ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ № 9—10 1967 г.

Страницы	Строки	Напечатано	Должно быть
1459	11 сверху	Дана дальнейшая разработка метода точечных отображений [44].	Дана дальнейшая разработка метода точечных отображений [29, 44].
1466	19 — 23 сверху	... А. А. Андронов, Е. А Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, изд. Наука, М., 1966.	... А. А Андронов, Е А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, изд. Наука, М., 1966; Теория бифуркации динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967.
		8 Н Н Баутин, Теория бифуркации динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967; К теории синхронизации, ЖТФ, **9**, вып. 6, 510 (1939);..	8. Н. Н. Баутин, К теории синхронизации, ЖТФ, **9**, вып. 6, 510 (1939);..
	19, 18 снизу	9. Р. М. Минц, Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в *n*-мерном пространстве, ДАН СССР, **124**, № 6, 1215 (1959); **147**, № 1, 31 (1962).	9. Р. М. Минц, Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в *n*-мерном пространстве, ДАН СССР, **124**, № 6, 1215 (1959); **147**, № 1, 31 (1962); Матем. сб., **63** (105), № 2, 169 (1964).
1467	25 — 30 сверху	24. В. М Большакова, Е. С. Зельдин, Р. М. Минц, Н. А Фуфаев, К динамике системы осциллятор — ротатор, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 2, 359 (1965); Матем. сб., **63** (105), № 2, 169 (1964)	24. В. М. Большакова, Е. С. Зельдин, Р. М. Минц, Н. А. Фуфаев, К динамике системы осциллятор — ротатор, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 2, 359 (1965).
		25 С. П. Стрелков, К теории автоколебаний под действием сил, зависящих от положения, ЖТФ, **9**, вып. 17, 1564 (1939) Н. В. Бутенин, Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов, ЖЭТФ, **10**, вып 11, 1283 (1940).	25 С. П. Стрелков, К теории автоколебаний под действием сил, зависящих от положения, ЖТФ, **9**, вып. 17, 1564 (1939). Н. В. Бутенин, Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами, ПММ, **6**, 327 (1942)
	8, 7 снизу	33. А. А. Андронов, Ю. И. Неймарк, О движении идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель де-галилеевых часов, ДАН СССР, **51**, № 1,	33. Н. В Бутенин, Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов, ЖЭТФ, **10**, вып 11, 1283 (1940). А А. Андронов, Ю. И. Неймарк, О движении идеальной модели часов, имеющей две степени свободы Модель до-галилеевых часов, ДАН СССР, **51**, № 1,

СОДЕРЖАНИЕ

От редколлегии 1211

Жевакин С. А., Наумов А. П. Распространение сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн в земной атмосфере 1213

Кисляков А. Г., Станкевич К. С. Исследование тропосферного поглощения радиоволн радиоастрономическими методами 1244

Троицкий В. С. Результаты исследования Луны по ее собственному излучению 1266

Кравцов Ю. А. Комплексные лучи и комплексные каустики 1283

Зверев В. А., Орлов Е. Ф. Спектральный анализ в акустике, оптике и радиофизике с использованием модуляционного метода 1305

Файн В. М. Нелинейные свойства твердых тел 1320

Авербах В. С., Власов С. Н., Таланов В. И. Методы селекции типов колебаний в открытых квазиоптических системах 1333

Гильденбург В. Б., Жидко Ю. М., Кондратьев И. Г., Миллер М. А. Некоторые вопросы дифракции электромагнитных волн на плазменных образованиях 1358

Гапонов А. В., Островский Л. А., Фрейдман Г. И. Ударные электромагнитные волны 1376

Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике 1414

Радиофизика и теория колебаний в Горьком за 50 лет 1454

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

НАСТОЯЩИЙ ВЫПУСК ЖУРНАЛА «РАДИОФИЗИКА» ПОСВЯЩЕН 50-ЛЕТИЮ СОВЕТСКОГО ГОСУДАРСТВА. РЕДКОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА РЕШИЛА СОСРЕДОТОЧИТЬ В ЮБИЛЕЙНОМ НОМЕРЕ СЕРИЮ ОБЗОРОВ ПО НЕКОТОРЫМ ВЕДУЩИМ РАЗДЕЛАМ СОВРЕМЕННОЙ РАДИОФИЗИКИ.

РАЗУМЕЕТСЯ, ЖУРНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ НЕ ПОЗВОЛЯЮТ ОХВАТИТЬ ВСЕ ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ. БОЛЕЕ ТОГО, ЕСЛИ ДАЖЕ ОГРАНИЧИТЬ ТЕМАТИКУ, ТО НЕЛЕГКО БЫЛО БЫ ИЗБЕЖАТЬ ДУБЛИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ, ПОМЕЩАЕМЫХ В ДРУГИХ ЖУРНАЛАХ И ЮБИЛЕЙНЫХ СБОРНИКАХ. ПОЭТОМУ РЕДКОЛЛЕГИЯ РЕШИЛА СВЯЗАТЬ ЮБИЛЕЙНЫЙ ВЫПУСК С ГОРЬКИМ, ГДЕ ИЗДАЕТСЯ ЖУРНАЛ.

ВЫБОР ПОМЕЩЕННЫХ ОБЗОРОВ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ В ИЗВЕСТНОЙ СТЕПЕНИ УСПЕХАМИ ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ, И ОНИ ОТНЮДЬ НЕ ЯВЛЯЮТСЯ ИСЧЕРПЫВАЮЩИМ ИТОГОМ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ГОРЬКОВСКИМИ РАДИОФИЗИКАМИ ЗА ВСЕ ПЯТЬДЕСЯТ ЛЕТ. ВМЕСТЕ С ТЕМ, В БОЛЬШИНСТВЕ СЛУЧАЕВ ЭТО ОБЗОРЫ ПРОБЛЕМЫ В ЦЕЛОМ, И ИХ СОДЕРЖАНИЕ ВЫХОДИТ ЗА РАМКИ РАБОТ ТОЛЬКО ГОРЬКОВСКОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ В НАСТОЯЩЕМ ВЫПУСКЕ ЖУРНАЛА СОСРЕДОТОЧЕНЫ ОБЗОРЫ РАДИОФИЗИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ; ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ БУДЕТ ПОМЕЩЕН В ОДНОМ ИЗ БЛИЖАЙШИХ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ НОМЕРОВ ЖУРНАЛА, ПОСВЯЩЕННОМ ЭТОМУ РАЗДЕЛУ НАУКИ

В КОНЦЕ ВЫПУСКА МЫ ПОМЕЩАЕМ НЕБОЛЬШУЮ ПО ОБЪЕМУ ИНФОРМАЦИОННУЮ СПРАВКУ О РАЗВИТИИ РАДИОФИЗИКИ И ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ В ГОРЬКОМ ЗА 50 ЛЕТ, ГДЕ ПЕРЕЧИСЛЯЮТСЯ ПОЧТИ ВСЕ ОСНОВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ ГОРЬКОВСКИХ УЧЕНЫХ В ЭТИХ ОБЛАСТЯХ НАУКИ И ПРИВОДЯТСЯ ССЫЛКИ НА ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ИЛИ ИТОГОВЫЕ ИХ РАБОТЫ ЭТА ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА, ПО МНЕНИЮ РЕДКОЛЛЕГИИ, МОЖЕТ СЛУЖИТЬ КРАТКИМ ОТЧЕТОМ ГОРЬКОВСКИХ УЧЕНЫХ, РАБОТАЮЩИХ В ОБЛАСТИ РАДИОФИЗИКИ И ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ, ПЕРЕД СВОЕЙ СТРАНОЙ.

В КУЛЬТУРНОЙ И ОБЩЕСТВЕННОЙ ЖИЗНИ ГОРЬКОГО, В ПРОШЛОМ НИЖНЕГО НОВГОРОДА, С ПЕРВОГО ГОДА СОВЕТ-

СКОЙ ВЛАСТИ ОСОБЕННО ЗНАЧИТЕЛЬНОЕ МЕСТО ЗАНИМАЛИ РАДИОТЕХНИКА И ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ — РАДИОФИЗИКА. В 1918 ГОДУ В НИЖНЕМ НОВГОРОДЕ БЫЛА СОЗДАНА РАДИОЛАБОРАТОРИЯ, ЗАСЛУЖИВШАЯ ВПОСЛЕДСТВИИ ЧЕСТЬ НОСИТЬ ИМЯ В И. ЛЕНИНА. НИЖЕГОРОДСКАЯ РАДИОЛАБОРАТОРИЯ СЫГРАЛА ОГРОМНУЮ РОЛЬ В ИСТОРИИ СОВЕТСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ И РАДИОПРОМЫШЛЕННОСТИ, И ЕЕ ПО ПРАВУ НАЗЫВАЮТ «КОЛЫБЕЛЬЮ СОВЕТСКОЙ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ».

НАУЧНЫЕ ТРАДИЦИИ, ОСНОВЫ КОТОРЫХ БЫЛИ ЗАЛОЖЕНЫ УЧЕНЫМИ И ИНЖЕНЕРАМИ НИЖЕГОРОДСКОЙ РАДИОЛАБОРАТОРИИ, ПРОДОЛЖЕНЫ И РАЗВИТЫ В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ИНСТИТУТАХ И НА ПРЕДПРИЯТИЯХ ГОРЬКОГО, И НА ПОРОГЕ ЮБИЛЕЯ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ МОЖНО С УДОВЛЕТВОРЕНИЕМ СКАЗАТЬ, ЧТО РАБОТЫ ГОРЬКОВСКИХ РАДИОФИЗИКОВ И РАДИОИНЖЕНЕРОВ ЗАНИМАЮТ СВОЕ МЕСТО В ИСТОРИИ СОВЕТСКОЙ НАУКИ.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 621 371 166 2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ САНТИМЕТРОВЫХ, МИЛЛИМЕТРОВЫХ И СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

С. А. Жевакин, А. П. Наумов

1. О НЕОБХОДИМОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МИКРОРАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ С РАЗРЕШЕНИЕМ ПО СПЕКТРУ

За истекшее десятилетие наметились успехи в освоении техники генерации и приема микрорадиоволн. В последнее время были созданы лампы обратной волны для генерации коротких миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн вплоть до длины волны $\lambda = 0{,}49$ *мм* [1], а с коротковолновой стороны спектра шло интенсивное проникновение лазеров в длинноволновую инфракрасную область (наибольшая достигнутая сейчас «лазерная» длина волны составляет 0,774 *мм*).

Таким образом, в настоящее время произошло смыкание диапазонов генераторов, построенных на электронных принципах, с диапазоном оптических генераторов, и весь спектр миллиметровых, субмиллиметровых и инфракрасных волн оказался перекрытым, хотя и не сплошным образом.

Успехи в освоении микрорадиоволнового диапазона сделали неотложным изучение условий распространения радиоволн этого диапазона в земной атмосфере. Изучение распространения микрорадиоволн в атмосфере важно также для ряда вопросов метеорологии (радиометеорология, наблюдение состояния атмосферы со спутников, перенос энергии в атмосфере, воздействие солнечного излучения на тепловую структуру атмосферы и ее динамику и т. д.), радиоастрономии (возможности наблюдения астрономических объектов на миллиметровых и субмиллиметровых волнах с поверхности Земли, изучение свойств земной атмосферы радиоастрономическими методами, расчет радиоизлучения планетных атмосфер) и т. д.

Надо сказать, что, главным образом в связи с запросами геофизики, многочисленные работы по изучению прозрачности атмосферы в инфракрасном диапазоне были проведены еще в первой половине нашего столетия, однако в этих работах коэффициент поглощения атмосферы $\tilde{\gamma}$, входящий в так называемый закон Бугера—Бэра

$$I = I_0 \exp(-\tilde{\gamma} C l) \tag{1}$$

$\left(I = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I_\nu \, d\nu$ — интенсивность потока энергии в некотором частотном интервале $\nu_1 < \nu < \nu_2$, C — концентрация поглощающего компонента атмосферы, l — длина пути поглощения$\right)$, получался без разрешения по спектру, т. е. позволял лишь весьма приближенно оценить степень ослабления потока энергии в данном частотном интервале при *данной величине* произведения Cl. Дело в том, что такой коэффициент погло-

щения энергии (без разрешения по спектру) не имеет в сущности физического смысла: он зависит от спектрального распределения потока энергии в данном частотном интервале, а также зависит от массы $m = Cl$ поглощающего компонента на пути распространения (с увеличением m коэффициент $\tilde{\gamma}$, входящий в формулу (1), очевидно, уменьшается, так как с увеличением m распространение энергии все более и более концентрируется в тех спектральных областях диапазона $\nu_1 < \nu < \nu_2$, где монохроматический коэффициент поглощения $\tilde{\gamma}$ относительно мал). Аналогичные недостатки свойственны и так называемому аппарату функций пропускания.

Этот первый этап исследования прозрачности атмосферы без разрешения по спектру освещен в многочисленных обзорах и монографиях, из которых мы сошлемся на [2—9].

Если знание сглаженных характеристических свойств атмосферы (без разрешения по спектру) могло еще в какой-то мере удовлетворять запросы геофизиков на первом этапе исследования прозрачности атмосферы, то появление монохроматических генераторов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов требует знания условий распространения точно на рабочих длинах волн этих генераторов.

Поскольку в настоящее время работы по исследованию непрозрачности атмосферы без разрешения по спектру ввиду указанных принципиальных недостатков все более и более приобретают в основном исторический интерес, мы в нашем обзоре рассмотрим лишь работы по исследованию прозрачности атмосферы с разрешением по спектру. В последнее время, главным образом благодаря выполненным в НИРФИ работам [10—42], для области длин волн длиннее 10 *мк* здесь наметился существенный шаг вперед.

2. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

Молекулярное поглощение сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн (под последними мы будем понимать волны длиной 1 *мм* $> \lambda >$ 0,01 *мм*) атмосферой в основном обусловлено мономерами водяного пара [10, 11, 15, 43—45], димерами водяного пара [28, 29] и молекулярным кислородом O_2 [17, 18, 26, 46]. Преимущественная роль газовых компонентов атмосферы H_2O, O_2 связана с их обилием и наличием у них электрического дипольного (H_2O) и магнитного дипольного (O_2) моментов, обусловливающих возникновение вращательных спектров поглощения. Что касается димеров водяного пара, обладающих электрическим дипольным моментом, содержание которых по объему составляет только $\sim 10^{-5}$, то их большая роль на миллиметровых и ближних субмиллиметровых волнах ($\lambda > 0{,}7$ *мм*) обусловлена очень большой интенсивностью их вращательных линий поглощения в этом диапазоне.

В верхних слоях атмосферы возрастает относительная роль в поглощении вращательно-колебательных линий озона; в условиях же нижней атмосферы полосы поглощения озона перекрываются более интенсивными полосами водяного пара и углекислого газа. Поглощение углекислого газа является существенным в области 12,9 — 17,1 *мк* [5, 6, 47]. Оно вызвано колебательной полосой CO_2, центрированной при $\lambda = 14{,}7$ *мк*.

Наряду с основным изотопом молекулы воды $H_2^1O^{16}$ вклад в молекулярное поглощение дают наиболее часто встречающиеся изотопы водяного пара $H_2^1O^{18}$, $H_2^1O^{17}$, $H^1D^2O^{16}$. Влияние их на поглощение радиоволн парами воды мало; наибольший вклад они дают для $1/\lambda$, равного 1;82; 2,7 и $<0{,}5$ *см*$^{-1}$, но и на этих частотах их поглощение состав-

ляет не более 5 — 10% от коэффициента поглощения основного изотопа $H_2^1O^{16}$ [45, 48].

На сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волнах существуют слабые линии CO, NO, NO_2, N_2O, SO_2, O_3. Дипольные моменты перечисленных газов равны $\sim 0{,}1$ дебая [49], т. е. приблизительно в 20 раз меньше дипольного момента H_2O; к тому же концентрация их не превышает 10^{-6} по объему [50], так что эти газы практически не дают вклада в поглощение (верхняя граница отношения коэффициентов поглощения перечисленных газовых компонент составляет 10^{-3} от поглощения водяным паром). Поглощение неполярных молекул (например, азота, углекислого газа) за счет индуцируемого при столкновениях дипольного момента еще в 10^3 раз меньше [10].

Поглощение энергии излучения происходит при переходе молекул газа из нижнего энергетического состояния в более высокое. Коэффициент поглощения γ, определяющий уменьшение интенсивности электромагнитной волны при распространении на единицу длины, дается формулой [10, 44, 46, 51]

$$\gamma = \frac{4\pi N}{3\hbar c G} \sum_{ij} |\mu_{ij}|^2 \nu_{ij} \left| \exp\left(-E_i/kT\right) - \exp\left(-E_j/kT\right) \right| f(\nu, \nu_{ij}). \quad (2)$$

Здесь $\hbar$, c и k — соответственно постоянная Планка, скорость света и постоянная Больцмана; N — число молекул данного газа в 1 $см^3$; T — абсолютная температура; G — статистическая сумма по вращательным (для случая мономеров и димеров водяного пара) или спин-вращательным (для случая молекулярного кислорода) состояниям; E_i или E_j — энергия этих состояний, маркированных индексами i или j, обозначающими полную совокупность квантовых чисел; μ_{ij} — матричный элемент дипольного момента μ_0, который вызывает переход $i \to j$; $\nu_{ij} = (E_j - E_i)/2\pi\hbar$; $f(\nu, \nu_{ij})$ — множитель, описывающий форму спектральной линии поглощения.

Величины E_i, E_j, ν_{ij}, μ_{ij} являются структурными константами, характерными для рассматриваемого газа, тогда как множитель $f(\nu, \nu_{ij})$, видимо, имеет универсальный характер; во всяком случае, в настоящее время нет каких-либо достаточно достоверных указаний на его зависимость от структурных констант. По-видимому, такая зависимость (в принципе вполне возможная) является слабой.

В литературе известны формы спектральной линии Лоренца [52], Ван Флека—Вайскопфа [53] и так называемая форма линии по кинетическому уравнению [21, 54] (еще раньше такая форма линии без какого-либо вывода предлагалась Гроссом [55]) и ряд других, не применяющихся в радиоспектроскопии столь широко.

Упомянутые три формы линии описываются соответственно формулами

$$f(\nu, \nu_{ij})_{\text{Лор.}} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\Delta\nu_{ij}}{(\nu_{ij} - \nu)^2 + (\Delta\nu)_{ij}^2} - \frac{\Delta\nu_{ij}}{(\nu_{ij} + \nu)^2 + (\Delta\nu)_{ij}^2} \right]; \quad (3)$$

$$f(\nu, \nu_{ij})_{\text{в. ф.—в.}} = \frac{\nu}{\pi\nu_{ij}} \left[\frac{\Delta\nu_{ij}}{(\nu_{ij} - \nu)^2 + (\Delta\nu)_{ij}^2} + \frac{\Delta\nu_{ij}}{(\nu_{ij} + \nu)^2 + (\Delta\nu)_{ij}^2} \right]; \quad (4)$$

$$f(\nu, \nu_{ij})_{\text{кин. ур.}} = \frac{\nu^2}{\pi} \frac{4\Delta\nu_{ij}}{(\nu_{ij}^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2(\Delta\nu)_{ij}^2}. \quad (5)$$

Здесь $\Delta\nu_{ij}$ — полуширина спектральной линии для перехода $i \to j$.

В работе [53] был подвергнут справедливой критике вывод формы спектральной линии, обусловленной соударениями, который дал в свое время Лоренц [52]. Согласно Ван Флеку—Вайскопфу, лоренцовская форма линии в области низких частот не соответствует действительности и должна быть в этой области спектра заменена другой формой, пригодной, по мнению Ван Флека и Вайскопфа, как в оптическом, так и в радиодиапазонах. С 1945 года в радиоспектроскопии широко использовалась форма линии, полученная в [53].

Однако при выводе формы (4) Вайскопф и Ван Флек [53] в свою очередь допустили ошибку, состоящую в применении неправильной модели «сильных соударений», согласно которой как координата, так и скорость оптического электрона после соударения становятся равными тепловым.

Если вместо неправильной модели «сильных соударений» применить метод кинетического уравнения, то при некоторых идеализациях оказывается возможным определить функцию распределения оптического электрона по скоростям и координатам, устанавливающуюся под действием соударений и внешнего синусоидального электромагнитного поля. Это позволяет найти как мнимую, так и действительную части диэлектрической проницаемости среды и ее зависимость от частоты ν внешнего поля. Мнимая часть диэлектрической проницаемости ε при условии $|\varepsilon - 1| \ll 1$ определяет коэффициент поглощения среды; таким образом, из известной частотной зависимости этого коэффициента получается форма спектральной линии поглощения.

Такой способ получения коэффициентов преломления и поглощения, а, следовательно, и формы линии поглощения, был использован Уленбеком и Ван Чангом [54]. Последние, взяв в качестве модели оптического электрона классический осциллятор, находящийся под воздействием как внешнего электромагнитного поля, так и соударений молекул окружающей среды, на которые электрическое поле не действует, рассмотрели два случая: 1) масса частицы осциллятора велика по сравнению с массой молекул окружающего газа; 2) отношение масс осциллятора и молекул произвольно; молекулы отталкиваются центральной силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния между ними. К этим двум идеализациям Жевакиным и Стрелковым [21] было добавлено рассмотрение третьего случая, когда масса линейного осциллятора, моделирующего молекулу, много меньше массы частиц окружающей среды. Во всех трех идеализациях как по классической, так и по квантовой теории для модели линейного осциллятора в предположении, что время соударений τ_c много меньше периода колебаний внешнего поля $\tau_1 = 1/\nu$, получается одна и та же форма спектральной линии (5), которая и использовалась впоследствии в расчетах коэффициентов поглощения основных газовых поглощающих компонент атмосферы [10, 11, 15, 17, 26, 29].

Хотя реальные условия формирования спектральной линии водяного пара и кислорода и отличаются от идеализированных условий, принятых в указанных трех случаях*, однако то обстоятельство, что форма спектральной линии (5) обнаруживает особую «устойчивость», оставаясь одинаковой во всех трех идеализациях, позволяет надеяться, что область применимости формулы (5) шире той области, для которой она строго установлена. Отметим также, что, хотя метод кинетического урав-

* Так, например, вращательный спектр молекулы H_2O неэквидистантен, т. е. может быть описан только нелинейным осциллятором, притом не с одной, а с тремя степенями свободы; отношение массы молекулы H_2O к массам молекул O_2 и N_2 порядка единицы; силы взаимодействия убывают не как $1/r^5$ и даже не являются центральными: они имеют либо диполь-квадрупольный (H_2O—N_2, O_2), либо диполь-дипольный (H_2O—H_2O) характер.

нения и предполагает малость времени соударения τ_c в сравнении с периодом колебаний $\tau_1 = 1/\nu$, сказанное позволяет надеяться, что форма (5) может сохраняться и при нарушении условия $\tau_c \ll \tau_1$.

Отметим также ряд последних теоретических работ по уширению спектральных линий соударениями [56–59].

Все три формы линии (3)—(5) вблизи от их центра практически совпадают между собой, и лишь в крыльях выявляются их существенные различия. Так, для формы линии Ван Флека—Вайскопфа (4) характерен высокочастотный медленно спадающий «хвост». Дискуссия степени соответствия формы линии Ван Флека—Вайскопфа эксперименту содержится по ряду цитированных там работ в [60].

Как правило, спектральные линии расположены весьма кучно, так что роль крыльев сильно затушевана. Поэтому выяснить экспериментально, какая форма линии лучше соответствует действительности, обычно затруднительно. Известное окно прозрачности 8 — 12 *мк* между вращательным и колебательным спектрами водяного пара предоставляет для этого редкую возможность.

Расчеты [10] показали, что форма линии Ван Флека—Вайскопфа (4) приводит в этом окне прозрачности к величине поглощения атмосферы на уровне моря $\gamma \simeq 20$ *дб·км*$^{-1}$, тогда как формы линий (3) и (5) в согласии с экспериментом дают в этом окне $\gamma \simeq 0{,}5$ *дб·км*$^{-1}$. Столь сильное расхождение говорит о неправильности формы линии Ван Флека—Вайскопфа и недопустимости положенной в основу ее вывода модели «сильных соударений». Оказалось также [20], что коэффициент поглощения водяного пара во всем диапазоне 10 *мк* — 32 *см*, вычисленный с формой линии по Лоренцу, отличается от результатов [10, 15], полученных с формой линии по кинетическому уравнению, не более чем на 5%. Поскольку форма линии из кинетического уравнения строго получается при определенных идеализациях, то только что отмеченное совпадение результатов позволяет использовать в расчетах и структурный множитель Лоренца, несмотря на его принципиальную неправильность, в качестве удачной аппроксимации формы спектральной линии.

Другую благоприятную возможность экспериментального определения формы линии в крыльях предоставляет колебательная полоса CO_2, центрированная к 4,3 *мк* [61, 62]. Согласно лабораторным измерениям [61], для расстояний от центра полосы $\delta\nu \leqslant 3$ *см*$^{-1}$ форма Лоренца удовлетворительно описывает поведение полосы в крыльях, для расстояний же $\delta\nu > 3$ *см*$^{-1}$ множитель Лоренца приходится дополнять фактором, обеспечивающим экспоненциальное спадание коэффициента поглощения в зависимости от частотной расстройки $\delta\nu$ относительно центра полосы. Этот вывод нашел себе подтверждение в атмосферных измерениях поглощения [62] на малых высотах над уровнем моря; для больших же высот форма Лоренца удовлетворительно описывала эксперимент [62] без введения экспоненциального фактора.

Ввиду отмеченной выше близости форм линий Лоренца и по кинетическому уравнению эти результаты, если они правильны, свидетельствуют и о непригодности формы линии по кинетическому уравнению для описания коэффициента поглощения CO_2 в полосе 4,3 *мк*.

3. ПОГЛОЩЕНИЕ МИКРОРАДИОВОЛН МОНОМЕРАМИ ВОДЯНОГО ПАРА АТМОСФЕРЫ

Теоретические расчеты коэффициента поглощения мономеров водяного пара выполнялись в [10, 11, 15, 43–45]. Эльзассер [43] рассчитал сглаженное по диапазону поглощение парами воды в участке вращательного спектра: 18,2 *мк* — 80 *мк*, использовав закон квадратного корня,

Ван Флек [44] рассчитал коэффициент поглощения паров H_2O в диапазоне $1/\lambda = 0{,}2 \div 16$ $см^{-1}$, рассмотрев подробно лишь один квантовый переход $5_{-1} - 6_{-5}$ и учитывая вклад остальных линий вращательного спектра при помощи приближенного выражения. Роджерс [45] выполнил более полный расчет до $1/\lambda = 26$ $см^{-1}$ с учетом линий субмиллиметровой области. Ван Флек и Роджерс [44, 45] полагали, что полуширины спектральных линий водяного пара постоянны по диапазону и равны 0,1 $см^{-1}$, а также использовали неправильную форму линии (4).

В работах [10, 11, 15] был проведен расчет коэффициента поглощения мономеров водяного пара атмосферы с формой спектральной линии по кинетическому уравнению (5) в диапазоне вращательного спектра 10 $мк$ — 32 $см$ с учетом всех вращательных линий мономеров H_2O до значения квантового числа полного момента количества движения $J = 12$ включительно, для которых матричные элементы направляющих косинусов жесткого асимметричного волчка, моделирующего молекулу H_2O, больше или равны 10^{-6}. Таких спектральных линий оказалось 871. Расчет выполнялся по формуле

$$\gamma\,(дб \cdot км^{-1}) = 10^6 \log_{10} e \frac{16\pi N \mu_0^2}{3\hbar c G(T)} \frac{1}{\lambda^2} \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_{ij}} \beta_{ij} \left| \exp\left(-\frac{2\pi \nu_i \hbar c}{kT}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{2\pi \nu_j \hbar c}{kT}\right) \right| 0{,}9 \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{H_2O-N_2} \left(\frac{T}{300}\right)^{-n_{ij}} \frac{P}{760} \times \qquad (6)$$

$$\times \left\{ \left[\left(\frac{1}{\lambda_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \right]^2 + 4 \left[0{,}9 \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{H_2O-N_2} \left(\frac{T}{300}\right)^{-n_{ij}} \frac{P}{760} \right]^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \right\}^{-1},$$

где μ_0 — дипольный момент молекулы H_2O (в [10, 11, 15] он брался равным $1{,}84 \cdot 10^{-18}$ CGSE); $N = \rho N_0 \cdot 10^{-6}/\eta$ — число молекул водяного пара в 1 $см^3$ ($N_0 = 6{,}025 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро, $\eta = 18$ — молекулярный вес воды, ρ — абсолютная влажность в $г \cdot м^{-3}$); λ — длина волны электромагнитного излучения; λ_{ij} — резонансная длина волны молекулы H_2O при переходе из нижнего энергетического состояния i в верхнее состояние j; β_{ij} — сила осциллятора квантового перехода, выражающаяся через матричные элементы направляющих косинусов в виде

$$\beta_{ij} = [2 - (-1)^{|\tau|}] \sum_F \sum_g |\Phi_{F_g}^A|^2;$$

ν_i, ν_j — энергетические термы i- и j-состояний соответственно; $G(T)$ — статистическая сумма по вращательным состояниям, равная

$$G(T) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\tau=-J}^{J} (2J+1)\,[2 - (-1)^{|\tau|}] \exp\left(-2\pi \nu_{J,\tau} \hbar c/kT\right),$$

J и τ — квантовые числа; $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$ — полуширина спектральной линии в $см^{-1}$ при температуре $T = 300°K$ и давлении $P = 760$ $мм$ рт. ст. для перехода $i \to j$, обусловленная соударением молекул H_2O—N_2; n_{ij} — температурный коэффициент полуширины спектральной линии; F и g — оси соответственно неподвижной и подвижной в пространстве систем координат.

Матричные элементы направляющих косинусов в [10, 11, 15] брались из работы Швандемана и Лаури [63], а полуширины спектральных линий $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$ и их температурные коэффициенты n_{ij} — из расчетов Бенедикта и Каплана [64] для соударений H_2O—N_2. При этом для учета того обстоятельства, что в воздухе кроме соударений H_2O—N_2 происходят соударения H_2O—O_2 и H_2O—H_2O, был введен поправочный множи-

тель 0,9, оказавшийся в согласии с выполненными позднее расчетами уширения линий водяного пара для соударений $H_2O—H_2O$ и $H_2O—O_2$ [65]: $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-возд} \simeq 0{,}9\,(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$.

Относительно температурных коэффициентов n_{ij} следует отметить, что в работе [64] они вычислялись согласно теории Андерсона [66]. Экспериментальная проверка теории Андерсона в отношении температурной зависимости полуширин спектральных линий проводилась в [67, 68]. В [67] было обнаружено, что температурные коэффициенты n_{ij} линий вращательного спектра CH_3Cl и $CHCl_2F$ в интервале температур 0°C — 150°C равны $n_{ij} = 1{,}5$, тогда как теория Андерсона дает $n_{ij} = 1{,}0$. В [68] для линии водяного пара $\lambda_{ij} = 1{,}64$ *мм* экспериментально наблюдалось $n_{ij} = 1{,}2 \pm 0{,}2$, тогда как расчет дает $n_{ij} = 0{,}68$ [64]. Таким образом, теория Андерсона плохо отражает температурную зависимость полуширин спектральных линий. Впрочем, для расчетов коэффициента поглощения водяных паров это обстоятельство имеет в настоящее время второстепенное значение.

Энергетические термы молекулы H_2O брались из работы [69], где они вычислены из экспериментальных данных, т. е. получены с учетом центробежного возмущения. Поэтому в резонансных длинах волн, соответствующих парным комбинациям этих термов, центробежное возмущение также учтено.

Расчет поглощения в [10, 11] был выполнен для всего диапазона вращательного спектра мономеров H_2O. Продолжать расчет в сторону более коротких волн ($\lambda < 10$ *мк*) не представлялось целесообразным, поскольку при $\lambda \simeq 10 \div 8$ *мк* становится заметным вклад в поглощение колебательно-вращательных переходов молекул H_2O, для описания которых применение модели жесткого волчка заведомо недопустимо.

Расчет выполнялся при абсолютной влажности $\rho = 7{,}5$ *г*·*м*$^{-3}$ (коэффициент поглощения мономеров γ пропорционален абсолютной влажности ρ) для следующих параметров атмосферы: 1) $T = 293°$, давление $P = 760$ *мм* рт. ст. [10, 15]; 2) $T = 253°$, $P = 760$ *мм* рт. ст.; 3) $T = 223°$, $P = 198$ *мм* рт. ст.; 4) $T = 214°$, $P = 42$ *мм* рт. ст. (результаты расчета коэффициента поглощения для последних трех пар даны в [11]).

Применение в расчете [10, 11, 15] формы спектральной линии по кинетическому уравнению увеличило вдвое величину коэффициента поглощения мономеров водяного пара в окнах прозрачности сантиметрового, миллиметрового и ближнего субмиллиметрового диапазонов в сравнении с расчетами Ван Флека [44] и Роджерса [45], выполненными с формой линии (4). Тем самым превышение экспериментальных значений коэффициента поглощения над теоретическим сократилось в этом диапазоне с 3 — 4 раз до 1,5 — 2 раз (подробнее см. раздел 5). Ниже мы увидим, что оставшееся расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями поглощения для волн $\lambda > 0{,}7$ *мм* исчезает при учете вклада димеров водяного пара.

На рис. 1 представлена общая картина изменения коэффициента поглощения γ (*дб*·*км*$^{-1}$) для всей спектральной области вращательных переходов мономеров H_2O с учетом вклада кислорода, но без учета вклада димеров H_2O [10].

Возможные неточности расчетов [10, 11, 15] были связаны с неучетом центробежного возмущения при вычислении сил осцилляторов отдельных спектральных линий, что ведет к ошибке в величине коэффициента поглощения, увеличивающейся от $\sim 1\%$ на длинных субмиллиметровых до $\sim 25\%$ на волнах $\lambda \simeq 10$ *мк*, и с неточностью ширин спектральных линий, взятых из расчетов Бенедикта и Каплана. Отметим, что в [10] как на возможную неточность расчета указывалось также на то обстоятельство, что дипольный момент молекулы H_2O может на $\sim 5\%$ [70] отли-

чаться от принятой в расчете величины $1{,}84 \cdot 10^{-18}$ CGSE, давая тем самым неточность $\sim 10\%$ в величине γ. Однако работа [71], в которой по штарк-расщеплению с высокой точностью были измерены дипольные моменты молекулы H_2O для четырех длинноволновых переходов, показала, что все величины μ_0 с точностью эксперимента совпадают

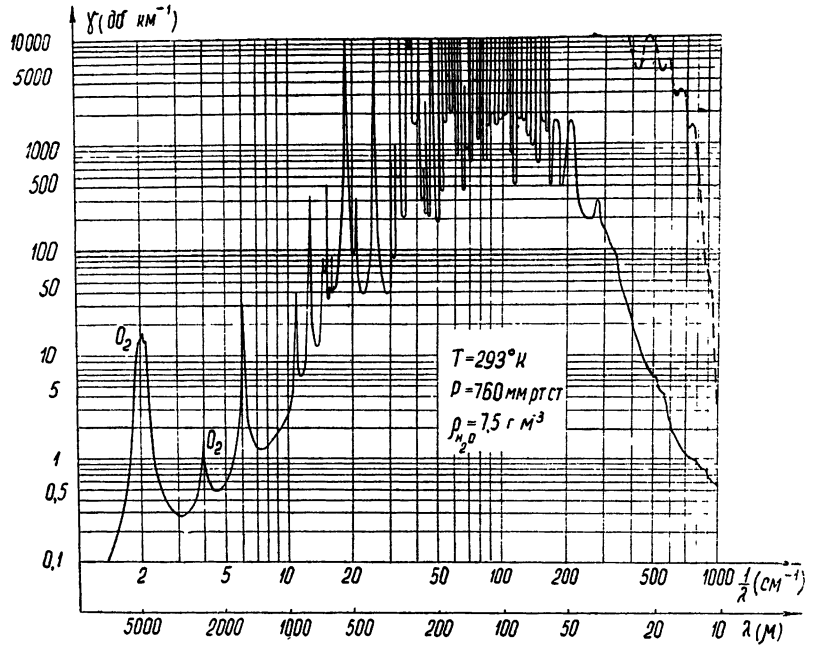


Рис. 1. Коэффициент поглощения мономеров водяного пара и кислорода в земной атмосфере на волнах $\lambda = 10$ *мк* $\div 7$ *мм*, вычисленный при $T = 293°$К, $P = 760$ *мм* рт. ст. и абсолютной влажности $\rho = 7{,}5$ *г·м*$^{-3}$ с формой линии из кинетического уравнения (сплошная кривая). Пунктирной кривой изображена огибающая максимумов поглощения в инфракрасной области (сплошная кривая в этой области спектра изображает огибающую минимумов поглощения) [10].

между собой (как то и следует ожидать ввиду малости центробежных возмущений для малых квантовых чисел J) и со средним значением дипольного момента $1{,}84 \cdot 10^{-18}$, если в последнее внести квантово-механическую поправку Ван Флека. Согласно [71] дипольный момент мономера H_2O $\mu_0 = 1{,}884 \pm 0{,}012$ дебая.

Таким образом, основная неточность расчета поглощения мономерами H_2O связана в настоящее время с неуверенным знанием истинных ширин их спектральных линий. Поэтому экспериментальное определение этих ширин имеет первостепенное значение.

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные по молекулярным параметрам мономеров H_2O сведены в таблицу 1.

Наиболее качественными среди данных по ширинам линий являются измерения, выполненные с использованием монохроматических генераторов излучения [25, 34, 41, 72—75], измерения же [76—79], в которых полуширины спектральных линий оценивались по интегральному поглощению, могут претендовать на значительно меньшую точность.

Из таблицы 1 видно, что экспериментальные значения полуширин спектральных линий, полученные с применением монохроматических генераторов, превышают теоретические значения [64, 65] в среднем в 1,2 раза.

Таблица 1

Экспериментальные значения полуширин спектральных линий и дипольных моментов молекулы мономеров водяного пара*

№	Квантовый переход	$1/\lambda_{ij}$ ($см^{-1}$)	λ_{ij}	$(\Delta\nu/c)_{ij}^{эксп}$ ($см^{-1}$)	$\frac{\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{эксп}}{\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{теор}}$	μ_0 (*деб*)	Примечания к столбцу 5
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$5_{-1}—6_{-5}$	0,74	1,35 *см*	0,084 [72]		1,94 ±0,06 [70] 1,884±0,012 [71]	Приведены результаты работы [72], полученные при малой влажности (H_2O — возд.)
2	$2_2—3_{-2}$	6,12	1,63 *мм*	0,095±0,001 [73] 0,107±0,005 [34] 0,1025±0,0035 [34]	0,99 1,18 1,13	1,884±0,012 [71]	Смесь газов $H_2O—N_2$ H_2O—возд, измерение по контуру линии H_2O — возд., оценка по соотношению $\gamma_{рез}\sim(\Delta\nu/c)_{ij}^{-1}$
				0,108±0,006 [74]	1,21		H_2O—возд., $T = 284°K$
3	$4_0—5_{-4}$	10,86	0,92 *мм*	1,106±0,009 [25] 0,106±0,009 [75]	1,25 1,25	1,884±0,012 [71]	H_2O—возд. H_2O—возд.
4	$3_1—4_{-3}$	12,67	0,789 *мм*	0,106±0,004 [41]	1,21	1,836±0,044 [41] 1,884±0,062 [71]	H_2O—возд., T=286°K
5	$1_{-1}—1_{+1}$	18,58	0,538 *мм*	0,05±0,01 [76] 0,118±0,004 [74]	0,5 1,19	1,881±0,037 [74]	H_2O—возд., T=303°K H_2O—возд.
6	$1_{+1}—2_1$	92,54	108 *мк*	0,182 [77]	1,78		$H_2O—N_2$, полуширины оценивались по интегральному поглощению (формализм Ладенбурга—Райхе)
7	$3_1—4_1$	170,33	58,71 *мк*	0,122 [77]	1,40		
8	$4_0—5_0$	188,27	53,12 *мк*	0,129 [77]	1,45		
9	$5_1—6_5$	536,36	18,64 *мк*	0,12 [78]	1,84		H_2O—возд.
10	$8_{-3}—9_3$	625,44	15,99 *мк*	0,11 [78]	2,07		H_2O—возд.
11	$12_{-1}—13_5$	914,03	10,94 *мк*	0,047±0,002 [79]	1,06		H_2O — возд., полуширина оценивалась по интегральному поглощению (формализм Ладенбурга—Райхе)

* Значения полуширин линий водяного пара в воздухе и в смеси $H_2O—N_2$ приведены к давлению $P = 760$ *мм* рт. ст. и температуре $T = 300°K$ за исключением случаев, особо отмеченных в примечании.

На рис. 2 сплошная кривая изображает коэффициент поглощения γ ($дб \cdot км^{-1}$), вычисленный нами для настоящего обзора в длинноволновом участке вращательного спектра мономеров водяного пара. Расчет выполнялся так же, как в [10, 11, 15], с той лишь разницей, что в соответствии с таблицей 1 для переходов 2_2—3_{-2}, 4_0—5_{-4}, 3_1—4_{-3}, 1_{-1}—1_1 вместо теоретических полуширин [64, 65] были взяты полуширины спектральных линий согласно работам [25, 41, 74, 75], а значения всех остальных полуширин спектральных линий вращательного спектра (за исключением, разумеется, полуширины $(\Delta\nu/c) = 0{,}084\ см^{-1}$ [72] для перехода 5_{-1}—6_{-5}) увеличены в 1,2 раза в сравнении с теоретическими [64, 65]. Было принято также новое значение дипольного момента $\mu_0 = 1{,}884 \pm 0{,}012$ дебая [71] вместо прежнего значения $\mu_0 = 1{,}84$ дебая.

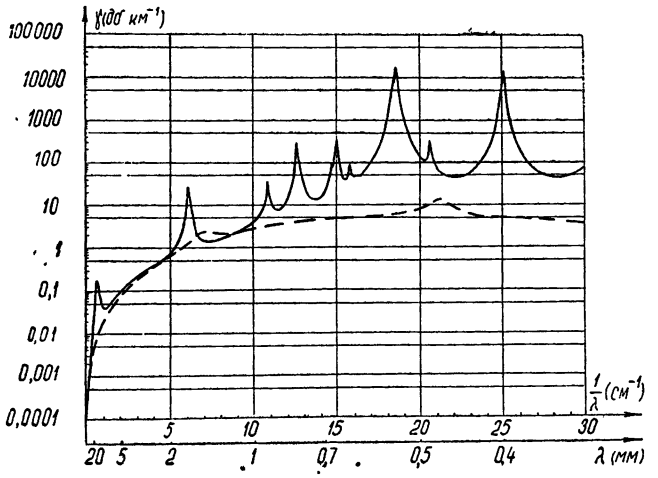


Рис. 2. Сплошная кривая—вычисленный коэффициент поглощения мономеров водяного пара в земной атмосфере при P=760 *мм* рт. ст., T=293°К, ρ=7,5 $г \cdot м^{-3}$. Полуширины спектральных линий 5_{-1}—6_{-5} (λ_{ij}=1,35 *см*), 2_2—3_{-2} (λ_{ij}=1,63 *мм*), 4_0—5_{-4} (λ_{ij}=0,92 *мм*), 3_1—4_{-3} (λ_{ij}=0,789 *мм*), 1_{-1}—1_1 (λ_{ij}= =0,538 *мм*) брались в соответствии с работами [25, 41, 72, 74, 75], а полуширины других линий мономеров H_2O увеличены в 1,2 раза по сравнению с данными [64]. Пунктирная кривая—вычисленный коэффициент поглощения димеров водяного пара при тех же атмосферных условиях (энергия водородной связи молекул ε=4,8 *ккал·моль*$^{-1}$, полуширина спектральной линии димеров $\Delta\nu/c$=0,8 $см^{-1}$). В расчетах использовалась форма линии по кинетическому уравнению.

Отметим, что, согласно [42], из-за возникновения так называемого нерезонансного поглощения, благодаря диполь-дипольному взаимодействию при соударениях молекул-мономеров H_2O, коэффициент поглощения мономеров H_2O в их окнах прозрачности на сантиметровых и миллиметровых волнах увеличивается на 5 — 10%.

В [38] исследовался вклад в поглощение мономеров водяного пара за счет их возбужденных колебательных состояний. Оказалось, что при температуре земной атмосферы этот вклад пренебрежимо мал за исключением отдельных узких спектральных участков; в планетных атмосферах с более высокой температурой (например, у Венеры) он может стать заметным.

4. ПОГЛОЩЕНИЕ МИКРОРАДИОВОЛН ДИМЕРАМИ ВОДЯНОГО ПАРА АТМОСФЕРЫ

До недавнего времени считалось, что основной вклад в молекулярное поглощение сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн земной атмосферой дают молекулярный кислород и молекулы-мономеры водяного пара. Однако измерения коэффициента поглощения в относительных окнах прозрачности водяного пара, выполненные в работах [72, 80–92] (см. раздел 5, а также обзоры [94–98]), показали, что в настоящее время для сантиметрового, миллиметрового и ближнего субмиллиметрового диапазонов с уверенностью можно говорить о превышении измеренного коэффициента поглощения водяного пара над рассчитанным коэффициентом поглощения мономеров H_2O [10, 11, 15] (см. также рис. 1, 2) в окнах прозрачности примерно в 2 раза. При этом во всех случаях оказывается, что избыточное поглощение (в сравнении с расчетным поглощением мономерами) увеличивается вместе с увеличением влажности воздуха, т. е. оно обусловлено водяным паром атмосферы. Вместе с тем, это поглощение не может быть отнесено за счет бо́льших ширин спектральных линий мономеров водяного пара, ибо согласно экспериментальным данным (см. табл. 1) эти ширины в сантиметровом, миллиметровом и ближнем субмиллиметровом диапазонах не в 2, а лишь в $\sim 1{,}2$ раза превышают теоретические значения [64], принятые в расчетах [10, 11, 15].

В работах [28, 29] показано, что это избыточное поглощение обязано димерам водяного пара.

Известно, что при помощи так называемой водородной связи [99–102] может происходить сцепление (ассоциация) двух (или более) молекул водяного пара H_2O в одну сложную молекулу-димер (или полимер — в случае сцепления нескольких мономеров). Существование димеров водяного пара косвенным экспериментом показано в [103, 104]. Теоретическое исследование строения димера H_2O выполнено в [16]; концентрация димеров в земной атмосфере при помощи закона действующих масс также оценивалась в [16].

В работе [29] был рассчитан коэффициент поглощения димеров водяного пара. Так же, как и для мономера H_2O (см. рис. 1), частотная зависимость интенсивности вращательного спектра димера имеет «куполообразный» характер, т. е. наблюдается завал вращательного спектра поглощения как на низких, так и на высоких частотах. Завал в сторону низких частот обусловлен дипольным характером излучения, а также тем обстоятельством, что слабых спектральных линий поглощения всегда больше, чем сильных, и поэтому «вероятнее», что первые (с низкочастотной стороны спектра) линии поглощения окажутся слабыми. Завал в сторону высоких частот обусловлен тем обстоятельством, что эти частоты возникают из-за переходов между состояниями с большой энергией (большими значениями квантовых чисел J, K), заселенность которых убывает экспоненциально с ростом энергий состояний. В отличие от мономера вращательный спектр поглощения димера, в связи с большими моментами инерции димера, заходит значительно дальше в низкочастотную область спектра, так что «купол» поглощения димеров оказывается смещенным относительно «купола» мономеров водяного пара в низкочастотную область, в которой мономеры вносят небольшой вклад. Благодаря этому обстоятельству, несмотря на то, что концентрация димеров водяного пара при нормальных атмосферных условиях ($T = 293°$, $P = 760$ *мм* рт. ст., абсолютная влажность $\rho = 7{,}5$ $г \cdot м^{-3}$) и энергии водородной связи ~ 5 $ккал \cdot моль^{-1}$ более чем на три порядка меньше концентрации мономеров, в окнах прозрачности мономеров сантиметрового, миллиметрового и ближнего субмиллиметро-

ero диапазонов димеры вносят в коэффициент поглощения атмосферы приблизительно столько же, сколько и мономеры (см. рис. 2).

В [29] были приведены результаты расчета коэффициента поглощения димеров H_2O в диапазоне 0 — 30 $см^{-1}$ при $T = 293°$, $P = 760$ *мм* рт. ст., абсолютной влажности воздуха $\rho = 7{,}5$ $г \cdot м^{-3}$ (что соответствует концентрации димеров $\rho_{дим} = 0{,}022$ $г \cdot м^{-3}$ при $T = 293°$ и энергии водородной связи 5,2 $ккал \cdot моль^{-1}$) и одинаковых полуширинах спектральных линий $(\Delta\nu/c)_{ij} = 0{,}4$ $см^{-1}$.

Реальные значения полуширин $(\Delta\nu/c)_{ij}$ спектральных линий димера в настоящее время неизвестны. Однако нет сомнений, что из-за бо́льших размеров димера в сравнении с мономером полуширины спектральных линий димера должны превышать полуширины спектральных линий мономера. Значения последних при атмосферных условиях на уровне моря составляют около 0,1 $см^{-1}$ (см. таблицу 1). В связи с тем, что линейные размеры молекулы димера приблизительно в 2 раза больше размеров мономера, следует ожидать, что газокинетическое эффективное сечение соударений димера в 4 раза больше, чем для мономера. Учитывая же квазиклассичность вращения димера, связанную с его большими моментами инерции, и обусловленную этим близость его вращательных энергетических уровней, можно полагать, что оптическое эффективное сечение соударений димера превышает таковое для мономера не в четыре, а в большее число раз.

К счастью, отсутствие точных данных о полуширинах спектральных линий димера мало влияет на расчетную величину обусловленного им коэффициента поглощения γ. Поскольку интенсивности спектральных линий P- и R-ветвей димера весьма плавно меняются с их частотой, а расстояние между ними (при одинаковом значении колебательного квантового числа v) составляет 0,46 $см^{-1}$ [29], т. е. порядка (и меньше) указанных сейчас полуширин линий $(\Delta\nu/c)_{ij}$, то при атмосферных условиях на уровне моря спектральные линии замазываются, так что (по крайней мере на длинах волн $\lambda < 2$ *мм*) коэффициент поглощения димеров оказывается практически не зависящим от полуширин $(\Delta\nu/c)_{ij}$.

Пунктирной кривой на рис. 2 изображена зависимость коэффициента поглощения димеров согласно расчетам Викторовой и Жевакина при $(\Delta\nu/c)_{ij} = 0{,}8$ $см^{-1}$; $T = 293°$, $P = 760$ *мм* рт. ст.

При этом, чтобы в окне $\lambda = 0{,}86$ *мм* суммарный коэффициент поглощения $\gamma_{вод\ пара} = \gamma_{мон} + \gamma_{дим}$ мономеров и димеров совпал с экспериментальным значением $\gamma_{вод\ пара} = 10{,}8$ $дб \cdot км^{-1}$ [24], концентрация димеров при $T = 293°$, $P = 760$ *мм* рт. ст., абсолютной влажности $\rho = 7{,}5$ $г \cdot м^{-3}$ была принята в два раза меньшей, нежели в [29] (т. е. число димеров было принято равным $7 \cdot 10^{-4}$ от числа мономеров), что отвечает энергии связи димера $\varepsilon = 4{,}8$ $ккал \cdot моль^{-1}$ против значения $\varepsilon = 5{,}2$ $ккал \cdot моль^{-1}$, принятого в [29]. Значение $\varepsilon = 5{,}2$ $ккал \cdot моль^{-1}$ получено из теплоты испарения воды 10,4 $ккал \cdot моль^{-1}$; аналогичные оценки по энергии сублимации льда дают $\varepsilon = 6{,}1$ $ккал \cdot моль^{-1}$ (доклад Коульсона; см. [100]).

Из рис. 2 видно, что на волнах длиннее $\lambda = 1$ *мм* димеры в окнах прозрачности мономеров вносят в поглощение такой же вклад, как и последние; вклад димеров продолжает оставаться сравнимым с вкладом мономеров и на более коротких волнах 0,7 *мм* $< \lambda <$ 1 *мм*. На волнах короче 0,7 *мм* димеры, как видно из рис. 2, играют уже незначительную роль; роль эта все уменьшается по мере уменьшения длины волны*.

* Спектр димеров $(H_2O)_2$ в инфракрасном и оптическом диапазонах волн не исследовался.

5. СРАВНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ ВОДЯНОГО ПАРА С РАСЧЕТНЫМИ

Экспериментальное определение коэффициента поглощения водяных паров атмосферы в настоящее время проводится пятью методами.

1. Лабораторными измерениями с помощью вакуумного спектрометра (см., например, [23]).

2. Полевыми измерениями способом изменения расстояния (см., например, [24]).

3. Полевыми измерениями способом изменяющейся влажности (см., например, [24, 34]).

4. Измерениями собственного излучения атмосферы под разными углами места способами как изменяющейся, так и неизменяющейся влажности (см., например, [81, 91–93]).

5. Измерениями поглощения излучения, идущего от внеземных астрономических источников (Солнца, Луны и т. д.) под разными углами места.

Два последних метода часто именуются радиоастрономическими.

Первый метод ввиду малости оптического пути распространения l в спектрометре ($l \sim 5$ *м*) применим лишь для тех спектральных областей, в которых коэффициент поглощения водяного пара достаточно велик: $\gamma \geqslant 100$ *дб*$\cdot$*км*$^{-1}$ (при очень больших значениях $\gamma \geqslant 3000$ *дб*$\cdot$*км*$^{-1}$ спектрометр обычно также не может быть использован ввиду слабости принимаемого от ртутной лампы сигнала).

Второй метод применим в том случае, когда не требуется отделения кислородного поглощения от поглощения водяного пара, т. е. в том случае, когда кислородным поглощением можно пренебречь (в обычных атмосферных условиях это отвечает диапазону $\lambda < 2$ *мм*).

Третий метод обычно практически удобнее второго; самое же главное — он позволяет выделить поглощение водяным паром из полного поглощения (которое слагается из поглощения водяным паром и поглощения молекулярным кислородом).

Четвертый метод позволяет измерять столь малые значения поглощения ($\gamma \simeq 10^{-3}$ *дб*$\cdot$*км*$^{-1}$), измерение которых другими методами в настоящее время невозможно. Поэтому этот метод является единственно возможным при определении коэффициента поглощения водяного пара в сантиметровом диапазоне.

Необходимо указать, что всем выполненным до настоящего времени экспериментальным работам по определению коэффициента поглощения водяного пара для диапазона $\lambda > 0{,}7$ *мм* (в котором вклад димеров становится сравнимым с вкладом мономеров) и в первую очередь работам, выполненным методом изменяющейся влажности, свойственен тот недостаток, что при обработке результатов измерений не проводился учет роли димеров. Принятая до настоящего времени методика обработки результатов измерений методом изменяющейся влажности состояла в том, что поглощение водяным паром $\gamma_{\text{вод пара}}$ принималось пропорциональным абсолютной влажности воздуха ρ: $\gamma_{\text{вод пара}} \sim \rho$. При этом влияние температуры на коэффициент поглощения водяного пара принималось несущественным.

Между тем, концентрация димеров $\rho_{\text{дим}}$ пропорциональна ρ^2 и сильно зависит от температуры T. При обычных температурах $T \simeq 300°$ эту зависимость можно аппроксимировать выражением $\rho_{\text{дим}} \sim \rho^2 T^{-12}$. Таким образом, полный коэффициент поглощения водяного пара должен быть записан в виде $\gamma_{\text{вод пара}} = \gamma_{\text{мон}} + \gamma_{\text{дим}} = k_1\rho + k_2\rho^2 T^{-12}$*, и задача экспе-

* Здесь мы отвлекаемся от слабой температурной зависимости коэффициентов k_1 и k_2, обусловленной зависимостью ширин спектральных линий и населенностей энергетических уровней от температуры.

риментатора должна состоять в раздельном определении коэффициентов k_1 и k_2.

Определение коэффициента поглощения водяного пара при данной температуре T и абсолютной влажности ρ по значению коэффициента $\gamma_{\text{вод пара}}$, полученному из обработки данных измерений по обычной методике и отнесенному к стандартной влажности $\rho_0 = 7{,}5\ г \cdot м^{-3}$ путем простого умножения на множитель $\rho/7{,}5$ (как то делалось до сих пор), может привести к ошибке в несколько десятков процентов в тех участках диапазона $\lambda > 0{,}7\ мм$, где поглощение димерами того же порядка, что и поглощение мономерами (см. рис. 2).

Вследствие сказанного экспериментаторам в дальнейшем предстоит, по-видимому, значительная работа по ревизии и уточнению полученных ранее значений коэффициента поглощения водяного пара для диапазона волн $\lambda > 0{,}7\ мм$.

Сказанное необходимо иметь в виду и при сравнении даваемых цитируемыми ниже авторами экспериментальных значений коэффициента поглощения с теоретическими значениями.

Коэффициент поглощения водяных паров в области сантиметровых волн, определенный в лабораторных условиях и по собственному излучению атмосферы в первых работах [72, 80], превышал вычисленный Ван Флеком [44] коэффициент поглощения мономеров H_2O в 3—5 раз вне резонанса $5_{-1}—6_{-5}$ ($\lambda_{ij} = 1{,}35\ см$). В области резонанса $\lambda \simeq \lambda_{ij} = 1{,}35\ см$ измерения [72, 80] дали результат, близкий к расчетному значению [44]. Более поздние полевые измерения Толберта, Стрейтона и Бритта в диапазоне $\lambda = 1{,}2 \div 1{,}7\ см$ (на рис. 3 они обозначены T) подтвердили результаты первых экспериментальных работ. Измерения атмосферного поглощения радиоволн $\lambda \simeq 1{,}8 \div 2{,}7\ см$, выполненные недавно В. М. Плечковым [98] (см. табл. 2 в обзоре [105]), также обнаруживают тенденцию к увеличению расхождения между экспериментальными и вычисленными мономерными значениями по мере удаления от резонанса $\lambda_{ij} = 1{,}35\ см$. Однако все результаты измерений [72, 80, 93] находятся в хорошем согласии с вычисленным суммарным (мономеров и димеров) коэффициентом поглощения водяного пара (см. рис. 3). Не являются исключением и экспериментальные значения коэффициентов поглощения водяного пара при $\lambda = 5{,}28\ см$ [92] и $\lambda = 3{,}2\ см$ [91], полученные радиоастрономическим методом (эффективная высота поглощения водяного пара в работах [91, 92] полагалась равной 1,8 *км*). Так, измеренное значение γ при $\lambda = 5{,}28\ см$ составляет $3 \cdot 10^{-3}\ дб \cdot км^{-1} \pm 15\%$ ($\rho = 7{,}5\ г \cdot м^{-3}$), а расчетное (димеров и мономеров) — $2{,}1 \cdot 10^{-3}\ дб \cdot км^{-1}$*; на волне $\lambda = 3{,}2\ см$ соответствующие значения γ совпадают и равны $5{,}1 \cdot 10^{-3}\ дб \cdot км^{-1}$ ($\rho = 7{,}5\ г \cdot м^{-3}$).

Сравнение с расчетом Ван Флека экспериментальных коэффициентов поглощения водяного пара на миллиметровых волнах, полученных в период 1955—1960 гг., содержится в [83, 84]. За этот период в Техасском университете были проведены исследования на длинах волн 8,6; 4,3; 3,35; 2,15 *мм* и в области 2,5 — 3 *мм*. Лаборатория Bell Telephone осуществила аналогичные измерения в диапазоне 5 — 6 *мм* и на волнах 4,3; 3,7 *мм* (точки B на рис. 3).

Подробный анализ ранних измерений поглощения в области 2,5 — 3 *мм* дан в [82] (на рис. 3 соответствующие коэффициенты поглощения обозначены +). На участке спектра $\lambda \sim 2{,}73\ мм$ авторами [82] было обнаружено возрастание потерь, зависящее от содержания водяных паров. Толберт и Стрейтон в качестве гипотезы предположили существо-

* По-видимому, точность экспериментального результата [92] является завышенной. См. разброс точек на рис. 2 работы [92].

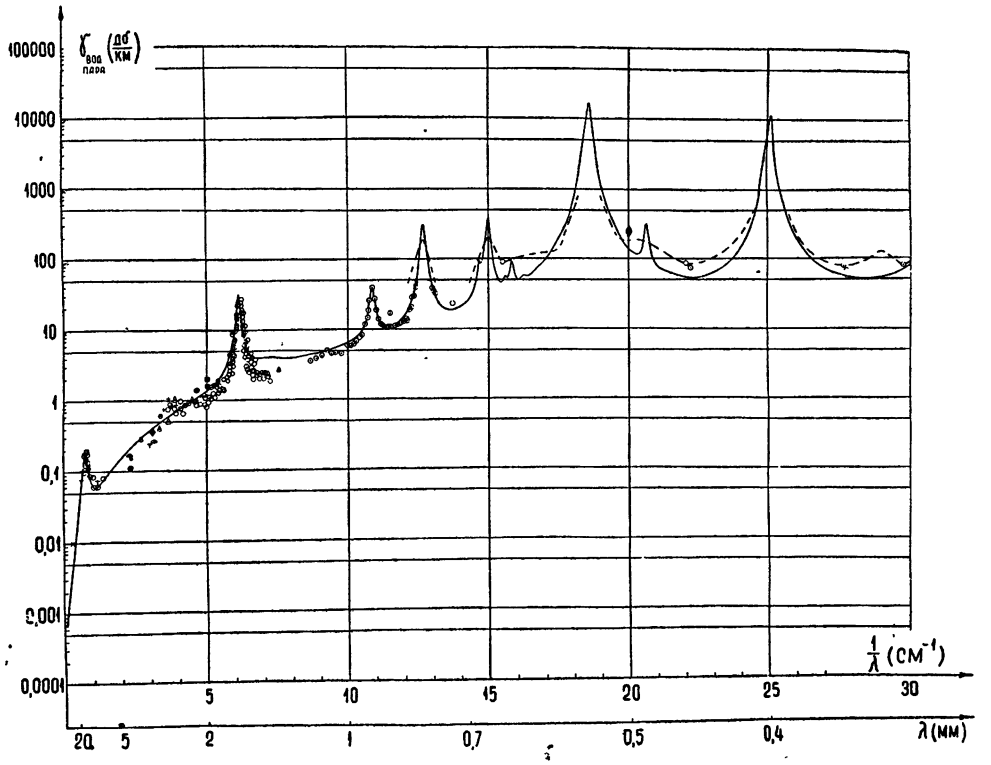


Рис. 3. Сравнение теоретического суммарного коэффициента поглощения мономеров и димеров водяного пара при давлении $P = 760$ *мм* рт. ст., температуре $T = 293°$К и абсолютной влажности $\rho = 7{,}5$ $г \cdot м^{-3}$ (сплошная кривая) с экспериментальными данными [13, 22–25, 31, 34, 72, 80–83, 85–89].

вание линии водяного пара, центрированной при $\lambda_{ij} = 2{,}73$ *мм* с шириной 0,08 $см^{-1}$ и максимальными потерями 0,35 $дб \cdot км^{-1}$. Среди разрешенных вращательных переходов мономеров H_2O не содержится линии, предсказываемой Толбертом и Стрейтоном [82]. На диапазон $\lambda \sim 2{,}73$ *мм* не приходятся и резонансные частоты вращательных переходов молекулы H_2O в возбужденном колебательном состоянии [38]. Более поздние радиометрические измерения солнечного излучения [84] Толберта и Стрейтона вблизи $\lambda \sim 2{,}73$ *мм* дали уровень поглощения ниже, чем отмеченный в [82]*.

Измерения [34] коэффициента поглощения радиоволн в диапазоне 1,36—3 *мм*, согласно авторам, как будто подтверждают выдвинутое Толбертом и Стрейтоном [82] предположение о существовании вблизи волны 2,73 *мм* линии водяного пара. В [34] обращается также внимание на то, что разброс экспериментальных точек на высокочастотном крыле линии поглощения водяных паров 2_2—3_{-2} ($\lambda_{ij} \simeq 1{,}63$ *мм*) заметно превышает разброс их на низкочастотном крыле и, по-видимому, не может быть объяснен только неточностью измерения поглощения. Авторы [34] приходят к выводу, что в отмеченном участке спектра, возможно, имеются одна или несколько линий поглощения небольшой интенсивности, которые из-за неточной установки частоты (в каждом из отдельных измерений) сильно сгладились при усреднении большого числа данных и проявляются в виде аномально большого разброса. Замечания авторов

* Обработка результатов [84] выполнена в [15].

[34] представляют интерес в связи с ожидаемым значительным вкладом димеров H_2O в коэффициент поглощения водяного пара на высокочастотном крыле линии $\lambda_{ij} \simeq 1{,}63$ *мм* (см. рис. 2). Однако данные измерений [34] на этом крыле, в отличие от других экспериментальных значений в миллиметровом диапазоне*, существенно расходятся с вычисленным суммарным (мономеров и димеров) коэффициентом поглощения водяного пара (см. рис. 3). По-видимому, необходима постановка дальнейших экспериментальных исследований в этом участке спектра.

Из работы [84] видно, что результаты измерений коэффициента поглощения водяных паров, полученные в 1959 году лабораторией ВМС США в диапазоне 5 — 6 *мм*, превосходят расчет Ван Флека [44] в 10—30 раз. Именно это обстоятельство вместе с «аномалиями» в области $\lambda \simeq 2{,}5$ *мм* позволило Толберту и Стрейтону высказать гипотезу о возможном значительном увеличении ширины кислородных линий поглощения в присутствии водяных паров. Необходимо, однако, заметить, что сколько-нибудь точное определение коэффициента поглощения водяных паров в области $\lambda \simeq 5$ *мм* в упомянутых исследованиях ВМС США было в высшей степени затруднено из-за большого кислородного поглощения в данном диапазоне ($\gamma_{O_2}/\gamma_{H_2O} \simeq 100$) и связанных с этим значительных ошибок при определении γ_{H_2O}. Сделанное замечание, хотя и в меньшей степени, можно отнести и к области $\lambda \simeq 2{,}5$ *мм*. Учет межмолекулярного взаимодействия H_2O—O_2 приводит к эффекту уширения линий O_2 (который, в основном, определяется соударениями типа O_2—N_2 и O_2—O_2) при возможных плотностях паров H_2O в атмосфере, не превышающему $\sim 10\%$ от обычно принимаемых значений полуширин $\Delta\nu_{O_2}$.

Критика других концепций, с помощью которых делалась попытка объяснить существующее расхождение между вычисленными коэффициентами поглощения мономеров H_2O и измеренными величинами поглощения вне спектральных линий H_2O, дана в [15].

Из рис. 3 работы [15] видно, что значительного улучшения (в смысле приближения к экспериментальным данным) теоретических величин поглощения в водяном паре можно добиться, не прибегая к каким-либо сомнительным гипотезам, а лишь применяя в расчете форму линии, полученную из решения кинетического уравнения, вместо ошибочной формы линии Ван Флека—Вайскопфа. Хотя при вычислении таким образом коэффициента поглощения мономеров водяного пара и не удается полностью устранить несоответствие между теорией и экспериментом, эта разница вне резонанса теперь составляет в среднем $\sim 1{,}5$— 2 раза, вместо 3 — 4 раз, которые получаются при сопоставлении измеренных коэффициентов поглощения с вычисленными по теории Ван Флека. Этот вывод подтверждают и последние экспериментальные исследования поглощения миллиметровых радиоволн [34, 90]. Остающаяся же разница между экспериментальными и вычисленными мономерными коэффициентами поглощения водяного пара, как мы видели, на волнах $\lambda > 0{,}7$ *мм* устраняется при учете вклада димеров H_2O в теоретическую величину $\gamma_{\text{вод пара}}$.

Одна из первых попыток измерить ослабление инфракрасной радиации $\lambda \simeq 8 \div 12$ *мк* водяным паром была предпринята Аделем (см. обзор данных в [5]). Антони [106], пытаясь уточнить данные Аделя, получил величины коэффициентов поглощения водяного пара в 2 — 2,5 раза меньшие. Гебби [107], измеряя пропускание атмосферы на горизонтальных трассах, нашел, что ослабление нельзя объяснить только вкладом водяного пара, и приписал остаточное поглощение аэрозолям. Однако

* Исключение составляют ненадежные измерения поглощения ВМС США вблизи $\lambda \simeq 5 \div 6$ *мм* (см. ниже).

в работах [108–111] выражается сомнение относительно правильности этого вывода. Критический анализ измерений коэффициента поглощения водяного пара в «окне прозрачности» атмосферы $\lambda \simeq 8 \div 12$ *мк* выполнен в [112]. В работе [112] приводятся также последние измерения спектральной прозрачности атмосферы как в горных, так и в равнинных районах.

Согласно [112] вертикальное поглощение радиации водяным паром на волне $\lambda \simeq 10$ *мк* составляет $\sim 0{,}112$ $см^2 \cdot г^{-1}$, что при стандартных атмосферных условиях на уровне моря соответствует коэффициенту поглощения $\gamma \simeq 0{,}483$ $дб \cdot км^{-1}$. Следует, однако, иметь в виду, что поглощение водяным паром в области $\lambda \simeq 10$ *мк* слагается из двух частей: 1) поглощения, обусловленного вращательным спектром H_2O; 2) поглощения, обусловленного колебательной полосой ω_2 H_2O, центрированной к $\lambda = 6{,}27$ *мк*. Имеющиеся экспериментальные данные не позволяют разделить эти две составляющие поглощения при $\lambda \simeq 10$ *мк*. Если вклад полосы ω_2 в поглощение при $\lambda \simeq 10$ *мк* оценить приблизительно в 20% (см. рис. 14 в [3]), то на долю вращательной составляющей поглощения водяного пара приходится в нормальных атмосферных условиях $\gamma \simeq 0{,}40$ $дб \cdot км^{-1}$. Расчеты коэффициента поглощения мономеров H_2O, обусловленного вращательным спектром с формой линии по кинетическому уравнению [10] на уровне моря при $\lambda = 10$ *мк*, дают $\gamma \simeq 0{,}55$ $дб \cdot км^{-1}$. Это теоретическое значение коэффициента поглощения водяного пара следует признать находящимся в согласии с соответствующей экспериментальной величиной $\gamma = 0{,}40$ $дб \cdot км^{-1}$ [112], если принять во внимание погрешности расчетных данных и погрешности обработки экспериментальных данных. Нужно отметить, что в экспериментальных исследованиях атмосферного поглощения в коротковолновом участке субмиллиметрового диапазона $\lambda \simeq 8 \div 20$ *мк* пока не используются широко все имеющиеся возможности. В частности, применение лазеров для этих целей открывает заманчивые перспективы.

В субмиллиметровом диапазоне спектр поглощения водяных паров измерялся неоднократно (см., например, [113–128]), но в перечисленных работах отсутствуют данные, по которым можно было бы определить коэффициент поглощения*. Ярославский и Станевич [131] на вакуумном спектрометре измерили коэффициент поглощения водяных паров в диапазоне 20 — 2500 *мк*. Если эти данные пересчитать к абсолютной влажности $\rho = 7{,}5$ $г \cdot м^{-3}$ (в оригинале эти результаты приведены для влажности $\rho = 10{,}5$ $г \cdot м^{-3}$), то из сравнения следует, что результаты авторов [131] сильно расходятся с теоретическими. Они расходятся также и с данными работ [13, 22–24, 31, 129]. В то же время повторные спектрометрические измерения коэффициентов поглощения паров H_2O, выполненные Фурашовым [22, 23], находятся в хорошем согласии с полевыми измерениями поглощения [31] при больших базовых расстояниях. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют о некачественности измерений [131].

Тщательные измерения коэффициента поглощения водяного пара в субмиллиметровом диапазоне выполнены Рядовым, Фурашовым и Шароновым [22–25, 31, 41, 74]. Выше уже приводились экспериментальные ширины ряда линий водяного пара, полученные этими авторами (см. табл. 1). В работах [22–24, 31] проведены радиоастрономические, спектрометрические и полевые измерения коэффициента поглощения в относительных окнах прозрачности водяного пара на волнах $\lambda \simeq 55 \div 1000$ *мк*. В этих же работах измеренные коэффициенты поглощения сопоставляются с вычисленными коэффициентами поглощения мономеров H_2O.

---

* Об измерениях вращательного спектра поглощения водяного пара [129, 130] см. в [10, 13].

В [23], в частности, отмечается, что экспериментальные коэффициенты поглощения, полученные на вакуумном спектрометре, для окон прозрачности в диапазоне $\lambda \simeq 60 \div 645$ *мк* превышают расчетные данные по мономерам H_2O в 1,2 — 2,3 раза. При этом в относительно узких окнах прозрачности, где поглощение составляет 1500 — 2000 *дб* · *км*$^{-1}$, наблюдается лучшее соответствие измеренных и расчетных мономерных значений коэффициентов поглощения. В некоторых из них (в частности, при $\lambda = 0{,}263$; 0,251; 0,170 *мм*) экспериментальные значения коэффициента поглощения с точностью до погрешности измерений, оцениваемой для этих окон в 10 — 15%, совпадают с расчетными, в других (например, при $\lambda = 0{,}079$; 0,1028: 0,1055; 0,1102 *мм*) расхождение не превышает 25%.

Аналогичное сравнение коэффициентов поглощения H_2O, полученных в полевых условиях [31], с результатами расчета [10] обнаруживает в окнах прозрачности $\lambda = 0{,}20$: 0,29: 0,36; 0,45; 0,73; 0,87 *мм* превышение экспериментальных значений над теоретическими значениями для мономеров в 1,3 — 2 раза. Радиоастрономические измерения поглощения [13] на волне $\lambda = 0{,}87$ *мм* находятся в хорошем согласии с измерениями [31] вдоль горизонтальной трассы (с использованием в качестве источника излучения ртутной лампы, а в качестве приемника — полевого спектрометра [14]), если значение характеристической высоты поглощения в водяном паре принять равным $H_{H_2O} \simeq 1{,}5$ *км**.

Результаты последних зарубежных измерений коэффициента поглощения водяного пара [87, 89] на волнах 3,2 *мм*; 1 — 3 *мм* не выпадают из предшествующих экспериментальных результатов (некоторое исключение составляет измерение [88] при $\lambda = 0.5$ *мм*; см. рис. 3).

Если дополнительное поглощение димерами водяного пара объясняет превышение измеренных коэффициентов поглощения над вычисленными мономерными значениями (см. раздел 4) при $\lambda \geqslant 0{,}7$ *мм*, то в окнах прозрачности коротких субмиллиметровых волн ($0{,}05$ *мм* $< \lambda < 0{,}07$ *мм*) расхождение между измеренными [22, 23, 31] и вычисленными мономерными [10] коэффициентами поглощения водяного пара не может быть устранено за счет привлечения в теоретических расчетах димерного механизма поглощения. Однако не исключено, что в этом диапазоне ширины линий вращательного спектра мономеров H_2O отличаются от вычисленных по теории Андерсона [66] значений Бенедикта и Каплана [64] в $\sim$1,5— 2 раза (см. [77, 78]). Если это действительно так, то тогда экспериментальные и теоретические коэффициенты поглощения водяного пара находятся в хорошем согласии во всем диапазоне $\lambda \simeq 10$ *мк* $\div 10$ *см*.

6. ПОГЛОЩЕНИЕ МИКРОРАДИОВОЛН МОЛЕКУЛЯРНЫМ КИСЛОРОДОМ

Первые расчеты коэффициента поглощения миллиметровых и сантиметровых радиоволн атмосферным кислородом были выполнены Ван Флеком [46] в 1947 году. В это же время начинаются и количественные измерения коэффициента поглощения O_2 [132, 133]. Последующие экспериментальные работы по молекулярному поглощению в кислороде были

* Значение $H_{H_2O} \simeq 1{,}5$ *км* соответствует параметру $\alpha_0 \simeq 0{,}48$ *км*$^{-1}$ в экспоненциальном распределении удельной влажности с высотой $q(h) = q_0 \exp(-\alpha_0 h)$, которое обычно принимается на высотах $h \simeq 0 \div 16$ *км*. При изменении параметра α_0 в пределах 0,4—0,6 *км*$^{-1}$ характеристическая высота поглощения мономеров водяного пара в окнах прозрачности меняется от 1,66 — 1,72 *км* до 1,25 — 1,28 *км*. В резонансных областях поглощения величина H_{H_2O} существенно зависит от длины волны. Так, в центре линии $5_{-1} - 6_{-5}$ ($\lambda_{ij} = 1{,}35$ *см*) величина H_{H_2O} возрастает в умеренных широтах летом до 2,18 *км* при «сухой» верхней атмосфере и $\alpha_0 = 0{,}48$ *км*$^{-1}$. Подробнее о численных значениях H_{H_2O} вблизи резонанса $5_{-1} - 6_{-5}$ при различных распределениях влаги см. в [39].

посвящены исследованию отдельных параметров спектра: резонансных частот и ширин линий [82, 134–141].

Измеренные полуширины спектральных линий O_2 при низком давлении $P \simeq 2 \div 10$ *мм* рт. ст., отнесенные к значению $P = 1$ *мм* рт. ст., оказались (в среднем по всем квантовым переходам) равными $\Delta\nu/P = 1{,}95$ *Мгц* · (*мм* рт. ст.)$^{-1}$ [135, 137]. Линейная экстраполяция результатов этих измерений к атмосферному давлению $P = 1$ *атм* при учете малого отличия эффективного сечения соударений O_2—N_2 от сечения соударений O_2—O_2 (по ряду измерений [137, 143] их отношение $\simeq 0{,}90$) приводит к величинам полуширин спектральных линий O_2 в воздухе, превышающим примерно в 2 раза соответствующие величины $\Delta\nu$, которые следуют из сопоставления расчетов молекулярного поглощения с измерениями [83, 132, 142, 144] на уровне моря вблизи $\lambda \simeq 5$ *мм*. Непосредственные спектроскопические измерения ширин линий O_2 при давлениях $P = 1$ *атм* невозможны из-за того, что почти все интенсивные линии кислорода расположены в узкой полосе частот $\delta\nu \simeq 10$ *Гц*, центрированной около $\nu \simeq 60$ *Гц**, и поэтому они взаимно перекрываются уже при $P \gtrsim 30$ *мм* рт. ст.

В силу этого обстоятельства при анализе поглощения радиоволн в кислороде следует рассматривать взаимодействие обычных моделей поглощающих молекул — гармонических осцилляторов — не только с внешним электромагнитным полем и посторонними молекулами, но и между собой. Такое взаимодействие эффективно учитывается в ширинах линий O_2 при теоретическом описании поглощения [144–147] путем введения нелинейной зависимости $\Delta\nu(P)$. Однако все существующие в настоящее время описания этой нелинейной зависимости носят сугубо качественный характер и не претендуют на сколько-нибудь высокую точность. Путем подбора соответствующей зависимости удается согласовать между собой противоречивые сведения о полуширинах линий O_2 для низких и высоких давлений [82, 83, 132–142, 144].

На протяжении ряда лет теория поглощения Ван Флека в кислороде [46] не претерпевала принципиальных изменений, хотя результаты [46] и уточнялись неоднократно [142, 145, 148, 149]. Существовало мнение [83, 96, 97, 144], что вычисленный коэффициент поглощения O_2 находится в хорошем согласии с экспериментом и не обнаруживает «аномалий», свойственных, например, коэффициенту поглощения паров воды. Однако развитие методики измерений и измерительной техники позволило более определенно заявить о наличии расхождения между экспериментом и теорией в этом вопросе. Существенное превышение измеренных коэффициентов поглощения O_2 над вычисленными было недавно отмечено в миллиметровом ($\lambda \simeq 1 \div 2$ *мм*) и дециметровом участках спектра ($\lambda \simeq 10 \div 70$ *см*) [34, 86, 150–154].

Перед тем как сопоставлять измеренные и вычисленные значения коэффициента поглощения O_2, остановимся на некоторых деталях спектра молекулярного кислорода. Одна из специфических черт микроволнового спектра поглощения O_2 уже отмечалась выше: малый разброс резонансных частот $\nu_{K\pm}$ вблизи $\nu \simeq 60$ *Гц*. Другая особенность спектра кислорода обусловлена отличными от нуля диагональными матричными элементами магнитного дипольного момента молекулы. Возмущаясь при соударениях, диагональные матричные элементы вызывают дополнительное (по сравнению с недиагональными элементами) поглощение электромагнитной энергии, которое называют нерезонанс-

* Исключение составляет изолированная линия 1–, центрированная при $\lambda \simeq 2{,}53$ *мм*. О субмиллиметровом спектре поглощения O_2 см. ниже.

ным поглощением, в отличие от резонансного, обусловленного недиагональными элементами дипольного момента.

До 1965 года резонансная часть поглощения O_2 описывалась исключительно формой линии Ван Флека — Вайскопфа [53], а нерезонансная — предельным выражением дебаевского типа, которое получалось из формулы Ван Флека — Вайскопфа при стремлении резонансной частоты (собственной частоты осциллятора) к нулю.

В работе [17] ошибочная форма линии Ван Флека—Вайскопфа в описании резонансной части поглощения O_2 была заменена формой линии, полученной из решения кинетического уравнения (см. раздел 2). При тщательном сопоставлении вычисленных [17] и измеренных [137, 138, 142, 155] коэффициентов поглощения O_2 вблизи резонанса $\lambda \simeq 5$ *мм* был сделан вывод о том, что среднее для всех (кроме 1_-) квантовых переходов кислорода значение полуширины спектральной линии при нормальных атмосферных условиях ($P = 760$ *мм* рт. ст., $T = 300°K$) составляет $\Delta\nu_{ср} = 0{,}027$ *см*$^{-1}$. Измерения [82] для изолированной линии 1_- дают при тех же атмосферных условиях $\Delta\nu_{1_-} = 1{,}43$ *Гц* $= 0{,}048$ *см*$^{-1}$.

Одним из дискуссионных вопросов, касающихся молекулярного спектра O_2, является в настоящее время вопрос об описании нерезонансного поглощения. Формальный вывод выражения Дебая (которое обычно используется для описания нерезонансного поглощения) из формулы Ван Флека—Вайскопфа критиковался в работах [21, 153, 156]. В [21], в частности, отмечалось, что при стремлении к нулю резонансной частоты в формуле Ван Флека—Вайскопфа осуществляется переход к случаю свободного электрона, в то время как нерезонансное поглощение O_2 имеет совершенно иную природу. Предпосылками к пересмотру нерезонансного поглощения O_2 служили также результаты измерений поглощения в дециметровом диапазоне [150—154], где превышение экспериментальных данных над расчетными по теории Ван Флека составляет ~ 2 раза при $\lambda \simeq 10$ *см* и увеличивается до ~ 3 раз при $\lambda \simeq 60$ *см**, и результаты измерений в миллиметровом диапазоне, где на склонах линии 1_- ($\lambda \simeq 2{,}53$ *мм*) превышение достигает $\sim 5 - 10$ раз [34, 86].

В [154, 156] Станкевич рассмотрел спин-спиновое взаимодействие соударяющихся молекул кислорода, а также сдвиг и уширение уровней, возникающие при этом. Из решения уравнения для матрицы плотности в [154, 156] было получено значительное увеличение (в 2 и более раз) нерезонансного поглощения на дециметровых волнах по сравнению с величинами, которые следуют из теории Ван Флека. В количественном отношении такого увеличения теоретических коэффициентов поглощения O_2 достаточно для устранения расхождения между теорией и экспериментом [150—154] на указанных длинах волн. Однако в [157] оспариваются экспериментальные и теоретические выводы работ [150—153, 156] относительно величин кислородного поглощения в дециметровом диапазоне.

В работе [158] было измерено вертикальное поглощение в атмосфере при $\lambda = 9{,}4$ *см* (оно совпало с вычисленным Ван Флеком [46]) и выполнено сопоставление теоретических и экспериментальных данных о поглощении радиоволн в широком диапазоне $\lambda \simeq 3{,}75 \div 100$ *см*. В [158] отмечается наличие двух групп [150—154, 159—168] измерений кислородного поглощения в атмосфере: при $\lambda < 15$ *см* и $\lambda > 15$ *см*, которые плохо согласуются между собой. Результаты первой группы (при $\lambda < 15$ *см*) близки к значениям, которые следуют из теории Ван Флека, а результаты второй группы существенно расходятся со значениями Ван Фле-

* На волнах $\lambda \gtrsim 3$ *см* поглощение O_2 обусловлено лишь нерезонансной частью.

ка. Авторы [158] не исключают возможных больших (по крайней мере, сравнимых с измеряемыми эффектами) экспериментальных ошибок при радиоастрономических измерениях поглощения в кислороде радиоволн $\lambda > 15$ *см*. Но несомненно то, что радиоволны $\lambda \simeq 10 \div 100$ *см* слабо поглощаются в атмосфере и для них коэффициент поглощения молекулярного кислорода даже на уровне моря не превышает 0,01 *дб*·*км*$^{-1}$.

Немаловажное практическое значение имеет установление зависимости коэффициента поглощения O_2 от метеорологических условий (давления P и температуры T). Что касается резонансной части поглощения O_2, то соответствующая зависимость на любой длине волны может быть установлена из формулы (4) работы [17]:

$$\gamma_{O_2} = A_1 P T^{-3} \nu^2 \sum_K \left(F_{K+}\mu_{K+}^2 + F_{K-}\mu_{K-}^2\right) A_K, \qquad (7)$$

где $\mu_{K\pm}$ — матричные элементы, зависящие от квантового числа азимутального момента количества движения ядра K; $A_K = \exp\left[-2\pi B\hbar c K(K+1)/kT\right]$, $F_{K\pm} = 4\nu_{K\pm}^2 \Delta\nu / \left[\left(\nu_{K\pm}^2 - \nu^2\right)^2 + 4\nu^2(\Delta\nu)^2\right]$, ν — частота поля, B — вращательная постоянная молекулы.

Для нерезонансной части поглощения O_2 вдали от линий Станкевич получил зависимость $\gamma_{нр} \sim P^3 T^{-9/2}$ [156]. Расчеты эквивалентной длины пути радиоволн в молекулярном кислороде с учетом приведенной зависимости для $\gamma_{нр}$ и при использовании формулы (7) дают вне спектральных линий O_2 значения $H_{O_2} \simeq 4{,}3$ *км* зимой и $H_{O_2} \simeq 4{,}8$ *км* летом (модель атмосферы ВСА-60; [26, 27])*. В резонансных областях O_2 величины H_{O_2} достигают значений $\sim 10 - 20$ *км* [17, 26].

Однако предпринятая Станкевичем ревизия [169] своих ранних теоретических результатов [154, 156] привела в дециметровом диапазоне к квантово-механическому выражению для резонансного поглощения в кислороде, близкому к классическому дебаевскому выражению. В этом случае зависимость $\gamma_{нр}$ от давления и температуры выражается, как известно, приблизительной формулой $\gamma_{нр} \sim P^2 T^{-5/2}$. Для такой зависимости $\gamma_{нр}$ от метеорологических условий и при использовании формулы (7) величины H_{O_2} вне спектральных линий O_2 получаются равными $H_{O_2} \simeq 4{,}8$ *км* зимой и $H_{O_2} \simeq 5{,}1 \div 5{,}2$ *км* летом.

Количественные данные о поглощении радиоволн $\lambda \simeq 1{,}5$ *мм* $\div$ $\div 10$ *см* в кислороде на уровне моря приведены в [17]. При описании нерезонансного поглощения O_2 формулой Дебая достигается хорошее согласие вычисленных и измеренных коэффициентов поглощения в диапазоне $\lambda \simeq 3 \div 15$ *см* [158, 163–168], но при этом не удается интерпретировать существенное расхождение в коротком миллиметровом диапазоне $\lambda \simeq 1 \div 2$ *мм* [34, 86]. В резонансе $\lambda \simeq 5$ *мм* теоретические результаты [17] на уровне моря приведены к экспериментальным [137, 138, 142, 155] путем соответствующего подбора полуширин спектральных линий O_2 (именно так определяются полуширины линий кислорода при $P = 1$ *атм*). В области $\lambda \simeq 3$ *мм* измеренные коэффициенты поглощения O_2 превышают вычисленные значения в $\sim 1{,}5 - 2$ раза.

С увеличением высоты над уровнем моря отдельные спектральные линии O_2 в диапазоне $\lambda \sim 5$ *мм* разрешаются и, хотя в пиках линий поглощение остается сравнительно большим (на высоте $h \simeq 30$ *км* $\gamma_{O_2} \simeq 2 \div 4$ *дб*·*км*$^{-1}$), образуются глубокие минимумы поглощения шириной $\sim 0{,}25$ *Гц*, в которых поглощение уменьшается до $\gamma_{O_2} \sim 0{,}01 \div$ $\div 0{,}03$ *дб*·*км*$^{-1}$ (см. рис. 2, 3 в [26]).

* На дециметровых волнах в [156] получено значение $H_{O_2} \simeq 4$ *км*.

В ряде работ [170—172] дискутировался вопрос об уменьшении резонансных частот O_2 при возрастании давления. Если нерезонансное поглощение в кислороде на миллиметровых волнах действительно больше, чем следует из дебаевского выражения, то экспериментальные результаты работ [170, 171] легко объяснить, не прибегая к гипотетическому сдвигу резонансных частот O_2 [18] (см. также [173]).

Земное магнитное поле (эффект Зеемана) и эффект Допплера не влияют на форму линий поглощения O_2 на высотах $h \leqslant 40$ *км* [174, 175]. Однако при $h \geqslant 40$ *км* необходимо принимать во внимание упомянутые эффекты. Во всяком случае в [176] обнаружено значительное расхождение экспериментальных данных по поглощению радиоволн даже вблизи резонансных частот O_2, полученных с помощью радиометров, поднимаемых на воздушных шарах до $h \simeq 30$ *км*, с расчетами по теории Ван Флека, выполненными без учета роли магнитного поля Земли и допплер-эффекта.

В теоретических исследованиях поглощения радиоволн молекулярным кислородом обычно рассматривается только основной изотоп. Процентное содержание изотопов $O^{16}O^{17}$, $O^{16}O^{18}$ и $O^{18}O^{18}$ в атмосфере составляет менее 1% от общего содержания кислорода [177]; к тому же резонансные частоты их незначительно отличаются от резонансных частот $O^{16}O^{16}$ [178, 179].

В настоящее время установлено, что в оптическом и инфракрасном диапазонах волн определенный вклад в непрозрачность атмосферы дают димеры молекулярного кислорода $(O_2)_2$ [180—182]. Однако влияние димерных молекул $(O_2)_2$ на характеристики распространения миллиметровых и сантиметровых радиоволн совершенно не исследовалось.

Наконец, отметим, что некоторые спектральные линии O_2 приходятся не только на миллиметровый диапазон волн, что рассматривалось выше, но и на субмиллиметровый диапазон (правила отбора $\Delta J = 0, \pm 1$; $\Delta K = \pm 2$) [183]. По расчетам, выполненным в [183], эти линии могут вызвать в узких спектральных областях увеличение поглощения на ~ 3—16 *дб*$\cdot$*км*$^{-1}$. В основном же поглощение на субмиллиметровых волнах обусловлено водяными парами (см. разделы 3—5), и при нормальных атмосферных условиях ($P = 760$ *мм*, рт. ст., $T \simeq 300°$K, , $\rho = 7{,}5$ *г*$\cdot$*м*$^{-3}$) коэффициенты поглощения H_2O в субмиллиметровых ($1/\lambda \simeq 15 \div 50$ *см*$^{-1}$) окнах прозрачности превышают резонансные значения O_2 в ~ 5 раз и более.

Из краткого обзора состояния вопроса о поглощении радиоволн в молекулярном кислороде следует, что в последнее время была получена разнообразная и важная для научных исследований и практических применений информация по обсуждаемой проблеме. Все же экспериментальные и теоретические сведения о поглощении O_2 являются пока не полными. Между тем, детальное знание спектра поглощения O_2 приобретает повышенный интерес, например, в связи с возможным широким использованием его в метеорологии [145, 184].

7. О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПРЕЛОМЛЕНИЯ МИКРОРАДИОВОЛН В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

Известно, что коэффициент преломления атмосферы определяет такие важные характеристики распространения радиоволн, как флуктуации их амплитуды и фазы, рассеяние и рефракцию.

В сантиметровом диапазоне волн $\lambda > 1{,}5$ *см* коэффициент преломления атмосферы n дисперсией не обладает и обычно вычисляется по полуэмпирической формуле [185, 186]

$$(n-1)\,10^6 = K_1 \frac{P_d}{T} + K_2 \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2} + K_5 \frac{P_c}{T}, \qquad (8)$$

где P_d, e и P_c — парциальные давления соответственно «сухого» воздуха (без CO_2), водяного пара и углекислого газа, выраженные в миллибарах; $K_1 = 77{,}607 \pm 0{,}013°K \cdot мбар^{-1}$; $K_2 = 71{,}6 \pm 8{,}5°K \cdot мбар^{-1}$; $K_3 = (3{,}747 \pm 0{,}031)\,10^5 K^2 \cdot мбар^{-1}$; $K_5 = 129{,}34 \pm 0{,}02°K \cdot мбар^{-1}$. Вид формулы (8) следует из классической теории Дебая [187], а коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_5 находятся из эксперимента.

Члены в формуле (8), обратно пропорциональные первой степени температуры, описывают вклад упругой части поляризации неполярных и полярных газов, а член, обратно пропорциональный квадрату температуры, дает вклад твердодипольной части поляризации полярных газов. Упругая поляризация обусловлена электронными и колебательными переходами в оптической и коротковолновой инфракрасной областях, а твердодипольная часть поляризации обусловлена вращательными переходами, дающими вклад в поляризацию в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах.

В силу сказанного, в области $10\ мк \leqslant \lambda \leqslant 1{,}5\ см$ нельзя, в принципе, исключить возможную дисперсию коэффициентов формулы (8). Другая особенность миллиметрового диапазона состоит в наличии интенсивного спин-вращательного спектра поглощения O_2 (см. раздел 6). Молекулы кислорода обладают парамагнитными свойствами и обусловливают вблизи резонанса $\lambda \simeq 5\ мм$ отличие магнитной проницаемости μ атмосферы от единицы. Все перечисленные вопросы были подробно рассмотрены в работах [35–37].

В [35], в частности, показано, что на волнах $\lambda \gtrsim 10\ мк$ коэффициенты K_1 и K_2 практически постоянны и равны соответствующим значениям в сантиметровом диапазоне. Аналогичное утверждение справедливо и для коэффициента K_5 вне спектральной области $\lambda \simeq 12{,}9 \div 17{,}1\ мк$. Внутри указанной области коэффициент K_5 испытывает незначительные ($\sim 1\%$) вариации. Таким образом, заметная дисперсия атмосферного коэффициента преломления в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах обусловлена только вращательной частью диэлектрической проницаемости водяного пара $\varepsilon_{вр}$ и магнитной проницаемостью молекулярного кислорода μ, т. е. на волнах $\lambda \gtrsim 10\ мк$ в общем случае вместо формулы (8) нужно пользоваться выражением [35]:

$$(n-1)\,10^6 = K_1 \frac{P_d}{T} + K_2 \frac{e}{T} + \frac{1}{2}\,10^6 (\varepsilon_{вр} - 1) + K_5(\lambda) \frac{P_c}{T} + \frac{1}{2}\,10^6 (\mu - 1). \tag{9}$$

Ранее вычислялись вращательная часть диэлектрической проницаемости водяного пара [188] и магнитная проницаемость кислорода [189]. Однако этим расчетам присущи те же принципиальные недостатки, что и первым расчетам коэффициента поглощения [44–46]. Следует указать также на ограниченность применимости результатов [188, 189]. Так, вращательная часть диэлектрической проницаемости паров H_2O вычислена в [188] лишь на уровне моря и в сравнительно узком спектральном интервале ($1/\lambda = 0 \div 16\ см^{-1}$). Между тем, на волнах $\lambda < 0{,}6\ мм$ ($1/\lambda > 16\ см^{-1}$) вращательная часть диэлектрической проницаемости H_2O испытывает значительную дисперсию из-за приходящихся на этот диапазон интенсивных линий поглощения. В рассмотренном в [188] интервале длин волн также имеются интенсивные вращательные переходы водяного пара 2_2—3_{-2}, 4_0—5_{-4}, 3_1—4_{-3}, 3_3—4_{-1}, причем, если дисперсия вблизи некоторых из них на уровне моря мала (крылья субмиллиметровых линий сглаживают эту дисперсию), то на высотах $h \gtrsim 5\ км$ она может в принципе возрастать и оказывать влияние на высотный

профиль «влажной» части атмосферного коэффициента преломления. Поэтому простая экстраполяция результатов [188] на большие высоты представляется несостоятельной. Такие же трудности возникают при оценках влияния магнитной проницаемости O_2 [189] на атмосферный коэффициент преломления.

Расчет вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара $\varepsilon_{вр}$ с формой линии по кинетическому уравнению как на уровне моря, так и на высотах до $h \simeq 30$ *км* для зимних и летних условий года, был выполнен в [36, 190]. На рис. 4 в качестве примера приведены результаты этого расчета при средних атмосферных условиях на уровне моря ($P = 760$ *мм* рт. ст., $T = 293°$К, $\rho = 7{,}5$ *г*·*м*$^{-3}$) в диапазоне $\lambda \geqslant 0{,}2$ *мм* ($1/\lambda \leqslant 50$ *см*$^{-1}$).

Расчеты [36] показывают, что в относительных окнах прозрачности диапазона $\lambda \simeq 0{,}1 \div 0{,}8$ *мм* величины $\varepsilon_{вр} - 1$ на уровне моря отличаются от соответствующего значения на сантиметровых волнах только на 30 — 40%. В резонансных областях субмиллиметрового диапазона возможно превышение сантиметрового значения $\varepsilon_{вр} - 1$ более чем на порядок и при этом не исключается смена знака.

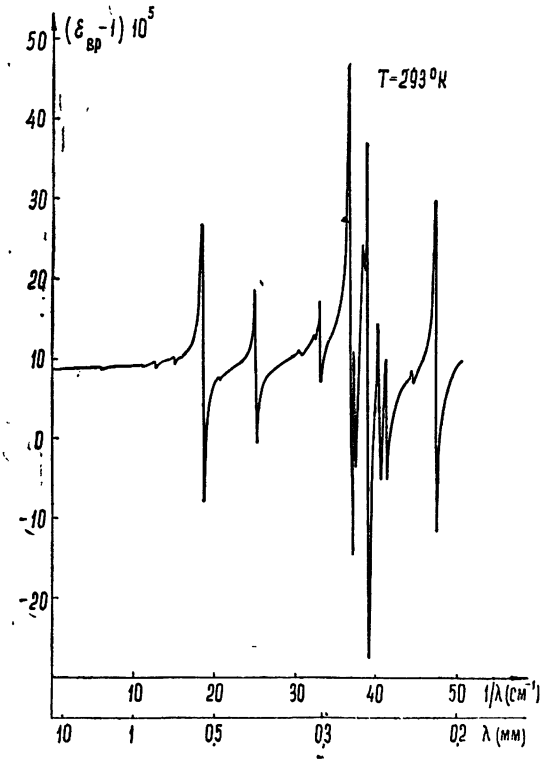


Рис. 4. Вращательная часть диэлектрической проницаемости водяного пара при давлении $P = 760$ *мм* рт. ст., температуре $T = 293°$К, абсолютной влажности $\rho = 7{,}5$ *г*·*м*$^{-3}$, вычисленная с формой линии по кинетическому уравнению. Полуширины спектральных линий мономеров H_2O брались согласно [64].

Вклад вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара в величину $(n - 1)\,10^6$ составляет при обычных атмосферных условиях на уровне моря ~15—20% в относительных окнах прозрачности субмиллиметровых волн ($\lambda \simeq 100$ *мк* $\div 1$ *мм*), а вблизи интенсивных линий поглощения превышает упругую часть величины $(n - 1)\,10^6$ в ~ 1,2— 1,8 раза.

В работе [190] из общей формулы для вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара получено также теоретическое выражение для коэффициента K_3 (см. формулу (8)).

Из рис. 4 видно, что вращательная часть диэлектрической проницаемости водяного пара мало меняется по диапазону при $\lambda \geqslant 1$ *мм* на уровне моря. При увеличении высоты резонанс 2_2—3_{-2} ($\lambda_{ij} \simeq 1{,}63$ *мм*) вызывает заметную дисперсию величины $\varepsilon_{вр} - 1$ на высотах $h \geqslant 10$ *км* [190]. Так, на высоте $h \simeq 18$ *км* летом дисперсия величины $\varepsilon_{вр} - 1$ вблизи $\lambda \simeq 1{,}64$ *мм* составляет ~ 15%, а на высоте $h \simeq 28$ *км* — 30%. Однако на столь больших высотах вклад величины $\varepsilon_{вр} - 1$ в значение $n - 1$ состав-

ляет менее 2—5%, если имеет место экспоненциальное убывание удельной влажности ($q(h) = q_0 \exp(-\alpha_0 h)$) до высот $h \simeq 16$ *км*, а при $h > 16$ *км* удельная влажность постоянна вплоть до высот фотодиссоциации паров H_2O. Интересно, что дисперсия величины $\varepsilon_{вр} - 1$ в длинноволновом резонансе $5_{-1} - 6_{-5}$ ($\lambda_{ij} \simeq 1{,}35$ *см*) даже на высотах $h \simeq$ $\simeq 30$ *км* не превышает $\sim 1\%$ [190].

Изменение модуля величины $\varepsilon_{вр}(h) - 1$ с высотой при экспоненциальном распределении влажности можно аппроксимировать в виде [190]

$$|\varepsilon_{вр}(h) - 1| = |\varepsilon_{вр}(0) - 1| \exp(-h/H_\varepsilon).$$

Характеристическая высота H_ε слабо зависит от длины волны в относительных окнах прозрачности паров H_2O и оказывается равной $\sim 1{,}7 - 1{,}8$ *км* при $h < 16$ *км*, если параметр α_0 в соотношении $q(h) = q_0 \exp(-\alpha_0 h)$ составляет 0,48 $км^{-1}$. При изменениях α_0 в пределах $0{,}4 - 0{,}6$ $км^{-1}$ величины H_ε отличаются от указанных величин на $\sim 17\%$. Вблизи интенсивных линий поглощения водяного пара величина H_ε достигает значений $\sim 2{,}0 - 2{,}5$ *км* для высот $h < 16$ *км* и $\alpha_0 = 0{,}48$ $км^{-1}$ [190].

В работе [190] дискутировались также возможности образования атмосферных волноводов на миллиметровых и субмиллиметровых волнах за счет специфики поведения величины $\varepsilon_{вр} - 1$ в различных спектральных участках и на различных высотах. В [190] отмечается, что в тех окнах прозрачности субмиллиметрового диапазона, где выполняется условие $\varepsilon_{вр} < 1$ и, следовательно, при уменьшении влажности с высотой происходит возрастание вращательной части диэлектрической проницаемости водяного пара, вклад величины $\varepsilon_{вр} - 1$ в $n-1$ сравнительно мал и поэтому возрастание $\varepsilon_{вр} - 1$ еще не приводит к увеличению с высотой величины $(n-1)10^6$ (необходимое условие для образования атмосферного волновода).

Вблизи морской поверхности в миллиметровом и сантиметровом диапазонах волн часто образуются низкие волноводы, обусловленные инверсиями распределения влажности с высотой. В работе [30] были рассчитаны кривые зависимости среднего поля в таком волноводе от высоты на различных расстояниях от узконаправленного источника, расположенного ниже слоя инверсии, как для гладкого, так и для волнистого моря.

В субмиллиметровом диапазоне, в отличие от сантиметрового диапазона, волноводы в атмосфере на длинах волн, расположенных вблизи интенсивных линий поглощения, благодаря отрицательным дисперсионным всплескам величины $\varepsilon_{вр} - 1$, возникают не только при инверсиях влажности, но и при любом реализующемся распределении влажности с высотой. Однако в подобных спектральных участках радиоволны испытывают значительное молекулярное поглощение ($\gamma \simeq$ $\simeq 10^6$ *дб*$\cdot км^{-1}$) и это обстоятельство не позволяет практически использовать для связи образующиеся атмосферные волноводы.

Выше речь шла о вращательной части диэлектрической проницаемости лишь мономеров водяного пара. Димеры водяного пара, дающие сравнимый с мономерами вклад в поглощение в окнах прозрачности миллиметровых и субмиллиметровых ($\lambda > 0{,}7$ *мм*) радиоволн [29], не вносят заметных поправок в вычисленные значения $\varepsilon_{вр} - 1$ (на уровне моря вклад димеров не превышает $\sim 0{,}4\%$ [29]).

Расчеты величин $\varepsilon_{вр} - 1$ [36, 190] позволяют объяснить известные экспериментальные факты (см., например, [191, 192]).

1. Оптическая рефракция меньше радиорефракции.

2. Оптическая рефракция практически не зависит от влажности воздуха.

В самом деле, упругая часть поляризации водяного пара составляет $\sim 1\%$ от упругой поляризации сухого воздуха (см. формулу (8)). Вклад же вращательной части диэлектрической проницаемости паров H_2O в величину $(n-1)10^6$ быстро убывает в инфракрасном диапазоне от $\sim 13-15\%$ на сантиметровых и миллиметровых волнах до $\sim 0{,}3\%$ при $\lambda = 10$ *мк*. В оптическом диапазоне ($\lambda \simeq 5000$ Å) соответствующий вклад величины $\varepsilon_{вр}-1$ уже меньше $5\cdot 10^{-4}\%$. Значения $\varepsilon_{вр}-1$ в окнах прозрачности миллиметровых и субмиллиметровых волн ($\lambda > 100$ *мк*), будучи близкими к соответствующим значениям в сантиметровом диапазоне, приводят к рефракции в этих участках спектра, мало отличающейся от рефракции в сантиметровом диапазоне [36, 190].

Магнитная проницаемость молекулярного кислорода с формой линии по кинетическому уравнению была вычислена в [37]. В [37] показано, что дисперсия величины $\mu-1$ вблизи $\lambda \simeq 5$ *мм* приводит к дисперсии $n-1$, составляющей при нормальных атмосферных условиях $\sim 0{,}4\%$. Изменения величины $\mu-1$ вблизи резонанса O_2 1– ($\lambda \simeq 2{,}5$ *мм*) не превышает $\sim 0{,}03\%$ на уровне моря. Вклад магнитной проницаемости O_2 в атмосферный коэффициент преломления в резонансных областях возрастает при увеличении h. Так, для $\lambda \simeq 5$ *мм* отношение $|\mu-1|/2(n-1) \simeq 0{,}7\%$ при $h \simeq 12$ *км* и $\sim 3{,}8\%$ при $h \simeq 30$ *км*.

В работе [35] вычислены также производные коэффициента преломления по температуре и влажности ($\partial n/\partial T$, $\partial n/\partial e$) в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах, которые определяют основные характеристики неоднородностей преломляющих свойств атмосферы на микроволнах.

Рассчитанные в [35—37] значения коэффициента преломления атмосферы на миллиметровых и субмиллиметровых волнах находятся в хорошем согласии с соответствующими немногочисленными измерениями [193—195].

В данном обзоре рассмотрены теоретические и экспериментальные сведения о коэффициентах поглощения и преломления сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн в земной атмосфере. При этом внимание акцентировалось на механизмах поглощения и преломления, обусловленных молекулами атмосферных газов. Дискутируемые механизмы определяют основные характеристики распространения радиоволн в ясной и незагрязненной атмосфере.

Что касается ослабления радиоволн в гидрометеорах, то количественным характеристикам ослабления в них миллиметровых и сантиметровых волн посвящен ряд работ (см., например, [196—198]). Тем не менее, в настоящее время в литературе отсутствуют количественные данные об ослаблении гидрометеорами субмиллиметровых радиоволн. В этой связи представляют интерес измерения диэлектрической проницаемости жидкой фазы воды в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах, выполненные в [32, 33].

К числу вопросов, касающихся молекулярного поглощения волн и требующих своего решения, относятся вопросы, связанные с более подробным исследованием формы спектральных линий. Необходимы также дальнейшие экспериментальные исследования параметров спектра водяного пара, в первую очередь, ширин спектральных линий мономеров и димеров водяного пара. В разделе 6 обзора отмечались нерешенные проблемы микроволнового спектра поглощения кислорода. Интерес представляют экспериментальные исследования атмосферного коэффициента преломления, рефракции, рассеяния волн и флуктуационных явлений в субмиллиметровом диапазоне.

Уже краткий перечень стоящих задач свидетельствует о широких возможностях дальнейших экспериментальных и теоретических исследований распространения миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн. Однако трудно надеяться, что в ближайшее время будут радикально пересмотрены физические основы затронутой здесь проблемы. По-видимому, развитие обсуждаемых вопросов будет идти по пути количественного уточнения полученных характеристик. Но именно это уточнение позволит более определенно заявить о возможностях практического использования субмиллиметрового диапазона радиоволн для связи, радиоастрономии, метеорологии, физики атмосферы, биологии, в строительном деле [199] и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. А. Парилов, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 4, 136 (1965).
2. W. M. Elsasser, Heat transfer by infrared radiation in the atmosphere, McMillan, Harvard, 1942.
3. К. Я. Кондратьев, Перенос длинноволнового излучения в атмосфере, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
4. К. Я. Кондратьев, Лучистая энергия Солнца, Гидрометеоиздат, Л., 1954.
5. К. Я. Кондратьев, Лучистый теплообмен в атмосфере, Гидрометеоиздат, Л., 1956.
6. R. M. Goody, Atmospheric radiation. I. Theoretical basis, Oxford, 1964; русский перевод Р. Гуди, Атмосферная радиация, изд. Мир, М., 1966.
7. К. Я. Кондратьев, Актинометрия, Гидрометеоиздат, Л., 1965.
8. В. Е. Зуев, Прозрачность атмосферы для видимых и инфракрасных лучей, изд. Сов. радио, М, 1966.
9. К. Я. Кондратьев, Ю. М. Тимофеев, Прямые методы расчета функций пропускания атмосферных газов (обзор), Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, **3**, 198 (1967).
10. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 4, 674 (1963).
11. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Геомагнетизм и аэрономия, **3**, № 4, 666 (1963).
12. С. И. Аверков, В. И. Аникин, В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, ПТЭ, № 1, 108 (1963).
13. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, **9**, № 6, 943 (1964).
14. С. И. Аверков, В. И. Аникин, В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Астрон. ж., **41**, № 3, 542 (1964).
15. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **9**, № 8, 1327 (1964).
16. А. А. Викторова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 3, 415 (1964); **7**, № 3, 424 (1964).
17. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, № 6, 987 (1965).
18. А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 4, 668 (1965).
19. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Материалы XV совещания по спектроскопии, изд. ВИНИТИ АН СССР, М., **3**, 42 (1965).
20. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 6, 1100 (1965).
21. С. А. Жевакин, Г. М. Стрелков, Материалы XV совещания по спектроскопии, изд. ВИНИТИ АН СССР, М., **3**, 39 (1965).
22. Н. И. Фурашов, Материалы XV совещания по спектроскопии, изд. ВИНИТИ АН СССР, М., **3**, 221 (1965).
23. Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия, **20**, № 3, 427 (1966).
24. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш уч. зав —Радиофизика, **9**, № 5, 859 (1966).
25. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 6, 1073 (1966).
26. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 3, 431 (1966).
27. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 3, 451 (1966).
28. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, **171**, № 4, 833 (1966).
29. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, **171**, № 5, 1061 (1966).

30. М. Б. Каневский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 5, 867 (1966).
31. В. Я. Рядов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, **11**, № 6, 1037 (1966).
32. К. А. Горонина, Р. К. Белов, Э. П. Сороқина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 5, 975 (1966).
33. А. И. Хвостова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 2, 292 (1967).
34. Ю. А. Дрягин, А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, А. И. Наумов, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 6, 1078 (1966).
35. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **12**, № 6, 955 (1967).
36. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **12**, № 7, 1147 (1967).
37. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **12**, № 8, 1339 (1967).
38. А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 8, 1115 (1967).
39. А. П. Наумов, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана (в печати).
40. В. М. Плечков, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана (в печати).
41. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия (в печати).
42. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
43. W. M. Elsasser, Astrophys. J., **87**, 497 (1938).
44. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, 425 (1947).
45. T. Rogers, Proc. of the conference on radio meteorology, 9—12 November, 1953, Univ. of Texas.
46. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, 413 (1947).
47. S. R. Drayson, Apll. Optics, **5**, 385 (1966).
48. T. F. Rogers, Phys. Rev., **93**, 248 (1954).
49. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1958.
50. Р. М. Гуди, Физика стратосферы, Гидрометеоиздат, Л., 1958.
51. В. Горди, В. Смит, Р. Трамбарулло, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1955.
52. H. Lorentz, Proc. Amsterd. Acad. Sci., **8**, 591 (1906).
53. J. H. Van Vleck, V. E. Weiskopf, Rev. Mod. Phys., **17**, 227 (1945).
54. J. E. Uhlenbeck, C. S. Wang Chang, Proc. Symposium on Transport Processes in Statistical Mechanics, Brussels, August, 1956, Interscience Publishers, 1958.
55. E. P. Gross, Phys. Rev., **97**, 395 (1955).
56. А. И. Бурштейн, Ю. И. Наберухин, ДАН СССР, **162**, 1262 (1965).
57. А. И. Бурштейн, ДАН СССР, **171**, 577 (1966).
58. D. Huber, J. Van Vleck, Rev. Mod. Phys., **38**, 187 (1966).
59. В. В. Якимец, ЖЭТФ, **51**, 1469 (1966).
60. J. Boggs, H. Agnew, J. Phys. Chemistry, **63**, 1127 (1959).
61. B. H. Winters, S. Silverman, W. S. Benedict, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **4**, 527 (1964).
62. T. Kyle, D. Murcray, F. Murcray, W. Williams, JOSA, **55**, 1421 (1965).
63. R. H. Schwendeman, V. W. Laurie, Tables of line strengths, Pergamon Press, 1956.
64. W. S. Benedict, L. D. Kaplan, J. Chem. Phys., **30**, 388 (1959).
65. W. S. Benedict, J. Quant. Spectr. and Rad. Transfer, **4**, 453 (1964).
66. P. W. Anderson, Phys. Rev., **76**, 947 (1949).
67. J. Boggs, Deam, King, J. Chem. Phys., **33**, 1852 (1960).
68. J. R. Rusk, J. Chem. Phys., **43**, 2919 (1965).
69. W. S. Benedict, H. H. Claassen, T. H. Shaw, J. Res. NBS, **49**, 91 (1952).
70. S. Golden, T. Wentink, R. Hillger, M. Strandberg, Phys. Rev., **73**, 92 (1948).
71. M. Lichtenstein, V. Derr, J. Gallagher, J. Molec. Spectroscopy, **20**, 391 (1966).
72. J. E. Becker, S. H. Autler, Phys. Rev., **70**, 300 (1946).
73. J. R. Rusk, J. Chem. Phys., **42**, 493 (1965).
74. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Доклад на VIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Ашхабад, 14—20 апреля 1967 г.
75. А. В. Соколов, Л. И. Строганов, Е. В. Сухонин, Доклад на VIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Ашхабад, 14—20 апреля 1967 г.
76. J. A. Bastin, A. E. Gear, J. O. Jones, H. J. Smith, P. J. Wright, Proc. Roy. Soc., ser. A, **278**, 543 (1964).
77. B. Sanderson, N. Ginzburg, J. Quart. Spectr. and Rad. Transfer, **3**, 435 (1963).
78. A. Adel, Phys. Rev., **71**, 806 (1947).
79. F. Saiedy, Quart. J. Royal Meteorol. Soc., **87**, 578 (1961).

80. R. H. Dicke, R. Beringer, R. L. Kyhl, A. B. Vane, Phys. Rev., **70**, 340 (1946).
81. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 2, 19 (1958).
82. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, IRE Wescon Convention Record, **3**, Pt. 1, 56 (1959).
83. A. W. Straiton, C. W. Tolbert, Proc. IRE, **48**, 898 (1960); Correction: Proc. IRE, **49**, 220 (1961).
84. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Proc. IRE, **49**, 649 (1961).
85. D. J. Wort, Nature, **195**, 1288 (1962).
86. M. Cohn, F. Wentworth, J. Wiltse, Proc. IEEE, **51**, 1227 (1963).
87. L. A. Hoffman, H. J. Wintroub, W. A. Garber, Proc. IEEE, **54**, 449 (1966).
88. S. Y. Chang, J. D. Lester, Proc. IEEE, **54**, 459 (1966).
89. L. Frenkel, D. Woods, Proc. IEEE, **54**, 498 (1966).
90. А. Г. Кисляков, В. Н. Никонов, К. М. Стрежнева, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана (в печати).
91. К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, В. П. Ласточкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 5, 984 (1964).
92. Д. А. Дмитренко, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 2, 165 (1967).
93. В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
94. F. Castel, P. Misme, J. Voge, L'Onde Electr., **38**, 503 (1958).
95. Report of the USA National Committee to the XIII General Assembly of the International Scientific Radio Union, J. Res. NBS, **64D**, 609 (1960).
96. E. S. Rosenblum, Microwave J., **4**, 91 (1961).
97. K. Rawer, J. Res. NBS, **66D**, 375 (1962).
98. J. A. Bastin, Infrared Physics, **6**, 209 (1966).
99. Н. Д. Соколов, УФН, **57**, 905 (1955).
100. Hydrogen Bonding, Symposium on Hydrogen Bonding held at Ljubliana, 1957, ed. by Hadzi, Pergamon Press, 1959.
101. Дж. Пиментал, О. Мак-Клеллан, Водородная связь, изд. Мир, М., 1964.
102. Водородная связь, сб. статей, изд. Наука, М., 1964.
103. M. Jona, Phys. Z., **20**, 14 (1919).
104. L. Sänger, Phys. Z., **31**, 306 (1930).
105. А. Г. Кисляков, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизка, **10**, № 9—10, 1267 (1967)
106. R. Antony, Phys. Rev., **85**, 674 (1952).
107. H. Gebbie, W. Harding, C. Hilsum, A. Pryce, V. Roberts, Proc. Roy. Soc., **A-206**, 87 (1951).
108. W. T. Roach, R. W. Goody, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **84**, № 362 (1958).
109. F. Saiedy, Radiation Comission of IAMAP, Vienna, August, 1961.
110. F. Saiedy, A thesis submitted for the Degree of Doctor of Philosophy at the University of London, March, 1960.
111. K. Bignell, F. Saiedy, P. A. Sheppard, JOSA, **53**, № 4 (1963).
112. К. Я. Кондратьев, И. Я. Бадинов, С. В. Ащеулов, С. Д. Андреев, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **1**, 363 (1965).
113. H. M. Randall, D. M. Dennison, N. Ginzburg, L. R. Weber, Phys. Rev., **52**, 160 (1937).
114. T. K. McCubbin, W. M. Sinton, JOSA, **40**, 537 (1950).
115. V. Roberts, J. Sci. Instr., **29**, 134 (1952).
116. L. Genzel, W. Eckhardt, Zs. Phys., **139**, 578 (1954); **139**, 592 (1954).
117. L. Genzel, Zs. Phys., **144**, 311 (1956).
118. H. Happ, W. Eckhardt, L. Genzel, G. Sperling, R. Weber, Z. Naturforsch., **12A**, 522 (1957).
119. H. Joshinaga, S. Fujita, S. Minami, A. Mitsuishi, R. Oetjen, J. Jamada, JOSA, **48**, 315 (1958).
120. H. A. Gebbie, G. Vanasse, Nature, **178**, 432 (1958).
121. H. A. Gebbie, J. Phys. Radium, **19**, 230 (1958).
122. Н. Г. Ярославский, А. Е. Станевич, Оптика и спектроскопия, **5**, 384 (1958).
123. J. Strong, G. Vanasse, E. Loewenstein, JOSA, **49**, 309 (1959).
124. J. Strong, G. Vanasse, JOSA, **49**, 844 (1959).
125. В. Н. Мурзин, А. И. Демешина, Оптика и спектроскопия, **13**, 826 (1962).
126. Б. П. Козырев, А. В. Мезенов, Оптика и спектроскопия, **15**, 549 (1963); Изв. высш. уч. зав.—Физика, **6**, № 3, 18 (1963).

127. А. Г. Жуков, Оптика и спектроскопия, **14**, 422 (1963).
128. K. H. Breed, W. K. Rivers, A. P. Sheppard, Electronics Letters, **2**, 88 (1966).
129. H. A. Gebbie, Phys. Rev., **107**, 1194 (1957).
130. H. Teissing, P. Caplan, J. Appl. Phys., **27**, 538 (1958).
131. Н. Г. Ярославский, А. Е. Станевич, Оптика и спектроскопия, **6**, 799 (1959); 7, 621 (1959).
132. H. R. L. Lamont, Phys. Rev., **74**, 353 (1948).
133. M. W. P. Strandberg, C. Y. Meng, J. G. Ingersoll, Phys. Rev., **75**, 1524, (1949).
134. J. H. Burkhalter, R. S. Anderson, W. V. Smith, W. Gordy, Phys. Rev., **79**, 651 (1950).
135. R. S. Anderson, W. V. Smith, W. Gordy, Phys. Rev., **82**, 264 (1951); **87**, 561 (1952).
136. B. V. Gokhale, M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., 84, 844 (1951).
137. J. O. Artman, J. P. Gordon, Phys. Rev., **96**, 1237 (1954).
138. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, IRE Trans. Antennas and Propagat., **AP-5**, 239 (1957).
139. R. M. Hill, W. Gordy, Phys. Rev., **93**, 1019 (1954).
140. R. M. Zimmerer, M. Mizushima, Phys. Rev., **121**, 152 (1961).
141. R. S. Anderson, C. M. Johnson, W. Gordy, Phys. Rev., **83**, 1061 (1951).
142. A. B. Grawford, D. C. Hogg, Bell System Techn. J., **35**, 907 (1956).
143. L. F. Stafford, C. W. Tolbert, J. Geophys Res., **68**, 3431 (1963).
144. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Proc. IEEE, **51**, 1754 (1963).
145. M. L. Meeks, A. E. Lilley, J. Geophys. Res., **68**, 1683 (1963).
146. M. R. Sullivan, Atmospheric absorption of radio signals at frequencies of 58 to 62 Kmg, M. S. thesis, Univ. of Texas, Austin, January, 1963.
147. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, 987 (1965).
148. B. R. Bean, R. Abbott, Geofis. pura e appl., **37**, 127 (1957).
149. M. L. Meeks, J. Geophys. Res., **66**, 3749 (1961).
150. В. Д. Кротиков, В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 6, 1044 (1965)
151. Д. А. Дмитренко, В. Д. Кротиков, В. С Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 5, 817 (1964)
152. Л. Н. Бондарь, В. Д. Кротиков, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, **10**, 755 (1965).
153. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв высш уч зав—Радиофизика, **6**, № 6, 1098 (1963).
154. К. С. Станкевич, Радиотехника и электроника, **11**, 445 (1966).
155. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, A. Walker, U. S. Govt. Res. Repts., **37**, 6 (1962).
156. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 8, № 1, 98 (1965).
157. T. F. Howell, J. R. Shakeshaft, Nature, **210**, 1318 (1966).
158. M. J. Medd, D. N. Fort, J. Geophys. Res., **71**, 4749 (1966).
159. Ch. L. Seeger, G. Westerhout, R. G. Conway, T. Hoekema, Bull. Astron. Inst. Neth., **18**, 11 (1965).
160. G. Mainka, Forschungsber. Landes Nordrhein-Westfalen, № 1030 (1961).
161. G. Westerhout, Bull. Astron. Inst. Neth., **14**, 215 (1958).
162. F. Fürstenberg, Z. Astrophysik, **49**, 42 (1960).
163. E. A. Ohm, Bell System Techn. J. **40**, 1065 (1961).
164. W. Altenhoff, P. G. Mezger, H. Strassl, H. Wencker, G. Westerhout, Veröffentl. Univ. Sterniwarte zu Bonn, № 59 (1960).
165. A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astroph. J., **142**, 419 (1965).
166. J. P. Castelli, J. Aarons, C. Ferioli, J. Casey, Planetary Space Sci, **1**, 50 (1959).
167. R. W. De Grasse, D. C. Hogg, E. A. Ohm, H. E. D. Scovil, J. Appl. Phys., **30**, 2013 (1959).
168. D. C. Hogg, R. A. Semplak, Bell System Techn. J., **40**, 1331 (1961).
169. К. С. Станкевич, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 3, № 8, 836 (1967).
170. A. A. Maryott, G. Birnbaum, Phys. Rev., **99**, 1886 (1955); J. Chem. Phys., **32**, 686 (1960).
171. A. Battaglia, A. Gozzini, M. Iannuzzi, Arc. Sci., **14**, fasc. Uniq., 93 (1961).
172. M. Iannuzzi, N. Minnafa, Nuovo Cimento, **30**, 997 (1963).
173. M. Mizushima, J. Chem. Phys., **32**, 691 (1960).
174. L. Galatry, A. Robert, Planet. Space Sci., **11**, 1139 (1963).
175. A. Robert, L'Echo des Recherches, **43**, 3 (1963).

176. A. H. Barrett, J. W. Kuiper, W. B. Lenoir, J. Geophys. Res., **71**, 4723 (1966).
177. J. M. Hollander, I. Perlman, G. T. Seaborg, Rev. Mod. Phys., **25**, 469 (1953).
178. S. L. Miller, A. Javan, C. H. Townes, Phys. Rev., **82**, 454 (1951); **83**, 209 (1951).
179. S. L. Miller, C. H. Townes, Phys. Rev., **90**, 537 (1953).
180. J. Dufay, Ann. d'Astrophys., **5**, 163 (1942).
181. В. И. Дианов-Клоков, Оптика и спектроскопия, **16**, 409 (1964); **17**, 146 (1964); **21**, 413 (1966).
182. J. A. Curcio, U. S. Nav. Res. Lab. Rept. NRL Progr., Oct., 5 (1966).
183. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
184. E. R. Westwater, J. Res. NBS, **69D**, 1201 (1965).
185. Распространение ультракоротких радиоволн, перевод с англ. под ред. Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954.
186. B. R. Bean, Proc. IRE, **50**, Pt. 1, 260 (1962).
187. П. Дебай, Полярные молекулы, ГНТИ, М., 1931.
188. G. Birnbaum, J. Chem. Phys., **21**, 57 (1953).
189. P. Swarup, S. K. Garg, Indian J. Phys. **35**, 28 (1961).
190. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Доклад на VIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Ашхабад, 14—20 апреля 1967 г.
191. P. V. Angus-Leppan, Empire Surv. Rev., **16**, 62 (1961); **16**, 107 (1961); **16**, 166 (1961).
192. J. Aarons, W. R Barron, J. P. Castelli, Proc. IRE, **46**, 325 (1958).
193. L. Essen, K. D. Froome, Proc Phys. Soc., **B-64**, 862 (1951).
194. K. D. Froome, Proc. Phys. Soc., **64**, 833 (1955).
195. J. E. Chamberlain, F. D. Findlay, H. A. Gebbie, Nature, **206**, 886 (1965).
196. S. W. Ryde, JIEE, **93**, 101 (1946).
197. О. Я. Усіков, В. Л Герман, І. Х. Ваксер, Укр. фіз. ж., **6**, 618 (1961).
198. R. G. Medhurst, IEEE Trans. Antennas and Propag., **13**, 550 (1965).
199. M. A. Shah, J. B. Hasted, L. Moore, Brit. J. Appl. Phys., **16**, 1747 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 мая 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 621.371.246

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРОПОСФЕРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

А. Г. Кисляков, К. С. Станкевич

Радиоастрономические методы широко используются при исследованиях условий распространения радиоволн в земной атмосфере и дают, по-видимому, единственную возможность измерения слабого поглощения в атмосфере. К достоинствам этих методов следует отнести также их простоту и удобство в экспериментальном отношении.

Первые измерения атмосферного поглощения в радиодиапазоне с помощью радиотелескопа были выполнены в 1946 г. Дикки и др. [39]. Авторами [39] предложен и применен принципиально новый метод определения поглощения в атмосфере — по ее собственному радиоизлучению. Метод оказался весьма эффективным, и благодаря его использованию было впервые осуществлено разделение поглощения в атмосферных парах воды и в кислороде [26].

Существенный вклад в дальнейшую разработку метода исследования поглощения радиоволн в атмосфере по ее собственному радиоизлучению был сделан Жевакиным, Троицким и Цейтлиным [25, 26]. В этих работах решено уравнение переноса радиоизлучения в атмосфере, вычислена эффективная длина пути атмосферы, найдена связь яркостной температуры атмосферы с коэффициентом поглощения, т. е. построена физическая модель атмосферы, на основе которой была выполнена обоснованная интерпретация экспериментальных данных о радиоизлучении атмосферы.

В течение последних десяти лет в НИРФИ велись интенсивные исследования атмосферного поглощения радиоволн (от миллиметрового до дециметрового диапазонов) радиоастрономическими методами. Целью настоящего обзора является обсуждение современного состояния вопроса, а также анализ теоретических и экспериментальных данных о молекулярном поглощении радиоволн, полученных как в НИРФИ, так и за рубежом.

Обсуждение данных о поглощении радиоволн в гидрометеорах выходит за рамки этой статьи. Все приводимые ниже расчеты, методы измерений и экспериментальные данные относятся к тропосфере, свободной от гидрометеоров.

1. ТЕОРИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ

В атмосфере, свободной от пыли и гидрометеоров, поглощать радиоволны могут молекулы, имеющие электрический или магнитный дипольный момент. К таким молекулам, прежде всего, относятся водяной пар и кислород. Теория молекулярного поглощения в этих газах была построена Ван Флеком в 1947 г. [1, 2]. Первые измерения поглощения, выполненные в сантиметровом диапазоне радиоастрономическими методами, показали хорошее согласие с предсказанными теорией результатами, что явилось в дальнейшем основанием для определения

коэффициента поглощения на любой волне по формулам Ван Флека. Однако проведенные в 1962 г. в НИРФИ исследования поглощения в атмосфере на дециметровых волнах [3] показали серьезное расхождение с теорией. Это обстоятельство послужило поводом для пересмотра теории в части нерезонансного поглощения. К необходимости пересмотра приводили также и некоторые теоретические соображения, изложенные в [3].

Резонансная часть поглощения кислородом была вновь проанализирована Жевакиным и Наумовым в [4], где вместо формы линии по Ван Флеку—Вайскопфу использовалось выражение, полученное из решения кинетического уравнения. Из их расчетов следует, что в пределах резонансных линий различие в структурном факторе несущественно. Частоты линий поглощения кислорода $\nu_{K\pm}$ были вычислены в работах Мицушимы и Хилла [5], прецизионные измерения частот, сделанные Зиммерером и Мицушимой [6], показали точное соответствие данных опыта с теорией.

Для вычисления коэффициента поглощения имеем следующее выражение:

$$\varkappa_к(дб\cdot км^{-1}) = 2{,}62\,\frac{P}{T^3}\,\nu^2 \sum_K (M_{K+}F_{K+} + M_{K-}F_{K-}) \times \times \exp\left(-\frac{2{,}07K(K+1)}{T}\right), \tag{1}$$

где P — давление ($мм$ рт. ст.), T — кинетическая температура (°К), ν — частота ($Гц$),

$$M_{K+} = \frac{K(2K+3)}{K}, \quad M_{K-} = \frac{(K+1)(2K-1)}{K}.$$

В (1) использована форма линии, полученная из решения кинетического уравнения, для которой

$$F_{K\pm} = \frac{4\nu_{K\pm}\Delta\nu}{(\nu_{K\pm}^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2(\Delta\nu)^2}. \tag{2}$$

Резонансное поглощение, вычисленное на основании (1), представлено на рис. 1 пунктиром.

Тинкхем и Стрендберг [7] обратили внимание на то обстоятельство, что для нормального электронного терма молекулы кислорода $^3\Sigma_g$ имеет место тип связи, промежуточный между случаями а) и в) по Хунду. По этой причине вращательный гамильтониан молекулы не точно диагонален в представлении в), и вследствие этого вращательное число K не является «хорошим» квантовым числом. Поэтому во вращательном спектре разрешены переходы с $\Delta K = \pm 2$, частоты которых лежат в субмиллиметровом диапазоне. Вычисление поглощения радиоволн в

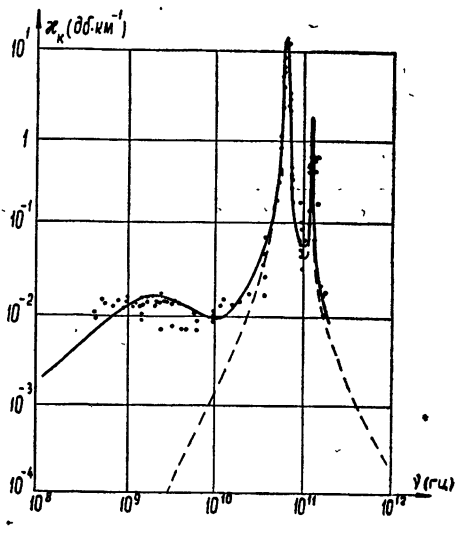


Рис. 1. Суммарный спектр поглощения кислорода в диапазоне волн от миллиметровых до дециметровых. Штриховой линией показано резонансное поглощение. Точками отмечены экспериментальные данные.

спектре молекулярного кислорода, образованном переходами с $\Delta K = \pm 2$, проведено в [8]. Коэффициент поглощения, выраженный в децибелах на километр, при нормальных атмосферных условиях равен

$$\varkappa_к(дб \cdot км^{-1}) = 2{,}68 \cdot 10^{-4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \sum_K \frac{(1/\lambda_{J,J'})^2 \exp[-0{,}0069K(K+1)] \sum_M |S_z|^2}{[(1/\lambda_{J,J'})^2 - (1/\lambda)^2]^2 + 4(1/\lambda)^2(\widetilde{\Delta\nu})^2}. \quad (3)$$

В (3) использована форма линии, полученная из решения кинетического уравнения

$$f(\nu_{J,J'}, \nu) = \frac{\nu\nu_{J,J'}}{\pi} \frac{4\Delta\nu}{(\nu^2_{J,J'} - \nu^2)^2 + 4\nu^2(\Delta\nu)^2}, \quad (4)$$

а значения для сил осцилляторов заимствованы из [7]. Спектр поглощения кислорода, согласно (3), представлен на рис. 2. С практической точки зрения особый интерес представляет поглощение в линиях 14,1 $см^{-1}$, 16,2 $см^{-1}$, 27,8 $см^{-1}$ и 48,9 $см^{-1}$, поскольку они попадают в «окна прозрачности» водяного пара.

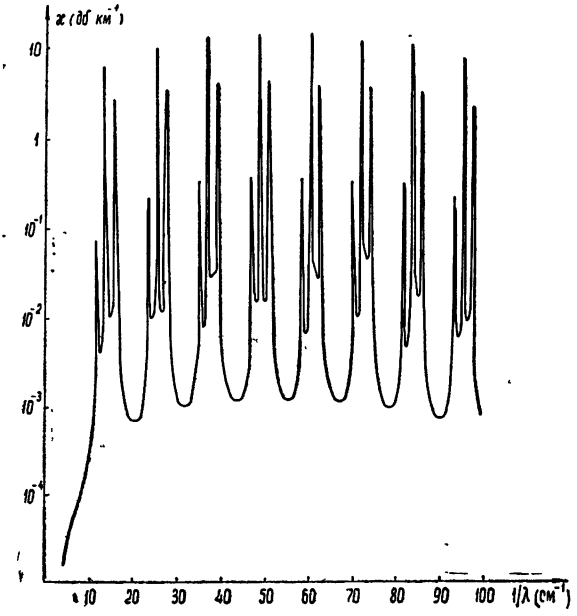


Рис. 2. Спектр поглощения кислорода в субмиллиметровом диапазоне волн.

Важнейший параметр в теории молекулярного поглощения радиоволн — ширина линии — зависит от давления и температуры: $\Delta\nu = \Delta\nu(P, T)$. Вычисление ширины линии, получающейся в результате соударений, приводит к температурной зависимости вида $T^{-\alpha}$ со значениями показателя $0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и линейной зависимости от давления. В случае кислорода важнейшими механизмами уширения являются квадруполь-квадрупольное ($\alpha = 0{,}75$) и вращательно-резонансное ($\alpha = 1$) взаимодействия. Поэтому показатель температурной зависимости следует ожидать в пределах $0{,}75 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Хилл и Гарди [10] измерили ширину шести линий для $K \leqslant 9$ при температурах 90°K и 300°K и нашли, что для каждого уровня α имеет свою величину, незначительно отличающуюся от среднего значения $\alpha = 0{,}85$.

Непосредственные измерения ширин линий кислорода невозможно выполнить при нормальном давлении, поскольку отдельные линии не разрешаются. По этой причине экспериментальные исследования производились при давлениях в несколько *мм* рт. ст. и при этом была обнаружена линейная зависимость ширины линии от давления. Однако экстраполяция линейной зависимости до нормального давления приводит к слишком завышенной величине полуширины линии, которая противоречит экспериментальным данным о поглощении радиоволн в атмосфере. Толберт и Стрейтон [11] по измерениям поглощения на часто-

тах 58 — 62 *Гц* в камере и по ослаблению излучения Солнца в атмосфере на различных высотах установили, что ширина нелинейно зависивисит от давления и равна

$$\Delta\nu = 1{,}9\cdot 10^{-3}P\left(\frac{760}{760+P}\right)\left(\frac{290}{T}\right)^{0{,}9} \ (Гц). \tag{5}$$

Фалконе [12], исходя из данных об эффективной температуре радиоизлучения атмосферы на частотах 15, 17 и 35 *Гц*, показал, что вычисленная яркостная температура неба согласуется с измеренной, если

$$\Delta\nu = 3{,}146\cdot 10^{-3}\frac{P}{T^{0{,}85}} \ (см^{-1}). \tag{6}$$

При нормальных атмосферных условиях из (5) и (6) получаются хорошо согласующиеся результаты: $\Delta\nu = 0{,}024\ см^{-1}$ и $\Delta\nu = 0{,}025\ см^{-1}$, вместо $\Delta\nu = 0{,}02\ см^{-1}$, как принималось ранее в расчетах. Для линии 118 *Гц* ширина измерялась в камере, в 100% кислороде [13] и равна $\Delta\nu = 1{,}45$ *Гц*.

Пересчет, проведенный в [15] для нормальных атмосферных условий с учетом нерезонансного поглощения, приводит к значению $\Delta\nu = 1{,}3$ *Гц*. В [14] был предложен возможный механизм нерезонансного поглощения в молекулярном кислороде; на его основе в [15] проведены подробные вычисления. Механизм поглощения заключается в следующем. В нормальном состоянии молекула кислорода обладает средним дипольным моментом μ, который на расстоянии $\boldsymbol{R}$ производит магнитное поле $\boldsymbol{H}(R)$ Перед моментом соударения в магнитном поле происходит зеемановское расщепление уровней, которое приводит к смещению частоты перехода ν_K, если возмущение носит адиабатический характер:

$$\nu = \nu_K + \frac{1}{2\pi\hbar}(g_{J_2} - g_{J_1})MBH \text{ для переходов с } \Delta M = 0, \tag{7}$$

$$\nu = \nu_K + \frac{1}{2\pi\hbar}[(g_{J_2} - g_{J_1})M_2 \pm g_{J_1}]BH \text{ для переходов с } \Delta M = \pm 1$$

или $\nu = \nu_K + \nu^A$. Здесь были использованы следующие обозначения: $\hbar$ — постоянная Планка, B — магнетон Бора, g_{J_i} — молекулярный фактор спектроскопического расщепления для уровня J_i, M — магнитное квантовое число.

Предполагая, что соударения сильные и носят хаотический характер, можно найти с помощью уравнения для матрицы плотности средний магнитный момент системы двух сталкивающихся молекул $\langle\mu\rangle$ и соответствующий коэффициент поглощения

$$\varkappa = -\frac{4\pi}{c}\frac{\mathrm{Re}\langle\mu\rangle\dot{F}^x}{|F|^2}, \tag{8}$$

где F — амплитуда поля.

После соответствующих вычислений выражение для $\varkappa_K$ принимает вид

$$\varkappa_K = 10^6(\lg e)\frac{8\pi}{3}\frac{N}{kTc}\frac{\delta^2}{\tau}\sum_K \mu^2(K)\omega_0^A(K)\rho_{22}^0(K)\omega_K \times \tag{9}$$

$$\times \frac{2\omega^2\left|(\omega^2-\omega_K^2)+\tau^{-2}\right|}{(\omega_K^2-\omega^2)^2+2\tau^{-2}(\omega_K^2+\omega^2)+\tau^{-4}},$$

из которого следует, что при $\nu \gg \max\{\nu_K, 1/\tau\}$ линия поглощения имеет форму дебаевского типа, т. е.

$$\varkappa_к \sim \frac{\nu^2\tau^{-1}}{\nu^2+\tau^{-2}}. \qquad (10)$$

Если $\nu_K \gg \max\{\nu, \tau^{-1}\}$, то поглощение в низкочастотном конце спектра изменяется пропорционально ν^2.

Полученные формулы (9), (10) описывают нерезонансное поглощение в миллиметровом диапазоне. Поглощение на дециметровых и сантиметровых волнах происходит за счет переходов между уровнями зеемановской структуры, и соответствующий коэффициент поглощения равен

$$\varkappa_к(дб\cdot км^{-1}) = 0{,}035\,\frac{\nu\Delta\nu_s}{\nu^2+(\Delta\nu_s)^2}. \qquad (11)$$

Рассчитанные по формуле (11) значения $\varkappa_к$ находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными при $\Delta\nu_s \sim 1{,}4$ *Гц*. Общая картина поглощения в молекулярном кислороде в атмосфере представлена на рис. 1.

Хорошо известно, что для приведения в соответствие вычисленных по теории Ван Флека [2, 18] значений коэффициента поглощения радиоволн водяным паром с его величинами, полученными экспериментально в диапазоне миллиметровых и сантиметровых волн, приходится увеличивать примерно в 5 раз нерезонансное поглощение. В [22] высказывалось предположение, что объяснить наблюдаемое в миллиметровом диапазоне поглощение можно, если принять ширину линии $\Delta\nu=0{,}27\ см^{-1}$ вместо $\Delta\nu = 0{,}1\ см^{-1}$. Однако подобное объяснение неприемлемо, поскольку детальные расчеты Бенедикта и Каплана [16, 17] ширин линий водяного пара, получающихся в результате взаимодействия при соударениях с молекулами O_2, N_2 и H_2O, показали, что максимальная ширина линии H_2O в атмосфере не превосходит 0,098 $см^{-1}$. Экспериментальные данные подтверждают правильность этих расчетов (с точностью 10 — 20%).

В работах С. А. Жевакина, А. П. Наумова [19, 20] была использована форма линии, полученная из решения кинетического уравнения, что привело к уменьшению указанного расхождения в два раза. Основываясь на этой форме линии, в [21] получена асимптотическая формула коэффициента поглощения, удобная для практического применения; подобные выражения для сравнения приведены и для формы линии по Ван Флеку—Вайскопфу в [18].

Молекула водяного пара представляет собой, как известно, асимметричный волчок, спектр которого состоит из 870 линий. Однако для диапазона волн длиннее двух миллиметров, исключая $\lambda = 1{,}35$ *см*, поглощение полностью определяется первыми (в порядке возрастания волновых чисел) 150 линиями, из них 88% поглощения дают 26 линий и 7 линий ($2_2 - 3_{-2}$; $3_3 - 4_{-1}$; $1_{-1} - 1_1$; $2_{-2} - 2_0$; $3_{-1} - 3_1$; $1_{-1} - 2_{-1}$; $2_{-1} - 3_{-3}$) — 67,7%, в том числе на переход ($1_{-1} - 1_1$) приходится 37,4%. Все эффективно действующие линии имеют небольшие квантовые числа и для них среднее значение ширины равно $\Delta\nu_{ij} = 0{,}092\ см^{-1}$, а зависимость ее от температуры и давления дается в виде [17]

$$\Delta\nu_{н} = (\Delta\nu)_{ij}\frac{P}{P_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n_{ij}}, \tag{12}$$

где $P_0 = 760$ *мм* рт. ст. и $T_0 = 300°$K, $\bar{n}_{ij} = 0{,}65$. Для линии $\lambda = 1{,}35$ *см* зависимость от метеопараметров приведена в [18]:

$$\Delta\nu = 2{,}62\cdot 10^{9}\frac{P/760}{(T/318)^{0{,}625}}[1 + 0{,}0046\rho]\ (гц).$$

На волнах, больших $\lambda = 2$ *мм*, коэффициент поглощения состоит из двух частей: первая описывает резонансное поглощение в линии $\lambda = 1{,}35$ *см*, вторая — нерезонансное за счет переходов на частотах, далеких от основных частот линий субмиллиметрового диапазона:

$$\varkappa_{в}(дб\cdot км^{-1}) = 1{,}52\cdot 10^{-6}\frac{\rho\exp(-644/T)}{T^{5/2}}\times \tag{13}$$

$$\times\frac{4\nu^2\nu_0^2\Delta\nu}{(\nu_0^2-\nu^2)^2+4\nu^2(\Delta\nu)^2} + 1{,}15\cdot 10^{-27}\frac{\rho}{T^{5/2}}\nu^2(\Delta\nu)_{н},$$

где ρ — абсолютная влажность ($г\cdot м^{-3}$), $\nu_0 = 22{,}235$ *Гец*. В [21] рассмотрен также нерезонансный механизм поглощения, аналогичный изложенному выше для кислорода. Поскольку молекулы H_2O обладают постоянным электрическим дипольным моментом, то при соударениях возникает квадратичное штарковское взаимодействие, смещающее уровни энергии, что приводит к дополнительному поглощению в системе из двух сталкивающихся молекул.

Соответствующая такому взаимодействию форма линии имеет вид

$$\varkappa_{нв}\sim\frac{\omega(\omega_{ij}+\omega)}{(\omega_{ij}+\omega)^2+\tau^{-2}} - \frac{\omega(\omega-\omega_{ij})}{(\omega_{ij}-\omega)^2+\tau^{-2}}. \tag{14}$$

При $\omega \gg \omega_{ij}$ величина $\varkappa_{нв}\to 0$, и, следовательно, поглощение в субмиллиметровом диапазоне не изменится; при $\omega \ll \omega_{ij}$ $\varkappa_{нв}\sim\omega^2$, т. е. частотная зависимость аналогична второму члену (13).

Оценки показывают, что диполь-дипольное взаимодействие увеличивает нерезонансное поглощение примерно на 10%.

Выше рассматривалось поглощение радиоволн только кислородом и парами воды. Принято считать, что суммарное поглощение всех остальных газов атмосферы (NO, NO_2, N_2O, SO_2, O_3 и др.) много меньше, чем суммарное поглощение молекул O_2 и H_2O. Имеется ряд экспериментальных и теоретических работ [44, 45], в которых показано, что коэффициент поглощения воздуха на уровне моря действительно определяется поглощением в кислороде и парах воды. Однако при достаточно большой высоте над уровнем моря решающим может оказаться влияние газов типа NO и O_3, концентрация которых растет с увеличением высоты. Как показано в работе [46], в высокогорных условиях поглощение в линии NO оказывается уже сравнимым с поглощением в кислороде. Вопрос о поглощении радиоволн в атмосферных примесях нуждается в дальнейшей теоретической и экспериментальной разработке.

2. РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ И ПОЛНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В АТМОСФЕРЕ

Радиоизлучение атмосферы в интересующем нас диапазоне волн определяется в основном тепловым излучением газов, поглощающих радиоволны. Зная высотное распределение концентрации этих газов, а также зависимость температуры воздуха от высоты, можно вычислить

яркостную температуру небосвода, обусловленную собственным радиоизлучением атмосферы. Однако решение этой задачи в общем виде — довольно сложное дело. Действительно, интенсивность теплового радиоизлучения атмосферы на частоте ν I_ν, отнесенная к единичному телесному углу, может быть найдена из уравнения переноса излучения для неоднородной изотропной среды [23, 24]:

$$n^2 \frac{d}{dl}\left(\frac{I_\nu}{n^2}\right) = \varkappa \frac{kT}{\lambda^2} - \varkappa I_\nu. \tag{15}$$

Здесь n — показатель преломления воздуха, l — длина пути.

В сферически слоистой атмосфере величины $\varkappa$, T и n являются функциями только высоты над уровнем моря, при этом [25]

$$dl = \left[1 - \left(\frac{n(0)r_0}{n(h)r}\right)^2 \sin^2\theta\right]^{-1/2} dh, \tag{16}$$

где r_0 — радиус Земли, r — расстояние от центра Земли до рассматриваемого элемента dl и θ — зенитный угол элемента dl из точки наблюдения. Учитывая, что зависимость $\varkappa$, T и n от высоты довольно сложна, нетрудно убедиться, что интегрирование (15) можно произвести только численными методами. В некоторых случаях, представляющих значительный практический интерес, удается найти решение (15) в аналитическом виде. При достаточно малых зенитных углах ($\theta \leqslant 85°$) можно пользоваться плоско-слоистой идеализацией атмосферы [25] и пренебречь рефракционными явлениями. В этом случае, считая $dn/dh = 0$, $r \equiv r_0$, из (16) получаем $dl = dh/\cos\theta$. Интенсивность радиоизлучения атмосферы, приходящего в направлении θ к уровню моря, равна

$$I_\nu^0 = \frac{2k}{\lambda^2} \int_0^\infty \varkappa T(h) \exp\left(-\int_0^l \varkappa dl\right) dl. \tag{17}$$

Выражение (17) можно переписать в виде

$$I_\nu^0 = \frac{2k}{\lambda^2} T_{ср}\left[1 - \exp\left(-\int_0^\infty \varkappa dl\right)\right], \tag{18}$$

где

$$T_{ср} = \frac{\int_0^\infty \varkappa T \exp\left(-\int_0^l \varkappa dl\right) dl}{\int_0^\infty \varkappa \exp\left(-\int_0^l \varkappa dl\right) dl}. \tag{19}$$

Таким образом, введенная величина $T_{ср}$ [26] имеет смысл температуры равномерно нагретой атмосферы, дающей в данном направлении θ то же излучение, что и атмосфера с действительным распределением температуры по высоте. Интеграл $\gamma = \int_0^\infty \varkappa dl$ есть полное поглощение на луче зрения в неперах.

Учитывая, что $I_\nu^0 = \frac{2k}{\lambda^2} T_{эфф}$, можно получить выражение для эффективной температуры радиоизлучения атмосферы:

$$T_{эфф} = T_{ср}(1 - e^{-\gamma}). \tag{20}$$

Как показано в работах [25, 27, 28], зависимости коэффициентов поглощения в кислороде и атмосферных парах воды от высоты можно считать (в пределах тропосферы) экспоненциальными, т. е. $\varkappa_к = \varkappa_{0к} = \exp(-h/H_к)$ и $\varkappa_в = \varkappa_{0в}\exp(-h/H_в)$, где $\varkappa_к$ и $\varkappa_в$ — коэффициенты поглощения кислорода и паров воды соответственно, а $H_к$ и $H_в$ — эффективные высоты кислорода и паров воды. Зависимость температуры от высоты в пределах тропосферы можно считать линейной, т. е. $T(h) = T_0 - bh$, где T_0 — температура в приземном слое воздуха и b — градиент температуры. Воспользовавшись приведенными выше зависимостями $\varkappa(h)$ и $T(h)$ и выражением (19), можно получить [29]

$$T_{ср} = T_0 - bH_{эфф}\frac{s(\gamma)}{e^{\gamma}-1}, \tag{21}$$

где $s(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma^k}{k\cdot k!}$. Подставляя (21) в (20), находим выражение для яркостной температуры атмосферы в направлении θ:

$$T_{эфф} = T_0(1 - e^{-\gamma}) - bH_{эфф}\ s(\gamma)e^{-\gamma}. \tag{22}$$

Соотношение (22) может быть использовано в тех случаях, когда атмосферное поглощение определяется какой-либо одной из газовых компонент—либо кислородом, либо парами воды. Однако обобщение соотношения (22) на случай, когда поглощение в O_2 и H_2O сравнимо, не представляет большого труда [28].

В работах [26, 30] получены выражения для $T_{эфф}$ при тех же идеализациях (плоско-слоистая атмосфера, линейное убывание температуры с высотой и экспоненциальная зависимость коэффициента поглощения от высоты), но при дополнительном условии малости поглощения на луче зрения. Как нетрудно видеть из (22), при $\gamma \ll 1$ $T_{эфф} \simeq (T_0 - bH_{эфф})\gamma$.

Более точный расчет яркостной температуры атмосферы может быть при необходимости сделан на основании данных работы [28] и соотношения (20). В [28] рассчитано с помощью электронной вычислительной машины отношение $T_{ср}/T_0$ в зависимости от γ при следующих идеализациях:

$$T(h) = T_0[1 - az/(1 + z^2)]; \tag{23}$$

$$\varkappa(h) = \varkappa_0\exp(-pz)\left\{1 - \mu\left[\operatorname{arctg}\left(z - \frac{a}{2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{a}{2}\right]\right\}^{m_1}\times$$
$$\times(1 + z^2)^{m_2}(1 - az + z^2)^{-q}, \tag{24}$$

где $z = h/h_0$, h_0 — некоторая характеристическая высота распределения температуры с высотой, a — некоторый коэффициент, $\mu = a^2h_0/4H_0$, $H_0 = f_вT_0/g$ ($f_в$ — газовая постоянная, g — ускорение силы тяжести), а параметры p, m_1, m_2, q различны для паров воды и кислорода; значения их приведены в таблице 1.

На рис. 3 представлены графики зависимости $T_{ср}/T_0$ от γ, полученные в [28] для плоско-слоистой атмосферы при $h_0 = 16$ км и $a = 0{,}5$, что соответствует условиям летних месяцев. Там же построена для сравнения кривая по формуле (21) для кислорода. Как видно из графика рис. 3, эта кривая довольно близка к рассчитанной по более точным

Таблица 1

Параметр \ Тип поглощения	Пары воды	Кислород
m_1	2	2
m_2	2	5/2
p	$2h_0/H_0 + h_0 a$	$2h_0/H_0$
q	$ah_0/H_0 + 2$	$ah_0/H_0 + 5/2$

соотношениям (24). В работе [28] содержатся также некоторые данные о зависимости $T_{ср}(h)$. Заметим, что при достаточно малом атмосферном поглощении существенный вклад в яркостную температуру небосвода может дать космическое радиоизлучение (например, реликтовое [31, 32]). В этом случае

$$T_{эфф} = T_{ср}(1 - e^{-\gamma}) + T_p e^{-\gamma}, \qquad (25)$$

где T_p — эффективная температура космического радиоизлучения.

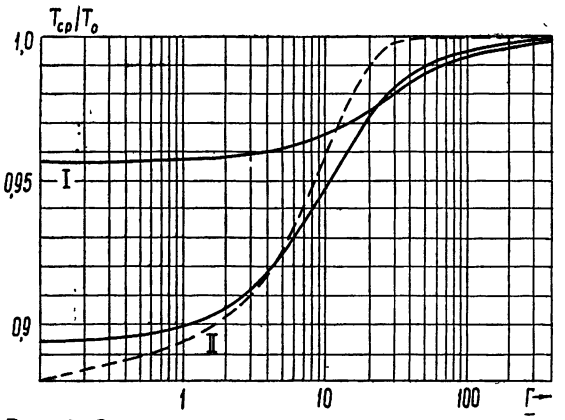


Рис. 3. Зависимость средней температуры атмосферы от поглощения на луче зрения.

Таким образом, яркостная температура небосвода определяется, в общем случае, средней температурой атмосферы, полным поглощением на луче зрения и интенсивностью космического радиоизлучения.

Перейдем теперь к рассмотрению полного поглощения на луче зрения γ. Нетрудно видеть, что при экспоненциальной зависимости $\varkappa(h)$ и плоско-слоистой идеализации атмосферы $\gamma = \varkappa_0 H \sec\theta$. Эта идеализация вполне приемлема, когда речь идет о поглощении в парах воды [27, 28], при этом с достаточной степенью точности можно считать* $H = H_в \simeq 1{,}5$ *км*. Что касается кислорода, то отклонение зависимости $\varkappa_к(h)$ от экспоненциальной настолько существенно, что приходится вводить эквивалентную длину пути атмосферы — ЭДП. Если $\varkappa_к(h) = \varkappa_0\varphi(h)$, то ЭДП $= \int_0^\infty \varphi(h)dh$. Величина ЭДП определяет полное поглощение на луче зрения, но зависимость $\varkappa_к(h)$, если ее аппроксимировать экспонентой, характеризуется $H_к <$ ЭДП. Так, например, в [28] показано, что $H_к \simeq 4$ *км*, в то время как ЭДП $\simeq 5{,}3$ *км*. Аналогичные выводы получены в [27].

Следует отметить, что как $H_к$, так и ЭДП являются функциями температуры T_0 и высоты над уровнем моря. Основная причина зависимости ЭДП от T_0 заключается в том, что показатель барометрической

* Для частот вне резонансных линий.

формулы зависит от T_0. Согласно [28], ЭДП$\simeq$[5,3+0,022(T_0—290°)] (*км*), в работе [33] получено, что ЭДП$\simeq$[4,9+0,026(T_0—290°)] (*км*)*. Данные о зависимости ЭДП от высоты над уровнем моря имеются в [28].

С точки зрения практики интересно также знать зависимость $\gamma(h)$. Кроме того, радиоастрономическими методами измеряется обычно именно эта величина. Как показано в [28], зависимость $\gamma(h)$ также можно считать экспоненциальной с характеристической высотой $H_к = 4{,}5 \div 4{,}7$ *км*. Таким образом, полное поглощение в атмосфере убывает с высотой заметно быстрее, чем сам коэффициент поглощения. Это обстоятельство важно при экспериментальном определении ЭДП по зависимости $\gamma(h)$, а также при расчете коэффициентов поглощения по величине γ.

Несколько слов о частотной зависимости ЭДП атмосферы. Этот вопрос достаточно подробно изучен в работах [4, 27, 34]. В области резонансных линий ЭДП кислорода оказывается сильно зависящей от частоты и может заключаться в пределах от 8 до 21 *км* [4]. Вне резонансных линий ЭДП кислорода практически не зависит от частоты**. Следует отметить, что теоретические оценки ЭДП кислорода в дециметровом диапазоне волн являются пока недостаточно надежными [15].

Эффективная высота атмосферных паров воды также практически постоянна во всем диапазоне частот вне резонансных линий. Здесь нужно отметить два немаловажных обстоятельства. Во-первых, вычисленная в [27, 28] эффективная высота паров H_2O соответствует экспоненциальному распределению удельной влажности с высотой. В действительности распределение паров воды может значительно отличаться от экспоненциального, кроме того, его характеристическая высота испытывает значительные колебания [35]. Представление о величине возможных отклонений эффективной высоты паров воды от средней дают результаты работы [33], где по данным шаров-зондов найдено, что $H_в = 1{,}8 \pm 0{,}3$ *км*. Во-вторых, как показано в [36, 37], значительная часть поглощения в парах H_2O может быть обусловлена поглощением в димерах, а эффективная высота димеров H_2O существенно меньше, чем у мономеров.

Заметим в заключение этого раздела, что все приведенные выше данные об ЭДП и эффективных высотах атмосферы в поглощении получены для плоско-слоистой атмосферы. При зенитных углах $\theta > 85°$ становятся существенными сферичность Земли и рефракция; поэтому для расчета поглощения на луче зрения необходимо пользоваться результатами работ [25, 38], где рассчитана ЭДП сферически-слоистой атмосферы. Результаты расчета [38] приведены в таблице 2. Что касается радиоизлучения атмосферы в направлениях, близких к горизонту, то оно может быть приближенно рассчитано по формуле (20) и данным таблицы 2.

3. РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

Наиболее часто применяется метод, заключающийся в измерении интенсивности радиоизлучения какого-либо внеземного источника при его различных зенитных расстояниях***. Нетрудно убедиться, что полное поглощение в атмосфере в вертикальном направлении Γ (в дальнейшем оно для краткости будет называться полным вертикальным поглощением) может быть найдено из соотношения

* Эти соотношения также верны для диапазона частот вне резонансных линий.
** Согласно [27], частотные вариации ЭДП вне резонанса составляют около 2%.
*** В астрономии он получил название «долгий метод Бугера».

Таблица 2

Эффективные длины (в километрах) для значений абсолютной влажности 0; 10 и 20 $г \cdot м^{-3}$ и интервала температур на поверхности Земли 260—300°К. Волны миллиметрового диапазона

θ (град) / t_0(°К)	$l_{эфф}(e_0=0\ г \cdot м^{-3})$					$l_{эфф}(e_0=10\ г \cdot м^{-3})$					$l_{эфф}(e_0=20\ г \cdot м^{-3})$				
	300	290	280	270	260	300	290	280	270	260	300	290	280	270	260
80	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2	28,2
81	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2	31,2
82	34,8	34,8	34,8	34,8	34,8	34,8	34,8	34,9	34,9	34,9	34,9	34,9	34,9	34,9	34,9
83	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,6	39,6
84	45,3	45,3	45,3	45,3	45,3	45,4	45,4	45,4	45,5	45,5	45,5	45,5	45,5	45,6	45,6
85	53,2	53,2	53,3	53,3	53,3	53,4	53,4	53,4	53,5	53,5	53,5	53,6	53,6	53,7	53,7
86	64,3	64,3	64,4	64,4	64,4	64,6	64,6	64,7	64,7	64,8	64,9	64,9	65,0	64,1	65,2
87	80,6	80,7	80,8	80,8	80,9	81,2	81,3	81,4	81,5	81,6	81,7	81,8	82,0	82,2	82,3
88	106,4	106,5	106,6	106,8	106,9	107,6	107,8	108,1	108,3	108,6	108,9	109,2	109,6	110,0	110,4
88°30′	125,1	125,3	125,5	125,7	125,9	127,1	127,5	127,9	128,3	128,7	129,3	129,8	130,4	131,0	131,8
89	151,7	152,0	152,3	152,6	152,9	155,0	155,5	156,1	156,8	157,5	158,5	159,3	160,3	161,3	162,5
89°30′	188,1	188,6	189,1	189,7	190,3	194,2	195,2	196,3	197,5	198,8	201,0	202,6	204,4	206,4	208,7
90	224,6	225,4	226,2	227,1	299,1	235,4	237,1	239,0	241,2	243,6	248,1	251,2	254,7	258,7	263,5

$$\Gamma = \frac{1}{\sec\theta_2 - \sec\theta_1} \ln\frac{d_1}{d_2},$$

где d_1 и d_2 — отклонения на выходе радиометра, соответствующие сигналам от источника при зенитных расстояниях θ_1 и θ_2. Существенным недостатком этого метода является его большая продолжительность. За время измерения поглощения атмосферные условия могут существенно измениться, что трудно учесть при обработке результатов измерений.

Существует ряд способов определения атмосферного поглощения, основанных на измерениях теплового радиоизлучения атмосферы. Эти методы позволяют достаточно оперативно определить атмосферное поглощение, так что с их помощью можно получить материал о его быстрых изменениях. Измерение поглощения в атмосфере по ее собственному радиоизлучению впервые осуществлено авторами [39]. Дальнейшее развитие эти методы исследования получили в работах [26, 30, 40, 41].

Полное вертикальное поглощение в атмосфере Γ может быть определено путем измерений яркостной температуры атмосферы в двух направлениях относительно некоторой опорной области с температурой T_0. Как показано в [41],

$$\Gamma = \frac{\ln n}{\sec\theta_2 - \sec\theta_1} + \Delta, \qquad (26)$$

где $n = (d_0 - d_1)/(d_0 - d_2)$, а d_0, d_1 и d_2 — показания радиометра при антенне*, направленной на опорную область и участки небосвода с зенитными углами θ_1 и θ_2. Второй член в (26) является поправкой на неизотермичность атмосферы. Величина ее зависит от b, $H_{эфф}$ и γ. Поэтому поглощение находят из (26) методом последовательных приближений [41]. Основной источник ошибок описываемого метода измерения заключается в том, что при вращении антенны радиотелескопа изменяется доля излучения, идущего в боковые и задние лепестки антенны, и этот эффект трудно учесть. В работе [41] рассмотрено влияние упомянутого эффекта на точность измерения Γ и даны некоторые практические рекомендации. Заметим, что формула (26) при $\Gamma \ll 1$ несколько упрощается; различные ее модификации можно найти в работах, посвященных экспериментальным исследованиям атмосферного поглощения (например, в [14, 26, 30] и др.).

Второй метод определения Γ по собственному радиоизлучению атмосферы основан на абсолютных измерениях яркостной температуры небосвода. Если вторым членом в (25) можно пренебречь, то, очевидно,

$$\gamma = \ln\left(1 - \frac{T_{эфф}}{T_0}\right) - \ln\left(1 - \frac{bH_{эфф}}{T_0}\, s(\gamma)\right). \qquad (27)$$

В случае, если космическое радиоизлучение сравнимо по своей интенсивности с собственным излучением атмосферы и изотропно, поглощение можно определить, измеряя яркостную температуру небосвода в двух направлениях [32, 41]. Основная трудность этого метода — абсолютные измерения яркостной температуры. Наиболее эффективным, по-видимому, является способ, при котором радиоизлучение небосвода сравнивается с тепловым излучением двух эталонных дисков, имеющих различные температуры [32]. Этот метод аналогичен методу «искусственной Луны» [42, 43] и ему присущи все недостатки последнего.

* Направленность антенны должна быть довольно высокой [41].

В работе [41] предложен еще один метод определения поглощения в атмосфере по ее собственному радиоизлучению. Измерение производится путем сканирования антенного луча радиотелескопа по высоте и регистрации изменения величины сигнала с частотой сканирования при вращении антенны по высоте. Зенитный угол θ_m, при котором сигнал с частотой сканирования максимален, связан с величиной Γ простым соотношением $\Gamma = \cos\theta_m(2 + \operatorname{ctg}^2\theta_m)$. Метод сканирования может быть использован при условии надлежащей экспериментальной проверки в миллиметровом диапазоне волн (при $0{,}15 \leqslant \Gamma \leqslant 2$).

В заключение необходимо отметить один общий недостаток всех методов измерения поглощения в атмосфере по ее собственному радиоизлучению: они основаны на использовании некоторой физической модели атмосферы (см. предыдущий раздел). Реальные условия в атмосфере могут существенно отличаться от принятых, и это вызовет неизбежные ошибки. Поэтому полностью пренебрегать методом Бугера нельзя, он должен по возможности использоваться для проведения контрольных измерений.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С целью более полной проверки теории молекулярного поглощения радиоволн в атмосфере, а также для решения ряда практических задач, в НИРФИ проведены детальные измерения поглощения в дециметровом, сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн. Вследствие малости атмосферного поглощения в первых двух диапазонах исследования на этих волнах могли вестись только радиоастрономическими методами. Поглощение миллиметровых волн измерялось как радиоастрономическими, так и другими методами.

Возможность подобных исследований появилась лишь в последние годы благодаря созданию в НИРФИ чувствительной радиоастрономической аппаратуры, а также благодаря разработке более совершенных способов измерения поглощения и методов интерпретации экспериментальных данных. Ниже изложены экспериментальные данные об атмосферном поглощении, полученные в НИРФИ, а также пересмотрены некоторые опубликованные ранее материалы в связи с появившимися новыми возможностями их интерпретации. Сопоставление этих данных с теоретическими, а также с результатами измерений других авторов проводится в разделе 5.

Как известно (см. предыдущий раздел), радиоастрономическими методами определяется полное поглощение на луче зрения. Чтобы вычислить затем коэффициент поглощения, необходимо знать ЭДП атмосферы. Различные теоретические оценки величины ЭДП кислорода, проводившиеся как у нас в стране, так и за рубежом, давали значение ЭДП в пределах от ~ 1 *км* до 11 *км*. Несостоятельность некоторых из оценок была показана авторами [4], которые подтвердили правильность расчета ЭДП кислорода в работе [25], где получено $H_к = 5{,}3$ *км*.

Первые экспериментальные измерения эффективных высот и ЭДП атмосферы были выполнены в НИРФИ. Измерения полного вертикального поглощения в атмосфере с различных высот над уровнем моря на волнах 10 *см* и 4,1 *мм* позволили установить [47, 54], что эффективные высоты кислорода, характеризующие скорость убывания полного поглощения в атмосфере с высотой, на этих волнах равны соответственно $(4 \pm 0{,}4)$ *км* и $(4{,}3 \pm 0{,}3)$ *км*. Этими значениями эффективной высоты можно пользоваться для вычисления полного поглощения на луче зрения при достаточно малых зенитных углах ($\theta \leqslant 85°$). При бо́льших зенитных углах необходим учет рефракции. Измерения яркостной темпе-

ратуры атмосферы вблизи горизонта (при углах места $<5°$) проводились в [38]. В результате измерений найдена зависимость эффективной длины пути в поглощающей атмосфере от угла места; эта зависимость удовлетворительно согласуется с данными теоретического расчета (см. таблицу 2 в разделе 2).

Эффективная высота атмосферных паров воды определена по измерениям атмосферного поглощения на волне 4,1 *мм* [54], а также в диапазоне волн 1,9 — 2,8 *мм* [55]. В работе [54] по данным о полном вертикальном поглощении в атмосфере получено, что $H_в = (1{,}75 \pm 0{,}1)$ *км*. Результаты работы [55] вместе с данными о поглощении радиоволн диапазона 1,36 — 3 *мм* на уровне моря [56] позволили получить $H_в \simeq 1{,}5$ *км*. Различные теоретические оценки эффективной высоты паров H_2O приводят к значениям $H_в \simeq 1{,}5 \div 2$ *км* (см. раздел 2); наиболее надежным, как следует из результатов этого раздела, является значение $H_в = 1{,}5$ *км*.

При расчете коэффициента поглощения паров воды мы будем использовать $H_в = 1{,}5$ *км*. При определении коэффициента поглощения кислорода по полному вертикальному поглощению необходимо учитывать то обстоятельство, что величина ЭДП кислорода, как показано в разделе 2 и работе [28], существенно больше эффективной высоты, измеренной по полному вертикальному поглощению. Нормальным атмосферным условиям соответствует ЭДП $\simeq 5{,}3$ *км**.

Перейдем теперь к результатам измерений поглощения. В диапазоне волн от 1,8 *см* до 60 *см* применялась радиометрическая аппаратура с чувствительностью не хуже 1,5°К при постоянной времени 1 *сек*. Чувствительность радиометров миллиметрового диапазона составляла около 2 — 4°К при той же постоянной времени. В качестве антенных систем использовались параболические рефлекторы. Диаметры использовавшихся антенн приведены в таблице 3. На волнах 16,3; 18,9; 20; 30,6; 31,2; 40,5 и 58,6 *см* проводились измерения с антенной высокой разрешающей способности. Каждой из перечисленных волн отвечает следующая ширина диаграммы направленности: 24′, 30′, 35′, 40′, 38′, 52′ и 72′. Следует отметить, что использовавшиеся антенные системы обычно сильно недооблучались с целью уменьшения уровня боковых и задних лепестков.

Таблица 3

λ (*см*)	0,19 — 0,6	1,8 — 2,7	3 — 20	25 — 60	75
D (*м*)	1	1,5	4	8	15

Подавляющее большинство данных об атмосферном поглощении получено путем относительных, а также абсолютных измерений собственного радиоизлучения атмосферы. Но практически каждый цикл измерений сопровождался контрольными наблюдениями затухания солнечного** радиоизлучения в атмосфере с целью исключения возможных систематических ошибок.

Результаты измерений атмосферного поглощения суммированы в таблицах 4 и 5. Выделение компоненты поглощения, обусловленной водяным паром, производилось методом, изложенным в [26]. В диапа-

* В дециметровом диапазоне волн ЭДП, по-видимому, несколько меньше. В дальнейшем для этих волн принято ЭДП = 4,8 *км*.

** На дециметровых волнах контрольный эксперимент проводился путем наблюдений Луны и дискретных источников.

Таблица 4

Поглощение радиоволн в атмосферном кислороде

№	λ (*см*)	Γ (*дб*)	$\varkappa_к$ (*дб·км*$^{-1}$)	АВТОРЫ
1	2	3	4	5
1	70	0,04	0,01	Дмитренко, Кротиков, Троицкий, Цейтлин [53]
2	58,2	0,063	0,013	Бондарь, Кротиков, Станкевич, Цейтлин [52]
3	56,5	0,058	0,012	Ласточкин, Станкевич [3]
4	44,3	0,056	0,0116	Ласточкин, Станкевич [3]
5	40,5	0,063	0,013	Бондарь, Кротиков, Станкевич, Цейтлин [52]
6	32,5	0,051	0,0106	Ласточкин, Станкевич [3]
7	31,2	0,063	0,013	Бондарь, Кротиков, Станкевич, Цейтлин [52]
8	30,6	0,066	0,0136	Кротиков, Ласточкин, Станкевич [51]
9	25,7	0,054	0,011	Станкевич [47]
10	25	0,058	0,012	Ласточкин, Станкевич [3]
11	21	0,066	0,012	Кротиков, Ласточкин, Станкевич [51]
12	21	0,055	0,0115	Станкевич [47]
13	18,9	0,066	0,0136	Кротиков, Ласточкин, Станкевич [51]
14	18,1	0,058	0,012	Станкевич [47]
15	16,3	0,066	0,0136	Кротиков, Ласточкин, Станкевич [51]
16	15	0,054	0,011	Станкевич [47]
17	14	0,057	0,012	Станкевич [47]
18	13	0,057	0,012	Станкевич [47]
19	12	0,058	0,012	Станкевич [47]
20	11	0,058	0,012	Станкевич [47]
21	10	0,057	0,082	Станкевич [47]
22	9	0,058	0,012	Станкевич [47]
23	8	0,057	0,012	Станкевич [47]
24	5,28	0,06	0,0125	Дмитренко, Стрежнева [49]
25	3,2	0,052	0,01	Станкевич, Ласточкин, Торхов [32]
26	3,2	0,054	0,011	Ласточкин, Стрежнева, Станкевич [48]
27	2,7	0,079	0,0155	Плечков [50]
28	2,5	0,082	0,016	Плечков [50]
29	2,0	0,074	0,0145	Плечков [50]
30	1,8	0,079	0,0155	Плечков [50]
31	1,3	0,095	0,0185	Плечков [50]
32	0,41	1,13	0,213	Кисляков, Никонов, Стрежнева
33	0,36—0,40	1,16	0,220	Кисляков, Кукина
34	0,278	0,26	0,049	Кисляков, Наумов
35	0,266	0,995	0,188	Кисляков, Наумов
36	0,242	1,13	0,213	Кисляков, Наумов
37	0,232	0,42	0,079	Кисляков, Наумов
38	0,225	0,125	0,024	Кисляков, Наумов
39	0,218	0,063	0,012	Кисляков, Наумов
40	0,213	0,100	0,019	Кисляков, Наумов
41	0,209	0,112*	0,021	Кисляков, Наумов
42	0,206	0,122*	—	Кисляков, Наумов
43	0,203	0,17*	—	Кисляков, Наумов
44	0,198	0,21*	—	Кисляков, Наумов
45	0,195	0,15*	—	Кисляков, Наумов

зоне волн 8 — 75 *см* атмосферное поглощение определяется практически одним кислородом. Яркостная температура теплового радиоизлучения атмосферы в зените составляет на этих волнах 3,5 — 4°K.

Данные о полном вертикальном поглощении в атмосфере на волнах короче $\lambda = 2{,}1$ *мм* помечены звездочкой, поскольку поглощение при $\lambda < 2{,}1$ *мм* определяется, по-видимому, не только кислородом. Как

Таблица 5

Поглощение радиоволн в атмосферных парах воды

№	λ (*см*)	Γ (*дб*)(7,5 *г*·*м*$^{-3}$)	$\varkappa_в$ (*м*^{3}·*дб*·*г*$^{-1}$·*км*$^{-1}$)	АВТОРЫ
1	2	3	4	5
1	5,28	0,0055	0,0004	Дмитренко, Стрежнева [49]
2	3,2	0,009	0,0007	Ласточкин, Станкевич, Стрежнева [48]
3	2,7	0,019	0,00075	Плечков [50]
4	2,5	0,034	0,0010	Плечков [50]
5	2,0	0,037	0,0022	Плечков [50]
6	1,8	0,052	0,0038	Плечков [50]
7	1,3	0,36	0,0247	Плечков [50]
8	0,41	0,213	0,130	Кисляков, Никонов, Стрежнева
9	0,36—0,4	0,30	0,20	Кисляков, Кукина
10	0,278	0,9	0,64	Кисляков, Наумов
11	0,266	0,83	0,59	Кисляков, Наумов
12	0,242	0,9	0,64	Кисляков, Наумов
13	0,232	0,79	0,57	Кисляков, Наумов
14	0.225	1,05	0,76	Кисляков, Наумов
15	0,218	1,4	1,0	Кисляков, Наумов
16	0,213	1,54	1,1	Кисляков, Наумов
17	0,209	1,43	1,02	Кисляков, Наумов
18	0,206	1,47	1,05	Кисляков, Наумов
19	0,203	1,7	1,21	Кисляков, Наумов
20	0,198	1,6	1,14	Кисляков, Наумов
21	0,195	2,1	1,5	Кисляков, Наумов

следует из результатов работы [55], на волне $\lambda \simeq 2$ *мм* обнаруживается линия атмосферного поглощения, отождествляемая по частоте с линией NO. Таким образом, значения со звездочкой дают суммарное поглощение в O_2 и NO.

5. СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ТЕОРЕТИЧЕСКИМИ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 представлен рассчитанный спектр поглощения атмосферного кислорода для нормальных условий ($T_0 = 290°$K, $P_0 = 1013$ *мбар*) на уровне моря. На этом же графике нанесены экспериментальные данные из таблицы 4 предыдущего раздела и из работ других авторов, полученных, в основном, радиоастрономическими методами. Исключение составляют данные о кислородном поглощении в линиях $\lambda = 5$ *мм* и $\lambda = 2{,}53$ *мм*, подавляющая часть которых получена путем лабораторных измерений.

Как видно из рис. 1, в миллиметровом и части сантиметрового диапазонах волн (за исключением некоторых узких частотных интервалов вблизи $\lambda \simeq 8$ *мм* и $\lambda \simeq 3$ *мм*) наблюдается относительно хорошее согласие расчета с экспериментом. В длинноволновой части сантиметрового и в дециметровом диапазонах теоретическая кривая лежит довольно близко к большей части экспериментальных точек, за исключением группы данных на волнах 5 — 12 *см*. Сопоставление данных дециметрового и сантиметрового диапазонов представляет наибольший интерес.

Заметим, что некоторый разброс на волнах длиннее 40 *см* может быть, по крайней мере, частично, связан с влиянием ионосферы. Экспериментальные данные о поглощении в ионосфере на частоте 18,6 *Мгц*, приведенные в [80] в зависимости от месяца и времени суток, позволяют вычислить интегральное поглощение в ионосфере на $\lambda \sim 70$ *см*, кото-

рое составляет в зените $\sim 8 \cdot 10^{-4}$ *дб*. На эту величину в [53] вводилась поправка на ионосферное поглощение. В других работах таких поправок не делалось.

Данные таблицы 4 хорошо согласуются с результатами измерений Сигера ($\Gamma = 0{,}06$ *дб*, $\lambda = 75$ *см* [58]), Вестерхаута ($\Gamma = 0{,}06$ *дб*, $\lambda = 21$ *см* [59]), Майнка ($\Gamma = 0{,}052$, $\lambda = 21$ *см* [60]) и Фюрстенберга ($\Gamma = 0{,}072$, $\lambda = 21$ *см* [61]).

В работах [62—64] получены данные о поглощении кислорода на волнах 5—12 *см*. Авторы [62—64] получили примерно в 1,5 раза меньшие значения, чем представленные в таблице 4. Результаты [62—64] получены, в большей части, одинаковым методом абсолютных измерений яркостной температуры атмосферы с помощью рупорно-параболической антенны. Методика таких измерений сложна и не свободна от ошибок. Примером таких ошибок могут служить измерения эффективной температуры зенита, выполненные Хоггом [63] и де Грассом [64], которые получили для нее величину 2,4°К, тогда как суммарная температура реликтового фона и радиоизлучения атмосферы равна примерно 6°К [65]. Более поздние абсолютные измерения Ролла и Вилькинсона [79] на $\lambda = 3{,}2$ *см* (также с помощью рупорно-параболической антенны) дают результаты, близкие к полученным в [48].

Следует подробнее остановиться на работе Медда и Форта [66], в которой выполнены измерения поглощения на частоте 3,2 *Гц*. Измерялось полное вертикальное поглощение методом Бугера по радиоизлучению нескольких дискретных источников. Получено, что $\Gamma = (0{,}042 \pm \pm 0{,}004)$ *дб*. Необходимо отметить, что авторы [66] пренебрегали рефракционным ослаблением усиления антенны, которое существенным образом зависит от зенитного угла. Учесть рефракционное ослабление довольно трудно, так как оно зависит от распределения метеопараметров с высотой, которое точно неизвестно. В этом большой недостаток метода измерения, использованного в [66].

Интересно сравнить изложенные выше результаты измерений с данными расчета по теории Ван Флека. Ослабление радиоволн в дециметровом диапазоне происходит за счет нерезонансного поглощения в молекулярном кислороде, и коэффициент поглощения равен [1]

$$\varkappa_0 = 0{,}34 \frac{\widetilde{\Delta\nu}}{1 + (\widetilde{\Delta\nu}/\nu)^2} (дб \cdot км^{-1}), \qquad (28)$$

где $\widetilde{\Delta\nu} = 0{,}025$ *см*$^{-1}$. Из (28) следует, что $\varkappa_0$ убывает на дециметровых волнах с уменьшением частоты как ν^2, в то время как из данных опыта получается примерно постоянная величина $\varkappa_0$. Вычисленное по формуле (28) значение $\varkappa_0$ примерно в 3 раза меньше измеренного для волны 70 *см*. Для $\lambda = 30$ *см* эта разница уменьшается до двух раз. Отсюда следовало, как это уже упоминалось в разделе 2, что теория Ван Флека неудовлетворительна в части описания нерезонансного поглощения радиоволн кислородом.

В последнее время весьма остро встал вопрос о величине яркостной температуры атмосферы в зените в связи с открытием реликтового космического радиоизлучения. Поскольку из наземных абсолютных измерений получаются данные о суммарной температуре радиоизлучения атмосферы и реликтового фона, то для определения температуры последнего важно знать, какой вклад дает атмосфера. В [31] на $\lambda = 20{,}7$ *см* вклад атмосферы вычислялся по формулам Ван Флека и определен равным $(2{,}2 \pm 0{,}2)$°К. В этом случае на долю температуры реликтового фона приходится $(2{,}8 \pm 0{,}6)$°К. Если принять на этой волне для полного поглощения данные таблицы 4, то температура радиоизлучения атмосфе-

ры в зените будет около 3,5°К и, следовательно, реликтовый фон составит менее 2°К.

Из первых измерений на $\lambda = 7{,}35$ *см* [65] и $\lambda = 3{,}2$ *см* [79] следовало, что $T_р = (3{,}1 \pm 1)$°К и $T_р = (3{,}0 \pm 0{,}5)$°К соответственно, и если $T_р \sim 2$°К на $\lambda = 20{,}7$ *см*, то это говорило бы о нетепловой природе реликтового фона. Однако такое заключение делать преждевременно, так как измерения, выполненные с другой, чем в [65, 79], методикой, приводят к температуре, близкой к 2°К на $\lambda = 3{,}2$ *см* ($T_р = (2{,}2 \pm 0{,}3)$°К). Поскольку для космологии величина температуры реликтового фона (2 или 3°К) имеет фундаментальное значение, необходимы дальнейшие измерения, в том числе и на тех волнах, где они проведены.

Вернемся к графику рис. 1. Начиная с волны $\lambda \simeq 3$ *см*, расхождение между теоретическими и экспериментальными данными уменьшается. Близкие результаты получены и в различных экспериментальных работах [67–69], выполненных в этом диапазоне.

Как упоминалось выше, обращает на себя внимание значительное расхождение между данными различных авторов о поглощении вблизи волн 8 *мм* и 3 *мм*. Это данные работ [22, 70, 72–74] ($\lambda \simeq 8$ *мм*) и [22, 74–76] ($\lambda \simeq 3$ *мм*). Общие трудности измерения на этих волнах — малость поглощения в кислороде и близость длины волны к линиям поглощения паров воды. При измерениях приходится выделять кислородное поглощение путем экстраполяции зависимости $\Gamma(\rho)$ к $\rho = 0$, где ρ — абсолютная влажность. Очевидно, если кислородное поглощение мало по сравнению с поглощением в парах воды, неизбежны большие ошибки. Наилучшее соответствие с теорией дают результаты недавних работ [22, 70, 74–76].

Резюмируя сопоставление теоретических и экспериментальных данных о поглощении в кислороде на миллиметровых волнах, можно сказать, что расчет поглощения по формулам (3), (9) раздела 1 вполне удовлетворительно согласуется с опытом. Этого нельзя сказать о расчете поглощения в кислороде с формой линии по Ван Флеку—Вайскопфу, при котором вычисленные значения коэффициента поглощения существенно больше измеренных.

На весьма важное прикладное значение исследований излучения комплекса миллиметровых линий кислорода обратили внимание Микс и Лилли [34]. Они пришли к заключению, что измерения яркостной температуры атмосферы Земли со спутников в зависимости от частоты в районе 60 *Ггц* могут быть средством получения информации о вертикальном распределении температуры в атмосфере. В [78] показано, что для реализации измерений по предлагаемой методике достаточно вести прием со спутника на двух частотах 60,3 *Ггц* и 60,8 *Ггц*.

Субмиллиметровый спектр поглощения в кислороде детально не исследован. В лабораторных измерениях при давлении в камере 1,75 *атм* были идентифицированы 6 линий в диапазоне 25,8 — 50,88 $см^{-1}$ [71]. При наблюдениях спектра солнечного излучения, прошедшего через атмосферу, обнаружена только одна из этих шести линий: на $\nu = 27{,}8\ см^{-1}$.

В [9] исследовалось поглощение радиоволн водяным паром и около 49 $см^{-1}$ найдена слабая линия, которая не идентифицировалась со спектром водяного пара. Близость частоты и соответствующая интенсивность линии позволяют отождествлять ее с переходом ($K = 7$, $J = 8$) → ($K = 9$, $J = 8$) во вращательном спектре кислорода.

Как уже упоминалось в предыдущем разделе, данные о поглощении радиоволн, приведенные в таблице 4 для $\lambda \leqslant 2{,}1$ *мм*, относятся, по-видимому, к кислороду и окиси азота. Если вычесть из суммарного поглощения то, что, согласно расчету, приходится на кислород, можно

определить полное вертикальное поглощение в окиси азота $\Gamma_{NO} \simeq$ $\simeq 0{,}05$ *неп*. Сопоставление этого результата с теорией затрудняется тем, что сведения о распределении концентрации NO с высотой пока недостаточны, и форма линии вблизи $\lambda = 1{,}98$ *мм* неизвестна, так как исследования в [40] проводились с аппаратурой, имевшей низкую разрешающую способность по частоте.

Как следует из сравнения экспериментальных данных, приведенных в таблице 5 и на рис. 4, с теорией поглощения радиоволн в водяном паре, измеренное поглощение, как правило, в 1,5 —2 раза больше рассчитанного. Исключение составляют диапазон частот 100 — 130 *Гц* и сантиметровый диапазон, где расхождение с теорией в 5 — 8 раз. Аномалия в спектре поглощения на 100 — 130 *Гц* обсуждалась в работе [22], однако причина ее осталась невыясненной.

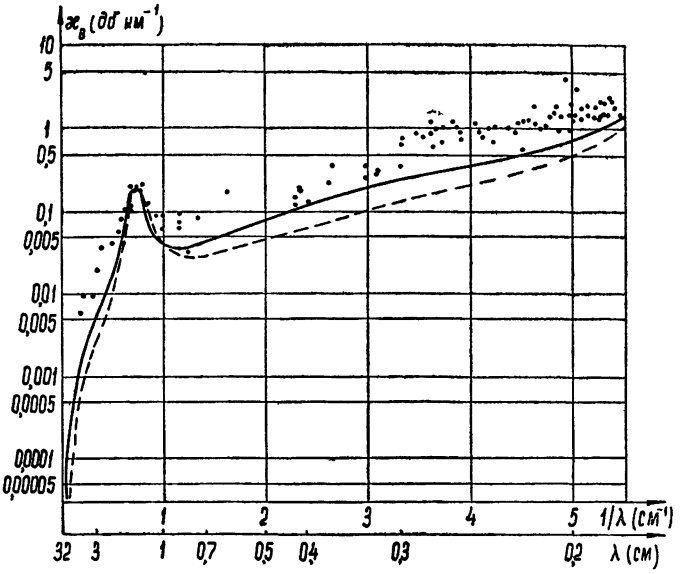


Рис. 4. Спектр поглощения атмосферных паров воды при $\rho = 7{,}5$ *г·м*$^{-3}$ и нормальных условиях на уровне моря. Теоретические кривые заимствованы из работы [20].

Сплошная кривая—расчет с формой линии по кинетическому уравнению, штриховая—с формой линии по Ван Флеку—Вайскопфу. Точками отмечены экспериментальные данные.

Из сопоставления данных на 3,2 *см* и 5,28 *см* видно, что для волн сантиметрового диапазона поглощение в водяном паре убывает пропорционально ν а не ν^2 (как следует из теории). В связи с этим приобретают особое значение измерения на более длинных волнах $\lambda \simeq 7 \div$ $\div 10$ *см*. Если подтвердится тенденция убывания поглощения пропорционально первой степени частоты, то это будет говорить в пользу существования иного механизма поглощения водяным паром, чем рассмотренный в разделе 1.

Расхождение с теорией даже в 1,5—2 раза невозможно ликвидировать путем модификации теории поглощения в водяном паре за счет изменения формы линии. Если предположить, что форма линии имеет бо́льшую асимметрию в сторону низких частот, чем это дает форма линии, найденная из кинетического уравнения, то тем самым устранится расхождение эксперимента с теорией в миллиметровом диапазоне, однако появится еще большее несоответствие их в субмиллиметровом диапазоне, к тому же на сантиметровых волнах закон убывания поглощения с уменьшением частоты остается прежним: $\varkappa_в \sim \nu^2$. Приведенные факты говорят в пользу существования в атмосфере еще одного

источника поглощения радиоволн, который, по всей вероятности, коррелирует с плотностью водяного пара. Возможно, что новой компонентой в поглощении могут являться димеры H_2O [36, 37]. С этой точки зрения можно объяснить и отмеченную выше аномалию в спектре поглощения паров воды на частотах 100 — 130 *Гц*.

Итак, только 50% наблюдаемого поглощения в H_2O следует отнести за счет мономеров водяного пара, и притом весьма условно, поскольку при интерпретации результатов эффективная высота принималась равной $H_в = 1{,}5$ *км*, т. е. вычисленной для поглощения в мономерах H_2O. Экспериментальные данные об эффективной высоте паров воды в поглощении сантиметровых радиоволн отсутствуют. Данные измерений эффективной высоты на миллиметровых волнах находятся в удовлетворительном согласии с расчетом для «средних» условий в атмосфере.

Измерения поглощения в линии $\lambda = 1{,}35$ *см* [22] находятся в удовлетворительном согласии с теорией. В [55] показано, что профиль линии сильно зависит от вертикального распределения H_2O и аномальные количества неконденсированной воды выше 15 — 20 *км* могут быть определены при наземных измерениях яркостной температуры в линии $\lambda = 1{,}35$ *см*. Некоторые предварительные данные получены по этому методу в [77].

Таким образом, радиоастрономические методы оказываются весьма эффективным и практически единственным доступным способом исследования слабых атмосферных поглощений. Как следует из предыдущего раздела, результаты измерений поглощения находятся, с практической точки зрения, в удовлетворительном согласии с теоретическими расчетами. Вместе с тем следует отметить, что имеется ряд существенных расхождений эксперимента и теории, причину которых совершенно необходимо выяснить с целью уточнения механизма поглощения.

Пользуясь результатами теоретических и экспериментальных исследований атмосферного поглощения, можно, как это видно из изложенного в предыдущих разделах материала, с достаточной степенью точности предсказать величину поглощения на луче зрения при заданных метеорологических условиях, а также определить коэффициенты поглощения воздуха в приземном слое и, практически, во всей тропосфере. Расчет поглощения на значительно больших высотах трудно выполнить, так как и экспериментальные и теоретические данные о поглощении в газах с малой концентрацией (NO, NO_2, O_3, CO, O и др.) пока недостаточны, а именно эти газы могут быть основным агентом, ответственным за поглощение на больших высотах. Есть основания надеяться, что этот пробел будет устранен с помощью радиоастрономических методов исследования. Сведения об интенсивности линий поглощения газов с малой концентрацией имеют особенный интерес для физики атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, № 7, 413 (1947).
2. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, № 7, 425 (1947).
3. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, № 6, 1098 (1963).
4. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, № 6, 987 (1965).
5. M. Mizushima, R. H. Hill, Phys. Rev., **93**, № 3, 745 (1954).
6. R. W. Zimmerer, M. Mizushima, Phys. Rev., **121**, № 1, 152 (1961).
7. M. Tinkham, M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., **97**, № 4, 937 (1955).

8. К. С. Станкевич, Радиотехника и электроника (в печати).
9. Н. И. Фурашов, Доклад на XV Всесоюзном совещании по спектроскопии, Минск, 5—11 июля 1963 г.
10. R. H. Hill, W. Gordy, Phys. Rev., **93**, № 5, 1019 (1954).
11. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Proc. IEEE, **51**, № 12, 1754 (1963).
12. V. J. Falcone, Radio Science, **1**, № 10, 1205 (1966).
13. A. E. Schulze, C. W. Tolbert, Nature, **200**, № 4908, 747 (1963).
14. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 1, 98 (1965).
15. К. С. Станкевич, Физика океана и атмосферы (в печати).
16. W. Benedict, L. Caplan, J. Chem. Phys., **30**, 388 (1959).
17. W. Benedict, L. Caplan, J. Quant Spectros. Radiat. Trans., **4**, № 3, 453 (1964).
18. A H. Barrett, V. K. Chung, J. Geophys. Res., **67**, № 11, 4260 (1962).
19. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш уч. зав—Радиофизика, **6**, № 4, 674 (1963).
20 С. А Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **9**, № 8, 1332 (1964).
21. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика (в печати).
22. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Proc. IRE, **49**, № 3, 649 (1961).
23. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М, 1964
24. В. В. Железняков, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **9**, № 6, 1057 (1966).
25. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, **4**, № 1, 21 (1959).
26. С. А. Жевакин, В С. Троицкий, Н. М Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 2, 19 (1958).
27. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **9**, № 3, 433 (1966).
28 А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **9**, № 3, 451 (1966).
29. А. Г. Кисляков, Изв высш уч зав—Радиофизика, **4**, № 3, 433 (1961)
30. А. Е. Саломонович, О. М. Атаев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **3**, № 4, 606 (1960).
31. F. T. Howell, J. R. Shaheshaft, Nature, **210**, № 5043, **1318** (1966).
32. К. С. Станкевич, В. П. Ласточкин, В. А. Торхов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
33. В. В. Кузовлев, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 1, 175 (1964).
34. M. L. Meeks, A. E. Lilley, J. Geophys. Res., **68**, № 6, 1683 (1963).
35. М. С. Малкевич, Ю Б. Самсонов, Л. И. Копрова, УФН, **80**, № 3, 93 (1963).
36. А А. Викторова, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 3, 415 (1966).
37. А. А Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, **171**, № 5, 1061 (1966).
38. К. С. Станкевич, О. Н. Шипуля, Радиотехника и. электроника, **12**, № 1, 13 (1967).
39. R. H. Dicke, R. Beringer, L. L. Kyhl, A. B. Vane, Phys. Rev., **70**, 340 (1946).
40. R. N. Whitehurst, F. H. Mitchell, J. Copeland, Astron. J., **62**, № 1, 38 (1957).
41. А. Г. Кисляков, Радиотехника и электроника (в печати).
42. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 6, 1004 (1961).
43 Н М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966.
44. S. N. Ghosh, V. Malavija, J. of Atmos. and Terr. Phys., **21**, № 4, 243 (1961).
45. C. O. Britt, C. W. Tolbert, A. W. Straiton, J. of Res. NBS, Sec. D., **65D**, № 1, 15 (1961).
46. А. Г. Кисляков, А. И. Наумов, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
47. К. С. Станкевич, Радиотехника и электроника, **11**, № 3, 445 (1966).
48. В П. Ласточкин, К С. Станкевич, К. М. Стрежнева, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 4, 984 (1964).
49. Д. А. Дмитренко, К. М. Стрежнева, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 2, 165 (1967).
50. В М. Плечков, Физика атмосферы и океана (в печати).
51. В. Д. Кротиков, В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш уч. зав—Радиофизика, **8**, № 5, 1043 (1965).
52 Л. Н. Бондарь, В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, **10**, № 3, 755 (1965).
53. Д. А. Дмитренко, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 4, 818 (1964).
54. А. Г. Кисляков, В. Н. Никонов, К. М. Стрежнева, Физика атмосферы и океана (в печати).

55. A. H. Barrett, V. K. Chang, J. Geophys. Res., **67**, № 10, 4259 (1962).
56. Ю. А. Дрягин, А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, А. И. Наумов, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 6, 1078 (1966).
57. А. Г. Кисляков, Э. П. Кукина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
58. Ch. L. Seeger, G. Westerhout, R. G. Conway, T. Hoekema, Bull. Astron. Inst. Neth., **18**, 11 (1965).
59. W. Athehoff, P. G. Mezger, H. Strassl, H. Wendker, G. Westerhout, Messprogramme bei der Wellenlange 11 cm an 25 m—Radioteleskop Stockert, Veröffentl. Univ. Sternwarte zu Bonn, № 59, 1960.
60. G. Mainka, Die Verwendung der thermischen Emission der Atmosphäre als Temperaturnormal für radioastronomische Messungen bei der Frequenz 1420 MHz, Forschungsber. Landes Nordrhein-Westfalen, № 1030 (1961).
61. F. Fürstenberg, Astrophysik, **49**, 42 (1960).
62. E. A. Ohm, Bell. Syst. Techn. J., **40**, 1065 (1961).
63. D. C. Hogg, R. A. Semplak, Bell. Syst. Techn. J., **40**, 1331 (1961).
64. R. W. DeGrass, D. C. Hogg, E. A. Ohm, H. E. D. Seovil, J. Appl. Phys., **30**, 2013 (1959).
65. A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astrophys J., **142**, 419 (1965).
66. W. J. Medd, D. N. Fort, J. Geophys. Res., **71**, № 20, 4750 (1966).
67. M. Schulkin, Naval Res. Lab. Rept. 3843, October (1951).
68. J. Aarons, W. R. Barron, J. P. Castelli, Proc. IRE, **46**, 325 (1958).
69. P. Andre, I. Kazes, J. L. Stenberg, C. R. Acad. Sci., Paris, **242**, 2099 (1956).
70. А. Е. Саломонович, Докторская диссертация, ФИАН, М., 1964.
71. H. A. Gebbie, W. J. Burroughs, J. A. Robb, G. R Bird, Nature, **212**, № 5057, 66 (1966).
72. G. R. Marner, Proc. IRE, **3**, № 1, 68 (1955).
73. G. R. Nicoll, Proc IEE, **B104**, № 17, 519 (1957).
74. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Astron. J., **70**, № 2, 177 (1965).
75. F. I. Shimabukuro, IEEE Trans. on AP, **AP-11**, № 2, 228 (1966).
76. L. A. Hoffman, H. J. Wintroub, W. A. Garber, Proc. IEEE, **54**, № 4, 449 (1966).
77. L. A. Bouvimi, D. L. Croom, A. C. Gordon-Smith, J. of. Atmos. and Terr. Phys., **28**, № 9, 891 (1966).
78. H. P. Taylor, J. A. Campbell, Radio Science, **1**, № 10, 1209 (1966).
79. P. G. Roll, D. T. Wilkinson, Phys. Rev. Lett., **16**, № 10, 405 (1966).
80. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 2, 333 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 мая 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 523.164.34

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛУНЫ ПО ЕЕ СОБСТВЕННОМУ ИЗЛУЧЕНИЮ

В. С. Троицкий

К настоящему времени, благодаря исследованиям собственного излучения Луны на инфракрасных волнах, выполненным за рубежом, и в широком диапазоне, от субмиллиметровых (0,87 *мм*) до метровых волн (70 *см*), выполненным в Горьковском радиофизическом институте (НИРФИ), получены данные, позволившие сделать определенные выводы о свойствах и строении верхнего покрова Луны. Это потребовало разработки методов исследования свойств твердого вещества по его излучению, изложенных в ряде статей. Некоторое обобщение результатов, полученных до 1965 года, дано в [1—3]. Теоретические и экспериментальные исследования последнего времени, по-видимому, позволяют в основном завершить разработку модели строения верхнего покрова. Нам представляется целесообразным подвести итог и дать описание современной модели строения верхнего покрова Луны, используя все имеющиеся экспериментальные и теоретические результаты и развитые методы их интерпретации.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ

Собственное излучение Луны является тепловым, т. е. определяется температурой вещества. Последняя колеблется с периодом 29,5 земных суток, вызывая колебания интенсивности собственного излучения Луны. Интенсивность излучения на данной волне обычно характеризуется эффективной температурой. Согласно измерениям и теории [4], яркостная эффективная температура какого-либо элемента поверхности с селенографическими координатами φ, ψ хорошо описывается рядом

$$T_e(\varphi, \psi, \lambda) = T_{e0}(\varphi, \psi, \lambda) + T_{e1}(\varphi, \psi, \lambda)\cos[\Phi - \xi_1(\varphi, \psi, \lambda)] + \\ + T_{e2}(\varphi, \psi, \lambda)\cos[2\Phi - \xi_2(\varphi, \psi, \lambda)] + \ldots, \quad (1)$$

где Φ — местная фаза ($\Phi = 0$ — полдень), ξ_1 — запаздывание фазы интенсивности радиоизлучения по отношению к фазе нагрева. Высшие гармоники яркостной температуры заметно проявляются лишь на волнах короче 0,2—0,4 *см*.

Чаще всего измеряется излучение всего диска Луны, т. е. средняя по диску эффективная температура. Для всех волн она хорошо описывается двумя членами ряда

$$\overline{T}_e(\lambda) = \overline{T}_{e0}(\lambda) + \overline{T}_{e1}(\lambda)\cos[\Omega t - \overline{\xi}_1(\lambda)]. \quad (2)$$

Черта указывает на усреднение по полусфере, а Ωt — фаза Луны ($\Omega t = 0$ — полнолуние).

Обычно при анализе экспериментальных данных используются постоянная составляющая и первая гармоника, так как высшие гармони-

ки малы и пока с большим трудом поддаются измерению. Даже наиболее мощная вторая гармоника яркостной температуры составляет не более 25% от первой. У средней по диску радиотемпературы эта доля не превышает 7%.

Как видно из (2), спектр излучения Луны является функцией времени. Поэтому его целесообразно характеризовать спектрами трех величин: спектром постоянной составляющей, спектром амплитуды первой гармоники и спектром запаздывания фазы первой гармоники излучения. Спектр постоянной составляющей, полученный благодаря применению метода точных измерений с помощью «искусственной Луны», приведен на рис. 1, где по оси ординат отложена величина средней по диску

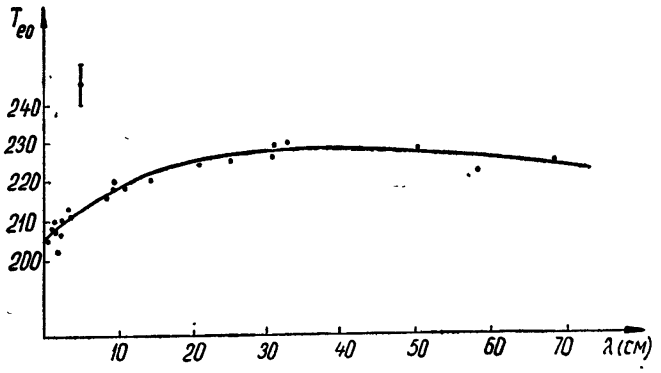


Рис. 1. Спектр средней по диску постоянной составляющей эффективной температуры Луны (измерения 1960—1967 гг. по методу „искусственной Луны").

Луны эффективной температуры излучения на данной волне [5—7]. Спектр амплитуды первой гармоники, характеризуемый отношением $\overline{M}(\lambda) = \overline{T_{e0}}/\overline{T_{e1}}$, представлен на рис. 2 [5—39], из которого видно, что амплитуда первой гармоники с увеличением длины волны λ уменьшается и на волнах длиннее 15—20 *см* колебания интенсивности практически исчезают. На рис. 3 приведен спектр запаздывания фазы первой гармоники $\overline{\xi}_1(\lambda)$ [5—39].

Важной характеристикой излучения Луны являются данные об изменении интенсивности излучения во время лунных затмений [47—56]. Эти данные для ряда длин волн приведены на рис. 4, где на оси ординат отложена величина $\overline{M_3} = \overline{T_{em}}/\Delta\overline{T_e}$, равная обратному значению максимального относительного падения интенсивности, характерного для конца теневой фазы затмения центра диска Луны. Как видно из

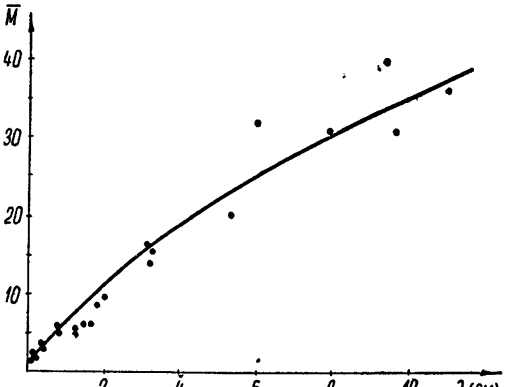


Рис. 2. Спектр отношения постоянной составляющей к амплитуде первой гармоники колебаний эффективной температуры Луны (среднее по диску Луны). Ошибка измерений ±10%.

рис. 4, изменение интенсивности во время затмения практически отсутствует на волнах длиннее 1,5 *см*.

Другой важной характеристикой собственного излучения является его поляризация. Однако здесь получено еще мало данных [57–61]. Используя результаты измерения поляризации и коэффициенты отражения Френеля, можно определить коэффициент отражения и диэлектрическую постоянную излучающего слоя.

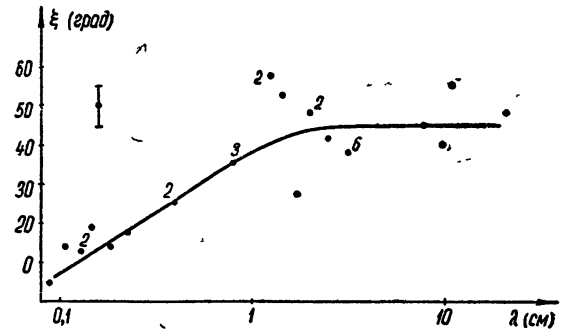


Рис. 3. Спектр запаздывания фазы первой гармоники колебаний температуры радиоизлучения Луны по отношению к фазе колебаний поверхностной температуры.

Спектр коэффициента отражения является довольно существенной характеристикой поверхностного слоя. Известны результаты измерений коэффициента отражения, полученные как методами радиолокации [62–66], так и методами радиоастрономии путем измерения некоторых характеристик собственного радиоизлучения, в том числе по его поляризации [67–70]. Ниже будем использовать существенно редуцированные нами значения коэффициентов радиолокационного отражения. Дело в том, что радиолокационный эксперимент дает величину $gR_\perp$, где $R_\perp$ — коэффициент отражения при перпендикулярном падении, а g — фактор, учитывающий шероховатость. Для идеальной сферы $g = 1$, что обычно и принималось. Между тем, эксперименты на моделях [46] показали, что для шероховатости, характерной для Луны, $g = 1{,}6$ на сантиметровых и $g = 1{,}06$ на дециметровых волнах. На рис. 5 точками отмечены значения коэффициента локационного отражения, редуцированного соответственно указанным значениям g. На этом же рисунке крестиками обозначены данные, полученные, главным образом, на основе измерения поляризации радиоизлучения (см., например, [61]).

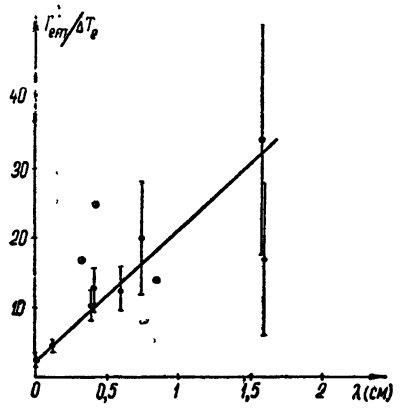


Рис. 4. Спектр обратной величины максимального относительного падения эффективной температуры излучения Луны во время ее затмения.

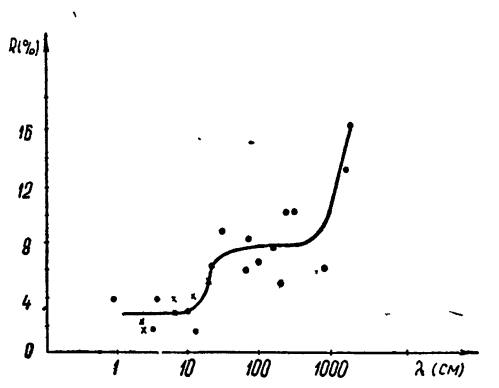


Рис. 5. Спектр коэффициента отражения радиоволн поверхностью Луны.

Точки—локационные данные (редуцированные), ошибка измерений +100% или —50%; крестики—радиоастрономические данные по поляризации собственного излучения, ошибка измерений ±20%.

Следует заметить, что локационные измерения $R_\perp$ могут давать ошибочные значения не только за счет неточного знания g, но и за счет отклонения формы тела от сферической в области отражения. Например, наличие уплощений или даже вогнутых поверхностей из-за присутствия гор может сильно увеличить отраженную мощность и, следовательно, значение $R_\perp$.

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВА ВЕРХНЕГО ПОКРОВА ЛУНЫ ПО ЕЕ СОБСТВЕННОМУ ИЗЛУЧЕНИЮ

Как известно, собственное излучение какой-либо среды описывается уравнением переноса лучистой энергии. Для плотного вещества Луны это уравнение упрощается, так как можно пользоваться принципом частичного локального термодинамического равновесия, согласно которому имеет место кинетическое равновесие в веществе, но в общем случае может и не быть равновесия между веществом и окружающим излучением. С учетом сказанного, уравнение переноса излучения на частоте ν имеет вид

$$\frac{d}{\alpha_\nu dl}\left(\frac{I_\nu}{n^2}\right) = -\frac{I_\nu}{n^2} + \frac{B_\nu}{n^2},$$
$$B_\nu = \tilde{\lambda}\int I_\nu f(\chi)\frac{d\omega'}{4\pi} + (1-\tilde{\lambda})\, n^2 B_{\nu 0}. \qquad (3)$$

Здесь α_ν и $n = \sqrt{\varepsilon}$ — соответственно коэффициенты затухания и преломления волн в среде, ε — диэлектрическая постоянная, $\tilde{\lambda}$ — коэффициент, характеризующий рассеяние, $f(\chi)$ — индикатриса рассеяния, $B_{\nu 0} = B(\nu, T)$ — функция Планка для потока излучения среды в вакуум. Коэффициент затухания α_ν, как известно, равен сумме коэффициентов затухания за счет рассеяния волн $\tilde{\lambda}\alpha_\nu$ и за счет истинного поглощения $\varkappa_\nu = (1-\tilde{\lambda})\,\alpha_\nu$. Излучение среды в вакуум определяется решением первого из уравнений (3) и в случае среды достаточно однородной (в масштабе длины волны), как известно, равно

$$I_\nu = (1-R)\int_0^\infty B_\nu \exp\left(-\int_0^l \alpha_\nu dl\right)\alpha_\nu dl, \qquad (4)$$

где R — коэффициент отражения излучения данной поляризации от границы раздела, а B_ν — неизвестная функция, определяемая решением (3). Если поверхность достаточно гладкая, то R связан с ε формулами Френеля; если сильно шероховатая, то под R нужно понимать альбедо поверхности.

В случае существенно неоднородной среды (для данной длины волны) коэффициент передачи излучения через поверхность $(1-R)$ зависит от глубины l и должен быть внесен под знак интеграла. Сама величина R в этом случае определяется дифференциальным уравнением Рикатти [7]. Из (4) видно, что интенсивность излучения зависит от распределения температуры в слое по лучу. Для Луны температура слоя определяется только нагревом солнечными лучами, тепловыми свойствами вещества и потоком тепла из недр. Температура в данный момент времени t на глубине x под поверхностью определяется уравнением теплопроводности с соответствующими граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,\ T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] = \rho(x)\,c(x,\ T)\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$(1 - R_c)\,S_0 f(t) - (1 - R_и)\,\sigma[T(0,\ t)]^4 - \left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x=0} - q = 0. \qquad (5)$$

Здесь $k(x,\ T) = k_0 + k_р$ — полная теплопроводность, равная сумме молекулярной k_0 и радиационной $k_р$; $\rho(x)$ — плотность; $c(x,\ T)$ — теплоемкость вещества; $R_и$, R_c — соответственно инфракрасное и световое альбедо поверхности; S_0 — поток солнечной энергии; $f(t)$ — функция изменения потока во времени, зависящая от места на лунной сфере, излучение которого рассматривается, периодическая для лунаций и импульсная для случая затмений.

Первый член в граничных условиях представляет поглощаемую поверхностью солнечную энергию, второй — потерю энергии на излучение поверхности в вакуум, третий — потерю на нагрев тела, четвертый — поток тепла из недр Луны. Начальные условия в случае расчета режима лунаций произвольны, так как ищется установившееся «вынужденное» периодическое решение. В случае затмения начальные условия задаются распределением температур в начале затмения, которое получается из решения лунационной задачи в момент полнолуния, когда только и имеют место лунные затмения. Совокупность уравнений (3)—(5) полностью определяет собственное излучение Луны. Следовательно, по различным характеристикам излучения можно (по крайней мере, в принципе) определить все параметры вещества, входящие в эти уравнения, а именно: $k(x,\ T)$, $c(x,\ T)$, $\rho(x)$, $\varepsilon(x)$, $\varkappa(x,\ T)$, q, $T(x,\ t)$, $\tilde{\lambda}(x)$, $f(\chi)$, $R_и$, R_c и шероховатость. Знание этих параметров позволяет сделать заключение о природе вещества (минералогический состав, порода), а также типе структуры (твердое сплошное, твердо-пористое, сыпучее) и микроструктуре (размер частиц и пор) и т. д.

Как известно, сравнение наблюдаемого явления с его теорией является общим методом исследования свойств объекта. В частности, определение параметров слоя Луны сводится к нахождению параметров уравнений (3)—(5), удовлетворяющих известному из эксперимента решению I_ν, т. е. к решению обратной задачи. Однако обратное решение дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, какими являются наши уравнения, встречает большие трудности. Обычно ищется прямое решение для семейства значений параметров, которые находятся затем путем сравнений расчета с опытом. Практически это возможно, когда решение определяется лишь одним параметром. Между тем, мы имеем около десятка неизвестных параметров, каждый из которых в общем случае является функцией глубины, а часть — еще и функцией температуры. В силу сказанного, метод анализа должен состоять в том, что из характеристик излучения выбираются такие, которые определяются в основном одним параметром; другие параметры на них либо совсем не влияют, либо влияют настолько слабо, что этим влиянием в первом приближении можно пренебречь. Для объяснения выбранного явления или группы явлений строится соответствующая частная модель. Набор частных моделей, которые объясняют весь имеющийся экспериментальный материал, позволяет построить общую модель, наилучшим образом удовлетворяющую всем данным. Изложенный подход применялся в изучении Луны.

Заметим, что при исследовании Луны по ее собственному излучению мы исходим из вполне определенных первоначальных данных, известных из других источников. Сами уравнения (3)—(5) указывают на эти исходные положения. Уравнения справедливы, когда мы считаем

Луну лишенной атмосферы, а вещество верхнего покрова — твердым. Эти факты следуют из визуальных астрономических наблюдений.

На современной стадии исследований излучения Луны предполагается, что для радиоволн $\tilde{\lambda} = 0$, тогда в (3), (4) B_ν равно известной функции $B_\nu = n^2 B_{\nu 0}$, $\alpha_\nu = \varkappa_\nu$ и решение значительно упрощается. По-видимому, рассеяние в лунном веществе будет существенным лишь для волн короче миллиметровых.

3. СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА ВЕРХНЕГО ПОКРОВА

Полученный спектр амплитуды колебаний излучения Луны (рис. 2) показывает, что с увеличением длины волны колебания интенсивности уменьшаются. Амплитуда колебаний максимальна на инфракрасных волнах. Это можно объяснить только тем, что на инфракрасных волнах излучение идет с самой поверхности, а следовательно, и значение температуры получается для поверхности. На более длинных волнах излучает слой конечной толщины, тем больший, чем длиннее волна. Толщина этого слоя сравнима с толщиной слоя, в котором имеют место температурные колебания. Таким образом, с изменением волны принимаемого излучения происходит как бы зондирование слоя в глубину. Амплитуда переменной части излучения будет обратно пропорциональна отношению глубины проникания электромагнитной волны $l_\nu = 1/\varkappa_\nu$ к глубине проникания температурной волны l_T. Глубина проникания электромагнитной волны характеризует эффективную толщину излучающего слоя. Чем больше толщина излучающего слоя l_ν по сравнению с l_T, тем меньше амплитуда колебаний интенсивности. Следовательно, спектр $\overline{M}(\lambda)$ характеризует величину отношения l_ν/l_T. Подобное отношение электрических и тепловых параметров характеризуется спектром затмения $\overline{M}_з(\lambda)$. Однако полученное отношение будет в этом случае характеризовать более тонкий верхний слой вещества.

1. Тепловые свойства вещества. Нетрудно видеть, что колебания эффективной температуры Луны, измеряемые на инфракрасных волнах, не зависят от поглощения среды ($\varkappa_\nu$), а зависят только от тепловых параметров k, c и плотности. В самом деле, с укорочением волны величина l_ν уменьшается, и мы измеряем значение температуры на все меньшей глубине. Когда l_ν станет много меньше масштаба изменения температуры в глубину, т. е. величины l_T, дальнейшее укорочение волны не изменит значения температуры излучения, поэтому можно положить для волн в этом диапазоне $l_\nu = 0$ ($\varkappa_\nu = \infty$). Отсюда, согласно (4), $I_\nu = (1 - R)\,[B_{\nu 0}]_{x=0}$, т. е. все излучение определяется только температурой самой поверхности, являющейся решением уравнения (5) и функцией только тепловых параметров. Следовательно, инфракрасный и субмиллиметровый участки спектра можно использовать для определения тепловых параметров. Но для этого нужно принять какую-то модель строения верхнего слоя, произвести расчет ее теплового режима, согласно (5), и сравнить с опытом. Здесь единственный выход — воспользоваться методом последовательных приближений.

В качестве первого приближения принимается однородная модель, в которой свойства не зависят от x. Считается также, что свойства не зависят от температуры. Оказывается, что в этом случае температура поверхности при известном потоке и альбедо зависит только от одного параметра $\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$. Во втором приближении принимается однородная модель с теплопроводностью и теплоемкостью, зависящими от температуры. Согласно модели первого приближения, лунные породы ока-

зываются сильно пористыми силикатами, для которых величина теплоемкости и ее зависимость от температуры хорошо известны. Можно оценить и степень температурной зависимости теплопроводности, возникающей благодаря радиационному переносу энергии в пористом веществе. Как оказалось, радиационная теплопроводность при $T = 300°K$ составляет всего 20—30% от молекулярной [80] и поэтому очень мало влияет на фазовую зависимость собственного излучения как в инфракрасном, так и радиодиапазоне [76, 78]. Из измерений в настоящее время известно, что полуночная температура поверхности равна $T_н = 100°K$ [42], полуденная $T_д = 395°K$, отношение постоянной составляющей к амплитуде первой гармоники $T_0/T_1 = 1{,}3$ и относительное падение температуры во время затмения $T_з/T_д = 0{,}52$. Это приводит в приближении однородной модели с учетом температурной зависимости теплоемкости, присущей земным силикатам, к значениям

$$\gamma_1(300) = 10^3 \ кал^{-1} \cdot см^2 \cdot сек^{1/2} \cdot град,$$
$$\gamma_2(300) = 600 \ кал^{-1} \cdot см^2 \cdot сек^{1/2} \cdot град \qquad (6)$$

соответственно для затмений и лунаций*.

Близость γ для затменных и лунационных процессов говорит в пользу существования примерной однородности свойств в глубину. В самом деле, процесс затмения длится всего 4—5 часов, за это время успевает охладиться лишь самый верхний слой порядка 1—2 *см*. За 29,5 дня (лунные сутки) процессом изменения температуры захватываются более глубокие слои вещества. Отношение глубин пропорционально корню из отношения времен процессов, т. е. равно 10. Соответственно этому затменные значения γ относятся к самому верхнему слою, а лунационные — в десять раз более толстому слою.

Анализ спектра (рис. 2) показал, что он хорошо удовлетворяет однородной модели слоя [72, 73] и совершенно не соответствует резко неоднородной модели, предполагавшей существование пылевого слоя толщиной в несколько миллиметров, покрывающего плотные породы. Особенно четко об однородном распределении тепловых свойств вещества в глубину говорит существование предельного запаздывания фазы ξ_1 при увеличении длины волны, равного 45° (рис. 3). Именно эта величина получается в теории однородной модели [4]. Всякая значительная неоднородность в глубину, в особенности пылевой слой, приводит к резкому увеличению предельного запаздывания. Таким образом, однородная модель довольно хорошо согласуется со спектром собственного излучения. Кроме того, как показывают расчеты теплового режима Луны, характер распространения тепловой волны слабо меняется от введения температурной зависимости свойств, характерной для вещества Луны [78], т. е. теория излучения Луны, разработанная для однородной модели с температурно независимыми свойствами, с достаточным приближением применима для случая температурной зависимости. Это позволяет, пользуясь разработанной теорией излучения однородной модели, во втором приближении определить ряд параметров вещества. Оказалось, что в интервале волн от 0,1 *см* до 15 *см***

$$l_\nu/l_T \simeq 2{,}2\lambda, \qquad \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \frac{c\gamma}{b\sqrt{\varepsilon}} \simeq 2{,}2, \qquad (7)$$

где $b = \operatorname{tg}\Delta/\rho$, а $\operatorname{tg}\Delta$ — угол потерь вещества Луны.

* Ранее получалось $T_н = 120°K$ и $T_0/T_1 = 1{,}5$, что давало для лунаций $\gamma_2 = 350$ [1, 43]. Уточненные измерения дали приведенное выше значение.

** Согласно модели первого приближения, ранее приводилось $l_\nu/l_T = 2$. Новое значение $T_0/T_1 = 1{,}3$ (вместо 1,5) приводит к (7).

Полученный спектр величины $l_\lambda = 2{,}2\, l_T \lambda$, как и в случае модели первого приближения, указывает на диэлектрическую природу вещества Луны. Наиболее вероятно, таким диэлектриком могут быть породы, аналогичные земным, т. е. силикаты. Это сразу дает значение теплоемкости, которая для всех силикатов в среднем (с точностью до 10%) при $T = 300°$ равна $c(300) = 0{,}19$ *кал·град*$^{-1}$·*г*$^{-1}$.

Дальнейшее определение параметров, таких, как плотность вещества и теплопроводность, может быть сделано при привлечении новых независимых измерений. Независимым измерением плотности может быть измерение диэлектрической постоянной, которая, как известно, зависит от степени пористости и для силикатных пород довольно точно связана с плотностью ρ соотношением [74]

$$\sqrt{\varepsilon} = 1 + \tilde{a}\rho, \tag{8}$$

где $\tilde{a} = 0{,}5$.

Предложено несколько способов измерения ε вещества верхнего покрова Луны [67, 69, 70], основанных на том, что для радиоволн, как показывают локационные исследования, поверхность Луны настолько гладкая, что в диапазоне волн длиннее 0,8 *см* справедлива формула Френеля для коэффициента отражения. Отсюда возможно определение ε по поляризации собственного излучения [69], по распределению яркостной температуры по диску [67], дающей функцию $R(\varphi, \psi)$, наконец, по прямым локационным измерениям отражения [62–66] и другими методами [70].

Таким образом, зная ε и используя (8), находим $\rho_1 = \left(0{,}6\,{}^{+0{,}2}_{-0{,}1}\right)$ *г·см*$^{-3}$, что вместе с (6) дает значение $k \simeq 10^{-5}$ *кал·см*$^{-1}$·*сек*$^{-1}$·*град*$^{-1}$, а отсюда $l_T \simeq (2k/\rho c\Omega)^{1/2} \simeq 7{,}5$ *см*, наконец, согласно (7), $l_\lambda = 17\lambda$ и т. д.

2. Изменение свойств с глубиной. Имеются данные, указывающие на некоторую слабую неоднородность свойств вещества в глубину. Это не противоречит сделанному выше утверждению, что спектры амплитуды и фазы запаздывания соответствуют однородной модели. Дело в том, что эти спектры не являются очень чувствительными к небольшим неоднородностям. Слабая неоднородность, при которой свойства меняются с глубиной незначительно (в 1,5—2 раза по плотности) и плавно, как показывают расчеты, мало сказывается на характере спектров (их изменения лежат в пределах точности измерений). Поэтому полученный спектр допускает существование некоторой неоднородности.

Для выяснения этой неоднородности должны быть найдены параметры, чувствительные к ней и могущие быть измеренными. Такими параметрами являются коэффициент отражения волн, поляризация излучения, а также данные «затменной» и ночной температур поверхности. Увеличение коэффициента отражения в диапазоне длин волн $\sim$ 15—20 *см* (рис. 5) может указывать либо на реальную частотную зависимость диэлектрической постоянной вещества, либо на существование неоднородности диэлектрических свойств в глубину. Первое предположение должно быть отвергнуто, так как наблюдаемое достаточно резкое увеличение ε с ростом длины волны должно по теореме Крамерса—Кронига сопровождаться увеличением угла потерь вещества Луны в этом интервале волн, что привело бы к появлению фазового хода на этих волнах, т. е. сказалось бы на спектре $M(\lambda)$. Это пока не обнаруживается. По-видимому, имеет место второй случай. В самом деле, если верхний слой менее плотный, то он имеет меньшую диэлектрическую

постоянную. Падающие на поверхность волны, имеющие длину, много меньшую толщины верхнего слоя, будут отражаться от границы верхней среды с вакуумом. Часть энергии волны, прошедшая через эту границу, вследствие малого изменения свойств на длине волны, пройдет в плотный слой, не испытав от него отражения, и затухнет. Наоборот, для волн, длина которых много больше толщины неоднородного слоя, он как бы не существует, и эти волны отражаются от нижнего, более плотного слоя.

Таким образом, коэффициент отражения для такой среды будет меняться в некотором интервале частот от значения коэффициента отражения для поверхности до его значения для подложки.

Существующий расчет коэффициента отражения для экспоненциального изменения плотности с глубиной

$$\rho(x) = \rho_2 - (\rho_2 - \rho_1)\exp(-x/x_0), \tag{9}$$

где $\rho = \rho(0)$, $\rho_2 = \rho(\infty)$, показал, что длина волны, около которой происходит изменение коэффициента отражения, равна $\lambda_1 = 20\,x_0$ [75]. В эксперименте, как видно из рис. 5, эта величина равна ~ 30 *см*. Следовательно, характерный размер слоя равен $x_0 = 1{,}5$ *см*. Полный размер слоя равен примерно $d_1 = (3 \div 4)$ *см*. Наблюдаемому спектру $R(\lambda)$ удовлетворяют следующие данные: $\rho_1 = 0{,}6$ *г·см*$^{-3}$ при $\rho_2/\rho_1 = (1{,}5 \div 2)$ и $x_0 = 1{,}5$ *см*. К той же степени неоднородности, как мы видели, приводят и измерения γ по температурам поверхности во время затмений и лунаций, если учитывать температурную зависимость теплоемкости. В (6) разница между γ_1 и γ_2 указывает на увеличение плотности вещества в глубине.

Таким образом, явления—температура поверхности во время затмения и лунной ночи, спектр коэффициента отражения, спектр амплитуды и фазы запаздывания—согласуются с примерно однородной моделью, в которой свойства на протяжении 3—4 *см* меняются не более, чем в 1,5—2 раза, причем плотность на поверхности равна $\left(0{,}6\begin{smallmatrix}+0{,}2\\-0{,}1\end{smallmatrix}\right)$ *г·см*$^{-3}$, а в глубине 3—4 *см* и более составляет $(0{,}9 \div 1{,}2)$ *г·см*$^{-3}$.

Исследования теплопроводности пористых силикатных материалов в вакууме показывают, что последняя при заданной «конструкции» пористого тела пропорциональна плотности, т. е.

$$k = \alpha\rho. \tag{10}$$

Величина α зависит от типа пористого тела (твердо-пористое, сыпучее). Соотношение (10) справедливо для $\rho \leqslant 1{,}5$ *г·см*$^{-3}$. Оно должно иметь место и для вещества Луны. Следовательно, теплопроводность в глубину меняется в той же степени, как и ρ. Используя приведенные данные γ_1, γ_2 и ρ_1, ρ_2, получаем, что для лунита $\alpha_л \simeq 10^{-5}$ *кал·см*^{2}*·сек*$^{-1}$*·град*$^{-1}$ $\times$ $\times$*г*$^{-1}$. Эта величина лучше всего соответствует твердо-пористому телу с открытыми порами.

3. Зависимость свойств вещества от температуры. Теплопроводность пористых тел заведомо должна зависеть от температуры за счет радиационного переноса тепла через поры. В «лунном» интервале температур лучистый перенос осуществляется излучением на инфракрасных волнах, длина которых соответствует планковскому максимуму $\lambda = 0{,}38/T \simeq (10 \div 30)$ *мк*. Для пористого тела, у которого эффективный размер пор равен $l_п$, а само вещество не проницаемо для инфракрасных волн, величина радиационной теплопроводности $k_р$ равна

$$k_{рп} = \frac{R_и}{2 - R_и}\,4\sigma l_п T^3, \tag{11}$$

Здесь σ — постоянная Стефана—Больцмана. Можно показать, что для лунных температур радиационная теплопроводность много меньше молекулярной, если поры не превышают десятой доли миллиметра.

Как известно, вещество само может быть проницаемо для инфракрасных волн, тогда $k_р = \frac{16}{3}\sigma\varepsilon_и \bar{l}_\nu T^3$, где $\bar{l}_\nu$ — росселандова средняя глубина проникания излучения в вещество, $\varepsilon_и$ — диэлектрическая постоянная вещества для инфракрасных волн. Расчеты показывают, что при зависимости $l_\nu = a\lambda$ (эта зависимость следует из радиоизмерений и теории нерезонансного поглощения волн в веществе) величина $\bar{l}_\nu = 0{,}365\ a/T$. Отсюда [80]

$$k_р = 2\varepsilon_и a\sigma T^2. \tag{12}$$

Неоднократно пытались обнаружить влияние радиационного переноса на радиоизлучение Луны. Попытки теоретического анализа этого влияния [78] привели к выводу, что фазовая зависимость собственного излучения как в инфракрасном, так и в радиодиапазоне, не чувствительна к существованию радиационного переноса. Экспериментальные данные согласуются с широким кругом моделей как с зависящими, так и не зависящими от температуры тепловыми свойствами. Для оценки доли радиационного переноса необходимо найти явления, в достаточно сильной степени определяемые температурной зависимостью теплопроводности. Такое явление, как оказалось, существует.

Было указано, что наличие слабой температурной зависимости теплопроводности приводит к качественно новому эффекту [77], состоящему в увеличении постоянной составляющей в глубину в слое порядка l_T. Этот эффект был затем рассчитан количественно, согласно уравнению (3), при различных законах температурной зависимости [78, 79]. Оказалось, что прирост температуры ΔT_{max} зависит от γ и величины $k_р/k_0$. В [79] показано, что постоянная составляющая истинной температуры растет в глубину по закону $T_0(x) = T_0 + \Delta T_{max}[1 - \exp(-2x/l_T)]$. Это приводит к росту постоянной составляющей радиотемпературы по мере увеличения длины волны. Однако рост должен прекращаться на волнах, идущих из глубины более $(2 \div 4)\ l_T$. Расчет показывает, что постоянная составляющая яркостной температуры радиоизлучения зависит от волны согласно соотношению $T_{e0} \simeq T_0 + \Delta T_{max} \frac{4{,}4\lambda}{1 + 4{,}4\lambda}$.

Отсюда видно, что уже на длинах волн ~ 2—3 *см* постоянная составляющая достигает практически максимальной величины $T_{e0} = T_0 + \Delta T_{max}$. Таким образом, измеряя температуру на поверхности (на инфракрасных волнах) и в глубине (на волнах с $\lambda \simeq (2 \div 3)$ *см*), можно найти прирост температуры ΔT_{max} и определить $k_р/k_0$. Такое определение стало возможным благодаря точным измерениям радиотемпературы по методу «искусственной Луны». В работе [80] показано, что существующая разница в постоянных составляющих по инфракрасным и радиоизмерениям в 10—15° объясняется этим эффектом. Сравнением с теорией было найдено, что, если вещество Луны не проницаемо для инфракрасных волн и имеет $\gamma_2 \simeq 600$ *кал*$^{-1}\cdot$*см*$^2\cdot$*сек*$^{1/2}\cdot$*град* (значение γ_2 взято при $T = 300°$K), то относительная доля радиационного переноса через поры при $T = 300°$K равна $k_{р\,п}(300)/k_0 = 0{,}25$. При проницаемом веществе $k_р(300)/k_0 = 0{,}4$. Существенно бо́льшие доли найдены путем сравнения с опытом расчетного изменения температуры поверхности при заходе Солнца [76]. Во всех этих расчетах брались однородные модели, так как неоднородность свойств не приводит к указанному

эффекту роста постоянной составляющей с глубиной, влияя, однако, на величину ΔT_{max}.

Принимая $k_0 \simeq 0{,}6 \cdot 10^{-5}$ *кал · см*$^{-1}$ *· сек*$^{-1}$ *· град*$^{-1}$, получим $k_{р\,п}(300) = (0{,}15 \div 0{,}25)10^{-5}$ *кал · см*$^{-1}$ *· сек*$^{-1}$ *· град*$^{-1}$, $k_р(300) = (0{,}25 \div 0{,}4)10^{-5}$ *кал · см*$^{-1}$ *· сек*$^{-1}$ *· град*$^{-1}$. По полученному $k_{р\,п}$ из (11) найдем, что эффективный размер пор составляет (170 ÷ 350) *мк*. Поскольку пористость вещества близка к 50%, размеры пор должны быть примерно равны размеру частиц. Если считать вещество проницаемым для инфракрасных волн, то, согласно (12) и значению $k_р$, получается, что $a = (6 \div 12)$ и, следовательно, для инфракрасных волн $l_v = (6 \div 12)\,\lambda$. Для волн длиннее 1000 *мк*, как мы видели, $l_v = 17\lambda$. Нам представляется наиболее вероятным, что вещество проницаемо для инфракрасных волн. Тогда, чтобы перенос тепла через поры был незначителен, последние, а следовательно, и частицы вещества, должны быть во много раз меньше длины пробега инфракрасного кванта, равной $l_v = (60 \div 120)$ *мк*. По-видимому, это могут быть частицы размером от десятка до нескольких десятков микрон. Малое значение теплопроводности требует, как показывают расчеты [81], чтобы площадь контакта таких частиц была примерно в 10^4—10^5 раз меньше площади сечения самой частицы. Итак, теплопроводность лунного вещества равна

$$k(T) = k_0(x)\,[1 + 0{,}4 \cdot 10^{-5} T^2], \qquad (13)$$

где k_0 дается полученными выше значениями.

Существенной возможностью изучения свойств самого верхнего слоя является исследование радиоизлучения Луны во время ее затмения. Поскольку затменные изменения температуры в 1,5 раза меньше лунационных, всевозможные температурные зависимости $c(T)$, $k(T)$, $\varkappa(T)$ сказываются значительно слабее.

Как показывает расчет [79], наличие температурной зависимости теплоемкости в той степени, как это имеет место для силикатов, не изменяет сколько-нибудь существенно величину $T_з$. В силу сказанного, для анализа затмения с хорошим приближением можно пользоваться расчетом модели с температурно независимыми теплопроводностью и теплоемкостью. Кроме того, малая глубина, захватываемая процессом охлаждения, позволяет с большим основанием использовать для затмения однородную модель. В соответствии с этим в приближении однородной модели с температурно независимыми свойствами вещества разработана теория излучения затменной Луны [47]. Сравнение спектра изменения интенсивности с указанной теорией позволяет определить для первого сантиметра слоя величину

$$c\gamma_1/\sqrt{\varepsilon_1}\, b_1 = (11{,}4 \pm 3)\, 10^3. \qquad (14)$$

Эта же величина, определенная из лунационных измерений в приближении однородной температурно независимой модели, равна, согласно (7),

$$c\gamma_2/\sqrt{\varepsilon_2}\, b_2 = 11{,}2 \cdot 10^3. \qquad (15)$$

При учете температурной зависимости свойств и слабой неоднородности это соотношение, вообще говоря, неточно. Однако, как уже говорилось, ввиду небольших изменений параметров от температуры и глубины теория однородной модели дает достаточно хорошее приближение. Расчеты с учетом всех факторов возможны только на ЭВМ; в дальнейшем они покажут точность приближения.

Принимая во внимание, что $\gamma_1 = 10^3$ *кал*$^{-1}$*·см*^{2}*·сек*$^{1/2}$*·град*, $\varepsilon_1 = 1{,}7$, а $\gamma_2(300) = 600$ *кал*$^{-1}$*·см*^{2}*·сек*$^{1/2}$*·град*; $\sqrt{\varepsilon_2} = 1{,}5$, получим из (14),

(15) $b_1 = (13 \pm 4)^{-3}$, $b_2 = \left(7^{+2}_{-1}\right) 10^{-3}$. Объяснение более высокого значения $\mathrm{tg}\,\Delta/\rho$ в слое толщиной 3—4 *см* вызывает некоторые затруднения. Можно допустить, что верхний слой имеет большие потери либо из-за внешнего воздействия потока частиц и ионизирующих излучений, либо химический состав этого слоя отличен от нижележащего; последнее также может быть связано с потоками протонов. Обычно более высокие потери имеют основные породы Земли и, в частности, каменные метеориты. Однако трудно предположить, что верхний слой состоит из более основных пород, чем нижний. Возможно, разница связана с какими-то еще не учитываемыми в теории эффектами и в действительности ее нет. В частности, разницы в величинах $\mathrm{tg}\,\Delta/\rho$ не будет, если принять строго однородную модель ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$). Эти вопросы требуют дальнейшей разработки.

Все рассмотренные выше данные основаны на изучении фазовых зависимостей излучения, т. е. характера распространения тепловой волны, и, следовательно, относятся к слою толщиной $(4 \div 5)\, l_T = 40$ *см*, в котором еще имеют место колебания температуры. Глубине 40 *см* соответствует длина волны $\lambda \sim (2 \div 2{,}5)$ *см*. Исследование этим способом больших глубин (т. е. по фазовому ходу на более длинных волнах) принципиально невозможно, хотя это исследование несомненно дает значение затухания на более длинных волнах этого же верхнего слоя.

Была найдена другая возможность исследования больших глубин: по увеличению температуры в глубину благодаря потоку тепла из недр.

4. Поток тепла из недр. Исследование свойств глубоких слоев. Измерения по методу «искусственной Луны» позволили обнаружить увеличение постоянной составляющей температуры Луны с длиной волны, что эквивалентно обнаружению роста температуры в глубину. Соответствующий спектр приведен на рис. 1. На основании этого спектра можно сделать ряд важных выводов. Во-первых, почти линейный рост эффективной температуры до длин волн $\lambda \simeq (15 \div 20)$ *см* указывает на примерную неизменность теплопроводности в слое до глубины, соответствующий этим волнам, т. е. около 4 *м*. Во-вторых, прекращение прироста температуры указывает, что глубже находятся плотные скальные породы.

Расчет радиоизлучения для такой двухслойной среды хорошо удовлетворяет полученному спектру постоянной составляющей радиоизлучения при толщине слоя $d_2 = 4$ *м* и потоке тепла $q = 0{,}85 \cdot 10^{-6}$ *кал·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$ Теория дает следующее выражение для зависимости $\overline{T}_{e0}(\lambda)$ для $\lambda \geqslant 3$ *см* при наличии потока тепла из недр с плотностью q (*кал·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$):

$$\overline{T}_{e0}(\lambda) = \overline{T}_{e0}(300) + (1 - R_\perp)\, A_1 2{,}2 \sqrt{\Omega/2}\, q\gamma_2 [1 - \exp(-d_2/17\lambda)]. \quad (16)$$

Здесь $A_1 = 0{,}8$ — коэффициент, появляющийся при усреднении по диску Луны. Градиент температуры dT/dx и q могут быть выражены из (16) через значение производной $d\overline{T}_{e0}/d\lambda$ при λ, когда $d_2 \gg 17\lambda$, т. е. для волны $\lambda = (3 \div 10)$ *см*

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d\overline{T}_{e0}}{d\lambda} \frac{1}{A_1(1-R_\perp)\, 2{,}2 l_T},$$
$$q_s = k\frac{dT}{dx} = \frac{d\overline{T}_{e0}}{d\lambda} \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \frac{1}{A_1(1-R_\perp)\, 2{,}2\gamma_2} \quad (17)$$

Величина $d\overline{T}_{e0}/d\lambda$ определяется из рис. 1, в диапазоне $\lambda = (3 \div 15)$ *см* она равна 1 *град·см*$^{-1}$. Глубина проникания тепловой волны равна $l_T = (7 \div 8)$ *см*, соответственно этому из (17) градиент температуры из-за потока тепла из недр равен $(6 \div 7)$ *град·м*$^{-1}$ во всем 4-метровом слое. Параметр γ_2 должен быть взят для основного слоя при температуре $T = 250°$K, соответствующей этому слою.

Было получено $\gamma_2(300) = 600$ *кал*$^{-1}$*·см*^{2}*·сек*$^{1/2}$*·град*. Для обоих законов радиационной теплопроводности $\gamma_2(250) = 700$ *кал*$^{-1}$*·см*^{2}*·сек*$^{1/2}$ × × *град*. Отсюда $q = (0{,}85 \pm 0{,}2)\ 10^{-6}$ *кал·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$. На рис. 1 сплошная кривая совпадает с теоретической кривой постоянной составляющей при указанном потоке и толщине пористого слоя. Заметим, что в [78] на основании наших данных $\overline{T}_{e0}(\lambda)$ найдено значительно меньшее значение $q = 0{,}34 \cdot 10^{-6}$ *кал·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$. Причиной этого является принятие в [78] слишком высокого значения $\gamma_2(250) = 1300$ *кал*$^{-1}$*·см*^{2}*·сек*$^{1/2}$ × × *град* и заниженного значения $d\overline{T}_{e0}/d\lambda$, определенного по среднему наклону кривой рис. 1 в интервале $\lambda = (3 \div 35)$ *см*.

5. Природа вещества верхнего покрова. Пока единственной возможностью сколько-нибудь уверенно определить химический состав и главные породы, образующие верхний покров Луны, является использование характеристик поглощения сантиметровых волн веществом Луны. Как показали исследования [74], удельный угол потерь различных земных пород $b = \operatorname{tg}\Delta/\rho$ практически не зависит от ρ, а зависит только от типа породы и, видимо, условий ее образования. Сравнивая значения b, полученные для различных земных пород, со значением, полученным для Луны, как оказалось, можно указать группу пород, отвечающих лунному значению удельного угла потерь. На рис. 6 представлены значения $\operatorname{tg}\Delta/\rho$ различных пород в зависимости от количества SiO_2. Заштрихованные области соответствуют лунным породам. Верхняя полоса для первого слоя 3—4 *см*. Нижняя — для нижележащего вещества вплоть до глубины в несколько метров. Из диаграммы видно, что сверху вещество имеет большую основность, чем нижнее, которое соответствует средним горным породам.

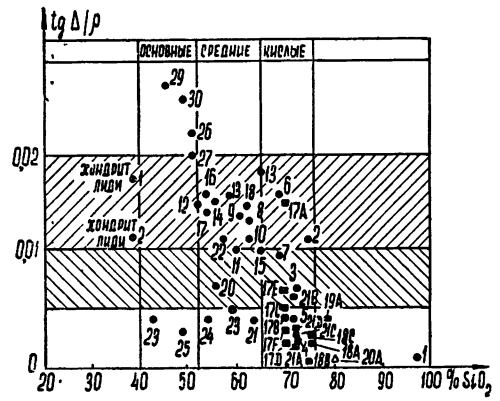


Рис. 6. Диаграмма удельного тангенса угла потерь для различных земных пород и вещества Луны. Верхняя полоса—удельный угол потерь первого слоя Луны, нижняя—то же для второго слоя Луны.

6. Однородность свойств по поверхности. Полученные выше данные, за исключением данных γ, являются усредненными по всей полусфере Луны. Поэтому естественно возникает вопрос о том, в какой мере они соответствуют локальным значениям. Согласно исследованиям на инфракрасных волнах, тепловые свойства по диску, за исключением днищ лучистых кратеров, меняются очень мало, не более чем на $\pm$ (20—25) % [40]. Эти изменения находятся практически в пределах точности измерений. Обнаружена также большая степень однородности по диску характеристик радиоизлучения, таких, как $M(\lambda)$ и ξ_1, при усреднении по площадям от десятков до сотен километров [34—40]. В связи с этим можно говорить о существовании радиометрической однородности, аналогичной

известной фотометрической однородности [41], связанной с однородностью характеристик отраженного света. Радиометрическая однородность указывает на однородность электрических свойств вещества верхнего покрова поверхности Луны в слое толщиной, по крайней мере, в десять сантиметров. Отсюда следует примерная однородность в химической природе вещества. В частности, оказывается, что вещество на поверхности морей и материков практически одинаково [40]. Заведомо не соответствует характеристикам излучения гипотеза, что верхние породы материков — граниты, а морей — базальты..

В силу большой однородности свойства верхнего покрова по горизонтали, полученные характеристики представляют реальные свойства вещества в каждом месте. Большая однородность свойств подтверждается результатами станций «Луна-9», «Сервейер-1», «Луна-13».

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные данные позволяют сделать некоторые выводы, касающиеся истории развития и строения Луны.

Чрезвычайно мелкозернистая структура пористого вещества с зернами до десятка микрон говорит о существовании стадии сильного дробления и переработки. Средняя по полусфере глубина слоя 4 *м* указывает на весьма большую эффективность этих факторов. По-видимому, здесь имела место переработка вещества интенсивными ударами метеоров, как это отмечено в [44].

Если предположить, что, как и у Земли, поток тепла из недр Луны связан с распадом радиоактивного урана, тория и калия и что к настоящему времени тепловой процесс достиг стационарности, то все теряемое Луной тепло равно теплу радиоактивного распада. Общая генерация тепла за год равна $Q = 10^{19}$ *кал·год*$^{-1}$, что дает на грамм вещества $q_m = 1{,}35 \cdot 10^{-7}$ *кал·г*$^{-1}$*·год*$^{-1}$. Эта плотность генерации, как нетрудно подсчитать, в 4 раза больше, чем для вещества Земли.

Отсюда следует, что концентрация радиоактивных элементов в веществе Луны в 4 раза больше, чем в веществе Земли. Найденный поток тепла $q = 0{,}85 \cdot 10^{-6}$ *кал·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$ примерно в 4 раза больше предполагавшегося ранее потока тепла из недр Луны на основании аналогии с Землей и по радиоактивности каменных метеоритов. Это существенно меняет представление о тепловой истории Луны. Соответствующие расчеты были сделаны в [45] и показали, что только при этой высокой концентрации достигается почти полное расплавление вещества Луны и, следовательно, обеспечивается наиболее полная дифференциация недр и вынос радиоактивных элементов на поверхность. Это приводит к более раннему прекращению разогрева и, следовательно, к затвердеванию расплава к настоящему времени на большие глубины. Как показывают расчеты, при высокой концентрации радиоактивных элементов толщина твердой коры Луны может достигать в настоящее время 600—700 *км*, а при малой концентрации, соответствующей содержанию радиоактивных элементов в Земле, 300—400 *км*. При этой концентрации процесс плавления затягивается, и недра не успевают остывать.

По современным данным форма Луны не является равновесной, т. е. она, по-видимому, в основном твердая или твердая кора простирается, по крайней мере, на глубину порядка тысячи километров. Достаточно глубокое отвердение, как мы видели и как это ни парадоксально, может произойти только при достаточно высокой концентрации радиоактивных элементов.

Если предположить, что верхний сферический слой лунного вещества состоит из земных гранитов со свойственной им высокой концен-

трацией радиоактивных элементов, то для объяснения наблюдаемого потока тепла толщина слоя гранита должна быть равна 10 *км*. Если предположить, что слой базальтовый, то его толщина должна быть равна 40 *км*. Чтобы радиоактивные элементы были вынесены в такой тонкий верхний слой, расплавление должно быть практически полным.

Температура на глубине 40 *км* должна быть около

$$T = 300 + \frac{q}{k}\int_0^d \left(1 - \frac{x}{d}\right) dx = 300 + \frac{0{,}8\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-3}}\,\frac{d}{3} = 850°\text{K}.$$

Высокая степень радиоактивности лунного вещества лучше согласуется с гипотезами образования Луны либо за счет отрыва массы от Земли, когда у последней верхний слой уже обогатился радиоактивными элементами, либо за счет захвата Луны. В принципе высокую радиоактивность можно согласовать и с общепринятой гипотезой одновременного образования Земли и Луны из протопланетного вещества, но это пока встречает известные трудности.

Полученная общая модель является по существу суммой частных моделей, в которых учитывались изменения свойств в глубину, зависимость их от температуры, а также влияние шероховатости. Точность полученных данных параметров характеризуется ошибкой, не меньшей, чем 20—25%. Вряд ли удастся уточнить качественные данные, строя теорию излучения сразу полной модели с учетом всех факторов. Множественность параметров и их взаимно компенсирующее действие, видимо, не позволяет существенно уточнить результаты. Можно будет только убедиться, что полученная общая модель соответствует всем исходным фактам. По мере исследования Луны методами космонавтики непосредственно на ее поверхности будут накапливаться новые данные. Одно лишь сравнение результатов, полученных разными методами, позволит сделать много важных заключений. Только весь комплекс исследований даст возможность установить более надежные сведения о Луне и, в частности, о свойствах ее верхнего покрова.

В заключение выражаю благодарность А. Б. Бурову за помощь в написании обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В С. Троицкий, УФН, **81**, 588 (1963).
2. V. S. Troitsky, J. Res. NBS, **69D**, № 12, 1585 (1965).
3. Weaver Horald, Solar Syst. Radio Astron., Athens. Ionosph. Inst. Nat. Observ., 1965, p. 295.
4. В. С. Троицкий, Астроном. ж., **31**, № 6, 511 (1954).
5. В Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 6, 1005 (1961).
6. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, В. А. Порфирьев, К. М. Стрежнева. Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 4, 802 (1962).
7. Б. Н. Семенов, С. А. Каменская, В. С. Троицкий, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 5, 882 (1962).
8 В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 3, 604 (1962).
9. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **6**, № 6, 1265 (1963).
10 В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 2, 242 (1963).
11 В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 6, 1087 (1963).
12. Д. А Дмитренко, С. А. Каменская, В. Л. Рахлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 3, 555 (1964).

13. А. В Захаров, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 3, 553 (1964).
14. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Астроном. ж., **41**, № 5, 951 (1964).
15. В. А. Алексеев, В. Д. Кротиков, Ю. Г Матвеев, Н. Б. Михайлова, В. А. Порфирьев, В. П Рязанов, А. И. Сергеева, К. М. Стрежнева, В. С Троицкий, С. А Шмулевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 5, 1030 (1966).
16. В. М. Плечков, Астроном. ж., **44**, № 1, 154 (1967).
17. В. А. Алексеев, Л. Н. Бондарь, С. А. Каменская, В. Д. Кротиков, Ю. Г. Матвеев, К. М Стрежнева, В. С. Троицкий, Астроном. ж., **44**, № 3, 593 (1967).
18. R. H. Dicke, R. Beringer, Ap. J., **103**. 375 (1946).
19. J. H. Riddington, H. G. Minnet, Austr. J. Sci. Res., **2A**, 63 (1949).
20. J. P. Hagen, NRL Report, № 3504, 1949.
21. J. H. Riddington, H. G. Minnet, Austr. J. Sci. Res., **4A**, 459 (1951).
22. В. С. Троицкий, М. Р Зелинская, Астроном. ж., **32**, № 6, 550 (1955).
23 А Е. Саломонович, Астроном. ж , **35**, № 1, 129 (1958).
24. М Р. Зелинская, В С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астроном. ж., **36**, № 4, 643 (1959).
25 М. Р. Зелинская, В. С Троицкий, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 3, 506 (1959).
26. А Г Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 3, 433 (1961).
27. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 4, 600 (1961).
28. W. J. Medd, N. W. Broten, Planetary Space Sci., **5**, 307 (1961).
29. А. Г. Кисляков, Астроном ж, **38**, № 3, 561 (1961).
30. A. G. Kislyakov, The Moon, Acad. Press. Symp. № 14, of the JAU, 1962.
31. А. И Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 4, 847 (1963).
32. Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 4, 655 (1963).
33. В. А Разин, В. Т. Федоров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 5, 1052 (1963).
34. В. Н. Кощенко, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 4, 596 (1961).
35 А. Е. Саломонович, Б Н Кощенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 4, 591 (1961).
36. А. Е Саломонович, Б Я. Лосовский, Астроном. ж , **39**, № 6, 1074 (1962).
37. А Е Саломонович, Астроном ж , **39**, № 1, 79 (1962).
38. А Г Кисляков, А Е Саломонович, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **6**, № 3, 431 (1963)
39. A. E Solomonovich, Poc. Roy. Soc., **296**, 354 (1937).
40. В. С. Троицкий, Астроном ж., **59**, № 4, 724 (1964).
41. Н. П. Барабашов, В. А. Езерская, В. И. Езерский, Т. И. Ишутина, Изв ком по физ. планет, № 1, 67(1959).
42. J. M. Saari, R. W. Shorthill, Icarus, **3**, № 2, 161 (1964).
43. В. Д. Кротиков, В С. Троицкий, Астроном. ж., **40**, № 1, 158 (1963).
44. Н. Н Сытинская, Астроном. ж., **36**, № 2, 315 (1959).
45. О. И. Орнатская, Я И. Альбер. Астроном. ж., **44**, № 1, 158 (1967).
46. А. А. Богданов, И. Я. Брусин, М. С. Кагорлицкий, Т. В. Тихонова, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика (в печати).
47. В. С. Троицкий, Астроном. ж., **42**, № 6, 1296 (1965).
48. E. Pettit, S. B. Nicolson, Astrophys. J., **71**, 102 (1930).
49. E. Pettit, Astrophys. J., **91**, 408 (1940)
50. J. E. Gibson, Astrophys. J., **133**. 1072 (1961); Proc. IRE, **46**, 280 (1960).
51. W. M. Sinton, Astrophys. J., **123**, № 2, 325 (1956).
52. R. W. Shorthill, H. C. Borough, J M. Canley, Publ. Astron. Soc. Poc., **72**, № 429, 481 (1960).
53. J. P. Castalli, C. P. Terioli, J Aarons, Astronom. J., **65**, № 9, 485 (1960).
54. J. M. Saary, R. W. Shorthill, Boeing Sci. Res. Lab., July, 1962.
55. С. А. Каменская, А. Г. Кисляков, В. Д. Кротиков, А. И. Наумов, В Н. Никонов, В А Порфирьев, В. М. Плечков, К. М Стрежнева, В. С. Троицкий, Л И. Федосеев, Л. В. Лубяко, Э. П. Сорокина. Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **8**, № 2, 219 (1965).
56. В М. Плечков, Астроном. ж , **43**, № 1. 172 (1966).
57. Н. С Соболева, Астроном. ж., **39**, № 6, 1124 (1962)
58. J. W. M. Baars, D. G. Mezger, N. Savin, H. Wendkel, URSI Symposium, Tokyo, 1963.

59. C. E. Heiles, E. D. Drake, Icarus, **2**, 281 (1963).
60. T. Hagfors, J. Moriello, J. Res. Nat. Bur. Standards, **69D**, № 12, 1614 (1965).
61. R. D. Davies, F. F. Gardner, Aust. J., **19**, 823 (1966).
62. J. V. Evans, Physics and Astronomy of the Moon, Acad. Press. N.—Y.—London, 1962, p. 429.
63. J. V. Evans, J. Res. Nat. Bur. Standards, **69D**, № 12, 1637 (1965).
64. A. Giraund, J. Res. Nat. Bur. Standards, **69D**, № 12, 1677 (1965).
65. J. R. Davis, D. C. Rahlfs, G. A. Skaggs, J. W. Joss, J. Res. Nat. Bur. Standards, **69D**, № 12, 1659 (1965).
66. J. V. Evans, T. Hagfors, J. Geoph. Res., **71**, № 20, 4871 (1966).
67. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астроном. ж., **39**, № 6, 1089 (1962).
68. В. А. Алексеев, Т. Н. Алешина, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астроном ж. (в печати).
69. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 6, 1127 (1960).
70. В. С. Троицкий, Астроном. ж., **38**, № 5, 1001 (1961).
71. А. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
72. В. С Троицкий, Астроном. ж., **39**, № 1, 73 (1962).
73 В. С. Троицкий, Изв. ком по физике планет, № 3, 16 (1961)
74 В. Д Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 6, 1057 (1962).
75 Ю. Г. Матвеев, Г. Л. Сучкин, В. С. Троицкий, Астроном. ж, **42**, № 4, 810 (1965).
76. H. C. Ingrao, A. T. Young, J. L. Linsky, Harv. Coll. Observ. Rep., № 6, 15 (1965).
77. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астроном. ж., **40**, № 6, 1076 (1963).
78. J. L. Linsky, Icarus, **5**, № 6, 606 (1966).
79. В С. Троицкий, А. Б. Буров, Т. Н. Алешина, Изв. ком по физике планет (в печати).
80. В. С. Троицкий, Nature, **213**, 688 (1967); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 8, 1051 (1967)
81. Г. Н. Дульнев, Ю. П Заричняк, Б. Л Муратова, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 5, 849 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 мая 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 538.566

КОМПЛЕКСНЫЕ ЛУЧИ И КОМПЛЕКСНЫЕ КАУСТИКИ*

Ю. А. Кравцов

Известно, что метод геометрической оптики не только дает наглядную качественную картину развития волновых процессов в неоднородных средах, но в ряде случаев обеспечивает достаточно хорошее количественное их описание. В последнее время были предприняты попытки расширить область применимости этого метода, сняв те или иные ограничения. Одно из обобщений метода опирается на введение комплексных лучей [1—7] и преследует, по крайней мере, две цели: во-первых, находить поле в области каустической тени, не затрагивая непосредственную окрестность каустик, а во-вторых, отыскивать поле в неоднородных поглощающих средах. Этому обобщению и посвящен настоящий обзор.

Мы приняли следующий план изложения. В разделе 1 описан метод геометрической оптики для скалярного волнового уравнения в такой форме, которая допускает естественное обобщение на комплексные лучи. Самим комплексным лучам посвящен раздел 2. В разделе 3 приводится несколько примеров решения волновых задач с использованием комплексных лучей. В разделе 4 комплексным лучам придается определенный физический смысл путем выяснения их связи с вектором плотности потока интенсивности, а в 5 рассматривается векторная задача. В разделе 6 обсуждается связь между «комплексной» геометрической оптикой и некоторыми асимптотическими методами в теории распространения волн в неоднородных средах. Наконец, круг задач, при решении которых целесообразно пользоваться комплексными лучами, очерчен в разделе 7.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2\varepsilon(\boldsymbol{r})\, u = 0, \qquad k = \omega/c \tag{1}$$

в приближении геометрической оптики ищется в виде $u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m} e^{ik\varphi}$, при этом фаза φ удовлетворяет уравнению эйконала

$$(\nabla\varphi)^2 = \varepsilon(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

а амплитуда нулевого приближения $A_0 \equiv A$ — уравнению переноса

$$2\nabla A\, \nabla\varphi + A\Delta\varphi = 0. \tag{3}$$

Пусть на поверхности S_0, уравнение которой мы запишем в пара-

* Доложено вне программы на IV Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Харьков, 1967.

метрическом виде: $r_0 = r_0(\xi, \eta)$, заданы начальные значения эйконала $\varphi_0(\xi, \eta)$ и амплитуды $A_0(\xi, \eta)$. Решение уравнения эйконала (2) с начальным условием $\varphi(r_0)=\varphi_0(\xi, \eta)$ записывается в виде

$$\varphi(r) = \varphi_0(\xi, \eta) + \int_0^\tau \varepsilon[r(\xi, \eta, t)]\, dt. \tag{4}$$

Интегрирование в (4) ведется вдоль характеристической кривой (траектории луча), которая должна быть найдена из уравнений характеристик. Последние мы запишем в канонической гамильтоновой форме:

$$\frac{dr}{d\tau} = p, \qquad \frac{dp}{d\tau} = \frac{\nabla\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Здесь $p \equiv \nabla\varphi$, а параметр τ нормирован так, что $(dr/d\tau)^2=\varepsilon$ (дифференциал $d\tau$ связан с элементом длины луча $d\sigma$ соотношением $d\tau = d\sigma/\sqrt{\varepsilon}$, так что $\tau = \int_0^\sigma d\sigma/\sqrt{\varepsilon}$; для плазмы τ — групповой путь волны). На траекториях, определяемых из (5), достигается экстремум оптического пути φ (принцип Ферма).

Решения уравнений (5)

$$r(\tau) = R(\xi, \eta, \tau), \tag{6а}$$

$$p(\tau) = P(\xi, \eta, \tau) \tag{6б}$$

должны удовлетворять следующим начальным условиям:

$$r(0) = r_0(\xi, \eta), \qquad p(0) = \nabla\varphi_0(\xi, \eta), \tag{7}$$

т. е. луч должен выходить из точки $r_0 = r_0(\xi, \eta)$ поверхности S_0 с наклоном, определяемым величиной $\nabla\varphi_0$*. Из (6а), (6б) и (7) следует, что два параметра ξ и η полностью определяют положение луча в пространстве.

Решение уравнения переноса (3) с начальным условием $A(r_0) = A_0(\xi, \eta)$ может быть записано в виде

$$A(r) = A_0(\xi, \eta)\left[\frac{D(0)}{D(\tau)}\right]^{1/2}, \tag{8}$$

где $D(\tau) = \partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \tau)$. Решение (8) эквивалентно обычно используемому выражению $A = A_0(\sqrt{\varepsilon_0}\, ds_0/\sqrt{\varepsilon}\, ds)^{1/2}$, где ds_0/ds — отношение сечений лучевой трубки в начальной и текущей точках луча.

Выражения (4) и (8) определяют закон изменения фазы и амплитуды поля $u=A\exp(ik\varphi)$ в нулевом приближении геометрической оптики при перемещении вдоль траектории (при таком перемещении изменяется только параметр τ, тогда как ξ и η остаются постоянными). Положение осложняется, если требуется определить φ и A не вдоль какого-либо фиксированного луча, а в произвольной точке r. В этом случае из векторного уравнения траектории (6а), которое эквивалентно системе трех скалярных уравнений, нужно найти три параметра $\xi(r)$, $\eta(r)$ и $\tau(r)$, определив тем самым точку $r_0(r) = r_0[\xi(r), \eta(r)]$ выхода из поверхности S_0 луча, проходящего через r, и «расстояние» τ от $r_0(r)$ до точки наблюдения r.

* Хотя начальная фаза $\varphi_0(\xi, \eta)$ определяет только две компоненты вектора $\nabla\varphi_0$, касательные к поверхности S_0, третья, нормальная к S_0, компонента может быть найдена (с точностью до знака) из уравнения эйконала (2).

Если данной точке r соответствует несколько значений параметров $\xi_\nu(r)$, $\eta_\nu(r)$ и $\tau_\nu(r)$, то это означает, что в нее приходит несколько лучей, вышедших из разных точек поверхности S_0. Каждому из этих лучей соответствуют свои значения фазы и амплитуды, определяемые из (4) и (8), в которых нужно положить $\xi=\xi_\nu(r)$, $\eta=\eta_\nu(r)$, $\tau=\tau_\nu(r)$. Может случиться также, что корни ξ_ν, η_ν и τ_ν уравнений (6а) будут кратными. Этой возможности отвечает обращение функционального определителя $D(\tau)$ в нуль, т. е. попадание точки наблюдения на каустику. Согласно (8), амплитуда A при этом обращается в бесконечность.

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЛУЧИ

Формально комплексные лучи определяются как комплексные решения уравнений (5), и потому их изучение не требует никакого дополнительного математического аппарата, кроме изложенного выше.

По-видимому, впервые понятие комплексных лучей (наряду с понятием дифракционных лучей, здесь не рассматриваемых) было введено Келлером в работе [1], в которой был исследован только случай однородной среды. В дальнейшем Келлер и Секлер [2] рассмотрели комплексные лучи в плоскослоистых средах, а Келлер и Карал [3] применили их для решения задач о возбуждении поверхностных волн. Бабич использовал комплексные лучи для аналитического продолжения волновой функции в область каустической тени [4]. Саясовым [5] комплексные лучи были введены при решении уравнений Максвелла в трехмерно неоднородных средах с поглощением. В более общей постановке комплексные лучи (точнее, комплексные траектории микрочастиц) были рассмотрены Масловым [6, 7] в связи с квазиклассической асимптотикой уравнения Шредингера и других уравнений квантовой механики. Комплексные траектории возникли в [6, 7] как комплексные решения уравнений движения частиц в областях, не доступных для классических объектов.

Поясним, что нужно понимать под комплексными лучами, на примере лучевой картины в окрестности простой каустики (рис. 1). В области света в любую точку r приходят два луча, один из которых назовем прямым, а другой — отраженным (последний попадает в точку r после того, как он коснулся каустики). Уравнение (6а) имеет в этом случае два вещественных решения для ξ, η и τ, соответствующих прямому и отраженному лучам. При переходе через каустику уравнения (6а) уже не дадут вещественных решений для ξ, η и τ, так как находящаяся в каустической тени точка r не доступна для лучей света.

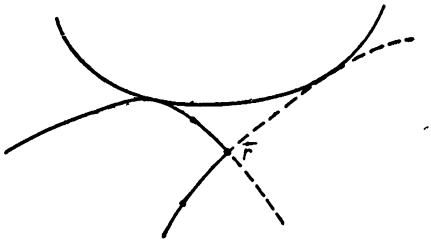


Рис. 1.

Однако, если предположить, что уравнение $r_0 = r_0(\xi, \eta)$ поверхности S_0, дающее в аналитическом виде связь вектора $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ с параметрами ξ и η, сохраняет силу и при комплексных значениях этих величин*, из уравнений (6а) можно найти комплексные значения величин ξ, η, τ, которым будут соответствовать комплексные точки выхода $r_0(\xi, \eta)$ луча из начальной поверхности S_0 и комплексные начальные

* Подобное же предположение необходимо сделать и относительно диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r)$. Именно, следует считать, что функция $\varepsilon = \varepsilon(r)$, заданная при вещественных x, y, z, аналитически продолжена в область комплексных значений координат. Эта функция может быть комплексной и при вещественных r (поглощающая среда).

«наклоны» $\nabla\varphi_0(\xi, \eta)$. Следовательно, при изменении параметра τ от нуля до $\tau(r)$ при фиксированных значениях $\xi=\xi(r)$ и $\eta=\eta(r)$ вектор $R[\xi(r), \eta(r), \tau]$, являющийся формальным решением уравнений (5), будет изменяться от начального комплексного вектора

$$R[\xi(r), \eta(r), 0] = r_0[\xi(r), \eta(r)]$$

до вещественного конечного вектора $R[\xi(r), \eta(r), \tau(r)] = r$, принимая при промежуточных значениях τ комплексные значения $R(\tau) = R'(\tau) + iR''(\tau)$ (одним и двумя штрихами мы будем обозначать соответственно вещественные и мнимые части). Кривая в шестимерном пространстве $(X', X''; Y', Y''; Z', Z'')$, описываемая вектором $R(\tau)$ при указанном изменении τ, и будет представлять собой комплексный луч.

Соответствующие комплексным лучам фаза φ и амплитуда A (они по-прежнему должны определяться из (4) и (8)) также будут комплексны. Важно подчеркнуть, что при вычислении эйконала φ путь интегрирования в комплексной плоскости τ можно деформировать в некоторых пределах, которые определяются областью аналитичности функции $\varepsilon[r(\tau)]$ (для целых функций $\varepsilon(r)$ эта область охватывает все шестимерное пространство). При такой деформации изменяется, конечно, и конфигурация лучей (у них закреплены лишь начальная и конечная точки r_0 и r), т. е. экстремум оптического пути $\varphi = \int \varepsilon d\tau = \int \sqrt{\varepsilon}\, d\sigma$ достигается на континуальном множестве комплексных траекторий. Это утверждение явным образом противоречит принципу Ферма, согласно которому время распространения света между двумя точками экстремально на счетном множестве траекторий. По-видимому, для комплексных лучей принцип Ферма в указанной формулировке не применим, поскольку, как известно, при переходе через каустику меняется форма светового импульса, вследствие чего теряет смысл само понятие «время прихода сигнала». Однако при этом остается справедливым другой, более абстрактный вариационный принцип: комплексный эйконал φ экстремален на траекториях, определяемых из уравнений (5).

В рассмотренном выше примере простой каустики, в которой через любую точку в освещенной области проходят два луча, следует ожидать, что через произвольную точку, находящуюся в каустической тени, также будут проходить два комплексных луча. Из физических соображений ясно, что поле $u=A\exp(ik\varphi)$ должно убывать по мере углубления в каустическую тень. Поэтому из двух комплексных лучей следует исключить из рассмотрения тот, для которого мнимая часть фазы φ'' отрицательна и нарастает с углублением в область тени. Аналогичные «правила отбора» должны быть установлены и в общем случае, когда через точку r проходит больше двух комплексных лучей.

Кроме того, нужно условиться, что при обращении якобиана $D(\tau)$ в нуль (это происходит при прохождении вещественных лучей через каустику) аргумент $D(\tau)$ увеличивается на $n\pi$, где n — кратность нуля [7]. Это правило вытекает, например, из сравнения с точными решениями, когда таковые имеются. В частности, на простой каустике $D(\tau)$ меняет знак на обратный. Если принять, что после прохождения каустики $D(\tau) = -|D(\tau)| = |D(\tau)|\exp(i\pi)$ (а не $|D(\tau)|\exp(-i\pi)$), то в амплитуде появится фазовый множитель $\exp(-i\pi/2)$, возникающий, как известно, при полном отражении.

Не останавливаясь более детально на правилах обращения с комплексными лучами, которые разработаны еще недостаточно полно, обратимся к конкретным примерам.

3. ПРИМЕРЫ

а) В качестве первого примера рассмотрим «хрестоматийную» задачу *о поведении «плоской» волны в линейном слое* с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)=\varepsilon_0-\varepsilon_1 z$. Пусть в плоскости $z=z_0$ задано начальное поле $u_0=\exp(ikn_0x\sin\theta)$ (считается, что волна распространяется в сторону положительных z), где $n_0=\sqrt{\varepsilon(z_0)}=\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon_1 z_0}$, $\theta=\text{const}$. В рассматриваемой плоской задаче в качестве параметра ξ выступает x_0 — координата на поверхности $z=z_0$, так что $A_0(x_0)=1$ и $\varphi_0(x_0)=n_0x_0\sin\theta$. Уравнения характеристик (5) в данном случае таковы:

$$\frac{dx}{d\tau}=p_x,\quad \frac{dz}{d\tau}=p_z,\quad \frac{dp_x}{d\tau}=0,\quad \frac{dp_z}{d\tau}=-\frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{9}$$

Решения этой системы уравнений, удовлетворяющие начальным условиям $x(0)=x_0$, $z(0)=z_0$, $p_x(0)=n_0\sin\theta$, $p_z(0)=n_0\cos\theta$, имеют следующий вид:

$$x(\tau)=x_0+\tau n_0\sin\theta,\quad z(\tau)=z_0+\tau n_0\cos\theta-\frac{\varepsilon_1\tau^2}{4}; \tag{10а}$$

$$p_x(\tau)=n_0\sin\theta,\quad p_z(\tau)=n_0\cos\theta-\frac{\varepsilon_1\tau}{2}. \tag{10б}$$

Из (10а) находим два «расстояния» τ_1 и τ_2, а также две координаты x_{01} и x_{02} точек выхода лучей из начальной поверхности S_0:

$$\tau_{1,2}=\frac{2}{\varepsilon_1}\left(n_0\cos\theta\mp\sqrt{n_0^2\cos^2\theta-\varepsilon_1(z-z_0)}\right); \tag{11}$$

$$x_{0\,1,2}=x-\tau_{1,2}n_0\sin\theta. \tag{12}$$

При расположении точек наблюдения ниже каустической поверхности, $z<z_к\equiv z_0+\frac{1}{\varepsilon_1}n_0^2\cos^2\theta$, величины $\tau_{1,2}$ и $x_{0\,1,2}$ вещественны — они соответствуют двум вещественным лучам (рис. 2), а при $z>z_к$ (каустическая тень) $\tau_{1,2}$ и $x_{0\,1,2}$ комплексны. На рис. 3б, в изображены проекции комплексных траекторий на плоскости (X', X'') и (Z', Z'') для шести путей $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2}$ в комплексной плоскости τ, показанных на рис. 3а. При изменении τ от нуля до τ_1 или τ_2 величины $X(\tau)$ и $Z(\tau)$ вдоль луча принимают в общем случае комплексные значения, а при $\tau=\tau_{1,2}$ они становятся вещественными. Заметим, что лучи в плоскослоистых средах, исследованные в [2], отличаются от обсуждаемых здесь тем, что они начинаются с вещественных начальных значений и попадают в комплексные точки r.

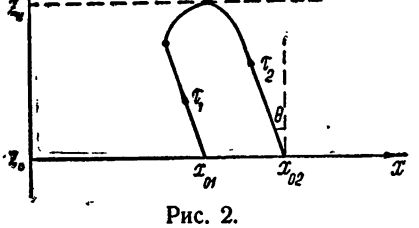


Рис. 2.

Вычисление эйконала и амплитуды по формулам (4) и (8) дает следующие результаты:

$$\varphi_{1,2}=\varphi_0(x_{0\,1,2})+\int_0^{\tau_{1,2}}[\varepsilon_0-\varepsilon_1 z(t)]\,dt=$$
$$=n_0x\sin\theta+\frac{2}{3\varepsilon_1}\left[n_0^3\cos^3\theta\mp\left(n_0^2\cos^2\theta-\varepsilon_1(z-z_0)\right)^{3/2}\right]; \tag{13}$$

$$A_1 = [n_0 \cos\theta \{n_0^2 \cos^2\theta - \varepsilon_1(z-z_0)\}^{-1/2}]^{1/2},$$
$$A_2 = -iA_1. \qquad (14)$$

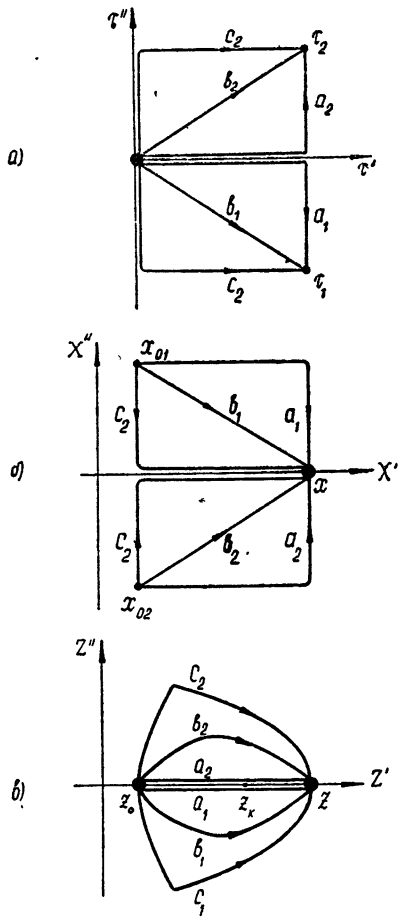


Рис. 3.

При $z < z_к$ (т. е. ниже каустики) поле u представляется в виде суммы двух слагаемых, описывающих прямую и отраженную волны:

$$u = A_1 \exp(ik\varphi_1) + A_2 \exp(ik\varphi_2), \qquad (15$$

причем множитель $-i = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$ во втором соотношении (14) обусловлен полным отражением. Выше каустики, $z > z_к$, поле выражается одночленной формулой

$$u = A_1 \exp(ik\varphi_1), \quad \varphi_1'' < 0, \qquad (16)$$

при увеличении z оно экспоненциально затухает. Разумеется, такие же выражения можно получить и из точного решения волнового уравнения (1), если заменить функцию Эйри ее асимптотикой [8].

б) Точечный источник в линейном слое. Пусть источник расположен в точке x_0, z_0 (мы опять рассматриваем двумерную задачу) в линейном слое с $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 z$. Лучи находятся из уравнений (9) с такими же, как в примере *а*), начальными условиями для x, z, p_x, p_z, но теперь роль параметра ξ играет угол θ, а x_0 и z_0 фиксированы. Примем, что $\varphi_0(x_0, z_0) = 0$ и что амплитуда A при $R \equiv [(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2} \to 0$ имеет особенность вида $1/\sqrt{R}$ (цилиндрическая расходимость вблизи источника). Для «расстояния» τ и синуса угла выхода луча θ из (10а) находим

$$\tau_{1,2} = \frac{2}{\varepsilon_1}(\sqrt{f_1} \mp \sqrt{f_2}), \qquad \sin\theta_{1,2} = \frac{x-x_0}{n_0\tau_{1,2}}, \qquad (17)$$

где

$$f_{1,2} = \frac{1}{2}[2\varepsilon_0 - \varepsilon_1(z+z_0) \pm \varepsilon_1 R]. \qquad (18)$$

Величины τ и θ вещественны при $f_2 > 0$ и комплексны при $f_2 < 0$. Из условия $f_2 = 0$ находится уравнение каустики $4n_0^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 z) = \varepsilon_1^2(x-x_0)^2$. Каустика, показанная на рис. 4, имеет вид параболы.

При помощи (4), (8) и (17) находим два значения эйконала φ и амплитуды A:

$$\varphi_{1,2} = \frac{2}{3\varepsilon_1}(\sqrt{f_1^3} \mp \sqrt{f_2^3}); \qquad (19)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{\tau_1}\sqrt[4]{f_1 f_2}}, \qquad A_2 = \frac{-i\sqrt{n_0}}{\sqrt{\tau_2}\sqrt[4]{f_1 f_2}}. \tag{20}$$

На каустике амплитуды обращаются в бесконечность. В области света ($f_2 > 0$) поле u выражается суммой двух слагаемых вида (15), а в области каустической тени — одночленной формулой (16), где $\varphi_{1,2}$ и $A_{1,2}$ определяются из (19) и (20). Такие же выражения для поля получаются и из асимптотики точного решения [9].

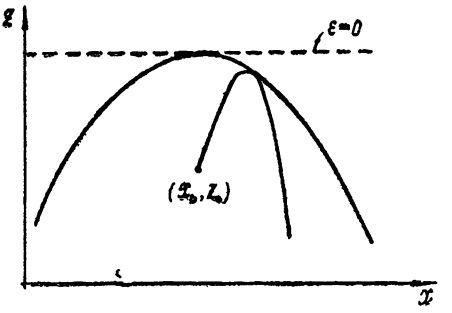


Рис. 4.

в) Комплексные лучи в окрестности каустик в однородной среде [1]. Запишем уравнение каустики в однородной среде ($\varepsilon = 1$) в параметрической форме: $x = x_0(\xi)$, $y = y_0(\xi)$ (для простоты мы опять рассматриваем плоскую задачу). Как известно [10], в однородной среде эйконал на каустике численно равен длине дуги: $\varphi_0(\xi) = \int_0^{\xi} [x_0'^2(\beta) + y_0'^2(\beta)]^{1/2} d\beta$, а лучи являются касательными к кривой $x = x_0(\xi)$, $y = y_0(\xi)$. Используя эти условия, из уравнений характеристик (5), в которых нужно положить $\nabla\varepsilon = 0$, находим

$$x(\tau) = x_0(\xi) + p_x\tau, \qquad y(\tau) = y_0(\xi) + p_y\tau; \tag{21}$$

$$p_x(\tau) = \frac{x_0'(\xi)}{[x_0'^2(\xi) + y_0'^2(\xi)]^{1/2}}, \qquad p_y(\tau) = \frac{y_0'(\xi)}{[x_0'^2(\xi) + y_0'^2(\xi)]^{1/2}}. \tag{22}$$

Из (21) получаем два уравнения для определения ξ и τ:

$$\frac{x - x_0(\xi)}{y - y_0(\xi)} = \frac{x_0'(\xi)}{y_0'(\xi)}, \qquad \tau = \pm\{[x - x_0(\xi)]^2 + [y - y_0(\xi)]^2\}^{1/2}, \tag{23}$$

при этом эйконал φ равен

$$\varphi = \varphi_0(\xi) + \tau. \tag{24}$$

В случае круговой каустики [1, 11] $x_0(\xi) = a\cos\xi$, $y_0(\xi) = a\sin\xi$, $\varphi_0 = a\xi$ (ξ — угол в полярной системе координат) из (23) находим

$$\xi_{1,2} = \alpha \mp \arccos\frac{a}{r}, \qquad \tau_{1,2} = \pm\sqrt{r^2 - a^2},$$
$$\varphi_{1,2} = a\alpha \mp \left(a\cdot\arccos\frac{a}{r} - \sqrt{r^2 - a^2}\right), \tag{25}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = y/x$. Если потребовать, чтобы амплитуда A зависела только от r (цилиндрическая симметрия), то по формуле (8) имеем

$$A_1 = (r^2 - a^2)^{-1/4}, \qquad A_2 = -i(r^2 - a^2)^{-1/4}. \tag{26}$$

В формулах (25) и (26) индексы 1 и 2 соответствуют двум лучам, касающимся круговой каустики.

При $r > a$ (рис. 5) лучи касаются круговой каустики в вещественных точках $x_{01,2} = a\cos\xi_{1,2}$ и $y_{01,2} = a\sin\xi_{1,2}$, а при $r < a$ точки касания

становятся комплексными. Соответственно будут комплексными эйконал и амплитуда. В частности, $\varphi_1 = a\alpha - i\left[\sqrt{a^2-r^2} - a\cdot\operatorname{arcch}\frac{r}{a}\right]$, $A_1 = \exp(-i\pi/4)(a^2-r^2)^{-1/4}$. Полное поле запишется в виде (15) при $r>a$ и в виде (16) при $r<a$. Точно такие же результаты (с коэффициентом $\sqrt{2/\pi k}$ при амплитуде) получаются и из асимптотики точного решения, которое выражается через бесселевы функции $u = J_{ka}(kr)\exp(ika\alpha)$.

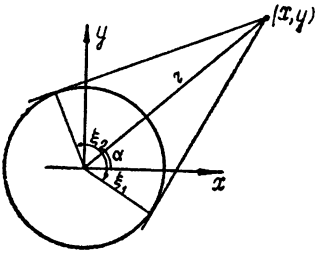


Рис. 5.

Все рассмотренные выше примеры относились к случаю двух (вещественных или комплексных) лучей. Возможны, однако, и более сложные лучевые картины. Случай трех лучей реализуется, например, в окрестности каустики с заострением (рис. 6), для которой $x_0(\xi) = a\xi^3$, $y_0(\xi) = b\xi^2$, $\varphi_0(\xi) = \frac{1}{27a^2}[(9a^2\xi^2+4b^2)^{3/2} - (2b)^3]$, а первое из уравнений (23) приводится к виду

$$\xi^3 - 3\frac{y}{b}\xi + 2\frac{x}{a} = 0$$

и имеет три корня ξ_1, ξ_2, ξ_3. При $D \equiv (x/a)^2 - (y/b)^3 < 0$ (область I на рис. 6а) все три корня вещественны, поскольку в области I все три луча и соответствующие им три корня ξ_1, ξ_2, ξ_3, характеризующие точку касания каустики, вещественны. При $D > 0$ (область II на рис. 6а) корень ξ_1 вещественный, а корни ξ_2, ξ_3 комплексные (в области II через каждую точку x, y проходит только один вещественный луч). Эйконал φ может быть, в принципе, вычислен по формуле (24), но при этом получаются трудно обозримые выражения, которые мы не приводим.

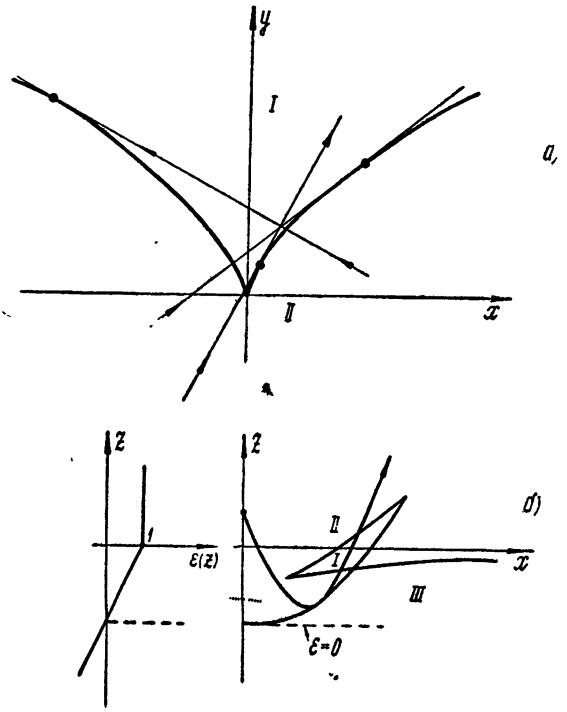


Рис. 6.

г) Пример каустики с двумя точками заострения. Такая каустика возникает, как показано в [12], внутри линейного слоя с $\varepsilon = 1 - \varepsilon_1 z$, если источник расположен в однородном полупространстве ($\varepsilon = 1$), прилегающем к слою, на расстоянии $L < 2/3\varepsilon_1$ от начала слоя (рис. 6б). В области I через каждую точку проходит четыре луча, а в области II — два луча, т. е. два луча становятся комплексными. В области тени III комплексны все четыре луча.

д) Задача о вычислении поля точечного источника в параболическом слое ($\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 z^2$) дает интересный пример бесконечного числа комплексных лучей. Пусть $\varepsilon_0 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$ (параболический потенциальный барьер) и источник расположен в точке x_0, z_0 ($z_0 < 0$), такой, что $n_0^2 \equiv \varepsilon(z_0) > 0$ (рис. 7а). Решая уравнения характеристик

$$\frac{dx}{d\tau} = p_x, \quad \frac{dz}{d\tau} = p_z, \quad \frac{dp_x}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = \varepsilon_2 z$$

с такими же начальными условиями, как в примерах *а*) и *б*), находим

$$x(\tau) = x_0 + \tau n_0 \sin\theta, \tag{27а}$$

$$z(\tau) = z_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right) + \frac{n_0 \cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right). \tag{27б}$$

Исключая из (27а), (27б) θ, получаем для определения параметра τ следующее уравнение:

$$\frac{(x-x_0)^2}{\tau^2} + \varepsilon_2 \left[\frac{z - z_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right)}\right]^2 = n_0^2. \tag{28}$$

Анализ этого уравнения показывает, что в освещенной области имеется два вещественных корня τ_1 и τ_2. Соответственно этому имеется два вещественных луча, при этом лучевая картина подобна изображенной на рис. 4. Вне освещенной области вещественные лучи, разумеется, отсутствуют. В то же время трансцендентное уравнение (28) допускает бесконечное число комплексных решений и в освещенной, и в теневой областях.

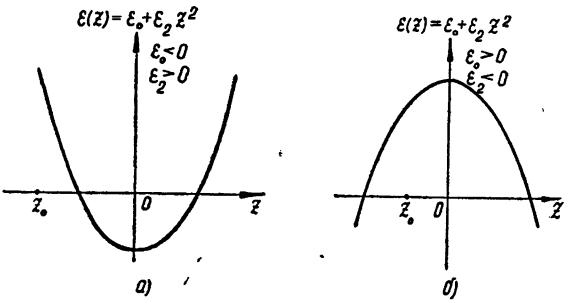


Рис. 7.

Причину появления бесконечного числа лучей можно выяснить, рассматривая ту же задачу для параболической потенциальной ямы, т. е. слоя с $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_2 < 0$ (рис. 7б). Если источник расположен в области прозрачности ($n_0^2 > 0$), то $\operatorname{ch}\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right)$ и $\operatorname{sh}\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right)$ в уравнениях (27а), (27б) и (28) следует заменить соответственно на $\cos\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right)$ и $\sin\left(\sqrt{\varepsilon_2}\,\tau\right)$. Произведя такую замену, легко установить, что уравнение (28) допускает бесконечное число вещественных решений для τ в прозрачной области $\varepsilon(z) > 0$, поскольку через каждую точку в этой области проходит бесконечно много вещественных лучей (некоторые из них показаны на рис. 8). В случае параболического барьера им соответствует бесконечное число комплексных лучей.

Аналогичным образом устанавливается соответствие между бесконечным числом вещественных каустик в потенциальной яме (см. [8], §§ 38—40) и бесконечным множеством комплексных каустик в случае потенциального барьера. Уравнения комплексных каустик, которые расположены в шестимерном пространстве комплексных координат и нигде не пересекают вещественной плоскости X', Z', можно найти, используя равенство нулю якобиана $D(\tau)$.

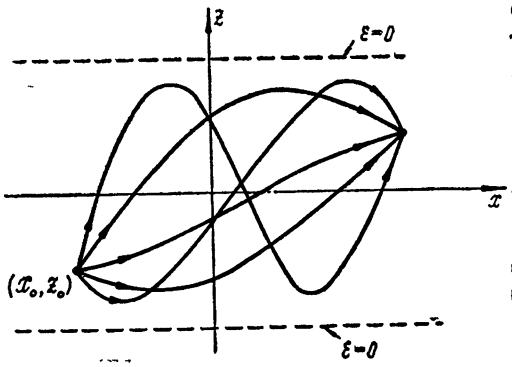


Рис. 8.

Определение поля в произвольной точке x, z требует численного решения трансцендентного уравнения (28). Здесь мы приведем аналитическое решение для одного частного случая, а именно: вычислим поле за толстым барьером на оси $x = x_0$, проходящей через источник перпендикулярно слою. Слой будем считать толстым, если $\delta_0 \equiv k\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{|\varepsilon(z)|}\,dz = k\pi|\varepsilon_0|/2\sqrt{\varepsilon_2} \gg 1$, где $z_{1,2}$ — нули функции $\varepsilon(z)=\varepsilon_0+\varepsilon_2 z^2$. Из уравнения (28) при $x = x_0$ находим бесконечный набор значений τ:

$$\tau_\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}\left\{\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\,z+\sqrt{\varepsilon(z)}}{\sqrt{\varepsilon_2}\,z_0+\sqrt{\varepsilon(z_0)}}\right| - i\pi - 2\pi i\nu\right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{29}$$

каждому из которых соответствует эйконал

$$\varphi_\nu = \int_0^{\tau_\nu}[\varepsilon_0+\varepsilon_2 z^2(t)]\,dt = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{\varepsilon(z)} - z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)} + \varepsilon_0\tau_\nu\right] \tag{30}$$

и якобиан

$$D_\nu(\tau) = -\tau_\nu\sqrt{\varepsilon(z_0)\,\varepsilon(z)}\exp(2\pi i\nu), \tag{31}$$

при этом, согласно (27а), $\theta = 0$.

Появление множителя $\exp(2\pi i\nu)$ в (31) можно установить, проследив изменение $\arg D_\nu(\tau)$ с увеличением τ от нуля до τ_ν, а слагаемое $-i\pi$ в (29) представляет собой аргумент выражения, стоящего под логарифмом. Отрицательные значения индекса ν исключены из рассмотрения по той причине, что при падении плоской волны (т. е. при удалении источника в бесконечность) соответствующие им амплитуды за барьером превышали бы амплитуду падающей волны. Если нормировать амплитуду таким образом, чтобы при $|z-z_0| \to 0$ вблизи источника имела место цилиндрическая расходимость, т. е. чтобы $A \to |z-z_0|^{-1/2}$, то при помощи (31) для A_ν получим

$$A_\nu = \frac{\exp(-\pi i\nu)}{\sqrt{\tau_\nu}\sqrt[4]{\varepsilon(z)}}. \tag{32}$$

Полное поле за барьером на оси $x = x_0$ представляется суммой $u(x_0, z) = \sum_\nu A_\nu \exp(ik\varphi_\nu)$, где A_ν и φ_ν определяются формулами (30) и (32). Отношение $(\nu+1)$-го члена к ν-му по модулю равно $\exp(-2\delta_0)$. Поэтому

при $\delta_0 \gg 1$ в суммарном поле можно ограничиться только членом с $\nu=0$:

$$u(x_0, z) \simeq \frac{1}{\sqrt{\tau_0}\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} \exp\left[\frac{ik}{2}\left(z\sqrt{\varepsilon(z)} - z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\right)\right] \times$$

$$\times \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, z + \sqrt{\varepsilon(z)}}{\sqrt{\varepsilon_2}\, z_0 + \sqrt{\varepsilon(z_0)}}\right|^{ik|\varepsilon_0|/\sqrt{\varepsilon_2}} \exp(-\delta_0).$$

Множитель $\exp(-\delta_0)$ в этом выражении описывает ослабление поля вследствие просачивания волны через барьер.

Аналогичным путем можно найти поле, претерпевшее надбарьерное отражение от слоя с $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 z^2$, $\varepsilon_0, \varepsilon_2 > 0$ (источник по-прежнему расположен в точке x_0, z_0; поле ищется на оси $x = x_0$ при $z > 0$):

$$u(x_0, z) = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} \exp\left[\frac{ik}{2}\left(-z\sqrt{\varepsilon(z)} - z_0\sqrt{\varepsilon(z_0)}\right)\right] \times$$

$$\times \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\, z - \sqrt{\varepsilon(z)}}{\sqrt{\varepsilon_2}\, z_0 + \sqrt{\varepsilon(z_0)}}\right|^{ik\varepsilon_0/2\sqrt{\varepsilon_2}} \exp\left(-\delta_1 - i\frac{\pi}{2}\right),$$

где $\delta_1 = k\pi\varepsilon_0/2\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{ik}{2}\oint\sqrt{\varepsilon(z)}dz \gg 1$ (контур интегрирования охватывает нули $z_{1,2} = \pm i\sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_2}$ функции $\varepsilon(z)$). Малые множители $\exp(-\delta_0)$ и $\exp(-\delta_1)$ характерны для подобного рода одномерных задач [13, 14]. Случай, когда эти множители сравнимы с единицей, требует специального рассмотрения.

е) Другой пример бесконечного числа комплексных лучей дает задача *о прохождении волны через плоский фазовый экран* с синусоидальной модуляцией. Рассмотрим сначала задачу об экране в общем виде. Пусть на плоскость $y = 0$ падает волна $u(x, y) = \exp(iky)$. Если на экране фаза волны модулируется по закону $\varphi = \varphi_0(x)$, то поле на выходе из экрана будет равно $u(x, 0) = \exp(ik\varphi_0(x))$. Решая уравнения характеристик (5) с начальными условиями

$$x(0) = \xi, \quad y(0) = 0, \quad p_x(0) = \varphi_0'(\xi), \quad p_y(0) = \sqrt{1-\varphi_0'^2(\xi)},$$

имеем

$$x(\tau) = \xi + \tau\varphi_0'(\xi), \quad y(\tau) = \tau\sqrt{1-\varphi_0'^2(\xi)}. \tag{33}$$

Параметры ξ и τ, соответствующие лучу, проходящему через фиксированную точку x, y, определяются, согласно (33), из уравнений

$$\frac{x-\xi}{y} = \frac{\varphi_0'(\xi)}{\sqrt{1-\varphi_0'^2(\xi)}}, \quad \tau = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}, \tag{34}$$

при этом

$$\varphi = \varphi_0(\xi) + \tau, \quad A = A_0(\xi)\left[1 - \frac{y}{R(\xi)}\right]^{-1/2}, \tag{35}$$

где

$$1/R(\xi) = -\varphi_0''(\xi)/[1-\varphi_0'^2(\xi)]^{3/2}.$$

Заметим, что если начальное поле на экране $u_0 = \exp(ik\gamma\xi)$ таково, что $\gamma > 1$ («медленная» по сравнению с волной в вакууме волна), то подстановка в (34) $\varphi_0(\xi) = \gamma\xi$ сразу же дает $\xi = x + iy/\sqrt{\gamma^2-1}$, $\tau =$

$=-iy/\sqrt{\gamma^2-1}$. Тогда по формуле (35) получаем $\varphi=\gamma x+i\sqrt{\gamma^2-1}\,y$, что соответствует поверхностной волне $\exp\left(ik\gamma x-k\sqrt{\gamma^2-1}y\right)$, распространяющейся вдоль оси x и затухающей с ростом y. Таким образом, поверхностные волны получают довольно естественное описание на языке комплексных лучей.

Для синусоидального фазового экрана $\varphi_0(\xi)=b\sin(2\pi\xi/a)$ уравнение (34) для определения ξ принимает вид

$$\frac{x-\xi}{y}=\frac{2\pi b\cos(2\pi\xi/a)}{[a^2-(2\pi b)^2\cos^2(2\pi\xi/a)]^{1/2}}. \tag{36}$$

Вещественные корни этого уравнения можно найти графически. Из рис. 9 видно, что на малых расстояниях от экрана ($y=y_1$) уравнение (36) имеет только один вещественный корень, при $y=y_2$ — три корня, при $y=y_3$ — пять корней и т. д. (считается, что $2\pi b<a$, т. е. модуляция достаточно медленная). Таким образом, с удалением от экрана число вещественных лучей увеличивается, а следовательно, усложняется структура суммарного поля вследствие интерференции этих лучей. Это видно и из лучевой картины, показанной на рис. 10, на котором римскими цифрами отмечено число вещественных лучей, приходящих в данную часть плоскости x, y, а толстыми линиями изображены каустики. Число комплексных лучей в каждой из областей бесконечно.

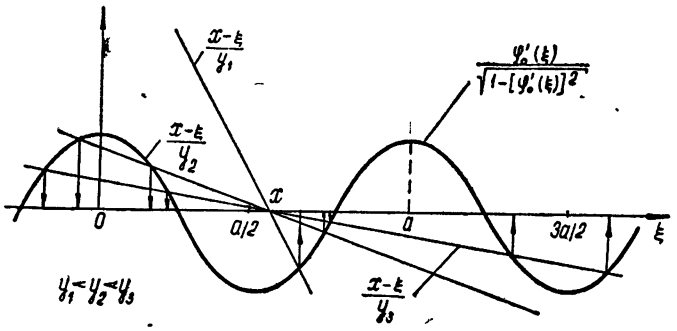


Рис. 9.

Укажем еще несколько не охватываемых примерами *а*)—*е*) задач, решение которых имеется в литературе.

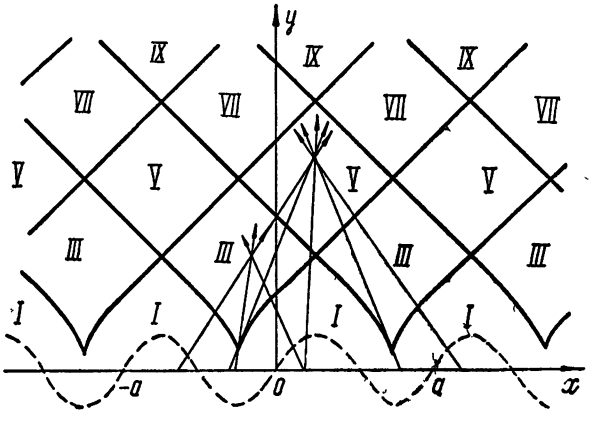


Рис. 10.

ж) В работе [6] исследовано описываемое уравнением Шредингера рассеяние в n-мерном пространстве на потенциале $v(r)$, убывающем на бесконечности не медленнее, чем r^{-2n}. Там же на примере одномерной задачи рассмотрено резонансное рассеяние в случае двух горбов у потенциала $v(x)$. Отмечено, что результаты этой работы переносятся на случай комплексного потенциала (т. е. на случай поглощающих сред в электродинамических задачах).

з) Характеристики излучения антенны, погруженной в поглощающую неоднородную среду со сферической симметрией, изучены в [5].

и) В [15] исследована возможность появления фокусов для комплексных лучей, расположенных в вещественных точках.

к) Распространение и возбуждение поверхностных волн (независимо от их природы) изучено в [3].

л) Прохождение плоской волны через плоский потенциальный барьер с произвольным профилем $\varepsilon(x)$ было исследовано в [2].

м) Наконец, в [4] и [7] рассмотрено распространение разрывов поля, т. е. исследована асимптотика решений волнового уравнения, а не уравнения Гельмгольца (1).

4. ПЛОТНОСТЬ ТОКА ИНТЕНСИВНОСТИ, СВЯЗАННАЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЛУЧАМИ

Вектор плотности потока интенсивности $\boldsymbol{I}$ определяется формулой

$$\boldsymbol{I} = \frac{i}{2k}\left[u\nabla u^* - u^*\nabla u\right]. \tag{37}$$

В случае вещественных лучей, для которых поле $u = A\exp(ik\varphi)$ в нулевом приближении метода геометрической оптики выражается через вещественные величины A и φ, вектор $\boldsymbol{I}$ равен

$$\boldsymbol{I} = A^2\nabla\varphi \equiv A^2\boldsymbol{p} \tag{38}$$

и направлен по нормали к фазовому фронту, т. е. по касательной к вещественному лучу.

Для комплексных лучей выражение для $\boldsymbol{I}$ приводится к виду

$$\boldsymbol{I} = \left[|A|^2\nabla\varphi' + \frac{1}{k}\left(A'\nabla A'' - A''\nabla A'\right)\right]\exp(-2k\varphi''). \tag{39}$$

Вторым членом в (39) можно пренебречь в силу медленности изменения A, и тогда с точностью до членов порядка $O(1/k)$ (т. е. с точностью до членов, не учитываемых в нулевом приближении геометрической оптики) имеем

$$\boldsymbol{I} = |A|^2\exp(-2k\varphi'')\nabla\varphi' \equiv |A|^2\exp(-2k\varphi'')\,\boldsymbol{p}'. \tag{40}$$

Формула (40) показывает, что вектор $\boldsymbol{I}$ параллелен вещественной компоненте $\boldsymbol{p}'$ вектора $\boldsymbol{p}\equiv\nabla\varphi$, т. е. направлен по нормали к поверхностям равных значений вещественной составляющей комплексной фазы $\varphi = \varphi' + i\varphi''$. Таким образом, с направлением потока энергии связана только вещественная часть «касательного» к комплексному лучу вектора $\boldsymbol{p}$ в точке наблюдения $\boldsymbol{r}$. Из (40) следует далее, что абсолютная величина плотности потока интенсивности I экспоненциально убывает с ростом φ'', причем направление, в котором I убывает быстрее всего, параллельно мнимой составляющей $\boldsymbol{p}'' = \nabla\varphi''$. В самом деле, учитывая медленность изменения A и $p' = \sqrt{(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}')}$, имеем

$$\nabla I = \left[\nabla(|A|^2 p') - 2k\boldsymbol{p}''|A|^2 p'\right]\exp(-2k\varphi'') \simeq -\left[2k|A|^2 p'\exp(-2k\varphi'')\right]\boldsymbol{p}''. \tag{41}$$

Легко установить, что при вещественном ε векторы $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$ ортогональны друг к другу: приравняв нулю вещественные и мнимые части в уравнении эйконала (2), получаем

$$(\boldsymbol{p}')^2 - (\boldsymbol{p}'')^2 = \varepsilon, \qquad 2(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'') = 0. \tag{42а}$$

На рис. 11 схематически показаны кривые равных значений φ' и φ'' и векторы $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$, параллельные $\boldsymbol{I}$ и ∇I.

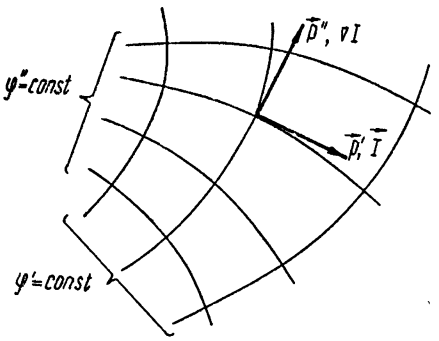


Рис. 11.

Описанная картина подобна той, которая имеет место для плоских неоднородных волн, — там тоже направление потока энергии и направление, в котором экспоненциально уменьшается интенсивность, ортогональны друг к другу. Эта аналогия не случайна. Подобно тому, как геометрооптическое поле, связанное с вещественными лучами, представляет собой локально плоскую волну, так и поле, связанное с комплексными лучами, является локально плоской неоднородной волной.

5. ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА

Решение уравнений Максвелла для монохроматического сигнала

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = ik\varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -ik\boldsymbol{H} \tag{42б}$$

в приближении геометрической оптики ищется в виде [16]

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}_m}{(ik)^m} \exp(ik\varphi), \qquad \boldsymbol{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}_m}{(ik)^m} \exp(ik\varphi). \tag{43}$$

Эйконал φ в (43) удовлетворяет уравнению (2) и может быть найден обычным путем при помощи (4) и (5).

Векторные амплитуды нулевого приближения $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ определяются по формулам [16]

$$\boldsymbol{A}_0 = \Phi_1 \boldsymbol{n} + \Phi_2 \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{B}_0 = \Phi_1 \boldsymbol{b} - \Phi_2 \boldsymbol{n}, \tag{44}$$

где $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные векторы нормали и бинормали луча. Величина $(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)/\varepsilon$ удовлетворяет уравнению (3) и может быть определена по формуле (8), в то время как угол $\gamma = \operatorname{arctg}(\Phi_1/\Phi_2)$ между электрическим вектором $\boldsymbol{A}_0$ и нормалью $\boldsymbol{n}$ находится из уравнения*

$$d\gamma/d\tau = \sqrt{\varepsilon}\,/\,T, \tag{45}$$

где $T = \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n} + \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$ — радиус кручения луча.

Как было указано Саясовым [5], все приведенные выше соотношения сохраняют силу и в случае комплексных лучей, если операцию скалярного умножения комплексных векторов определить точно таким же образом, как и для вещественных векторов. Именно, если $\boldsymbol{a} = \sum a_k \boldsymbol{i}_k$

* Напомним, что $d\tau = ds/\sqrt{\varepsilon}$, где ds — элемент длины луча; таким образом, уравнение (45) эквивалентно обычному соотношению $d\gamma/ds = 1/T$.

и $\boldsymbol{b} = \sum b_k \boldsymbol{l}_k$, где a_k и b_k — комплексные величины, то* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum a_k b_k$. Аналогично угол γ между двумя комплексными векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется из формулы $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}\cos\gamma$. Комплексность угла γ в рассматриваемом случае означает, что волна имеет эллиптическую поляризацию, которая, как известно [17], может быть описана комплексными векторами. Отметим еще, что для комплексных лучей остается справедливым давний результат Владимирского [18] (воспроизведенный недавно Льюисом [19]), согласно которому вращение векторов поля относительно естественного трехгранника $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{t}$ — единичный вектор волновой нормали) сопровождается еще и противоположным вращением самого трехгранника.

Не вызывает сомнений, что комплексная геометрическая оптика пригодна и для описания распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, свойства которых характеризуются тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$. Применимость же этого метода к векторным задачам квантовой механики и теории упругости вытекает из результатов работы [7].

6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЛУЧИ И НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

а) Комплексная геометрическая оптика и интегральные представления поля. Известно, что решения волнового уравнения, полученного методом геометрической оптики, определенным образом связаны с асимптотикой интегральных представлений поля**, являющихся точным решением волновых задач. Пусть, например, поле $u(\boldsymbol{r})$ в однородной среде с $\varepsilon = 1$ записывается в виде разложения по плоским волнам вида

$$u(\boldsymbol{r}) = \int g(\boldsymbol{r}, \varkappa) \exp[ik\varphi(\boldsymbol{r}, \varkappa)]\, d\varkappa. \tag{46}$$

Вычисление этого интеграла методом стационарной фазы дает следующий результат [20]:

$$u(\boldsymbol{r}) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sum_{\nu} A_\nu(\boldsymbol{r}) \exp[ik\varphi(\boldsymbol{r}, \varkappa_\nu(\boldsymbol{r}))], \tag{47}$$

где

$$A_\nu(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r}, \varkappa_\nu(\boldsymbol{r})) \left| \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{r}, \varkappa_\nu(\boldsymbol{r}))}{\partial \varkappa^2} \right|^{-1/2} \exp(\pm i\pi/4);$$

знак $+$ или $-$ соответствует знаку $\partial^2\varphi/\partial\varkappa^2$ (предполагается, что $\partial^2\varphi/\partial\varkappa^2 \neq 0$), а стационарные точки $\varkappa_\nu(\boldsymbol{r})$ находятся из уравнения $\partial\varphi(\boldsymbol{r}, \varkappa)/\partial\varkappa = 0$. Суммирование в (47) производится по всем стационарным точкам.

Непосредственная проверка показывает, что величина $\varphi(\boldsymbol{r}, \varkappa_\nu(\boldsymbol{r}))$ удовлетворяет уравнению эйконала (2), а амплитуда $A_\nu(\boldsymbol{r})$ — уравнению переноса (3). Отсюда следует, что каждый член суммы (47) соответствует определенному лучу, пришедшему в точку наблюдения. Подобное же истолкование можно дать и асимптотическим представлениям интегралов, описывающим поведение поля в неоднородных средах (несколько примеров такого рода имеется, например, в [8]).

---

* Это определение отличается от принятого для комплексных эвклидовых пространств, где $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum a_k b_k^*$; заметим, что мы по существу уже пользовались этим определением, например, в уравнении (3), где имеется скалярное произведение $(\nabla A, \nabla\varphi)$, а также в уравнении эйконала, где $(\nabla\varphi)^2 = (\nabla\varphi, \nabla\varphi)$.

** Если таковые имеются.

Может случиться, что кроме указанных выше вещественных точек $\varkappa_\nu$ появятся еще и комплексные стационарные точки (последние правильнее называть перевальными точками), которые также находятся из условия $\partial\varphi(r, \varkappa)/\partial\varkappa = 0$. Вычисление интегралов вида (46) методом перевала показывает, что асимптотика поля по-прежнему записывается в виде (47) (с тем отличием, что в амплитуде A_ν фазовый множитель $\exp(\pm i\pi/4)$ заменяется на $\exp(i\gamma)$, где γ зависит от ориентации перевального пути), но теперь фаза $\varphi(r, \varkappa_\nu(r))$ и амплитуда $A_\nu(r)$ оказываются комплексными величинами. Несмотря на это, они удовлетворяют уравнениям геометрической оптики (2) и (3). Поэтому экспоненциально малые слагаемые в (47), отвечающие комплексным $\varkappa_\nu$, можно приписать комплексным лучам. То, что этот факт оставался незамеченным (во всяком случае, в известной нам литературе прямые указания на это отсутствуют*), объясняется, по-видимому, чисто психологическими причинами, а именно: существующей традицией относить к геометрической оптике только вещественные лучи.

б) Метод эталонных функций и метод Маслова. В основе обоих асимптотических методов лежит идея о «пришивании дифракционного мяса на геометрический костяк». В первом из указанных методов асимптотика поля выражается через специальные эталонные функции (их выбор производится в соответствии с видом каустик) с аргументами и амплитудными множителями, подлежащими определению. Первоначально этот метод был развит для одномерных (см., например, [21, 22]), а в последнее время — и для многомерных задач [23–26]. Оказывается, что отыскание неизвестных величин в методе эталонных функций фактически сводится к решению алгебраических уравнений, связывающих эти величины с решениями (как вещественными, так и комплексными) уравнений геометрической оптики. Особенно простая связь имеет место в случае простой каустики, когда равномерная асимптотика поля выражается через функцию Эйри $v(t)$ и ее производную $v'(t)$ следующим образом [23, 26]:

$$u = k^{1/6}\exp(-i\pi/4)\,[Q_1 v(k^{2/3}\psi_1) + ik^{-1/3}(-\psi_1)^{-1/2}Q_2 v'(k^{2/3}\psi_1)]\exp(ik\psi_2). \tag{48}$$

Величины $\psi_{1,2}$ и $Q_{1,2}$ в (48) связаны с решениями $\varphi_{1,2}$ и $A_{1,2}$ уравнений геометрической оптики соотношениями

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \frac{2}{3}(-\psi_1)^{3/2} = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1); \tag{49}$$

$$Q_1 = (-\psi_1)^{1/4}(A_1 + iA_2), \qquad Q_2 = (-\psi_1)^{1/4}(iA_2 - A_1), \tag{50}$$

которые выполняются как в области света ($\psi_1 < 0$), так и в области каустической тени ($\psi_1 > 0$).

Важно отметить, что при $|k^{2/3}\psi_1| \gg 1$, т. е. при достаточно большом удалении от каустик, выражение (48) переходит в освещенной области в сумму падающей и отраженной волн вида (15), а в области

* Сделанное замечание нуждается в пояснении. Во многих задачах коротковолновой дифракции на проводящих телах или в средах, содержащих границы раздела, в выражениях для поля также возникают экспоненциально малые члены, но они связаны не с комплексными, а с келлеровыми «дифракционными» лучами [1], которые отличаются от комплексных лучей по крайней мере в двух отношениях: 1) дифракционные лучи представляют собой вещественные линии в пространстве; 2) расчет поля при помощи дифракционных лучей существенно использует результаты решения некоторой эталонной (по терминологии Келлера — «канонической») задачи, т. е использует такие дополнительные сведения, без которых обходится комплексная геометрическая оптика. В принципе мыслимы ситуации, при которых комплексные лучи порождают дифракционные лучи, и наоборот.

тени — в затухающую волну вида (16). Это обстоятельство (так же, как и сравнение с точными решениями в тех случаях, когда их удается найти) может служить обоснованием постулированных в разделе 2 «правил отбора» комплексных лучей в случае простой каустики.

В асимптотической теории Маслова [7] задача о наращивании «волнового мяса» решается по-иному — путем нахождения асимптотики волновой функции в смешанном координатно-импульсном представлении с последующим переходом к чисто координатному представлению при помощи фурье-трансформации, причем в получающихся интегралах подынтегральные выражения конструируются на основе решений геометрической оптики. На удалении от каустик, где отпадает необходимость переходить к смешанному представлению, а стало быть, и оперировать с интегральным фурье-преобразованием, метод Маслова дает результаты, полностью эквивалентные методу комплексной геометрической оптики.

в) Комплексные лучи и метод фазовых интегралов. Определение волновой функции при помощи комплексных лучей имеет много общего с методом фазовых интегралов. В самом деле, метод фазовых интегралов, развитый для одномерных задач [14], имеет своей целью находить асимптотику поля вдали от точек поворота таким образом, чтобы избежать вычисления поля в окрестности самих точек поворота. Для этого изучается поведение поля не только при вещественных, но и при комплексных значениях аргумента. Использование общих свойств волновой функции (например, ее аналитичности) в методе фазовых интегралов позволяет установить определенные правила обхода точек поворота в комплексной плоскости аргумента и в итоге найти связь между амплитудами и фазами падающей, отраженной и просочившейся за точку поворота волн.

Аналогом одномерных точек поворота в трехмерном случае являются каустические поверхности. Для того, чтобы «обойти» каустические поверхности (т. е. чтобы вычислить асимптотику поля вдали от каустик, не затрагивая их ближайшие окрестности), как раз и приходится вводить комплексные лучи в шестимерном комплексном пространстве ($\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{R}''$). По существу, этим достигается, как и в методе фазовых интегралов, аналитическое продолжение волновой функции (например, аналитический переход от суммы двух бегущих волн (15) к затухающей волне (16)), на что обращалось внимание в [1, 4, 11]. Поэтому комплексную геометрическую оптику можно рассматривать как обобщение метода фазовых интегралов на трехмерный случай. Детальное сопоставление обоих методов в литературе не проводилось.

7. О ЗАДАЧАХ, ПРИ РЕШЕНИИ КОТОРЫХ ЦЕЛЕСООБРАЗНО ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КОМПЛЕКСНЫМИ ЛУЧАМИ

Круг таких задач в общих чертах ясен из изложенного выше. Во-первых, это нахождение асимптотики поля в области каустической тени как в случае простых (примеры *а*)—*в*) из раздела 3), так и сложных (примеры *в*), *г*) и *е*)) каустик. Во-вторых, задачи о рассеянии волн на неоднородных (в частности, плазменных) образованиях, к которым примыкают задачи о просачивании через барьер или надбарьерном отражении (пример *д*).

В-третьих, проблема асимптотического вычисления поля в окрестности самих каустик. Здесь вещественные и комплексные геометрооптические решения используются как костяк, на который затем накладывается «волновое мясо» по тому или иному рецепту (раздел 6). На-

пример, асимптотику поля для круговой каустики можно найти по формуле (48), полученной методом эталонных функций, если в качестве $\psi_{1,2}$ и $Q_{1,2}$ в соответствии с (25) и (26) взять следующие величины:

$$\psi_1 = -\left\{\frac{3}{2}\left[\sqrt{r^2-a^2} - a\cdot\arccos\frac{a}{r}\right]\right\}^{2/3}, \qquad \psi_2 = a\alpha,$$

$$Q_1 = \left(\frac{-\psi_1}{r^2-a^2}\right)^{1/4}, \qquad Q_2 = 0.$$

Аналогичным образом для примера *б*) из раздела 3 (точечный источник в линейном слое) имеем

$$\psi_1 = -\varepsilon_1^{-2/3} f_2, \qquad \psi_2 = \frac{2}{3\varepsilon_1} f_1^{3/2},$$

$$Q_1 = \frac{\sqrt{n_0}\varepsilon_1^{-1/6}}{\sqrt[4]{f_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_1}} + \frac{1}{\sqrt{\tau_2}}\right), \quad Q_2 = \frac{\sqrt{n_0}\varepsilon_1^{-1/6}}{\sqrt[4]{f_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\right).$$

С указанными значениями $\psi_{1,2}$ и $Q_{1,2}$ (48) дает (в отличие от метода геометрической оптики) конечные значения поля на каустике.

В-четвертых, задача о распространении волн в неоднородных поглощающих средах, т. е. в средах с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''$. Относительно этой задачи сделаем три замечания: а) в поглощающей среде, вообще говоря, все лучи становятся комплексными*, но при малом поглощении мнимую часть ε'' диэлектрической проницаемости можно рассматривать как возмущение; тогда интегрирование в (4) можно проводить вдоль «невозмущенного» вещественного луча, что обычно и делается при вычислении затухания; б) в поглощающих средах деление пространства на области света и области каустической тени становится весьма условным, поскольку в этом случае каустики «смещаются» в комплексное пространство** ($\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{R}''$); такое деление оправдано лишь при малом поглощении, когда указанное «смещение» каустик невелико, но оно теряет всякий смысл при $\varepsilon' \sim \varepsilon''$, так как при этом трудно установить, вызвано ли экспоненциальное ослабление поля поглощением или уходом в каустическую тень; в) в поглощающих средах ортогональность между $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$ и, следовательно, между векторами $\boldsymbol{I}$ и $\nabla\boldsymbol{I}$ нарушается (вместо второго уравнения (42) теперь имеем $2(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'') = \varepsilon'' \neq 0$).

Помимо перечисленных, имеются и другие, более частные задачи, при решении которых комплексные геометро-оптические решения могут оказаться полезными.

Одна из них — расчет поля точечного или распределенного излучателя, помещенного в область с отрицательной диэлектрической проницаемостью*** (эта проблема, как известно, с трудом поддается решению точными методами). Возможно, что здесь было бы целесообразно использовать теорему взаимности****, вычисляя предварительно поле

---

* Исключением являются некоторые вырожденные случаи с определенной симметрией, например, плоская и сферическая волны в однородной поглощающей среде.

** Так, каустика $f_2(x, z)=0$ (в примере б) раздела 3) при комплексных значениях ε_0 и ε_1 лежит в области комплексных координат X', X'' и Z', Z'', нигде не пересекая вещественную плоскость $x = X'$, $z = Z'$.

*** Или в более общей постановке — в поглощающую область с $\varepsilon' < 0$.

**** Заметим, кстати, что из теоремы взаимности непосредственно вытекает следующий интересный результат. Пусть точечный источник помещен в точке $\boldsymbol{r}_1$, а лучи, выходящие из $\boldsymbol{r}_1$, образуют каустику, проходящую через $\boldsymbol{r}_2$. Если теперь поместить источник в $\boldsymbol{r}_2$, то $\boldsymbol{r}_1$ окажется на каустике. Таким образом, при помощи теоремы взаимности можно установить определенные топологические свойства каустик. Некоторые особенности поведения волнового поля в окрестности каустик, вытекающие из теоремы взаимности, были рассмотрены в [27].

внутри рассматриваемой области, создаваемое внешним источником. Однако можно обойтись и без теоремы взаимности, оперируя с комплексными лучами обычным образом. В частности, если поместить источник в линейный слой в точку z_0, в которой $\varepsilon<0$, то по формулам примера *б*) раздела 3 можно рассчитать значения амплитуды и фазы волны. Заметим, что такие же результаты вытекают и из асимптотики точного решения [9]. Каустика для этой задачи по-прежнему описывается уравнением $f_2=0$, но, в отличие от случая $z_0<\varepsilon_0/\varepsilon_1$, ветви параболы расположены целиком в области $\varepsilon<0$, поскольку теперь $n_0^2\equiv\varepsilon_0-\varepsilon_1 z_0<0$.

Другая задача (или даже группа задач) связана с изучением случайных полей. Например, представляется естественным перенести на комплексные лучи методы расчета флуктуаций фазы и уровня, развитые для вещественных лучей [28, 29]. В такой постановке задача сведется к интегрированию возмущений вдоль невозмущенного комплексного луча. Очевидно, при последующем усреднении придется определить функцию корреляции случайных величин в комплексной области изменения координат. Кроме того, можно попытаться построить геометрооптическую теорию прохождения волн через случайный фазовый (или амплитудно-фазовый) экран, также введя в рассмотрение корреляционные функции в комплексной плоскости аргументов.

Третья задача — использование комплексных лучей для расчета поля в квазиоптических системах как закрытого*, так и открытого типов. В частности, можно надеяться, что комплексные лучи помогут определить дифракционные потери в открытых резонаторах сложной формы.

Наконец, не исключено, что комплексная геометрическая оптика окажется полезной в дифракционных задачах нелинейной оптики, где особенно желательно сохранить качественные лучевые представления в виду сложного характера поведения полей.

Разумеется, сказанное выше не означает, что применение комплексной геометрической оптики гарантирует получение существенно новых результатов (хотя в ряде случаев на это можно рассчитывать). Речь идет скорее о «ревизии» установившихся взглядов на пределы возможностей метода геометрической оптики. Такая ревизия, предпринятая, в частности, Келлером [1], по существу сводится к утверждению, что в методе геометрической оптики содержится нечто большее, чем интуитивное представление о линиях в пространстве, направление которых совпадает с направлением потока энергии. В подтверждение этой точки зрения приведем здесь решение плоской задачи о дифракции «гауссовского» пучка в вакууме, опирающееся исключительно на комплексный метод геометрической оптики. Этой задачей мы и закончим данный обзор.

Пусть в плоскости $y=0$ задано начальное поле $u_0(x,0)=\exp(-x^2/2a^2)$, которое мы представим в виде $u_0(x,0)=\exp\{ik(ix^2/2ka^2)\}$, т. е. положим $A_0=1$, $\varphi_0(x)=ix^2/2ka^2$. Таким образом, в противовес установившейся традиции, будем считать эйконал φ (а также, как будет следовать из дальнейшего, и амплитуду A) зависящим от волнового числа k и воспользуемся изложенной в примере *е*) раздела 3 теорией фазового экрана. Уравнение (34)

$$\frac{x-\xi}{y}=\frac{\varphi_0'(\xi)}{[1-\varphi_0'^2(\xi)]^{1/2}}=\frac{i\xi/ka^2}{[1+(\xi/ka^2)^2]^{1/2}} \tag{51}$$

для определения ξ решим в предположении, что $|\xi|\ll ka^2$. Тогда, как

* Комплексные лучи были применены Келлером и Рубиновым к исследованию собственных колебаний в круговых и эллиптических резонаторах [11].

следует из (51), $x-\xi \simeq i\xi y/ka^2$, откуда для «точки выхода» луча ξ (она будет комплексной) имеем

$$\xi = x\left(1+\frac{iy}{ka^2}\right)^{-1}. \tag{52}$$

Условие $|\xi| \ll ka^2$ означает, что $|x| \ll ka^2$ при $y \ll ka^2$ и $|x| \ll y$ при $y \gg ka^2$. Таким образом, при $ka \gg 1$ область возможных значений x и y такая же, как и в приближении френелевской дифракции.

Для «расстояния» τ при $|\xi| \ll ka^2$ получаем

$$\tau = [(x-\xi)^2+y^2]^{1/2} \simeq y\left(1-\frac{\xi^2}{2k^2a^4}\right). \tag{53}$$

Используя далее (35), (52) и (53), находим эйконал φ и амплитуду A:

$$\varphi = \varphi_0(\xi)+\tau \simeq \frac{i\xi^2}{2ka^2}+y\left(1-\frac{\xi^2}{2k^2a^4}\right) = y+\frac{ix^2}{2ka^2}\left(1+\frac{iy}{ka^2}\right)^{-1},$$
$$A = \left(1+\frac{iy}{ka^2}\right)^{-1/2}. \tag{54}$$

В результате поле $u = A\exp(ik\varphi)$ запишется в виде

$$u(x, y) = \left(1+\frac{iy}{ka^2}\right)^{-1/2}\exp\left[iky-\frac{x^2}{2a^2}\left(1+\frac{iy}{ka^2}\right)^{-1}\right]. \tag{55}$$

Такое же выражение получается и из точного решения

$$u(x, y) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varkappa^2a^2}{2}+i\varkappa x+i\sqrt{k^2-\varkappa^2}\,y\right]d\varkappa, \tag{56}$$

если считать, что $ka \gg 1$, и вычислить интеграл (56) методом перевала (по существу это эквивалентно приближению френелевской дифракции). При $y \ll ka^2$ (прожекторная зона) (55) переходит в $\exp\{iky - x^2/2a^2\}$, т. е. мы имеем дело с неискаженным пучком, а при $y \gg ka^2$ (зона Фраунгофера) имеем выражение

$$u(x, y) \simeq \frac{a\sqrt{k}}{\sqrt{y}}\exp\left[-\frac{i\pi}{4}+ik\left(y+\frac{x^2}{2y}\right)-\frac{x^2k^2a^2}{2y^2}\right] \simeq$$
$$\simeq \frac{a\sqrt{k}}{\sqrt{r}}\exp\left(ikr-\frac{x^2k^2a^2}{2y^2}-\frac{i\pi}{4}\right),$$

представляющее собой цилиндрическую направленную волну с углом расходимости $\sim 1/ka$ (здесь $r = (x^2+y^2)^{1/2}$).

Заметим, что поле $u(x, y)$ обращается в бесконечность в комплексной точке $y = ika$, которую можно рассматривать как комплексный фокус. Если же в начальном сечении поле равно $u_0(x, 0)\exp\left\{-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{ikx^2}{2R}\right\}$, т. е. представляет собой сфокусированную волну с фокусным расстоянием R, то в выражении (55) нужно заменить iy/ka^2 на $y(i/ka^2-1/R)$, и тогда фокус окажется расположенным в точке $y = (1/R - i/ka^2)^{-1}$ (при равномерной освещенности в начальном сечении, которая достигается при $a \to \infty$, фокус перемещается в вещественную точку $y = R$). Таким образом, рассматриваемая задача дает пример каустики (фокуса), расположенной в комплексной области.

Изложенные результаты можно рассматривать с двух точек зрения. Формально, в данном примере мы встречаемся с весьма удачным и в значительной мере случайным стечением обстоятельств. В самом деле, точное решение (56) относится к интегралам вида (46), причем здесь $g(r, \varkappa) = \exp(-\varkappa^2 a^2/2)$ и $\varphi(r, \varkappa) = \varkappa x/k + \sqrt{1-\varkappa^2/k^2}\, y$. Обычно при использовании метода стационарной фазы функция $g(r, \varkappa)$ предполагается медленной и выносится за знак интеграла со значением в стационарной точке $\varkappa_*$. Здесь же величину $\frac{1}{ik} \ln g(r, \varkappa) = -\frac{\varkappa^2 a^2}{2ik}$ можно присоединить к $\varphi(r, \varkappa)$ (перевальная точка становится тогда комплексной), а затем применить метод перевала в обычной форме. В результате и получится выражение (55), которое можно интерпретировать на языке комплексной геометрической оптики, например, так, как это было сделано выше. При других начальных распределениях $u(x, 0)$ величина $\frac{1}{ik} \ln g(r, \varkappa)$ не будет пропорциональна $\varkappa^2$, и потому при включении ее в $\varphi(r, \varkappa)$ интеграл вида (46), вычисленный методом стационарной фазы, будет плохо описывать истинное поведение поля.

Возможна и иная точка зрения. Выше, в разделе 4, мы вычислили вектор плотности потока интенсивности $\boldsymbol{I}$ лишь для нулевого приближения геометрической оптики. Как известно, последующие члены асимптотического разложения, имеющие порядок $O(1/k^m)$, $m \geqslant 1$, ответственны за поперечную диффузию интенсивности. Эффект поперечной диффузии мал, если волна прошла короткое расстояние, но на больших дистанциях он накапливается и приводит к существенному перераспределению интенсивности. С этой точки зрения включение в начальный эйконал $\varphi_0(\xi)$ величины $i\xi^2/2ka^2$, имеющей порядок $O(1/k)$, означает, по сути дела, учет поперечной диффузии, но не в качестве малого возмущения, а как накапливающийся эффект.

Речь идет, таким образом, о том, что некоторая подпоследовательность асимптотического ряда $u = \sum \frac{A_m}{(ik)^m} \exp(ik\varphi)$ (какая именно, сейчас сказать трудно) оказывается просуммированной, при этом получается новый ряд $u = \sum \frac{\tilde{A}_m}{(ik)^m} \exp(ik\tilde{\varphi})$, в котором $\tilde{A}$ и $\tilde{\varphi}$ зависят от волнового числа k, чем он и отличается от обычного геометро-оптического разложения. В этом новом разложении поперечная диффузия учтена уже в нулевом, а не в первом члене. Дальнейшие, более детальные исследования должны показать, в какой мере комплексная геометрическая оптика с эйконалом φ, зависящим от k, может претендовать на получение результатов, вытекающих из «метода плавных возмущений» Рытова [30], в котором ряды возмущений строятся для комплексной фазы $\psi(r, k)$ и охватывают существенно дифракционные явления уже в наинизшем порядке.

В заключение автор выражает глубокую признательность С. М. Рытову и всем принявшим участие в обсуждении данного обзора за советы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Keller, Proc. Symp. Appl. Math., Mc Graw—Hill, New York **8**, 27 (1958).
2. B. D. Secler, J. B. Keller, J. Acoust. Soc. Amer., **31**, № 2, 192 (1959).
3. J. B. Keller, F. C. Karal, J. Appl. Phys., **31**, № 6, 1039 (1960).
4. В. М. Бабич, сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, изд. ЛГУ, **5**, 145 (1961).

5. Ю. С. Саясов, Доклад на II Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Горький, 1962.
6. В. П. Маслов, ДАН СССР, **151**, № 2, 306 (1963).
7. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
8. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
9. Б. Т. Кормилицын, Радиотехника и электроника, **11**, № 6, 1130 (1966).
10. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
11. J. B. Keller, S. I. Rubinov, Ann. Phys., **9**, № 1, 24 (1960).
12. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 3, 497 (1966).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика. Нерелятивистская теория, Физматгиз, М, 1963.
14. Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), изд. Мир, М., 1965.
15. В. П. Маслов, Доклад на III Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Тбилиси, 1964.
16. С. М Рытов, ДАН СССР, **18**, № 4—5, 263 (1938); Тр. Физического ин-та АН СССР, **2**, № 1, 41 (1940).
17. Антенны эллиптической поляризации, ИЛ, М., 1961.
18. В. В. Владимирский, ДАН СССР, **31**, № 3, 222 (1941).
19. R. M. Lewis, IEEE Trans., **AP-14**, № 1, 100 (1966).
20 А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М, 1962.
21. R. E. Langer, Trans. Amer. Math. Soc., **33**, № 1, 23 (1931); Bull. Amer. Math. Soc., **40**, № 2, 545 (1934).
22. T. M. Cherry, Trans. Amer. Math. Soc., **68**, № 1, 224 (1950).
23. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 4, 664 (1964).
24. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 6, 1049 (1964).
25 Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 4, 659 (1965).
26. D. Ludwig, Comm. Pure Appl. Math., **19**, № 2, 215 (1966).
27. В. М. Бабич, сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, изд. ЛГУ, **6**, 60 (1962).
28 Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
29. В. И. Татарский, Флуктуационные явления при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
30. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, отд матем. и естеств. наук, № 2, 223 (1937).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
20 апреля 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 534.4:532.574.8

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В АКУСТИКЕ, ОПТИКЕ И РАДИОФИЗИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДУЛЯЦИОННОГО МЕТОДА

В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов

ВВЕДЕНИЕ

Разработка новых методов и совершенствование аппаратуры спектрального анализа имеет большое значение для постановки и успешного решения ряда научных и прикладных задач. Такие задачи по характеру исследуемых процессов и по методу их анализа могут быть разделены на три группы.

К первой группе отнесем задачи, связанные с выполнением спектрального анализа одномерных процессов. К таким задачам относятся задачи выделения синусоидального или почти синусоидального сигнала из шума при передаче информации по каналам связи в присутствии помех [1, 2]; задача технической диагностики качества работы механизмов по спектральному составу акустических шумов и вибраций [3,4]; спектральный анализ временных процессов сложной формы, таких как речевой сигнал [5], всевозможные биологические процессы (биотоки мозга, шумы сердца и т. д.); задача спектрального анализа оптического излучения и поглощения веществ [6] и т. д.

Ко второй группе отнесем задачи, связанные с необходимостью одновременного спектрального анализа большого числа независимых процессов (многоканальный анализ). Примерами таких задач могут являться следующие: спектральный анализ допплеровских частот в радиолокации [7,8], некоторые задачи радиолокации и радиоастрономии, связанные с проблемой создания синтезированной апертуры антенн [9,10], и т. д.

К третьей группе мы отнесем задачи, связанные с необходимостью исследования спектра пространственных частот. Примером задачи третьей группы может служить задача исследования пространственного спектра неоднородностей показателя преломления среды, лежащей на пути распространения волн [11, 12].

Естественно, такая классификация не охватывает с исчерпывающей полнотой все многообразие задач, при решении которых существенную роль играет спектральный анализ, однако она включает ряд типичных задач, на примере которых можно дать обзор специальных методов спектрального анализа.

Методам осуществления спектрального анализа посвящено большое количество работ, среди которых имеются книги и обзоры [13–16].

Целью настоящей работы является краткий обзор методов спектрального анализа, которым не уделялось должного внимания в литературе. Эти методы могут быть названы модуляционными методами, так как они основаны на модуляции светового потока (применительно к задачам первой и второй группы) или на модуляции радио- или акустических волн (применительно к задачам третьей группы).

В последнее время в литературе большое внимание уделяется оптическим методам спектрального анализа, основанным на дифракции света на исследуемой структуре. Эти методы также используют модуляцию светового потока и могут также быть с успехом применены при решении упомянутых выше задач. Однако, учитывая вышедшие в последнее время обзоры подобных методов [17—19], мы сочли возможным не включать их в настоящий обзор.

Основное отличие оптических методов спектрального анализа, рассматриваемых в данной работе, от методов, рассмотренных в обзорах [17, 19] с точки зрения оптики, заключается в условиях когерентности светового потока, используемого для целей спектрального анализа. Так как методы, рассматриваемые ниже, не предъявляют каких-либо требований к пространственной или временной когерентности света, то они иногда называются «некогерентными» методами оптического спектрального анализа. Однако такое название нам представляется неудачным, так как не отражает существа процесса анализа, который является в данном случае столь же «когерентным», как и всякий другой. Кроме того, приставка «некогерентный» по аналогии с «некогерентным накоплением» невольно создает представление о недостаточной эффективности метода по сравнению с когерентным. В данном случае это не так. Отсутствие жестких требований к когерентности светового потока повышает эффективность метода и расширяет область его применимости.

1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Спектральный анализ одномерных процессов производится с целью определения каких-либо его конкретных параметров. Максимально возможная эффективность этой операции может быть выражена через параметры самого исследуемого процесса независимо от того конкретного метода, с помощью которого совершается спектральный анализ. В самом деле, если ширина полосы частот, в которой локализуется основная часть энергии исследуемого процесса, есть $\Delta\nu$, а длительность рассматриваемого участка процесса есть T, то произведение этих величин ($N = T\Delta\nu$) определяет максимально возможное при данных параметрах увеличение амплитуды сигнала на какой-то одной частоте по сравнению со среднеквадратичным значением сигнала на других частотах. Такое увеличение сигнала, назовем его для краткости выигрышем, получается равным N тогда, когда сигнал представляет собою смесь шума, имеющего равномерную спектральную плотность мощности в полосе частот $\Delta\nu$, и синусоидального сигнала. Величина N определяет максимальную степень точности, с которой может быть с помощью спектрального анализа выделен и измерен какой-либо параметр исследуемого процесса в том случае, если сам процесс спектрального анализа совершается идеально точно.

Руководствуясь вышеприведенными соображениями, легко показать, что для повышения эффективности применения спектрального анализа следует стремиться к возможно большему значению числа N. Это требование накладывает определенные условия на аппаратуру спектрального анализа. Необходимым условием того, чтобы аппаратура могла обеспечить спектральный анализ с данным N, является достаточный объем выборки, одновременно подвергаемой спектральному анализу. Под объемом выборки мы понимаем число независимых значений сигнала. Необходимость этого условия можно пояснить, исходя из следующих соображений. Пусть длительность сигнала есть T. Если независимые значения располагаются через интервал Δt, то рассматриваемый сигнал представляет собой выборку объемом $T/\Delta t$. Учитывая то, что ши-

рина полосы сигнала и интервал Δt связаны соотношением $\Delta t = 1/\Delta\nu$, мы получаем, что объем данной выборки равен $T\Delta\nu$. Если объем этой выборки меньше заданного N, то никакой даже самый идеальный анализ не может обеспечить заданной величины N при обработке такой недостаточно большой выборки.

Другим важным параметром, характеризующим аппаратуру спектрального анализа, является ее быстродействие. Быстродействие анализа может характеризоваться временем T_a, за которое производится вычисление N спектральных компонент сигнала по выборке объемом N. Если необходим анализ в натуральном времени без накапливающегося запаздывания в выдаче результатов анализа по отношению к информации, поступающей на вход анализатора, то время анализа T_a не должно превышать длительности реализации сигнала T.

Это условие накладывает ограничения на частотный диапазон, в котором могут быть использованы те или иные системы спектрального анализа. Универсальные машины дискретного счета, например, целесообразно использовать для спектрального анализа инфранизкочастотных процессов, полоса которых ограничена сверху частотой порядка $10^{-1} \div 10^{-2}$ *гц*. Электрические аналоговые методы, основанные на использовании электрических фильтров, с успехом применяются для анализа сигналов в сравнительно высокочастотной области (более 100 *гц*). Освоение промежуточного диапазона частот ($10^{-2} \div 100$ *гц*) возможно с помощью оптических аналоговых систем модуляционного типа. Оптические системы спектрального анализа могут быть использованы и в других диапазонах, однако использование их в указанном выше диапазоне частот по сравнению с другими методами наиболее эффективно.

Оптический модуляционный метод спектрального анализа основан на модуляции пространственного распределения интенсивности светового потока с помощью некоторой периодической структуры [20]. Интегрирование модулированного светового потока фотоприемником в некоторой области пространства дает возможность измерять интеграл от произведения исследуемого сигнала на модулирующую синусоидальную функцию произвольного периода. Последовательное измерение интеграла для значений волнового числа модулирующей функции в некотором диапазоне дает нам спектр пространственного изображения исходного сигнала в этом диапазоне волновых чисел.

Возможность представления исследуемых процессов в пространственных координатах является для данного метода спектрального анализа определяющим фактором. Наиболее универсальным способом такого представления является запись сигналов на фотопленку. Параметры фотозаписи таковы, что позволяют вдоль одной строки длиной 10 *см* записать выборку объемом до 10^4 независимых значений, что позволяет производить анализ с большим значением N с помощью малогабаритного устройства [21].

Оптический модуляционный метод спектрального анализа с пространственным интегрированием реализуется, например, в простейшей схеме, изображенной на рис. 1 [22]. Лампа накаливания 1, помещенная в фокусе линзы 2, дает на ее выходе однородный параллельный пучок света. Световой однородный поток проходит через исследуемую запись 3, световой модулятор 4 и линзой 5 собирается на катоде фотоэлемента 6. Устройство модулятора таково, что волновое число (частота) и фаза пространственной синусоидальной структуры быстро изменяются по заданному закону. Модулятор может представлять собой две плоские решетки одинакового периода, стоящие друг за другом в плоскостях, перпендикулярных направлению светового потока [23, 24].

Частота модуляции пропорциональна синусу угла между штрихами решеток, фаза зависит от смещения одной из решеток в направлении, перпендикулярном штрихам решетки. Точность работы модулятора определяется точностью изготовления решеток и точностью их вращательного движения, влияющего на выбор определенной спектральной компоненты для анализа.

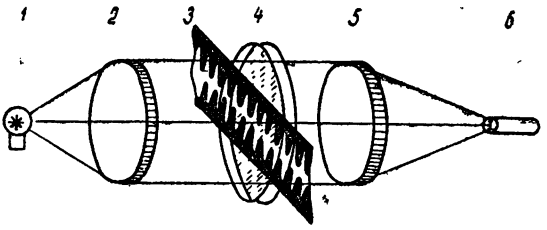


Рис. 1. Простейшая оптическая схема спектрального анализа с использованием модуляционного метода.

Представление о возможных параметрах такой схемы спектрального анализа дает рис. 2. На рис. 2а изображен исследуемый сигнал— периодическая последовательность импульсов прямоугольной формы. На рис. 2б приведен результат анализа спектра такой последовательности. Точками отмечены значения спектральных компонент, полученные расчетным путем. В опыте были использованы решетки, имеющие 10 штрихов на 1 *мм*, что позволило получить минимальную длину волны синусоидальной структуры 0,22 *мм*. Интервал пространственного интегрирования записи составлял 100 *мм*. Параметр $N = T\Delta\nu$ достигал значения 450. Это означает, что используемый анализатор эквивалентен набору из 450 параллельно работающих фильтров.

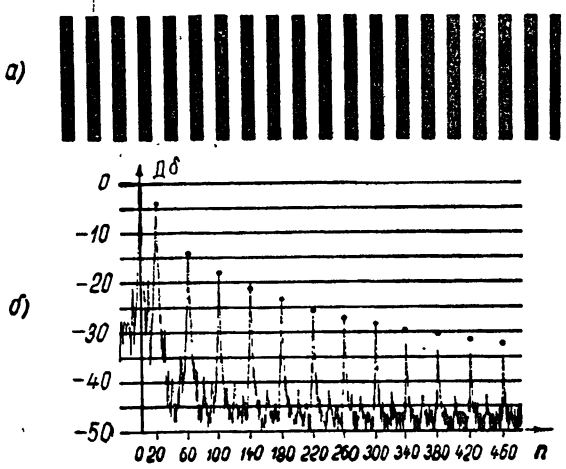


Рис. 2. а) Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и б) спектр последовательности. Спектр получен по схеме оптического модуляционного спектрального анализа с параметром (время × полоса) $N = T\Delta\nu = 450$. Частота отложена в относительных единицах. Спектральная плотность в *дб*. Точки — данные расчета.

На рис. 2б значения спектральных компонент даны в логарифмическом масштабе в децибелах. Наибольшее значение имеет спектральная компонента на нулевой частоте, соответствующая постоянной составляющей светового потока. Шумы записи лежат ниже этого уровня на 50 *дб*. Неточности изготовления решеток модулятора сказываются на уровне —60 *дб*. Шумы фотоумножителя — на уровне —70 *дб*. Скорость выдачи результатов анализа может быть высокой. Она зависит от скорости, с которой изменяется угол между решетками. Пятьсот значений в спектре

в данном случае получены за 0,5 *сек*, и это далеко не предел. Такое быстродействие может обеспечить работу анализатора в реальном времени в полосе до 900 *гц* с разрешающей способностью 2 *гц*. Разрешающая способность анализатора в абсолютных временных единицах (в герцах) может быть повышена путем увеличения времени интегрирования T. Так как величина N для данного анализатора постоянна, то с увеличением T сокращается полоса анализируемых частот. Так, с разрешающей силой 0,1 *гц*, например, может быть произведен анализ в полосе 45 *гц*.

Возможность быстрого получения и регистрации результатов анализа позволяет реализовать с помощью данной схемы получение «скользящего спектра» [13]. Для этой цели удобно использовать трехмерную индикацию результатов спектрального анализа, при которой по осям координат отложены частота и время, а значения спектральной плотности регистрируются в виде изменения плотности записи. Такая запись дает наглядное представление об изменениях спектра сигнала во времени, а для стационарных сигналов дает возможность проводить дополнительное усреднение результата анализа.

Образец записи скользящего спектра приведен на рис. 3. Здесь показан спектр синусоидального сигнала на фоне шума. Интенсивность сигнала убывает с течением времени скачками по 5 *дб*. Интенсивность шума остается постоянной. По приведенной спектральной картине можно судить о выигрыше спектрального анализа, осуществляемого при выделении синусоидального сигнала на фоне шума. Выигрыш в данном случае равен 25 *дб*, что соответствует теоретическому расчету. Достигнутая чувствительность в выделении слабых синусоидальных сигналов на фоне шума позволяет использовать подобные аналоговые схемы в качестве детекторов полезных квазисинусоидальных сигналов в различного рода каналах передачи информации в присутствии помех.

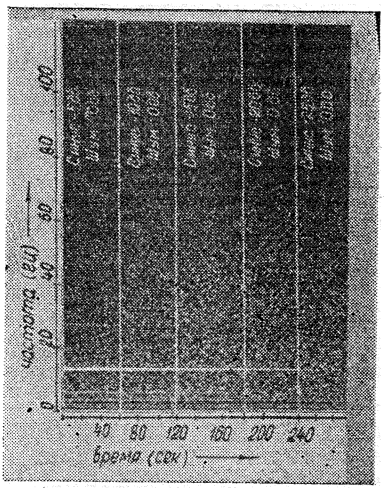


Рис. 3. Образец скользящего спектра синусоидального сигнала в присутствии шума. Спектр получен в устройстве, реализующем схему рис. 1. Спектральная плотность регистрируется на плоскости частота—время в виде изменения яркости. Амплитуда синусоидального сигнала уменьшается до—25 *дб* по отношению к средней амплитуде шума.

Достигнутая точность спектрального анализа и чувствительность при выделении синусоидальных сигналов на фоне шумов позволяют использовать методику в целом ряде актуальных задач. Рассмотрим один пример. О неисправной работе некоторых машин и механизмов можно судить по весьма слабым звукам определенного характера, содержащимся в шуме, издаваемом механизмом во время работы. Эти звуки, как правило, очень слабы по интенсивности, но имеют относительно узкий спектр и достаточно высокую стабильность во времени.

Для выделения и измерения таких звуков необходим спектральный анализ с большим временем интегрирования, необходимым для накопления эффекта. На рис. 4 приведен ряд примеров спектров шумов зубчатых передач, в которых упомянутые звуки, по которым можно судить о дефекте механизма, выделяются в виде дискретных линий. В работе [25] показано, что чувствительности, которой обладает установка, реализующая описанный метод [26], вполне достаточно для определения дефектов коробок перемены передач и задних мостов автомобилей.

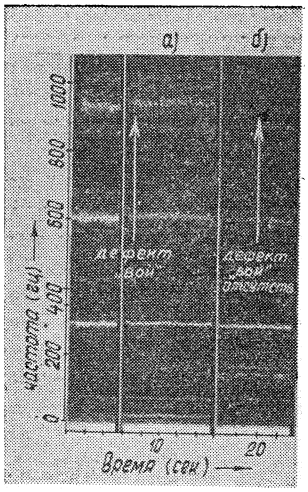


Рис. 4. Пример скользящего спектра шумов зубчатых передач:
а) в шуме обнаружен дефект „вой"; б) дефект „вой" отсутствует.

Большим удобством описанного метода анализа является возможность легко изменять величину интервала интегрирования, разрешающую способность и форму резонансной кривой анализатора в широких пределах. Это свойство может быть использовано при анализе нестационарных сигналов.

В качестве примера анализа нестационарного процесса на рис. 5а и 5б приведен спектр речевого сигнала. На рис. 5а — спектр гласных звуков русской речи. Длительность гласных звуков относительно велика, что позволяет проводить анализ с разрешающей способностью по частоте равной 10 *гц* и иметь до четырехсот независимых значений в спектре в полосе 10 — 4000 *гц*. Исследования спектральных характеристик речи, включающей отдельные звуковые элементы, например, взрывные согласные малой длительности, должны проводиться с усреднением не более 0,2 *сек*. На рис. 5б дан спектр числительных, полученный при таком усреднении.

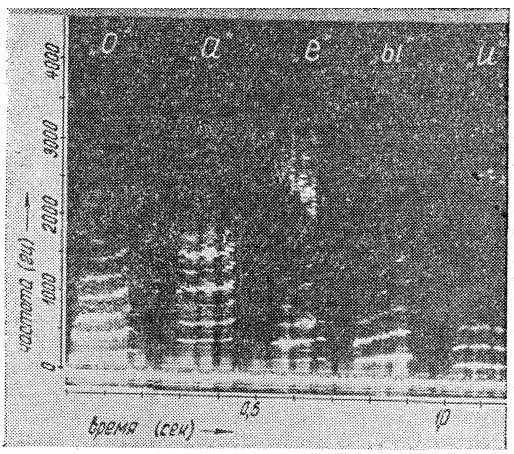


Рис. 5а. Скользящий спектр речевого сигнала: спектр гласных звуков; разрешающая способность по частоте 10 *гц*.

Вторым примером нестационарного сигнала, анализ спектра которого имеет большое значение, является осциллограмма шумов сердца (фонокардиограмма). Скользящий спектр фонокардиограммы, как показано в ряде работ [27—29], имеет важное значение для теории и практики медицины. На рис. 6а и 6б показан спектр фонокардиограммы, полученный с использованием оптического модуляционного метода анализа.

На рис 6а — спектр фонокардиограммы сердца больного человека с ярко выраженным шумом (систолический шум) в интервалах между тонами сердца. Спектр сигнала простирается до частот 1500 *гц*. Разрешающая способность анализа 30 *гц*. На рис. 6б — спектр фонокардио-

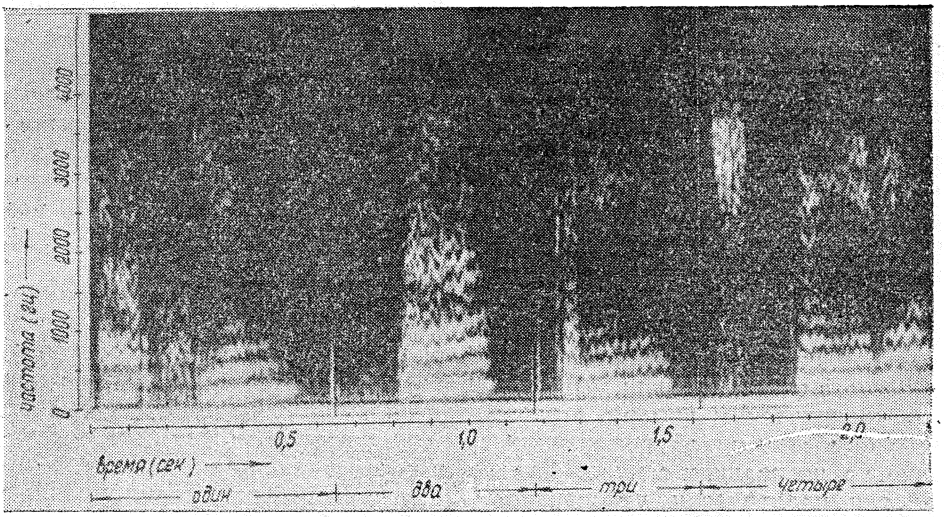
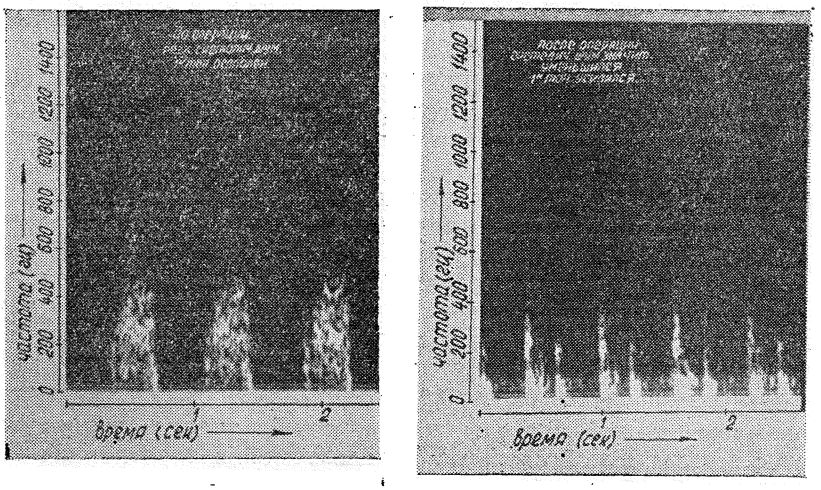


Рис. 5б. Скользящий спектр речевого сигнала:
спектр слов „один, два, три, четыре"; разрешающая способность по частоте 100 *гц*.

граммы, отражающей результат оперативного вмешательства. Сравнивая спектр рис. 6б со спектром рис. 6а, видим, что систолический шум отсутствует.



а) б)

Рис. 6. Спектр фонокардиограмм:
а) в интервалах между тонами сердца виден систолический шум;
б) систолический шум отсутствует.

Тщательный анализ подобных спектрограмм, записанных на плоскости частота—время, дает возможность получения ценной информации, необходимой в данном случае для целей диагностики сердечных заболеваний.

Спектральный анализ, как известно, обладает усредняющим действием и позволяет получить спектр не в данный момент времени, а за конечный промежуток времени. При анализе по схеме рис. 1 это на-

глядно видно из самого принципа анализа, в котором интегрированию подвергается определенный участок записи. При этом появляется неопределенность во времени, к которому относится данное спектральное разложение, равная величине интервала интегрирования. Процессы, изображенные на рис. 6а и 6б, требовали большей определенности во времени, поэтому при анализе процессов рис. 6а и 6б использовалась только одна десятая доля полного интервала интегрирования, на которое рассчитан прибор. Величина параметра N была также в 10 раз меньше возможной. При анализе вышеприведенных процессов такой интервал интегрирования является оптимальным.

Область применения оптических аналоговых анализаторов модуляционного типа с пространственным интегрированием зависит от быстродействия не только вычислительной аналоговой схемы (модулятора), но и системы ввода сигнала в анализатор. Быстродействие анализатора с фотооптическим вводом ограничивается временем, необходимым на фотообработку одной реализации сигнала, которое может быть уменьшено до нескольких секунд. Дальнейшее уменьшение времени фотообработки практически недоступно. Однако оптические модуляционные аналоговые схемы могут работать и с более быстродействующими системами ввода сигнала, каковыми являются электронно-оптические приборы типа потенциалоскопов с видимым свечением [30]. Использование их в данных схемах возможно, так как в оптической схеме не требуется ни временная, ни пространственная когерентность источников светового потока.

Использование электронно-оптической записи не приводит к существенному изменению оптической схемы рис. 1. Изменения оптической схемы состоят в том, что изображение с экрана потенциалоскопа с помощью линзы 2 проектируется на модулятор 4. Линза 5 при этом подбирается так, чтобы весь световой поток, прошедший через модулятор, собрать на катоде фотоумножителя.

Параметры анализатра, в котором использовался стандартный потенциалоскоп с видимым свечением, несколько ниже параметров анализаторов с фотооптическим вводом сигнала. Частотный диапазон и динамический диапазон определяются параметрами потенциалоскопа. Был реализован прибор, эквивалентный ста параллельно включенным фильтрам ($N = 100$) [31].

Необходимость предварительной записи сигнала является основной трудностью при использовании описанного метода спектрального анализа. Однако есть область применения оптического модуляционного анализа, которая свободна от этого недостатка. Такой областью является оптический анализ непосредственно пространственных структур.

Примером может явиться спектральный анализ периодической структуры замедляющей системы, используемой в электронике в приборах типа лампы бегущей волны. Спектральный анализ периодической структуры замедляющей системы (спирали, гребенки и т. д.) позволяет с большой степенью точности определить качество изделия, его работоспособность в электронном приборе [32].

Рассмотрим другой пример из этой области. Речь идет об оптическом модуляционном анализе спектров оптического излучения с использованием фурье-спектрометрии [33].

В последнее время находят применение методы спектрального анализа оптических спектров путем фурье-разложения записи интерференционной картины. Такие методы отличаются большой светосилой и разрешающей способностью [34]. При этом по сравнению с обычной методикой измерения спектров изменяется соотношение между светосилой и разрешающей способностью, приводящее к тому, что описанная мето-

дика, известная под названием фурье-спектрометрии, оказывается на один-два порядка светосильнее, чем обычная методика при одинаковой разрешающей способности. Недостатком метода фурье-спектрометрии является необходимость предварительной записи интерференционной картины с целью ее дальнейшего спектрального анализа, проводимого обычно с помощью ЭВЦМ [34, 35]. Как видно, метод фурье-спектрометрии обладает теми же недостатками, что и описанная методика анализа спектров процессов как функций времени.

Оказывается, эти методы удается соединить воедино [36]. В самом деле, известно, что интерференционную картину с помощью хотя бы интерферометра Майкельсона можно локализовать в пространстве [36]. Эту картину можно затем спроектировать на модулятор, позволяющий, как и в схеме рис. 1, производить модуляцию отдельных спектральных компонент. Такое соединение двух принципов анализа спектра было выполнено на базе обычного интерферометра Майкельсона и модулятора, с которым производились анализы записей сигналов. В результате появился светосильный спектральный анализатор оптического диапазона волн, позволяющий непосредственно измерять и записывать уже готовый результат спектрального анализа, а не промежуточную функцию. На рис. 7 приведен образец оптического спектра, полученного указанным способом без какой бы то ни было предварительной записи сигнала. Такой способ особенно ценен при определении спектров поглощения, так как предварительная запись интерферограммы вносит шумы, которые в отличие от линий излучения при определении линий поглощения значительно искажают результат.

На рис. 7а приведен спектр излучения ртутной лампы, снятый указанным способом. Отчетливо видны три характерные линии. На рис. 7б показан спектр поглощения стекла, содержащего неодим. Характерные линии поглощения отчетливо видны в виде провала спектральной плотности.

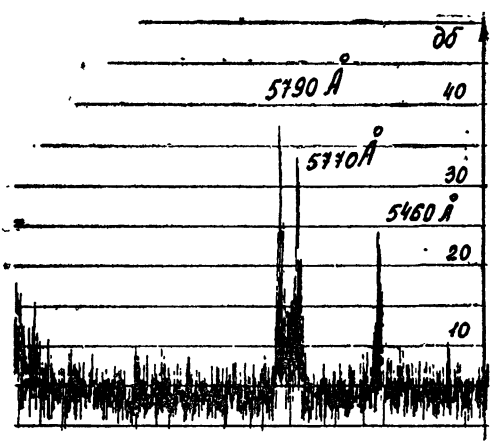


Рис. 7а. Спектр излучения ртутной лампы.

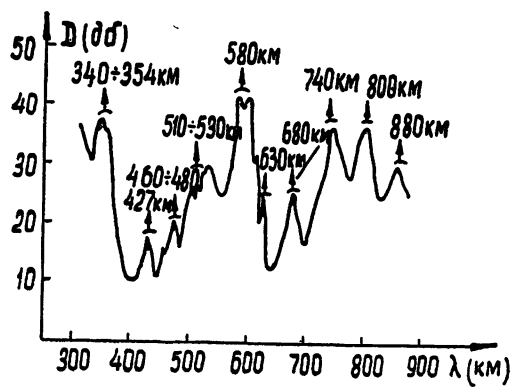


Рис. 7б. Спектр поглощения стекла, содержащего неодим.

Описанную методику можно применять также в случаях, в которых исходная функция задана не как функция времени, а с самого начала исследуется как функция пространства. Такие задачи в большом количестве встречаются в оптике. Например, частотно-контрастная характеристика объективов может быть получена как пространственный спектр определенного изображения, проектируемого этим объективом [37].

Спектр получаемой таким образом проекции может вполне быть исследован с помощью вышеописанной процедуры. Тем самым мы получаем простой и надежный метод снятия частотно-контрастных характеристик объективов.

2. МНОГОКАНАЛЬНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Оптические аналоговые спектральные анализаторы модуляционного типа, как это было показано выше, могут с успехом применяться для исследования одномерных процессов при решении разнообразных задач. Успех применения оптических систем в спектральном анализе обеспечивается быстродействием выполнения операции перемножения и интегрирования функций, а также достаточно высокой эффективностью спектрального анализа, определяемой величиной параметра N.

Однако основное достоинство оптических аналоговых систем модуляционного типа состоит в том, что они могут оперировать с изображениями сигналов на плоскости, т. е. с двумерными изображениями. Это свойство оптических систем позволяет просто реализовать схемы анализа функций, зависящих от двух переменных, либо схемы одновременного анализа большого числа функций одной переменной. В этих схемах перемножение и интегрирование большого числа элементов сигналов происходит с высокой скоростью. Быстродействие оптических модуляционных устройств спектрального анализа ограничивается только быстродействием систем ввода сигналов и считывания результатов анализа. Например, в одном из лабораторных макетов [31] перемножение и интегрирование синусоидальной структуры с двумерным изображением сигнала, содержащим 10^4 элементов, производилось за 30 *мсек*.

Кратко опишем один вариант модуляционной схемы многоканального оптического спектрального анализа с временным интегрированием [18]. Принцип действия системы поясняет рис. 8. Распределенный источ-

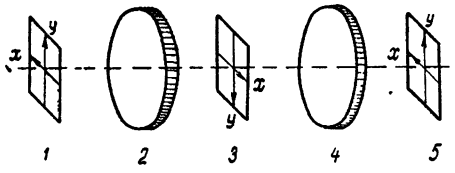


Рис. 8. Принципиальная оптическая схема многоканального анализа:
1—плоскость источника света, 2—объектив, 3—многоканальный модулятор, 4—объектив, 5—плоскость фотоприемников.

ник света помещается в плоскости 1. Источником света может являться, например, экран электронно-лучевой трубки, включенной на выход многоканальной системы. Сигнал с выхода каждого канала вводится в оптическую систему в виде пульсирующей по яркости линии, параллельной оси x. Ось y разбивается на ряд элементов в соответствии с количеством каналов, по которым поступают сигналы. Изображение источника 1 объективом 2 проектируется на модулятор 3, построенный по принципу, описанному выше (см. рис. 1). Модулятор 3 позволяет получать структуру, изменение прозрачности которой со временем в каждой точке происходит периодически. Период изменения прозрачности зависит только от координаты x и не зависит от координаты y. Далее свет, прошедший через модулятор 3, проектируется объективом 4 на плоскость фотоприемников 5. Фотоприемником может служить передающая трубка телевизионной системы с регулируемой памятью [38]. Результат анализа наблюдается на экране телевизионной системы в координатах: x — частота, y — номер канала, z — яркость свечения точки экрана, пропорциональная спектральной плотности сигнала в данном канале y на данной частоте x. Разрешающая способность по частоте в данном случае зависит от параметров модулятора и времени интегрирования на выходе фотоприемников.

Описанный способ анализа замечателен тем, что позволяет иметь большой набор каналов, в которых исследуются одновременно различные функции. Это важно, например, при исследовании радиолокационных сигналов, когда между сигналами, отраженными от объектов, имеющих разные дальности, корреляция отсутствует. Необходимость спектрального анализа радиолокационного сигнала возникает в связи с использованием эффекта Допплера. В настоящее время для одновременного спектрального анализа большого количества функций оптические методы наболее эффективны. В связи с этим они усиленно разрабатываются [39].

Укажем, что для многоканального анализа применима также вышеописанная методика исследования одномерных функций. Одновременный анализ многих функций требует применения вместо одноканального фотоприемника 6 в схеме рис. 1 набора фотоприемников или телевизионной преобразующей трубки. Результат анализа будет получаться на экране телевизионного кинескопа.

Существует и иной путь решения задачи многоканального анализа, позволяющий обойти трудности коммутации сигнала на выходе. Использование пространственного интегрирования позволяет быстро производить анализ одной функции, доводя длительность анализа до нескольких миллисекунд. В таком случае можно успеть проанализировать много различных функций. Практически это можно выполнить, например, следующим путем. Записывать функции, подлежащие анализу, одновременно на разные дорожки фотопленки. Анализировать же их по схеме рис. 1 можно последовательно строчка за строчкой, выбирая скорость анализа таким образом, чтобы она была не меньше скорости поступления информации. В таком режиме анализатор спектра осуществляет функции устройства когерентного накопления, которое может быть использовано для повышения помехоустойчивости как радиолокационной, так и радиоастрономической станции.

Многоканальный спектральный анализ может одновременно сочетаться с последующей обработкой сигнала. В некоторых случаях такое сочетание осуществляется практически легче, нежели простой многоканальный анализ, так как при этом удается исключить весьма трудоемкую операцию вывода данных спектрального анализа по многим каналам в отдельности. В качестве примера одновременного многоканального спектрального анализа с последующей дополнительной обработкой сигнала приведем схему обработки сигналов приемников антенной системы. Целью обработки является получение спектра сигналов, принятых многими приемниками, расположенными в разных точках пространства, и сложение этих сигналов с различными фазами с целью определения направления на источники сигналов различных частот. Иначе говоря, речь идет об одновременном сканировании по спектру и по пространству, пользуясь несколькими реализациями сигналов, принятых одновременно в разных точках пространства.

Для такой обработки схему рис. 1 требуется дополнить системой оптических линий задержки. Каждая оптическая линия задержки представляет собою плоскопараллельную стеклянную пластину, расположенную между пленкой и модулятором (рис. 1) так, что поворот пластины смещает изображение пленки относительно модулятора [40]. Изменяя распределение углов поворота пластин, можно изменять распределение задержек сигналов по каналам. С фотоумножителя снимается суммарный сигнал, как и при одноканальной обработке. Таким образом, на каждой частоте происходит суммирование сигналов с подобранными фазами.

Пример такой обработки сигнала приведен на рис. 9. В данном случае приемники располагались по окружности. На рис. 9 приведены

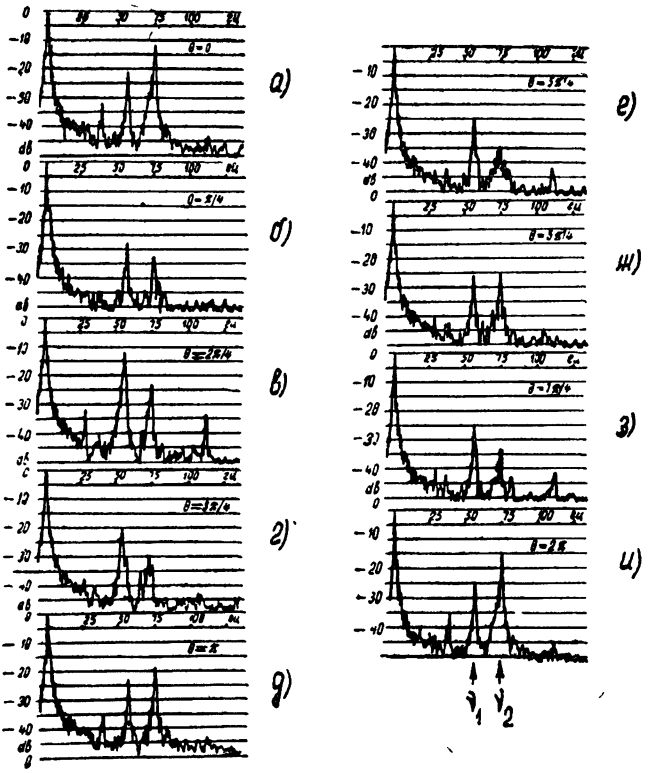


Рис. 9. Результат обработки сигнала, принятого кольцевой антенной решеткой. Частота принятых сигналов ν_1 и ν_2. Радиус кольцевой антенны равен длине волны высокочастотного сигнала ν_2:

а) антенна ориентирована на источник, имеющий частоту ν_2, $\theta=0$; *б*) $\theta=\pi/4$; *в*) $\theta=\pi/2$, антенна ориентирована на источник, имеющий частоту ν_1; *г*) $\theta=3\pi/4$; *д*) $\theta=\pi$; *е*) $\theta=5\pi/4$; *ж*) $\theta=6\pi/4$; *з*) $\theta=7\pi/4$; *и*) $\theta=2\pi$.

спектрограммы, соответствующие сложению сигналов с различными фазовыми сдвигами. Фазы сигналов на спектрограммах подобраны таким образом, чтобы сделать максимальными сигналы, принятые системой приемников с одного направления. Направление максимального приема сигналов в каждой последующей спектрограмме изменяется на $\pi/4$. Видно, что на спектрограмме рис. 9а имеет максимум сигнал одной частоты, а на спектрограмме рис. 9в—другой. Все спектрограммы рис. 9 соответствуют одному моменту времени. Таким образом, оптическая обработка позволяет с помощью простых средств осуществлять одновременное сканирование по частоте и по пространству.

3. МОДУЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СПЕКТРОВ

Одной из важных задач статистической радиофизики является определение пространственного спектра случайных неоднородностей, через которые распространяются акустические или радиоволны. Подобные измерения можно осуществить с помощью вышеописанной методики, помещая в среду набор приемников и применяя спектральную

обработку полученного многоканального сигнала [41]. Однако такой способ практически сложен, требует постановки далеко расставленных приемников (в том случае, если измеряется низкочастотный пространственный спектр) и сложной обработки. Возникает вопрос, нельзя ли путем специальной обработки сигнала упростить эксперимент и получить ту же самую информацию, применив более простую обработку сигнала, не требующую постановки большого количества приемников. Такая задача может быть решена путем использования для измерения пространственного спектра модулированных волн.

Пусть в среде распространяется модулированная волна. Как известно, такая волна может состоять из трех спектральных компонент — несущей и двух боковых частот. Если продетектировать отдельно несущую с верхней и с нижней боковой, то можно выделить частоту модуляции. Между частотами модуляции, выделенными путем детектирования несущей с верхней и с нижней боковой, можно измерять разность фаз. По этой разности фаз, вернее, по зависимости среднего квадрата этой разности фаз от частоты модуляции, можно измерять пространственный спектр случайных неоднородностей показателя преломления [42, 43].

Для постановки опыта не требуется большого количества приемников, разнесенных на большое расстояние. Требуется всего один приемник, принимающий модулированную волну. Метод измерения основан на особенностях пространственного спектра модулированных волн. Пространственный спектр фазового инварианта модулированного колебания [43] оказывается пропорциональным двумерному спектру случайных неоднородностей показателя преломления, умноженному на некоторую функцию, не зависящую от свойств среды, которая зависит от спектра применяемого модулированного колебания. Эта функция играет роль фильтра. Этот фильтр имеет частотную характеристику фильтра верхних частот с довольно резким спадом. Местоположение этого спада определяется частотой модуляции.

Таким образом, измеряя средний квадрат фазового инварианта в зависимости от частоты модуляции, можно определить долю частот, «срезанных» фильтром, и по этим данным с помощью простейшей обработки получить пространственный спектр случайных неоднородностей. Выбор спектральной области, в которой происходит исследование, зависит от спектра применяемого модулированного колебания. Поэтому, применяя подобный метод, можно определять пространственный спектр случайных неоднородностей и для таких пространственных частот, при которых другие методы слишком громоздки.

На рис. 10 приведена частотная характеристика пространственного фильтра, и на рис. 11 приведен один из снятых таким образом пространственных спектров в акустике [44]. Частотная характеристика зависит только от одного параметра. Спектр рис. 11 снят с применением трех частот модуляции, излучаемых одновременно, с тем, чтобы возможная нестационарность среды во времени не искажала бы результатов измерения. В данном случае спектр снят до пространственных размеров порядка 25 *м*. Полученный спектр хорошо согласуется с теоретическими предположениями.

Аналогичный модуляционный метод можно применять и при снятии спектра неровностей поверхности, влияющих на фазу отраженной от поверхности волны.

Таким образом, модуляционный метод измерения спектров может быть с успехом применен для решения многочисленных задач оптики,

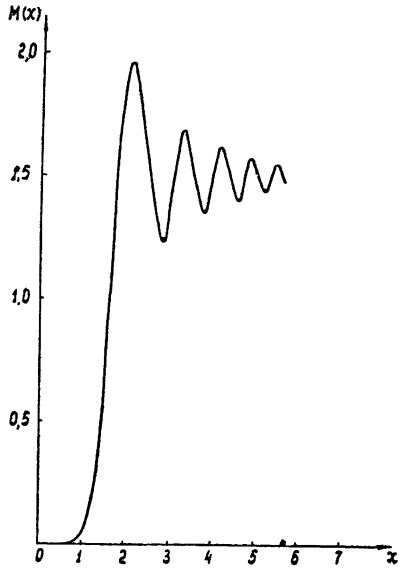


Рис. 10. Частотная характеристика пространственного фильтра, формируемого в среде модулированной волной. По оси абсцисс отложен безразмерный параметр $x = \frac{\varkappa}{2}\sqrt{\frac{L\beta\lambda}{\pi}}$, где $\varkappa$ — пространственная частота неоднородностей, L — длина пути, пройденного волной, λ—длины волны, β — отношение частоты модуляции к частоте несущей.

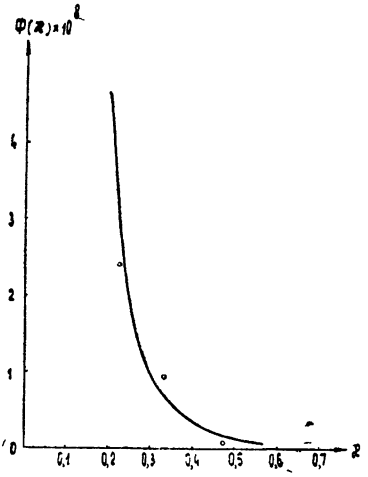


Рис. 11. Пространственный спектр неоднородностей среды, снятый с помощью модуляционного метода. По оси абсцисс отложена величина $\varkappa = \frac{2\pi}{l}$, где l выражено в метрах. По оси ординат отложена спектральная плотность квадрата показателя преломления среды. Точки на графике—данные эксперимента. Сплошная линия—результат расчета.

акустики, радиофизики для исследования как одномерных, так и многомерных процессов и при измерении пространственных спектров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. W. Lee, T. P. Cheatham, J. B. Wiesner, Proc. IRE, **38**, № 10, 1165 (1950) (русский перевод сб. Теория информации и ее приложения под ред. А. А. Харкевича, Физматгиз, М., 1959).
2. М. Г. Серебрянников, А. А. Первозванский, Выявление скрытых периодичностей, изд. Наука, М., 1965.
3. M. R. Schroeder, Proc. IEEE, **54**, № 5, 720 (1966).
4. М. Д. Генкин, сб. Современные методы оценки качества и пути повышения точности изготовления зубчатых передач, Машгиз, 1962.
5. C. M. Harris, Handbook of noise control, McGraw-Hill Book Company Ing., New York, Toronto, London, 1957.
6. П. Жакино, УФН, **72**, № 4, 799 (1960).
7. П. А. Бакулев, Радиолокация движущихся целей, изд. Сов. радио, М., 1964.
8. Р. Сарджент, Вопросы радиолокационной техники, № 2, 1955.
9. L. J. Cutrona, W. E. Vivian, E. N. Leith, G. O. Hall, IRE Tran., **MIL-5**, № 2, 127 (1961); русский перевод Зарубежная радиоэлектроника, **16**, № 12, 33 (1961).
10. A. Hewish, Sci. Progr., **53**, 355 (1965).
11. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
12. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.

13. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, ГИТТЛ, М., 1957.
14 Ф. Ланге, Корреляционная электроника, Судпромгиз, 1963.
15. И. В. Соловьев, С. С. Спиридонов, Зарубежная радиоэлектроника, **16**, № 8, 3 (1961).
16. W. G. Ehrich, B. Steinberg, IRE Nat. Conv. Rec., **2**, 62 (1959); русский перевод Зарубежная радиоэлектроника, **15**, № 1, 3 (1960).
17. L. J. Cutrona, E. N. Leith, C. J. Palermo, L. J. Porcello, IRE Trans., **IT-6**, № 3, 386 (1960); русский перевод Зарубежная радиоэлектроника, **17**, № 10, 3 (1962).
18. K. Preston, Electronics, **38**, № 18, 72 (1965).
19. L. J. Cutrona, E. N. Leith, L. J. Porcello, W. E. Vivian, Proc. IEEE, **54**, № 8, 1026 (1966).
20. N. C. Montgomery, Bell. System. Techn. J., **17**, № 3, 406 (1938).
21. R. C. Jones, J. Opt. Soc. of America, **51**, № 11, 1159 (1961).
22. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, ПТЭ, № 1, 50 (1960).
23. В. А. Зверев, И. В. Мосалов, Е. Ф. Орлов, В. Л. Сибиряков, ПТЭ, № 1, 110 (1962).
24. В. А. Зверев, И. В. Мосалов, Е. Ф. Орлов, В. Л. Сибиряков, В. П. Хрулев, Авторское свидетельство № 148120 от 23 декабря 1960 г.
25. В. А. Зверев, Ф. М. Калашников, Ц. З. Кринзберг, И. К. Спиридонова, Доклад на совещании Борьба с шумами и вибрациями, Стройиздат,. М., 1966.
26. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, С. Н. Рубцов, В. С. Семенов, Г. А. Шаронов, Доклад на совещании Борьба с шумами и вибрациями, Стройиздат, М., 1966.
27. V. A. Mc Kusick, S. A. Talbot, G. N. Webb, Bull. Johns Hopkins Hosp **94**, 187 (1954).
28. С. Ф. Олейник, Клиническая медицина, № 3 (1957).
29. И. А. Кассирский, Г. И. Кассирский, Звуковая симптоматика приобретенных пороков сердца, Медицина, М., 1964.
30. Электронные системы отображения информации, сб. статей под ред. Дж. Ховарда (перевод), изд. МО СССР, М., 1966.
31. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, И. С. Раков, Авторское свидетельство № 904990/26—25 от 1 июня 1964 г. (ОСА-5).
32. А. С. Шерешевский, Авторское свидетельство № 158311 от 26 ноября 1962 г. Бюллетень изобретений, № 21, 24 (1963).
33. Н. Г. Бахшиев, Оптика и спектроскопия, **2**, № 2, 815 (1957).
34. J. Konnes, Revue d'Optique, **40**, № 5, 231 (1961).
35. П. Жакино, УФН, **78**, вып. 1, 123 (1962).
36. В. А. Зверев, С. М. Горский, Авторское свидетельство № 168939 от 16 апреля 1963 г.
37. С. М. Горский, Г. К. Иванова, Оптика и спектроскопия (в печати).
38. В. М. Любин, А. М. Минкин, Р. М. Степанов, В. И. Фомина, Вопросы радиоэлектроники, сер. IX, Техника кино и телевидения, № 3, 110 (1964).
39. A. J. Talamini, E. C. Farnett, Electronics, **38**, № 26, 58 (1965).
40. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, И. С. Раков, С. Н. Рубцов, Авторское свидетельство № 194153 от 10 сентября 1965 г.
41. K. A. Norton, J. Atm. and Terr. Physics, **15**, № 3/4, 206 (1959).
42. В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 4, 723 (1960).
43. В. А. Зверев, Л. А. Жестянников, Изучение статистических характеристик среды с помощью модулированной волны. Доклад на V Всесоюзной акустической конференции, Киев, 1961.
44. В. А. Зверев, Л. А. Жестянников, Тр. Акустического института, вып. 2, 22 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 мая 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 548:53

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. М. Файн

В достаточно сильных электрических и магнитных полях свойства среды (диэлектрическая и магнитная проницаемости) начинают зависеть от напряженности поля. В постоянных электрических и магнитных полях с таким изменением свойств твердых тел связан ряд классических эффектов оптики: линейный электрооптический эффект, эффект Керра, эффект Фарадея и другие (см., например, [1]). В связи с изобретением лазеров, которые могут генерировать электромагнитные поля очень больших напряженностей, возникла новая область оптики — нелинейная оптика, использующая нелинейные свойства различных сред для целей преобразования и взаимодействия электромагнитных волн оптического диапазона (см., например, [2–4]). Следует тут же подчеркнуть, что нелинейные свойства различных сред по существу давно уже использовались в радиодиапазоне при построении автоколебательных систем—генераторов как классических, так и квантовых. Сама возможность индуцированного излучения, или, на классическом языке, возможность создания отрицательного сопротивления, связана с нелинейными свойствами среды [4,5]. Наконец, возможности создания параметрических усилителей и генераторов также связаны с нелинейными свойствами соответствующих систем. (Необходимо, чтобы параметры системы: диэлектрическая или магнитная проницаемость системы, емкость, индуктивность и т. п. могли зависеть от внешних полей.)

Из этого краткого перечисления становится очевидной актуальность задачи о систематическом исследовании нелинейных свойств твердых тел в различных диапазонах частот: от видимой области спектра до самых низких частот. Цель настоящей работы состоит в обзоре теории нелинейных свойств твердых тел в указанных диапазонах частот. При этом основное внимание будет обращено на связь нелинейных свойств с движением квазичастиц, определяющих эти нелинейные свойства. После определения нелинейных характеристик твердых тел и рассмотрения их общих свойств в первом разделе обзора в остальных разделах мы последовательно рассмотрим вклад движения электронов, оптических и акустических фононов и магнонов.

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ

Поскольку уравнения Максвелла сами по себе линейны, различные нелинейные эффекты связаны с нелинейностью материальных уравнений, характеризующих нелинейные свойства среды. В предположении слабой нелинейности, когда можно ограничиться несколькими членами разложения в ряд по напряженности поля, общая нелинейная связь между поляризацией и электрическими полями, нелокальная в пространстве и времени, имеет вид

$$P_a(r, t) = \int d^3 r_1 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \, \varphi_{ab}(r, t; r_1, t_1) E_b(r_1, t_1) +$$

$$+ \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \times \tag{1}$$

$$\times \varphi_{abc}(r, t; r_1, t_1; r_2, t_2) E_b(r_1, t_1) E_c(r_2, t_2) + \ldots$$

(Здесь, как и всюду далее, предполагается суммирование по дважды встречающимся индексам.) Функции φ_{abc}, φ_{abcd} и т. д. являются нелинейными характеристиками среды, они определяются только свойствами среды и не зависят от полей. При написании соотношения (1) был явно использован принцип причинности (отклик в виде поляризации вызывается полем **E** в момент t и во все предыдущие моменты времени). Другое, эквивалентное (1), представление нелинейной связи между **P** и **E** мы получим, если разложим поле по пространственным и временным гармоникам Фурье:

$$P_a(r, t) = \chi_{ab}(k, \omega; k_1, \omega_1) E_b(k_1, \omega_1) \exp[i(kr - \omega t)] +$$

$$+ \chi_{abc}(k, \omega; k_1, \omega_1; k_2, \omega_2) E_b(k_1, \omega_1) \times \tag{2}$$

$$\times E_c(k_2, \omega_2) \exp[i(kr - \omega t)].$$

Здесь под $k, \omega; k_1, \omega_1; \ldots$ подразумевается суммирование или интегрирование в зависимости от того, имеем ли мы дело с суммой или интегралом Фурье.

До сих пор мы не делали никаких предположений о стационарности и однородности среды. Для стационарных и однородных сред восприимчивости отличны от нуля соответственно при

$$k = k_1, \quad \omega = \omega_1; \quad k = k_1 + k_2, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2.$$

В этом случае мы приходим к широко употребляемой форме записи нелинейной связи

$$P_a(r, t) = \chi_{ab}(k, \omega) E_b(k, \omega) \exp[i(kr - \omega t)] +$$

$$+ \chi_{abc}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2) E_b(k_1, \omega_1) \times \tag{3}$$

$$\times E_c(k_2, \omega_2) \exp[i(k_1 + k_2) r - i(\omega_1 + \omega_2) t].$$

Величины χ_{abc}, χ_{abcd} являются нелинейными характеристиками среды. Зависимость от k характеризует пространственную дисперсию, а от ω — временную дисперсию. Далее мы не будем явно выписывать зависимость от k, кроме тех случаев, когда она существенна. Вообще говоря, кроме специальных случаев, пространственная дисперсия в рассматриваемых диапазонах частот в твердых телах мала. Она характеризуется малым параметром $a|k| \ll 1$, где a — период решетки, а k — волновой вектор поля.

Нелинейные восприимчивости χ_{abc}, χ_{abcd} и т. д. удовлетворяют ряду общих соотношений. Учет принципа причинности приводит к дисперсионным соотношениям, являющимся обобщением соотношений Крамерса—Кронига [6,7]. Другие соотношения следуют из условия вещественности P_a, ряд соотношений следует из условия прозрачности среды [2–4]. Для прозрачных и недиспергирующих сред имеют место так называемые соотношения Клейнмана [8], которые сводятся к симметрии нелинейных восприимчивостей по всем индексам. Ряд соотношений следует из обратимости во времени уравнений движения — обобщение соотношений Онзагера [9]. Наконец, ряд важных соотношений следует

из кристаллической симметрии. Так, при наличии центра симметрии тензор χ_{abc} (без учета пространственной дисперсии) обращается в нуль. Мы не будем здесь останавливаться на всех этих соотношениях, поскольку они подробно рассмотрены в цитированной выше литературе.

В заключение этого раздела мы выпишем выражение для $\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2)$, полученное с помощью нестационарной квантовой теории возмущения (роль энергии возмущения играет взаимодействие с полем) [4]:

$$\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}\left[\varkappa_{abc}(\omega_1, \omega_2) + \varkappa_{acb}(\omega_2, \omega_1)\right],$$

$$\varkappa_{abc}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\hbar^2} d_{anm}\, d_{bmk}\, d_{ckn}\left[(\rho_{nn} - \rho_{kk}) \times \zeta(\omega_1 - \omega_{kn}) - (\rho_{kk} - \rho_{mm})\,\zeta(\omega_1 - \omega_{mk})\right] \times \zeta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{mn}). \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{d}$ — оператор дипольного момента системы, ρ_{nn} — населенность n-го уровня системы, отнесенная к единице объема,

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar},$$

где E_m — энергетические уровни системы, а сингулярная функция $\zeta(x)$ имеет вид

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Расчет велся в дипольном приближении в пренебрежении пространственной дисперсией, энергия взаимодействия с полем представлялась в виде

$$V = -\boldsymbol{d}\,\mathbf{E}(t). \tag{5}$$

Поскольку $\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2)$ характеризует отклик на произвольное* внешнее макроскопическое поле, то под E_n нужно понимать уровни системы без учета длинноволнового (с $\boldsymbol{k} \to 0$) электрического поля («механические экситоны» в терминологии книги Аграновича и Гинзбурга [10]). Это обстоятельство следует иметь в виду при конкретном применении формулы (4) и аналогичной ей формулы для χ_{abcd}.

2. ВКЛАД ЭЛЕКТРОННЫХ ДВИЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В настоящем разделе мы обсудим вклад, который вносит движение электронов при фиксированной конфигурации ионов решетки. При этом мы будем пользоваться формулой (4) и энергией взаимодействия (5), где $\boldsymbol{d}$ есть оператор матричного элемента электрона. В одноэлектронном приближении, которым мы будем пользоваться, полный отклик системы на внешнее поле получается суммированием откликов всех электронов с учетом принципа Паули. Принципиально важным моментом при этом является выбор энергии взаимодействия в виде (5), так как именно при этом выборе канонических переменных возможен последующий переход к однозонному или двухзонному приближению [11].

* В смысле произвольной зависимости от времени (или произвольной зависимости от частоты в $E_a(\omega)$).

Оператор дипольного момента одного электрона есть er, где e — заряд электрона, а оператор координаты, как хорошо известно, имеет вид (см., например, [12])

$$r = i\frac{\partial}{\partial k} + i\Omega, \tag{6}$$

где $\Omega_{nn'}(k) = \int u^*_{nk}(r)\frac{\partial u_{n'k}(r)}{\partial k}dv$, интеграл взят по объему элементарной ячейки, n — номер зоны, и волновая функция электрона имеет вид

$$\Psi_{nk}(r) = e^{ikr}u_{nk}(r).$$

Подставляя оператор (6) в формулу (4) и проводя соответствующим образом суммирование по всем электронам, можно получить полное выражение для $\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2)$, учитывающее вклад электронов в нелинейные свойства твердого тела [13–16]. Как видно из выражения (6), электронный вклад в дипольный момент состоит из двух частей. Первый член описывает движение электрона внутри зоны, это движение свободного электрона со своим законом дисперсии (зависимости энергии электрона $\varepsilon_n(k)$ от волнового вектора). Второй член дает вклад в дипольный момент, в основном связанный с междузонными переходами, и представляет по существу «остаток» атомарного дипольного момента после конденсации атомарного газа в твердое тело. Характерная величина матричного элемента $\Omega_{nn'}$ как и следует ожидать, есть a — период решетки.

Рассмотрим сначала случай твердого диэлектрика, когда часть зон полностью заполнена, а остальные энергетические зоны пусты. В этом случае внутризонное движение, связанное с членом $i\frac{\partial}{\partial k}$, не дает вклада в нелинейные свойства. Мы не будем выписывать соответствующего выражения для χ_{abc}, оно имеется в цитированной литературе, а обсудим порядок его величины и зависимость от частоты внешнего поля. Из выражения (4) очевидно, что если мы ограничимся частотами $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_{mn}$, где ω_{mn} — характерные частоты междузонных переходов (они, как правило, лежат в ультрафиолетовом участке спектра), то χ_{abc} вообще не будет зависеть от частоты. Эту нелинейную восприимчивость, связанную с учетом междузонных переходов, мы в дальнейшем будем обозначать символом α_{abc} и будем пренебрегать зависимостью ее от частот во всем интересующем нас диапазоне частот. Для оценки этой величины опять-таки воспользуемся формулой (4). Учитывая, что $d_{nm} \sim ea$, и обозначая характерную частоту электронного движения через ω_e, получаем

$$\alpha_{abc} \sim \frac{N}{V}\frac{e^3a^3}{\hbar^2\omega_e^2},$$

где N — число элементарных ячеек, $\frac{N}{V} \sim \frac{1}{a^3}$, а характерная частота электронного движения $\hbar\omega_e \sim \frac{e^2}{a}$ (правая часть есть потенциальная энергия электрона на расстоянии a от ядра). В результате получаем

$$\alpha_{abc} \sim \frac{a^2}{e} = \frac{1}{E_{ат}}, \tag{7}$$

где $E_{ат}$ — так называемое атомное поле — характерная величина поля на расстоянии a от ядра.

Аналогичным образом можно получить

$$\alpha_{abcd} \sim \frac{a^4}{e^2} = \frac{1}{E_{ат}^2}. \tag{8}$$

Обращаясь теперь к равенству (3), мы видим, что атомное поле по существу определяет радиус сходимости ряда (3). При $E \sim E_{ат}$ все члены ряда оказываются одного порядка. Таким образом, в этом случае условие применимости разложения (3) имеет вид

$$|\mathbf{E}| \ll E_{ат}. \tag{9}$$

Подставляя характерное значение $a \sim 10^{-8}$ *см*, мы получаем для α_{abc} оценку 10^{-6} CGSE, а для $\alpha_{abcd} \sim 10^{-12}$ CGSE. Наблюдающиеся экспериментальные значения α_{abc} колеблются от 10^{-9} до 10^{-5} CGSE. Такой разброс может быть объяснен тем, что параметр d_{nm} среды в выражение (4) входит в третьей степени.

Если в твердом теле имеются частично заполненные зоны, как то имеет место в металле или полупроводнике, то внутризонное движение также будет давать вклад в нелинейные свойства среды. При этом, если $\Omega_{nn}(\boldsymbol{k})$ отлично от нуля, что в принципе возможно в средах без центра симметрии, то движение внутри зоны определяется как первым, так и вторым членом в (6) [16].

Наряду с этим возможны эффекты, связанные с одновременным учетом междузонных и внутризонных движений [16]. Вклад этих движений может быть существенен в полупроводниках на частотах СВЧ диапазона. В металлах имеется центр симметрии, и в этом случае допускается квадратичная по полям зависимость типа [17]

$$\mathbf{P} = \alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{H}],$$

которую можно, в частности, получить, рассматривая поведение электрона проводимости под действием силы Лоренца. На частотах больше обратного времени между столкновениями τ^{-1} коэффициент $\alpha \sim \frac{N}{V} \frac{e^3}{cm^2\omega^3}$, а на частотах меньше τ^{-1}

$$\alpha \sim \frac{N}{V} \frac{e^3}{cm^2\,\omega\,\tau^{-2}}$$

(так же, как и диэлектрическая проницаемость металлов, эта величина имеет при $\omega \to 0$ особенность типа ω^{-1}).

3. ВКЛАД ОПТИЧЕСКИХ ФОНОНОВ

При рассмотрении вклада фононов и магнонов в нелинейные свойства твердых тел мы будем пользоваться так называемым адиабатическим приближением или приближением Борна—Оппенгеймера (см., например, [18]). В этом приближении роль потенциальной энергии для ионов играет собственное значение энергии электронов при заданной конфигурации ядер. Если же электроны находятся в постоянном внешнем макроскопическом поле, то эта потенциальная энергия будет зависеть также от этого поля. Таким образом, мы приходим к потенциальной энергии системы ионов, которая зависит от смещений ионов и от электрического поля. Перейдем далее к нормальным координатам $Q_{\boldsymbol{k}j}$, через которые выражаются смещения ядер, где $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор, а j — номер ветви колебания.

Рассмотрим вклад оптических ветвей с $\boldsymbol{k} = 0$ или, другими словами, вклад оптических фононов с $\boldsymbol{k} = 0$. В этом случае, разлагая потен-

циальную энергию ионов по степеням Q_j и электрического поля, приходим к гамильтониану [19]

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j}(P_j^2 + \omega_j^2 Q_j^2) + \frac{1}{3}\sum_{jj'j''}\Phi(jj'j'')\,Q_j\,Q_{j'}\,Q_{j''} +$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{jj'j''j'''}\Phi(jj'j''j''')\,Q_j\,Q_{j'}\,Q_{j''}\,Q_{j'''} - \sum_{j} M_a(j)\,Q_j\,E_a -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{jj'} M_a(jj')\,Q_j\,Q_{j'}\,E_a - \frac{1}{3!}\sum_{jj'j''} M_a(jj'j'')\,E_a\,Q_j\,Q_{j'}\,Q_{j''} - \frac{1}{2}\alpha_{ab}\,E_a\,E_b - \tag{10}$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{j}\alpha_{ab}(j)\,Q_j\,E_a\,E_b - \frac{1}{4}\sum_{jj'}\alpha_{ab}(jj')\,Q_j\,Q_{j'}\,E_a\,E_b -$$
$$- \frac{1}{3}\alpha_{abc}\,E_a\,E_b\,E_c - \frac{1}{3}\sum_{j}\alpha_{abc}(j)\,Q_j\,E_a\,E_b\,E_c.$$

Здесь выписаны члены, дающие вклад в нелинейную связь, квадратичную и кубичную по полю, т. е. χ_{abc} и χ_{abcd}. До сих пор мы говорили о постоянном электрическом поле. Однако, как мы выяснили в предыдущем разделе, в твердом диэлектрике, который мы сейчас рассматриваем, частотной дисперсией, связанной с движением электронов (при фиксированной конфигурации ядер), можно пренебречь во всем интересующем нас диапазоне частот. Это означает, что в гамильтониане (10) единственное ограничение на частоту изменения поля E_a состоит в том, что она должна быть меньше ω_e — характерной электронной частоты.

Далее мы будем относить все величины и в том числе гамильтониан (10) к единице объема .Тогда поляризация P_a при фиксированной конфигурации ионов может быть получена из (10) дифференцированием по E_a:

$$P_a = -\frac{\partial H}{\partial E_a} = \sum_{j} M_a(j)\,Q_j + \frac{1}{2}\sum_{jj'} M_a(jj')\,Q_j\,Q_{j'} +$$
$$+ \frac{1}{3!}\sum_{jj'j''} M_a(jj'j'')\,Q_j\,Q_{j'}\,Q_{j''} + \alpha_{ab}\,E_b + \sum_{j}\alpha_{ab}(j)\,Q_j\,E_b + \tag{11}$$
$$+ \sum_{jj'}\alpha_{ab}(jj')\,Q_j\,Q_{j'}\,E_b + \alpha_{abc}\,E_b\,E_c + \sum_{j}\alpha_{abc}(j)\,Q_j\,E_b\,E_c.$$

Выражение (11) связывает поляризацию с внешним полем при заданных амплитудах оптических колебаний решетки. Однако для нас представляет интерес связь между поляризацией и полем типа (3), когда амплитуды колебаний не заданы, а определяются полями. Поэтому мы должны перейти от выражения (11), связывающего поляризацию с полями и с нормальными колебаниями решетки, к выражению, которое связывало бы поляризацию с одними лишь электрическими полями. Для этого получим уравнения движения для Q_j и, решая их (считая заданным поле E_a), установим связь между нормальными колебаниями и полем, а затем подставим полученные решения в (11). Уравнения движения находятся из уравнений Гамильтона

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} = P_j, \quad \dot{P}_j = \ddot{Q}_j = -\frac{\partial H}{\partial Q_j}. \tag{12}$$

Соотношения (10), (11), (12), таким образом, полностью решают задачу о вкладе оптических фононов ($k = 0$) в нелинейные свойства твердых тел [19].

Прежде чем переходить к конкретным выражениям для χ_{abc} и χ_{abcd}, отметим, что изложенная теория носит полуфеноменологический характер и является классической. Первое означает, что входящие в нее константы $M_a(j)$, $M_a(jj')$, α_{ab}, $\alpha_{ab}(j)$, ... определяются не из теории, а из эксперимента. Теория только предсказывает определенную частотную зависимость χ_{abc} и χ_{abcd}. Ограничение, связанное с тем, что проведенный расчет является классическим, несущественно. В работах [20] (квадратичная по полю нелинейность) и [21] (кубичная нелинейность) проведены квантовые расчеты с использованием формализма многовременных функций Грина, которые подтверждают выводы работы [19].

Для иллюстрации полученных с помощью полуфеноменологической теории соотношений выпишем тензор χ_{abc}:

$$\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2) = \alpha_{abc} + X_{abc}(\omega_1, \omega_2) + Y_{abc}(\omega_1, \omega_2).$$

Здесь α_{abc} — электронная часть нелинейной восприимчивости, а

$$X_{abc}(\omega_1, \omega_2) = -\sum_{jj'j''} \frac{\Phi(jj'j'')\, M_a(j)\, M_b(j')\, M_c(j'')}{D(\omega_j, \omega_1+\omega_2)\, D(\omega_{j'}, \omega_1)\, D(\omega_{j''}, \omega_2)} +$$

$$+ \frac{\hat{P}_2}{2!} \sum_{jj'} \frac{M_a(j)\, M_b(jj')\, M_c(j')}{D(\omega_j, \omega_1+\omega_2)\, D(\omega_{j'}, \omega_2)} + \frac{1}{2} \sum_{jj'} \frac{M_a(jj')\, M_b(j)\, M_c(j')}{D(\omega_j, \omega_1)\, D(\omega_{j'}, \omega_2)},$$

$$Y_{abc}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} \sum_{j} \frac{M_a(j)\, \alpha_{bc}(j)}{D(\omega_j, \omega_1+\omega_2)} + \frac{\hat{P}_2}{2!} \sum_{j} \frac{\alpha_{ab}(j)\, M_c(j)}{D(\omega_j, \omega_2)},$$

где $D(\omega_j, \omega) = \omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j$, γ_j — феноменологически введенная константа затухания и $\hat{P}_2$ — оператор суммы перестановок пар индексов (ω_1, b) и (ω_2, c). Нелинейная восприимчивость X_{abc} существенно отлична от нуля, если частоты ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$ порядка или меньше собственных частот оптических колебаний. Эта восприимчивость наряду с α_{abc} определяет, в частности, эффект удвоения частоты в инфракрасном и более низкочастотных диапазонах. Оценка величины X_{abc} при $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_j$ (когда эта величина уже не зависит от частоты), произведенная с помощью микроскопической теории [19,20], дает для X_{abc} величину порядка (7), т. е. $X_{abc} \sim \frac{a^2}{e} \sim \alpha_{abc}$. Однако в принципе экспериментальное значение X_{abc} может оказаться много большим.

Так, для кристалла дигидрофосфата калия (KDP) измерения χ_{abc} в СВЧ диапазоне приводят к значению [22] $\alpha_{abc} \simeq 10^{-5}$ CGSE, в то время как по оптическим измерениям генерации второй гармоники $\alpha_{abc} = 3 \cdot 10^{-9}$ CGSE. Это означает, что на частотах $\omega \leqslant \omega_j$ основной вклад в нелинейные свойства связан с ангармоничностью колебаний решетки $\Phi(jj'j'')$ и с моментом второго порядка $M_a(jj')$.

Нелинейная восприимчивость $Y_{abc}(\omega_1, \omega_2)$ существенно отлична от нуля, когда одна из частот ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$ лежит в оптической области спектра и на более низких частотах, а другая из этих частот лежит

в области $\omega \lesssim \omega_j$. Так, например, в низкочастотном поле $\omega_2 \lesssim \omega_j$ (в том числе в постоянном поле $\omega_2 = 0$) величина Y_{abc} принимает вид (при $\omega \gg \omega_j$)

$$Y_{abc}(\omega, 0) = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\alpha_{ab}(j)\, M_c(j)}{\omega_j^2}. \tag{13}$$

Эта величина, как нетрудно видеть, определяет, в частности, наряду с α_{abc} вклад в линейный электрооптический эффект. Тензор $Y_{abc}(\omega, -\omega)$ определяет также добавку в эффект оптического детектирования (при $|\omega_1| = |\omega_2| \gg \omega_j$; $\omega_1 + \omega_2 = 0$):

$$Y_{abc}(\omega, -\omega) = \frac{1}{2} \sum_j \frac{M_a(j)\, \alpha_{bc}(j)}{\omega_j^2}. \tag{14}$$

Оценка величины Y_{abc} в области, где она существенно отлична от нуля (и вдали от резонансов $\omega \sim \omega_j$), также совпадает с (7), т. е.

$$Y_{abc} \sim a^2/e.$$

Как показано в [19] и [23], вклад как оптических, так и акустических фононов в нелинейные восприимчивости χ_{abc} и χ_{abcd} в частотных областях, где они существенно отличны от нуля (и вдали от резонансов с ω_j), оказывается соответственно порядка (7) и (8), т. е. определяется обратными атомными полями $E_{ат}^{-1}$ и $E_{ат}^{-2}$. Мы не будем останавливаться на выражениях для χ_{abcd} [19,21]. Отметим только, что величина $\chi_{abcd}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2)$ при $\omega_1 - \omega_2 \sim \omega_j$, определяющая индуцированный эффект Рамана на колебании ω_j (см. [2, 4, 24]), имеет вид [19, 24]

$$\chi_{abcd}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{6} \frac{\alpha_{ab}(j)\, \alpha_{cd}(j)}{\omega_j^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2 + i(\omega_1 - \omega_2)\gamma_j}. \tag{15}$$

Как мы видим, одни и те же константы $\alpha_{ab}(j)$, $M_a(j)$ входят в компоненты нелинейных восприимчивостей, определяющих существенно разные эффекты. В работе [19] показана принципиальная возможность определения этих констант из серии независимых экспериментов и тем самым показана возможность предсказания частотного хода χ_{abc} и χ_{abcd} во всем диапазоне частот от видимого спектра до самых низких частот.

4. ВКЛАД АКУСТИЧЕСКИХ ФОНОНОВ

Рассмотрение вклада акустических фононов в нелинейные характеристики проводится аналогично обсужденному выше учету оптических фононов [25]. Так, вместо соотношения (11) мы теперь должны записать

$$P_a(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}, j} M_a(\boldsymbol{k}, j)\, Q_{\boldsymbol{k}, j}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}, j;\, \boldsymbol{k}_1, j_1} M_a(\boldsymbol{k}, j;\, \boldsymbol{k}_1, j_1) \times$$

$$\times\, Q_{\boldsymbol{k}, j}\, Q_{\boldsymbol{k}_1, j_1} \exp[i(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{r}] + \frac{1}{3!} \sum_{\boldsymbol{k}, j;\, \boldsymbol{k}_1, j_1;\, \boldsymbol{k}_2, j_2} M_a(\boldsymbol{k}, j;\, \boldsymbol{k}_1, j_1;\, \boldsymbol{k}_2, j_2) \times \tag{16}$$

$$\times\, Q_{\boldsymbol{k}, j}\, Q_{\boldsymbol{k}_1, j_1}\, Q_{\boldsymbol{k}_2, j_2} \exp[i(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{r}] + \ldots +$$

$$+ \alpha_{ab}\, E_b(\boldsymbol{r}, t) + \sum_{\boldsymbol{k}, j} \alpha_{ab}(\boldsymbol{k}, j)\, Q_{\boldsymbol{k}, j}\, E_b(\boldsymbol{r}, t)\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}};$$

аналогично модифицируется гамильтониан (10). Важным обстоятельством для экспериментального изучения нелинейных эффектов, связанных с акустическими фононами, является наличие связи констант $M_a(\boldsymbol{k}, j)$, $\alpha_{ab}(\boldsymbol{k}, j)$, ... с упругими константами твердых тел. В самом деле, длинноволновые акустические колебания совпадают с упругими колебаниями среды. Например, выражение (16) эквивалентно следующему соотношению:

$$P_a = e_{a,\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + \ldots + \alpha_{ab} E_b + P_{ab,\alpha\beta} S_{\alpha\beta} E_b + \ldots, \qquad (17)$$

где $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$ — тензор относительной деформации, u_α — вектор смещения, $e_{a,\alpha\beta}$ — тензор пьезоэлектрических коэффициентов, $P_{ab,\alpha\beta}$ — упругооптические постоянные.

Сравним (16) и (17) и воспользуемся тем, что вектор упругих деформаций может быть выражен через комплексные нормальные координаты в виде ([18], стр. 434)

$$u(r) = \left\{N \sum_k m_k\right\}^{-1/2} \sum_k^N \sum_{j=1}^3 e\binom{k}{j} Q_{k,j} e^{ikr}, \qquad (18)$$

где $e\binom{k}{j}$ — единичный вектор поляризации упругих волн, принадлежащих к ветви j и распространяющихся в направлении $\boldsymbol{k}$, m_k — массы ионов в элементарной ячейке, N — число элементарных ячеек. Из (16), (17) и (18) получаем, в частности,

$$M_a(\boldsymbol{k}, j) = \frac{i}{\sqrt{\rho}} \sum_{\alpha\beta} e_{a,\alpha\beta} k_\beta e_\alpha\binom{k}{j},$$
$$\alpha_{ab}(\boldsymbol{k}, j) = \frac{i}{\sqrt{\rho}} \sum_{\alpha\beta} P_{ab,\alpha\beta} k_\beta e_\alpha\binom{k}{j}, \qquad (19)$$

где ρ — массовая плотность.

В работе [25] получены выражения для $\chi_{abc}(\boldsymbol{k}_1, \omega_1; \boldsymbol{k}_2, \omega_2)$, $\chi_{abcd}(\boldsymbol{k}_1, \omega_1; \boldsymbol{k}_2, \omega_2; \boldsymbol{k}_3, \omega_3)$ с учетом вклада акустических фононов. В частности, получено выражение, определяющее индуцированный эффект Мандельштама—Бриллюэна и так называемый высокочастотный эффект Керра. В качестве иллюстрирующего примера приведем выражение для компонент χ_{abcd}, определяющих индуцированный эффект Мандельштама—Бриллюэна:

$$\chi_{abcd}(\boldsymbol{k}_1, \omega_1; -\boldsymbol{k}_1, -\omega_1; \boldsymbol{k}_2, \omega_2) =$$
$$= \frac{1}{6} \frac{\alpha_{ab}(\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1, j)\, \alpha_{cd}(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2, j)}{\omega^2_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1, j} - (\omega_1 - \omega_2)^2 + i(\omega_1 - \omega_2)\gamma_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1, j}}.$$

Это выражение совершенно аналогично (15), только теперь разность частот $\omega_1 - \omega_2$ должна быть близка к $\omega_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1, j}$ — частоте акустических колебаний с волновым вектором $\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1$.

Как уже отмечалось выше, в области частот, где тензоры χ_{abc} и χ_{abcd}, связанные с учетом акустических фононов, существенно отличны от нуля, их величину можно оценить с помощью (7) и (8).

До сих пор мы предполагали, что имеем дело с неограниченным кристаллом. Такая идеализация вполне приемлема до тех пор, пока аргументы $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ в χ_{abc} и χ_{abcd} много больше $1/L$, где L — характерный размер кристалла. В тех же случаях, когда мы имеем дело с неод-

нородностями поля порядка $1/L$ и меньше и соответственно учитываем вклад акустических колебаний с $k \leqslant 1/L$, описание с помощью $\chi_{abc}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2)$ и $\chi_{abcd}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2; k_3, \omega_3)$ вообще не является корректным. Это связано с тем, что среда уже не является однородной, и нужно пользоваться разложениями типа (2).

В этом случае существенен эффект формы образца, плоские волны e^{ikr} не являются собственными решениями, и не имеет смысла пользоваться даже разложением типа (2), поскольку оно не является уже универсальным. Для разных образцов одного и того же кристалла нужно будет вводить свои χ_{abc}*. Подход, которым нужно пользоваться в такой ситуации, можно проиллюстрировать на примере рассмотрения вклада упругих колебаний в электрооптический эффект.

Выделим из (17) часть, связанную с упругооптической константой

$$P_a = p_{ab,\alpha\beta} S_{\alpha\beta} E_b. \tag{20}$$

Выпишем далее тензор напряжений

$$T_{\alpha\gamma} = c_{\alpha\gamma,\beta\gamma} S_{\beta\gamma} - e_{\beta,\alpha\gamma} E_\beta. \tag{21}$$

Под действием низкочастотного поля E_α (E_b — поле оптической частоты) возникает тензор относительной деформации $S_{\alpha\beta}$, согласно уравнениям движения

$$\rho \ddot{u}_\alpha = \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma}. \tag{22}$$

К этим уравнениям нужно добавить уравнения Максвелла для низкочастотного поля E_α:

$$\operatorname{div}(E + 4\pi P) = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0. \tag{23}$$

Уравнения (20)—(23) совместно с граничными условиями на образце и являются полной системой уравнений, определяющих изменение диэлектрической постоянной пьезоэлектрика, на который действует низкочастотное поле.

5. ВКЛАД МАГНОНОВ В НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В кристаллах, обладающих магнитной структурой (ферромагнитных и антиферромагнитных), значительный вклад в нелинейные свойства кристаллов могут давать магноны. Вклад в нелинейные свойства магнитных кристаллов происходит, с одной стороны, как следствие нелинейных свойств самой магнитной системы (т. е. системы спинов) и, с другой стороны, из-за взаимодействия магнитной подсистемы с орбитальным движением электронов (спин-орбитальное взаимодействие). Последнее, как известно, характеризуется параметром v/c, где v — скорость орбитального движения электронов. Нелинейные свойства ферромагнитных кристаллов теоретически исследовались в работах [26–28] для случая частот оптического диапазона. Однако еще задолго до возникновения нелинейной оптики нелинейные свойства магнитных кристаллов (связанные с самой магнитной подсистемой) широко использовались для целей преобразования частот в СВЧ диапазоне и для параметрических генераторов и усилителей (см., например, сборники [29,30]). Тем не менее, представляет интерес привести оценки нелинейных свойств магнитных кристаллов в этой области частот. Для этого введем

* Строго говоря, для кристаллов везде следовало бы пользоваться соотношением (2), так как кристалл неоднороден — он обладает периодичностью решетки. Однако этим можно пренебречь при $|k| \ll 1/a$.

$\omega_м$ — магнитную частоту. Эта частота определяется или полем анизотропии, или внешним магнитным полем. В первом случае она равна по порядку величины

$$\omega_м \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \omega_e. \tag{24}$$

Если же эта частота определяется внешним магнитным полем, то она в принципе может быть любой. Но при характерных магнитных полях 3000 *гс* она имеет тот же порядок величины, что и (24).

Характеризуя нелинейность магнитной системы как коэффициент связи между намагниченностью и магнитными полями и пользуясь выражением (4) (в котором $\boldsymbol{d}$ теперь совпадает с оператором магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$), мы приходим к оценке

$$\chi^м_{abc} \sim \frac{N}{V}\frac{\mu^3}{\hbar^2 \omega_м^2}.$$

Учитывая далее, что $\mu \sim \frac{v}{c} d \sim \frac{v}{c} ea$, и пользуясь соотношением (24), получаем

$$\chi^м_{abc} \sim \frac{a^2}{e}\frac{c}{v} \tag{25}$$

и аналогично для $\chi^м_{abcd}$ получаем

$$\chi^м_{abcd} \sim \left(\frac{a^2}{e}\right)^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2. \tag{26}$$

Таким образом, магнитные кристаллы в «своей» области частот обладают нелинейностями, превосходящими соответственно в c/v и $(c/v)^2$ раз нелинейные коэффициенты, связанные с учетом электронных и ионных движений.

Остановимся теперь на вопросе о нелинейных свойствах магнитных кристаллов, связанных со спин-орбитальным взаимодействием. Рассмотрение здесь также может быть проведено в адиабатическом приближении [28], используя тот факт, что частота $\omega_м$ и частоты внешних полей ω много меньше характерной частоты электронного движения. В таком приближении можно феноменологически записать гамильтониан кристалла (аналогично (10)) как функцию внешних электрических и магнитных полей и канонических координат спиновых волн (в работе [28] с $\boldsymbol{k}=0$). Следующие из гамильтониана уравнения движения дают соотношения, определяющие нелинейные свойства ферромагнетиков:

$$P_a = \{\chi^{(1)}_{1\,abc}(\omega_1, \omega_2) H_b(\omega_1) H_c(\omega_2) + \chi^{(2)}_{1\,abc}(\omega_1, \omega_2) E_b(\omega_1) H_c(\omega_2) +$$
$$+ \chi^{(3)}_{1\,abc}(\omega_1, \omega_2) E_b(\omega_1) E_c(\omega_2)\} \exp[-i(\omega_1 + \omega_2)t] + \ldots,$$
$$M_a = \{\chi^{(1)}_{2abc}(\omega_1, \omega_2) H_b(\omega_1) H_c(\omega_2) + \chi^{(2)}_{2abc}(\omega_1, \omega_2) E_b(\omega_1) H_c(\omega_2) +$$
$$+ \chi^{(3)}_{2\,abc}(\omega_1, \omega_2) E_b(\omega_1) E_c(\omega_2)\} \exp[-i(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Оценки для величин χ_{abc} в области, где они существенно отличны от нуля (и вне резонансов), имеют вид (для $\chi^{(1)}_{2\,abc}$ см. (25))

$$\chi^{(1)}_{1\,abc},\ \chi^{(3)}_{1\,abc},\ \chi^{(2)}_{2\,abc} \sim \alpha_{abc} \sim a^2/e;\ \chi^{(2)}_{1\,abc},\ \chi^{(3)}_{2\,abc} \sim \frac{a^2}{e}\frac{v}{c}.$$

Аналогичные оценки можно получить для нелинейных восприимчивостей.

Так, тензор, описывающий индуцированный раман-эффект на однородной процессии намагниченности, по порядку величины равен

$$\chi_{abcd}(\omega_1, -\omega_1, \omega_1 - \omega_м) \sim \alpha_{abcd}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{\omega_м}{\Delta\omega},$$

где частоты ω_1 и ω_2 находятся в оптическом диапазоне, $\Delta\omega$ — ширина линии ферромагнитного резонанса.

6. ПРОЦЕССЫ С УЧАСТИЕМ ДВУХ КВАЗИЧАСТИЦ

В последнее время заметно возрастает интерес к процессам с участием двух квазичастиц. Речь идет о так называемом поглощении второго порядка и о раман-эффекте второго порядка (см., например, [18]). Эти процессы характеризуются следующими законами сохранения: поглощение второго порядка

$$\hbar\omega = \hbar\omega_j(\boldsymbol{k}) \pm \hbar\omega_{j'}(-\boldsymbol{k}), \tag{27}$$

раман-эффект второго порядка

$$\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 = \hbar\omega_j(\boldsymbol{k}) \pm \hbar\omega_{j'}(-\boldsymbol{k})$$

(мы считаем, что волновой вектор фотона $\boldsymbol{k}\approx 0$). В работе [19] найдены восприимчивости этих процессов с учетом их зависимости от амплитуд полей (без разложения по степеням поля, т. е. без теории возмущения по электрическому полю).

Процессы второго порядка наблюдались в рамановском рассеянии на фононах в работах [31,32] и совсем недавно в поглощении на антиферромагнетиках с участием двух магнонов [33]. Теоретически вопрос о поглощении с участием двух магнонов обсуждался в работах [34,35]. Рамановское рассеяние с участием двух магнонов также недавно наблюдалось [36]. К процессам того же типа относятся так называемые непрямые переходы в полупроводниках (см., например, [37]). В этом случае фотон превращается в фонон и экситон. Процессы такого же типа наблюдаются в молекулярных кристаллах [38].

Заметим, что (27) (знак +) по существу есть условие параметрического возбуждения колебаний ω_j и $\omega_{j'}$ полем частоты

$$\omega = \omega_j + \omega_{j'}$$

(где ω_j и $\omega_{j'}$ означают частоты различных квазичастиц: двух магнонов, двух фононов, фонон-экситона и т. д.). Это означает, что при достаточно большой величине амплитуды поля частоты ω должна возникнуть параметрическая генерация колебаний ω_j и $\omega_{j'}$. Хотя возможность такой генерации фононов и отмечалась в работах [19,39,40], экспериментально такой эффект пока наблюдался только в СВЧ диапазоне. Это — аномальное насыщение в ферромагнитном резонансе с возникновением нестабильности спиновых волн [41].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
2. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
3. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ИНИ АН СССР, М., 1964.
4. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
5. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, **39**, 326 (1960).
6. Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 687 (1962).
7. Ш. М. Коган, ЖЭТФ, **43**, 304 (1962).

8. D. A. Kleinman, Phys. Rev., **126**, 1977 (1962).
9. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, **51**, 156 (1966).
10. В. М. Аграновнч, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965.
11. В. Н. Генкин, П. М. Меднис, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, 192 (1967).
12. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
13. P. N. Butcher, T. P. Mc Lean, Proc. Phys. Soc., **81**, 219 (1962).
14. P. L. Kelley, J. Phys. Chem. Sol., **24**, 607, 1113 (1963).
15. Л. В. Келдыш, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1967.
16. В. Н. Генкин, П. М. Меднис, ФТТ (в печати).
17. S. S Jha, Phys. Rev., **145**, 500 (1966).
18. М. Борн, К. Хуан, Динамическая теория кристаллических решеток, ИЛ, М., 1958.
19. Г. М. Генкин, В. М. Файн, Э. Г. Ящин, ЖЭТФ, **52**, вып. 4, 897 (1967).
20. Г. М. Генкин, В. М. Файн, ЖЭТФ, **49**, 1118 (1965).
21. Г. М. Генкин, В. М. Файн, Э. Г. Ящин, ФТТ, **8**, 3310 (1966).
22. Э. П. Волкова, Э. Г. Ящин, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1967.
23. Г. М. Генкин, В. М. Файн, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1967.
24. В. М. Файн, Э. Г. Ящин, ЖЭТФ, **46**, 695 (1964).
25. В. Н. Генкин, А. Ф. Дите, В. М. Файн, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1967; Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, 296 (1967).
26. G. R. Shen, N. Bloembergen, Phys. Rev., **143**, 372 (1966).
27. P. Pershan, Van der Ziel, Phys. Pev., **143**, 574 (1966).
28. В. М. Генкин, Г. М. Генкин, В. М. Файн, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1967; ФТТ, **8**, 3662 (1966).
29. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах, сб. статей, ИЛ, М., 1961.
30. Нелинейные свойства ферритов в полях СВЧ, ИЛ, М., 1963.
31. E. Fermi, F. Rasseti, Zs. Phys., **71**, 689 (1931).
32. Е. Ф. Гросс, П. П Савинский, А. И. Стеханов, УФН, **43**, 536 (1951); А. И. Стеханов, М. Б. Элиашберг, Оптика и спектроскопия, **10**, 348 (1961).
33. S. J. Allen, Jr. R. London, P. L. Richards, Phys. Rev. Lett., **16**, 463 (1966).
34. T. Morija, J. Phys. Soc. Japan, **21**, 926 (1966).
35. I. Silvera, J. W. Halley, Phys. Rev., **149**, 415 (1966).
36. P. A. Fleury, S. P. S. Porto, L. E. Chessman, H. I. Guggenheim, Phys. Rev. Lett., **17**, 84 (1966).
37. Р. Нокс, Теория экситонов, изд. Мир, М., 1966.
38. V. L. Broude, E. I. Rashba, E. F. Sheka, Phys. Stat. Sol., **19**, 395 (1967).
39. В. М. Файн, Письма ЖЭТФ, **4**, 100 (1966).
40. R. Orbach, Phys. Rev. Lett., **16**, 15 (1966).
41. H. Suhl, J. Phys. Chem. Sol., **1**, 209 (1957).

Институт физики твердого тела
АН СССР

Поступила в редакцию
18 мая 1967г.

УДК 535.1:621.374.33

МЕТОДЫ СЕЛЕКЦИИ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТЫХ КВАЗИОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов

ВВЕДЕНИЕ

Спектр замкнутых резонансных объемов при переходе к более высоким частотам сгущается: число колебаний ΔN полости объемом V, приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$,

$$\Delta N = \frac{V}{\pi^2 v_0^3}\omega^2\Delta\omega \qquad (1)$$

(v_0 — скорость света) растет пропорционально квадрату частоты. Увеличивается и число распространяющихся типов волн волновода фиксированного сечения S:

$$\Delta N = \frac{S}{\pi v_0^2}\omega\Delta\omega. \qquad (2)$$

Такое сгущение спектра наряду с увеличением коэффициентов затухания всех колебаний является принципиальным препятствием для применения экранированных систем в области очень коротких волн.

Избежать «коротковолновой катастрофы», грозившей похоронить любые попытки продвижения почти традиционных для СВЧ экранированных систем в диапазоны высоких частот (миллиметровый, субмиллиметровый, оптический), позволил переход к квазиоптическим устройствам типа открытых резонаторов и открытых волноводов [1–8].

В устройствах открытого типа разрежение спектра достигается увеличением радиационных потерь нежелательных мод при сохранении относительно низкого уровня потерь рабочих типов колебаний. Способы избирательного увеличения потерь могут быть различными. Некоторые из них иллюстрируются рис. 1.

В круговом диэлектрическом стержне, помещенном между бесконечными отражающими плоскостями, перпендикулярными его оси (рис. 1а), высокодобротными останутся только колебания, образованные волнами, падающими на

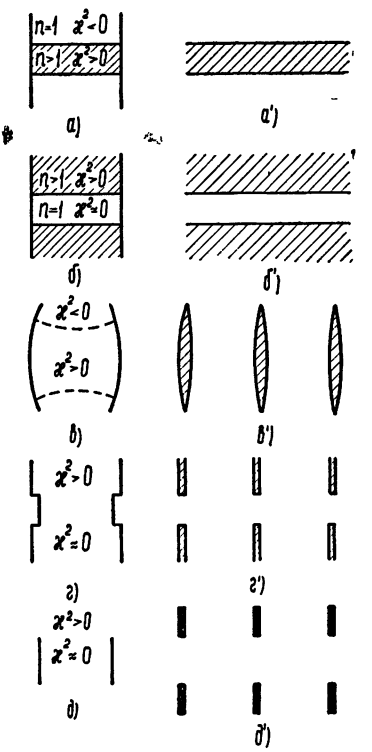


Рис. 1. Открытые резонаторы и их волноводные аналоги.

границу диэлектрик — вакуум под углом, бо́льшим угла полного внутреннего отражения. Число таких колебаний будет уменьшаться по мере приближения коэффициента преломления диэлектрика n к единице, но для реальных твердых и жидких диэлектриков относительная степень разрежения спектра невелика. Правда, диэлектрические резонаторы в оптическом диапазоне могут иметь вид относительно тонких прозрачных нитей (волоконная оптика), что соответствует уменьшению V в формуле (1), но такой способ разрежения спектра часто неприемлем по соображениям технологического порядка.

Разрежение спектра может быть достигнуто и в «инвертированной» системе (рис. 1б), когда колебания сосредоточены в оптически менее плотной среде, а их излучение происходит в более плотную среду. Высокодобротными здесь остаются колебания, соответствующие парциальным волнам, скользящим вдоль границы диэлектрика. В отличие от систем с полным внутренним отражением радиационные потери этих колебаний не обращаются в нуль даже для идеальных диэлектриков, однако быстрый рост их с увеличением угла падения волны на границу позволяет добиться заметного разрежения спектра по сравнению с экранированной системой тех же размеров.

Можно дать прозрачное аналитическое описание указанных способов разрежения спектра. Пусть, для простоты, резонаторы, изображенные на рис. 1а, б, двумерны. Поле представим как суперпозицию плоских волн, падающих изнутри на границу диэлектрика и отражающихся от нее*. Коэффициент отражения при этом равен

$$\tilde{R} = \frac{\varkappa_2/\varepsilon_2 - \varkappa_1/\varepsilon_1}{\varkappa_2/\varepsilon_2 + \varkappa_1/\varepsilon_1} \quad \text{или} \quad \tilde{R} = \frac{\mu_2\varkappa_2 - \mu_1\varkappa_1}{\mu_2\varkappa_2 + \mu_1\varkappa_1} \tag{3}$$

в зависимости от поляризации волны. В (3) $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — поперечные (к оси резонатора) волновые числа.

В первом случае (рис. 1а) высокодобротным колебаниям соответствуют мнимые значения $\varkappa_2 = i|\varkappa_2|$ (внешний волновод 2 — закритический: $|\tilde{R}| = 1$), во втором (рис. 1б) — значения $\varkappa_1$, близкие к нулю (частота близка к критической частоте внутреннего волновода 1: $|\tilde{R}| \leqslant 1$). К подобному же заключению можно придти, рассматривая цилиндрические волны в аксиально-симметричном случае.

Очевидно, аналогичные условия отражения могут быть реализованы и без применения диэлектриков: полное отражение от закритического волновода — плавным уменьшением расстояния между отражателями (рис. 1в), сильное отражение на частотах, близких к критическим частотам внутреннего волновода, — внесением в него неоднородностей, например, скачкообразным изменением расстояния между отражателями (рис. 1г) или ограничением их размера (рис. 1д). Соответственно и высокодобротные колебания будут иметь разный характер: в первом случае имеется каустическая поверхность, разграничивающая области докритического ($\varkappa^2 > 0$) и закритического ($\varkappa^2 < 0$) волноводов, причем в последнем поле быстро (экспоненциально) убывает при удалении от каустики; во втором случае поле ограничивается областью сильного отражения волны. Оба способа разрежения спектра широко применяются в различных устройствах.

К описанию полей в открытых системах типа изображенных на рис. 1а—д наряду с волноводным возможен и другой подход. Поле в них представляет собой широкие (в масштабе λ) параксиальные пуч-

* Такой подход последовательно развивался в трудах Вайнштейна [7, 9], в том числе и в применении к более сложным системам.

ки, распространяющиеся навстречу друг другу перпендикулярно зеркалам. Их можно описывать, используя известные квазиоптические методы теории дифракции, основанные на применении параболического уравнения [10–12] или принципа Гюйгенса—Кирхгофа для зоны дифракции Френеля [4, 6]. С этой точки зрения разрежение спектра объясняется более быстрым уходом из резонатора волновых пучков, имеющих бо́льшую расходимость. Высокодобротными остаются только колебания, которым соответствуют плоские волны в некотором телесном угле $d\Omega$ вблизи оси системы, при этом спектр разрежается в $d\Omega/4\pi$ раз по сравнению с величиной (1), соответствующей всевозможным направлениям плоских волн.

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении открытых волноводов (рис. 1а′—д′), переход к которым нетрудно совершить, считая встречные волновые пучки резонатора развернутыми в последовательную цепочку. При этом рисунку 1а будет соответствовать обычный диэлектрический волновод (рис. 1а′), рисунку 1б — диэлектрическая труба (рис. 1б′), рисунку 1в — линзовый волновод (рис. 1в′), рисункам 1г и 1д — волноводы из согласованных прозрачных (диэлектрических) или полностью поглощающих диафрагм соответственно.

Таким образом, замена экранированной системы открытой является эффективным средством разрежения спектра. Однако, если не принимать специальных мер, даже в открытых системах спектр остается еще настолько густым, что в рабочий диапазон частот попадает большое число колебаний. Как правило, это нежелательно. Так, в лазерах многомодовость резонаторов увеличивает расходимость излучения по сравнению с дифракционным пределом, соответствующим размеру освещенной области на зеркалах, и приводит к многочастотности излучения*. В волноводах она вызывает перетрансформацию волн, ухудшает эффективность приемных и передающих устройств, искажает передаваемый сигнал, вызывает дополнительные потери и т. п.**.

В данном обзоре речь пойдет о способах улучшения дискриминационных характеристик многомодовых открытых систем, причем под дискриминацией нежелательных мод или селекцией рабочих типов колебаний мы будем понимать увеличение коэффициентов затухания первых при сохранении относительно невысокого уровня потерь основных колебаний***.

По отношению к открытым резонаторам принято различать дискриминацию поперечных мод, отличающихся друг от друга поперечной структурой волновых пучков, а следовательно, и структурой поля на зеркалах, и дискриминацию продольных мод, имеющих идентичные поперечные структуры поля, но отличающихся числом полуволн колебаний, укладывающихся между зеркалами. Каждое колебание характеризуется тремя индексами: двумя поперечными (m и n) и одним продольным (q). Поэтому можно говорить о дискриминации колебаний по поперечным индексам m и n ($q = \text{const}$) и продольному индексу q (m, $n = \text{const}$). В волноводах, естественно, имеет смысл говорить только о дискриминации по поперечным индексам.

Дискриминация поперечных мод, как правило, основывается на различиях в их пространственных структурах (ограничение пучков по-

---

* В лазерах с синхронизацией мод последний эффект полезен — он дает возможность получить очень короткие импульсы излучения.

** Многомодовость необходима в системах параллельной передачи изображения.

*** В понятие селекции мод резонаторов можно было бы, вообще говоря, включить и раздвижение резонансных частот вблизи частот рабочих типов при сохранении среднего числа высокодобротных колебаний в некотором расширенном спектральном интервале, однако из-за большой (в масштабе λ) длины открытых систем способы такой селекции малоэффективны.

глощающими диафрагмами, применение профильных зеркал, ограничение углового спектра пучков и т. п.). Методы дискриминации продольных колебаний, отличающихся от рабочих по частоте на величины $\Delta\omega_p = \frac{\pi p v_0}{L}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ (L — длина резонатора), большие, чем поперечные моды, основываются на применении диспергирующих элементов (интерферометров Фабри—Перо [47–52], призм [38, 39], дифракционных решеток [40–43], связанных резонансных объемов [53–57] и т. п.). В лазерах применение их особенно эффективно в сочетании с модуляцией добротности насыщающимися фильтрами [58].

Наиболее полную характеристику дискриминации мод в данной системе можно составить, если известны коэффициенты затухания ряда наиболее добротных типов колебаний. Однако, как правило, для практической оценки селективных свойств бывает достаточно представления о величинах коэффициентов потерь рабочего и соседнего с ним типов колебаний, тем более, что расчет коэффициентов затухания мод более высокого порядка за редкими исключениями довольно трудоемок. В дальнейшем мы в основном будем придерживаться оценки дискриминационных свойств квазиоптических систем по разности коэффициентов затухания первых двух типов колебаний.

При рассмотрении различных способов дискриминации мод главное внимание будет уделено принципиальной стороне вопроса, многочисленные экспериментальные работы по селекции мод в конкретных устройствах, в том числе и лазерах, здесь почти не обсуждаются, они будут привлекаться лишь для иллюстрации некоторых выводов теории. Методы расчета открытых систем рассматриваются здесь лишь в той мере, в какой это необходимо для обсуждения их дискриминационных характеристик. Более подробные сведения можно найти в обзорах [60–62], монографии [9], сборнике [63], где имеются ссылки и на соответствующие оригинальные работы.

I. МЕТОДЫ ДИСКРИМИНАЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ТИПОВ ВОЛН

В этом разделе мы рассмотрим некоторые способы дискриминации поперечных типов колебаний. Наибольшее распространение сейчас получил способ, основанный на применении поглощающих диафрагм, ограничивающих поперечный размер системы. Ниже будут рассмотрены другие возможности дискриминации поперечных мод: угловое ограничение пучков, комбинированное (пространственное и угловое) ограничение, применение неквадратичных фазовых корректоров.

1. Ограничение волновых пучков поглощающими диафрагмами

Теория ограничивающих диафрагм и их влияния на качество изображения издавна является предметом классической оптики (дифракционная теория разрешающей силы оптических инструментов, теория Аббе микроскопа и т. п.). В теории изображения, как правило, интересуются влиянием аппаратной функции оптической системы на изображение некоторых эталонных структур: светящейся точки, синусоидальной дифракционной решетки (аналоги импульсной функции и гармонического сигнала в теории фильтров).

Иной подход был сформулирован в 1912 г. Мандельштамом [13, 14]. Он поставил задачу отыскания структур, которые дают подобное себе изображение при заданном диафрагмировании светового пучка. При этом он обратил внимание на тот факт, что из бесконечного множества таких структур только конечному числу соответствует заметная осве-

щенность изображения. Именно такой подход и развивается в современной квазиоптической теории открытых резонаторов и волноводов, причем в нем имеются и обе выделенные Мандельштамом задачи: определение возможных типов волн в системе (структур повторяющихся волновых пучков) и выделение из их числа наиболее добротных, которым, по Мандельштаму, соответствует наибольшая освещенность изображения (селекция колебаний).

Будем сначала рассматривать системы с квадратичными фазовыми корректорами (сферические зеркала, тонкие линзы), которые могут быть описаны следующей функцией преобразования:

$$\psi_2(x, y) = \exp[ik(x^2 + y^2)/2F]\psi_1(x, y),$$

где ψ_1, ψ_2 — структуры поля в пучке соответственно до и после корректора, F — его фокусное расстояние. Селекция типов колебаний достигается либо ограничением пучка на корректорах (конечные размеры зеркал в резонаторах, поглощающие диафрагмы в волноводах), либо ограничением пучка в промежутках между корректорами. Теория таких систем в настоящее время достаточно хорошо развита как на основе интегральных уравнений для поля на корректорах [3–5, 15], так и на основе описанного выше волноводного подхода [9].

Пусть для определенности имеется резонатор со сферическими отражателями радиусов кривизны $R_1 = 2F_1$ и $R_2 = 2F_2$ и расстоянием L между ними. Поле в таком резонаторе представляет собой суперпозицию встречных волновых пучков

$$\Psi_\pm = \psi_\pm(x, y, z)\exp(\mp ikz),$$

где $\psi_\pm$ — амплитуды пучков, являющиеся медленными функциями координат. Обозначим через $\psi_1(\boldsymbol{r}_\perp)$ распределение поля на первом зеркале в прямом пучке и через $\psi_2(\boldsymbol{r}_\perp)$ распределение поля на втором зеркале в обратном пучке.

В общем случае уравнения для функций $\psi_{1,2}$ будут иметь вид [15, 16]

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \hat{L}_+ \psi_1, \\ p\psi_1 &= \hat{L}_- \psi_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где операторы $\hat{L}_+$ и $\hat{L}_-$ описывают преобразование структуры поля пучков при переходе от одного зеркала к другому.

Для ограниченных сферических зеркал параметрами, определяющими собственные функции $\psi_{1,2}$ и собственные значения p уравнений (1.1), являются [15]

$$\begin{gathered} c = \frac{ka_1a_2}{L}, \quad \tilde{g}_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}}g_{1,2}, \quad g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}, \\ \beta_{1,2} = \sqrt{a_{1,2}/a_{2,1}}\ \sqrt{kL}\ \alpha_{1,2}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где a_1, a_2 — размеры зеркал (радиус для круговых, полуширина для ленточных), $\alpha_{1,2}$ — углы их перекосов, вносящих в пучок линейную фазовую коррекцию $\Delta\varphi_{1,2} = k\alpha_{1,2}r_\perp$.

Семейство резонаторов, характеризующихся различными исходными параметрами, но отвечающих одному и тому же набору величин (1.2), будет иметь одинаковые собственные значения p и описываться в некоторых безразмерных переменных одними и теми же собственными функциями. Резонаторы, принадлежащие одному такому семейству,

очевидно, эквивалентны друг другу и в смысле дискриминации типов колебаний.

В произвольном случае система (1.1) имеет бесчисленное множество решений ψ_{1mn} и ψ_{2mn} и соответствующих им собственных чисел p_{mn}, причем $|p_{mn}| < 1$, что следует из самих физических условий задачи. Подставляя значения p_{mn} в резонансное условие

$$p_{mn}\exp(-2ik_{mn}L) = \exp(-2i\pi q) \quad (q\text{—целое число}) \tag{1.3}$$

и полагая $k = k' + ik''$, можно найти как резонансные частоты колебаний

$$k'_{mnq}L = \pi q + \frac{1}{2}\arg p_{mn}, \tag{1.4}$$

так и коэффициенты затухания

$$k''_{mn}L = -\frac{1}{2}\ln|p_{mn}|. \tag{1.5}$$

Добротность резонатора на данном типе колебания определяется обычным образом, т. е.

$$Q_{mnq} = \frac{k'_{mnq}}{2k''_{mn}} = \frac{k'_{mnq}L}{\delta_{mn}} = \frac{k'_{mnq}}{\alpha_{mn}} = -\frac{k'_{mnq}L}{\ln|p_{mn}|}. \tag{1.6}$$

Величина $\delta_{mn} = -\ln|p_{mn}|$ в (1.6) называется коэффициентом потерь, в волноводе ей соответствует погонный коэффициент затухания $\alpha_{mn} = \delta_{mn}/L$. При $|p_{mn}| \sim 1$ коэффициент $\delta_{mn} \simeq 1 - |p_{mn}|$ непосредственно дает относительную величину мощности, теряемой волновым пучком при проходе резонатора (в одну сторону). Заметим, что в общем случае собственные значения p_{mn} зависят от волнового числа k_{mnq}, так что уравнения (1.4), (1.5) являются системой, определяющей в неявном виде зависимость величин k' и k'' от параметров резонатора. Однако, как правило, $k'' \ll k'$, а числа p_{mn} являются медленными функциями k_{mnq}, так что их можно взять при $k_{mnq} \simeq k'_{mnq} \simeq k$, где k — волновое число, соответствующее средней частоте рассматриваемого диапазона. Исключением являются связанные резонаторы, которые будут рассмотрены отдельно.

Модули и фазы собственных чисел p_{mn}, вообще говоря, различны для разных типов колебаний. С этим и связана возможность селекции отдельных мод.

В общей постановке задача о влиянии фазовой коррекции первого и второго порядков на характеристики открытых резонаторов была сформулирована в работах [15, 16]. Там же были приведены результаты ее численного решения для некоторых частных случаев. В настоящее время имеется целый ряд работ [3–6, 15, 16, 18], содержащих результаты численного анализа уравнений (1.1) при конечных значениях френелевского параметра c. Для зеркал, ограниченных диафрагмами с постоянной прозрачностью, решение в известных функциях получено только для конфокального [5] и плоского [7, 9] резонаторов.

Собственные значения уравнений (1.1) удовлетворяют соотношениям симметрии [15]

$$p(\beta_1, \beta_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = p^*(\beta_1, -\beta_2, -\tilde{g}_1, -\tilde{g}_2) = p(-\beta_1, \beta_2, -\tilde{g}_1, -\tilde{g}_2). \tag{1.7}$$

Эти формулы являются обобщением соотношений симметрии, установленных в работе [16]. Из (1.7) следует, что дифракционные потери отдельных мод (а следовательно, и дискриминационные свойства) данно-

го резонатора равны потерям сопряженного (отличающегося знаками $\tilde{g}_{1,2}$), перекошенного на те же углы, но со сменой знака одного из них. Потери самосопряженного конфокального резонатора ($\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = 0$) не зависят от знаков углов перекоса его зеркал.

Подробные результаты расчета потерь первых двух типов колебаний в резонаторах с неперекошенными ленточными и круговыми зеркалами приведены в [18]. На рис. 2 дан коэффициент потерь основного (TEM_{00q}) и первого несимметричного (TEM_{10q}) колебаний в резонаторах с неперекошенными ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) круговыми одинаковыми зеркалами при разных значениях $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = g$ и $N = c/2\pi = a^2/L\lambda$. С ростом N при фиксированном значении g степень дискриминации несимметричной моды ухудшается, при фиксированном N она растет по мере приближения $|g|$ к единице. При относительно больших значениях $N \gg 2$ удовлетворительной селекции мод можно добиться лишь при $|g| \lesssim 1$. Этим объясняется использование в одномодовых ОКГ с широкими пучками именно таких конфигураций зеркал.

Увеличение разности коэффициентов потерь ($\delta_{10q} - \delta_{00q}$) (или отношения $|p_{00q}|/|p_{10q}|$) с ростом $|g|$ сопровождается и увеличением радиационных потерь основного колебания $\delta_0 = \delta_{00q}$. Пока омические потери $(\delta_0)_\Omega$ много больше дифракционных $(\delta_0)_d$, такое увеличение несущественно, так как определяющими будут омические потери. Однако при $(\delta_0)_d \gtrsim (\delta_0)_\Omega$ (например, в некоторых типах газовых лазеров) рост $(\delta_0)_d$ может послужить препятствием к получению высокой селективности.

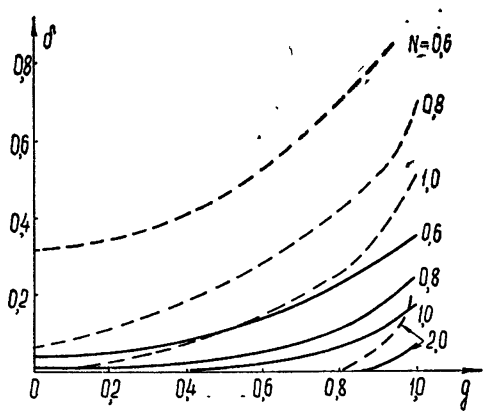


Рис. 2. Зависимость коэффициентов потерь основной и первой несимметричной мод в резонаторе с круговыми зеркалами от параметра g для различных значений $N=C/2\pi$. Сплошные кривые—δ_0, пунктирные—δ_1.

В только что проведенном рассуждении мы неявно считали фиксированной длину резонатора*. Если отказаться от такого требования, считая фиксированным лишь размер ограничивающей диафрагмы, то сопоставление систем придется проводить уже при разных значениях двух параметров g и $c = 2\pi N$. В этом случае имеется больше возможностей для выбора систем, обладающих требуемой селекцией. Однозначным выбор можно сделать, лишь предъявив дополнительные требования к системе. Таким требованием может служить, например, условие минимума дифракционных потерь основного колебания при заданном уровне потерь ближайшего высшего. В применении к ОКГ это означает выбор резонатора, обеспечивающего наименьшую пороговую

* В этом случае все рассуждения непосредственно переносятся и на коэффициенты затухания волноводных аналогов $\alpha = \delta/L$.

накачку активного вещества. В волноводных задачах интерес, естественно, представляет сопоставление величин погонного затухания разных типов волн:

$$\alpha = \frac{\delta}{L} = \frac{1}{ka^2} c\delta(c, g) = \frac{\lambda}{a^2} N\delta(N, g).$$

Анализ графиков потерь, приведенных в [18] (см. также рис. 2), показывает, что при фиксированной площади ограничивающих диафрагм и коэффициенте потерь первого колебания, равном некоторому фиксированному значению, наименьшим коэффициентом потерь основного колебания обладает софокусный резонатор. Аналогичное заключение можно сделать и в отношении одномодовых лучевых волноводов с коэффициентом потерь первого несимметричного типа волны, равным некоторой величине α: наименьший коэффициент затухания основного колебания будет у софокусного волновода, при этом расстояние между корректорами такого волновода больше, чем в любом другом случае. Последнее обстоятельство особенно важно при проектировании открытых линий передач: в реальных корректорах всегда имеются омические потери, поэтому сведение числа корректоров к минимуму является единственно возможным путем уменьшения этих потерь на длине всего волноводного тракта.

Таким образом, в классе квадратичных корректоров софокусные корректоры, в известном смысле, обеспечивают наибольшую дискриминацию мод: при одинаковых коэффициентах затухания первых мод они имеют наименьшие потери основных и, напротив, при фиксированном уровне потерь основных колебаний потери соседних мод в них наибольшие [20, 21]. Однако такая высокая селекция может быть реализована либо при достаточно сильном ограничении пучков, либо в достаточно длинных резонаторах, что практически не всегда приемлемо. Впрочем, в некоторых случаях размеры системы можно сократить, заменив зеркала резонатора эквивалентными комбинированными отражателями, состоящими из линзы и сферического зеркала [19], но при этом возникают дополнительные трудности юстировки всех элементов сложного резонатора.

Влияние перекосов зеркал на селективные свойства резонаторов, требующее расчета потерь высших типов волн при $\beta_{1,2} \neq 0$, исследовано слабо. В [16] имеются данные, показывающие, что при перекосе плоских зеркал потери основного и первого несимметричного колебаний сближаются, т. е. дискриминационные свойства резонатора ухудшаются. В резонаторах, близких к конфокальному, при ограничении пучков далеко за каустиками первых типов волн можно ожидать, что перекосы будут заметно улучшать дискриминационные свойства до тех пор, пока основное колебание не начнет «выплескиваться» за пределы зеркал.

Ограничение пучков, дискриминирующее колебания в открытых системах, может осуществляться не только на корректорах, но и между ними. Так, в ОКГ роль ограничивающих диафрагм нередко играет неоднородное распределение коэффициента усиления по сечению образца активного вещества, обусловленное неравномерностью поля накачки.

Типы колебаний открытых резонаторов, диафрагмированных в произвольном сечении между неограниченными сферическими зеркалами (рис. 3), изучались в [22]. Анализ общих уравнений таких резонаторов показывает, что они сводятся к уравнениям резонаторов с диафрагмированными зеркалами лишь при некоторых положениях диафрагмы: $\eta = \frac{L_1}{L} = 0;\ 1;\ (1 - g_{1,2})^{-1};\ (1 + \sqrt{g_2/g_1})^{-1}$; L_1 — удаление диафрагмы от

первого зеркала. Для конфокальных зеркал ($F_1 = F_2 = L/2$) такое сведение возможно при любом положении диафрагмы, при этом преобразованная система является тоже конфокальным резонатором с френелевским параметром $c = c_0/\eta(1-\eta)$, где $c_0 = ka^2/L$ [23]. В указанных случаях дискриминационные свойства резонаторов, естественно, точно такие же, как и у соответствующих систем с ограниченными корректорами. В произвольном случае уравнения могут быть приведены к виду, описывающему резонатор, имеющий разную длину для прямого и обратного пучков. В работе [22] содержатся результаты численного расчета таких резонаторов для диафрагм с постоянной прозрачностью. Дискриминационные свойства в этих случаях качественно не отличаются от свойств резонаторов с ограниченными корректорами.

Дополнительным фактором, влияющим на дискриминацию мод в открытых системах, является неоднородная прозрачность ограничивающих диафрагм [24, 25]. При сопоставимых эффективных размерах области прозрачности уменьшение прозрачности к краю диафрагмы увеличивает радиационные потери всех мод, причем неравномерно, что, в принципе, может быть использовано для подавления колебаний высших порядков [24]. Однако такой прием целесообразно применять лишь в системах с достаточно большими омическими потерями, заметно превышающими уровень радиационных потерь. Если же омические потери пренебрежимо малы, а уровень потерь основной моды не должен быть большим (как, например, в волноводах), то диафрагмы с однородной прозрачностью предпочтительнее, так как обеспечивают более высокий уровень потерь высших колебаний при сопоставимых значениях потерь основного типа [20, 25].

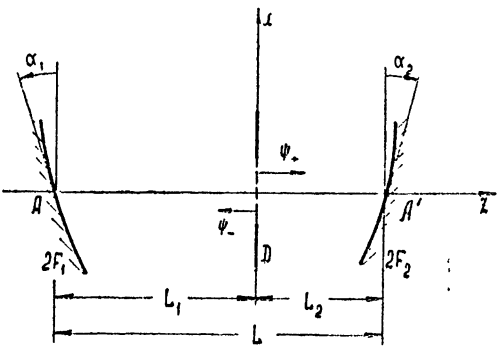


Рис. 3. Открытый резонатор с промежуточной диафрагмой.

Специальным подбором конфигурации области прозрачности диафрагмы с помощью системы щелей или непрозрачных объектов можно добиться выделения мод высших порядков и подавить основные [26, 27].

2. Ограничение углового спектра волновых пучков. Комбинированное ограничение

Наряду с наиболее распространенным пространственным ограничением волновых пучков находит применение и другой способ дискриминации, основанный на ограничении углового спектра пучков. Его можно назвать методом угловой селекции мод. Теория систем с угловой селекцией строится на основе методов расчета систем с ограничивающими диафрагмами [28].

Рассмотрим, к примеру, открытый резонатор длиною L с одинаковыми цилиндрическими зеркалами радиусов кривизны $R_1 = R_2 = 2F$. При ограничении зеркал такой резонатор характеризуется, согласно (1.2), параметрами $c = c_s = ka^2/L$ и $g = 1 - L/2F$. Если в резонаторе с неограниченными зеркалами находится элемент, ограничивающий угловой спектр $k_\perp$ пучка величиной $k_\perp^0$ ($|k_\perp| < k_\perp^0$, $k_\perp$ — проекция волнового вектора на плоскость, перпендикулярную оси резонатора), то

для углового спектра на такой диафрагме может быть получено уравнение, аналогичное (1.1), но с заменой c_s на $c_a = k_\perp^2 F/k$. Следует заметить, что теперь при фиксированной длине резонатора L параметры c_a и g связаны между собой:

$$c_a = \frac{1}{1-g}\,\frac{k_\perp^2 L}{2k},$$

поэтому для углового ограничения характерным является уменьшение потерь резонатора при переходе к плоским зеркалам и быстрый рост их при отрицательных g.

Как уже отмечалось, рост параметра c при фиксированном g ухудшает селекцию колебаний в резонаторе; для выделения аксиальных типов колебаний приходится прибегать к достаточно сильному диафрагмированию пучка или его спектра.

В плоскопараллельных и близких к ним резонаторах ($g \leqslant 1$) заметное подавление неаксиальных типов достигается лишь при таких c, когда размеры пучков определяются размерами ограничивающих диафрагм. Сравним в этом случае расходимость пучков θ при обоих методах селекции: пространственном ограничении и ограничении углового спектра. При пространственном ограничении можно принять $\theta = \theta_s = 2\pi/ka$, при угловом $\theta = \theta_a = 2k_\perp^0/k$. При одинаковых c и g $\theta_s > \theta_a$, если $c\sqrt{2(1-g)} < \pi$. Это условие всегда выполняется при достаточно сильном ограничении пучков, необходимом для селекции. Следовательно, метод угловой селекции позволяет получить бо́льшую направленность излучения в одномодовом режиме. Дискриминацию мод в резонаторах с $c_s \gg 1$ можно улучшить, применив метод комбинированной селекции, заключающийся в одновременном пространственном и угловом ограничении пучков [28]. Рассмотрим, например, двумерный резонатор с плоскими зеркалами, ограниченный диафрагмой шириной $2a$ и угловым селектором с раствором $2k_\perp^0$. Считая, что $c_s \gg 10$, пренебрежем расплыванием пучка внутри резонатора. Уравнение для поля в плоскости диафрагмы, пространственно ограничивающей пучок, запишется в виде

$$T\psi(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sin[c_{sa}(u-u')]}{(u-u')}\,\psi(u')du', \qquad (2.1)$$

где $u = x/a$ и $c_{sa} = k_\perp^0 a$, T — коэффициент передачи системы по амплитуде за один полный проход пучком резонатора (туда—обратно). Уравнение (2.1) того же типа, что и уравнение собственных функций конфокального резонатора [17]. Таким образом, метод комбинированной селекции реализует высокую селективность, свойственную при пространственном ограничении конфокальной системе, но не связан с необходимостью использования узких пучков ($c_s \gg 10$).

В литературе описано несколько способов диафрагмирования углового спектра пучков: в [29] предлагается использовать ограничение в общей фокальной плоскости линз телескопической системы, расчет аналогичного устройства дан в [21]. Недостатком этого способа, ограничивающим возможности его применения в ОКГ, является малый размер пучка на диафрагме. Более удобным является использование селектирующих призм полного внутреннего отражения [31], причем роль селекторов могут выполнять отражатели [30] и даже сами активные элементы [32].

3. Неквадратичные фазовые корректоры

Выше уже говорилось, что среди квадратичных корректоров, ограниченных диафрагмой данных размеров ($ka^2 = \text{const}$), наилучшими дискриминационными свойствами обладают софокусные корректоры, однако резонаторы, реализующие такую селективность, должны иметь большую длину $L \sim \frac{ka^2}{\pi} = \frac{2a^2}{\lambda}$. Этого затруднения можно избежать, используя законы фазовой коррекции, отличные от квадратичного [33].

Рассмотрим открытый резонатор длиной L, образованный двумя отражателями, осуществляющими фазовый сдвиг между отраженным и падающим пучками на величину $2\varphi_{1,2}$.

Уравнения для поля на зеркалах такого резонатора будут следующие:

$$p\psi_2(\boldsymbol{r}_{\perp 2}) = \frac{ik}{2\pi L}\exp\left(i\varphi_2(\boldsymbol{r}_{\perp 2})\right)\int\limits_{S_1}\exp\left(\frac{ik|\boldsymbol{r}_{\perp 2}-\boldsymbol{r}_{\perp 1}|^2}{2L}\right)\times$$
$$\times\exp\left(i\varphi_1(\boldsymbol{r}_{\perp 1})\right)\psi_1(\boldsymbol{r}_{\perp 1})\,d\boldsymbol{r}_{\perp 1},$$
$$\psi_1(\boldsymbol{r}_{\perp 1}) = \frac{ik}{2\pi L}\exp\left(i\varphi_1(\boldsymbol{r}_{\perp 1})\right)\int\limits_{S_2}\exp\left(\frac{ik|\boldsymbol{r}_{\perp 1}-\boldsymbol{r}_{\perp 2}|^2}{2L}\right)\times \tag{3.1}$$
$$\times\exp\left(i\varphi_2(\boldsymbol{r}_{\perp 2})\right)\psi_2(\boldsymbol{r}_{\perp 2})\,d\boldsymbol{r}_{\perp 2},$$

где S_1, S_2 — апертуры зеркал. Уравнения (3.1) записаны в квазиоптическом приближении в предположении, что локальная кривизна зеркал невелика и пучки остаются параксиальными.

Уравнения (3.1) допускают преобразования функций $\varphi_1(\boldsymbol{r}_\perp)$, $\varphi_2(\boldsymbol{r}_\perp)$, сохраняющие неизменными коэффициенты потерь всех типов колебаний, а также и структуру поля этих колебаний на зеркалах с точностью до знака фазы и масштабного множителя. Первое из этих преобразований $\hat{T}_1$ имеет вид

$$\varphi_1^t(\boldsymbol{r}_\perp) = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\,\frac{k\boldsymbol{r}_\perp^2}{L} + \varphi_1^i\left(\frac{\boldsymbol{r}_\perp}{\alpha}\right),$$
$$\varphi_2^t(\boldsymbol{r}_\perp) = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\frac{k\boldsymbol{r}_\perp^2}{L} + \varphi_2^i(\alpha\boldsymbol{r}_\perp), \tag{3.2}$$

второе $\hat{T}_2$

$$\varphi_1^t(\boldsymbol{r}_\perp) = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\,\frac{k\boldsymbol{r}_\perp^2}{L} - \varphi_1^i\left(-\frac{\boldsymbol{r}_\perp}{\alpha}\right),$$
$$\varphi_2^t(\boldsymbol{r}_\perp) = \frac{1}{2}(1+\alpha^2)\frac{k\boldsymbol{r}_\perp^2}{L} - \varphi_2^i(\alpha\boldsymbol{r}_\perp), \tag{3.3}$$

где α — произвольное действительное постоянное число, значки i и t относятся соответственно к исходной и преобразованной системам. В (3.2) и (3.3) индексы 1 и 2 можно поменять местами.

Условия $\varphi_1^i = \varphi_2^i = 0$ определяют исходный плоский резонатор. Преобразование $\hat{T}_1$ переводит его в концентрический с радиусами кри-

визны зеркал $R_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} L$, $R_2 = -\frac{1}{\alpha^2-1} L$ и прежним расстоянием между ними $L = R_1 + R_2$. В произвольном случае преобразование $\hat{T}_1$ любому исходному резонатору с фазовой коррекцией $\varphi^i_{1,2}(r_\perp)$, отсчитываемой от плоскостей $z = \pm L/2$, ставит в соответствие резонатор с фазовой коррекцией $\varphi^i_1\left(\frac{r_\perp}{\alpha}\right)$, $\varphi^i_2(\alpha r_\perp)$, отсчитываемой от концентрических сфер указанных радиусов R_1 и R_2, причем общий центр кривизны этих сфер всегда лежит вне резонатора.

Преобразованием $\hat{T}_2$ плоский резонатор переводится в концентрический с радиусами кривизны зеркал $R_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} L$, $R_2 = \frac{1}{\alpha^2+1} L$ $(R_1 + R_2 = L)$. Общий центр кривизны зеркал при этом лежит внутри резонатора. В произвольно преобразованном резонаторе отсчет фазовой коррекции $-\varphi^i_1\left(-\frac{r_\perp}{\alpha}\right)$, $-\varphi^i_2(\alpha r_\perp)$ происходит от указанных сфер, но в сторону, противоположную отсчету фазы в исходном резонаторе.

Параметр α является масштабным множителем как функций фазовой коррекции $\varphi^i_{1,2}$, так и самих распределений поля на зеркалах: для преобразования $\hat{T}_1$

$$\psi^f_1(r_\perp) = \psi^i_1(r_\perp/\alpha), \qquad \psi^f_2(r_\perp) = \psi^i_2(\alpha r_\perp),$$

для преобразования $\hat{T}_2$ (3.4)

$$\psi^f_1(r_\perp) = \psi^{i*}_1(-r_\perp/\alpha), \qquad \psi^f_2(r_\perp) = \psi^{i*}_2(\alpha r_\perp).$$

В применении к сферическим зеркалам преобразования $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ приводят к соотношениям симметрии, о которых шла речь выше. Так, преобразование $\hat{T}_2$ при $\alpha = 1$ соответствует переходу от исходного резонатора к сопряженному $(g_{1,2} \to -g_{1,2})$; при одних и тех же функциях $\varphi^i_{1,2}$, но разных α, преобразование $\hat{T}_1$ описывает семейство эквивалентных резонаторов с постоянными параметрами (1.2). Преобразования $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ можно использовать для подбора желательной конфигурации пучка в резонаторе при сохранении всех дискриминационных характеристик системы.

Неквадратичные корректоры можно применять для улучшения дискриминационных характеристик открытых систем. Качественно профиль отражателей резонатора, обеспечивающий высокую степень радиационных потерь для неаксиальных мод, можно найти, воспользовавшись упоминавшимся выше представлением, что поле в резонаторе удерживается за счет отражения волны от боковой (открытой) поверхности резонатора. Зеркала резонатора должны «запирать» основное колебание и достаточно хорошо согласовывать внутренний объем резонатора со свободным пространством для высших поперечных мод. Возможная конфигурация такого резонатора показана на рис. 4. Размер вогнутой сферической части зеркал берется из расчета, чтобы внутри нее уложилась только каустическая поверхность аксиального колебания, а колебания высших порядков свободно переизлучались в открытое пространство. В резонаторе с зеркалами конечных размеров высокодобротные колебания, удерживаемые краями зеркал, устраняются с помощью соответствующих согласующих переходов рупорного типа.

На рис. 5 приведен пример зависимости коэффициентов потерь основного $\delta_0 = -\ln|p_0|$ и первого (несимметричного) $\delta_1 = -\ln|p_1|$

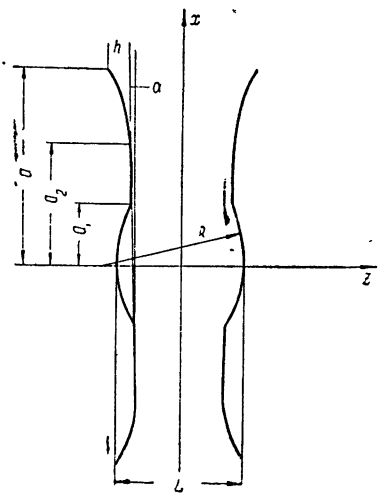


Рис. 4. Резонатор с неквадратичными зеркалами. Параметры, характеризующие профиль зеркала: $c = \frac{ka^2}{L}$, $c_1 = \frac{ka_1^2}{L}$, $c_2 = \frac{ka_2^2}{L}$, $g = 1 - \frac{L}{R}$, $h = \frac{\omega(a - a_2)^2}{2R}$, ω.

типов колебаний резонатора с ленточными зеркалами (рис. 4) от параметра ω, характеризующего величину отгиба зеркал в рупорной части

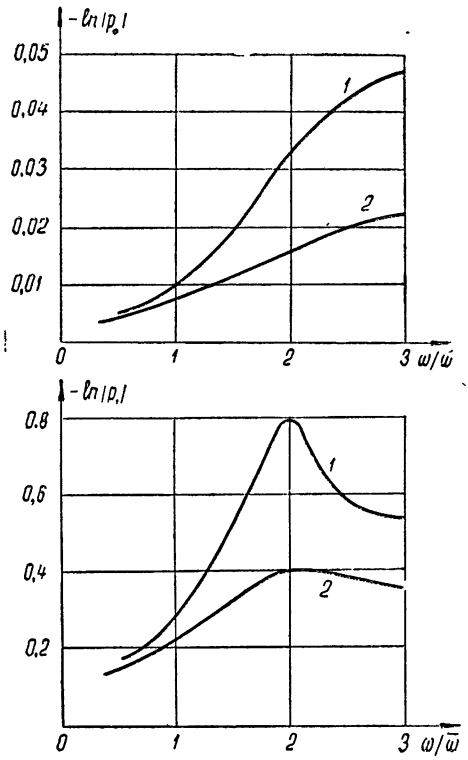


Рис. 5. Зависимость коэффициентов потерь нулевой и первой мод от ω при $g = 0{,}5$, $c = 10$, $\sqrt{c_1} = 1{,}5$. Кривая 1— $\sqrt{c_2} = 1{,}5$; кривая 2— $\sqrt{c_2} = 2$.

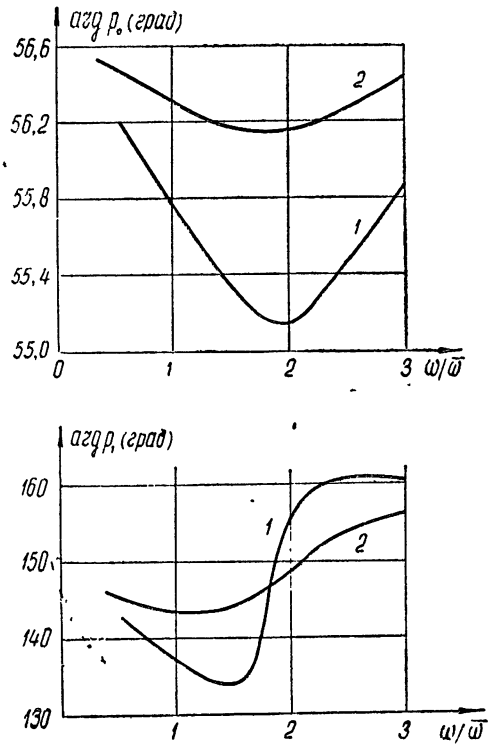


Рис. 6. Зависимость фаз собственных значений нулевой и первой мод от ω для тех же параметров резонатора, что и на рис. 5.

резонатора*. На рис. 6 изображены графики фаз собственных значений того же резонатора. Принятые обозначения ясны из рис. 4, отгиб имеет параболический профиль. При оптимальном отгибе разность коэффициентов потерь первого и основного колебаний существенно больше той, которая может быть получена в резонаторах со сферическими зеркалами (в том числе и конфокальном) при том же уровне потерь основного колебания. Более высокая селекция достигается в резонаторах со слабо вогнутой центральной частью, но для этого требуются зеркала достаточно больших размеров. Важно отметить, что в этом случае улучшение селективных свойств будет сопровождаться расширением пучков, что может оказаться полезным в целом ряде приложений. Однако по мере перехода к более плоским системам возрастают трудности юстировки, а также повышаются и требования к точности, с которой должен выдерживаться профиль зеркал.

Интересно влияние перекосов профильных зеркал на их селективные свойства. Как показывают расчеты и эксперименты [33], при оптимальной для подавления высших колебаний форме зеркал перекосы их могут приводить к заметному уменьшению потерь высших типов и ухудшению селекции мод, в то время как при отсутствии отгиба перекос улучшает селекцию.

Резонаторы с другими законами фазовой коррекции исследовались в [34, 59] (конические), [35] (зеркала 4-го и 8-го порядков). Результаты расчетов показывают, что для конических зеркал существует оптимальный угол раскрыва конуса, при котором дифракционные потери основного колебания минимальны. Дискриминационные свойства их мало отличаются от свойств квадратичных корректоров.

Зеркала 4-го и 8-го порядков приводят к ряду качественных особенностей по сравнению с квадратичными. Это можно видеть уже из анализа хода лучей в таких системах в приближении геометрической оптики. Для квадратичных корректоров разностные лучевые уравнения являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Для неквадратичных корректоров эти уравнения нелинейны. Характер устойчивости луча в системе квадратичных корректоров (разбиение на финитные и нефинитные траектории) не зависит от начальных значений координат луча, а определяется только параметрами системы. Условием устойчивости является неравенство [36]

$$\left|\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\hat{S}\right| < 1, \tag{3.5}$$

неустойчивости

$$\left|\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\hat{S}\right| > 1, \tag{3.6}$$

где $\hat{S}$ — матрица преобразования координат луча на одном периоде системы.

В неквадратичных системах устойчивость луча зависит, в общем случае, от его начальных координат. В системе неограниченных квадратичных корректоров число мод, ограниченных каустиками, бесконечно при условии (3.5) и равно нулю при условии (3.6). В неквадратичной системе (например, в системе корректоров четвертого порядка) число каустик конечно, в частности, при определенных условиях может существовать только одна каустическая поверхность, которой будет соответствовать высокодобротная мода.

* При $\omega = \bar{\omega} = a_1^2/(a - a_1)^2$ величина отгиба на краю h равна глубине центральной части зеркала.

Достаточно эффективным методом расчета неквадратичных систем является метод приближенного разделения переменных [9]. Двумерный резонатор с бесконечными неплоскими зеркалами конформно преобразуется в плоско-параллельный с неоднородным диэлектрическим заполнением ε. При достаточно малой и плавно меняющейся локальной кривизне зеркал: $L/R \ll 1$ (R — радиус кривизны), $a/L \gg 1$ (a — размер неоднородного участка зеркала) можно пренебречь зависимостью ε от координаты z, перпендикулярной плоскости зеркал. При этом поле в резонаторе как функция поперечной координаты x будет удовлетворять уравнению типа уравнения Шредингера для частицы в потенциальной яме конечной глубины. Такое уравнение имеет ограниченное число дискретных собственных значений. При соответствующем профиле корректоров это число может быть сведено к единице. Подобным же уравнением описывается и распространение волн вдоль неоднородного диэлектрического стержня, при этом колебаниям дискретного спектра соответствуют поверхностные волны на стержне. Учет зависимости ε от z в резонаторе эквивалентен периодической модуляции ε в диэлектрическом стержне. Если период такой модуляции $L \gg \lambda$, то поверхностные волны будут иметь пренебрежимо малое радиационное затухание, а соответствующие им колебания в резонаторе — высокую добротность.

Резонаторы с несферическими зеркалами можно рассматривать как отрезки волноводов переменного сечения. Резонансные свойства таких отрезков обусловлены отражением волн от неоднородностей [9, 37]. В [37] показано, что резонатор, образованный участком волновода между скачкообразными расширениями его сечения, при некоторых параметрах обладает достаточно высокой дискриминацией. В [9] приведены результаты расчета резонатора с рупорными расширениями сечения. Радиационная добротность колебаний в таком резонаторе существенно ниже, чем в соответствующем плоском, хотя отношение добротностей соседних типов остается прежним.

В заключение данного раздела отметим, что применением неквадратичных корректоров, в принципе, может быть решена задача о создании резонатора с заданным распределением поля некоторого типа колебаний, по крайней мере, вблизи одного из зеркал. Действительно, пусть вблизи первого зеркала необходимо иметь распределение поля в прямом пучке $\psi_+^{(1)}$. Поле вблизи второго зеркала при этом будет $\psi_+^{(2)}$. С помощью фазовой коррекции $\varphi_2 = -2\arg\psi_+^{(2)}$ в отраженном пучке у второго зеркала будет создано распределение поля $\psi_-^{(2)} = \psi_+^{(2)*}$, а у первого зеркала $\psi_-^{(1)} = \psi_+^{(1)*}$. Фазовая коррекция $\varphi_1 = 2\arg\psi_+^{(1)}$ восстановит, очевидно, первоначальное распределение поля в прямом пучке. Селективные свойства системы в целом могут оказаться невысокими из-за слабого затухания колебаний высших порядков; расчет этих колебаний, в общем случае, может быть проведен лишь численными методами.

II. МЕТОДЫ ДИСКРИМИНАЦИИ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ ПО ПРОДОЛЬНОМУ ИНДЕКСУ

Наряду с описанной выше пространственной селекцией в резонаторах имеется дополнительная возможность селекции мод, основанная на различии их собственных частот. По отношению к колебаниям, отличающимся только продольными индексами q, частотная дискриминация является, в сущности, единственно возможной, так как эти колебания при $q \gg 1$ обладают практически одинаковыми структурами и отличаются лишь резонансными частотами. Выделить из них одно ($q = q_0$) можно только в том случае, если потери в резонаторе быстро меняются

с частотой. Это достигается применением диспергирующих элементов. Мы будем различать резонаторы с диспергирующими элементами, отклоняющими при изменении частоты волновой пучок от оси резонатора (призмы [38, 39], эшелетты [40—43]) и тем самым увеличивающими дифракционные потери, и резонаторы с диспергирующими отражателями, модуль коэффициента отражения которых зависит от частоты. К числу последних можно отнести и связанные резонаторы [47—57].

1. Открытые резонаторы с эшелеттами и призмами

Рассмотрим резонатор, одно из зеркал которого заменено отражательной дифракционной решеткой — эшелеттом (рис. 7). На рабочей частоте луч отражается от эшелетта по тому же направлению, что и падает, т. е. перпендикулярно ступенькам. Для других частот падающий и отраженный лучи образуют угол, пропорциональный в первом приближении относительному сдвигу частот. Таким образом, если пренебречь дифракционным расплыванием пучка при отражении от эшелетта, то на смещенных частотах последний будет эквивалентен перекошенному плоскому зеркалу.

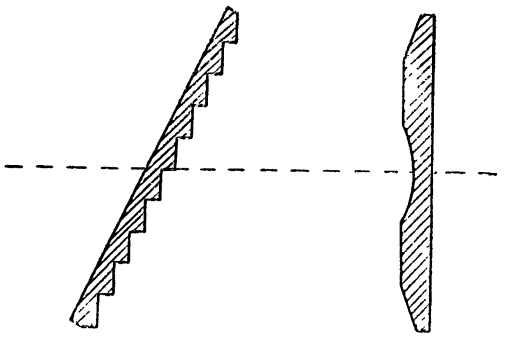


Рис. 7. Общий вид резонатора с эшелеттом.

Углы, образованные падающим и отраженными пучками разных дифракционных порядков с нормалью к эшелетту, связаны между собой соотношением

$$\sin\theta_n = -\sin\theta_0 - \frac{2\pi n}{kd} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1.1}$$

где θ_0 и θ_n — соответственно углы падения и отражения, отсчитываемые от нормали к плоскости решетки, d — период эшелетта. На рабочей частоте для одного из порядков $\theta_m = \theta_0$, вблизи нее

$$\Delta\theta = \theta_m - \theta_0 = -2\operatorname{tg}\theta_0 \frac{\Delta k}{k}. \tag{1.2}$$

Такая же разность углов $\Delta\theta$ обеспечивается при перекосе плоского зеркала на угол $\alpha = \Delta\theta/2$.

В теории антенн с частотным качанием луча [44] принято вводить параметр углочастотной чувствительности $p = f\frac{\partial\theta}{\partial f} = k\frac{\partial\theta}{\partial k}$, характеризующий скорость изменения положения луча при перестройке частоты. Эшелетт и призму, изготовленную из материала с дисперсией показателя преломления, с этой точки зрения можно рассматривать как пассивные отражатели с частотным перемещением луча, равным отклонению луча плоским отражателем, перекошенным на угол

$$\alpha = \frac{1}{2} p \frac{\Delta k}{k}. \tag{1.3}$$

Для соседних с рабочим продольных колебаний открытого резонатора $\Delta k = \pi/L$ и

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{1}{2} p \frac{\lambda}{L}. \tag{1.4}$$

Таким образом, степень дискриминации продольных мод в резонаторе зависит от величины дополнительных радиационных потерь, вносимых в резонатор перекосом эквивалентного плоского зеркала на угол α_0. Наибольшая величина этих потерь будет в резонаторе с плоским вторым отражателем, в резонаторах со сферическими зеркалами дискриминационные свойства выражены слабее.

Величину дополнительных потерь для плоскопараллельного резонатора можно оценить по формуле [45, 46]

$$\delta_\alpha \simeq \frac{2}{3}(ka)^2\alpha_0^2 \simeq \frac{\pi}{2} p^2 \left(\frac{a}{L}\right)^2 = \frac{1}{2} p^2 \frac{c}{q_0}, \tag{1.5}$$

где a — полуширина зеркал, $c = ka^2/L$.

Сравним величину δ_α с коэффициентом дифракционных потерь основного колебания δ_0. Например, для квадратных зеркал $(2a \times 2a)$ [7] при $c \gg 1$

$$\delta_0 \simeq 2^{1/2}\pi^2\gamma/c^{3/2} \qquad (\gamma = 0{,}824),$$

так что

$$\frac{\delta_\alpha}{\delta_0} \simeq \frac{p^2 c^{5/2}}{2^{3/2}\pi^2 \gamma q_0}.$$

Обычно $p \leqslant 1$ (или даже $p \ll 1$), и на оптических частотах ($q_0 \sim 10^6$) диспергирующие элементы вносят лишь незначительные дополнительные потери.

Правда, призмы находят применение в ОКГ в тех случаях, когда имеется несколько спектральных линий, на которых возможна генерация, и необходимо выделить одну из них. Так, подавив переход с $\lambda = 6328$ Å, в смеси He—Ne можно получить генерацию на $\lambda = 6401$ Å [38]. Есть предложения об использовании для той же цели эшелетта [41], который позволяет к тому же удобно выводить энергию из резонатора через зеркальный максимум дифракционного спектра.

В диапазонах миллиметровых и субмиллиметровых волн положение иное: там спектр более редок, и диспергирующие элементы позволяют выделить один продольный порядок спектра. Так, при использовании эшелетта с плоским зеркалом в диапазоне длин волн $\lambda \simeq 8$ *мм* удается выделить колебания с одним продольным индексом [42].

Для одновременного подавления поперечных колебаний в [43] было предложено использовать в паре с эшелеттом несферическое зеркало типа описанных в первом разделе (подраздел 3). В экспериментально исследованном резонаторе [43] эшелетт был нарезан на круглом диске диаметром 200 *мм*, ширина его ступеньки равнялась 15 *мм* при высоте 8,25 *мм*. Второе зеркало (диаметром 200 *мм*) имело вогнутую (сферическую) часть диаметром 70 *мм* с радиусом кривизны 100 *см*, плоский пояс шириной 35 *мм* и конический отгиб 1,4°. Для лучшего возбуждения несимметричной моды отверстия связи в обоих зеркалах были смещены от центра на 30 *мм*. Расстояние от второго зеркала до ближайшей ступени эшелетта равнялось 94 *мм*. На рис. 8 приведен коэффициент потерь основного типа колебаний в зависимости от длины волны. При отходе от рабочей длины волны (кривая 1) потери основного типа колебаний быстро возрастают, а соседние продольные колебания практически не возбуждаются. В резонаторе, образованном эшелеттом и сфе-

рическим зеркалом, увеличение потерь происходит медленно, дискриминация продольных колебаний недостаточна (кривая 2). Измерения показали, что кривые возрастания потерь при перекосе плоского зеркала в двух описанных выше резонаторах качественно совпадают с зависимостями, приведенными на рис. 8, если сопоставить углы перекоса зеркал и углы между падающим и отраженным от эшелетта лучами на различных частотах по его углочастотной чувствительности.

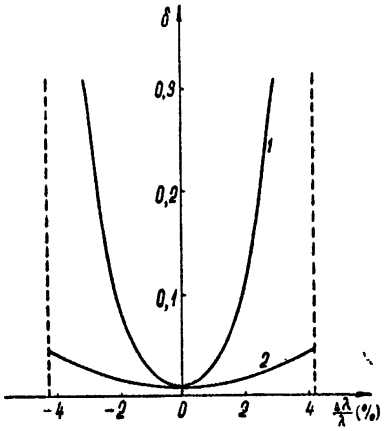


Рис. 8. Зависимость коэффициента потерь основного типа колебаний от расстройки: 1—резонатор образован эшелеттом и зеркалом со сложным профилем, 2—резонатор образован эшелеттом и сферическим зеркалом. (Пунктирными прямыми отмечены абсциссы, соответствующие соседним продольным колебаниям.)

2. Резонаторы с промежуточными отражателями

Если модули коэффициентов отражения зеркал $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$ являются функциями частоты, то из резонансного условия типа (I.1.3)*

$$p_{mn}\tilde{R}_1(\omega)\tilde{R}_2(\omega)\exp(-i2kL) = \exp(-i2\pi q) \tag{2.1}$$

следует, что добротности колебаний с несовпадающими частотами

$$Q_{mnq} = -\frac{k'_{mnq}L}{\ln[|p_{mn}||\tilde{R}_1(\omega_{mnq})||\tilde{R}_2(\omega_{mnq})|]} \tag{2.2}$$

будут различны. В качестве сильно диспергирующих отражателей используются, как правило, дополнительные резонаторы типа интерферометров Фабри—Перо [47—52]. Очевидно, такие системы можно рассматривать как связанные резонаторы.

Одно из практически применяемых устройств этого типа схематически изображено на рис. 9. Оно состоит из двух высокодобротных ре-

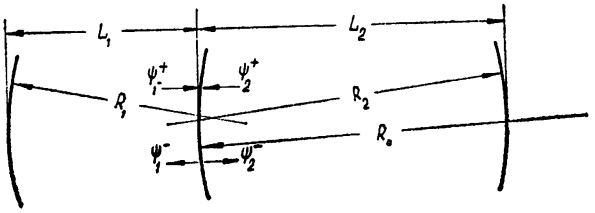


Рис. 9. Связанный резонатор с промежуточным отражателем

зонаторов, слабо связанных через частично прозрачный сферический отражатель с радиусом кривизны $R_0 = 2F_0$ [48]. Написав уравнение

* I обозначает ссылку на формулу из первого раздела

для лучевых амплитуд пучков ψ^+ и ψ^- в обоих парциальных резонаторах и связав эти величины между собой через матрицу рассеяния промежуточного отражателя, можно получить уравнение для определения собственных функций и частот в виде

$$\psi_1^- = -\exp\left[-i2k(L_1+L_2)\right] r_1 r_2 \hat{K}_2 \hat{K}_1 \psi_1^- + \\ + \exp(-i2kL_1) r r_1 \hat{K}_1 \psi_1^- + \exp(-i2kL_2) r r_2 \hat{K}_2 \psi_1^-. \tag{2.3}$$

В уравнении (2.3) $r_{1,2}$ и r — не зависящие от частоты коэффициенты отражения концевых и промежуточного зеркал, ψ_1^- — поле на промежуточном отражателе в первом резонаторе в обратном пучке,

$$\hat{K}_{1,2}(D_{1,2},\ g_{1,2})\psi_1^-(x,y) = \frac{ik}{2\pi D_{1,2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \exp\left[\frac{ik}{D_{1,2}}(xx'+yy') - \right. \\ \left. - \frac{ik}{2D_{1,2}} g_{1,2}(x^2+x'^2+y^2+y'^2)\right] \psi_1^-(x',\ y')dx'dy' \tag{2.4}$$

— симметричные интегральные операторы, определяющие собственные функции резонаторов 1 и 2.

$$D_{1,2} = 2L_{1,2}\left(1-\frac{L_{1,2}}{R_{1,2}}\right), \quad g_{1,2} = 1 - \frac{2L_{1,2}}{R_{1,2}} \pm \frac{L_{1,2}}{F_0}\left(1-\frac{L_{1,2}}{R_{1,2}}\right). \tag{2.5}$$

Уравнение (2.3) приводится к уравнению обычного двухзеркального резонатора, если положить r равным нулю.

Уравнение (2.3) является интегральным уравнением с несимметричным ядром, быстро осциллирующим с изменением частоты. В отличие от уравнений двухзеркального резонатора (I.1.1) оно в общем случае не приводится к уравнению Фредгольма второго рода с явно выделенным собственным значением и ядром, слабо зависящим от частоты.

Кроме того, в подобном резонаторе имеется специфический механизм потерь: при произвольных радиусах кривизны всех отражателей собственные функции парциальных резонаторов (т. е. операторов $\hat{K}_1$ и $\hat{K}_2$) различны, и потери всех типов колебаний отличны от нуля даже при неограниченных идеально отражающих зеркалах. Это легко понять, исходя из геометрооптических представлений: положение каустик парциальных резонаторов с разных сторон промежуточных отражателей не совпадает, поэтому всегда можно построить систему лучей, уходящих на бесконечность.

Рассмотрим свойства сложного резонатора при пространственном согласовании функций резонаторов 1 и 2. Собственные функции одинаковы в плоскости промежуточной пластины, если

$$\frac{1-g_1^2}{D_1^2} = \frac{1-g_2^2}{D_2^2}, \tag{2.6}$$

что определяет ее единственное положение внутри резонатора*. Для плоской пластины из (2.6) следует, что

$$\frac{L}{L_1} = 1 - \frac{R_1 - L}{R_2 - L}.$$

* Если резонатор конфокальный, то пространственное согласование получается при любом положении пластины.

Уравнение (2.3) сводится в этом случае к трансцендентному дисперсионному уравнению*

$$\cos\left[k(L_1+L_2)-\frac{\mu_{mn}(\theta_1+\theta_2)}{4}\right]=r\cos\left[k(L_1-L_2)-\frac{\mu_{mn}(\theta_1-\theta_2)}{4}\right], \quad (2.7)$$

где $\theta_{1,2}=\arccos g_{1,2}$, $\mu_{mn}=2(m+n+1)$, m, n — поперечные индексы мод в декартовой системе координат. Число корней уравнения (2.7) в некотором спектральном интервале в среднем совпадает с количеством корней уравнения двухзеркального резонатора, образованного зеркалами 1 и 2 (рис. 10), т. е. спектр связанных резонаторов в целом не

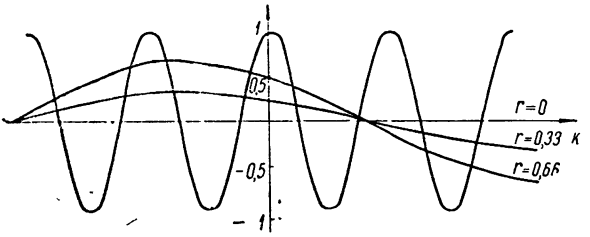


Рис. 10. Левая и правая части дисперсионного уравнения связанного резонатора (формула (II. 2.7)); точки пересечения кривых определяют резонансные частоты.

является более редким; роль промежуточного отражателя сказывается только в том, что спектр становится неэквидистантным. При использовании подобных резонаторов в ОКГ для селекции колебаний по продольному индексу [48] обычно длина одного резонатора выбирается значительно меньшей длины другого $L_2 \ll L_1$. Тогда дисперсионное уравнение резонатора можно представить в виде

$$r_1\tilde{R}_\Phi(\omega)\exp(-i2kL_1)=\exp(-i2\pi q), \quad (2.8)$$

где $\tilde{R}_\Phi(\omega)$ — коэффициент отражения интерферометра Фабри—Перо, образованного промежуточной пластиной и зеркалом 2,

$$\tilde{R}_\Phi(\omega)=r-\frac{(1-r^2)r_2\exp(-i2kL_2)}{1-rr_2\exp(-i2kL_2)}. \quad (2.9)$$

Выделяемое продольное колебание совмещают по частоте с максимумом $\tilde{R}_\Phi(\omega)$, тогда колебания соседних продольных порядков имеют дополнительные потери. На величину L_2 накладывается условие, чтобы следующие максимумы $\tilde{R}_\Phi(\omega)$ не попадали в линию люминесценции. Приведем оценку для резонатора, использованного в He—Ne лазере [48]: $L_1=180$ *см*, $L_2=20$ *см*, $r=r_1=0{,}99$, $r_2=0{,}8$. Тогда разность потерь колебаний двух соседних продольных порядков не превышает 0,1%, что позволяет выделить одно колебание (устранив высшие поперечные моды диафрагмированием) лишь вблизи самого порога генерации.

Дискриминирующее действие можно несколько усилить, используя два дополнительных резонатора неодинаковой длины [50]. Размеры их выбираются таким образом, чтобы в полосе частот люминесценции совпадало только по одному из максимумов отражения обоих резонаторов. Соседние максимумы при этом перекрываются лишь частично.

* В формуле (2.7) величины r_1 и r_2 положены равными 1.

Рассмотрим пример, приведенный в работе [50]: основной резонатор длиной 100 *см* дополняется двумя резонаторами длиной 18,5 и 37 *см*. Выберем коэффициент отражения внутренних зеркал равным 0,99, а внешних — 0,8. Сделав подсчет по формуле (2.8), где теперь оба коэффициента отражения будут зависеть от частоты, получим, что разность потерь двух соседних продольных колебаний равна 0,4%.

Степень селекции продольных колебаний, которую могут обеспечить резонаторы с промежуточным отражателем, часто оказывается недостаточной. Улучшенной дискриминации можно добиться в резонаторах, описанных ниже.

3. Связанные резонаторы с наклонной делительной пластиной

Трехзеркальный резонатор с наклонной делительной пластиной получается формально при дополнении интерферометра Майкельсона еще одним зеркалом.

Общий вид резонатора показан на рис. 11, плечи 1—3 замкнуты зеркалами, плечо 4 свободно. Связь между плечами осуществляется через плоскую делительную пластину, эквивалентную по своим свойствам полностью симметричному восьмиполюснику. Условие самосогласования распределения лучевой амплитуды у делителя в плече 3 ψ_3^- после обхода плеч 1 и 2 приводит к уравнению

$$\psi_3^- = s_{13}^2 \exp[-i2k(L_1+L_3)] r_1 r_3 \hat{K}_1 \hat{K}_3 \psi_3^- - \\ - s_{23}^2 \exp[-i2k(L_2+L_3)] r_2 r_3 \hat{K}_2 \hat{K}_3 \psi_3^-, \tag{3.1}$$

где s_{13} и s_{23} — коэффициенты передачи делителя по полю между соответствующими плечами. Уравнение (3.1), как и (2.3), содержит быстроосциллирующие слагаемые, включающие неизвестную величину k, что не позволяет в общем случае привести его к уравнению Фредгольма второго рода с явно выделенным собственным значением в виде множителя при функции в левой части уравнения.

Выпишем уравнение для распределения поля, идущего в свободное плечо 4,

$$\psi_4^- = is_{13}s_{23}\{\exp[-i2k(L_1+L_3)]\times \\ \times r_1 r_3 \hat{K}_1 \hat{K}_3 \psi_3^- + \exp[-i2k(L_2+L_3)]\times \\ \times r_2 r_3 \hat{K}_2 \hat{K}_3 \psi_3^-\} \tag{3.2}$$

и разберем вопрос, когда $\psi_4^- \equiv 0$.

Из формулы (3.2) следует, что излучение в свободное плечо может отсутствовать только в том случае, когда

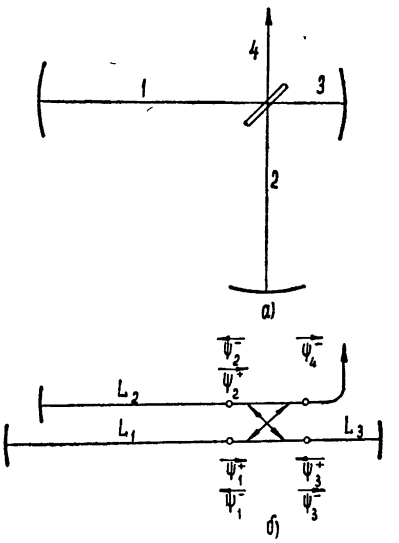


Рис. 11. Связанный резонатор с наклонной делительной пластиной: а) общий вид, б) эквивалентная схема.

$$r_1 \hat{K}_1 \hat{K}_3 \psi_3^- = e^{i\xi} r_2 \hat{K}_2 \hat{K}_3 \psi_3^-, \tag{3.3}$$

где ξ — постоянное число. Левая и правая части равенства (3.3) являются операторами для собственных функций резонаторов, образованных плечами 1—3 и 2—3. Следовательно, необходимым условием отсутствия излучения является пространственное согласование этих функций. Рассогласование приводит к потерям, величина которых, как это можно показать с помощью метода возмущений, возрастает для функций более высоких поперечных индексов.

Рассмотрим более подробно случай пространственного согласования распределений, причем для упрощения выкладок примем, что фронт лучевой амплитуды у пластины является плоским и, следовательно, совпадают собственные функции всех трех операторов $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ и $\hat{K}_3$. Если мы выберем в качестве исходных параметры резонатора в плече 1: длину L_1, кривизну вогнутого зеркала R_1, то кривизна зеркала в i-ом плече определится из условия

$$R_i = \frac{1}{\eta_i}[g_1 + \eta_i^2(1 - g_1)]R_1,$$

где

$$g_1 = 1 - L_1/R_1, \qquad \eta_i = L_i/L_1.$$

Оценим дискриминационные характеристики двух типов связанных резонаторов (рис. 12). В первом из них (рис. 12а) разность длин плеч $(L_2 - L_1)$ значительно меньше L_1 и L_2 [53, 54], поэтому получающееся из (3.2) дисперсионное уравнение можно записать в следующем виде:

$$i\tilde{R}_{\text{эфф}} \exp(-i\varphi_{mn}) = \exp(-i2\pi q), \qquad \tilde{R}_{\text{эфф}} = \sin(\Delta\varphi_{mn}), \tag{3.4}$$

где

$$\varphi_{mn} = 2kL_{\text{э}} - \frac{\mu_{mn}}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \mu_{mn}\theta_3, \qquad L_{\text{э}} = \frac{L_1 + L_2}{2} + L_3,$$

$$\Delta\varphi_{mn} = k(L_2 - L_1) - \frac{\mu_{mn}}{2}(\theta_2 - \theta_1), \qquad \theta_i = \arccos(g_i)^{1/2}.$$

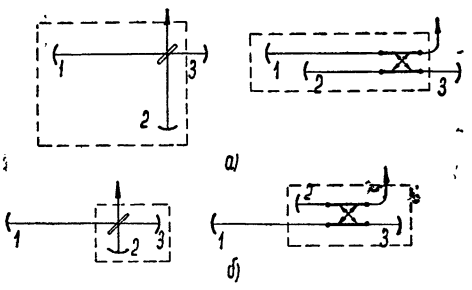


Рис. 12. Два типа связанных резонаторов. В первом из них (а) эффективный коэффициент отражения $\tilde{R}_{mn}(\omega)$ определяется разностью длин плеч 1 и 2, во втором (б)—суммой длин плеч 2 и 3.

В формуле (3.4) принято, что $|s_{12}| = |s_{13}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $r_i = 1$. В дисперсионном уравнении (3.4) быстрый фазовый множитель определяет положение резонансных частот колебаний, а более медленно зависящий от частоты $\tilde{R}_{\text{эфф}}$ — их потери:

$$K_{mn}^2 = 1 - \tilde{R}_{\text{эфф}}^2 = \cos^2(\Delta\varphi_{mn}). \tag{3.5}$$

Естественно выбрать φ и $\Delta\varphi$ такими, чтобы один из резонансов основного типа колебаний попадал в точку, где $K_{00}^2 = 0$. Соседние TEM_{00} колебания будут иметь потери

$$K_{00}^2 \simeq \left[\pi \frac{(L_2 - L_1)}{L_э}\right]^2.$$

Оценим еще потери ближайших $TEM_{0\,1}$ колебаний; они максимальны, если минимум $K_{0\,1}$ на оси частот располагается посредине между частотами двух соседних $TEM_{0\,1}$ колебаний*. Следовательно, в любом случае

$$K_{01}^2 \leqslant \frac{1}{4} K_{00}^2.$$

Определим на основании полученных формул селектирующие возможности резонатора, описанного в [53, 54], где $L_1 = 140$ *см*, $L_2 = 150$ *см* и $L_3 = 10$ *см*. Плечи 1 и 2 выбирались длинными, поскольку в них размещались разрядные трубки, а их разность определялась условием непопадания других максимумов $\widetilde{R}_{эфф}$ в ширину линии атомного перехода. Легко подсчитать, что $K_{00}^2 = 4\%$ и $K_{01}^2 \leqslant 1\%$ (при $q - q_0 = 1$).

Получившиеся значения (особенно для $TEM_{0\,1}$ колебания) не очень велики, но следует помнить, что это дополнительные потери, накладывающиеся на уже имеющиеся. Вместе с другими потерями (обусловленными, например, диафрагмированием) их оказалось достаточно для обеспечения одночастотного режима He—Ne газового лазера на $\lambda = 6328$ Å [54].

Определим дискриминационную характеристику резонатора, изображенного на рис. 12б: $L_1 \gg L_2$, $L_1 \gg L_3$ [55, 56]. Для него, конечно, справедливы уравнения (3.1) и (3.2), но, чтобы, как и в первом случае, выделить слабо зависящий от частоты множитель, надо записать уравнения относительно величины ψ_1^-. При согласованных плечах мы будем иметь**

$$r_1 \widetilde{R}_{эфф} \exp(-i\varphi_{mn}) = \exp(-i2\pi q), \quad \widetilde{R}_{эфф} = \frac{s_{12}^2}{[1 + r_2 r_3 s_{13}^2 \exp(-i\Delta\varphi_{mn})]},$$

где

$$\varphi_{mn} = 2k(L_1 + L_2) - \mu_{mn}(\theta_1 + \theta_2),$$

$$\Delta\varphi_{mn} = 2k(L_2 + L_3) - \mu_{mn}(\theta_2 + \theta_3).$$

В работе [55] отношение $(L_1 + L_2)$ к $(L_2 + L_3)$ было выбрано равным 20. Тогда при $r_i = 1$ и $s_{12}^2 = 1/2$ величина $K_{00}^2 = 16\%$ и $K_{01}^2 \leqslant 4\%$. Следовательно, данная схема подавляет колебания сильнее, чем первая. Это позволило автору работы [55], подстраивая положения двух зеркал, выделить любой тип колебаний, подавляя все остальные.

Отметим в заключение, что вместо делительной пластины в подобных связанных резонаторах могут быть использованы двоякопреломляющие призмы [57].

Представленный в данном обзоре круг задач лишь частично отражает многообразие вопросов, возникающих при изучении дискриминационных характеристик открытых систем. Перечислим некоторые дополнительные задачи, почти не затронутые здесь.

* Конкретное значение потерь $TEM_{0\,1}$ типов колебаний определяется выбором параметров g_i.

** Для связанного резонатора второго типа $\widetilde{R}_{эфф}$ по своему виду совпадает с коэффициентом прохождения интерферометра Фабри—Перо.

Существующие методы селекции колебаний представляют большие возможности для решения проблемы разрежения пространственного и частотного спектров типов колебаний и даже, в принципе, для получения одномодовых (в смысле поперечных колебаний) и одночастотных систем. Однако вопрос о требованиях, предъявляемых к точности изготовления и юстировки элементов таких систем, а также выборе схем, наиболее оптимальных с этой точки зрения, разработан слабо.

Практически важным является вопрос о влиянии плавных сравнительно небольших фазовых возмущений корректоров на структуры типов колебаний и собственные частоты. Этот вопрос возникает в связи с изучением искажений мод ОКГ под воздействием неоднородностей активных образцов. В частности, интересно было бы проанализировать схемы резонаторов с точки зрения сведения до минимума искажений структур поля первых типов колебаний неоднородностями образца.

Малоизученным остается вопрос о комбинированном использовании принципиально различных методов для селекции колебаний. Рассмотренная в разделе 1 (подраздел 2) задача об одновременном ограничении пространственного и углового спектров пучков является лишь первой попыткой исследования этого вопроса.

Дальнейшей теоретической разработки требуют методы селекции мод в связанных открытых резонаторах, в частности, необходимо более детальное изучение влияния пространственного рассогласования мод парциальных резонаторов на характеристики системы в целом.

Интересной и практически важной (например, для электроники) является задача о подборе корректоров, поддерживающих тип колебаний наперед заданной структуры, а также определение в такой системе других типов высокодобротных мод.

В оптических генераторах имеются дополнительные возможности селекции мод, связанные с распределением активного вещества или нелинейного поглотителя по объему резонатора. Эти возможности могут существенно повлиять на оценку селективных свойств «холодных» систем: наряду с коэффициентом потерь важную роль здесь начинает играть такой фактор, как величина области перекрытия объемов, занятых разными модами. Эти вопросы требуют также углубленной разработки.

Для некоторых приложений представляет интерес задача, обратная дискриминации мод: создание квазиоптических систем с возможно более равномерным пространственно-частотным спектром большого числа типов колебаний.

Наконец, укажем еще на один возможный подход к селекции типов волн — создание частотно-пространственных фильтров излучения ОКГ. При высокой пространственно-временной когерентности и стабильности излучения, которую могут обеспечить квантовые генераторы, разработка таких фильтров, устанавливаемых вне резонатора ОКГ, является одним из дополнительных путей получения электромагнитных волновых пучков с заданной пространственной и частотной структурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 34, № 6, 1658 (1958).
2. A. L. Schawlow, C. H. Townes, Phys. Rev., 112, № 6, 1940 (1958).
3. A. G. Fox, T. Li, Proc. IRE, 48, № 11, 1958 (1960).
4. A. G. Fox, T. Li, Bell. System. Techn J., 40, № 2, 453 (1961).
5. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell. System Techn. J., 40, № 2, 489 (1961).
6. G, Goubau, F. Schwering, IRE Trans., AP-9, № 3, 248 (1961).
7. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 44, № 3, 1050 (1963).
8. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 8, № 9, 1516 (1963).
9. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд Сов. радио, М., 1966.

10. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ., **8**, 16 (1944).
11. М. А. Леонтович, В. А. Фок, сб. Исследования по распространению радиоволн, изд. АН СССР, М.—Л., 1948, стр 3.
12. Г. Д. Малюжинец, УФН, **69**, № 2, 321 (1959).
13. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, **1**, изд. АН СССР, М., 1948, стр. 229.
14. В. И. Таланов, УФН, **87**, № 1, 23 (1965)
15. В С. Авербах, С Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, **10**, № 6, 1150 (1965).
16. A. G. Fox, T. Li, Proc. IEEE, **51**, № 1, 80 (1963).
17. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 2, 313 (1964).
18. T. Li, Bell. System Techn. J., **44**, 5, 917 (1965).
19. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 2, 260 (1965).
20. С. Н Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, **10**, № 3, 552 (1965).
21. T. Li, Bell System Techn. J., **42**, №-6, 2609 (1963).
22. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, ЖТФ, **36**, № 3, 497 (1966).
23. С Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, **10**, № 5, 953 (1965).
24. Н. Г Вахитов, Радиотехника и электроника, **10**, № 9, 1476 (1965).
25 С. Н. Власов, Радиотехника и электроника, **10**, № 9, 1715 (1965).
26. В. С. Летохов, ЖТФ, **35**, № 5, 809 (1965)
27. D. E. McCumber, Bell. System Techn. J., **44**, № 1, 333 (1965).
28 В. И Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 2, 298 (1967).
29. J. G. Skinner, J. E. Geusic, J. Opt. Soc. America, **52**, 1319 (1962).
30. Б. Б Бойко, Н. С. Петров, В. В. Валявко, И. М. Вашкевич, Оптика и спектроскопия, **22**, 119 (1967)
31. J. A. Giordmaine, W. Kaiser, J. Appl. Phys., **35**, № 12, 3446 (1964).
32. Н Г Бондаренко, И. В. Еремина, В. И. Таланов, Письма в редакцию ЖЭТФ, **6**, № 1, 459 (1967).
33. В С Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, **11**, № 5. 943 (1966).
34. Н. Н Войтович, Радиотехника и электроника, **11**, № 3, 488 (1966).
35. S. E. Miller, Bell. System Techn. J., **44**, № 9, 2017 (1965).
36 Дж Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
37 А. Т. Фиалковский, ЖТФ, **36**, № 6, 1101 (1966).
38. A. L. Bloom, Appl. Phys. Lett., **2**, № 5, 101 (1963)
39. В. Л Броуде, О. Н. Погорелый, М. С. Соскин, ДАН СССР, **163**, 1342 (1965)
40. С И. Аверков, В. И. Аникин, В. Я. Рядов, Н. И Фурашов, А И. Хвостова, Авторское свидетельство № 702238/38, 1959.
41. E. Brannen, Proc. IEEE, **53**, № 12, 2134 (1965).
42. Е. А. Косарев, Письма в редакцию ЖЭТФ, **3**, № 7, 295 (1966)
43. В. С. Авербах, С. Н. Власов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **10**, № 5, 731 (1967).
44. H. Shnitkin, Microwave J., **3**, № 12, 67 (1960); **4**, № 1, 57 (1961).
45. J. Kotic, M C. Newstein, J. Appl. Phys., **32**, № 2, 178 (1961).
46. В М. Файн, Я И Ханин, Квантовая радиофизика, Приложение 1, изд Сов радио, М., 1965
47. D. A. Kleinman, P. P. Kisliuk, Bell System Techn. J., **41**, 453 (1962).
48. H. Kogelnik, C. Patel, Proc. IRE, **50**, 2365 (1962).
49. J. R. Fontana, IEEE Trans., **MTT-12**, № 4, 400 (1964).
50. N. Kumagai, M. Matsuhara, H. Mori, IEEE J., **QE-1**, 85 (1965).
51. T. L. Stocker, M. Birnbaum, Bull. Amer. Phys. Soc, Ser. 2, **8**, 5, 443 (1963).
52 С М Мамедзаде, Оптика и спектроскопия, **20**, № 1, 178 (1966).
53. M. DiDomenico, Appl. Phys. Lett., **8**, № 1, 20 (1966).
54. M. DiDomenico, IEEE J., **QE-2**, № 8, 311 (1966).
55. P. W Smith, IEEE J., **QE-1**, № 8, 343 (1965).
56. P. Zory, J. Appl. Phys., **37**, № 9, 3643 (1966).
57. A. D White, Bell. System Techn. J.. **45**, № 2, 335 (1966).
58 В. И Малышев, А С Маркин, ЖЭТФ, **50**, № 2, 339 (1966).
59 P. F Checcacci, A. Consortini, A. Scheggi, Proc. IEEE, **54**, № 10 (1966).
60. Б З Каценеленбаум, УФН, **83**, 81 (1964).
61 А Б Догадкин, Зарубежная радиоэлектроника, № 9, 71 (1964).
62 H Kogelnik, T. Li, Proc. IEEE, **54**, № 10, 1312 (1966).
63. Квазиоптика, сб переводов под редакцией Б. З. Каценеленбаума и В. Н. Шевченко, изд. Мир, М., 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 июля 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 621.371.167

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛАЗМЕННЫХ ОБРАЗОВАНИЯХ

В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер

ВВЕДЕНИЕ

Общие замечания. «Введение» плазмы как среды со специфическими электромагнитными свойствами* в задачи дифракции было начато сравнительно недавно, не более двух десятков лет назад. Тем не менее, поскольку оно открывало новую обширную область для приложения сил теоретиков, а также в связи с потребностями разнообразных практических приложений (микроволновая диагностика лабораторной плазмы, радиационное ускорение плазменных сгустков, локация и радиосвязь при наличии неоднородностей ионизации в атмосфере и т. д.), число публикаций в этой области уже давно превысило пределы легко обозреваемого и продолжает быстро расти.

В настоящем кратком обзоре не ставится цели подробного и исчерпывающего описания современного состояния проблемы в целом. Круг рассматриваемых вопросов охватывает некоторую, до известной степени обособленную и независимую ее часть, относящуюся к регулярной и изотропной (т. е. не флуктуирующей и не магнитоактивной) стационарной плазме с чисто электронной поляризуемостью, как правило, предполагаемой не зависящей от величины и структуры поля и описываемой комплексной диэлектрической проницаемостью**

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\nu},$$

где ω — частота поля (принят временной фактор $\exp(i\omega t)$), ν — эффективная частота соударений, $\omega_p = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ — плазменная (ленгмюровская) частота, e — заряд, m — масса электрона, N — концентрация электронов.

Связь с классическими задачами дифракции. По существу в такой сильно суженной постановке проблема дифракции на плазме выглядит как некоторое обобщение классических дифракционных задач на диэлектрические тела (в общем случае неоднородные) с $\mathrm{Re}\,\varepsilon < 1$, так что все исчерпывающие аналитические решения могли бы быть почти автоматически перенесены на плазменные объекты. Это касается как весьма немногочисленных точных решений для тел простейшей формы (плоский слой, шар, цилиндр [2]), так и решений, полученных приближенными методами (коротковолновое и длинноволновое приближения, приближение Борна и т. д.). В случае слабого проникновения поля в плазму, т. е. при достаточно больших отрицательных значениях ε, оказы-

* Достаточно подробное перечисление особенностей плазменной среды можно найти, например, в книге Гинзбурга [1]

** Важное исключение составят, однако, некоторые вопросы резонансного взаимодействия, для которых нелинейные эффекты и обусловленная тепловым движением пространственная дисперсия могут иметь принципиальное значение (см. раздел 3).

вается возможным опереться и на более простые задачи о дифракции на телах с импедансными граничными условиями.

Необходимо, однако, иметь в виду, что классические решения, относящиеся, как правило, к случаю $\varepsilon > 1$, вообще говоря, должны переноситься в область $-\infty < \varepsilon < 1$ с известной осторожностью, а в ряде случаев—лишь после соответствующего пересмотра. Можно выделить два основных фактора, способных затруднить непосредственный перенос результатов из одной области значений ε в другую. Во-первых, это изменение характера спектра локализованных и квазилокализованных решений типа поверхностных волн. В частности, при $0 < \varepsilon < 1$ длина волны в плазме оказывается большей, чем в окружающей среде (вакууме), и, следовательно, ранее локализованным (при $\varepsilon > 1$) полям теперь соответствуют излучаемые, так называемые волны с утечкой. При переходе к отрицательным значениям ε вновь происходит качественное изменение характера локализованных решений: появляются «истинные» поверхностные волны, прижатые к границе плазмы, обратные волны, волны с комплексными постоянными распространения. Все это, разумеется, существенно влияет на формирование дифракционного поля объектов большой протяженности и заставляет заново строить для них системы собственных мод. В последние годы такая работа была проделана по отношению к простейшим плазменным системам (плоско-параллельные пластинки [3–5], цилиндры [6]), и, в известной степени, в этот вопрос внесена качественная ясность, без которой вряд ли было бы возможно интерпретировать структуры полей в сложных системах.

Вторым фактором являются особенности поведения поля в окрестности поверхностей плазменного резонанса ($\varepsilon = 0$), которые при различных частотах могут располагаться практически на любых участках плазменного объекта. Как следует из рассмотрения простейших плоскослоистых моделей [7], структура плазменно-резонансной области, т. е. характер перехода ε через нуль, определяет ее экранирующее действие и величину резонансных потерь (которые в случае линейного перехода обратно пропорциональны его крутизне [8]). С другой стороны, именно на этих «нулевых» поверхностях, где составляющая электрического поля $\boldsymbol{E}$, параллельная $\nabla\varepsilon$, имеет резкий максимум, раньше всего становятся существенными пространственная дисперсия [9, 10], выражающаяся в интенсивном возбуждении продольных (плазменных) волн, и нелинейные эффекты, связанные с деформацией равновесного распределения плазмы под действием поля [11].

Для того, чтобы иметь возможность полнее сосредоточиться на собственно «плазменной» специфике проблемы (которая, разумеется, отнюдь не исчерпывается двумя отмеченными факторами), сами дифракционные задачи мы будем рассматривать далее в возможно более простой постановке, отвлекаясь, в частности, от особенностей дифракции локализованных [12–14] и импульсных [15] полей и дифракции на комбинированных системах (металл, окруженный плазмой) [16]. Оставляются в стороне также и многие традиционные вопросы классической дифракции—такие как распределение освещенности вблизи границы области тени за рассеивающим объектом, выход из зоны Фраунгофера, дифракция на изломах поверхности тела и т. д. Речь будет идти лишь о рассеянии плоских или квазиплоских монохроматических волн на простейших структурах (преимущественно со сферической или цилиндрической симметрией) и о простейших дифракционных характеристиках объектов — эффективных сечениях рассеяния (главным образом, обратного).

Ввиду многообразия параметров, характеризующих свойства рассеивающего плазменного объекта (форма, размеры, максимальная ве-

личина и характер распределения плотности и т. д.), было бы чрезвычайно трудно выдержать на протяжении всего обзора какую-либо единую строгую классификацию задач, не вдаваясь при этом в излишний формализм и избегая ненужных повторений. Поэтому, хотя в принятой нами последовательности изложения и обнаруживается некий исходный принцип классификации — по величине плотности плазмы, он, в известной мере, переплетается с классификацией по другим признакам — по величине отношения характерных размеров к длине волны, по методам решения и, наконец, просто по характеру участия плазмы в дифракции. Последнее выразилось в специальном выделении раздела 4, где плазма рассматривается не как объект дифракции, а как неоднордная среда, заполняющая значительную часть трассы между излучателем и рассеивающим объектом; основное внимание здесь уделяется не собственно дифракционной стороне задачи, а трансформирующим свойствам плазменной среды, в которой происходит дифракция.

1. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ НИЗКОЙ И ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ

Борновское приближение. Наиболее прост для исследования случай разреженной плазмы ($\omega_p \ll \omega$), достаточно хорошо описываемый с помощью первого (так называемого борновского) приближения метода возмущений [17]. В этом приближении (в равной мере пригодном и для задач рассеяния на слабых возмущениях ионизации в безграничной однородной плазме [18]) расчет рассеянного поля сводится к отысканию фурье-преобразований возмущений диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$. В частности, дифференциальное сечение рассеяния σ, равное отношению потока энергии, рассеянного в единицу телесного угла, к плотности потока энергии в падающей волне, определяется выражением

$$\sigma = \frac{k_0^4 \sin^2\psi}{16\pi^2\varepsilon_e}\left|\int_V \Delta\varepsilon \exp\left[-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}\right]dv\right|^2 \quad (\Delta\varepsilon \ll \varepsilon_e), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$ — соответственно волновые векторы падающей и рассеянной волн (равные по модулю $k=k_0\sqrt{\varepsilon_e}$, $k_0=\omega/c$), ψ — угол между направлением рассеяния ($\boldsymbol{k}'$) и электрическим вектором падающей волны, $\Delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon_e$, ε_e — диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

Особенностью плазмы по сравнению с обычными (недиспергирующими) средами является здесь иная частотная зависимость интенсивности рассеяния и большее разнообразие представляющих практический интерес распределений $\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$. (Различные конкретные распределения — главным образом, для объектов квазицилиндрической формы — рассмотрены в работах [8, 18—20].)

Как ясно из (1), величина и угловая зависимость σ существенно определяются соотношением между длиной волны в среде и характерным размером рассеивающей области a. При больших длинах волн ($ka \ll 1$) рассеяние имеет чисто дипольный характер, а его интенсивность при $\varepsilon_e = 1$ пропорциональна квадрату полного числа электронов в объекте и, в отличие, скажем, от релеевского случая ($\sigma \sim \omega^4$), при $\omega \gg \nu$ вообще не зависит от частоты (разумеется, в пределах $\omega \gg \omega_p$).

В противоположном предельном случае ($ka \gg 1$) почти вся рассеиваемая мощность сосредоточена в узком конусе углов около направления $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$. Рассеяние в обратном и в боковых направлениях является весьма слабым и определяется, в основном, отражением от тех областей, где концентрация N или ее производные заметно меняются на длине волны. Проиллюстрируем это на примере произвольного гладкого сферически симметричного распределения $N(r)$, имеющего лишь одну особую точку $r=a$, в которой существует конечное число $(m-1)$

непрерывных производных, а производная m-го порядка имеет скачок $\Delta(N^{(m)})$. Производя в (1) последовательное интегрирование по частям, получим в коротковолновом приближении $\left(ka \sin\frac{\theta}{2} \gg 1\right)$

$$\sigma = 8\pi^2 r_0^2 a^2 [\Delta(N^{(m)})]^2 \sin^2\psi \frac{1 + (-1)^m \cos\left(4ka \sin\frac{\theta}{2}\right)}{\varepsilon_e \left(2k \sin\frac{\theta}{2}\right)^{2m+4}} \qquad (2)$$

($m = 0, 1, 2, \ldots$), θ — угол между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$, $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона. При плавном (в масштабе длины волны) изменении концентрации и всех ее производных сечение обратного рассеяния оказывается экспоненциально малым ($\sim e^{-(ka)^2}$).

Следует учитывать, что в коротковолновой области первое борновское приближение может оказаться недостаточным из-за накопления ошибки в фазе волны, проходящей через объект. Поэтому область применимости формулы (2), например, ограничена неравенством $\int_0^a k_0 \Delta\varepsilon dr \ll 1$ при нарушении которого расположение лепестков диаграммы рассеянной мощности определяется этой формулой неверно. Однако, если интересоваться лишь средней по одному лепестку интенсивностью рассеяния, то достаточным критерием точности по-прежнему можно считать условие $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon_e$.

Плотная плазма с резкими или слабо размытыми границами; импедансное описание. Первая, вполне очевидная и наиболее часто используемая в приближенных оценках аппроксимация для плотной плазмы ($|\varepsilon| \gg 1$) с резкими границами — это замена ее идеально проводящей средой. Как правило, она позволяет оценить сечение рассеяния с достаточной степенью точности. Необходимо, однако, иметь в виду, что, приписывая поверхности плазмы нулевой импеданс, мы игнорируем тем самым ее способность направлять поверхностные волны, что в довольно широком диапазоне длин волн может дать значительную ошибку при расчете σ даже при сравнительно высоких отношениях ω_p/ω (к обсуждению этого вопроса мы еще вернемся в следующем разделе).

Естественно, более точные результаты дает постановка на поверхности плазмы общих граничных условий импедансного типа. Поскольку сама дифракционная задача становится при этом более или менее стандартной, мы ограничимся здесь перечислением различных вариантов таких условий.

При малой (по сравнению с характерными размерами объекта a) толщине «скин-слоя» $\delta = c/\omega\sqrt{|\varepsilon|}$ значения поверхностного импеданса Z находятся из решений соответствующих плоских задач и для плазмы умеренной плотности оказываются зависящими от структуры и поляризации внешнего поля (импеданс с пространственной дисперсией). В случае же $|\varepsilon| \gg 1$ для Z может быть принято универсальное выражение $Z = \varepsilon^{-1/2}$. Отсюда, в частности, при $\omega_p \gg \omega \gg \nu$ имеем $Z = (\omega/\omega_p)(i + \nu/2\omega)$.

К некоторому видоизменению импедансных граничных условий приводит всегда имеющее место в реальных условиях размытие границы плазмы. Так, для однородного объекта с $\mathrm{Re}\,\varepsilon = \varepsilon_0 \ll -1$, окруженного тонким переходным слоем толщины $l \ll \delta \ll a$ с линейным изменением концентрации вдоль поперечной координаты x ($\varepsilon = x/l_0 - i\nu/\omega$, $l_0 - l \leqslant x \leqslant l_0$, $1 - l/l_0 = \varepsilon_0$), можно получить следующее общее соотношение,

связывающее тангенциальные (t) и нормальные (n) компоненты внешнего поля на границе (при $x = l_0$):

$$E_t = \left(\varepsilon_0^{-1/2} + ik_0 l_0\right)[\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_t] + I\nabla_t E_n, \tag{3}$$

где $I = \int_{l_0-l}^{l_0} \varepsilon^{-1}\,dx$. В квазистатическом случае ($k_0 a \ll 1$) это соотношение переходит в комбинированное условие для скалярного потенциала: $\varphi - I\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \text{const}$. Существенно, что величина I имеет конечную мнимую часть $\operatorname{Im} I = \pi l_0$ (при $\nu \ll \omega$), не зависящую от ν, так что даже при формальном предельном переходе к $\nu = 0$ потери энергии внутри переходного слоя (так называемые «резонансные» потери в окрестности точки $\varepsilon = 0$), как следует из (3), в общем случае отличны от нуля (раздел 3).

Противоположный предельный случай $l \gg \delta$ рассмотрен в работах [21, 22], где рассчитан входной импеданс полупространства с линейно растущей концентрацией для случаев наклонного падения волн ТЕ- и ТМ-типов. В частности, при $k_0 l_0 \gg 1$ с точностью до членов более высокого порядка малости

$$Z = \begin{cases} iA\,(k_0 l_0)^{-1/3} & \text{(ТЕ-волны)} \\ iA\,(k_0 l_0)^{-1/3} + \pi(k_0 l_0)^{-1}\sin^2\vartheta_0 & \text{(ТМ-волны)} \end{cases} \tag{4}$$

(ϑ_0 — угол падения, $A = \Gamma(1/3)/3^{1/3}\,\Gamma(2/3)$).

Для внешних полей с TM-поляризацией ($H_n = 0$, $E_n \neq 0$) импедансные граничные условия могут быть поставлены также на объектах с нулевой проницаемостью [5]:

$$Z = -i\infty \quad (H_t = 0 \text{ — «идеальный магнитный проводник»}) \tag{5}$$

и при наличии в переходном слое поверхности, где ε имеет нуль выше первого порядка ($\varepsilon = (x/l_0)^n$, $n > 1$) [7]:

$$Z = -i(n+1)\,(k_0 l_0)^{-1}. \tag{6}$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ПЛАЗМЫ ЛЮБОЙ ПЛОТНОСТИ

Особенности рассеяния на плазме с промежуточными значениями плотности иллюстрируются ниже на основании результатов некоторых численных расчетов и расчетов, выполненных в геометрооптическом приближении (с учетом рефракционной расходимости и искривления лучей). Вначале мы рассмотрим плазменное образование простейшего вида — однородный шар — один из немногих объектов, для которых известно точное аналитическое решение при любых ε, а затем обсудим влияние различных усложняющих факторов (слабое и сильное размытие границы, нарушение сферической симметрии распределения плотности).

Отражение от однородного непоглощающего шара исследовалось в работе [23] путем численного суммирования рядов по сферическим гармоникам, в виде которых представляется точное решение. На рис. 1 приведен взятый из этой работы характерный график зависимости радиолокационного сечения рассеяния $\sigma_{рл} = 4\pi\sigma\,(\theta = \pi)$ (нормированного на геометрооптическое значение $\sigma_0 = \pi a^2$ для металлического шара того же радиуса a) от $N/N_{кр} = \omega_p^2/\omega^2$ при довольно большом отношении радиуса к длине волны ($k_0 a = 40$). В области $N \ll N_{кр}$ величина $\sigma_{рл}$ монотонно растет с ростом концентрации. При приближении концентрации к критическому значению $N_{кр}$ $\sigma_{рл}$ начинает сильно осциллировать (пе-

репады достигают 1—2 порядков), хотя в среднем по-прежнему растет с ростом N. Эти осцилляции обусловлены появлением зависимости набега фазы на диаметре шара от концентрации. При $N = N_{кр}$ ($\varepsilon = 0$ радиолокационное сечение совпадает с σ_0 и остается неизменным до значения $N \simeq 4N_{кр}$, начиная с которого зависимость $\sigma_{р\,л}(N)$ вновь становится осциллирующей, отклоняясь от σ_0 примерно на порядок. По мере дальнейшего возрастания N размах осцилляций постепенно уменьшается и при $N \gg 10^2 N_{кр}$ заметного отличия $\sigma_{р\,л}$ от σ_0 больше не наблюдается. Аналогичные осцилляции $\sigma_{р\,л}$ имеют место и при изменении радиуса шара, причем они остаются значительными вплоть до значений $k_0 a \sim 10^2$.

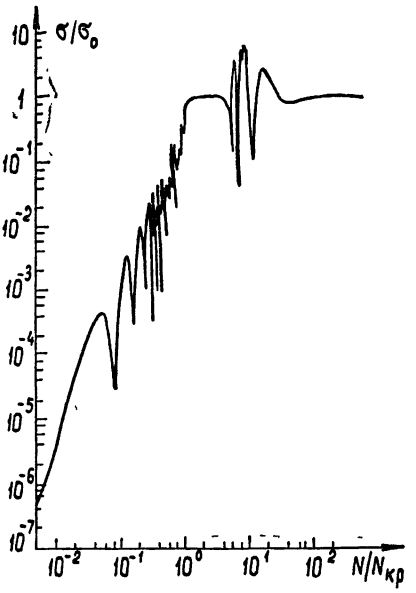


Рис. 1.

Аномально большие отклонения отношения $\sigma_{р\,л}/\sigma_0$ от единицы при $N > N_{кр}$ можно объяснить резонансным возбуждением слабо излучающих квазиповерхностных волн, направляемых границей плазмы, и интерференцией их полей излучения с «регулярной» частью рассеянного поля. Поверхностные волны на границе плазмы могут существовать при $\varepsilon < -1$ ($N > 2N_{кр}$). То обстоятельство, что на приведенном графике осцилляции начинаются с вдвое большего значения N, связано, по-видимому, либо со значительным превышением принятого при расчетах интервала изменения N над шириной соответствующих резонансных пиков, либо с недостаточностью числа учитываемых членов ряда (при $\varepsilon \to -1$ ширина пиков стремится к нулю, а требуемое число членов ряда — к бесконечности*). Тем не менее, хотя пропуск резонансов высоких порядков в окрестности $\varepsilon = -1$ и явился следствием некоторой некорректности расчетов, он имеет определенный практический смысл, поскольку уже весьма слабое поглощение в плазме приводит к сильному затуханию поверхностных волн с большим замедлением (при $\varepsilon \to -1$ их фазовая скорость стремится к нулю) и, следовательно, к полному подавлению соответствующих резонансов.

Слабое размытие границы плазмы практически не меняет той части рассеянного поля, которая не связана с какими бы то ни было резонансами, но из-за наличия упоминавшихся ранее конечных потерь внутри переходного слоя приводит к появлению дополнительного затухания поверхностных волн [27], ослабляя тем самым связанные с их возбуждением резонансные эффекты. Отношение мнимой (h'') и действительной (h') частей постоянной распространения поверхностной волны, бегущей вдоль размытой границы, с точностью до множителя порядка

* Формальное условие резонансов поверхностных волн в окрестности точки $\varepsilon = -1$ имеет тот же вид, что и для квазистатических мультипольных колебаний [24, 25]: $\varepsilon n + n + 1 = 0$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ Интересно, что сечение рассеяния непоглощающего шара любого радиуса, выражение для которого при резонансе n-го порядка всегда содержит слагаемое $2\pi(2n+1)/k_0^2$, при $n \to \infty$, т. е. при $\varepsilon \to -1$, обращается в бесконечность (для шара большого радиуса этот факт впервые отмечен в работе [26]); указанная особенность, правда, полностью снимается введением сколь угодно малого поглощения.

единицы равно отношению толщины переходного (линейного) слоя l_0 к длине волны $1/h'$ ($h''/h' \sim h'l_0$), откуда следует, что условием сильного затухания волны при одном обходе вокруг шара является $(h')^2 a l_0 \gg 1$. Таким образом, уже при сравнительно слабом размытии границы резонансы поверхностных волн, а с ними и осцилляции сечения рассеяния относительно $\sigma_0 = \pi a^2$, в области $N > N_{кр}$, $k_0 a \gg 1$ должны исчезать. Это подтверждается и результатами численного интегрирования волновых уравнений, выполненного для сферически и цилиндрически симметричных образований с различными законами убывания концентрации по радиусу [28–31].

Плазма с сильно размытой границей. Геометрооптическое приближение. В случае, если убывание концентрации в области прозрачности ($\varepsilon > 0$) происходит достаточно плавно в масштабе длины волны, задача может быть полностью решена в приближении геометрической оптики и сводится к расчету рефракции лучей в среде с неоднородным показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ [32–39]. При этом для сечений рассеяния радиально симметричных объектов удается получить достаточно простые общие выражения [32, 35, 36]. В частности, для неоднородного шара без потерь

$$\sigma_{р\,л} = \pi \left[\int_a^\infty \frac{dr}{n(r)\, r^2} \right]^{-2} \quad (n(a) = 0;\ 0 < n(r > a) \leqslant 1). \tag{7}$$

Отсюда следует, что часто используемая для приближенных оценок замена неоднородного плазменного шара металлической сферой радиуса a, на которой $\varepsilon = 0$, всегда дает завышенные значения сечения обратного рассеяния ($\sigma_{р\,л} < \sigma_0 = \pi a^2$). Так, при $\varepsilon(r \geqslant a) = 1 - a^2/r^2$ $\sigma_{р\,л} = 4\sigma_0/\pi^2$ [36]. Для объектов с достаточно тонким линейным переходным слоем ($\varepsilon = (r-a)/l_0$, $a \leqslant r \leqslant a + l_0$, $l_0 \ll a$) рефракционные эффекты дают лишь малые поправки к сечению: $\sigma_{р\,л} = \sigma_0(1 - 2l_0/a)$. Заметим также, что функциям $\varepsilon(r)$, имеющим при $r = a$ нуль второго или более высокого порядка ($\varepsilon \sim (r-a)^m$, $m \geqslant 2$), соответствует бесконечная расходимость нормальной лучевой трубки, так что $\sigma_{р\,л}$ в рассматриваемом приближении обращается в нуль.

Нарушение радиальной симметрии распределения плазмы приводит, естественно, к появлению зависимости $\sigma_{р\,л}$ от направления облучения [37–39]. В частности, для объекта, поверхностями равной концентрации которого являются сферы с общей касательной [39], величина $\sigma_{р\,л}$ при различных углах облучения может быть как большей, так и меньшей σ_0.

Наряду с рефракционным искривлением лучей большое влияние на величину мощности, рассеиваемой протяженным неоднородным объектом, могут оказать потери в плазме. В приближении геометрической оптики их учет при $\nu \ll \omega$ проводится достаточно элементарно — путем введения экспоненциального множителя $\exp\left(-2\int_L k_0 \operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon}\, dl\right)$, характеризующего поглощение вдоль соответствующей лучевой трассы (L). Очевидно, даже при весьма малых значениях $\operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon}$ на достаточно протяженной трассе могут иметь место значительные потери, сильно снижающие сечение рассеяния.

3. РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ НА МАЛЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ОБЪЕКТАХ*

Дипольный резонанс в «холодной» плазме. Рассеяние на частицах, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, как правило,

* Содержание этого и последующего разделов в сокращенном виде излагалось в обзорном докладе [40].

можно рассчитывать в дипольном приближении, определяя электрический и магнитный дипольный моменты, индуцированные полем падающей волны*.

Одной из важнейших особенностей рассеяния на малых плазменных объектах является возможность резонансного возрастания сечения рассеяния на частотах собственных электро-дипольных колебаний. Вообще говоря, при наличии одних лишь радиационных потерь энергии не менее важную роль могут играть и высшие мультипольные резонансы [8, 24, 25] (с появлением которых дипольное приближение для рассеянной волны становится неверным)**. Однако с возрастанием порядка мультипольного колебания в объектах малых размеров быстро растет относительная доля внутренних потерь (соударения частиц, бесстолкновительное затухание), что приводит к подавлению резонансов высоких порядков. Мы ограничимся здесь рассмотрением рассеяния электро-дипольного типа, дифференциальное (σ) и полное (σ_t) сечения которого определяются известными выражениями

$$\sigma = |\alpha|^2 k_0^4 \sin^2\psi, \qquad \sigma_t = \frac{8\pi}{3}|\alpha|^2 k_0^4 \tag{8}$$

(имеется в виду трехмерный случай; ψ — угол, образуемый направлением рассеяния с вектором дипольного момента $\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}_0$, α — коэффициент поляризуемости, $\boldsymbol{E}_0$ — амплитуда электрического поля падающей волны).

Как было отмечено впервые в работе Тонкса [41], в «холодной» ограниченной плазме, наряду с чисто внутренними продольными колебаниями на плазменной частоте ω_p, возможны также поперечные «электростатические» колебания, способные возбуждаться внешними полями. Их собственные частоты ω_0 всегда лежат в области $\omega < \omega_p$ (что следует уже из общего условия существования собственных статических решений $\int \varepsilon E^2 dv = 0$) и зависят от геометрической формы объекта. Так, непосредственно из квазистатического выражения для дипольного момента однородного шара радиуса a $(k_0 a \ll 1,\ k_0\sqrt{|\varepsilon|}\, a \ll 1)$

$$\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \boldsymbol{E}_0 \tag{9}$$

в случае чисто действительного ε имеем

$$\varepsilon(\omega_0) = -2, \qquad \omega_0 = \omega_p/\sqrt{3}. \tag{10}$$

Аналогично для бесконечного цилиндра радиуса a в поперечном поле

$$\boldsymbol{P}_{\text{ед дл}} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} a^2 \boldsymbol{E}_0, \quad \varepsilon(\omega_0) = -1, \quad \omega_0 = \omega_p/\sqrt{2}. \tag{11}$$

Разумеется, резонансные значения дипольных моментов не равны бесконечности. При учете любого вида потерь в знаменателях приведенных выражений появляются мнимые поправки, определяющие величину $P(\omega_0)$ и ширину резонансной линии γ. В отсутствие внутренней диссипации эти поправки имеют чисто радиационное происхождение и легко

---

* Для двумерных цилиндрических объектов, кроме того, должны быть приняты во внимание эквивалентные линейные токи (электрический и магнитный), дающие изотропное рассеяние.

** При увеличении размеров объекта эти резонансы непрерывно переходят в упоминавшиеся выше (раздел 2) резонансы поверхностных волн. По существу те и другие имеют одну и ту же квазистатическую природу и обусловлены, в конечном счете, наличием в плазме упругих восстанавливающих сил кулоновского происхождения.

определяются добавлением к внешнему полю E_0 собственного поля радиационного торможения E_r. В трехмерном случае ([42], стр. 245)

$$E_r = \frac{2}{3c^3}\ddot{P} = -i\frac{2}{3}k_0^3 P,$$

$$P = \alpha(E_0 + E_r) = \frac{\alpha E_0}{1 + 2i\alpha k_0^3/3}, \qquad (12)$$

$$P(\omega_0) = -i\frac{3E_0}{2k_0^3}, \qquad \sigma_t(\omega_0) = \frac{6\pi}{k_0^2}.$$

Таким образом, резонансные значения P и σ_t, определяемые потерями на излучение, оказываются не зависящими от структуры и размеров рассеивающего объекта. Радиационная ширина резонансной линии γ_r определяется отношением его характерных размеров к длине волны; для шара

$$\gamma_r = \frac{1}{3}\omega_0(k_0 a)^3. \qquad (13)$$

Влияние внутренних потерь, приводящих к дополнительному уширению линии и к снижению резонансного сечения рассеяния, существенно зависит от характера распределения концентрации плазмы, точнее — от степени размытия ее границ. Что касается потерь на соударения между частицами, то их учет производится элементарно ($\mathrm{Im}\,\varepsilon \neq 0$) и дает добавочное уширение резонансной линии однородных объектов с резкой границей $\gamma_s = \nu$ (случай размытой границы будет рассмотрен несколько позже).

Более сложным является вопрос о роли теплового движения электронов и связанной с ним пространственной дисперсии. Соответствующий анализ проводился для противоположных предельных случаев слабого и сильного размытия границы плазмы в масштабе дебаевского радиуса.

Учет теплового движения в плазме с резкой границей прежде всего приводит к появлению связи внешних полей с упоминавшимися выше продольными (плазменными) колебаниями и позволяет описать обусловленные их возбуждением резонансные эффекты. Эти дополнительные «плазменно-волновые» резонансы исследовались для однородного шара и цилиндра в гидродинамическом приближении (т. е. в случае слабой пространственной дисперсии) как на основании квазистатического описания [43], так и путем соответствующего обобщения [44—46] известных задач дифракции плоской волны на телах из обычного диэлектрика. Решения отыскивались обычным методом разделения переменных, а учет пространственной дисперсии сводился к тому, что в плазме, наряду с поперечным, было введено в рассмотрение еще и продольное электрическое поле, удовлетворяющее независимому волновому уравнению; связь обоих полей осуществлялась через дополнительное граничное условие — непрерывность нормальной составляющей электрического поля. Из найденных таким образом выражений для амплитуд рассеянных волн следует, что тепловое движение почти не изменяет частот электростатических резонансов и приводит к появлению целой серии дополнительных резонансных линий в области $0 < \varepsilon \ll 1$. Для дипольного рассеяния на шаре положение этих линий определяется условием

$$j_1(k_p a) = k_p a j_1'(k_p a), \qquad (14)$$

где j_1 — сферическая функция Бесселя, $k_p = \omega\sqrt{\varepsilon}/\sqrt{3}\,v_T$ — волновое число для продольного поля, v_T — средняя тепловая скорость электронов.

Аналогичное соотношение для цилиндра получается отсюда заменой сферической функции на цилиндрическую.

Вторым важным эффектом, к которому приводит тепловое движение, является бесстолкновительная диссипация, по существу обусловленная соударениями электронов с границами плазмы. Эта граничная диссипация не может быть исследована в гидродинамическом приближении. Определяемые ею постоянные затухания γ_b можно оценить качественно путем кинетического рассмотрения колебаний плоского плазменного слоя, частично заполняющего пространство между пластинами плоского конденсатора (в такой одномерной системе также возможны резонансы обоих видов [43]). В случае зеркального отражения электронов от границы для электростатических и плазменно-волновых резонансов γ_b пропорциональна соответственно первой и пятой степеням характерной частоты соударений электронов с границей v_T/a.

Размытие границы плазмы приводит к возрастанию внутренних потерь и, следовательно, к уменьшению эффективности резонансного взаимодействия. Если толщина переходной граничной области плазмы l_0 значительно превышает дебаевский радиус ($l_0 \gg v_T/\omega$), то возбуждаемые в ней продольные волны благодаря сильному затуханию Ландау на периферии должны удовлетворять своего рода условию излучения, которое делает невозможным возникновение плазменно-волновых резонансов в объектах с плавным и монотонным убыванием плотности от центра к периферии. Для сферически и цилиндрически симметричных распределений плазмы эти резонансы отсутствуют даже в том случае, когда просачивание продольных волн в периферийные области с сильным затуханием затруднено наличием скачков производной концентрации [10].

Электростатические резонансы в объектах с размытой границей хотя и не подавляются полностью, но также оказываются ослабленными по сравнению со случаем резкой границы. Уменьшение их добротности обусловлено большими потерями энергии в окрестности поверхности $\varepsilon(r) = 0$, где электрическое поле имеет особенность типа $1/\varepsilon$, снимаемую либо соударениями частиц (при $\nu/\omega \gg (v_T/\omega l_0)^{2/3}$), либо пространственной дисперсией (при выполнении обратного неравенства) [9]. В первом случае [8, 24] основным механизмом диссипации являются соударения, а во втором [10] — трансформация энергии в продольные волны, бегущие на периферию. Полная величина потерь внутри пограничного слоя и обусловленное этими потерями уширение резонансной линии γ_l в обоих случаях одинаковы (при малых ν и v_T) и полностью определяются крутизной перепада плотности плазмы в окрестности особой точки. В частности, для шара, проницаемость которого постоянна ($\varepsilon = \varepsilon_0$) при $r \leqslant a$ и линейно нарастает до единицы с производной $d\varepsilon/dr = l_0^{-1}$ в переходном слое, при $l_0 \ll a$, $\varepsilon_0 \sim -1$ имеем

$$P = \frac{\varepsilon_0 - 1 - i\beta}{\varepsilon_0 + 2 + i2\beta}, \quad \beta = \pi\varepsilon_0 l_0/a, \quad \gamma_l = -\frac{1}{3}\omega\beta = \frac{2\pi}{3}\omega\frac{l_0}{a}. \qquad (15)$$

(Аналогичные выражения получаются и для цилиндра.)

Если характерный размер граничной области сравнивается с размером самого объекта, добротность ω/γ_l становится величиной порядка единицы, и амплитуды рассеянных полей возрастают при резонансе не более, чем в 2—3 раза.

Эти выводы находятся в соответствии с данными экспериментов по изучению резонансного рассеяния на метеорных следах: осциллограммы отраженных сигналов показывают, как правило, наличие лишь одного слабо выраженного резонанса [47].

При сочетании плавного убывания плотности в направлении к периферии объекта с ее скачкообразным спаданием до нуля на некоторой граничной поверхности $r = r_b$ (что, например, имеет место в газоразрядных трубках) область сильного затухания плазменных волн, а вместе с нею и основания для наложения на них условия излучения при $\varepsilon(r_b) \ll 1$ исчезают. При этом вновь становятся возможными резонансные эффекты, связанные с возбуждением стоячих плазменных волн, область прозрачности для которых располагается теперь на периферии и ограничена поверхностями $\varepsilon(r) = 0$ и $r = r_b$. Именно таким образом должны быть интерпретированы так называемые резонансы Тонкса—Даттнера [41, 48], наблюдавшиеся экспериментально при взаимодействии высокочастотных полей с плазмой газового разряда. Теоретический расчет их спектра, проведенный на подходящих моделях, дает результаты, вполне удовлетворительным образом согласующиеся с экспериментом как в отношении общего характера расположения линий, так и для величины интервалов между ними [49—52].

Нелинейные эффекты в условиях резонансного взаимодействия становятся заметными уже при сравнительно малых амплитудах внешнего поля и могут быть подразделены на две основные группы: 1) появление высших гармоник наведенной поляризации и рассеянного сигнала [53] и 2) так называемые процессы самовоздействия, выражающиеся в деформации стационарного распределения параметров плазмы, определяющего характеристики рассеяния на основной частоте [11, 54].

Одним из важнейших эффектов второй группы, способным существенно повлиять на резонансные свойства объектов с размытой границей, является деформация пространственного распределения плотности вблизи точки плазменного резонанса $\mathrm{Re}\,\varepsilon = 0$. С одной стороны, наличие резкого максимума потенциала усредненных сил $\Phi = 4\pi e^2 |E|^2/m\omega^2$ [55], а с другой—высокая чувствительность резонансных потерь к величине градиента плотности в этой области делают добротность резонансов весьма критичной по отношению к амплитуде поля. Соответствующие расчеты проводились для простейшей модели с плоскослоистым распределением плотности $N(x)$, подчиняющимся закону Больцмана и характеризуемым локальной комплексной проницаемостью $\varepsilon(x, |E(x)|^2)$ [11]. Анализ решения нелинейного (кубичного) уравнения, определяющего распределение проницаемости в присутствии поля, показывает, что при значениях амплитуды внешнего поля $E_x^{(0)}$, превышающих некоторую критическую величину

$$E_{\text{кр}} = \left(\frac{12{,}3 m^2 v_T^2 \nu^3}{e^2 \omega} \right)^{1/2}, \qquad (16)$$

это распределение приобретает в области $\omega_p \simeq \omega$ форму ступеньки, расположение которой относительно уровня $\mathrm{Re}\,\varepsilon = 0$ зависит от амплитуды гистерезисным образом: при ее нарастании переход через точку $\mathrm{Re}\,\varepsilon = 0$ происходит скачком; при обратном уменьшении амплитуды скачок смещается в область $\mathrm{Re}\,\varepsilon < 0$ и появляется широкое «плато» с $\mathrm{Re}\,\varepsilon \sim \mathrm{Im}\,\varepsilon$. Величина добротности электростатического резонанса соответственно возрастает или уменьшается по сравнению с линейным случаем.

«Электромагнитные» резонансы полости в плазме. Мы не упоминали до сих пор об обычных электромагнитных резонансах, способных появиться при определенных соотношениях между длиной волны внутри объекта и его размерами. Для плазменных объектов, расположенных в вакууме, эти соотношения могут выполняться лишь вне квазистатической области (при $k_0 a \gtrsim 1$), где добротность колебаний вследствие больших потерь на излучение оказывается весьма низкой ($\gamma_r \sim \omega_r$) Ситуация,

однако, существенно меняется для объекта, представляющего собой разрежение (полость) в плазме. Если в полости $\varepsilon \simeq 1$, а в окружающей невозмущенной плазме $0 < \varepsilon_e \ll 1$, то внешняя длина волны оказывается много большей размеров полости даже при выполнении условия резонанса, и, следовательно, потери на излучение становятся весьма малыми, а добротность сильно возрастает. При этом, в отличие от плазменных объектов в вакууме, размытие границы полости не приводит к появлению дополнительных внутренних потерь и не ослабляет резонанса.

Резонансные частоты полостей квазисферической и квазицилиндрической формы лежат, как правило, в области $k_0 a \gtrsim 1$. Исключение составляет лишь рассмотренный в работах [56, 57] резонанс «нулевой» моды (дающей изотропное рассеяние) для цилиндрической полости, параллельной электрическому полю падающей волны. Условие этого резонанса при $k_0 a \ll 1$ имеет вид $(k_0 a)^2 \ln\left(1/k_0 a \sqrt{\varepsilon_e}\right) = 2$.

4. ДИФРАКЦИЯ НА ТЕЛАХ, ПОМЕЩЕННЫХ В НЕОДНОРОДНУЮ ПЛАЗМУ

В данном разделе обсуждаются задачи, в известном смысле дополнительные к рассмотренным ранее: излучатель (1), рассеивающий объект (2) и приемник (3) предполагаются расположенными в неоднородной плазменной среде с проницаемостью $\varepsilon(\boldsymbol{r})$; требуется определить коэффициент передачи K_{123}, характеризующий ту часть принимаемого сигнала, которая обусловлена рассеянием на объекте. В самой общей постановке задачи такого рода представляются чрезвычайно сложными. Мы ограничимся здесь рассмотрением некоторых достаточно типичных частных случаев, относящихся к среде, свойства которой медленно меняются в масштабе длины волны.

Коэффициенты преобразования поля. Кажущееся сечение рассеяния. Существенное упрощение поставленной задачи достигается введением следующих предположений: 1) рассеивающий объект и приемник расположены в областях применимости приближения геометрической оптики для первичного и рассеянного полей соответственно; 2) излучаемый сигнал попадает в приемник по единственной лучевой трассе (излучатель — объект — приемник); 3) размеры излучателя, приемника и объекта достаточно малы по сравнению с характерным масштабом неоднородности среды, так что в областях формирования их диаграмм направленности среда практически однородна (без ограничения общности можно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$).

При выполнении этих предположений учет неоднородности среды сводится к исследованию ее трансформирующих свойств на соответствующих лучевых траекториях, а собственно дифракционная часть задачи выглядит так же, как в однородной среде. Производя необходимые пересчеты потоков энергии и сравнивая их значения в однородной и неоднородной средах, получаем следующее выражение для интересующего нас коэффициента передачи:

$$K_{123} = \frac{G_1 A_3 \sigma_{13}(\varepsilon_2)\left(T_{12}^{(E)} T_{23}^{(E)}\right)^2}{4\pi R_{12}^2 R_{23}^2}, \qquad (17)$$

где G_1 и A_3 — коэффициент направленного действия и эффективная площадь передающей и приемной антенн соответственно; R_{12} и R_{23} — расстояния от передатчика и приемника до объекта; $T_{12}^{(E)}$ и $T_{23}^{(E)}$ — коэффициенты преобразования амплитуды электрического поля, очевидным образом связанные с так называемыми факторами фокусировки [58]. Первый из них равен отношению амплитуд электрического поля, создаваемого излучателем в месте положения объекта в данной неоднородной среде

и в вакууме при одинаковых R_{12} и фиксированной ориентации диаграммы излучателя относительно направления выхода луча, попадающего на объект. Второй коэффициент определяется аналогичным образом для поля в зоне приема, но в качестве гипотетической однородной среды здесь берется не вакуум, а плазма, окружающая объект ($\varepsilon = \varepsilon_2$). Дифференциальное сечение рассеяния $\sigma_{13}(\varepsilon_2)$ определяется в той же однородной среде, причем направления 1 и 3 выбираются с учетом рефракции. В ряде случаев величина $\sigma_{13}(\varepsilon_2)$ просто выражается через сечение $\sigma_{13}^{(0)}$ в вакууме. В частности, для идеально проводящих объектов в геометрооптическом ($ka \gg 1$) и квазистатическом ($k_0 a \ll 1$) приближениях коэффициент подобия $f(\varepsilon_2) = \sigma_{13}(\varepsilon_2)/\sigma_{13}^{(0)}$ равен соответственно 1 и ε_2^2.

Таким образом, в неоднорнодной среде роль обычного сечения рассеяния играет величина

$$\sigma_{13}^{*} = \sigma_{13}(\varepsilon_2)\left(T_{12}^{(E)} T_{23}^{(E)}\right)^2, \tag{18}$$

которая может быть названа кажущимся сечением; при заданном $\sigma_{13}(\varepsilon_2)$ ее расчет сводится к отысканию коэффициентов преобразования амплитуды электрического поля.

В частном случае обратного рассеяния при облучении элементарным электрическим диполем в силу соотношений взаимности имеем

$$T_{12}^{(E)} = T_{23}^{(E)} = T^{(E)}, \quad \sigma_{13}^{*} = T^{(E)\,4}\,\sigma_{11}(\varepsilon_2). \tag{19}$$

Довольно подробные расчеты коэффициента $T^{(E)}$ в освещенной области были проведены для линейных и параболических плоскослоистых распределений $\varepsilon(z)$ [59]. Один из типичных случаев, относящийся к линейному слою ($\varepsilon = 1 - \alpha z$, $z > 0$), представлен на рис. 2, где приведена за-

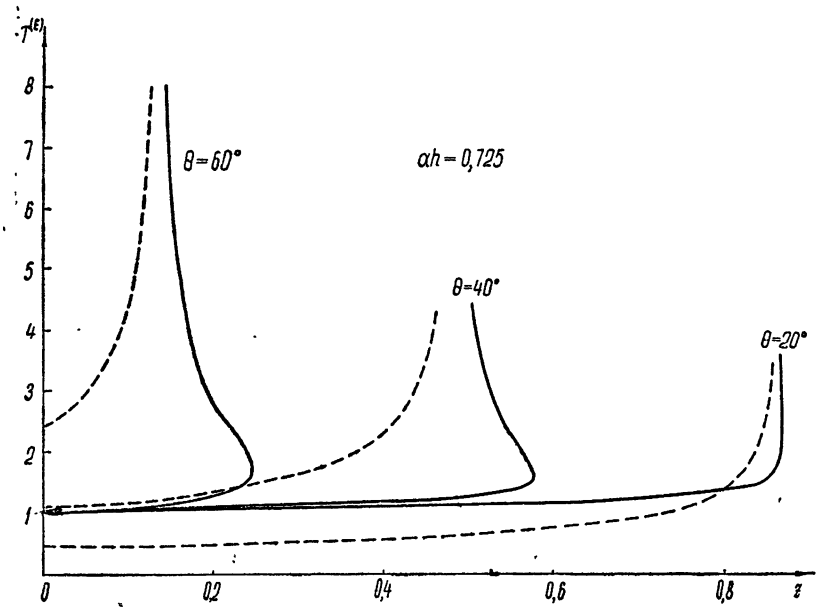


Рис. 2.

висимость $T^{(E)}(z)$ для лучей, выходящих из точки $z = -h$ с различными начальными углами наклона ϑ_0 к оси z (пунктирные линии относятся к лучам, прошедшим каустику)*. Кривые обрываются на границе обла-

* Параметр $\alpha h = 0{,}725$ был выбран таким образом, чтобы значения α и h могли в какой-то мере соответствовать условиям земной ионосферы.

сти применимости геометрической оптики, где величина $T^{(E)}$ достигает максимального значения (см. ниже).

Точечные рассеиватели в областях нарушения геометрической оптики. Для объектов, малых по сравнению с размерами неоднородности поля, изложенная методика расчета остается справедливой (с некоторыми уточнениями) и в том случае, если они располагаются в областях, где геометрооптическое приближение неприменимо. Так, в случае рассеяния электро-дипольного типа выражения кажущегося сечения обратного рассеяния σ^*_{11} и коэффициента передачи K_{121} остаются без изменения за тем исключением, что величина $\sigma_{11}(\varepsilon_2)$ заменяется на произведение $\sigma^{(0)}_{11}\tilde{f}(\varepsilon_2)$, где $\tilde{f}(\varepsilon_2)$ — отношение квадратов поляризуемостей объекта в средах с $\varepsilon = \varepsilon_2$ и $\varepsilon = 1$ (волновой вектор и поляризация плоской волны, по отношению к которой рассчитывается $\sigma^{(0)}_{11}$, определяются направлением невозмущенного электрического поля в данной точке неоднородной среды).

В рассматриваемой нами слабо неоднородной плазме можно выделить три характерные области, в которых при заданном положении источника неприменима геометрическая оптика: прикаустическая область, область тени и область плазменного резонанса (в окрестности $\varepsilon = 0$). Указанные области различаются между собой по структуре поля и по методике его расчета, хотя и здесь, как правило, можно исходить из несколько модифицированных лучевых представлений.

Для области вблизи каустики* соответствующая методика изложена в [61, 62] (см. также [63]). По существу, это метод эталонных функций (которыми служат здесь функции Эйри), но аргументы этих функций и коэффициенты при них вычисляются по обычным формулам геометрической оптики. Необходимо подчеркнуть, что область применимости геометрооптического приближения простирается фактически вплоть до первого максимума функции Эйри, где ее точные значения остаются еще достаточно близкими к асимптотическим. Возвращаясь вновь к изображенным на рис. 2 кривым $T^{(E)}(z)$, заметим, что максимальные значения $T^{(E)}$ как раз соответствуют этому первому максимуму и, как видно из рисунка, достаточно велики, так что при $\vartheta_0 = 60°$ выигрыш в сечении обратного рассеяния $\sigma^*_{11}/\sigma^{(0)}_{11}$ может составить более чем три порядка**.

Применительно к области каустической тени обобщение метода геометрической оптики основывается на введении комплексных лучей [65] (см. также обзорную работу [66]). Что касается резонансной области ($\omega_p \simeq \omega$, $(E\nabla\varepsilon) \neq 0$), то при достаточном удалении ее от каустики в случае линейного перехода ε через нуль возможно, по-видимому, обобщение «комплексной» геометрической оптики, если использовать в качестве эталонных функций функции Уиттекера [67]. Однако в более интересном случае близкого расположения каустической и резонансной поверхностей (когда резонансное возрастание амплитуды становится максимальным [5]) в силу отсутствия единых эталонных функций геометрооптическую методику обобщить не удается. Специального рассмотрения требуют также резонансные области с другим характером перехода ε через нуль [7]. По мере «сглаживания» этого перехода, т. е. при увеличении числа производных, обращающихся в нуль, эффект резонансного возрастания поля постепенно ослабевает и исчезает полностью в предельном случае

---

* Форма каустических поверхностей при различных положениях источника и различных видах неоднородности среды исследовалась в работах [60].

** Эффект сильного рассеяния вблизи каустики был впервые установлен применительно к флуктуациям в ионосфере [64].

однородного слоя с $\varepsilon = 0$*. Однако даже в том случае, если этот эффект выражен достаточно сильно, значительному возрастанию кажущегося сечения препятствует уменьшение коэффициента подобия $\tilde{f}(\varepsilon_2)$. Так, для малого металлического объекта $\left(\tilde{f}(\varepsilon_2) = \varepsilon_2^2\right)$ при значениях параметров, близких к ионосферным, отношение $\sigma^*_{11}/\sigma^{(0)}_{11}$ при $\mathrm{Re}\,\varepsilon_2 \to 0$ в лучшем случае приближается к единице.

Рассеяние на объектах больших размеров ($ka \gg 1$) в слабо неоднородной среде может быть исследовано непосредственно в приближении геометрической оптики без проведенного выше разбиения задачи на «дифракционную» и «рефракционную» части**. Такое разбиение к тому же теряет смысл, если размеры объекта (или точнее, той его части, которой определяется рассеяние в данном направлении) становятся сравнимыми с размером неоднородности среды.

Одним из любопытных примеров такого рода является область пониженной концентрации — полость в плазме, рассматривавшаяся в предыдущем разделе как объект, рассеяние на котором может иметь резонансный характер. Если длина волны в окружающей плазме мала по сравнению с характерными размерами полости и с расстояниями, на которых происходит существенный перепад плотности плазмы внутри нее, всякие резонансные явления полностью исчезают и задача рассеяния сводится к изучению рефракции лучей в самой полости и в окружающей среде. Неоднородность последней приобретает при этом особо важную роль, поскольку непосредственное обратное отражение от рассматриваемой полости в приближении геометрической оптики вообще отсутствует и возвращение рассеянного сигнала к источнику возможно лишь при наличии соответствующим образом искривленной лучевой трассы. Применительно к рассеянию на разрежениях электронной плотности в земной ионосфере можно указать две характерные трассы такого вида: 1) в результате рефракции на полости луч разворачивается перпендикулярно к ионосферным слоям, отражается от поверхности $\varepsilon = 0$ и возвращается к источнику по той же траектории; 2) при прохождении через полость луч испытывает более сильный поворот, чем в первом случае, и падает на отражающие слои ионосферы под углом, обеспечивающим его возвращение к источнику без вторичной рефракции на полости.

При слабом различии показателей преломления полости и окружающей среды рассеяние в обратном направлении все же может быть весьма значительным, если волновой вектор падающей волны с самого начала ориентирован перпендикулярно отражающим слоям. При этом сечение обратного рассеяния можно найти путем непосредственного расчета искажений общего фазового фронта, определяемых без учета искривления лучей [57].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
3. T. Tamir, A. A. Oliner, The spectrum of electromagnetic waves guided by a plasma layer, Proc. IEEE, **51**, 317 (1963).
4. T. Tamir, A. A. Oliner, Guided complex waves, Part I: Fields at an interface; Part 2: Relation to radiation patterns, Proc. IEE, **110**, 310, 325 (1963).

* При этом, если $\nu/\omega \to 0$, для всех переходов, кроме линейного, поверхность $\varepsilon = 0$ оказывается идеальным экраном по отношению к полям ТМ-типа.

** Здесь следует обратить внимание на работы [68—70], в которых уточняется принцип локальности и развивается геометрическая теория дифракции для объектов с импедансными граничными условиями в неоднородной среде.

5. И. Г. Кондратьев, М А. Миллер, Двумерные электромагнитные поля, направляемые плазменными слоями. I, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 124 (1964).
6. T. Tamir, S. Palocz, Surface waves on plasma-clad metal rods, IEEE Trans., **MTT-12**, 189 (1964).
7. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Отражательные характеристики неоднородных плазменных слоев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
8. N. Herlofson, Plasma resonance in ionospheric irregularities, Ark. Fys., **3**, 247 (1951).
9. Н. Г. Денисов, Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной плазме, ЖЭТФ, **31**, 609 (1956).
10. В. Б. Гильденбург, О резонансных свойствах неоднородных плазменных объектов, ЖЭТФ, **45**, 1978 (1963).
11. В. Б. Гильденбург, О нелинейных эффектах в неоднородной плазме, ЖЭТФ, **46**, 2156 (1964).
12. С. С. Калмыкова, К вопросу о согласовании плазменных волноводов, ЖТФ, **31**, 1374 (1961).
13. В. И. Курилко, Рассеяние электромагнитных волн прямоугольным диэлектрическим клином, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, **9**, 980 (1966).
14. H. Ikegami, Scattering of microwaves from a plasma column in rectangular waveguides, Research Report IPPJ-27, Institute of Plasma Physics, Nagoya University, 1964.
15. K. P. Johnson, Transient responce of reentry plasmas, Rept. Lincoln Lab. Mass. Inst. Technol., IV/35, 1962.
16. H. A. Corriher, B O. Pyron, A bibliography of articles on radar reflectivity and related subjects 1957—1964, Proc. IEEE, **53**, 1025 (1965) (русский перевод, стр. 1172).
17. Ф М Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, **2**, ИЛ, М., 1960.
18. Я. Л. Альперт, А. В Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, изд. Наука, М., 1964.
19. R. Eshleman, Theory of radio reflections from electron-ion clouds, IRE Trans., **AP-3**, 32 (1955).
20. W. Flood, Meteor echoes at ultra high frequencies, J. Geophys. Res., **62**, 79 (1957).
21. Е Н Васильев, Ю. И. Орлов, В А Пермяков, Граничные условия на поверхности плазмы с резко меняющимися параметрами, ЖТФ, **34**, 1341 (1964).
22. В. А. Пермяков, В. В Солодухов, Поверхностный импеданс неоднородной плазмы с резко меняющимися параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 893 (1965).
23. P. J. Wyatt, Electromagnetic scattering by finite dense plasmas, J. Appl. Phys., **36**, 3875 (1965).
24. T. R. Kaiser, R. L. Closs, Theory of radio reflection from meteor trails, Phil. Mag., **43**, 1 (1952).
25 В. Б. Гильденбург, И. Г Кондратьев, О резонансном взаимодействии электромагнитного поля с высшими мультипольными моментами плазменного сгустка, ЖТФ, **33**, 301 (1963).
26. В. А. Пермяков, Об аномальном рассеянии электромагнитных волн плазменным шаром большого радиуса, Изв высш уч. зав.—Радиофизика (в печати).
27. К. Н. Степанов, О влиянии плазменного резонанса на распространение поверхностных волн в неоднородной плазме, ЖТФ, **35**, 1349 (1965).
28. G. H. Keitel, Certain mode solutions of forward scattering by meteor trails, Proc. IRE, **43**, 1481 (1955).
29. D. Arnush, Electromagnetic scattering from a spherical nonuniform medium, Part I: General theory, IEEE Trans., **AP-12**, 86 (1964); R. S. Margulies, F. L. Scarf, Part 2: The radar cross section of a flare, ibid, 91.
30. P. E. Bisbing, Electromagnetic scattering by an exponentially inhomogeneous plasma sphere, IEEE Trans., **AP-14**, 219 (1966).
31 В. А. Пермяков, Дифракция электромагнитных волн на радиально-неоднородных плазменных шаре и цилиндре, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика (в печати).
32. L. A. Manning, The strength of meteoric echoes from dense columns, J. Atmos. Terr. Phys., **4**, 219 (1953).
33. L. A. Manning, Oblique echoes from over-dense meteor trails, J. Atmos. Terr. Phys, **14**, 82 (1959).
34. L. A. Manning, Ray-path calculation of over-dense meteor echo strength, J. Atmos. Terr. Phys., **25**, 182 (1963).
35. Ю С. Саясов, Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящей сферой, находящейся в неоднородной среде, ЖТФ, **31**, 261 (1961).

36. Н. П. Марьин, Об эффективной отражающей поверхности ионизованной области, имеющей форму шара, Радиотехника и электроника, **10**, 235 (1965).
37. Н. П. Марьин, Рассеяние лучей электромагнитных волн конусообразным ионизованным следом, Геомагнетизм и аэрономия, **5**, 260 (1965).
38. Н. П Марьин, Рассеяние электромагнитных волн ионизованным следом в виде параболоида вращения, Радиотехника и электроника, **10**, 1765 (1965).
39. Ю. М. Жидко, Поперечники обратного рассеяния неоднородных по радиусу и угловой координате диэлектрических объектов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
40. V. B. Gildenburg, I. G. Kondratjev, M. A. Miller, Diffraction of electromagnetic waves by plasma structures, Proc. of a Symposium, on Electromagnetic Wave Theory, 1965, Delft, Pergamon Press 1966, p. 580.
41. L. Tonks, The high frequency behavior of a plasma, Phys. Rev., **37**, 1458 (1931).
42. Л. Д Ландау, Е .М Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.
43. P. E. Vandenplas, R. W. Gould, Resonant behaviour of a plasma slab-condenser system, Physica, **28**, 357 (1962).
44. A. Yildiz, Scattering of plane plasma waves from a plasma sphere, Nuovo Cimento, **30**, 1182 (1963).
45. В. Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев, Дифракция электромагнитных волн на ограниченной плазме при наличии пространственной дисперсии, Радиотехника и электроника, **10**, 658 (1965).
46. Л. К. Рыжова, И П Якименко, Наклонное падение плоской электромагнитной волны на сжимаемый плазменный цилиндр, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, 666 (1967).
47. R. L. Closs, J A. Clegg, T. R. Kaiser, An experimental study of radio reflections from meteor trails, Phil. Mag., **44**, 313 (1953).
48. A. Dattner, Experiments on plasma resonance, Ericsson Technics, **13**, 309 (1957).
49. F. W. Crawford, The mechanism of Tonks-Dattner plasma resonances, Phys. Letters, **5**, 244 (1963).
50. J. C. Nickel, J. V. Parker, R. W. Gould, Resonance oscillations in a hot nonuniform plasma column, Phys. Rev. Letters, **11**, 183 (1963).
51. В. Б. Гильденбург, О плазменных резонансах в неоднородных объектах, ЖТФ, **34**, 372 (1964).
52. P. E. Vandenplas, A. M. Messiaen, Hot inhomogeneous plasma, II: Perturbed scalar pressure approximation, J. Nucl. Energy Part C, **6**, 459 (1964).
53. R. A. Stern, Harmonic generation and frequency mixing at plasma resonance, Phys. Rev. Letters, **14**, 538 (1965).
54. А. А. Андронов, Нелинейная теория дипольного резонанса и когерентное ускорение плазмы, ЖТФ, **36**, 196 (1966).
55. А. В. Гапонов, М А. Миллер, О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле, ЖЭТФ, **34**, 242 (1958).
56. Ю. С. Саясов, Л. А Жижимов, Резонансное рассеяние радиоволн следами искусственных спутников Земли, Радиотехника и электроника, **8**, 499 (1963)
57. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, К вопросу о рассеянии радиоволн на следе движущегося в плазме тела, Геомагнетизм и аэрономия, **6**, 842 (1966).
58. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
59. С. Д. Жерносек, И Г. Кондратьев. Расчет полей излучения в слоисто-неоднородной плазме, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
60. Ю. И. Орлов, О некоторых особенностях лучевой теории распространения цилиндрических и сферических волн в слабо неоднородной плазме. I, II, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 497, 657 (1966).
61. Ю. А. Кравцов, Об одной модификации метода геометрической оптики, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 664 (1964).
62. Ю. А. Кравцов, Асимптотическое решение уравнений Максвелла вблизи каустики, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **7**, 1049 (1964).
63. D. Ludwig, Uniform asymptotic expansions at a caustic, Common. Pure Appl. Math., **19**, 215 (1966).
64. Н. Г. Денисов, О влиянии области отражения на рассеяние радиоволн в ионосфере, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 208 (1960).
65. J. B. Keller, A geometrical theory of diffraction, Proc. Symposia Appl. Math., McGraw-Hill, **8**, 27, (1958).
66. Ю. А. Кравцов, Комплексные лучи и каустики в неоднородных средах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
67. Г. И. Макаров, Асимптотическое представление решений уравнений Максвелла в гладких ионосферных слоях, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 1, 63 (1962),

68. J. B. Keller, B. D. Seckler, Geometrical theory of diffraction in inhomogeneous media, J. Acoust. Soc. Amer., **31**, 192 (1959).
69. J. B. Keller, B. D. Seckler, Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media, J. Acoust. Soc. Amer., **31**, 206 (1959).
70. D. S. Jones, High frequency refraction and diffraction in general media, Phil. Trans. A (GB), **255**, 341 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 июня 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 538.56

УДАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман

1. ВВЕДЕНИЕ. СРЕДЫ И ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Изучение явлений, проявляющихся при распространении волн конечной амплитуды в средах с нелинейными параметрами, составляет в настоящее время содержание многочисленных разделов механики и электродинамики сплошных сред. Исследования, проведенные в последние годы в связи со специфическими проблемами газодинамики, физики плазмы, электродинамики нелинейных сред и нелинейной оптики, показали, что качественные особенности нелинейных волновых процессов определяются, в основном, двумя характеристиками среды: нелинейностью, приводящей к образованию локальных искажений профиля волны из-за обогащения ее спектра высшими гармоническими компонентами, и дисперсией, вызывающей расплывание волны и уменьшающей взаимодействие между отдельными гармониками.

В настоящем обзоре рассматриваются среды со слабой дисперсией и относительно сильной нелинейностью, когда в профиле волны возможно появление областей с большим (по сравнению с первоначальным масштабом) градиентом величин (полей), описывающих волну*. Наиболее характерным для таких сред нелинейным эффектом является образование ударных волн. Под ударной волной следует понимать процесс быстрого изменения («скачок») полей на некотором, в общем случае движущемся, интервале δ; изменение поля на этом интервале описывается уравнениями более высокого (по сравнению с уравнениями в области вне δ) порядка, решение которых по обе стороны δ асимптотически стремится к различным (в масштабе δ — постоянным) значениям, связанным между собой однородными граничными условиями, не зависящими от структуры поля внутри «скачка». Как будет ясно из дальнейшего, в ударной волне всегда происходит диссипация энергии.

Теоретические и экспериментальные исследования ударных волн начались с изучения динамики нейтрального сжимаемого газа [1–4]. Позднее развитие физики плазмы, в частности, магнитной гидродинамики [5–7], привело к изучению ударных волн в среде, обладающей проводимостью. Такие волны представляют собою «скачки» не только механических и термодинамических величин, но и электромагнитного

* Во втором крайнем случае — при сильной дисперсии и малой нелинейности — нелинейность существенно сказывается на «крупномасштабных» процессах, охватывающих много периодов квазигармонической волны Так, форма огибающих амплитуды и частоты модулированной волны в такой среде может испытывать сильные искажения; возможны, в частности, римановы и ударные «волны огибающих» [48, 64, 78]. В нелинейной оптике интенсивно изучаются также случаи «специальной» дисперсии, когда эффективно взаимодействуют лишь отдельные спектральные компоненты волны [56, 74].

поля. Однако, хотя наличие последнего играет здесь важную роль, существование магнитодинамических и плазменных ударных волн принципиально связано с макроскопическим движением среды. В уравнениях таких процессов, объединяющих уравнения газодинамики и электродинамики (последние чаще всего рассматриваются в квазистационарном приближении), наличие нелинейных членов обусловлено гидродинамическими эффектами. Для «электромагнитной ветви» волн нелинейность таких сред обычно мала, и образование ударных волн невозможно из-за наличия дисперсии.

Появление твердых материалов с ярко выраженной нелинейностью электромагнитных характеристик и дисперсией, существенной только в области сравнительно высоких частот (ферриты, сегнетоэлектрики, полупроводники), привлекло внимание исследователей к «чисто электромагнитным» ударным волнам (УЭМВ). Первые работы в этом направлении появились в 1958—1960 гг. [13—20]. В образовании УЭМВ макроскопические движения и изменения термодинамического состояния среды (хотя и неизбежные в принципе) играют второстепенную роль и большей частью могут не приниматься во внимание. Процессы такого рода могут быть описаны уравнениями электродинамики, дополненными феноменологическими материальными уравнениями, характеризующими электромагнитные свойства (нелинейность, дисперсию) среды*.

2. Характерные типы нелинейных материальных уравнений можно проиллюстрировать на примере феррита. При достаточно медленном (по сравнению с временем релаксации намагниченности) изменении поля связь между магнитной индукцией $\boldsymbol{B}$ и напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в феррите может считаться не зависящей от скорости изменения поля (квазистатической). Если пренебречь анизотропией и гистерезисными явлениями, то векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ коллинеарны, а зависимость между их величинами является однозначной и нечетной (рис. 1, кривая а).

При быстром изменении поля для описания процесса перемагничивания привлекаются различные динамические модели. Так, для небольших полей пригодны уравнения, описывающие движение стенок доменов [9]. В сильном и быстро меняющемся поле, характерном для ударных волн, доменная структура несущественна, а основную роль играет прецессия вектора намагниченности $\boldsymbol{M}$. В насыщенном феррите этот процесс описывается уравнением однородной прецессии**

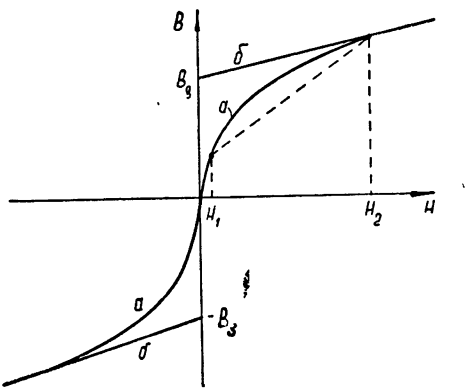


Рис. 1. Типичные характеристики намагничивания (зависимости $B(H)$ или $\Phi(I)$).

* В общем случае материальные уравнения включают в себя уравнения механики деформируемых сред и термодинамики, и полная система уравнений описывает, естественно, не только электромагнитные процессы. В дальнейшем будут рассматриваться квазиэлектромагнитные волны, а пространственная дисперсия будет учитываться лишь в тех случаях, когда она также связана с электромагнитными процессами.

** Принятая форма записи второго слагаемого в правой части (1.1), ответственного за диссипацию, по-видимому, наиболее оправдана [10]. Если принять для диссипативного члена выражение $-\lambda[\boldsymbol{M}[\boldsymbol{MH}]]$ [33], то полученное уравнение сводится к (1.1) заменой $\gamma \to \gamma(1+\alpha)$, $\lambda \to \alpha\gamma(1+\alpha)M^2$; при малой диссипации эти выражения эквивалентны.

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\gamma[\boldsymbol{M}\boldsymbol{H}] + \frac{\alpha}{M}\left[\boldsymbol{M}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}\right], \qquad (1.1)$$

где M — постоянная намагниченность насыщения, γ — гиромагнитное отношение, α — коэффициент диссипации. Величина $\boldsymbol{H}$ складывается из внешнего поля $\boldsymbol{H}_e$, поля анизотропии $\boldsymbol{H}_{an}$, обменного поля $\boldsymbol{H}_{ex}$ и т. д.; однако во многих задачах теории УЭМВ можно пренебречь всеми внутренними полями в феррите и положить $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_e$.

Для медленных процессов $\left(\frac{\partial}{\partial t} \to 0\right)$ из (1.1) получается квазистатическое уравнение $[\boldsymbol{M}\boldsymbol{H}] = 0$. При этом, например, в волне, распространяющейся вдоль постоянного намагничивающего поля $\boldsymbol{H}_0$, связь поперечных компонент $H_\perp$ и $B_\perp = H_\perp + 4\pi M_\perp$ качественно соответствует рис. 1а. Если же скорость изменения поля сравнима с временем релаксации феррита, то, ввиду дифференциального характера уравнения связи (1.1), порядок системы уравнений, описывающих распространение волны в феррите, повышается. Физически это означает появление временной дисперсии, связанной здесь как с чисто реактивным процессом (первый член в правой части (1.1)), так и с диссипацией (второй член). Заметим, что нелинейны оба эти процесса.

Однородная прецессия намагниченности обычно возможна только при наличии сильного, по сравнению с полем волны, постоянного поля, насыщающего феррит. Если такое поле отсутствует, то возникает некогерентное перемагничивание, связанное с возбуждением спиновых и магнитостатических колебаний [12]. В этом случае прецессия $\boldsymbol{M}$ локально описывается формулой (1.1), а материальное уравнение в пренебрежении пространственной дисперсией может быть получено усреднением (1.1) по достаточно большому (в масштабе длины спиновых волн) элементу объема. В результате усредненный вектор намагниченности параллелен $\boldsymbol{H}$, а изменение его величины M_h описывается уравнением

$$\frac{\partial M_h}{\partial t} = -\frac{\alpha\gamma M_h}{1+\alpha^2}\left(1 - \frac{M_h^2}{M^2}\right)H. \qquad (1.2)$$

Особенностью (1.2) является то, что все нелинейные эффекты связаны с диссипацией: при $\alpha \to 0$ нелинейность (а также дисперсия) исчезает.

Отметим еще свойство насыщения, характерное для феррита и ряда других нелинейных электродинамических материалов: независимо от конкретного механизма нелинейности в очень сильном поле среда становится линейной; это, в частности, следует из уравнений (1.1), (1.2). Это свойство позволяет упростить решение некоторых задач о распространении сильных ударных волн, отвлекаясь от конкретного вида уравнений связи в области малых полей и аппроксимируя зависимость $B(H)$ кусочно-линейной характеристикой (рис. 1, кривая б).

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для других нелинейных сред. Например, уравнения движения носителей заряда в полупроводниках позволяют выяснить механизмы нелинейности, дисперсии и диссипации в этой среде и получить феноменологическое описание ее электродинамических свойств (в простейших случаях сводящееся к нахождению эквивалентной схемы p—n-перехода [80]).

3. Нелинейная система, состоящая из уравнений Максвелла и феноменологических уравнений связи типа (1.1) или (1.2), чрезвычайно сложна, и ее исследование связано в общем случае с непреодолимыми трудностями. Правда, многие явления, характерные для ударных волн

в свободном пространстве, можно изучить, рассматривая одномерные процессы (однородные плоские волны), в которых поле зависит только от времени t и одной продольной координаты z. Однако практическая применимость такой одномерной идеализации в теории УЭМВ весьма ограничена, поскольку все экспериментальные исследования в настоящее время относятся к ограниченному пространству — в частности, к двухсвязным волноводам (линиям передачи), заполненным нелинейной средой. В таких системах существенна зависимость поля от поперечных координат. Вместе с тем, волны в двухпроводных линиях с малыми (по сравнению с характерной длиной волны) поперечными размерами во многих случаях могут быть описаны телеграфными уравнениями для интегральных величин

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial I}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial t}=0. \tag{1.3}$$

Здесь I, U, Φ, Q — соответственно ток, напряжение, погонный поток индукции и погонный заряд в линии. Связи между этими величинами (материальные уравнения) в общем случае даются нелинейными интегродифференциальными операторами

$$\Phi=\Phi\{I, U\}, \qquad Q=Q\{U, I\}, \tag{1.4}$$

вид которых зависит как от конфигурации проводников линии, так и от свойств заполняющей ее среды. Нелинейность и дисперсия волновода и в тех случаях, когда нелинейны оба оператора Φ и Q.

Система (1.3) приближенно применима также к волнам в «искусственных» линиях (нелинейных фильтрах), состоящих из идентичных звеньев с сосредоточенными параметрами; такие линии использовались во многих экспериментах с УЭМВ. Нелинейные дифференциально-разностные уравнения, описывающие процессы в системах с дискретными параметрами, при некоторых условиях (малость изменения величин I, U на одном звене) могут быть заменены дифференциальными уравнениями (1.3)*.

Таким образом, существует класс практически важных волновых систем, процессы в которых могут рассматриваться как одномерные и описываться уравнениями (1.3) (аналогичными по виду уравнениям плоской линейно-поляризованной волны в неограниченной среде). Поэтому в дальнейшем при изложении общих вопросов (образование, развитие, взаимодействие, структура УЭМВ) мы исходим из этих уравнений (иногда с некоторыми дополнительными членами). Как правило, мы будем предполагать, что поток Φ связан с током I, а заряд Q — с напряжением U дифференциальными уравнениями, содержащими частные производные по t (временная дисперсия) и по z (пространственная дисперсия). При этом нелинейность будет учитываться только в одном из уравнений связи. Эти предположения отвечают большинству экспериментов. Впрочем, многие из полученных результатов годятся и в тех случаях, когда нелинейны оба оператора $\Phi\{I\}$, $Q\{U\}$.

4. Следует отметить, что для динамики нелинейных волновых процессов характерны некоторые общие закономерности и общие методы исследования, не связанные с конкретной физической природой рассматриваемых явлений. В частности, первоначальные сведения об электромагнитных волнах в средах и волноводах с нелинейными параметрами могут быть получены на основе аналогии между уравнениями

* В этом смысле цепь с сосредоточенными параметрами можно рассматривать как эквивалентную схему соответствующей распределенной линии.

электромагнитных и газодинамических волн, имеющей место в простейших случаях. Эта аналогия позволяет, с одной стороны, сразу написать решение некоторых задач теории УЭМВ, а с другой — использовать для моделирования газодинамических процессов электромагнитные, экспериментальная реализация которых нередко оказывается гораздо более простой; это относится, например, к простым волнам, взаимодействию ударных волн и т. д. Наконец, отдельные теоретические методы и результаты, впервые полученные специально для УЭМВ, уже нашли применение в задачах обычной и магнитной гидродинамики.

Однако аналогии, как правило, заканчиваются там, где нужно конкретизировать вид нелинейных зависимостей. В электродинамике последние носят иной характер и более разнообразны. В еще большей степени это относится к дисперсионным свойствам сред и линий передачи: хотя в масштабах медленного процесса дисперсия мала, ее влияние на параметры (длительность, форму) самого ударного фронта является определяющим*. Все это приводит к своеобразным процессам образования и специфическим типам структур УЭМВ. Использование различных линий передачи, в частности, линий с дискретными параметрами, открывает широкие возможности для детального исследования нелинейных волновых процессов, вряд ли осуществимого для сжимаемых сред. Это, в свою очередь, способствует развитию общей теории волн в нелинейных средах.

2. ОБРАЗОВАНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕДИСПЕРГИРУЮЩИХ ВОЛНОВОДАХ (ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ)

Начнем с рассмотрения достаточно медленных процессов, для которых связь между Φ и I можно считать квазистатической (соответствующей кривой намагничения на рис. 1а). При этом (1.3) является квазилинейной системой гиперболического типа, инвариантной по отношению к таким изменениям масштаба независимых переменных, для которых $z/t = \text{const}$. Методы исследования таких уравнений базируются на теории характеристик [1, 3, 8]. С физической точки зрения здесь можно говорить об отсутствии дисперсии: в уравнениях нет каких-либо независимых временных или пространственных масштабов; в частности, малые (линейные) возмущения распространяются вдоль характеристик со скоростью, не зависящей от их частоты.

1. Простые волны и образование разрывов [14, 17, 18, 19, 21, 44, 46]. Важными частными интегралами (1.3), позволяющими проследить за образованием ударных волн, являются римановы решения (простые волны) вида**

$$I = F\left[t \mp \frac{z}{v(I)}\right], \qquad U = \pm \int \rho(I)\, dI \tag{2.1а}$$

или

$$t \mp z/v(I) = \psi(I), \tag{2.1б}$$

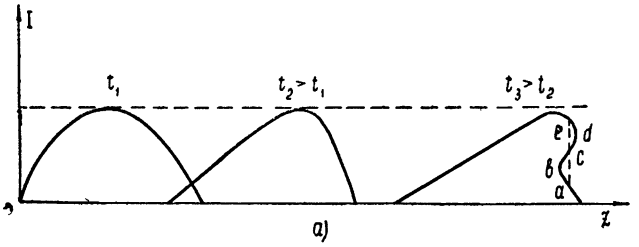
где F и ψ — произвольные функции, $v(I) = (LC)^{-1/2}$, $\rho(I) = (L/C)^{1/2}$, $L(I) = \dfrac{d\Phi}{dI}$.

---

* Дисперсия играет существенную роль и для ударных волн в плазме [22, 23, 29].

** Простые электромагнитные волны в нелинейной среде впервые были рассмотрены, по-видимому, В. Л. Германом.

Свойства волны (2.1а) хорошо изучены [1, 3]. Каждая точка ее профиля перемещается вдоль характеристики (2.1б) с постоянной скоростью $v(I)$, зависящей от величины тока в данной точке и совпадающей со скоростью малых возмущений при соответствующих значениях I. Очевидно, на тех участках, где $\frac{\partial v}{\partial z} < 0$, крутизна профиля волны растет, и в некоторый момент зависимость I от z, t становится неоднозначной (рис. 2а). Такая неоднозначность лишена физического смысла, и далее решение (2.1а) теряет силу. Так как система (1.3) не имеет при данных начальных условиях других непрерывных решений, то, в рамках предположения о квазистатической связи $\Phi(I)$, должен появиться разрыв непрерывности величин I, U — ударная волна. Момент t^* и координату z^* появления разрыва и соответствующее значение тока I^* можно определить из уравнений [3], связывающих эти величины в точке перегиба функции (2.1а) с вертикальной касательной:



$$\left(\frac{\partial t}{\partial I}\right)_{z^*, I^*} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 t}{\partial I^2}\right)_{z^*, I^*} = 0. \quad (2.2а)$$

Подставляя (2.2а) в (2.1а), получим

$$z\frac{d(v^{-1})}{dI} + \frac{d\psi}{dI} = 0, \qquad z\frac{d^2(v^{-1})}{dI^2} + \frac{d^2\psi}{dI^2} = 0. \quad (2.2б)$$

Искомые величины z^*, t^*, I^* даются решением уравнений (2.2б) совместно с (2.1а).

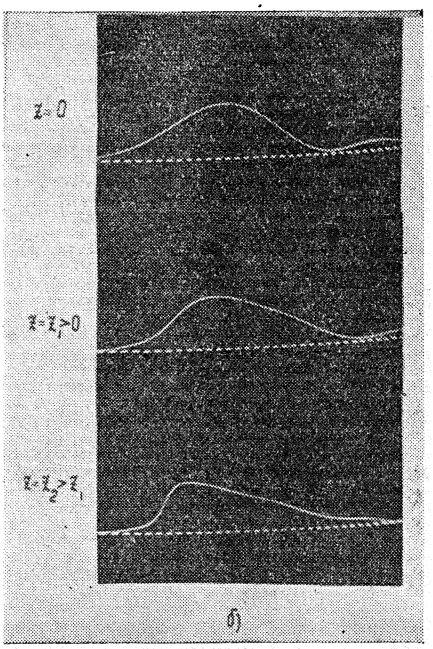


Рис. 2. а) Эволюция профиля простой волны. б) Осциллограммы напряжения $U(t)$ в различных сечениях коаксиальной линии с продольно намагниченным ферритом [53] (метки времени через 10 *нсек*).

Заметим, что, хотя решение (2.1а) относится к неограниченной линии, простая волна в виде импульса конечной длительности возможна (в течение конечного времени) и в ограниченной системе; очевидно, для возникновения разрыва длина последней должна превысить z^*.

Процесс образования разрывов в результате эволюции простых волн хорошо известен в газодинамике и магнитной гидродинамике, однако экспериментальных его наблюдений, по-видимому, не проводилось. В электродинамике соответствующий эксперимент относительно несложен. Его результат для волн в коаксиальной линии с ферритом [53]

представлен на рис. 2б (аналогичные результаты получены для линии с полупроводниковыми диодами [32]). Как и следует из (2.1а), при деформации импульса сохраняется его длительность на любом фиксированном уровне.

Специфический характер нелинейности в электродинамике порождает ряд особенностей процесса развития УЭМВ из простых волн. Картина, изображенная на рис. 2а, имеет место лишь в области монотонно убывающей зависимости $L(I)$. Если же ток в импульсе начинается от значения $I = I' \neq 0$ и меняет знак («рабочую точку» I' легко изменять, пропуская в линии постоянный ток), то в области изменения тока в волне кривая $\Phi(I)$ имеет точку перегиба, а $L(I)$ — максимум. Тогда возникают две ударные волны — в нарастающей и спадающей частях импульса [31, 53] (рис. 3).

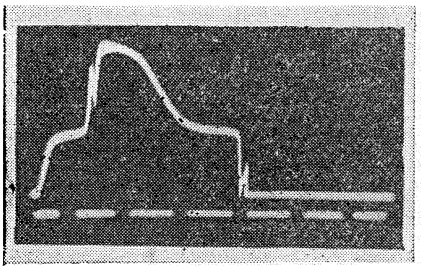


Рис. 3. Осциллограмма импульса с двумя ударными волнами [31] (метки времени через 100 *мксек*).

2. Граничные условия на разрыве и его устойчивость [14, 17, 18, 44]. Рассматривая ударный фронт как движущийся разрыв, можно получить граничные условия, связывающие токи и напряжения по обе его стороны. Интегрируя уравнения (1.3) для фиксированного момента времени по z в окрестности разрыва, найдем*

$$I_2 - I_1 = v_p(Q_2 - Q_1), \qquad U_2 - U_1 = v_p(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{2.3а}$$

Здесь v_p — скорость перемещения разрыва; индексы 1 и 2 относятся к величинам соответственно перед и за разрывом. При заданных I_1, U_1 соотношения (2.3а) определяют зависимость между I_2 и U_2, аналогичную адиабате Гюгонио в газодинамике (тогда как связь между I и U в простой волне соответствует адиабате Пуассона).

Если, как предполагалось, связь $Q = CU$ линейна, то скорость v_p может быть представлена функцией только граничных значений тока:

$$v_p^2 = \frac{I_2 - I_1}{C(\Phi_2 - \Phi_1)}. \tag{2.3б}$$

Соотношение (2.3б) допускает простую графическую интерпретацию: тангенс угла наклона прямой, соединяющей точки 1 и 2 на кривой $\Phi(I)$, равен $1/v_p^2 C$ (рис. 1). Зависимость (2.3б) хорошо согласуется с экспериментом [43, 53].

Распространение УЭМВ всегда сопровождается диссипацией энергии. Чтобы показать это, достаточно записать уравнение баланса энергии для области, содержащей разрыв, и воспользоваться граничными условиями (2.3а). В результате нетрудно найти [18, 44], что диссипируемая на разрыве мощность P равна

$$P = v_p\left[\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)(I_2 + I_1)}{2} - \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi\right]. \tag{2.4}$$

* Заметим, что соотношения (2.3а) остаются справедливыми и в тех случаях, когда протяженность «скачка» (т. е. длительность «фронта» ударной волны) становится сравнимой с поперечным размером волновода (полоскового, коаксиального и т. п.) или с постоянной времени ячейки «искусственной» линии [50].

Если зависимость $\Phi(I)$ нелинейна, то мощность P отлична от нуля и для устойчивого разрыва (см. (2.5)) положительна. Отсюда следует, что для образования УЭМВ необходимо наличие потерь «высокочастотного» типа, сказывающихся в области быстрого изменения тока и напряжения. Существенно, что P не зависит от конкретного механизма диссипации, а лишь от величины скачка.

Не все разрывы, удовлетворяющие соотношениям (2.3а), могут реально существовать. Условие устойчивости ударной волны по отношению к малым возмущениям определяется требованием равенства числа параметров, описывающих эти возмущения по обе стороны разрыва, числу связывающих их граничных условий [3]. Это условие приводит к неравенству

$$v_1 < v_p < v_2, \tag{2.5}$$

где $v_{1,2} = (CL_{1,2})^{-1/2}$ — скорости малых возмущений впереди и позади разрыва. Из (2.5) следует, например, что скачок, изменяющий поле от H_1 до H_2 на рис. 1, устойчив, обратный же скачок (от H_2 к H_1) неустойчив*.

3. Образование и развитие ударных волн в линиях с малой нелинейностью [18, 28, 47, 51]. Так как ударная волна представляет собой скачок параметров линии, от ее фронта неизбежны отражения. Поэтому после образования разрыва в бегущей волне последняя перестает быть римановой в области за разрывом (как следует из (2.5), поле перед разрывом не возмущается). Соответствующая задача сводится к интегрированию системы (1.2) совместно с условиями (2.3а). Наиболее прост случай малой нелинейности, когда связь $\Phi(I)$ имеет вид

$$\Phi = L_0 I + \tilde{\Phi}(I), \qquad L_0 = \text{const}, \qquad |\tilde{\Phi}| \ll L_0 I. \tag{2.6}$$

В этом случае скачок параметров линии мал, и в первом приближении решение (2.1а) остается в силе по обе стороны разрыва. Тогда, «сшивая» (2.1б) и (2.3а) вдоль траектории разрыва, можно найти зависимость величины скачка от координаты [1, 3]. Если, для определенности, $\tilde{\Phi} = -\varkappa L I^2$ (квадратичная нелинейность) и ток перед скачком равен нулю, то

$$z_p = z_0 + \frac{2v_0}{\varkappa I_p^2} \int_{I_0}^{I_p} I \frac{d\psi}{dI}\, dI, \tag{2.7}$$

где $v_0 = (LC)^{-1/2}$, I_p — величина скачка, z_0 — его начальное положение, $I_0 = I_p(z_0)$. Подставляя (2.7) в выражение для v_p, можно определить траекторию разрыва $z_p(t)$.

Если волна имеет вид импульса конечной длины, то интеграл в (2.7) стремится при большом z к некоторой конечной величине, зависящей от начальной формы импульса. Отсюда следует, что на больших расстояниях I_p убывает пропорционально $z^{-1/2}$. Нетрудно определить также изменение длительности τ импульса с расстоянием. Так как фронт распространяется со скоростью v_p, а в конце спада $v = v_0$, то

$$\tau = \tau_0 + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_p}\right) dz = \tau_0 - \int_{z_0}^{z} \frac{\varkappa I_p}{2v_0}\, dz. \tag{2.8}$$

* Особого рассмотрения требует случай, когда линеаризация около одного из постоянных значений $I_{1,2}$ невозможна.

Здесь I_p определяется формулой (2.7). На больших расстояниях $\tau \sim z^{1/2}$, т. е. импульс, затухая, растягивается.

Полученные выражения имеют наглядный геометрический смысл. Если наряду с истинным (разрывным) решением построить неоднозначную функцию, продолжающую простую волну на интервалах времени после возникновения разрыва, то, как нетрудно показать [3], положение разрыва определяется условием сохранения площади, ограниченной кривой $I(z)$ (равенством площадей abc и cde на рис. 2а).

Более общий метод исследования бегущих волн малой амплитуды связан с рассмотрением решений, медленно изменяющихся вдоль характеристик [28, 51]. Эти решения (квазипростые волны) локально близки к (2.1а) и удовлетворяют уравнениям вида

$$\frac{\partial I}{\partial t} + v\frac{\partial I}{\partial z} = \varphi, \quad U = \int_0^I \rho dI + \zeta, \tag{2.9}$$

где φ, ζ — малые функции (равные нулю для волны (2.1а)). Подстановка (2.9) в (1.3) сводит задачу к отысканию функции φ и последующему интегрированию уравнения первого порядка (2.9). Таким способом можно учесть ряд дополнительных факторов, влияющих на деформацию волны. Так, для линии с достаточно плавной неоднородностью параметров (v, ρ явно зависят от координаты) получаем, что $\varphi = \frac{2}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} I$, и при малой квадратичной нелинейности интеграл (2.9) имеет вид

$$t - \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{v_0} - \frac{I}{2}\sqrt{\rho_0}\int \frac{\varkappa \rho_0^{-1/2}}{v_0}\, dz = \psi\left(I\sqrt{\rho_0}\right), \tag{2.10}$$

где ρ_0, v_0 — значения $\rho(I, z)$, $v(I, z)$ в линейном приближении. Для однородной линии (2.10) переходит в (2.1б), а для линейной, но неоднородной эквивалентно одномерному приближению геометрической оптики: $I = \rho_0^{-1/2} F\left(t - \int \frac{dz}{v_0}\right)$. Следовательно, формулу (2.10) можно рассматривать как одно из обобщений этого приближения на нелинейные задачи. Решение (2.10) можно обобщить и на нестационарный случай, когда параметры явно зависят от t [51]; аналогичные решения получены и для газодинамики [47].

Как и выше, из (2.10) можно получить условие образования разрыва в неоднородной нелинейной линии и проследить за его развитием в слабой волне произвольной формы. При этом оказывается, что при некоторых законах изменения ρ_0, v_0 (например, если ρ_0 экспоненциально растет) разрыв может совсем не образоваться даже в области с $\frac{\partial v}{\partial z} < 0$; для его возникновения необходимо, чтобы амплитуда волны в начальный момент превышала некоторое значение. Кроме того, длительность импульса с разрывом на фронте в неоднородной линии не всегда неограниченно возрастает, а может стремиться к конечному значению. Отметим еще практически интересный случай, когда известно решение для бегущей волны в линии с произвольной явной зависимостью параметров от координаты и с немалой нелинейностью. Это случай «согласования» [28, 51], когда импеданс $\rho(I) = [L(I, z)/C(z)]^{1/2}$ не зависит явно от z. При этом исходная система (1.2) имеет точное решение в виде квазипростой волны, распространяющейся без отражений. Дру-

гая область приложения метода квазипростых волн относится к линиям с диссипацией, рассматриваемым ниже.

4. Распространение сильных разрывов [35, 37, 44, 51]. Если в линии развивается сильный разрыв, то задача о его распространении в волне произвольной формы в общем случае чрезвычайно сложна. Однако в электродинамике эта задача упрощается благодаря упомянутому выше свойству насыщения нелинейности, позволяющему считать, что за фронтом сильной УЭМВ свойства линии передачи линейны. Зависимость $\Phi(I)$ может быть тогда аппроксимирована кусочно-линейной функцией (ср. рис. 1б).

Представляя ток за разрывом в виде суперпозиции падающей (I^+) и отраженной (I^-) волн и пользуясь граничными условиями, нетрудно выразить все величины на разрыве через I^+. В частности, уравнение траектории разрыва $z_р(t)$ имеет вид [37]

$$z_р + \frac{2}{\Phi_s - \Phi_1} \int_{z_0}^{z_р - v_2 t} I^+(\xi)\, d\xi = 0, \qquad (2.11)$$

где v_2 — скорость возмущений за разрывом, Φ_1 — значение Φ перед ним, Φ_s — поток насыщения при $I = 0$. Функция $I^+(z - v_2 t)$ вблизи разрыва непосредственно задается начальными и граничными условиями. С помощью (2.11) можно тогда полностью проследить за развитием ударной волны. На рис. 4 показана картина распространения импульса,

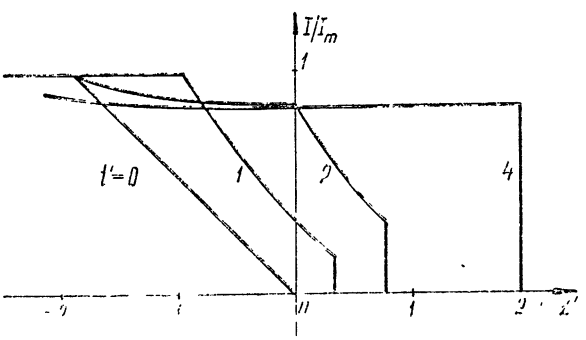


Рис. 4. Изменение формы импульса в линии с разрывной зависимостью $\Phi(I)$.

имеющего в начальный момент линейный фронт длины l $\left(I = -I_m \frac{z}{l},\right.$ $\left. -l \leqslant z \leqslant l\right)$ и плоскую вершину ($I = I_m$, $z < -l$) [51]; при этом одинаковый результат получается как для волны в однородной нелинейной линии, так и для импульса, проходящего границу линейной ($z<0$) и нелинейной ($z>0$) линий, если их параметры L_0, C при $I \neq 0$ совпадают (тогда отражения на границе линий ($z = 0$) отсутствуют). Здесь используются безразмерные переменные $z' = 2L_0 I_m z/l\,(\Phi_s - \Phi_1)$, $t' = 2L_0 I_m v_2 t/l\,(\Phi_s - \Phi_1)$. Максимальная амплитуда ударной волны $I_{2\,max} = I_m/[1 + (\Phi_s - \Phi_1)/4L_0 I_m]$; расстояние z_{opt}, на котором достигается это значение, равно $lL_0 I_m/(\Phi_s - \Phi_1)$.

Аналогичный расчет можно провести и для зависимости $\Phi(I)$, аппроксимируемой большим числом линейных участков [37, 44]. Впрочем, в импульсе с фронтом конечной длительности ток перед разрывом мо-

жет быть отличен от нуля лишь конечное время, после чего распространение будет происходить так же, как в только что рассмотренном случае.

5. Взаимодействие ударных волн [17, 36, 44, 65]. Если в начальный момент ($t=t_0$) в линии распространяются две ударные волны, то после соприкосновения их фронтов (в точке $z=z_0$) картина распространения качественно изменяется из-за нелинейного взаимодействия. Так как в задаче нет параметров, зависящих от z, t в отдельности (а лишь от z/t), то в результате взаимодействия могут образоваться только волны, ток которых зависит от отношения z/t (автомодельные) [1, 3]. В случае зависимости $\Phi(I)$, изображенной на рис. 1а, возможны три типа таких волн [65]: стационарный разрыв, простая волна с расходящимися из точки z_0 характеристиками и комбинированная волна, состоящая из простой и следующей за ней ударной, граничащих между собой в точке, где $v=v_p$ (последний тип специфичен для электромагнитных волн). При этом, как нетрудно показать, в каждую сторону от точки взаимодействия распространяется только одна из указанных волн. Если тип каждой из них известен, то задача состоит в определении значений I, U в области между расходящимися волнами, что, в свою очередь, требует решения уравнений, связывающих величины в разных областях (для ударных волн это уравнение типа (2.3а)).

Общая задача о взаимодействии ударных волн, как и в газодинамике [1], может быть решена графоаналитическим методом [65]: на плоскости переменных I, U находятся точки пересечения кривых (адиабат), связывающих I и U в автомодельных волнах (для ударной волны это (2.3а)) и проходящих через точки I, II, соответствующие значениям I, U при $z\to\pm\infty$ (через каждую точку проходят две кривых, отвечаю-

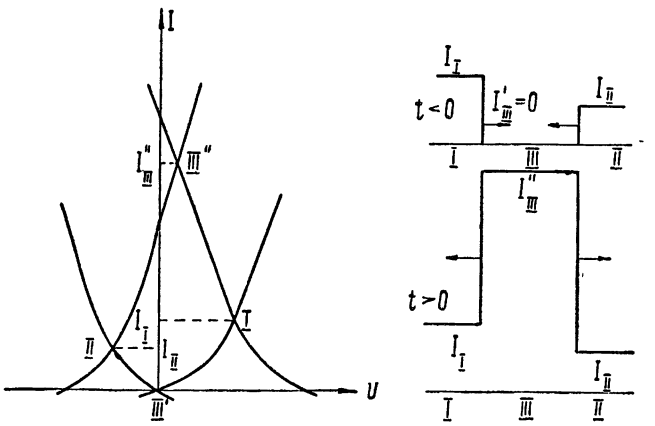


Рис. 5а. Графический анализ процесса „столкновения" ударных волн.

щих двум направлениям распространения). На рис. 5а приведено такое построение для встречного взаимодействия ударных волн, когда в результате возникают только ударные волны. Точки пересечения адиабат определяют возможные значения I, U в области III между разрывами. Точка III′ дает состояние в указанной области до взаимодействия, а точка III″ — искомый результат взаимодействия.

Все сказанное относится и к падению ударной волны на границу раздела двух различных сред или линий (эта граница является точкой

взаимодействия), с учетом того обстоятельства, что функции $\Phi(I)$ по обе стороны границы различны.

Аналитическое решение подобных задач получено лишь в немногих случаях: для линий с кусочно-линейной характеристикой намагничения [44], а также для произвольной линии в частном случае «столкновения» двух одинаковых разрывов или, что то же самое, отражения ударной волны от замкнутого конца линии передачи [36]. Заметим, что в результате отражения ток I на конце линии может сильно возрастать: его отношение к току падающего скачка может быть существенно больше значения 2, максимального для линейного случая. Эта возможность была проверена экспериментально (см. рис. 5б, где первый скачок отвечает падающей, а второй — отраженной УЭМВ на некотором расстоянии от конца [36]).

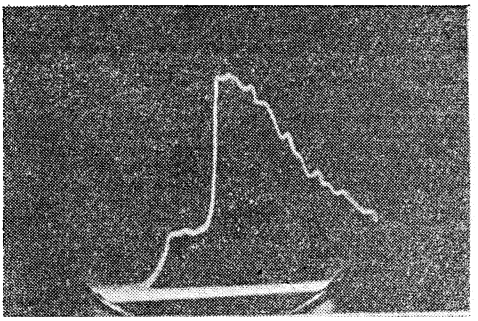


Рис. 5б. Осциллограмма тока на конечном расстоянии от короткозамкнутого конца линии передачи при нелинейной зависимости $\Phi(I)$ [36].

6. Взаимодействие малых сигналов с ударной и римановой волнами [51, 17, 47, 51]. Относительно прост случай, когда амплитуда одной из участвующих во взаимодействии волн достаточно мала. Тогда исходные уравнения могут быть линеаризованы, и задача сводится к отысканию поведения малого возмущения сигнала в поле заданной сильной волны, изменяющей параметры линии. Пусть, например, сигнал произвольной формы распространяется навстречу УЭМВ [15]. В силу (2.5) отраженная волна отсутствует. Связь между токами в падающей I_1' и прошедшей I_2' волнах находится с помощью метода возмущений из соотношений (1.3) и имеет вид

$$I_2'(z_p) = p^2 I_1'(z_p), \qquad p = \frac{1 + v_p/v_1}{1 + v_p/v_2} \tag{2.12}$$

(z_p — координата ударной волны). Если падающая волна монохроматическая, то при переходе через разрыв ее частота возрастает пропорционально p (смещение, аналогичное допплеровскому), а амплитуда тока — пропорционально p^2. Изменение энергии волны W обусловлено конкуренцией двух факторов: диссипации на ударном фронте и работы поля УЭМВ, изменяющего параметры среды; в результате возможно как убывание, так и возрастание W.

Задачу о взаимодействии малого сигнала с римановой волной (2.1) также удается решить в общем виде [47, 51]; метод решения связан с заменой независимых переменных $z' = z_1$, $\xi = t - z/v(I)$, позволяющей свести задачу к последовательному интегрированию уравнений первого порядка типа (2.9). Одним из следствий решения является вывод о нарастании амплитуды сигнала на участках с возрастающей крутизной. Заметим, что результаты взаимодействия сигнала с ударной и простой волнами при одинаковой величине перепада $(I_2 - I_1)$ различны. Следовательно, после прохождения конечного импульса тока, содержащего ударный фронт, частота и амплитуда сигнала не возвращаются к исходному значению, и в результате взаимодействия с последовательностью импульсов эти изменения могут накапливаться.

7. О краевых задачах для нелинейных недиспергирующих линий [75, 77]. Выше рассматривались, главным образом, случаи, когда линия либо бесконечна (полубесконечна), либо настолько длинна, что на интересующем нас интервале времени возмущение не затрагивает ее границ. В задачах о нахождении непрерывных решений системы (1.2) существенную роль играют инварианты Римана $J_\pm$-функции, сохраняющиеся в простых волнах (согласно (2.1а), для системы (1.2) $J_\pm = U \mp \int \rho dI$). Использование инвариантов Римана позволяет определить число величин и область их задания, необходимые для корректной постановки краевой задачи [3]. Решение последней может быть сведено к интегрированию линейного уравнения с переменными коэффициентами [3, 75]. Для этого нужно «обратить» уравнения (1.3), умножив их на якобиан $\frac{\partial(z,\ t)}{\partial(I,\ U)}$. Рассматривая теперь I, U как независимые переменные и вводя функцию $\chi\ (I,\ U)$, согласно формулам $t = \frac{\partial\chi}{\partial I}$, $Cz = -\frac{\partial\chi}{\partial U}$, получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial U^2} - \frac{1}{\rho^2(I)}\frac{\partial^2\chi}{\partial I^2} = 0. \tag{2.13}$$

В другом варианте метода независимыми считаются переменные Римана $J_\pm$, тогда (1.2) приводится к каноническому виду [75]

$$\frac{\partial^2 t}{\partial J_+ \partial J_-} - \frac{1}{8L\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial I}\left(\frac{\partial t}{\partial J_+} + \frac{\partial t}{\partial J_-}\right) = 0 \tag{2.14}$$

(или аналогичному для z). Для некоторых аппроксимаций функции $L(I)$ уравнения (2.13), (2.14) могут быть проинтегрированы при различных краевых и начальных условиях. В частности, для (2.14) решается задача Коши [75, 77].

Уравнения (2.13) или (2.14) содержат все интегралы исходной системы, кроме простых волн. Действительно, согласно (2.1а), в простой волне I и U связаны однозначными соотношениями; при этом $\frac{\partial(z,\ t)}{\partial(I,\ U)} = 0$, и указанное здесь преобразование невозможно. Следовательно, простые волны представляют класс особых интегралов системы, разделяющих области аналитически различных решений. В частности, в отсутствие разрывов только простая волна может граничить с областью постоянных значений I. U [3].

3. ВЛИЯНИЕ ПОТЕРЬ НА НЕЛИНЕЙНУЮ ДЕФОРМАЦИЮ ВОЛН

Как было показано выше, на фронте ударной волны всегда диссипируется энергия. Поэтому учет потерь, вообще говоря, принципиален при исследовании ударных волн и во всяком случае обязателен для отказа от «разрывной» идеализации и изучения структуры ударного фронта.

Учет диссипации приводит либо к добавлению в системе (1.2) новых членов, либо к замене квазистатической связи $\Phi(I)$ более сложной дифференциальной или интегродифференциальной зависимостью. При этом в уравнениях (1.2) появляются независимые параметры с размерностью времени, и характер волнового процесса зависит от соотношения между его характерным временным масштабом и величиной указанных параметров. Иными словами, потери с необходимостью вносят

и некоторую дисперсию. С этой точки зрения можно выделить различные типы диссипативных процессов; особенности их влияния на нелинейную деформацию волны поясняются ниже.

1. Потери в области низких частот [24, 28]. Рассмотрим сначала случай, когда потери сказываются, главным образом, при небольших скоростях изменения тока и напряжения. Такие потери несущественны в области фронта УЭМВ (допускают существование разрывов), но влияют на процесс ее формирования. Примером диссипативных параметров этого типа являются сопротивления проводников линии и проводимость утечки заполняющей среды, а также объемная проводимость в неограниченной среде. Аналогичными свойствами обладает искусственная линия в виде цепи звеньев с постоянными элементами R, G, включенными так, как показано на рис. 6а.

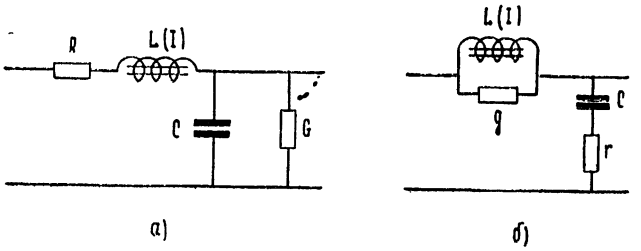


Рис. 6. Простейшие схемы линий:
а) с „низкочастотными" потерями, б) с „высокочастотными" потерями.

При учете низкочастотных потерь к первому и второму уравнениям (1.3) должны быть добавлены соответственно члены GU и RI; связь $\Phi(I)$ по-прежнему считаем квазистатической. Простые волны (2.1а) здесь невозможны, но, если нелинейность и потери достаточно малы, то для решения данной задачи можно воспользоваться методом квазипростых волн (ср. п. 3 раздела 2), т. е. искать решение, удовлетворяющее уравнению первого порядка (1.10). В данном случае последнее (при малой квадратичной нелинейности) имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial z} + v_0^{-1}(1 - \varkappa I)\frac{\partial I}{\partial z} = -Is, \quad s = \frac{1}{2}\left(G\rho_0 + \frac{R}{\rho_0}\right). \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) имеет общий интеграл вида

$$I = \exp(-sz)\,F\left\{t - \frac{z}{v_0} - \frac{\varkappa I}{sv_0}\left[\exp(sz) - 1\right]\right\}. \tag{3.2}$$

Задавая ток при $z = 0$ (или при $t = 0$), можно проследить за возникновением и дальнейшим развитием разрыва. Если, например, $I(0, t) = I_m \sin(\omega t)$, то разрыв возникает при $I^* = 0$ в точке

$$z^* = \frac{1}{s}\ln\left(1 - \frac{s\rho_0}{\omega\varkappa I_m}\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) определяет конечное значение $z^* > 0$ только при $s\rho_0 < \omega\varkappa I_m$, т. е. для волны достаточно большой амплитуды. В противном случае ударная волна образоваться не может: затухание препятствует существенной нелинейной деформации ее профиля. На достаточно большом расстоянии общее затухание приведет к тому, что нелинейность перестанет играть заметную роль. Результирующая форма волны дале-

ка от исходной, в ней подчеркнуты высшие гармоники, затухающие слабее.

При очень высоких скоростях изменения тока следует учитывать, что R и G изменяются; так, R растет вследствие скин-эффекта. Можно, однако, показать, что потери остаются при этом «низкочастотными» в указанном смысле, т. е. не сказываются в области фронта УЭМВ и допускают существование разрывов [50].

2. Потери в области высоких частот [24, 51]. Иначе проявляется влияние потерь, сказывающихся в области быстрых изменений величин. Достаточно медленные процессы происходят в этом случае так же, как в недиссипативной линии; возможны, в частности, простые волны. Однако на участках с увеличивающейся скоростью изменения тока диссипация растет, ограничивая минимальную длительность этих участков. В результате вместо скачка образуется ударный фронт конечной длительности. Именно таким образом влияет вязкость среды в газодинамике. В электромагнитном случае высокочастотные потери связаны, например, с релаксацией намагниченности в феррите или с последовательным (по отношению к p—n-переходу) сопротивлением полупроводникового диода. К этому же типу относится проводимость утечки между витками катушки индуктивности.

Рассмотрим сначала относительно простой случай постоянных (линейных) потерь, описываемых элементами r и g на эквивалентной схеме (рис. 6б).

В математическом отношении учет высокочастотной диссипации приводит к повышению порядка исходных уравнений: в уравнениях (1.3) появляются соответственно члены $rC\dfrac{\partial^2 U}{\partial z \partial t}$ и $g\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t}$.

Метод квазипростых волн в случае достаточно малых потерь и малой квадратичной нелинейности здесь дает

$$\frac{\partial I}{\partial z} + v_0^{-1}(1 - \varkappa I)\frac{\partial I}{\partial t} = -\delta\frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t}, \qquad \delta = \frac{1}{2}(rC + gL_0). \tag{3.4}$$

Это уравнение параболического типа, показывающее, что учет r и g приводит к процессу диффузионного типа. После замены

$$\tau = t - \frac{z}{v_0}, \quad z' = z, \quad I = \frac{2\delta L_0}{\varkappa U}\frac{\partial U}{\partial \tau}$$

(3.4) сводится к линейному уравнению теплопроводности, решение которого может быть представлено интегралом Фурье. Так, для граничного условия $I(0, t) = I_m \sin(\omega t)$ имеем [24]

$$U = \frac{\sqrt{v_0}}{2\sqrt{\pi\delta z}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{\varkappa I_m}{2\omega\delta}\cos(\omega y) - \frac{(\tau - y)^2}{2\delta z}v_0\right] dy. \tag{3.5}$$

Качественное рассмотрение, подтверждающееся решениями типа (3.5), показывает, что при достаточно большой длительности начальной волны процесс распространения можно разбить на три характерных этапа.

а) Профиль простой волны медленно искажается; скорость изменения тока и напряжения мала, потери несущественны.

б) В простой волне появляется участок с резким изменением тока, где потерями пренебречь нельзя (диссипативный член в (3.4) становится одного порядка с нелинейным). Вместо скачка образуется перепад конечной ширины, который и представляет собой ударную волну. Структура ее может быть изучена в «стационарном» приближении. Именно, полагая ток зависящим от $\xi = t - z/v_p$, $v_p = \text{const}$, получим [51]

$$\frac{I - I_2}{I - I_1} = \exp\left[-\frac{\varkappa (I_2 - I_1)}{2\delta}\xi\right], \tag{3.6}$$

где $I_{1,2}$ — значения тока при $\xi \to \mp\infty$. Величины $I_{1,2}$ связаны с v_p граничными условиями (2.4). Последнее обстоятельство позволяет рассматривать распространение в простой волне ударного перепада, считая последний скачком, и непосредственно использовать в этом случае результаты п. 3 раздела 1, так как соответствующее решение «сшивается» со стационарным решением, описывающим изменение тока внутри перепада.

в) На очень больших расстояниях общие потери энергии сравнимы с полной энергией волны, и тогда говорить об ударной волне как о резком перепаде тока не имеет смысла. Далее амплитуда волны уменьшается настолько, что нелинейность вообще перестает играть заметную роль. Если волна при $z = 0$ была синусоидальной, то на этом этапе волна снова синусоидальна с той же частотой (высшие гармоники затухают сильнее); импульс же неограниченно расплывается.

3. Диссипативный механизм образования УЭМВ [37, 44]. В рассмотренных выше простейших случаях можно было отделить влияние реактивной нелинейности, приводящей к образованию скачков, от влияния линейных потерь, так или иначе препятствующих этому процессу. Однако для электродинамики типичны и более сложные случаи, когда нелинейны и диссипативные, и реактивные параметры среды. Тогда разделить их влияние на деформацию волны трудно. В частности, сама возможность образования участков с большой крутизной может быть обусловлена нелинейностью потерь. Именно так обстоит дело при некогерентном перемагничивании феррита, описываемом уравнением (1.2). Исходная система состоит в этом случае из уравнений (1.2) и (1.3) (порядок ее снова выше, чем в квазистатическом случае), причем можно положить, что $\Phi = L_0(I + bM_h)$, где $b = \text{const}$. Вводя функцию $J = \int_{-\infty}^{t} I dt$ и пользуясь методом квазипростых волн, можно получить уравнения первого порядка для функции J [37]

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v_0 \frac{\partial J}{\partial z} = -\Gamma \frac{\exp(\delta J) - 1}{a \exp(\delta J) + 1}, \tag{3.7}$$

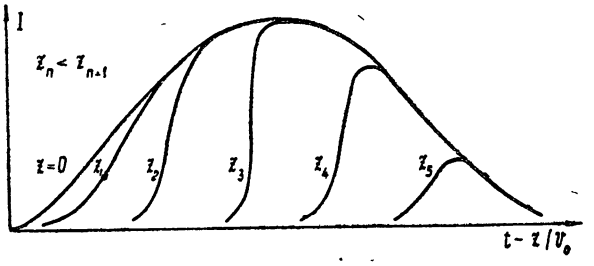
где δ, a, Γ — постоянные коэффициенты, зависящие от конфигурации линии, начального значения намагниченности и коэффициента потерь в феррите. Уравнение (2.7) справедливо при малой нелинейности, однако это требование сводится здесь не к малости амплитуды волны, а к малости потерь на перемагничивание по сравнению с полной энергией волны; импульс тока в линии должен быть достаточно мощным и протяженным для быстрого насыщения феррита.

Задавая граничные условия $J(0, t) = \tilde{J}(t)$, найдем интеграл (3.7) в неявной форме:

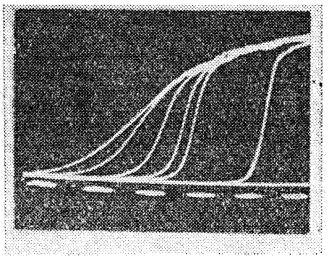
$$\exp\left(\frac{a\delta J}{a+1}\right)-\exp\left(-\frac{\delta J}{a+1}\right)=\left[\exp\left(\frac{a\delta\tilde{J}(\tau)}{a+1}\right)-\exp\left(-\frac{\delta\tilde{J}(\tau)}{a+1}\right)\right]\times \times\exp\left[-\frac{\delta z}{v_0(a+1)}\right], \tag{3.8а}$$

$$I(z,t)=\tilde{I}(\tau)\left[\frac{a\exp(\delta\tilde{J}(\tau))-1}{\exp(\delta\tilde{J}(\tau))-1}\right]\left[\frac{\exp(\delta J)-1}{a\exp(\delta J)-1}\right]. \tag{3.8б}$$

Здесь $\tau=t-z/v_0$, $\tilde{J}(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau} I(\tau')\,d\tau'$ — функция, задаваемая условием на входе линии. На рис. 7а приведена качественная картина деформации импульса тока, соответствующая (3.8а), (3.8б). На переднем участке импульса происходит перемагничивание и, следовательно, диссипируется энергия; остальная часть импульса распространяется без искажения. Длительность начального участка $\tau_р$ уменьшается по мере его продвижения в область больших I. При малых $\tau_р$ его можно рассматривать как ударную волну, которая, как можно показать, описывается граничными условиями (2.3а), (2.4) (здесь всегда $I_1=0$). Механизм образования такого перепада, очевидно, существенно отличается от обычной эволюции простой волны и с самого начала связан с диссипацией (в частности, длительность импульса на фиксированном уровне здесь сокращается). Как и в п. 2, структура УЭМВ может быть найдена в стационарном приближении, когда $I=I(t-z/v_р)$; этот вопрос рассмотрен в п. 3 раздела 4. Поскольку за фронтом ударной волны феррит насыщен, то для описания ее распространения в «разрывном» приближении применимы результаты п. 4 раздела 1, полученные для линий с кусочно-линейной характеристикой намагничивания.



а)



б)

Рис. 7. а) Изменение профиля волны при диссипативном механизме образования УЭМВ. б) Осциллограммы напряжения на выходе коаксиальной линии с ненасыщенным ферритом при различных длинах участка с нелинейными параметрами [53]. Метки времени через 50 *нсек*.

Следует отметить, что в большинстве проводившихся экспериментов [42, 53] деформация импульса в линиях с ферритом соответствовала описанному здесь процессу. На рис. 7б приведены совмещенные осциллограммы тока импульса в разных точках коаксиальной линии с ферритом [53]. Соответствие рис. 7а и 7б очевидно*.

4. СТРУКТУРА СТАЦИОНАРНЫХ УЭМВ

Ударные волны с бесконечно малой длительностью фронта, описываемые разрывными решениями телеграфных уравнений (1.3), могут образоваться лишь в том случае, если линия передачи обладает исчезающе малой дисперсией в диапазоне очень высоких (точнее, сколь угодно высоких) частот. Отсутствию дисперсии соответствует, в частности, принятое в разделе 2 при изучении вопроса о возникновении разрывов в профиле простой волны допущение, что операторы (1.4), связывающие в уравнениях (1.3) погонный поток Φ и погонный заряд Q с током I и напряжением U, могут быть заменены «квазистатическими» уравнениями связи, записывающимися в виде однозначных функций $\Phi = \Phi(I)$, $Q = Q(U)$.

Однако, благодаря инерционности процессов поляризации и намагничения (например, из-за возникающей при больших скоростях перемагничивания затухающей прецессии вектора намагниченности (1.1)), а в ряде случаев и благодаря конструктивным особенностям линии передачи (например, проявляющейся при высоких частотах дискретности параметров многозвенной «искусственной» линии), всегда имеется некоторая предельная частота (длина волны), начиная с которой дисперсия становится существенной. Это означает, что при быстрых изменениях напряжения и тока в операторах (1.4) существенную роль играют члены типа производных по продольной координате z и времени t. Телеграфные уравнения в этом приближении уже не имеют разрывных решений, а полная длительность и особенности структуры УЭМВ определяются конкретным видом операторов (1.4), т. е., в конечном счете, нелинейностью и дисперсией (в частности, дисперсией, связанной с диссипативными процессами) линии передачи.

Учет дисперсии в области высоких частот увеличивает, вообще говоря, порядок уравнений, описывающих распространение волны, и чрезвычайно усложняет их общее исследование. Лишь при специальных предположениях о характере дисперсии и нелинейности (см., например, разделы 2, 3) удается проследить за деформацией бегущей волны и образованием в ее профиле относительно резких перепадов, соответствующих ударным волнам. Однако и в общем случае решение задачи значительно облегчается тем, что, по самому определению ударной волны, ее длительность мала по сравнению с масштабами, характеризующими изменение напряжения и тока вне резкого перепада. Это позволяет рассматривать процесс образования и развития ударной волны в «разрывном» приближении, пренебрегая высокочастотной дисперсией и используя граничные условия (2.3а), исключающие область быстрого изменения напряжения и тока, а затем исследовать структуру этой области, т. е. структуру самой ударной волны, считая процесс стационарным (такой метод был уже использован, в частности, в предыдущем разделе при решении задачи о влиянии высокочастотных потерь). В стационарной волне, скорость которой v_p постоянна и определяется граничными условиями (2.3а), все величины зависят лишь от одной переменной $\xi = t - z/v_p$;

* Диссипативный механизм образования УЭМВ, аналогичный рассмотренному, характерен и для линий с сегнетоэлектрическими конденсаторами [61].

это не только облегчает исследование решений телеграфных уравнений при сравнительно общих предположениях, но и позволяет судить о структуре и длительности ударных волн даже в тех случаях, когда задача вообще не может быть сведена к уравнениям типа (1.3), (1.4).

1. Общие свойства стационарных УЭМВ [39, 69]. а) Если нелинейные операторы $\Phi\{I, U\}$ и $Q\{U, I\}$ (1.4) эквивалентны системе дифференциальных уравнений с частными производными по времени t (временная дисперсия) и по продольной координате z (пространственная дисперсия), то стационарные волны описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из ((1.3), (1.4) заменой $\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial z} \to -\frac{1}{v_p}\frac{\partial}{\partial \xi}$:

$$U - U_1 = v_p(\Phi - \Phi_1), \qquad I - I_1 = v_p(Q - Q_1),$$
$$\Phi = \overline{\Phi}\{I, U\}, \qquad Q = \overline{Q}\{U, I\}, \tag{4.1}$$

где $\overline{\Phi}$ и $\overline{Q}$ — дифференциальные операторы, получающиеся из (1.4) в результате указанной выше замены, а I_1 и U_1 — значения тока и напряжения при некотором значении координаты $\xi = \xi_1$.

Для ударной волны естественно принять I_1 и U_1 равными значению соответствующих величин перед фронтом (или позади него), т. е. при $\varepsilon_1 \to -\infty$ (или $\xi_1 \to +\infty$). Нетрудно видеть, что состояниям перед ударной волной и позади нее соответствуют особые точки (положения равновесия) системы (4.1). Структура волны описывается фазовой траекторией, соединяющей эти точки, а скорость v_p находится как собственное значение соответствующей краевой задачи*. Таким образом, структура УЭМВ определяется однозначно, если в фазовом пространстве системы (4.1) существует единственная (особая) траектория, соединяющая положения равновесия, соответствующие «подножию» и «вершине» ударной волны.

Вопрос о существовании такой особой траектории (в том частном случае, когда система (4.1) второго порядка, такой траекторией является сепаратриса, т. е. одна из особых точек должна быть седлом) удается решить в общем виде [39], если операторы $\overline{\Phi}\{I, U\}$ и $\overline{Q}\{U, I\}$ для предельно медленных процессов $\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \to 0\right)$ переходят в однозначные функции $\Phi(I)$, $Q(U)$ (однозначные квазистатические уравнения связи). Интересно отметить, что необходимое условие существования и единственности структуры УЭМВ в точности совпадает с условием устойчивости (2.5) разрывных решений («скачков») относительно малых возмущений, т. е. полностью определяется функциями $\Phi(I)$, $Q(U)$ и не зависит от характера дисперсии; при учете дисперсии стационарных ударных волн, соответствующих неустойчивым разрывам, просто не существует.

Для линий передачи с временной дисперсией, а также в тех случаях, когда стационарные УЭМВ в линии передачи с временной и пространственной дисперсией описываются системой (4.1) второго порядка, условия (2.5) оказываются достаточными, если положения равновесия, соответствующие «подножию» и «вершине» ударной волны, являются «ближайшими» на ударной адиабате, т. е. не разделены другими положениями равновесия [69]. Этот вывод справедлив, по-видимо-

* Естественно, что такое определение v_p совпадает с определением, даваемым граничными условиями (2.3а).

му, и в общем случае, поскольку требование «близости» особых точек, отвечающих начальным и конечным значениям напряжения и тока в ударной волне, соответствует условию устойчивости разрывного решения (в приближении, не учитывающем дисперсию) относительно возмущений конечной амплитуды. Разрыв, в котором начальное и конечное состояния не являются «ближайшими» в указанном выше смысле, расщепляется на соответствующее число скачков, удовлетворяющих этому требованию (рис. 8).

б) Хотя условия существования стационарной ударной волны, как уже было отмечено выше, не зависят от характера дисперсии в области

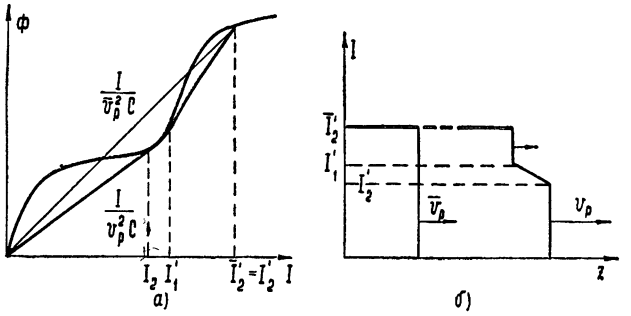


Рис. 8. Распад разрыва, начальная и конечная точки которого не являются „ближайшими" на кривой $\Phi(I)$.

высоких частот (малых длин волн), ее общая длительность и структура определяются операторами $\bar{\Phi}$ и $\bar{Q}$, конкретный вид которых непосредственно связан с дисперсионными свойствами линии передачи. Полное качественное, а тем более количественное исследование структуры УЭМВ возможно лишь в простейших случаях, когда система (4.1) сводится к одному или двум дифференциальным уравнениям первого порядка; применение численных методов для исследования стационарных УЭМВ также связано с определенными трудностями, так как они описываются особыми траекториями этих уравнений.

Однако некоторые соображения о структуре «подножия» и «вершины» ударной волны можно высказать, рассматривая уравнения (4.1), линеаризованные в окрестности соответствующих особых точек. Характеристические уравнения для комплексных частот ω, определяющих фазовые траектории вблизи этих точек, могут быть записаны в виде условия равенства скорости распространения ударной волны фазовым скоростям $v_{1,2}^{(\Phi)}$ волн малой амплитуды (с комплексными волновыми числами $\beta_{1,2}$ и комплексными частотами ω) перед фронтом УЭМВ (индекс 1) и позади него (индекс 2):

$$v_{1,2}^{(\Phi)} \equiv \omega/\beta_{1,2}(\omega) = v_p . \qquad (4.2a)$$

Отметим, что, поскольку фазовая траектория, определяющая стационарную ударную волну, должна выходить из точки 1 и приходить в точку 2, она может определяться лишь теми корнями уравнения (4.2a), для которых

$$\operatorname{Im}\omega_1^{(k)} > 0, \qquad \operatorname{Im}\omega_2^{(k)} < 0. \qquad (4.3)$$

Иными словами, волны, возбуждающиеся на фронте УЭМВ, должны затухать при удалении от него.

Условиям (4.3) могут удовлетворять несколько корней характеристических уравнений (4.2а), т. е. может существовать несколько различных комплексных частот, при которых фазовая скорость волн малой амплитуды у «подножия» и «вершины» ударной волны равна v_p, а амплитуда убывает при удалении от фронта УЭМВ. К сожалению, не представляется возможным установить общий критерий, позволяющий по структуре фазового пространства в окрестностях особых точек определить начало и конец той единственной траектории, которая описывает стационарную ударную волну*. Можно лишь утверждать (на основании критерия устойчивости быстрого перепада напряжения и тока в линии передачи с дисперсией [39]), что общая длительность фронта УЭМВ τ не должна быть меньше Ω^{-1}, где Ω — наименьший по модулю корень (4.2а), удовлетворяющий условиям (4.3)**. Расчет в тех случаях, когда он возможен [30, 69] (см. также п. 3 настоящего раздела), и эксперимент [53] показывают, что обычно $\tau \sim (3 \div 4)\,\Omega^{-1}$.

Существует, однако, относительно широкий класс систем, для которых уравнения (4.2а) имеют два «удаленных» малых по абсолютной величине корня $\omega_{1,2}^{(1)} = \Omega_{1,2}$. Если $|\Omega_{1,2}| \ll |\omega_{1,2}^{(k)}|$ $(k \neq 1)$, то, за исключением особых случаев, именно эти корни определяют начало и конец искомой фазовой траектории, т. е. структуру «подножия» и «вершины» ударной волны. Особая роль малых по модулю «удаленных» корней характеристических уравнений обусловлена (с точки зрения интерпретации ударной волны как результата нелинейного взаимодействия большого числа нормальных волн с различными частотами) тем, что волны с более высокой частотой слабо возбуждаются относительно плавным ($\tau \sim \Omega^{-1}$) перепадом напряжения и тока, движущимся со скоростью v_p

Приведенные выше соображения о длительности фронта УЭМВ и о структуре ее «подножия» и «вершины» могут быть распространены не только на сложные системы (состоящие из нескольких линий передачи с конечной критической частотой, связанных с основной линией), но и на волноводы, в которых изменения погонного потока и заряда описываются неодномерными уравнениями (например, в линиях с дисперсией, обусловленной неоднородным в поперечном сечении диэлектриком или магнетиком), а также на волноводы, вообще не описываемые телеграфными уравнениями (например, линии с дискретными параметрами). В таких линиях передачи возможны, вообще говоря, волны нескольких типов, и комплексные частоты колебаний, которые могут возбуждаться на начальном и конечном участках УЭМВ, совпадают с корнями уравнений

$$\omega/\beta_i(\omega) = v_p, \tag{4.2б}$$

являющихся естественным обобщением (4.2а) (здесь i — индекс, указывающий тип волны). Остальные рассуждения остаются в силе; в частности, при наличии у системы (4.2б) пары «удаленных» корней $\Omega_{1,2}$ ($|\Omega_{1,2}| \ll |\omega_{(i);1,2}^{(k)}|$), удовлетворяющих условиям (4.3), структура начального и конечного участков УЭМВ определяется волнами соответствующего типа с комплексными частотами $\Omega_{1,2}$ и комплексными волновыми числами $\Omega_{1,2}/v_p$. При этом следует различать два основных случая.

1) Групповые скорости волн, соответствующих частотам $\Omega_{1,2}$, меньше их фазовых скоростей $(v_{1,2}^{(гр)} < v_{1,2}^{(ф)})$. При этом оказывается, что $\mathrm{Re}\,\Omega_1 = 0$, и на переднем участке УЭМВ напряжение и ток монотонно

---

* В некоторых случаях выбор такой траектории достаточно очевиден, например, если соответствующая особая точка является седлом.

** Особый случай, когда $\Omega = 0$ [39, 69], в дальнейшем не рассматривается.

нарастают по экспоненциальному закону. Частота Ω_2 при достаточно малом затухании может быть комплексной, т. е. за фронтом УЭМВ возможно появление затухающих (вдали от фронта — квазигармонических) колебаний.

2) Групповые скорости волн, соответствующих $\Omega_{1,2}$, больше фазовых ($v_{1,2}^{(гр)} > v_{1,2}^{(ф)}$). В этом случае $\mathrm{Re}\,\Omega_2 = 0$, комплексной величиной может быть только Ω_1; соответственно колебания могут появиться только на переднем участке УЭМВ.

Возможны, конечно, и смешанные случаи (например, $v_1^{(гр)} > v_1^{(ф)}$, $v_2^{(гр)} < v_2^{(ф)}$) с соответствующими структурами ударных волн.

2. Основные типы структур УЭМВ [26, 30, 62, 69, 70]. Для линий передачи с достаточно простыми законами дисперсии порядок системы (4.1), описывающей стационарные ударные волны, невысок (одно-два уравнения первого порядка), и возможно ее полное качественное исследование. Рассмотрение таких частных примеров позволяет не только проиллюстрировать основные типы УЭМВ (классифицируемых по виду «подножия» и «вершины») и их связь с дисперсионными характеристиками линии передачи, но и исследовать детали структуры и длительность самого фронта ударной волны.

а) Линия передачи с временной дисперсией [20, 69]. Простейшим примером линии передачи с временной дисперсией может служить линия, схема которой показана на рис. 9. Если допустить, что связь потока Φ с током I квазистатическая ($\Phi\{I,\ U\} = \Phi(I)$) и дисперсия полностью определяется конструкцией линии (наличием индуктивности L), то система (4.1) сводится к одному уравнению второго порядка

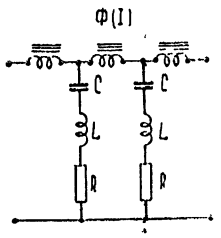


Рис. 9. Схема простейшей линии с временной дисперсией.

$$LC\frac{d^2I}{d\xi^2} + RC\frac{dI}{d\xi} + \{(I - I_1) - Cv_p^2[\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0. \qquad (4.4)$$

Структура фазовой плоскости уравнения (4.4) при $I_1 = 0$, $\Phi'(I) > 0$ и $\Phi''(I) = -\Phi''(-I)$ (зависимость $\Phi(I)$ аналогична приведенной на рис. 1а зависимости $B(H)$) показана на рис. 10. Особая точка $I = I_1 = 0$, соответствующая «подножию» волны, всегда является седлом; «вершине» ($I = I_2$) соответствует (в зависимости от величины затухания) устойчивый узел, фокус или центр. Сепаратриса, соединяющая эти особые точки, определяет структуру фронта УЭМВ.

При сильном затухании волн в линии ($R^2C > 4L[1 - v_p^2C\Phi'(I_2)]$) ток монотонно меняется от I_1 до I_2 (рис. 10а). Если же потери достаточно малы ($R^2C < 4L[1 - v_p^2C\Phi'(I_2)]$), то вблизи «вершины» волны появляются осцилляции (рис. 10 б, г). Вначале эти колебания могут существенно отличаться от гармонических, но по мере удаления от переднего края фронта их амплитуда уменьшается, а сами они приближаются к квазигармоническим. При этом их комплексная частота и волновое число совпадают с частотой и волновым числом (найденными в линейном приближении) для волны с действительной фазовой скоростью, равной скорости v_p.

При уменьшении затухания (величины сопротивления R) область с существенно негармоническими колебаниями растет, а сами они приближаются к набору уединенных волн (солитонов), являющихся точным решением в линиях без диссипации (сепаратриса на рис. 10в).

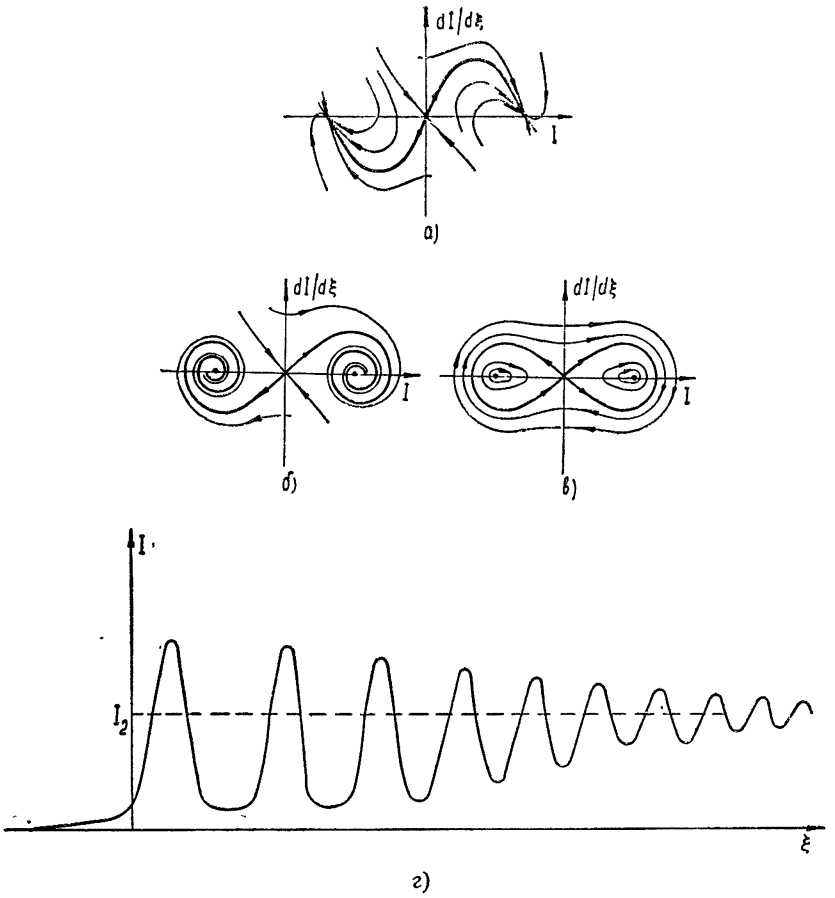


Рис. 10. Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн и структуры УЭМВ в линии с временной дисперсией (рис. 9):
а) при сильном затухании, б) при слабом затухании, в) в линии без диссипации, г) структура фронта УЭМВ, соответствующая случаю б).

б) Линии с пространственной дисперсией [26, 30, 69]. При нелокальной связи погонного потока Ф и заряда Q с током и напряжением групповая скорость возмущений, возбуждающихся в области фронта УЭМВ, может быть больше скорости самой ударной волны v, вследствие чего осцилляции возникают на переднем участке ее фронта (у «подножия»). Такая ситуация может иметь место, например, в линии передачи, изображенной на рис. 9, при условии, что между ее ячейками введена индуктивная связь. Наличие такой связи приближенно (для систем с малыми ячейками) учитывается в уравнениях (1.4) членами, содержащими производные по продольной координате. Для рассматриваемого примера эти уравнения имеют вид [69]

$$\Phi = \Phi(I) - \tilde{L}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}, \qquad Q = CU - RC\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{4.5}$$

Здесь $\tilde{L}$ — коэффициент, пропорциональный взаимной индуктивности между последовательными ветвями ячеек; индуктивность L для просто-

ты положена равной нулю*. С учетом (4.5) система (4.1) сводится к уравнению второго порядка [69]

$$\tilde{L}C\frac{d^2I}{d\xi^2} - RC\frac{dI}{d\xi} - \{(I - I_1) - Cv_p^2[\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0. \qquad (4.6)$$

При $\tilde{L} < 0$ структура фазовой плоскости этого уравнения аналогична структуре фазовой плоскости уравнения (4.4), т. е. влияние временной и пространственной дисперсии на структуру УЭМВ качественно одинаково. Если же $\tilde{L} > 0$, то при достаточно малом R точка $I_1 = 0$ становится неустойчивым фокусом (рис. 11б), т. е. колебания возбуждаются перед фронтом ударной волны (рис. 11в) (в этой области, естественно, $v^{(гр)} > v^{(ф)}$). Колебания на переднем участке фронта УЭМВ наблюдались в эксперименте с коаксиально-спиральным волноводом, заполненным ферритом (рис. 12) [53].

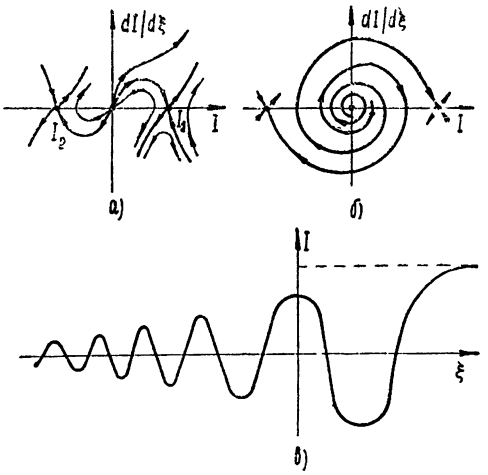


Рис. 11. Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн в линии с пространственной дисперсией:
а) при сильном затухании, б) при слабом затухании, в) соответствующая последнему случаю структура УЭМВ.

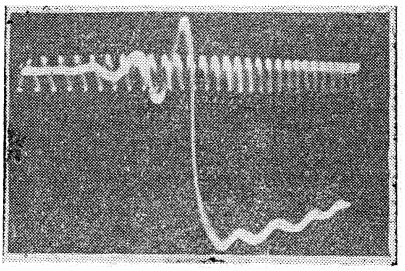


Рис. 12. Осциллограмма напряжения на выходе коаксиально-спиральной линии с ферритом [53] (метки времени через 5 *нсек*).

Другим примером линии передачи с пространственной дисперсией могут служить многозвенные «искусственные» линии, наиболее часто применяемые в экспериментальных работах по УЭМВ. В таких линиях (описываемых дифференциально-разностными уравнениями) пространственная дисперсия обусловлена периодичностью структуры; приближенно (для не слишком быстрых процессов) такую дисперсию можно учесть, заменив разностные уравнения дифференциальными, содержащими производные конечного порядка по продольной координате [26, 30]. Исследование этих приближенных уравнений, описывающих структуру «подножия» и «вершины» УЭМВ, показывает, что в этом случае, как и в линиях с временной дисперсией, колебания могут возбуждаться только вблизи «вершины», т. е. а зфронтом УЭМВ [26, 30]. Решение за-

* При $L \neq 0$ в линии могут существовать волны как с $v^{(гр)} < v^{(ф)}$, так и с $v^{(гр)} > v^{(ф)}$; поэтому колебания (с разными частотами) могут возбуждаться одновременно и у «подножия» и на «вершине» УЭМВ.

дачи численными методами [40, 41], а также ряд экспериментов [43], подтверждают, что влияние пространственной дисперсии, связанной с дискретностью параметров линии, на формирование и структуру УЭМВ аналогично влиянию временной дисперсии.

в) Линии с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы [70]. Если в линии передачи есть элементы, характеризуемые существенно различными постоянными времени, то уравнения связи (1.4) могут содержать малый параметр μ при старшей производной. Процессы, протекающие на фронте ударной волны в таких линиях, можно в некоторых случаях разделить на быстрые и медленные. При этом быстрые процессы проявляются как разрывы в решении приближенных ($\mu = 0$) уравнений медленных движений, а при исследовании быстрых процессов изменением медленных переменных можно пренебречь. Аналогичная в этом смысле ситуация известна в газодинамике и динамике плазмы (см., например, [11, 22, 23]). Отметим, что использование той или иной идеализации при составлении уравнений в большинстве случаев связано с пренебрежением высшими производными. Поэтому важно установить критерий, позволяющий судить о появлении быстрых процессов на основе анализа «медленных» ($\mu = 0$) уравнений, а также выяснить расположение скачков в профиле ударной волны, описываемой в этом приближении.

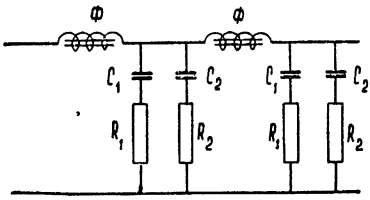


Рис. 13. Схема простейшей линии с „замедленным" (при $\tau_1 = R_1C_1 \ll \tau_2 = R_2C_2$) возбуждением одной из внутренних степеней свободы.

Проиллюстрируем основные закономерности появления скачков на примере линии с двумя шунтирующими ветвями (рис. 13), постоянные времени которых существенно различны ($\tau_1 = R_1C_1 \ll \tau_2 = R_2C_2$). Уравнение стационарных волн в этом случае можно записать в виде [70]

$$\tau_1\tau_2 \frac{d^2I}{d\xi^2} + \tau_2\left[1 + \tau_1\tau_2^{-1} - v_p^2(C_1 + C_2\tau_1\tau_2^{-1})\Phi'(I)\right]\frac{dI}{d\xi} + \\ + \{(I - I_1) - (C_1 + C_2)\, v_p^2\,[\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0. \qquad (4.7)$$

При $\tau_1 \to 0$ (4.7) переходит в уравнение первого порядка.

Структура фазовой плоскости уравнения (4.7) при $\tau_1 \to 0$, $I_1 = 0$ и монотонной $\Phi(I)$ показана на рис. 14 при различных скоростях v_p и, следовательно, различных амплитудах ударной волны. Она оказывается существенно зависящей от соотношения между v_p и фазовыми скоростями малых возмущений бесконечно большой $v^{(\infty)}(0) = [C_1\Phi'(0)]^{-1/2}$ и бесконечно малой $v^{(0)}(0) = [(C_1 + C_2)\,\Phi'(0)]^{-1/2}$ частот, определенных с помощью приближенных уравнений связи ($\tau_1 = 0$) при $I_1 = 0$. Если $v^{(0)}(0) < v_p < v^{(\infty)}(0)$, то на фазовой прямой уравнения медленного движения ($\tau_1 = 0$) между положениями равновесия I_1, I_2 нет никаких особенностей, т. е. оно имеет непрерывное решение, соответствующее стационарной ударной волне (рис. 14а).

Картина качественно меняется при $v_p > v^{(\infty)}(0)$, $v^{(0)}(0)$. В этом случае (рис. 14в) $I_1 = 0$ является устойчивым положением равновесия уравнения медленных движений, а на фазовой прямой этого уравнения появляется точка стыка фазовых траекторий $I = J$. Значение J определяется уравнением $v^{(\infty)}(J) = v_p$. Изображающая точка из $I_1 = 0$ переносится через точку стыка фазовых траекторий скачком. Конечная точка

скачка I_2^* определяется граничными условиями на скачке, которые легко получить из (1.3), заметив, что Q_2 за время скачка не меняется:

$$I_2^* = v_p C_1 U_2^*, \qquad U_2^* = v_p \Phi\left(I_2^*\right).$$

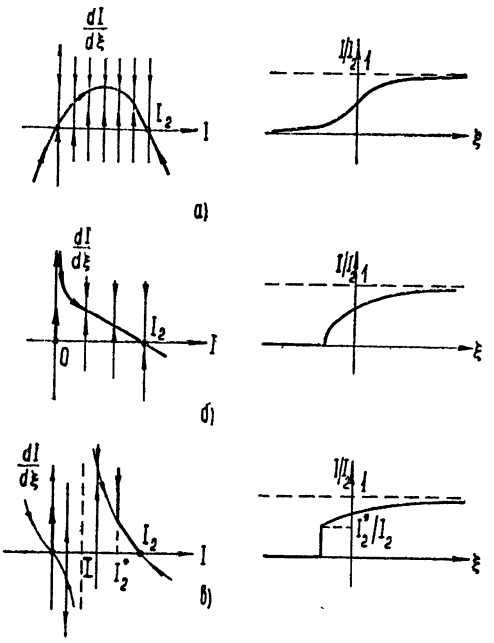


Рис. 14. Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн в линии, показанной на рис. 13, и соответствующая структура УЭМВ:

а) при $v_0(0) < v_p < v^{(\infty)}(0)$; б) при $v_0(0) < v_p = v^{(\infty)}(0)$; в) при $v_0(0) < v^{(\infty)}(0) < v_p$.

Начиная с I_2^*, ток в линии медленно приближается к постоянному за фронтом ударной волны значению I_2. Такой характер структуры фронта в линии с двумя шунтирующими ветвями подтверждается экспериментом [70].

Оказывается, что и в общем случае на сравнительно широком фронте ударной волны могут возбуждаться «быстрые» процессы (в разрывном приближении — скачки), если между положениями равновесия, соответствующими начальному и конечному состояниям УЭМВ, есть поверхности стыка фазовых траекторий уравнений медленных движений. Эти особые поверхности определяются соотношениями

$$v_p = v^{(\infty)}, \quad v^{(\infty)} = \left(C^{(\infty)} L^{(\infty)}\right)^{-1/2}. \tag{4.8}$$

Здесь $C^{(\infty)}$, $L^{(\infty)}$ и $v^{(\infty)}$ — погонная емкость, индуктивность и фазовая скорость малых возмущений бесконечной частоты, определенные как функции точек фазового пространства медленных движений.

В зависимости от нелинейных характеристик параметров линии таких поверхностей может быть несколько. Но всегда (для устойчивых ударных волн) оказывается возможным построить единственное разрывное решение приближенных уравнений, соответствующее стационарной ударной волне. Существенно, что минимальное число скачков в этом решении и некоторые особенности расположения их начальных и ко-

нечных точек можно определить, зная лишь уравнения (4.8) и порядок неустойчивости положений равновесия уравнений медленных движений [70].

3. Особые типы ударных волн [30, 37, 44, 63, 69, 81, 82]. Если квазистатические уравнения связи не сводятся к однозначным непрерывным функциям, граничные условия (2.3а) могут содержать дополнительные независимые величины. В этих случаях сделанные выше общие утверждения о существовании и единственности стационарных ударных волн, вообще говоря, неприменимы и необходимо специальное рассмотрение. Такая ситуация характерна, в частности, для некоторых систем с нелинейной диссипацией.

а) Линия с ненасыщенным ферритом [37, 44, 69]. Предположим, что дисперсия и нелинейность линии определяются ферритом, намагниченность которого изменяется за счет некогерентного вращения, описываемого уравнением (1.2). Образование УЭМВ в такой линии рассматривалось в п. 3 раздела 3. Особенность уравнения связи в квазистатическом случае заключается в том, что функция $\Phi(I)$ в точке $I=0$ может принимать любые значения в пределах некоторого интервала $|\Phi| \leqslant \Phi_s$; значение $\Phi_0 = \Phi(0)$ независимо задается начальной намагниченностью M_0 в линии. В областях $I>0$, $I<0$ функции $\Phi(I)$ аналитически различны ($\Phi = L_0 I \pm \Phi_s$); при заданном M_0 зависимость $\Phi(I)$ дается разрывной функцией (рис. 1б). Граничные условия (2.3а) и выражение для скорости скачка (2.3б) сохраняются, однако в них появляется указанный выше независимый параметр Φ_0 (или M_0); необходимо учесть также, что скачок начинается всегда от значения $I=0$.

Уравнения стационарной ударной волны в данном случае могут быть приведены к виду [69]

$$\frac{dm}{d\xi} = q_0(1-m^2)\,h, \quad h\left(1-\frac{v_p^2}{v_0^2}\right) = 4\pi\eta\frac{v_p^2}{v_0^2}(m-m_0). \tag{4.9}$$

Здесь $h=\dfrac{KI}{M}$, $m=\dfrac{M_h}{M}$, $v_0=[L_0C]^{-1/2}$, $q_0=\dfrac{\alpha\gamma M}{1+\alpha^2}$, а параметры K и η зависят от геометрии линии.

Уравнение (4.9) имеет три положения равновесия: $m_1=m_0$, $h_1=0$ (состояние перед фронтом УЭМВ) и $m_2=\pm 1$, $h_2=4\pi\eta v_p^2(\pm 1-m_0)\times$ $\times(v_0^2-v_p^2)^{-1}$ (состояния за фронтом УЭМВ). Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $h_2>0$ (волна положительной полярности). Тогда решение (4.9), соединяющее два указанных выше положения равновесия, записывается в следующем неявном виде:

$$\frac{h^2}{h_2^2}\left(\frac{1-m_0}{1+m_0}\right)^{1-m_0}\left(1-\frac{h}{h_2}\right)^{-(1+m_0)}\left(1+\frac{h}{h_2}\,\frac{1-m_0}{1+m_0}\right)^{m_0-1} = \tag{4.10}$$

$$= \frac{m-m_0}{(1+m)^{1-m_0}(1-m)^{1+m_0}} = \exp\left[2(1+m_0)\,q_0h_2\xi\right].$$

Из (4.10) следует, что h и m меняются монотонно на всем интервале $-\infty<\xi<+\infty$. Формула (4.10) (как и соответствующие формулы (3.6) для нестационарных процессов) хорошо согласуется с результатами экспериментов по определению длительности и скорости фронта УЭМВ в линиях с ненасыщенным ферритом [43, 53].

Заметим, что при учете дисперсии, связанной с конфигурацией линии передачи (например, с периодичностью ее параметров), порядок уравнений повышается, и тогда фронт УЭМВ может содержать осцилляции [30].

б) Линии с активными параметрами [63, 81, 82]. Особый класс составляют также системы с активными элементами, наличие которых может привести к возрастанию энергии волны. Рассмотрим линию, изображенную на рис. 15а, содержащую, наряду с нелинейной индуктивностью, нелинейный активный элемент. Вольтамперная характеристика последнего $I_R(U_R)$ (отвечающая, например, туннельному диоду) имеет падающий участок (рис. 15б).

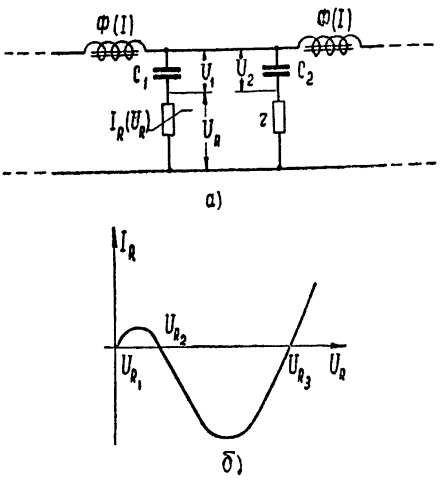


Рис. 15. а) Схема линии с активным элементом. б) Вольт-амперная характеристика активного элемента (зависимость $I_R(U_R)$).

Следует заметить, что в активной системе возможны процессы, качественно отличные от УЭМВ, в частности, процессы автоколебательного типа [72, 79]. Однако при определенных начальных и граничных условиях в таких системах могут распространяться и ударные волны. Особенность последних в данном случае связана с неоднозначностью зависимости $Q(U) = C_1(U - U_{Ri}) + C_2U$, где U_{Ri} $(i = 1, 2, 3)$ — значения U_R, при которых $I_R = 0$.

Уравнения стационарных волн в рассматриваемой линии имеют вид

$$\frac{dU_1}{d\xi} = \frac{I_R(U_R)}{v_p C_1}; \tag{4.11а}$$

$$\frac{dI}{d\xi} = I_R + \frac{1}{rv_p}\left(\frac{C_1}{C_2} v_p U_1 + v_p^2\Phi - \frac{I}{C_2}\right); \tag{4.11б}$$

$$v_p \Phi(I) = U_1 + U_R. \tag{4.11в}$$

(Обозначения ясны из рис. 15а.) Для определенности в (4.11а)—(4.11в) принято, что все величины при $\xi \to -\infty$ равны нулю.

Величины в положениях равновесия системы (4.11а)—(4.11в) связаны граничными условиями (2.3а), (2.3б) с дополнительным параметром $U_{Ri} = U_R(\xi \to \infty)$, принимающим три значения. Этим значениям отвечают три типа ударных волн, удовлетворяющих условию устойчивости в квазистатическом приближении (2.5). Однако при учете дисперсии $(I_R \neq 0)$ положение равновесия с $U_R(\xi \to \infty) = U_{R2}$, очевидно, неустойчиво относительно возмущений конечной частоты; интересно, что соответствующего стационарного решения системы, приводящего к значению U_{R2}, не существует вообще.

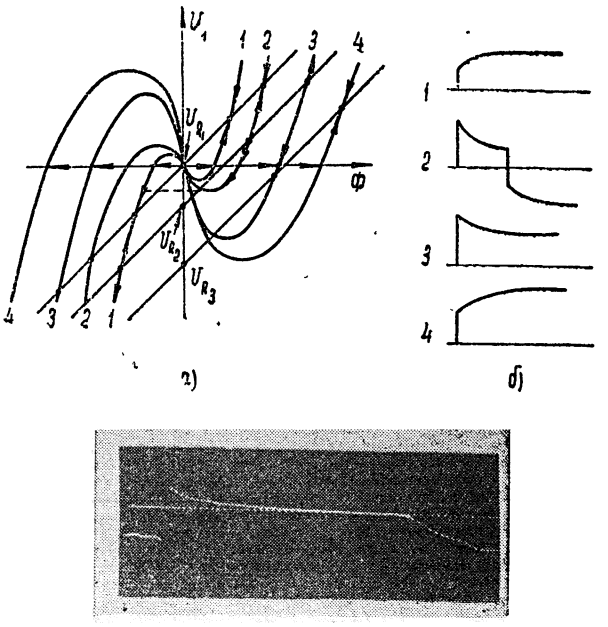
Качественный анализ системы (4.11а)—(4.11в) наиболее прост и нагляден в случае, когда $r \to 0$, т. е. возможно замедленное возбуждение активной степени свободы. В этом случае движения на фазовой плоскости (Φ, U_1) можно разделить на медленные, происходящие в окрестности кривой

$$C_1 v_p U_1 = I - C_2 v_p^2 \Phi(I), \tag{4.12}$$

и быстрые — вдоль прямых $U_1 = \text{const}$. Положениями равновесия являются точки пересечения кривой (4.12) и прямых (4.11в).

Разрывную фазовую траекторию, соответствующую стационарной волне, легко построить, если учесть, что экстремумы кривой (4.12)

являются точками стыка фазовых траекторий медленных движений, а положение равновесия $U_1 = 0$, $\Phi_1 = 0$, соответствующее области перед ударной волной, устойчиво относительно этих движений. Вследствие этого движение начинается скачком вдоль оси Ф до ее пересечения с кривой (4.12). Возможные типы структуры фронта ударной волны в порядке нарастания ее амплитуды показаны на рис. 16. Случаи 1, 3, 4 удалось наблюдать экспериментально (см., например, фото на рис. 16).



а) б)

в)

Рис. 16. а) Фазовая плоскость уравнений для стационарных волн в линии с активным элементом при возрастании (от 1 к 4) амплитуды УЭМВ. б) Соответствующие структуры УЭМВ. в) Осциллограмма напряжения на выходе линии при $U_{R2} < U_2 < U_{R3}$. Метки времени через 50 *нсек*.

Режим 3, когда в области за скачком активный элемент отдает энергию волне, имеет близкую аналогию с волнами детонации в газодинамике, где за обычной ударной волной имеется область горения [2]. В частности, структура волн детонации качественно совпадает с показанной на рис. 16в. Волна 3 имеет и другую аналогию: подобную форму приобретает волна огибающей бегущего светового импульса в нелинейной активной среде [73]. Отметим, что в активных линиях без реактивной нелинейности УЭМВ невозможны, однако возможно возникновение быстрых процессов другого типа [45].

4. Об ударных волнах в многопроводных (связанных) линиях передачи [54]. Телеграфные уравнения (1.2), содержащие, с учетом (1.4), две зависимые переменные I, U, справедливы для волноводов с двухсвязным поперечным сечением (двухпроводные линии). Волны в волноводах с многосвязным сечением, в частности, состоящих из нескольких (n) связанных двухпроводных линий (рис. 17), описываются системой $2n$ уравнений типа (1.2) для функций I_k, U_k, Φ_k, Q_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, дополненных $2n$ уравнениями связи $\Phi_k = \Phi_k\{I_1, \ldots, I_n\}$, $Q_k = Q_k\{U_1, \ldots, U_n\}$. Простейшие решения таких уравнений могут быть получены с помощью

тех же методов, что и выше. Так, если уравнения связи квазистатические, то в многопроводной линии существует, вообще говоря, $2n$ простых волн (2.1а) (соответствующих $2n$ нормальным волнам в линейной системе), из которых n распространяются в положительном направлении. Эволюция простой волны приводит, как обычно, к образованию разрывов, каждому из которых отвечает $2n$ граничных условий типа (2.3а).

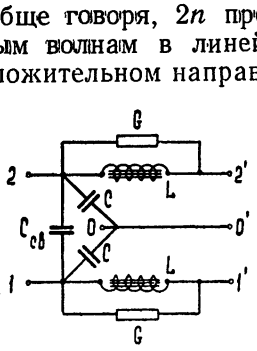


Рис. 17. Схема простейшей многопроводной линии передачи.

Существование и единственность стационарной ударной волны по-прежнему обеспечиваются равенством числа m независимых параметров, характеризующих убегающие от разрыва возмущения при квазистатических уравнениях связи, числу $2n$ граничных условий. Специфика многоволновых систем проявляется в том, что, наряду со случаем $m > 2n$ (неустойчивый разрыв, для которого отсутствует соответствующее стационарное решение), возможен случай $m < 2n$, когда задача нахождения малых возмущений переопределена. При этом сколь угодно малое возмущение вызывает конечное изменение разрыва (расщепление на другие разрывы). Такие разрывы называются неэволюционными*. При учете дисперсии неэволюционному разрыву соответствует бесчисленное множество стационарных решений — фазовых траекторий, соединяющих положения равновесия при $\xi \to \pm\infty$. Следовательно, корректность задач о нахождении стационарной ударной волны при учете дисперсии по-прежнему связана с условиями существования разрыва в квазистатическом приближении.

5. ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Задачи, в которых учитывается векторный характер поля УЭМВ в свободном пространстве, имеют пока довольно малое отношение к эксперименту из-за отсутствия слабодиспергирующих нелинейных материалов достаточно большого объема. Однако такие задачи представляют определенный физический интерес. Кроме того, многие из них допускают моделирование в связанных линиях, да и положение с нелинейными материалами непрерывно меняется.

Ниже рассматриваются волны в безграничном нелинейном магнетике; там, где необходимо конкретизировать вид материальных уравнений, используются уравнения (1.1), описывающие прецессию намагниченности в насыщенном феррите.

1. Простые волны [14, 18, 34, 51]. Рассмотрим сначала одномерный процесс — плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z. Уравнения Максвелла для такой волны в феррите приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_\tau}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}_\tau}{\partial t^2}, \qquad B_z = \text{const}, \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{H}_\tau$, $\boldsymbol{B}_\tau$ — компоненты полей в плоскости xy. Считая изменение поля медленным, воспользуемся квазистатическим уравнением связи для насыщенного феррита: $[\boldsymbol{MH}] = 0$, $|\boldsymbol{M}| = M_s = \text{const}$ (см. раздел 1). Будем искать простые волны, т. е. решения, сохраняющиеся на характеристиках. С помощью известных методов анализа квазилинейных уравнений можно показать [34], что в данном случае имеется четыре семей-

* Неэволюционные разрывы впервые рассматривались в магнитной гидродинамике (см., например, [7]).

ства характеристик (по два для каждого из противоположных направлений распространения вдоль оси z). Соответствующие скорости распространения для одной пары семейств характеристик равны

$$\frac{dz}{dt} = \pm\, C/(1 + 4\pi M_s/H)^{1/2}, \tag{5.2а}$$

а для другой пары

$$\frac{dz}{dt} = \pm\, C\left(\frac{1 + 4\pi M_s H_\tau^2/H^3}{1 + 4\pi M_s/H}\right)^{1/2}, \tag{5.2б}$$

где $H = (H_z^2 + H_\tau^2)^{1/2}$. При этом простая волна, распространяющаяся вдоль характеристики (5.2а), поляризована линейно ($H_x/H_y = \text{const}$)*, а простая волна, отвечающая (5.2б), имеет круговую поляризацию ($H_x^2 + H_y^2 = H_\tau^2 = \text{const}$).

Заметим, что величины H_z^2 и H_τ^2 связаны соотношением $B_z = H_z + 4\pi M_z = H_z(1 + 4\pi M_s/H) = \text{const}$. Поэтому волны первого типа не отличаются от рассмотренных в п. 1 раздела 2; их деформация приводит к возникновению разрывов. В волне второго типа скорость постоянна, и, следовательно, волна, поле которой произвольным образом вращается около оси, но $H^2 = \text{const}$, в квазистатическом приближении не деформируется.

В случае малой нелинейности ($|H_\tau| \ll 4\pi M_s$) удается решить задачу о распространении волны с одновременным изменением модуля и направления поляризации H [51]. При этом $|H_\tau|$ всегда распространяется вдоль характеристик (5.2а), а изменение угла поворота φ вектора H_τ параметрически зависит от $|H_\tau|$ (скорость распространения φ соответствует (5.2б)).

2. Ударные волны и вращательные разрывы [66]. Чтобы выяснить, какие типы разрывов электромагнитного поля возможны в неограниченной среде, рассмотрим граничные условия на разрыве в векторной форме [14, 18] (эквивалентные условиям непрерывности касательных компонент E, H в сопровождающей системе координат):

$$\begin{aligned} [n,\ E_2 - E_1] &= \frac{v_n}{c}(B_2 - B_1), \qquad B_{n2} = B_{n1}, \\ [n,\ H_2 - H_1] &= -\frac{v_n}{c}(D_2 - D_1), \qquad D_{n2} = D_{n1}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где n — нормаль к поверхности разрыва, v_n — нормальная компонента его скорости.

Если связь $D = \varepsilon E$ линейна, а тангенциальные компоненты B и H в медленно меняющемся поле параллельны (это справедливо, в частности, для феррита без учета поля анизотропии), то, полагая $H_{\tau i} = H_{\tau i}\tau_i$, $B_{\tau i} = B_{\tau i}\tau_i$, можно показать, что условия (5.3) допускают два различных типа разрывов [66]:

а) ударные волны, для которых

$$[\tau_1\tau_2] = 0, \quad \frac{\varepsilon v_n^2}{c^2} = \frac{H_{\tau 2} - H_{\tau 1}}{B_{\tau 2} - B_{\tau 1}}, \tag{5.4}$$

* Простые волны с линейной поляризацией возможны в недиспергирующей среде с произвольной анизотропией [37].

т. е. векторы поля по обе стороны фронта лежат в одной плоскости, и для поперечных компонент справедливы условия (2.3а), (2.4);

б) вращательные разрывы; для них

$$[\tau_1\tau_2] \neq 0, \quad \frac{\varepsilon v_n^2}{c^2} = \frac{H_{\tau 1}}{B_{\tau 1}} = \frac{H_{\tau 2}}{B_{\tau 2}}. \qquad (5.5а)$$

В случае однозначной монотонной связи $B_\tau(H_\tau)$ из (5.3) следует $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$, $B_{\tau 1} = B_{\tau 2}$, т. е. векторы $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ испытывают лишь поворот около нормали к фронту разрыва. Скорость последнего не зависит от угла поворота.

Свойства ударных волн и вращательных разрывов во многом различны. Так, УЭМВ может возникать в результате эволюции непрерывных волн, соответствующих (5.2а). Релаксация приводит к образованию стационарного (или квазистационарного) ударного фронта. Вращательный же разрыв не может быть результатом деформации соответствующих непрерывных «вращательных» волн. Как ясно из (5.2б), в недиспергирующей среде волны с $|\boldsymbol{H}_\tau| = \text{const}$ вообще не деформируются. Что касается релаксации, то (как и в магнитной гидродинамике [5]) она приводит к неограниченному расширению разрыва.

Отметим, что в системе связанных линий определенного типа возможны конфигурации, соответствующие рассмотренным здесь типам разрывов.

3. Распад и взаимодействие разрывов [66]. Задача о взаимодействии двух плоских разрывных фронтов, параллельных друг другу, сводится (как и для линии передачи) к задаче о распаде некоторого начального разрыва, возникающего в момент соприкосновения фронтов. Отметим сразу особенность ударной волны в свободном пространстве [50]: УЭМВ с изменением знака H_τ неэволюционна (с учетом возмущений, поляризованных отлично от $\boldsymbol{H}_{1,2}$) и распадается на вращательный разрыв с поворотом поля на π и опережающую его эволюционную ударную волну, на которой знак $\boldsymbol{H}_\tau$ сохраняется (в двухпроводной линии число возмущений меньше, и УЭМВ всегда эволюционна).

Взаимодействие разрывов с различными направлениями поля рассмотрим на примере «столкновения» двух встречных УЭМВ с одинаковыми модулями $\boldsymbol{H}_\tau$ [66]. Если угол φ между векторами $\boldsymbol{H}_\tau$ в сходящихся волнах меньше 120°, то в каждую сторону от точки взаимодействия отходят УЭМВ и следующий за ней вращательный разрыв с углом поворота $\varphi/2$ (рис. 18). Ввиду симметрии задача полностью определена, если известны модули H, B поля, остающегося в области между расходящимися УЭМВ (очевидно, H, B одинаковы в областях II и III). Граничные условия (5.4), (5.5а) приводят к следующему соотношению между H, B и заданными величинами H_0, B_0 поля сходящихся УЭМВ:

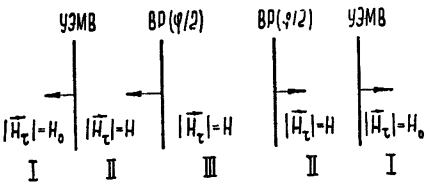


Рис. 18. Разрывы, возникающие в результате „столкновения" ударных волн с различной поляризацией.

$$\left(\frac{H}{H_0} - 1\right)^{1/2}\left(\frac{B}{B_0} - 1\right)^{1/2} + \left(\frac{HB}{H_0B_0}\right)^{1/2}\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}\right) = 1. \qquad (5.6а)$$

Если квазистатическая функция $B(H)$ известна, то при $\varphi \leqslant 120°$ уравнение (5.6а) однозначно решает задачу. Если же $\varphi > 120°$, то картина взаимодействия отличается тем, что вместо УЭМВ впереди враща-

тельных разрывов распространяются простые волны типа (5.2а); для этого случая нетрудно получить соотношение, заменяющее (5.6а).

4. *Структура УЭМВ в насыщенном феррите* [14, 16–18]. Структура фронта ударной волны зависит, как и в линиях передачи, от диссипативных и дисперсионных механизмов, действующих в среде. Соответствующая задача относительно проста для случая волны, распространяющейся в феррите вдоль постоянного поля $\boldsymbol{H}_0$, намагничивающего феррит до насыщения [14, 18]. Отыскивая стационарное (зависящее от $\xi = t - z/v_p$, где $\boldsymbol{z}_0 \parallel \boldsymbol{H}_0$) решение уравнений Максвелла, дополненных уравнением однородной прецессии (1.1), получим ударный фронт, в котором вектор намагниченности $\boldsymbol{M}$, вращаясь, переходит от продольной ориентации к некоторой другой, совпадающей с направлением $\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_{\tau 2}$ ($\boldsymbol{H}_{\tau 2}$ — поперечное поле волны за фронтом УЭМВ). Частота вращения ω связана с углом θ отклонения $\boldsymbol{M}$ от оси z соотношением

$$\omega = \gamma B_0 \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_2} - 1 \right), \tag{5.5б}$$

$\theta_2 = \theta(\xi \to \infty)$. Согласно (5.5а), ω уменьшается от значения $\gamma B_0 (1 - \cos\theta_2)/\cos\theta_2$ перед фронтом волны до нуля за ее фронтом. Длительность фронта УЭМВ τ имеет порядок

$$\tau \simeq \tau_0 M \cos\theta_2 / 2B_0 \sin^2\theta_2, \tag{5.6б}$$

где τ_0 — время релаксации феррита. Вектор $\boldsymbol{H}$ также вращается; профиль каждой из поперечных компонент $\boldsymbol{H}$ имеет осцилляции впереди фронта (заметные при $\tau_0 \gamma M > 1$), т. е. аналогичен показанному на рис. 11в. Значения поперечных компонент поля перед ударной волной и позади нее (при $\xi = \mp\infty$) связаны со скоростью волны граничными условиями (5.4).

Качественный анализ особенностей структуры удается провести и для УЭМВ, распространяющихся под произвольным углом к магнитному полю перед ними* [16]. В частности (как и в разделе 3), можно проследить связь между единственностью структуры УЭМВ и их эволюционностью** [50].

5. Наклонное падение УЭМВ на проводящую плоскость [17]. До сих пор рассматривались одномерные волны (все величины зависели от одной пространственной переменной). Двумерные нелинейные процессы, весьма интересные физически, еще менее доступны для экспериментального наблюдения. Мы рассмотрим здесь одну двумерную задачу — отражение наклонной ударной волны от проводящей плоскости [17]. Здесь естественно выделить два случая.

а) Магнитное поле поляризовано перпендикулярно плоскости падения. Предполагая, что фронт отраженной волны остается плоским, и пользуясь граничными условиями (5.1) и условием $\boldsymbol{E}_\tau = 0$ на границе металла, получим связь абсолютных величин полей в областях I и II (рис. 19):

---

* Отметим, что влияние кристаллической анизотропии феррита, а также обменных и магнитоупругих эффектов не приводит, по-видимому, к существенным отличиям в структуре ударной волны [34].

** Анализ нелинейного процесса облегчается в предельном случае $\tau_0 \to \infty$ (недиссипативная среда), когда стационарные волны либо периодичны по ξ и циркулярно поляризованы, либо имеют вид уединенных импульсов [59]; образование УЭМВ в этом случае, естественно, невозможно.

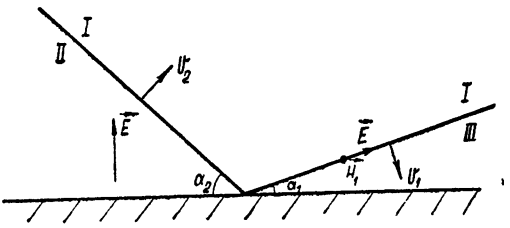


Рис. 19. Наклонное падение ударной волны на отражающую плоскость ($\boldsymbol{H}$ перпендикулярно плоскости падения).

$$H_2 = H_1\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}\right), \quad B_2 = B_1\left[1 + \frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2}\right], \quad E_2 = E_1\,\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos\alpha_2} \qquad (5.7)$$

(в области III поле отсутствует).

При заданной связи $B(H)$ соотношения (5.7) определяют угол отражения α_2. Так, если поле H_1 ударной волны насыщает феррит, то $B = B_s + H$ (рис. 1б) и

$$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1\,(1 + B_s/H_1)^{1/2}. \qquad (5.8)$$

Следовательно, $\alpha_2 > \alpha_1$. Формула (5.8) теряет смысл при $\alpha_1 > \alpha_{кр}$, где $\sin\alpha_{кр} = 1/(1 + B_s/H_1)^{1/2}$. При большем угле падения рассмотренная картина отражения невозможна; можно показать, что невозможна также любая конфигурация из конечного числа плоских ударных волн.

Согласно (5.7), при $\alpha_1 \to \alpha_{кр}$ поле H_2 неограниченно растет. Это обстоятельство может быть использовано для получения сильных магнитных полей.

б) Магнитное поле поляризовано в плоскости падения. Тогда, очевидно, $\boldsymbol{H}_2$ параллельно проводящей плоскости, а $\boldsymbol{E}_2 = 0$. В случае, когда поле перед падающей волной отсутствует, граничные условия дают для абсолютных величин полей

$$H_2 = H_1\cos\alpha_1\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}\right), \quad B_2 = B_1\,\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_2}. \qquad (5.9)$$

Если поля H_1 и H_2 насыщают феррит, то угол отражения удовлетворяет соотношению

$$\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_1)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} = \frac{B_s}{2H_1}\left[\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_2} - 1\right]. \qquad (5.10)$$

Соотношения (5.9), (5.10) справедливы до тех пор, пока отраженная волна остается ударной. Это имеет место, если $\alpha_1 < \alpha_{кр}$ и $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant \pi/2$ (тогда касательные компоненты $\boldsymbol{H}$ на отраженном фронте имеют одинаковый знак, и $H_{2\tau} > H_{1\tau}$). Если $\alpha_1 > \alpha_{кр}$, то при отражении появится, кроме ударной волны, вращательный разрыв с углом поворота π. Отметим, что в той области углов, где справедливы обе формулы (5.8) и (5.10), величина α_2 при заданном α_1 всегда больше для случая (5.8).

Интерес к ударным электромагнитным волнам связан не только с рассмотренными выше физическими особенностями УЭМВ или с возможностью моделирования движений сжимаемой среды в электродинамических системах, но также и с перспективами технических приложений. Уже сейчас УЭМВ нашли широкое применение в технике

наносекундных импульсов. Максимальная амплитуда тока и напряжения и длительность фронта импульса зависят от используемых нелинейных материалов (полупроводники, ферриты, сегнетоэлектрики). Например, длительность УЭМВ на фронте мощных импульсов, получаемых сейчас в линиях с ферритом, достигает $5 \cdot 10^{-10}$ *сек* и менее (рис. 20, [43]).

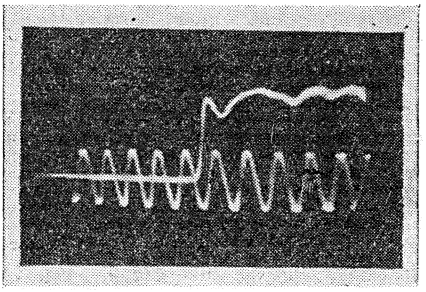


Рис. 20. Осциллограмма $U(t)$ фронта УЭМВ в линии с ферритом [43]. Период калибрационной синусоиды равен 2 *нсек*.

Однако технические проблемы, связанные с УЭМВ, выходят за рамки данного обзора; их обсуждение можно найти в ряде статей (см., например, [67, 68]), а также в монографиях [44, 58].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
2. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд АН СССР, М.—Л., 1946.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1953.
4. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Теория ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд Наука, М., 1966.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
6. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз, М., 1962.
7. Р В. Половин, Ударные волны в магнитной гидродинамике, УФН, **72**, 33 (1960).
8. Р Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
9. J. B. Goodenough, A theory of domain creation and coerciveforce in polycristalline ferromagnetics, Phys. Rev., **95**, 917 (1954).
10. T. L. Gilbert, A lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetization field, Phys. Rev., **100**, 1243 (1955).
11. Я. Б. Зельдович, Ударные волны большой амплитуды в воздухе, ЖЭТФ, **32**, 1126 (1957).
12. E. M. Gyorgy, Modified rotational model of flux reversal, J. Appl. Phys., **29**, 1703 (1958).
13. И Г. Катаев, Авторское свидетельство, № 118859, 1958.
14. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Об ударных электромагнитных волнах в ферритах, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959).
15. Л. А. Островский, О взаимодействии слабых сигналов с электромагнитными ударными волнами, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, **2**, 833 (1959).
16. В. К. Юлпатов, Дипломная работа, Горьковский университет, 1959.
17. A. Gaponov, L. Ostrovsky, G. Freidman, Shock electromagnetic waves XIII General Assembly URSI, London, 1960.
18. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, К теории ударных электромагнитных волн в нелинейных средах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 79 (1960).
19. R. Landauer, Shock waves in nonlinear transmission lines and their effect on parametric amplification, IBMJ Res. and Developm., **4**, 391 (1960).

20. Г. И. Фрейдман, Ударные электромагнитные волны в полосковом волноводе, заполненном ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 276 (1960).
21. R. Landauer, Parametric amplification along nonlinear transmission lines, J. Appl. Phys., **31**, 479 (1960).
22. O. W. Greenberg, H. K. Sen, J. M. Treve, Hydromagnetic model of diffusion effects on shock structure in a plasma, Phys. Fluids, **3**, 379 (1960).
23. Р. З. Сагдеев, О тонкой структуре фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме, ЖТФ, **31**, 1185 (1961).
24. Р. В. Хохлов, К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях, Радиотехника и электроника, **6**, 917 (1961).
25. Р. В. Хохлов, О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях, Радиотехника и электроника, **6**, 1116 (1961).
26. Ю. К. Богатырев, Стационарные волны в нелинейной дискретной линии передачи, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 680 (1961).
27. G. Böhme, Problem der homogenen Lecheleitung mit nichtlinearem Kapazitätsbelag, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, **70**, 25 (1961).
28. Л. А. Островский, Электромагнитные волны в неоднородной нелинейной среде с малыми потерями, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 955 (1961).
29. Г. Я. Любарский, О структуре ударных волн, ПММ, **25**, 1041 (1961).
30. Ю. К. Богатырев, Ударные электромагнитные волны в нелинейной линии с сосредоточенными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 1130 (1962).
31. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Формирование ударных электромагнитных волн с двумя разрывами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 116 (1962).
32. А. М. Белянцев, Л. А. Островский, Распространение импульсов в линиях с нелинейными полупроводниковыми емкостями, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 183 (1962).
33. L. Landau, E. Lifshitz, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, Phys. Zs. der S. U., **8**, 153 (1935).
34. W. B. Hatfield, B. A. Auld, Electromagnetic shock waves in gyromagnetic media, J. Appl. Phys., **34**, 2941 (1963).
35. M. C. Gutzwiller, W. L. Miranker, Nonlinear wave propagation in a transmission line loaded with thin permallog films, IBMJ Res. and Devel, **7**, 278 (1963); Экспр. информ., вычислит. техн., № 14 (1964).
36. Л. А. Островский, Отражение ударных электромагнитных волн от короткозамкнутого конца линии передачи с ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 413 (1963).
37. Л. А. Островский, Образование и развитие ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом, ЖТФ, **33**, 1080 (1963).
38. Г. И. Фрейдман, Об ударных волнах в линиях передачи с тонким слоем феррита. I, II, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 324, 388 (1963).
39. Г. И. Фрейдман, О зависимости структуры ударных волн от дисперсионной характеристики системы в линейном приближении, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 536 (1963).
40. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Распространение электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами. I. Нестационарные процессы, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 973 (1963).
41. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Распространение электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами. II. Структура фронта ударных волн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 985 (1963).
42. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Формирование ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 551 (1963).
43. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Стационарные электромагнитные ударные волны в линиях передачи с ненасыщенным ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 561 (1963).
44. И. Г. Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1963.
45. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, О волновых процессах в линиях с шунтирующим нелинейным сопротивлением, Радиотехника и электроника, **8**, 2006 (1963).
46. L. J. F. Broer, Exact solution of the reflexion problem in nonlinear optics, Phys Lett., **4**, 65 (1963).
47. Л. А. Островский, К теории волновых движений нестационарных сжимаемых сред, ПММ, **27**, 924 (1963).
48. Л. А. Островский, Электромагнитные волны в нелинейных средах с дисперсией, ЖТФ, **33**, 905 (1963).
49. А. М. Белянцев, Диссертация, Московский университет, 1963.
50. Г. И. Фрейдман, Диссертация, Горьковский университет, 1963.
51. Л. А. Островский, Диссертация, Горьковский университет, 1963.
52. Ю. К. Богатырев, Диссертация, Горьковский политехнический институт, 1964.

53. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Э. Я. Дауме, Г. И. Фрейдман, Экспериментальное исследование распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в волноводах, заполненных ферритом, ЖЭТФ, 47, 1699 (1964).

54. А. М. Белянцев, Г. И. Фрейдман, Электромагнитные волны конечной амплитуды в связанных линиях передачи с нелинейными параметрами, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 7, 514 (1964).

55. J. R. Alday, Narrow-pulse generation by nonlinear transmission lines, Proc. IEEE 52, 739 (1964).

56. А. С. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.

57. Л. А. Поспелов, К распространению электромагнитных волн в нелинейных средах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 446 (1964).

58. Л. А. Моругин, Г. В. Глебович, Наносекундная импульсная техника, изд. Сов. радио, М., 1964.

59. Ю. Ф. Филиппов, К теории распространения стационарных волн конечной амплитуды в ферритах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 292 (1965).

60. G. B. Whitham, Nonlinear dispersive waves, Proc. Roy. Soc., ser. A, 283, 238 (1965).

61. Ю. К. Богатырев, Образование и развитие ударных электромагнитных волн в линиях передачи с сегнетоэлектриками, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1171 (1965).

62. A. M. Beljantsev, A. V. Gaponov, G. I. Freidman, Structure of shock electromagnetic wave front in transmission lines with nonlinear parameters, URSI Symposium, Delft, Netherlands, 1965; Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967.

63. A. V. Gaponov, L. A. Ostrovsky, M. I. Rabinovich, Electromagnetic waves in non-linear transmission lines with active parameters, URSI Symposium, Delft, Netherlands, 1965; Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967.

64. L. A. Ostrovsky, Propagation of modulated waves in nonlinear dispersive media, URSI Symposium, Delft, Netherlands, 1965; Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967.

65. Л. А. Островский, Взаимодействие ударных электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 285 (1965).

66. Л. А. Островский, Вращательные разрывы в электродинамике нелинейных сред, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 738 (1965).

67. Ю. К. Богатырев, Расчет нелинейной формирующей линии с сосредоточенными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 37 (1965).

68. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Расчет нелинейных формирующих линий с ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 8, 41 (1965).

69. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, О структуре фронта ударных электромагнитных волн в линиях передачи с нелинейными параметрами, ЖТФ, 35, 677 (1965).

70. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, О структуре ударных волн в нелинейных линиях передачи с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы, ЖТФ, 35, 690 (1965).

71. D. T. Bickley, Wave propagation in nonlinear transmission lines with simple losses, Electronics Lett., 2, 167 (1966).

72. М. И. Рабинович, Об автоколебаниях в кольцевой линии с распределенными нелинейными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 794 (1965).

73. И. Г. Басов, В. С. Летохов, Распространение светового импульса в среде с инверсной заселенностью, Оптика и спектроскопия, 18, 1042 (1965).

74. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.

75. П. М. Колесников, Об аналитических решениях одного класса уравнений нелинейной электродинамики, ЖТФ, 36, 2199 (1966).

76. F. Falside, D. T. Bickley, Nonlinear delay line with a constant characteristic impedance, Proc. IEE, 113, 263 (1966).

77. П. М. Колесников, Аналитические решения краевых задач нелинейной электродинамики для ферромагнитных сред. I, ЖТФ, 37, 17 (1967); II, 37, 446 (1967).

78. Л. А. Островский, Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде, ЖЭТФ, 51, 1189 (1966).

79. Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Исследование автоколебаний в активной кольцевой линии, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, 128 (1967).

80 А. Ф. Городецкий, А. Ф. Кравченко, Полупроводниковые приборы, изд. Высш. школа, М., 1967.

81. Л. А. Островский, Ударные электромагнитные волны в нелинейных активных линиях, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика (в печати).

82. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, В. В. Папко, Исследование ударных электромагнитных волн в нелинейных активных линиях, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1967 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

УДК 530.1 : 621.38

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЗБУЖДЕННЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов

ВВЕДЕНИЕ

1. Теория индуцированного излучения развивалась, начиная с Эйнштейна [1], в основном применительно к квантовым системам. Классические модели привлекались скорее для интерпретации изучаемых эффектов, хотя индуцированные радиационные процессы (излучение и поглощение) имеют первостепенное значение для многих общих проблем как квантовой, так и «классической» радиофизики. Одной из таких проблем является проблема усиления и генерирования электромагнитных колебаний; очевидно, что, в конечном счете, только с индуцированными радиационными процессами может быть связано возникновение когерентного излучения в системе предварительно несфазированных заряженных частиц (системе возбужденных атомов или молекул, электронном потоке, плазме и т. д.).

Здесь уместно подчеркнуть, что индуцированное излучение, вообще говоря, существенным образом зависит от начального состояния системы заряженных частиц и электромагнитного поля. При квантовом рассмотрении обычно предполагается, что в начальный момент частица (ансамбль) находится в состоянии с определенной энергией (импульсом) и, соответственно, имеет полностью неопределенную фазу (координату). В этом случае индуцированное излучение связано только с возмущениями, накладываемыми заданным внешним полем на движение частицы, и описывается хорошо известными формулами для вероятности индуцированных переходов. С классической точки зрения такой постановке задачи соответствует рассмотрение системы частиц, имеющих в начальный момент одинаковые энергии (импульсы) и равномерно распределенных по начальным фазам (координатам); отметим, что именно такие начальные условия представляют интерес для большинства физических задач, в частности, для упомянутой выше проблемы усиления и генерирования электромагнитных колебаний. Индуцированные радиационные процессы (излучение и «истинное» поглощение классических частиц разделить невозможно) в такой системе обусловлены группировкой частиц под действием внешнего поля, т. е. появлением макроскопического переменного тока (поляризации) и когерентным излучением образовавшихся сгустков. После излучения макроскопического тока (сгустков), накладываясь на внешнее поле, приводит либо к увеличению полной электромагнитной энергии (индуцированное излучение), либо к ее уменьшению (поглощение). В дальнейшем, говоря об индуцированном излучении, мы будем всюду иметь в виду именно такую постановку задачи, т. е. речь будет идти не об излучении отдельной заряженной частицы, а о коллективном явлении — когерентном излучении сгустков, образовавшихся в системе заряжен-

ных частиц под действием «первичного» электромагнитного поля, введенного в систему извне (усилитель), или под действием самосогласованного поля, созданного самими заряженными частицами (генератор с обратной связью). Спонтанное излучение, связанное при таком подходе с флуктуационными процессами (флуктуации плотности, скорости и т. п.), рассматриваться вообще не будет*.

2. В настоящее время для усиления и генерирования электромагнитных колебаний в диапазоне сверхвысоких частот широкое применение находят электронные приборы, основанные на использовании индуцированного черенковского (лампы с бегущей волной, магнетроны) или индуцированного переходного (лампы с сеточным управлением, клистроны) излучений электронов. Однако всем этим приборам свойственен один общий недостаток, мешающий их применению в диапазоне очень коротких волн. Черенковское излучение возникает при движении электронов вблизи (на расстоянии, не превышающем по порядку величины длину волны λ) поверхности среды с показателем преломления, большим единицы, а переходное — при движении около неоднородностей с размерами, меньшими (или порядка) λ. В электронике СВЧ роль такой среды играет замедляющая система ЛБВ или блок резонаторов магнетрона (периодическая структура с периодом, меньшим λ), а роль неоднородностей — электроды лампы или стенки резонатора (сетки) клистрона. Таким образом, в обычных сверхвысокочастотных электронных приборах принципиально наличие находящихся в непосредственной близости от электронного пучка электродов, размеры которых не превышают длину волны усиливаемого или генерируемого излучения. Это обстоятельство и является основным препятствием при создании мощных усилителей и генераторов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн.

Естественно встает вопрос о возможности использования в усилителях и генераторах сверхвысоких частот другого вида излучения (не черенковского или переходного), реализация которого не требовала бы применения замедляющих систем, резонаторов с узкими зазорами и т. п. Если говорить об излучении одиночной частицы (спонтанном), то таким свойством обладает, как известно, излучение ускоренно движущегося заряда, например, электрона, колеблющегося в статическом электромагнитном поле (возбужденного электрического осциллятора). Что же касается условий, необходимых для возникновения когерентного индуцированного излучения в системе возбужденных осцилляторов, случайным образом распределенных по начальным фазам, то в этом вопросе единая точка зрения до сравнительно недавнего времени отсутствовала**.

Если индуцированное излучение квантовых осцилляторов (атомов и молекул) хорошо изучено и широко используется в квантовой электронике, то индуцированное излучение классических возбужденных осцилляторов с общей точки зрения практически (за исключением [3]) не рассматривалось. Более того, несмотря на появление ряда приборов, основанных на использовании потоков колеблющихся электронов (та-

* Подробное сопоставление результатов расчета квантовым и классическим методами как индуцированного, так и спонтанного излучения для электрических осцилляторов (в дипольном приближении) можно найти в обзорах [2, 3], а также в монографии [4].

** Необходимость использования классических осцилляторов в тех случаях, когда речь идет о создании мощных усилителей и генераторов миллиметрового (и даже субмиллиметрового) диапазонов волн, диктуется малостью энергии кванта излучения в этом диапазоне; для получения мощного излучения запас энергии каждого осциллятора должен во много раз превышать энергию одного кванта.

ких как, например, генератор Баркгаузена—Курца [5], строфотрон [6, 7], гелитрон [8], антиклистрон [9] и т. д.), и вполне успешные попытки их теоретического исследования, возможность реализации индуцированного излучения в системе моноэнергетических классических осцилляторов подвергалась сомнению [3].

Известным толчком, приведшим, в конце концов, к сложившемуся к настоящему времени представлению о механизмах когерентного индуцированного излучения возбужденных классических осцилляторов, послужили работы [7, 10–14]. В качестве основных причин, вызывающих группировку (когерентность колебаний) осцилляторов в поле излучения, в них указывались неизохронность осцилляторов, ответственная за фазовую группировку [7, 11, 12, 14], и смещение осцилляторов в неоднородном поле излучения, приводящее к их пространственной группировке [10, 14]*. По существу аналогичные механизмы определяют и индуцированные радиационные процессы в системе квантовых осцилляторов: первый связан с неэквидистантностью их энергетического спектра, а второй — с отдачей при излучении фотона [14].

Использование индуцированного излучения классических возбужденных осцилляторов открывает, таким образом, возможность создания весьма широкого класса приборов, предназначенных для усиления и генерирования электромагнитных колебаний. В том случае, когда роль осцилляторов играют электроны, колеблющиеся в макроскопических статических электрическом и магнитном полях, эти приборы, являющиеся классическими аналогами квантовых усилителей и генераторов, естественно называть «электронными мазерами». (Первым электронным мазером, появившимся задолго до соответствующих квантовых приборов, был уже упоминавшийся выше генератор Баркгаузена—Курца.) Выгодным отличием электронных мазеров от электронных приборов обычного типа является отсутствие принципиальной необходимости в электродинамических системах (замедляющих системах, резонаторах), имеющих элементы с размерами порядка длины волны усиливаемого или генерируемого излучения; от квантовых приборов их отличает возможность перестройки рабочей частоты в весьма широких пределах — частота колебаний используемых в них осцилляторов определяется напряженностью статических полей в электронно-оптической системе.

3. Настоящий обзор преследует цель прежде всего, по возможности полно осветить вопрос о механизмах группировки возбужденных классических осцилляторов, обусловливающих возникновение когерентного индуцированного излучения, а также показать пригодность определенного класса осцилляторов для создания «классических» электронных мазеров большой мощности в коротковолновой части сверхвысокочастотного диапазона. Наиболее подробно рассматривается простейшая модель «классической» активной среды, состоящей из нелинейных возбужденных осцилляторов с одной колебательной степенью свободы. Эта модель позволяет последовательно проанализировать (классическим и квазиклассическим способами) особенности взаимодействия осцилляторов со слабым электромагнитным полем, выяснить влияние различных характеристик осцилляторов (нелинейность, ширина линии) на эффективность их взаимодействия с излучением, рассмотреть особенности недипольного взаимодействия осцилляторов с полем (т. е. учесть пространственную дисперсию активной среды), оценить полный энер-

* При определенных условиях необходимая для возникновения когерентного излучения фазировка осцилляторов может быть обусловлена и некоторыми другими механизмами (см. раздел 3).

гетический выход (коэффициент полезного действия) когерентно излучающей системы и т. п.

Полученные результаты носят достаточно общий характер и применимы к осцилляторам (потокам колеблющихся электронов, удерживаемым электростатическими и магнитостатическими полями) различного типа. Вопрос о целесообразности использования той или иной системы инжекции и формирования «колеблющегося» электронного пучка (т. е. вопрос об электронно-оптической системе электронного мазера, обеспечивающей требуемую частоту и амплитуду колебаний) не имеет однозначного ответа и должен решаться в соответствии с конкретным назначением прибора.

К сожалению, в кратком обзоре нет возможности проанализировать результаты всех известных работ по теоретическому и экспериментальному исследованию устройств, использующих для усиления и генерирования электромагнитного излучения электроны, колеблющиеся в электронно-оптических системах различного типа. Поэтому нам казалось наиболее естественным, хотя бы коротко, остановиться на теоретических и экспериментальных исследованиях индуцированного излучения электронов, вращающихся в постоянном магнитном поле (индуцированного циклотронного излучения). Приборы, основанные на использовании этого излучения, получившие название мазеров на циклотронном резонансе (МЦР), по-видимому, наиболее перспективны в качестве усилителей и генераторов мощных электромагнитных колебаний в коротковолновой части сверхвысокочастотного диапазона.

1. СИСТЕМА ВОЗБУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ КАК «КЛАССИЧЕСКАЯ» АКТИВНАЯ СРЕДА

Рассмотрим воздействие слабого переменного электрического поля на систему заряженных частиц, колеблющихся в потенциальной яме. Реакция такой среды на квазимонохроматическое переменное поле может быть охарактеризована комплексной проводимостью или комплексной диэлектрической проницаемостью.

1. Допустим, что частицы совершают одномерные колебания, описываемые уравнением

$$m\ddot{x} + \frac{du}{dx} = -eE(t) \equiv F(t), \tag{1.1}$$

где $-e$ и m — заряд и масса частицы, $u(x)$ — потенциал статического поля, $E(t)$ — переменное электрическое поле. Решение уравнения

$$m\ddot{x}^{(0)} + \frac{du(x^{(0)})}{dx^{(0)}} = 0, \tag{1.2}$$

которому удовлетворяют невозмущенные колебания частиц, представляет собой периодическую функцию времени

$$\begin{gathered} x^{(0)} = x^{(0)}(\mathcal{E}, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(-ik\varphi), \\ \varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\mathcal{E} = \frac{m}{2}(\dot{x}^{(0)})^2 + u(x^{(0)})$ — энергия данной частицы (осциллятора), φ и φ_0 — текущая и начальная фазы колебаний. Частота осциллятора ω_0 в общем случае зависит от энергии $\mathcal{E}$.

Обусловленные слабым переменным полем $E(t)$ возмущения $x^{(1)} = x - x^{(0)}$ удовлетворяют уравнению

$$m\ddot{x}^{(1)} + \frac{d^2u(x^{(0)})}{dx^{(0)2}}\, x^{(1)} = F. \tag{1.4}$$

Его решение может быть получено методом вариации произвольных постоянных C_1 и C_2 в общем решении $x^{(1)}_{\text{одн}} = C_1x_1^{(1)} + C_2x_2^{(1)}$ соответствующего (1.4) однородного уравнения. В качестве $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ могут быть выбраны функции $x_1^{(1)} = \dfrac{\partial x^{(0)}}{\partial \varphi_0} = \dfrac{\dot{x}^{(0)}}{\omega_0}$ и $x_2^{(1)} = \dfrac{\partial x^{(0)}}{\partial \mathcal{E}}$, в чем легко убедиться, дифференцируя (1.2) по φ_0 и $\mathcal{E}$ (эти решения линейно независимы, так как $x_1^{(1)}\dot{x}_2^{(1)} - x_2^{(1)}\dot{x}_1^{(1)} = (m\omega_0)^{-1} \neq 0$). Решение уравнения (1.4) имеет вид

$$x^{(1)} = \omega_0 \left(x_2^{(1)} \int_{t_0}^{t} x_1^{(1)} F dt' - x_1^{(1)} \int_{t_0}^{t} x_2^{(1)} F dt' \right). \tag{1.5}$$

2. Пусть осцилляторы непрерывно «рождаются» и «умирают» таким образом, что число частиц, проживших к моменту t время $\tau = t - t_0$, остается неизменным*; распределение осцилляторов по начальным фазам колебаний φ_0 будем считать равномерным, а их начальные энергии $\mathcal{E}$ — одинаковыми. Плотность переменного тока в такой среде равна

$$i = -eN \int_0^\infty g(\tau)\, \bar{\dot{x}}\, d\tau, \tag{1.6}$$

где

$$\bar{\dot{x}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}^{(1)}\, d\varphi_0,$$

N — плотность частиц, $g(\tau)$ — нормированная на единицу функция распределения частиц по временам жизни τ.

Предположим, что переменное поле E является монохроматическим $E = E_0e^{i\omega t}$, а $g(\tau) = \nu e^{-\nu\tau}$. Тогда для $\bar{\dot{x}}$ на основании (1.5), (1.3) имеем

$$\bar{\dot{x}} = ieE \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} \left\{ k\omega_0 \frac{|x_k|^2}{\Delta\omega_k} [1 - \exp(-i\Delta\omega_k\tau)] \right\},$$

где $\Delta\omega_k = \omega - k\omega_0$. Считая, что концентрация осцилляторов достаточно мала и действующее на них поле равно среднему макроскопическому, найдем j:

$$j = \sigma E; \tag{1.7}$$

$$\sigma = e^2N \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} \left(\frac{k\omega_0 |x_k|^2}{i\Delta\omega_k + \nu} \right). \tag{1.8}$$

* Такой процесс моделирует условия, реализующиеся в электронных приборах, в пренебрежении зависимостью времени пребывания электронов в пространстве взаимодействия от высокочастотного поля, учет которой приводит к некоторому изменению выражений для проводимости (1.8) и (1.13), сводящемуся к поправке в коэффициенте A в (1.14).

Коэффициент σ в (1.7) имеет смысл проводимости среды. Диэлектрическая проницаемость по определению равна

$$\varepsilon = 1 - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{1.9}$$

3. Формула (1.8) для проводимости «классической» активной среды может быть получена также и из квантовой теории. Для классических осцилляторов квантовый вывод, естественно, не дает новой информации, но подчеркивает общность природы индуцированного излучения в классических и квантовых системах [3, 14]. С квантовой точки зрения частица, колеблющаяся в потенциальной яме $u(x)$, представляет собой осциллятор, обладающий дискретным энергетическим спектром. Проводимость системы осцилляторов по отношению к переменному полю $E = E_0 e^{i\omega t}$ равна [4]

$$\sigma = \frac{e^2 N}{\hbar}\sum_{lm}(\sigma_{ll} - \sigma_{mm})\frac{\omega_{ml}|x_{ml}|^2}{i(\omega_{ml}+\omega)+\nu}, \tag{1.10}$$

где σ_{rs} — элементы матрицы плотности в невозмущенном состоянии, x_{ml} — матричный элемент координаты x, $\hbar$ — постоянная Планка, $\omega_{ml} = (\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_l)/\hbar$ — частота перехода осциллятора из состояния m с энергией $\mathcal{E}_m$ в состояние l с энергией $\mathcal{E}_l$, ν^{-1} — среднее время жизни осцилляторов. Если начальное состояние осцилляторов есть состояние с определенной энергией $\mathcal{E}_p$ (и полностью неопределенной фазой), то $\sigma_{mm} = \delta_{mp}$ и $\sigma_{ll} = \delta_{lp}$ (δ_{mp} и δ_{lp} — символы Кронекера).

Действие переменного поля на осцилляторы, как это следует из (1.10), может приводить как к уменьшению их энергии (индуцированное излучение), так и к ее увеличению (индуцированное поглощение). Вероятность соответствующих переходов в общем случае различна, однако в системе классических осцилляторов эти процессы раздельно не наблюдаются—зависимость макроскопических параметров среды от времени определяется одновременно происходящими актами индуцированного излучения и индуцированного поглощения энергии отдельными частицами. В самом деле, квазиклассическое движение осцилляторов имеет место при достаточно большом значении энергии, когда их энергетический спектр становится почти эквидистантным [15]: приращения энергии $\Delta\mathcal{E}$ при переходах $p \to p \pm k$ стремятся к $\pm\hbar k\omega_0$, частоты переходов стремятся к гармоникам частоты ω_0 ($\omega_{p,\,p-k} \to \omega_{p+k,\,p} \to k\omega_0$), а матричные элементы координаты x для состояний с большой энергией близки к коэффициентам при гармониках частоты ω_0 в формуле (1.3) ($|x_{p,\,p-k}|^2 \to |x_{p+k.\,p}|^2 \to |x_k|^2$). Переход к квазиклассическому пределу в выражении (1.10) ($\hbar \to 0$ [3]) приводит к формуле для проводимости, совпадающей с (1.8).

4. Наибольший интерес представляет взаимодействие осцилляторов с переменным полем при условии, что их среднее время жизни ν^{-1} значительно превышает период колебаний:

$$\nu \ll \omega_0. \tag{1.11}$$

При этом условии взаимодействие между «классической» активной средой и полем является наиболее эффективным, если частота поля близка к одной из гармоник собственной частоты осцилляторов:

$$|\omega - n\omega_0| \ll \omega_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.12}$$

Ограничения (1.11) и (1 12) позволяют упростить выражение (1.8) для проводимости среды:

$$\sigma \simeq e^2 N n^2 \omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} \left(\frac{\omega_0 |x_n|^2}{i\Delta\omega_n + \nu} \right). \tag{1.13}$$

Представим (1.13) в виде суммы двух членов, отличающихся друг от друга степенями резонансного знаменателя $i\Delta\omega_n + \nu$:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

$$\sigma_1 = \frac{A}{i\Delta\omega_n + \nu}, \quad \sigma_2 = \frac{iB}{(i\Delta\omega_n + \nu)^2}, \tag{1.14}$$

$$A = e^2 N n^2 \omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} (\omega_0 |x_n|^2), \qquad B = e^2 N n^3 \omega_0^2 |x_n|^2 \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}},$$

и запишем σ_1 и σ_2 в виде суммы активных и реактивных составляющих:

$$\sigma_1 = \sigma_1' + i\sigma_2'', \qquad \sigma_2 = \sigma_2' + i\sigma_2''. \tag{1.15}$$

Согласно (1.14), (1.15), σ_1' и σ_2' являются четными, а σ_1'' и σ_2' — нечетными функциями $\Delta\omega_n = \omega - n\omega_0$. Их качественный вид изображен на рис. 1.

Функция $\sigma_1(\Delta\omega_n)$ сходна с резонансной кривой неконсервативного линейного осциллятора. Однако для системы нелинейных осцилляторов $\left(\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \neq 0\right)$ знак σ_1', т. е. знак работы переменного поля над осцилляторами, может быть и отрицательным, для чего необходимо

$$|x_n|^2 \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} < -\omega_0 \frac{d|x_n|^2}{d\mathcal{E}}. \tag{1.16}$$

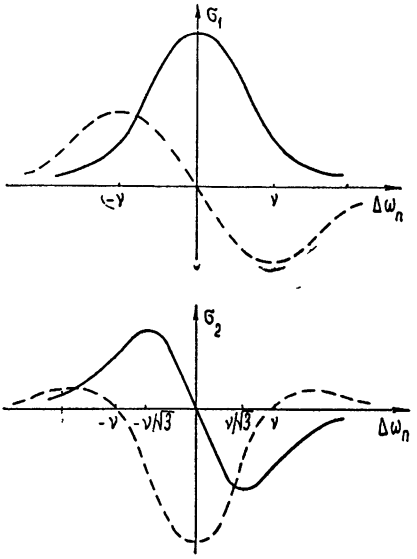


Рис. 1. Проводимость „классической" активной среды $\left(\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} < 0\right)$: —— $\sigma'(\Delta\omega_n)$; — — — $\sigma''(\Delta\omega_n)$.

Функция $\sigma_2'(\Delta\omega_n)$ меняет знак при $\Delta\omega_n = 0$ и отрицательна при

$$\Delta\omega_n \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} < 0. \tag{1.17}$$

Так как максимальная величина σ_1' пропорциональна ν^{-1}, а максимальная величина σ_2' пропорциональна ν^{-2}, то для системы достаточно «долго живущих» ($\nu \to 0$) осцилляторов с $\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \neq 0$ даже при $\sigma_1' > 0$ всегда существует интервал $\Delta\omega_n$, удовлетворяющий условию (1.17), где активная составляющая проводимости отрицательна: $\sigma' = \sigma_1' + \sigma_2' < 0$, т. е. осцилляторы отдают свою энергию переменному полю.

5. Согласно (1.14)—(1.17), макроскопические характеристики «классической» активной среды существенно зависят от неизохронности осцилляторов, т. е. от связи между их частотой ω_0 и энергией $\mathcal{E}$. Дело в том, что неизохронность осцилляторов влияет на характер их группировки под действием переменного поля [14]. При резонансе ($\omega = \omega_0$) добавки к амплитудам и фазам линейных $\left(\text{изохронных, } \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} = 0\right)$ осцил-

ляторов растут пропорционально t (линейная группировка), а у нелинейных $\left(\text{неизохронных, } \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \neq 0\right)$ осцилляторов при $\omega = n\omega_0$ добавки к фазам, вычисленные по (1.5), содержат не только линейные, но и квадратичные по t члены (квадратичная группировка).

Процесс квадратичной группировки моноэнергетических неизохронных осцилляторов пояснен на рис. 2, где изображена фазовая плоскость $x\dot{x}$ для осцилляторов с $\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} < 0$. Те осцилляторы, которые в среднем за период отдают энергию переменному полю, переходят на траектории, внутренние по отношению к начальной, и колеблются быстрее (их относительное движение показано стрелкой А); наоборот, осцилляторы, энергия которых увеличивается, переходят на внешние траектории и колеблются медленнее (их относительное движение показано стрелкой В). В результате группировки частицы собираются в «фазовый сгусток», который на рис. 2 обведен пунктиром и заштрихован*. Аналогичная группировка имеет место и при $\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} > 0$.

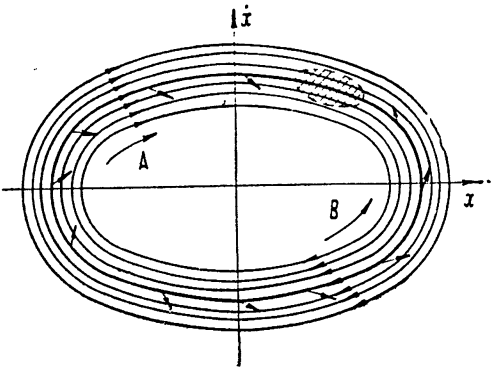


Рис. 2. Фазовая группировка неизохронных осцилляторов в переменном поле.

В выражении (1.13) для проводимости «классической» активной среды линейной группировке осцилляторов соответствует член σ_1, имеющий в знаменателе $(i\Delta\omega_n + \nu)$ в первой степени, а квадратичной группировке — слагаемое σ_2 с резонансным знаменателем $(i\Delta\omega_n + \nu)^2$, отличное от нуля лишь при $\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \neq 0$.

При условии (1.17) $(\sigma_2' < 0)$ неизохронные осцилляторы группируются в такой фазе колебаний, когда действие поля приводит в среднем к их торможению. Условие (1.16) $(\sigma_1' < 0)$ реализуется, в частности, если потенциальная яма $u(x)$ имеет «полочку» (рис. 3), благодаря чему для

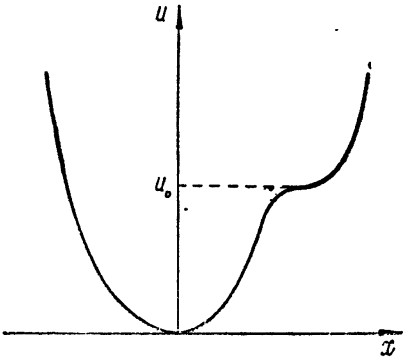


Рис. 3. Потенциальная яма с „полочкой".

* Фазовая группировка неизохронных осцилляторов в резонансном поле аналогична группировке прямолинейно движущихся электронов в поле «синхронной» (имеющей фазовую скорость, близкую к скорости электронов) электромагнитной волны,

частиц с энергией, несколько меньшей u_0, частота ω_0 имеет большую отрицательную производную*.

6. Характер поглощения энергии возбужденными классическими осцилляторами имеет простое объяснение и в рамках квантовой теории [14]. Как уже отмечалось, энергетический спектр классического осциллятора является в общем случае неэквидистантным (рис. 4), так что переходам с населенного p-го уровня на $(p-n)$-ый и на $(p+n)$-ый соответствуют лишь приближенно одинаковые частоты $n\omega_0$. В результате на частотах, близких к $n\omega_0$, классический осциллятор ведет себя как трехуровневый квантовый объект, поглощая энергию на частоте $\omega_{p+n,p}$ и излучая на частоте $\omega_{p,p-n}$ (при $n>0$).

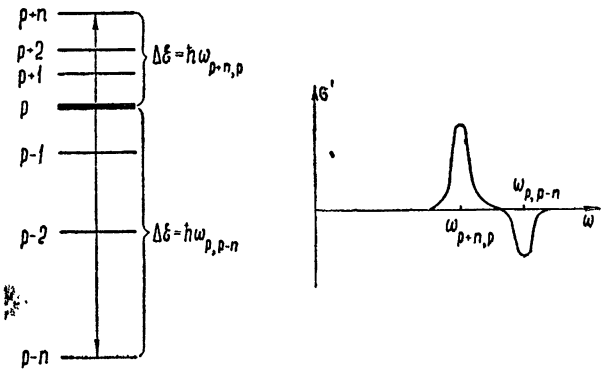


Рис. 4. Энергетический спектр и форма линии поглощения системы неизохронных классических осцилляторов.

Кривая поглощения σ' для этого случая изображена на рис. 4. С ростом энергии осцилляторов разница между частотами $\omega_{p+n,p}$ и $\omega_{p,p-n}$ становится пренебрежимо малой по сравнению с ν, в результате σ' стремится к (1.8) и представляет собой сумму функций σ_1' и σ_2', изображенных на рис. 2. Четная функция $\sigma_1'(\Delta\omega_n)$ обязана своим происхождением различию вероятностей переходов $p\to p+n$ и $p\to p-n$, однако в силу того, что эти переходы происходят на разных, хотя и очень близких, частотах, σ' как функция $\Delta\omega_n$ имеет и нечетную составляющую $\sigma_2'(\Delta\omega_n)$.

Отрицательный знак четной составляющей проводимости σ_1' для осцилляторов с большой отрицательной производной $\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}}$ (см. условие (1.16)) объясняется тем, что при $\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}}<0$ величина излучаемого кванта, очевидно, больше, чем величина кванта, поглощаемого осциллятором. Последнее обстоятельство может обеспечить превышение интенсивности индуцированного излучения над интенсивностью индуцированного поглощения даже в том случае, если вероятность переходов $p\to p+n$ превышает вероятность переходов $p\to p-n$.

* Если «полочка» имеет длинный горизонтальный участок, рассматриваемая система представляет собой, по существу, модель электронного прибора с фазовой селекцией (отбором) колеблющихся частиц [16] Электроны, имеющие «неблагоприятную» фазу, получив под действием переменной силы приращение энергии, прекращают резонансное взаимодействие с высокочастотным полем, а «правильнофазные» электроны имеют возможность в течение долгого времени отдавать энергию, не выходя из резонанса.

2. НЕДИПОЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОЛЕМ

Поскольку амплитуда колебаний классических осцилляторов может быть сравнима с характерным масштабом неоднородности переменного электромагнитного поля (в частности, с длиной волны генерируемого или усиливаемого излучения), при исследовании индуцированных радиационных процессов необходим (в отличие от принципиально квантовых систем), вообще говоря, учет недипольного характера взаимодействия осцилляторов с полем, т. е. пространственной дисперсии «классической» активной среды. Эффекты, связанные с недипольным взаимодействием, оказываются в ряде случаев особенно существенными, если частота излучения близка к одной из достаточно высоких гармоник собственной частоты осцилляторов. Учет пространственной дисперсии в общем виде (без конкретизации структуры поля) затруднителен*; поэтому здесь мы ограничимся исследованием энергообмена между осцилляторами и электромагнитным полем, вычисляя, как это обычно делается, среднюю работу переменной силы над колеблющимися частицами.

1. Рассмотрим систему частиц с двумя степенями свободы, движение которых в присутствии переменной силы удовлетворяет уравнениям

$$m\ddot{x} + \frac{du(x)}{dx} = F_x(x, y, t); \tag{2.1}$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, t). \tag{2.2}$$

В отсутствие переменного поля частицы совершают колебания в потенциальной яме $u(x)$, описываемые функцией (1.3), и могут свободно перемещаться по координате y. Будем считать, что в исходном состоянии осцилляторы равномерно распределены по фазе φ_0, имеют одинаковую энергию $\mathcal{E}$ и одну и ту же координату $y^{(0)}$.

Переменная сила (сила Лоренца), смещающая частицы с их стационарных траекторий, может быть представлена в виде потенциального вектора

$$F^{(0)} = F(x^{(0)}, y^{(0)}, t) = -\nabla [U(x^{(0)}, t) + (y - y^{(0)})\, V(x^{(0)}, t)]. \tag{2.3}$$

Потенциал $U(x^{(0)}, t) + (y - y^{(0)})\, V(x^{(0)}, t)$ имеет смысл энергии взаимодействия осцилляторов с переменным полем. Представим функции $U(x^{(0)}, t)$ и $V(x^{(0)}, t)$ в виде рядов Фурье

$$U(x^{(0)}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(\mathcal{E}, t)\, e^{ik\varphi}, \quad V(x^{(0)}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k(\mathcal{E}, t)\, e^{ik\varphi}, \tag{2.4}$$

а функции $U_k(\mathcal{E}, t)$ и $V_k(\mathcal{E}, t)$ разложим в интегралы Фурье

$$U_k(\mathcal{E}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{U}_k(\mathcal{E}, \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad V_k(\mathcal{E}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{V}_k(\mathcal{E}, \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{2.5}$$

Тогда для средней (по фазе φ_0) работы поля над осцилляторами в линейном приближении имеем (см. Приложение)

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y, \tag{2.6}$$

* Вычисление проводимости «классической» активной среды с учетом пространственной дисперсии для некоторых конкретных примеров (волны в однородной неравновесной магнитоактивной плазме, в волноводах, заполненных плазмой, и т. д.) можно найти в работах [13, 17, 18].

где

$$\overline{A}_x = 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} \left[|k\omega_0 | \overline{U}_k(\mathcal{E}, k\omega_0)|^2 \right] \tag{2.7}$$

— работа, связанная с «поперечной» (фазовой) группировкой осцилляторов (по координате x)*,

$$\overline{A}_y = \frac{2\pi^2}{m} \left\{ |\overline{V}_0(\mathcal{E}, 0)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\omega_0} \left[|\omega_0 | \overline{V}_k(\mathcal{E}, k\omega_0)|^2 \right] \right\} \tag{2.8}$$

— работа, связанная с «продольной» (пространственной) группировкой осцилляторов (по координате y).

Согласно (2.7) и (2.8), работа переменного поля над системой осцилляторов определяется лишь теми спектральными компонентами переменной силы, частоты которых близки к гармоникам частоты ω_0.

Исследование формул (2.6)—(2.8) значительно упрощается, если ширина спектра $\overline{\Delta\omega}$ силы, действующей на осцилляторы, достаточно мала**, т. е.

$$\overline{\Delta\omega} \ll \omega_0, \tag{2.9}$$

а его средняя частота $\bar{\omega}$ близка к одной из гармоник собственной частоты осцилляторов:

$$|\bar{\omega} - n\omega_0| \ll \omega_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.10}$$

При резонансном условии (2.10) работа переменного поля над осцилляторами связана, в основном, с индуцированными радиационными процессами, происходящими на частоте $n\omega_0$:

$$\overline{A}_x \simeq 4\pi^2 n^2 \omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} \left[|\omega_0 | \overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 \right]; \tag{2.11а}$$

$$\overline{A}_y \simeq \frac{4\pi^2}{m} \frac{d}{d\omega_0} \left[|\omega_0 | \overline{V}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 \right]. \tag{2.12}$$

2. При анализе выражения для работы, связанной с поперечной (фазовой) группировкой осцилляторов, удобно представить (2.11а) в следующем виде:

$$\overline{A}_x \simeq 4\pi^2 n^2 \omega_0 \left\{ \omega_0 \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 + \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \left[|\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \omega_0} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 \right] \right\}. \tag{2.11б}$$

---

* Заметим, кстати, что для «классической» активной среды, рассмотренной в разделе 1, усредненный по распределению осцилляторов спектр переменной силы описывается функцией $\overline{|\bar{E}(\omega')|^2} = \frac{|E_0|^2}{8\pi^2} \left[\frac{1}{(\omega+\omega')^2+\nu^2} + \frac{1}{(\omega-\omega')^2+\nu^2} \right]$, и формула (2.7) согласуется с выражением для мощности потерь энергии переменного поля в «классической» активной среде $W = (\sigma'/2)|E_0|^2 = N\nu\overline{A}_x$.

** В электронных приборах, где роль осцилляторов играют электроны, колеблющиеся в макроскопических статических полях, соотношение (2.9) имеет место, если время взаимодействия электронов с квазимонохроматическим высокочастотным полем значительно превышает период их колебаний.

В зависимости от типа осцилляторов, пространственной структуры и спектра переменного поля величина и знак работы $\overline{A}_x$ определяются различными членами, входящими в соотношение (2.11б).

а) В системе осцилляторов с малой неизохронностью (малой величиной $\left|\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}}\right|$) знак работы

$$\overline{A}_x \simeq 4\pi^2 n^2 \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 \qquad (2.13)$$

существенным образом зависит от структуры переменного поля. В частности, работа однордной переменной силы над линейными (изохронными) осцилляторами $\left(\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} = 0\right)$ всегда положительна [3]*.

Если же переменное во времени поле является пространственно-неоднородным, знакопеременным на траектории колебаний частиц, то в среднем за период $2\pi/\omega_0$ оно может оказывать на осцилляторы и тормозящее действие [21]; с квантовой точки зрения при недипольном взаимодействии изохронных осцилляторов с переменным полем становится возможным превышение вероятности индуцированного излучения над вероятностью индуцированного поглощения. Так, например, работа

$$\overline{A}_x = \pi^2 \overline{\omega}^2 |\overline{W}(\overline{\omega} - n\omega_0)|^2 \frac{d}{d\mathcal{E}} J_n^2(\varkappa a),$$

совершаемая в среднем над линейными осцилляторами полем бегущей волны с переменной амплитудой**

$$U = W(t)\cos(\overline{\omega}t - \varkappa x), \qquad W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(\Omega)\, e^{it\Omega t}\, d\Omega,$$

может быть отрицательной, если амплитуда их колебаний a настолько велика, что аргумент $\varkappa a$ функции Бесселя $J_n(\varkappa a)$ превосходит по порядку величины индекс n; $J_n^2(\varkappa a)$ при $\varkappa a \gtrsim n$ перестает быть монотонно растущей функцией $\varkappa a$. Условие $\overline{A}_x < 0$ может выполняться при взаимодействии между электромагнитной волной в достаточно плотной однородной среде и системой заряженных частиц, колеблющихся со сверхсветовой скоростью ($\omega_0 a > \overline{\omega}/\varkappa$), а также при взаимодействии осцилляторов с электромагнитным полем в сильно неоднородной среде (например, в двухпроводном волноводе с малым поперечным сечением [21]). Колеблющиеся частицы отдают свою энергию переменному полю в первом случае посредством «квазичеренковского» излучения, во втором случае — посредством переходного излучения.

---

* Следует, однако, иметь в виду, что данное утверждение, вообще говоря, несправедливо по отношению к осцилляторам с несколькими степенями свободы В частности, индуцированное излучение может преобладать над индуцированным поглощением в системе осцилляторов типа волчка [19]. воздействие однородного поля с частотой, близкой к частоте прецессии, приводит к увеличению кинетической и уменьшению потенциальной энергии таких осцилляторов, причем в целом энергия осцилляторов уменьшается По существу, на этом эффекте основан принцип действия цилиндрического многорезонаторного магнетрона [20]; ближайшими квантовыми аналогами подобного рода классических приборов являются двухуровневые парамагнитные системы ([4], § 19, 41, 42).

** Изменение амплитуды может быть связано, в частности, с конечностью времени пребывания осцилляторов в поле волны.

Описанный эффект имеет место и в системах неизохронных осцилляторов, помещенных в неоднородное переменное поле, однако при наличии достаточно большой неизохронности осцилляторов более существенными оказываются уже рассмотренные ранее (в разделе 1) механизмы, каждый из которых может приводить к преобладанию индуцированного излучения над индуцированным поглощением даже в тех случаях, когда переменное поле однородно.

б) Если производная от спектра переменной силы пренебрежимо мала:

$$\left|\omega_0 \frac{\partial}{\partial\omega_0} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2\right| \ll |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2, \tag{2.14}$$

знак работы поля над осцилляторами

$$\overline{A}_x \simeq 4\pi^2 n^2 \omega_0 \left[\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial\mathcal{E}} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2\right] \tag{2.15}$$

может быть отрицательным при достаточно большой отрицательной производной $\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}}$, например, в системе осцилляторов с потенциальной ямой, имеющей «полочку» (рис. 3). Следует, однако, иметь в виду, что при резонансных условиях (2.9) и (2.10) соотношение (2.14) выполняется лишь в очень малой окрестности частоты, на которой $\frac{\partial}{\partial\omega} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, \omega)|^2 = 0$.

в) На большей части интервала $\overline{\Delta\omega}$, удовлетворяющего условию (2.9), где $\frac{\partial}{\partial\omega} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, \omega)|^2$ порядка $|\overline{U}_n(\mathcal{E}, \omega)|^2/\overline{\Delta\omega}$, имеет место соотношение

$$\omega_0 \left|\frac{\partial}{\partial\omega_0} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2\right| \gg |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2, \tag{2.16}$$

обратное (2.14). Если при этом

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2\right| \ll \left|\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial\omega_0} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2\right|, \tag{2.17}$$

то выражение (2.11б) для работы $\overline{A}_x$ может быть приближенно записано в виде

$$\overline{A}_x \simeq 4\pi^2 n^2 \omega_0^2 \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial\omega_0} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2. \tag{2.18}$$

Как отсюда следует, $\overline{A}_x < 0$, если

$$\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial\omega_0} |\overline{U}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 < 0. \tag{2.19}$$

Спектр переменной силы $|\overline{U}_n(\mathcal{E}, \omega)|^2$ имеет большую производную (условие (2.17)) при длительном воздействии квазимонохроматического поля на осцилляторы, что при большой величине $|d\omega_0/d\mathcal{E}|$ приводит к преобладанию квадратичной группировки осцилляторов над их линей-

ной группировкой (раздел 1)*. Условие (2.19), аналогичное (1.17), обеспечивает соотношение между фазой переменного поля и фазой образовавшегося сгустка осцилляторов, благоприятное для отбора энергии у колеблющихся частиц. С квантовой точки зрения этот эффект обусловлен уже отмечавшейся в первом разделе неэквидистантностью энергетических уровней неизохронных осцилляторов.

3. Рассмотрим выражение (2.12) для работы $\overline{A}_y$, связанной с «продольной» (пространственной) группировкой осцилляторов. При резонансных условиях (2.9) и (2.10)

$$\overline{A}_y \simeq \frac{4\pi^2}{m}\omega_0 \frac{d}{d\omega_0}|\overline{V}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2. \tag{2.20}$$

Индуцированное излучение преобладает над индуцированным поглощением, если

$$\frac{d}{d\omega_0}|\overline{V}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2 < 0. \tag{2.21}$$

Присутствие в выражении (2.20) производной от составляющей спектра переменной силы $|\overline{V}_n(\mathcal{E}, n\omega_0)|^2$ связано с квадратичной пространственной группировкой осцилляторов: согласно (2.2), y-компонента смещения осцилляторов при резонансе $\omega = n\omega_0$ растет, как t^2, а при $\omega \simeq n\omega_0$ пропорциональна $(\omega - n\omega_0)^{-2}$ [14]. Хотя пространственная группировка происходит лишь в случае недипольного взаимодействия осцилляторов с неоднородным переменным полем, однако в отличие от фазовой (раздел 1) она имеет второй порядок независимо от того, являются ли осцилляторы изохронными или неизохронными. Условие (2.21) обеспечивает образование сгустка частиц с такой фазой колебаний, при которой действие поперечной компоненты силы $-\nabla[(y - y^{(0)})\,V(x, t)]$ приводит к уменьшению энергии осцилляторов [14].

При квантовой интерпретации выражения (2.12) (см. Приложение) проще всего считать, что в исходном состоянии частицы обладают минимальной «продольной» энергией ($\lambda = 0$). Тогда на частоте $n\omega_0 - \omega_1$ происходит только индуцированное излучение, а на частоте $n\omega_0 + \omega_1$ только индуцированное поглощение. Разница между этими частотами и объясняет (в пределе при $\omega_1 \to 0$) зависимость знака работы переменного поля над осцилляторами от знака производной $\frac{d}{d\omega}|\overline{V}_n(\mathcal{E}, \omega)|^2$ в окрестности $\omega = n\omega_0$.

4. Исследование простейшей модели (уравнения (2.1), (2.2)) не позволяет, естественно, рассмотреть все возможные механизмы индуцированного излучения классических осцилляторов. К числу эффектов, не затронутых в рамках принятых ограничений, относятся, в частности, индуцированное излучение осцилляторов, движущихся со сверхсветовой скоростью в среде (при аномальном эффекте Допплера) [22], а также отрицательное поглощение энергии осцилляторами типа волчка на частоте прецессии (см. сноску на стр. 1425). Существенно, что эти эффекты

* В работе [3], посвященной исследованию модели осцилляторов с одной степенью свободы, не было рассмотрено влияние неоднородности спектра переменной силы на характер индуцированных радиационных процессов. Это привело авторов к неверному выводу о практической невозможности преобладания индуцированного излучения над индуцированным поглощением в системе моноэнергетических возбужденных классических осцилляторов.

имеют место даже в тех случаях, когда исходная колебательная энергия частиц равна нулю.

С другой стороны, сравнительно подробно рассмотренные здесь механизмы группировки и индуцированного излучения присущи достаточно широкому классу возбужденных классических осцилляторов. Так, в системах неизохронных осцилляторов независимо от их конкретной реализации при достаточно длительном резонансном воздействии переменного монохроматического поля всегда преобладает квадратичная группировка или, с квантовой точки зрения, оказывается существенной разница между частотами, на которых происходит индуцированное излучение и индуцированное поглощение. То же может иметь место и при недипольном взаимодействии переменного поля с системой любых, в том числе изохронных, возбужденных осцилляторов.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В «КЛАССИЧЕСКОЙ» АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Ряд общих особенностей взаимодействия ансамблей возбужденных классических осцилляторов с переменными полями можно исследовать, рассматривая электромагнитные явления в простейших электродинамических системах, содержащих «классическую» активную среду, проводимость которой была вычислена в первом разделе. Системы подобного рода могут моделировать работу усилителей и генераторов, основанных на индуцированном излучении колеблющихся электронов, а также процессы в неравновесной магнитоактивной плазме [13, 17], ограниченных плазменных образованиях [23] и т. п.

1. Рассмотрим задачу о самовозбуждении колебаний в резонаторе, заполненном «классической» активной средой. Будем для простоты считать, что резонатор представляет собой обычный колебательный контур с сосредоточенными индуктивностью L, сопротивлением R и емкостью C. Предположим, что среда с диэлектрической проницаемостью, определяемой соотношениями (1.8), (1.9), заполняет конденсатор колебательного контура, так что его емкость равна εC_0, где C_0 — емкость пустого конденсатора. Считая, что сопротивление контура достаточно мало ($cR \ll \sqrt{L/C_0}$, c — скорость света), а среда является разреженной ($4\pi|\sigma| \ll \omega$), уравнение для собственных частот системы

$$\omega^2 - i\omega(Rc^2/L) - (c^2/LC) = 0 \qquad (3.1а)$$

можно преобразовать к виду

$$\omega - \omega_s - i\nu_s = 2\pi i\sigma, \qquad (3.1б)$$

где $\omega_s = c(LC_0)^{-1/2}$ и $\nu_s = c^2R/2L$ — частота и декремент колебаний «холодного» резонатора.

Для существования в резонаторе незатухающих колебаний, очевидно, необходимо, чтобы потери в сопротивлении R были скомпенсированы притоком энергии из «классической» активной среды: $\nu_s \leqslant -2\pi\sigma'$. В частности, колебания с действительной частотой (стартовый режим) имеют место при условиях

$$\omega - \omega_s = -2\pi\sigma'', \quad \nu_s = -2\pi\sigma'. \qquad (3.2)$$

В случае достаточно длительного резонансного взаимодействия осцилляторов с переменным полем, когда «линейная» часть проводимости пренебрежимо мала ($|\sigma_1| \ll |\sigma_2|$), плотность осцилляторов, необходимая для возникновения электромагнитных колебаний, минимальна при

$\omega_s - n\omega_0 = (3\pi B/4\nu^2) - (\nu/\sqrt{3})\,\mathrm{sgn}\left(\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}}\right)$ и определяется соотношением

$$\nu^2\nu_s = (3\pi\sqrt{3}/4)\,|B|. \tag{3.3}$$

В электронных генераторах ν^{-1} имеет смысл времени пролета осциллирующих электронов через резонатор, так что принятое выше ограничение на ν эквивалентно ограничению сверху на поступательную скорость и ограничению снизу на длину области взаимодействия электронов с высокочастотным полем. При $\nu \to 0$, что соответствует бесконечному времени пребывания электронов в резонаторе, электромагнитные колебания самовозбуждаются при сколь угодно малой величине электронной концентрации [24]. Отметим, что в отличие от квантовых генераторов, где стартовая плотность активного вещества обратно пропорциональна первой степени времени жизни возбужденных состояний [4], концентрация «классической» активной среды, входящая в стартовое условие (3.3), оказывается обратно пропорциональной квадрату среднего времени жизни осцилляторов.

2. Исследуем распространение плоской электромагнитной волны $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(i\omega t - i\boldsymbol{kr})$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \exp(i\omega t - i\boldsymbol{kr})$ в однородной «классической» активной среде. При действительной частоте ω волновое число

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\left(1 - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

является в общем случае комплексным. В частности, в разреженной среде, где $4\pi|\sigma| \ll \omega$,

$$\mathrm{Im}\, k = -(2\pi/c)\sigma'. \tag{3.5}$$

Соответствующее пространственное распределение поля вдоль направления распространения волны может быть либо экспоненциально убывающим (при $\sigma' > 0$), либо экспоненциально нарастающим (при $\sigma' < 0$). В среде, состоящей из осцилляторов с достаточно большим временем жизни, наибольшее усиление волны имеет место при резонансном условии $\omega - n\omega_0 = -(\nu/\sqrt{3})\,\mathrm{sgn}\left(\frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}}\right)$, когда пространственный инкремент поля равен $\mathrm{Im}\, k = (3\pi\sqrt{3}/4c)\,(|B|/\nu^2)$.

Подобная система может служить моделью усилителя, в котором волна, распространяющаяся в волноводной системе, взаимодействует с поперечным потоком колеблющихся электронов (лампа с поперечным током).

3. Усиление высокочастотного сигнала может происходить также и в среде, состоящей из возбужденных осцилляторов, совершающих равномерное поступательное движение. Если поступательная скорость частиц v_0 является нерелятивистской ($v_0 \ll c$) и перпендикулярна их колебательной скорости, проводимость среды по отношению к поперечной электромагнитной волне, распространяющейся вдоль потока осцилляторов, получается из (1.8) заменой $\omega \to \omega - \boldsymbol{kv}_0$, учитывающей допплеровскую разность частот волны в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета, движущейся вместе с потоком.

Волновые числа k, определяемые соотношением (3.4), и в этом случае являются комплексными. В частности, если среда является разреженной и состоит из осцилляторов с бесконечным «временем жизни»

($\nu=0$), то при резонансном условии $|\omega - kv_0 - n\omega_0| \ll \omega_0$ соотношение (3.4) приобретает вид

$$(k-k_0)(k-k_n)^2 = -k_0^3C^3 \equiv -k_0^3\left(\frac{2\pi B}{\omega^3}\right)\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 \qquad (3.6)$$

($k_0=\omega/c$, $k_nv_0=\omega-n\omega_0$), аналогичный дисперсионному уравнению для усилителя с бегущей волной и прямолинейным потоком свободно движущихся электронов (ЛБВ типа «O») [25], а также уравнению, описывающему «пучковую» неустойчивость в плазме [26]. Заметим, однако, что, в отличие от последних двух случаев и от неустойчивости в потоке осцилляторов при аномальном эффекте Допплера [22], амплитуда электромагнитной волны, удовлетворяющей (3.6), может нарастать при любом соотношении поступательной скорости осцилляторов и фазовой скорости волны, в том числе (если $n>0$) и на нормальных допплеровских частотах ($\omega > kv_0$).

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В «КЛАССИЧЕСКОЙ» АКТИВНОЙ СРЕДЕ

1. Вернемся к задаче о поведении системы возбужденных осцилляторов в однородном электромагнитном поле. Однако, в отличие от первого раздела, теперь не будем полагать амплитуду поля сколь угодно малой и, следовательно, в выражении для переменного тока, возникающего под воздействием этого поля, не будем ограничиваться первым членом разложения по степеням амплитуды поля.

Таким образом, речь пойдет о нелинейных эффектах в «классической» активной среде при наличии только фазовой группировки неизохронно колеблющихся частиц. Поскольку с помощью линейной теории удалось показать, что активная часть проводимости такой среды может быть отрицательной, изучение ее нелинейных свойств приобретает практический интерес: нелинейная теория может ответить, в частности, на вопрос об эффективности индуцированного излучения («выходе» излучения) и указать степень целесообразности использования его для усиления и генерирования электромагнитных колебаний. Не касаясь всей совокупности эффектов, возникающих в «классической» активной среде в случае конечной амплитуды действующего на нее поля, остановимся лишь на двух из них.

Одним из нелинейных эффектов является зависимость проводимости от амплитуды поля на частоте электромагнитных колебаний — эффект «насыщения». Это явление и будет рассмотрено прежде всего, так как именно оно определяет эффективность индуцированного излучения.

2. Исходя из предположений, сделанных в первом разделе относительно модели «классической» активной среды, запишем плотность индуцированного тока в виде, аналогичном (1.6):

$$j = -eN\int_0^\infty g(\tau)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{x}\,d\varphi_0\right)d\tau. \qquad (4.1)$$

Движение частиц будем описывать уравнением (1.1), а переменное электрическое поле представим как

$$E = E_0e^{i\omega t} + E_0^*e^{-i\omega t}.$$

Так как совокупность осцилляторов представляет собой нелинейную систему, то возникающий в ней под действием монохроматического поля

ток содержит, вообще говоря, бесконечное число гармоник частоты ω. Проводимость среды на первой гармонике в соответствии с (4.1) имеет вид

$$\sigma = -eN|E_0|^{-2}\int_0^\infty g(\tau)\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{x}E_0^* e^{-i\omega t}\,d(\omega t)\,d\varphi_0\right]d\tau. \qquad (4.2)$$

Естественно сразу обратиться к рассмотрению случая, когда «время жизни» осцилляторов существенно превышает период их колебаний, а частота переменного поля приближенно равна частоте колебаний осцилляторов либо одной из ее гармоник (см. п. 4 первого раздела). Тогда отыскание нелинейной проводимости может быть существенно упрощено при условии, что амплитуда поля не слишком велика, в связи с чем энергия каждого из осцилляторов мало изменяется за период их колебаний. Эти допущения позволяют воспользоваться методом усреднения [27].

Из (4.2) и (1.1) путем замены переменных

$$x = x^{(0)}(\mathcal{E}, \varphi), \quad \dot{x} = \omega_0(\mathcal{E})\frac{\partial x^{(0)}}{\partial \varphi},$$

в которой зависимость $x^{(0)}$ и ω_0 от энергии $\mathcal{E}$ и фазы φ осциллятора такая же, как и в решении однородного уравнения (1.1) (см. п. 1 раздела 1), получим соотношение

$$\sigma = -eN|E_0|^{-2}\int_0^\infty g(\tau)\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_0\frac{\partial x^{(0)}}{\partial\varphi}E_0^* e^{-i\omega t}d(\omega t)\,d\varphi_0\right]d\tau$$

и пару уравнений для энергии и фазы осциллятора [28]:

$$\dot{\mathcal{E}} = -e\omega_0\frac{\partial x^{(0)}}{\partial\varphi}E(t), \quad \dot{\varphi} - \omega_0 = e\omega_0\frac{\partial x^{(0)}}{\partial\mathcal{E}}E(t).$$

Поскольку $x^{(0)}(\mathcal{E}, \varphi)$ — периодическая функция фазы и справедливо соотношение (1.3), при выполнении условия резонанса на n-ой гармонике колебаний осцилляторов ($\omega \simeq n\omega_0$), согласно первому приближению метода усреднения, будем иметь

$$\sigma = -eN|E_0|^{-2}\int_0^\infty g(\tau)\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}n\omega_0\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x_n^* E_0^* e^{i\vartheta})\,d(\omega t)\,d\varphi_0\right]d\tau; \qquad (4.3)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -2en\omega_0\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x_n E_0 e^{-i\vartheta})\right],$$
$$\dot{\vartheta} + \omega - n\omega_0 = 2en\omega_0\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}(x_n E_0 e^{-i\vartheta})\right]. \qquad (4.4)$$

Здесь введена медленно меняющаяся фаза $\vartheta = n\varphi - \omega t = n\varphi - \omega\tau - \omega t_0$; в (4.4) точки означают дифференцирование по τ.

Энергия осциллятора $\mathcal{E}$ и фаза ϑ, найденные из (4.4), зависят от τ, а также от значений $\mathcal{E}$ и ϑ при $\tau=0$: $\mathcal{E}(0)=\mathcal{E}_0$, $\vartheta(0)=\vartheta_0 = n\varphi_0 - \omega t_0$. Поэтому в (4.3) интегрирование по φ_0 можно заменить интегрированием по ϑ_0, а так как, кроме того, подынтегральное выражение в (4.3) зави-

сит от t лишь через $t_0 = t - \tau$, то σ можно окончательно представить в виде

$$\sigma = -eN|E_0|^{-2}\int_0^\infty g(\tau)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\omega_0 \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(x_n^* E_0^* e^{i\vartheta}\right) d\vartheta_0\right] d\tau. \tag{4.5}$$

3. Вычисление проводимости среды, зависящей в данном случае не только от частоты, но и от амплитуды поля, связано с интегрированием системы нелинейных уравнений (4.4), которое в некоторых частных случаях может быть осуществлено в аналитической форме.

Действительно, система (4.4) имеет интеграл

$$2e\,\mathrm{Re}\left\{\left(x_n E_0 e^{-i\vartheta}\right) - \left[x_n(\mathcal{E}_0)E_0 e^{-i\vartheta_0}\right]\right\} = \int_{\mathcal{E}_0}^{\mathcal{E}} \left[(\omega/n\omega_0) - 1\right] d\mathcal{E}, \tag{4.6}$$

представляющий собой уравнение фазовых траекторий на цилиндре $\mathcal{E}$, ϑ. С помощью (4.6) из первого уравнения (4.4) удается получить уравнение первого порядка для $\mathcal{E}$:

$$\dot{\mathcal{E}} = -n\omega_0\left\{(2e|x_n E_0|)^2 - \right.$$
$$\left. - \left[2e\,\mathrm{Re}\left[x_n(\mathcal{E}_0)E_0 e^{-i\vartheta_0}\right] + \int_{\mathcal{E}_0}^{\mathcal{E}}\left[(\omega/n\omega_0) - 1\right] d\mathcal{E}\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{4.7}$$

В свою очередь, проводимость σ может быть выражена непосредственно через $\mathcal{E}$. Если в (4.5) разделить действительную и мнимую части ($\sigma = \sigma' + i\sigma''$) и воспользоваться первым уравнением (4.4) и интегралом (4.6), то нетрудно получить

$$\sigma' = -N(2|E_0|)^{-2}\int_0^\infty \frac{dg(\tau)}{d\tau}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)\, d\vartheta_0\right] d\tau,$$
$$\sigma'' = -N(2|E_0|)^{-2}\int_0^\infty g(\tau)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{E}_0}^{\mathcal{E}}\left(\frac{\omega}{n\omega_0} - 1\right) d\mathcal{E}\, d\vartheta_0\right] d\tau. \tag{4.8}$$

Первое из соотношений (4.8) очевидно и является следствием закона сохранения энергии.

В простейшем, но практически важном случае не слишком сильной неизохронности осцилляторов, когда в (4.4)—(4.8) естественно полагать зависимость ω_0 от $\mathcal{E}$ линейной и учитывать ее лишь в разности $\omega - n\omega_0$, а x_n считать пропорциональным $\mathcal{E}^{n/2}$, при $n = 1, 2, 3, 4$ уравнение (4.7) дает зависимость $\mathcal{E}$ от τ в виде эллиптических функций. Однако этого недостаточно для нахождения σ, так как в (4.8) возникают трудности при интегрировании по ϑ_0.

Этот пример свидетельствует о том, что нахождение нелинейной проводимости «классической» активной среды практически возможно лишь путем численного интегрирования уравнений (4.4), (4.5).

4. Приведем некоторые результаты численного исследования нелинейной проводимости системы неизохронных возбужденных осцилляторов.

Допустим, что

$$x_n = (\mathcal{E}/\mathcal{E}_0)^{n/2} x_n(\mathcal{E}_0),$$

$$\omega_0 = \omega_0(\mathcal{E}_0) + \left(\mathcal{E}_0 \frac{\partial \omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial \mathcal{E}_0}\right)\left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0}\right),$$

причем, для определенности, $\frac{\partial \omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial \mathcal{E}_0} < 0$, а зависимость ω_0 от $\mathcal{E}$ слабая, т. е. $\left(\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0(\mathcal{E}_0)}\left|\frac{\partial \omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial \mathcal{E}_0}\right|\right) \ll 1$, и ее следует учитывать лишь в разности $\omega - n\omega_0$. Предположим также отсутствие разброса осцилляторов по «временам жизни»:

$$g(\tau) = \begin{cases} 1/T & (0 < \tau \leqslant T) \\ 0 & (\tau > T) \end{cases}.$$

Тогда, вводя безразмерные переменные и параметры

$$w = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}, \quad \zeta = \tau n \mathcal{E}_0 \left|\frac{\partial \omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial \mathcal{E}_0}\right|, \quad \zeta_T = \zeta(T),$$

$$\Delta = [\omega - n\omega_0(\mathcal{E}_0)] \Big/ \left(n\mathcal{E}_0 \left|\frac{\partial \omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial \mathcal{E}_0}\right|\right), \quad F = -\left(\frac{e x_n(\mathcal{E}_0) E_0}{\mathcal{E}_0}\right) \times$$

$$\times \left(\omega_0(\mathcal{E}_0)/\mathcal{E}_0 \left|\frac{\partial \omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial \mathcal{E}_0}\right|\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{T}(e^2 N |x_n(\mathcal{E}_0)|^2/2\mathcal{E}_0)\left(\omega_0(\mathcal{E}_0)/\mathcal{E}_0 \left|\frac{\partial \omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial \mathcal{E}_0}\right|\right)^2,$$

перепишем систему уравнений (4.4) и выражение для проводимости (4.5) в виде

$$\frac{dw}{d\zeta} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}(w^{n/2} F e^{-i\vartheta}),$$

$$\frac{d\vartheta}{d\zeta} + \Delta + w - 1 = -2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial w}(w^{n/2} F e^{-i\vartheta}),$$

$$w(0) = 1, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \quad (0 \leqslant \vartheta_0 < 2\pi), \tag{4.9}$$

$$\sigma = -\frac{\alpha |F|^{-2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\zeta_T} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(w^{n/2} F^* e^{i\vartheta})\, d\zeta\right] d\vartheta_0.$$

Исчерпывающее численное исследование (4.9)*, несмотря на упрощения исходной системы уравнений, затруднительно в силу его громоздкости, обусловленной зависимостью проводимости на каждой из гармоник частоты колебаний осцилляторов $n\omega_0$ от трех параметров ζ_T, Δ F. Поэтому укажем лишь область параметров, соответствующую максимальной эффективности индуцированного излучения, и значения величины

* Некоторые результаты аналитического и численного исследования системы уравнений, подобной (4.9), в случае $n = 2$ получены в [7] при рассмотрении теории строфотрона.

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [1 - w(\zeta_T)]\, d\vartheta_0,$$

характеризующей «выход» излучения (коэффициент полезного действия) системы возбужденных осцилляторов.

В таблице 1 приведены полученные в результате расчетов на ЭЦВМ максимальные для каждой из первых пяти гармоник значения η_{max}, а также соответствующие им приближенные значения параметров ζ_T, Δ и величины $\hat{\sigma}'$, пропорциональной реальной части проводимости: $\sigma' = -\alpha\hat{\sigma}'$.

Таблица 1

n	η_{max}	ζ_T	Δ	$\hat{\sigma}'$
1	0,415	7,5	0,60	21,5
2	0,295	7,5	0,55	17,5
3	0,215	10,0	0,40	40,0
4	0,170	12,5	0,33	67,5
5	0,140	17,5	0,25	134,0

На рис. 5 для первых четырех гармоник дана зависимость «выхода» излучения «классической» активной среды от величины $\hat{\sigma}'$ при фиксированном (указанном в таблице 1) значении параметра ζ_T. Параметр Δ при каждом $\hat{\sigma}'$ выбран так, чтобы η достигал наибольшего из возможных значений.

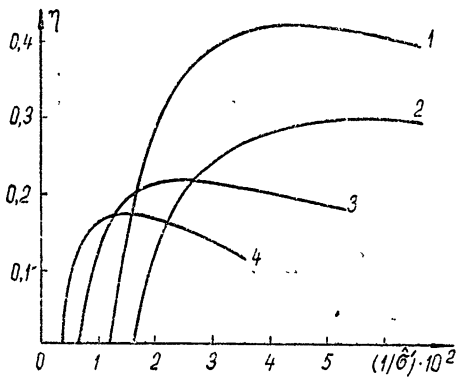


Рис. 5. КПД индуцированного излучения, оптимизированный по Δ при каждом из значений $\hat{\sigma}'$:
1— $n = 1$, $\zeta_T = 7{,}5$; 2— $n = 2$, $\zeta_T = 7{,}5$; 3— $n = 3$, $\zeta_T = 10$; 4— $n = 4$, $\zeta_T = 12{,}5$.

Форма, в которой представлены здесь результаты численных расчетов эффективности индуцированного излучения «классической» активной среды, удобна для расчета автоколебаний в контуре с заполненным этой средой конденсатором (см. п. 1 третьего раздела). Выбирая надлежащим образом величину $\hat{\sigma}'$ и зная добротность контура, с помощью второго из уравнений (3.2) нетрудно найти α и, следовательно, концентрацию осцилляторов, необходимую для обеспечения колебаний с определенным «выходом» излучения.

5. Эффективность индуцированного излучения рассмотренной системы неизохронных осцилляторов оказывается несколько меньшей, чем

теоретически рассчитываемый выход индуцированного черенковского и переходного излучений в ЛБВ и клистроне. Однако в этих приборах на электроны действует поле, амплитуда которого нарастает с увеличением времени пребывания электрона в системе.

Если предположить, что на каждый из осцилляторов действует переменная сила, амплитуда которой нарастает с увеличением τ, то можно получить существенное увеличение «выхода» индуцированного излучения. Например, при линейном по τ нарастании амплитуды, как показывает численный расчет, η_{max} увеличивается в случае $n = 2$ не менее, чем до 0,65. Аналогичное явление имеет место и в системе, где осуществляется взаимодействие осцилляторов с электромагнитной волной, распространяющейся в направлении поступательного движения осцилляторов (усилитель с бегущей волной; см. п. 3 раздела 3). Теория таких систем рассматривается, в частности, в [29]. Численный расчет по уравнениям этой работы дает значение η_{max} более 0,7 при $n = 1$.

6. Как и во всякой нелинейной системе, в «классической» активной среде должно происходить умножение частоты. Не касаясь энергетической стороны вопроса, на простом примере покажем, что плотность тока (4.1) содержит гармоники частоты действующего на осцилляторы монохроматического поля.

Представляя плотность тока, индуцированного в среде, в виде

$$j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} j_l \exp(il\omega t),$$

из (4.1), применяя, как и в п. 2, метод усреднения при условии $\omega \simeq n\omega_0$, найдем

$$j_l = -eN \int_0^{\infty} g(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n\omega_0 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(x^*_{(ln)} e^{il\vartheta} \right) d\vartheta_0 \right] d\tau. \qquad (4.10)$$

Допустим далее, что поле действует на каждый из осцилляторов в течение короткого промежутка времени $\tau_и (|\omega - n\omega_0|\tau_и \ll 2\pi$, но $\omega\tau_и \gg 2\pi)$, за который энергия и фаза осцилляторов меняются незначительно; в оставшееся время они колеблются свободно*. Это позволяет из уравнений (4.4) в первом приближении по параметру $|E_0|\tau_и$ легко найти энергию, а затем и фазу осцилляторов. Подставляя результат в (4.10), получим

$$j_l = -ieNln\omega_0(\mathcal{E}_0) x^*_{(ln)}(\mathcal{E}_0) \int_0^{\infty} g(\tau) J_l(X) \exp\{-i[\omega - n\omega_0(\mathcal{E}_0)]\tau\} d\tau,$$

где $J_l(X)$ — функция Бесселя l-го порядка, $X = -2eln^2\omega_0(\mathcal{E}_0) \dfrac{\partial\omega_0(\mathcal{E}_0)}{\partial\mathcal{E}_0} \times$ $\times x_n(\mathcal{E}_0) E_0 \tau_и \tau$, причем для простоты фаза поля выбрана так, чтобы параметр X был действительным.

Возбуждение гармоник тока в системе неизохронных возбужденных осцилляторов нетрудно объяснить «фазовой неустойчивостью» движения таких осцилляторов [14]. Небольшая первоначальная модуляция группы осцилляторов по энергии ведет с течением времени из-за не-

* В рассматриваемом случае ситуация, по существу, эквивалентна той, которая имеет место в экспериментах по наблюдению «отклика» магнитоактивной плазмы или пучка электронов, вращающихся в магнитном поле, на короткий электромагнитный импульс [30, 31].

большого различия частот их колебаний к возникновению «большой» фазовой модуляции — образованию колеблющегося сгустка частиц, излучающего как на частоте модулирующего поля, так и на ее гармониках.

5. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВОЗБУЖДЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДЛЯ УСИЛЕНИЯ И ГЕНЕРИРОВАНИЯ МИКРОРАДИОВОЛН

Многообразие механизмов группировки и способов отбора энергии у возбужденных классических осцилляторов породило большое количество различных типов электронных вакуумных генераторов и усилителей, в которых используется взаимодействие высокочастотных полей с потоками электронов, движущихся по периодическим траекториям в макроскопических статических полях.

1. Фазовая селекция (отбор) колеблющихся электронов (см. сноску на стр. 1422) лежит в основе работы генераторов с положительной сеткой (генераторов Баркгаузена—Курца и Жилля—Морелля) [5, 32], магнетрона со сплошным анодом [33], фазохронных приборов [34—37], строфотрона Альфвена [6]*. Обычный магнетрон с точки зрения принятой здесь классификации можно рассматривать как прибор, использующий индуцированное излучение осцилляторов типа волчка на частоте прецессии (см. сноску на стр. 1425). В усилителе электромагнитной волны, взаимодействующей с медленной циклотронной волной электронного пучка [25], используется индуцированное излучение осцилляторов на аномальных допплеровских частотах (раздел 2, п. 4). Индуцированное излучение изохронных (или почти изохронных) осцилляторов под действием высокочастотного поля, знакопеременного на траектории их колебаний (раздел 2, п. 2а), может быть использовано в строфотроне со специальным образом подобранной системой электродов [21].

2. Среди различных механизмов группировки возбужденных осцилляторов квадратичная фазовая группировка (раздел 1, пп. 5, 6; раздел 2, п. 2в) и квадратичная пространственная группировка (раздел 2, п. 3) занимают особое место. Они «универсальны» в том смысле, что неизохронные осцилляторы способны отдавать свою энергию полю практически произвольной структуры, а при наличии неоднородности переменного поля индуцированное излучение может преобладать над индуцированным поглощением в системе возбужденных осцилляторов с любой степенью неизохронности. Эта «универсальность» роднит соответствующие приборы вакуумной электроники — «электронные мазеры» — с принципиально квантовыми системами — мазерами и лазерами — и в то же время выделяет их среди сверхвысокочастотных усилителей и генераторов других типов (в том числе и упоминавшихся в п. 1), так как, с одной стороны, позволяет использовать самые разнообразные типы электродинамических систем — от квазистационарных колебательных контуров до квазиоптических волноводов и резонаторов, а с другой стороны, допускает применение относительно простых способов инжекции и удержания периодических электронных пучков.

Первое из отмеченных достоинств электронных мазеров особенно ощутимо в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых волн, где трудности изготовления и охлаждения замедляющих систем, резонаторов сложной формы (в частности, резонаторов с малыми зазорами)

---

* Хотя механизм отбора «неправильнофазных» электронов является в этих приборах, как правило, преобладающим, заметную роль может играть и квадратичная фазовая группировка электронов, обусловленная неизохронностью их колебаний.

и т. д. препятствуют получению больших мощностей методами, с успехом применяемыми на более низких частотах. Вопрос же о выборе наиболее целесообразной конструкции электронно-оптической системы, служащей для удержания потока колеблющихся электронов, требует специального рассмотрения.

3. Статические поля, обеспечивающие осцилляторное движение электронов в электронных мазерах, можно разбить на три основные группы*.

а) В *однородном* поле траектории электронов являются периодическими, если это поле магнитное (рис. 6а) или представляет собой комбинацию скрещенных магнитного $\boldsymbol{H}_0$ и электрического $\boldsymbol{E}_0$ полей при $H_0 > E_0$ (рис. 6б). В первом случае электроны движутся по винтовым траекториям, вращаясь с циклотронной частотой

$$\omega_H = eH_0/mc.$$

Во втором случае электроны перемещаются в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{H}_0$, по квазитрохоидальным траекториям** со средней поступательной скоростью $\boldsymbol{v}_0 = c\,[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{H}_0]/H_0^2$ и, кроме того, могут совершать одновременно свободное движение вдоль магнитного поля; однако в экспериментальных электронных приборах со скрещенными полями параллельная $\boldsymbol{H}_0$ составляющая скорости электронов, как правило, пренебрежимо мала.

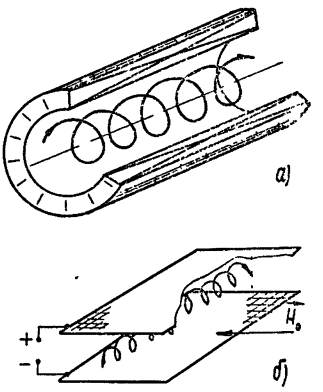


Рис. 6. Периодические электронные пучки, направляемые однородными полями:

а) винтовой пучок в однородном магнитном поле; б) трохоидальный пучок в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Благодаря зависимости массы электронов $m = m_0[1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ (m_0 — масса покоя) от скорости v их колебания являются неизохронными. Полагая $\omega \simeq n\omega_H$ и, кроме того, в случае квазитрохоидального пучка считая $v_0 \ll c$, получаем следующую связь между величиной магнитостатического поля (в килоэрстедах) и длиной волны генерируемого (усиливаемого) излучения λ:

$$\lambda(см) \simeq \frac{10{,}7}{nH_0(кэ)}\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (5.1)$$

Электронные пучки, направляемые однородными статическими полями, находят применение в мазерах на циклотронном резонансе (раздел 6).

б) Примерами *поперечно-неоднородных* полей (зависящих только от координат, поперечных к направлению поступательного движения электронов) могут служить поле цилиндрического конденсатора (рис. 7а), используемое для центробежной электростатической фокуси-

---

* Методы инжекции электронов, применяемые с целью «накачки» колебательной энергии в электронные пучки (для создания «инверсии населенности уровней» в системе осцилляторов), здесь не рассматриваются; этот вопрос достаточно полно освещен в цитируемой литературе.

** С точки зрения системы отсчета, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}_0$, скрещенные $\boldsymbol{H}_0$- и $\boldsymbol{E}_0$- поля представляют собой магнитное поле $\boldsymbol{H}_0'$, под действием которого электроны, имеющие в этой системе отсчета постоянную массу m', вращаются с частотой $\omega_H' = eH_0'/m'c$.

ровки (ЦЭФ), статическое поле строфотрона (рис. 7б), поперечно-неоднородное магнитное поле и т. п.

В системах с ЦЭФ частота вращения электронов зависит от радиуса их траектории. В строфотроне колебания электронов могут быть неизохронными, если потенциальная электрическая яма является непараболической, а также из-за релятивистской зависимости массы электронов от их скорости. В поперечно-неоднородном магнитном поле частота вращения электронов, движущихся по квазитрохоидальным траекториям со средней поступательной скоростью, пропорциональной $[\boldsymbol{H}_0, \nabla H_0]/H_0^3$, зависит от положения траектории ведущего центра, а с учетом релятивистских эффектов—и от вращательной энергии.

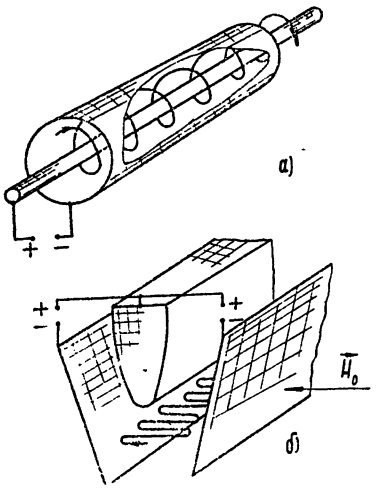


Рис. 7. Периодические электронные пучки, направляемые поперечно-неоднородными полями:
а) винтовой пучок в системе с ЦЭФ,
б) плоский периодический пучок в строфотроне.

Частота колебаний электронов в поперечно-неоднородных электростатических полях (рис. 7) определяется величиной напряженности поля $\boldsymbol{E}_0$ и характерным размером его неоднородности L:

$$\omega_0 \sim (eE_0/mL)^{1/2}.$$

Полагая в качестве предельно допустимого значения $E_0 \sim 10^5$ *в·см*$^{-1}$, при $\omega \simeq n\omega_0$ имеем

$$\lambda(см) \sim (15/n)\sqrt{L(см)}. \qquad (5.2)$$

Для электронов, движущихся в поперечно-неоднородном магнитном поле, справедлива оценка (5.1).

К числу электронных мазеров с поперечно-неоднородными статическими полями относятся строфотрон [6, 7, 21, 38—40], а также приборы с ЦЭФ: гелитрон [8, 41—45] и антиклистрон [9, 46].

в) *В пространственно-периодических* электрическом (рис. 8) и магнитном полях частота колебаний электронов пропорциональна отношению средней поступательной скорости электронов v_0 к пространственному периоду поля D:

$$\omega_0 = 2\pi v_0/D,$$

поэтому изменение скорости v_0 сопровождается изменением частоты ω_0; при $\omega \simeq n\omega_0$

$$\lambda \simeq Dc/nv_0. \qquad (5.3)$$

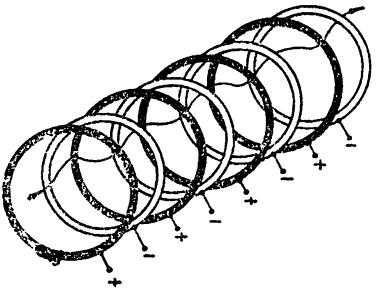


Рис. 8. Электронный пучок, направляемый периодическим электрическим полем.

Теоретическому и экспериментальному исследованию взаимодействия таких пучков с высокочастотными полями посвящены, в частности, работы [47—53]; наибольший практический интерес представляет, по-видимому, убитрон [49, 50, 53] — мощный усилитель бегущей волны с периодической магнитной фокусировкой электронного потока.

4. Не все перечисленные электронно-оптические системы одинаково перспективны с точки зрения применения в мощных электронных ма-

зерах коротковолновой части сверхвысокочастотного диапазона волн. Поперечно-неоднородные электростатические поля не в состоянии удерживать достаточно мощные электронные потоки уже в диапазоне сантиметровых волн; так, в приборе с $\lambda \sim 5$ *см* расстояние между электродами, согласно (5.2), при $n = 1$ должно иметь величину порядка 1 *мм*.

Гораздо более высокие частоты могут быть достигнуты с помощью электронных мазеров, в которых применяется пространственно-периодическая фокусировка электронных потоков. Так, мощность убитрона в импульсном режиме составляет 1 *Мвт* в диапазоне $\lambda \sim 2$ *см* [50] и соответственно 150 *квт* в диапазоне $\lambda \sim 6$ *мм* [53]. Следует, однако, заметить, что преимущества убитрона перед обычными ЛБВ типа «*О*» не столь очевидны, как это кажется на первый взгляд. В диапазоне миллиметровых волн трудности создания периодической системы магнитов в значительной мере эквивалентны трудностям создания замедляющей системы, способной канализировать большую мощность.

Усилители и генераторы, в которых осцилляторное движение электронов происходит под действием однородных полей, представляются наиболее пригодными для получения больших мощностей в диапазоне миллиметровых, а возможно, и субмиллиметровых волн. Во всяком случае, применение соленоидов из сверхпроводящих сплавов, а также импульсных соленоидов дает возможность получать соответствующие магнитные поля в объемах, позволяющих использовать весьма интенсивные электронные потоки. Относительно подробный обзор работ, касающихся теоретического и экспериментального исследования электронных приборов с однородными статическими полями — мазеров на циклотронном резонансе (МЦР), содержится в следующем разделе.

6. ИНДУЦИРОВАННОЕ ЦИКЛОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И МАЗЕРЫ НА ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСЕ

1. Индуцированное излучение в активной среде, состоящей из электронов, вращающихся в магнитном поле (или скрещенных электрическом и магнитном полях), наблюдающееся на частотах, близких к циклотронной частоте или одной из ее гармоник, естественно называть индуцированным циклотронным излучением, а электронные приборы, в которых это излучение используется для усиления и генерирования микрорадиоволн, — мазерами на циклотронном резонансе (МЦР)*.

Возможность индуцированного излучения в потоке электронов, вращающихся в магнитном поле, независимо и, фактически, одновременно была показана теоретически в работах [10, 12] (где рассмотрены пространственная [10] и фазовая [12] группировки на циклотронной частоте и ее гармониках и дана линейная теория индуцированного циклотронного излучения в волноводах с винтовыми и трохоидальными электронными пучками) и [11] (квазиклассическая теория фазовой группировки на циклотронной частоте). О наблюдении индуцированного циклотронного излучения (усилении бегущей электромагнитной волны в волноводе с винтовым электронным пучком) сообщалось в то же самое время в докладах [55, 56] и статье [57].

Вскоре были также опубликованы теоретические работы, посвященные исследованию неустойчивостей неравновесной магнитоактивной плазмы, обусловленных индуцированным циклотронным излучением [13, 58, 59], и анализу (классическим и квантовым способами) механизмов группировки вращающихся электронов в поле излучения [14].

* Название «мазер на циклотронном резонансе» употребляется, по-видимому, впервые в [54] применительно к устройству, использующему для генерирования колебаний индуцированное циклотронное излучение в резонаторе.

2. В теории усилителей и генераторов микрорадиоволн, основанных на использовании индуцированного циклотронного излучения, первоначально наибольшее внимание привлекали задачи, связанные с исследованием взаимодействия электромагнитных волн в волноводах с винтовыми и трохоидальными электронными пучками, поступательная скорость электронов в которых направлена вдоль волновода (МЦР с бегущей волной). В известной мере это можно объяснить стремлением сохранить в новых приборах достоинства ЛБВ и ЛОВ, избавившись в то же время от необходимости замедления электромагнитных волн.

Исследование распространения электромагнитных волн в волноводах, заполненных классической активной средой, роль которой играет поток электронов, движущихся по криволинейным пространственно-периодическим траекториям (в частности, винтовым или трохоидальным), связано с большими трудностями, обусловленными необходимостью учета пространственной дисперсии. Однако, если концентрация электронов (плотность тока пучка) мала, то возмущением поперечной структуры нормальных волн волновода можно пренебречь; используя близость нормальных волн волновода, пронизываемого электронным потоком, нормальным волнам «холодного» волновода, сравнительно нетрудно получить приближенное дисперсионное уравнение, связывающее новые продольные волновые числа (постоянные распространения) с частотой. При этом нет необходимости вычислять проводимость электронного потока (хотя в указанном приближении это можно сделать [18], следуя [60])—дисперсионное уравнение может быть получено, как это обычно делается в теории ЛБВ [25], в результате совместного решения линеаризованных уравнений, описывающих возмущения в движении электронов, накладываемые электромагнитной волной с заданной поперечной структурой и произвольной медленно меняющейся вдоль волновода амплитудой, и уравнения для амплитуды волны, возбуждаемой в волноводе электронами, движущимися по возмущенным траекториям.

Согласно [61], амплитуду V_s поля электромагнитной волны, возбуждаемой в бесконечно длинном волноводе без потерь тонким электронным пучком, удобно приближенно выразить непосредственно через $\boldsymbol{r}_\tau^{(1)}$ — комплексную амплитуду смещения электронов с невозмущенной траектории:

$$V_s \simeq \frac{i\omega I_0}{N_s}\int_0^\tau (\boldsymbol{r}_\tau^{(1)}\boldsymbol{G}_s^*)\,d\tau. \tag{6.1}$$

В (6.1)* I_0 — постоянная составляющая тока пучка; N_s — норма волны [63]; $\boldsymbol{r}_\tau^{(1)}$ зависит от времени пролета электрона $\tau = t - t_0$ (t_0 — момент появления электрона в волноводе) и считается малой по сравнению с характерным размером неоднородности поля электромагнитной волны; $\boldsymbol{G}_s = \boldsymbol{E}_s + \left[\frac{\boldsymbol{v}^{(0)}}{c}\boldsymbol{H}_s\right]$; $\boldsymbol{E}_s$ и $\boldsymbol{H}_s$ — выраженные через τ значения функций распределения полей нормальной волны «холодного» волновода на невозмущенной траектории электрона; $\boldsymbol{v}^{(0)}$ — невозмущенная скорость электрона.

В случае слаборелятивистских винтовых или трохоидальных электронных пучков решение линеаризованных уравнений движения электрона под действием статических полей и высокочастотной силы Ло-

* Другое, эквивалентное (6.1), выражение для V_s получено в [62].

рентца, пропорциональной $V_s G_s$, с учетом (6.1) позволяет получить приближенное дисперсионное уравнение [10, 12, 64, 65]

$$\delta^2(\delta - \xi) = -C^3, \tag{6.2}$$

где

$$C = \left(\frac{I_0 h_e}{2U_0 h_s^3 N_s}\right)^{1/3} \left[|(G_{sn})_\parallel|^2 - \beta_\perp^2 |(G_{sn})_\perp|^2\right]^{1/3},$$

$U_0 = mv_0^2/2e$; $h_e = \omega/v_0$; $\beta_\perp = v_\perp/c$; v_0, $v_\perp$ — скорости поступательного и вращательного движений электронов; h_s — постоянная распространения волны при отсутствии пучка; $G_{sn} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_s \exp(ih_s v_0 \tau + in\omega_H \tau) d\omega_H \tau$; значками $\parallel$ и $\perp$ при G_{sn} отмечены проекции этого вектора на направления постоянного магнитного поля и вращательного движения электрона. Входящие в (6.2) безразмерная поправка к волновому числу δ и расстройка ξ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \delta &= (h - h_e + nh_H)/h_s, \quad |\delta| \ll 1, \\ \xi &= (h_s - h_e + nh_H)/h_s, \quad |\xi| \ll 1, \end{aligned} \tag{6.3}$$

указывающими на предположенный при выводе (6.2) синхронизм электромагнитной волны с электронным пучком на n-ой гармонике циклотронной частоты, т. е. близость частоты ω (с учетом допплеровской поправки) n-ой гармонике ω_H (h — постоянная распространения волны в волноводе с пучком, $h_H = \omega_H/v_0$).

Сходство уравнения (6.2) с дисперсионным уравнением ЛБВ типа «O» избавляет от необходимости специального исследования свойств усилителей и генераторов с винтовыми и трохоидальными пучками*. Взаимодействие криволинейных пучков с электромагнитными волнами, описываемое уравнениями типа (6.2) и соответствующее квадратичной группировке электронов (см. п. 5, раздел 1), удобно называть взаимодействием типа «O». При большем токе пучка становится необходимым учет линейной группировки (подобной обсуждаемой в п. 5 первого раздела, а также обусловленной смещением центров вращения электронов поперек направления постоянного магнитного поля); при этом в дисперсионном уравнении появляется дополнительный член, пропорциональный первой степени δ и характеризующий взаимодействие, которое может быть названо взаимодействием типа «M» [10, 65].

Из уравнения (6.2) вместе с (6.3) идентичного (3.8), следует возможность индуцированного циклотронного излучения как на циклотронной частоте, так и на ее гармониках. Существенно, что в области нормальных допплеровских частот ($n > 0$) излучение имеет место при любой фазовой скорости и структуре электромагнитной волны. Величина $|(G_{sn})_\parallel|^2$ в параметре усиления C отвечает пространственной группировке электронов, связанной с их смещением в направлении постоянного магнитного поля под действием либо высокочастотного магнитного поля, либо неоднородного электрического поля, а $\beta_\perp^2 |(G_{sn})_\perp|^2$ —

* Коэффициент усиления МЦР-усилителей и условия самовозбуждения МЦР-генераторов можно найти, не прибегая к составлению дисперсионного уравнения, а решая непосредственно систему уравнений для электронов и поля методом последовательных приближений (в нулевом приближении распределение поля в волноводе, длина которого предполагается сразу конечной, считается заданным) [66].

фазовой (азимутальной) группировке, обусловленной релятивистской зависимостью циклотронной частоты от скорости.

В случае винтовых электронных пучков преобладание того или иного вида группировки определяется исключительно величиной фазовой скорости $v_ф$ электромагнитной волны [67]. Если $v_ф < c$, то $|(G_{sn})_\parallel| > \beta_\perp |(G_{sn})_\perp|$ (преобладает пространственная группировка), если $v_ф > c$, то $\beta_\perp |(G_{sn})_\perp| > |(G_{sn})_\parallel|$ (преобладает фазовая группировка), а при $v_ф = c$ $|(G_{sn})_\parallel| = \beta_\perp |(G_{sn})_\perp|$ и взаимодействие типа «O» отсутствует [14, 65]*. Характер взаимодействия трохоидального пучка с полем волновода существенно зависит от расположения пучка в волноводе [64]. В частности, когда высокочастотное поле в области расположения пучка слабо неоднородное в направлении постоянного магнитного поля, $|(G_{sn})_\parallel| \ll \beta_\perp |(G_{sn})_\perp|$, т. е. взаимодействие типа «O» полностью определяется неизохронностью вращательного движения электронов. Таким образом, малость скоростей электронов по сравнению со скоростью света далеко не всегда является достаточным условием для пренебрежения релятивистскими эффектами при рассмотрении индуцированного циклотронного излучения в волноводах, что в ряде работ [10, 70—73] не было учтено.

Принятое при выводе (6.2) допущение о тождественности структуры поля волн в волноводе, пронизываемом электронным потоком, структуре поля нормальной волны в «холодном» волноводе (т. е. учет взаимодействия электронов только с одной, синхронной в смысле второго из соотношений (6.3), волной) справедливо лишь при весьма малой концентрации электронов. В то же время из простейших соображений ясно, что кулоновское поле (поле высокочастотного пространственного заряда) может оказывать существенное влияние на индуцированное излучение криволинейных пучков, увеличивая в некоторых случаях эффективность группировки электронов [43]**. К аналогичному выводу можно придти, анализируя дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в неравновесной магнитоактивной плазме [13]. Одна из возможностей приближенного учета высокочастотного пространственного заряда при выводе дисперсионного уравнения МЦР с бегущей волной заключается в применении вариационного метода, подобного развитому в теории ЛБВ [76], к системе интегральных уравнений электромагнитного поля в волноводе с электронным потоком [77, 18].

3. Теория электронных мазеров, использующих индуцированное циклотронное излучение электронов в резонаторах, развита, главным образом, применительно к мазерам с одним резонатором (МЦР-монотрон).

Решение задачи об электромагнитных колебаниях в резонаторе с винтовым или трохоидальным электронным потоком в общем случае связано с теми же трудностями, что и решение соответствующей задачи для волновода (п. 2). Однако при небольшой концентрации электронов характеристическое уравнение для собственных частот резонатора с пучком ω, близких собственным частотам «холодного» резонатора ω_s, можно получить, пренебрегая возмущением структуры электромагнитного поля нормальных колебаний «холодного» резонатора. Линейная теория МЦР с высокодобротным резонатором, основанная на этом допущении, развивается в работах [24, 78]. В [24] рассматривается модель

* Обращение в нуль параметра усиления C в данном случае связано с «авторезонансом», имеющим место при воздействии на электрон волны, распространяющейся вдоль магнитного поля со скоростью света [68, 69].

** Этот эффект имеет общую природу с так называемым эффектом «отрицательной массы» в циклических ускорителях заряженных частиц [74, 75].

мазера с замкнутым (кольцевым) электронным пучком, в [78] — МЦР-монотрон с винтовым пучком, взаимодействующим с теми типами колебаний резонатора, у которых характерный масштаб продольной (относительно направления постоянного магнитного поля) неоднородности поля велик по сравнению с длиной волны возбуждающихся колебаний.

При резонансном взаимодействии одного из собственных колебаний резонатора с потоком вращающихся электронов ($\xi=(\omega_s-n\omega_H)/\omega_s$, $|\xi|\ll 1$) характеристическое уравнение для поправок к собственным частотам резонатора $\delta=(\omega-n\omega_H)/\omega_s\equiv(\Delta\omega_n/\omega_s)$, полученное в [24], совпадает по форме с (6.2), т. е. показывает возможность самовозбуждения электромагнитных колебаний, во всяком случае, при $n\omega_H\to\omega_s$ ($\xi\to 0$).

В случае конечного времени пролета электронов через резонатор [78] характеристическое уравнение оказывается более сложным, но с его помощью достаточно просто могут быть получены условия самовозбуждения автоколебаний (стартовые условия) МЦР-монотрона. В частности, для мазера с цилиндрическим резонатором при скоростях электронов малых, по сравнению со скоростью света, эти условия имеют вид

$$\left(\frac{4\pi^3 e\,|I_0|\,k_0^2}{m\omega_H V}\right) M\left\{1+(\beta_\perp^2/2)\omega_H\frac{d}{d\omega}\right\}|\bar f(\Delta\omega_n)|^2=-\frac{1}{Q},$$
$$\left(\frac{4\pi^3 e\,|I_0|\,k_0^2}{m\omega_H V}\right) M\left\{1+(\beta_\perp^2/2)\omega_H\frac{d}{d\omega}\right\} D(\Delta\omega_n)=-\frac{\omega-\omega_s}{\omega_s}. \qquad (6.4)$$

Здесь I_0 — ток пучка, $k_0=\omega/c$, Q — добротность резонатора, а коэффициент M и функции $\bar f(\Omega)$, $D(\Omega)$ связаны с нормированной на объем резонатора V функцией распределения продольной компоненты магнитного поля $H_z=f(z)J_m(k_0 r)e^{-im\psi}$ (r, ψ, z — цилиндрические координаты):

$$M=\left[\frac{(n\beta_\perp/2)^{n-1}}{(n-1)!}\right]^2 J_{m-n}^2(k_0R),$$

$$\bar f(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v_0\tau)e^{-i\Omega\tau}\,d\tau,$$

$$D(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\bar f(\Omega')|^2}{\Omega'-\Omega}\,d\Omega',$$

где $r=R$ — координата центра вращения электронов (предполагается, что для всех электронов величина R одинакова).

Условия (6.4) аналогичны соотношениям (3.2). Функция $\bar f(\Omega)$ описывает спектр силы, действующей на электроны, а левая часть первого из уравнений (6.4) пропорциональна работе, производимой высокочастотным полем над электронами. Необходимым условием того, чтобы электроны отдавали энергию полю, является неравенство

$$\frac{d}{d\omega}|\bar f(\Delta\omega_n)|^2<0,$$

эквивалентное (2.19) и выполняющееся лишь при $\Delta\omega_n\neq 0$*. Упрощен-

* В ультрарелятивистском случае соотношения, эквивалентные (6.4), имеют несколько иной вид, и индуцированное излучение оказывается возможным и при $\Delta\omega_n=0$ [79].

ный вариант первого из соотношений (6.4), пригодный для оценок стартового тока МЦР-монотрона, приведен в [80].

4. Вопрос о «выходе» индуцированного циклотронного излучения электронов в волноводах и резонаторах, т. е. об электронном КПД МЦР, рассмотренный в работах [44, 81—84], имеет первостепенное значение для выяснения перспективности применения этих приборов в качестве мощных усилителей и генераторов.

Наиболее простой путь построения нелинейной теории МЦР состоит в использовании нелинейных укороченных уравнений самосогласованного поля, получаемых при тех же допущениях (кроме малости возмущения $r_\tau^{(1)}$), что и в линейной теории (пп. 2, 3). В случае слаборелятивистских электронных пучков и при отсутствии пространственной группировки электронов эти уравнения не имеют каких-либо отличий от аналогичных уравнений для электронных мазеров со слабонеизохронными осцилляторами других типов. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить (4.9) с укороченными уравнениями работы [84]. Поэтому для решения вопроса об эффективности МЦР можно использовать результаты, приведенные в разделе 4 и работах [7, 29].

В безразмерной форме нелинейные уравнения МЦР с бегущей волной содержат два параметра: параметр неизохронности вращательного движения электронов μ и параметр «расстройки синхронизма» $\hat{\xi}$, определяемые в случае $n=1$ выражениями $\mu=(\beta_\perp^2 h_H/2h_s|C|)^{3/2}$, $\hat{\xi}=\xi(\beta_\perp h_H/2h_s)^{1/2}|C|^{-3/2}$; время взаимодействия электронов с высокочастотным полем входит через приведенную длину $(\beta_\perp h_H/2h_s)^{-1/2}|C|^{3/2}\times$ $\times(h_s v_0\tau)$ [81] (см. (6.2) и (6.3)). Некоторые интегралы этих уравнений приведены в [29], там же (и в [44]) показана возможность сведения при $\mu\gg 1$ нелинейных уравнений МЦР с бегущей волной к уравнениям нелинейной теории ЛБВ типа «О» с малым параметром усиления [85]. Численное интегрирование нелинейных уравнений работ [29, 81] показывает, что при оптимальной длине пространства взаимодействия электронный КПД МЦР-усилителя может достигать 0,6—0,7 ($\mu\simeq 2\div 5$), а МЦР-генератора, работающего на встречной по отношению к пучку волне, — 0,2 ($\mu\simeq 3\div 4$). Нелинейная теория взаимодействия винтового электронного пучка с ТЕМ волной (при отличном от единицы показателе преломления среды) рассмотрена в [82] с учетом как фазовой, так и пространственной группировки электронов.

Аналогичным образом строится и нелинейная теория индуцированного циклотронного излучения в резонаторах. Если распределение высокочастотного поля в резонаторе не зависит от продольной координаты $f(z)=f_0=\text{const}$; см. п. 3), для определения КПД МЦР-монотрона можно воспользоваться результатами численных расчетов, приведенными на рис. 5. В частности, для цилиндрического резонатора с длиной L параметры $\hat{\sigma}'$ и ζ_T определяются выражениями

$$\frac{1}{\hat{\sigma}'}=\left(\frac{16\pi e|I_0|Q}{mc^3k_0^3V}\right)\left(\frac{n^n\beta_\perp^{n-3}}{2^n n!}\right)^2|f_0J_{m-n}(k_0R)|^2,$$

$$\zeta_T=(v_\perp/v_0)(\beta_\perp/2)(k_0L),$$

где приняты те же обозначения, что и в (6.4). Как следует из результатов, приведенных на рис. 5 и в таблице 1 (раздел 4), максимальные значения КПД МЦР-монотрона для первых пяти гармоник имеют значения соответственно 0,415; 0,295; 0,215; 0,17; 0,14. Они могут быть существенно выше при условии, что группировка вращающихся электронов происходит в относительно слабом, а отдача

энергии — в более сильном высокочастотном поле, т. е. в том случае, когда $f(z)$ — нарастающая функция продольной координаты (см. п. 5 четвертого раздела). Если электронный пучок равномерно распределен по поперечному сечению резонатора и на разные электроны действует высокочастотное поле различной амплитуды, то максимально возможный КПД МЦР оказывается, естественно, более низким [84].

5. Энергетический спектр возбужденных классических осцилляторов так же, как и закон их распределения по другим параметрам (например, по скоростям поступательного движения), существенным образом сказывается на эффективности индуцированного излучения. Хотя проводимость системы осцилляторов (в частности, неравновесной магнитоактивной плазмы) может быть отрицательной и при весьма большой дисперсии их параметров [3, 86, 87] (кинетический эффект типа «обратного» затухания Ландау [88]), «выход» (КПД) индуцированного излучения всегда снижается, так как при этом; очевидно, оптимальные условия взаимодействия не могут быть выполнены одновременно для всех электронов.

В МЦР разброс электронов по скоростям практически неизбежен при любом способе формирования мощного электронного потока, но характер их распределения по частотам вращения (т. е. по энергии) и по поступательным скоростям v_0 зависит от типа пучка и условий инжекции электронов. Если формирование потока осуществляется статическими полями, а плотность пространственного заряда электронов пренебрежимо мала, то в рабочем пространстве МЦР с винтовым пучком все электроны имеют одинаковую энергию и, следовательно, одинаковую циклотронную частоту, но, вообще говоря, разные скорости поступательного движения v_0; наоборот, в МЦР с трохоидальным пучком электроны имеют одинаковую скорость поступательного движения $v_0 = c(E_0/H_0)$, но (при наличии разброса энергий) разные частоты ω_H.

Поскольку эффективность взаимодействия каждой из скоростных групп электронов с электромагнитной волной определяется в значительной мере отстройкой от синхронизма $\xi = (h_s - h_e + nh_H)/h_s$ (см. (6.3)), то «качество» трохоидального или винтового пучка можно характеризовать разбросом $\Delta\xi$ отстроек ξ, обусловленным разбросом скоростей электронов $\Delta v_\perp$ и Δv_0. Отношение этих величин для слаборелятивистских пучков, взаимодействующих с волной, имеющей фазовую скорость $v_\phi (v_\phi \gg v_\perp, v_0)$, приближенно равно

$$\left|\frac{\Delta\xi_{\text{трох}}}{\Delta\xi_{\text{винт}}}\right| \simeq \beta_{\perp\,\text{трох}} \frac{v_\phi}{c}\left(\frac{v_{0\,\text{винт}}}{v_{0\,\text{трох}}}\right)\left|\frac{\Delta v_{\perp\,\text{трох}}}{\Delta v_{0\,\text{винт}}}\right|.$$

Таким образом, при $v_\phi \sim c$, т. е. на частотах, далеких от критической для данного волновода, более предпочтительно использование трохоидальных пучков; применение винтовых пучков целесообразно в МЦР с такими электродинамическими системами, где $v_\phi \gg c$ (например, с достаточно длинными цилиндрическими резонаторами, в спектре которых есть собственные колебания с частотами, близкими к критическим частотам соответствующего волновода). Следует также иметь в виду, что с увеличением рабочей частоты $\omega \sim \omega_H$ скорость $v_{0\,\text{трох}}$ уменьшается, поскольку напряженность поля E_0 ограничена возможностью пробоя, поэтому на высоких частотах преимущество винтовых пучков, свободных от подобного ограничения, бесспорно.

6. Первые эксперименты по исследованию индуцированного циклотронного излучения, проведенные на МЦР с бегущей волной [55–57],

подтвердили возможность усиления и генерирования электромагнитных волн в системах без отбора (фазовой селекции) колеблющихся электронов. В дальнейшем были изучены отдельно оба основных механизма индуцированного циклотронного излучения электронов — фазовая и пространственная группировки; эксперименты проводились в диапазоне сантиметровых волн на относительно невысоком (порядка нескольких ватт) уровне мощности [64]. Аналогичными параметрами обладал и МЦР-генератор со встречной волной, описанный в работе [89].

Наибольшая мощность в МЦР с бегущими волнами (около 1 *квт* в непрерывном режиме в 8-*мм* диапазоне волн) достигнута при использовании трохоидальных электронных пучков [90, 91]. На рис. 9 схематически изображены генератор со встречной волной [90] (рис. 9а) и усилитель с попутной волной [91] (рис. 9б). Гребенка, нанесенная на одну из пластин волноведущей полосковой линии, обеспечивает лишь благоприятную, близкую к круговой (с соответствующим направлением вращения вектора электрического поля), поляризацию электромагнитной волны; замедление волны не превышает 1,2—1,3. Типичная зависимость выходной мощности и КПД усилителя от тока пучка приведена на рис. 10. Наибольший КПД (без рекуперации) составлял в усилителе —0,28, в генераторе — 0,10. Относительно высокие значения выходной мощности и КПД были получены, в значительной мере, благодаря удачному решению задачи инжекции трохоидального электронного пучка [92].

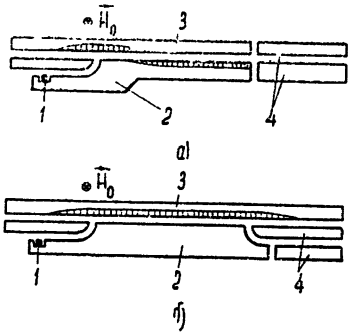


Рис. 9. Принципиальная схема МЦР с трохоидальным электронным пучком:
а) генератор с встречной волной: 1—катод, 2—катодная пластина с волноведущей гребенкой, 3—анод, 4—коллектор; б) усилитель с бегущей волной: 1—катод, 2—катодная пластина, 3—анод с волноведущей гребенкой, 4—коллектор.

В работах [93, 94] описаны проведенные в диапазоне миллиметровых волн эксперименты по использованию в МЦР с бегущей волной импульсных магнитных полей.

Индуцированное циклотронное излучение электронов наблюдалось также в системах типа МЦР-монотрона с винтовым электронным пучком [54, 80, 95, 96]*. Магнитные поля, соответствующие диапазону сантиметровых и миллиметровых волн, создавались обычными [54, 80] или импульсными [95] соленоидами, либо соленоидами из сверхпроводящих материалов [96]. В работах [80, 95, 96] применялись резонаторы открытого (квазиоптического) типа. Во всех экспериментах для формирования высоковольтных электронных пучков с большой вращательной скоростью электронов использовались электронно-оптические системы

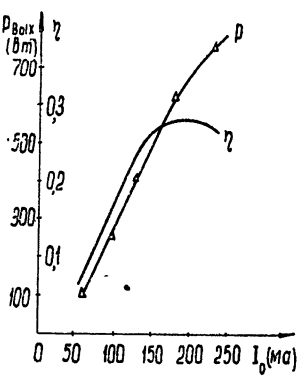


Рис. 10. Зависимость выходной мощности и КПД усилителя с трохоидальным пучком от тока пучка (U_a=12 *кв*, λ=8,3 *мм*, $P_{вх}$ = 60 *вт*).

* Эксперимент с двухрезонаторной системой описан в [31] (см. сноску на стр. 1435).

с плавно нарастающим магнитным полем, однако электронные пушки отличались друг от друга методами первичной накачки колебательной энергии в электронный пучок.

Наибольшая выходная мощность — около 200 *вт* в коротковолновой части сантиметрого диапазона на второй гармонике циклотронной частоты — была получена в приборе с «адиабатической» электронной пушкой, позволяющей формировать интенсивные электронные потоки [80] (рис. 11). Дальнейшее усовершенствование конструкции МЦР-

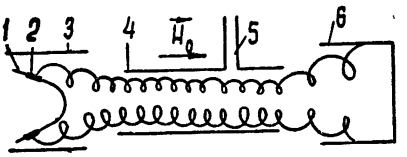


Рис. 11. Принципиальная схема МЦР-генератора с винтовым электронным пучком:
1—катод, 2—эмиттирующий поясок, 3—анод, 4—резонатор, 5—выходной волновод, 6—коллектор.

монотрона позволило превзойти генераторы с бегущей волной как по мощности, так и по КПД.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Работа неоднородного переменного поля над системой возбужденных осцилляторов

Работа переменного поля над системой осцилляторов, движение которых описывается уравнениями (2.1) и (2.2), может быть вычислена на основании как классической, так и квантовой теории.

1. Для смещения осцилляторов со стационарной траектории в линейном приближении, согласно (1.5), (2.2) и (2.3), имеем

$$x^{(1)} = \omega_0 \left(\frac{\partial x^{(0)}}{\partial \varphi_0} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}} dt' - \frac{\partial x^{(0)}}{\partial \mathcal{E}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} dt' \right); \qquad (\text{П.1})$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{m} \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int\limits_{-\infty}^{t'} dt'' F_y^{(0)} = -\frac{1}{m} \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int\limits_{-\infty}^{t'} dt'' V. \qquad (\text{П.2})$$

Выражение для работы переменного внешнего поля над осцилляторами

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{r} F dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\dot{r}^{(0)} F^{(0)} + \dot{r}^{(1)} F^{(0)} + \dot{r}^{(0)} (r^{(1)} \nabla) F^{(0)} \right] dt$$

с учетом соотношения

$$\frac{d}{dt} (r^{(1)} F^{(0)}) = \dot{r}^{(1)} F^{(0)} + \dot{r}^{(0)} (r^{(1)} \nabla) F^{(0)} + r^{(1)} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial t}$$

может быть преобразовано к виду

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{r}^{(0)} F^{(0)} dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} r^{(1)} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial t} dt.$$

При усреднении по начальным фазам колебаний первое слагаемое дает нуль, так что

$$\overline{A} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_0 A = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt r^{(1)} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial t} = \overline{A}_x + \overline{A}_y. \qquad (\text{П.3})$$

Работа, связанная с поперечной группировкой осцилляторов,

$$\overline{A}_x = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt x^{(1)} \frac{\partial F_x^{(0)}}{\partial t}$$

с использованием (П.1), (2.3) может быть записана следующим образом:

$$\overline{A}_x = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \varphi_0} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}} dt' - \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \mathcal{E}} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} dt' \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{U}_k \exp(ik\omega_0 t) \int_{-\infty}^{t} dt' U_{-k} \exp(-ik\omega_0 t).$$

Представим $U_k(\mathcal{E}, t)$ в виде интегралов Фурье (2.5), а затем, используя аналитическое продолжение функций $\overline{U}_k(\mathcal{E}, \omega)$, сместим контур интегрирования в комплексной плоскости ω вниз по отношению к действительной оси. Выполнив интегрирование по t' в выражении для $\overline{A}_x$, получим

$$\overline{A}_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\omega' \overline{U}_k(\mathcal{E}, \omega') \overline{U}_{-k}(\mathcal{E}, \omega)}{\omega - k\omega_0} \exp[i(\omega + \omega')t].$$

После этого деформируем контур интегрирования по ω и ω' таким образом, чтобы он лежал, в основном, по-прежнему на действительной оси, но обходил снизу полюса подынтегральных выражений в точках $\omega = k\omega_0$. С учетом того, что $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\omega+\omega')t]\,dt = 2\pi\delta(\omega + \omega')$, окончательно имеем

$$\overline{A}_x = 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} (k\omega_0 | \overline{U}_k(\mathcal{E}, k\omega_0)|^2). \qquad (\text{П.4})$$

В случае дипольного взаимодействия осцилляторов с переменным полем, не имеющим y-компоненты, формула (П.4) переходит в выражение, полученное Собельманом и Тютиным [3].

Выражение для работы, связанной с продольной группировкой осцилляторов, может быть преобразовано аналогичным образом:

$$\overline{A}_y = -\frac{1}{m}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{V}_k \exp(ik\omega_0 t) \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' V_{-k} \exp(-ik\omega_0 t'') =$$

$$= \frac{2\pi^2}{m}\left\{ |\overline{V}_0(\mathcal{E}, 0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\omega_0} (\omega_0 | \overline{V}_k(\mathcal{E}, k\omega_0)|^2) \right\}. \qquad (\text{П.5})$$

2. Квантовое описание движения осцилляторов заключается в решении уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \tag{П.6}$$

где $\hat{H}_0$ — гамильтониан свободного осциллятора, а $\hat{H}_1$ — возмущение, обусловленное воздействием внешней силы.

Оператор $\hat{H}_0$ запишем в виде

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + u(x) + \frac{m}{2}\omega_1^2(y - y^{(0)})^2. \tag{П.7}$$

Здесь $\hat{p}$ — оператор импульса; член $\frac{m}{2}\omega_1^2(y - y^{(0)})^2$ введен для того, чтобы сделать спектр стационарных состояний дискретным [14]: в классическом пределе ($\hbar \to 0$) при $\omega_1 \neq 0$ осциллятор совершает колебания как по координате x, так и по координате y. В конечных формулах будет произведен предельный переход $\omega_1 \to 0$, соответствующий свободному движению осцилляторов по координате y. Стационарные волновые функции осциллятора представляют собой произведения

$$\Psi^{(0)}_{m\mu}(x, y, t) = \Psi^{(0)}_m(x, t)\Psi^{(0)}_\mu(y, t) \tag{П.8}$$

собственных функций $\Psi^{(0)}_m(x,t) = \psi_m(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_m t\right)$ гамильтониана $\hat{H}_{0x} = \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2 + u(x)$ и собственных функций $\Psi^{(0)}_\mu(y, t) = \psi_\mu(y)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_\mu t\right)$ гамильтониана линейного осциллятора $\hat{H}_{0y} = \frac{1}{2m}\hat{p}_y^2 + \frac{m}{2}\omega_1^2(y - y^{(0)})^2$, $\mathcal{E}_m$ и $\mathcal{E}_\mu$ — энергии соответствующих состояний.

Воздействие внешней силы на осциллятор в соответствии с (2.3) описывается оператором

$$\hat{H}_1 = U(x, t) + (y - y^{(0)})\,V(x, t). \tag{П.9}$$

Если вначале осциллятор находится в состоянии $\{p, \lambda\}$ с волновой функцией $\Psi^{(0)}_{p,\lambda}$, действие возмущения переводит его в состояние $\{q, \mu\}$ с вероятностью [15]

$$w_{pq,\lambda\mu} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx \int dy\, \Psi^{(0)*}_{q\mu}\hat{H}_1\Psi^{(0)}_{p\lambda}\right|^2. \tag{П.10}$$

Соответствующее приращение энергии осциллятора $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_q - \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_\lambda$, частота перехода $(\Delta\mathcal{E}/\hbar) = \omega_{qp} + \omega_{\mu\lambda}$, где $\omega_{qp} = (\mathcal{E}_q - \mathcal{E}_p)/\hbar$ и $\omega_{\mu\lambda} = (\mathcal{E}_\mu - \mathcal{E}_\lambda)/\hbar$.

Согласно (П.8)—(П.10), осциллятор может совершать переходы двух типов. Переходы, обусловленные наличием в операторе $\hat{H}_1$ слагаемого $U(x, t)$, в силу соотношения ортогональности $\int \psi^*_\mu\psi_\lambda dy = \delta_{\mu\lambda}$, происходят без изменения «продольного» квантового числа λ, что соответствует поперечной группировке осцилляторов. Переходы, связанные с наличием в $\hat{H}_1$ слагаемого $(y - y^{(0)})\,V(x, t)$, происходят с изменением λ на ± 1. Действительно, интегралы $y_{\mu\lambda} = \int \psi^*_\mu(y - y^{(0)})\psi_\lambda dy$

представляют собой матричные элементы координаты линейного осциллятора и отличны от нуля только при $|\mu - \lambda| = 1$:

$$y_{\mu-1,\,\mu} = y_{\mu,\,\mu-1} = (\hbar\mu/2m\omega_1)^{1/2}.$$

Такие переходы соответствуют продольной группировке осцилляторов.

Вероятности переходов с изменением «поперечного» квантового числа p определяются величинами интегралов

$$U_{p+k,\,p}(t) = \int dx\, \Psi^{(0)*}_{p+k} U \Psi^{(0)}_{p}, \quad V_{p+k,\,p}(t) = \int dx\, \Psi^{(0)*}_{p+k} V \Psi^{(0)}_{p},$$

которые в квазиклассическом пределе ($\hbar \to 0$) [15] переходят в коэффициенты рядов (2.4) для функций U и V:

$$U_{p+k,\,p} \to U_k \exp(ik\varphi_0), \quad V_{p+k,\,p} \to V_k \exp(ik\varphi_0).$$

Вычислим работу поля над осцилляторами, связанную с их поперечной группировкой. Вероятности соответствующих переходов равны

$$w_{pq,\,\lambda\lambda} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |\bar{U}_{qp}(\omega_{qp})|^2,$$

где $\bar{U}_{qp}(\omega)$ — фурье-компоненты функций $U_{qp}(t) = \int \bar{U}_{qp}(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega$. Вероятное приращение энергии осциллятора определяется суммой

$$\Delta\mathcal{E}_x = \sum_q \hbar\omega_{qp}\, w_{pq,\,\lambda\lambda}. \qquad (\text{П.11})$$

В квазиклассическом пределе (раздел 1, п. 3)

$$\frac{1}{\hbar k\omega_0}\left[\omega_{p+k,\,p} |\bar{U}_{p+k,\,p}(\omega_{p+k,\,p})|^2 + \omega_{p-k,\,p} |\bar{U}_{p-k,\,p}(\omega_{p-k,\,p})|^2\right] \to$$

$$\to \frac{d}{d\mathcal{E}}\left[k\omega_0 |\bar{U}_k(\mathcal{E}, k\omega_0)|^2\right]$$

и (П.11) переходит в выражение (П.4) для работы $\bar{A}_x$, найденное из классических уравнений движения*.

При продольной группировке осцилляторов изменяются одновременно как их поперечное, так и продольное движение: при поглощении или излучении кванта осциллятор испытывает отдачу. Вероятности соответствующих переходов, согласно (П. 9), (П.10), равны

$$w_{pq;\,\lambda,\,\lambda+1} = \frac{2\pi^2(\lambda+1)}{m\hbar\omega_1} |\bar{V}_{qp}(\omega_{qp} + \omega_1)|^2,$$

$$w_{pq;\,\lambda,\,\lambda-1} = \frac{2\pi^2\lambda}{m\hbar\omega_1} |\bar{V}_{qp}(\omega_{qp} - \omega_1)|^2,$$

где $\bar{V}_{qp}(\omega)$ — фурье-компоненты функций $V_{qp}(t) = \int V_{qp}(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega$. Соответствующее выражение для вероятного приращения энергии осциллятора

$$\Delta\mathcal{E}_y = \sum_q \left[\hbar(\omega_{qp} + \omega_1) w_{pq;\,\lambda,\,\lambda+1} + \hbar(\omega_{qp} - \omega_1) w_{pq;\,\lambda,\,\lambda-1}\right]$$

* Квантовый вывод формулы (П.4) для $\bar{A}_x$ полностью аналогичен соответствующему выводу, приведенному в [3].

в квазиклассическом пределе равно

$$\Delta\mathcal{E}_y = \frac{2\pi^2}{m}\left\{|\bar{V}_0(\mathcal{E}, \omega_1)|^2 + \right. \tag{П.12}$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k\omega_0+\omega_1)|\bar{V}_k(\mathcal{E}, k\omega_0+\omega_1)|^2 - (k\omega_0-\omega_1)|\bar{V}_k(\mathcal{E}, k\omega_0-\omega_1)|^2\right]\right\}.$$

Совершая переход $\omega_1 \to 0$, из (П.12) получаем найденное ранее выражение (П.5) для $\bar{A}_y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, Phys. Zs., **18**, № 5, 121 (1917); А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, **3**, изд. Наука, М., 1966, стр. 393.
2. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 2, 207 (1963).
3. И. И. Собельман, И. В. Тютин, УФН, **79**, № 4, 595 (1963).
4. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
5. H. Barkhausen, K. Kurz, Phys. Zs., **21**, 1 (1920).
6. H. Alfven, D. Rommel, Proc. IRE, **42**, No. 8, 1239 (1954).
7. B. Agdur, Ericsson Techn., **13**, No. 1, 3 (1957).
8. D. Watkins, G. Wada, Proc. IRE, **46**, No. 10, 1700 (1958).
9. Z. S. Chernow, Proc. IEE, **105B**, Suppl. 10, 594 (1958).
10. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 3, 450 (1959).
11. J. Schneider, Phys. Rev. Letters, **2**, No. 12, 504 (1959).
12. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 5, 836 (1959).
13. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 1, 57 (1960).
14. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, **39**, № 2(8), 326 (1960).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
16. H. G. Möller, JddT, **34**, 201 (1929); ENT, **7**, 293 (1930); ENT, **7**, 411 (1930).
17. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 3, 455 (1961).
18. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 1, 104 (1963)
19. А. А. Соколов, Ю. Г. Павленко, Письма в ЖЭТФ, **2**, № 9, 449 (1965); Оптика и спектроскопия, **22**, № 1, 3 (1967).
20. П. Л. Капица, УФН, **78**, № 2, 181 (1962); Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., 1962.
21. В. М. Боков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 5, 826 (1960).
22. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР, **56**, № 6, 583 (1947); В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 1, 14 (1959).
23. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, **43**, № 4 (10), 1394 (1962).
24. А. В. Гапонов, В. К. Юлпатов, Радиотехника и электроника, **7**, № 4, 631 (1962).
25. J. R. Pierce, Travelling-wave Tubes, V.-Nostr., N. Y., 1950; Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
26. D. Bohm, E. P. Gross, Phys. Rev., **75**, No. 12, 1864 (1949); А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ДАН СССР, **69**, № 4, 555 (1949); ЖЭТФ, **21**, № 11, 1262 (1951).
27. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
28. В. И. Гайдук, Радиотехника и электроника, **4**, № 9, 1513 (1959).
29. В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 6, 846 (1967).
30. R. M. Hill, D. E. Kaplan, Phys. Rev. Letters, **14**, No. 26, 1062 (1965).
31. J. M. Wachtel, J. M. Hirshfield, Phys. Rev. Letters, **17**, No. 7, 348 (1966).
32. B. Gill, E. Morell, Phil. Mag., **44**, 161 (1922).
33. A. Zacek, Zs. Hochfr., **32**, 172 (1928).
34. F. Lüdi, Helv. Phys. Acta, **16**, 59 (1943); ZAMP, **3**, No. ', 119 (1952).
35. H. Kleinwächter, ETZ, **72**, No. 24, 714 (1951).
36. С. И. Тетельбаум, Радиотехника и электроника, **2**, № 6, 705 (1957).
37. И. И. Антаков, Р. П. Васильев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 5, 741 (1959).
38. Ю. Г. Альтшулер, Е. В. Анисимов, Р. М. Ревзин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **7**, № 6, 1223 (1964).
39. П. А. Бородовский, А. Ф. Булдыгин, Радиотехника и электроника, **10**, № 10, 1829 (1965).
40. П. А. Бородовский, А. Ф. Булдыгин, Изв высш уч зав.—Радиофизика, **8**, № 5, 955 (1965).

41. G. Wada, R. Pantell, IRE Wescon Convent. Rec., **3**, No. 3, 92 (1959).
42 В М. Боков, А. В Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 5, 831 (1959).
43. R. H. Pantell, IRE Trans., **ED-7**, No. 1, 20 (1960).
44 А. А Кураев, Ю. Н. Кувшинов, сб. Вопросы электроники сверхвысоких частот, изд. Саратовского университета, вып. 1, 118 (1964); Радиотехника и электроника, **10**, № 2, 379 (1965).
45. А. А. Кураев, Б Н. Романов, В. Н. Шевчик, Радиотехника и электроника, **9**, № 6, 983 (1964)
46. З. С. Чернов, Г. А. Бернашевский, Радиотехника и электроника, 8, № 6, 973 (1963)
47. В. А. Солнцев, А. С Тагер, Радиотехника и электроника, **4**, № 10, 1652 (1959)
48. H. Motz, M. Nakamura, Proc. of Symp. on Millimeter Waves, N. Y., 1959, p. 155.
49. R. M. Phillips, IRE Trans., ED-7, No. 4, 231 (1960).
50. R. M. Phillips, Proc. of the 4th Int. Congress on Microwave Tubes, Scheweningen, Holland, 1962, p. 341.
51 А В Гапонов, М И Петелин, Радиотехника и электроника, **9**, № 8, 1368 (1964)
52. А Л Гольденберг, М. И. Петелин, Радиотехника и электроника, **9**, № 11, 1987 (1964).
53. C. E. Enderby, R. M. Phillips, Proc. IEEE, **53**, No. 10, 1648 (1965).
54. J. L Hirshfield, J. M. Wachtel, Phys. Rev. Letters, **12**, No. 19, 533 (1964).
55. R. H. Pantell, Proc. of Symp. on Millimeter Waves, N. Y., 1959, p. 301.
56. А В. Гапонов, Доклад на сессии НТОРиЭ им А С Попова, М, 1959.
57. R. H. Pantell, Proc. IRE, **47**, No. 6, 1146 (1959).
58. В. В. Железняков, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **3**, № 2, 180 (1960).
59. J. Schneider, Zs. Naturforschung, **15a**, No. 5—6, 484 (1960).
60. В. Д. Шафранов, сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, изд АН СССР, М, **4**, 416 (1958).
61. А. В Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 3, 443 (1959).
62. Г. Н Рапопорт, Радиотехника и электроника, 5, № 4, 649 (1960).
63. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд Сов радио, М, 1957.
64. И. И. Антаков, В. М. Боков, Р. П Васильев, А В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **3**, № 6, 1033 (1960)
65. А В Гапонов, Изв. высш уч зав.—Радиофизика, **4**, № 3, 547 (1961).
66 В. Н Шевчик, Взаимодействие электронных пучков с электромагнитными волнами, изд. Саратовского университета, 1963.
67. А. В Гапонов, В К. Юлпатов, Радиотехника и электроника, **12**, № 4, 627 (1967).
68. А. А Коломенский, А. Н. Лебедев. ДАН СССР, **145**, № 6, 1259 (1962).
69. В Я Давыдовский, ЖЭТФ, **43**, № 3 (9), 886 (1962).
70. A. H. W. Beck, R. F. Mayo, Internationalen Tagung, Mikrowellenröhren, München, 1960, s. 240.
71. K. K. Chow, R. H. Pantell, IRE Trans., **ED-9**, No. 4, 351 (1962).
72 Г. Н. Рапопорт, В. А. Жураховский, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **5**, № 6, 707 (1962).
73. D. L. Bobroff, H. A. Haus, IEEE Trans., **ED-10**, No. 4, 235 (1963).
74. C. Nielsen, A. Sessler, Rev. Scient. Instrum., **30**, No. 2, 80 (1959).
75. А А Коломенский, А Н Лебедев, Атомная энергия, **7**, № 6, 549 (1959)
76. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, **26**, № 1, 126 (1956).
77. В. К. Юлпатов, Изв. высш уч зав —Радиофизика, **6**, № 1, 95 (1963).
78. М И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
79. А. А. Соколов, И М Тернов, ДАН СССР, **166**, № 6, 1332 (1966); Письма в ЖЭТФ, **4**, № 3, 90 (1966).
80. А. В. Гапонов, А Л. Гольденберг, Д П. Григорьев, И М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма в ЖЭТФ, **2**, № 9, 430 (1965).
81. В. К Юлпатов, Доклад на IV Всесоюзной конференции МВ ССО по радиоэлектронике, Харьков, 1960.
82. В. А. Жураховский, Радиотехника и электроника, **9**, № 8, 1527 (1964).
83. J. L. Hirshfield, Internationalen Tagung, Mikrowellenröhren, Paris, **1964**, s. 482.
84. Г. Н. Рапопорт, А. К. Немак, В. А. Жураховский, Радиотехника и электроника, **12**, № 4, 633 (1967).
85. Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, **2**, № 7, 883 (1957).
86. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 4, 619 (1961); **4**, № 5, 849 (1961).
87 А. А. Андронов, В В. Железняков, М. И. Петелин, Изв. высш. уч зав — Радиофизика, **7**, № 2, 251 (1964).
88. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, № 7, 576 (1946).

89. K. K. Chow, R. H. Pantell, Proc. IRE, **48**, No. 11, 1865 (1960).
90. И. И. Антаков, А. В. Гапонов, О В. Малыгин, В. А. Флягин, Радиотехника и электроника, **11**, № 12, 2254 (1966).
91 И. И. Антаков, В А. Гинцбург, Радиотехника и электроника (в печати)
92. В. А. Флягин, Т Б Панкратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 5, 950 (1962); Радиотехника и электроника, **11**, № 4, 731 (1966).
93. T. P. Lee, R. H. Pantell, Proc. of the 4th Int. Congress on Microwave Tubes, Scheweningen, Holland, 1962.
94 И. И. Антаков, В. Г. Климов, Р. В. Линьков, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, 8, № 5, 948 (1965).
95. I. B. Bott, Proc. IEEE, **52**, No. 3, 330 (1964).
96. I. B. Bott, Phys. Letters, **14**, No. 4, 293 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 июля 1967 г.

Примечание при корректуре. В последнее время нам стали известны еще две работы, касающиеся МЦР (А. Ф. Курин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 8, 1160 (1967); R. L. Schriever, C. C. Johnson, Proc. IEEE, **54**, № 12, 2029 (1966)). В первой из них рассмотрены условия самовозбуждения одной из простейших моделей МЦР. Во второй—описан экспериментальный макет МЦР с бегущей волной 3-*см* диапазона волн, использующего винтовой электронный пучок; получена генерация электромагнитных колебаний (несколько сот ватт в импульсе с КПД до 0,1) с большой (как и в [90]) полосой электронной перестройки частоты за счет изменения магнитного поля.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том X, № 9—10 *РАДИОФИЗИКА* *1967*

РАДИОФИЗИКА И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ В ГОРЬКОМ ЗА 50 ЛЕТ

Предлагаемый вниманию читателей обзор исследований в области радиофизики и теории колебаний, выполненных в Горьком (Нижнем Новгороде) в течение пятидесяти лет существования Советского государства, может послужить полезным дополнением к помещенным выше обзорам. Его опубликование, как нам представляется, оправдано тем значением, которое получил в истории советской радиотехники и радиофизики Горький, ставший за годы советской власти одним из крупнейших научных центров нашей страны.

История научной работы в области радиофизики, теории колебаний и теории автоматического регулирования в Горьком естественно распадается на период, связанный с деятельностью Нижегородской радиолаборатории им. В. И. Ленина (1918—1928 гг.), и период, начало которому было положено в 1931 г. переездом в Горький А. А. Андронова. Во втором периоде работа в указанных выше областях науки велась, главным образом, в Горьковском университете и его исследовательских институтах (ГИФТИ, НИРФИ, НИИ ПМК)*. Несмотря на то, что после перевода в 1928 г. Нижегородской радиолаборатории (НРЛ) в Ленинград научная работа в области радиофизики в Горьком фактически прервалась, оба периода нельзя считать полностью обособленными. В Горьком была создана радиопромышленность, осталась отраслевая радиолаборатория и в ней часть работников НРЛ, а среди учащейся молодежи сохранился живой интерес к электронике и радиотехнике.

1. РАДИОФИЗИКА И ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ В НРЛ

В работах НРЛ принимали участие выдающиеся радиоспециалисты, и, естественно, при решении вставших перед НРЛ радиотехнических задач было выполнено немало исследований, которые по современной терминологии следует отнести к радиофизике**.

Прежде всего следует отметить работы по теории электронных ламп (М. А. Бонч-Бруевич) — центральной проблеме электроники начала 20-х годов. Эти работы, выполненные в условиях полной научной блокады нашего государства в 1918—19 гг., послужили основой разработки и серийного производства как приемных ламп, которыми уже в начале 1919 г. НРЛ снабжала советские радиостанции, так и генераторных ламп, вначале с естественным, а затем и с принудительным водяным охлаждением анода. Сравнение теории М. А. Бонч-Бруевича с разработанной одновременно за рубежом теорией Баркгаузена, ставшее возможным в 1921 г. после получения иностранных журналов, показало их эквивалентность.

Заслуги НРЛ в разработке и строительстве мощных длинноволновых радиостанций общеизвестны. Первые систематические исследования по применению в радиосвязи коротких волн также принадлежат НРЛ.

---

* Горьковский научно-исследовательский физико-технический институт, научно-исследовательский радиофизический институт, научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики.

** Нижегородской лаборатории посвящен ряд книг (см., например, [1]).

В НРЛ были выполнены фундаментальные работы по теории антенн М. А. Бонч-Бруевича, В. В. Татаринова и Д. А. Рожанского, а также первые работы А. А. Пистолькорса, применившего для расчета сопротивления излучения сложных коротковолновых антенн метод наведенных ЭДС. Впервые широко использовался метод экспериментального исследования антенных систем на моделях; были разработаны сложные антенны направленного действия и выяснены некоторые особенности дневного и ночного распространения коротких волн. В результате этих работ страна получила надежную радиосвязь на коротких волнах.

Из других радиофизических работ НРЛ следует отметить работы по незатухающим колебаниям в связанных контурах (В. В. Татаринов) и электронной осциллографии (Д. А. Рожанский, Б. А. Остроумов). В осциллографах НРЛ применялся оксидный точечный катод, вместо фигур Лиссажу — наблюдение осциллограмм с помощью временной развертки, вместо фазовой фокусировки — фокусировка магнитным полем. Осциллографы НРЛ, таким образом, значительно приближались к современным. Несколько особняком стояли вызвавшие в свое время большой интерес работы О. В. Лосева по исследованию кристаллических детекторов или, по современной терминологии, полупроводниковых кристаллических диодов с точечными контактами. О. В. Лосев обнаружил падающие участки на вольт-амперных характеристиках детекторов и построил на этой основе гетеродин на кристалле («генерирующий кристалл»). Схемы, разработанные О. В. Лосевым, получили широкую известность во всем мире. О. В. Лосев обнаружил также один из видов электролюминесценции, а именно, свечение люминофора на контакте с проводником, подводящим ток.

Невозможно переоценить значение журналов «Телеграфия и телефония без проводов» (ТИТбП) и «Радиотехник», издававшихся НРЛ в 1918—25 гг. (редактор В. К. Лебединский). Долгое время ТИТбП была единственным систематически выходящим научным журналом в нашей стране. Большое внимание в НРЛ уделялось подготовке научных кадров. Ученые НРЛ охотно работали со студентами-практикантами и начинающими молодыми радиолюбителями. Ведущие работники НРЛ (В. К. Лебединский, М. А. Бонч-Бруевич, В. В. Татаринов, В. П. Вологдин) вели преподавательскую работу в Нижегородском университете. Многие известные радиоспециалисты начинали свою деятельность в НРЛ (В. А. Котельников, А. А. Пистолькорс, Д. Е. Маляров, О. В. Лосев, А. М. Кугушев и др.).

2. РАДИОФИЗИКА И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ В ГОРЬКОМ В 1931—67 гг.

Начиная с 1931 г. развитие радиофизики в Горьком (Нижнем Новгороде) неразрывно связано с Горьковским государственным университетом. В 1931 г. А. А. Андронов, В. И. Гапонов, М. Т. Грехова, Е. А. Леонтович (а несколько позже, в 1937 г., Г. С. Горелик), выразившие желание переехать в Горький, были направлены Народным Комиссариатом Просвещения на работу в Горьковский государственный университет. Работа этих ученых — и как организаторов преподавания на физико-математическом факультете ГГУ, и как ведущих научных работников переданного ГГУ физико-технического института (ГИФТИ) — стимулировала быстрое развитие тех научных направлений, которые впоследствии легли в основу Горьковской радиофизической школы: теории колебаний, статистической радиофизики, физики сверхвысоких частот (электродинамики и электроники СВЧ). Особенно большое влияние на развитие горьковской радиофизики оказал А. А. Андронов — не только благодаря своим работам в области теории автоколебаний, имевшим фундаментальное значение для многих проблем радиофизики,

но также благодаря высокой требовательности к уровню научной работы и постоянному вниманию к подготовке научных кадров.

Чрезвычайно важным обстоятельством, немало способствовавшим развитию радиофизики в Горьком, было наличие тесных связей горьковских радиофизиков с ведущими учеными Москвы и Ленинграда. А. А. Андронов и Г. С. Горелик, окончившие аспирантуру у Л. И. Мандельштама, были тесно связаны с физиками мандельштамовской школы. М. Т. Грехова сохранила близкие связи с Б. А. Введенским, с физиками школы Д. А. Рожанского. Эти контакты поддерживали уровень научной жизни университета и оказались очень полезными, когда в 1945 г. по инициативе А. А. Андронова, М. Т. Греховой и Г. С. Горелика в ГГУ был организован первый в СССР радиофизический факультет. В первые годы после организации факультета в его работе наряду с горьковчанами (А. А. Андроновым, Г. С. Гореликом, М. Т. Греховой, А. Г. Майером, В. И. Гапоновым и проживавшим тогда в Горьком М. Л. Левиным) самое деятельное участие принимали москвичи — профессора В. Л. Гинзбург, С. М. Рытов и Е. Л. Фейнберг. Тогда впервые было определено «основное содержание» радиофизического образования, разработаны новые учебные планы, прочитаны новые оригинальные курсы. Стоит напомнить, например, что именно на радиофизическом факультете Г. С. Горелик создавал курс, составивший в дальнейшем основу его замечательной книги «Колебания и волны», что на основе прочитанных на факультете курсов написаны книги В. Л. Гинзбурга «Распространение радиоволн в ионосфере» и Е. Л. Фейнберга «Распространение радиоволн вдоль поверхности Земли».

Особенно большое значение имело руководящее участие в работах по радиоастрономии и распространению радиоволн В. Л. Гинзбурга, сохранившего тесные связи с Горьким до настоящего времени. Многие из горьковчан-радиофизиков являются учениками В. Л. Гинзбурга.

Организация радиофакультета и поддержка его ведущими радиоспециалистами страны подготовили новый этап в развитии горьковской радиофизики. На этом этапе был организован (в 1956 г.) научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ), а в 1964—65 гг.— факультет вычислительной математики и кибернетики ГГУ и научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК).

Немалое значение для развития научной работы имело начавшееся в 1958 г. издание в Горьком журнала Министерства Высшего Образования «Радиофизика» (отв. редактор В. Л. Гинзбург, зам. отв. редактора В. И. Гапонов).

3. РАБОТЫ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Изучение генерирования колебаний в типичных механических (часы) и радиотехнических (ламповый генератор) системах позволили А. А. Андронову выяснить основные особенности генераторов незатухающих колебаний и привели к созданию нового раздела нелинейной теории колебаний — теории автоколебательных систем. А. А. Андронов дал строгое математическое определение автоколебаний, указав на их связь с предельными циклами Пуанкаре (сам термин «автоколебания» предложен Андроновым), привлек к решению проблем теории колебаний аппарат качественной теории дифференциальных уравнений и общую теорию устойчивости движения, разработанную А. М. Ляпуновым. Необходимо отметить, что А. А. Андронов не ограничился применением уже имевшегося математического аппарата к проблемам теории авто-

колебаний. Многие его идеи привели к существенно новым результатам в качественной теории дифференциальных уравнений. В качестве примера можно привести разработанную им совместно с Л. С. Понтрягиным теорию грубых систем [2], а также работы по эволюции качественной структуры фазового пространства при непрерывном изменении параметров дифференциальных уравнений (теория бифуркаций), выполненные совместно с Е. А. Леонтович и А. Г. Майером.

Качественная теория, а также количественные методы, разработанные А. А. Андроновым сначала с А. А. Виттом, а затем с сотрудниками и учениками (А. Г. Майером, Н. Н. Баутиным, Ю. И. Неймарком, Н. А. Железцовым): метод точечных преобразований, новые методы исследования устойчивости, метод малого параметра (использованный ранее Пуанкаре в задачах небесной механики), позволили по-новому подойти к рассмотрению ряда конкретных задач и явлений, имевших принципиальное значение для радиофизики [3]. Важные результаты были получены в теории разрывных колебаний [4] при исследовании захватывания генератора внешним сигналом и затягивания частоты в генераторе с двумя контурами [5], в задаче о мягком и жестком самовозбуждении автогенератора [6].

Итоги исследований по теории автоколебательных систем дали основной материал для вышедшей в 1937 г. фундаментальной монографии А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина «Теория колебаний», во многом определившей высокую «колебательную культуру» советской радиофизики*.

В послевоенные годы развитие теории колебаний было связано, в основном, с проблемами автоматического регулирования и общей динамики машин, хотя некоторые из проведенных исследований, например, в области теории разрывных колебаний и по теории фазовой автоподстройки, имели непосредственную «радиофизическую» направленность. После смерти А. А. Андронова (в 1952 г.) работы в области теории колебаний и качественной теории дифференциальных уравнений проводились, в основном, в теоретическом отделе ГИФТИ, впоследствии —во вновь организованном при ГГУ институте прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК), а также в вычислительном центре и лаборатории динамики ГИФТИ, на факультете вычислительной математики и кибернетики, на кафедре теории колебаний ГГУ и на кафедре математики ГИИВТ.

Остановимся коротко на основных научных результатах, полученных школой А. А. Андронова в области теории колебаний и теории автоматического регулирования, главным образом, в последние 15—20 лет.

а) В области качественной теории дифференциальных уравнений. Разработана теория «грубых» динамических систем второго порядка с плоской и цилиндрической фазовыми поверхностями. Изучены основные типы бифуркаций и общая структура разбиения фазовой поверхности на траектории (А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, А. Г. Майер) [7]. Эти работы явились математической основой теории нелинейных колебаний автономных систем второго порядка и были использованы при решении ряда прикладных задач [8]. Выяснены бифуркации и структуры окрестностей сложных состояний равновесия и периодических движений многомерных динамических систем [9].

б) В области теории устойчивости. Разработан общий метод исследования устойчивости линеаризованных дискретных и распределенных систем, который под названием метода D-разбиения широко используется в теории автоматического регулирования (Ю. И. Неймарк) [10].

* В первом издании «Теории колебаний» А. А. Витт, погибший в 1937 г. и впоследствии реабилитированный, не был указан в числе авторов.

Этот метод позволил решить ряд сложных и практически важных задач устойчивости (о влиянии гидравлического удара на устойчивость регулирования гидротурбин [11], об условиях самовозбуждения поющего пламени [12], устойчивости процессов резания металла [13], устойчивости технических систем с качением и др.) [14]. Рассмотрено поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости и введено понятие опасных и безопасных границ [15].

Обоснована сводимость исследования устойчивости нелинейных распределенных систем к исследованию корней характеристического уравнения соответствующих линеаризованных уравнений [16]. Проведен цикл работ по приложению методов теории колебаний к расчету сложных энергетических установок. Рассмотрена динамика и, в частности, вопросы устойчивости «в малом» и «в большом» ряда математических моделей энергетических систем и их узлов; так, например, рассмотрены динамика кипящих каналов, устойчивость параллельной работы циркуляционных насосов, динамика энергетических установок с естественной циркуляцией теплоносителя [17]. На основе метода В. М. Попова установлены достаточные условия абсолютной устойчивости динамических систем с нелинейностью типа люфта [18], нелинейных систем с модуляцией [19], достаточные условия стохастической устойчивости [20], рассмотрены некоторые вопросы теории следящих систем на переменном токе [21].

в) В области изучения нелинейных колебательных явлений. В работах А. А. Андронова и А. А. Витта методами малого параметра и качественной теории дифференциальных уравнений изучены основные нелинейные колебательные явления («мягкое» и «жесткое» возбуждение автоколебаний, «затягивание» и «захватывание» и др.). В этих же работах метод малого параметра Пуанкаре был соединен с теорией устойчивости Ляпунова, а к исследованию «укороченных» уравнений Ван-дер-Поля была привлечена качественная теория дифференциальных уравнений. Рассмотрены также задачи об автоколебаниях связанных генераторов (А. Г. Майер) [22], об автоколебаниях цефеид [23], задача Зоммерфельда [24] и другие [25].

г) В области теории «разрывных» колебаний. Созданы адекватные математические модели динамики систем с разрывными колебаниями в виде дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. В фазовом пространстве таких систем выделены подпространства «медленных» и «быстрых» движений и разработаны приближенные методы исследования их динамики [4]. Продолжением этих работ явился цикл математических работ Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко и ряда других московских математиков. На основе этих исследований проведено изучение динамики ряда систем с «разрывными» колебаниями, применяемых в радиотехнике и в цифровых вычислительных машинах [26], изучение динамики некоторых энергетических систем и их узлов [27] и динамики некоторых неголономных систем [28]. Установлена связь между структурой в большом фазового пространства динамических систем с малым параметром при производной и бифуркациями быстрых движений [29].

д) В области теории точечных отображений и динамики многомерных систем. А. А. Андроновым, Н. Н. Баутиным и А. Г. Майером создан новый метод исследования нелинейных колебательных систем— метод точечных отображений, позволивший им полностью рассмотреть ряд основных кусочно-линейных задач теории автоматического регулирования и теории колебаний: задачу Вышнеградского, задачу Мизеса [30], задачу об автопилоте [31] и др. Этим методом были также решены классические нелинейные задачи о непрямом регулировании [32], ряд за-

дач динамики часов [33], задача об осцилляторе с комбинированным трением [34], ряд задач по виброзабивке и вибровыдергиванию и по системам с ударным взаимодействием [35], по теории нелинейных демпферов [36], по экстремальному регулированию [37], по теории релейных систем [38]. Методом точечных отображений были рассмотрены также система двухпозиционного регулирования температуры с временным запаздыванием [39], разрывные точечные преобразования прямой в прямую [40], системы с неустойчивым объектом [41], была решена задача об электромагнитном прерывателе [42], некоторые задачи массового обслуживания [43] и др.

Дана дальнейшая разработка метода точечных отображений [44]. На основе изучения бифуркаций периодических движений и состояний равновесия многомерных динамических систем [45] выяснены некоторые особенности таких систем, изучены интегральные многообразия [29] и дана новая трактовка методов малого параметра и усреднения [46], изучена структура окрестности гомоклинической кривой [47].

4. ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ РАДИОФИЗИКИ

А. Статистическая радиофизика и радиофизические методы исследования вещества и излучения

Первые исследования в области статистической радиофизики в Горьком связаны с именем А. А. Андронова. Еще в 1933 г. А. А. Андронов, А. А. Витт и Л. С. Понтрягин исследовали некоторые вопросы, связанные с влиянием случайных толчков на поведение неконсервативной динамической системы, и, в частности, рассмотрели обусловленные флуктуациями случайные переходы системы из одного состояния в другое.

В 1937—52 гг. исследования по статистической радиофизике, а также работы по применению радиофизических методов для исследования вещества и излучения возглавлял Г. С. Горелик. В работах Г. С. Горелика были введены понятия естественной и технической ширины линии генератора [48]. В 1947 г. Г. С. Гореликом был предложен метод демодуляции света [49], получивший впоследствии применение для анализа лазерного излучения. И. Л. Берштейн, обратившийся к исследованию флуктуаций в автоколебательных системах по предложению А. А. Андронова, вычислил естественную ширину спектральной линии генератора [50]. Позже им были рассмотрены флуктуации в клистронных и параметрических генераторах, системах автоподстройки частоты [51] и, в последнее время, в лазерах [52]. И. Л. Берштейном был разработан интерференционный метод наблюдения малых изменений фазы, позволивший измерить естественные флуктуации частоты лампового генератора [53]. Эти работы были в 1950 г. отмечены АН СССР премией им. Л. И. Мандельштама. Интерференционный метод был использован для воспроизведения на радиоволнах опыта, аналогичного известному в оптике опыту Саньяка [54]. Обобщение метода наблюдения изменений фазы на оптику дало возможность измерять механические колебания порядка малых долей ангстрема [55], а также существенно повысить разрешающую способность оптических приборов [56]. Впоследствии в продолжение этих работ был дан теоретический анализ методов измерения флуктуаций частоты автогенераторов и рассмотрено влияние фликкерного шума на флуктуации в автогенераторах [57].

Были проведены теоретические и экспериментальные исследования статистических процессов при перемагничивании ферромагнетиков и пе-

реполяризации сегнетоэлектриков [58] и в системах с периодически меняющимися параметрами [59]. На основе принципа, названного Г. С. Гореликом модуляционным методом приема, был построен радиометр, с которым были выполнены первые в нашей стране радиоастрономические наблюдения в сантиметровом диапазоне. Теоретические и экспериментальные исследования модуляционного метода приема позволили разработать радиоастрономическую аппаратуру, получившую широкое применение [60].

Теоретическое рассмотрение формы и ширины спектральной линии генератора, обладающего коррелированными флуктуациями амплитуды и частоты, проведено в работах [61], где показано, что существование фликкерных флуктуаций в генераторах приводит к нестационарности формы и ширины спектральной линии. Исследованы технические флуктуации в различных генераторах, обнаружен эффект параметрического уширения линии генератора, разработана методика исследования флуктуаций в многоконтурных генераторах и изучены флуктуации, сопровождающие взаимную синхронизацию генераторов с шумами [62].

Дан теоретический и экспериментальный анализ флуктуаций в клистронных генераторах и впервые проведено экспериментальное и строгое теоретическое исследование флуктуаций в магнетронных генераторах [63]; флуктуационным явлениям в молекулярных генераторах посвящены работы [64]. Исследования естественных флуктуаций интенсивности газовых лазеров отражены в работе [65].

В работах [66] был разработан радиофизический метод анализа дисперсии звука с использованием закономерностей модулированных колебаний и применен модуляционный метод для изучения малых нелинейных эффектов при распространении звуковых волн. Были развиты также методы спектрального и корреляционного анализа случайных процессов в диапазоне низких частот, позволившие производить статистическую обработку приходящих сигналов со скоростью поступления информации, построены действующие лабораторные макеты приборов и поставлены опыты по применению спектрального и корреляционного анализа для исследования статистических процессов при вибрациях различных механизмов [67]. Новые методы одновременного анализа спектра с использованием линий с дисперсией были разработаны и осуществлены в работах [68].

Проведены исследование распространения волн в неоднородных (как регулярных, так и нерегулярных) средах, исследование излучения зарядов в неоднородных средах, исследование статистических свойств флуктуаций параметров волн и влияния флуктуаций на работу принимающих устройств [69]. Квантовый теории информации посвящены работы [70].

В заключение настоящего раздела остановимся кратко на работах по исследованию помехоустойчивости радиоприема, начатых в Горьком в конце сороковых годов под руководством Д. В. Агеева и ведущихся в настоящее время в Горьковском политехническом институте и НИРФИ.

Была создана теория приема радиосигналов с частотной модуляцией на следящий фильтр. Предложены и исследованы различные методы приема сигналов в условиях импульсных помех. Разработаны вопросы повышения помехоустойчивости радиолокационных приемных систем с помощью оптимальных фильтров и накопителей импульсных сигналов. Предложен и разработан ряд радиотехнических методов защиты проводных систем связи от активных помех. Созданные на основе этих исследований макеты помехоподавляющих устройств испытаны с положительным эффектом на действующих магистралях связи. Выполнены

исследования по разделению некоторых видов сигналов с перекрывающимися спектрами и защите каналов радиосвязи от внеполосных излучений радиопередающих устройств [71].

Б. Распространение радиоволн и радиоастрономия

Исследования распространения коротких радиоволн в ионосфере, прерванные после переезда НРЛ из Горького, были возобновлены по инициативе А. П. Скибарко в конце 30-х годов. В 1940—43 гг. был разработан метод расчета поглощения коротких волн в различных слоях ионосферы, нашедший себе применение в военные годы [72]. М. М. Кобриным были проведены наблюдения радиоизлучения, возникающего при горении и взрывах.

К начальному этапу этого нового направления (изучению распространения радиоволн и радиоастрономии), ставшего одним из основных научных направлений радиофизики в Горьком, относятся уже упоминавшиеся выше работы по созданию радиометрических приемников для приема слабых сигналов на фоне помех [73], на основе которых была разработана радиоастрономическая аппаратура для различных диапазонов волн. Экспериментальные работы по радиоастрономии в Горьком были начаты Г. С. Гореликом и В. С. Троицким [74]. Велись работы по созданию радиоастрономической аппаратуры и наблюдению радиоизлучения Солнца, Луны, дискретных источников. Для этих работ была основана загородная лаборатория в Зименках. Обширные исследования в области физики ионосферы, распространения радиоволн и радиоастрономии еще до организации НИРФИ проводились под руководством В. Л. Гинзбурга. В частности, были выполнены исследования нелинейных явлений в ионосфере [75], поведения радиоволн вблизи точки отражения [76], распространения импульсов в плазме [77]. Была развита теория синхротронного (магнитотормозного) космического радиоизлучения и происхождения космических лучей, рассмотрены частотный спектр и поляризация синхротронного излучения [78]. Линейная поляризация космического радиоизлучения впервые была обнаружена экспериментально в 1955 г. [79].

Работы по радиоастрономии и распространению радиоволн, выполненные в НИРФИ, можно разделить на две группы.

а) Радиоастрономия и некоторые вопросы физики космоса. Предложен механизм и разработана теория пульсационной звездной переменности, позволяющая понять причины и характер колебаний цефеид и ряда других переменных звезд. Эти работы удостоены в 1965 г. премии АН СССР им. Бредихина (С. А. Жевакин).

Проведены исследования частотного спектра и поляризации космического радиоизлучения, а также прецизионные измерения потока радиоизлучения от некоторых дискретных источников.

Исследован и обоснован синхротронный механизм распределенного космического радиоизлучения; заложены основы теории происхождения космических лучей в тесной связи с проблемой генерации нетеплового космического радиоизлучения [80]. Важные результаты, полученные в этой области, отражены в монографии [81].

В НИРФИ ведутся экспериментальные исследования солнечного радиоизлучения в широком диапазоне от миллиметровых волн до волн длиной в десятки метров [82] и по программе «службы Солнца» [83].

Выполнены исследования условий генерации и распространения радиоизлучения в солнечной короне, позволившие заложить основы теории происхождения спорадического солнечного радиоизлучения [84]. Эти исследования основываются на результатах работ [85], посвященных из-

лучению заряженных частиц и гирорезонансному поглощению в магнитоактивной плазме, а также неустойчивости волн в неравновесной плазме и их трансформации в радиоизлучение. Проведенные в НИРФИ исследования по теории солнечного радиоизлучения и связанным с ней проблемам физики плазмы отражены в монографии В. В. Железнякова [86].

Исследованиями межзвездной среды и атмосфер звезд, а также некоторыми более общими вопросами физики плазмы и магнитогидродинамики (турбулентность, конвекция, ударные волны, нестационарная теория переноса) занимался С. А. Каплан со своими сотрудниками. Значительная часть полученных ими результатов изложена (суммирована) в монографиях [87].

Проведены радиолокационные исследования Луны [88]. Выполнен широкий цикл работ по изучению собственного радиоизлучения Луны. На основе экспериментального изучения радиоизлучения Луны, выполненного методом «искусственной Луны» (который обладает высокой точностью абсолютных измерений потока радиоизлучения), определен тепловой режим верхнего покрова Луны, его тепловые, электрические и механические свойства и структура. Обнаружен и измерен поток тепла из недр Луны [89].

Разработаны радиоастрономические методы экспериментального исследования антенн, получившие широкое применение в радиотехнике [90].

Рассмотрена проблема неустойчивости радиационных поясов Земли и развита теория связанной с этой неустойчивостью генерации ультранизкочастотного излучения в магнитосфере Земли [91].

б) Физика тропосферы, ионосферы и распространение радиоволн. С помощью метода вертикального зондирования, радиоастрономических методов, а также путем приема сигналов искусственных спутников Земли получены новые данные о распределении электронной концентрации в ионосфере и об ионосферных неоднородностях электронной концентрации. Детально исследовано с помощью различных методов ионосферное поглощение радиоволн. Установлены зависимости интегрального ионосферного поглощения радиоволн от различных геофизических параметров и солнечной активности [92].

Выполнены работы по проведению международной экспериментальной радиосвязи на частоте 162,4 *Мгц* между английской радиоастрономической обсерваторией Джодрэл-Бэнк и полигоном НИРФИ в Зименках с использованием пассивного американского ИСЗ «Эхо-II» и Луны. Работа проводилась в соответствии с международным соглашением по мирному использованию космоса. Получены данные, позволяющие предсказать работу различных средств связи в УКВ диапазонах и на других волнах при сверхдальней радиосвязи с использованием Луны и пассивных ретрансляторов типа «Эхо» (группа сотрудников НИРФИ под руководством Г. Г. Гетманцева).

Удалось обнаружить совершенно новое явление — спорадическое радиоизлучение верхней ионосферы Земли, родственное спорадическому радиоизлучению Солнца и Юпитера. Можно полагать, что это излучение происходит благодаря возмущению ионосферы электронными потоками радиационных поясов, и его исследование представляет существенный интерес для геофизики и дает начало новой области радиоастрономии [93].

Завершен цикл теоретических исследований по динамике ионосферных неоднородностей и особенностям распространения радиоволн в неоднородной среде [94].

Проведено экспериментальное исследование поглощения радиоволн

в тропосфере в широком диапазоне волн от миллиметровых до метровых. Показано наличие резко отличного от предсказанного теорией высокого поглощения в области дециметровых волн [95].

Получены теоретические значения основных характеристик земной атмосферы — коэффициентов молекулярного поглощения и преломления — в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн [96]. Разработана аппаратура миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, с которой проведены первые в нашей стране исследования по распространению этих радиоволн и радиоастрономические наблюдения [97]. Обнаружен новый механизм поглощения в земной атмосфере, а именно, поглощение димерами водяного пара радиоволн $\lambda \geqslant 0{,}7$ *мм* [98].

В. Электроника, электродинамика и квантовая радиофизика

Работы по электронике СВЧ были начаты в ГИФТИ в 1932 г. под руководством М. Т. Греховой. Еще до переезда в Горький М. Т. Греховой совместно с В. М. Бовшеверовым во Всесоюзном электротехническом институте (Москва) были разработаны серии электронных ламп, приемников и передатчиков для дециметрового и сантиметрового диапазонов и проведены опыты по распространению этих волн и связи на них. Эти работы были продолжены под руководством М. Т. Греховой в ГИФТИ в содружестве с исследовательскими лабораториями промышленных предприятий. В ГИФТИ разрабатывались электровакуумные приборы СВЧ, изучались свойства колебательных контуров, антенных систем и канализирующих устройств диапазона СВЧ, а также велись исследования распространения радиоволн этого диапазона.

Большой интерес вызвали работы С. В. Беллюстина по теории токов в вакууме, выполненные под руководством А. А. Андронова. Эти работы существенно дополнили классические исследования С. А. Богуславского и И. Ленгмюра.

М. Л. Левиным были начаты теоретические работы в области электродинамики СВЧ — по теории антенн, волноводов и полых резонаторов [99]. Одна из первых в СССР работ по поверхностным электромагнитным волнам была выполнена в ГИФТИ [100].

Работы по электронике СВЧ и электродинамике значительно расширились после перенесения их в НИРФИ, где проводились также исследования квантовых явлений в радиодиапазоне, получивших название квантовой радиофизики. Ниже кратко изложены основные результаты работ этого периода (1956—1967 гг.).

Проведены теоретические и экспериментальные исследования поверхностных электромагнитных волн и возможных их применений в антенной технике, технике связи и вакуумной электронике [101]. Созданы методы расчета и разработаны конструкции антенн с поверхностными волнами [102], разработаны новые методы оптимизации антенных систем, в частности, развита теория оптимальных неэквидистантных антенных решеток [103]; предложен и запатентован принципиально новый способ немеханического управления диаграммами направленности излучателей — частотное сканирование, с помощью которого удалось сконструировать остронаправленные антенны с быстрой перестройкой луча в широком диапазоне углов [104]; развиты новые методы обработки сигналов в приемных антеннах при наличии шумов [105].

Проведены исследования и разработаны методы расчета квазиоптических систем — открытых волноводов и резонаторов [106]; в частности, предложены различные варианты квазиоптических линий передачи [107], разработана методика подавления паразитных мод в открытых резонаторах [108].

Проведен цикл работ по исследованию процессов в магнетронных генераторах; наряду с выдачей некоторых практических рекомендаций эти исследования позволили несколько продвинуться в построении теории магнетрона [109]. Было проведено также исследование возможностей управления частотой высокочастотных генераторов — методы электронной перестройки, методы фазовой автоподстройки и стабилизации.

Развита теория шумовых процессов в высокочастотных диодах и построена серия уникальных измерительных диодов-генераторов эталонного шума в сантиметровом диапазоне волн [110].

К высокочастотной электронике относятся также работы А. В. Гапонова и его сотрудников по исследованию индуцированного излучения в системах с колеблющимися электронами. В результате этих исследований была создана линейная и нелинейная (с учетом эффекта насыщения) теория индуцированного излучения в потоках классических осцилляторов и предложен ряд новых приборов — электронных мазеров, являющихся классическими аналогами квантовых усилителей и генераторов. Наиболее подробно изучены системы, основанные на использовании индуцированного циклотронного излучения в электронных потоках,— мазеры на циклотронном резонансе (МЦР). Разработаны мощные электронные приборы коротковолновой части сверхвысокочастотного диапазона — МЦР с бегущей волной и МЦР-монотрон с открытым резонатором [111].

Предложен новый метод локализации плазмы и управления плазменными образованиями с помощью неоднородных высокочастотных полей [112]. На основе этих идей разработаны новые принципы ускорения заряженных и нейтральных частиц, локализованных внутри перемещающихся электромагнитных ловушек [113]. Проведены теоретические и экспериментальные исследования вопросов, связанных с взаимодействием высокочастотных полей с неоднородной плазмой (волны вдоль плазменных слоев, резонансные явления в ограниченной плазме [114], дифракция электромагнитных волн на плазменных образованиях как естественных, так и лабораторных [115]); разработаны новые методы измерений интенсивности мощных высокочастотных сигналов, основанные на отражении электронных пучков от высокочастотных квазипотенциальных барьеров [116].

Ведутся теоретические и экспериментальные работы в области электродинамики нелинейных сред. Были обнаружены и изучены новые явления, проявляющиеся при распространении волн в средах и линиях передачи с нелинейными параметрами, — преобразование частоты и амплитуды волн при их взаимодействии (при отражении от «параметрического» зеркала), преобразование спектра волны при распространении в нелинейной диспергирующей среде (генерация гармоник и изменение спектра радиоимпульса), процессы в распределенных нелинейных автоколебательных системах (лазерах) [117, 118].

Подробно исследованы ударные электромагнитные волны. Разработана теория таких волн в средах с различными параметрами (в том числе и с активными), проведены исследования их взаимодействия, структуры и т. д. Использование ударных электромагнитных волн открывает ряд новых возможностей в радиотехнике и особенно в импульсной технике [119].

К работам по электродинамике нелинейных сред могут быть отнесены и исследования по нелинейной оптике и квантовым генераторам оптического диапазона — генерация гармоник света в нелинейной среде, самофокусировка лазерного луча, строгая динамическая теория газовых и твердотельных оптических квантовых генераторов [120]. Сюда же примыкают работы по изучению явления самофокусировки электромаг-

нитных пучков и самосжатия электромагнитных импульсов как в плазме, так и в оптически нелинейных средах [118, 121].

Ряд работ был посвящен исследованию молекулярных генераторов. Построена теория и проведены экспериментальные исследования образования молекулярных пучков [122]. Разработаны вопросы теории молекулярных генераторов и флуктуаций в них [123]. Созданы отпаянный и безазотный генераторы [124]. Создан и исследован молекулярный генератор миллиметрового диапазона на формальдегиде [125].

Создан ряд стандартов частоты с использованием молекулярных пучков и оптической накачки в парах щелочных металлов [126].

Проведены теоретические и экспериментальные исследования ферромагнетиков и антиферромагнетиков. Получены данные о ширине линии антиферромагнитного резонанса и потерях в ферромагнетиках. Проведены эксперименты по наблюдению когерентного спонтанного излучения феррита в резонаторе. Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с распространением электромагнитных волн в гиротропных средах [127].

Наряду с исследованиями, связанными с теорией и разработкой квантовых генераторов и усилителей оптического и радиодиапазонов, развивались работы и по общим проблемам квантовой радиофизики (квантовые эффекты в радиодиапазоне, квантовая теория релаксационных процессов, вопросы взаимодействия излучения с веществом, общая теория индуцированного и спонтанного излучения). Многие результаты этих работ нашли отражение в монографии В. М. Файна и Я. И. Ханина «Квантовая радиофизика» — одной из первых в мировой литературе книг, посвященных последовательному изложению проблем квантовой радиофизики.

Конечно, в небольшом обзоре нет возможности охватить все работы, выполненные в Горьком, особенно недавние достижения молодых научных работников НИРФИ, НИИ ПМК, ГИФТИ, факультетов университета и промышленных институтов и лабораторий г. Горького. В недавно опубликованных работах нелегко увидеть судьбу заключенных в них мыслей и их влияние на последующее развитие науки. А между тем, именно эти работы, по существу, определяют завтрашний день горьковской радиофизики и теории колебаний, который почти не отражен в нашем обзоре, посвященном, главным образом, их прошлому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н А Никитин, Нижегородская радиолаборатория им В И. Ленина, Связьиздат, М., 1954. Нижегородские пионеры советской радиотехники (составитель проф Б. А. Остроумов), изд. Наука, М., 1956. Б. А. Остроумов, В. И. Ленин и Нижегородская радиолаборатория, изд. АН СССР, М., 1967.
2. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, Грубые системы, ДАН СССР, **14**, 247 (1937).
3. А А Андронов, Собр. тр, изд. АН СССР, М, 1956. А. А. Андронов, Г С Горелик, Радиофизика и общая динамика машин, Изв высш уч. зав.— Радиофизика, **1**, № 1, 5 (1958)
4. А. А Андронов, А. А. Витт, Разрывные периодические решения и теория мультивибратора Абрагама и Блоха, ДАН СССР, № 8, 189 (1930). А. А Андронов, А. А Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ч. 1, ОНТИ, М.—Л., 1937; изд 2-е (под ред Н. А. Железцова), Физматгиз, М, 1959. Н. А. Железцов и Л В Родыгин, К теории симметричного мультивибратора, ДАН СССР, **81**, № 3, 391 (1951). М И Фейгин, К теории триггера, сб Памяти А А. Андронова, изд. АН СССР, М, 1955, стр. 300.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, Zur Theorie des Mitnehmens von der Pol, Archiv für Electrotechnik, **24**, 99 (1930); К математической теории захватывания, Ж. прикл. физ., 7, вып. 4, 3 (1930); К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы, Ж. прикл. физ., **4**, вып. 1, 122 (1934).

6. А. А. Андронов, А. Г. Любина, Применение теории Пуанкаре «о точках бифуркаций» и «смене устойчивости» к простейшим автоколебательным системам, ЖЭТФ, **5**, вып 3, 3 (1935)
7. А А Андронов, Е А Леонтович, К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории, ДАН СССР, **21**, № 9, 427 (1938); Матем сб., **68** (110), № 3, 328 (1965); О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы состояния равновесия типа седло—узел, Матем. сб, **48**, № 3, 335 (1959); Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла, ДАН СССР, **99**, № 6, 885 (1954), Матем сб., **40** (82), 179 (1956), Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра, Уч зап. ГГУ, вып 6 (1939) Е А Леонтович, А Г. Майер, О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории, ДАН СССР, **14**, 251 (1937); О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории, ДАН СССР, **103**, 557 (1955); Дополнения к главам 5, 6 в книге Пуанкаре «О кривых, определенных дифференциальным уравнением», Гостехиздат, М., 1947 Е А. Леонтович, О рождении предельных циклов от сепаратрисы, ДАН СССР, **78**, № 4, 641 (1951), О некоторых аналогиях между плоскими алгебраическими кривыми и динамическими системами на плоскости, ДАН СССР, **129**, № 3, 503 (1959) А А Андронов, Е А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, изд Наука, М., 1966
8. Н. Н. Баутин, Теория бифуркации динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967; К теории синхронизации, ЖТФ, **9**, вып 6, 510 (1939); Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл, ЖТФ, **9**, вып 7, 601 (1939); О продольных движениях самолета, близких к фугоидным движениям, Уч. зап ГГУ, **13**, 329 (1947). Л Н Белюстина, К динамике симметричного полета самолета, Изв АН СССР, ОТН, № 11 (1956). Е А. Леонтович-Андронова, Некоторые математические работы Горьковской школы А А Андронова, Тр. III Матем съезда, **3**, изд АН СССР, М., 1958. Н Н Баутин, Л. Н Белюстина, Е А Леонтович-Андронова, Ю И Неймарк, Основные направления и новые результаты Горьковской школы А А. Андронова, Тр. IV Матем съезда, **2**, изд Наука, Л, 1964 Е А Андронова-Леонтович, Л Н. Белюстина, Теория бифуркаций и ее применение к исследованию нелинейных задач теории колебаний, Тр Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, **2**, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр 7—29. Г. В Аронович, Л. Н Белюстина, Н А Картвелишвили, Я К Любимцев, Применение методов теории колебаний к задачам устойчивости стационарных режимов гидроэлектрических станций и энергетических систем, Тр Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, **3**, изд АН УССР, Киев, 1963, стр 9. Р. М. Минц, Исследование траекторий системы трех дифференциальных уравнений в бесконечности, сб. Памяти А. А. Андронова, изд АН СССР, М., 1955, стр. 499 Я К Любимцев, Условия устойчивости стационарных режимов ГЭС с дифференциальным уравнительным резервуаром, Изв АН СССР, ОТН, № 1, 48 (1957); К вопросу об устойчивости стационарного режима ГЭС с дифференциальным резервуаром, Изв высш уч зав—Радиофизика, **2**, № 2, 187 (1958). И Е. Сальников, К теории периодического протекания гомогенных химических реакций. II. Термокинетическая автоколебательная модель, Ж. физ. хим, **23**, вып. 3, 258 (1949). Н. П Власов, Автоколебания синхронного мотора, Ж техн. физ., **9**, вып 10 (1939).
9. Р. М Минц, Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в n-мерном пространстве, ДАН СССР, **147**, № 1, 31 (1962); **124**, № 6, 1215 (1959).
10. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, Л., 1949.
11. А. А. Андронов, Г. В Аронович, К теории гидравлического тарана, Инж. сб. **20**, № 3 (1954) Г. В. Аронович, О влиянии гидравлического удара на устойчивость регулирования водяных турбин, Автоматика и телемеханика, **9**, № 3, 204 (1948).
12. Ю. И. Неймарк, Г. В. Аронович, Об условиях самовозбуждения поющего пламени, ЖЭТФ, **28**, вып 5, 567 (1955)
13. Ю. И. Городецкий, Теория возбуждения вибраций при сверлении, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 5, 776 (1959); Теория возбуждения вибраций при резании металлов, Изв АН СССР, ОТН, № 6 (1961); Инж. ж мех. тв. тела, № 2, 30 (1966).
14. Ю. И. Неймарк, Н. А Фуфаев, Устойчивость состояний равновесия неголономных систем, ПММ, **29**, вып 1, 46 (1965); **30**, вып. 2, 236 (1966); К вопросу о путевой устойчивости экипажей на баллонных колесах, ДАН СССР, **170**, № 3, 533 (1966)
15. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М., 1949.

16. Ю. И Неймарк, О допустимости линеаризации при исследовании устойчивости, ДАН СССР, **127**, № 5, 961 (1959). Ю И. Неймарк, Ю И Городецкий, Н. Н. Леонов, Исследование устойчивости некоторых линейных распределенных систем, Изв высш уч. зав —Радиофизика, **2**, № 6, 967 (1959).
17. Е. Ф. Сабаев, Уравнения с отклоняющимся аргументом и устойчивость кипящих каналов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика (в печати). И С. Постников, Е. Ф Сабаев, Применение метода матричных неравенств Якубовича к исследованию устойчивости некоторых систем с распределенными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати) В. И Будников, А. В Сергиевский, Об устойчивости системы параллельно кипящих каналов, Инж. физ. ж, **8**, № 3, 300 (1965); **10**, № 5, 632 (1966)
18. В А Брусин, Абсолютная устойчивость некоторых классов управляющих систем, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **8**, № 1, 206 (1965).
19 С. В Шильман, К теории систем автоматического управления с модуляцией, Изв. высш. уч зав —Радиофизика, **6**, № 1, 179 (1963).
20 В. А. Брусин, М Л. Тай, Абсолютная стохастическая устойчивость, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **10**, № 7, 940 (1967)
21. Н. Л. Власов, Теория линейных следящих систем, работающих на переменном токе, изд. Энергия, М, 1964.
22 А Г Майер, К теории связанных колебаний двух самовозбуждающихся генераторов, Уч. зап. ГГУ, вып 2, 3 (1935)
23 С. А. Жевакин, К теории звездной переменности, ДАН СССР, **99**, 217 (1954); Об автоколебаниях переменных звезд «большой последовательности», сб Памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М, 1955, стр. 629.
24. В М Большакова, Е. С Зельдин, Р. М. Минц, Н. А Фуфаев, К динамике системы осциллятор—ротатор, Изв высш уч зав.—Радиофизика, **8**, № 2, 359 (1965); Матем сб., **63** (105), № 2, 169 (1964)
25. С П. Стрелков, К теории автоколебаний под действием сил, зависящих от положения, ЖТФ, **9**, вып. 17, 1564 (1939) Н В Бутенин, Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов, ЖЭТФ, **10**, вып. 11, 1283 (1940).
26. Н А Железцов, М И. Фейгин, О режимах работы симметричного мультивибратора, Радиотехника и электроника, **2**, 751 (1957) Н А. Железцов, К теории разрывных колебаний в системах второго порядка, Изв. высш уч зав — Радиофизика, **1**, № 1, 67 (1958), К теории кипп-реле, сб. Памяти А. А Андронова, изд АН СССР, М., 1955, стр. 215. Н И. Ашбель, Л В Постников, К теории *LR*-генератора на транзисторе, Изв высш уч зав —Радиофизика, **6**, № 6, 1216 (1963). Л. В. Постников, Динамика генератора на плоском полупроводниковом триоде, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 5, 766 (1959).
27 Г В Аронович, К определению достаточных условий динамической устойчивости сложной энергосистемы при переменных ЭДС, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 3, 483 (1959), **2**, № 1, 134 (1959)
28. А. В. Гапонов, Неголономные системы С А Чаплыгина и теория коллекторных электрических систем, ДАН СССР, **87**, 401 (1952). Ю. И. Неймарк, Н. А Фуфаев, Динамика неголономных систем, изд Наука, М, 1967
29. Ю. И. Неймарк, О существовании и грубости инвариантных многообразий точечных отображений, Изв высш уч зав.—Радиофизика, **10**, № 3, 311 (1967); Некоторые методы изучения динамических систем, Тр II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып 2, изд. Наука, М, 1965.
30. А А Андронов, А Г Майер, Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей, ДАН СССР, **43**, № 2 (1944); О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования, ДАН СССР, **47**, № 5, 345 (1945).
31. А. А. Андронов, Н Н. Баутин, Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей, ДАН СССР, **43**, № 5, 197 (1944); Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора, ДАН СССР, **46**, № 4, 158 (1945); Изв АН СССР, ОТН, № 3, 3 (1955); № 6, 54 (1955)
32. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Г. С. Горелик, Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе, Автоматика и телемеханика, **7**, № 1, 15 (1946).
33. А. А. Андронов, Ю. И. Неймарк, О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы Модель де-галилеевых часов, ДАН СССР, **51**, № 1, 17 (1946). Н. Н Баутин, О задаче Л. И Мандельштама в теории часов, ДАН СССР, **65** № 3, 279 (1949); Теория спускового регулятора с пружинящей пластинкой, ДАН СССР, **72**, № 1, 19 (1950); Инж. сб. ин-та механики АН СССР, **22**, 3 (1955); Динамические модели часовых ходов, сб. Памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955; Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 60 (1955); Инж. сб. ин-та механики АН СССР, **21**, 3 (1955); Динамическая модель электромеханических часов

с ходом Гиппа, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 116 (1957); Теория точечных преобразований и динамическая теория часов, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, **2**, изд. АН УССР, Киев, 1963

34. Н А. Железцов, Метод точечного преобразования и задача о вынужденных колебаниях осциллятора с «комбинированным» трением, ПММ, **13**, вып. 1, 3 (1949).
35. Л. В. Беспалова, К теории виброударного механизма, Изв АН СССР, ОТН, № 5 (1957). Л. В. Беспалова, Ю И Неймарк, М И. Фейгин, Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний, Инж. ж мех. тв. тела, № 1 (1966) З. С. Баталова, Изучение вибропогружения шпунта при лобовом сопротивлении грунта, Инж. ж. мех тв тела, № 2 (1966) Ю. И. Неймарк, Теория вибрационного погружения и выдергивания, Инж. сб., **16** (1953); Гидротехнич. строит., № 1 (1952) В. С Бояринов, Ю И. Неймарк, К теории вибрации вала в шарикоподшипнике, Изв. АН СССР, ОТН, механика, № 3 (1965)
36 М. И. Фейгин, К теории нелинейных демпферов (ударный демпфер и демпфер сухого трения), Изв. высш. уч зав—Радиофизика, **2**, № 4, 607 (1959); Резонансные свойства динамической системы с ударными взаимодействиями, ПММ, **30**, вып 5, 942 (1966)
37. Г. А. Новинская, Динамика простейшего экстремального регулятора с автоколебательным типом поиска, Изв высш уч. зав—Радиофизика, **4**, № 3, 566 (1961) Н. Н Леонов, К теории простейшей системы экстремального регулирования автоколебательного типа, Автоматика и телемеханика, **26**, 1720 (1965); Изв. высш уч зав—Радиофизика, **10**, № 3, 393 (1967); **10**, № 7, 897 (1967).
38. Я. Н Николаев, Применение метода Кенигса—Ламерея к теории простейших сервосистем типа реле с запаздыванием, Уч зап. ГГУ, вып 3 (1947). Ю. И. Неймарк, Об автоколебаниях и вынужденных колебаниях релейных систем с запаздываниями, Автоматика и телемеханика, **16**, № 3, 225 (1955); О периодических движениях релейных систем, Автоматика и телемеханика, **14**, № 5, 556 (1953); сб. Памяти А А Андронова, изд. АН СССР, М, 1955; О скользящем режиме и периодических движениях релейной системы, Тр. ГИФТИ и радиофака ГГУ, **30** (1956).
39 А. С Алексеев, Двухпозиционный регулятор температуры с зоной опережения, Тр. ГИФТИ и радиофака ГГУ, 30 (1956).
40. Н. Н Леонов, О разрывном точечном преобразовании прямой в прямую ДАН СССР, **143**, № 5, 1038 (1962); Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **2**, № 6, 942 (1959)
41. С Д Киняпин, Простейшая релейная система регулирования неустойчивого объекта, Изв. высш. уч зав—Радиофизика, **1**, № 1, 88 (1958); **4**, № 1, 136 (1961).
42. Н. А Фуфаев, Теория электромагнитного прерывателя, Автоматика и телемеханика, **14**, № 5, 570 (1953); сб Памяти А. А. Андронова, изд АН СССР, М, 1955, стр 334
43. А. С. Алексеев, Метод точечных преобразований в задачах составления оптимального графика ритмичного производства двух типов изделий на одном оборудовании, Изв высш. уч зав—Радиофизика, **3**, № 4, 706 (1960). Ю И Неймарк, М. А. Федоткин, О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке, Автоматика и телемеханика, **28**, № 3, 78 (1966) М. А. Федоткин, О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке при показательном законе обслуживания машин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 7, 912 (1967)
44. Ю. И. Неймарк, Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. I, II, III, Изв. высш уч зав.—Радиофизика, **1**, № 1, 41; № 2, 95; № 5—6, 146 (1958).
45. Ю. И. Неймарк, О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров, ДАН СССР, **129**, 736 (1939); Метод усреднения с точки зрения метода точечных отображений, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 5, 1021 (1963) Ю И. Неймарк, Л. П Шильников, Об одном случае рождения периодических движений, ДАН СССР, **160**, № 6, 1261 (1965); Изв. высш. уч зав—Радиофизика, **8**, № 2, 330 (1965) Л. П Шильников, Некоторые случаи рождения периодических движений в n-мерном пространстве, ДАН СССР, **143**, № 2, 289 (1962); Матем сб, **61**, № 4 (1963). С. Д Киняпин, Ю. И. Неймарк, Об устойчивости состояния равновесия релейной системы, Автоматика и телемеханика, **20**, № 9, 1153 (1959); О рождении периодического движения из состояния равновесия, расположенного на поверхности разрыва, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **5**, № 6, 1196 (1962). Ю. И. Неймарк, М И. Фейгин, Об одном типе бифуркаций релейных систем, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 2, 358 (1964)
46. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Исследование динамических систем, близких к кусочно-линейным, Изв АН СССР, ОТН, **6**, 51 (1959); Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **3**, № 3, 478 (1960). Ю И Неймарк, Л З Фишман, О поведении в целом фазовых траекторий квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами, ДАН СССР, **171**, № 1, 44 (1966); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 6, 1210 (1966).

47 Л. П. Шильников, О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло—седло в него же, ДАН СССР, **170**, № 1, 49 (1967) Ю И Неймарк, О движениях, близких к двоякоасимптотическому движению, ДАН СССР, **172**, № 5, 1021 (1967).
48. Г С. Горелик, К вопросу о технической и естественной ширине линии лампового генератора, ЖЭТФ, **20**, вып. 4, 351 (1950).
49. Г С. Горелик, О возможности малоинерционного фотометрирования и демодуляционного анализа света, ДАН СССР, **58**, № 1, 45 (1947); О демодуляционном анализе света, УФН, **34**, № 3, 321 (1948).
50. И. Л. Берштейн, Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора, ЖТФ, **11**, № 4, 305 (1941)
51. И Л Берштейн, Флуктуации колебания клистронного генератора, ДАН СССР, **106**, № 3, 453 (1956), Флуктуации колебаний параметрического генератора, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 6, 995 (1960); К теории фазовой автоподстройки частоты, Радиотехника и электроника, **3**, № 2, 288 (1958).
52. И Л. Берштейн, И А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Флуктуации интенсивности и частоты излучения оптического генератора, Изв. высш уч зав —Радиофизика, **10**, № 1, 59 (1967).
53 И Л Берштейн, Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора, Изв АН СССР, серия физическая, **14**, № 2, 145 (1950)
54. И. Л Берштейн, Опыт Саньяка на радиоволнах, ДАН СССР, **75**, № 5, 635 (1950).
55. Г. С Горелик, О применении модуляционного метода в оптической интерферометрии, ДАН СССР, **83**, № 4, 549 (1952); Некоторые микрофазометрические методы в радиофизике и оптике, Измерительная техника, № 3, 10 (1955) И Я Брусин, Г С Горелик, С. А. Пиковский, Исследование колебаний, весьма малых по сравнению с длиной световой волны, посредством гармонического анализа модулированной интерференционной картины, ДАН СССР, **83**, № 4, 553 (1952) И Л Берштейн, Об измерении весьма малых изменений разности хода двух световых колебаний, ДАН СССР, **94**, № 4, 655 (1954).
56. И. Л. Берштейн, Г С. Горелик, К теории звездного интерферометра Майкельсона, ДАН СССР, **86**, № 1, 47 (1952)
57 В. С Троицкий, К теории спектральной ширины линии радиочастотных генераторов и ее измерения по методу И. Л Берштейна, Радиотехника и электроника, **1**, № 6, 818 (1956); О влиянии фликкер-эффекта на ширину линии автогенератора, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 4, 573 (1959)
58. А. А. Грачев, О сплошном спектре ЭДС циклического перемагничивания, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **1**, № 2, 71 (1958). К. А. Горонина, А А Грачев, О спектре ЭДС индукции при периодическом перемагничивании ферромагнетиков, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 4, 581 (1959) И. А. Андронова, Шумы циклической переполяризации сегнетоэлектриков, ДАН СССР, **119**, 68 (1958) И. А. Андронова, О сплошном спектре тока при периодической переполяризации сегнетоэлектриков, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 1, 90 (1961).
59. С И. Боровицкий, О флуктуациях в линейной системе с периодически меняющимися параметрами, ДАН СССР, **74**, № 2, 233 (1950).
60 В. С. Троицкий, К теории измерения сигналов, имеющих сплошной спектр, ЖТФ, **21**, 994 (1951), Применение модуляционного метода измерения слабых сигналов сплошного спектра на УКВ, Вестник информ. БНТ, № 7, 1951; О чувствительности радиометров, ЖТФ, **22**, вып. 3, 455 (1952)
61 А Н Малахов, О форме спектральной линии генератора при флуктуациях его частоты, ЖЭТФ, **30**, 884 (1956); Изв. высш уч. зав —Радиофизика, **9**, № 3, 625 (1966); **10**, № 6, 885 (1967).
62. А. Н Малахов, Флуктуации амплитуды и частоты и естественная ширина спектральной линии колебания в автоколебательных системах со многими степенями свободы, Изв. высш. уч зав.—Радиофизкиа, **1**, № 2, 79 (1958); Влияние естественных шумов автогенераторов на их взаимную синхронизацию, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 6, 1160 (1965). Д. А. Дмитренко, А. И. Чикин, Ширина спектральной линии некоторых низкочастотных и радиочастотных генераторов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **6**, № 6, 1271 (1963) Ю. А. Дрягин, Исследование технических уходов частоты генераторов, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, **1**, № 5—6, 93 (1958).
63 В. Н. Никонов, Исследование флуктуаций колебания клистронного генератора, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **2**, № 6, 215 (1959); Флуктуации амплитуды и частоты магнетронного генератора, Изв. высш. уч зав —Радиофизика, **5**, № 2, 270 (1962)
64. В. С. Троицкий, К теории молекулярного генератора и флуктуаций его колебаний, Радиотехника и электроника, **3**, № 10, 1298 (1958). А. И. Чикин, Измерение ширины спектральной линии молекулярного генератора, ЖЭТФ, **42**, вып. 3, 649 (1962). В. Б. Цареградский. К теории флуктуаций молекулярного генератора, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 6, 1075 (1964).

65. Ю. И Зайцев, О флуктуациях излучения газового лазера, ЖЭТФ, **50**, вып. 3, 525 (1966).
66 В. А. Зверев, Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука, ДАН СССР, **91**, 791 (1953). А Г. Горелик, В. А. Зверев, К вопросу о взаимодействии звуковых волн, Акуст. ж., **1**, № 4, 339 (1955).
67. В А Зверев, Е Ф. Орлов, Прибор для измерения спектров и корреляционных функций низкочастотных процессов, ПТЭ, № 1, 50 (1960)
68 В. И. Тверской, Некоторые вопросы прохождения одиночных радиосигналов через замедляющие системы с нелинейной фазовой характеристикой, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 5, 907 (1960).
69 Н. Г. Денисов, Вопросы статистической теории распространения и дифракции волн, Диссертация, Горьковский университет, 1964 Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Некоторые вопросы распространения волн в средах со случайными неоднородностями, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 4, 521 (1959) Ю А Рыжов, О взаимной функции корреляции флуктуаций амплитуды и фазы волны, распространяющейся в неоднородной поглощающей среде, Радиотехника и электроника, **7**, № 10, 1824 (1962); Тензор эффективной диэлектрической проницаемости сильнонеоднородной анизотропной среды, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 1, 39 (1966). Л. С Долин, О лучевом описании слабонеоднородных волновых полей, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 3, 471 (1964); О распространении узкого пучка света в среде с сильно анизотропным рассеянием, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **9**, № 1, 61 (1966) Л. М. Ерухимов, О частотной корреляции флуктуаций радиоизлучения внеземных источников, вызванных неоднородностями ионосферы, Геомагнетизм и аэрономия, **4**, № 1, 75 (1964). Н. Г. Денисов, Л. М Ерухимов, Статистические свойства фазовых флуктуаций при полном отражении от ионосферного слоя, Геомагнетизм и аэрономия, **6**, № 4, 695 (1966). В. В. Тамойкин, С. Б Бирагов, О реакции излучения звука при движении малых тел в неоднородных газообразных средах, ЖЭТФ, **44**, 1544 (1963). В. В. Тамойкин, Потери энергии при движении заряда в неоднородной магнитоактивной плазме, Изв. высш. уч зав —Радиофизика, **8**, № 1, 42 (1965)
70 С. И. Боровицкий, В. В. Митюгов, О свойствах неравновесного излучения и термодинамически обратимых преобразователях, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 5, 854 (1964), О потерях информации в неидеальном электромагнитном канале, Проблемы передачи информации, **3**, вып. 1, 35 (1967)
71 Д В Агеев, Я Г Родионов, ЧМ радиоприем со следящей настройкой, Госэнергоиздат, М.—Л., 1958. Ю Н. Бабанов, Я. Г. Родионов, В. Ф. Рябков, А М. Шабалин, О развитии методов защиты систем радиосвязи от импульсных помех в работах советских ученых (обзор), Радиотехника (в печати). Ю. С Лезин, Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов, изд Сов радио, М., 1963 А. А Горбачев, А. М. Шабалин, В. М. Шушин, О компенсационном методе уменьшения радиопомех в каналах проводных линий, связи, Электросвязь, № 8 (1967). Д В. Агеев, Ю. Н. Бабанов, Передача радиосигналов с перекрывающимися спектрами, Радиотехника, № 10 (1964) А. П Зеленин, Улучшение частотной избирательности подавлением нежелательной модуляции сигнала, Изв. высш уч. зав —Радиотехника, № 4 (1961)
72. С. А. Жевакин, М. М Кобрин, Расчет напряженности поля небесного луча на коротких радиоволнах, Уч зап ГГУ, **30**, серия физическая, 92 (1956)
73 В. С. Троицкий, Измерение сигналов, имеющих сплошной спектр, Диссертация, ГИФТИ, Горький, 1949.
74 В. С Троицкий, В. Л. Рахлин, А М. Стародубцев, В. Т Бобрик, Радиотелескопы Горьковской радиоастрономической станции «Зименки», Тр. 5-го Совещания по вопросам космогонии, изд АН СССР, М., 1956, стр. 37
75 .В. Л. Гинзбург, К теории люксембург-горьковского эффекта, Изв. АН СССР, серия физическая, **12**, 253 (1948) И М Виленский, К теории взаимодействия радиоволн в ионосфере, ЖЭТФ, **22**, 545 (1952).
76 Н. Г. Денисов, Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной плазме, ЖЭТФ, **31**, вып. 4, 609 (1956).
77. Н. Г Денисов, Распространение электромагнитных сигналов в ионизированном газе, ЖЭТФ, **21**, 1354 (1951) Б. Н Гершман, О расплывании электромагнитных импульсов, распространяющихся в ионосфере, ЖТФ, **22**, 101 (1952).
78 Г. Г. Гетманцев, Космические электроны как источник радиоизлучения Галактики, ДАН СССР, **83**, 557 (1952)
79. В. А Разин, Предварительные результаты измерения поляризации космического радиоизлучения на волне 1,45 *м*, Радиотехника и электроника, **1**, № 6, 846 (1956).
80. В. Л Гинзбург, Г. Г Гетманцев, М. И. Фрадкин, Об электронах в составе первичных космических лучей, Тр. 3-го Совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М, 1954, стр. 149
81. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей, изд. АН СССР, М., 1963.

82. А. Г. Кисляков, Предварительные результаты экспериментального исследования радиоизлучения Солнца в диапазоне волн 3—7 *мм*, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 4, 760 (1961). А. Г. Кисляков, А. Е. Саломонович, Радиоизлучение активных областей на Солнце в миллиметровом диапазоне волн, Астроном. ж., **60**, вып. 2, 229 (1963). Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Спорадическое радиоизлучение Солнца на низких частотах, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **4**, № 2, 244 (1961).
83. Ежемесячный бюллетень «Радиоизлучение Солнца», НИРФИ, Горький.
84. В Л. Гинзбург, В. В. Железняков, О некогерентных механизмах спорадического радиоизлучения Солнца в случае магнитоактивной корональной плазмы, Астроном. ж., **38**, 3 (1961).
85. Б Н. Гершман, О гирорезонансном поглощении электромагнитных волн в плазме, ЖЭТФ, **38**, 912 (1960). В. Я. Эйдман, Излучение электрона, движущегося в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ, **34**, 131 (1958). В. В. Железняков, О магнитотормозном излучении и неустойчивости системы заряженных частиц в плазме, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **2**, № 1, 14 (1959); О неустойчивости магнитоактивной плазмы относительно высокочастотных электромагнитных возмущений, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 1, 57 (1960); **3**, № 2, 180 (1960).
86 В В Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
87. С. А Каплан, С. Б. Пикельнер, Межзвездная среда, Физматгиз, М., 1963. S. A. Kaplan, Intersteller gasodynamics, Pergamon Press, 1966. С. А. Каплан, Элементарная радиоастрономия, изд. Наука, М., 1966.
88. М. М. Кобрин, Радиоэхо от Луны на волнах 3 и 10 *см*, Радиотехника и электроника, **4**, № 5, 892 (1959).
89. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Обнаружение потока тепла из недр Луны, Астроном. ж., **40**, вып. 6, 1076 (1963).
90 Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов радио, М., 1966.
91 Б. Н. Гершман, В. А. Угаров, Распространение и генерация низкочастотных электромагнитных волн в верхней атмосфере, УФН, **72**, 235 (1960). В. Ю Трахтенгерц, О механизме генерации ультранизкочастотного радиоизлучения из внешнего радиационного пояса Земли, Геомагнетизм и аэрономия, **3**, 442 (1963). А. А. Андронов, В. Ю. Трахтенгерц, Кинетическая неустойчивость внешнего радиационного пояса Земли, Геомагнетизм и аэрономия, **4**, 233 (1964).
92. Е. А. Бенедиктов, Г Г Гетманцев, Л. В. Гришкевич, Л. М. Ерухимов, Н А. Митяков, Некоторые результаты ионосферных исследований в НИРФИ с 1957 по 1967 гг. (обзор), Изв. высш уч. зав.—Радиофизика (в печати).
93 Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Ю. А Сазонов, А Ф. Тарасов, Результаты измерений интенсивности радиоизлучения на частотах 725 и 1525 *Кгц* при помощи аппаратуры, установленной на спутнике «Электрон-2», сб Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр 581.
94. Н. Г Денисов, К теории распространения радиоволн в ионосфере, Уч. зап. ГГУ, 35, серия физическая, 3 (1957) В П. Докучаев, О влиянии магнитного поля Земли на ветры в ионосфере, Изв. АН СССР, серия геофиз., № 5, 783 (1959).
95. А. Г. Кисляков, К. С. Станкевич, Исследование тропосферного поглощения радиоволн радиоастрономическими методами (обзор), Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1244 (1967).
96. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Распространение сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн в земной атмосфере (обзор), Изв. высш. уч зав—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1213 (1967).
97. Ю. А. Дрягин, А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, А. И. Наумов, Л. И. Федосеев, Измерение атмосферного поглощения радиоволн в диапазоне 1,36—3,0 *мм*, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **9**, № 6, 1078 (1966). С. И. Аверков, В. И. Аникин, В. Я. Рядов, Н И Фурашов, Вакуумный спектрометр для далекой инфракрасной области спектра, ПТЭ, № 1, 103 (1963); Астрономическая станция для наблюдений в далекой инфракрасной области спектра, Астроном. ж., **41**, вып. 3, 542 (1964).
98. А А. Викторова, С. А. Жевакин, Поглощение микрорадиоволн в воздухе димерами водяного пара, ДАН СССР, **171**, № 5, 1061 (1966).
99. М. Л. Левин, Теория щелевых антенн в волноводах, Диссертация, М, 1954. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, Возбуждение круглого волновода кольцевой антенной, ЖТФ, **19**, 1260 (1949); Об интегральном уравнении для токов в теории тонких антенн, ЖТФ, **26**, 2766 (1956).
100 М А. Миллер, Распространение электромагнитных волн над плоской поверхностью с анизотропными граничными условиями, ДАН СССР, **87**, 571 (1952).
101 М А. Миллер, В И Таланов, Использование понятия поверхностного импеданса в теории поверхностных электромагнитных волн (обзор), Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 5, 795 (1961)

102. Д. М. Браво-Животовский, О поверхностных волнах с круговой поляризацией в ребристых системах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 5, 829 (1959). В. И. Таланов, Об излучении источников над плоскостью с синусоидально модулированным импедансом, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 6, 1065 (1961).

103. Ю М. Жидко, К расчету оптимальных линейных антенн, Радиотехника и электроника, **8**, 1473 (1963); Метод последовательных приближений для построения оптимальных антенных решеток, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, 7, № 6, 1122 (1964).

104 М. А. Миллер, Применение однородных граничных условий при решении задачи о распространении поверхностных электромагнитных волн и при исследовании колебаний тонких антенн, Диссертация, Горьковский университет, 1953.

105. Н. Д Миловский, В И. Таланов, О предельной точности измерения угловых координат источника с помощью многоэлементных антенн, Радиотехника и электроника, **9**, 1605 (1964)

106. В. И. Таланов, Операторный метод описания волновых пучков в комбинированных квазиоптических системах, Изв высш уч зав.—Радиофизика, 8, № 2, 260 (1965).

107. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Некоторые вопросы теории квазиоптических систем, Изв высш. уч зав —Радиофизика, 7, № 2, 313 (1964). В. С Авербах, С. Н. Власов, Э. М Попова, Н М. Шеронова, Экспериментальное изучение зеркального лучевого волновода, Радиотехника и электроника, **11**, № 4, 750 (1966).

108. В С. Авербах, С Н. Власов, В. И. Таланов, Методы селекции типов колебаний в открытых квазиоптических системах (обзор), Изв. высш уч зав — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1333 (1967)

109. М. И. Кузнецов, К вопросу об устойчивости статического режима с двумя потоками в плоском магнетроне, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **1**, № 3, 128 (1958); Об одном типе автоколебаний пространственного заряда в неразрезном магнетроне, Радиотехника и электроника, № 6, 785 (1956). В. Е. Нечаев, Приближенный анализ процессов в многорезонаторных магнетронах (плоская модель), Изв. высш. уч. зав —Радиофизка, **5**, № 3, 534 (1962)

110. С. И. Аверков, В. И. Аникин, Д. М. Браво-Животовский, А В. Гапонов, М. Т. Грехова, В. С. Ергаков, В. А Лопырев, М. А. Миллер, В. А. Флягин, Шумовой диодный генератор в трехсантиметровом диапазоне, Радиотехника и электроника, **1**, 758 (1956).

111. А В. Гапонов, О неустойчивости систем возбужденных осцилляторов по отношению к электромагнитным возмущениям, ЖЭТФ, **39**, № 2, 326 (1960); Взаимодействие непрямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами в линиях передачи, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 3, 450 (1959); **2**, № 5, 836 (1959). И. И. Антаков, В. М. Боков, Р. П Васильев, А. В. Гапонов, Взаимодействие трохоидального электронного пучка с электромагнитными волнами в прямоугольном волноводе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, №. 6, 1033 (1960). А. В Гапонов, А Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И Петелин, Индуцированное синхротронное излучение электронов в полых резонаторах, ЖЭТФ, Письма в редакцию, **2**, № 9, 430 (1965). И. И. Антаков, А. В. Гапонов, О. В. Малыгин, В. А. Флягин, Применение индуцированного циклотронного излучения электронов для генерирования и усиления электромагнитных колебаний большой мощности, Радиотехника и электроника, **11**, 1254 (1966) А. В. Гапонов, М И Петелин, В. К. Юлпатов, Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике (обзор), Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967)

112 А. В Гапонов, М. А Миллер, О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном поле, ЖЭТФ, **34**, 242 (1958) М А Миллер, Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях, Изв. высш уч. зав —Радиофизика, **1**, № 3, 110 (1958).

113. А В. Гапонов, М. А Миллер, Об использовании движущихся высокочастотных потенциальных ям для ускорения заряженных частиц, ЖЭТФ, **34**, 751 (1958) М. А. Миллер, Ускорение плазменных сгустков высокочастотными полями, ЖЭТФ, **36**, 1909 (1959).

114. V. B. Gildenburg, I. G. Kondratjev and M. A. Miller, Diffraction of electromagnetic waves by plasma structures, Proc. of a Symposium on Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967. p. 580.

115. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Некоторые вопросы дифракции электромагнитных волн на плазменных образованиях (обзор), Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10 1358 (1967).

116. Б. Г. Еремин, С. Б. Моченев, Измерение мощности на СВЧ, с помощью зондирующего электронного пучка, ПТЭ, № 3, 108 (1963)

117. Э. Я. Дауме, Г И. Фрейдман, Эффект Допплера при отражении электромагнитной волны от волны подмагничивания в феррите, ЖЭТФ, **43**, 1102 (1962). С. И. Аверков, Л. А. Островский, Распространение колебаний в системах с параметрами, зависящими от времени, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 4, 46 (1958). Н. С. Степанов, Распространение волн в недиспергирующей системе с переменными параметрами, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **3**, № 4, 672 (1960). Л. А. Островский, Е. И. Якубович. Об установившихся колебаниях лазера с распределенными потерями, Изв. высш уч зав.—Радиофизика, **8**, № 1, 91 (1965). М И. Рабинович, О методе усреднения по стационарным волнам, Изв. высш уч зав —Радиофизика, **10**, № 2, 214 (1967).

118. Л. А. Островский, Распространение волновых пакетов в нелинейной диспергирующей среде, ЖЭТФ, **51**, 1189 (1966)

119. А. В. Гапонов, Г. И Фрейдман, Об ударных электромагнитных волнах в ферритах, ЖЭТФ, **36**, № 3 (1959) А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Ударные электромагнитные волны (обзор), Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1376 (1967). И. Г Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М, 1963 А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Стационарные ударные электромагнитные волны в линиях передачи с ненасыщенным ферритом, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 3, 561 (1963)

120 Г. И. Фрейдман, Об удвоении частоты сходящихся частично когерентных пучков света, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **9**, № 3, 550 (1966). В. И. Беспалов, В. И. Таланов, О нитевидной структуре пучков света в нелинейной среде, Письма в ЖЭТФ, 3, 471 (1966) В М Файн, Нелинейные свойства твердых тел (обзор), Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1320 (1967). В. Н. Генкин, П. М Меднис, Об однозонном приближении при описании электронов проводимости в переменном электрическом поле, ФТП, **1**, № 10 (1967). В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Статистические характеристики автомодуляции излучения лазера на твердом теле, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 1, 70 (1965). В. И Беспалов, Г. И. Фрейдман, Спектральные и энергетические характеристики гигантских импульсов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 3, 513 (1966).

121. В. И. Таланов, О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах, Изв высш уч зав.—Радиофизика, 7, № 3, 564 (1964). А. Г. Литвак, О самофокусировке электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 5, 900 (1966). А Г. Литвак, В. И. Таланов, Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 4, 539 (1967)

122. В. С Троицкий, Направленность молекулярного пучка, образованного истечением газа из канала, ЖТФ, **32**, 488 (1962). А И. Наумов, Экспериментальное исследование направленности молекулярного пучка аммиака, ЖТФ, **33**, 127 (1963)

123. В. С. Троицкий, К теории молекулярного генератора и флуктуаций его колебаний, Радиотехника и электроника, **3**, 1298 (1958). В. Б. Цареградский, Взаимодействие молекулярного пучка с электромагнитным полем резонатора, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 920 (1965).

124. А. Ф. Крупнов, А. И. Наумов, В. А. Скворцов, Отпаянный молекулярный генератор с геттер-ионным насосом и охлаждением, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 1, 178 (1961). В. А Скворцов, А. Ф. Крупнов, А И. Наумов, Молекулярный генератор без системы вымораживания, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, 3, № 6, 1128 (1960)

125. А. Ф. Крупнов, В А. Скворцов, Пучковый молекулярный генератор 4-*мм* диапазона на переходе 1_{01}—0_{00} молекулы CH_2O, ЖЭТФ, **45**, 101 (1963).

126. В. С. Насонов, Исследование эффективности оптической подкачки в парах натрия. Изв. высш уч зав —Радиофизика, 5, № 3, 518 (1963).

127. В. Н. Генкин, В М. Файн, О ширине линии антиферромагнитного резонанса, ЖЭТФ. **41**, 1552 (1961). Г М. Генкин, Н. Г. Голубеба, Спин-фононная ширина линии обменного резонанса, ФТТ, 7, 989 (1965). А. П. Александров, Я. И. Ханин, Э. Г. Ящин, Наблюдение когерентного спонтанного излучения феррита в резонаторе, ЖЭТФ, 38, 1334 (1960).