ik\varphi(r, \xi)} \left\{ g(r, \xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{ik} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial p} \nabla \right) g(r, \xi) + \frac{1}{2} g(r, \xi) \left( \frac{\partial}{\partial p} \nabla \right)^2 \varphi \right] + \dots \right\} \Phi(p, r). \quad (25)$$

Здесь, как и в (11), оператор  $\nabla$  действует на непосредственно следующие за ним функции  $g$  или  $\varphi$ , а оператор  $\frac{\partial}{\partial p}$  — на  $\Phi(p, r)$ ; однако теперь

$p \equiv \nabla\varphi(r, \xi) = \nabla\theta + \xi\nabla\rho$ . Разложим функцию  $\Phi(p)$  (второй аргумент у  $\Phi(p, r)$  мы временно опустим) в ряд по степеням  $\xi$ , записав отдельно члены с четными и нечетными степенями:

$$\Phi(p) = \sum_{N=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2N)!} \left( \nabla\rho \frac{\partial}{\partial p} \right)^{2N} \Phi(\nabla\theta) + \xi \frac{1}{(2N+1)!} \left( \Delta\rho \frac{\partial}{\partial p} \right)^{2N+1} \Phi(\nabla\theta) \right] (\xi^2)^N \equiv \\ \equiv \sum (A_N + \xi B_N) (\xi^2)^N. \quad (26)$$

Выделим из (26) слагаемое  $Q(\xi)\varphi_\xi$ , пропорциональное  $\varphi_\xi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \rho - \xi^2$ \*\*.

Полагая в (26)  $\xi^2 = \rho - \varphi_\xi$ , получаем

\* В данном случае интегральное представление (23) удобнее, чем непосредственное использование функции Эйри  $v(t)$ .

\*\* Функции вида  $q(\xi)\varphi_\xi$  интегрируются по частям и дают вклад порядка  $1/k$ :

$$\int q(\xi)\varphi_\xi e^{ik\varphi} d\xi = -\frac{1}{ik} \int \frac{\partial q}{\partial\xi} e^{ik\varphi} d\xi.$$

$$\Phi(p) = \sum (A_N + \xi B_N) \left[ p^N - N p^{N-1} \varphi_\xi + \frac{N(N-1)}{2} p^{N-2} \varphi_\xi^2 - \dots \right] = \\ = S + Q(\xi) \varphi_\xi. \quad (27)$$

Ряд  $S = \sum (A_N + \xi B_N) p^N$ , не содержащий  $\varphi_\xi$ , удается просуммировать:

$$S = \frac{1}{2} (\Phi^+ + \Phi^-) + \frac{\xi}{2V\rho} (\Phi^+ - \Phi^-), \quad \Phi^\pm \equiv \Phi(\nabla\theta \pm \sqrt{\rho} \nabla\rho). \quad (28)$$

Суммируются также и ряды, являющиеся коэффициентами при степенях  $\varphi_\xi$  в (27). В результате имеем

$$Q(\xi) = - \frac{\partial S}{\partial p} + \frac{1}{2} \varphi_\xi \frac{\partial^2 S}{\partial p^2} - \frac{1}{3!} \varphi_\xi^2 \frac{\partial^3 S}{\partial p^3} + \dots \quad (29)$$

Подставив (23), (25) и (27) в (1) и осуществив интегрирование по частям члена с  $Q(\xi) \varphi_\xi$ , запишем уравнение (1) в виде

$$\Delta u + k^2 \varepsilon u - k^2 I[u] = C \int d\xi e^{ik\xi} \left\{ k^2 [-(\nabla\varphi)^2 + \varepsilon - S] g + \right. \\ \left. + ik \left[ 2\nabla g \nabla\varphi + g \Delta\varphi + \left( \frac{\partial}{\partial p} \nabla \right) g S + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} g \left( \frac{\partial}{\partial p} \nabla \right)^2 \varphi S - \frac{\partial}{\partial \xi} (Qg) \right] + \dots \right\} = 0, \quad (30)$$

где точками отмечены члены более низкого (относительно  $k$ ) порядка.

Дальнейшие выкладки проведем по схеме, предложенной Людвигом [17]. Именно, разложим  $g$  в ряд по степеням  $1/k$ , аналогичный (14), и потребуем, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях  $k$  в (30) тождественно по  $\xi$  обращались в нуль при условии, что из них предварительно выделены слагаемые вида  $q(\xi) \varphi_\xi$ . Эти слагаемые дают вклад в следующем относительно  $k$  порядке (см. [17, 18] и предыдущее подстрочное примечание). Используя (28) и (29), мы придем тогда к системе уравнений для  $\theta$  и  $\rho$ :

$$(\nabla\theta)^2 + \rho (\nabla\rho)^2 = \varepsilon - \frac{1}{2} (\Phi^+ + \Phi^-); \quad (31)$$

$$2\nabla\theta \nabla\rho = - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} (\Phi^+ - \Phi^-), \quad (32)$$

и к системе уравнений для амплитудных коэффициентов нулевого приближения  $g_0 \equiv g_0^{(0)}$  и  $g_1 = g_1^{(0)}$ :

$$2\nabla g_0 \left( \nabla\theta + \frac{1}{4} \frac{\partial S^+}{\partial p} \right) + g_0 \left( \Delta\theta + \frac{1}{4} T^2 \theta S^+ + \frac{\sqrt{\rho}}{4} T^2 \rho S^- + \right. \\ \left. + \frac{1}{8\rho^{3/2}} S^- - \frac{1}{8\rho} t S^+ + \frac{1}{8V\rho} t^2 S^- \right) + 2\nabla g_1 \left( \rho \nabla\rho + \frac{\sqrt{\rho}}{4} \frac{\partial S^-}{\partial p} \right) + \\ + g_1 \left( \rho \Delta\rho + (\nabla\rho)^2 + \frac{\rho}{4} T^2 \rho S^+ + \frac{\sqrt{\rho}}{4} T^2 \theta S^- + \frac{1}{8V\rho} t S^- + \frac{1}{8} t^2 S^+ \right) = 0; \quad (33)$$

$$2\nabla g_0 \left( \nabla \rho + \frac{1}{4\sqrt{\rho}} \frac{\partial S^-}{\partial \rho} \right) + g_0 \left( \Delta \rho + \frac{1}{4} T^2 \rho S^+ + \frac{1}{4\sqrt{\rho}} T^2 \theta S^- - \frac{1}{8\rho^{3/2}} t S^- + \frac{1}{8\rho} t^2 S^+ \right) + 2\nabla g_1 \left( \Delta \theta + \frac{1}{4} \frac{\partial S^+}{\partial \rho} \right) + g_1 \left( \Delta \theta + \frac{1}{4} T^2 \theta S^+ + \frac{\sqrt{\rho}}{4} T^2 \rho S^- - \frac{1}{8\rho^{3/2}} S^- + \frac{1}{8\rho} t S^+ + \frac{1}{8\sqrt{\rho}} t^2 S^- \right) = 0, \quad (34)$$

где

$$S^\pm = \Phi^+ \pm \Phi^-, \quad T = \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla \right), \quad t = \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla \rho \right).$$

Умножив (32) на  $\sqrt{\rho}$  и затем един раз складывая, а другой раз вычитая (31) и (32), получаем

$$(\nabla \theta \pm \sqrt{\rho} \nabla \rho)^2 = \varepsilon(r) - \Phi(\nabla \theta \pm \sqrt{\rho} \nabla \rho, r) \quad (35)$$

(здесь мы восстановили второй аргумент у  $\Phi$ ). Из (35) следует, что функции  $\varphi^\pm = \theta \pm (2/3)\rho^{3/2}$  удовлетворяют уравнению эйконала (15). Если решения  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  найдены, то

$$0 = \frac{1}{2} (\varphi^+ + \varphi^-), \quad \frac{2}{3} \rho^{3/2} = \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-). \quad (36)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться также, что, если положить в (23)  $C = \sqrt{i k / 2\pi}$ , то уравнениям (33) и (34) удовлетворяют функции

$$g_0 = \frac{\rho^{1/4}}{\sqrt{2}} (A^+ - i A^-), \quad g_1 = \frac{\rho^{-1/4}}{\sqrt{2}} (A^+ + i A^-), \quad (37)$$

где  $A^\pm$  — решения уравнения переноса

$$2\nabla A^\pm \left( \nabla \varphi^\pm + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^\pm}{\partial \rho} \right) + A^\pm \left[ \Delta \varphi^\pm + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla \right)^2 \varphi^\pm \Phi^\pm \right] = 0. \quad (16a)$$

Таким образом, показано, что для сред, обладающих пространственной дисперсией, функции  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $g_0$  и  $g_1$  могут быть выражены через решения  $\varphi^\pm$  и  $A^\pm$  уравнений (15) и (16) посредством формул (36) и (37) (для недиспергирующих сред эти формулы в других обозначениях были получены ранее в [16, 17]). На больших удалениях от каустик решение (23) переходит в сумму  $u = u^- + u^+ = A^- e^{ik\varphi^-} + A^+ e^{ik\varphi^+}$ , в которой первое слагаемое отвечает падающей, а второе — отраженной волне. Если не интересоваться структурой поля в окрестности каустики, анализ выражения  $u = u^- + u^+$  дает возможность ответить на многие важные вопросы, в частности, получить условия квантования для частот собственных колебаний. Влияние каустик проявится лишь в том, что амплитуда отраженной волны  $A^+$  приобретает множитель  $e^{-i\pi/2}$  (за счет изменения знака якобиана  $D(\tau)$  при прохождении луча вблизи каустики).

Что же касается структуры поля в окрестности каустики, то пространственная дисперсия приведет к тому, что величина  $\rho$  (по существу — это аргумент функции Эйри) будет комплексной. По этой причине интегралы  $g_0 \int e^{ik\varphi} d\xi$  и  $g_1 \int \xi e^{ik\varphi} d\xi$ , выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, не будут иметь нулей при вещественных  $x, y, z$ ,

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. М. Рытову и Ю. Н. Барабаненкову за обсуждение результатов и внимание к работе.

### ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Bougrett, Canad. J. Phys., **40**, № 6, 782 (1962).
2. K. Furuichi, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1963).
3. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, **44**, № 2, 676 (1963).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. С. А. Engelbrecht, M. Fielderley, App. Phys., **42**, № 2, 262 (1967).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Либшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
7. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
8. В. П. Силин, ЖЭТФ, **44**, № 4, 1271 (1963).
9. А. Б. Михайловский, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963, стр. 141.
10. Е. Е. Ловецкий, В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **7**, № 5, 822 (1964).
11. А. А. Рухадзе, В. С. Саводченко, С. А. Тригер, ПМТФ, № 6, 58 (1965).
12. С. М. Рытов, ДАН СССР, **18**, № 4—5, 263 (1938); Тр Физического ин-та АН СССР, **2**, № 1, 41 (1940).
13. J. B. Keller, Proc. Symposia Appl. Math., **8**, Mc Grow-Hill, N. Y., 1958, p. 27.
14. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1283 (1967).
15. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, **55**, № 4 (10), 1478 (1968).
16. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, № 4, 664 (1964).
17. D. Ludwig, Comm. Pure Appl. Math., **19**, № 2, 215 (1966).
18. Ю. А. Кравцов, Акуст. ж., **14**, № 1, 1 (1968).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
9 сентября 1967 г.

### GEOMETRICAL OPTICS OF MEDIA WITH SPATIAL DISPERSION (SCALAR PROBLEM)

*Yu. A. Kravtsov*

The geometrical optics equations are derived for the medium with spatial dispersion (a scalar problem). A method of solving these equations is given. An asymptotic solution for a simple caustics expressed through Airy functions is obtained.

УДК 621.371.167

## К ВОПРОСУ О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

*Т. Л. Гутман*

Решение однородных уравнений электромагнитного поля представлено в виде интеграла по поверхности, движущейся в пространстве произвольным образом. Полученное представление используется для решения методом Кирхгофа задачи о дифракции электромагнитной волны на равномерно расширяющейся сфере

Известный в теории дифракции метод Кирхгофа основывается на представлении решения волнового уравнения в виде интеграла по некоторой поверхности от функций, характеризующих поле на этой поверхности.

В настоящей работе получено аналогичное представление для случая поверхности, движущейся в пространстве произвольным образом. Такое представление дает возможность рассчитывать методом Кирхгофа дифракцию от движущихся (расширяющихся и колеблющихся) поверхностей.

Уравнения электромагнитного поля в пространстве, свободном от источников, запишем в четырехмерной форме

$$\begin{aligned} \square A &= 0, \\ \nabla A &= 0, \end{aligned} \tag{1a}$$

где  $A (A_0, A_1, A_2, A_3)$  — четырехмерный векторный потенциал поля ( $A_0 = -\Phi$  — скалярный потенциал.  $A_1 = A_x$ ,  $A_2 = A_y$ ,  $A_3 = A_z$  — составляющие векторного потенциала);

$$\square = \sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \nabla A = \sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} x_0 &= ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad e_0 = 1, \\ e_1 &= e_2 = e_3 = -1. \end{aligned} \tag{1б}$$

Используя электромагнитный тензор  $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ , уравнения (1)

можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

Для того, чтобы выразить значение поля  $A$  в некоторой точке пространства  $(x', y', z')$  через значения  $A$  на некоторой поверхности построим, следя [1], вектор, дивергенция которого равна нулю всюду, кроме

точки  $(x'; y', z')$ , и применим к этому вектору теорему Гаусса—Остроградского. В отличие от [1], рассмотрим четырехмерный вектор  $W(x, x')$  и проинтегрируем по объему и поверхности в четырехмерном пространстве. Под  $x$  мы понимаем здесь совокупность всех координат точки в четырехмерном пространстве:  $x (x_0, x_1, x_2, x_3)$ .

Итак,

$$W_i = - \sum_{k=0}^3 e_k g_k F_{ik} + \sum_{k=0}^3 e_k A_k T_{ik} + A_i \Sigma e_k \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (3)$$

Здесь  $g_k(x' - x) = \alpha_k G(x' - x)$ ,  $\alpha(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  — произвольный постоянный четырехмерный вектор,  $G(x' - x)$  — запаздывающая функция Грина уравнения Даламбера, т. е.

$$\square G(x' - x) = \delta(x' - x), \quad (4)$$

где  $\delta(x' - x) = \prod_{i=0}^3 \delta(x'_i - x_i)$ ,  $\delta(x'_i - x_i)$  — функция Дирака.

Известно, что  $G(x' - x) = \delta[r - c(t' - t)]/4\pi r$  при  $r^2 = \sum_{i=1}^3 (x'_i - x_i)^2$ .

Через  $T_{ik}$  обозначен антисимметричный тензор

$$T_{ik} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_k}.$$

Найдя теперь  $\operatorname{div} W = \sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial W_i}{\partial x_i}$ , после несложных выкладок, учитывающих (1), (2) и (4), получим

$$\operatorname{div} W = (A \alpha) \delta(x' - x). \quad (5)$$

Вычислим далее проекцию  $W$  на направление нормали  $N$  к четырехмерной поверхности, по которой будет производиться интегрирование:

$$(NW) = \sum_{i=0}^3 e_i N_i W_i = \sum_{k=0}^3 e_k \alpha_k \sum_{i=0}^3 e_i F_{ki} N_i G + \sum_{k=0}^3 e_k \alpha_k A_k \sum_{i=0}^3 e_i \left( \frac{\partial G}{\partial x_i} N_i \right) - \sum_{i=0}^3 e_i \alpha_i N_i \sum_{k=0}^3 e_k A_k \frac{\partial G}{\partial x_k} + \sum_{k=0}^3 e_k \alpha_k \frac{\partial G}{\partial x_k} \sum_{i=0}^3 e_i N_i A_i. \quad (6)$$

Используя обозначения (16), выражение (6) можно записать следующим образом:

$$(NW) = \alpha [ (FN) + A(N\nabla) - N(A\nabla) + (NA)\nabla ] G. \quad (7)$$

В соответствии с четырехмерной формулой Гаусса—Остроградского получим

$$\left. (A(x'), \alpha) \right|_0 = \alpha \oint_S [ (FN) + A(N\nabla) - N(A\nabla) + (NA)\nabla ] G dS. \quad (8)$$

Четырехмерная поверхность  $(S)$  рассматривается как обычная поверхность, движущаяся в пространстве трех измерений [2]. Верхняя строчка равенства (8) относится к точкам  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , находящимся внутри этой поверхности в момент времени, соответствующий  $x'_0$ . Нижняя строчка равенства (8) относится к точкам вне этой поверхности в дан-

ный момент времени. Сокращая (8) на произвольный вектор  $\alpha$ , определим поле в точке наблюдения:

$$\left. \begin{array}{l} A(x') \\ 0 \end{array} \right\} = \oint_{(S)} [(FN) - N(A\nabla) + A(N\nabla) + (NA)\nabla] GdS. \quad (9)$$

Пусть  $\tilde{F}(t, x_1, x_2, x_3) = 0$  — есть уравнение гиперповерхности  $S$ . Будем рассматривать его как уравнение поверхности, каждая точка которой движется по направлению нормали со скоростью  $v_n$ , причем

$$\beta_n^2 = \left( \frac{v_n}{c} \right)^2 = \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \right)^2 \left[ c^2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Используя результаты [2], имеем следующие выражения для составляющих единичного вектора четырехмерной нормали и для элемента гиперповерхности:

$$N_0 = \frac{\beta_n}{\sqrt{1 - \beta_n^2}}, \quad N_t = \frac{\cos(x_t n)}{\sqrt{1 - \beta_n^2}}; \quad (10)$$

$$dS = \sqrt{1 - \beta_n^2} d\sigma dx_0. \quad (11)$$

Здесь  $n$  — трехмерная нормаль,  $d\sigma$  — элемент обычной поверхности в пространстве трех измерений. Учитывая приведенные соотношения, можно записать (9) в виде

$$\left. \begin{array}{l} A(x') \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \oint_{(\sigma)} d\sigma \int_{(x_0)} [(FN) - N(A\nabla) + A(N\nabla) + (NA)\nabla] \times \times \frac{[\delta(r - c(t' - t))]}{r} \sqrt{1 - \beta_n^2} dx_0 \quad (12)$$

и выполнить интегрирование по  $x_0$ .

Подробное вычисление внутреннего интеграла в (12) приведено в Приложении. В согласии с результатами вычислений для пространственных составляющих векторного потенциала и для скалярного потенциала можно получить следующие выражения:

$$A(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \oint_{(\sigma)} d\sigma \left\{ [E\beta_n - [nH]] \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} - [nA] \nabla \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{\partial}{\partial t} [nA]/r(1-\beta_{nr})}{c(1-\beta_{nr})} \nabla r - \frac{1}{cr(1-\beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} (n\Phi + A\beta_n) - \right. \\ \left. - (\beta_n\Phi + nA)\nabla \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} + \frac{\nabla r}{c(1-\beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\beta_n\Phi + nA}{r(1-\beta_{nr})} \right) \right\}; \quad (13)$$

$$\Phi(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \oint_{(\sigma)} d\sigma \left\{ (En) \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} + \beta_n A \nabla \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} + \right. \\ \left. + \Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} - \frac{\nabla r}{c(1-\beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\beta_n A + \Phi n}{r(1-\beta_{nr})} + \frac{1}{cr(1-\beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} (\beta_n\Phi + nA) \right\} \quad (14a)$$

или

$$\Phi(t', x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} d\sigma \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} - \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \right. \\ \left. + \beta_n A \nabla \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} - \frac{\nabla r}{c(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Phi n + \beta_n A}{r(1 - \beta_{nr})} \right) + \frac{A \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\beta_n \Phi)}{cr(1 - \beta_{nr})} \right\}. \quad (14b)$$

Здесь  $\beta_{nr}$  — проекция относительной скорости поверхности на направление  $r = (x' - x)i + (y' - y)j + (z' - z)k$ ;  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  — трехмерный оператор;  $E$  и  $H$  — напряженности электрического и магнитного полей;  $n$  — единичная внешняя нормаль к поверхности  $S$ , содержащая внутри себя точку  $(x', y', z')$ . Значения величин, стоящих под знаком интеграла, и сама поверхность берутся в момент времени  $t = t' - r/c$ .

Формулы (13), (14a), (14b) решают поставленную задачу. Для неподвижной поверхности формула (14) переходит в известную формулу Кирхгофа. Рассматривая (13) и (14) для неподвижной поверхности и монохроматического поля, можно получить известные для этого случая формулы [1].

Используем теперь полученные формулы для решения конкретной задачи. Пусть на идеально проводящую сферу с радиусом, меняющимся по закону  $r = vt$ , падает плоская и линейно-поляризованная волна, и нас интересует рассеяние назад в малом конусе. Выберем систему координат так, чтобы ось  $Oz$  проходила через центр сферы, была параллельна направлению распространения падающей волны и направлена в противоположную этому направлению сторону, а ось  $Oy$  совпадала с направлением поляризации падающей волны. В этой системе координат падающая волна имеет вид

$$E = \exp[-i(kz + \omega t)]j.$$

Нас будет интересовать поле в точке с радиусом-вектором  $R(x', y', z')$ ; сферические координаты этой точки в системе, обычным образом связанный с системой  $(x, y, z)$ , обозначим  $(R, \delta', \varphi')$  (рис. 1).

Для определения поля на больших расстояниях от сферы достаточно найти векторный потенциал в точке наблюдения  $A(x', y', z', t')$ . Воспользуемся для этого формулой (13). Поле на поверхности сферы определим из следующих условий.

1. В каждой точке оно равно сумме полей падающей волны и волны, отраженной от плоскости, касательной к поверхности в данной точке.

2. На самой поверхности удовлетворяются требования, соответствующие идеально проводящей расширяющейся сфере [4]:

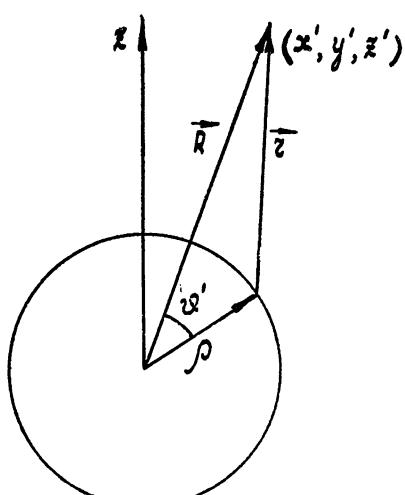


Рис. 1.

$$\{ \beta_n H - [nE] \} \rvert_s = 0.$$

Если в амплитудных множителях учесть только члены, не содержащие малого параметра  $\beta_n$ , то несложный, но громоздкий расчет приведет к следующему выражению для составляющих векторного потенциала:

$$A_i = \frac{\rho_0^2}{4\pi R} \exp[i(kR - \omega t')] \int_{(2)} d\Omega F_i(\vartheta, \varphi) \exp[ik\rho_0 \Phi(\vartheta, \varphi)], \quad (15)$$

где

$$i = x, y, z,$$

$$F_x = -2 \sin \vartheta' \cos \varphi' \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$F_y = 2(\cos \vartheta - \sin \vartheta' \sin \varphi' \sin \varphi \sin \vartheta),$$

$$F_z = 2(1 - \cos \vartheta') \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$\rho_0^2 = v^2 \left( t' - \frac{R}{c} \right)^2,$$

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = -[\cos \vartheta(1 + \cos \vartheta') + \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi')].$$

Интегрирование в (15) производится по полусфере единичного радиуса;  $k\rho_0 \gg 1$  в соответствии с условиями применимости метода физической оптики.

Вычисляя интеграл в (15) методом стационарной фазы [5] и удерживая в асимптотическом разложении только первый член, для составляющих векторного потенциала в точке наблюдения получим

$$A_x(x', y', z', t') = \frac{\rho_0 \sin \varphi' \cos \varphi'}{ikR} \exp[i(kR - \omega t')] \sin \vartheta' \exp[-2ik\rho_0 \cos(\vartheta'/2)],$$

$$A_y(x', y', z', t') = -\frac{\rho_0}{2ikR} \exp[i(kR - \omega t')] \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta'}{2} \sin \varphi' \right) \times \\ \times \exp[-2ik\rho_0 \cos(\vartheta'/2)], \quad (16)$$

$$A_z(x', y', z', t') = \frac{\rho_0}{ikR} \sin^2 \frac{\vartheta'}{2} \sin \varphi' \exp[i(kR - \omega t')] \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} \times \\ \times \exp[-2ik\rho_0 \cos(\vartheta'/2)].$$

Векторы  $E$  и  $H$  могут быть найдены по формулам [3]

$$H = \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial A}{\partial t'} I \right], \quad E = [H I],$$

где  $I(\sin \vartheta' \cos \varphi', \sin \vartheta' \sin \varphi', \cos \vartheta')$  — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения, а  $\frac{\partial A}{\partial t'} = -i\omega A$  в рассматриваемом приближении. В случае  $\vartheta' = 0$  получим известное выражение для поля, рассеянного сферой прямо назад:

$$H_x = -E_y = \frac{\rho_0}{2R} \exp[i(kR - \omega t') - 2ik\rho_0] = \frac{\rho_0}{2R} \times \\ \times \exp \left[ i(kR - \omega t') \left( 1 + 2 \frac{v}{c} \right) \right], \quad (17)$$

$$H_y = 0, \quad H_z = 0.$$

Изменение фазы в (17) можно рассматривать как эффект Доппеля, происходящий за счет движения «блестящей» точки.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление интеграла

$$I = \int_{(x_0)} d\mathbf{x}_0 [(FN) - N(\bar{A} \nabla) + A(N \nabla) + (NA)\nabla] \frac{\delta[r - c(t' - t)]}{r} \sqrt{1 - \beta_n^2}$$

проведем для  $i$ -й составляющей подынтегрального выражения; знак суммы для удобства опустим, считая, что суммирование производится по повторяющимся индексам от 0 до 3, и полагая  $n_0 = \beta_n$ :

$$J_1 = \int_{(x_0)} F_{ik} N_k e_k \frac{\delta[r - c(t' - t)]}{r} \sqrt{1 - \beta_n^2} dx_0 = c \int_{(t)} F_{ik} n_k e_k \frac{\delta[r - c(t' - t)]}{r} dt.$$

Воспользуемся соотношением

$$\delta[\varphi(t')] = \frac{1}{|\varphi'(t_0)|} \delta(t - t_0).$$

Здесь  $t_0$  — нуль функции  $\varphi(t)$ . В нашем случае  $t_0 = t' - r/c$ ,  $\varphi(t) = r - c(t' - t)$ ,  $\varphi'(t) = c \left[ 1 - \frac{vr}{cr} \right] = c(1 - \beta_{nr})$ . Символом  $\beta_{nr}$  обозначена проекция безразмерной скорости на направление  $\mathbf{r} = (x'_1 - x_1)\mathbf{i} + (x'_2 - x_2)\mathbf{j} + (x'_3 - x_3)\mathbf{k}$ .

Таким образом,

$$J_1 = \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} F_{ik} n_k e_k \Big|_{t=t'-\frac{r}{c}} = \begin{cases} \{E_i \beta_n - [nH]_i\} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} & (i=1, 2, 3,) \\ (En) \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} & (i=0) \end{cases}$$

(все величины в окончательном результате (и в последующих интегралах) берутся в момент времени  $t = t' - r/c$ ),

$$\begin{aligned} J_2 &= - \int_{(x_0)} N_i (\bar{A} \nabla) \frac{\delta[r - c(t' - t)]}{r} \sqrt{1 - \beta_n^2} dx_0 = - \int_{(t)} n_i e_k A_k \frac{\partial}{\partial x_k} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\delta(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt = - \int_{(t)} n_i \frac{A_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\delta(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt + \int_{(t)} n_i A \times \\ &\quad \times \text{grad} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} \delta(t - t_0) dt + \int_{(t)} n_i \frac{\delta'(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} A \text{grad} t dt. \end{aligned}$$

Полученные интегралы вычислим, пользуясь свойствами  $\delta$ -функции и ее производной  $\left[ \int_{(t)} \delta'(t - t_0) f(t) dt = -f'(t_0) \right]$  или интегрируя, по частям.

Итак, для  $J_2$  вычисления дают

$$J_2 = \frac{1}{cr(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial(n_i A_0)}{\partial t} + n_i A \text{grad} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} - \frac{\text{grad} r}{c(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{n_i A}{r(1 - \beta_{nr})} \right].$$

Здесь  $\text{grad} = i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3}$  —обычный пространственный оператор,  $\text{grad } t = \text{grad } r/c (1 - \beta_{nr})$ ;  $\mathbf{A}$ —трехмерный вектор-потенциал. Все величины берутся в момент  $t = t' - r/c$ ;

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{(x_0)} A_i e_k N_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\delta[r - c(t' - t)]}{r} \right] \sqrt{1 - \beta_n^2} dx_0 = \int_{(t)} A_i e_k n_k \frac{\partial}{\partial x_k} \times \\ &\times \left[ \frac{\delta(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt = \frac{1}{c} \int_{(t)} A_i \beta_n \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\delta(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt - \int_{(t)} A_i \delta(t - t_0) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt - \int_{(t)} \frac{A_i (\mathbf{n} \cdot \text{grad } t)}{r(1 - \beta_{nr})} \delta'(t - t_0) dt = - \frac{1}{cr(1 - \beta_{nr})} \times \\ &\times \frac{\partial (A_i \beta_n)}{\partial t} - A_i \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} \right] + \frac{\text{grad } r}{c(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{A_i \mathbf{n}}{r(1 - \beta_{nr})} \right]. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в интеграле  $I$  вычисляется аналогично:

$$J_4 = \int_{(x_0)} (NA) \nabla \frac{\delta[r - c(t' - t)]}{r} dx_0 = \int_{(t)} e_k n_k A_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\delta(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt.$$

Рассмотрим отдельно случаи а)  $i = 0$ ; б)  $i = 1, 2, 3$ :

$$\text{а) } J_4 = \frac{1}{c} \int_{(t)} e_k n_k A_k \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\delta(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt = - \frac{1}{cr(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} (\beta_n A_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}),$$

$$\begin{aligned} \text{б) } J_4 &= \int_{(t)} e_k n_k A_k \delta(t - t_0) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} \right] dt + \int_{(t)} e_k n_k A_k \times \\ &\times \frac{\delta'(t - t_0)}{r(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial t}{\partial x_i} dt = (\beta_n A_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} - \frac{\text{grad}_i r}{c(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \times \\ &\times \left( \frac{\beta_n A_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}}{r(1 - \beta_{nr})} \right). \end{aligned}$$

Суммируя полученные результаты, для интеграла  $I$  имеем при  $i = 0$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{(En)}{r(1 - \beta_{nr})} + \beta_n \mathbf{A} \cdot \text{grad} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} - \frac{\text{grad } r}{c(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\beta_n \mathbf{A} - A_0 \mathbf{n}}{r(1 - \beta_{nr})} \right] - \\ &- A_0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} (\beta_n A_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A})}{cr(1 - \beta_{nr})}. \end{aligned}$$

Для пространственных составляющих  $I_i (i = 1, 2, 3)$  получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} I_i &= \{E_i \beta_n - [nH]_i\} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} + \frac{1}{cr(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} (n_i A_0 - A_i \beta_n) + \\ &+ n_i \mathbf{A} \cdot \text{grad} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} - A_i \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} + \frac{\text{grad } r}{c(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \frac{A_i n - n_i A}{r(1 - \beta_{nr})} \right] + (\beta_n A_0 - nA) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r(1 - \beta_{nr})} \right) - \frac{\overline{\partial r}}{c(1 - \beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} \times \\ \times \left[ \frac{\beta_n A_0 - nA}{r(1 - \beta_{nr})} \right].$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хэнл, Мауз, Вестнфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
2. В. А. Хромов, Акуст. ж., 9, 88 (1963).
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1963.
4. Г. Бейтмен, Математическая теория распространения электромагнитных волн, Физматгиз, М., 1958.
5. М. И. Конторович, Ю. К. Муравьев, ЖТФ, 22, 394 (1952).
6. Э. Копсон, Асимптотические разложения, изд. Мир, М., 1966.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию  
16 октября 1967 г.

TO THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION ON AN ARBITRARILY MOVING SURFACE

*T. L. Gutman*

The uniform equations of electromagnetic field is solved in the form of the integral over the surface moving arbitrarily in the space. The representation obtained is used to solve the problem on diffraction of electromagnetic waves on a uniformly panning sphere by Kirchhoff's method.

УДК 538.116

## ВОЗБУЖДЕНИЕ «ОБМЕННЫХ» КОЛЕБАНИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ФЕРРИТЕ

*К. А. Рязанцев, И. А. Гилинский*

Рассмотрено излучение заряженной частицы, движущейся в ферродиэлектрике (феррите), с учетом подрешеточной структуры. В феррите, имеющем две магнитные подрешетки, наряду с обычными спиновыми волнами могут распространяться высокочастотные обменные волны. Найдена интенсивность излучения обменных спиновых волн движущимся зарядом. Показано, что излучение обменных волн значительно интенсивнее, чем обычно исследуемое излучение волн диапазона СВЧ.

Излучение, возникающее при движении заряженной частицы в ферродиэлектрике, рассматривалось (неоднократно ([<sup>1, 2</sup>] и цитированная там литература). Обычно исследуется лишь модель ферромагнетика с одной подрешеткой. Между тем ферриты обладают, даже в простейшем случае, двумя магнитными подрешетками. Подрешеточная структура слабо сказывается в области частот СВЧ-диапазона, приводя лишь к замене гиромагнитного отношения  $\gamma$  на  $\gamma_{\text{эфф}}$  (при  $H_a \ll H_0$ , т. е. при условии, когда полями анизотропии подрешеток можно пренебречь по сравнению с приложенным полем). Однако сильное обменное взаимодействие между подрешетками приводит, как известно [<sup>3</sup>], к появлению наряду с обычными (низкочастотными) спиновыми колебаниями высокочастотных («обменных») колебаний. Последние исследованы экспериментально и теоретически лишь вблизи точки компенсации спиновых моментов подрешеток, где частота обменного резонанса понижается, попадая в СВЧ-диапазон. При движении заряженной частицы в феррите должны излучаться как обычные, так и обменные спиновые волны. Если бы излучение обменных волн удалось наблюдать, то по измеренным значениям частоты излучения и частотного спектра можно было бы получить дополнительные сведения о структуре феррита и постоянной обменного взаимодействия  $\kappa$ . Цель настоящей заметки — вычислить интенсивность излучения высокочастотных спиновых волн\*.

Потери энергии на единицу пути в единичном частотном интервале при движении заряда в гиротропной магнитной среде согласно [<sup>1</sup>] равны

$$\left( \frac{dW}{dz} \right)_\phi = \frac{ie^2\omega}{2\pi c^2\beta^4\epsilon^2} \int \frac{dq}{\mu_1} \left\{ \frac{\omega^2 + \mu_1\beta^2\epsilon q - 2\mu_1\omega^2\beta^2\epsilon + (\mu_1^2 - \mu_2^2)(\omega^2 - q)\beta^4\epsilon^2}{(q - q_1)(q - q_2)} \right\}, \quad (1)$$

где

$$q = \frac{c^2 k_L^2}{\epsilon}, \quad q_{1,2} = \frac{\omega^2}{2\mu_1\beta^2\epsilon} \left\{ -[1 + \mu_1(1 - \beta^2\epsilon) - (\mu_1^2 - \mu_2^2)\beta^2\epsilon] \pm [(1 + \mu_1(1 - \beta^2\epsilon) - (\mu_1^2 - \mu_2^2)\beta^2\epsilon)^2 - \right. \\ \left. - 4\mu_1\beta^2\epsilon(\omega^2 - \mu_1\beta^2\epsilon)]^{1/2} \right\} \quad (2)$$

\* Мы отвлекаемся от того обстоятельства, что заряженная частица должна двигаться либо в канале, либо над поверхностью феррита, либо, наконец, проходить через тонкую ферритовую пластину.

$$- 4 \mu_1 ((\beta^2 \epsilon \mu_1 - 1)^2 - \mu_2^2 \beta^4 \epsilon^2)]^{1/2} \Big\}.$$

Потери энергии на излучение даются в (1) вкладом от полюсов, лежащих на положительной полуоси  $q$ . Правило обхода полюсов хорошо известно [4]. Тензор проницаемости для ферритов с двумя подрешетками имеет обычную структуру:

$$\begin{pmatrix} \mu_1; i\mu_2; 0 \\ -i\mu_2; \mu_1; 0 \\ 0; 0; 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\mu_1 = 1 - \frac{\omega^2 \sigma^2 - v^2 \rho^2}{\omega^4 - \omega^2 \alpha^2 + v^4}, \quad \mu_2 = \frac{\omega}{\Omega_0} \frac{\Omega_0^2 (\omega^2 - v^2) + \rho^2 (\sigma^2 - \rho^2)}{\omega^4 - \omega^2 \alpha^2 + v^4}, \quad (3)$$

$$\sigma^2 = (\omega_1 - \omega_2)^2 + 2(\omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_4), \quad v^2 = \omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_4,$$

$$\rho^2 = \omega_{M1} (\omega_2 - \omega_4) + \omega_{M2} (\omega_1 - \omega_3), \quad \sigma^2 = \omega_{M1} (\omega_1 - \omega_4) + \omega_{M2} (\omega_2 - \omega_3), \quad (4)$$

$$\omega_1 = \gamma_1 (H_0 + H_{a1} + \lambda M_2 + \alpha_{11} k^2 a^2 M_1), \quad \omega_2 = \gamma_2 (-H_0 + H_{a2} + \lambda M_1 + \alpha_{12} k^2 a^2 M_2),$$

$$\Omega_0 = \omega_{M1} - \omega_{M2}, \quad \omega_{M1,2} = 4\pi\gamma_{1,2} M_{1,2}, \quad \omega_3 = \gamma_1 M_1 (\lambda + \alpha_{12} k^2 a^2),$$

$$\omega_4 = \gamma_2 M_2 (\lambda + \alpha_{12} k^2 a^2),$$

$H_0$  — постоянное подмагничивающее внешнее поле;  $M_{1,2}$ ,  $H_{a1,2}$  — статические намагниченности и поля анизотропии подрешеток ( $H_0 \uparrow \mathbf{M}_1$ ,  $H_{a1}$  и антипараллельно  $\mathbf{M}_2$ ,  $H_{a2}$ );  $\lambda$  — постоянная обменного взаимодействия между подрешетками (обычно  $\lambda \gg 1$ );  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$  — постоянные обменного взаимодействия между отдельными атомами внутри подрешеток ( $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ) и для разных подрешеток ( $\alpha_{12}$ ).

Отметим, что  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в (1) являются функциями  $q$  (члены типа  $\alpha_{11} (\epsilon q/c^2 + \omega^2/v^2)$  в выражениях для частот  $\omega_{1-4}$ ). Однако для не слишком малых скоростей ( $v \geq 10^5 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$  — для частот обычного резонанса и  $v \geq 10^6 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$  для обменного) этими членами можно пренебречь и считать  $\mu_1$  и  $\mu_2$  зависящими только от  $\omega$ .

Известно, что спиновые волны — медленные, т. е. для них  $k^2 \gg \omega^2 \epsilon / c^2$ . Поскольку нас интересует именно излучение спиновых волн, достаточно ограничиться случаем медленных частиц ( $\beta^2 \epsilon \ll 1$ ). При  $\beta^2 \epsilon \ll 1$  полюс в (1) лежит на положительной полуоси только при  $\mu_1 < 0$  и определяется условием  $q = q_2$ . Беря полувычеты, соответствующие положительным и отрицательным частотам, и суммируя вклады, найдем

$$\left( \frac{dW}{dz} \right)_\omega = \frac{e^2 \omega}{2c^2} \left\{ \mu_1 \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon \mu_1} - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \right) - \frac{1}{\mu_1 \beta^2 \epsilon} \times \right. \\ \left. \times \left[ \Delta + \frac{(\mu_1 - 1)(\beta^2 \epsilon \mu_1 - 1)^2 - \mu_2^2 \beta^2 \epsilon (1 + \beta^2 \epsilon \mu_1)}{\Delta} \right] \right\},$$

причем

$$\Delta = \{[1 + \mu_1(1 - \beta^2 \epsilon) - (\mu_1^2 - \mu_2^2) \beta^2 \epsilon]^2 - 4\mu_1 [(\beta^2 \epsilon \mu_1 - 1)^2 - \mu_2^2 \beta^4 \epsilon^2]\}^{1/2}.$$

Полученное выражение должно быть разложено по степеням  $\beta^2 \epsilon$ . Окончательно получим ( $\mu_1 < 0$ ,  $\omega > 0$ )

$$\left( \frac{dW}{dz} \right)_\omega = - \frac{e^2 \omega}{c^2} \frac{\mu_2^2}{\mu_1 (1 - \mu_1)^2}. \quad (5)$$

Используя выражения (3) для  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , имеем далее

$$\left( \frac{dW}{dz} \right)_\omega = - \frac{e^2 \omega}{c^2} \frac{[\Omega_0^2(\omega^2 - v^2) + p^2(\sigma^2 - \rho^2)]^2(\omega^4 - \alpha^2 \omega^2 + v^4)}{(\omega^2 \sigma^2 - v^2 \rho^2)^2 [\omega^4 - \omega^2(\alpha^2 + \sigma^2) + v^2(v^2 + \rho^2)]}. \quad (6)$$

Поскольку постоянная обменного взаимодействия  $\lambda \gg 1$ , то обычно выполняется соотношение  $\alpha^2 \gg \sigma^2, v^2, \rho^2$ . Исключение составляет узкая температурная область, где наблюдается компенсация спиновых моментов подрешеток ( $S_1 = S_2$  или  $\gamma_1 M_1 = \gamma_2 M_2$ ). Вдали от точки компенсации частотный спектр излучения, определяемый условием  $\mu_1 < 0$ , состоит из 2-х областей.

### 1) Область высокочастотного («обменного») излучения

$$\alpha^2 < \omega^2 < \alpha^2 + \sigma^2.$$

Потери энергии в этой частотной области

$$\left( \frac{dW}{dz} \right)_\omega \simeq \frac{e^2 \omega^3}{c^2 \Omega_0^2} \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 + p^2(\sigma^2 - \rho^2)}{\alpha^4 \sigma^4} \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \sigma^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Характерной особенностью обменного излучения является (относительно) узкий спектр:  $\Delta\omega/\omega_{\min} \sim \lambda^{-1}$ . Нетрудно видеть также, что интегральная интенсивность излучения  $\int (dW/dz)_\omega d\omega$  расходится логарифмически на верхнем пределе. Эта расходимость связана с тем, что мы пренебрегли членами типа  $\sigma_1 k^2 a^2$  по сравнению с  $\lambda$  в выражениях для частот, т.е. пренебрегли обменным взаимодействием между отдельными атомами. Между тем  $k^2 \simeq -v^2/v^2 \mu$ , и при  $\mu_1 \rightarrow 0$  (верхний предел частот в (7)) такое пренебрежение незаконно. Поэтому максимальная частота излучения в (7) определяется условием  $\alpha_1 k^2 a^2 \leq \lambda$  или  $\mu_1 \geq \alpha_1 \alpha^2 / v^2 \lambda$ .

### 2) Низкочастотное излучение (обычные спиновые волны)

$$\frac{v^4}{\alpha^2} < \omega^2 < \frac{v^2(v^2 + \rho^2)}{\alpha^2}.$$

Потери энергии на низкочастотное излучение

$$\left( \frac{dW}{dz} \right)_\omega \simeq \frac{e^2 \omega^2}{c^2 \Omega_0^2} \frac{(\sigma^2 - \rho^2)^2}{v^4} \frac{\alpha^2 \omega^2 - v^4}{v^2(v^2 + \rho^2) - \alpha^2 \omega^2}. \quad (8)$$

В случае ферромагнетика с одной подрешеткой ( $M_2 = 0$ ) (8) переходит в формулу, использованную в [1]. Расходимость на верхнем пределе частот в (8) вызвана теми же причинами, что и в случае высокочастотного излучения, и так же устраняется. Сравнение выражений (7) и (8) показывает, что излучение обменных спиновых волн примерно в  $\lambda$  раз интенсивнее, чем обычных, и вероятно, может быть зафиксировано с помощью инфракрасных фотомножителей с хорошей разрешающей способностью. В первую очередь должны исследоваться иттриевые ферриты-гранаты, для которых можно ожидать хорошей прозрачности в инфракрасном диапазоне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, ЖЭТФ, 35, 561 (1958).
2. О. С. Мергелян, ЖТФ, 37, 827 (1967).
3. Ферромагнитный резонанс, сб. статей, Физматгиз, М., 1961, стр. 63.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957, стр. 441.

**EXCITATION OF "EXCHANGABLE" OSCILLATIONS BY A MOVING CHARGED PARTICLE IN FERRITE***K. A. Ryazantsev, I. A. Gilinskii*

Radiation from a charge particle moving in a ferrite is considered taking into account the sub-lattice structure. In ferrite having two magnetic sub-lattices together with the ordinary spin waves, there may propagate high-frequency "exchangable" waves. The radiation intensity of exchangable spin waves from the moving charge is found. It is shown that the exchangable wave radiation is more intensive than usually studied radiation of UHF waves.

---

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.373 : 535

### О ГЕНЕРАЦИИ СУБГАРМОНИК ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В ОПТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ

*A. E. Каплан*

С точки зрения метрологии особый интерес представляет деление частоты в световом и инфракрасном диапазонах. Деление частоты в два раза ( $n = 2$ ) осуществляется в вырожденном параметрическом генераторе [1]. Известно, с другой стороны, что в невырожденном генераторе с сосредоточенными параметрами и двумя частотами генерации ( $\omega_1 + \omega_2 = \omega_n$ ) возможно появление субгармоник высоких порядков ( $n > 2$ ) из-за нелинейных взаимодействий высших порядков между частотами генерации, в случае, когда ( $n - 1$ )  $\omega_1 \approx \omega_2$  [2]. Аналогичное положение должно иметь место и для параметрического генератора оптического диапазона.

Однако, поскольку в оптике приходится иметь дело с волновыми взаимодействиями, кроме указанных выше частотных условий необходимы еще и условия пространственного синхронизма  $k_1 + k_3 = k_n$  («параметрическое» условие) и дополнительное, чисто «субгармоническое» условие, например, ( $n - 1$ )  $k_1 = k_2$ . В случае использования в генераторе одного нелинейного кристалла такое условие «двойного синхронизма» накладывает очень жесткие ограничения на его дисперсионные свойства. По-видимому, это условие осуществимо лишь для практически бездисперсионных (в рабочем диапазоне) сред, например, газов.

Возможно, однако, такое устройство, в котором указанное ограничение снимается. Для этого необходимо, чтобы функции параметрического генератора и умножителя частоты были разделены в пространстве, т. е. выполнялись бы различными кристаллами, что приводит к независимости настройки на синхронизм в каждом из кристаллов и снимает, следовательно, требование двойного синхронизма. Устройство такого типа может быть выполнено, например, в виде невырожденного параметрического генератора, в котором внутри резонансной системы на пути луча генерации установлен нелинейный кристалл — умножитель частоты  $\omega_1$  в  $n - 1$  раз; образовавшаяся гармоника  $\omega_1(n - 1)$  при этом должна быть заведена в параметрический кристалл параллельно направлению усиления на частоте  $\omega_2$ . При выполнении указанных выше условий в системе установится субгармоническое колебание  $n$ -го порядка ( $\omega_1 = \omega_n/n$ ,  $\omega_2 = (n - 1)\omega_n/n$ ), обусловленное синхронизацией колебания на частоте  $\omega_2$  ( $n - 1$ )-й гармоникой частоты  $\omega_1$ .

Представляет интерес точность требуемой настройки параметров системы. Эффект автосинхронизации наиболее чувствителен к расстройке параметрического синхронизма  $\Delta k$ , поскольку именно она определяет частоты генерации. Расчет показывает, что ширина полосы деления по этому параметру имеет величину порядка  $\Delta k_{kp} \sim A_{1,2}/A_{1,2}l_n$ , где  $A_{1,2}$  — амплитуда ( $n - 1$ )-й гармоники частоты  $\omega_1$ ,  $A_2$  — амплитуда колебания генерации на частоте  $\omega_2$ ,  $l_n$  — длина «параметрического» кристалла (на рис. 1—П).

Расчет генерации здесь аналогичен расчету субгармонических колебаний в двухконтурном параметрическом генераторе с сосредоточенными параметрами [2] и основан на рассмотрении поведения фаз генерации при добавочном нелинейном взаимодействии между частотами. Как известно [1, 2], в двухчастотном параметрическом генераторе определена лишь сумма фаз генерации  $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_3$ . Добавочное же взаимодействие накладывает условие и на комбинацию фаз типа  $m\varphi_1 + (n - m)\varphi_3$  (где  $m$  — некоторое число, определяемое конкретной схемой), в результате чего фазы  $\varphi_1$  детерминируются, приобретая одно из  $n$  возможных значений. При этом область существования детерминированных решений для фаз в плоскости параметров системы непосредственно определяет полюс допустимых перестроек  $\Delta k_{kp}$ . Особенность оптического параметрического генератора состоит в появлении ряда собственных частот, на которых может возбуждаться генерация и которые при автосинхронизации могли бы конкурировать

друг с другом. Однако оптические длины резонатора (включая вещества) для частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в общем случае различны, в силу чего спектр возможных частот генерации путем соответствующей настройки резонатора может быть сильно «разрежен» и в идеале доведен до одной моды (как это имеет место, например, в лазерах при введении добавочных зеркал)\*. Такого рода настройка помогла бы сосредоточить практически всю мощность генерации в самосинхронизированной моде. При условии  $A_{1,2} \ll A_2$  и при точном синхронизме в умножительном кристалле  $\Delta k_{kp} \sim \chi_{n-1} A_1^{n-1} l_y k_1 / A_2 l_p$ , где  $\chi_{n-1}$  — составляющая тензора нелинейной поляризации, обеспечивающая умножение частоты  $\omega_1$  в  $n-1$  раз,  $A_1$  — амплитуда генерации на частоте  $\omega_1$  и  $l_y$  — длина умножительного кристалла (на рис. 1—У),

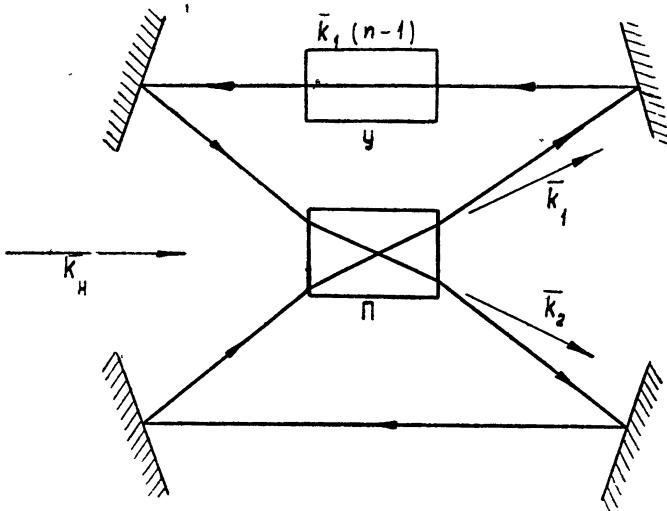


Рис. 1.

В случае деления на 3 ( $n = 3$ ), если принять, что КПД двоичного умножения составляет  $\sim 1\%$  (что вполне реализуемо при использовании, например, KDP и при мощности генерации  $\sim 100 \text{ квт}$ ), то  $A_{1,2}/A_2 \sim 10^{-1}$ , и при  $l_p \sim 1 \text{ см}$   $\Delta k_{kp} \sim 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ , что составляет вполне приемлемую величину.

Можно показать, что так же как и для генератора субгармоник с сосредоточенными параметрами [2], полоса деления по расстройке частоты накачки ( $\Delta\omega_n/\omega_n$ ) в отличие от полосы деления по расстройке собственных частот системы ( $\Delta k/k$ ) может быть сделана очень большой. При условии  $Q_1 = Q_2$ , где  $Q_i$  — добротности системы на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , полоса деления совпадает со всей полосой генерации.

Отметим, что так же, как и для генератора субгармоник с сосредоточенными параметрами, оптический генератор субгармоник  $n$ -го порядка имеет  $n$  устойчивых состояний фазы субгармоники, что может представлять интерес и с точки зрения реализации многостабильных триггеров в оптике.

## ЛИТЕРАТУРА

- С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
- А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов, Параметрические генераторы и делители частоты, изд. Сов. радио, М., 1966.

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
12 октября 1967 г.

\* Полный расчет приведен в докладе автора, сделанном на III Всесоюзной конференции по нелинейной оптике, Ереван, 1967.

## О ВЛИЯНИИ ТОРМОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЛБВ НА ДЕФОРМАЦИЮ ЛЕНТОЧНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА

*Н. Ф. Купчинов*

В работах [1, 2] описана методика исследования деформации ленточного электронного потока конечной ширины, движущегося в трубе прямоугольного сечения. Так как при этом определение деформации пучка возможно лишь методом приближенных последовательных численных интегрирований уравнений движения граничных электропроводов, то в качестве вычислительного устройства для определения переменных составляющих напряженности электрического поля  $E_x$  и  $E_y$  использовалась электролитическая ванна с токовводящими элементами. Однако в этих работах при исследовании деформации сделано предположение о неизменности продольной (вдоль оси  $z$ ) скорости движения электронов пучка. Следует заметить, что в статических режимах при достаточно большой длине трубы прямоугольного сечения, в которой движется электронный пучок, условие постоянства продольной скорости движения электронов практически выполняется.

В динамическом режиме на поведение пучка и, в частности, на его деформацию оказывают влияние силы СВЧ поля, изменение сил растяжения при группировке электронов, а также торможение электронных сгустков. Совместный учет всех эффектов динамического режима весьма сложен и пока не поддается точному описанию.

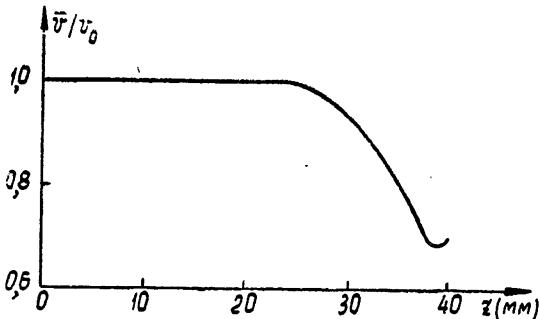


Рис. 1. Изменение средней скорости электронов вдоль пространства взаимодействия.

В данной работе проведен приближенный учет влияния торможения электронов, возникающего за счет взаимодействия с продольным СВЧ полем, на деформацию ленточного электронного пучка конечной ширины. При торможении средняя продольная скорость электронов несколько уменьшается по длине пучка, что ведет к росту пространственного заряда и изменению деформации пучка по сравнению со случаем, когда продольная скорость электронов вдоль оси  $z$  остается неизменной.

Деформация пучка с учетом изменения средней продольной скорости электронов вдоль оси  $z$  исследовалась методом, изложенным в [1]. При этом, как и в [1, 2], пучок и канал делятся на отрезки плоскостями, перпендикулярными оси  $z$ , и составляющие напряженности электрического поля  $E_x$  и  $E_y$  в пределах каждого отрезка полагаются постоянными. Продольная скорость электронов в пределах отрезка также считается неизменной. Это позволяет использовать для определения деформации пучка в пределах каждого небольшого продольного отрезка соотношения (4) — (8) работы [1].

Изменение величины продольной скорости электронов от отрезка к отрезку определялось в соответствии с режимом работы ЛБВ, а время прохождения электронами отдельных участков — с учетом изменения средней продольной скорости электронов вдоль оси  $z$ .

При моделировании соответствующих отрезков пучка в электролитической ванне расчет токов токовводящих элементов производился с учетом изменения пространственного заряда по длине пучка, вызванного изменением продольной скорости электронов.

В качестве примера в работе приводятся результаты исследования деформации пучка, имеющего поперечные размеры  $1,6 \times 0,4 \text{ mm}^2$ , движущегося в трубе прямоугольного сечения  $2 \times 0,8 \text{ mm}^2$  при ускоряющем напряжении  $U = 3000 \text{ в}$ , токе пучка

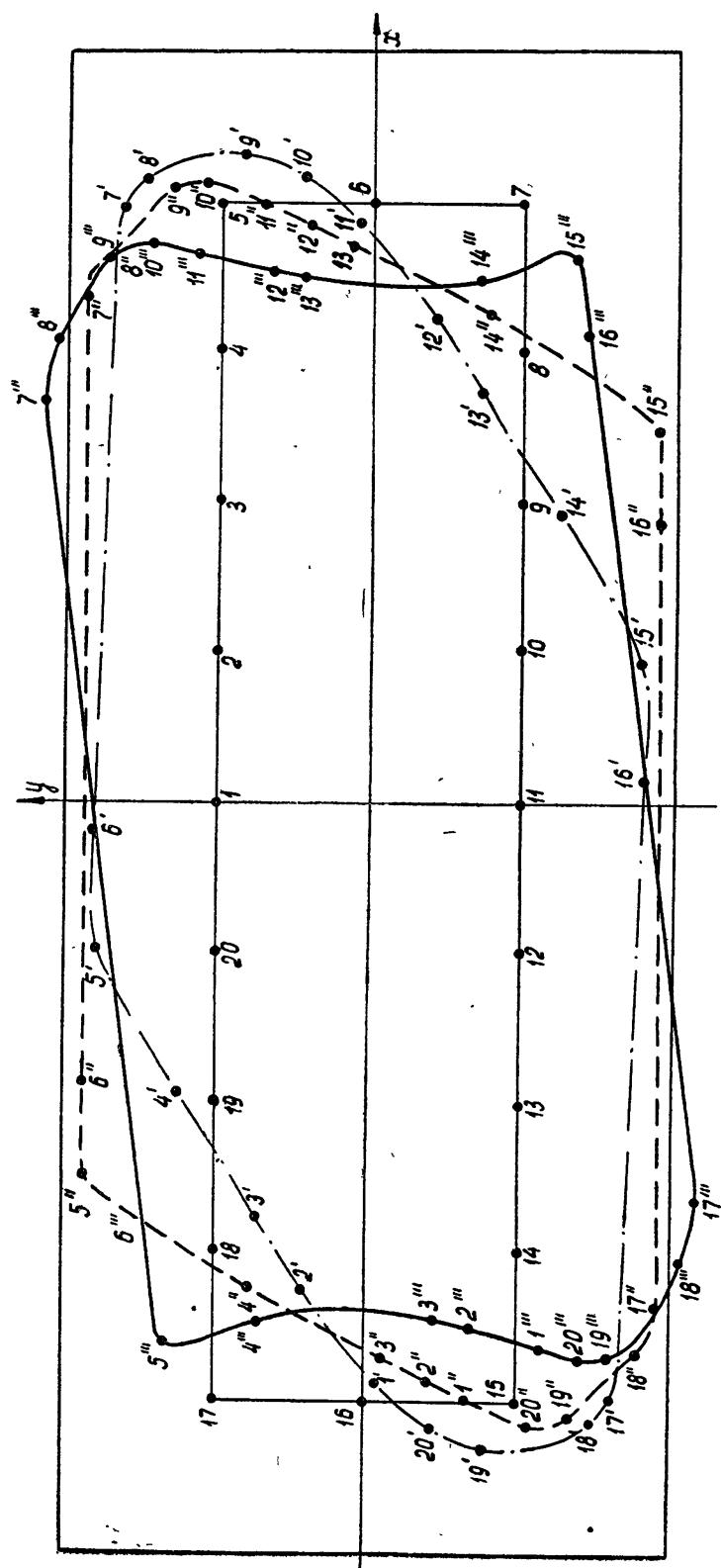


Рис. 2. Конфигурация ленточного пучка, движущегося в трубе прямугольного сечения при наличии однородного магнитного поля:  
 — — — — — на расстоянии  $z=27,84 \text{ мм}$  без учета торможения; — — — — — на расстоянии  $z=37,12 \text{ мм}$  с учетом эффекта торможения; — — — — — на расстоянии  $z=37,12 \text{ мм}$  без учета эффекта торможения.

$I = 300 \text{ мA}$ , магнитной индукции  $B = 0,25 \text{ вб} \cdot \text{м}^{-2}$ . Считается, что на входе первого отрезка пучок имеет прямоугольную форму сечения и поперечные составляющие скорости равны нулю.

Для конкретного режима работы ЛБВ изменение средней скорости электронов за счет взаимодействия с продольным СВЧ полем, рассчитанное по соотношениям, приведенным в [3], показано на рис. 1 ( $v_0$  — скорость электронов на входе в пространство взаимодействия). Из рис. 1 видно, что влияние торможения электронов имеет смысл учитывать, начиная с расстояния  $z \approx 28 \text{ мм}$ . Длина каждого из первых шести моделируемых отрезков составляла  $4,64 \text{ мм}$ . В дальнейшем это расстояние составляло  $2,32 \text{ мм}$ . Исследование деформации проводилось на модели, увеличенной в 150 раз по сравнению с оригиналом.

На рис. 2 показаны форма пучка на входе в пространство взаимодействия ( $z = 0$ ) на расстоянии  $z = 27,84 \text{ мм}$  и на расстоянии  $z = 37,12 \text{ мм}$ , соответствующем уменьшению средней продольной скорости электронов относительно скорости на входе на 27%. (Конфигурации пучка в промежуточных сечениях на рисунке не приведены) Для сравнения на этом же рисунке пунктиром показана форма пучка на расстоянии  $z = 37,12 \text{ мм}$ , полученная без учета торможения электронов. Сравнение этих кривых показывает, что эффект торможения приводит к большему провороту пучка и более быстрому оседанию электронов на стенки трубы.

Если на основании работы [4] считать, что в реальных приборах электронный поток может быть заторможен до  $v = (0,5 \div 0,6) v_0$ , то эффект торможения может оказать значительное влияние на деформацию ленточного электронного пучка конечной ширины и привести к более быстрому оседанию электронов на стенки пространства взаимодействия. Очевидно, что при определении деформации ленточных пучков, движущихся в трубах прямоугольного сечения при наличии однородного магнитного поля, и их оседания на стенках пространства взаимодействия желательно учитывать влияние торможения электронов и других эффектов, присущих динамическому режиму.

Автор считает приятным долгом поблагодарить М. И. Чугунова за помощь при проведении вычислений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. Д. Баранцева, Н. Ф. Купчинов, Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, вып. 7, 97 (1966).
2. О. Д. Баранцева, Н. Ф. Купчинов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 12, 1774 (1967).
3. Н. Ф. Купчинов, В. А. Малышев, Радиотехника и электроника, 12, № 9, 1679 (1967).
4. J. E. Rowe, C. A. Brackett, IEEE Trans., ED-12, № 8, 441 (1965).

Таганрогский радиотехнический  
институт

Поступила в редакцию  
30 июня 1967 г.