

УДК 538.56

УДАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман

1. ВВЕДЕНИЕ. СРЕДЫ И ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Изучение явлений, проявляющихся при распространении волн конечной амплитуды в средах с нелинейными параметрами, составляет в настоящее время содержание многочисленных разделов механики и электродинамики сплошных сред. Исследования, проведенные в последние годы в связи со специфическими проблемами газодинамики, физики плазмы, электродинамики нелинейных сред и нелинейной оптики, показали, что качественные особенности нелинейных волновых процессов определяются, в основном, двумя характеристиками среды: нелинейностью, приводящей к образованию локальных искажений профиля волны из-за обогащения ее спектра высшими гармоническими компонентами, и дисперсией, вызывающей расплывание волны и уменьшающей взаимодействие между отдельными гармониками.

В настоящем обзоре рассматриваются среды со слабой дисперсией и относительно сильной нелинейностью, когда в профиле волны возможно появление областей с большим (по сравнению с первоначальным масштабом) градиентом величин (полей), описывающих волну*. Наиболее характерным для таких сред нелинейным эффектом является образование ударных волн. Под ударной волной следует понимать процесс быстрого изменения («скачок») поля на некотором, в общем случае движущемся, интервале δ ; изменение поля на этом интервале описывается уравнениями более высокого (по сравнению с уравнениями в области вне δ) порядка, решение которых по обе стороны δ асимптотически стремится к различным (в масштабе δ — постоянным) значениям, связанным между собой однородными граничными условиями, не зависящими от структуры поля внутри «скачка». Как будет ясно из дальнейшего, в ударной волне всегда происходит диссипация энергии.

Теоретические и экспериментальные исследования ударных волн начались с изучения динамики нейтрального сжимаемого газа [1—4]. Позднее развитие физики плазмы, в частности, магнитной гидродинамики [5—7], привело к изучению ударных волн в среде, обладающей проводимостью. Такие волны представляют собою «скачки» не только механических и термодинамических величин, но и электромагнитного

* Во втором крайнем случае — при сильной дисперсии и малой нелинейности — нелинейность существенно оказывается на «крупномасштабных» процессах, охватывающих много периодов квазигармонической волны. Так, форма огибающих амплитуд и частоты модулированной волны в такой среде может испытывать сильные искажения; возможны, в частности, римановы и ударные «волны огибающих» [48, 64, 78]. В нелинейной оптике интенсивно изучаются также случаи «специальной» дисперсии, когда эффективно взаимодействуют лишь отдельные спектральные компоненты волны [56, 74].

поля. Однако, хотя наличие последнего играет здесь важную роль, существование магнитодинамических и плазменных ударных волн принципиально связано с макроскопическим движением среды. В уравнениях таких процессов, объединяющих уравнения газодинамики и электродинамики (последние чаще всего рассматриваются в квазистационарном приближении), наличие нелинейных членов обусловлено гидродинамическими эффектами. Для «электромагнитной ветви» волн нелинейность таких сред обычно мала, и образование ударных волн невозможно из-за наличия дисперсии.

Появление твердых материалов с ярко выраженной нелинейностью электромагнитных характеристик и дисперсией, существенной только в области сравнительно высоких частот (ферриты, сернокобальтовые, полупроводники), привлекло внимание исследователей к «чисто электромагнитным» ударным волнам (УЭМВ). Первые работы в этом направлении появились в 1958—1960 гг. [13—20]. В образовании УЭМВ макроскопические движения и изменения термодинамического состояния среды (хотя и неизбежные в принципе) играют второстепенную роль и большей частью могут не приниматься во внимание. Процессы такого рода могут быть описаны уравнениями электродинамики, дополненными феноменологическими материальными уравнениями, характеризующими электромагнитные свойства (нелинейность, дисперсию) среды*.

2. Характерные типы нелинейных материальных уравнений можно проиллюстрировать на примере феррита. При достаточно медленном (по сравнению с временем релаксации намагниченности) изменении поля связь между магнитной индукцией B и напряженностью магнитного поля H в феррите может считаться не зависящей от скорости изменения поля (квазистатической). Если пренебречь анизотропией и гистерезисными явлениями, то векторы B и H коллинеарны, а зависимость между их величинами является однозначной и нечетной (рис. 1, кривая а).

При быстром изменении поля для описания процесса перемагничивания привлекаются различные динамические модели. Так, для небольших полей пригодны уравнения, описывающие движение стенок доменов [9]. В сильном и быстро меняющемся поле, характерном для ударных волн, доменная структура несущественна, а основную роль играет прецессия вектора намагниченности M . В насыщенном феррите этот процесс описывается уравнением однородной прецессии**

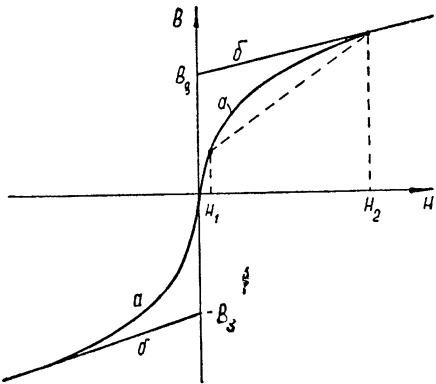


Рис. 1. Типичные характеристики намагничивания (зависимости $B(H)$ или $\Phi(I)$).

* В общем случае материальные уравнения включают в себя уравнения механики деформируемых сред и термодинамики, и полная система уравнений описывает, естественно, не только электромагнитные процессы. В дальнейшем будут рассматриваться квазиэлектромагнитные волны, а пространственная дисперсия будет учитываться лишь в тех случаях, когда она также связана с электромагнитными процессами.

** Принятая форма записи второго слагаемого в правой части (1.1), ответственного за диссипацию, по-видимому, наиболее оправдана [10]. Если принять для диссипативного члена выражение $-\lambda[M][MH]$ [33], то полученное уравнение сводится к (1.1) заменой $\gamma \rightarrow \gamma(1+\alpha)$, $\lambda \rightarrow \alpha\gamma(1+\alpha)M^2$; при малой диссипации эти выражения эквивалентны.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{MH}] + \frac{\alpha}{M} \left[\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right], \quad (1.1)$$

где M — постоянная намагниченность насыщения, γ — гиромагнитное отношение, α — коэффициент диссипации. Величина \mathbf{H} складывается из внешнего поля \mathbf{H}_e , поля анизотропии \mathbf{H}_{an} , обменного поля \mathbf{H}_{ex} и т. д.; однако во многих задачах теории УЭМВ можно пренебречь всеми внутренними полями в феррите и положить $\mathbf{H} = \mathbf{H}_e$.

Для медленных процессов $\left(\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0\right)$ из (1.1) получается квазистатическое уравнение $[\mathbf{MH}] = 0$. При этом, например, в волне, распространяющейся вдоль постоянного намагничивающего поля \mathbf{H}_0 , связь по перечным компонент H_\perp и $B_\perp = H_\perp + 4\pi M_\perp$ качественно соответствует рис. 1а. Если же скорость изменения поля сравнима с временем релаксации феррита, то, ввиду дифференциального характера уравнения связи (1.1), порядок системы уравнений, описывающих распространение волны в феррите, повышается. Физически это означает появление временной дисперсии, связанной здесь как с чисто реактивным процессом (первый член в правой части (1.1)), так и с диссипацией (второй член). Заметим, что нелинейны оба эти процессы.

Однородная прецессия намагниченности обычно возможна только при наличии сильного, по сравнению с полем волны, постоянного поля, насыщающего феррит. Если такое поле отсутствует, то возникает некогерентное перемагничивание, связанное с возбуждением спиновых и магнитостатических колебаний [12]. В этом случае прецессия \mathbf{M} локально описывается формулой (1.1), а материальное уравнение в пренебрежении пространственной дисперсией может быть получено усреднением (1.1) по достаточно большому (в масштабе длины спиновых волн) элементу объема. В результате усредненный вектор намагниченности параллелен \mathbf{H} , а изменение его величины M_h описывается уравнением

$$\frac{\partial M_h}{\partial t} = -\frac{\alpha \gamma M_h}{1 + \alpha^2} \left(1 - \frac{M_h^2}{M^2} \right) H. \quad (1.2)$$

Особенностью (1.2) является то, что все нелинейные эффекты связаны с диссипацией: при $\alpha \rightarrow 0$ нелинейность (а также дисперсия) исчезает.

Отметим еще свойство насыщения, характерное для феррита и ряда других нелинейных электродинамических материалов: независимо от конкретного механизма нелинейности в очень сильном поле среда становится линейной; это, в частности, следует из уравнений (1.1), (1.2). Это свойство позволяет упростить решение некоторых задач о распространении сильных ударных волн, отвлекаясь от конкретного вида уравнений связи в области малых полей и аппроксимируя зависимость $B(H)$ кусочно-линейной характеристикой (рис. 1, кривая б).

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для других нелинейных сред. Например, уравнения движения носителей заряда в полупроводниках позволяют выяснить механизмы нелинейности, дисперсии и диссипации в этой среде и получить феноменологическое описание ее электродинамических свойств (в простейших случаях сводящееся к нахождению эквивалентной схемы $p-n$ -перехода [80]).

3. Нелинейная система, состоящая из уравнений Максвелла и феноменологических уравнений связи типа (1.1) или (1.2), чрезвычайно сложна, и ее исследование связано в общем случае с непреодолимыми трудностями. Правда, многие явления, характерные для ударных волн

в свободном пространстве, можно изучить, рассматривая одномерные процессы (однородные плоские волны), в которых поле зависит только от времени t и одной продольной координаты z . Однако практическая применимость такой одномерной идеализации в теории УЭМВ весьма ограничена, поскольку все экспериментальные исследования в настоящее время относятся к ограниченному пространству — в частности, к двухсвязным волноводам (линиям передачи), заполненным нелинейной средой. В таких системах существенна зависимость поля от поперечных координат. Вместе с тем, волны в двухпроводных линиях с малыми (по сравнению с характерной длиной волны) поперечными размерами во многих случаях могут быть описаны телеграфными уравнениями для интегральных величин

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь I , U , Φ , Q — соответственно ток, напряжение, погонный поток индукции и погонный заряд в линии. Связь между этими величинами (материальные уравнения) в общем случае даются нелинейными интегродифференциальными операторами

$$\Phi = \Phi\{I, U\}, \quad Q = Q\{U, I\}, \quad (1.4)$$

вид которых зависит как от конфигурации проводников линии, так и от свойств заполняющей ее среды. Нелинейность и дисперсия волновода и в тех случаях, когда нелинейны оба оператора Φ и Q .

Система (1.3) приближенно применима также к волнам в «искусственных» линиях (нелинейных фильтрах), состоящих из идентичных звеньев с сосредоточенными параметрами; такие линии использовались во многих экспериментах с УЭМВ. Нелинейные дифференциально-разностные уравнения, описывающие процессы в системах с дискретными параметрами, при некоторых условиях (малость изменения величин I , U на одном звене) могут быть заменены дифференциальными уравнениями (1.3)*.

Таким образом, существует класс практически важных волновых систем, процессы в которых могут рассматриваться как одномерные и описываться уравнениями (1.3) (аналогичными по виду уравнениям плоской линейно-поляризованной волны в неограниченной среде). Поэтому в дальнейшем при изложении общих вопросов (образование, развитие, взаимодействие, структура УЭМВ) мы исходим из этих уравнений (иногда с некоторыми дополнительными членами). Как правило, мы будем предполагать, что поток Φ связан с током I , а заряд Q — с напряжением U дифференциальными уравнениями, содержащими частные производные по t (временная дисперсия) и по z (пространственная дисперсия). При этом нелинейность будет учитываться только в одном из уравнений связи. Эти предположения отвечают большинству экспериментов. Впрочем, многие из полученных результатов годятся и в тех случаях, когда нелинейны оба оператора $\Phi\{I\}$, $Q\{U\}$.

4. Следует отметить, что для динамики нелинейных волновых процессов характерны некоторые общие закономерности и общие методы исследования, не связанные с конкретной физической природой рассматриваемых явлений. В частности, первоначальные сведения об электромагнитных волнах в средах и волноводах с нелинейными параметрами могут быть получены на основе аналогии между уравнениями

* В этом смысле цепь с сосредоточенными параметрами можно рассматривать как эквивалентную схему соответствующей распределенной линии.

электромагнитных и газодинамических волн, имеющей место в простейших случаях. Эта аналогия позволяет, с одной стороны, сразу написать решение некоторых задач теории УЭМВ, а с другой — использовать для моделирования газодинамических процессов электромагнитные, экспериментальная реализация которых нередко оказывается гораздо более простой; это относится, например, к простым волнам, взаимодействию ударных волн и т. д. Наконец, отдельные теоретические методы и результаты, впервые полученные специально для УЭМВ, уже нашли применение в задачах обычной и магнитной гидродинамики.

Однако аналогии, как правило, заканчиваются там, где нужно конкретизировать вид нелинейных зависимостей. В электродинамике последние носят иной характер и более разнообразны. В еще большей степени это относится к дисперсионным свойствам сред и линий передачи: хотя в масштабах медленного процесса дисперсия мала, ее влияние на параметры (длительность, форму) самого ударного фронта является определяющим*. Все это приводит к своеобразным процессам образования и специфическим типам структур УЭМВ. Использование различных линий передачи, в частности, линий с дискретными параметрами, открывает широкие возможности для детального исследования нелинейных волновых процессов, вряд ли осуществимого для сжимаемых сред. Это, в свою очередь, способствует развитию общей теории волн в нелинейных средах.

2. ОБРАЗОВАНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕДИСПЕРГИРУЮЩИХ ВОЛНОВОДАХ (ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ)

Начнем с рассмотрения достаточно медленных процессов, для которых связь между Φ и I можно считать квазистатической (соответствующей кривой намагничения на рис. 1а). При этом (1.3) является квазилинейной системой гиперболического типа, инвариантной по отношению к таким изменениям масштаба независимых переменных, для которых $z/t = \text{const}$. Методы исследования таких уравнений базируются на теории характеристик [1, 3, 8]. С физической точки зрения здесь можно говорить об отсутствии дисперсии: в уравнениях нет каких-либо независимых временных или пространственных масштабов; в частности, малые (линейные) возмущения распространяются вдоль характеристик со скоростью, не зависящей от их частоты.

1. Простые волны и образование разрывов [14, 17, 18, 19, 21, 44, 46]. Важными частными интегралами (1.3), позволяющими проследить за образованием ударных волн, являются римановы решения (простые волны) вида**

$$I = F \left[t \mp \frac{z}{v(I)} \right], \quad U = \pm \int \rho(I) dI \quad (2.1a)$$

или

$$t \mp z/v(I) = \psi(I), \quad (2.1b)$$

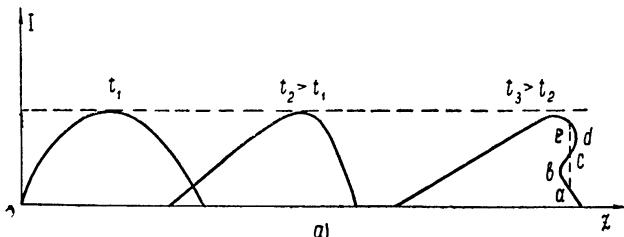
где F и ψ — произвольные функции, $v(I) = (LC)^{-1/2}$, $\rho(I) = (L/C)^{1/2}$, $L(I) = \frac{d\Phi}{dI}$.

* Дисперсия играет существенную роль и для ударных волн в плазме [22, 23, 29].

** Простые электромагнитные волны в нелинейной среде впервые были рассмотрены, по-видимому, В. Л. Германом.

Свойства волны (2.1а) хорошо изучены [1, 3]. Каждая точка ее профиля перемещается вдоль характеристики (2.1б) с постоянной скоростью $v(I)$, зависящей от величины тока в данной точке и совпадающей со скоростью малых возмущений при соответствующих значениях I .

Очевидно, на тех участках, где $\frac{\partial v}{\partial z} < 0$, крутизна профиля волны возрастет, и в некоторый момент зависимость I от z, t становится неоднознач-



ной (рис. 2а). Такая неоднозначность лишена физического смысла, и далее решение (2.1а) теряет силу. Так как система (1.3) не имеет при данных начальных условиях других непрерывных решений, то, в рамках предположения о квазистатической связи $\Phi(I)$, должен появиться разрыв непрерывности величин I, U — ударная волна. Момент t^* и координату z^* появления разрыва и соответствующее значение тока I^* можно определить из уравнений [3], связывающих эти величины в точке перегиба функции (2.1а) с вертикальной касательной:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial I} \right)_{z^*, I^*} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 t}{\partial I^2} \right)_{z^*, I^*} = 0. \quad (2.2a)$$

Подставляя (2.2а) в (2.1а), получим

$$\begin{aligned} z \frac{d(v^{-1})}{dI} + \frac{d\psi}{dI} &= 0, \\ z \frac{d^2(v^{-1})}{dI^2} + \frac{d^2\psi}{dI^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2b)$$

Искомые величины z^*, t^*, I^* даются решением уравнений (2.2б) совместно с (2.1а).

Заметим, что, хотя решение (2.1а) относится к неограниченной линии, простая волна в виде импульса конечной длительности возможна (в течение конечного времени) и в ограниченной системе; очевидно, для возникновения разрыва длина последней должна превысить z^* .

Процесс образования разрывов в результате эволюции простых волн хорошо известен в газодинамике и магнитной гидродинамике, однако экспериментальных его наблюдений, по-видимому, не проводилось. В электродинамике соответствующий эксперимент относительно несложен. Его результат для волн в коаксиальной линии с ферритом [53]

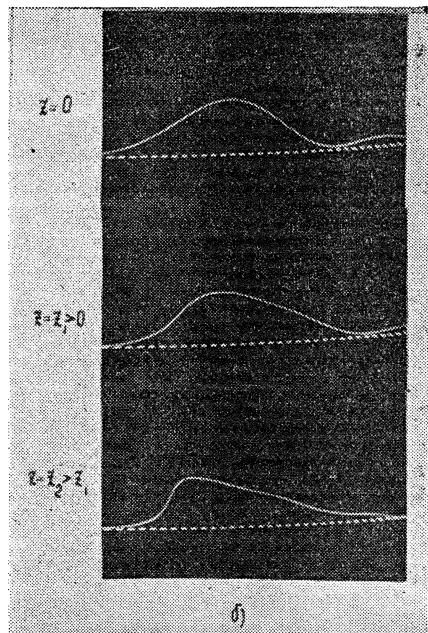


Рис. 2. а) Эволюция профиля простой волны. б) Осциллограммы напряжения $U(t)$ в различных сечениях коаксиальной линии с продольно намагниченным ферритом [53] (метки времени через 10 нсек).

представлен на рис. 2б (аналогичные результаты получены для линии с полупроводниковыми диодами [32]). Как и следует из (2.1а), при деформации импульса сохраняется его длительность на любом фиксированном уровне.

Специфический характер нелинейности в электродинамике порождает ряд особенностей процесса развития УЭМВ из простых волн. Картина, изображенная на рис. 2а, имеет место лишь в области монотонно убывающей зависимости $L(I)$. Если же ток в импульсе начинается от значения $I = I' \neq 0$ и меняет знак («рабочую точку» I' легко изменять, пропуская в линии постоянный ток), то в области изменения тока в волне кривая $\Phi(I)$ имеет точку перегиба, а $L(I)$ — максимум. Тогда возникают две ударные волны — в нарастающей и спадающей частях импульса [31, 53] (рис. 3).

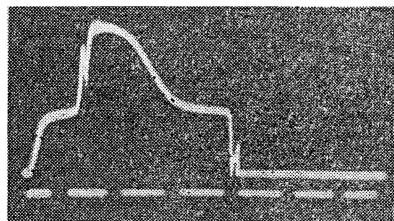


Рис. 3. Осциллограмма импульса с двумя ударными волнами [31] (метки времени через 100 мксек).

2. Границные условия на разрыве и его устойчивость [14, 17, 18, 44]. Рассматривая ударный фронт как движущийся разрыв, можно получить граничные условия, связывающие токи и напряжения по обе стороны. Интегрируя уравнения (1.3) для фиксированного момента времени по z в окрестности разрыва, найдем*

$$I_2^* - I_1 = v_p(Q_2 - Q_1), \quad U_2 - U_1 = v_p(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (2.3a)$$

Здесь v_p — скорость перемещения разрыва; индексы 1 и 2 относятся к величинам соответственно перед и за разрывом. При заданных I_1 , U_1 соотношения (2.3а) определяют зависимость между I_2 и U_2 , аналогичную адиабате Гюгонио в газодинамике (тогда как связь между I и U в простой волне соответствует адиабате Пуассона).

Если, как предполагалось, связь $Q = CU$ линейна, то скорость v_p может быть представлена функцией только граничных значений тока:

$$v_p^2 = \frac{I_2 - I_1}{C(\Phi_2 - \Phi_1)}. \quad (2.36)$$

Соотношение (2.36) допускает простую графическую интерпретацию: тангенс угла наклона прямой, соединяющей точки 1 и 2 на кривой $\Phi(I)$, равен $1/v_p^2 C$ (рис. 1). Зависимость (2.36) хорошо согласуется с экспериментом [43, 53].

Распространение УЭМВ всегда сопровождается диссипацией энергии. Чтобы показать это, достаточно записать уравнение баланса энергии для области, содержащей разрыв, и воспользоваться граничными условиями (2.3а). В результате нетрудно найти [18, 44], что диссилируемая на разрыве мощность P равна

$$P = v_p \left[\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)(I_2 + I_1)}{2} - \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi \right]. \quad (2.4)$$

* Заметим, что соотношения (2.3а) остаются справедливыми и в тех случаях, когда протяженность «скакачка» (т. е. длительность «фронта» ударной волны) становится сравнимой с поперечным размером волновода (полоскового, коаксиального и т. п.) или с постоянной времени ячейки «искусственной» линии [50].

Если зависимость $\Phi(I)$ нелинейна, то мощность P отлична от нуля и для устойчивого разрыва (см. (2.5)) положительна. Отсюда следует, что для образования УЭМВ необходимо наличие потерь «высокочастотного» типа, сказывающихся в области быстрого изменения тока и напряжения. Существенно, что P не зависит от конкретного механизма диссипации, а лишь от величины скачка.

Не все разрывы, удовлетворяющие соотношениям (2.3а), могут реально существовать. Условие устойчивости ударной волны по отношению к малым возмущениям определяется требованием равенства числа параметров, описывающих эти возмущения по обе стороны разрыва, числу связывающих их граничных условий [3]. Это условие приводит к неравенству

$$v_1 < v_p < v_2, \quad (2.5)$$

где $v_{1,2} = (CL_{1,2})^{-1/2}$ — скорости малых возмущений впереди и позади разрыва. Из (2.5) следует, например, что скачок, изменяющий поле от H_1 до H_2 на рис. 1, устойчив, обратный же скачок (от H_2 к H_1) неустойчив*.

3. Образование и развитие ударных волн в линиях с малой нелинейностью [18, 28, 47, 51]. Так как ударная волна представляет собой скачок параметров линии, от ее фронта неизбежны отражения. Поэтому после образования разрыва в бегущей волне последняя перестает быть римановой в области за разрывом (как следует из (2.5), поле перед разрывом не возмущается). Соответствующая задача сводится к интегрированию системы (1.2) совместно с условиями (2.3а). Наиболее прост случай малой нелинейности, когда связь $\Phi(I)$ имеет вид

$$\Phi = L_0 I + \tilde{\Phi}(I), \quad L_0 = \text{const}, \quad |\tilde{\Phi}| \ll L_0 I. \quad (2.6)$$

В этом случае скачок параметров линии мал, и в первом приближении решение (2.1а) остается в силе по обе стороны разрыва. Тогда, «сшивая» (2.1б) и (2.3а) вдоль траектории разрыва, можно найти зависимость величины скачка от координаты [1, 3]. Если, для определенности, $\tilde{\Phi} = -\nu L I^2$ (квадратичная нелинейность) и ток перед скачком равен нулю, то

$$z_p = z_0 + \frac{2v_0}{\nu L_p^2} \int_{I_0}^{I_p} I \frac{d\psi}{dI} dI, \quad (2.7)$$

где $v_0 = (LC)^{-1/2}$, I_p — величина скачка, z_0 — его начальное положение, $I_0 = I_p(z_0)$. Подставляя (2.7) в выражение для v_p , можно определить траекторию разрыва $z_p(t)$.

Если волна имеет вид импульса конечной длины, то интеграл в (2.7) стремится при большом z к некоторой конечной величине, зависящей от начальной формы импульса. Отсюда следует, что на больших расстояниях I_p убывает пропорционально $z^{-1/2}$. Нетрудно определить также изменение длительности τ импульса с расстоянием. Так как фронт распространяется со скоростью v_p , а в конце спада $v = v_0$, то

$$\tau = \tau_0 + \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_p} \right) dz = \tau_0 - \int_{z_0}^z \frac{\nu I_p}{2v_0} dz. \quad (2.8)$$

* Особого рассмотрения требует случай, когда линеаризация около одного из постоянных значений $I_{1,2}$ невозможна.

Здесь I_p определяется формулой (2.7). На больших расстояниях $\tau \sim z^{1/2}$, т. е. импульс, затухая, растягивается.

Полученные выражения имеют наглядный геометрический смысл. Если наряду с истинным (разрывным) решением построить неоднозначную функцию, продолжающую простую волну на интервалах времени после возникновения разрыва, то, как нетрудно показать [3], положение разрыва определяется условием сохранения площади, ограниченной кривой $I(z)$ (равенством площадей abc и cde на рис. 2а).

Более общий метод исследования бегущих волн малой амплитуды связан с рассмотрением решений, медленно изменяющихся вдоль характеристик [28, 51]. Эти решения (квазипростые волны) локально близки к (2.1а) и удовлетворяют уравнениям вида

$$\frac{\partial I}{\partial t} + v \frac{\partial I}{\partial z} = \varphi, \quad U = \int_0^I \rho dI + \zeta, \quad (2.9)$$

где φ, ζ — малые функции (равные нулю для волны (2.1а)). Подстановка (2.9) в (1.3) сводит задачу к отысканию функции φ и последующему интегрированию уравнения первого порядка (2.9). Таким способом можно учесть ряд дополнительных факторов, влияющих на деформацию волны. Так, для линии с достаточно плавной неоднородностью параметров (v, ρ явно зависят от координаты) получаем, что

$\varphi = \frac{2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} I$, и при малой квадратичной нелинейности интеграл (2.9) имеет вид

$$t - \int_{z_0}^z \frac{dz}{v_0} - \frac{I}{2} \sqrt{\rho_0} \int \frac{z_0^{-1/2}}{v_0} dz = \psi(I \sqrt{\rho_0}), \quad (2.10)$$

где ρ_0, v_0 — значения $\rho(I, z), v(I, z)$ в линейном приближении. Для однородной линии (2.10) переходит в (2.1б), а для линейной, но неоднородной эквивалентно одномерному приближению геометрической оптики:

$I = \rho_0^{-1/2} F\left(t - \int \frac{dz}{v_0}\right)$. Следовательно, формулу (2.10) можно рассмат-

ривать как одно из обобщений этого приближения на нелинейные задачи. Решение (2.10) можно обобщить и на нестационарный случай, когда параметры явно зависят от t [51]; аналогичные решения получены и для газодинамики [47].

Как и выше, из (2.10) можно получить условие образования разрыва в неоднородной нелинейной линии и проследить за его развитием в слабой волне произвольной формы. При этом оказывается, что при некоторых законах изменения ρ_0, v_0 (например, если ρ_0 экспоненциально растет) разрыв может совсем не образоваться даже в области с $\frac{\partial v}{\partial z} < 0$;

для его возникновения необходимо, чтобы амплитуда волны в начальный момент превышала некоторое значение. Кроме того, длительность импульса с разрывом на фронте в неоднородной линии не всегда неограниченно возрастает, а может стремиться к конечному значению. Отметим еще практически интересный случай, когда известно решение для бегущей волны в линии с произвольной явной зависимостью параметров от координаты и с немалой нелинейностью. Это случай «согласования» [28, 51], когда импеданс $\rho(I) = [L(I, z)/C(z)]^{1/2}$ не зависит явно от z . При этом исходная система (1.2) имеет точное решение в виде квазипростой волны, распространяющейся без отражений. Друг-

гая область приложения метода квазиродных волн относится к линиям с диссипацией, рассматриваемым ниже.

4. Распространение сильных разрывов [35, 37, 44, 51]. Если в линии развивается сильный разрыв, то задача о его распространении в волне произвольной формы в общем случае чрезвычайно сложна. Однако в электродинамике эта задача упрощается благодаря упомянутому выше свойству насыщения нелинейности, позволяющему считать, что за фронтом сильной УЭМВ свойства линии передачи линейны. Зависимость $\Phi(I)$ может быть тогда аппроксимирована кусочно-линейной функцией (ср. рис. 1б).

Представляя ток за разрывом в виде суперпозиции падающей (I^+) и отраженной (I^-) волн и пользуясь граничными условиями, нетрудно выразить все величины на разрыве через I^+ . В частности, уравнение траектории разрыва $z_p(t)$ имеет вид [37]

$$z_p + \frac{2}{\Phi_s - \Phi_1} \int_{z_0}^{z_p - v_2 t} I^+(\xi) d\xi = 0, \quad (2.11)$$

где v_2 — скорость возмущений за разрывом, Φ_1 — значение Φ перед ним, Φ_s — поток насыщения при $I = 0$. Функция $I^+(z - v_2 t)$ вблизи разрыва непосредственно задается начальными и граничными условиями. С помощью (2.11) можно тогда полностью проследить за развитием ударной волны. На рис. 4 показана картина распространения импульса,

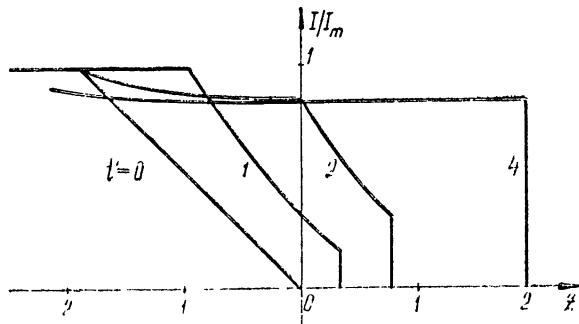


Рис. 4. Изменение формы импульса в линии с разрывной зависимостью $\Phi(I)$.

имеющего в начальный момент линейный фронт длины l $\left(I = -I_m \frac{z}{l}\right)$, $-l \leq z \leq l$ и плоскую вершину ($I = I_m$, $z < -l$) [51]; при этом одинаковый результат получается как для волны в однородной нелинейной линии, так и для импульса, проходящего границу линейной ($z < 0$) и нелинейной ($z > 0$) линий, если их параметры L_0 , C при $I \neq 0$ совпадают (тогда отражения на границе линий ($z = 0$) отсутствуют). Здесь используются безразмерные переменные $z' = 2L_0 I_m z / l$ ($\Phi_s - \Phi_1$), $t' = 2L_0 I_m v_2 t / l$ ($\Phi_s - \Phi_1$). Максимальная амплитуда ударной волны $I_{2 \max} = I_m / [1 + (\Phi_s - \Phi_1)/4L_0 I_m]$; расстояние z_{opt} , на котором достигается это значение, равно $l L_0 I_m / (\Phi_s - \Phi_1)$.

Аналогичный расчет можно провести и для зависимости $\Phi(I)$, аппроксимируемой большим числом линейных участков [37, 44]. Впрочем, в импульсе с фронтом конечной длительности ток перед разрывом мо-

жет быть отличен от нуля лишь конечное время, после чего распространение будет происходить так же, как в только что рассмотренном случае.

5. *Взаимодействие ударных волн* [17, 36, 44, 65]. Если в начальный момент ($t=t_0$) в линии распространяются две ударные волны, то после соприкосновения их фронтов (в точке $z=z_0$) картина распространения качественно изменяется из-за нелинейного взаимодействия. Так как в задаче нет параметров, зависящих от z, t в отдельности (а лишь от z/t), то в результате взаимодействия могут образоваться только волны, ток которых зависит от отношения z/t (автомодельные) [1, 3]. В случае зависимости $\Phi(I)$, изображенной на рис. 1а, возможны три типа таких волн [65]: стационарный разрыв, простая волна с расходящимися из точки z_0 характеристиками и комбинированная волна, состоящая из простой и следующей за ней ударной, граничащих между собой в точке, где $v=v_p$ (последний тип специфичен для электромагнитных волн). При этом, как нетрудно показать, в каждую сторону от точки взаимодействия распространяется только одна из указанных волн. Если тип каждой из них известен, то задача состоит в определении значений I, U в области между расходящимися волнами, что, в свою очередь, требует решения уравнений, связывающих величины в разных областях (для ударных волн это уравнение типа (2.3а)).

Общая задача о взаимодействии ударных волн, как и в газодинамике [1], может быть решена графоаналитическим методом [65]: на плоскости переменных I, U находятся точки пересечения кривых (адиабат), связывающих I и U в автомодельных волнах (для ударной волны это (2.3а)) и проходящих через точки I, II, соответствующие значениям I, U при $z \rightarrow \pm \infty$ (через каждую точку проходят две кривые, отвечаю-

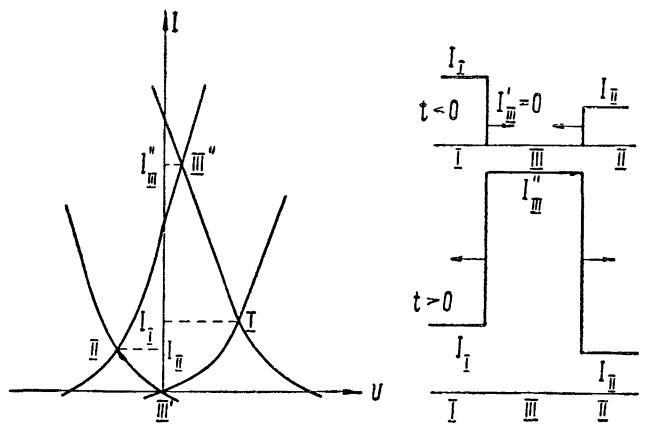


Рис. 5а. Графический анализ процесса „столкновения“ ударных волн.

щих двум направлениям распространения). На рис. 5а приведено такое построение для встречного взаимодействия ударных волн, когда в результате возникают только ударные волны. Точки пересечения адиабат определяют возможные значения I, U в области III между разрывами. Точка III' дает состояние в указанной области до взаимодействия, а точка III'' — искомый результат взаимодействия.

Все сказанное относится и к падению ударной волны на границу раздела двух различных сред или линий (эта граница является точкой

взаимодействия), с учетом того обстоятельства, что функции $\Phi(I)$ по обе стороны границы различны.

Аналитическое решение подобных задач получено лишь в немногих случаях: для линий с кусочно-линейной характеристикой намагничения [44], а также для произвольной линии в частном случае «столкновения» двух одинаковых разрывов или, что то же самое, отражения ударной волны от замкнутого конца линии передачи [36]. Заметим, что в результате отражения ток I на конце линии может сильно возрастать: его огношение к току падающего скачка может быть существенно больше значения 2, максимального для линейного случая. Эта возможность была проверена экспериментально (см. рис. 5б, где первый скачок отвечает падающей, а второй — отраженной УЭМВ на некотором расстоянии от конца [36]).

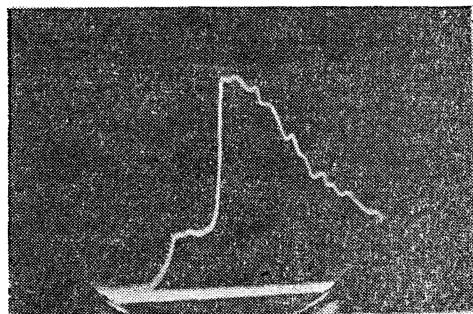


Рис. 5б. Осциллограмма тока на конечном расстоянии от короткозамкнутого конца линии передачи при нелинейной зависимости $\Phi(I)$ [36].

6. Взаимодействие малых сигналов с ударной и римановой волнами [51, 17, 47, 51]. Относительно прост случай, когда амплитуда одной из участвующих во взаимодействии волн достаточно мала. Тогда исходные уравнения могут быть линеаризованы, и задача сводится к отысканию поведения малого возмущения сигнала в поле заданной сильной волны, изменяющей параметры линии. Пусть, например, сигнал произвольной формы распространяется навстречу УЭМВ [15]. В силу (2.5) отраженная волна отсутствует. Связь между токами в падающей I'_1 и прошедшей I'_2 волнах находится с помощью метода возмущений из соотношений (1.3) и имеет вид

$$I'_2(z_p) = p^2 I'_1(z_p), \quad p = \frac{1 + v_p/v_1}{1 + v_p/v_2} \quad (2.12)$$

(z_p — координата ударной волны). Если падающая волна монохроматическая, то при переходе через разрыв ее частота возрастает пропорционально p (смещение, аналогичное допплеровскому), а амплитуда тока — пропорционально p^2 . Изменение энергии волны W обусловлено конкуренцией двух факторов: диссипации на ударном фронте и работы полья УЭМВ, изменяющего параметры среды; в результате возможно как убывание, так и возрастание W .

Задачу о взаимодействии малого сигнала с римановой волной (2.1) также удается решить в общем виде [47, 51]; метод решения связан с заменой независимых переменных $z' = z_1$, $\xi = t - z/v(I)$, позволяющей свести задачу к последовательному интегрированию уравнений первого порядка типа (2.9). Одним из следствий решения является вывод о нарастании амплитуды сигнала на участках с возрастающей крутизной. Заметим, что результаты взаимодействия сигнала с ударной и простой волнами при одинаковой величине перепада ($I_2 - I_1$) различны. Следовательно, после прохождения конечного импульса тока, содержащего ударный фронт, частота и амплитуда сигнала не возвращаются к исходному значению, и в результате взаимодействия с последовательностью импульсов эти изменения могут накапливаться.

7. О краевых задачах для нелинейных недиспергирующих линий [75, 77]. Выше рассматривались, главным образом, случаи, когда линия либо бесконечна (полубесконечна), либо настолько длинна, что на интересующем нас интервале времени возмущение не затрагивает ее границ. В задачах о нахождении непрерывных решений системы (1.2) существенную роль играют инварианты Римана J_{\pm} -функции, сохраняющиеся в простых волнах (согласно (2.1а), для системы (1.2) $J_{\pm} = U \mp \int \rho dI$). Использование инвариантов Римана позволяет определить число величин и область их задания, необходимые для корректной постановки краевой задачи [3]. Решение последней может быть сведено к интегрированию линейного уравнения с переменными коэффициентами [3, 75]. Для этого нужно «обратить» уравнения (1.3), умножив их на якобиан $\frac{\partial(z, t)}{\partial(I, U)}$. Рассматривая теперь I , U как независимые переменные и вводя функцию $\chi(I, U)$, согласно формулам $t = \frac{\partial \chi}{\partial I}$, $Cz = -\frac{\partial \chi}{\partial U}$, получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial U^2} - \frac{1}{\rho^2(I)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial I^2} = 0. \quad (2.13)$$

В другом варианте метода независимыми считаются переменные Римана J_{\pm} , тогда (1.2) приводится к каноническому виду [75]

$$\frac{\partial^2 t}{\partial J_+ \partial J_-} - \frac{1}{8L\sqrt{L}} \frac{\partial L}{\partial I} \left(\frac{\partial t}{\partial J_+} + \frac{\partial t}{\partial J_-} \right) = 0 \quad (2.14)$$

(или аналогичному для z). Для некоторых аппроксимаций функции $L(I)$ уравнения (2.13), (2.14) могут быть проинтегрированы при различных краевых и начальных условиях. В частности, для (2.14) решается задача Коши [75, 77].

Уравнения (2.13) или (2.14) содержат все интегралы исходной системы, кроме простых волн. Действительно, согласно (2.1а), в простой волне I и U связаны однозначными соотношениями; при этом $\frac{\partial(z, t)}{\partial(I, U)} = 0$, и указанное здесь преобразование невозможно. Следовательно, простые волны представляют класс особых интегралов системы, разделяющих области аналитически различных решений. В частности, в отсутствие разрывов только простая волна может граничить с областью постоянных значений I , U [3].

3. ВЛИЯНИЕ ПОТЕРЬ НА НЕЛИНЕЙНУЮ ДЕФОРМАЦИЮ ВОЛН

Как было показано выше, на фронте ударной волны всегда диссириуется энергия. Поэтому учет потерь, вообще говоря, принципиален при исследовании ударных волн и во всяком случае обязателен для отказа от «разрывной» идеализации и изучения структуры ударного фронта.

Учет диссипации приводит либо к добавлению в системе (1.2) новых членов, либо к замене квазистатической связи $\Phi(I)$ более сложной дифференциальной или интегродифференциальной зависимостью. При этом в уравнениях (1.2) появляются независимые параметры с размерностью времени, и характер волнового процесса зависит от соотношения между его характерным временным масштабом и величиной указанных параметров. Иными словами, потери с необходимостью вносят

и некоторую дисперсию. С этой точки зрения можно выделить различные типы диссипативных процессов; особенности их влияния на нелинейную деформацию волны поясняются ниже.

1. Потери в области низких частот [24, 28]. Рассмотрим сначала случай, когда потери сказываются, главным образом, при небольших скоростях изменения тока и напряжения. Такие потери несущественны в области фронта УЭМВ (допускают существование разрывов), но влияют на процесс ее формирования. Примером диссипативных параметров этого типа являются сопротивления проводников линии и проводимость утечки заполняющей среды, а также объемная проводимость в неограниченной среде. Аналогичными свойствами обладает искусственная линия в виде цепи звеньев с постоянными элементами R , G , включенными так, как показано на рис. 6а.

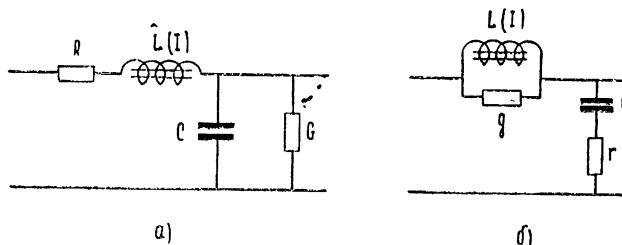


Рис. 6. Простейшие схемы линий:

а) с „низкочастотными“ потерями, б) с „высокочастотными“ потерями.

При учете низкочастотных потерь к первому и второму уравнениям (1.3) должны быть добавлены соответственно члены GU и RI ; связь $\Phi(I)$ по-прежнему считаем квазистатической. Простые волны (2.1а) здесь невозможны, но, если нелинейность и потери достаточно малы, то для решения данной задачи можно воспользоваться методом квазипростых волн (ср. п. 3 раздела 2), т. е. искать решение, удовлетворяющее уравнению первого порядка (1.10). В данном случае последнее (при малой квадратичной нелинейности) имеет вид

$$\frac{dI}{dz} + v_0^{-1}(1 - \alpha I) \frac{\partial I}{\partial z} = -Is, \quad s = \frac{1}{2} \left(G\rho_0 + \frac{R}{\rho_0} \right). \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) имеет общий интеграл вида

$$I = \exp(-sz) F \left\{ t - \frac{z}{v_0} - \frac{\alpha I}{sv_0} [\exp(sz) - 1] \right\}. \quad (3.2)$$

Задавая ток при $z = 0$ (или при $t = 0$), можно проследить за возникновением и дальнейшим развитием разрыва. Если, например, $I(0, t) = I_m \sin(\omega t)$, то разрыв возникает при $I^* = 0$ в точке

$$z^* = \frac{1}{s} \ln \left(1 - \frac{s\rho_0}{\omega I_m} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Формула (3.3) определяет конечное значение $z^* > 0$ только при $s\rho_0 < \omega I_m$, т. е. для волны достаточно большой амплитуды. В противном случае ударная волна образоваться не может: затухание препятствует существенной нелинейной деформации ее профиля. На достаточно большом расстоянии общее затухание приведет к тому, что нелинейность перестанет играть заметную роль. Результирующая форма волны дале-

ка от исходной, в ней подчеркнуты высшие гармоники, затухающие слабее.

При очень высоких скоростях изменения тока следует учитывать, что R и G изменяются; так, R растет вследствие скин-эффекта. Можно, однако, показать, что потери остаются при этом «низкочастотными» в указанном смысле, т. е. не сказываются в области фронта УЭМВ и допускают существование разрывов [50].

2. Потери в области высоких частот [24, 51]. Иначе проявляется влияние потерь, сказывающихся в области быстрых изменений величин. Достаточно медленные процессы происходят в этом случае так же, как в недиссипативной линии; возможны, в частности, простые волны. Однако на участках с увеличивающейся скоростью изменения тока диссипация растет, ограничивая минимальную длительность этих участков. В результате вместо скачка образуется ударный фронт конечной длительности. Именно таким образом влияет вязкость среды в газодинамике. В электромагнитном случае высокочастотные потери связаны, например, с релаксацией намагниченности в феррите или с последовательным (по отношению к $p-n$ -переходу) сопротивлением полупроводникового диода. К этому же типу относится проводимость утечки между витками катушки индуктивности.

Рассмотрим сначала относительно простой случай постоянных (линейных) потерь, описываемых элементами r и g на эквивалентной схеме (рис. 6б).

В математическом отношении учет высокочастотной диссипации приводит к повышению порядка исходных уравнений: в уравнениях (1.3) появляются соответственно члены $rC \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t}$ и $g \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t}$.

Метод квазипростых волн в случае достаточно малых потерь и малой квадратичной нелинейности здесь дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial z} + v_0^{-1}(1 - \chi I) \frac{\partial I}{\partial t} &= -\delta \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t}, \\ \delta &= \frac{1}{2} (rC + gL_0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Это уравнение параболического типа, показывающее, что учет r и g приводит к процессу диффузационного типа. После замены

$$\tau = t - \frac{z}{v_0}, \quad z' = z, \quad I = \frac{2\delta L_0}{\chi U} \frac{\partial U}{\partial \tau}$$

(3.4) сводится к линейному уравнению теплопроводности, решение которого может быть представлено интегралом Фурье. Так, для граничного условия $I(0, t) = I_m \sin(\omega t)$ имеем [24]

$$U = \frac{\sqrt{v_0}}{2 \sqrt{\pi \delta z}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{\chi I_m}{2\omega\delta} \cos(\omega y) - \frac{(\tau - y)^2}{2\delta z} v_0 \right] dy. \quad (3.5)$$

Качественное рассмотрение, подтверждающееся решениями типа (3.5), показывает, что при достаточно большой длительности начальной волны процесс распространения можно разбить на три характерных этапа.

а) Профиль простой волны медленно искажается; скорость изменения тока и напряжения мала, потери несущественны.

б) В простой волне появляется участок с резким изменением тока, где потерями пренебречь нельзя (диссипативный член в (3.4) становится одного порядка с нелинейным). Вместо скачка образуется перепад конечной ширины, который и представляет собой ударную волну. Структура ее может быть изучена в «стационарном» приближении. Именно, полагая ток зависящим от $\xi = t - z/v_p$, $v_p = \text{const}$, получим [51]

$$\frac{I - I_2}{I - I_1} = \exp \left[-\frac{\gamma(I_2 - I_1)}{2\delta} \xi \right], \quad (3.6)$$

где $I_{1,2}$ — значения тока при $\xi \rightarrow \mp\infty$. Величины $I_{1,2}$ связаны с v_p граничными условиями (2.4). Последнее обстоятельство позволяет рассматривать распространение в простой волне ударного перепада, счиная последний скачком, и непосредственно использовать в этом случае результаты п. 3 раздела I, так как соответствующее решение «сшивается» со стационарным решением, описывающим изменение тока внутри перепада.

в) На очень больших расстояниях общие потери энергии сравнимы с полной энергией волны, и тогда говорить об ударной волне как о резком перепаде тока не имеет смысла. Далее амплитуда волны уменьшается настолько, что нелинейность вообще перестает играть заметную роль. Если волна при $z = 0$ была синусоидальной, то на этом этапе волна снова синусоидальна с той же частотой (высшие гармоники затухают сильнее); импульс же неограниченно расплывается.

3. *Диссипативный механизм образования УЭМВ* [37, 44]. В рассмотренных выше простейших случаях можно было отделить влияние реактивной нелинейности, приводящей к образованию скачков, от влияния линейных потерь, так или иначе препятствующих этому процессу. Однако для электродинамики типичны и более сложные случаи, когда нелинейны и диссипативные, и реактивные параметры среды. Тогда разделить их влияние на деформацию волны трудно. В частности, сама возможность образования участков с большой крутизной может быть обусловлена нелинейностью потерь. Именно так обстоит дело при некогерентном перемагничивании феррита, описываемом уравнением (1.2). Исходная система состоит в этом случае из уравнений (1.2) и (1.3) (порядок ее снова выше, чем в квазистатическом случае), причем можно положить, что $\Phi = L_0(I + bM_h)$, где $b = \text{const}$. Вводя функцию

$J = \int_{-\infty}^t Idt$ и пользуясь методом квазипростых волн, можно получить уравнения первого порядка для функции J [37]

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v_0 \frac{\partial J}{\partial z} = -\Gamma \frac{\exp(\delta J) - 1}{a \exp(\delta J) + 1}, \quad (3.7)$$

где δ , a , Γ — постоянные коэффициенты, зависящие от конфигурации линии, начального значения намагниченности и коэффициента потерь в феррите. Уравнение (2.7) справедливо при малой нелинейности, однако это требование сводится здесь не к малости амплитуды волны, а к малости потерь на перемагничивание по сравнению с полной энергией волны; импульс тока в линии должен быть достаточно мощным и протяженным для быстрого насыщения феррита.

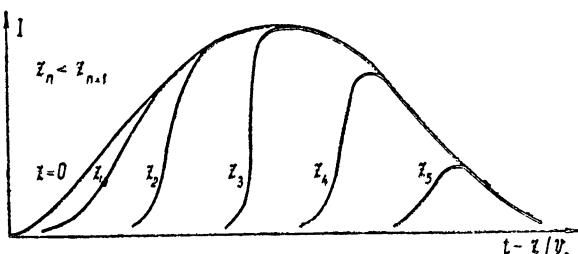
Задавая граничные условия $J(0, t) = \tilde{J}(t)$, найдем интеграл (3.7) в неявной форме:

$$\exp\left(\frac{a\delta J}{a+1}\right) - \exp\left(-\frac{\delta J}{a+1}\right) = \left[\exp\left(\frac{a\delta\tilde{J}(\tau)}{a+1}\right) - \exp\left(-\frac{\delta\tilde{J}(\tau)}{a+1}\right) \right] \times \exp\left[-\frac{\delta z}{v_0(a+1)}\right], \quad (3.8a)$$

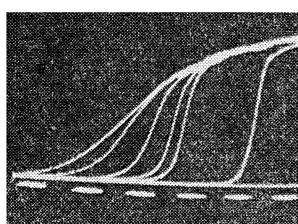
$$I(z, t) = \tilde{I}(\tau) \left[\frac{a \exp(\delta\tilde{J}(\tau)) - 1}{\exp(\delta\tilde{J}(\tau)) - 1} \right] \left[\frac{\exp(\delta J) - 1}{a \exp(\delta J) - 1} \right]. \quad (3.8b)$$

Здесь $\tau = t - z/v_0$, $\tilde{J}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} I(\tau') d\tau'$ — функция, задаваемая условием на

входе линии. На рис. 7а приведена качественная картина деформации импульса тока, соответствующая (3.8а), (3.8б). На переднем участке импульса происходит перемагничивание и, следовательно, диссирируется энергия; остальная часть импульса распространяется без искажения. Длительность начального участка τ_p уменьшается по мере его продвижения в область больших I . При малых τ_p его можно рассматривать как ударную волну, которая, как можно показать, описывается граничными условиями (2.3а), (2.4) (здесь всегда $I_1 = 0$). Механизм образования такого перепада, очевидно, существенно отличается от обычной эволюции простой волны и с самого начала связан с диссипацией (в частности, длительность импульса на фиксированном уровне здесь сокращается). Как и в п. 2, структура УЭМВ может быть найдена в стационарном приближении, когда $I = I(t - z/v_p)$; этот вопрос рассмотрен в п. 3 раздела 4. Поскольку за фронтом ударной волны феррит насыщен, то для описания ее распространения в «разрывном» приближении применимы результаты п. 4 раздела 1, полученные для линий с кусочно-линейной характеристикой намагничивания.



а)



б)

Рис. 7. а) Изменение профиля волны при диссипативном механизме образования УЭМВ. б) Осциллограммы напряжения на выходе коаксиальной линии с ненасыщенным ферритом при различных длинах участка с нелинейными параметрами [53]. Метки времени через 50 мсек.

Следует отметить, что в большинстве проводившихся экспериментов [42, 53] деформация импульса в линиях с ферритом соответствовала описанному здесь процессу. На рис. 7б приведены совмещенные осциллограммы тока импульса в разных точках коаксиальной линии с ферритом [53]. Соответствие рис. 7а и 7б очевидно*.

4. СТРУКТУРА СТАЦИОНАРНЫХ УЭМВ

Ударные волны с бесконечно малой длительностью фронта, описываемые разрывными решениями телеграфных уравнений (1.3), могут образоваться лишь в том случае, если линия передачи обладает исчезающе малой дисперсией в диапазоне очень высоких (точнее, сколь угодно высоких) частот. Отсутствию дисперсии соответствует, в частности, принятное в разделе 2 при изучении вопроса о возникновении разрывов в профиле простой волны допущение, что операторы (1.4), связывающие в уравнениях (1.3) погонный поток Φ и погонный заряд Q с током I и напряжением U , могут быть заменены «квазистатическими» уравнениями связи, записывающимися в виде однозначных функций $\Phi = \Phi(I)$, $Q = Q(U)$.

Однако, благодаря инерционности процессов поляризации и намагничения (например, из-за возникающей при больших скоростях перемагничивания затухающей прецессии вектора намагниченности (1.1)), а в ряде случаев и благодаря конструктивным особенностям линии передачи (например, проявляющейся при высоких частотах дискретности параметров многозвенной «искусственной» линии), всегда имеется некоторая предельная частота (длина волны), начиная с которой дисперсия становится существенной. Это означает, что при быстрых изменениях напряжения и тока в операторах (1.4) существенную роль играют члены типа производных по продольной координате z и времени t . Телеграфные уравнения в этом приближении уже не имеют разрывных решений, а полная длительность и особенности структуры УЭМВ определяются конкретным видом операторов (1.4), т. е., в конечном счете, нелинейностью и дисперсией (в частности, дисперсией, связанной с диссипативными процессами) линии передачи.

Учет дисперсии в области высоких частот увеличивает, вообще говоря, порядок уравнений, описывающих распространение волны, и чрезвычайно усложняет их общее исследование. Лишь при специальных предположениях о характере дисперсии и нелинейности (см., например, разделы 2, 3) удается проследить за деформацией бегущей волны и образованием в ее профиле относительно резких перепадов, соответствующих ударным волнам. Однако и в общем случае решение задачи значительно облегчается тем, что, по самому определению ударной волны, ее длительность мала по сравнению с масштабами, характеризующими изменение напряжения и тока вне резкого перепада. Это позволяет рассматривать процесс образования и развития ударной волны в «разрывном» приближении, пренебрегая высокочастотной дисперсией и используя граничные условия (2.3а), исключающие область быстрого изменения напряжения и тока, а затем исследовать структуру этой области, т. е. структуру самой ударной волны, считая процесс стационарным (такой метод был уже использован, в частности, в предыдущем разделе при решении задачи о влиянии высокочастотных потерь). В стационарной волне, скорость которой v_p постоянна и определяется граничными условиями (2.3а), все величины зависят лишь от одной переменной $\xi = t - z/v_p$.

* Диссипативный механизм образования УЭМВ, аналогичный рассмотренному, характерен и для линий с сегнетоэлектрическими конденсаторами [61].

это не только облегчает исследование решений телеграфных уравнений при сравнительно общих предположениях, но и позволяет судить о структуре и длительности ударных волн даже в тех случаях, когда задача вообще не может быть сведена к уравнениям типа (1.3), (1.4).

1. Общие свойства стационарных УЭМВ [39, 69]. а) Если нелинейные операторы $\Phi\{I, U\}$ и $Q\{U, I\}$ (1.4) эквивалентны системе дифференциальных уравнений с частными производными по времени t (временная дисперсия) и по продольной координате z (пространственная дисперсия), то стационарные волны описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из ((1.3), (1.4) заменой

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\frac{1}{v_p} \frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$\begin{aligned} U - U_1 &= v_p(\Phi - \Phi_1), & I - I_1 &= v_p(Q - Q_1), \\ \Phi &= \bar{\Phi}\{I, U\}, & Q &= \bar{Q}\{U, I\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\bar{\Phi}$ и \bar{Q} — дифференциальные операторы, получающиеся из (1.4) в результате указанной выше замены, а I_1 и U_1 — значения тока и напряжения при некотором значении координаты $\xi = \xi_1$.

Для ударной волны естественно принять I_1 и U_1 равными значению соответствующих величин перед фронтом (или позади него), т. е. при $\xi_1 \rightarrow -\infty$ (или $\xi_1 \rightarrow +\infty$). Нетрудно видеть, что состояниям перед ударной волной и позади нее соответствуют особые точки (положения равновесия) системы (4.1). Структура волны описывается фазовой траекторией, соединяющей эти точки, а скорость v_p находится как собственное значение соответствующей краевой задачи*. Таким образом, структура УЭМВ определяется однозначно, если в фазовом пространстве системы (4.1) существует единственная (особая) траектория, соединяющая положения равновесия, соответствующие «подножию» и «вершине» ударной волны.

Вопрос о существовании такой особой траектории (в том частном случае, когда система (4.1) второго порядка, такой траекторией является сепараториса, т. е. одна из особых точек должна быть седлом) удается решить в общем виде [39], если операторы $\bar{\Phi}\{I, U\}$ и $\bar{Q}\{U, I\}$ для предельно медленных процессов $\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow 0\right)$ переходят в однозначные функции $\Phi(I)$, $Q(U)$ (однозначные квазистатические уравнения связи). Интересно отметить, что необходимое условие существования и единственности структуры УЭМВ в точности совпадает с условием устойчивости (2.5) разрывных решений («скакков») относительно малых возмущений, т. е. полностью определяется функциями $\Phi(I)$, $Q(U)$ и не зависит от характера дисперсии; при учете дисперсии стационарных ударных волн, соответствующих неустойчивым разрывам, просто не существует.

Для линий передачи с временной дисперсией, а также в тех случаях, когда стационарные УЭМВ в линии передачи с временной и пространственной дисперсией описываются системой (4.1) второго порядка, условия (2.5) оказываются достаточными, если положения равновесия, соответствующие «подножию» и «вершине» ударной волны, являются «ближайшими» на ударной адиабате, т. е. не разделены другими положениями равновесия [69]. Этот вывод справедлив, по-видимо-

* Естественно, что такое определение v_p сбывает с определением, даваемым граничными условиями (2.3а).

му, и в общем случае, поскольку требование «близости» особых точек, отвечающих начальным и конечным значениям напряжения и тока в ударной волне, соответствует условию устойчивости разрывного решения (в приближении, не учитывающем дисперсию) относительно возмущений конечной амплитуды. Разрыв, в котором начальное и конечное состояния не являются «ближайшими» в указанном выше смысле, расщепляется на соответствующее число скачков, удовлетворяющих этому требованию (рис. 8).

б) Хотя условия существования стационарной ударной волны, как уже было отмечено выше, не зависят от характера дисперсии в области

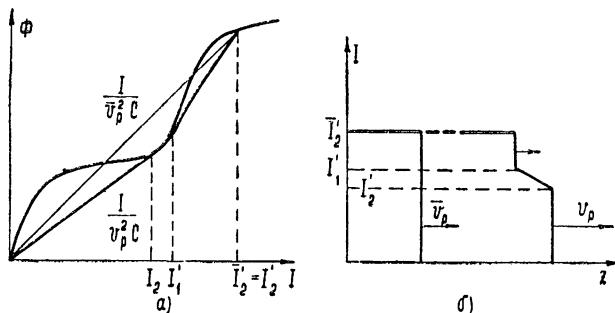


Рис. 8. Распад разрыва, начальная и конечная точки которого не являются «ближайшими» на кривой $\Phi(I)$.

высоких частот (малых длин волн), ее общая длительность и структура определяются операторами $\bar{\Phi}$ и \bar{Q} , конкретный вид которых непосредственно связан с дисперсионными свойствами линии передачи. Полное качественное, а тем более количественное исследование структуры УЭМВ возможно лишь в простейших случаях, когда система (4.1) сводится к одному или двум дифференциальным уравнениям первого порядка; применение численных методов для исследования стационарных УЭМВ также связано с определенными трудностями, так как они описываются особыми траекториями этих уравнений.

Однако некоторые соображения о структуре «подножия» и «вершины» ударной волны можно высказать, рассматривая уравнения (4.1), линеаризованные в окрестности соответствующих особых точек. Характеристические уравнения для комплексных частот ω , определяющих фазовые траектории вблизи этих точек, могут быть записаны в виде условия равенства скорости распространения ударной волны фазовым склоностям $v_{1,2}^{(\Phi)}$ волн малой амплитуды (с комплексными волновыми числами $\beta_{1,2}$ и комплексными частотами ω) перед фронтом УЭМВ (индекс 1) и позади него (индекс 2):

$$v_{1,2}^{(\Phi)} \equiv \omega / \beta_{1,2}(\omega) = v_p. \quad (4.2a)$$

Отметим, что, поскольку фазовая траектория, определяющая стационарную ударную волну, должна выходить из точки 1 и приходить в точку 2, она может определяться лишь теми корнями уравнения (4.2a), для которых

$$\operatorname{Im} \omega_1^{(k)} > 0, \quad \operatorname{Im} \omega_2^{(k)} < 0. \quad (4.3)$$

Иными словами, волны, возбуждающиеся на фронте УЭМВ, должны затухать при удалении от него.

Условиям (4.3) могут удовлетворять несколько корней характеристических уравнений (4.2а), т. е. может существовать несколько различных комплексных частот, при которых фазовая скорость волн малой амплитуды у «подножия» и «вершины» ударной волны равна v_p , а амплитуда убывает при удалении от фронта УЭМВ. К сожалению, не представляется возможным установить общий критерий, позволяющий по структуре фазового пространства в окрестностях особых точек определить начало и конец той единственной траектории, которая описывает стационарную ударную волну*. Можно лишь утверждать (на основании критерия устойчивости быстрого перепада напряжения и тока в линии передачи с дисперсией [39]), что общая длительность фронта УЭМВ τ не должна быть меньше Ω^{-1} , где Ω — наименьший по модулю корень (4.2а), удовлетворяющий условиям (4.3)**. Расчет в тех случаях, когда он возможен [30, 69] (см. также п. 3 настоящего раздела), и эксперимент [53] показывают, что обычно $\tau \sim (3 \div 4) \Omega^{-1}$.

Существует, однако, относительно широкий класс систем, для которых уравнения (4.2а) имеют два «удаленных» малых по абсолютной величине корня $\omega_{1,2}^{(1)} = \Omega_{1,2}$. Если $|\Omega_{1,2}| \ll |\omega_{1,2}^{(k)}|$ ($k \neq 1$), то, за исключением особых случаев, именно эти корни определяют начало и конец искомой фазовой траектории, т. е. структуру «подножия» и «вершины» ударной волны. Особая роль малых по модулю «удаленных» корней характеристических уравнений обусловлена (с точки зрения интерпретации ударной волны как результата нелинейного взаимодействия большого числа нормальных волн с различными частотами) тем, что волны с более высокой частотой слабо возбуждаются относительно плавным ($\sim \Omega^{-1}$) перепадом напряжения и тока, движущимся со скоростью v_p .

Приведенные выше соображения о длительности фронта УЭМВ и о структуре ее «подножия» и «вершины» могут быть распространены не только на сложные системы (состоящие из нескольких линий передачи с конечной критической частотой, связанных с основной линией), но и на волноводы, в которых изменения погонного потока и заряда описываются неодномерными уравнениями (например, в линиях с дисперсией, обусловленной неоднородным в поперечном сечении диэлектриком или магнетиком), а также на волноводы, вообще не описываемые телеграфными уравнениями (например, линии с дискретными параметрами). В таких линиях передачи возможны, вообще говоря, волны нескольких типов, и комплексные частоты колебаний, которые могут возбуждаться на начальном и конечном участках УЭМВ, совпадают с корнями уравнений

$$\omega/\beta_i(\omega) = v_p, \quad (4.26)$$

являющихся естественным обобщением (4.2а) (здесь i — индекс, указывающий тип волны). Остальные рассуждения остаются в силе; в частности, при наличии у системы (4.2б) пары «удаленных» корней $\Omega_{1,2} (|\Omega_{1,2}| \ll |\omega_{(i),1,2}^{(k)}|)$, удовлетворяющих условиям (4.3), структура начального и конечного участков УЭМВ определяется волнами соответствующего типа с комплексными частотами $\Omega_{1,2}$ и комплексными волновыми числами $\Omega_{1,2}/v_p$. При этом следует различать два основных случая.

1) Групповые скорости волн, соответствующих частотам $\Omega_{1,2}$, меньше их фазовых скоростей ($v_{1,2}^{(p)} < v_{1,2}^{(\Phi)}$). При этом оказывается, что $\operatorname{Re} \Omega_1 = 0$, и на переднем участке УЭМВ напряжение и ток монотонно

* В некоторых случаях выбор такой траектории достаточно очевиден, например, если соответствующая особая точка является седлом.

** Особый случай, когда $\Omega = 0$ [39, 69], в дальнейшем не рассматривается.

нарастают по экспоненциальному закону. Частота Ω_2 при достаточно малом затухании может быть комплексной, т. е. за фронтом УЭМВ возможно появление затухающих (вдали от фронта — квазигармонических) колебаний.

2) Групповые скорости волн, соответствующих $\Omega_{1,2}$, большие фазовых ($v_{1,2}^{(rp)} > v_{1,2}^{(\Phi)}$). В этом случае $\operatorname{Re}\Omega_2 = 0$, комплексной величиной может быть только Ω_1 ; соответственно колебания могут появиться только на переднем участке УЭМВ.

Возможны, конечно, и смешанные случаи (например, $v_1^{(rp)} > v_1^{(\Phi)}$, $v_2^{(rp)} < v_2^{(\Phi)}$) с соответствующими структурами ударных волн.

2. Основные типы структур УЭМВ [26, 30, 62, 69, 70]. Для линий передачи с достаточно простыми законами дисперсии порядок системы (4.1), описывающей стационарные ударные волны, невысок (одно-два уравнения первого порядка), и возможно ее полное качественное исследование. Рассмотрение таких частных примеров позволяет не только проиллюстрировать основные типы УЭМВ (классифицируемых по виду «подножия» и «вершины») и их связь с дисперсионными характеристиками линии передачи, но и исследовать детали структуры и длительность самого фронта ударной волны.

а) Линия передачи с временной дисперсией [20, 69]. Простейшим примером линии передачи с временной дисперсией может служить линия, схема которой показана на рис. 9. Если допустить, что связь потока Φ с током I квазистатическая ($\Phi(I, U) = \Phi(I)$) и дисперсия полностью определяется конструкцией линии (наличием индуктивности L), то система (4.1) сводится к одному уравнению второго порядка

$$LC \frac{d^2I}{d\xi^2} + RC \frac{dI}{d\xi} + \{(I - I_1) - Cv_p^2 [\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0. \quad (4.4)$$

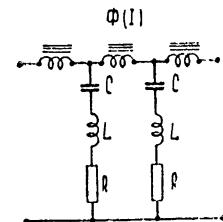


Рис. 9. Схема простейшей линии с временной дисперсией.

Структура фазовой плоскости уравнения (4.4) при $I_1 = 0$, $\Phi'(I) > 0$ и $\Phi''(I) = -\Phi'(-I)$ (зависимость $\Phi(I)$ аналогична приведенной на рис. 1а зависимости $B(H)$) показана на рис. 10. Особая точка $I = I_1 = 0$, соответствующая «подножию» волны, всегда является седлом; «вершина» ($I = I_2$) соответствует (в зависимости от величины затухания) устойчивый узел, фокус или центр. Сепаратриса, соединяющая эти особые точки, определяет структуру фронта УЭМВ.

При сильном затухании волн в линии ($R^2C > 4L[1 - v_p^2C\Phi'(I_2)]$) ток монотонно меняется от I_1 до I_2 (рис. 10а). Если же потери достаточно малы ($R^2C < 4L[1 - v_p^2C\Phi'(I_2)]$), то вблизи «вершины» волны появляются осцилляции (рис. 10 б, г). Вначале эти колебания могут существенно отличаться от гармонических, но по мере удаления от переднего края фронта их амплитуда уменьшается, а сами они приближаются к квазигармоническим. При этом их комплексная частота и волновое число совпадают с частотой и волновым числом (найденными в линейном приближении) для волны с действительной фазовой скоростью, равной скорости v_p .

При уменьшении затухания (величины сопротивления R) область с существенно негармоническими колебаниями растет, а сами они приближаются к набору уединенных волн (солитонов), являющихся точным решением в линиях без диссипации (сепаратриса на рис. 10в).

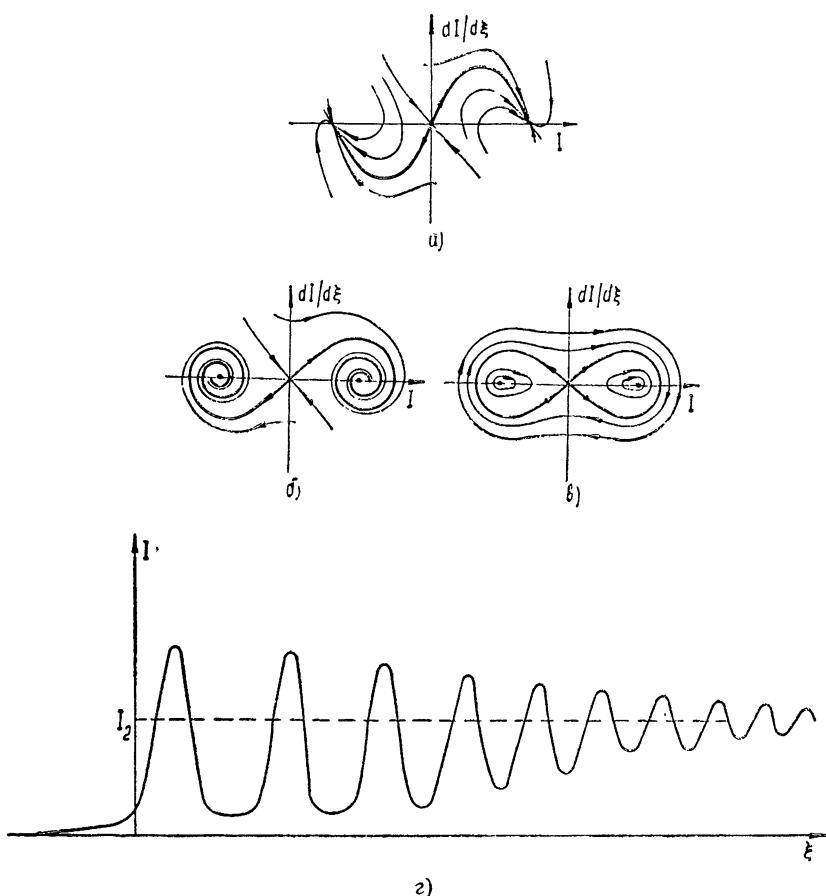


Рис. 10. Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн и структуры УЭМВ в линии с временной дисперсией (рис. 9):
 а) при сильном затухании, б) при слабом затухании, в) в линии без диссипации, г) структура фронта УЭМВ, соответствующая случаю б).

б) Линии с пространственной дисперсией [26, 30, 69]. При нелокальной связи погонного потока Φ и заряда Q с током и напряжением групповая скорость возмущений, возбуждающихся в области фронта УЭМВ, может быть больше скорости самой ударной волны v^* вследствие осцилляции возникающих на переднем участке ее фронта (у «подножия»). Такая ситуация может иметь место, например, в линии передачи, изображенной на рис. 9, при условии, что между ее ячейками введена индуктивная связь. Наличие такой связи приближенно (для систем с малыми ячейками) учитывается в уравнениях (1.4) членами, содержащими производные по продольной координате. Для рассматриваемого примера эти уравнения имеют вид [69]

$$\Phi = \Phi(I) - \tilde{L} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}, \quad Q = CU - RC \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Здесь \tilde{L} — коэффициент, пропорциональный взаимной индуктивности между последовательными ветвями ячеек; индуктивность L для просто-

ты положена равной нулю*. С учетом (4.5) система (4.1) сводится к уравнению второго порядка [69]

$$\tilde{L}C \frac{d^2I}{d\xi^2} - RC \frac{dI}{d\xi} - \{(I - I_1) - Cv_p^2 [\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0. \quad (4.6)$$

При $\tilde{L} < 0$ структура фазовой плоскости этого уравнения аналогична структуре фазовой плоскости уравнения (4.4), т. е. влияние временной и пространственной дисперсии на структуру УЭМВ качественно одинаково. Если же $\tilde{L} > 0$, то при достаточно малом R точка $I_1 = 0$ становится неустойчивым фокусом (рис. 11б), т. е. колебания возбуждаются перед фронтом ударной волны (рис. 11в) (в этой области, естественно, $v^{(rp)} > v^{(\Phi)}$). Колебания на переднем участке фронта УЭМВ наблюдались в эксперименте с коаксиально-спиральным волноводом, заполненным ферритом (рис. 12) [53].

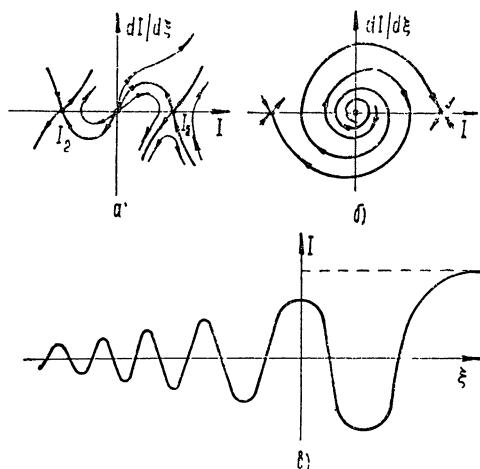


Рис. 11. Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн в линии с пространственной дисперсией:

а) при сильном затухании, б) при слабом затухании, в) соответствующая последнему случаю структура УЭМВ.

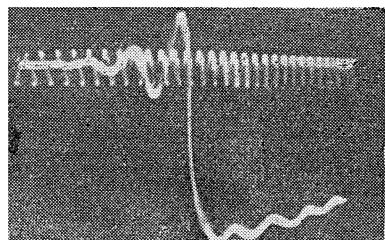


Рис. 12. Осциллограмма напряжения на выходе коаксиально-спиральной линии с ферритом [53] (метки времени через 5 нсек.).

Другим примером линии передачи с пространственной дисперсией могут служить многозвенные «искусственные» линии, наиболее часто применяемые в экспериментальных работах по УЭМВ. В таких линиях (описываемых дифференциальными-разностными уравнениями) пространственная дисперсия обусловлена периодичностью структуры; приближенно (для не слишком быстрых процессов) такую дисперсию можно учесть, заменив разностные уравнения дифференциальными, содержащими производные конечного порядка по продольной координате [26, 30]. Исследование этих приближенных уравнений, описывающих структуру «подножия» и «вершины» УЭМВ, показывает, что в этом случае, как и в линиях с временной дисперсией, колебания могут возбуждаться только вблизи «вершины», т. е. а зонтом УЭМВ [26, 30]. Решение за-

* При $L \neq 0$ в линии могут существовать волны как с $v^{(rp)} < v^{(\Phi)}$, так и с $v^{(rp)} > v^{(\Phi)}$; поэтому колебания (с разными частотами) могут возбуждаться одновременно и у «подножия» и на «вершине» УЭМВ.

дачи численными методами [40, 41], а также ряд экспериментов [43], подтверждают, что влияние пространственной дисперсии, связанной с дискретностью параметров линии, на формирование и структуру УЭМВ аналогично влиянию временной дисперсии.

в) Линии с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы [70]. Если в линии передачи есть элементы, характеризуемые существенно различными постоянными времени, то уравнения связи (1.4) могут содержать малый параметр μ при старшей производной. Процессы, протекающие на фронте ударной волны в таких линиях, можно в некоторых случаях разделить на быстрые и медленные. При этом быстрые процессы проявляются как разрывы в решении приближенных ($\mu = 0$) уравнений медленных движений, а при исследовании быстрых процессов изменением медленных переменных можно пренебречь. Аналогичная в этом смысле ситуация известна в газодинамике и динамике плазмы (см., например, [11, 22, 23]). Отметим, что использование той или иной идеализации при составлении уравнений в большинстве случаев связано с пренебрежением высшими производными.

Поэтому важно установить критерий, позволяющий судить о появлении быстрых процессов на основе анализа «замедленных» ($\mu = 0$) уравнений, а также выяснить расположение скачков в профиле ударной волны, описываемой в этом приближении.

Проиллюстрируем основные закономерности появления скачков на примере линии с двумя шунтирующими ветвями (рис. 13), постоянные времени которых существенно различны ($\tau_1 = R_1 C_1 \ll \tau_2 = R_2 C_2$). Уравнение стационарных волн в этом случае можно записать в виде [70]

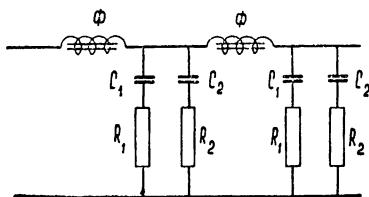
$$\begin{aligned} \tau_1 \tau_2 \frac{d^2 I}{d\xi^2} + \tau_2 [1 + \tau_1 \tau_2^{-1} - v_p^2 (C_1 + C_2 \tau_1 \tau_2^{-1}) \Phi'(I)] \frac{dI}{d\xi} + \\ + \{(I - I_1) - (C_1 + C_2) v_p^2 [\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рис. 13. Схема простейшей линии с „замедленным“ (при $\tau_1 = R_1 C_1 \ll \tau_2 = R_2 C_2$) возбуждением одной из внутренних степеней свободы.

При $\tau_1 \rightarrow 0$ (4.7) переходит в уравнение первого порядка.

Структура фазовой плоскости уравнения (4.7) при $\tau_1 \rightarrow 0$, $I_1 = 0$ и монотонной $\Phi(I)$ показана на рис. 14 при различных скоростях v_p и, следовательно, различных амплитудах ударной волны. Она оказывается существенно зависящей от соотношения между v_p и фазовыми скоростями малых возмущений бесконечно большой $v^{(\infty)}(0) = [C_1 \Phi'(0)]^{-1/2}$ и бесконечно малой $v^{(0)}(0) = [(C_1 + C_2) \Phi'(0)]^{-1/2}$ частот, определенных с помощью приближенных уравнений связи ($\tau_1 = 0$) при $I_1 = 0$. Если $v^{(0)}(0) < v_p < v^{(\infty)}(0)$, то на фазовой прямой уравнения медленного движения ($\tau_1 = 0$) между положениями равновесия I_1 , I_2 нет никаких особенностей, т. е. оно имеет непрерывное решение, соответствующее стационарной ударной волне (рис. 14а).

Картина качественно меняется при $v_p > v^{(\infty)}(0)$, $v^{(0)}(0)$. В этом случае (рис. 14в) $I_1 = 0$ является устойчивым положением равновесия уравнения медленных движений, а на фазовой прямой этого уравнения появляется точка стыка фазовых траекторий $I = J$. Значение J определяется уравнением $v^{(\infty)}(J) = v_p$. Изображающая точка из $I_1 = 0$ переносится через точку стыка фазовых траекторий скачком. Конечная точка



скакка I_2^* определяется граничными условиями на скачке, которые легко получить из (1.3), заметив, что Q_2 за время скачка не меняется:

$$I_2^* = v_p C_1 U_2^*, \quad U_2^* = v_p \Phi(I_2^*).$$

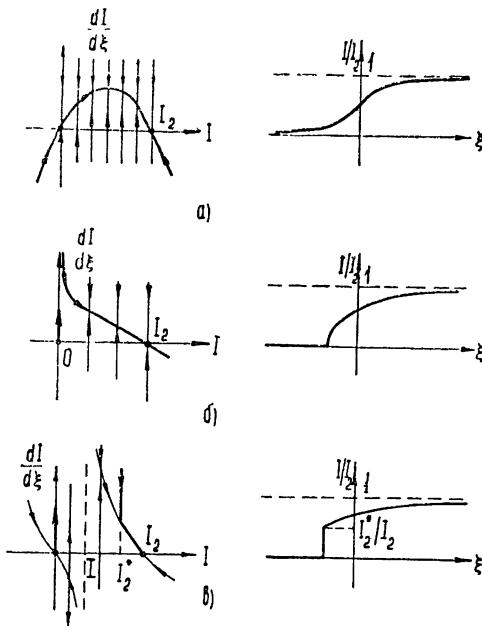


Рис. 14. Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн в линии, показанной на рис. 13, и соответствующая структура УЭМВ:

- а) при $v_0(0) < v_p < v(\infty)(0)$; б) при $v_0(0) < v_p = v(\infty)(0)$;
в) при $v_0(0) < v(\infty)(0) < v_p$.

Начиная с I_2^* , ток в линии медленно приближается к постоянному за фронтом ударной волны значению I_2 . Такой характер структуры фронта в линии с двумя шунтирующими ветвями подтверждается экспериментом [70].

Оказывается, что и в общем случае на сравнительно широком фронте ударной волны могут возбуждаться «быстрые» процессы (в разрывном приближении — скачки), если между положениями равновесия, соответствующими начальному и конечному состояниям УЭМВ, есть поверхности стыка фазовых траекторий уравнений медленных движений. Эти особые поверхности определяются соотношениями

$$v_p = v^{(\infty)}, \quad v^{(\infty)} = (C^{(\infty)} L^{(\infty)})^{-1/2}. \quad (4.8)$$

Здесь $C^{(\infty)}$, $L^{(\infty)}$ и $v^{(\infty)}$ — погонная емкость, индуктивность и фазовая скорость малых возмущений бесконечной частоты, определенные как функции точек фазового пространства медленных движений.

В зависимости от нелинейных характеристик параметров линии таких поверхностей может быть несколько. Но всегда (для устойчивых ударных волн) оказывается возможным построить единственное разрывное решение приближенных уравнений, соответствующее стационарной ударной волне. Существенно, что минимальное число скачков в этом решении и некоторые особенности расположения их начальных и ко-

нечных точек можно определить, зная лишь уравнения (4.8) и порядок неустойчивости положений равновесия уравнений медленных движений [70].

3. Особые типы ударных волн [30, 37, 44, 63, 69, 81, 82]. Если квазистатические уравнения связи не сводятся к однозначным непрерывным функциям, граничные условия (2.3а) могут содержать дополнительные независимые величины. В этих случаях сделанные выше общие утверждения о существовании и единственности стационарных ударных волн, вообще говоря, неприменимы и необходимо специальное рассмотрение. Такая ситуация характерна, в частности, для некоторых систем с нелинейной диссипацией.

а) *Линия с ненасыщенным ферритом* [37, 44, 69]. Предположим, что дисперсия и нелинейность линии определяются ферритом, намагниченность которого изменяется за счет некогерентного вращения, описываемого уравнением (1.2). Образование УЭМВ в такой линии рассматривалось в п. 3 раздела 3. Особенность уравнения связи в квазистатическом случае заключается в том, что функция $\Phi(I)$ в точке $I=0$ может принимать любые значения в пределах некоторого интервала $|\Phi| \leq \Phi_s$; значение $\Phi_0 = \Phi(0)$ независимо задается начальной намагниченностью M_0 в линии. В областях $I > 0$, $I < 0$ функции $\Phi(I)$ аналитически различны ($\Phi = L_0 I \pm \Phi_s$); при заданном M_0 зависимость $\Phi(I)$ дается разрывной функцией (рис. 1б). Граничные условия (2.3а) и выражение для скорости скачка (2.3б) сохраняются, однако в них появляется указанный выше независимый параметр Φ_0 (или M_0); необходимо учесть также, что скачок начинается всегда от значения $I=0$.

Уравнения стационарной ударной волны в данном случае могут быть приведены к виду [69]

$$\frac{dm}{d\xi} = q_0(1 - m^2) h, \quad h \left(1 - \frac{v_p^2}{v_0^2}\right) = 4\pi\eta \frac{v_p^2}{v_0^2} (m - m_0). \quad (4.9)$$

Здесь $h = \frac{KI}{M}$, $m = \frac{M_h}{M}$, $v_0 = [L_0 C]^{-1/2}$, $q_0 = \frac{\alpha\gamma M}{1 + \alpha^2}$, а параметры K и η зависят от геометрии линии.

Уравнение (4.9) имеет три положения равновесия: $m_1 = m_0$, $h_1 = 0$ (состояние перед фронтом УЭМВ) и $m_2 = \pm 1$, $h_2 = 4\pi\eta v_p^2 (\pm 1 - m_0) \times (\nu_0^2 - \nu_p^2)^{-1}$ (состояния за фронтом УЭМВ). Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $h_2 > 0$ (волна положительной полярности). Тогда решение (4.9), соединяющее два указанных выше положения равновесия, записывается в следующем неявном виде:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{h_2^2} \left(\frac{1 - m_0}{1 + m_0}\right)^{1-m_0} \left(1 - \frac{h}{h_2}\right)^{-(1+m_0)} \left(1 + \frac{h}{h_2} \frac{1 - m_0}{1 + m_0}\right)^{\dot{m}_0 - 1} = \\ = \frac{m - m_0}{(1 + m)^{1-m_0} (1 - m)^{1+m_0}} = \exp [2(1 + m_0) q_0 h_2 \xi]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует, что h и m меняются монотонно на всем интервале $-\infty < \xi < +\infty$. Формула (4.10) (как и соответствующие формулы (3.6) для нестационарных процессов) хорошо согласуется с результатами экспериментов по определению длительности и скорости фронта УЭМВ в линиях с ненасыщенным ферритом [43, 53].

Заметим, что при учете дисперсии, связанной с конфигурацией линии передачи (например, с периодичностью ее параметров), порядок уравнений повышается, и тогда фронт УЭМВ может содержать осцилляции [30].

б) Линии с активными параметрами [63, 81, 82]. Особый класс составляют также системы с активными элементами, наличие которых может привести к возрастанию энергии волны. Рассмотрим линию, изображенную на рис. 15а, содержащую, наряду с нелинейной индуктивностью, нелинейный активный элемент. Вольтамперная характеристика последнего $I_R(U_R)$ (отвечающая, например, туннельному диоду) имеет падающий участок (рис. 15б).

Следует заметить, что в активной системе возможны процессы, качественно отличные от УЭМВ, в частности, процессы автоколебательного типа [72, 79]. Однако при определенных начальных и граничных условиях в таких системах могут распространяться и ударные волны. Особенность последних в данном случае связана с неоднозначностью зависимости $Q(U) = C_1(U - U_{Ri}) + C_2U$, где U_{Ri} ($i = 1, 2, 3$) — значения U_R , при которых $I_R = 0$.

Уравнения стационарных волн в рассматриваемой линии имеют вид

$$\frac{dU_1}{d\xi} = \frac{I_R(U_R)}{v_p C_1}; \quad (4.11a)$$

$$\frac{dI}{d\xi} = I_R + \frac{1}{rv_p} \left(\frac{C_1}{C_2} v_p U_1 + v_p^2 \Phi - \frac{I}{C_2} \right); \quad (4.11b)$$

$$v_p \Phi(I) = U_1 + U_R. \quad (4.11c)$$

(Обозначения ясны из рис. 15а.) Для определенности в (4.11а) — (4.11в) принято, что все величины при $\xi \rightarrow -\infty$ равны нулю.

Величины в положениях равновесия системы (4.11а) — (4.11в) связаны граничными условиями (2.3а), (2.3б) с дополнительным параметром $U_{Ri} = U_R(\xi \rightarrow \infty)$, принимающим три значения. Этим значениям отвечают три типа ударных волн, удовлетворяющих условию устойчивости в квазистатическом приближении (2.5). Однако при учете дисперсии ($I_R \neq 0$) положение равновесия с $U_R(\xi \rightarrow \infty) = U_{R2}$, очевидно, неустойчиво относительно возмущений конечной частоты; интересно, что соответствующего стационарного решения системы, приводящего к значению U_{R2} , не существует вообще.

Качественный анализ системы (4.11а) — (4.11в) наиболее прост и нагляден в случае, когда $r \rightarrow 0$, т. е. возможно замедленное возбуждение активной степени свободы. В этом случае движения на фазовой плоскости (Φ, U_1) можно разделить на медленные, происходящие в окрестности кривой

$$C_1 v_p U_1 = I - C_2 v_p^2 \Phi(I), \quad (4.12)$$

и быстрые — вдоль прямых $U_1 = \text{const}$. Положениями равновесия являются точки пересечения кривой (4.12) и прямых (4.11в).

Разрывную фазовую траекторию, соответствующую стационарной волне, легко построить, если учесть, что экстремумы кривой (4.12)

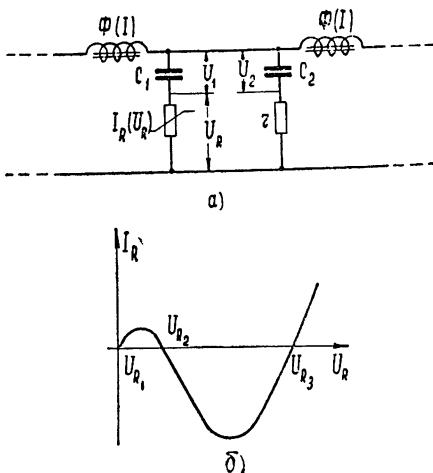


Рис. 15. а) Схема линии с активным элементом. б) Вольт-амперная характеристика активного элемента (зависимость $I_R(U_R)$).

являются точками стыка фазовых траекторий медленных движений, а положение равновесия $U_1 = 0, \Phi_1 = 0$, соответствующее области перед ударной волной, устойчиво относительно этих движений. Вследствие этого движение начинается скачком вдоль оси Φ до ее пересечения с кривой (4.12). Возможные типы структуры фронта ударной волны в порядке нарастания ее амплитуды показаны на рис. 16. Случаи 1, 3, 4 удалось наблюдать экспериментально (см., например, фото на рис. 16).

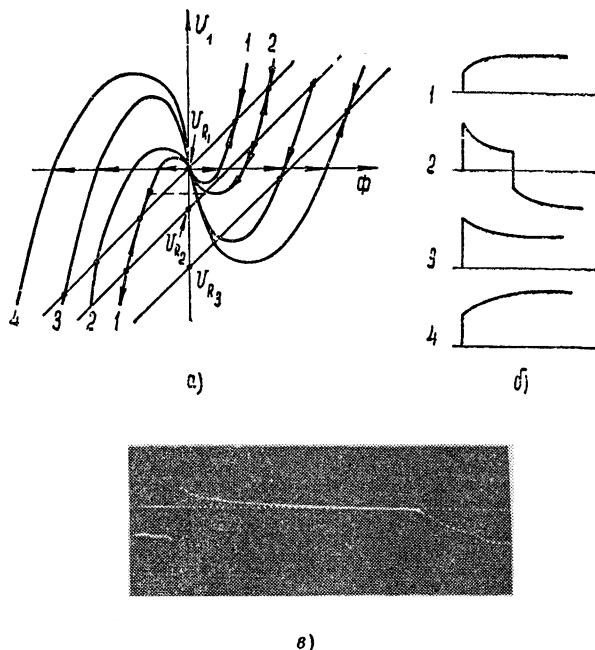


Рис. 16. а) Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн в линии с активным элементом при возрастании (от 1 к 4) амплитуды УЭМВ. б) Соответствующие структуры УЭМВ. в) Осциллограмма напряжения на выходе линии при $U_{R2} < U_2 < U_{R3}$. Метки времени через 50 нсек.

Режим 3, когда в области за скачком активный элемент отдает энергию волне, имеет близкую аналогию с волнами детонации в газодинамике, где за обычной ударной волной имеется область горения [2]. В частности, структура волн детонации качественно совпадает с показанной на рис. 16в. Волна 3 имеет и другую аналогию: подобную форму приобретает волна огибающей бегущего светового импульса в нелинейной активной среде [73]. Отметим, что в активных линиях без реактивной нелинейности УЭМВ невозможны, однако возможно возникновение быстрых процессов другого типа [45].

4. *Об ударных волнах в многопроводных (связанных) линиях передачи* [54]. Телеграфные уравнения (1.2), содержащие, с учетом (1.4), две зависимые переменные I, U , справедливы для волноводов с двухсвязным поперечным сечением (двухпроводные линии). Волны в волноводах с многосвязным сечением, в частности, состоящих из нескольких (n) связанных двухпроводных линий (рис. 17), описываются системой $2n$ уравнений типа (1.2) для функций I_k, U_k, Φ_k, Q_k ($1 \leq k \leq n$), дополненных $2n$ уравнениями связи $\Phi_k = \Phi_k\{I_1, \dots, I_n\}, Q_k = Q_k\{U_1, \dots, U_n\}$. Простейшие решения таких уравнений могут быть получены с помощью

тех же методов, что и выше. Так, если уравнения связи квазистатические, то в многопроводной линии существует, вообще говоря, $2n$ простых волн (2.1а) (соответствующих $2n$ нормальным волнам в линейной системе), из которых n распространяются в положительном направлении. Эволюция простой волны приводит, как обычно, к образованию разрывов, каждому из которых отвечает $2n$ граничных условий типа (2.3а).

Существование и единственность стационарной ударной волны по-прежнему обеспечиваются равенством числа m независимых параметров, характеризующих, убегающие от разрыва возмущения при квазистатических уравнениях связи, числу $2n$ граничных условий. Специфика многоволновых систем проявляется в том, что, наряду со случаем $m > 2n$ (неустойчивый разрыв, для которого отсутствует соответствующее стационарное решение), возможен случай $m < 2n$, когда задача нахождения малых возмущений переопределена. При этом сколь угодно малое возмущение вызывает конечное изменение разрыва (расщепление на другие разрывы). Такие разрывы называются неэволюционными*. При учете дисперсии неэволюционному разрыву соответствует бесчисленное множество стационарных решений — фазовых траекторий, соединяющих положения равновесия при $\xi \rightarrow \pm \infty$. Следовательно, корректность задачи нахождении стационарной ударной волны, при учете дисперсии по-прежнему связана с условиями существования разрыва в квазистатическом приближении.

5. ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Задачи, в которых учитывается векторный характер поля УЭМВ в свободном пространстве, имеют пока довольно малое отношение к эксперименту из-за отсутствия слабодиспергирующих нелинейных материалов достаточно большого объема. Однако такие задачи представляют определенный физический интерес. Кроме того, многие из них допускают моделирование в связанных линиях, да и положение с нелинейными материалами непрерывно меняется.

Ниже рассматриваются волны в безграничном нелинейном магнетике; там, где необходимо конкретизировать вид материальных уравнений, используются уравнения (1.1), описывающие прецессию намагниченности в насыщенном феррите.

1. Простые волны [14, 18, 34, 51]. Рассмотрим сначала одномерный процесс — плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z . Уравнения Максвелла для такой волны в феррите приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}, \quad B_z = \text{const}, \quad (5.1)$$

где H_z , B_z — компоненты полей в плоскости xy . Считая изменение поля медленным, воспользуемся квазистатическим уравнением связи для насыщенного феррита: $[MH] = 0$, $|M| = M_s = \text{const}$ (см. раздел 1). Будем искать простые волны, т. е. решения, сохраняющиеся на характеристиках. С помощью известных методов анализа квазилинейных уравнений можно показать [34], что в данном случае имеется четыре семей-

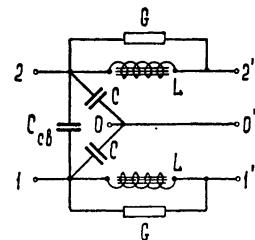


Рис. 17. Схема простейшей многопроводной линии передачи.

переопределена. При этом сколь угодно малое возмущение вызывает конечное изменение разрыва (расщепление на другие разрывы). Такие разрывы называются неэволюционными*. При учете дисперсии неэволюционному разрыву соответствует бесчисленное множество стационарных решений — фазовых траекторий, соединяющих положения равновесия при $\xi \rightarrow \pm \infty$. Следовательно, корректность задачи нахождении стационарной ударной волны, при учете дисперсии по-прежнему связана с условиями существования разрыва в квазистатическом приближении.

5. ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Задачи, в которых учитывается векторный характер поля УЭМВ в свободном пространстве, имеют пока довольно малое отношение к эксперименту из-за отсутствия слабодиспергирующих нелинейных материалов достаточно большого объема. Однако такие задачи представляют определенный физический интерес. Кроме того, многие из них допускают моделирование в связанных линиях, да и положение с нелинейными материалами непрерывно меняется.

Ниже рассматриваются волны в безграничном нелинейном магнетике; там, где необходимо конкретизировать вид материальных уравнений, используются уравнения (1.1), описывающие прецессию намагниченности в насыщенном феррите.

1. Простые волны [14, 18, 34, 51]. Рассмотрим сначала одномерный процесс — плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z . Уравнения Максвелла для такой волны в феррите приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}, \quad B_z = \text{const}, \quad (5.1)$$

где H_z , B_z — компоненты полей в плоскости xy . Считая изменение поля медленным, воспользуемся квазистатическим уравнением связи для насыщенного феррита: $[MH] = 0$, $|M| = M_s = \text{const}$ (см. раздел 1). Будем искать простые волны, т. е. решения, сохраняющиеся на характеристиках. С помощью известных методов анализа квазилинейных уравнений можно показать [34], что в данном случае имеется четыре семей-

* Неэволюционные разрывы впервые рассматривались в магнитной гидродинамике (см., например, [7]).

ства характеристик (по два для каждого из противоположных направлений распространения вдоль оси z). Соответствующие скорости распространения для одной пары семейств характеристик равны

$$\frac{dz}{dt} = \pm C/(1 + 4\pi M_s/H)^{1/2}, \quad (5.2a)$$

а для другой пары

$$\frac{dz}{dt} = \pm C \left(\frac{1 + 4\pi M_s H_\tau^2 / H^3}{1 + 4\pi M_s / H} \right)^{1/2}, \quad (5.2b)$$

где $H = (H_z^2 + H_\tau^2)^{1/2}$. При этом простая волна, распространяющаяся вдоль характеристики (5.2a), поляризована линейно ($H_x/H_y = \text{const}$)*, а простая волна, отвечающая (5.2b), имеет круговую поляризацию ($H_x^2 + H_y^2 = H_\tau^2 = \text{const}$).

Заметим, что величины H_z^2 и H_τ^2 связаны соотношением $B_z = H_z + 4\pi M_z = H_z(1 + 4\pi M_s / H) = \text{const}$. Поэтому волны первого типа не отличаются от рассмотренных в п. 1 раздела 2; их деформация приводит к возникновению разрывов. В волне второго типа скорость постоянна, и, следовательно, волна, поле которой произвольным образом вращается около оси, но $\mathbf{H}^2 = \text{const}$, в квазистатическом приближении не деформируется.

В случае малой нелинейности ($|H_\tau| \ll 4\pi M_s$) удается решить задачу о распространении волны с одновременным изменением модуля и направления поляризации \mathbf{H} ^[51]. При этом $|H_\tau|$ всегда распространяется вдоль характеристик (5.2a), а изменение угла поворота φ вектора \mathbf{H}_τ параметрически зависит от $|H_\tau|$ (скорость распространения φ соответствует (5.2b)).

2. *Ударные волны и вращательные разрывы* [66]. Чтобы выяснить, какие типы разрывов электромагнитного поля возможны в неограниченной среде, рассмотрим граничные условия на разрыве в векторной форме [14, 18] (эквивалентные условия непрерывности касательных компонент \mathbf{E} , \mathbf{H} в сопровождающей системе координат):

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \quad B_{n2} = B_{n1}, \quad (5.3)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -\frac{v_n}{c} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1), \quad D_{n2} = D_{n1},$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности разрыва, v_n — нормальная компонента его скорости.

Если связь $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ линейна, а тангенциальные компоненты \mathbf{B} и \mathbf{H} в медленно меняющемся поле параллельны (это справедливо, в частности, для феррита без учета поля анизотропии), то, полагая $\mathbf{H}_{\tau i} = H_{\tau i} \boldsymbol{\tau}_i$, $\mathbf{B}_{\tau i} = B_{\tau i} \boldsymbol{\tau}_i$, можно показать, что условия (5.3) допускают два различных типа разрывов [66]:

а) ударные волны, для которых

$$[\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2] = 0, \quad \frac{\epsilon v_n^2}{c^2} = \frac{H_{\tau 2} - H_{\tau 1}}{B_{\tau 2} - B_{\tau 1}}, \quad (5.4)$$

* Простые волны с линейной поляризацией возможны в недиспергирующей среде с произвольной анизотропией [57].

т. е. векторы поля по обе стороны фронта лежат в одной плоскости, и для поперечных компонент справедливы условия (2.3а), (2.4);

б) вращательные разрывы; для них

$$[\tau_1 \tau_2] \neq 0, \quad \frac{\epsilon v_n^2}{c^2} = \frac{H_{\tau_1}}{B_{\tau_1}} = \frac{H_{\tau_2}}{B_{\tau_2}}. \quad (5.5a)$$

В случае однозначной монотонной связи $B_\tau(H_\tau)$ из (5.3) следует $H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$, $B_{\tau_1} = B_{\tau_2}$, т. е. векторы \mathbf{H} , \mathbf{B} испытывают лишь поворот около нормали к фронту разрыва. Скорость последнего не зависит от угла поворота.

Свойства ударных волн и вращательных разрывов во многом различны. Так, УЭМВ может возникать в результате эволюции непрерывных волн, соответствующих (5.2а). Релаксация приводит к образованию стационарного (или квазистационарного) ударного фронта. Вращательный же разрыв не может быть результатом деформации соответствующих непрерывных «вращательных» волн. Как ясно из (5.2б), в недиспергирующей среде волны с $|H_\tau| = \text{const}$ вообще не деформируются. Что касается релаксации, то (как и в магнитной гидродинамике [5]) она приводит к неограниченному расширению разрыва.

Отметим, что в системе связанных линий определенного типа возможны конфигурации, соответствующие рассмотренным здесь типам разрывов.

3. Распад и взаимодействие разрывов [66]. Задача о взаимодействии двух плоских разрывных фронтов, параллельных друг другу, сводится (как и для линий передачи) к задаче о распаде некоторого начального разрыва, возникающего в момент соприкосновения фронтов. Отметим сразу особенность ударной волны в свободном пространстве [50]: УЭМВ с изменением знака H_τ неэволюционна (с учетом возмущений, поляризованных отлично от $H_{1,2}$) и распадается на вращательный разрыв с поворотом поля на π и опережающую его эволюционную ударную волну, на которой знак H_τ сохраняется (в двухпроводной линии число возмущений меньше, и УЭМВ всегда эволюционна).

Взаимодействие разрывов с различными направлениями поля рассмотрим на примере «столкновения» двух встречных УЭМВ с одинаковыми модулями H_τ [66]. Если угол φ между векторами \mathbf{H}_τ в сходящихся волнах меньше 120° , то в каждую сторону от точки взаимодействия отходят УЭМВ и следующий за ней вращательный разрыв с углом поворота $\varphi/2$ (рис. 18). Ввиду симметрии задача полностью определена, если известны модули H , B поля, остающегося в области между расходящимися УЭМВ (очевидно, H , B одинаковы в областях II и III). Границные условия (5.4), (5.5а) приводят к следующему соотношению между H , B и заданными величинами H_0 , B_0 поля сходящихся УЭМВ:

$$\left(\frac{H}{H_0} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{B}{B_0} - 1 \right)^{1/2} + \left(\frac{HB}{H_0 B_0} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} \right) = 1. \quad (5.6a)$$

Если квазистатическая функция $B(H)$ известна, то при $\varphi \leq 120^\circ$ уравнение (5.6а) однозначно решает задачу. Если же $\varphi > 120^\circ$, то картина взаимодействия отличается тем, что вместо УЭМВ впереди врача-

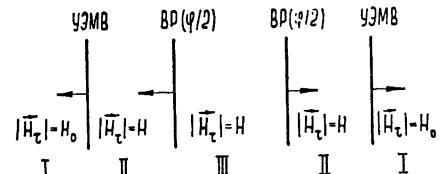


Рис. 18. Разрывы, возникающие в результате «столкновения» ударных волн с различной поляризацией.

тельных разрывов распространяются простые волны типа (5.2а); для этого случая нетрудно получить соотношение, заменяющее (5.6а).

4. Структура УЭМВ в насыщенном феррите [14, 16—18]. Структура фронта ударной волны зависит, как и в линиях передачи, от диссипативных и дисперсионных механизмов, действующих в среде. Соответствующая задача относительно проста для случая волны, распространяющейся в феррите вдоль постоянного поля H_0 , намагничивающего феррит до насыщения [14, 18]. Отыскивая стационарное (зависящее от $\xi = t - z/v_p$, где $z_0 \parallel H_0$) решение уравнений Максвелла, дополненных уравнением однородной прецессии (1.1), получим ударный фронт, в котором вектор намагченности M , вращаясь, переходит от продольной ориентации к некоторой другой, совпадающей с направлением $H_2 = H_0 + H_{z2}$ (H_{z2} — поперечное поле волны за фронтом УЭМВ). Частота вращения ω связана с углом θ отклонения M от оси z соотношением

$$\omega = \gamma B_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_2} - 1 \right), \quad (5.56)$$

$\theta_2 = \theta (\xi \rightarrow \infty)$. Согласно (5.5а), ω уменьшается от значения $\gamma B_0 (1 - \cos \theta_2) / \cos \theta_2$ перед фронтом волны до нуля за ее фронтом. Длительность фронта УЭМВ τ имеет порядок

$$\tau \approx \tau_0 M \cos \theta_2 / 2B_0 \sin^2 \theta_2, \quad (5.66)$$

где τ_0 — время релаксации феррита. Вектор H также вращается; профиль каждой из поперечных компонент H имеет осцилляции впереди фронта (заметные при $\tau_0 \gamma M > 1$), т. е. аналогичен показанному на рис. 11в. Значения поперечных компонент поля перед ударной волной и позади нее (при $\xi = \mp \infty$) связаны со скоростью волны граничными условиями (5.4).

Качественный анализ особенностей структуры удается провести и для УЭМВ, распространяющихся под произвольным углом к магнитному полю перед ними* [16]. В частности (как и в разделе 3), можно проследить связь между единственностью структуры УЭМВ и их эволюционностью** [50].

5. Наклонное падение УЭМВ на проводящую плоскость [17]. До сих пор рассматривались одномерные волны (все величины зависели от одной пространственной переменной). Двумерные нелинейные процессы, весьма интересные физически, еще менее доступны для экспериментального наблюдения. Мы рассмотрим здесь одну двумерную задачу — отражение наклонной ударной волны от проводящей плоскости [17]. Здесь естественно выделить два случая.

а) Магнитное поле поляризовано перпендикулярно плоскости падения. Предполагая, что фронт отраженной волны остается плоским, и пользуясь граничными условиями (5.1) и условием $E_t = 0$ на границе металла, получим связь абсолютных величин полей в областях I и II (рис. 19):

* Отметим, что влияние кристаллической анизотропии феррита, а также обменных и магнитоупругих эффектов не приводят, по-видимому, к существенным отличиям в структуре ударной волны [34].

** Анализ нелинейного процесса облегчается в предельном случае $\tau_0 \rightarrow \infty$ (недиссипативная среда), когда стационарные волны либо периодичны по ξ и циркулярно поляризованы, либо имеют вид уединенных импульсов [59]; образование УЭМВ в этом случае, естественно, невозможно.

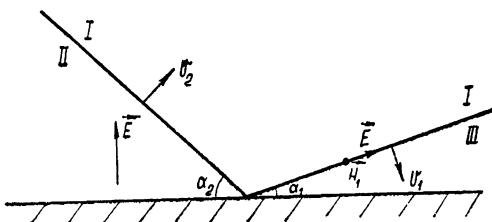


Рис. 19. Наклонное падение ударной волны на отражающую плоскость (H перпендикулярно плоскости падения).

$$H_2 = H_1 \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right), \quad B_2 = B_1 \left[1 + \frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2} \right], \quad E_2 = E_1 \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos \alpha_2} \quad (5.7)$$

(в области III поле отсутствует).

При заданной связи $B(H)$ соотношения (5.7) определяют угол отражения α_2 . Так, если поле H_1 ударной волны насыщает феррит, то $B = B_s + H$ (рис. 1б) и

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 (1 + B_s/H_1)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Следовательно, $\alpha_2 > \alpha_1$. Формула (5.8) теряет смысл при $\alpha_1 > \alpha_{kp}$, где $\sin \alpha_{kp} = 1/(1 + B_s/H_1)^{1/2}$. При большем угле падения рассмотренная картина отражения невозможна; можно показать, что невозможна также любая конфигурация из конечного числа плоских ударных волн.

Согласно (5.7), при $\alpha_1 \rightarrow \alpha_{kp}$ поле H_2 неограниченно растет. Это обстоятельство может быть использовано для получения сильных магнитных полей.

б) Магнитное поле поляризовано в плоскости падения. Тогда, очевидно, H_2 параллельно проводящей плоскости, а $E_2 = 0$. В случае, когда поле перед падающей волной отсутствует, граничные условия дают для абсолютных величин полей

$$H_2 = H_1 \cos \alpha_1 \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right), \quad B_2 = B_1 \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_2}. \quad (5.9)$$

Если поля H_1 и H_2 насыщают феррит, то угол отражения удовлетворяет соотношению

$$\frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} = \frac{B_s}{2H_1} \left[\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_2} - 1 \right]. \quad (5.10)$$

Соотношения (5.9), (5.10) справедливы до тех пор, пока отраженная волна остается ударной. Это имеет место, если $\alpha_1 < \alpha_{kp}$ и $\alpha_1 + \alpha_2 \ll \pi/2$ (тогда касательные компоненты H на отраженном фронте имеют одинаковый знак, и $H_2 > H_1$). Если $\alpha_1 > \alpha_{kp}$, то при отражении появится, кроме ударной волны, вращательный разрыв с углом поворота π . Отметим, что в той области углов, где справедливы обе формулы (5.8) и (5.10), величина α_2 при заданном α_1 всегда больше для случая (5.8).

Интерес к ударным электромагнитным волнам связан не только с рассмотренными выше физическими особенностями УЭМВ или с возможностью моделирования движений сжимаемой среды в электродинамических системах, но также и с перспективами технических приложений. Уже сейчас УЭМВ нашли широкое применение в технике

наносекундных импульсов. Максимальная амплитуда тока и напряжения и длительность фронта импульса зависят от используемых нелинейных материалов (полупроводники, ферриты, сегнетоэлектрики). Например, длительность УЭМВ на фронте мощных импульсов, получаемых сейчас в линиях с ферритом, достигает $5 \cdot 10^{-10}$ сек и менее (рис. 20, [43]).

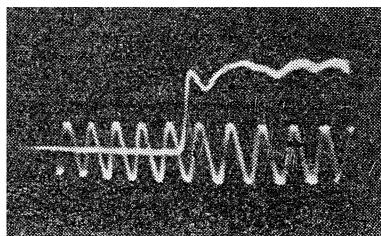


Рис. 20. Оциллограмма $U(t)$ фронта УЭМВ в линии с ферритом [43]. Период калиброванной синусоиды равен 2 нсек.

Однако технические проблемы, связанные с УЭМВ, выходят за рамки данного обзора; их обсуждение можно найти в ряде статей (см., например, [67, 68]), а также в монографиях [44, 58].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
2. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд. АН СССР, М.—Л., 1946.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1953.
4. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Теория ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд. Наука, М., 1966.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
6. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз, М., 1962.
7. Р. В. Половин, Ударные волны в магнитной гидродинамике, УФН, 72, 33 (1960).
8. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
9. J. B. Goodenough, A theory of domain creation and coercive force in polycrystalline ferromagnetics, Phys. Rev., 95, 917 (1954).
10. T. L. Gilbert, A lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetization field, Phys. Rev., 100, 1243 (1955).
11. Я. Б. Зельдович, Ударные волны большой амплитуды в воздухе, ЖЭТФ, 32, 1126 (1957).
12. E. M. Gyorgy, Modified rotational model of flux reversal, J. Appl. Phys., 29, 1709 (1958).
13. И. Г. Катаев, Авторское свидетельство, № 118859, 1958.
14. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Об ударных электромагнитных волнах в ферритах, ЖЭТФ, 36, 957 (1959).
15. Л. А. Островский, О взаимодействии слабых сигналов с электромагнитными ударными волнами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 833 (1959).
16. В. К. Юлпатор, Дипломная работа, Горьковский университет, 1959.
17. A. Gaponov, L. Ostrovsky, G. Freidman, Shock electromagnetic waves XIII General Assembly URSI, London, 1960.
18. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, К теории ударных электромагнитных волн в нелинейных средах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 79 (1960).
19. R. Landauer, Shock waves in nonlinear transmission lines and their effect on parametric amplification, IBMJ Res. and Developm., 4, 391 (1960).

20. Г. И. Фрейдман, Ударные электромагнитные волны в полосковом волноводе, заполненном ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 276 (1960).
21. R. Landauer, Parametric amplification along nonlinear transmission lines, J. Appl. Phys., 31, 479 (1960).
22. O. W. Greenberg, H. K. Sen, J. M. Treve, Hydromagnetic model of diffusion effects on shock structure in a plasma, Phys. Fluids, 3, 379 (1960).
23. Р. З. Сагдеев, О тонкой структуре фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме, ЖТФ, 31, 1185 (1961).
24. Р. В. Хохлов, К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях, Радиотехника и электроника, 6, 917 (1961).
25. Р. В. Хохлов, О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях, Радиотехника и электроника, 6, 1116 (1961).
26. Ю. К. Богатырев, Стационарные волны в нелинейной дискретной линии передачи, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 680 (1961).
27. G. Böhme, Problem der homogenen Lechelleitung mit nichtlinearem Kapazitätsbelag, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 70, 25 (1961).
28. Л. А. Островский, Электромагнитные волны в неоднородной нелинейной среде с малыми потерями, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 955 (1961).
29. Г. Я. Любарский, О структуре ударных волн, ПММ, 25, 1041 (1961).
30. Ю. К. Богатырев, Ударные электромагнитные волны в нелинейной линии с сосредоточенными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1130 (1962).
31. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Формирование ударных электромагнитных волн с двумя разрывами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 116 (1962).
32. А. М. Белянцев, Л. А. Островский, Распространение импульсов в линиях с нелинейными полупроводниковыми емкостями, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 183 (1962).
33. L. Landau, E. Lifshitz, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, Phys. Zs. der S. U., 8, 153 (1935).
34. W. B. Hatfield, B. A. Auld, Electromagnetic shock waves in gyromagnetic media, J. Appl. Phys., 34, 2941 (1963).
35. M. C. Gutzwiller, W. L. Miranker, Nonlinear wave propagation in a transmission line loaded with thin permalloy films, IBMJ Res. and Devel., 7, 278 (1963); Экспр. информ., вычисл. техн., № 14 (1964).
36. Л. А. Островский, Отражение ударных электромагнитных волн от короткозамкнутого конца линии передачи с ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 413 (1963).
37. Л. А. Островский, Образование и развитие ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом, ЖТФ, 33, 1080 (1963).
38. Г. И. Фрейдман, Об ударных волнах в линиях передачи с тонким слоем феррита. I, II, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 324, 388 (1963).
39. Г. И. Фрейдман, О зависимости структуры ударных волн от дисперсионной характеристики системы в линейном приближении, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 536 (1963).
40. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Распространение электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами. I. Нестационарные процессы, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 973 (1963).
41. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Распространение электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами. II. Структура фронта ударных волн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 985 (1963).
42. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Формирование ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 551 (1963).
43. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Стационарные электромагнитные ударные волны в линиях передачи с ненасыщенным ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 561 (1963).
44. И. Г. Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1963.
45. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, О волновых процессах в линиях с шунтирующим нелинейным сопротивлением, Радиотехника и электроника, 8, 2006 (1963).
46. L. J. F. Vloeber, Exact solution of the reflexion problem in nonlinear optics, Phys. Lett., 4, 65 (1963).
47. Л. А. Островский, К теории волновых движений нестационарных сжимаемых сред, ПММ, 27, 924 (1963).
48. Л. А. Островский, Электромагнитные волны в нелинейных средах с дисперсией, ЖТФ, 33, 905 (1963).
49. А. М. Белянцев, Диссертация, Московский университет, 1963.
50. Г. И. Фрейдман, Диссертация, Горьковский университет, 1963.
51. Л. А. Островский, Диссертация, Горьковский университет, 1963.
52. Ю. К. Богатырев, Диссертация, Горьковский политехнический институт, 1964.

53. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Э. Я. Дауме, Г. И. Фрейдман, Экспериментальное исследование распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в волноводах, заполненных ферритом, ЖЭТФ, 47, 1699 (1964).
54. А. М. Белянцев, Г. И. Фрейдман, Электромагнитные волны конечной амплитуды в связанных линиях передачи с нелинейными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 514 (1964).
55. J. R. Alday, Narrow-pulse generation by nonlinear transmission lines, Proc. IEEE 52, 739 (1964).
56. А. С. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
57. Л. А. Пospelov, К распространению электромагнитных волн в нелинейных средах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 446 (1964).
58. Л. А. Моругин, Г. В. Глебович, Наносекундная импульсная техника, изд. Сов. радио, М., 1964.
59. Ю. Ф. Филиппов, К теории распространения стационарных волн конечной амплитуды в ферритах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 292 (1965).
60. G. B. Whitham, Nonlinear dispersive waves, Proc. Roy. Soc., ser. A, 283, 238 (1965).
61. Ю. К. Богатырев, Образование и развитие ударных электромагнитных волн в линиях передачи с сегнетоэлектриками, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1171 (1965).
62. A. M. Beljantsev, A. V. Gaponov, G. I. Freidman, Structure of shock electromagnetic wave front in transmission lines with nonlinear parameters, URSI Symposium, Delft, Netherlands, 1965; Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967.
63. A. V. Gaponov, L. A. Ostrovsky, M. I. Rabinovich, Electromagnetic waves in non-linear transmission lines with active parameters, URSI Symposium, Delft, Netherlands, 1965; Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967.
64. L. A. Ostrovsky, Propagation of modulated waves in nonlinear dispersive media, URSI Symposium, Delft, Netherlands, 1965; Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967.
65. Л. А. Островский, Взаимодействие ударных электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 285 (1965).
66. Л. А. Островский, Вращательные разрывы в электродинамике нелинейных сред, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 738 (1965).
67. Ю. К. Богатырев, Расчет нелинейной формирующей линии с сосредоточенными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 37 (1965).
68. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Расчет нелинейных формирующих линий с ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 8, 41 (1965).
69. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, О структуре фронта ударных электромагнитных волн в линиях передачи с нелинейными параметрами, ЖТФ, 35, 677 (1965).
70. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, О структуре ударных волн в нелинейных линиях передачи с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы, ЖТФ, 35, 690 (1965).
71. D. T. Bickley, Wave propagation in nonlinear transmission lines with simple losses, Electronics Lett., 2, 167 (1966).
72. М. И. Рабинович, Об автоколебаниях в кольцевой линии с распределенными нелинейными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 794 (1965).
73. И. Г. Басов, В. С. Летохов, Распространение светового импульса в среде с инверсной заселенностью, Оптика и спектроскопия, 18, 1042 (1965).
74. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
75. П. М. Колесников, Об аналитических решениях одного класса уравнений нелинейной электродинамики, ЖТФ, 36, 2199 (1966).
76. F. Falside, D. T. Bickley, Nonlinear delay line with a constant characteristic impedance, Proc. IEE, 113, 263 (1966).
77. П. М. Колесников, Аналитические решения краевых задач нелинейной электродинамики для ферромагнитных сред. I, ЖТФ, 37, 17 (1967); II, 37, 446 (1967).
78. Л. А. Островский, Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде, ЖЭТФ, 51, 1189 (1966).
79. Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Исследование автоколебаний в активной кольцевой линии, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, 128 (1967).
80. А. Ф. Городецкий, А. Ф. Кравченко, Полупроводниковые приборы, изд. Высш. школа, М., 1967.

81. Л. А. Островский, Ударные электромагнитные волны в нелинейных активных линиях, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
82. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, В. В. Папко, Исследование ударных электромагнитных волн в нелинейных активных линиях, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1967 г.