

УДК 535.1:621.374.33

**МЕТОДЫ СЕЛЕКЦИИ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТЫХ КВАЗИОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

*В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов*

**ВВЕДЕНИЕ**

Спектр замкнутых резонансных объемов при переходе к более высоким частотам сгущается: число колебаний  $\Delta N$  полости объемом  $V$ , приходящихся на интервал частот  $\Delta\omega$ ,

$$\Delta N = \frac{V}{\pi^2 v_0^3} \omega^2 \Delta\omega \tag{1}$$

( $v_0$  — скорость света) растет пропорционально квадрату частоты. Увеличивается и число распространяющихся типов волн волновода фиксированного сечения  $S$ :

$$\Delta N = \frac{S}{\pi v_0^2} \omega \Delta\omega. \tag{2}$$

Такое сгущение спектра наряду с увеличением коэффициентов затухания всех колебаний является принципиальным препятствием для применения экранированных систем в области очень коротких волн.

Избежать «коротковолновой катастрофы», грозившей похоронить любые попытки продвижения почти традиционных для СВЧ экранированных систем в диапазоны высоких частот (миллиметровый, субмиллиметровый, оптический), позволил переход к квазиоптическим устройствам типа открытых резонаторов и открытых волноводов [1—8].

В устройствах открытого типа разрежение спектра достигается увеличением радиационных потерь нежелательных мод при сохранении относительно низкого уровня потерь рабочих типов колебаний. Способы избирательного увеличения потерь могут быть различными. Некоторые из них иллюстрируются рис. 1.

В круговом диэлектрическом стержне, помещенном между бесконечными отражающими плоскостями, перпендикулярными его оси (рис. 1а), высокодобротными останутся только колебания, образованные волнами, падающими на

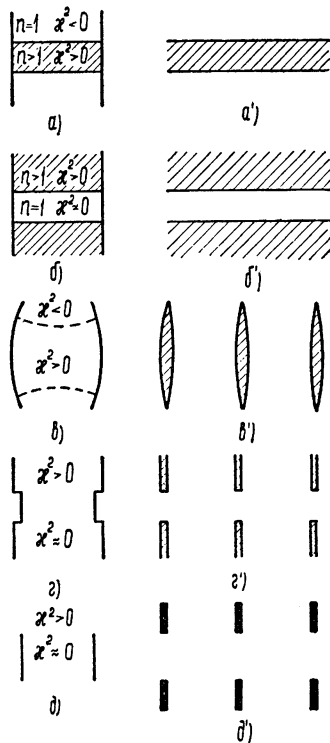


Рис. 1. Открытые резонаторы и их волноводные аналоги.

границу диэлектрик — вакуум под углом, большим угла полного внутреннего отражения. Число таких колебаний будет уменьшаться по мере приближения коэффициента преломления диэлектрика  $n$  к единице, но для реальных твердых и жидких диэлектриков относительная степень разрежения спектра невелика. Правда, диэлектрические резонаторы в оптическом диапазоне могут иметь вид относительно тонких прозрачных нитей (волоконная оптика), что соответствует уменьшению  $V$  в формуле (1), но такой способ разрежения спектра часто неприемлем по соображениям технологического порядка.

Разрежение спектра может быть достигнуто и в «инвертированной» системе (рис. 1б), когда колебания сосредоточены в оптически менее плотной среде, а их излучение происходит в более плотную среду. Высокочастотными здесь остаются колебания, соответствующие парциальным волнам, скользющим вдоль границы диэлектрика. В отличие от систем с полным внутренним отражением радиационные потери этих колебаний не обращаются в нуль даже для идеальных диэлектриков, однако быстрый рост их с увеличением угла падения волны на границу позволяет добиться заметного разрежения спектра по сравнению с экранированной системой тех же размеров.

Можно дать прозрачное аналитическое описание указанных способов разрежения спектра. Пусть, для простоты, резонаторы, изображенные на рис. 1а, б, двумерны. Поле представим как суперпозицию плоских волн, падающих изнутри на границу диэлектрика и отражающихся от нее\*. Коэффициент отражения при этом равен

$$\tilde{R} = \frac{x_2/\varepsilon_2 - x_1/\varepsilon_1}{x_2/\varepsilon_2 + x_1/\varepsilon_1} \quad \text{или} \quad \tilde{R} = \frac{\mu_2 x_2 - \mu_1 x_1}{\mu_2 x_2 + \mu_1 x_1} \quad (3)$$

в зависимости от поляризации волны. В (3)  $x_1, x_2$  — поперечные (к оси резонатора) волновые числа.

В первом случае (рис. 1а) высокочастотным колебаниям соответствуют мнимые значения  $x_2 = i|x_2|$  (внешний волновод 2 — закритический:  $|\tilde{R}| = 1$ ), во втором (рис. 1б) — значения  $x_1$ , близкие к нулю (частота близка к критической частоте внутреннего волновода 1:  $|\tilde{R}| \ll 1$ ). К подобному же заключению можно прийти, рассматривая цилиндрические волны в аксиально-симметричном случае.

Очевидно, аналогичные условия отражения могут быть реализованы и без применения диэлектриков: полное отражение от закритического волновода — плавным уменьшением расстояния между отражателями (рис. 1в), сильное отражение на частотах, близких к критическим частотам внутреннего волновода, — внесением в него неоднородностей, например, скачкообразным изменением расстояния между отражателями (рис. 1г) или ограничением их размера (рис. 1д). Соответственно и высокочастотные колебания будут иметь разный характер: в первом случае имеется каустическая поверхность, разграничивающая области докритического ( $x^2 > 0$ ) и закритического ( $x^2 < 0$ ) волноводов, причем в последнем поле быстро (экспоненциально) убывает при удалении от каустики; во втором случае поле ограничивается областью сильного отражения волны. Оба способа разрежения спектра широко применяются в различных устройствах.

К описанию полей в открытых системах типа изображенных на рис. 1а—д наряду с волноводным возможен и другой подход. Поле в них представляет собой широкие (в масштабе  $\lambda$ ) параксиальные пуч-

\* Такой подход последовательно развивался в трудах Вайнштейна [7, 9], в том числе и в применении к более сложным системам.

ки, распространяющиеся навстречу друг другу перпендикулярно зеркалам. Их можно описывать, используя известные квазиоптические методы теории дифракции, основанные на применении параболического уравнения [10–12] или принципа Гюйгенса—Кирхгофа для зоны дифракции Френеля [4, 6]. С этой точки зрения разрежение спектра объясняется более быстрым уходом из резонатора волновых пучков, имеющих большую расходимость. Высокодобротными остаются только колебания, которым соответствуют плоские волны в некотором телесном угле  $d\Omega$  вблизи оси системы, при этом спектр разрежается в  $d\Omega/4\pi$  раз по сравнению с величиной (1), соответствующей всевозможным направлениям плоских волн.

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении открытых волноводов (рис. 1а'—д'), переход к которым нетрудно совершить, считая встречные волновые пучки резонатора развернутыми в последовательную цепочку. При этом рисунку 1а будет соответствовать обычный диэлектрический волновод (рис. 1а'), рисунку 1б — диэлектрическая труба (рис. 1б'), рисунку 1в — линзовый волновод (рис. 1в'), рисункам 1г и 1д — волноводы из согласованных прозрачных (диэлектрических) или полностью поглощающих диафрагм соответственно.

Таким образом, замена экранированной системы открытой является эффективным средством разрежения спектра. Однако, если не принимать специальных мер, даже в открытых системах спектр остается еще настолько густым, что в рабочий диапазон частот попадает большое число колебаний. Как правило, это нежелательно. Так, в лазерах многомодовость резонаторов увеличивает расходимость излучения по сравнению с дифракционным пределом, соответствующим размеру освещенной области на зеркалах, и приводит к многочастотности излучения\*. В волноводах она вызывает перетрансформацию волн, ухудшает эффективность приемных и передающих устройств, искажает передаваемый сигнал, вызывает дополнительные потери и т. п.\*\*.

В данном обзоре речь пойдет о способах улучшения дискриминационных характеристик многомодовых открытых систем, причем под дискриминацией нежелательных мод или селекцией рабочих типов колебаний мы будем понимать увеличение коэффициентов затухания первых при сохранении относительно невысокого уровня потерь основных колебаний\*\*\*.

По отношению к открытым резонаторам принято различать дискриминацию поперечных мод, отличающихся друг от друга поперечной структурой волновых пучков, а следовательно, и структурой поля на зеркалах, и дискриминацию продольных мод, имеющих идентичные поперечные структуры поля, но отличающихся числом полуволн колебаний, укладываемых между зеркалами. Каждое колебание характеризуется тремя индексами: двумя поперечными ( $m$  и  $n$ ) и одним продольным ( $q$ ). Поэтому можно говорить о дискриминации колебаний по поперечным индексам  $m$  и  $n$  ( $q = \text{const}$ ) и продольному индексу  $q$  ( $m, n = \text{const}$ ). В волноводах, естественно, имеет смысл говорить только о дискриминации по поперечным индексам.

Дискриминация поперечных мод, как правило, основывается на различиях в их пространственных структурах (ограничение пучков по-

\* В лазерах с синхронизацией мод последний эффект полезен — он дает возможность получить очень короткие импульсы излучения.

\*\* Многомодовость необходима в системах параллельной передачи изображения.

\*\*\* В понятие селекции мод резонаторов можно было бы, вообще говоря, включить и раздвоение резонансных частот вблизи частот рабочих типов при сохранении среднего числа высокодобротных колебаний в некотором расширенном спектральном интервале, однако из-за большой (в масштабе  $\lambda$ ) длины открытых систем способы такой селекции малоэффективны.

глощающими диафрагмами, применение профильных зеркал, ограничение углового спектра пучков и т. п.). Методы дискриминации продольных колебаний, отличающихся от рабочих по частоте на величины

$$\Delta\omega_p = \frac{\pi p v_0}{L}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (L — \text{длина резонатора}),$$

большие, чем поперечные моды, основываются на применении диспергирующих элементов (интерферометров Фабри—Перо [47—52], призм [38, 39], дифракционных решеток [40—43], связанных резонансных объемов [53—57] и т. п.). В лазерах применение их особенно эффективно в сочетании с модуляцией добротности насыщающимися фильтрами [58].

Наиболее полную характеристику дискриминации мод в данной системе можно составить, если известны коэффициенты затухания ряда наиболее добротных типов колебаний. Однако, как правило, для практической оценки селективных свойств бывает достаточно представления о величинах коэффициентов потерь рабочего и соседнего с ним типов колебаний, тем более, что расчет коэффициентов затухания мод более высокого порядка за редкими исключениями довольно трудоемок. В дальнейшем мы в основном будем придерживаться оценки дискриминационных свойств квазиоптических систем по разности коэффициентов затухания первых двух типов колебаний.

При рассмотрении различных способов дискриминации мод главное внимание будет уделено принципиальной стороне вопроса, многочисленным экспериментальные работы по селекции мод в конкретных устройствах, в том числе и лазерах, здесь почти не обсуждаются, они будут привлекаться лишь для иллюстрации некоторых выводов теории. Методы расчета открытых систем рассматриваются здесь лишь в той мере, в какой это необходимо для обсуждения их дискриминационных характеристик. Более подробные сведения можно найти в обзорах [60—62], монографии [9], сборнике [63], где имеются ссылки и на соответствующие оригинальные работы.

## 1. МЕТОДЫ ДИСКРИМИНАЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ТИПОВ ВОЛН

В этом разделе мы рассмотрим некоторые способы дискриминации поперечных типов колебаний. Наибольшее распространение сейчас получил способ, основанный на применении поглощающих диафрагм, ограничивающих поперечный размер системы. Ниже будут рассмотрены другие возможности дискриминации поперечных мод: угловое ограничение пучков, комбинированное (пространственное и угловое) ограничение, применение неквадратичных фазовых корректоров.

### 1. Ограничение волновых пучков поглощающими диафрагмами

Теория ограничивающих диафрагм и их влияния на качество изображения издавна является предметом классической оптики (дифракционная теория разрешающей силы оптических инструментов, теория Аббе микроскопа и т. п.). В теории изображения, как правило, интересуются влиянием аппаратной функции оптической системы на изображение некоторых эталонных структур: светящейся точки, синусоидальной дифракционной решетки (аналоги импульсной функции и гармонического сигнала в теории фильтров).

Иной подход был сформулирован в 1912 г. Мандельштамом [13, 14]. Он поставил задачу отыскания структур, которые дают подобное себе изображение при заданном диафрагмировании светового пучка. При этом он обратил внимание на тот факт, что из бесконечного множества таких структур только конечному числу соответствует заметная освещенность.

ценность изображения. Именно такой подход и развивается в современной квазиоптической теории открытых резонаторов и волноводов, причем в нем имеются и обе выделенные Мандельштамом задачи: определение возможных типов волн в системе (структур повторяющихся волновых пучков) и выделение из их числа наиболее добротных, которым, по Мандельштаму, соответствует наибольшая освещенность изображения (селекция колебаний).

Будем сначала рассматривать системы с квадратичными фазовыми корректорами (сферические зеркала, тонкие линзы), которые могут быть описаны следующей функцией преобразования:

$$\psi_2(x, y) = \exp [ik(x^2 + y^2)/2F] \psi_1(x, y),$$

где  $\psi_1, \psi_2$  — структуры поля в пучке соответственно до и после корректора,  $F$  — его фокусное расстояние. Селекция типов колебаний достигается либо ограничением пучка на корректорах (конечные размеры зеркал в резонаторах, поглощающие диафрагмы в волноводах), либо ограничением пучка в промежутках между корректорами. Теория таких систем в настоящее время достаточно хорошо развита как на основе интегральных уравнений для поля на корректорах [3-5, 15], так и на основе описанного выше волноводного подхода [9].

Пусть для определенности имеется резонатор со сферическими отражателями радиусов кривизны  $R_1 = 2F_1$  и  $R_2 = 2F_2$  и расстоянием  $L$  между ними. Поле в таком резонаторе представляет собой суперпозицию встречных волновых пучков

$$\Psi_{\pm} = \psi_{\pm}(x, y, z) \exp(\mp ikz),$$

где  $\psi_{\pm}$  — амплитуды пучков, являющиеся медленными функциями координат. Обозначим через  $\psi_1(\mathbf{r}_{\perp})$  распределение поля на первом зеркале в прямом пучке и через  $\psi_2(\mathbf{r}_{\perp})$  распределение поля на втором зеркале в обратном пучке.

В общем случае уравнения для функций  $\psi_{1,2}$  будут иметь вид [15, 16]

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \hat{L}_+ \psi_1, \\ p\psi_1 &= \hat{L}_- \psi_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где операторы  $\hat{L}_+$  и  $\hat{L}_-$  описывают преобразование структуры поля пучков при переходе от одного зеркала к другому.

Для ограниченных сферических зеркал параметрами, определяющими собственные функции  $\psi_{1,2}$  и собственные значения  $p$  уравнений (1.1), являются [15].

$$c = \frac{ka_1 a_2}{L}, \quad \tilde{g}_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} g_{1,2}, \quad g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}, \quad (1.2)$$

$$\beta_{1,2} = \sqrt{a_{1,2}/a_{2,1}} \sqrt{kL} \alpha_{1,2},$$

где  $a_1, a_2$  — размеры зеркал (радиус для круговых, полуширина для ленточных),  $\alpha_{1,2}$  — углы их перекосов, вносящих в пучок линейную фазовую коррекцию  $\Delta\varphi_{1,2} = k\alpha_{1,2} r_{\perp}$ .

Семейство резонаторов, характеризующихся различными исходными параметрами, но отвечающих одному и тому же набору величин (1.2), будет иметь одинаковые собственные значения  $p$  и описываться в некоторых безразмерных переменных одними и теми же собственными функциями. Резонаторы, принадлежащие одному такому семейству,

очевидно, эквивалентны друг другу и в смысле дискриминации типов колебаний.

В произвольном случае система (1.1) имеет бесчисленное множество решений  $\psi_{1mn}$  и  $\psi_{2mn}$  и соответствующих им собственных чисел  $p_{mn}$ , причем  $|p_{mn}| < 1$ , что следует из самих физических условий задачи. Подставляя значения  $p_{mn}$  в резонансное условие

$$p_{mn} \exp(-2ik_{mn}L) = \exp(-2i\pi q) \quad (q - \text{целое число}) \quad (1.3)$$

и полагая  $k = k' + ik''$ , можно найти как резонансные частоты колебаний

$$k_{mnq}L = \pi q + \frac{1}{2} \arg p_{mn}, \quad (1.4)$$

так и коэффициенты затухания

$$k''_{mn}L = -\frac{1}{2} \ln |p_{mn}|. \quad (1.5)$$

Добротность резонатора на данном типе колебания определяется обычным образом, т. е.

$$Q_{mnq} = \frac{k'_{mnq}}{2k''_{mn}} = \frac{k'_{mnq}L}{\delta_{mn}} = \frac{k'_{mnq}}{\alpha_{mn}} = -\frac{k'_{mnq}L}{\ln |p_{mn}|}. \quad (1.6)$$

Величина  $\delta_{mn} = -\ln |p_{mn}|$  в (1.6) называется коэффициентом потерь, в волноводе ей соответствует погонный коэффициент затухания  $\alpha_{mn} = \delta_{mn}/L$ . При  $|p_{mn}| \sim 1$  коэффициент  $\delta_{mn} \simeq 1 - |p_{mn}|$  непосредственно дает относительную величину мощности, теряемой волновым пучком при проходе резонатора (в одну сторону). Заметим, что в общем случае собственные значения  $p_{mn}$  зависят от волнового числа  $k_{mnq}$ , так что уравнения (1.4), (1.5) являются системой, определяющей в неявном виде зависимость величин  $k'$  и  $k''$  от параметров резонатора. Однако, как правило,  $k'' \ll k'$ , а числа  $p_{mn}$  являются медленными функциями  $k_{mnq}$ , так что их можно взять при  $k_{mnq} \simeq k'_{mnq} \simeq k$ , где  $k$  — волновое число, соответствующее средней частоте рассматриваемого диапазона. Исключением являются связанные резонаторы, которые будут рассмотрены отдельно.

Модули и фазы собственных чисел  $p_{mn}$ , вообще говоря, различны для разных типов колебаний. С этим и связана возможность селекции отдельных мод.

В общей постановке задача о влиянии фазовой коррекции первого и второго порядков на характеристики открытых резонаторов была сформулирована в работах [15, 16]. Там же были приведены результаты ее численного решения для некоторых частных случаев. В настоящее время имеется целый ряд работ [3-6, 15, 16, 18], содержащих результаты численного анализа уравнений (1.1) при конечных значениях френелевского параметра  $s$ . Для зеркал, ограниченных диафрагмами с постоянной прозрачностью, решение в известных функциях получено только для конфокального [5] и плоского [7, 9] резонаторов.

Собственные значения уравнений (1.1) удовлетворяют соотношениям симметрии [15]

$$p(\beta_1, \beta_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = p^*(\beta_1, -\beta_2, -\tilde{g}_1, -\tilde{g}_2) = p(-\beta_1, \beta_2, -\tilde{g}_1, -\tilde{g}_2). \quad (1.7)$$

Эти формулы являются обобщением соотношений симметрии, установленных в работе [16]. Из (1.7) следует, что дифракционные потери отдельных мод (а следовательно, и дискриминационные свойства) данно-

го резонатора равны потерям сопряженного (отличающегося знаками  $\tilde{g}_{1,2}$ ), перекошенного на те же углы, но со сменой знака одного из них.

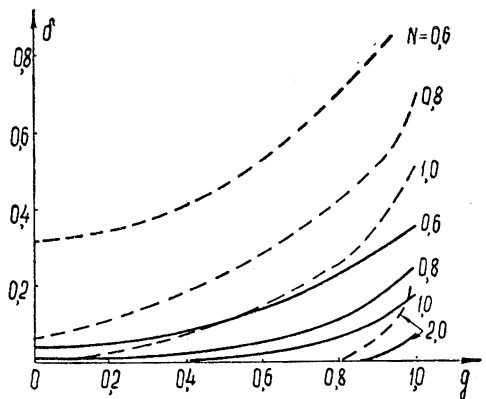
Потери самосопряженного конфокального резонатора ( $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = 0$ ) не зависят от знаков углов перекоса его зеркал.

Подробные результаты расчета потерь первых двух типов колебаний в резонаторах с неперекошенными ленточными и круговыми зеркалами приведены в [18]. На рис. 2 дан коэффициент потерь основного (ТЕМ<sub>00q</sub>) и первого несимметричного (ТЕМ<sub>10q</sub>) колебаний в резонаторах с неперекошенными ( $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ) круговыми одинаковыми зеркалами

при разных значениях  $g_1 = g_2 = g$  и  $N = c/2\pi = a^2/L\lambda$ . С ростом  $N$  при фиксированном значении  $g$  степень дискриминации несимметричной моды ухудшается, при фиксированном  $N$  она растет по мере приближения  $|g|$  к единице. При относительно больших значениях  $N \gg 2$  удовлетворительной селекцией мод можно добиться лишь при  $|g| \ll 1$ . Этим объясняется использование в одномодовых ОКГ с широкими пучками именно таких конфигураций зеркал.

Увеличение разности коэффициентов потерь ( $\delta_{10q} - \delta_{00q}$ ) (или отношения  $|p_{00q}|/|p_{10q}|$ ) с ростом  $|g|$  сопровождается и увеличением радиационных потерь основного колебания  $\delta_0 = \delta_{00q}$ . Пока омические потери  $(\delta_0)_\Omega$  много больше дифракционных  $(\delta_0)_d$ , такое увеличение не существенно, так как определяющими будут омические потери. Однако при  $(\delta_0)_d \gtrsim (\delta_0)_\Omega$  (например, в некоторых типах газовых лазеров) рост  $(\delta_0)_d$  может послужить препятствием к получению высокой селективности.

Рис. 2. Зависимость коэффициентов потерь основной и первой несимметричной мод в резонаторе с круговыми зеркалами от параметра  $g$  для различных значений  $N = c/2\pi$ . Сплошные кривые —  $\delta_0$ , пунктирные —  $\delta_1$ .



В только что проведенном рассуждении мы неявно считали фиксированной длину резонатора\*. Если отказаться от такого требования, считая фиксированным лишь размер ограничивающей диафрагмы, то сопоставление систем придется проводить уже при разных значениях двух параметров  $g$  и  $c = 2\pi N$ . В этом случае имеется больше возможностей для выбора систем, обладающих требуемой селекцией. Однозначным выбор можно сделать, лишь предъявив дополнительные требования к системе. Таким требованием может служить, например, условие минимума дифракционных потерь основного колебания при заданном уровне потерь ближайшего высшего. В применении к ОКГ это означает выбор резонатора, обеспечивающего наименьшую пороговую

\* В этом случае все рассуждения непосредственно переносятся и на коэффициенты затухания волноводных аналогов  $\alpha = \delta/L$ .

накачку активного вещества. В волноводных задачах интерес, естественно, представляет сопоставление величин погонного затухания разных типов волн:

$$\alpha = \frac{\delta}{L} = \frac{1}{ka^2} c\delta(c, g) = \frac{\lambda}{a^2} N\delta(N, g).$$

Анализ графиков потерь, приведенных в [18] (см. также рис. 2), показывает, что при фиксированной площади ограничивающих диафрагм и коэффициенте потерь первого колебания, равном некоторому фиксированному значению, наименьшим коэффициентом потерь основного колебания обладает софокусный резонатор. Аналогичное заключение можно сделать и в отношении одномодовых лучевых волноводов с коэффициентом потерь первого несимметричного типа волны, равным некоторой величине  $\alpha$ : наименьший коэффициент затухания основного колебания будет у софокусного волновода, при этом расстояние между корректорами такого волновода больше, чем в любом другом случае. Последнее обстоятельство особенно важно при проектировании открытых линий передач: в реальных корректорах всегда имеются омические потери, поэтому сведение числа корректоров к минимуму является единственно возможным путем уменьшения этих потерь на длине всего волноводного тракта.

Таким образом, в классе квадратичных корректоров софокусные корректоры, в известном смысле, обеспечивают наибольшую дискриминацию мод: при одинаковых коэффициентах затухания первых мод они имеют наименьшие потери основных и, напротив, при фиксированном уровне потерь основных колебаний потери соседних мод в них наибольшие [20, 21]. Однако такая высокая селекция может быть реализована либо при достаточно сильном ограничении пучков, либо в достаточно длинных резонаторах, что практически не всегда приемлемо. Впрочем, в некоторых случаях размеры системы можно сократить, заменив зеркала резонатора эквивалентными комбинированными отражателями, состоящими из линзы и сферического зеркала [19], но при этом возникают дополнительные трудности юстировки всех элементов сложного резонатора.

Влияние перекосов зеркал на селективные свойства резонаторов, требующее расчета потерь высших типов волн при  $\beta_{1,2} \neq 0$ , исследовано слабо. В [16] имеются данные, показывающие, что при перекосе плоских зеркал потери основного и первого несимметричного колебаний сближаются, т. е. дискриминационные свойства резонатора ухудшаются. В резонаторах, близких к конфокальному, при ограничении пучков далеко за каустиками первых типов волн можно ожидать, что перекосы будут заметно улучшать дискриминационные свойства до тех пор, пока основное колебание не начнет «выплескиваться» за пределы зеркал.

Ограничение пучков, дискриминирующее колебания в открытых системах, может осуществляться не только на корректорах, но и между ними. Так, в ОКГ роль ограничивающих диафрагм нередко играет неоднородное распределение коэффициента усиления по сечению образца активного вещества, обусловленное неравномерностью поля накачки.

Типы колебаний открытых резонаторов, диафрагмированных в произвольном сечении между неограниченными сферическими зеркалами (рис. 3), изучались в [22]. Анализ общих уравнений таких резонаторов показывает, что они сводятся к уравнениям резонаторов с диафрагмированными зеркалами лишь при некоторых положениях диафрагмы:

$$\eta = \frac{L_1}{L} = 0; 1; (1 - g_{1,2})^{-1}; (1 + \sqrt{g_2/g_1})^{-1}; L_1 - \text{удаление диафрагмы от}$$



первого зеркала. Для конфокальных зеркал ( $F_1 = F_2 = L/2$ ) такое сведение возможно при любом положении диафрагмы, при этом преобразованная система является тоже конфокальным резонатором с френелевским параметром  $c = c_0/\eta(1-\eta)$ , где  $c_0 = ka^2/L$  [23]. В указанных случаях дискриминационные свойства резонаторов, естественно, точно такие же, как и у соответствующих систем с ограниченными корректорами. В произвольном случае уравнения могут быть приведены к виду, описывающему резонатор, имеющий разную длину для прямого и обратного пучков. В работе [22] содержатся результаты численного расчета таких резонаторов для диафрагм с постоянной прозрачностью. Дискриминационные свойства в этих случаях качественно не отличаются от свойств резонаторов с ограниченными корректорами.

Дополнительным фактором, влияющим на дискриминацию мод в открытых системах, является неоднородная прозрачность ограничивающих диафрагм [24, 25]. При сопоставимых эффективных размерах области прозрачности уменьшение прозрачности к краю диафрагмы увеличивает радиационные потери всех мод, причем неравномерно, что, в принципе, может быть использовано для подавления колебаний высших порядков [24]. Однако такой

прием целесообразно применять лишь в системах с достаточно большими омическими потерями, заметно превышающими уровень радиационных потерь. Если же омические потери пренебрежимо малы, а уровень потерь основной моды не должен быть большим (как, например, в волноводах), то диафрагмы с однородной прозрачностью предпочтительнее, так как обеспечивают более высокий уровень потерь высших колебаний при сопоставимых значениях потерь основного типа [20, 25].

Специальным подбором конфигурации области прозрачности диафрагмы с помощью системы щелей или непрозрачных объектов можно добиться выделения мод высших порядков и подавить основные [26, 27].

## 2. Ограничение углового спектра волновых пучков. Комбинированное ограничение

Наряду с наиболее распространенным пространственным ограничением волновых пучков находит применение и другой способ дискриминации, основанный на ограничении углового спектра пучков. Его можно назвать методом угловой селекции мод. Теория систем с угловой селекцией строится на основе методов расчета систем с ограничивающими диафрагмами [28].

Рассмотрим, к примеру, открытый резонатор длиной  $L$  с одинаковыми цилиндрическими зеркалами радиусов кривизны  $R_1 = R_2 = 2F$ . При ограничении зеркал такой резонатор характеризуется, согласно (1.2), параметрами  $c = c_s = ka^2/L$  и  $g = 1 - L/2F$ . Если в резонаторе с неограниченными зеркалами находится элемент, ограничивающий угловой спектр  $k_{\perp}$  пучка величиной  $k_{\perp}^0$  ( $|k_{\perp}| < k_{\perp}^0$ ,  $k_{\perp}$  — проекция волнового вектора на плоскость, перпендикулярную оси резонатора), то

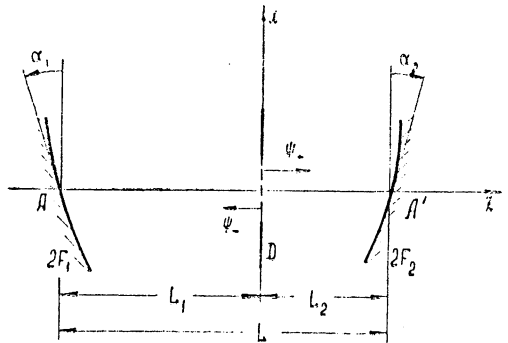


Рис. 3. Открытый резонатор с промежуточной диафрагмой.

для углового спектра на такой диафрагме может быть получено уравнение, аналогичное (1.1), но с заменой  $c_s$  на  $c_a = k_{\perp}^0 F/k$ . Следует заметить, что теперь при фиксированной длине резонатора  $L$  параметры  $c_a$  и  $g$  связаны между собой:

$$c_a = \frac{1}{1-g} \frac{k_{\perp}^0 L}{2k},$$

поэтому для углового ограничения характерным является уменьшение потерь резонатора при переходе к плоским зеркалам и быстрый рост их при отрицательных  $g$ .

Как уже отмечалось, рост параметра  $c$  при фиксированном  $g$  ухудшает селекцию колебаний в резонаторе; для выделения аксиальных типов колебаний приходится прибегать к достаточно сильному диафрагмированию пучка или его спектра.

В плоскопараллельных и близких к ним резонаторах ( $g \ll 1$ ) заметное подавление неаксиальных типов достигается лишь при таких  $c$ , когда размеры пучков определяются размерами ограничивающих диафрагм. Сравним в этом случае расходимость пучков  $\theta$  при обоих методах селекции: пространственном ограничении и ограничении углового спектра. При пространственном ограничении можно принять  $\theta = \theta_s = 2\pi/ka$ , при угловом  $\theta = \theta_a = 2k_{\perp}^0/k$ . При одинаковых  $c$  и  $g$   $\theta_s > \theta_a$ , если  $c\sqrt{2(1-g)} < \pi$ . Это условие всегда выполняется при достаточно сильном ограничении пучков, необходимом для селекции. Следовательно, метод угловой селекции позволяет получить большую направленность излучения в одномодовом режиме. Дискриминацию мод в резонаторах с  $c_s \gg 1$  можно улучшить, применив метод комбинированной селекции, заключающийся в одновременном пространственном и угловом ограничении пучков [28]. Рассмотрим, например, двумерный резонатор с плоскими зеркалами, ограниченный диафрагмой шириной  $2a$  и угловым селектором с раствором  $2k_{\perp}^0$ . Считая, что  $c_s \gg 10$ , пренебрежем расплыванием пучка внутри резонатора. Уравнение для поля в плоскости диафрагмы, пространственно ограничивающей пучок, запишется в виде

$$T\psi(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sin[c_{sa}(u-u')]}{(u-u')} \psi(u') du', \quad (2.1)$$

где  $u = x/a$  и  $c_{sa} = k_{\perp}^0 a$ ,  $T$  — коэффициент передачи системы по амплитуде за один полный проход пучком резонатора (туда—обратно). Уравнение (2.1) того же типа, что и уравнение собственных функций фокального резонатора [17]. Таким образом, метод комбинированной селекции реализует высокую селективность, свойственную при пространственном ограничении фокальной системе, но не связан с необходимостью использования узких пучков ( $c_s \gg 10$ ).

В литературе описано несколько способов диафрагмирования углового спектра пучков: в [29] предлагается использовать ограничение в общей фокальной плоскости линз телескопической системы, расчет аналогичного устройства дан в [21]. Недостатком этого способа, ограничивающим возможности его применения в ОКГ, является малый размер пучка на диафрагме. Более удобным является использование селектирующих призм полного внутреннего отражения [31], причем роль селекторов могут выполнять отражатели [30] и даже сами активные элементы [32].

### 3. Неквадратичные фазовые корректоры

Выше уже говорилось, что среди квадратичных корректоров, ограниченных диафрагмой данных размеров ( $ka^2 = \text{const}$ ), наилучшими дискриминационными свойствами обладают софокусные корректоры, однако резонаторы, реализующие такую селективность, должны иметь большую длину  $L \sim \frac{ka^2}{\pi} = \frac{2a^2}{\lambda}$ . Этого затруднения можно избежать, используя законы фазовой коррекции, отличные от квадратичного [33].

Рассмотрим открытый резонатор длиной  $L$ , образованный двумя отражателями, осуществляющими фазовый сдвиг между отраженным и падающим пучками на величину  $2\varphi_1, 2$ .

Уравнения для поля на зеркалах такого резонатора будут следующие:

$$\begin{aligned} p\psi_2(\mathbf{r}_{\perp 2}) &= \frac{ik}{2\pi L} \exp(i\varphi_2(\mathbf{r}_{\perp 2})) \int_{S_1} \exp\left(\frac{ik|\mathbf{r}_{\perp 2} - \mathbf{r}_{\perp 1}|^2}{2L}\right) \times \\ &\quad \times \exp(i\varphi_1(\mathbf{r}_{\perp 1})) \psi_1(\mathbf{r}_{\perp 1}) d\mathbf{r}_{\perp 1}, \\ \psi_1(\mathbf{r}_{\perp 1}) &= \frac{ik}{2\pi L} \exp(i\varphi_1(\mathbf{r}_{\perp 1})) \int_{S_2} \exp\left(\frac{ik|\mathbf{r}_{\perp 1} - \mathbf{r}_{\perp 2}|^2}{2L}\right) \times \\ &\quad \times \exp(i\varphi_2(\mathbf{r}_{\perp 2})) \psi_2(\mathbf{r}_{\perp 2}) d\mathbf{r}_{\perp 2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $S_1, S_2$  — апертуры зеркал. Уравнения (3.1) записаны в квазиоптическом приближении в предположении, что локальная кривизна зеркал невелика и пучки остаются параксиальными.

Уравнения (3.1) допускают преобразования функций  $\varphi_1(\mathbf{r}_{\perp 1}), \varphi_2(\mathbf{r}_{\perp 1})$ , сохраняющие неизменными коэффициенты потерь всех типов колебаний, а также и структуру поля этих колебаний на зеркалах с точностью до знака фазы и масштабного множителя. Первое из этих преобразований  $\hat{T}_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1^t(\mathbf{r}_{\perp 1}) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \frac{kr_{\perp 1}^2}{L} + \varphi_1^i\left(\frac{\mathbf{r}_{\perp 1}}{\alpha}\right), \\ \varphi_2^t(\mathbf{r}_{\perp 1}) &= \frac{1}{2} (1 - \alpha^2) \frac{kr_{\perp 1}^2}{L} + \varphi_2^i(\alpha\mathbf{r}_{\perp 1}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

второе  $\hat{T}_2$

$$\begin{aligned} \varphi_1^t(\mathbf{r}_{\perp 1}) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2} \frac{kr_{\perp 1}^2}{L} - \varphi_1^i\left(-\frac{\mathbf{r}_{\perp 1}}{\alpha}\right), \\ \varphi_2^t(\mathbf{r}_{\perp 1}) &= \frac{1}{2} (1 + \alpha^2) \frac{kr_{\perp 1}^2}{L} - \varphi_2^i(\alpha\mathbf{r}_{\perp 1}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\alpha$  — произвольное действительное постоянное число, значки  $i$  и  $t$  относятся соответственно к исходной и преобразованной системам. В (3.2) и (3.3) индексы 1 и 2 можно поменять местами.

Условия  $\varphi_1^i = \varphi_2^i = 0$  определяют исходный плоский резонатор. Преобразование  $\hat{T}_1$  переводит его в концентрический с радиусами кри-

визны зеркал  $R_1 = \frac{a^2}{a^2 - 1} L$ ,  $R_2 = -\frac{1}{a^2 - 1} L$  и прежним расстоянием между ними  $L = R_1 + R_2$ . В произвольном случае преобразование  $\hat{T}_1$  любому исходному резонатору с фазовой коррекцией  $\varphi_{1,2}^i(\mathbf{r}_\perp)$ , отсчитываемой от плоскостей  $z = \pm L/2$ , ставит в соответствие резонатор с фазовой коррекцией  $\varphi_1^i\left(\frac{\mathbf{r}_\perp}{a}\right)$ ,  $\varphi_2^i(a\mathbf{r}_\perp)$ , отсчитываемой от концентрических сфер указанных радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , причем общий центр кривизны этих сфер всегда лежит вне резонатора.

Преобразованием  $\hat{T}_2$  плоский резонатор переводится в концентрический с радиусами кривизны зеркал  $R_1 = \frac{a^2}{a^2 + 1} L$ ,  $R_2 = \frac{1}{a^2 + 1} L$  ( $R_1 + R_2 = L$ ). Общий центр кривизны зеркал при этом лежит внутри резонатора. В произвольно преобразованном резонаторе отсчет фазовой коррекции  $-\varphi_1^i\left(-\frac{\mathbf{r}_\perp}{a}\right)$ ,  $-\varphi_2^i(a\mathbf{r}_\perp)$  происходит от указанных сфер, но в сторону, противоположную отсчету фазы в исходном резонаторе.

Параметр  $a$  является масштабным множителем как функций фазовой коррекции  $\varphi_{1,2}^i$ , так и самих распределений поля на зеркалах: для преобразования  $\hat{T}_1$

$$\psi_1^i(\mathbf{r}_\perp) = \psi_1^i(\mathbf{r}_\perp/a), \quad \psi_2^i(\mathbf{r}_\perp) = \psi_2^i(a\mathbf{r}_\perp),$$

для преобразования  $\hat{T}_2$  (3.4)

$$\psi_1^i(\mathbf{r}_\perp) = \psi_1^{i*}(-\mathbf{r}_\perp/a), \quad \psi_2^i(\mathbf{r}_\perp) = \psi_2^{i*}(a\mathbf{r}_\perp).$$

В применении к сферическим зеркалам преобразования  $\hat{T}_1$  и  $\hat{T}_2$  приводят к соотношениям симметрии, о которых шла речь выше. Так, преобразование  $\hat{T}_2$  при  $a = 1$  соответствует переходу от исходного резонатора к сопряженному ( $g_{1,2} \rightarrow -g_{1,2}$ ); при одних и тех же функциях  $\varphi_{1,2}^i$ , но разных  $a$ , преобразование  $\hat{T}_1$  описывает семейство эквивалентных резонаторов с постоянными параметрами (1.2). Преобразования  $\hat{T}_1$  и  $\hat{T}_2$  можно использовать для подбора желательной конфигурации пучка в резонаторе при сохранении всех дискриминационных характеристик системы.

Неквадратичные корректоры можно применять для улучшения дискриминационных характеристик открытых систем. Качественно профиль отражателей резонатора, обеспечивающий высокую степень радиационных потерь для неаксиальных мод, можно найти, воспользовавшись упоминавшимся выше представлением, что поле в резонаторе удерживается за счет отражения волны от боковой (открытой) поверхности резонатора. Зеркала резонатора должны «запирать» основное колебание и достаточно хорошо согласовывать внутренний объем резонатора со свободным пространством для высших поперечных мод. Возможная конфигурация такого резонатора показана на рис. 4. Размер вогнутой сферической части зеркал берется из расчета, чтобы внутри нее уложилась только каустическая поверхность аксиального колебания, а колебания высших порядков свободно переизлучались в открытое пространство. В резонаторе с зеркалами конечных размеров высокодобротные колебания, удерживаемые краями зеркал, устраняются с помощью соответствующих согласующих переходов рупорного типа.

На рис. 5 приведен пример зависимости коэффициентов потерь основного  $\delta_0 = -\ln|p_0|$  и первого (несимметричного)  $\delta_1 = -\ln|p_1|$

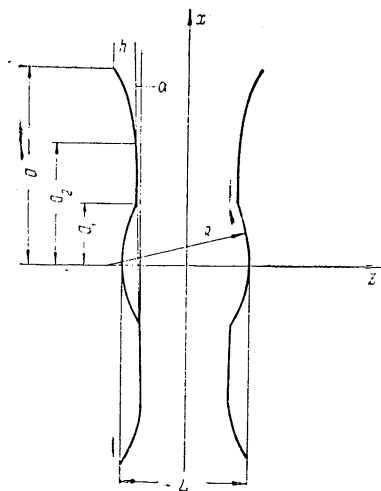


Рис. 4. Резонатор с неквадратичными зеркалами. Параметры, характеризующие профиль зеркала:

$$c = \frac{ka^2}{L}, \quad c_1 = \frac{ka_1^2}{L}, \quad c_2 = \frac{ka_2^2}{L}, \quad g = 1 - \frac{L}{R},$$

$$h = \frac{\omega(a - a_2)^2}{2R}, \quad \omega.$$

типов колебаний резонатора с ленточными зеркалами (рис. 4) от параметра  $\omega$ , характеризующего величину отгиба зеркал в рупорной части

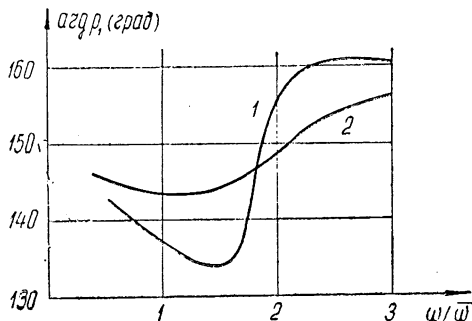
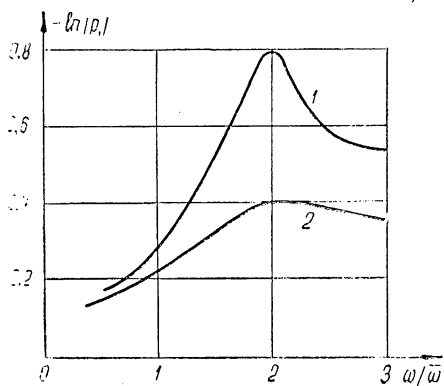
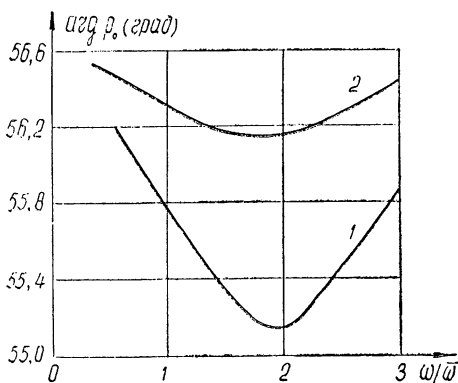
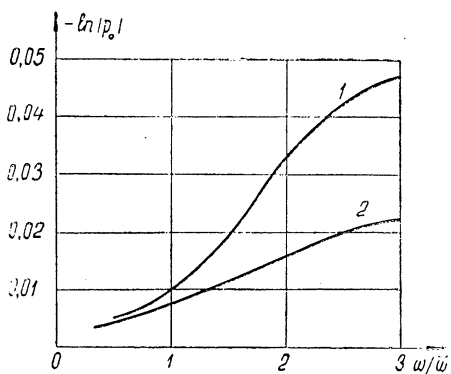


Рис. 5. Зависимость коэффициентов потерь нулевой и первой мод от  $\omega$  при  $g = 0,5$ ,  $c = 10$ ,  $\sqrt{c_1} = 1,5$ . Кривая 1 —  $\sqrt{c_2} = 1,5$ ; кривая 2 —  $\sqrt{c_2} = 2$ .

Рис. 6. Зависимость фаз собственных значений нулевой и первой мод от  $\omega$  для тех же параметров резонатора, что и на рис. 5.

резонатора\*. На рис. 6 изображены графики фаз собственных значений того же резонатора. Принятые обозначения ясны из рис. 4, отгиб имеет параболический профиль. При оптимальном отгибе разность коэффициентов потерь первого и основного колебаний существенно больше той, которая может быть получена в резонаторах со сферическими зеркалами (в том числе и конфокальном) при том же уровне потерь основного колебания. Более высокая селекция достигается в резонаторах со слабо вогнутой центральной частью, но для этого требуются зеркала достаточно больших размеров. Важно отметить, что в этом случае улучшение селективных свойств будет сопровождаться расширением пучков, что может оказаться полезным в целом ряде приложений. Однако по мере перехода к более плоским системам возрастают трудности юстировки, а также повышаются и требования к точности, с которой должен выдерживаться профиль зеркал.

Интересно влияние перекосов профильных зеркал на их селективные свойства. Как показывают расчеты и эксперименты [33], при оптимальной для подавления высших колебаний форме зеркал перекосы их могут приводить к заметному уменьшению потерь высших типов и ухудшению селекции мод, в то время как при отсутствии отгиба перекося улучшает селекцию.

Резонаторы с другими законами фазовой коррекции исследовались в [34, 59] (конические), [35] (зеркала 4-го и 8-го порядков). Результаты расчетов показывают, что для конических зеркал существует оптимальный угол раскрытия конуса, при котором дифракционные потери основного колебания минимальны. Дискриминационные свойства их мало отличаются от свойств квадратичных корректоров.

Зеркала 4-го и 8-го порядков приводят к ряду качественных особенностей по сравнению с квадратичными. Это можно видеть уже из анализа хода лучей в таких системах в приближении геометрической оптики. Для квадратичных корректоров разностные лучевые уравнения являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Для неквадратичных корректоров эти уравнения нелинейны. Характер устойчивости луча в системе квадратичных корректоров (разбиение на финитные и нефинитные траектории) не зависит от начальных значений координат луча, а определяется только параметрами системы. Условием устойчивости является неравенство [36]

$$\left| \frac{1}{2} \operatorname{sp} \hat{S} \right| < 1, \quad (3.5)$$

неустойчивости

$$\left| \frac{1}{2} \operatorname{sp} \hat{S} \right| > 1, \quad (3.6)$$

где  $\hat{S}$  — матрица преобразования координат луча на одном периоде системы.

В неквадратичных системах устойчивость луча зависит, в общем случае, от его начальных координат. В системе неограниченных квадратичных корректоров число мод, ограниченных каустиками, бесконечно при условии (3.5) и равно нулю при условии (3.6). В неквадратичной системе (например, в системе корректоров четвертого порядка) число каустик конечно, в частности, при определенных условиях может существовать только одна каустическая поверхность, которой будет соответствовать высокочастотная мода.

\* При  $\omega = \bar{\omega} = a_1^2 / (a - a_1)^2$  величина отгиба на краю  $h$  равна глубине центральной части зеркала.

Достаточно эффективным методом расчета неквадратичных систем является метод приближенного разделения переменных [9]. Двумерный резонатор с бесконечными неплоскими зеркалами конформно преобразуется в плоско-параллельный с неоднородным диэлектрическим заполнением  $\epsilon$ . При достаточно малой и плавно меняющейся локальной кривизне зеркал:  $L/R \ll 1$  ( $R$  — радиус кривизны),  $a/L \gg 1$  ( $a$  — размер неоднородного участка зеркала) можно пренебречь зависимостью  $\epsilon$  от координаты  $z$ , перпендикулярной плоскости зеркал. При этом поле в резонаторе как функция поперечной координаты  $x$  будет удовлетворять уравнению типа уравнения Шредингера для частицы в потенциальной яме конечной глубины. Такое уравнение имеет ограниченное число дискретных собственных значений. При соответствующем профиле корректоров это число может быть сведено к единице. Подобным же уравнением описывается и распространение волн вдоль неоднородного диэлектрического стержня, при этом колебания дискретного спектра соответствуют поверхностные волны на стержне. Учет зависимости  $\epsilon$  от  $z$  в резонаторе эквивалентен периодической модуляции  $\epsilon$  в диэлектрическом стержне. Если период такой модуляции  $L \gg \lambda$ , то поверхностные волны будут иметь пренебрежимо малое радиационное затухание, а соответствующие им колебания в резонаторе — высокую добротность.

Резонаторы с несферическими зеркалами можно рассматривать как отрезки волноводов переменного сечения. Резонансные свойства таких отрезков обусловлены отражением волн от неоднородностей [9, 37]. В [37] показано, что резонатор, образованный участком волновода между скачкообразными расширениями его сечения, при некоторых параметрах обладает достаточно высокой дискриминацией. В [9] приведены результаты расчета резонатора с рупорными расширениями сечения. Радиационная добротность колебаний в таком резонаторе существенно ниже, чем в соответствующем плоском, хотя отношение добротностей соседних типов остается прежним.

В заключение данного раздела отметим, что применением неквадратичных корректоров, в принципе, может быть решена задача о создании резонатора с заданным распределением поля некоторого типа колебаний, по крайней мере, вблизи одного из зеркал. Действительно, пусть вблизи первого зеркала необходимо иметь распределение поля в прямом пучке  $\psi_+^{(1)}$ . Поле вблизи второго зеркала при этом будет  $\psi_+^{(2)}$ . С помощью фазовой коррекции  $\varphi_2 = -2 \arg \psi_+^{(2)}$  в отраженном пучке у второго зеркала будет создано распределение поля  $\psi_-^{(2)} = \psi_+^{(2)*}$ , а у первого зеркала  $\psi_-^{(1)} = \psi_+^{(1)*}$ . Фазовая коррекция  $\varphi_1 = 2 \arg \psi_-^{(1)}$  восстановит, очевидно, первоначальное распределение поля в прямом пучке. Селективные свойства системы в целом могут оказаться невысокими из-за слабого затухания колебаний высших порядков; расчет этих колебаний, в общем случае, может быть проведен лишь численными методами.

## II. МЕТОДЫ ДИСКРИМИНАЦИИ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ ПО ПРОДОЛЬНОМУ ИНДЕКСУ

Наряду с описанной выше пространственной селекцией в резонаторах имеется дополнительная возможность селекции мод, основанная на различии их собственных частот. По отношению к колебаниям, отличающимся только продольными индексами  $q$ , частотная дискриминация является, в сущности, единственно возможной, так как эти колебания при  $q \gg 1$  обладают практически одинаковыми структурами и отличаются лишь резонансными частотами. Выделить из них одно ( $q = q_0$ ) можно только в том случае, если потери в резонаторе быстро меняются

с частотой. Это достигается применением диспергирующих элементов. Мы будем различать резонаторы с диспергирующими элементами, отклоняющими при изменении частоты волновой пучок от оси резонатора (призмы [38, 39], эшелетты [40—43]) и тем самым увеличивающими дифракционные потери, и резонаторы с диспергирующими отражателями, модуль коэффициента отражения которых зависит от частоты. К числу последних можно отнести и связанные резонаторы [47—57].

### 1. Открытые резонаторы с эшелеттами и призмами

Рассмотрим резонатор, одно из зеркал которого заменено отражательной дифракционной решеткой — эшелеттом (рис. 7). На рабочей частоте луч отражается от эшелетта по тому же направлению, что и падает, т. е. перпендикулярно ступенькам. Для других частот падающий и отраженный лучи образуют угол, пропорциональный в первом приближении относительному сдвигу частот. Таким образом, если пренебречь дифракционным расплыванием пучка при отражении от эшелетта, то на смещенных частотах последний будет эквивалентен перекошенному плоскому зеркалу.

Рис. 7. Общий вид резонатора с эшелеттом.

Углы, образованные падающим и отраженными пучками разных дифракционных порядков с нормалью к эшелетту, связаны между собой соотношением

$$\sin \theta_n = -\sin \theta_0 - \frac{2\pi n}{kd} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.1)$$

где  $\theta_0$  и  $\theta_n$  — соответственно углы падения и отражения, отсчитываемые от нормали к плоскости решетки,  $d$  — период эшелетта. На рабочей частоте для одного из порядков  $\theta_m = \theta_0$ , вблизи нее

$$\Delta\theta = \theta_m - \theta_0 = -2 \operatorname{tg} \theta_0 \frac{\Delta k}{k}. \quad (1.2)$$

Такая же разность углов  $\Delta\theta$  обеспечивается при перекосе плоского зеркала на угол  $\alpha = \Delta\theta/2$ .

В теории антенн с частотным качанием луча [44] принято вводить параметр углочастотной чувствительности  $p = f \frac{\partial \theta}{\partial f} = k \frac{\partial \theta}{\partial k}$ , характеризующий скорость изменения положения луча при перестройке частоты. Эшелетт и призму, изготовленную из материала с дисперсией показателя преломления, с этой точки зрения можно рассматривать как пассивные отражатели с частотным перемещением луча, равным отклонению луча плоским отражателем, перекошенным на угол

$$\alpha = \frac{1}{2} p \frac{\Delta k}{k}. \quad (1.3)$$

Для соседних с рабочим продольных колебаний открытого резонатора  $\Delta k = \pi/L$  и



$$z = z_0 = \frac{1}{2} p \frac{\lambda}{L}. \quad (1.4)$$

Таким образом, степень дискриминации продольных мод в резонаторе зависит от величины дополнительных радиационных потерь, вносимых в резонатор перекосом эквивалентного плоского зеркала на угол  $\alpha_0$ . Наибольшая величина этих потерь будет в резонаторе с плоским вторым отражателем, в резонаторах со сферическими зеркалами дискриминационные свойства выражены слабее.

Величину дополнительных потерь для плоскопараллельного резонатора можно оценить по формуле [45, 46]

$$\delta_\alpha \simeq \frac{2}{3} (ka)^2 \alpha_0^2 \simeq \frac{\pi}{2} p^2 \left(\frac{a}{L}\right)^2 = \frac{1}{2} p^2 \frac{c}{q_0}, \quad (1.5)$$

где  $a$  — полуширина зеркал,  $c = ka^2/L$ .

Сравним величину  $\delta_\alpha$  с коэффициентом дифракционных потерь основного колебания  $\delta_0$ . Например, для квадратных зеркал ( $2a \times 2a$ ) [7] при  $c \gg 1$

$$\delta_0 \simeq 2^{1/2} \pi^2 \gamma / c^{3/2} \quad (\gamma = 0,824),$$

так что

$$\frac{\delta_\alpha}{\delta_0} \simeq \frac{p^2 c^{5/2}}{2^{3/2} \pi^2 \gamma q_0}.$$

Обычно  $p \leq 1$  (или даже  $p \ll 1$ ), и на оптических частотах ( $q_0 \sim 10^6$ ) диспергирующие элементы вносят лишь незначительные дополнительные потери.

Правда, призмы находят применение в ОКГ в тех случаях, когда имеется несколько спектральных линий, на которых возможна генерация, и необходимо выделить одну из них. Так, подавив переход с  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ , в смеси He—Ne можно получить генерацию на  $\lambda = 6401 \text{ \AA}$  [38]. Есть предложения об использовании для той же цели эшелетта [41], который позволяет к тому же удобно выводить энергию из резонатора через зеркальный максимум дифракционного спектра.

В диапазонах миллиметровых и субмиллиметровых волн положение иное: там спектр более редок, и диспергирующие элементы позволяют выделить один продольный порядок спектра. Так, при использовании эшелетта с плоским зеркалом в диапазоне длин волн  $\lambda \simeq 8 \text{ мм}$  удается выделить колебания с одним продольным индексом [42].

Для одновременного подавления поперечных колебаний в [43] было предложено использовать в паре с эшелеттом несферическое зеркало типа описанных в первом разделе (подраздел 3). В экспериментально исследованном резонаторе [43] эшелетт был нарезан на круглом диске диаметром 200 мм, ширина его ступеньки равнялась 15 мм при высоте 8,25 мм. Второе зеркало (диаметром 200 мм) имело вогнутую (сферическую) часть диаметром 70 мм с радиусом кривизны 100 см, плоский пояс шириной 35 мм и конический отгиб  $1,4^\circ$ . Для лучшего возбуждения несимметричной моды отверстия связи в обоих зеркалах были смещены от центра на 30 мм. Расстояние от второго зеркала до ближайшей ступени эшелетта равнялось 94 мм. На рис. 8 приведен коэффициент потерь основного типа колебаний в зависимости от длины волны. При отходе от рабочей длины волны (кривая 1) потери основного типа колебаний быстро возрастают, а соседние продольные колебания практически не возбуждаются. В резонаторе, образованном эшелеттом и сфе-

рическим зеркалом, увеличение потерь происходит медленно, дискриминация продольных колебаний недостаточна (кривая 2). Измерения показали, что кривые возрастания потерь при перекосе плоского зеркала в двух описанных выше резонаторах качественно совпадают с зависимостями, приведенными на рис. 8, если сопоставить углы перекоса зеркал и углы между падающим и отраженным от эшелетта лучами на различных частотах по его углочастотной чувствительности.

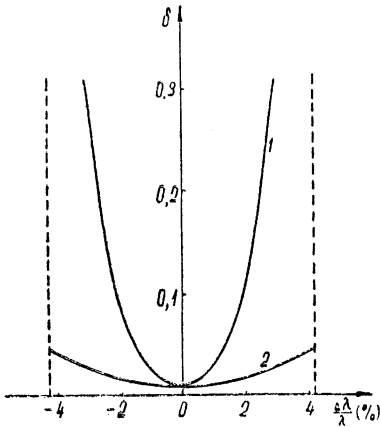


Рис. 8. Зависимость коэффициента потерь основного типа колебаний от расстройки:

1—резонатор образован эшелеттом и зеркалом со сложным профилем, 2—резонатор образован эшелеттом и сферическим зеркалом. (Пунктирными прямыми отмечены абсциссы, соответствующие соседним продольным колебаниям.)

## 2. Резонаторы с промежуточными отражателями

Если модули коэффициентов отражения зеркал  $\tilde{R}_1$ ,  $\tilde{R}_2$  являются функциями частоты, то из резонансного условия типа (1.1.3)\*

$$p_{mn}\tilde{R}_1(\omega)\tilde{R}_2(\omega)\exp(-i2kL) = \exp(-i2\pi q) \quad (2.1)$$

следует, что добротности колебаний с несовпадающими частотами

$$Q_{mnq} = \frac{k'_{mnq}L}{\ln[|p_{mn}||\tilde{R}_1(\omega_{mnq})||\tilde{R}_2(\omega_{mnq})|]} \quad (2.2)$$

будут различны. В качестве сильно диспергирующих отражателей используются, как правило, дополнительные резонаторы типа интерферометров Фабри—Перо [47—52]. Очевидно, такие системы можно рассматривать как связанные резонаторы.

Одно из практически применяемых устройств этого типа схематически изображено на рис. 9. Оно состоит из двух высокодобротных ре-

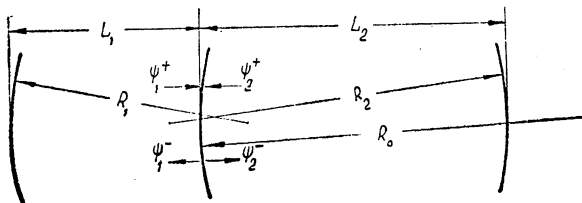


Рис. 9. Связанный резонатор с промежуточным отражателем

зонаторов, слабо связанных через частично прозрачный сферический отражатель с радиусом кривизны  $R_0 = 2F_0$  [48]. Написав уравнение

\* I обозначает ссылку на формулу из первого раздела.

для лучевых амплитуд пучков  $\psi^+$  и  $\psi^-$  в обоих парциальных резонаторах и связав эти величины между собой через матрицу рассеяния промежуточного отражателя, можно получить уравнение для определения собственных функций и частот в виде

$$\begin{aligned} \psi_1^- = & - \exp[-i2k(L_1 + L_2)] r_1 r_2 \hat{K}_2 \hat{K}_1 \psi_1^- + \\ & + \exp(-i2kL_1) r r_1 \hat{K}_1 \psi_1^- + \exp(-i2kL_2) r r_2 \hat{K}_2 \psi_1^-. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3)  $r_{1,2}$  и  $r$  — не зависящие от частоты коэффициенты отражения концевых и промежуточного зеркал,  $\psi_1^-$  — поле на промежуточном отражателе в первом резонаторе в обратном пучке,

$$\begin{aligned} \hat{K}_{1,2}(D_{1,2}, g_{1,2}) \psi_1^-(x, y) = & \frac{ik}{2\pi D_{1,2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{ik}{D_{1,2}} (xx' + yy') - \right. \\ & \left. - \frac{ik}{2D_{1,2}} g_{1,2} (x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2) \right] \psi_1^-(x', y') dx' dy' \end{aligned} \quad (2.4)$$

— симметричные интегральные операторы, определяющие собственные функции резонаторов 1 и 2:

$$D_{1,2} = 2L_{1,2} \left( 1 - \frac{L_{1,2}}{R_{1,2}} \right), \quad g_{1,2} = 1 - \frac{2L_{1,2}}{R_{1,2}} \pm \frac{L_{1,2}}{F_0} \left( 1 - \frac{L_{1,2}}{R_{1,2}} \right). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.3) приводится к уравнению обычного двухзеркального резонатора, если положить  $r$  равным нулю.

Уравнение (2.3) является интегральным уравнением с несимметричным ядром, быстро осциллирующим с изменением частоты. В отличие от уравнений двухзеркального резонатора (I.1.1) оно в общем случае не приводится к уравнению Фредгольма второго рода с явно выделенным собственным значением и ядром, слабо зависящим от частоты.

Кроме того, в подобном резонаторе имеется специфический механизм потерь: при произвольных радиусах кривизны всех отражателей собственные функции парциальных резонаторов (т. е. операторов  $\hat{K}_1$  и  $\hat{K}_2$ ) различны, и потери всех типов колебаний отличны от нуля даже при неограниченных идеально отражающих зеркалах. Это легко понять, исходя из геометрикооптических представлений: положение каустик парциальных резонаторов с разных сторон промежуточных отражателей не совпадает, поэтому всегда можно построить систему лучей, уходящих на бесконечность.

Рассмотрим свойства сложного резонатора при пространственном согласовании функций резонаторов 1 и 2. Собственные функции одинаковы в плоскости промежуточной пластины, если

$$\frac{1 - g_1^2}{D_1^2} = \frac{1 - g_2^2}{D_2^2}, \quad (2.6)$$

что определяет ее единственное положение внутри резонатора\*. Для плоской пластины из (2.6) следует, что

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 + \frac{R_1 - L}{R_2 - L}.$$

\* Если резонатор конфокальный, то пространственное согласование получается при любом положении пластины.

Уравнение (2.3) сводится в этом случае к трансцендентному дисперсионному уравнению\*

$$\cos \left[ k(L_1 + L_2) - \frac{\nu_{mn}(\theta_1 + \theta_2)}{4} \right] = r \cos \left[ k(L_1 - L_2) - \frac{\nu_{mn}(\theta_1 - \theta_2)}{4} \right], \quad (2.7)$$

где  $\theta_{1,2} = \arccos g_{1,2}$ ,  $\nu_{mn} = 2(m+n+1)$ ,  $m, n$  — поперечные индексы мод в декартовой системе координат. Число корней уравнения (2.7) в некотором спектральном интервале в среднем совпадает с количеством корней уравнения двухзеркального резонатора, образованного зеркалами 1 и 2 (рис. 10), т. е. спектр связанных резонаторов в целом не

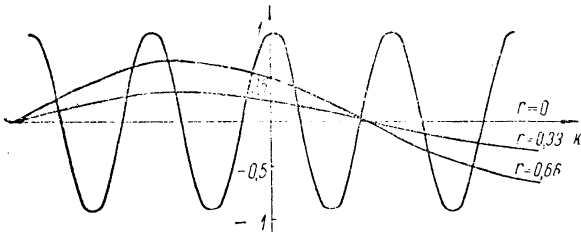


Рис. 10. Левая и правая части дисперсионного уравнения связанного резонатора (формула (II. 2.7)); точки пересечения кривых определяют резонансные частоты.

является более редким; роль промежуточного отражателя сказывается только в том, что спектр становится неэквидистантным. При использовании подобных резонаторов в ОКГ для селекции колебаний по продольному индексу [48] обычно длина одного резонатора выбирается значительно меньшей длины другого  $L_2 \ll L_1$ . Тогда дисперсионное уравнение резонатора можно представить в виде

$$r_1 \tilde{R}_\Phi(\omega) \exp(-i2kL_1) = \exp(-i2\pi q), \quad (2.8)$$

где  $\tilde{R}_\Phi(\omega)$  — коэффициент отражения интерферометра Фабри—Перо, образованного промежуточной пластиной и зеркалом 2,

$$\tilde{R}_\Phi(\omega) = r - \frac{(1-r^2)r_2 \exp(-i2kL_2)}{1-rr_2 \exp(-i2kL_2)}. \quad (2.9)$$

Выделяемое продольное колебание совмещают по частоте с максимумом  $\tilde{R}_\Phi(\omega)$ , тогда колебания соседних продольных порядков имеют дополнительные потери. На величину  $L_2$  накладывается условие, чтобы следующие максимумы  $\tilde{R}_\Phi(\omega)$  не попадали в линию люминесценции. Приведем оценку для резонатора, использованного в He—Ne лазере [48]:  $L_1 = 180$  см,  $L_2 = 20$  см,  $r = r_1 = 0,99$ ,  $r_2 = 0,8$ . Тогда разность потерь колебаний двух соседних продольных порядков не превышает 0,1%, что позволяет выделить одно колебание (устранив высшие поперечные моды диафрагмированием) лишь вблизи самого порога генерации.

Дискриминирующее действие можно несколько усилить, используя два дополнительных резонатора неодинаковой длины [50]. Размеры их выбираются таким образом, чтобы в полосе частот люминесценции совпадало только по одному из максимумов отражения обоих резонаторов. Соседние максимумы при этом перекрываются лишь частично.

\* В формуле (2.7) величины  $r_1$  и  $r_2$  положены равными 1.

Рассмотрим пример, приведенный в работе [50]: основной резонатор длиной 100 см дополняется двумя резонаторами длиной 18,5 и 37 см. Выберем коэффициент отражения внутренних зеркал равным 0,99, а внешних — 0,8. Сделав подсчет по формуле (2.8), где теперь оба коэффициента отражения будут зависеть от частоты, получим, что разность потерь двух соседних продольных колебаний равна 0,4%.

Степень селекции продольных колебаний, которую могут обеспечить резонаторы с промежуточным отражателем, часто оказывается недостаточной. Улучшенной дискриминации можно добиться в резонаторах, описанных ниже.

### 3. Связанные резонаторы с наклонной делительной пластиной

Трехзеркальный резонатор с наклонной делительной пластиной получается формально при дополнении интерферометра Майкельсона еще одним зеркалом.

Общий вид резонатора показан на рис. 11, плечи 1—3 замкнуты зеркалами, плечо 4 свободно. Связь между плечами осуществляется через плоскую делительную пластину, эквивалентную по своим свойствам полностью симметричному восьмиполюснику. Условие самосогласования распределения лучевой амплитуды у делителя в плече 3  $\psi_3^-$  после обхода плеч 1 и 2 приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \psi_3^- = & s_{13}^2 \exp[-i2k(L_1 + L_3)] r_1 r_3 \hat{K}_1 \hat{K}_3 \psi_3^- - \\ & - s_{23}^2 \exp[-i2k(L_2 + L_3)] r_2 r_3 \hat{K}_2 \hat{K}_3 \psi_3^-, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $s_{13}$  и  $s_{23}$  — коэффициенты передачи делителя по полю между соответствующими плечами. Уравнение (3.1), как и (2.3), содержит быстроосциллирующие слагаемые, включающие неизвестную величину  $k$ , что не позволяет в общем случае привести его к уравнению Фредгольма второго рода с явно выделенным собственным значением в виде множителя при функции в левой части уравнения.

Выпишем уравнение для распределения поля, идущего в свободное плечо 4,

$$\begin{aligned} \psi_4^- = & is_{13}s_{23} \{ \exp[-i2k(L_1 + L_3)] \times \\ & \times r_1 r_3 \hat{K}_1 \hat{K}_3 \psi_3^- + \exp[-i2k(L_2 + L_3)] \times \\ & \times r_2 r_3 \hat{K}_2 \hat{K}_3 \psi_3^- \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

и разберем вопрос, когда  $\psi_4^- \equiv 0$ .

Из формулы (3.2) следует, что излучение в свободное плечо может отсутствовать только в том случае, когда

$$r_1 \hat{K}_1 \hat{K}_3 \psi_3^- = e^{i\epsilon} r_2 \hat{K}_2 \hat{K}_3 \psi_3^-, \quad (3.3)$$

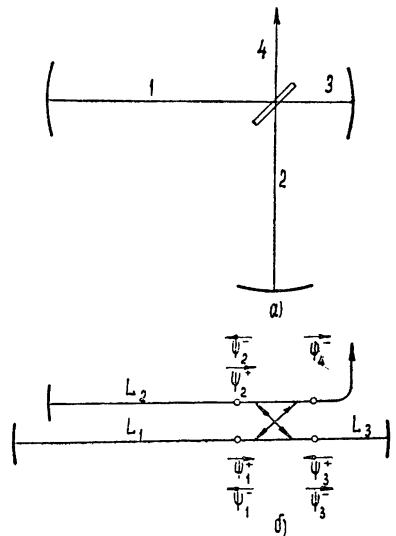


Рис. 11. Связанный резонатор с наклонной делительной пластиной: а) общий вид, б) эквивалентная схема.

где  $\xi$  — постоянное число. Левая и правая части равенства (3.3) являются операторами для собственных функций резонаторов, образованных плечами 1—3 и 2—3. Следовательно, необходимым условием отсутствия излучения является пространственное согласование этих функций. Рассогласование приводит к потерям, величина которых, как это можно показать с помощью метода возмущений, возрастает для функций более высоких поперечных индексов.

Рассмотрим более подробно случай пространственного согласования распределений, причем для упрощения выкладок примем, что фронт лучевой амплитуды у пластины является плоским и, следовательно, совпадают собственные функции всех трех операторов  $\hat{K}_1$ ,  $\hat{K}_2$  и  $\hat{K}_3$ . Если мы выберем в качестве исходных параметры резонатора в плече 1: длину  $L_1$ , кривизну вогнутого зеркала  $R_1$ , то кривизна зеркала в  $i$ -ом плече определится из условия

$$R_i = \frac{1}{\eta_i} [g_1 + \eta_i^2(1 - g_1)]R_1,$$

где

$$g_1 = 1 - L_1/R_1, \quad \eta_i = L_i/L_1.$$

Оценим дискриминационные характеристики двух типов связанных резонаторов (рис. 12). В первом из них (рис. 12а) разность длин плеч ( $L_2 - L_1$ ) значительно меньше  $L_1$  и  $L_2$  [53, 54], поэтому получающееся из (3.2) дисперсионное уравнение можно записать в следующем виде:

$$i\tilde{R}_{\text{эфф}} \exp(-i\varphi_{mn}) = \exp(-i2\pi q), \quad \tilde{R}_{\text{эфф}} = \sin(\Delta\varphi_{mn}), \quad (3.4)$$

где

$$\varphi_{mn} = 2kL_3 - \frac{\nu_{mn}}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \nu_{mn}\theta_3, \quad L_3 = \frac{L_1 + L_2}{2} + L_3,$$

$$\Delta\varphi_{mn} = k(L_2 - L_1) - \frac{\nu_{mn}}{2}(\theta_2 - \theta_1), \quad \theta_i = \arccos(g_i)^{1/2}.$$

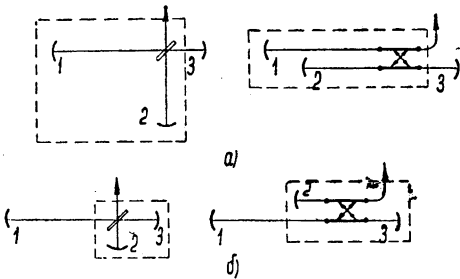


Рис. 12. Два типа связанных резонаторов. В первом из них (а) эффективный коэффициент отражения  $\tilde{R}_{mn}(\omega)$  определяется разностью длин плеч 1 и 2, во втором (б) — суммой длин плеч 2 и 3.

В формуле (3.4) принято, что  $|s_{12}| = |s_{13}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $r_i = 1$ . В дисперсионном уравнении (3.4) быстрый фазовый множитель определяет положение резонансных частот колебаний, а более медленно зависящий от частоты  $\tilde{R}_{\text{эфф}}$  — их потери:

$$K_{mn}^2 = 1 - \tilde{R}_{\text{эфф}}^2 = \cos^2(\Delta\varphi_{mn}). \quad (3.5)$$

Естественно выбрать  $\varphi$  и  $\Delta\varphi$  такими, чтобы один из резонансов основного типа колебаний попадал в точку, где  $K_{00}^2 = 0$ . Соседние  $\text{TEM}_{00}$  колебания будут иметь потери

$$K_{00}^2 \approx \left[ \pi \frac{(L_2 - L_1)}{L_3} \right]^2.$$

Оценим еще потери ближайших  $TEM_{01}$  колебаний; они максимальны, если минимум  $K_{01}$  на оси частот располагается посредине между частотами двух соседних  $TEM_{01}$  колебаний\*. Следовательно, в любом случае

$$K_{01}^2 \leq \frac{1}{4} K_{00}^2.$$

Определим на основании полученных формул селективирующие возможности резонатора, описанного в [53, 54], где  $L_1 = 140$  см,  $L_2 = 150$  см и  $L_3 = 10$  см. Плечи 1 и 2 выбирались длинными, поскольку в них размещались разрядные трубки, а их разность определялась условием непопадания других максимумов  $\tilde{R}_{\text{эфф}}$  в ширину линии атомного перехода. Легко подсчитать, что  $K_{00}^2 = 4\%$  и  $K_{01}^2 \leq 1\%$  (при  $q - q_0 = 1$ ).

Получившиеся значения (особенно для  $TEM_{01}$  колебания) не очень велики, но следует помнить, что это дополнительные потери, накладывающиеся на уже имеющиеся. Вместе с другими потерями (обусловленными, например, диафрагмированием) их оказалось достаточно для обеспечения одночастотного режима He—Ne газового лазера на  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  [54].

Определим дискриминационную характеристику резонатора, изображенного на рис. 12б:  $L_1 \gg L_2$ ,  $L_1 \gg L_3$  [55, 56]. Для него, конечно, справедливы уравнения (3.1) и (3.2), но, чтобы, как и в первом случае, выделить слабо зависящий от частоты множитель, надо записать уравнения относительно величины  $\psi_1^-$ . При согласованных плечах мы будем иметь\*\*

$$r_1 \tilde{R}_{\text{эфф}} \exp(-i\varphi_{mn}) = \exp(-i2\pi q), \quad \tilde{R}_{\text{эфф}} = \frac{s_{12}^2}{[1 + r_2 r_3 s_{13}^2 \exp(-i\Delta\varphi_{mn})]},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} &= 2k(L_1 + L_2) - \mu_{mn}(\theta_1 + \theta_2), \\ \Delta\varphi_{mn} &= 2k(L_2 + L_3) - \mu_{mn}(\theta_2 + \theta_3). \end{aligned}$$

В работе [55] отношение  $(L_1 + L_2)$  к  $(L_2 + L_3)$  было выбрано равным 20. Тогда при  $r_i = 1$  и  $s_{12}^2 = 1/2$  величина  $K_{00}^2 = 16\%$  и  $K_{01}^2 \leq 4\%$ . Следовательно, данная схема подавляет колебания сильнее, чем первая. Это позволило автору работы [55], подстраивая положения двух зеркал, выделить любой тип колебаний, подавляя все остальные.

Отметим в заключение, что вместо делительной пластины в подобных связанных резонаторах могут быть использованы двоякопреломляющие призмы [57].

Представленный в данном обзоре круг задач лишь частично отражает многообразие вопросов, возникающих при изучении дискриминационных характеристик открытых систем. Перечислим некоторые дополнительные задачи, почти не затронутые здесь.

\* Конкретное значение потерь  $TEM_{01}$  типов колебаний определяется выбором параметров  $g_1$ .

\*\* Для связанного резонатора второго типа  $\tilde{R}_{\text{эфф}}$  по своему виду совпадает с коэффициентом прохождения интерферометра Фабри—Перо.

Существующие методы селекции колебаний представляют большие возможности для решения проблемы разрежения пространственного и частотного спектров типов колебаний и даже, в принципе, для получения одномодовых (в смысле поперечных колебаний) и одночастотных систем. Однако вопрос о требованиях, предъявляемых к точности изготовления и юстировки элементов таких систем, а также выборе схем, наиболее оптимальных с этой точки зрения, разработан слабо.

Практически важным является вопрос о влиянии плавных сравнительно небольших фазовых возмущений корректоров на структуры типов колебаний и собственные частоты. Этот вопрос возникает в связи с изучением искажений мод ОКГ под воздействием неоднородностей активных образцов. В частности, интересно было бы проанализировать схемы резонаторов с точки зрения сведения до минимума искажений структур поля первых типов колебаний неоднородностями образца.

Малоизученным остается вопрос о комбинированном использовании принципиально различных методов для селекции колебаний. Рассмотренная в разделе 1 (подраздел 2) задача об одновременном ограничении пространственного и углового спектров пучков является лишь первой попыткой исследования этого вопроса.

Дальнейшей теоретической разработкой требуют методы селекции мод в связанных открытых резонаторах, в частности, необходимо более детальное изучение влияния пространственного рассогласования мод парциальных резонаторов на характеристики системы в целом.

Интересной и практически важной (например, для электроники) является задача о подборе корректоров, поддерживающих тип колебаний наперед заданной структуры, а также определение в такой системе других типов высокодобротных мод.

В оптических генераторах имеются дополнительные возможности селекции мод, связанные с распределением активного вещества или нелинейного поглотителя по объему резонатора. Эти возможности могут существенно повлиять на оценку селективных свойств «холодных» систем: наряду с коэффициентом потерь важную роль здесь начинает играть такой фактор, как величина области перекрытия объемов, занятых разными модами. Эти вопросы требуют также углубленной разработки.

Для некоторых приложений представляет интерес задача, обратная дискриминации мод: создание квазиоптических систем с возможно более равномерным пространственно-частотным спектром большого числа типов колебаний.

Наконец, укажем еще на один возможный подход к селекции типов волн — создание частотно-пространственных фильтров излучения ОКГ. При высокой пространственно-временной когерентности и стабильности излучения, которую могут обеспечить квантовые генераторы, разработка таких фильтров, устанавливаемых вне резонатора ОКГ, является одним из дополнительных путей получения электромагнитных волновых пучков с заданной пространственной и частотной структурой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 34, № 6, 1658 (1958).
2. A. L. Schawlow, C. H. Townes, Phys. Rev., 112, № 6, 1940 (1958).
3. A. G. Fox, T. Li, Proc. IRE, 48, № 11, 1958 (1960).
4. A. G. Fox, T. Li, Bell. System Techn. J., 40, № 2, 453 (1961).
5. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell. System Techn. J., 40, № 2, 489 (1961).
6. G. Goubau, F. Schwing, IRE Trans., AP-9, № 3, 248 (1961).
7. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 44, № 3, 1050 (1963).
8. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 8, № 9, 1516 (1963).
9. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.



10. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ., 8, 16 (1944).
11. М. А. Леонтович, В. А. Фок, сб. Исследования по распространению радио-волн, изд. АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 3.
12. Г. Д. Малюжинец, УФН, 69, № 2, 321 (1959).
13. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, 1, изд. АН СССР, М., 1948, стр. 229.
14. В. И. Таланов, УФН, 87, № 1, 23 (1965).
15. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 10, № 6, 1150 (1965).
16. A. G. Fox, T. Li, Proc. IEEE, 51, № 1, 80 (1963).
17. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 313 (1964).
18. T. Li, Bell. System Techn. J., 44, 5, 917 (1965).
19. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 2, 260 (1965).
20. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 10, № 3, 552 (1965).
21. T. Li, Bell System Techn. J., 42, № 6, 2609 (1963).
22. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, ЖТФ, 36, № 3, 497 (1966).
23. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 10, № 5, 953 (1965).
24. Н. Г. Вахитов, Радиотехника и электроника, 10, № 9, 1476 (1965).
25. С. Н. Власов, Радиотехника и электроника, 10, № 9, 1715 (1965).
26. В. С. Летохов, ЖТФ, 35, № 5, 809 (1965).
27. D. E. McCumber, Bell. System Techn. J., 44, № 1, 333 (1965).
28. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 298 (1967).
29. J. G. Skinner, J. E. Geusic, J. Opt. Soc. America, 52, 1319 (1962).
30. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, В. В. Валявко, И. М. Вашкевич, Оптика и спектроскопия, 22, 119 (1967).
31. J. A. Giordmaine, W. Kaiser, J. Appl. Phys., 35, № 12, 3446 (1964).
32. Н. Г. Бондаренко, И. В. Еремнина, В. И. Таланов, Письма в редакцию ЖЭТФ, 6, № 1, 459 (1967).
33. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 11, № 5, 943 (1966).
34. Н. Н. Войтович, Радиотехника и электроника, 11, № 3, 488 (1966).
35. S. E. Miller, Bell. System Techn. J., 44, № 9, 2017 (1965).
36. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
37. А. Т. Фалковский, ЖТФ, 36, № 6, 1101 (1966).
38. A. L. Bloom, Appl. Phys. Lett., 2, № 5, 101 (1963).
39. В. Л. Броуде, О. Н. Погорелый, М. С. Соскин, ДАН СССР, 163, 1342 (1965).
40. С. И. Аверков, В. И. Анкин, В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, А. И. Хвостова, Авторское свидетельство № 702238/38, 1959.
41. E. Brannen, Proc. IEEE, 53, № 12, 2134 (1965).
42. Е. А. Косарев, Письма в редакцию ЖЭТФ, 3, № 7, 295 (1966).
43. В. С. Авербах, С. Н. Власов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 731 (1967).
44. H. Shnitkin, Microwave J., 3, № 12, 67 (1960); 4, № 1, 57 (1961).
45. J. Kotic, M. C. Newstein, J. Appl. Phys., 32, № 2, 178 (1961).
46. В. М. Файл, Я. И. Ханни, Квантовая радиофизика, Приложение 1, изд. Сов. радио, М., 1965.
47. D. A. Kleinman, P. P. Kisliuk, Bell System Techn. J., 41, 453 (1962).
48. H. Kogelnik, S. Patel, Proc. IRE, 50, 2365 (1962).
49. J. R. Fontana, IEEE Trans., MTT-12, № 4, 400 (1964).
50. N. Kumagai, M. Matsuhara, H. Mori, IEEE J., QE-1, 85 (1965).
51. T. L. Stocker, M. Birnbaum, Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. 2, 8, 5, 443 (1963).
52. С. М. Мамедзаде, Оптика и спектроскопия, 20, № 1, 178 (1966).
53. M. DiDomenico, Appl. Phys. Lett., 8, № 1, 20 (1966).
54. M. DiDomenico, IEEE J., QE-2, № 8, 311 (1966).
55. P. W. Smith, IEEE J., QE-1, № 8, 343 (1965).
56. P. Zory, J. Appl. Phys., 37, № 9, 3643 (1966).
57. A. D. White, Bell. System Techn. J., 45, № 2, 335 (1966).
58. В. И. Малышев, А. С. Маркин, ЖЭТФ, 50, № 2, 339 (1966).
59. P. F. Checcacci, A. Consortini, A. Scheggi, Proc. IEEE, 54, № 10 (1966).
60. Б. З. Каценеленбаум, УФН, 83, 81 (1964).
61. А. Б. Догадкин, Зарубежная радиоэлектроника, № 9, 71 (1964).
62. H. Kogelnik, T. Li, Proc. IEEE, 54, № 10, 1312 (1966).
63. Квантооптика, сб. переводов под редакцией Б. З. Каценеленбаума и В. Н. Шевченко, изд. Мир, М., 1966.