

СОДЕРЖАНИЕ

Троицкий В. С. Определение температурной зависимости теплопроводности лунита	1051
Наумов А. П., Каневский М. Б. О миллиметровом спектре излучения Венеры	1058
Митякова Э. Е., Митяков Н. А., Череповицкий В. А. Результаты исследования полярной ионосферы по радиосигналам ИСЗ «Эксплорер-22»	1070
Семенова В. И. Об отражении электромагнитных волн от фронта ионизации	1077
Войтович Н. Н. Исследование устойчивости лучеводов к поперечным сдвигам линз с помощью моделирования на ЭВМ	1087
Кондратенко А. Н. О проникновении электромагнитного поля в магнитоактивную плазму	1096
Файнштейн С. М. Нелинейные волны в системе поток—плазма	1110
Наумов А. П. О вращательном спектре поглощения молекул водяного пара в возбужденном колебательном состоянии	1115
Андреев Г. А. О выбросах нестационарного случайного процесса	1123
Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И. Разрешающая способность остронаправленных антенн с сильными флуктуациями распределения поля	1131
Сафантьевский А. П., Михайлов В. М. Ферритовый магнитостатический усилитель вырожденного типа с резонаторной связью	1141
Сафантьевский А. П. Ферритовый магнитостатический усилитель вырожденного типа с волноводной связью	1152
Курин А. Ф. Линейная теория циклотронного мазера	1160
Кузнецов М. И. Влияние флуктуаций электромагнитного поля на распределение заряда и анодный ток в магнетроне в предосцилляционном режиме	1165
Белов В. Е., Родыгин Л. В. К статической теории цилиндрического магнетрона. II. Многослойные режимы	1171
 Краткие сообщения и письма в редакцию	
Юдин О. И. О возможности оценки некоторых параметров хромосферы по данным радионаблюдений	1180
Дурасова М. С., Юдин О. И. О некоторых схемах компенсации сигнала в радиометрах	1182
Островский Л. А., Соломин Б. А. Корректность задач о взаимодействии волн с движущимся скачком параметра	1183
Кулагин В. С., Филиппов Н. Н. К расчету пространственных характеристик направленности вибратора, расположенного на ребре клина	1187
Матвеев В. И. О коэффициенте усиления активной среды газовых ОКГ	1188
Ищенко В. Н., Старинский В. Н. О применении пластины Люммера—Герке в ОКГ на рубине	1189
Бербасов В. А., Федотова Л. П. Аксиально-симметричный строфтрон	1191
Иванова Т. И. Расчет потенциала в ячейке Пеннинга при наличии пространственного заряда	1193
 Информация	
Аннотации статей, помещенных в ж «Геомагнетизм и аэрономия», т. VII, № 2, 1967 г.	1197

УДК 523.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЛУНИТА

B. C. Троицкий

Показано, что более высокое значение радиотемпературы Луны, чем это следует из измерений на инфракрасных волнах, может быть объяснено существованием температурной зависимости теплопроводности лунита, связанной с радиационным переносом энергии. Рассмотрен случай квадратичной зависимости теплопроводности от температуры, имеющей место, если лунит проникает для инфракрасных волн, и случай кубической зависимости, имеющей место при переносе только через поры, когда вещество не проникает для инфракрасных волн. Показано, что для лунного вещества отношение радиационной теплопроводности к молекулярной при $T = 300^\circ$ для обоих случаев соответственно равно 0,4 и 0,25. Найдено, что пробег инфракрасных волн в луните для первого случая равен $l_r \approx 12\lambda$, а во втором $l_r \approx 350\mu$, что соответствует размеру пор. Отвечающий этому размер частиц лунита, образующих пористую структуру, не превышает $50-100\mu$ в первом случае и 350μ во втором. Полученное поглощение инфракрасных волн в луните соответствует поглощению в земных силикатных породах.

До последнего времени не удавалось обнаружить какие-либо явления в излучении Луны, которые могли бы свидетельствовать о температурной зависимости теплопроводности вещества ее верхнего покрова. Как известно, температурная зависимость теплопроводности вещества при обычных температурах связана, в основном, с радиационным переносом энергии, характеризуемым коэффициентом радиационной теплопроводности, пропорциональным кубу температуры [1^o]. Полная теплопроводность равна сумме фононной (молекулярной) k_0 и радиационной k_r . В работе Ягера 1953 г. [1²] указывается, что расчет теплового режима с учетом радиационного переноса не позволил согласовать существовавшее тогда расхождение значений ночной и затменной температур. Этого удалось достичь только введением слоя пыли.

В работе Манси 1958 г. [1³] тепловой режим поверхности Луны предлагается рассчитывать, пользуясь линейной температурной зависимостью теплопроводности и теплоемкости.

В работе Кротикова, Троицкого 1962 г. [7] было указано, что температурная зависимость тепловых свойств вещества Луны должна приводить к росту постоянной составляющей в глубину вследствие нелинейности среды по отношению к температурным колебаниям, так как в этом случае должен иметь место эффект «перекачки» температурных колебаний в постоянную составляющую за счет процесса, аналогичного детектированию напряжения на нелинейных сопротивлениях. Указано, что постоянная составляющая может расти лишь до глубины l_r , равной глубине проникания тепловой волны.

В работе Инграо, Янга и Линского 1965 г. [1¹] приведены расчеты температуры поверхности Луны во время лунций и затмения для однородной и двухслойной моделей при температурной зависимости

теплопроводности (теплоемкость предполагалась постоянной). Также проведен расчет для модели Манси. Авторы указывают, что измеренная зависимость поверхностной температуры может быть согласована с различными моделями, и поэтому выбор той или иной согласующейся модели не имеет физического смысла. В частности показано, что характер падения температуры во время захода Солнца удовлетворяет как модели Манси, так и модели с радиационной теплопроводностью вида $k = BT^3$, которая при $T = 350^\circ\text{K}$ равна решеточной теплопроводности k_0 . В первом случае (модель Манси) нужно принять значение $\gamma = (kpc)^{-1/2}$ при $T = 350^\circ\text{K}$ равным 400—450, а во втором — 600.

В работе Линского 1965 г. [8, 14] приводится подробное исследование температурного режима однородной модели при различных законах температурной зависимости теплопроводности и теплоемкости. Всего исследовано 8 различных моделей. В частности, рассчитан и исследован указанный в [7] эффект роста постоянной составляющей в глубину. Рассчитан также фазовый ход радиоизлучения этих моделей и проводится сравнение с экспериментальной фазовой зависимостью на миллиметровых волнах. Однако, как и для инфракрасного излучения, опыту удовлетворяют все модели, в том числе и модель с теплопроводностью, не зависящей от температуры. Это связано с тем, что вариации фазовой зависимости для различных моделей очень малы и лежат в пределах ошибок измерений. Отсюда следует, что выбранная характеристика — фазовый ход собственного излучения — не чувствительна к вариации моделей. В частности, даже нет возможности отличить «температурно независимую» модель от «температурно зависимой». Тем не менее, отдается предпочтение моделям с температурной зависимостью теплопроводности и на основании выбранный из теоретических соображений модели делается оценка размера пор в 0,1—0,3 мм.

В работе [8] показано в соответствии с выводами [7], что эффект роста постоянной составляющей температуры в глубину из-за нелинейности среды обнаруживается на волнах короче 3 см. На более длинных волнах постоянная составляющая при отсутствии потока тепла из недр не меняется. Автор пытается объяснить найденное нами в [7] неожиданно высокое значение потока тепла из недр Луны существованием указанного эффекта. Однако это несостоитительно, так как поток определяется на волнах длиннее 3 см, на которых, как указано в [7], а также по расчетам самого автора, влияние прироста постоянной составляющей из-за нелинейности отсутствует. Фактически Линский добивается снижения оценки потока до $0,34 \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ тем, что принимает слишком большое значение величины $\gamma(350) \approx 1000$ при $k(350)/k_0 = 0,5$. Для глубоких слоев, где $T = 250^\circ$, это дает $\gamma(250) \approx 1200$. Нами же принято для этих слоев, согласно данным инфракрасных и радиоизмерений, $\gamma(250) = 600$, что дает вдвое более высокий поток, равный, согласно [1], $(1 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$. В работе Линского имеются и другие неточности, снижающие оценки потока. Проведенный недавно нами расчет потока с учетом последних данных измерений постоянной составляющей, а также результатов настоящей работы, указывающих на меньшую зависимость теплопроводности от температуры ($\gamma(250)$ не более 800), приводит к значению плотности потока $(0,85 \pm 0,2) \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$.

В работе Троицкого, Бурова, Алешиной [15] также проведен детальный анализ эффекта, указанного в [7], и теплового режима при различных видах радиационной теплопроводности как для случая переноса инфракрасного излучения только через поры, так и при переносе через проницаемое вещество. В работе учитывалось влияние температурной зависимости затухания радиоволн в веществе Луны. Оказалось, что

оно существенно в диапазоне волн от 0,1 мм до 1 см и создает значительное повышение постоянной составляющей на волне около 0,8—1,5 мм. Это полностью компенсирует возможное резкое уменьшение постоянной составляющей на волнах короче 3 см за счет температурной зависимости теплопроводности.

Настоящая работа посвящена экспериментальному определению степени температурной зависимости свойств лунного вещества. Наиболее надежно и точно это можно сделать, измерив постоянную составляющую температуры на поверхности и на глубине порядка $3l_T$. Как показали расчеты [14, 15], даже небольшая температурная зависимость проявляется в ощущимом приросте постоянной составляющей в глубину, в то время как на других явлениях, о которых, в частности, говорилось выше, даже сильная зависимость теплопроводности от температуры не оказывается достаточно заметно. В настоящей работе показано существование прироста постоянной составляющей, оценена величина радиационной теплопроводности и сделаны заключения о размерах пор и частиц лунита (см. также [19]).

Температурная зависимость теплопроводности. В ряде работ [1, 2] уже обращалось внимание на то, что последние измерения ночной температуры Луны [3], дающие значение полуночной температуры для центра диска $T_n = 100^\circ\text{K}$, находятся в резком противоречии с прецизионными измерениями средней по диску постоянной составляющей радиотемпературы. Действительно, для сравнения обоих измерений найдем соответствующие постоянные составляющие температуры поверхности для центра диска. При $T_n = 100^\circ\text{K}$, согласно расчету, приведенному, например, в [1], постоянная составляющая поверхностной температуры для центра диска равна

$$T_0(0) = 219^\circ\text{K}. \quad (1)$$

С другой стороны, по наиболее точным радиоизмерениям на волне 3 см постоянная составляющая средней по диску эффективной температуры получается равной $\bar{T}_{e0} = 212 \pm 2^\circ\text{K}$ (см., например, [1]) и соответствует температуре на глубине проникания волны 3 см, равной 50 см.

Радиотемпература должна быть выше, чем соответствующая температура на поверхности, благодаря действию потока радиогенного тепла из недр Луны. Приращение температуры на глубине 50 см за счет радиогенного тепла составляет не более 3°K , что дает для средней по диску постоянной составляющей эффективной температуры, связанной только с солнечным нагревом.

$$T_{e0} = 209^\circ\text{K}. \quad (2)$$

Средняя радиотемпература поверхности связана с постоянной составляющей для центра диска соотношением [4]

$$\bar{T}_{e0} = (1 - \bar{R}) 0,964 T_0(0), \quad (3)$$

не зависящим от выбора модели. Здесь \bar{R} — среднесферический коэффициент отражения волн от поверхности Луны, зависящий от диэлектрической постоянной ϵ . При $\epsilon = 1,5$ разность $1 - \bar{R} = 0,95$; при $\epsilon = 2$ $1 - \bar{R} = 0,92$ [5]. Отсюда постоянная составляющая температуры поверхности в центре диска равна

$$T_0(0) = \begin{cases} 228 & (\epsilon = 1,5) \\ 236 & (\epsilon = 2,0) \end{cases}. \quad (4)$$

Сравнивая (4) с (1), видим, что радиоизмерения дают постоянную составляющую на

$$\Delta T = 10 \div 17^\circ \quad (5)$$

большую, чем инфракрасные измерения. Это расхождение выходит далеко за пределы возможных ошибок радиоизмерений. Нетрудно показать, что такое расхождение не может быть объяснено ни ошибками пересчета от интегральной радиотемпературы к яркостной для центра диска, как это предполагалось в [6], ни, наконец, угловой зависимостью излучательной способности лунита на инфракрасных волнах, как предполагалось в [2]. На наш взгляд, наблюдаемое расхождение связано с действительным существованием разницы постоянных составляющих на поверхности и на глубине 50 см, не связанный с потоком тепла из недр. Эта разница, как указывалось ранее [7], может быть вызвана температурной зависимостью теплопроводности лунита, приводящей к нелинейности уравнения теплопроводности.

Как указывалось, приращение постоянной составляющей должно прекращаться на глубине порядка $4l_T$, где $l_T = (7-8)$ см — глубина проникания тепловой волны. Следовательно, на волнах 1,5 — 3 см, измерения на которых дают температуру на глубинах $3,5l_T \div 7l_T$ соответственно, постоянная составляющая должна быть выше, чем на поверхности, на всю величину прироста температуры из-за температурной зависимости тепловых свойств. Соответствующий точный расчет теплового режима при учете различной температурной зависимости теплопроводности проведен в работах [14, 15] при предположении температурной зависимости теплопроводности, обусловленной лучистым переносом, в виде

$$k(T) = k_0(1 + gT^3) \quad (6)$$

и зависимости теплоемкости в виде $c(T) = c_1 T$. Здесь k_0 — молекулярная и $k_0 g T^3 = k$ — радиационная части теплопроводности. Все параметры не зависят от x (однородная модель). Приращение постоянной составляющей при данном $\gamma(T) = (kpc)^{-1/2}$ зависит от отношения радиационной части теплопроводности к молекулярной (т. е. gT^3). Это отношение лучше всего определять при температуре $T = 300^\circ\text{K}$.

Как показывает расчет, приращение постоянной составляющей $\Delta T = 15^\circ\text{K}$ имеет место, если $gT^3 = 0,25$ ($g = 0,9 \cdot 10^{-8}$). Таким образом, оказывается достаточным незначительной температурной зависимости, чтобы вызвать ощутимый прирост постоянной составляющей на глубине. Это связано с тем, что уравнение теплопроводности качественно меняется — появляется новый член, эквивалентный существованию в слое толщиной порядка l_T внутренних источников тепла с интенсивностью, пропорциональной производной $k(T)$ по T .

Итак, при $\gamma(300) = 600$, плотности $\rho = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, теплоемкости при $T = 300^\circ\text{K}$ $c = 0,2$ теплопроводность лунита оказывается равной

$$k(T) = 10^{-5}(1 + 0,9 \cdot 10^{-8}T^3) = 10^{-5} + 0,9 \cdot 10^{-13}T^3. \quad (7)$$

При лунных температурах лучистый перенос осуществляется, в основном, инфракрасным излучением с длиной волны 8—15 μ.

Найденная радиационная часть теплопроводности лунита может служить источником расшифровки его микроструктуры. Рассмотрим этот вопрос. Как известно, радиационная теплопроводность в пористом теле может быть связана либо с проницаемостью излучения через вещество [16], либо с передачей только через поры [17].

Первый случай, очевидно, имеет место, когда размеры пор или

частич меньше оптической толщины материала для инфракрасных волн, а второй—при обратном соотношении. Соответствующие коэффициенты теплопроводности равны

$$k'_r = \frac{16}{3} \sigma \epsilon_i T^3 \bar{l}_v; \quad (8)$$

$$k'_r = 4\sigma A_i T^3 s l_p, \quad (9)$$

где σ —постоянная Стефана—Больцмана, ϵ_i —диэлектрическая постоянная для инфракрасных волн, A_i —степень черноты материала, l_p —размер поры, s —доля площади, занимаемой порами, и $\bar{l}_v = (1/x)$ —средняя по всем частотам глубина проникания волны (россельандовское среднее),

$$\bar{l}_v = \int_0^\infty l_v \frac{dB_v}{dT} dv / \int_0^\infty \frac{dB_v}{dT} dv, \quad (10)$$

где B_v —функция Планка.

Если преобладает второй тип радиационного переноса, то, сравнивая (9) со вторым членом выражения (7) и учитывая, что $A_i=1$ и при пористости $\sim 50\%$ $s=0,5$, получим, что размер пор лунита составляет

$$l_p \approx 350 \mu. \quad (11)$$

Подобная величина пор получена в работе [8], а также в [11], где радиационная часть теплопроводности оценивалась по характеру изменения температуры поверхности Луны при заходе Солнца.

В случае первого типа радиационной передачи нужно найти сначала выражение l_v . Исследования радиоизлучения Луны показали, что для ее вещества в диапазоне миллиметровых и сантиметровых волн имеет место зависимость $l_v = a\lambda$. Теория распространения волн в слабо поглощающих диэлектриках приводит к выражению $l_v = \lambda/2\pi V^e \operatorname{tg} \Delta$, где $\operatorname{tg} \Delta$ —угол потерь вещества. Имеются веские основания считать, что такая зависимость имеет место в области инфракрасных волн, в особенности для лунита.

Подставляя $l_v = a\lambda$ в (10), получим после интегрирования

$$\bar{l}_v = a \frac{0,365}{T}. \quad (12)$$

Подставляя это в (8), получим для радиационной теплопроводности лунита выражение

$$k'_r = 2\epsilon_i a \sigma T^2. \quad (13)$$

При такой зависимости прирост температуры в глубину на 15° имеет место, когда отношение $k'_r(300)/k_0 = 0,4$ [15]. Беря то же значение $k_0 = 10^{-5}$, найдем k'_r и, сравнивая его с (13), получим, что $a = 12$ и, следовательно, глубина проникания инфракрасных волн в луните равна

$$l_v = 12\lambda. \quad (14)$$

Теплопроводность будет равна $k(T) = 10^{-5} + 0,45 \cdot 10^{-10} T^2$.

Любопытно, что для радиоволн в диапазоне $0,1 \text{ см} \leq \lambda \leq 10 \text{ см}$ для лунного вещества имеет место соотношение $l_v \approx 20\lambda$ [1]. Согласно (12), средняя длина пробега кванта в луните для $T = 300^\circ\text{K}$ равна

около 150 μ . Такого же порядка величина пробега (150—250 μ) получается по измерениям для некоторых земных пород с зерном порядка 70 μ и менее [9].

Оценка возможной величины радиационной теплопроводности была сделана в работе [18] на основе экстраполяции I_s , измеренной в радиодиапазоне, на инфракрасные волны. Однако в этой работе при оценке k , вместо россельандова среднего взято просто значение I_s при $\lambda = 17 \mu$, что некорректно. Кроме того, в работе при выводе соотношения для россельандова среднего без достаточного основания введена поправка к I_s на индуцированное излучение. Эта поправка, как известно [16], имеет смысл лишь при использовании расчетных значений поглощения. В случае использования экспериментального значения I_s поправку на индуцированное излучение делать не следует.

Как указывалось ранее (см., например, [1]), низкая молекулярная теплопроводность лунита свидетельствует о том, что поры не являются закрытыми, а образованы из промежутков твердо скрепленных частиц, причем площадь соприкосновения, как показывают расчеты [10], должна быть на пять-шесть порядков меньше площади зерна. Из полученных новых данных следует, что поры лунита не могут быть более 350 μ . Поскольку при пористости лунита, равной 50—70%, размер поры примерно равен размеру частиц, то для непрозрачного вещества величина частиц не превосходит 350 μ . Меньший размер пор может иметь место, если вещество основы проницаемо для инфракрасных волн. В этом случае при указанной пористости лунита половина пробега инфракрасного кванта будет приходиться на суммарную длину пор, а половина — на суммарную толщину проницаемых частиц. Число пройденных частиц не может быть меньше одной, следовательно, ее размер не более $\bar{I}_s/2 = 70 \div 80 \mu$. Скорее всего, размер частиц в этом случае порядка длины инфракрасных волн, т. е. 10 — 20 μ .

В заключение благодарю Б. П. Константинова, побудившего меня рассмотреть влияние радиационного переноса тепла в лунном веществе.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. S. Troitsky, Radio Science, 69D, № 12, 1585 (1965).
2. V. S. Troitsky, Proc. Calif. JPL Lunar and Plan. Conf., Sept., 1965.
3. J. M. Saagi, Icarus, 3, № 2, 161 (1964).
4. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 81, вып. 4, 589 (1963).
5. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 39, № 6, 1089 (1962).
6. С. Миггау, Proc. Calif. JPL Lunar and Plan. Conf., Sept., 1965.
7. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 50, № 6, 1076 (1963).
8. J. L. Linsky, Harvard Coll. Observ. Scient. Rep., № 8, 1966.
9. K. Watson, Dissertation, Caltech, 1964.
- 10 Г. Н. Дульнев, Ю. П. Заричняк, Б. Л. Муратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 849 (1966).
11. H. C. Ingrao, A. T. Young, J. L. Linsky, Harvard Coll. Observ. Rep., № 6, 1965.
12. J. C. Jaeger, Austr. J. Phys., 6, 10 (1953).
13. R. W. Munsell, Nature, 181, 1458 (1958).
14. J. L. Linsky, Icarus, 5, № 6, 606 (1966).
15. В. С. Троицкий, А. Б. Буров, Т. Н. Алешина, Изв. комиссии по физике планет (в печати).
16. Д. А. Франк-Каменецкий, Физические процессы внутри звезд, Физматгиз, М., 1959.
17. А. Ф. Чудновский, Теплофизические характеристики дисперсных материалов, Физматгиз, М., 1962.
18. P. E. Clegg, J. A. Bastin, A. E. Gear, Mon. Not. Astr. Soc., 133, № 1, 63 (1966).
19. V. S. Troitsky, Nature, 213, 688 (1967).

DETERMINATION OF TEMPERATURE DEPENDENCE OF LUNIT THERMAL CONDUCTIVITY

V. S. Troitskii

It is shown that the higher value of the radio temperature of the Moon as compared with that from infrared measurements may be explained by the existence of the temperature dependence of lunit associated with the radiation energy transfer. The quadratic dependence of the thermal conductivity on the temperature existed in the case when the lunit is penetrable for infrared waves is considered as well as the cubic one when the transfer is only through the pores and when the material is not penetrable for infrared waves. It is shown that for the lunar material, the ratio of radiation to molecular thermal conductivity is equal to 0.4 and 0.25, respectively, at $T = 300^\circ$ for both cases.

It has been found that the infrared path in the lunit is equal to $l_v \approx 12\lambda$ for the first case and for the second— $l_v \approx 350\mu$ that corresponds to the dimension of the pores. The corresponding dimension of the lunit particles constituting the porous structure does not exceed 50–100 μ in the first case and 350 μ in the second. The obtained infrared absorption in the lunit corresponds to that in the earth silicate rocks.

УДК 523.164.4 : 521.52

О МИЛЛИМЕТРОВОМ СПЕКТРЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ВЕНЕРЫ*

A. П. Наумов, M. B. Каневский

Для ряда моделей атмосферы Венеры вычислена яркостная температура T_y в диапазоне $\nu = 48 \div 72 \text{ Гц}$, в котором следует ожидать наличие тонкой структуры спектра излучения планеты, обусловленной присутствием молекулярного кислорода. Найдено, что в некоторых случаях яркостная температура из-за присутствия кислорода может уменьшаться на резонансных частотах на $\approx 20\text{--}90^\circ\text{K}$. Отмечается возможность получения в спектральной области $\nu \approx 48 \div 72 \text{ Гц}$ экспериментальной информации о физических условиях на планете.

Одним из дискуссионных вопросов в настоящее время является вопрос о количестве молекулярного кислорода на Венере [2-5]. Последние исследования Прокофьева [6] вблизи теллурической B -полосы (длина волны $\lambda \approx 6900 \text{ \AA}$) подтвердили наличие допплер-смещенных линий поглощения O_2 в спектре отраженного планетой солнечного света. Из сопоставления изменений в крыльях теллурических линий, обусловленных венерианским кислородом и земными молекулами изотопа $O^{16}O^{18}$, в [6] сделан ориентировочный вывод, что содержание O_2 в надоблачном слое Венеры по порядку величины составляет не более 0,1% земного, т. е. приведенная высота кислорода $H_{O_2} < 1,6 \text{ м-атм}$.

Присутствие достаточного количества O_2 на Венере должно привести к тонкой структуре спектра излучения планеты в области $\lambda \approx 5 \text{ мм}$, так как именно на эту область приходится интенсивный спин-вращательный спектр поглощения кислорода [7, 8]. Отмеченный факт уже сам по себе представляет интерес, не говоря о том, что при определенных условиях он может быть использован для количественного уточнения содержания молекулярного кислорода в венерианской атмосфере, а также для уточнения некоторых других свойств атмосферы (см. раздел 3).

Ниже приведены результаты расчетов яркостной температуры Венеры (модели с «холодной» атмосферой) в диапазоне $\lambda \approx 4,3 \div 6,2 \text{ мм}$ (частота $\nu \approx 48 \div 72 \text{ Гц}$) для различных концентраций и распределений молекулярного кислорода.

1. МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ

Для расчетов использовались модели атмосферы Венеры с одинаковым распределением температуры по высоте, но с разными величинами давлений на поверхности планеты и несколько различающимися химическими составами.

Принималось, что температура в подоблачных слоях уменьшается по высоте h с адиабатическим градиентом ∇ , а облака и надоблачная часть атмосферы составляют изотермическую область с температурой $T_0 = 225^\circ\text{K}$ [9]:

* Результаты данной работы частично были доложены на V Всесоюзной конференции по радиоастрономии в г. Харькове, 18—22 октября 1965 г. [1].

$$\left. \begin{array}{l} T(h) = T_{\text{n}} - \nabla h \\ P(h) = P_{\text{n}} \left(1 - \frac{\nabla h}{T_{\text{n}}} \right)^{r/(r-1)} \end{array} \right\} h \leq h_0, \\ T(h) = T_0 \\ P(h) = P_0 \exp [-\eta(h - h_0)] \quad \left. \right\} h > h_0. \quad (1)$$

В (1) T_{n} и P_{n} — температура и давление на поверхности планеты, P_0 — давление на уровне облаков, h_0 — высота нижней границы облаков, r — отношение удельных теплоемкостей, $\eta^{-1} = kT_0/m_{\text{ср}}g$ — «шкала высот», ускорение силы тяжести на Венере $g = 835 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$, $m_{\text{ср}}$ — средняя молекулярная масса, k — постоянная Больцмана.

Из экспериментальных оценок температуры на высотах 60—80 км над уровнем облаков [10] следует, что отличие температуры на указанных высотах от принятого значения $T_0 = 225^{\circ}\text{K}$ не превышает 40°K . Такие вариации не могут сколько-нибудь существенно изменить вычисленные значения $T_{\text{я}}$ (погрешность не превышает $\approx 3\%$)*. Что касается температурного градиента в подоблачных слоях атмосферы, то в силу конвективной неустойчивости этой части атмосферы [11], следует ожидать лишь незначительное (порядка десятых долей градуса) отличие истинного градиента от адиабатического [12].

В данной работе полагалось также, что основными газовыми компонентами атмосферы Венеры являются углекислый газ и азот. Согласно [13], относительное объемное содержание углекислого газа составляет $f_{\text{CO}_2} \approx 3,24\%$ (или $\approx 5\%$ по массе). В [14] содержание CO_2 оценивается примерно в 20%. Для выяснения возможного влияния химического состава на излучение планеты в миллиметровом диапазоне были выполнены расчеты яркостной температуры не только при $f_{\text{CO}_2} \approx 3,24\%$, но и для явно завышенного количества углекислого газа $f_{\text{CO}_2} \approx 50\%$.

Из возможных газовых примесей наибольший интерес для данной работы представляют кислород (см. Введение) и водяной пар. Для интерпретации высокой эффективной температуры планеты на сантиметровых волнах в рамках «парникового» эффекта требуется относительное объемное содержание водяного пара под облаками (при поверхностном давлении $P_{\text{n}} \approx 10 \text{ атм}$) $f_{\text{H}_2\text{O}} \approx 10^{-1}\%$ (см., например, [15]). Значение $f_{\text{H}_2\text{O}} \approx 10^{-1}\%$ для нижней атмосферы не противоречит, вообще говоря, оптическим наблюдениям [16—18, 30, 31], согласно которым над облаками $f_{\text{H}_2\text{O}} \approx 10^{-4} \div 10^{-2}\%$, но предположение о столь значительном количестве водяного пара в нижней атмосфере носит пока гипотетический характер. Существует также мнение, что «парниковый» эффект на Венере вызывается не водяными парами [19]. Поэтому в расчетах мы использовали как «влажные» модели атмосферы (величина $f_{\text{H}_2\text{O}}$ под облаками полагалась равной $10^{-1}\%$), так и «сухие» модели ($f_{\text{H}_2\text{O}} = 0$). Интересно отметить, что результаты расчета тонкой структуры спектра излучения Венеры вблизи $\lambda \approx 5 \text{ мкм}$ оказались весьма стабильными по отношению к указанным вариациям величин f_{CO_2} и $f_{\text{H}_2\text{O}}$. Объемная концентрация молекулярного кислорода являлась переменным параметром в каждой модели.

Согласно [20], $T_{\text{n}} \approx 670^{\circ}\text{K}$. Для рассмотренных моделей атмосферы среднее значение адиабатического градиента температуры ∇ составляет $\approx 8^{\circ}\text{K} \cdot \text{км}^{-1}$. Малые примеси водяного пара и кислорода дают поправ-

* Распределение температуры на высотах $h > 80 \text{ км}$ над уровнем облаков не представляет интереса при решении данной задачи, ибо молекулярный кислород почти полностью диссоциирован на столь больших высотах.

ки лишь $\approx 0,4\%$ к величине ∇ и $\approx 0,1\%$ к величине $t_{\text{ср}}$. Принятые значения T_p , T_0 , ∇ дают для высоты облачного слоя $h_0 = (T_p - T_0)/\nabla \approx 55,6 \text{ км}$.

В соответствии с радиоастрономическими измерениями [20] полагалось $P_p = 5 \text{ атм}$ и 10 атм . Количественные сведения об атмосферных моделях Венеры, которые были использованы в расчетах миллиметрового спектра излучения, приведены в табл. 1. В данной работе не делалось каких-либо предположений о химическом составе облаков и оптическая толщина облачного слоя в диапазоне $\nu \approx 48 \div 72 \text{ Гц}$ находилась из решения интегрального уравнения.

Таблица 1

Параметры атмосферных моделей Венеры*

Модель	Химический состав ..	P_p (атм)	P_0 (мбар)	η^{-1} (км)	$t_{\text{ср}}$
I	$f_{CO_2} \approx 3,24\%$, $f_{N_2} \approx 96,66\%$, $f_{H_2O} \approx 0,1\%$	10	190	7,8	1,380
II	$f_{CO_2} \approx 3,24\%$, $f_{N_2} \approx 96,76\%$	10	190	7,8	1,380
III	$f_{CO_2} \approx 3,24\%$, $f_{N_2} \approx 96,76\%$	5	95	7,8	1,380
IV	$f_{CO_2} \approx 3,24\%$, $f_{N_2} \approx 96,66\%$, $f_{H_2O} \approx 0,1\%$	5	95	7,8	1,380
V	$f_{CO_2} \approx 50\%$, $f_{N_2} \approx 50\%$	5	50	6,2	1,309

2. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Яркостная температура планеты T_y в приближении Рэлея—Джинса есть

$$T_y = 2 \left\{ \varepsilon T_p \int_0^1 \exp(-\tau_m/\mu) \mu d\mu + \int_0^1 \int_0^{\tau_m} T(\tau) \exp(-\tau/\mu) d\tau d\mu \right\}, \quad (2)$$

где $\tau_m = \int_0^\infty \gamma(h) dh$ — оптическая толщина всей атмосферы (γ — коэффициент поглощения), $\mu = \cos \theta$, θ — сферическая координата на поверхности планеты, излучательная способность поверхности $\varepsilon \approx 0,9$.

Коэффициент поглощения углекислого газа и азота в миллиметровом диапазоне для моделей атмосферы I—V выражается формулой [21]

$$\gamma_{CO_2, N_2} (\text{км}^{-1}) = \tilde{\alpha} \left(\frac{P}{760} \right)^2 \left(\frac{\nu}{30} \right)^2 \left(\frac{273}{T} \right)^5. \quad (3)$$

В (3) давление P выражено в мм рт. ст., частота ν — в Гц, температура T — в градусах Кельвина, а коэффициент α равен

$$\tilde{\alpha} = 10^{-3} (15,7 \hat{f}_{CO_2}^2 + 3,90 \hat{f}_{CO_2} \hat{f}_{N_2} + 0,085 \hat{f}_{N_2}^2), \quad (4)$$

где \hat{f}_i — относительное объемное содержание i -й газовой компоненты, выраженное в частях ($\hat{f}_i = 10^{-2} f_i$).

Коэффициент поглощения мономеров водяного пара на частотах $\nu = 48 \div 72 \text{ Гц}$ вычислялся по формуле [22]**

* Для каждой модели относительная объемная концентрация O_2 полагалась переменной.

** Мы пренебрегли вкладом димеров водяного пара [23] в коэффициент поглощения, что с достаточной степенью точности оправдано для атмосферы Венеры. Подробнее этот вопрос рассматривается в другой работе.

$$\gamma_{H_2O} (\text{км}^{-1}) = 58,55 \hat{f}_{H_2O} P^2 T^{-5/2} \gamma_0(v), \quad (5)$$

где $\gamma_0(v)$ — коэффициент поглощения при стандартных атмосферных условиях ($P = 760 \text{ мм рт. ст.}$, $T = 293^\circ\text{K}$, $\rho = 7,5 \text{ г}\cdot\text{м}^{-3}$), выраженный в $\text{дБ}\cdot\text{км}^{-1}$.

Коэффициент поглощения молекулярного кислорода есть [8]*

$$\gamma_{O_2} (\text{км}^{-1}) = C \hat{f}_{O_2} P T^{-3v^2} \sum_K (F_{K+} \mu_{K+}^2 + F_{K-} \mu_{K-}^2) A_K, \quad (6)$$

где $C = 2,932$, K — орбитальное квантовое число, $\mu_{K+}^2 = K(2K+3)/(K+1)$, $\mu_{K-}^2 = (K+1)(2K-1)/K$, $A_K = \exp[-2\pi B\hbar c K(K+1)/kT]$, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света, вращательная постоянная молекулы кислорода $B = 1,44 \text{ см}^{-1}$.

Так как молекулярный кислород испытывает фотодиссоциацию на высотах $h_\Phi \approx 65 \div 75 \text{ км}$ над облаками [19, 24], то при вычислении оптической толщины надоблачного слоя атмосферы Венеры мы выполняли интегрирование соотношения (6) до высоты $h_\Phi = 70 \text{ км}$ над облаками. Нетрудно убедиться, что на таких высотах при $P_0 \approx 100 \text{ мбар}$ отношение допплеровской полуширины линии $O_2(\Delta v_D)$ к полуширине, обусловленной молекулярными соударениями ($\Delta v_{K\pm}$), составляет $\Delta v_D/\Delta v_{K\pm} \approx 10$, т. е. оптическая толщина надоблачного слоя, обусловленная O_2 , определяется совместным воздействием молекулярных соударений и эффекта Доппеля** (оценки выполнялись с использованием выражения (13.2) на стр. 304 в [25] для Δv_D и нижеприведенной формулы (7) для $\Delta v_{K\pm}$). С учетом эффекта Доппеля структурный фактор $F_{K\pm}$ в (6) принимает вид [8, 26]

$$F_{K\pm} = 4 \left(\frac{m_{O_2}}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v_{K\pm} - v \nu_{K\pm}/c)^2 \Delta v_{K\pm}}{[(v_{K\pm} - v \nu_{K\pm}/c)^2 - v^2]^2 + 4v^2 \Delta v_{K\pm}^2} \times \\ \times \exp \left(- \frac{m_{O_2} v^2}{2kT} \right) dv,$$

где m_{O_2} , $v_{K\pm}$, v — соответственно молекулярный вес, резонансная частота и тепловая скорость молекул кислорода.

Полуширина спектральной линии O_2 равна

$$\Delta v_{K\pm} = \alpha_{K\pm}(P) P \left[\hat{f}_{O_2} + \frac{\sigma_{O_2-CO_2}}{\sigma_{O_2-O_2}} \hat{f}_{CO_2} + \frac{\sigma_{O_2-N_2}}{\sigma_{O_2-O_2}} \hat{f}_{N_2} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{O_2-H_2O}}{\sigma_{O_2-O_2}} \hat{f}_{H_2O} \right] \left(\frac{T}{300} \right)^{-0,85}. \quad (7)$$

В формуле (7), согласно [8], полагалось

$$\alpha_{K\pm}(P) = \begin{cases} 0,00117 \text{ Гц}\cdot\text{мм}^{-1} \text{ рт. ст.} (P > 270 \text{ мм рт. ст.}) \\ 0,00195 - 0,312 \cdot 10^{-5} (P - 20) \text{ Гц}\cdot\text{мм}^{-1} \text{ рт. ст.} \\ (20 \text{ мм рт. ст.} \leq P \leq 270 \text{ мм рт. ст.}) \\ 0,00195 \text{ Гц}\cdot\text{мм}^{-1} \text{ рт. ст.} (P < 20 \text{ мм рт. ст.}) \end{cases}$$

* В соотношении (6) пренебрегается нерезонансным поглощением O_2 , что вполне оправдано вблизи резонансных областей [8].

** Отношение $\Delta v_D/\Delta v_{K\pm}$ на уровне облаков для тех же атмосферных моделей $\approx 10^{-3}$.

Мы также считали, что отношения эффективных сечений соударений

$$\sigma_{O_2-N_2}/\sigma_{O_2-O_2} \approx 0,90 \quad [27], \quad \sigma_{O_2-CO_2}/\sigma_{O_2-O_2} \approx 1,6, \quad \sigma_{O_2-H_2O}/\sigma_{O_2-O_2} \approx 2,2 \quad [25].$$

Формулы (3), (5), (6) дают коэффициенты поглощения газов при бинарных соударениях молекул в атмосфере. Оценки свидетельствуют об удовлетворительности бинарного приближения (при малых концентрациях O_2 и H_2O) вплоть до давлений $P_n \approx 30$ атм.

Выражение (2) с учетом соотношений (1), (3), (5), (6) принимает вид

$$\begin{aligned} T_a &= T_0 + 2\varepsilon T_n \int_0^1 \mu \exp\left(-\frac{\tau_1 + \tau_2}{\mu}\right) d\mu - 2T_0 \int_0^1 \mu \exp(-\tau_1/\mu) d\mu + \\ &+ 2 \int_0^1 \exp(-\tau_1/\mu) I(\mu) d\mu, \\ I(\mu) &= I_1(\mu) + I_2(\mu), \\ I_1(\mu) &= \exp\left\{\frac{1}{\mu} (\beta T_0^{2(2-r)/(r-1)} + \xi T_0^{(3+r)/2(r-1)})\right\} \times \\ &\times \int_{T_0}^{T_n} \left[\frac{2(2-r)}{r-1} \beta T^{2(2-r)/(r-1)} + \frac{3+r}{2(r-1)} \xi T^{(r+3)/2(r-1)} \right] \times \quad (8) \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{\mu} \left[\beta T^{2(2-r)/(r-1)} + \xi T^{(3+r)/2(r-1)} + \frac{1}{\nabla} \int_{T_0}^T \gamma_{O_2} dT' \right]\right\} dT, \\ I_2(\mu) &= \frac{1}{\nabla} \exp\left\{\frac{1}{\mu} (\beta T_0^{2(2-r)/(r-1)} + \xi T_0^{(3+r)/2(r-1)})\right\} \times \\ &\times \int_{T_0}^{T_n} \gamma_{O_2} T \exp\left\{-\frac{1}{\mu} \left[\beta T^{2(2-r)/(r-1)} + \xi T^{(3+r)/2(r-1)} + \frac{1}{\nabla} \int_{T_0}^T \gamma_{O_2} dT' \right]\right\} dT, \end{aligned}$$

где

$$\beta = 1,458 \cdot 10^3 \frac{r-1}{2-r} \frac{\tilde{\alpha} P_n^2 v^2}{\nabla T_n^{2r/(r-1)}},$$

$$\xi = 1,171 \cdot 10^2 \frac{r-1}{3+r} \frac{\hat{f}_{H_2O} P_n^2 \gamma_0(v)}{\nabla T_n^{2r/(r-1)}},$$

τ_1 — оптическая толщина надоблачного слоя атмосферы и облаков,
 τ_2 — оптическая толщина подоблачного слоя.

Величина τ_2 (без учета O_2) легко находится из выражений (3), (5) путем интегрирования их по высоте h :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \beta [T_n^{2(2-r)/(r-1)} - T_0^{2(2-r)/(r-1)}] + \\ &+ \xi [T_n^{(3+r)/2(r-1)} - T_0^{(3+r)/2(r-1)}]. \quad (9) \end{aligned}$$

В выражении (9) первое слагаемое определяется вкладом углекислого газа и азота, а второе — вкладом водяного пара.

Величина τ_1 (также без учета O_2) может быть определена из формулы (8), являющейся интегральным уравнением относительно τ_1 , при известных значениях τ_2 и $T_y = \tilde{T}_y$. Если бы кислород на Венере отсутствовал, то яркостная температура планеты в диапазоне $\nu \approx 48 \div 72$ Гц с достаточной степенью точности задавалась бы, по-видимому, выражением $\tilde{T}_y (\text{°К}) = 410 - 0,73\nu$ (Гц), которое следует из линейной интерполяции экспериментальных результатов близлежащей спектральной области (см. рис. 1)*. Это выражение для \tilde{T}_y и было использовано при вычислении τ_1 из формулы (8) методом итераций. Влияние той или иной аппроксимации $\tilde{T}_y(\nu)$ на результаты расчета миллиметрового спектра излучения Венеры оценивается ниже.

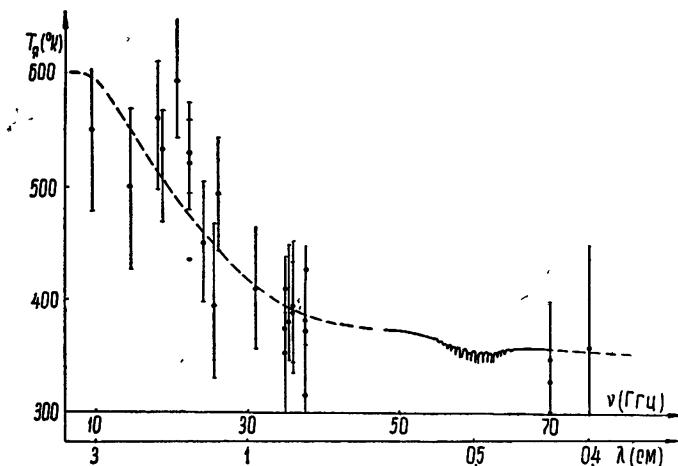


Рис. 1. Яркостная температура T_y Венеры в диапазоне $\nu \approx 10 \div 80$ Гц ($\lambda \approx 3,8$ мм \div 3 см).

В области $\nu \approx 48 \div 72$ Гц величина T_y (сплошная кривая) вычислена с учетом молекулярного кислорода (модели атмосферы I, II; концентрация кислорода считалась постоянной до высот фотодиссоциации O_2 ; оптическая приведенная высота $H_{O_2} = 0,4$ м-атм). Вне области $\nu \approx 48 \div 72$ Гц пунктирная кривая аппроксимирует экспериментальные результаты (см. обзор [20]).

Интегрирование по высоте выражения (6) дает оптические толщины надоблачного (τ'_{O_2}) и подоблачного (τ''_{O_2}) слоев атмосферы Венеры, обусловленные молекулярным кислородом:

$$\begin{aligned} \tau'_{O_2} = C\eta^{-1}T_0^{-3} \left(\frac{m_{O_2}}{2\pi k T_0} \right)^{1/2} \hat{f}_{O_2} & \left\{ \alpha_{cp} \left[\hat{f}_{O_2} + \frac{\sigma_{O_2-CO_2}}{\sigma_{O_2-O_2}} \hat{f}_{CO_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sigma_{O_2-N_2}}{\sigma_{O_2-O_2}} \hat{f}_{N_2} + \frac{\sigma_{O_2-H_2O}}{\sigma_{O_2-O_2}} \hat{f}_{H_2O} \right] \left(\frac{T}{300} \right)^{-0.85} \right\}^{-1} \times \end{aligned}$$

* Вне спектральных областей $\nu \approx 48 \div 72$ Гц и $\nu \approx 116 \div 120$ Гц вклад молекулярного кислорода в оптическую толщину и излучение планеты пренебрежимо мал (см., в частности, рис. 4-6).

$$\times \sum_K \{ \mu_{K+}^2 I_{K+} + \mu_{K-}^2 I_{K-} \} A_K(T_0), \quad (10)$$

$$\tau'_{O_2} = 8C \left(\frac{m_{O_2}}{2\pi k} \right)^{1/2} \hat{f}_{O_2} P_n T_n^{-3.5} v^2 \frac{1}{\nabla} \sum_K (\mu_{K+}^2 E_{K+} + \mu_{K-}^2 E_{K-}).$$

В формулах (10)

$$I_{K\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(v_{K\pm} - \frac{v}{\xi} v_{K\pm} \right)^2 \ln \left\{ \frac{[(v_{K\pm} - v v_{K\pm}/c)^2 - v^2]^2 + 4v^2(\Delta v_{K\pm})_0^2}{[(v_{K\pm} - v v_{K\pm}/c)^2 - v^2]^2 + 4v^2(\Delta v_{K\pm})_1^2} \right\} \times \\ \times \exp(-m_{O_2} v^2/2kT) dv,$$

$$E_{K\pm} = \int_{T_0}^{T_n} \left(\frac{T}{T_n} \right)^{(3.5-2.5r)/(r-1)} D_{K\pm}(T) A_K(T) dT,$$

$$D_{K\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v_{K\pm} - v v_{K\pm}/c)^2 \Delta v_{K\pm}}{[(v_{K\pm} - v v_{K\pm}/c)^2 - v^2]^2 + 4v^2(\Delta v_{K\pm})^2} \times \\ \times \exp(-m_{O_2} v^2/2kT) dv,$$

$(\Delta v_{K\pm})_0$ и $(\Delta v_{K\pm})_1$ — полуширины спектральных линий O_2 на высотах $h = h_0$ и $h = h_\phi$, α_{cp} — средний для всех K параметр уширения линий O_2 при давлениях, соответствующих высотам $h \approx 0 \div 70$ км над облачками (см. выражения для $\alpha_{K\pm}$). Введение величины α_{cp} упрощает интегрирование, а ошибка в расчете τ'_{O_2} составляет при этом менее 2%. Численные значения $v_{K\pm}$ приведены в [28].

Расчет величины T_a в области $v \approx 48 \div 72$ ГГц с учетом молекулярного кислорода выполнялся по следующей схеме:

- 1) по формуле (9) вычислялась величина τ_2 без учета O_2 ;
- 2) из интегрального уравнения (8) при $\tau_{O_2} = 0$ и $T_a = \tilde{T}_a$ определялась оптическая толщина надоблачного слоя и облаков τ_1 ;
- 3) вычислялись величины τ'_{O_2} и τ''_{O_2} по формулам (10);
- 4) находилась яркостная температура T_a из выражения (8) ($\tau_{O_2} \neq 0$), причем величины τ_1 и τ_2 в (6) заменялись соответственно на $\tau_1 + \tau'_{O_2}$ и $\tau_2 + \tau''_{O_2}$.

Расчеты были выполнены на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2. Все интегралы вычислялись методом Симпсона. При расчете атмосферных моделей II, III, V в формулах (8) полагалось $\hat{f}_{H_2O} = 0$ ($\xi = 0$). Мы рассматривали атмосферные модели Венеры как с содержанием O_2 лишь над облаками ($\tau'_{O_2} \neq 0$, $\tau''_{O_2} = 0$), так и с подоблачным содержанием O_2 ($\tau'_{O_2} \neq 0$, $\tau''_{O_2} \neq 0$).

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2, 3 даны значения τ'_{O_2} и τ''_{O_2} , вычисленные для моделей I, II с произвольным значением $\hat{f}_{O_2} = 0,002$. Из формул (10) следует, что при небольших концентрациях молекулярного кислорода, которые только и рассматриваются нами, с достаточной степенью точности можно считать величины τ'_{O_2} и τ''_{O_2} прямо пропорциональными величине \hat{f}_{O_2} :

$$\tau'_{O_2} \sim \hat{f}_{O_2}, \quad \tau''_{O_2} \sim \hat{f}_{O_2}. \quad (11)$$

Пересчет величин τ'_{O_2} и τ''_{O_2} для моделей атмосферы I, II и другим концентрациям кислорода осуществлялся согласно соотношениям (11). Уменьшение поверхностного давления на планете до 5 атм приводит к уменьшению величин τ'_{O_2} и τ''_{O_2} по сравнению с моделями I, II ($P_n = 10$ атм) в наиболее интересных для данной задачи спектральных участках — резонансах O_2 — в 1,2 — 1,8 раза. Повышенное содержание CO_2 в модели V по сравнению с моделями III, IV дает увеличение величин τ'_{O_2} и τ''_{O_2} на концах рассматриваемого диапазона примерно на 10 — 15%, а в резонансах O_2 уменьшает эти значения на 2 — 5%.

Мы выполнили расчеты яркостной температуры T_y для нескольких значений приведенных высот в интервале $H_{O_2} \approx 0,4 \div 1,6$ м-атм*. Величина $H_{O_2} \approx 0,4$ м-атм на 30% меньше верхнего предела для содержания O_2 в надоблачных слоях венерианской атмосферы, даваемого Спиннрадом и Ричардсоном [4]. Значение $H_{O_2} \approx 1,6$ м-атм взято в соответствии с данными Прокофьева [6]. Полагалось также, что кислород может быть распределен

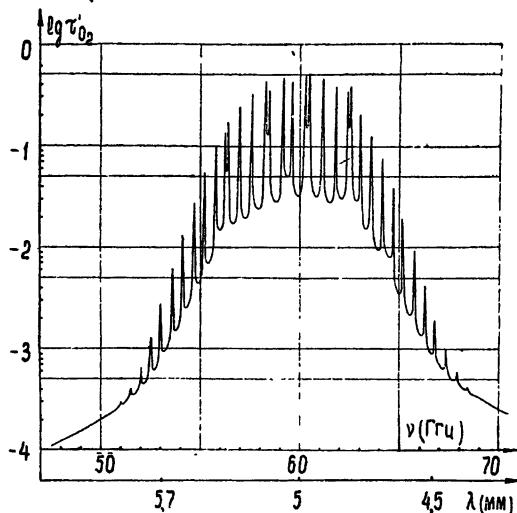


Рис. 2. Оптическая толщина τ'_{O_2} надоблачного слоя атмосферы Венеры, обусловленная молекулярным кислородом (модели I, II; $\hat{f}_{O_2} = 0,002$).
При этом величина $H_{O_2} \approx 0,4$ м-атм на 30% меньше верхнего предела для содержания O_2 в надоблачных слоях венерианской атмосферы, даваемого Спиннрадом и Ричардсоном [4]. Значение $H_{O_2} \approx 1,6$ м-атм взято в соответствии с данными Прокофьева [6]. Полагалось также, что кислород может быть распределен как в обеих частях венерианской атмосферы (ниже и выше облаков), так и лишь в надоблачной части атмосферы**.

Концентрация молекулярного кислорода в верхних слоях находилась из соотношения $\hat{f}_{O_2} = N_{O_2}/N$, где N — число молекул в столбе атмосферы над облаками с площадкой в основании $S = 1$ см², а $N_{O_2} = 2,5 \cdot 10^{19} H_{O_2}$, причем H_{O_2} здесь выражена в см-атм. В вариантах, в которых рассматривался кислород и в нижних слоях атмосферы, считалось, что концентрация постоянна до высот фотодиссоциации

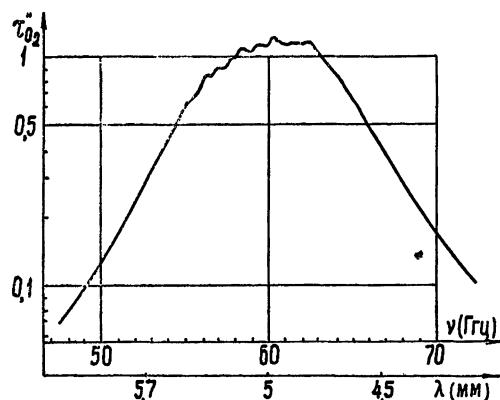


Рис. 3. Оптическая толщина τ'_{O_2} подоблачного слоя атмосферы Венеры, обусловленная молекулярным кислородом (модели I, II; $\hat{f}_{O_2} = 0,002$).

* Напомним, что приведенная высота H_{O_2} , определяемая из оптических наблюдений, характеризует содержание кислорода только в надоблачных слоях атмосферы.

** Если образование O_2 на Венере связано с процессами диссоциации и рекомбинации каких-либо химических элементов, рассмотренный случай представляется вполне вероятным.

h_{ϕ} ($h_{\phi} \simeq 70$ км над облаками). В этих вариантах полная приведенная высота кислорода, разумеется, существенно превосходит приведенную высоту H_{O_2} , определяемую из оптических наблюдений и характеризующую содержание O_2 только в верхних слоях. Для обозначения содержания O_2 во всех моделях мы пользуемся, однако, лишь величиной H_{O_2} , указывая при этом тип распределения кислорода.

На рис. 4—6 изображен спектр излучения Венеры (модели I—III) для различных распределений O_2 и различных приведенных высот H_{O_2} . Из рис. 4 видно, что разница ΔT_a между величиной T_a при наличии

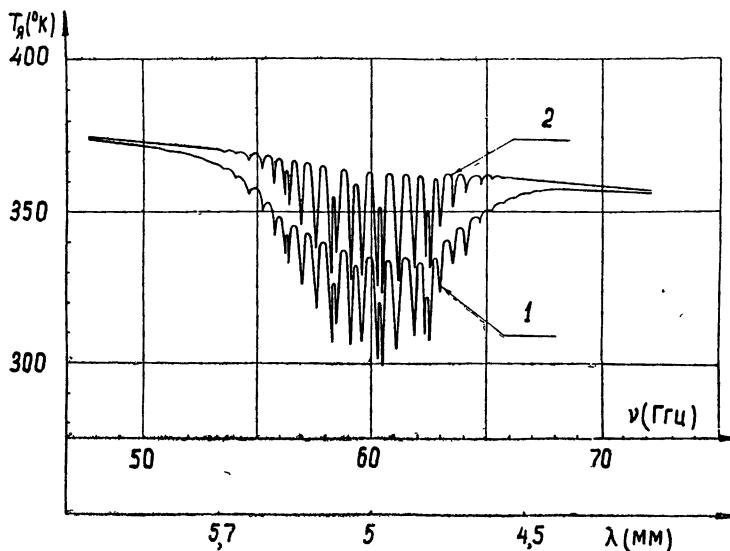


Рис. 4. Яркостная температура T_a Венеры в диапазоне $\nu = 48 \div 72$ ГГц, вычисленная с учетом молекулярного кислорода (модель I; оптическая приведенная высота $H_{O_2} = 1,6$ м-атм).

Кривая 1—концентрация O_2 постоянна до высот фотодиссоциации кислорода. Кривая 2—кислород содержится лишь в надоблачной части атмосферы.

кислорода и значением T_a , получающимся из интерполяционной кривой, на резонансной частоте $\nu_{7+} = 60,4348$ ГГц достигает $\simeq 70^{\circ}\text{K}$ при $H_{O_2} = 1,6$ м-атм, если кислород равномерно распределен в атмосфере Венеры до высоты h_{ϕ} . Если же молекулярный кислород содержится только в надоблачной части атмосферы, то эффект составляет $\simeq 44^{\circ}\text{K}$. Отметим, что разница в величинах ΔT_a для моделей I, II во всех рассчитанных вариантах не превышает $\simeq 2^{\circ}\text{K}$. Для тех же моделей атмосферы и значения $H_{O_2} \simeq 1,3$ м-атм (что на 20% меньше значения $H_{O_2} = 1,6$ м-атм, определенного в [6]) имеем на частоте ν_{7+} соответственно $\Delta T_a \simeq 57^{\circ}\text{K}$ в случае равномерного распределения O_2 и $\Delta T_a \simeq 32^{\circ}\text{K}$ в случае содержания O_2 лишь над облаками (см. рис. 5).

Для моделей III, IV и значения $H_{O_2} \simeq 1,3$ м-атм величина $\Delta T_a \simeq 76^{\circ}\text{K}$ при равномерном распределении O_2 и $\Delta T_a \simeq 56^{\circ}\text{K}$ при содержании O_2 только над облаками (см. рис. 6)*. Для значения $H_{O_2} = 1,6$ м-атм эти цифры возрастают до $\Delta T_a \simeq 90^{\circ}\text{K}$ и $\Delta T_a \simeq 63^{\circ}\text{K}$. Для приведенной высоты $H_{O_2} \simeq 0,4$ м-атм (модели III, IV) соответственно имеем $\Delta T_a \simeq 31^{\circ}\text{K}$ и $\Delta T_a \simeq 20^{\circ}\text{K}$. Интересно отметить, что результаты, полученные для модели V, отличаются от приведенных значений ΔT_a для моделей III, IV только на $\simeq 1,6^{\circ}\text{K}$, если кислород содержится лишь

* Разница в результатах расчета величины T_a для моделей III, IV гораздо же мала, как и для моделей I, II.

в верхней атмосфере. Соответствующее различие для равномерного распределения O_2 составляет несолько градусов. Какие эффекты (ΔT_g) следует ожидать для моделей I, II, если величина H_{O_2} составляет 0,4 м-атм, можно видеть из рис. 1.

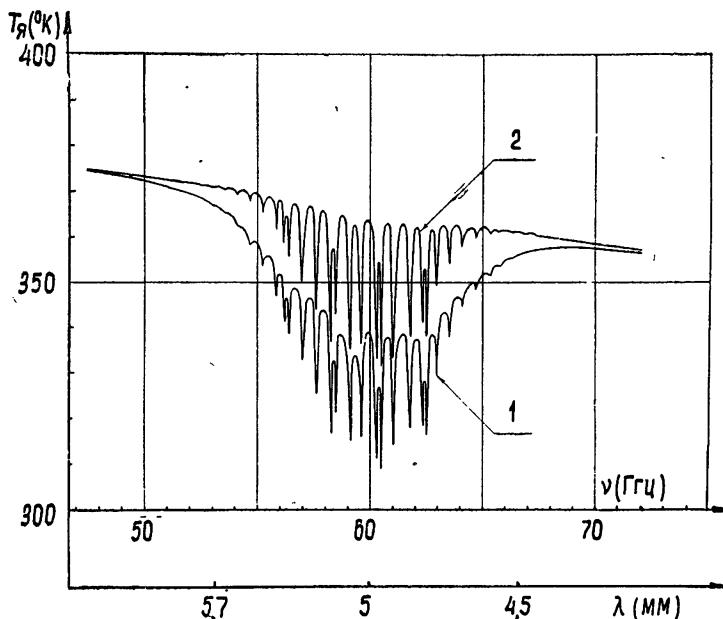


Рис. 5. Яркостная температура T_y Венеры в диапазоне $\nu = 48 \div 72$ ГГц, вычисленная с учетом молекулярного кислорода (модель II; оптическая приведенная высота $H_{O_2} = 1,3$ м-атм).

Кривая 1—концентрация O_2 постоянна до высот фотодиссоциации кислорода.
Кривая 2—кислород содержится лишь в надоблачной части атмосферы.

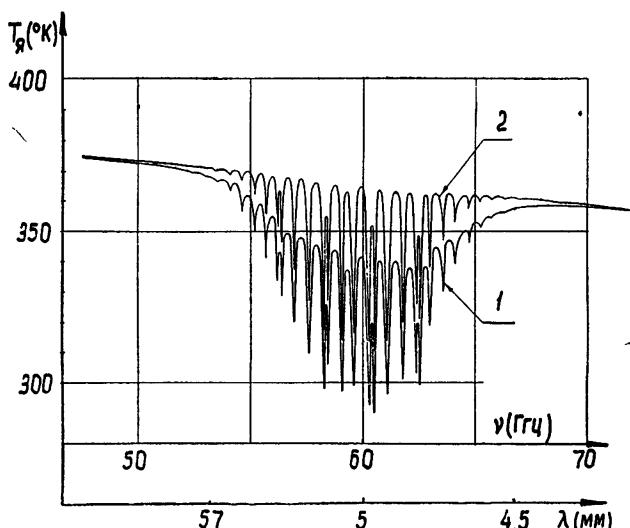


Рис. 6. Яркостная температура T_y Венеры в диапазоне $\nu = 48 \div 72$ ГГц, вычисленная с учетом молекулярного кислорода (модель III; оптическая приведенная высота $H_{O_2} = 1,3$ м-атм).

Кривая 1—концентрация O_2 постоянна до высот фотодиссоциации кислорода. Кривая 2—кислород содержится лишь в надоблачной части атмосферы.

Хотя величины $\Delta T_{\text{я}}$ приведены выше только для резонансной частоты $v_{7+} = 60,4348 \text{ Гц}$, но приблизительно такие же провалы в спектре излучения Венеры имеют место на резонансных частотах и других интенсивных линий O_2 (например, на частоте $v_{5+} = 59,5910 \text{ Гц}$, $v_{5-} = 60,3060 \text{ Гц}$ и т. д.). Оценки показывают, что, если вместо интерполяционной формулы $\tilde{T}_{\text{я}} = 410 - 0,73v$ использовать другие разумные (см. рис. 1) приближения $\tilde{T}_{\text{я}}(v)$, то вычисленные величины $\Delta T_{\text{я}}$ во всем диапазоне $v = 48 \div 72 \text{ Гц}$ будут отличаться от приведенных выше значений не более, чем на $\approx 10\%$.

В заключение заметим, что результаты расчета тонкой структуры спектра излучения Венеры вблизи $\lambda \approx 5 \text{ мкм}$ свидетельствуют об интересных в принципе возможностях получения экспериментальной информации о физических условиях на планете в указанном диапазоне. Поскольку на формирование спектральных линий O_2 в миллиметровом диапазоне оказывают влияние слои атмосферы, лежащие ниже облачного покрова, то радионаблюдения планеты при сопоставлении их с оптическими данными позволили бы выяснить вопрос о распределении кислорода в нижних (подоблачных) слоях венерианской атмосферы.

Экспериментальная информация об излучении Венеры на волнах $\lambda \approx 5 \text{ мкм}$ представляет интерес и для решения согласованной задачи о природе облачного слоя, химическом составе поверхности, характере атмосферы (окислительная или восстановительная) и т. д. Следует, однако, иметь в виду, что полное вертикальное поглощение электромагнитного излучения в земной атмосфере при $\lambda \approx 5 \text{ мкм}$ составляет $\Gamma \approx 100 \div 150 \text{ дБ}$ [8]. Это обстоятельство существенно затрудняет наземные и высотные ($h \leq 5 \text{ км}$) стационарные радиоастрономические наблюдения, но, разумеется, не препятствует радиоастрономическим наблюдениям с помощью спутников и ракет.

Расчеты были выполнены М. Б. Флаксман, за что авторы весьма признательны ей. Мы благодарны также С. А. Жевакину за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Наумов, М. Б. Каневский, Тезисы докладов на V Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Харьков, 1965, стр. 26.
2. V. K. Prosof'ev, N. N. Petrova, Memoires de la Societe Royale des Sci. de Liège, t. 7, fasc. uniq., Liege Univ. (1963).
3. В. К. Прохофьев, Н. Н. Петрова, Изв. КРАО, 29, 3 (1963).
4. H. Spinrad, E. H. Richardson, Astroph. J., 141, 292 (1965).
5. В. К. Прохофьев, Изв. КРАО, 31, 276 (1964); сб. «Вопросы астрофизики», изд. Наукова думка, Киев, 1965, стр. 6.
6. В. К. Прохофьев, Изв. КРАО, 34, 243 (1965); 37, 3 (1967).
7. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, 413 (1947).
8. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, 987 (1965).
9. W. M. Sinton, J. Strong, Astroph. J., 131, 470 (1960).
10. В. В. Шаронов, Планета Венера, изд. Наука, М., 1965.
11. C. Sagan, J. B. Pollack, On the nature of the clouds and the origin of the surface temperature of Venus. Harvard University, 1965.
12. В. И. Мороз, Физика планет, изд. Наука, М., 1967.
13. H. Spinrad, Publs. Astron. Soc. Pacific, 74, 187 (1962).
14. L. D. Kaplan, Planet. and Space Sci., 8, 23 (1961).
15. Г. М. Стрелков, Космические исследования, 4, 581 (1966).
16. H. Spinrad, Icarus, 1, 266 (1962).

17. A. Dollfus, C. R. Acad. Sci., **265**, 3250 (1963).
18. M. Buttema, W. Plummer, J. Strong, Astroph. J., **69**, 59 (1964).
19. В. И. Мороз, Астрон. ж., **41**, 711 (1964).
20. А. Д. Кузьмин, Радиофизические исследования Венеры, изд. ВИНИТИ, М., 1967.
21. W. Ho, I. A. Kaufman, P. Thaddeus, J. Geoph. Res., **71**, 5091 (1966).
22. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **6**, № 4, 674 (1963).
23. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, **171**, 1061 (1966).
24. M. Shimizu, Planet. and Space Sci., **11**, 269 (1963).
25. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
26. Р. Гуди, Физика стратосферы, Гидрометеоиздат, Л., 1958.
27. L. F. Stafford, C. W. Tolbert, J. Geoph. Res., **68**, 3431 (1963).
28. А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 4, 668 (1965).
29. А. Д. Кузьмин, УФН, **90**, 303 (1966).
30. M. J. S. Belton, D. M. Hunten, Astroph. J., **146**, 307 (1966).
31. H. Spinrad, S. J. Shawl, Astroph. J., **146**, 328 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 июля 1966 г.,
после доработки
23 февраля 1967 г.

ON VENUS RADIATION SPECTRUM IN MILLIMETER RANGE

A. P. Naumov, M. B. Kanevskii

For a number of models of the Venus atmosphere, the brightness temperature, T_{br} (in Russian text T_{λ}), has been calculated in $\nu=48 \pm 72$ Gc/s range in which the presence of a thin structure of the planet radiation spectrum caused by molecular oxygen may be expected. In some cases the brightness temperature is found to fall at the resonance frequencies by $\approx 20-90^{\circ}\text{K}$, due to oxygen presence. It is noted that the experimental information of the physical conditions on the planet may be obtained in the spectral region $\nu \approx 48 \pm 72$ Gc/s.

УДК 629.195 : 621.371.32

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЯРНОЙ ИОНОСФЕРЫ ПО РАДИОСИГНАЛАМ ИСЗ «ЭКСПЛОРЕР-22»

Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, В. А. Череповицкий

Приводятся результаты измерений интегральной электронной концентрации в ионосфере N_{nc} путем регистрации разности фаз сигналов когерентных частот 20,005 и 40,010 Мгц ИСЗ «Эксплорер-22» в Лопарской. Наблюдения проводились в период с 28 августа по 24 декабря 1965 г. Рассмотрены суточный и сезонный ход различных параметров приполярной ионосферы, а также зависимость этих параметров от солнечной и магнитной активности.

Измерения интегральной электронной концентрации в ионосфере методом наземного приема сигналов ИСЗ, дополненные данными станций вертикального зондирования ионосферы, позволяют определять ряд параметров, характеризующих распределение электронной концентрации выше максимума слоя F [1]. До последнего времени изучение ионосферы таким методом проводилось в основном в средних широтах. Запуск специального ионосферного спутника «Эксплорер-22» с почти круговой и близкой к полярной орбитой ($h_{пер} = 890$ км, $h_{ап} = 1070$ км, $\varphi = 79^{\circ}, 69$) позволил организовать наблюдения за полярным кругом.

В 1965 г. появились работы [2, 3], в которых отмечаются особенности широтной зависимости интегральной электронной концентрации в приполярных районах по сравнению со средними широтами.

Как показали результаты наблюдений за ИСЗ «Эксплорер-22» в Лопарской, имеется также целый ряд особенностей в суточном и сезонном ходе различных параметров ионосферы, которые показывают некоторое отличие процессов образования, рекомбинации и переноса зарядов в приполярной ионосфере и в ионосфере средних широт.

В настоящей статье приводятся результаты таких наблюдений, выполненных экспедицией НИРФИ во второй половине 1965 г. В процессе наблюдений на кинопленку регистрировалась приведенная разность фаз сигналов когерентных частот 20,005 и 40,010 Мгц ИСЗ «Эксплорер-22». Аппаратура и методика наблюдений не отличались от предыдущих экспериментов [4].

Обработка результатов наблюдений проводилась по методике, изложенной в работах [1, 4].

За период с 28 августа по 24 декабря 1965 г. было проведено около 600 сеансов наблюдений и обработано более 400 записей разности фаз сигналов когерентных частот. Уже визуальный просмотр этих записей показывает их качественное отличие от аналогичных записей на средних широтах. Записи на средних широтах в основном носят характер монотонного изменения разности фаз с небольшими флуктуациями, обусловленными ионосферными неоднородностями, которые наиболее отчетливо проявляются в ночное время. Что же касается записей в Лопарской, то для них характерна как раз немонотонность изменения разности фаз, указывающая на присутствие в ионосфере весьма интенсивных неоднородностей электронной концентрации как в дневное, так

и в ночное время. Мы не будем, однако, касаться здесь вопроса о неоднородной структуре полярной ионосферы, поскольку он должен быть предметом специального изучения.

Для того, чтобы получить сведения о регулярной структуре ионосферы, проводилось сглаживание нерегулярных изменений разности фаз; для дальнейшей обработки использовались осредненные зависимости разности фаз от времени. Часть сеансов не удалось обработать таким способом, поскольку невозможно было выделить монотонный ход разности фаз.

Для каждого сеанса, пригодного к обработке, рассчитывались эфемериды спутника и вычислялась величина интегральной электронной концентрации до высоты спутника $N_{nc} = \int_0^{z_c} N dz$ в момент верхней кульминации.

На рис. 1 показаны полученные таким образом значения N_{nc} в зависимости от времени суток (здесь и далее используется московское декретное время). Время наблюдений смешалось от вечерних и дневных часов в августе к ночным и утренним часам в декабре месяце. Относительно большой разброс отдельных значений N_{nc} объясняется как наличием сезонного хода, так и различным состоянием ионосферы в разные дни наблюдений.

Изменение высоты спутника мало оказывается на разбросе величины N_{nc} . Действительно, максимальное изменение высоты спутника $\Delta z = \pm 90 \text{ км}$, что при концентрации $N \approx 10^5 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ на высоте 1000 км соответствует $\Delta N_{nc} \approx \pm 9 \cdot 10^{11} \text{ эл} \cdot \text{см}^{-2}$. Это значение ΔN_{nc} существенно меньше наблюдаемого разброса величины N_{nc} (рис. 1). Ошибки вычислений отдельных значений N_{nc} не превышают $\pm 10\%$.

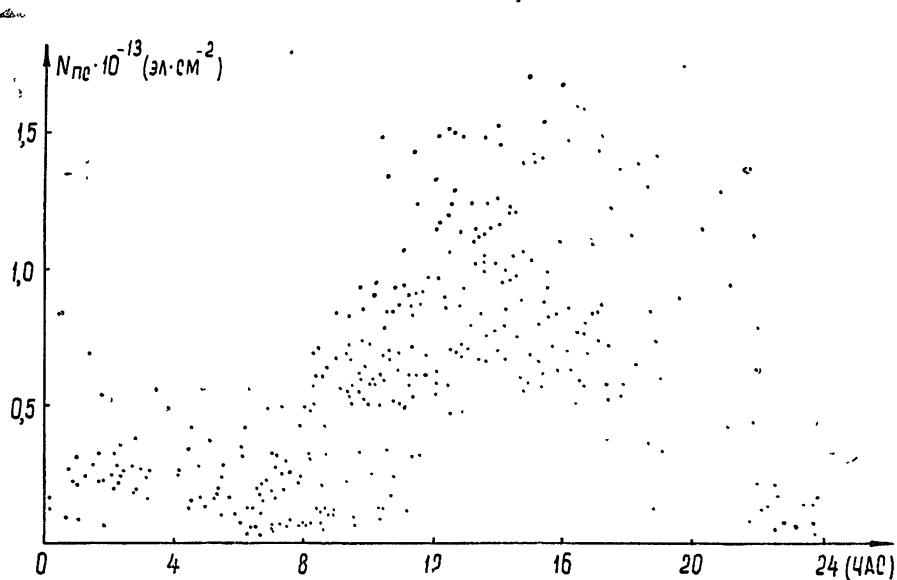


Рис. 1.

Почти для всех обработанных сеансов наблюдений мы располагали ионограммами автоматической ионосферной станции ПГИ (г. Мурманск), причем разница времени сеанса наблюдений ИСЗ и момента съемки ионограммы не превышала 10 минут. Это давало возможность

вычислить высоту максимума слоя F z_{\max} , интегральную концентрацию электронов до максимума слоя F $N_{nb} = \int_0^{z_{\max}} N dz^*$. На рис. 2 приведены усредненные за каждый час значения N_{\max} , N_{nb} , N_{nc} и $N_{n\infty} = \int_0^{\infty} N dz^{**}$ отдельно для августа—сентября (сплошная линия), октября (пунктир) и ноября—декабря (крестики) месяцев.

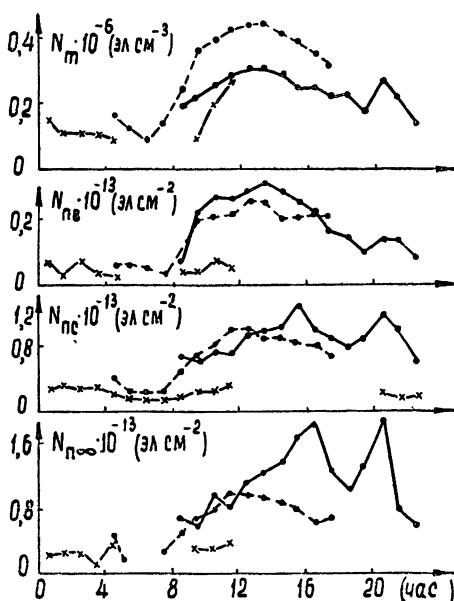


Рис. 2.

Количественные характеристики эффективной толщины ионосферы показаны на рис. 3. Здесь приведены усредненные за каждый час значения полной толщины ионосферы $\tau = N_{n\infty}/N_{\max}$ (пунктир) и эффективной толщины выше максимума F -слоя $H = (N_{n\infty} - N_{nb})/N_{\max}$ (сплошная линия). Качественно кривые H и τ подобны, однако значения H на 50—100 км меньше τ . Отчетливо виден сезонный ход эффективной толщины ионосферы. Если в августе—сентябре (точки на рис. 3) имеется отчетливый максимум τ в вечерние часы, то в октябре (кружки) величина τ меньше и имеет более плавный суточный ход. Значения τ в ноябре—декабре (крестики) имеют нерегулярный суточный ход; средняя величина $\tau \approx 250$ км.

Как известно, результаты измерений величины N_{nc} относятся к вертикальному разрезу ионосферы в месте пересечения траектории волны с «центром тяжести» ионосферного слоя (так называемая «ионосферная точка» [4]).

Географические координаты «подионосферной точки» для каждого

* Обработка ионограмм производилась на электронно-вычислительной машине.

** Величина $N_{n\infty} = \int_0^{\infty} N dz$ вычислялась в предположении экспоненциального спадания электронной концентрации выше максимума слоя F [4].

Величины $N_{n\infty}$ несколько больше значений N_{nc} и в 3—6 раз превышают значения N_{nb} . Отчетливо виден как суточный, так и сезонный ход параметров, характеризующих состояние ионосферы. Графики интегральных величин N_{nc} , $N_{n\infty}$ и N_{nb} качественно подобны. Что касается значений электронной концентрации в максимуме слоя N_{\max} , то в дневные часы сезонный ход этого параметра существенно отличается от сезонного хода интегральных величин. Если значения N_{\max} в октябре были существенно больше значений в августе—сентябре, то для интегральных характеристик наблюдается обратная картина. Это означает, что эффективная толщина ионосферы в октябре месяце меньше, чем в августе—сентябре.

прохождения ИСЗ в момент его верхней кульминации различны и перекрывают интервал широт $67\text{--}74^\circ$ с. ш. Для того, чтобы в какой-то мере исключить широтный эффект, была построена зависимость N_{nc} от угла возвышения Солнца над горизонтом χ для высоты 400 км над Землей с учетом географической широты «подъемносферной точки».

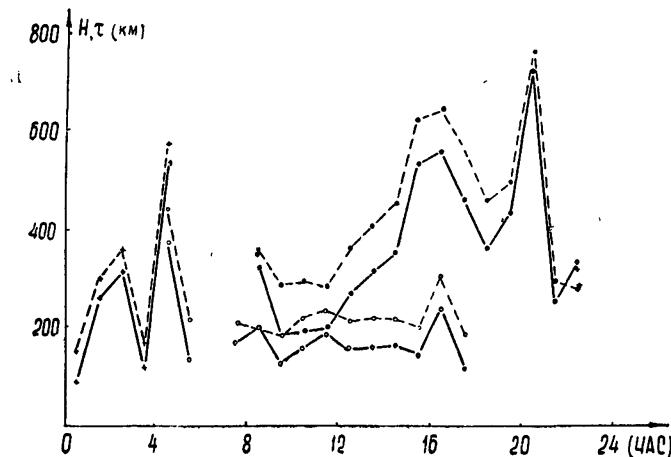


Рис. 3.

На рис. 4 приведена зависимость N_{nc} от χ (слева для дополуденных часов, справа—для соответствующих углов возвышения в послеполуденные часы). Линиями соединены осредненные в интервале $\Delta\chi = 4^\circ$ значения N_{nc} отдельно для периодов август—сентябрь (кривая 1), октябрь (кривая 2), ноябрь—декабрь (кривая 3).

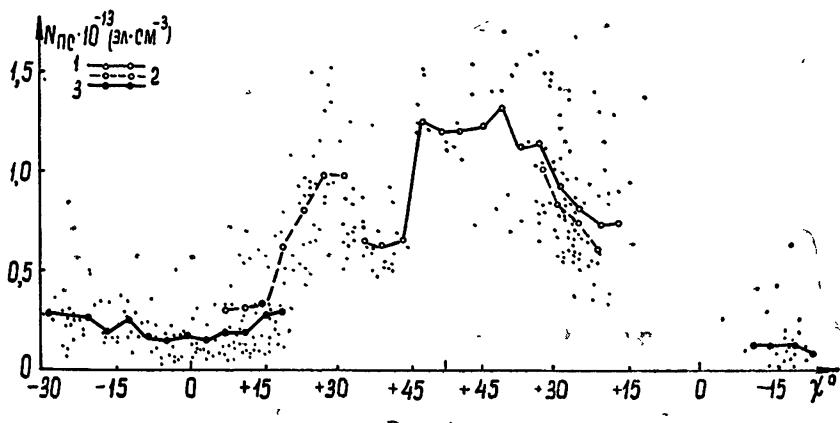


Рис. 4.

На этом рисунке видна общая тенденция возрастания электронной концентрации с ростом угла возвышения Солнца над горизонтом. Ярко выражен суточный и сезонный ход. Интересная особенность имеется в зависимости интегральной электронной концентрации $N_{nc}(\chi)$ для дополуденных часов ноября—декабря месяцев (кривая 3).

Минимальные значения $N_{nc}=0,12 \cdot 10^{13} \text{ эл}\cdot\text{см}^{-3}$ наблюдались, когда Солнце находилось вблизи горизонта ($\chi \approx \pm 10^\circ$). При углах $\chi=-20\text{--}-10^\circ$

-30° (Солнце за горизонтом)* и $\gamma = +15 \div +20^\circ$ (Солнце над горизонтом) величина N_{nc} увеличивается примерно вдвое.

На рис. 5 представлены кривые, характеризующие распределение электронной концентрации с высотой в различные периоды суток. Нижняя часть $N(h)$ профилей рассчитывалась по данным станции вертикального зондирования ПГИ на электронно-вычислительной машине для каждого пролета спутника.

При построении профилей $N(h)$ предполагалось, что электронная концентрация спадает по экспоненциальному закону с соответствующим для каждого сеанса наблюдений значением приведенной высоты H . На рисунке 5 представлены усредненные по всем пролетам спутника профили для различных периодов суток.

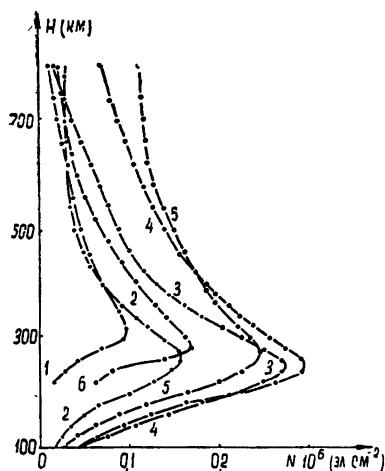


Рис. 5. Распределение электронной концентрации с высотой в различное время суток:

- 1—00—04 час, $z_{\max} = 329,4, N_{\max} = 0,1109$;
- 2—04—08 час, $z_{\max} = 275,6, N_{\max} = 0,1743$;
- 3—08—12 час, $z_{\max} = 254,2, N_{\max} = 0,294$;
- 4—12—16 час, $z_{\max} = 253, N_{\max} = 0,3025$;
- 5—16—20 час, $z_{\max} = 261,4, N_{\max} = 0,258$;
- 6—20—24 час, $z_{\max} = 305,4, N_{\max} = 0,1723$.

В ночные часы (00—04 час, кривая 1) концентрация в F -слое минимальна, днем (12—16 час, кривая 4) концентрация существенно возрастает на всех высотах. Высота максимума слоя F понижается при переходе от ночного времени к дневному. В полночь значение максимальной концентрации $\bar{N}_{\max} \approx 0,11 \cdot 10^6 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$, высота максимума $z_{\max} \approx 330 \text{ км}$; в полуденные часы $\bar{N}_{\max} \approx 0,3 \cdot 10^6 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$, $z_{\max} \approx 250 \text{ км}$. Отметим, что на высотах 600—800 км ночью и утром концентрация электронов мало меняется от времени суток (кривые 1, 2, 3, 6). Исключение представляют кривые 4, 5, относящиеся к интервалу с 12 до 20 часов.

При рассмотрении суточной зависимости интегральной электронной концентрации до высоты спутника N_{nc} обращалось внимание на существенный разброс значений N_{nc} на рис. 1. Подобный разброс имеется, естественно, и для других параметров, характеризующих распределение электронной концентрации в ионосфере.

Интересно сопоставить наши данные с солнечной и магнитной активностью, а также с результатами одновременных измерений поглощения радиоволн радиоастрономическим методом. На рис. 6 представлены полуденные значения N_{nc} для каждого дня наблюдений в период сентябрь—октябрь (верхняя кривая), а также осредненные за сутки значения числа солнечных пятен W , суммарного k -индекса в Лопарской и аномального поглощения космического радиоизлучения

* Здесь имеется в виду горизонт на высоте 400 км от Земли.

на частоте 9 Мгц*. По оси абсцисс отложены числа соответствующего месяца. Из рисунка видна некоторая положительная корреляция величины N_{nc} с числом солнечных пятен W . С возрастанием солнечной активности наблюдается увеличение электронной концентрации в ионосфере. Этот эффект несколько менее выражен в приполярной области, чем на средних широтах [5], поскольку в полярных районах процессы ионообразования и переноса зарядов качественно отличаются от явлений на средних широтах. В ночное время зависимость N_{nc} от W отсутствует.

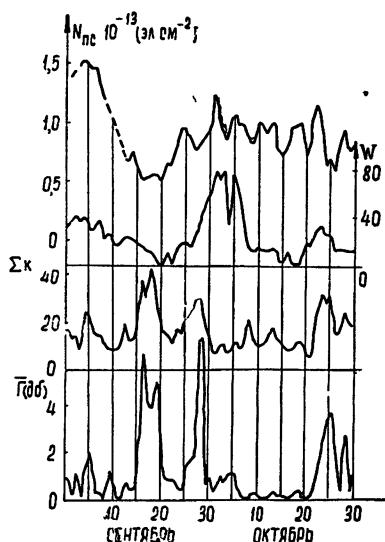


Рис. 6.

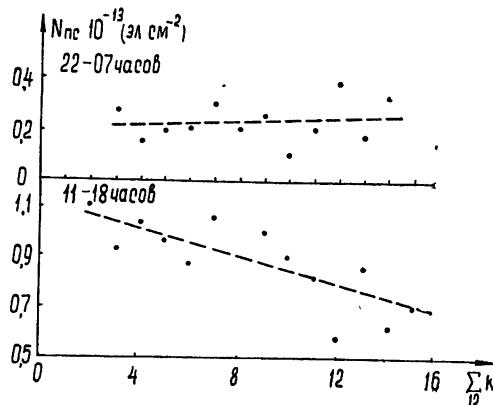


Рис. 7.

Из рисунка 6 также видно, что в дневные часы имеется заметная отрицательная корреляция N_{nc} от суммарного k -индекса. Отрицательная корреляция наблюдается также между концентрацией электронов в слое F и поглощением космического радиоизлучения. На рисунке 7 приведена зависимость полной электронной концентрации до высоты спутника N_{nc} от 12-часового k -индекса $\sum_{12} k$ по данным станции

в Лопарской. При этом $\sum_{12} k$ вычислялся за 12 часов, предшествующих каждому сеансу наблюдений. На рисунке приведены средние для данного $\sum_{12} k$ значения N_{nc} . В дневное время (11–18 час) величина

N_{nc} убывает с ростом магнитной возмущенности. Что касается ночных (22–07 час) значений N_{nc} , то явной зависимости не обнаруживается. Таким образом, зависимость интегральной электронной концентрации от магнитной активности существенно различна для дневных и ночных часов.

Авторы пользуются случаем поблагодарить З. Ц. Рапопорта за помощь в организации наблюдений в Лопарской и за предоставленную возможность использовать данные автоматической ионосферной станции ПГИ.

* Авторы благодарят Е. А. Бенедиктова за любезно предоставленные данные из готовящейся к печати работы по наблюдениям аномального поглощения в приполярной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 5, 858 (1963).
2. L. Liszka, Acta Geoph. Pol., 13, № 4, 221 (1965).
3. L. Liszka, Nature, 208, 5007, 280 (1965).
4. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Космические исследования, 4, вып. 2, 249 (1966).
5. R. V. Bousle, Aldov da Rosa and O. K. Garriott, Radio Science Journ. of Res NBS/USNE, URSI, 69D, № 7 929 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 сентября 1966 г.

RESULTS OF POLAR IONOSPHERE INVESTIGATION BY MEANS OF
"EXPLORER-22" RADIO SIGNALS

E. E. Mityakova, N. A. Mityakov, V. A. Cherepovitskii

The measurement data on an integral electron density in the ionosphere N_{ne} are given by means of recording the phase difference of coherent frequencies 20.005 and 40.010 Mc/s from "Explorer-22" in Loparskoy. The observations were carried out during 28 August to 24 December 1965. A diurnal and seasonal variations of different parameters of the polar ionosphere has been considered, as well as the dependence of these parameters on the solar and magnetic activity.

УДК 621.371.162

ОБ ОТРАЖЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ФРОНТА ИОНИЗАЦИИ

B. I. Семенова

Рассматривается отражение плоских электромагнитных волн при нормальном падении на резкую границу плазмы, образованной движущимся источником ионизации. Найден коэффициент отражения от плазменного полупространства, в котором концентрация плазмы за фронтом остается постоянной или нарастает под действием источника. Исследуется также отражение от движущейся границы, за которой концентрация убывает в результате рекомбинации или прилипания электронов. Вычислен коэффициент отражения от слоя конечной толщины с постоянной плотностью заряженных частиц.

Отражение электромагнитных волн от области с повышенной концентрацией заряженных частиц, которая может возникнуть под действием ионизирующего излучения, распространяющегося в неподвижном газе, рассматривалось в работе [1]. Исследование проводилось в предположении, что концентрация плазмы представляет собой медленно меняющуюся функцию координат и времени $N(x - Vt)$ (V — скорость движения фронта ионизации), так, что изменение частоты падающей и отраженной волн, а также коэффициент отражения определялись в приближении геометрической оптики, за исключением окрестности точки отражения, где было найдено более точное решение.

Вместе с тем, представляет интерес исследование отражения, связанного с наличием резких изменений концентрации заряженных частиц. Такие изменения могут иметь место, например, при ионизации газа за фронтом ударной волны.

В настоящей работе рассматривается отражение поперечных электромагнитных волн при нормальном падении на границу плазменного полупространства, образованного движущимся источником ионизации. Предполагается, что концентрация плазмы в каждой точке изменяется скачком в момент прихода фронта ионизации, а затем остается постоянной или продолжает нарастать в зависимости от характера действующего источника. Получен коэффициент отражения от движущегося слоя конечной толщины с постоянной плотностью электронов, а также исследован вопрос об отражении от плазмы с резким скачком на границе, за которым концентрация заряженных частиц уменьшается из-за рекомбинации или прилипания электронов.

1. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПЛАЗМЫ С ПОСТОЯННОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЗА ФРОНТОМ ИОНИЗАЦИИ

Предположим, что интенсивность источника ионизации, движущегося с постоянной скоростью V_0 вдоль оси x , представляет собой δ -функцию

$$\frac{\partial N}{\partial t} = N_0 \delta(x + V_0 t), \quad (1)$$

т. е. концентрация заряженных частиц изменяется скачком и становится равной N_0 в момент прихода источника в точку x . Будем считать, что скорость образующихся в результате ионизации электронов в начальный момент равна нулю. При таком предположении электроны в каждой точке имеют постоянную составляющую скорости, определяемую фазой поля в данной точке в момент ионизации, и, следовательно, совершают равномерное движение в направлении поля.

Рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны, распространяющейся навстречу ионизирующему излучению, от резкой границы плазмы, расположенной за фронтом ионизации. В этом случае задачу об отражении удобнее решать в системе координат, движущейся вместе с фронтом (в этой системе граница плазменного полу-пространства неподвижна), так как в лабораторной системе отсчета имеются трудности, связанные с определением граничных условий на движущейся границе раздела и невозможностью использовать формулы Минковского, справедливые только в стационарном случае.

При нормальном падении волны на границу плазмы задача является одномерной и в движущейся системе координат уравнения Максвелла для поля $E = E_y$ и $B = B_z$ в области, занятой плазмой ($x \geq 0$), имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi\partial j}{c^2 \partial t}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь ось x перпендикулярна границе раздела, оси y и z выбраны по направлению электрического и магнитного полей, j —поперечная составляющая плотности тока, равная

$$j = eNv, \quad (4)$$

где e — заряд электрона, N — концентрация электронов плазмы в движущейся системе координат, связанная с концентрацией N_0 в лабораторной системе отсчета соотношением $N = N_0/\sqrt{1-\beta^2}$ ($\beta = V_0/c$), v — скорость вынужденного движения электронов в движущейся системе. Эта скорость может быть найдена из уравнения движения электронов

$$\frac{dv}{dt} + V_0 \frac{dv}{dx} = -\frac{e}{m} \left(E + \frac{V_0}{c} B \right), \quad (5)$$

записанного с учетом того, что скорость электронов в движущейся системе координат складывается из скорости V_0 равномерного движения плазмы как целого по отношению к выбранной системе и скорости v под действием поля. Уравнение (5) получено в предположении, что

$$v \ll V_0,$$

масса электрона $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ (m_0 — масса покоя).

Для монохроматического поля $\exp(i\omega t)$ система (2) — (5) преобразуется к виду

$$E'' + \frac{\omega^2}{c^2} E = \frac{\omega_L^2}{c^2} U; \quad (6)$$

* Тот факт, что в уравнение движения вдоль направления силы входит так называемая «поперечная» масса, является следствием предположения $v \ll V_0$.

$$U' + i\alpha U = E' + i\alpha E, \quad (7)$$

где

$$\omega_L^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad \alpha = \frac{\omega}{V_0}, \quad U = \left(\frac{e}{m} \right)^{-1} (i\omega) v, \quad (8)$$

а функции E , v и U зависят только от x (штрих обозначает соответствующие производные по x).

Далее предположим, что ионизация происходит в газе, неподвижном относительно лабораторной системы отсчета, и будем считать, что в этой системе координат скорости электронов в момент ионизации равны нулю. Это означает, что в движущейся системе координат скорость вынужденного движения электронов обращается в нуль на границе: $v(0) = 0$.

Из системы уравнений (6) — (7) определим поле в плазме, полагая известными поле $E(0)$ и его производную $E'(0)$ на границе и учитывая, что $U(0) = 0$ при $v(0) = 0$ в соответствии с (8).

Согласно (6),

$$U = E - E(0) \exp(-i\alpha x), \quad (9)$$

и подставляя (9) в (6), получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$E'' + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E = -\frac{\omega_L^2}{c^2} E(0) \exp(-i\alpha x). \quad (10)$$

Здесь

$$\epsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2. \quad (11)$$

Решение (10) может быть представлено в виде суммы трех волн:

$$E = C_1 \exp\left(-i\frac{\omega}{c} V_\epsilon^- x\right) + C_2 \exp\left(i\frac{\omega}{c} V_\epsilon^- x\right) + \beta^2 \frac{1-\epsilon}{1-\beta^2 \epsilon} \times \\ \times E(0) \exp(-i\alpha x), \quad (12)$$

C_1 и C_2 определяются через $E(0)$ и $E'(0)$ на границе $x = 0$.

Особенностью полученного решения в системе координат, движущейся вместе с фронтом, является появление третьей волны с волновым числом $k_3 = \alpha$, распространяющейся от границы в глубь плазмы с фазовой скоростью V_0 (см. (8)). В этом заключается существенное отличие от случая стационарной плазмы, движущейся с постоянной скоростью [3], в котором в системе координат, неподвижной относительно границы плазменного полупространства, существуют только волны с волновыми

числами $k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{c} V_\epsilon^-$.

Появление третьей волны в движущейся системе координат в рассматриваемом нами случае связано с особенностями движения электронов, образующихся за фронтом ионизации. В лабораторной системе отсчета этой волне соответствует равномерное движение электронов со скоростями, определяемыми в каждой точке фазой поля в момент ионизации. Как будет показано ниже, с этим движением электронов связаны особенности отражения электромагнитных волн от фронта ионизации по сравнению с отражением от движущейся плазмы.

Чтобы найти коэффициент отражения электромагнитной волны, падающей навстречу фронту ионизации, необходимо знать, как изменяются векторы E и \dot{B} при переходе через границу. Из уравнений Максвелла нетрудно получить, что на неподвижной границе в движущейся

вместе с фронтом системы координат тангенциальные компоненты векторов E и B меняются непрерывно. Непрерывное изменение B_t при переходе через границу является следствием предположения о нулевых начальных скоростях электронов при ионизации, в результате чего ток на границе равен нулю.

Из условия непрерывности тангенциальных компонент E и B на границе в движущейся системе координат найдем коэффициент отражения [4]

$$R = \left| \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} \right| = \left(\frac{1 - cz(\omega)/4\pi}{1 + cz(\omega)/4\pi} \right), \quad (13)$$

где $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{отр}}$ — соответственно амплитуды падающей и отраженной волн (считаем, что волна падает со стороны $x = -\infty$ навстречу фронту ионизации); $z(\omega)$ — импеданс системы:

$$z(\omega) = -i \frac{\omega}{c} 4\pi \frac{E(0)}{E'(0)}. \quad (14)$$

Чтобы найти отношение $E(0)/E'(0)$, следует исключить из рассмотрения волну, распространяющуюся в плазме со стороны $x = \infty$, положив амплитуду ее равной нулю (предполагаем, что на бесконечности источников нет). В результате получим

$$\frac{c}{4\pi} z(\omega) = - \frac{1 - \beta^2 \epsilon}{V \epsilon (1 - \beta^2) - \beta (1 - \epsilon)}. \quad (15)$$

В зависимости от соотношения между ω и ω_L возможны два случая: $\omega < \omega_L$ и $\omega > \omega_L$. При $\omega > \omega_L$, когда $\epsilon > 0$, коэффициент отражения равен

$$R = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \frac{1 - V \epsilon}{1 + V \epsilon}. \quad (16)$$

В случае $\omega < \omega_L$, т. е. при $\epsilon < 0$,

$$R = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \quad (17)$$

Используя (16), (17) и формулы Лоренца для преобразования полей в вакууме при переходе из одной системы координат в другую, найдем коэффициент отражения в лабораторной системе отсчета

$$R = \left| \frac{E_{\text{отр}}^{(0)}}{E_{\text{пад}}^{(0)}} \right|. \quad (18)$$

Индекс (0) указывает, что величины рассматриваются в лабораторной системе координат. При $\omega > \omega_L$

$$R = \frac{1 - V \epsilon}{1 + V \epsilon},$$

где $\epsilon = 1 - \omega_L^2/\omega^2$ в соответствии с (11), а в случае $\omega < \omega_L$ коэффициент отражения

$$R = 1.$$

Таким образом, условием полного отражения от фронта ионизации является $\omega \ll \omega_L$. Следует заметить, что в приведенном неравенстве

частоты ω и ω_L относятся к движущейся системе координат. Если $\omega_{\text{пад}}^{(0)}$ — частота падающей волны в лабораторной системе, то на основании инвариантности фазы относительно преобразования Лорентца

$$\omega_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega_{\text{пад}}^{(0)}. \quad (19)$$

Плазменная частота при переходе из одной системы координат в другую не меняется. Действительно, в лабораторной системе отсчета

$$\omega_L^{(0)} = 4\pi e^2 N_0 / m_0, \quad \omega_L^2 = 4\pi e^2 N / m,$$

и в силу того, что $N = N_0 / \sqrt{1-\beta^2}$, $m = m_0 / \sqrt{1-\beta^2}$,

$$\omega_L = \omega_L^{(0)}.$$

Следовательно, в неподвижной системе координат коэффициент отражения достигает наибольшего значения, равного единице, при выполнении следующего соотношения между плазменной частотой и частотой падающей волны:

$$\omega_{\text{пад}}^{(0)} \leq \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \omega_L^{(0)}. \quad (20)$$

Что касается модуля коэффициента отражения R , то отражение происходит как от неподвижной границы, но коэффициент отражения определяется свойствами плазмы в движущейся системе координат (см. (11)). Это аналогично отражению от движущейся плазмы, когда коэффициент отражения $R = [(1+\beta)/(1-\beta)][(1-\sqrt{\epsilon})/(1+\sqrt{\epsilon})]$ также зависит от диэлектрической проницаемости плазмы в движущейся системе отсчета [3].

Энергия волнового пакета при отражении от резкого фронта ионизации уменьшается, как и при отражении от слоя с плавно нарастающей концентрацией за фронтом [1]. Наиболее просто показать, что происходит уменьшение энергии волнового пакета, в случае полного отражения, когда коэффициент отражения $R = 1$ не зависит от частоты. Энергия пакета прямо пропорциональна квадрату амплитуды поля и длительности волнового пакета. При $R = 1$ длительность отраженного сигнала изменяется по сравнению с длительностью падающей обратно пропорционально частотам отраженной и падающей волн. Так как частота отраженной волны увеличивается по сравнению с частотой падающей:

$$\omega_{\text{отр}}^{(0)} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \omega_{\text{пад}}^{(0)},$$

то энергия волнового пакета при полном отражении уменьшается в $(1-\beta)/(1+\beta)$ раз. Уменьшение энергии при отражении от фронта ионизации связано с тем, что часть энергии падающего волнового пакета переходит в энергию равномерного движения электронов в поперечном направлении, которому в движущейся системе соответствует третья волна $k_3 = \alpha$. При полном отражении от движущейся плазмы, наоборот, происходит увеличение энергии отраженного волнового пакета за счет того, что электромагнитная волна отбирает энергию у движущейся плазмы (см. [3]).

2. ОТРАЖЕНИЕ ОТ СЛОЯ С ПЛАВНЫМ НАРАСТАНИЕМ КОНЦЕНТРАЦИИ ЗА РЕЗКИМ СКАЧКОМ НА ГРАНИЦЕ

Допустим, что интенсивность источника ионизации представляется собой такую произвольную функцию $\partial N/\partial t = J(x + V_0 t)$, что концентрация заряженных частиц в каждой точке резко возрастает в момент прихода источника, а затем продолжает медленно увеличиваться по мере удаления фронта ионизирующего излучения. Очевидно, в отличие от предыдущего случая плотность тока, связанного с вынужденным движением электронов, в движущейся системе координат нельзя записать в виде $j = -eNv$, так как отдельные электроны в данной точке имеют различные скорости в зависимости от того, в какой момент они образовались (мы по-прежнему предполагаем, что в лабораторной системе отсчета скорость электронов в момент ионизации равна нулю). Чтобы найти плотность тока, можно представить движущийся произвольный источник ионизации как совокупность δ -источников $J_i = \Delta N_i \delta(x + V_0 t_i)$, каждый из которых изменяет концентрацию заряженных частиц на ΔN_i в момент прихода t_i в рассматриваемую точку x . В движущейся системе координат скорость электронов ΔN_i , согласно (9),

$$U_i = E - E(x_i) \exp[-ia(x - x_i)],$$

где $x - x_i$ — расстояние, на котором электроны J_i -источника имеют нулевые скорости.

Определяя плотность тока j как сумму $e \sum_i \Delta N_i v_i$ и заменяя суммирование интегрированием, получим

$$j = \frac{e^2}{m} (i\omega)^{-1} \left\{ NE - \exp(-iax) \left[\int_0^x \frac{dN}{dx} E \exp(iax) dx - N(0) E(0) \right] \right\}, \quad (21)$$

$N(0)$ — скачок концентрации электронов на фронте ионизации.

Система (2) — (3) с учетом (21) преобразуется к следующему уравнению для поля E :

$$E'' + \frac{\omega^2}{c^2} E = \frac{\omega_L^2}{c^2} E - \frac{4\pi e^2}{m} \exp(-iax) \left[\int_0^x \frac{dN}{dx} E(x) \exp(iax) dx - N(0) E(0) \right]. \quad (22)$$

Будем считать, что изменение концентрации в плазме за скачком на границе происходит достаточно медленно, так что решение уравнения (22) можно искать в приближении геометрической оптики всюду, за исключением области, где $\epsilon(x) = 1 - 4\pi e^2 N(x)/m\omega^2 \approx 0$. Умножая обе части уравнения на $\exp(iax)$ и дифференцируя по x , получим уравнение третьего порядка

$$E''' + iaE'' + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E' + ia \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E = 0, \quad (23)$$

решением которого в области применимости геометрооптического приближения является

$$E = C_1 \frac{1}{\epsilon^{1/4}(1-\beta\sqrt{\epsilon})} \exp \left(-i \frac{\omega}{c} \int_0^x \sqrt{\epsilon} dx \right) + \dots \quad (24)$$

$$+ C_2 \frac{1}{\epsilon^{1/4}(1+\beta V_\epsilon)} \exp \left(i \frac{\omega}{c} \int_0^x V_\epsilon dx \right) + C_3 \exp(-i\alpha x).$$

Постоянные C_1 , C_2 и C_3 можно определить считая заданными на границе $E(0)$, $E'(0)$ и принимая во внимание, что $E''(0) = -\omega^2 E(0)/c^2$. Проследнее условие можно получить из (22) при $x = 0$.

Поле в плазме (24) имеет ту особенность, что амплитуда C_3 волны с волновым числом $k_3 = \alpha$ не зависит в приближении геометрической оптики от координаты и определяется только условиями на границе:

$$C_3 = \beta^2 \frac{1 - \epsilon(0)}{1 - \beta^2 \epsilon(0)} E(0). \quad (25)$$

Если нет скачка $N(0)$ ($\epsilon(0) = 1$), т. е. концентрация в слое нарастает, начиная с нулевого значения, то волны $k_3 = \alpha$ в плазме не возникает. От величины $N(0)$ зависят и другие особенности поля в плазме. Когда $N(0)$ настолько велико, что $\epsilon(0) < 0$, постоянная $C_2 = 0$ — нет волны, амплитуда которой нарастала бы при $x \rightarrow \infty$. В этом случае коэффициент отражения в лабораторной системе координат

$$R = 1,$$

как и при отражении от плазменного полупространства с постоянной концентрацией N_0 и $\epsilon < 0$.

Если $\epsilon(0) > 0$ и в области $x > 0$ концентрация заряженных частиц не достигает таких значений, чтобы $\epsilon \leq 0$, то в плазме отражения не происходит, существуют только две волны с амплитудами C_1 и C_3 , распространяющиеся в сторону $x = \infty$. Отражение происходит только от границы, и коэффициент отражения равен

$$R = \frac{1 - V_\epsilon(0)}{1 + V_\epsilon(0)}.$$

Волна с волновым числом $k_3 = \frac{\omega}{c} \int_0^x V_\epsilon dx$ имеет отличную от нуля амплитуду C_2 только при наличии отражения от точки $\epsilon = 0$. В малой окрестности этой точки слой плазмы можно считать линейным и найти связь между C_1 и C_2 , используя точное решение уравнения (23) для такого слоя (см., например, [5]):

$$C_2 = C_1 \exp(-i\varphi),$$

где

$$\varphi = 2 \frac{\omega}{c} \int_0^x V_\epsilon dx.$$

Определяя затем

$$\frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{1 + V_\epsilon(0) + (1 - V_\epsilon(0)) \exp(i\varphi)}{(1 + V_\epsilon(0)) \exp(i\varphi) + (1 - V_\epsilon(0))}, \quad (26)$$

легко получить коэффициент отражения в движущейся системе координат

$$R = \left| \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} \right| = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

и в неподвижной системе отсчета

$$R = 1.$$

Таким образом, при наличии точки отражения за фронтом ионизации происходит полное отражение электромагнитной волны от плазмы, образованной ионизирующим излучением. Однако в зависимости от расстояния этой точки до границы изменяется только фаза отраженной волны по отношению к падающей. Коэффициент отражения по модулю остается постоянным и равен единице.

3. ОБ УЧЕТЕ ПРОЦЕССОВ, ПРИВОДЯЩИХ К УМЕНЬШЕНИЮ КОНЦЕНТРАЦИИ ПЛАЗМЫ ЗА ФРОНТОМ

В общем случае плотность плазмы, образующейся под действием ионизирующего излучения, определяется не только интенсивностью ионизации J , а зависит также от рекомбинации, прилипания или других процессов, которые уменьшают концентрацию заряженных частиц. Однако найти плотность тока с одновременным учетом действия этих процессов и источника ионизации довольно сложно; поэтому мы рассмотрим наиболее простой случай δ -источника, когда концентрация заряженных частиц скачком возрастает на фронте, а затем уменьшается из-за прилипания или рекомбинации. По-прежнему полагая начальные скорости электронов в момент ионизации равными нулю и учитывая, что в случае δ -источника все электроны в точке x имеют одинаковую скорость, получим, в соответствии с (9), следующее выражение для плотности тока в движущейся системе координат:

$$j = \frac{e^2}{m} (i\omega)^{-1} N [E - E(0) \exp(-iax)]. \quad (27)$$

Подстановка (27) в (2) — (3) приводит к неоднородному уравнению

$$E'' + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E = -[1-\epsilon] E(0) \exp(-iax), \quad (28)$$

где

$$\epsilon = \epsilon(x) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(x)}{m\omega^2}.$$

При достаточно медленном изменении ϵ в зависимости x применимо геометрооптическое приближение и

$$E = \beta^2 \frac{1-\epsilon}{1-\beta^2\epsilon} E(0) \exp(-iax) + \frac{C_1}{\epsilon^{1/4}} \exp\left(-i \frac{\omega}{c} \int_0^x V \epsilon dx\right) + \\ + \frac{C_2}{\epsilon^{1/4}} \exp\left(i \frac{\omega}{c} \int_0^x V \epsilon dx\right), \quad (29)$$

C_1 и C_2 определяются, как и в (12), по заданным $E(0)$ и $E'(0)$.

В зависимости от величины скачка $N(0)$ на границе возможны различные случаи. Предположим, что скачок концентрации на фронте сравнительно невелик, так что $\epsilon(0) > 0$. Тогда $\epsilon(x) > 0$ всюду при $x > 0$, так как концентрация за фронтом из-за рекомбинации или

прилипания уменьшается. Если это изменение концентрации происходит настолько медленно, что условие применимости приближения геометрической оптики никогда не нарушается, и волна, распространяющаяся со стороны $x = \infty$, отсутствует ($C_2 = 0$), то коэффициент отражения в лабораторной системе отсчета, определяемый с помощью (13) и (14), равен

$$R = \frac{1 - V_\epsilon(0)}{1 + V_\epsilon(0)}.$$

При высокой концентрации $N(0)$, когда $\epsilon(0) < 0$, с уменьшением концентрации за фронтом достигается область, где $\epsilon \approx 0$ и геометрическая оптика становится неприменимой. От точки $\epsilon = 0$ происходит отражение, и $C_2 \neq 0$ между фронтом и точкой отражения. Считая, что всюду, кроме малой окрестности точки отражения, применимо приближение геометрической оптики, и вблизи $\epsilon = 0$, заменяя слой линейным, можно было бы определить поле по обе стороны от точки отражения, в том числе и «просачивание» в область $\epsilon > 0$, лежащую за точкой отражения. Однако точный расчет не приведет, по-видимому, к каким-либо качественно новым особенностям распространения волн в плазме или отражения от границы. Поэтому для простоты мы ограничимся случаем, когда точка $\epsilon = 0$ расположена достаточно далеко от границы. В этом случае волна с амплитудой C_1 сильно затухает в глубь плазмы по мере приближения к области $\epsilon \approx 0$, и можно не учитывать ее отражения, полагая $C_2 = 0$. (Волна с волновым числом $k_3 = \alpha$ не имеет никаких особенностей вблизи $\epsilon = 0$.) Коэффициент отражения в лабораторной системе отсчета в этом случае оказывается равным

$$R = 1.$$

4. ОТРАЖЕНИЕ ОТ СЛОЯ ПЛАЗМЫ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Движущийся слой плазмы конечной толщины в принципе может быть создан ионизирующим излучением, за фронтом которого электроны и ионы существуют в течение конечного промежутка времени, а затем очень быстро исчезают в результате рекомбинации или прилипания. Очевидно, толщина слоя будет определяться в этом случае скоростью движения фронта и временем жизни заряженных частиц. Если интенсивность источника представляет собой δ -функцию, то концентрация плазмы в слое остается постоянной, а поле в области, занятой плазмой, определяется выражением (12) в системе координат, движущейся вместе со слоем.

При определении коэффициента отражения используем непрерывность E и B на границах слоя с учетом того, что от второй границы происходит отражение ($C_2 \neq 0$), а в области за слоем имеется проходящая волна. Несложные, но довольно громоздкие преобразования приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{отр}}^{(0)}}{E_{\text{пад}}^{(0)}} &= (1 - \epsilon) [2\beta V_\epsilon \exp(-i\alpha L) + (1 - \beta V_\epsilon) \exp(i\Delta) - \\ &- (1 + \beta V_\epsilon) \exp(-i\Delta)] \left[-2\beta V_\epsilon (1 - \epsilon) \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \exp(-i\alpha L) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - V_\epsilon)^2 (1 + \beta V_\epsilon) \exp(-i\Delta) + (1 + V_\epsilon)^2 (1 - \beta V_\epsilon) \exp(i\Delta) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $\epsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2$, N — концентрация плазмы в движущейся

системе координат; $L = L^{(0)}(1 - \beta^2)^{-1/2}$, L — толщина слоя в лабораторной системе; $\Delta = \omega \sqrt{\epsilon} L/c$.

Возможен также случай, когда падающая волна догонает слой, т. е. в лабораторной системе отсчета скорость движения источника V_0 и волновой вектор k падающей волны имеют одинаковое направление. При отражении от «убегающего» слоя отношение $E_{\text{отр}}^{(0)}/E_{\text{пад}}^{(0)}$ отличается от (30) только множителем $\exp[i(2\omega L/c - \pi)]$.

Для случая $\epsilon < 0$ в пределе при $L \rightarrow \infty$ формула (30) переходит в выражение для коэффициента отражения от плазменного полупространства, полученное в разделе 1.

Автор выражает глубокую благодарность В. В. Железнякову за руководство работой, А. А. Андронову и М. А. Миллеру за интерес и всестороннее обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, 226 (1961).
2. Р. Беккер, Теория электричества, ГИТТЛ, Л—М, 1941.
3. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, 29, 491 (1959).
4. В. И. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, 1961.
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 сентября 1966 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE REFLECTION FROM IONIZATION FRONT

V. I. Semyonova

Reflection of plane electromagnetic waves is considered at a normal incidence on a sharp plasma boundary formed by a moving source of ionization. There has been found the reflection coefficient of plasma half-space in which the plasma density behind the front remains constant or increases under the source action. Reflection from a moving boundary behind which the density decreases as a result of recombination or electron attachment is also investigated. The coefficient of reflection from a finite-thickness layer with a constant density of charged particles has been calculated.

УДК 681.142 . 535.8

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛУЧЕВОДОВ К ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГАМ ЛИНЗ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ

H. H. Войтович

Описывается метод моделирования на ЭВМ неконфокальных лучеводов со случайными поперечными сдвигами линз. С помощью такого метода моделируются ансамбли линий, и результаты моделирования обрабатываются методами математической статистики. Сравниваются линии с различными фокусными расстояниями. Приведены оптимальные фокусные расстояния в зависимости от среднеквадратичной величины сдвига.

ВВЕДЕНИЕ

Передача электромагнитной энергии в лучеводе сопряжена с неизбежными потерями как из-за ограниченности поперечных размеров квазиоптических элементов, так и вследствие неидеальности лучевода. Если потери первого рода можно почти всегда точно определить из соответствующего интегрального уравнения [1], то потери, вызванные неидеальностью лучевода, носят, как правило, случайный характер. Результаты, полученные в работах [2,3], показывают, что в линии типа линзовой подавляющий вклад в потери второго рода вносят потери из-за случайных поперечных сдвигов фазовых корректоров. Потери того же порядка могут возникнуть даже что при искривлении оси линии [4]*. Однако при небольшом среднем радиусе кривизны искривление можно интерпретировать как совокупность коррелированных поперечных сдвигов корректоров.

В названных работах учитывалось преимущественно лишь преобразование основной волны в волны высших типов и не учитывались обратные преобразования. Поэтому применение полученных результатов ограничено линиями с достаточно высоким уровнем самофильтрации основной волны. Но при наличии соответствующего приемника квазиоптическая линия может работать и с малой самофильтрацией, что имеет место при больших поперечных размерах корректоров. Использование таких корректоров часто бывает выгодно по многим соображениям [4].

Геометрооптический подход [4,6,7], предполагающий концентрацию поля в бесконечно тонком луче, имеет при конечных размерах корректоров ограниченное применение [8]. Представляется целесообразным проводить анализ лучеводов со случайными неоднородностями путем моделирования таких лучеводов на ЭВМ с последующей обработкой результатов моделирования методами математической статистики. Простейшим способом такого моделирования является последовательный пересчет поля с линзы на линзу по принципу Гюйгенса. В работе [5]

* Результаты работы [5], относящиеся к случайным перекосам диафрагм, являются неверными. Там допущена ошибка при выводе итерационного уравнения, в результате чего исследуются фактически линии со случайными изломами оси, а не с перекосами диафрагм. Диафрагменная линия к перекосам не критична [3].

этим методом моделировались перископические и диафрагменные линии с неоднородностями нескольких типов. Однако прямое вычисление возникающих при этом интегралов требует значительных затрат машинного времени, что позволяет моделировать лишь отдельные линии, но не их ансамбли, необходимые для усреднения.

В работах [8, 9] предложены методы моделирования линзовых линий со случайными поперечными сдвигами линз и другими неоднородностями, основанные на разложении поля по собственным волнам некоторой линии сравнения и требующие гораздо меньших вычислительных затрат, чем прямой пересчет по принципу Гюйгенса. Изложенный в [8] метод ниже будет обобщен на неконфокальные линии. Он имеет то преимущество, что не накладывает никаких ограничений на число Френеля, а приведенное ниже его обобщение является эффективным при произвольном значении фокусного расстояния.

Рассматриваемый метод развит для двумерной линзовой линии с квадратичными корректорами. Как видно из [2, 3], в классе таких корректоров должны существовать оптимальные формы, дающие при заданном законе распределения поперечных сдвигов минимальные суммарные потери. В работе [10] найдены фокусные расстояния оптимальных в этом смысле корректоров для небольших чисел Френеля, когда можно пренебречь обратными преобразованиями волн. В настоящей работе приведены некоторые результаты обработки статистического материала, в том числе оптимальные фокусные расстояния при некоторых значениях параметров. Наряду с обобщением, формулы из [8] приведены в виде, более удобном для вычислений.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Рассмотрим двумерную линию, состоящую из заключенных в идеально поглощающие диафрагмы линз (рис. 1а). Пусть каждая из линз сдвинута на некоторое расстояние относительно оси линии, так что центр j -й линзы имеет координаты jL , Δ_j . Диафрагмы жестко связаны с линзами и сдвинуты вместе с ними. Для удобства изложения введем бесразмерную координату

$$\xi = x/x_s, \quad (1)$$

где

$$x_s = \sqrt{L/k} / \sqrt[4]{2\nu - \nu^2}, \quad (2)$$

k — волновое число в пустоте. Параметр ν , общий для всей линии, обратно пропорционален фокусному расстоянию линз и при фокусном расстоянии $L/2$ принимает значение 1. Величину $2x_s$, не зависящую от ширины линзы, в дальнейшем будем называть шириной пятна.

Пусть линзы вносят фазовую коррекцию вида

$$\varphi(\xi - \delta_j) = \sqrt{\frac{\nu}{2-\nu}} (\xi - \delta_j)^2. \quad (3)$$

Здесь ξ — поперечная координата точки в плоскости линзы, а $\delta_j = \Delta_j/x_s$. Представим поле $U_j(\xi)$ на входе j -й линзы в виде

$$U_j(\xi) = \exp[i\Psi_j(\xi)] \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j w_n(\xi - \beta_j), \quad (4)$$

где

$$\Psi_j(\xi) = \frac{\beta_{j-1}\xi + (\nu - 1)\tilde{\beta}_j\xi - \nu\xi^2/2}{[\nu(2-\nu)]^{1/2}}, \quad (5)$$

$$w_n(\xi) = \frac{\exp(-\xi^2/2) H_n(\xi)}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} \quad (6)$$

— собственные функции интегрального уравнения для идеальной линзовой линии с неограниченными квадратичными корректорами [11];

$H_n(\xi)$ — полиномы Эрмита; β_j , β_{j-1} , $\tilde{\beta}_j$ — некоторые, вообще говоря, произвольные постоянные. Варьируя этими постоянными, можно уменьшить количество учитываемых волн, а также упростить пересчет на следующую линзу. С этой же целью выделен фазовый множитель $\exp[i\Psi_j(\xi)]$. Возьмем в качестве β_j координату точки на j -й линзе, в которой амплитуда поля максимальна, называя такую точку центром пучка на j -й линзе. Аналогично поступим и с β_{j-1} .

Величину β_j определим несколько позже. Согласно (4), амплитудное распределение поля $U_j(\xi)$ однозначно определяется координатой центра пучка β_j и вектором A^i комплексных коэффициентов A^i_n .

Предполагая линзы бесконечно тонкими, вместо диафрагмированной линзы будем рассматривать эквивалентную систему, введенную в [8] (рис. 1б)*. Представим поле $V_j(\xi)$ в плоскости между диафрагмой и линзой эквивалентной системы, равное полю $U_j(\xi)$ при $|\xi - \delta_j| \ll a/x_s$ и нулю за пределами этого интервала, в том же виде (4), что и поле $U_j(\xi)$:

$$V_j(\xi) = \exp[i\Psi_j(\xi)] \sum_{m=0}^{\infty} B_m^i w_m(\xi - \beta_j). \quad (7)$$

Связь между векторами A^i и B^i осуществляется симметричной матрицей преобразования C^i , элементы $C_{m,n}^i$ которой определяются следующим образом:

* При анализе линий, конечные линзы которых не ограничены диафрагмами, в эквивалентной системе перед неограниченными линзами должны стоять условные фазовые корректоры, вносящие фазовую коррекцию

$$\varphi_1(\xi - \delta_j) = \begin{cases} 0, & |\xi - \delta_j| \leq a/x_s \\ \sqrt{\nu/(2-\nu)} \left[\frac{a^2}{x_s^2} - (\xi - \delta_j)^2 \right], & |\xi - \delta_j| > a/x_s \end{cases}$$

Однако в этом случае последующие выкладки несколько усложняются.

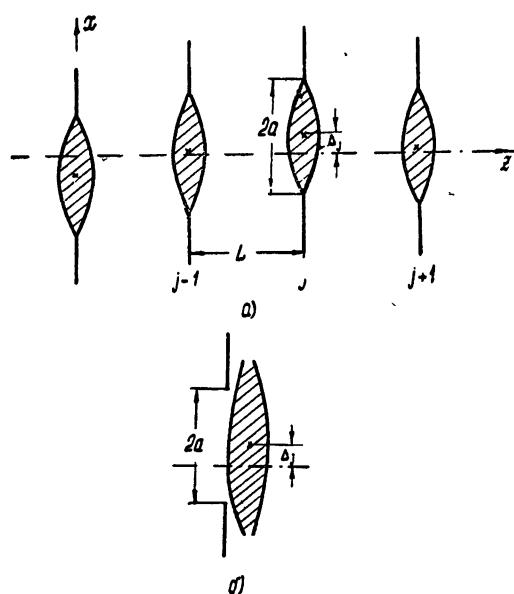


Рис. 1. а) Лучевод со случайными сдвигами линз; б) элемент эквивалентной системы.

$$C_{m,n}^l = K_{m,n} \left(-\frac{a}{x_s} + \delta_l - \beta_l \right) - K_{m,n} \left(\frac{a}{x_s} + \delta_j - \beta_j \right), \quad (8)$$

где

$$K_{m,n}(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} w_m(\xi) w_n(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Для $K_{m,n}(\zeta)$ легко получить рекуррентное соотношение

$$K_{m+1, n+1}(\zeta) = \frac{1}{V^{m+1}} \left[V^{n+1} K_{m,n}(\zeta) + \frac{w_m(\zeta) w_{n+1}(\zeta)}{V^2} \right], \quad (10)$$

которое справедливо и при $n+1=0$ из-за обращения в нуль первого слагаемого. Соотношение (10) вместе с очевидным представлением $K_{00}(\zeta)$ через интеграл вероятности позволяет последовательно вычислить все $K_{m,n}$, а вместе с ними и $C_{m,n}^l$.

Поле $U_{j+1}(\xi)$, падающее на $(j+1)$ -ю линзу, определяется с помощью принципа Гюйгенса по известному полю $V_j(\xi)$ с учетом фазовой коррекции (3). Если учесть, что фазовый корректор в эквивалентной системе неограничен, а функции w_n удовлетворяют соответствующему интегральному уравнению, то с точностью до постоянного фазового множителя

$$U_{j+1}(\xi) = \exp [i \Psi_{j+1}(\xi)] \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m^{j+1} w_m(\xi - \tilde{\beta}_{j+1}). \quad (11)$$

Здесь введены обозначения

$$(1 - v)(\beta_j + \tilde{\beta}_j) + 2v\delta_j - \beta_{j-1} = \tilde{\beta}_{j+1}; \quad (12)$$

$$B_m^j [1 - v + i \sqrt{v(2-v)}]^m = \tilde{A}_m^{j+1}. \quad (13)$$

Определенное по (12) значение $\tilde{\beta}_{j+1}$ (предполагается, что по такой же формуле вычислялось и $\tilde{\beta}_j$) может не совпадать с координатой центра пучка на $(j+1)$ -й линзе. Практически такое несовпадение будет иметь место, если значительная часть поля на $(j+1)$ -й линзе поглощается диафрагмой. В этом случае имеет смысл найти точное значение β_{j+1} , а поле $U_{j+1}(\xi)$ разложить по функциям $w_n(\xi - \beta_{j+1})$, представив его в виде

$$U_{j+1}(\xi) = \exp [i \Psi_{j+1}(\xi)] \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{j+1} w_n(\xi - \beta_{j+1}). \quad (14)$$

Коэффициенты A_n^{j+1} связаны с коэффициентами \tilde{A}_m^{j+1} матрицей преобразования D^{j+1} :

$$A_n^{j+1} = \sum_{m=0}^{\infty} D_{n,m}^{j+1} \tilde{A}_m^{j+1}. \quad (15)$$

Легко видеть, что

$$D_{00}^{j+1} = \exp \left[-\frac{(\beta_{j+1} - \tilde{\beta}_{j+1})^2}{4} \right]. \quad (16)$$

Элементы матрицы D^{i+1} удовлетворяют условию

$$D_{n,m}^{i+1} = (-1)^{n+m} D_{m,n}^{i+1} \quad (17)$$

и связаны между собой рекуррентным соотношением

$$D_{n+1,m+1}^{i+1} = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \left(\sqrt{n+1} D_{n,m}^{i+1} + \frac{\beta_{j+1} - \delta_{j+1}}{\sqrt{2}} D_{n+1,m}^{i+1} \right), \quad (18)$$

которое справедливо и при $n+1=0^*$.

Все приведенные выше формулы позволяют находить распределение поля на любой линзе по распределению на предыдущей линзе с учетом величины сдвига линзы. Задаваясь некоторым начальным распределением и приписывая каждой линзе случайный сдвиг, можно с помощью ЭВМ моделировать линии с определенными статистическими характеристиками. При этом, естественно, во всех бесконечных суммах приходится учитывать лишь конечное число членов; другими словами, можно учесть лишь конечное число волн в распределении поля. Количество учитываемых волн в среднем увеличивается от линзы к линзе, причем это происходит в основном при учете действия диафрагмы. Оказывается, что суммарная энергия, которую переносят волны, начиная с $(n+1)$ -й, возникшие из $w_0(\xi - \beta_j)$, приближенно равна

$$\tilde{P}_{n+1}^{(0)} \simeq \frac{|A_0|^2 \exp(-2\alpha)}{\pi \sqrt{2n\pi}} (1 + 2\alpha^4), \quad (19)$$

где

$$\alpha = \min \left\{ \left| \frac{a}{x_s} - (\beta_j - \delta_j) \right|; \left| \frac{a}{x} + (\beta_j - \delta_j) \right| \right\}. \quad (20)$$

Эта формула найдена эмпирическим путем после анализа данных, полученных на ЭВМ, и дает хорошее приближение при $n \geq 2$. Если учесть, что вдоль диагонали элементы матрицы C^j в среднем изменяются не очень сильно, то формулу (20) можно обобщить:

$$\tilde{P}_{n+1}^{(m)} \simeq \frac{|A_m|^2 \exp(-2\alpha)}{\pi \sqrt{2(n-m)\pi}} (1 + 2\alpha^4). \quad (21)$$

Это позволяет определить, сколько волн следует учитывать, чтобы энергия, переносимая неучтенными волнами, не превышала заданной величины.

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

С помощью описанного выше метода проводилось моделирование неконфокальных лучеводов с различными параметрами. При этом каждый раз предполагалось, что лучевод возбуждается основной волной идеальной линии с бесконечными корректорами: Величины сдвигов линз, подчиняющиеся заданному закону распределения, определялись с помощью специальной программы — датчика случайных чисел. Каждой линзе приписывался определенный таким образом сдвиг. При пересчете поля от линзы к линзе и учете ограниченности корректоров использовались приведенные выше формулы. Если пучок подходил достаточно близко к краю некоторой линзы, то на следующей линзе вычислялась

* Отметим, что при выводе формул для $D_{n,m}^{i+1}$ нигде не использовалось то обстоятельство, что β_{j+1} является координатой центра пучка. Эти формулы остаются в силе, если вместо β_{j+1} взять координату произвольной точки на апертуре. В частности, полагая $\beta_{j+1} = 0$, можно определить коэффициенты разложения поля на данной линзе по собственным волнам невозмущенной линии с бесконечными корректорами.

матрица D^{i+1} и с помощью этой матрицы преобразовывались амплитуды волн. В противном случае полагалось $\beta_{j+1} = \tilde{\beta}_{j+1}$. Точность расчета потерь на каждой линзе была принята в 10^{-3} дБ. При этом приходилось учитывать в среднем 10—15 волн и лишь в очень редких случаях это число доходило до 30—40. Данные о распределении поля на каждой линзе фиксировались для последующей обработки. Последовательно моделировались линии, обладающие общими статистическими свойствами.

Прежде чем перейти к анализу результатов обработки статистического материала, рассмотрим, как изменяются свойства отдельной линии с изменением фокусных расстояний линз. Для этого зафиксируем одну линзу, выбранную случайнным образом из ансамбля; не меняя положения линз в этой линии, будем изменять лишь фокусные расстояния. На рис. 2а приведена кривая, соединяющая центры линз в одной такой линии. Сдвиги линз распределены в ней по нормальному закону со среднеквадратичным значением $\sigma_d = 0,08 a$. Параметр $c = ka^2/L$ выбран равным 25. Изменение фокусного расстояния приводит к изменению ширины пятна (2); при данном значении c конфокальной линии ($v = 1$) отвечает $x_s = a/5$. На рис. 2б приведена зависимость всей прошедшей энергии от номера линзы при различных значениях параметра v . Несколько значений этого параметра подобраны таким образом, чтобы ширина линз оставалась кратной ширине пятна.

На начальных линзах меньше всего энергии теряется в конфокальной линии. Пятно в ней самое узкое, дифракционные потери небольшие,

и почти вся энергия остается в линии до тех пор, пока призматическое действие сдвинутых линз не подводит пучок вплотную к краю линзы. Линии с более длиннофокусными линзами теряют больше энергии главным образом из-за более широкого пятна. Чем шире пятно, тем больше амплитуда поля на краю линзы в начале линии и, следовательно, тем выше дифракционные потери. Однако из-за более сильного призматического действия центр пучка раньше всего приближается к краю линзы в конфокальной линии (в нашем случае это произошло на 21-й линзе). При этом, естественно, потери резко возрастают. В неконфокальных линиях это происходит позже, номер «критической линзы» возрастает с уменьшением v , и чем длиннее отрезок линии, тем большее фокусное расстояние оказывается наилучшим. Кроме того, сравнивание траекторий центра пучка показывает, что при больших фокусных расстояниях сильнее проявляется эффект «демпфирования», т. е. поджатие пучка к центру линзы после подхода его к краю. Очень слабая фоку-

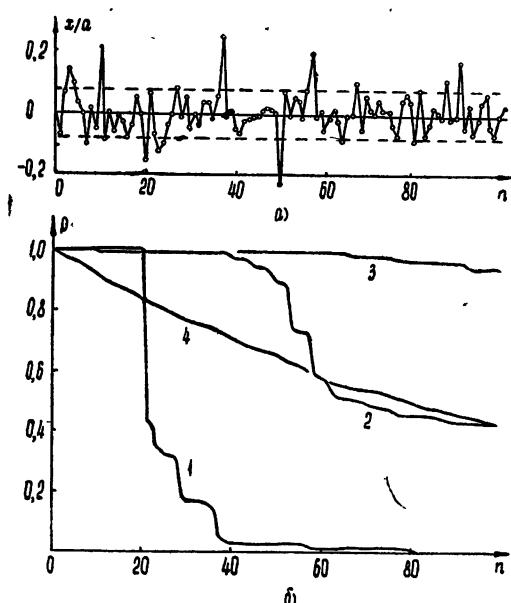


Рис. 2. Расположение линз (а) и зависимость прошедшей энергии от номера линзы (б) в отдельной линии:

$$1-x_s=a/5 \quad (v=1); \quad 2-x_s=a/4 \quad (v=0,23); \quad 3-x_s=a/3 \quad (v=0,067); \quad 4-x_s=a/2 \quad (v=0,013).$$

нение траекторий центра пучка показывает, что при больших фокусных расстояниях сильнее проявляется эффект «демпфирования», т. е. поджатие пучка к центру линзы после подхода его к краю. Очень слабая фоку-

сировка и сильное демпфирование при $x_s = a/2$ приводит к тому, что кривая прошедшей энергии (кривая 4) ведет себя почти экспоненциально. Правда, линзы, формирующие столь широкий пучок, не являются наилучшими; такие пучки обладают относительно большими дифракционными потерями. Более выгодным для данной линии оказывается $\nu = 0,067$; при этом формируется пучок с гораздо меньшими дифракционными потерями, но фокусное расстояние остается достаточно большим, чтобы не подвести пучок вплотную к краю линзы.

По одной рассмотренной нами линии можно сделать лишь частные заключения. Для более полного и достоверного анализа необходимо обработать результаты моделирования достаточно больших ансамблей статистически однородных линий. Приведенные ниже данные получены усреднением по ансамблям, содержащим по 100 линий. В результате обработки статистического материала для лучеводов со среднеквадратичным сдвигом $\sigma_d = 0,08 a$ при $c = 25$ были получены в зависимости от длины лучевода (количества линз) среднее значение прошедшей энергии \bar{P} (рис. 3а), коэффициент вариации $v_p = \sigma_p/\bar{P}$ (рис. 3б) (σ_p — среднеквадратичное отклонение прошедшей энергии от \bar{P}), а также функции распределения суммарных потерь в линиях определенной

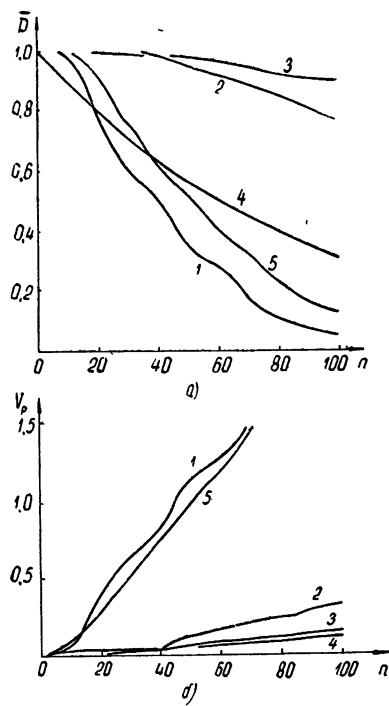


Рис. 3. Средняя прошедшая энергия (а) и коэффициент вариации (б):
1— $x_s=a/5$ ($\nu=1$); 2— $x_s=a/4$ ($\nu=0,23$);
3— $x_s=a/3$ ($\nu=0,067$); 4— $x_s=a/2$ ($\nu=0,013$);
5— $x_s=0$.

длины (рис. 4). Для конфокального случая моделировалось также прохождение луча по законам геометрической оптики, что соответствует значению $c = \infty$. При этом средняя прошедшая энергия есть вероятность того, что геометрический луч доходит до конца линии, состоящей из

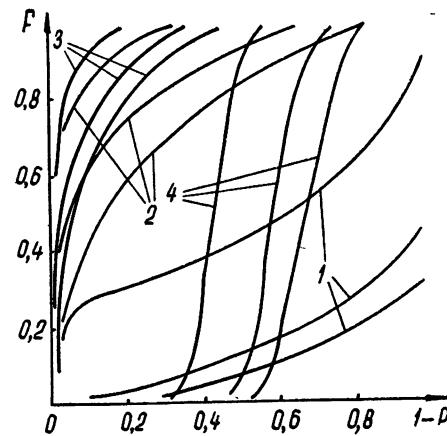


Рис. 4. Функции распределения потерь в линиях, состоящих из 50, 80 и 100 линз:
1— $x_s=a/5$ ($\nu=1$); 2— $x_s=a/4$ ($\nu=0,23$); 3— $x_s=a/3$ ($\nu=0,067$); 4— $x_s=a/2$ ($\nu=0,013$).

и линз, ни разу не покинув пределы апертуры; коэффициент вариации определяется в этом случае по формуле

$$v^{(\infty)} = \sqrt{1/\bar{P} - \bar{P}}. \quad (22)$$

Оказывается, что при $c = 25$ еще нельзя пользоваться геометро-оптическим подходом даже при конфокальных линзах. Такой подход дает слишком завышенные результаты для средней прошедшей энергии.

Основные закономерности, обнаруженные при изменении фокусного расстояния линз в фиксированной линии, подтверждаются и после усреднения по ансамблям. Кроме того, оказывается, что более длиннофокусные линии обладают меньшим коэффициентом вариации прошедшей энергии, т. е. значения прошедшей энергии в конкретных линиях более тесно группируются около их среднего по ансамблю.

На рис. 4 приведены функции распределения суммарных потерь энергии в лучеводах, состоящих из 50, 80 и 100 линз. (По определению, функция распределения случайной величины есть вероятность того, что случайная величина не превышает заданного значения. Так, согласно рис. 4, вероятность получить в конфокальной линии потери не больше 60% равна 0,47 при 50 линзах, 0,17 при 80 линзах и 0,10 при 100 линзах.) Степень кривизны этих кривых характеризует плотность распределения потерь по линиям. Подтверждается полученный при сравнении коэффициентов вариации вывод о том, что эта плотность возрастает с увеличением фокусного расстояния. Напомним, что все приведенные данные отвечают $c = 25$ и $\sigma_d = 0,08 a$.

Анализируемые результаты дают все основания сделать предположение о существовании оптимального (в некотором смысле) фокусного расстояния. В зависимости от задачи, выполняемой лучеводом, под оптимумом следует понимать достижение максимума амплитуды основной волны идеальной линии (при больших c это волна ω_0) на выходе линии или максимума всей прошедшей энергии. Оказывается, что при достаточной длине лучевода оба максимума достигаются практически при одном и том же значении u .

Кривые на рис. 5 дают зависимость оптимального (в смысле максимума всей прошедшей энергии) u от среднеквадратичного значения сдвига в линиях, состоящих из 10, 30, 50 и 100 линз при $c = 25$. Даже в 100-линзовой линии при $\sigma_d = 0,10 a$ оптимальное фокусное расстояние обеспечивает в среднем суммарные потери не выше 15%. Естественно, что при меньших σ_d , а также в более коротких линиях u потери еще ниже. Оптимальное фокусное расстояние увеличивается с увеличением длины линий, однако при сравнении 50- и 100-линзовых линий это увеличение уже

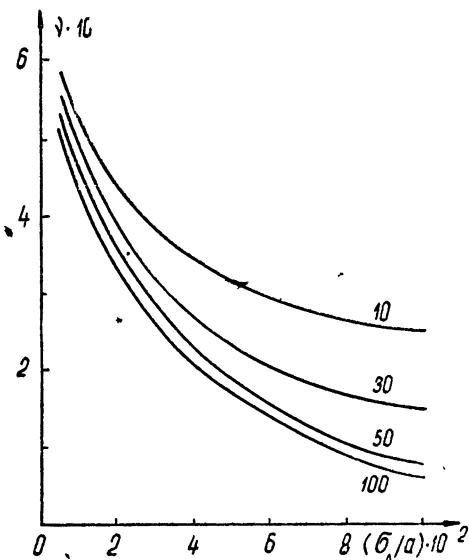


Рис. 5. Оптимальное u для линий, состоящих из 10, 30, 50 и 100 линз.

маленькое фокусное расстояние увеличивается с увеличением длины линий, однако при сравнении 50- и 100-линзовых линий это увеличение уже

мало заметно. Можно с большой достоверностью утверждать, что для более длинных линий оптимум почти тот же, что и для 100-линзовой.

Нами найдены оптимальные значения v при $c = 25$. Аналогично можно рассмотреть другие значения этого параметра. Но, как показывают численные результаты, знание точного значения оптимального v не обязательно. Не слишком большое отклонение v от оптимального в среднем слабо оказывается на потерях. Так, в исследуемом случае отклонение v от оптимального на 0,05 увеличивает средние потери не больше чем на 3 %. В довольно широком диапазоне значений c можно пользоваться приближенной формулой

$$v_c \approx v_{25} \left[v_{25} + (1 - v_{25}) \left(\frac{25}{c} \right)^2 \right], \quad (23)$$

где v_c — оптимальное значение v , соответствующее данному c . Проверка этой формулы при $c = 18$ и $c = 35$ дала удовлетворительные результаты.

В заключение отметим, что применение описанного выше метода не ограничивается попречными сдвигами корректоров. Этот метод может быть легко обобщен на другие неоднородности, например, случайные наклоны линз, изменение их ширины, изломы оси линии, изменение фокусного расстояния от линзы к линзе и др.

Автор выражает благодарность Б. З. Каценеленбауму за постановку задачи и Р. Б. Ваганову за ценные советы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. Fox, T. Li, Bell Syst. Techn. J., 40, № 2, 453 (1961).
2. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 9, № 11, 1958 (1964).
3. Р. Б. Ваганов, Н. Н. Войтович, Радиотехника и электроника, 11, № 2, 339 (1966).
4. D. Gloge, Arch. elektr. Übertr., 19, № 1, 13 (1965).
5. H. Larsen, Frequenz, 20, № 1, 1 (1966).
6. J. Hirano, Y. Fukatsu, Proc. IEE, 52, № 11, 1284 (1964).
7. Р. Б. Ваганов, Исследование устойчивости квазиоптических линий к малым возмущениям корректоров, автореф. дисс., М., 1965.
8. Н. Н. Войтович, Радиотехника и электроника, 11, № 8, 1496 (1966).
9. D. Gloge, Arch. elektr. Übertr., 20, № 2, 82 (1966).
10. Р. Б. Ваганов, Н. Н. Войтович, Укр. физ. ж., 6, № 6, 1034 (1967).
11. G. Boyd, H. Kogelnik, Bell Syst. Techn. J., 41, № 4, 1347 (1962).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
22 августа 1966 г.

STUDY OF THE EFFECT OF LENSE TRANSVERSE SHIFTS UPON BEAM WAVEGUIDE STABILITY USING MODELLING ON ELECTRON COMPUTER

N. N. Voytovich

A method of modelling on electron computer of non-confocal beam waveguides with random transverse displacements of lenses is described. By means of such a method assemblies of lines are modelled and results are processed by the methods of mathematical statistics. Lines with different focal distances are compared. Optimal focal distances as dependent on the mean square value of displacements are given.

УДК 533.925

О ПРОНИКОВЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНИТОАКТИВНУЮ ПЛАЗМУ

A. H. Кондратенко.

В приближении слабой пространственной дисперсии рассматривается задача о прохождении электромагнитной волны через слой плазмы, находящейся в постоянном магнитном поле, параллельном границе плазмы, в случае, когда магнитный вектор падающей волны параллелен постоянному полю. Определен коэффициент поглощения энергии волн в различных частных случаях. Рассмотрено возбуждение продольных волн.

Задача о проникновении поперечного электромагнитного поля в полуограниченную плазму и прохождении электромагнитных волн через слои плазмы посвящено достаточно много работ [1-15]. Однако некоторые вопросы остаются все еще не выясненными. В настоящей работе в приближении слабой пространственной дисперсии рассмотрим вопрос о прохождении электромагнитной волны через слой плазмы, находящейся в постоянном однородном магнитном поле H_0 , параллельном границам плазмы, и о возбуждении в плазме продольных волн. Безграничный слой плазмы толщиной a предполагаем однородным, а отражение частиц плазмы от границ — диффузным. Магнитный вектор падающей электромагнитной волны параллелен H_0 (необыкновенная волна). В случае полуограниченной плазмы подобная задача рассматривалась в работе [7]. Однако результаты этой работы, относящиеся к возбуждению продольной волны, являются ошибочными.

1. КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПОЛЕЙ

Систему координат выбираем таким образом, что ось z параллельна H_0 , ось x нормальна к слою, координаты границ которого $x = 0, a$. Предполагаем, что все величины зависят от времени по закону $\exp(-i\omega t)$. Исходная система уравнений состоит из уравнений Максвелла

$$\frac{dE_y}{dx} = ikH_z, \quad E_x = -\frac{4\pi i}{\omega} j_x, \quad \frac{dH_z}{dx} = ikE_y - \frac{4\pi}{c} j_y \quad (1.1)$$

и кинетического уравнения для малого отклонения f_α от равновесной максвелловской функции распределения $f_{0\alpha} = \frac{n_0}{\pi v_\alpha^2} \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2}{v_\alpha^2}\right)$ частиц сорта α (индекс $\alpha = e$ относится к электронам, $\alpha = i$ — к ионам):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x} - i \frac{\omega}{v_x} f_\alpha - \frac{\omega_\alpha}{v_x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \varphi} + e_\alpha E \frac{v}{v_x} f'_{0\alpha} = 0, \quad (1.2)$$

где $\omega_\alpha = e_\alpha H_0 / m_\alpha c$, e_α — заряд, m_α — масса, v_α — средняя тепловая скорость частиц сорта α , φ — угол в пространстве скоростей: $\mathbf{v} = (v \cos \varphi, v \sin \varphi)$, $f'_{0\alpha}$ — производная $f_{0\alpha}$ по энергии, $k = \omega/c$.

Границные условия для полей сводятся к требованию непрерывности тангенциальных компонент ЭМ поля на границах раздела плазма — вакуум:

$$(E_y^{\text{pl}} - E_y^{\text{vac}})_{x=0, a} = 0, \quad (H^{\text{pl}} - H^{\text{vac}})_{x=0, a} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем $H = H_z$.

Границные условия для функций распределения f_a имеют вид

$$f_a(0, v_x > 0) = f_a(a, v_x < 0) = 0. \quad (1.4)$$

В вакууме поле состоит из падающей на плазму волны

$$E_y = \exp[i(kx - \omega t)], \quad H = \exp[i(kx - \omega t)], \quad (1.5)$$

волны, отраженной от границы $x = 0$,

$$E_y = -H = R \exp[i(-kx - \omega t)] \quad (1.5a)$$

и волны, прошедшей через слой,

$$E_y = H = T \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (1.5b)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) будем решать методом Фурье. Поля $E_{x,y}(x)$ и токи $j_{x,y}(x)$, заданные в интервале $(0, a)$, продолжим на интервал $(-a, 0)$ четно (поле $H(x)$ — нечетно), а дальше периодически с периодом $2a$. Решение ищем в виде сумм

$$E_{x,y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{1,2}(n) \cos(\alpha_n x), \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H(n) \sin(\alpha_n x), \quad (1.6)$$

где $\alpha_n = n\pi/a$; штрих у суммы означает, что слагаемое с $n = 0$ умножается на $1/2$.

Решая уравнение (1.2) с граничными условиями (1.4), найдем, что в предположении $a \gg v_a/\omega_a$ коэффициенты Фурье тока $j = \sum_a e_a \int v f_a d\mathbf{v}$ имеют следующий вид:

$$j_i(n) = \sigma_{ik}(n) E_k(n) + J_i(n) \quad (i, k = 1, 2); \quad (1.7)$$

$$\sigma_{ik} = \sum_a -\frac{2n_0 e_a^2}{\pi m_a \omega_a} \int_0^\infty dx x^3 \exp(-x^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \delta_i(\varphi) \times \\ \times \int_{-\infty}^0 d\varphi_1 \exp[i\gamma_a(\varphi_1 - \varphi)] \delta_k(\varphi) \rho(n, \varphi_1, \varphi); \quad (1.8)$$

$$J_i(n) = \frac{\omega}{4\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^{n+k} + 1] Q_{ij}(n, k) E_j(k); \quad (1.9)$$

$$Q_{ij}(n, k) = \sum_a -\frac{2i\Omega_a^2}{a \omega_a^2} \int_0^\infty dx x^4 \exp(-x^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \delta_i(\varphi) \times \\ \times \int_{-\infty}^0 d\varphi_1 |\cos \varphi_1| \rho(n, \varphi_1, \varphi) \int_{f(\varphi_1)}^{\varphi_1} d\varphi_2 \exp[i\gamma_a(\varphi_2 - \varphi)] \delta_j(\varphi_2) \rho(k, \varphi_2, \varphi). \quad (1.10)$$

В выражении (1.9) по индексу $j = 1(x), 2(y)$ производится суммирование и введены следующие обозначения:

$$\delta_1(\varphi) = \cos \varphi, \quad \delta_2(\varphi) = \sin \varphi, \quad \gamma_a = \omega/\omega_a, \quad \Omega_a^2 = 4\pi e_a^2 n_0/m_a, \quad \rho(n, \varphi_1, \varphi) =$$

$= \cos \left[\frac{\alpha_n v_a x}{\omega_a} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi) \right]$, $f(\varphi)$ — угол, определяемый из условий $\sin \varphi = \sin f(\varphi)$, $\varphi < f(\varphi) < \varphi + 2\pi$.

Выражениями (1.8) — (1.10) можно пользоваться только, если $\omega - s/\omega_a \gg \beta_a^2 \omega$, где $\beta_a = v_a/c$. При выполнении этого условия циклотронное затухание колебаний экспоненциально мало.

Рассмотрим случай слабой пространственной дисперсии, когда главную роль играют небольшие n , так что можно считать $\alpha_n v_a \ll \min(\omega_a, \omega)$. Тогда величины J_i и Q_{ij} можно упростить:

$$J_i(n) = \frac{\omega}{4\pi i} Q_{ii} [(-1)^n E_j(a) + E_j(0)]; \quad (1.9a)$$

$$Q_{11} = \sum_a \frac{i v_a \Omega_a^2}{\sqrt{\pi a \omega \omega_a^2 (\gamma_a^2 - 1)^2}} \left[1 + 2\gamma_a^2 + \frac{9(6\gamma_a^2 - 1)[1 + \exp(2\pi i \gamma_a)]}{2(4\gamma_a^2 - 1)(4\gamma_a^2 - 9)} \right]; \quad (1.11)$$

$$Q_{12} = -Q_{21} = \sum_a \frac{-3v_a \Omega_a^2 \gamma_a}{\sqrt{\pi a \omega \omega_a^2 (\gamma_a^2 - 1)^2}} \left[1 + \frac{(8\gamma_a^2 + 7)[1 + \exp(2\pi i \gamma_a)]}{2(4\gamma_a^2 - 1)(4\gamma_a^2 - 9)} \right]; \quad (1.12)$$

$$Q_{22} = \sum_a \frac{i v_a \Omega_a^2}{\sqrt{\pi a \omega \omega_a^2 (\gamma_a^2 - 1)^2}} \left\{ 2 + \gamma_a^2 + \frac{3(4\gamma_a^4 + 5\gamma_a^2 + 6)}{2(4\gamma_a^2 - 1)(4\gamma_a^2 - 9)} \times \right. \\ \left. \times [1 + \exp(2\pi i \gamma_a)] \right\}. \quad (1.13)$$

С учетом выражений (1.7), (1.9a) найдем, что в случае слабой пространственной дисперсии коэффициенты Фурье полей имеют вид

$$E_1(n) = \frac{1}{\Delta(n)} \left\{ \frac{2i\varepsilon_{12}}{ka} [H(0) - (-1)^n H(a)] + \left[\left(\varepsilon_{22} - \frac{\alpha_n^2}{k^2} \right) Q_{11} + \right. \right. \\ \left. + \varepsilon_{12} Q_{12} \right] [(-1)^n E_x(a) + E_x(0)] + \left[\left(\varepsilon_{22} - \frac{\alpha_n^2}{k^2} \right) Q_{12} - \right. \\ \left. - \varepsilon_{12} Q_{22} \right] [(-1)^n E_y(a) + E_y(0)] \right\}; \quad (1.14)$$

$$E_2(n) = \frac{1}{\Delta(n)} \left\{ \frac{2i\varepsilon_{11}}{ka} [(-1)^n H(a) - H(0)] - (\varepsilon_{11} Q_{12} + \varepsilon_{21} Q_{11}) \times \right. \\ \times [(-1)^n E_x(a) + E_x(0)] + (\varepsilon_{11} Q_{22} - \varepsilon_{21} Q_{12}) [(-1)^n E_y(a) + E_y(0)] \right\}; \quad (1.15)$$

$$\Delta(n) = \varepsilon_{11} \frac{\alpha_n^2}{k^2} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} - \varepsilon_{11} \varepsilon_{22}, \quad (1.16)$$

где $\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ik}$.

Заметим, что ε_{ik} можно представить в виде

$$\varepsilon_{11} = 1 - \sum_{a, n} \frac{\Omega_a^2 e^{-\lambda}}{\omega(\omega - n\omega_a)} \frac{n^2}{\lambda} I_n; \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sum_{\alpha, n} \frac{i\Omega_\alpha^2 e^{-\lambda}}{\omega(\omega - n\omega_\alpha)} n(I_n - I'_n); \quad (1.17a)$$

$$\varepsilon_{22} = 1 - \sum_{\alpha, n} \frac{\Omega_\alpha^2 e^{-\lambda}}{\omega(\omega - n\omega_\alpha)} \left[\frac{n^2}{\lambda} I_n + 2\lambda(I_n - I'_n) \right]. \quad (1.17b)$$

В выражениях (1.17)–(1.17б) $I_n = I_n(\lambda)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, $\lambda = \alpha_n^2 v_\alpha^2 / 2\omega_\alpha^2$.

2. НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТОТЫ

Рассмотрим сначала случай, когда пространственную дисперсию можно не учитывать, т. е. в ε_{lk} можно положить $\lambda = 0$. Этот случай реализуется в области вне резонансов $\varepsilon_{11} = 0$ и в неплотной плазме. Принимая во внимание, что $Q_{lk} \sim v_\alpha/c \ll 1$, для поля E_y в плазме на границах слоя найдем следующие значения:

$$\begin{aligned} E_y(0) &= -iH(0)D_1 + iH(a)D_2, \\ E_y(a) &= -iH(0)D_2 + iH(a)D_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{k}{q} \operatorname{ctg}(qa) + \frac{F}{2} (1 + 2 \operatorname{ctg}^2(qa)), \\ D_2 &= -\frac{k}{q \sin(qa)} + F \frac{\operatorname{ctg}(qa)}{\sin(qa)}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$F = \frac{k^3 a}{q^2} \left(Q_{11} \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} + 2i \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Q_{12} + Q_{22} \right), \quad (2.3)$$

$$q = k \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_\alpha^2}{\omega^2 - \omega_\alpha^2}, \quad \varepsilon_2 = -\sum_{\alpha} \frac{\omega_\alpha \Omega_\alpha^2}{\omega(\omega^2 - \omega_\alpha^2)}.$$

Используя соотношения (2.1) и граничные условия (1.3), можно найти коэффициенты отражения R и прохождения T , значения $H(0)$, $H(a)$:

$$\begin{aligned} R &= \frac{D_2^2 - D_1^2 - 1}{\Delta_1}, \quad T = -\frac{2iD_2}{\Delta_1} \exp(-ika), \\ H(0) &= \frac{2(1 - iD_1)}{\Delta_1}, \quad H(a) = -\frac{2iD_2}{\Delta_1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Delta_1 = 1 + D_2^2 - D_1^2 - 2iD_1,$$

а также коэффициент поглощения энергии волны

$$W = 1 - |R|^2 - |T|^2 = \frac{-2i \operatorname{Im}[F(1 + 2 \operatorname{ctg}^2(qa) + k^2/q^2)]}{(1 + k^2/q^2)^2 + 4k^2 \operatorname{ctg}^2(qa)/q^2}. \quad (2.5)$$

При выводе (2.5) величинами $\sim F^2$ пренебрежено.

Найдем коэффициент поглощения в некоторых частных случаях. Если $\omega \approx \omega_e$, $|\varepsilon_1| \gg 1$, то $\beta_e^2 \Omega_e^2 / \omega_e^2 \ll |(\omega + \omega_e)/\omega_e|$, то

$$W = \frac{3\beta_e \Omega_e^2 k^2}{2\sqrt{\pi \omega_e^2 q_1^2}} \frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2(q_1 a) + k^2/q_1^2}{(1 + k^2/q_1^2)^2 + 4k^2 \operatorname{ctg}^2(q_1 a)/q_1^2}. \quad (2.6)$$

Здесь $q_1^2/k^2 = 2 - \Omega_e^2/\omega_e^2$. Если $\Omega_e^2 > 2\omega_e^2$, то волна «скинируется». В противоположном случае она достаточно хорошо проходит через плазму ($T \sim 1$). Если $\Omega_e^2 \gg \omega_e^2 \gg \omega^2 \gg |\omega_i \omega_e|$, то

$$W = \frac{2}{V\pi} \left[2\beta_i \frac{|\omega_i \omega_e|}{\omega^2} + \left(\pi^2 - \frac{28}{9} \right) \beta_e \frac{\omega^2}{\omega_e^2} \right] \left(2 \operatorname{cth}^2 \frac{\Omega_e a}{c} - 1 \right). \quad (2.7)$$

Здесь предполагается, что $\frac{\omega}{\Omega_e} \operatorname{cth} \frac{\Omega_e a}{c} \ll 1$. При пренебрежении движением ионов для полуограниченной плазмы выражение (2.7) переходит в соответствующее выражение работы [7].

Если $\Omega_e^2 \gg |\omega_i \omega_e| \gg \omega^2$, то с точностью до коэффициента вторядка 2 при β_i

$$W = \frac{4}{V\pi} (\beta_i + 2\beta_e \mu) \frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2(q_2 a)}{1 + 4k^2 \operatorname{ctg}^2(q_2 a)/q_2^2}, \quad (2.8)$$

где

$$q_2 = \frac{\omega \Omega_i}{\omega_i c}, \quad \mu = \frac{m_e}{m_i}.$$

Из выражения (2.8) видно, что поглощение энергии волны определяется ионами при температурах $T_i > \mu T_e$.

В случае (2.7) волна скинируется, а в случае (2.8)

$$R \simeq - \left[1 + 2i \frac{k}{q_2} \operatorname{ctg}(q_2 a) \right]^{-1},$$

$$T = \frac{2ik \exp(-ika)}{q_2 \sin(q_2 a) [1 + 2ik \operatorname{ctg}(q_2 a)/q_2]}. \quad (2.9)$$

Только в условиях пространственного резонанса, когда $q_2 a \simeq n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), заметная часть энергии волны может проходить через слой. В этих же условиях возрастает и коэффициент поглощения.

Выражение (2.8) применимо и вблизи ионной циклотронной частоты, если только $\beta_i^2 \Omega_i^2 / \omega_i^2 \ll |\omega - \omega_i| / \omega_i$.

3. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НА ГИБРИДНЫХ ЧАСТОТАХ

Перейдем теперь к рассмотрению тех случаев, когда дисперсия, оставаясь слабой, является существенной. Будем интересоваться возбуждением продольных колебаний, дисперсионное уравнение которых в плазме небольшой плотности $\epsilon_{11} \simeq 0$. В настоящем разделе рассмотрим продольные колебания вблизи гибридных частот

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_e^2 + \omega_e^2}, \quad \omega_2 = \frac{\Omega_i \omega_e}{\sqrt{\Omega_e^2 + \omega_e^2}}, \quad (3.1)$$

определенных из условий $\epsilon_1 = 0$, $\Omega_i \gg \omega_i$. Здесь и в дальнейшем $\omega_e > 0$.

Непосредственные вычисления показывают, что в $E_{1,2}(n)$ слага-

емыми со всеми Q_{ik} , кроме Q_{11} , можно пренебречь. Учитывая далее, что $\alpha_n^2 \sim |q_j^2| \gg k^2 \epsilon_{22}$, а для ϵ_{12} можно взять его гидродинамическое значение $i\epsilon_2$, найдем

$$E_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{2\epsilon_2}{ka} [(-1)^n H(a) - H(0)] - \frac{\alpha_n^2}{k^2} Q_{11} [(-1)^n E_x(a) + E_x(0)] \right\}; \quad (3.2)$$

$$E_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{2i\epsilon_{11}}{ka} [(-1)^n H(a) - H(0)] + i\epsilon_2 Q_{11} [(-1)^n E_x(a) + E_x(0)] \right\}. \quad (3.3)$$

Воспользовавшись этими выражениями, получим поля в плазме

$$E_x(x) = \sum_j \frac{-a}{(\partial\Delta/\partial q_j) \sin(q_j a)} \left\{ \frac{2\epsilon_2}{ka} [H(a) \cos(q_j x) - H(0) \cos[q_j(a-x)]] - \frac{q_j^2}{k^2} Q_{11} [E_x(a) \cos(q_j x) + E_x(0) \cos[q_j(a-x)]] \right\}; \quad (3.4)$$

$$E_y(x) = \sum_j \frac{-a}{(\partial\Delta/dq_j) \sin(q_j a)} \left\{ \frac{2i\epsilon_{11}(q_j)}{ka} [H(a) \cos(q_j x) - H(0) \cos[q_j(a-x)]] + i\epsilon_2 Q_{11} [E_x(a) \cos(q_j x) + E_x(0) \cos[q_j(a-x)]] \right\}. \quad (3.5)$$

Если ϵ_{11} представим в виде

$$\epsilon_{11}(q) = \epsilon_1 + \frac{q^2}{k^2} \rho, \quad \rho = - \sum_\alpha \frac{3\Omega_\alpha^2 \omega^2 \beta_\alpha^2}{2\omega_\alpha^4 (\gamma_\alpha^2 - 1) (\gamma_\alpha^2 - 4)}, \quad (3.6)$$

то q_j — корни уравнения

$$\frac{q^4}{k^4} \rho + \frac{q^2}{k^2} \epsilon_1 + \epsilon_2^2 = 0 \quad (3.7)$$

в верхней полуплоскости, равные

$$\frac{q_{1,2}}{k} = \left[\frac{\epsilon_1 \pm \sqrt{\epsilon_1^2 - 4\epsilon_2^2 \rho}}{-2\rho} \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Если $\rho < 0$, один из этих корней, q_1 , действительный, а q_2 чисто-мнимый. Волна, соответствующая q_1 , будет возбуждаться в плазме, а соответствующая q_2 — экспоненциально затухать. На частоте $\omega \approx \omega_2$, как легко убедиться, $\rho < 0$. В работе [7] сделана ошибка в знаке ρ , вследствие чего оба корня при $\epsilon_1 = 0$ оказались комплексными, а волны — экспоненциально затухающими. Величина $\rho < 0$ также в случае $\omega \approx \omega_1$, если $\Omega_e^2 > 3\omega_e^2$. Если же $\Omega_e^2 < 3\omega_e^2$, но $\epsilon_1^2 > 4\epsilon_2^2 \rho$, $\epsilon_1 < 0$, то $q_{1,2}$ — действительные корни, и возбуждаются обе волны. Наоборот, если при этом $\epsilon_1^2 < 4\epsilon_2^2 \rho$, то оба корня комплексные и волна не возбуждается.

Из выражения (3.4), пренебрегая слагаемыми порядка $|\rho(q_1 + q_2)/k^2 a Q_{11}| \ll 1$, найдем $E_x(0)$ и $E_x(a)$:

$$E_x(0) = -\frac{2k\epsilon_2}{a Q_{11}} \left\{ H(0) \left[2 - i \left(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1} \right) \operatorname{ctg}(q_1 a) \right] - \frac{iH(a)}{\sin(q_1 a)} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{q_1}{q_2} - \frac{q_2}{q_1} \right) \right\} [q_1^2 + q_2^2 - 2iq_1 q_2 \operatorname{ctg}(q_1 a)]^{-1}; \quad (3.9)$$

$$E_x(a) = - \frac{2k\epsilon_2}{aQ_{11}} \left\{ \frac{iH(0)}{\sin(q_1a)} \left(\frac{q_1}{q_2} - \frac{q_2}{q_1} \right) - H(a) \left[2 - i \left(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{ctg}(q_1a) \right] \right\} [q_1^2 + q_2^2 - 2iq_1q_2 \operatorname{ctg}(q_1a)]^{-1}. \quad (3.10)$$

При этом считается, что q_2 — комплексное число и $|q_2|a \gg 1$. На достаточно далеком расстоянии от границ ($x, a - x \gg |q_2|^{-1}$) поля в плазме имеют следующий вид:

$$E_x(x) = \frac{-2k}{q_1 \sqrt{\epsilon_1^2 - 4\epsilon_2^2 \rho \sin(q_1a)}} \left\{ \epsilon_2 [H(0) \cos[q_1(a-x)] - \right. \\ \left. - H(a) \cos(q_1x)] + \frac{q_1^2 a}{2k} Q_{11} [E_x(0) \cos[q_1(a-x)] + E_x(a) \cos(q_1x)] \right\}; \quad (3.11)$$

$$E_y(x) = -i \frac{k^3 \epsilon_2}{q_1^2} E_x(x). \quad (3.12)$$

Так как $q_1^2 \gg k^2 |\epsilon_2|$, амплитуда продольного поля много больше амплитуды поперечного.

Найдем коэффициенты отражения, прохождения, $H(0)$ и $H(a)$. Из выражения (3.5) следует

$$E_y(0) = -iH(0)D_1 + iH(a)D_2, \quad E_y(a) = -iH(0)D_2 + iH(a)D_1, \quad (3.13)$$

где

$$D_1 = \frac{k(q_1^2 - q_2^2)[q_2 \operatorname{ctg}(q_1a) + iq_1]}{q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2 - 2iq_1 q_2 \operatorname{ctg}(q_1a))}, \quad D_2 = \frac{D_1 q_2 \sin^{-1}(q_1a)}{q_2 \operatorname{ctg}(q_1a) + iq_1}. \quad (3.13a)$$

По порядку величины $D_{1,2} \sim k/|q_{1,2}| \ll 1$, поэтому из значений (2.5) получим

$$R = \frac{-1}{1 - 2iD_1}, \quad T = -2iD_2 \exp(-ika), \quad H(0) = 2, \quad H(a) = -2iD_2. \quad (3.14)$$

Несмотря на то, что волна почти полностью отражается от слоя, продольное поле в плазме достигает значительной величины, особенно в случае пространственного резонанса, когда $q_1 = x_n = n\pi/a$ ($n=1, 2, \dots$). Если $\epsilon_1^2 \gg |4\epsilon_2^2 \rho_1|$, то резонансные частоты имеют следующий вид:

на частоте $\omega \approx \omega_1$

$$\omega_n = \omega_1 \left[1 + \frac{3\Omega_e^2 v_e^2 x_n^2}{4\omega_1^2 (\Omega_e^2 - 3\omega_e^2)} \right], \quad (3.15)$$

на частоте $\omega \approx \omega_2$

$$\omega_n = \omega_2 \left[1 + \frac{3x_n^2}{4\omega_2^2} \left(v_t^2 + \frac{v_e^2 \omega_2^4}{4\omega_t \omega_e^3} \right) \right]. \quad (3.16)$$

Если же $\epsilon_1^2 \ll -4\epsilon_2^2 \rho$, то условие пространственного резонанса на частоте $\omega = \omega_1$ при $\Omega_e^2 > 3\omega_e^2$ состоит в выполнении равенства

$$3\Omega_e^2 x_n^4 c^4 = 2\omega_e^2 (\Omega_e^2 - 3\omega_e^2);$$

а на частоте $\omega = \omega_2$ при $\Omega_e^2 \gg \omega_e^2$

$$3x_n^4c^4 \left(\beta_i^2 + \frac{\beta_e^2\mu}{4} \right) = 2\Omega_i^2\omega_e^2.$$

Рассмотрим полуограниченную плазму. Из выражений (3.4) и (3.5) можно найти следующие значения для компонент электрического поля (q_1 — действительное, q_2 может быть как действительным, так и мнимым):

$$\begin{aligned} E_x(x) = & \frac{ik^3\epsilon_2 H(0)}{\rho q_1 q_2 (q_1 - q_2)} \left\{ \exp(iq_2 x) - \exp(iq_1 x) + \right. \\ & \left. + \frac{2i\rho}{k^2 a Q_{11}} [q_2 \exp(iq_2 x) - q_1 \exp(iq_1 x)] \right\}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$E_y(x) = \frac{kH(0)}{q_1 q_2 (q_1 - q_2)} [q_1^2 \exp(iq_2 x) - q_2^2 \exp(iq_1 x)]. \quad (3.18)$$

Вследствие того, что $|2\rho q_1| \ll k^2 a |Q_{11}|$, слагаемое, пропорциональное ρ в выражении (3.17), имеет смысл удерживать только при $x \approx 0$. Так как $q_1 \neq q_2$, нет необходимости удерживать такое же слагаемое в поле E_y . Из выражения (3.17) хорошо видно, как возрастает E_x при удалении от границы.

Зная импеданс плазмы

$$Z = \frac{E_y(0)}{H(0)} = \frac{k}{q_1} + \frac{k}{q_2} = A + iX, \quad (3.19)$$

можно найти коэффициент поглощения энергии падающей волны $W = 4A[(1+A)^2 + X^2]^{-1} \approx 4A$. Если q_2 — мнимое, то

$$W = 4 \left[\frac{-2\rho}{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 4\epsilon_2^2\rho}} \right]^{1/2}. \quad (3.20)$$

Отметим, что это поглощение связано с возбуждением в плазме продольной волны, уходящей на бесконечность. Поверхностным поглощением пренебрежено, поскольку оно меньше в $|k^2 a Q_{11}/2\rho q_1| \gg 1$ раз.

Приведем выражение для коэффициента поглощения (3.20) в некоторых частных случаях. Если $\epsilon_1^2 \gg -4\epsilon_2^2\rho$, то в случае колебаний на частоте $\omega \geq \omega_1$ при $\Omega_e^2 > 3\omega_e^2$

$$W = 2\beta_e \left[\frac{3\Omega_e^2\omega_1}{(\Omega_e^2 - 3\omega_e^2)(\omega - \omega_1)} \right]^{1/2}. \quad (3.20a)$$

В случае колебаний на частоте $\omega \geq \omega_2$ при $\Omega_e^2 \gg \omega_e^2$

$$W = \left[\frac{3(4\beta_i^2 + \mu\beta_e^2)\omega_2}{\omega - \omega_2} \right]^{1/2}. \quad (3.20b)$$

Если же $\epsilon_1^2 \ll -4\epsilon_2^2\rho$, то на частоте ω_1 при $\Omega_e^2 > 3\omega_e^2$

$$W = 4 \left[\frac{3\omega_1^4\beta_e^2}{2\omega_e^2(\Omega_e^2 - 3\omega_e^2)} \right]^{1/4}, \quad (3.20b)$$

а на частоте ω_2 при $\Omega_e \gg \omega_e$

$$W = 4 \left[\frac{3\omega_i^2}{8\Omega_i^2} (4\beta_i^2 + \mu\beta_e^2) \right]^{1/4}. \quad (3.20\text{г})$$

Из выражений (3.20а) — (3.20г) видно, что поглощение энергии падающей волны, связанное с возбуждением в плазме продольной волны, либо порядка $\beta_a(\omega - \omega_{1,2})^{-1/2}$, либо $\sim \sqrt{\beta_a}$ и больше обычного поверхностного поглощения, которое при диффузном отражении частиц плазмы от границы порядка β_a .

Если $\rho > 0$ (т. е. $\Omega_e^2 < 3\omega_e^2$), то на частоте $\omega \ll \omega_1$ при $\varepsilon_1^2 > 4\varepsilon_2^2 \rho$ в плазме возбуждаются две волны и коэффициент поглощения энергии падающей волны равен

$$W = 2\beta_e \left[\frac{3\omega_1\Omega_e^2}{(\omega_1 - \omega)(3\omega_e^2 - \Omega_e^2)} \right]^{1/2} + \frac{\omega_1^2}{\omega_e\Omega_e} \left[\frac{2(\omega_1 - \omega)}{\omega_1} \right]^{1/2}. \quad (3.21)$$

4. КОЛЕБАНИЯ В БЛИЗИ ЧАСТОТ, КРАТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫМ ЦИКЛОТРОННЫМ

Если $\lambda \ll 1$, то для частиц любого сорта вблизи частоты $\omega \approx s\omega_a$ ($s = 2, 3, \dots$) найдем, удерживая в ε_{ik} резонансные слагаемые,

$$\Delta(q) = \frac{q^2}{k^2} \left[\varepsilon_1 - x_\alpha \left(\frac{q^2}{k^2} \right)^{s-1} \right] - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_2) \times \\ \times x_\alpha \left(\frac{q^2}{k^2} \right)^{s-1} - \frac{s^2}{4} \beta_\alpha^4 x_\alpha^2 \left(\frac{q}{k} \right)^{4s}, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon_\alpha = 1$, если $\alpha = i$, $\varepsilon_\alpha = -1$ при $\alpha = e$,

$$x_\alpha = \frac{\Omega_\alpha^2 s^{2s-1} \beta_\alpha^{2(s-1)}}{\omega_\alpha(\omega - s\omega_\alpha)s!2^{2s-1}}.$$

Будем рассматривать плазму, в которой газокинетическое давление много меньше магнитного, т. е. $\beta_\alpha^2 \Omega_\alpha^2 / \omega_\alpha^2 \ll 1$. Кроме того, последним слагаемым в выражении (4.1) будем пренебречь. Ограничения, связанные с этими приближениями, укажем в каждом конкретном случае. Ради простоты будем предполагать также, что $\Omega_\alpha^2 \gg s^2 \omega_\alpha^2$.

Компоненты тензора ε_{ik} в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_1 - x_\alpha \left(\frac{q}{k} \right)^{2(s-1)}, \quad \varepsilon_{12} = i\varepsilon_2 - i\varepsilon_\alpha x_\alpha \left(\frac{q}{k} \right)^{2(s-1)}.$$

В этом и следующем разделе будем рассматривать полуограниченную плазму. Тогда электрические поля в плазме

$$E_x(x) = \sum_j \frac{ia}{\partial \Delta / \partial q_j} \left\{ \frac{2ie_{12}}{ka} H(0) + \left[\left(\varepsilon_{22} - \frac{q_j^2}{k^2} \right) Q_{11} + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{12} Q_{12} \right] E_x(0) + \left[\left(\varepsilon_{22} - \frac{q_j^2}{k^2} \right) Q_{12} - \varepsilon_{12} Q_{22} \right] E_y(0) \right\} \exp(iq_j x); \quad (4.2)$$

$$E_y(x) = \sum_j \frac{ia}{\partial \Delta / \partial q_j} \left\{ -\frac{2ie_{11}}{ka} H(0) + (-\varepsilon_{11}Q_{12} + \varepsilon_{12}Q_{11}) E_x(0) + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{11}Q_{22} + \varepsilon_{12}Q_{12}) E_v(0) \right\} \exp(iq_j x). \quad (4.3)$$

Рассмотрим — сначала высокочастотные колебания $\omega \sim s\omega_e$, предполагая выполненные неравенства $|x_e| = |x| \ll 1$, $\delta = |\omega_e/(\omega - s\omega_e)|^{1/(s-1)} \beta_e^2 \Omega_e^2/\omega_e^2 \ll 1$, которые дают возможность упростить выражение $\Delta(q)$. Решая уравнение $\Delta(q) = 0$, найдем

$$\frac{q_e^2}{k^2} = \frac{1}{\beta_e^2} \left[\frac{s! 2^{2s-1} (s\omega_e - \omega)}{s^{2s-1} (s^2 - 1) \omega_e} \right]^{1/(s-1)} \exp \frac{2\pi il}{s-1}, \quad l=1,2,\dots,s-1; \quad \frac{q_s}{k} = \frac{i\Omega_e}{s\omega_e}. \quad (4.4)$$

Выражение для q_l записано символически. Оно означает, что из $2(s-1)$ корней $s-1$ берется в верхней полуплоскости. Если $\omega < s\omega_e$, то из $s-1$ корней q_l в верхней полуплоскости один будет действительным (обозначим его через q_1), а остальные — комплексными. Волна, соответствующая q_1 , будет возбуждаться в плазме, остальные экспоненциально убывают от границы.

Вследствие того, что $|q_l| \gg |q_s|$, $|k^2 a Q_{lk}/q_s| \sim \Omega_e \beta_e / \omega_e \ll 1$, $|aq_l Q_{ik}/\varepsilon_1| \sim \sim |(s\omega_e - \omega)/\omega|^{1/(s-1)} \ll 1$, в «первом» приближении из выражений (4.2), (4.3) найдем

$$E_x(0) = i \frac{k}{sq_s} H(0), \quad E_y(0) = \frac{k}{q_s} H(0).$$

Эти значения подставим в правую часть (4.2), (4.3). Учтем, что $\varepsilon_{12}(q_l) = i\varepsilon_1(1 - 1/s)$, $\varepsilon_{12}(q_s) = -i\varepsilon_1/s$, $\varepsilon_{11}(q_s) = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{11}(q_l) = -k^2 \varepsilon_1^2 (1 - 1/s)^2 / q_l^2$ (это значение найдем из уравнения $\Delta(q) = 0$).

Тогда для полей в плазме получим

$$\frac{E_x(x)}{H(0)} = \sum_{l=1}^{s-1} \frac{ik}{sq_l} \left[1 + \frac{sq_l^2 a}{2(s-1)\varepsilon_1 q_s} \left(Q_{12} + i \frac{Q_{11}}{s} \right) \right] \times \\ \times \exp(iq_l x) + \frac{ik}{sq_s} \exp(iq_s x); \quad (4.5)$$

$$\frac{E_y(x)}{H(0)} = \sum_{l=1}^{s-1} \frac{k^3 \varepsilon_1 (s-1)}{q_l^3 s^2} \left[1 + \frac{sq_l^2 a}{2(s-1)\varepsilon_1 q_s} \left(Q_{12} + i \frac{Q_{11}}{s} \right) \right] \exp(iq_l x) + \\ + \left[\frac{k}{q_s} + \frac{k^3 a}{2q_s^2} \left(\frac{2}{s} Q_{12} + i \frac{Q_{11}}{s^2} + i Q_{22} \right) \right] \exp(iq_s x). \quad (4.6)$$

По порядку $\left| \frac{sq_l^2 a}{2(s-1)\varepsilon_1 q_s} \left(Q_{12} + i \frac{Q_{11}}{s} \right) \right| \sim \frac{\omega_e}{\beta_e \Omega_e} \left(\frac{s\omega_e - \omega}{\omega_e} \right)^{1/(s-1)}$. Эта

величина обусловлена поверхностными эффектами и может быть как меньше, так и больше единицы. На расстоянии $x > |q_l|^{-1}$ от границы плазмы в выражениях (4.5), (4.6) остается только слагаемое с $l=1$, поскольку остальные экспоненциально малы. Амплитуда поля E_x при этом будет в $q_1^2/k^2 |\varepsilon_1| \sim \delta^{-1}$ раз больше амплитуды поля E_y .

Удерживая наибольшие слагаемые из выражения (4.6), найдем импеданс плазмы

$$Z = \sum_{l=1}^{s-1} \frac{-k^3 \Omega_e^2}{q_l^3 \omega_e^2 (s+1) s^2} + \frac{k}{q_s} + \frac{k^3 a}{2q_s^2} \left(\frac{2}{s} Q_{12} + i \frac{Q_{11}}{s^2} + i Q_{22} \right) \quad (4.7)$$

и коэффициент поглощения энергии волны

$$W = 4 \operatorname{Re} Z = \frac{2\beta_e s^2 (16s^2 - 1)}{\sqrt{\pi(4s^2 - 1)(4s^2 - 9)}} - \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{s-1} \frac{4k^3 \Omega_e^2}{q_l^3 \omega_e^2 s^2 (s+1)}. \quad (4.8)$$

Отношение второго слагаемого, которое связано с возбуждением в плазме волны, к первому, являющемуся поверхностным (поглощением, порядка величины $(\Omega_e^2 \beta_e^2 / \omega_e^2) (\omega_e / (s\omega_e - \omega))^{3/2(s-1)}$) и может быть как меньше, так и порядка единицы. Если $s = 2$, то (заметим, что q_1 надо взять отрицательным, поскольку это волна с аномальной дисперсией, а энергия уносится на $x = \infty$)

$$W = \frac{24\beta_e}{s\sqrt{\pi}} + \frac{\Omega_e^2 \beta_e^3}{3\omega_e^2} \left[\frac{3\omega_e}{2(2\omega_e - \omega)} \right]^{3/2}. \quad (4.8a)$$

Рассмотрим теперь случай $|x| \gg 1, s = 2$. Последнее неравенство означает, что $\Omega_e^2 \beta_e^2 \gg \omega_e (2\omega_e - \omega)$. Решая уравнение $\Delta(q) = 0$ при пренебрежении слагаемым, пропорциональным x^2 , найдем

$$\frac{q_1}{k} = - \left(\frac{2\omega_e - \omega}{2\omega_e \beta_e^2} \right)^{1/2}, \quad \frac{q_2}{k} = \frac{i\Omega_e}{\sqrt{3}\omega_e}. \quad (4.9)$$

Видно, что $|q_2| \gg |q_1| \gg k$. Пренебрежение слагаемым, $\sim x^2$ в Δ означает, что резонансная расстройка не должна быть слишком малой: $(2\omega_e - \omega)/\omega_e \gg (\Omega_e \beta_e / \omega_e)^6$.

Поля в плазме имеют следующий вид:

$$\frac{E_x(x)}{H(0)} = -i \frac{k \exp(iq_1 x)}{4xq_1} + \frac{ik}{q_2} \exp(iq_2 x); \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_y(x)}{H(0)} &= \frac{k}{4xq_1} \left[1 + i \frac{ak^2}{2q_s} (Q_{22} - Q_{11}) \right] \exp(iq_1 x) + \\ &+ \left[\frac{k}{q_2} + \frac{ak^3}{2q_2^2} (2Q_{12} + iQ_{11} + iQ_{22}) \right] \exp(iq_2 x). \end{aligned} \quad (4.11)$$

При $x > |q_2|^{-1}$ вторые слагаемые в этих выражениях экспоненциально малы. В $E_x(x)$ удерживать слагаемые, пропорциональные Q_{lk} , нет необходимости. Из выражений (4.10) и (4.11) видно, что амплитудные значения E_x и E_y равны, при уменьшении разности $2\omega_e - \omega$ попечное поле возрастает.

Удерживая наибольшие слагаемые, найдем

$$Z = \frac{k}{q_2} + \frac{k}{4xq_1} + \frac{ak^3}{2q_2^2} (2Q_{12} + iQ_{11} + iQ_{22}); \quad (4.12)$$

$$W = 4\beta_e \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2 \beta_e^2} \sqrt{\frac{2\omega_e - \omega}{2\omega_e}} \right). \quad (4.13)$$

Первое слагаемое в (4.13) обусловлено поверхностным поглощением, а второе — возбуждением в плазме волны. Отметим, что поверхностное поглощение как в этом, так и в предыдущем случае не зависит от плотности плазмы.

5. КОЛЕБАНИЯ В БЛИЗИ ЧАСТОТ, КРАТНЫХ ИОННЫМ ЦИКЛОТРОННЫМ

Пренебрегая величиной, пропорциональной x_i^2 , и предполагая выполнеными условия $|x_i| \ll 1$, $\delta_i = \beta_i^2 \frac{\Omega_i^2}{\omega_i^2} \left(\frac{\omega_i}{s\omega_i - \omega} \right)^{1/(s-1)} \ll 1$, из уравнения $\Delta(q) = 0$ найдем

$$\frac{q_i^2}{k^2} = \frac{1}{\beta_i^2} \left[\frac{s! 2^{2s-1} (s\omega_i - \omega)}{(s^2 - 1)s^{2s-1}\omega_i} \right]^{1/(s-1)} \exp \frac{2\pi i l}{s-1}, \quad l=1,2,\dots,s-1; \quad \frac{q_s}{k} = \frac{\Omega_i}{\omega_i}. \quad (5.1)$$

По порядку величины $|q_i/q_s| \sim \delta^{-1/2} \gg 1$. Из $s-1$ значений q_l в верхней полуплоскости только один корень (q_1) действительный. Этот корень отрицателен, поскольку ему соответствует распространяющаяся волна с аномальной дисперсией. Вследствие того, что q_s — также действительное число, в плазме возбуждается и вторая волна. Подобно тому, как в случае высокочастотных колебаний, для полей в плазме получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{E_x(x)}{H(0)} &= \sum_{l=1}^{s-1} \frac{ik}{q_l} \left[1 + \frac{q_l^2 a}{2(s-1)\epsilon_1 q_s} (Q_{12} - isQ_{11}) \right] \times \\ &\quad \times \exp(iq_l x) - i \frac{sk}{q_s} \exp(iq_s x); \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_y(x)}{H(0)} &= \sum_{l=1}^{s-1} \frac{(s-1)k^3 \epsilon_1}{q_l^3} \left[1 + \frac{q_l^2 a}{2(s-1)\epsilon_1 q_s} (Q_{12} - isQ_{11}) \right] \times \\ &\quad \times \exp(iq_l x) + \left[\frac{k}{q_s} + \frac{k^3 a}{2q_s^2} (is^2 Q_{11} + iQ_{22} - 2sQ_{12}) \right] \exp(iq_s x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Величина $\left| \frac{q_l^2 a}{2(s-1)\epsilon_1 q_s} (Q_{12} - isQ_{11}) \right| \sim \frac{\omega_i}{\beta_i \Omega_i} \left(\frac{s\omega_i - \omega}{\omega_i} \right)^{1/(s-1)}$ может быть как меньше, так и больше единицы и, следовательно, может увеличивать амплитуду «продольного» слагаемого волны. Вообще же «поперечное» слагаемое в полях больше «продольного». Коэффициент поглощения энергии падающей волны равен

$$\begin{aligned} W &= 4 \frac{k}{q_s} + \frac{2k^2 a}{q_s^2} \operatorname{Re}(is^2 Q_{11} + iQ_{22} - 2sQ_{12}) + \\ &+ 4 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{s-1} \frac{(s-1)k^3 \epsilon_1}{q_l^3} \left[1 + \frac{q_l^2 a}{2(s-1)\epsilon_1 q_s} (Q_{12} - isQ_{11}) \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Первое слагаемое в (5.4) — энергия, идущая на возбуждение поперечного поля волны, меньшее второе — следствие поверхностных эффек-

тов, а третье—энергия, идущая на возбуждение продольной составляющей поля волны. Пренебрегая последней, найдем

$$W = 4 \frac{\omega_i}{\Omega_i} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\beta_i + 2\beta_e \mu). \quad (5.4a)$$

Для полуограниченной плазмы это значение можно было бы получить и при пренебрежении пространственной дисперсией. Замечательной особенностью формул (5.3), (5.4а) является тот факт, что поверхностные явления приводят к уменьшению амплитуды и энергии, идущей на возбуждение поперечной волны. В то же время поверхностные эффекты приводят к увеличению амплитуды продольной волны. Понятому, это связано с экранировкой плазмы поверхностным зарядом [15].

Рассмотрим теперь $|x_i| \gg 1$, $s = 2$. Тогда для корней уравнения $\Delta(q) = 0$ получим следующие значения:

$$\frac{q_1}{k} = -\frac{1}{\beta_i} \left(\frac{2\omega_i - \omega}{\omega_i} \right)^{1/2}, \quad \frac{q_2}{k} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Omega_i}{\omega_i}. \quad (5.5)$$

Таким образом, и в этом случае в плазме распространяются две волны, если $\omega < 2\omega_i$. Условие $|x_i| \gg 1$ и пренебрежение величиной, пропорциональной x_i^2 в выражении (4.1), приводят к следующим ограничениям:

$$\left(\frac{\Omega_i \beta_i}{\omega_i} \right)^2 \gg \frac{2\omega_i - \omega}{\omega_i} \gg \left(\beta_i \frac{\Omega_i}{\omega_i} \right)^6.$$

Электрическое поле в плазме имеет такой вид:

$$\frac{E_x(x)}{H(0)} = \frac{ik}{4x_i q_1} \exp(iq_1 x) - i \frac{k}{q_2} \exp(iq_2 x); \quad (5.6)$$

$$\frac{E_y(x)}{H(0)} = \frac{k}{4x_i q_1} \exp(iq_1 x) + \frac{k}{q_2} \exp(iq_2 x). \quad (5.7)$$

Коэффициент поглощения энергии падающей волны равен

$$W = \frac{2\omega_i^2}{\Omega_i^2 \beta_i^2} \sqrt{\frac{2\omega_i - \omega}{\omega_i}} + 24 \frac{\omega_i}{\Omega_i}. \quad (5.8)$$

Удерживать слагаемые, пропорциональные Q_{lk} , нет необходимости, поскольку их отношение к оставленным порядка $\beta_i \Omega_i / \omega_i \ll 1$. Из выражений (5.6)–(5.8) видно, что амплитуда волны с волновым числом q_2 и соответственно энергия, идущая на возбуждение этой волны, больше, чем с q_1 , но амплитуды обоих полей равны.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Труды ФИАН СССР, 6, 201 (1955).
2. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).
3. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 36, 1457 (1959).
4. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, 37, 695 (1959); 38, 912 (1960).
5. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 39, 845 (1960).
6. В. П. Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, 41, 159 (1961).
7. Э. А. Канер, Ю. А. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 1, 47 (1962).
8. Е. П. Фетисов, Ядерный синтез, 3, вып. 3, 208 (1963).
9. В. В. Арсенин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 3, 457 (1963).

10. А. Н. Кондратенко, В. И. Мирошниченко, ЖТФ, 35, 2154 (1965); 36, 25 (1966); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 272 (1966).
11. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, 36, 398 (1966).
12. А. Н. Кондратенко, И. Н. Онищенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 175 (1967).
13. M. C. Jones, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., 278, 256 (1964).
14. Ю. В. Богомолов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 462 (1966).
15. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Вестник МГУ, сер. III, № 2, 3 (1963).

Поступила в редакцию
12 сентября 1966 г.

ON ELECTROMAGNETIC FIELD PENETRATION INTO MAGNETOACTIVE PLASMA

A. N. Kondratenko

In the approximation of a weak spatial dispersion the author considers the problem of electromagnetic wave propagation through the plasma in a constant magnetic field parallel to the plasma boundary when magnetic vector of an incident wave is parallel to the constant field. The absorption coefficient of the wave energy has been determined for different partial cases. Longitudinal wave excitation has been considered.

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ПОТОК—ПЛАЗМА

С. М. Файнштейн

Рассматриваются стационарные нелинейные волны в нагретой плазме, пронизываемой квазинейтральным потоком заряженных частиц. Показано, что при определенных условиях в такой системе существуют уединенные волны; проведен численный расчет структуры этих волн для характерных значений параметров солнечной короны.

В литературе (см., например, [1, 2, 3]) подробно рассмотрен вопрос о бесстолкновительных ударных волнах в изотропной плазме и в плазме с магнитным полем. В [1] качественно описана схема исследования нелинейных решений системы уравнений, которой в линейной теории соответствует дисперсионное уравнение $D(\omega, \mathbf{k})=0$. Настоящая работа посвящена исследованию возможности существования нелинейного стационарного решения в системе, состоящей из нагретой квазинейтральной плазмы, пронизываемой моноскоростным квазинейтральным потоком заряженных частиц.

В линейном приближении система поток—плазма описывается следующим дисперсионным уравнением [4]:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - v_T^2 k^2} + \frac{\omega_{0s}^2}{(\omega - k V_0)^2} = 1,$$

где $\omega_0^2 = 4\pi Ne^2/m$; $\omega_{0s}^2 = 4\pi N_s e^2/m$, \mathbf{k} —волновой вектор, V_0 —скорость потока.

Как показано в [5], указанное дисперсионное уравнение может иметь решения $\omega(\mathbf{k})$ с почти линейной зависимостью ω от k , и, следовательно, в нелинейном случае должны существовать уединенные волны. Попытаемся их найти.

Электроны* указанной двухпотоковой системы описываются квазигидродинамическими уравнениями [6]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e(\rho + \rho_s), \\ m \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right\} &= e \mathbf{E} - \frac{e T}{\tilde{\rho}} \nabla \tilde{\rho}, \\ m \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s \right\} &= e \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{\rho} \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_s}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{\rho}_s \mathbf{v}_s) &= 0, \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi. \end{aligned} \tag{1a}$$

* Мы рассматриваем достаточно быстрые процессы, когда движением ионов можно пренебречь.

Здесь \mathbf{E} — электрическое поле, \mathbf{v} и \mathbf{v}_s — скорости электронов плазмы и потока, $\rho = N + \rho_s$ — полная концентрация частиц в основной плазме, N — равновесное значение концентрации в отсутствие поля, $\rho_s = N_s + \rho_s$ — концентрация электронов в потоке, N_s — концентрация электронов потока без поля, T — температура основной плазмы.

Запишем уравнения (1а) в системе координат, движущейся со скоростью \mathbf{u} , равной скорости перемещения стационарного решения (см. рис. 1). Все переменные считаем зависящими от одной координаты x . Система уравнений (1а) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= -4\pi e(\rho + \rho_s), \\ \frac{d}{dx} \left(v^2 + \frac{2e\varphi}{m} + 2v_T^2 \ln \frac{\rho + N}{N_0} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(v_s^2 + \frac{2e\varphi}{m} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \{(\rho + N)v\} &= 0, \quad \frac{d}{dx} \{(\rho_s + N_s)v_s\} = 0. \end{aligned} \quad (1б)$$

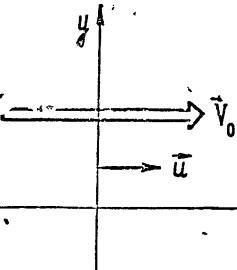


Рис. 1.

Здесь $N_0 = N + N_s$, $v_T^2 = \frac{kT}{m}$, k — постоянная Больцмана.

Исключая все переменные, кроме потенциала электрического поля φ , получим уравнение

$$\begin{aligned} A_2^2 \left(N_0 - \frac{\varphi_{xx}}{4\pi e} - \frac{A_1}{(B_1 - 2e\varphi/m)^{1/2}} \right)^{-2} + \frac{2e\varphi}{m} + \\ + 2v_T^2 \ln \left\{ \left[N_0 - \frac{\varphi_{xx}}{4\pi e} - \frac{A_1}{(B_1 - 2e\varphi/m)^{1/2}} \right] N_0^{-1} \right\} = B_2, \end{aligned} \quad (2a)$$

$A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ — интегралы системы (1б), значения которых можно определить из граничных условий:

$$\begin{aligned} A_1 &= v_s(\rho_s + N_s), \quad B_1 = v_s^2 + \frac{2e\varphi}{m}, \\ A_2 &= v(\rho + N), \quad B_2 = v^2 + \frac{2e\varphi}{m} + 2v_T^2 \ln \frac{\rho + N}{N_0}. \end{aligned}$$

Введем безразмерные переменные

$$z = \frac{\omega_0}{V_0} x, \quad \Phi = \frac{2e\varphi}{m V_0^2},$$

где V_0 — равновесное значение скорости потока, $\omega_0^2 = 4\pi N_0 e^2 / m$. После преобразований (2а) примет вид

$$\left(1 - \frac{\Phi_{zz}}{2} - \frac{\delta_1}{V\delta - \Phi} \right)^{-2} + \beta\Phi + \beta_T \ln \left(1 - \frac{\Phi_{zz}}{2} - \frac{\delta_1}{V\delta - \Phi} \right) = \gamma, \quad (2б)$$

где

$$\delta_1 = \frac{A_1}{N_0 V_0}, \quad \delta = \frac{B_1}{V_0^2}, \quad \beta = \frac{(N_0 V_0)^2}{A_2^2}, \quad \beta_T = \frac{2v_T^2 N_0^2}{A_2^2}, \quad \gamma = \frac{B_2 N_0^2}{A_2^2}.$$

Исследуем уравнение (2б) на фазовой плоскости (Φ, Φ_z') . Состояния равновесия определяются уравнением

$$\left(1 - \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta - \Phi}}\right)^{-2} + \beta\Phi + \beta_T \ln \left(1 - \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta - \Phi}}\right) = \gamma. \quad (3)$$

Тип состояния равновесия зависит от характеристического уравнения [7]

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

В нашем случае $\sigma = 0$,

$$\Delta = -\frac{\beta\delta_1^2\xi^3 - \beta_T\xi^2(1-\xi)^3/2 + (1-\xi)^3}{\delta_1^2(\beta_T\xi^2/2 - 1)}, \quad (4)$$

где $\xi = 1 - \delta_1/\sqrt{\delta - \Phi}$.

Если проинтегрировать уравнение (2а) один раз, получим фазовые траектории системы в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Phi_z'}{2}\right)^2 &= -\frac{1}{w^2\beta} + \frac{2}{w\beta} - \frac{\beta_T}{\beta} \ln w + \frac{\beta_T}{\beta} w + \\ &+ \frac{2\delta_1}{\sqrt{\beta}} \sqrt{G + \beta_T \ln w + \frac{1}{w^2}} + C, \\ \Phi &= \frac{1}{\beta} \left(\gamma - \frac{1}{w^2} - \beta_T \ln w \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$G = \beta\delta - \gamma$, C — произвольная постоянная.

Рассмотрим случай холодной плазмы, т. е. $v_T = 0$ и $\beta_T = 0$. Из (3) следует, что существует одно состояние равновесия — центр, фазовые траектории соответствуют периодическим нелинейным решениям (см. рис. 2). Из (2б) получим, что при $\Phi \rightarrow \delta$ или $\Phi \rightarrow \gamma/\beta$ скорость изменения поля $\Phi_{zz}' \gg 1$. Качественно зависимость поля Φ_z' от координаты z изображена на рис. 3.

При $\beta_T \neq 0^*$ исследование значительно усложняется. Можно выделить несколько возможностей.

1) $\beta_T/2 < 1$, $\delta_1 > 0$ — быстрая волна ($u > V_0$) и достаточно слабый поток. Здесь существует одно состояние равновесия — центр, фазовые траектории — замкнутые кривые.

2) $\beta_T/2 > 1$ — сильный поток, $\delta_1 > 0$, т. е. $u > V_0$. В этом случае может существовать несколько состояний равновесия типа седло и центр, т. е. возможна единенная волна [1].

* Квазигидродинамические уравнения (1а) справедливы для описания процессов, фазовая скорость которых много больше тепловой скорости; значит, параметр $\beta_T/2$ при слабом потоке ($N_s < N$) всегда меньше единицы. В случае сильного потока ($N_s > N$) он может быть больше единицы.

3) $\beta_T/2 < 1$ — слабый поток, $\delta_1 < 0$ ($u < V_0$). В этом варианте возможно уединенное решение. Ниже будет проведен численный расчет для конкретных значений параметров, характерных для солнечной короны.

4) $\beta_T/2 > 1$ — сильный поток, $\delta_1 < 0$. Здесь существует одно состояние равновесия — седло.

Мы ищем уединенную волну, следовательно, граничные условия имеют вид

$$v_{x=-\infty} = u, \quad v_{s, x=-\infty} = u - V_0,$$

$$E_{x=-\infty} = 0,$$

$$\rho_{x=-\infty} = \rho_{s, x=-\infty} = 0.$$

Из литературы (см. [8]) можно взять следующие численные значения параметров солнечной короны:

$$V_0 \simeq 10^9 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad N_s/N \simeq 10^{-2}, \quad T \simeq 10^6 \text{ }^\circ\text{К}.$$

Пусть $\beta_T/2 \simeq 0,01$, тогда остальные параметры равны $\beta = 2,08$, $\delta = 0,12$, $\delta_1 = -3,5 \cdot 10^{-3}$, $u/V_0 = 0,65$, $\gamma = 1,02$.

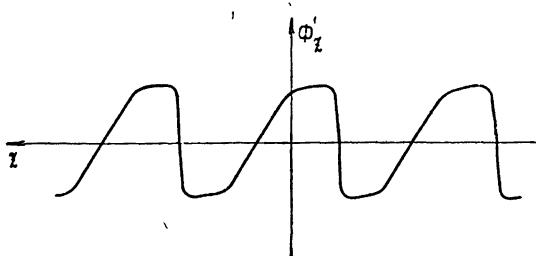


Рис. 3.

Численное решение уравнения (3) позволяет определить состояния равновесия: $\Phi_1 \simeq 0,01$ — центр, $\Phi_2 \simeq 0,12$ — седло.

Задавая произвольную постоянную C так, чтобы фазовая траектория проходила через седло, получим уединенную волну ($C = -0,48$). Приближенный вид фазовой траектории и

профилей волны изображен на рис. 4, 5. Можно оценить максимальное значение электрического поля в волне и ширину импульса: $\Phi_0 \simeq 94$ в $E_0 \simeq 66 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$, т. е. $L \simeq 6 \text{ см}$.

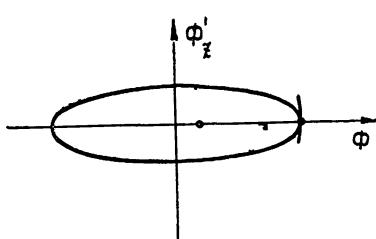


Рис. 4.

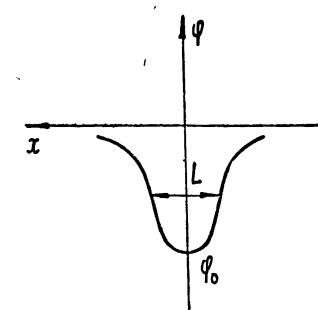


Рис. 5.

Автор признателен А. А. Андронову, В. В. Железнякову, М. С. Ковнеру и М. И. Рабиновичу за ценные замечания, высказанные при обсуждении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964.
2. R. Noerlinger, *Astrophys. J.*, **133**, 1034 (1961).
3. M. Kito and I. Kaji, *J. Phys. Soc. Japan*, **19**, № 4, 555 (1964).
4. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М., 1961.
5. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания плазмы, Атомиздат, М., 1964.
6. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., **35**, 694 (1958).
7. А. А. Андронов, Е. А. Леонович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, изд. Наука, М., 1966.
8. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 сентября 1966 г.

NONLINEAR WAVES IN BEAM-PLASMA SYSTEM

S. M. Fainstein

Stationary nonlinear waves in a heated plasma pierced by a quasi-neutral beam of charged particles are considered. Solitary waves are shown to exist in such a system under definite conditions. Calculation of structure of these waves is made for typical parameters of the solar corona.

УДК 539.287

О ВРАЩАТЕЛЬНОМ СПЕКТРЕ ПОГЛОЩЕНИЯ МОЛЕКУЛ ВОДЯНОГО ПАРА В ВОЗБУЖДЕННОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

A. P. Наумов

Рассматривается вращательный спектр молекул водяного пара (мономеров), находящихся в колебательном состоянии (0,1,0). Показано, что ряд линий этого спектра дают на резонансных частотах ($\nu \approx 600 - 1400$ Гц) заметный вклад в коэффициент поглощения мономеров атмосферного водяного пара на уровне моря. Отмечается, что детальное знание вращательного спектра мономеров H_2O в колебательном состоянии (0,1,0) представляет интерес для теории поглощения субмиллиметровых и миллиметровых радиоволн в земной атмосфере.

Как известно [1-4], миллиметровые и субмиллиметровые радиоволны в земной атмосфере, лишенной гидрометеоров, поглощаются молекулами кислорода и водяного пара. Несмотря на значительные успехи, достигнутые в последнее время в экспериментальных и теоретических исследованиях молекулярного поглощения, и до сих пор внимание специалистов привлекает расхождение измеренных и вычисленных коэффициентов поглощения водяного пара в относительных окнах прозрачности (подробнее см. [5]).

Идея Жевакина о возможном устранении отмеченного расхождения при учете вклада полимеров (в первую очередь, димеров) H_2O в теоретический коэффициент поглощения атмосферного водяного пара получила количественное развитие в [6, 7]. Вычисленный суммарный коэффициент поглощения мономеров [3, 5] и димеров H_2O [7] находится в хорошем количественном согласии с экспериментальными коэффициентами поглощения в окнах прозрачности диапазона $\lambda \geq 0,7$ мм (см. [7-9] а также обзор [10]). Такое количественное согласие имеет место при определенных концентрации и поглощательных свойствах (расположение, интенсивности, ширины спектральных линий) димеров H_2O . Последние рассчитывались в [7] методами квантовой химии*. Спектроскопическое подтверждение принятых в [7] параметров спектра димеров H_2O , по-видимому, разрешило бы дискутируемый вопрос при $\lambda \geq 0,7$ мм.

Однако на пути спектроскопических исследований молекулы димера H_2O имеются немалые трудности: во-первых, концентрация димеров в атмосфере невелика ($\approx 0,001\%$ по числу частиц в нижних слоях атмосферы [7]); во-вторых, спектр поглощения димеров H_2O всегда реализуется вместе со спектром поглощения мономеров H_2O . Все же информация о том, является ли вклад димеров H_2O в атмосферный коэффициент поглощения водяного пара достаточным для объяснения существующего расхождения между вычисленными в [3, 5] и измеренными зна-

* Соответствующие данные для вращательного спектра молекул мономеров H_2O , находящихся в основном колебательном состоянии, весьма надежно установлены теоретически и экспериментально.

чениями γ в относительных окнах прозрачности, может быть получена, в частности, при экспериментальном исследовании особенностей вращательного спектра паров H_2O , которые нельзя отождествить со спектром мономеров (см. рис. 1 в [7]). Эти особенности естественно интерпретировать как интенсивные линии в спектре поглощения димеров H_2O ; они должны быть наиболее заметными при повышенном содержании водяного пара и пониженном общем давлении (см. формулы (15) в [3] и (1) в [7]). Однако подобная интерпретация вращательного спектра водяного пара может быть выполнена лишь при детальном знании спектра мономеров H_2O .

Цель данной статьи состоит в том, чтобы обратить внимание на ряд слабых, но заметных даже при атмосферных условиях линий поглощения мономеров водяного пара* в диапазоне $\lambda \approx 0,14 \div 0,45 \text{ mm}$ (частота $v \approx 600 \div 1400 \text{ Гц}$), принадлежащих вращательному спектру не основного колебательного состояния паров $H_2O (0, 0, 0)$ **, а возбужденного колебательного состояния $(0, 1, 0)$ ***, которые необходимо учитывать при вышеупомянутых экспериментальных исследованиях.

1. Резонансные длины волн λ_{ij} (или волновые числа $1/\lambda_{ij}$) вращательного спектра возбужденного колебательного состояния $(0, 1, 0)$ молекулы H_2O находятся из известных термов v_i, v_j [12] по обычным правилам отбора [13]:

$$\Delta J = 0, \pm 1; \quad \Delta v_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3), \\ + + \leftrightarrow - -, \quad + - \leftrightarrow - +.$$

Вычисленные указанным образом значения $1/\lambda_{ij}$ (до 75 см^{-1} ; $J \leq 10$) приведены в таблице 1****.

Поскольку центробежное возмущение является различным для каждого из вращательных состояний молекулы H_2O , величины $1/\lambda_{ij}$ для рассматриваемого спектра отличаются от значений $1/\lambda_{ij}$ для тех же переходов ($J_\tau - J'_\tau$) вращательного спектра основного колебательного состояния. Так, например, во вращательном спектре $(0, 0, 0)$ водяного пара самой длинноволновой линией ($J \leq 12$) является линия, отвечающая переходу между уровнями $5_{-1} - 6_{-5}$ ($\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$). Во вращательном же спектре $(0, 1, 0)$ наиболее длинноволновой является

* При определенных лабораторных условиях эти линии, разумеется, могут больше выделяться на фоне поглощения в близрасположенных относительных окнах прозрачности (см. выше). Отмеченное обстоятельство, в свою очередь, может быть использовано при экспериментальном определении параметров вращательного спектра молекул водяного пара в колебательном состоянии $(0, 1, 0)$ (см. ниже).

** Запись $(0, 0, 0)$ означает, что колебательные квантовые числа $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. В работах [3, 5, 11], в которых выполнено сравнение экспериментальных и теоретических коэффициентов поглощения водяного пара, под теоретическими величинами понимаются значения коэффициентов поглощения мономеров водяного пара, обусловленные вращательным спектром только основного колебательного состояния $(0, 0, 0)$, причем в расчете учитывались переходы между уровнями с квантовым числом полного момента количества движения $J < 12$. Переходы между уровнями с $J > 12$ дают пренебрежимо малый вклад в коэффициент поглощения водяного пара при нормальных атмосферных условиях [11].

*** Фундаментальная колебательная частота водяного пара $\omega_2 = 1595 \text{ см}^{-1}$ является наименьшей, и поэтому переходы между вращательными уровнями состояния $(0, 1, 0)$, т. е. при квантовых числах $v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 0$, наиболее интенсивны по сравнению с теми же вращательными переходами других возбужденных колебательных состояний $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$ и т. д. Соответствующие оценки выполнены ниже.

**** Вращательные уровни $(0, 1, 0)$ мономеров водяного пара с квантовым числом $J \approx 10$ населены столь же слабо, как и вращательные уровни $(0, 0, 0)$ с $J \approx 12 \div 15$ (см. табл. 2 в [12]).

линия, отвечающая переходу $9_{-3} - 10_{-7}$ ($\lambda_{ij} = 7,14 \text{ см}$). Что касается линии $5_{-1} - 6_{-5}$ спектра $(0,1,0)$, то она оказывается центрированной при $\lambda_{ij} = 0,88 \text{ мм}$, т. е. приходится на субмиллиметровое окно прозрачности во вращательном спектре основного колебательного состояния (см. рис. 1 в [3, 5]).

Таблица 1

Волновые числа $1/\lambda_{ij}$ ($1/\lambda_{ij} < 75 \text{ см}^{-1}$; $J < 10$) вращательного спектра мономеров водяного пара в колебательном состоянии $v_1=0, v_2=1, v_3=0$

№ п/п	Квантовый переход	$\frac{1}{\lambda_{ij}} (\text{см}^{-1})$	№ п/п	Квантовый переход	$\frac{1}{\lambda_{ij}} (\text{см}^{-1})$
1	$9_{-3} - 10_{-7}$	0,14	37	$5_2 - 6_0$	30,89
2	$3_3 - 4_{-1}$	0,23	38	$7_{-1} - 8_{-5}$	32,38
3	$4_0 - 5_{-4}$	0,24	39	$6_0 - 7_{-4}$	35,92
4	$4_3 - 5_1$	0,92	40	$9_5 - 10_1$	38,23
5	$3_1 - 4_{-3}$	2,47	41	$8_4 - 9_3$	38,37
6	$4_4 - 5_0$	3,16	42	$9_4 - 10_2$	38,53
7	$9_8 - 10_6$	3,41	43	$8_3 - 9_1$	40,27
8	$9_9 - 10_5$	3,41	44	$0_0 - 1_0$	40,35
9	$2_2 - 3_{-2}$	4,01	45	$3_{-3} - 3_{-1}$	40,38
10	$8_8 - 9_4$	4,28	46	$7_3 - 8_{-1}$	40,45
11	$8_7 - 9_5$	4,28	47	$6_2 - 7_{-2}$	40,79
12	$5_4 - 6_2$	6,97	48	$3_{-1} - 3_1$	46,86
13	$5_5 - 6_1$	7,85	49	$7_2 - 8_0$	47,52
14	$7_6 - 8_4$	8,74	50	$4_{-2} - 4_0$	47,62
15	$7_7 - 8_3$	8,74	51	$4_1 - 5_{-1}$	49,18
16	$6_5 - 7_3$	9,94	52	$2_0 - 2_2$	50,02
17	$6_6 - 7_2$	10,09	53	$5_{-3} - 5_{-1}$	53,27
18	$5_{-1} - 6_{-5}$	11,34	54	$7_{-3} - 8_{-7}$	54,54
19	$7_5 - 8_1$	14,33	55	$2_{-1} - 3_{-3}$	54,85
20	$8_6 - 9_2$	14,42	56	$4_{-4} - 4_{-2}$	58,07
21	$8_5 - 9_3$	14,52	57	$7_1 - 8_{-3}$	58,17
22	$7_4 - 8_2$	14,83	58	$1_{-1} - 2_{-1}$	58,66
23	$3_2 - 4_0$	15,44	59	$3_0 - 4_{-2}$	61,55
24	$6_4 - 7_0$	16,68	60	$9_3 - 10_{-1}$	62,55
25	$4_2 - 5_{-2}$	18,12	61	$8_2 - 9_{-2}$	63,17
26	$9_7 - 10_3$	18,37	62	$6_1 - 7_{-1}$	64,48
27	$9_6 - 10_4$	18,37	63	$6_{-4} - 6_{-2}$	64,84
28	$6_3 - 7_1$	19,16	64	$2_{-1} - 2_1$	65,44
29	$5_3 - 6$	19,77	65	$8_0 - 9_{-4}$	69,90
30	$5_{-1} - 4_{-6}$	19,96	66	$7_{-3} - 7_{-1}$	70,49
31	$4_{-1} - 1_1$	22,07	67	$6_{-2} - 6_0$	71,33
32	$2_{-2} - 2_0$	28,69	68	$9_{-1} - 10_{-5}$	73,50
33	$2_1 - 3_{-1}$	29,79	69	$3_{-2} - 3_0$	74,24
34	$6_{-2} - 7_{-6}$	29,96	70	$2_{-2} - 3_{-2}$	74,70
35	$1_0 - 2_{-2}$	29,99	71	$8_{-4} - 8_{-2}$	74,85
36	$5_1 - 6_{-3}$	30,79			

Мы вычислили коэффициент поглощения мономеров водяного пара при нормальных атмосферных условиях (давление $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$, температура $T = 293^\circ\text{K}$, абсолютная влажность $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$) в диапазоне $1/\lambda = 10 - 75 \text{ см}^{-1}$, как и в [3, 11, 14], по формуле

$$\begin{aligned} \gamma \left[\frac{\partial \delta}{\kappa m} \right] = & \frac{0,26085 \cdot 10^5}{G(T)} \rho \frac{1}{\lambda^2} \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_{ij}} \beta_{ij} |\exp(-2\pi\nu_j \hbar c/kT) - \\ & - \exp(-2\pi\nu_j \hbar c/kT)| 0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)_{ij}^{H_2O-N_2} \frac{P}{760} \left(\frac{T}{300} \right)^{-n_{ij}} \times \\ & \times \left\{ \left[\left(\frac{1}{\lambda_{ij}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]^2 + 4 \left[0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)_{ij}^{H_2O-N_2} \frac{P}{760} \left(\frac{T}{300} \right)^{-n_{ij}} \right]^2 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь сохранены все обозначения формулы (15) работы [3]. В расчете использовались 871 линия вращательного спектра основного колебательного состояния молекулы H_2O [3] и 71 линия вращательного спектра колебательного состояния $(0, 1, 0)$ (см. табл. 1).

Величины β_{ij} выражаются через матричные элементы направляющих косинусов Φ_{Fg} следующим образом:

$$\beta_{ij} = [2 - (-1)^{|v_i|}] \sum_F \sum_g |\Phi_{Fg}^A|^2.$$

Матричные элементы Φ_{Fg} находились из таблиц Швандемана и Лаури [15] по известным параметрам асимметрии Рэя (вращательные константы молекулы H_2O в состояниях $(0, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$ даны в [12]). Термы v_i, v_j линий вращательного спектра $(0, 1, 0)$ брались из [12], а полуширины $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$ и температурные коэффициенты n_{ij} для этих линий из-за отсутствия соответствующих данных полагались равными значениям $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$ и n_{ij} для тех же переходов вращательного спектра основного колебательного состояния [16].

Во втором разделе статьи молекулярные термы снабжены дополнительно индексом $K(v_i^K, v_j^K; K = 0; 1)$, причем индекс $K = 0$ относится к вращательным термам основного колебательного состояния, а $K = 1$ — к вращательным термам колебательного состояния $(0, 1, 0)$.

2. На рис. 1 представлены результаты выполненного расчета коэффициента поглощения γ водяного пара в области $1/\lambda = 10 \div 75 \text{ см}^{-1}$. Цифрами на рисунке помечены 5 наиболее интенсивных линий вращательного спектра $(0, 1, 0)$, приходящихся на указанный диапазон. Из них наиболее выделяется среди линий вращательного спектра основного колебательного состояния линия 1 (квантовый переход $1_{-1} - 1_1, 1/\lambda_{ij} = 22,07 \text{ см}^{-1}$). В пике этой линии ($1/\lambda = 1/\lambda_{ij}$) величина γ при нормальных атмосферных условиях достигает $47 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ (вклад вращательных линий основного колебательного состояния водяных паров в коэффициент поглощения близлежащей области составляет $\approx 36,9 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$). Соответствующие цифры для линии 2 (квантовый переход $2_{-2} - 2_0, 1/\lambda_{ij} = 28,69 \text{ см}^{-1}$) при тех же атмосферных условиях составляют $45,5 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ и $38,6 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, а для линии 5 (квантовый переход $2_{-1} - 2_1, 1/\lambda_{ij} = 65,44 \text{ см}^{-1}$) $- 444 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ и $405 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$. Интересно отметить, что интенсивная линия $1_{-1} - 1_1$ вращательного спектра поглощения $(0, 1, 0)$ мономеров водяного пара расположена вблизи ожидаемой интенсивной линии димера H_2O (см. рис. 1 данной работы и рис. 1 в [7]).

Вообще же для разрешения той или иной линии спектра $(0, 1, 0)$ во вращательном спектре мономеров водяного пара необходимы определенные «благоприятные» условия: во-первых, линия спектра $(0, 1, 0)$ должна быть достаточно интенсивной и, во-вторых, она должна прихо-

дится на область не очень значительного поглощения энергии молекулами H_2O , находящимися в основном колебательном состоянии. Невыполнение одного из этих условий приводит к «замазыванию» линии спектра $(0, 1, 0)$ крыльями линий вращательного спектра $(0, 0, 0)$. Так, линии $9_{-3} - 10_{-7}$, $3_3 - 4_{-1}$, $4_0 - 5_{-4}$ спектра $(0, 1, 0)$, приходящиеся на область малого поглощения водяным паром ($1/\lambda \approx 0,1 - 0,3 \text{ см}^{-1}$; $\gamma \approx 0,0003 - 0,004 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$), все же не разрешаются в спектре мономеров H_2O при нормальных атмосферных условиях из-за слабой интенсивности, а интенсивные линии спектра $(0, 1, 0)$ $3_{-1} - 3_1$, $5_{-3} - 5_{-1}$, $2_{-1} - 2_1$, $1_{-1} - 2_{-1}$ не разрешаются в силу того, что приходятся на области значительного поглощения мономерами водяного пара в основном колебательном состоянии.

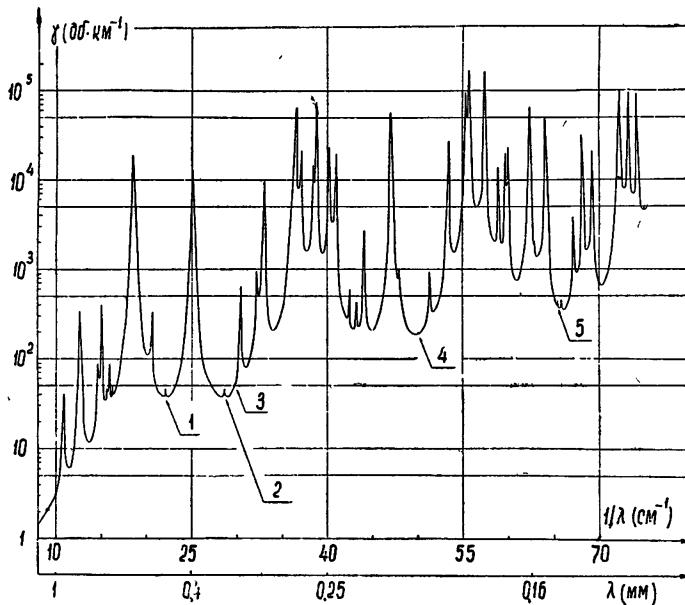


Рис. 1.

Будет ли разрешаться та или иная линия вращательного спектра $(0, 1, 0)$ водяного пара при обычных атмосферных условиях, можно грубо оценить следующим образом. Вращательные термы колебательного состояния $(0, 1, 0)$ молекулы H_2O сдвинуты относительно тех же термов основного колебательного состояния примерно на 1595 см^{-1} ($\omega_2 = 1595 \text{ см}^{-1}$), т. е. $\nu_i^1 \approx 1595 + \nu_i^0$ и $\nu_j^1 \approx 1595 + \nu_j^0$. Коэффициент поглощения γ_R на резонансной частоте, если вклад данной линии намного превышает вклад остальных линий спектра, пропорционален разности населенностей нижнего и верхнего энергетических уровней, между которыми происходит квантовый переход:

$$\gamma_R \sim |\exp(-2\pi\nu_i^K \hbar c/kT) - \exp(-2\pi\nu_j^K \hbar c/kT)|$$

(\hbar — постоянная Планка, c — скорость света, k — постоянная Больцмана). Для вращательного перехода $J_\tau - J'_\tau$ спектра $(0, 1, 0)$ имеем

$$\gamma_R \sim \exp\left(-1595 \frac{2\pi\hbar c}{kT}\right) |\exp(-2\pi\nu_i^0 \hbar c/kT) - \exp(-2\pi\nu_j^0 \hbar c/kT)|,$$

откуда следует, что каждая линия вращательного спектра $(0, 1, 0)$ ослаблена по сравнению с той же линией $(J_z - J'_z)$ вращательного спектра основного колебательного состояния при $T = 293^\circ\text{K}$ в $\exp\left(1595 \frac{2\pi\hbar c}{kT}\right) \simeq \exp\left(5,44 \frac{2\pi\hbar c}{k}\right) \simeq 2500$ раз*.

Таким образом, вычитая из коэффициента поглощения γ на резонансной частоте той или иной линии $J_z - J'_z$ вращательного спектра $(0, 0, 0)$ «фон», т. е. величину поглощения, определяемую крыльями других линий вращательного спектра $(0, 0, 0)$ (см. рис. 1 в [5] и рис. 2—15 в [3])**, и деля полученную разность на 2500, мы найдем приближенное значение коэффициента поглощения γ_R на резонансной частоте вращательного перехода $J_z - J'_z$ спектра $(0, 1, 0)$ при нормальных атмосферных условиях. Если при этом окажется, что вычисленная величина γ_R больше или порядка фона, создаваемого линиями вращательного спектра $(0, 0, 0)$ на резонансной частоте рассматриваемого перехода $(0, 1, 0)$, то данная линия должна разрешаться в спектре мономеров водяного пара.

Нетрудно убедиться с помощью оценок, что линии вращательного спектра молекул водяного пара в колебательном состоянии $(0, 1, 0)$ со значениями $1/\lambda_{ij} < 20 \text{ см}^{-1}$ практически не влияют (в предположениях, в которых выполнен расчет) на распространение миллиметровых и сантиметровых радиоволн в земной атмосфере. Так, линия $5_1 - 6_5$ спектра $(0, 1, 0)$, приходящаяся на окно прозрачности $\lambda \simeq 0,88 \text{ мм}$ во вращательном спектре основного колебательного состояния молекул H_2O , вызывает увеличение коэффициента поглощения даже на резонансной частоте лишь на $0,02 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, что составляет $\simeq 0,3\%$ от полного значения γ на этой частоте ($P = 760 \text{ мм}$ рт. ст., $T = 293^\circ\text{K}$, $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$)***. Правда, с увеличением высоты h над уровнем моря этот вклад возрастает и на высоте $h \simeq 30 \text{ км}$ уже вдвое превышает коэффициент поглощения мономеров водяного пара в основном колебательном состоянии****. Однако на таких больших высотах абсолютная величина γ является пренебрежимо малой ($\sim 10^{-3} \div 10^{-5} \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$) из-за незначительного содержания водяных паров.

Столь высокие слои атмосферы практически не дают вклада и в полное вертикальное поглощение радио оли при $\lambda = 0,88 \text{ мм}$. Об этом

* Напомним, что выполненные оценки справедливы, если параметры $(\Delta\nu/c)_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}$, β_{ij} , n_{ij} , $1/\lambda_{ij}$ для соответствующих переходов вращательных спектров $(0, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$ водяного пара являются близкими. Малое различие ($\simeq 13\%$) в параметрах асимметрии χ , которое существует для спектров $(0, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$, приводит к мало отличающимся значениям β_{ij} (для большинства интенсивных линий это отличие составляет $\simeq 2\text{--}6\%$). Отметим, что в расчетах использовались матричные элементы направляющих косинусов, вычисленные в жестком приближении [12]. Пересчет фактора ослабления интенсивности линий вращательного спектра $(0, 1, 0)$ по сравнению со спектром $(0, 0, 0)$ при существенно различающихся значениях $1/\lambda_{ij}$ и β_{ij} выполняется по общей формуле (1). Некоторые линии вращательного спектра $(0, 1, 0)$ при $P=760 \text{ мм}$ рт. ст и $T=293^\circ\text{K}$ ослаблены не в 2500 раз, а в большее число раз по сравнению с соответствующими линиями спектра $(0, 0, 0)$ из-за существенно различающихся значений $1/\lambda_{ij}$. Так, для линии $4_0 - 5_{-4}$ спектра $(0, 0, 0)$ $1/\lambda_{ij} = 10,86 \text{ см}^{-1}$, а для той же линии спектра $(0, 1, 0)$ $1/\lambda_{ij} = 0,24 \text{ см}^{-1}$. Аналогично для линии $3_3 - 4_{-1}$ имеем $14,98 \text{ см}^{-1}$ и $0,23 \text{ см}^{-1}$. Для указанных линий фактор ослабления составляет $(1 \div 1,5) \cdot 10^5$.

** Фон, создаваемый линиями спектра $(0, 1, 0)$, пренебрежимо мал.

*** Речь идет о коэффициенте поглощения γ мономеров водяного пара, который вычисляется по формуле (1). Эксперимент дает на уровне моря в данном окне прозрачности значение $\gamma \simeq 10,4 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, что на $\simeq 40\%$ больше расчетного значения [8].

**** В резонансе линии $1_{-1} - 1_1$ ($1/\lambda_{ij} = 22,07 \text{ см}^{-1}$) спектра $(0, 1, 0)$ это превышение достигает двух порядков.

свидетельствует малое отличие эквивалентных длин путей радиоволн

$$H_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{1}{\gamma(0)} \int_0^{80} \gamma(h) dh, \text{ вычисленных для летней модели атмосферы}$$

BCA-60 [14] как с учетом линий лишь вращательного спектра $(0, 0, 0)$ водяного пара, так и при учете линий спектров $(0, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$. На длине волны $\lambda = 0,88 \text{ мкм}$ соответствующие величины $H_{\text{H}_2\text{O}}$ равны $1,506 \text{ км}$ и $1,507 \text{ км}$.

Вращательные переходы других колебательных состояний молекулы H_2O ослаблены в еще большей степени, чем переходы $(0, 1, 0)$, по сравнению с теми же вращательными переходами основного колебательного состояния. Так, для вращательного спектра $(0, 2, 0)$

$$\tau_R \sim \exp \left(-3150 \frac{2\pi\hbar c}{kT} \right) | \exp(-2\pi\nu_i^0 \hbar c/kT) - \exp(-2\pi\nu_j^0 \hbar c/kT) |$$

и фактор $\exp \left(3150 \frac{2\pi\hbar c}{kT} \right) \approx 5,3 \cdot 10^6$ ($T = 293^\circ\text{K}$). Для вращательных спектров $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$ соответствующие факторы ослабления суть $6,6 \cdot 10^7$ и $1,2 \cdot 10^8$.

При повышении температуры ($P = \text{const}$, $\rho = \text{const}$) вращательные линии $(0, 1, 0)$ становятся более заметными в спектре поглощения мономеров водяного пара, так как коэффициент поглощения γ убывает вне линий с ростом температуры [17]**, а на резонансных длинах волн — возрастает.

Отмеченное обстоятельство представляет интерес при исследовании условий распространения радиоволн в планетных атмосферах, содержащих водяной пар. В частности, для поверхностных слоев атмосферы Венеры, где $T = 600 \div 700^\circ\text{K}$, фактор $\exp(1595 \cdot 2\pi\hbar c/kT)$, характеризующий ослабление вращательного спектра поглощения $(0, 1, 0)$ по сравнению с вращательным спектром $(0, 0, 0)$, составляет всего лишь ≈ 26 . Однако в нижних слоях венерианской атмосферы давление $P > 760 \text{ мм рт. ст.}$, а увеличение давления по сравнению с нормальным несколько затушевывает отмеченные температурные эффекты. Все же вращательные линии мономеров водяного пара в колебательном состоянии $(0, 1, 0)$ разрешаются в большей степени при $T \approx 600 \div 700^\circ\text{K}$ и $P \approx 5 \div 10 \text{ атм}$, чем при обычных атмосферных условиях. Подробнее этот вопрос рассматривается в другой работе.

Подведем итоги обсуждения.

1. Линии поглощения вращательного спектра $(0, 1, 0)$ водяного пара расположены столь же «случайно» в широком диапазоне $\lambda \approx 10 \mu \div 10 \text{ см}$ (см. табл. 1), как и линии вращательного спектра $(0, 0, 0)$. Так как большинство линий спектра $(0, 1, 0)$ ослаблено по сравнению с соответствующими линиями спектра $(0, 0, 0)$ в ≈ 2500 раз при нормальных атмосферных условиях, то учет вращательного спектра $(0, 1, 0)$ (и, подавно, спектров $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$) в теоретических расчетах коэффициента поглощения γ паров H_2O не устраниет расхождения между вычисленными мономерными и измеренными значениями γ в относительных окнах прозрачности земной атмосферы на уровне моря. Отдельные же линии вращательного спектра $(0, 1, 0)$ могут разрешаться в лабораторных и нормальных атмосферных условиях, и это

* Оценки выполнены в тех же предположениях, что и для спектра $(0, 1, 0)$. См. сноску на стр. 1120.

** Сказанное справедливо, но крайней мере, в диапазоне $1/\lambda < 100 \mu$ и при $T \approx 200 \div 700^\circ\text{K}$.

обстоятельство необходимо иметь в виду при интерпретации вращательного спектра паров H_2O , в частности, при экспериментальной проверке теории поглощения сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн димерами водяного пара.

2. При увеличении температуры интенсивность вращательных спектров поглощения возбужденных колебательных состояний молекул водяного пара возрастает относительно интенсивности вращательного спектра основного колебательного состояния. При $T \simeq 600 - 700^{\circ}\text{K}$ относительный фактор ослабления для спектра $(0, 1, 0)$ составляет лишь $\simeq 26$. Соответствующие изменения во вращательном спектре водяного пара должны учитываться при спектроскопических исследованиях.

3. В силу изложенного, представляет интерес экспериментальное определение параметров вращательного спектра мономеров водяного пара в колебательном состоянии $(0, 1, 0)$.

Автор признателен С. А. Жевакину за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Распространение ультракоротких радиоволн, русск. перевод под редакцией Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954.
- 2 J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, 413, 425 (1947).
- 3 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, № 4, 674 (1963).
- 4 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, 987 (1965).
- 5 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 6, 1100 (1965).
- 6 А. А. Викторова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, № 3, 415, 424 (1964).
- 7 А. А. Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, **171**, 1061 (1966).
- 8 В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, **9**, 943 (1964).
- 9 В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, № 5, 859 (1966).
- 10 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10 (1967).
- 11 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **9**, 1327 (1964).
- 12 W. S. Benedict, H. H. Claassen, T. H. Shaw, J. Res. NBS, **49**, 91 (1952).
- 13 Г. Герцберг, Вращательные и колебательные спектры многоатомных молекул, ИЛ, М., 1949.
- 14 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, № 3, 433 (1966).
- 15 R. H. Schwendeman, V. W. Laurie, Tables of line strengths, Pergamon Press, 1956.
- 16 W. Benedict, L. Caplan, J. Chem. Phys., **30**, 388 (1959).
- 17 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Геомагнетизм и аэрономия, **3**, 666 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 сентября 1966 г.

ROTATIONAL ABSORPTION SPECTRUM OF WATER VAPOUR MOLECULE IN EXCITED OSCILLATORY STATE

A. P. Naumov

A rotational spectrum of water vapour molecules (monomers) in an oscillatory state $(0, 1, 0)$ is considered. It is shown that a number of lines of this spectrum makes a considerable contribution to the absorption coefficient of atmospheric water vapour monomers at resonance frequencies ($\simeq 600 - 1400$ Gc/s) at the sea level. It is noted that a detail knowledge of the rotational spectrum of H_2O monomers in the oscillatory state $(0, 1, 0)$ is of interest for the theory of submillimeter and millimeter radio wave absorption in the Earth's atmosphere.

УДК 538.56 · 519.25

О ВЫБРОСАХ НЕСТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Г. А. Андреев

Получено выражение для среднего числа пересечений на интервале $[0, T]$ нестационарным нормальным случайным процессом произвольно меняющегося детерминированного уровня с аддитивно наложенными нормальными флуктуациями. Показано, что из полученного выражения как частные случаи следуют известные соотношения для выбросов стационарного нормального процесса на фиксированном уровне.

Известны многие задачи статистической радиофизики [1-3], решение которых приводит к необходимости определения среднего числа выбросов на фиксированном уровне. В этой работе рассматривается задача о вычислении среднего числа пересечений $N(T)$ на ограниченном интервале времени $[0, T]$ с определенным знаком производной двух нестационарных процессов $\xi(t) = a(t)\varepsilon(t)$ и $y(t) = g(t) + \zeta(t)$, где функции $a(t)$ и $g(t)$ предполагаются детерминированными, а $\varepsilon(t)$ и $\zeta(t)$ — стационарными нормальными центрированными случайными процессами с заданными статистическими характеристиками и параметрами. Такая задача возникает, например, при оценке пропускной способности, в узком смысле слова, линий связи или канала наведения, располагающихся вблизи неровной поверхности земли [4]. На рис. 1 приведена схема канала передачи сигнала $\xi(t)$ со скоростью распространения v при виде функции $a(t) = at$ вблизи статистически неоднородной поверхности земли на высоте $y(t)^*$. Высота линии связи $y(t)$ является суммой детерминированного изменения одномерного макропрофиля $g(t)$ и статистически однородных микронеровностей $\zeta(t)$: $y(t) = g(t) + \zeta(t)$. Если предположить, что случайные точки пересечений процессов $\xi(t)$ и $y(t)$ представляют пуассоновскую последовательность (поток) событий, то, как известно [4], вероятность $P(T)$ того, что за время T процесс $\xi(t)$ не пересечет профиль поверхности $y(t)$ и, следовательно, сигнал будет передан на расстояние $r = vt$, равна $P(t) = \exp[-N(T)]$, где $N(T)$ — математическое ожидание числа пересечений процессов $\xi(t)$ и $y(t)$ за время T .

Если рассматривать линию связи, канал наведения и другие физические системы, на вход которых поступает нестационарный сигнал $\xi(t)$ и порог срабатывания которых есть $y(t)$, как систему массового обслуживания [4], то вероятностные характеристики потока событий на выходе такой системы полностью определяются величиной $N(T)$. Так, характеристики точности работы устройств импульсной синхронизации в присутствии шума [5] определяются средним числом выбросов $N(t)$ нестационарного нормального случайного процесса $y(t) = g(t) + \zeta(t)$ на фиксированном уровне.

* Для представления сигнала $\xi(t)$ и высоты $y=y(r)$ как функции одного аргумента t на рис. 1 функция $y=y(r)$ изображена в зависимости от аргумента $t = r/v$, где r — расстояние вдоль поверхности земли.

Известны два метода вычисления среднего числа выбросов случайного процесса. Первый основан на равенстве математического ожидания числа выбросов в единицу времени вероятности выброса на фиксированном уровне [2], т. е. вероятности выполнения соответствующих неравенств процесса и его производной в совпадающие моменты времени в малом интервале времени, содержащем момент выброса [6]. Другой метод нахождения характеристик пересечений процессом $\xi(t)$ переменного уровня $y(t)$ использует функционал, определяющий число нулевых пересечений функции $\varphi(t)$, представляющей разность процесса и уровня [3,7]. Для решения поставленной задачи по вычислению математического ожидания числа пересечений с заданным знаком производной

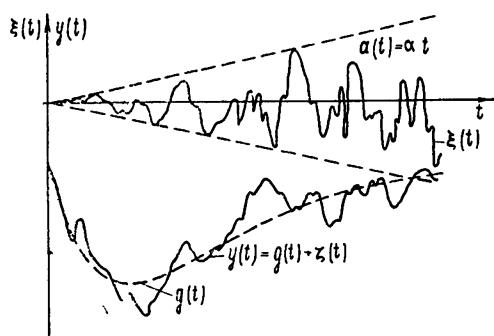


Рис. 1. Нестационарный случайный процесс $\xi(t) = a(t)e(t)$ и флюктуирующий уровень $y(t) = g(t) + \zeta(t)$.

нестационарного процесса $\xi(t)$ и процесса $y(t)$ на интервале времени $[0, T]$, воспользуемся вторым методом, т. е. применим функционал, определяющий число нулевых выбросов функции $\varphi(t)$.

Для пояснения особенностей этого метода рассмотрим сначала случай детерминированной дифференцируемой функции $\varphi(t)$, имеющей положительные нулевые выбросы, т. е. пересекающей ось t в моменты $t_1, t_3, \dots, t_{2i-1}$ снизу вверх с положительной производной $\dot{\varphi}(t_{2i-1}) > 0$, и отрицательные нулевые выбросы, т. е. пересечения сверху вниз в моменты $t_0, t_2, t_4, \dots, t_{2(i-1)}$ с отрицательной производной $\dot{\varphi}(t_{2(i-1)}) < 0$ на интервале $[0, T]$. При этом $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Величина N равна числу положительных или отрицательных нулевых выбросов и определяется следующим функционалом:

$$N(T) = \int_0^T \dot{\varphi}(t) 1[\dot{\varphi}(t)] \delta[\varphi(t)] dt. \quad (1)$$

В соотношении (1) δ есть дельта-функция, $1[\dot{\varphi}(t)]$ — единичная функция, определяемая равенством

$$1[\dot{\varphi}(t)] = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{\varphi}(t) > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases}.$$

Действительно, всякий раз, когда функция $\varphi(t)$ в момент t_{2i-1} обращается в нуль, интеграл $I = \int_{t_{2i-1}-\Delta}^{t_{2i-1}+\Delta} \dot{\varphi}(t_{2i-1}) \delta[\varphi(t_{2i-1})] dt$ становится равным единице, если функция $\varphi(t) = z$ в окрестности t_{2i-1} на интервале времени $[t_{2i-1} - \Delta, t_{2i-1} + \Delta]$ меняет знак. Обозначим $\varphi(t_1 - \Delta) = -z_1$, а $\varphi(t_1 + \Delta) = z_2$, $dz = \varphi(t_1) dt$, тогда интеграл I пред-

ставляется в виде $I = \int_{-z_1}^{z_2} \delta(z) dz$. Поскольку точка $z = \varphi(t_1) = 0$ принад-

лежит интервалу интегрирования $[-z_1, z_2]$, то $I = \int_{-z_1}^{z_2} \delta(z) dz = 1$. При $z = \varphi(t) \neq 0$ значение $z_0 = 0$ оказывается вне интервала интегрирования $[z_1, z_2]$ окрестности $z = \varphi(t) \neq 0$ и интеграл $\int_{z_1}^{z_2} \delta(z_0) dz = \delta(z_0) \int_{z_1}^{z_2} dz = 0$.

В моменты $t_0, t_1, \dots, t_{2(N-1)}$ производная $\dot{\varphi}(t)$ отрицательна и интеграл $I = -1$. Поэтому для подсчета только положительных нулевых выбросов, т. е. пересечений с положительной производной, в функционал введена единичная функция $1[\varphi(t)]$, обращающая в нуль значения функционала при отрицательных производных.

Для решения рассматриваемой задачи мы используем соотношение (1) и выберем функцию $\varphi(t)$ в виде $\varphi(t) = \xi(t) - y(t) = \eta(t) - g(t)$, где $\eta(t) = a(t)\varepsilon(t) - \zeta(t)$ представляет нестационарный нормальный случайный процесс. В этом случае статистическое среднее нулевых положительных выбросов описывается соотношением

$$N(T) = \left\langle \int_0^T [\dot{\eta}(t) - \dot{g}(t)] 1[\dot{\eta}(t) - \dot{g}(t)] \delta[\eta(t) - g(t)] dt \right\rangle, \quad (2)$$

где структурные скобки $\langle \rangle$ означают статистическое усреднение. С использованием совместной плотности вероятности $f_2[\eta(t), \dot{\eta}(t)]$ случайных величин $\eta_1 = \eta(t)$ и $\eta_2 = \dot{\eta}(t)$ соотношение (2) представляется в виде

$$\begin{aligned} N(t) = & \int_0^T \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} [\dot{\eta}(t) - \dot{g}(t)] 1[\dot{\eta}(t) - \dot{g}(t)] \delta[\eta(t) - g(t)] \times \right. \\ & \left. \times f_2[\eta(t), \dot{\eta}(t)] d\eta_1 d\eta_2 \right\} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Для сокращения записи опустим аргумент t у функций $g(t)$, $\dot{g}(t)$, $\eta(t)$, $\dot{\eta}(t)$. Заметим, что интегрирование по η_1 выполняется просто. На основании фильтрующего свойства дельта-функции интеграл

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta[\eta_1 - g] f_2(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 = f_2(g, \eta_2).$$

Введем новую переменную интегрирования $x = \eta_2 - \dot{g}$. Тогда выражение J , стоящее в фигурных скобках соотношения (3), имеет вид

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x 1(x) f_2(g, x + \dot{g}) dx = \int_0^{\infty} x f_2(g, x + \dot{g}) dx. \quad (4)$$

Для вычисления интеграла (4) требуется знание аналитического вида совместной плотности вероятности $f_2(\eta_1, \eta_2)$, т. е. двумерной плотности вероятности нестационарного нормального процесса $\eta(t)$ и его производной $\dot{\eta}(t)$ в совпадающие моменты времени t . Известно [6], что двумерная плотность нормальных случайных величин с математическим ожиданием, равным нулю, определяется как

$$\begin{aligned} f_2(\eta_1, \eta_2) = & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-R^2)} \left(\frac{\eta_1^2}{\sigma_1^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2R\eta_1\eta_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\eta_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где σ_1^2 , σ_2^2 — дисперсии случайных величин η_1 и η_2 , а $R=R_{12}$ — их коэффициент взаимной корреляции.

Обозначим $\psi_{ik}(t, t + \tau)$ корреляционные функции процесса $\eta_1 = \eta(t)$ и его производной $\eta_2 = \dot{\eta}(t + \tau)$. По определению, коэффициентом взаимной корреляции R_{12} называется отношение вида

$$R_{12}(t, t) = \frac{\psi_{12}(t, t)}{\sqrt{\psi_{11}(t, t)} \sqrt{\psi_{22}(t, t)}}. \quad (6)$$

Производная нестационарного процесса $\eta(t) = a(t)\varepsilon(t) - \zeta(t)$ в момент $t + \tau$ равна

$$\dot{\eta}(t + \tau) = \dot{a}(t + \tau)\varepsilon(t + \tau) + a(t + \tau)\dot{\varepsilon}(t + \tau) - \dot{\zeta}(t + \tau).$$

Несложные вычисления показали, что корреляционные функции $\psi_{ik}(t, t + \tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{11}(t, t + \tau) &= \psi_{\eta\eta}(t, t + \tau) = a(t)a(t + \tau)\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + \psi_{\zeta\zeta}(\tau), \\ \psi_{12}(t, t + \tau) &= \psi_{\eta\dot{\eta}}(t, t + \tau) = a(t)\dot{a}(t + \tau)\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + \\ &\quad + a(t)\dot{a}(t + \tau)\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + \psi_{\zeta\zeta}(\tau), \\ \psi_{22}(t, t + \tau) &= \psi_{\dot{\eta}\dot{\eta}}(t, t + \tau) = \dot{a}(t)\dot{a}(t + \tau)\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + \\ &\quad + a(t)\dot{a}(t + \tau)\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + \psi_{\zeta\zeta}(\tau) + \dot{a}(t)a(t + \tau)\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + \\ &\quad + a(t)a(t + \tau)\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Известно [6], что корреляционная функция k -ой и l -ой производных стационарного центрированного случайного процесса $\varepsilon(t)$ связана с $(k+l)$ -ой производной корреляционной функции процесса $\varepsilon(t)$ следующим соотношением:

$$\psi_{\varepsilon(k)\varepsilon(l)}(\tau) = (-1)^k \psi_{\varepsilon\varepsilon}^{(k+l)}(\tau).$$

На основании этого соотношения корреляционные функции стационарных процессов $\varepsilon(t)$, $\zeta(t)$ и их производных $\dot{\varepsilon}(t + \tau)$, $\dot{\zeta}(t + \tau)$ представляются через производные корреляционных функций процессов в виде

$$\psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = -\dot{\psi}_{\varepsilon\varepsilon}(\tau), \quad \psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = -\ddot{\psi}_{\varepsilon\varepsilon}(\tau).$$

Если ввести коэффициент автокорреляции $R_\varepsilon(\tau) = \psi_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)/\psi_{\varepsilon\varepsilon}(0)$, имея в виду, что дисперсия $\sigma_\varepsilon^2 = \psi_{\varepsilon\varepsilon}(0)$, то приведенные корреляционные функции преобразуются к виду $\dot{\psi}_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = -\sigma_\varepsilon^2 \dot{R}_\varepsilon(\tau)$, $\ddot{\psi}_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = -\sigma_\varepsilon^2 \ddot{R}_\varepsilon(\tau)$.

Заметим, что поскольку коэффициент автокорреляции стационарного процесса — четная функция аргумента τ , то при существовании k -ой производной коэффициента автокорреляции ($k \geq 2$) первая производная при $\tau=0$ обращается в нуль. Это означает, что стационарный k раз дифференцируемый процесс и его производная в совпадающий момент времени некоррелированы, а для нормальных процессов это приводит и к статистической независимости. Для нормального нестационарного процесса и его производной в совпадающие моменты времени коэффициент корреляции, как будет показано ниже, не обращается в нуль.

При $\tau = 0$ из соотношений (7) следует

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11}(t, t) &= a^2(t) \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\zeta^2 = \sigma_1^2(t) \\ \psi_{12}(t, t) &= a(t) \dot{a}(t) \sigma_\epsilon^2 \\ \psi_{22}(t, t) &= \dot{a}^2(t) \sigma_\epsilon^2 + a^2(t) [-\ddot{R}_\epsilon(0)] \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\zeta^2 = \sigma_2^2(t) \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Обозначим $\dot{\zeta} = w$, $-\ddot{R}_\epsilon(0) = \omega_1^2$. После подстановки (8) в равенство (6) коэффициент взаимной корреляции $R_{12}(t, t) = R$ принимает вид

$$R = \dot{a} a \sigma_\epsilon^2 (a^2 \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\zeta^2)^{-1/2} (\dot{a} \sigma_\epsilon^2 + a^2 \omega_1^2 \sigma_\epsilon^2 + \sigma_w^2)^{-1/2}. \quad (6a)$$

В соотношении (6a) опустили написание аргумента t .

Из (6a) следует, что коэффициент корреляции процесса $\eta(t)$ и его производной $\dot{\eta}(t)$ в совпадающие моменты времени обращается в нуль только в том случае, если процесс $\eta(t)$ стационарный, т. е. функция a не зависит от времени и $\dot{a} = 0$.

Вернемся к вычислению интеграла в соотношении (4). С учетом соотношения (5) получаем выражение для $f_2(g, x + g)$:

$$f_2(g, x + g) = \frac{1}{2 \pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - R^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - R^2)} \left[\frac{g^2}{\sigma_1^2} - \frac{2 R g (x + g)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x + g)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}. \quad (9)$$

После подстановки соотношения (9) в (4) интеграл J преобразуется к виду

$$J = \frac{1}{2 \pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - R^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - R^2)} \left(\frac{g^2}{\sigma_1^2} - \frac{2 g \dot{g} R}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{\dot{g}^2}{\sigma_2^2} \right) \right] \int_0^\infty x \exp \left[-\frac{x^2}{2(1 - R^2) \sigma_2^2} - \frac{(\sigma_1 \dot{g} - \sigma_2 g R)}{(1 - R^2) \sigma_2^2 \sigma_1} x \right] dx. \quad (10)$$

Обозначим

$$\mu = \frac{1}{2(1 - R^2) \sigma_2^2}; \quad (11)$$

$$2\nu = \frac{\sigma_1 \dot{g} - \sigma_2 g R}{(1 - R^2) \sigma_2^2 \sigma_1}. \quad (12)$$

Интеграл J_2 в соотношении (10) является табличным [8]:

$$J_2 = \int_0^\infty x \exp(-\mu x^2 - 2\nu x) dx = \frac{1}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi} \nu}{\sqrt{\mu}} \exp\left(\frac{\nu^2}{\mu}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \Phi\left(\frac{\nu}{\sqrt{\mu}}\right) \right] \right\}, \quad (13)$$

где $\Phi(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z \exp(-u^2) du$ — интеграл вероятности.

С учетом соотношений (3), (10), (13) и с введением опущенного ранее аргумента t выражение для $N(t)$ становится равным

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \left\{ \frac{1}{\sigma_1(t) \sigma_2(t) \sqrt{1-R^2(t,t)}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-R^2(t,t))} \times \right. \right. \\ \times \left(\frac{g^2(t)}{\sigma_1^2(t)} - \frac{2g(t)\dot{g}(t)R(t,t)}{\sigma_1(t)\sigma_2(t)} + \frac{\dot{g}^2(t)}{\sigma_2^2(t)} \right] \left. \frac{1}{2\mu(t)} \left\{ 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{\pi}\nu(t)}{\sqrt{\mu(t)}} \exp \left(\frac{\nu(t)}{\mu(t)} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{\nu(t)}{\sqrt{\mu(t)}} \right) \right] \right\} dt. \quad (14)$$

Для нестационарного процесса $\xi(t) = a(t)\varepsilon(t)$, приведенного на рис. 1, для которого функция $a(t) = \alpha t$, соотношение (14) имеет вид

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T q(t) \exp [-p(t)] \{1 - \sqrt{\pi} Q(t) \exp [Q^2(t)] \times \\ \times [1 - \Phi [Q(t)]]\} dt, \quad (15)$$

где $q(t)$, $p(t)$ и $Q(t)$ — следующие функции:

$$q(t) = \frac{[(b_1^2 t^2 + c_1)(b_2^2 t^2 + c_2) - b_1^4 t^2]^{1/2}}{b_1^2 t^2 + c_1},$$

$$p(t) = \frac{1}{2} [g^2(t)(b_2^2 t^2 + c_2) - 2g(t)\dot{g}(t)b_1^2 t + \dot{g}^2(t)(b_1^2 t^2 + c_1)] \times \\ \times [(b_1^2 t^2 + c_1)(b_2^2 t^2 + c_2) - b_1^4 t^2]^{-1},$$

$$Q(t) = [\dot{g}(t)(b_1^2 t^2 + c_1) - b_1^2 t g(t)] \{2(b_1^2 t^2 + c_1)[(b_1^2 t^2 + c_1) \times \\ \times (b_2^2 t^2 + c_2) - b_1^4 t^2]\}^{-1/2},$$

а постоянные коэффициенты равны $b_1^2 = \alpha^2 \sigma_e^2$, $b_2^2 = \alpha^2 \omega_1^2 \sigma_e^2$, $c_1 = \sigma_\zeta^2$, $c_2 = b_1^2 + \sigma_w^2 = \alpha^2 \sigma_e^2 + \sigma_w^2$.

Из соотношения (14) как частный случай следует известное выражение [3,6] для среднего числа выбросов на фиксированном уровне y_0 суммы детерминированного сигнала $s(t)$ и стационарного дифференцируемого в среднеквадратическом нормальном случайного процесса $\varepsilon(t)$. В этом случае, очевидно, функция $\varphi_1(t)$, которая на уровне y_0 должна обращаться в нуль, определяется выражением $\varphi_1(t) = \varepsilon(t) + s(t) - y_0$. При получении соотношения (14) использовалась функция $\varphi(t)$ в виде $\varphi(t) = a(t)\varepsilon(t) - \zeta(t) - g(t)$. Если в $\varphi(t)$ положить $a(t) = 1$, $\zeta(t) = 0$, $g(t) = y_0 - s(t)$, $\dot{g}(t) = -s(t)$, то $\varphi(t) = \varphi_1(t)$. Обозначим $\sigma_e^2 = \sigma^2$ и заметим, что $\dot{a}(t) = 0$, следовательно, и $R(t, t) = 0$.

При выполнении этих условий, согласно (8), (11), (12), имеем

$$\sigma_1^2 = \sigma^2, \quad \sigma_2^2 = \omega_1^2 \sigma^2, \quad \mu = \frac{1}{2 \omega_1^2 \sigma^2}, \quad \nu = -\frac{\dot{s}}{2 \omega_1^2 \sigma^2},$$

а (14) приводится к виду

$$N(T) = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_0^T \exp \left[-\frac{(y_0-s)^2}{2\sigma^2} \right] \left[\exp \left(-\frac{\dot{s}^2}{2\omega_1^2\sigma^2} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\pi} \frac{\dot{s}}{\sqrt{2}\omega_1\sigma} \left[1 + \Phi \left(\frac{\dot{s}}{\sqrt{2}\omega_1\sigma} \right) \right] \right] dt. \quad (16)$$

Соотношение (16) с помощью вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \Phi(\alpha, \gamma; z)$ может быть представлено в виде, в котором оно приводится в [3,6]. Обозначим $z = \dot{s}/\sqrt{2}\omega_1\sigma$. Используя известные преобразования вырожденной гипергеометрической функции $\exp(-z^2) = \Phi(1/2, 1/2; -z^2)$ и $\pi\sqrt{z}\Phi(z) = 2z^2\Phi(1/2, 3/2; -z^2) = \Phi(-1/2, 1/2; -z^2) - \Phi(1/2, 1/2; -z^2)$, выражение в квадратных скобках соотношения (16) преобразуем к виду $\exp(-z^2) + \sqrt{\pi}z\Phi(z) = \sqrt{\pi}z + \Phi(-1/2, 1/2; -z^2) = \sqrt{\pi}z + {}_1F_1(-1/2, 1/2; -z^2)$. В результате получим

$$N(T) = \frac{\omega_1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^T \left\{ \exp \left[-\frac{(y_0-s)^2}{2\sigma^2} \right] \left[\frac{\dot{s}}{\omega_1\sigma} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times {}_1F_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{\dot{s}^2}{2\omega_1^2\sigma^2} \right) \right] \right\} dt, \quad (16a)$$

что полностью совпадает с выражением, приведенным в работах [3,6] для половины полного числа пересечений фиксированного уровня.

Из соотношения (14) как частный случай можно получить также среднее число выбросов $N(T)$ на интервале $[0, T]$ заданного уровня y_0 суммы линейно меняющейся функции $c_0 + \beta t$ и стационарного нормального случайного процесса $\varepsilon(t)$. Эта задача рассматривалась в работах [5,9]. Для ее решения функция $\varphi(t)$ выбирается в виде $\varphi(t) = \varepsilon(t) + c_0 + \beta t - y_0 = \varepsilon(t) - y(t)$, где $y(t) = g(t) = y_0 - c_0 - \beta t$.

Подставим в соотношение (14) $g(t) = y_0 - c_0 - \beta t$; $g' = -\beta$; $\sigma_1^2 = \sigma^2$; $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2$; $\sigma_2^2 = -\sigma^2 R_\varepsilon(0)$, где $R_\varepsilon(0)$ — вторая производная коэффициента корреляции флюктуации процесса $\varepsilon(t)$; $\mu = 1/2[-R_\varepsilon(0)]\sigma^2$; $\nu = \beta/2R_\varepsilon(0)\sigma^2$. После несложных выкладок для $N(T)$ в рассматриваемом случае получается следующее выражение:

$$N(T) = \frac{\sigma\sqrt{-R_\varepsilon(0)}}{\sqrt{2\pi}\beta} \left\{ \exp \left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2 R_\varepsilon(0)} \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \Phi \left(\frac{\beta}{\sqrt{2R_\varepsilon(0)}\sigma} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\Phi \left(\frac{y_0 - c}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{y_0 - c_0 - \beta T}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \right\}. \quad (17)$$

В работе [5] вместо интеграла вероятности используется нормальная функция распределения $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-u^2/2) du$. Известно [6], что функции $F(z)$ и $\Phi(z)$ связаны между собой соотношением $\Phi(z) = 2F(z\sqrt{2}) - 1$. Если в (17) вместо интеграла вероятности $\Phi(z)$

ввести, как это делается в работе [5], функцию $F(z)$, то соотношение (17) принимает вид

$$N(T) = \left[\frac{\sigma}{\beta} \sqrt{\frac{-\bar{R}(0)}{2\pi}} \exp\left(\frac{\beta^2}{2\sigma^2 \bar{R}(0)}\right) + F\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{-R(0)}}\right) \right] \times \\ \times \left[F\left(\frac{y_0 - c_0}{\sigma}\right) - F\left(\frac{y_0 - c_0 - \beta T}{\sigma}\right) \right], \quad (17a)$$

т. е. полностью совпадает с выражением, приведенным в [5].

В случае стационарного процесса $\xi(t) = \epsilon(t)$ и нестационарного процесса $y(t) = g(t) + \zeta(t)$ выражение для среднего числа выбросов $N(T)$ получается как частный случай из соотношения (14) при условии $a(t) = 1$, $\dot{a} = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\zeta^2$, $\sigma_2^2 = \sigma_u^2 + \sigma_w^2$, где $u(t) = \epsilon(t)$:

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_w^2}}{\sqrt{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\zeta^2}} \exp\left(-\frac{g^2(t)}{2(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)}\right) \times \\ \times \left\{ \exp\left(-\frac{\dot{g}^2(t)}{2(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)}\right) - \frac{\sqrt{\pi} \dot{g}(t)}{\sqrt{2(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\dot{g}(t)}{\sqrt{2(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)}}\right) \right] \right\} dt. \quad (18)$$

Если функция $g(t)$ постоянна и равна H , то (18) упрощается и число выбросов в единицу времени $N_1 = N(T)/T$ описывается простым соотношением

$$N_1 = \frac{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_w^2}}{2\pi \sqrt{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\zeta^2}} \exp\left(-\frac{H^2}{2(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)}\right). \quad (18a)$$

Автор благодарит В. А. Зверева за обсуждение изложенных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- С. О. Райс, сб. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ч II, ИЛ, М., 1953, стр. 135.
- В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
- Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 1, изд. Сов. радио, М., 1961.
- Е. С. Вентцель, Теория вероятностей, изд. Наука, М., 1964.
- В. И. Тихонов, УФН, 77, № 3, 495 (1962).
- Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, 1, изд. Сов. радио, М., 1966.
- В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, М., 1962.
- И. С Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
- F. W. Lehman, Journ. of Appl. Phys., 22, № 8, 1067 (1951).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 июля 1966 г.,
после доработки
1 февраля 1967 г.

ON EJECTIONS OF NON-STATIONARY RANDOM PROCESS

G. A. Andreev

The expression has been derived for the mean number of crossings in the interval $[0, T]$ by a nonstationary normal random process of an arbitrarily changed determined level with additive imposed normal fluctuations. It is shown that from the expression derived, it follows as particular cases the known relations for ejections of stationary normal process at the fixed level.

УДК 621.396.677

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОСТРОНАПРАВЛЕННЫХ АНТЕНН С СИЛЬНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ

Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин

На основе среднеквадратичной меры ширины диаграммы направленности найдена разрешающая способность двумерных антенн со случайными ошибками в раскрытие. Исследованы случаи статистически неоднородных и анизотропных флуктуаций как для аксиально симметричных, так и для вытянутых антенн. Подробно изучены параболические рефлекторы с шероховатой зеркальной поверхностью. Рассмотрение не ограничено условием малости флуктуаций, но предполагает известную их медленность.

1. Вопрос о влиянии случайных ошибок распределения токов в антenne на ее диаграмму направленности рассматривался многими авторами. В большинстве опубликованных работ исследовались лишь антенны с малыми флуктуациями (см., например, [1–4]). Между тем, в антенной технике встречаются случаи, когда условие малости флуктуаций не выполняется. Примером могут служить зеркальные антенны, у которых среднеквадратичная высота неровностей $\sqrt{\zeta^2}$ сравнима с длиной волны λ .

Исследование статистических свойств излучающей системы с большими флуктуациями наталкивается на серьезные математические трудности. Частично эти трудности удается обойти, если интересоваться только грубыми характеристиками излучения, например, средней шириной диаграммы направленности антennы. В [5–7] показано, что в такой ограниченной постановке задача действительно допускает весьма простое и в достаточной мере универсальное решение, применимое к широкому классу антенн с различной корреляцией флуктуаций.

В работах [5–7] в качестве угловой ширины диаграммы направленности линейной антенны была использована квадратичная мера*

$$\overline{\langle \Delta\theta^2 \rangle} = \int |f(\theta)|^2 (\theta - \theta_c)^2 d\theta / \int |f(\theta)|^2 d\theta, \quad (1)$$

где $f(\theta)$ — случайная диаграмма направленности по полю, $\theta_c = \int \theta |f(\theta)|^2 d\theta / \int |f(\theta)|^2 d\theta$, угловые скобки означают усреднение с весом $|f(\theta)|^2 / \int |f(\theta)|^2 d\theta$, а черта сверху — статистическое усреднение. Наша постановка задачи отличается в следующих отношениях.

Во-первых, вместо обычной угловой меры ширины диаграммы направленности мы введем линейную меру (см. п. 2), т. е. будем интересоваться не угловыми, а линейными размерами освещенной области, что позволяет охватить не только дальнюю (как в [5–7]), но и ближнюю зону

* Мера (1) использована также в [8] при исследовании уширения диаграммы направленности в турбулентной среде.

излучения. Во-вторых, в отличие от [5-7], мы исследуем двумерную задачу (как для аксиально симметричных, так и для вытянутых антенн; системы с дискретными излучателями рассматриваться не будут). Наконец, мы будем рассматривать общий случай анизотропных флюктуаций. Полученные результаты не ограничены условием малости флюктуаций, но предполагается их известная медленность.

2. В качестве меры разрешающей способности осесимметричных антенн нами будет использован среднеквадратичный радиус освещенной области, определяемый по формуле

$$\langle \Delta \rho^2 \rangle = \int_S (\overline{\rho - \rho_c})^2 I_s(\rho) d\rho / \int_S I_s(\rho) d\rho \equiv \overline{\langle \rho^2 \rangle} - \overline{\rho_c^2}, \quad (2)$$

где $I_s(\rho)$ — интенсивность случайного поля в плоскости S , удаленной от антенн на расстояние L , ρ — радиус-вектор в этой плоскости, $\overline{\langle \rho^2 \rangle} = \int_S I_s(\rho) \rho^2 d\rho / \int_S I_s(\rho) d\rho$, $\rho_c = \int_S \rho I_s(\rho) d\rho / \int_S I_s(\rho) d\rho$ — радиус-вектор «центра тяжести» освещенной области, а $\Delta \rho = \rho - \rho_c$. Смысл угловых скобок и черты сверху в (2) такой же, как и в (1). Мера (2) была введена при исследовании уширения пучков электромагнитного излучения в турбулентной среде [8, 9]. На недостатках этой меры (как и угловой меры (1)) мы остановимся несколько позже.

3. Вычислим $\langle \Delta \rho^2 \rangle$ сначала в несколько отвлеченной постановке задачи, не конкретизируя распределение поля и характер ошибок. Пусть $u_0(\rho_0)$ — осесимметричное невозмущенное распределение поля в некоторой плоскости S_0 (ρ_0 — радиус-вектор в этой плоскости). Учтем наличие случайных ошибок, которые могут быть вызваны различными причинами, посредством случайного фактора $K(\rho_0)$, представив распределение поля в плоскости S_0 в виде

$$\tilde{u}(\rho_0) = u_0(\rho_0) K(\rho_0). \quad (3)$$

Воспользовавшись принципом Гюйгенса—Кирхгофа и приближением Френелевской дифракции, находим распределение поля в плоскости наблюдения S :

$$u_s(\rho) = \frac{k \exp(ikL)}{2\pi i L} \int_{S_0} u_0(\rho_0) K(\rho_0) \exp\left(\frac{ik}{2L} (\rho - \rho_0)^2\right) d\rho_0. \quad (4)$$

Использование принципа Гюйгенса—Кирхгофа налагает, конечно, на поле $\tilde{u}(\rho_0)$ известные ограничения, которые в дальнейшем будут предполагаться выполненными.

Подставим теперь в (2) интенсивность $I_s(\rho) = u_s(\rho) u_s^*(\rho)$, воспользуемся (4) и проведем статистическое усреднение. В результате не очень сложных, но громоздких промежуточных вычислений, подобных проведенным в [8, 9], для $\langle \Delta \rho^2 \rangle$ получаем

$$\langle \Delta \rho^2 \rangle \equiv \overline{\langle \rho^2 \rangle} - \overline{\rho_c^2} = \frac{J_1}{J_0} - \frac{J_2}{J_0^2}, \quad (5)$$

где

$$J_0 \equiv \int_S \overline{I_s(\rho)} d\rho = \int_S |u_0(\beta)|^2 \Gamma_2(\beta, \beta) d\beta; \quad (6)$$

$$J_1 \equiv \int_S \rho^2 \overline{I_s(\rho)} d\rho = \int_{S_0} \left\{ \beta^2 |u_0(\beta)|^2 + \frac{L^2}{k^2} |\nabla u_0(\beta)|^2 + \right. \\ \left. + \frac{2L}{k} \beta \operatorname{Im} [u_0^*(\beta) \nabla u_0(\beta)] \right\} \Gamma_2(\beta, \beta) d\beta - \quad (7)$$

$$- \frac{L^2}{k^2} \int_{S_0} |u_0(\beta)|^2 \Delta_\alpha \Gamma_2 \left(\beta - \frac{\alpha}{2}, \beta + \frac{\alpha}{2} \right) \Big|_{\alpha=0} d\beta;$$

$$J_2 \equiv \int_S \int_{S_0} (\rho_1 \rho_2) \overline{I_s(\rho_1) I_s(\rho_2)} d\rho_1 d\rho_2 = \int_{S_0} \int_{S_0} \left\{ (\beta_1 \beta_2) |u_0(\beta_1)|^2 \times \right. \\ \times |u_0(\beta_2)|^2 + \frac{L}{k} \beta_2 \operatorname{Im} [u_0^*(\beta_1) \nabla u_0(\beta_1)] |u_0(\beta_2)|^2 + \frac{L}{k} \beta_1 \operatorname{Im} [u_0^*(\beta_2) \times \right. \\ \times \nabla u_0(\beta_2)] |u_0(\beta_1)|^2 + \frac{L^2}{k^2} \operatorname{Im} [u_0^*(\beta_1) \nabla u_0(\beta_1)] \operatorname{Im} [u_0^*(\beta_2) \nabla u_0(\beta_2)] \Big\} \times \quad (8)$$

$$\times \Gamma_4(\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2 - \frac{L^2}{k^2} \int_{S_0} \int_{S_0} |u_0(\beta_1)|^2 |u_0(\beta_2)|^2 \nabla_{\alpha_1} \nabla_{\alpha_2} \times \\ \times \Gamma_4 \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2}, \beta_1 + \frac{\alpha_1}{2}, \beta_2 - \frac{\alpha_2}{2}, \beta_2 + \frac{\alpha_2}{2} \right) \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} d\beta_1 d\beta_2.$$

Здесь $\nabla_\alpha = i_x \frac{\partial}{\partial \alpha_x} + i_y \frac{\partial}{\partial \alpha_y}$ и

$$\Gamma_2(\beta_1, \beta_2) = \overline{K(\beta_1) K^*(\beta_2)}, \quad (9)$$

$$\Gamma_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \overline{K(\beta_1) K^*(\beta_2) K(\beta_3) K^*(\beta_4)}.$$

При выводе выражений (7) и (8) предполагается, что

$$\nabla_\alpha \Gamma_2 \left(\beta - \frac{\alpha}{2}, \beta + \frac{\alpha}{2} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (10)$$

$$\nabla_{\alpha_1, 2} \Gamma_4 \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2}, \beta_1 + \frac{\alpha_1}{2}, \beta_2 - \frac{\alpha_2}{2}, \beta_2 + \frac{\alpha_2}{2} \right) \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0.$$

Эти предположения выполняются, по крайней мере, для вещественных Γ_2 и Γ_4 и справедливы для тех частных случаев, которые будут рассмотрены в п. 8.

Соотношения (6) — (8) заметно упрощаются в случае однородных и изотропных флюктуаций $K(\rho_0)$ и вещественного распределения поля $u_0(\rho_0)$:

$$\overline{\langle \rho^2 \rangle} \equiv \frac{J_1}{J_0} = \frac{\int_{S_0} \beta^2 u_0^2(\beta) d\beta}{\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta} + \frac{L^2}{k^2} \frac{\int_{S_0} [\nabla u_0(\beta)]^2 d\beta}{\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta} - \frac{L^2 \Delta B(0)}{k^2 B(0)}; \quad (11)$$

$$\overline{\rho_c^2} \equiv \frac{J_2}{J_0^2} = \left[- \frac{L^2}{k^2} \int_{S_0} \int_{S_0} u_0^2(\beta_1) u_0^2(\beta_2) \nabla_{\alpha_1} \nabla_{\alpha_2} \Gamma_4 \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2}, \beta_1 + \frac{\alpha_1}{2}, \right. \right. \\ \left. \left. \beta_2 - \frac{\alpha_2}{2}, \beta_2 + \frac{\alpha_2}{2} \right) \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} d\beta_1 d\beta_2 \right] B^{-2}(0) \left(\int_{S_0} u^2(\beta) d\beta \right)^{-2}, \quad (12)$$

$$\left. \beta_2 - \frac{\alpha_2}{2}, \beta_2 + \frac{\alpha_2}{2} \right) \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} d\beta_1 d\beta_2 \Big] B^{-2}(0) \left(\int_{S_0} u^2(\beta) d\beta \right)^{-2},$$

где $B(|\rho_1 - \rho_2|) = \Gamma_2(\rho_1, \rho_2)$.

Выражение (11) допускает простую интерпретацию. Первое слагаемое в (11) определяет ширину невозмущенного антенного луча в ближней (прожекторной) зоне. Второе слагаемое связано с расширением луча за счет дифракции регулярного поля $u_0(\rho_0)$ и в дальней зоне преобладает над первым слагаемым. В промежуточной (френелевской) зоне оба слагаемых сравнимы по величине. Так, например, сумма двух первых слагаемых в (11), которую мы обозначим через $\langle \rho^2 \rangle_0$, для гауссовского распределения поля $u_0(\rho_0) = A_0 \exp(-\rho_0^2/2a^2)$ равна

$$\langle \rho^2 \rangle_0 = a^2 + L^2/k^2 a^2,$$

а для косинусоидального распределения, когда $u_0(\rho_0) = A_0 \cos(\pi\rho_0/2a)$ при $\rho_0 < a$ и $u_0(\rho_0) = 0$ при $\rho_0 > a$, равна

$$\langle \rho^2 \rangle_0 = a^2 \frac{\pi^4 + 12\pi^2 + 48}{2\pi^2(\pi^2 - 4)} + \frac{L^2}{k^2 a^2} \frac{\pi^2(\pi^2 + 4)}{4(\pi^2 - 4)}.$$

Третье слагаемое в (11) (оно положительно, так как $\Delta B(0) = 2B''(0) < 0$) характеризует флюктуационное расширение освещенной области относительно начала координат. Величина же $L^2 \Delta B(0)/k^2 B(0) - \rho_c^2$ описывает уширение относительно «центра тяжести» диаграммы, положение которого известно лишь с точностью порядка $\sqrt{\rho_c^2}$. Таким образом, мера (2) позволяет выделить эффекты, связанные со смещением антенного луча.

4. Основной недостаток меры (2) состоит в том, что при наличии разрывов у поля $u_0(\rho_0)$ величина $\langle \rho^2 \rangle_0$ обращается в бесконечность (из-за расходимости интеграла $\int_{S_0} [\nabla u_0(\beta)]^2 d\beta$). Происходит это потому,

что при интегрировании интенсивности с множителем ρ^2 излучение, переносимое боковыми лепестками и обусловленное резкими изменениями поля в раскрыве, приобретает излишне большой вес. Для того, чтобы величина $\langle \Delta \rho^2 \rangle$ правильно характеризовала размер области, через которую проходит какая-то фиксированная доля потока энергии (допустим, половина потока), нужно потребовать медленности изменения поля u_0 на расстояниях порядка длины волны: $\lambda |\nabla u_0|/u_0 \ll 1$. В противном случае расчет по формулам (11), (12) дает завышенные значения для размеров освещенной области.

5. Рассмотрим два примера распределения случайных ошибок, которые будут использованы далее в чл. 7.

A. Гауссовские флюктуации. Пусть величина $K(\rho_0)$ вещественна и распределена по гауссовому закону. В этом случае Γ_4 выражается через Γ_2 и выражение (12) для ρ_c^2 упрощается:

$$\rho_c^2 = \frac{2 \int_{S_0} \int_{S_0} (\beta_1 \beta_2) B^2(|\beta_1 - \beta_2|) u_0^2(\beta_1) u_0^2(\beta_2) d\beta_1 d\beta_2}{B^2(0) \left(\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta \right)^2}.$$

Нетрудно показать, что смещение «центра тяжести» освещенной зоны ρ_c^2 в рассматриваемом случае меньше первого слагаемого в (11), определяющего начальный размер антенного луча. Следовательно, в случае вещественных гауссовых флюктуаций $K(\rho_0)$ смещением луча можно пренебречь, и основной эффект обусловлен членом $-\frac{L^2}{k^2} \frac{B''(0)}{B(0)}$.

В результате, если ввести для масштаба неоднородностей обозначение $l = |\vec{B}(0)/2B''(0)|^{1/2}$, размер освещенной зоны в плоскости наблюдения S , находящейся в дальней зоне, будет равен

$$\langle \overline{\Delta \rho^2} \rangle = \langle \rho^2 \rangle_0 - \frac{2L^2 B''(0)}{k^2 B(0)} - \overline{\rho_c^2} \simeq \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{l^2} \right) \frac{L^2}{k^2},$$

где

$$\frac{1}{A^2} = \int_{S_0} [\nabla u_0(\beta)]^2 d\beta / \int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta.$$

Б. Чисто фазовые искажения. Пусть $K(\rho_0) = \exp(is(\rho_0))$, где $s(\rho_0)$ — случайная фаза, распределенная по гауссовому закону с нулевым средним значением. В этом случае для $\langle \overline{\Delta \rho^2} \rangle$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \overline{\Delta \rho^2} \rangle &= \langle \rho^2 \rangle_0 - \frac{2L^2}{k^2} \left[B_s''(0) - \int_{S_0} \int_{S_0} B_s''(|\beta_1 - \beta_2|) u_0^2(\beta_1) \times \right. \\ &\quad \times u_0^2(\beta_2) d\beta_1 d\beta_2 \left. \left(\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta \right)^{-2} \right], \end{aligned}$$

где $B_s(|\beta_1 - \beta_2|) = \overline{s(\beta_1) s(\beta_2)}$.

Если невозмущенное поле в раскрыве и функция корреляции $B_s(\Delta\beta)$ описываются гауссовыми функциями

$$u_0(\beta) = \exp(-\beta^2/2a^2), \quad B_s(\Delta\beta) = \overline{s^2} \exp[-(\Delta\beta)^2/l^2],$$

то

$$\langle \overline{\Delta \rho^2} \rangle = a^2 + \frac{L^2}{k^2 a^2} + \frac{4\overline{s^2} L^2}{k^2 l^2} \Phi\left(\frac{l}{a}\right), \quad (13)$$

где

$$\Phi(x) = 1 - x^4(x^2 + 2)^{-2}. \quad (13a)$$

При $x = l/a \ll 1$ второй член в (13a) мал по сравнению с единицей, и $\Phi \approx 1$. Это соответствует неравенству $\overline{\rho_c^2} \ll -\frac{2L^2}{k^2} B_s''(0)$, т. е. смещение луча мало. В случае $x \gg 1$ второй член в (13a) близок к единице, т. е. $\overline{\rho_c^2}$ мало отличается от $-2L^2 B_s''(0)/k^2$ и, следовательно, $\langle \overline{\Delta \rho^2} \rangle \simeq \langle \rho^2 \rangle_0$. Это означает, что крупные неоднородности ($l \gg a$) вызывают только качание антенного луча, но не его уширение. Аналогично тому, как это было сделано в [9], можно показать, что этот вывод справедлив и для произвольных функций $u_0(\beta)$ и $B_s(\Delta\beta)$.

6. Выражения (11) и (12) были получены в предположении вещественности поля $u_0(\rho_0)$. Имея в виду задачи, к которым мы обратимся в п. 9, рассмотрим теперь более общий случай, когда распределение поля в плоскости S_0 имеет вид

$$\tilde{u}_0(\rho_0) = u_0(\rho_0) \exp[i(\gamma\rho_0 + \chi\rho_0^2)] K(\rho_0), \quad (14)$$

где $u_0(\rho_0)$ вещественно. Величина γ характеризует линейный набег фазы, а χ — квадратичный. Считая величины γ и χ случайными, предположим, что они статистически независимы между собой и с $K(\rho_0)$. Подставляя (14) в (5) — (8) и проводя статистическое усреднение (случайное поле $K(\rho_0)$ по-прежнему считаем статистически однородным), получаем для $\langle \rho^2 \rangle$ и $\overline{\rho_c^2}$ выражения

$$\overline{\langle \rho^2 \rangle} = (11) + \frac{L^2 \gamma^2}{k^2} + \frac{4L^2 \chi^2}{k^2} \frac{\int_{S_0} \beta^2 u_0^2(\beta) d\beta}{\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta}; \quad (15)$$

$$\overline{\rho_c^2} = (12) + \frac{L^2 \gamma^2}{k^2}. \quad (16)$$

Из (5), (15) и (16) видно, что

$$\overline{\langle \Delta \rho^2 \rangle} = \langle \rho^2 \rangle_0 - \frac{2L^2 B''(0)}{k^2 B(0)} + \frac{4L^2 \chi^2}{k^2} \frac{\int_{S_0} \beta^2 u_0^2(\beta) d\beta}{\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta},$$

т. е. линейный случайный набег фазы приводит только к смещению луча, а не к уширению диаграммы. Квадратичный же набег фазы, наоборот, вызывает лишь уширение диаграммы и не влияет на смещение луча.

7. В отсутствие осевой симметрии ширина диаграммы направленности неодинакова в направлениях осей x и y . Поэтому нужна такая характеристика, которая описывала бы и величину площади, и форму освещенной области. С этой целью рассмотрим величину

$$\overline{\langle F \rangle} = \frac{\int \overline{F(\Delta \rho) I_s(\rho)} d\rho}{\int \overline{I_s(\rho)} d\rho}, \quad (17)$$

где смысл угловых скобок прежний,

$$F(\Delta \rho) = \gamma_1 \Delta x^2 + 2\gamma_2 \Delta x \Delta y + \gamma_3 \Delta y^2, \quad (18)$$

а Δx и Δy — компоненты вектора $\Delta \rho = \rho - \rho_c$. Потребуем, чтобы кривые $F(\Delta \rho) = \text{const}$ в плоскости (x, y) имели вид эллипсов с эксцентриситетом ε , большая ось которых составляла бы угол θ с осью y и чтобы площадь эллипса $F(\Delta \rho) = 1$ была равна π (последнее нужно для того, чтобы при $\varepsilon = 0$, когда эллипс вырождается в круг, величина $F(\Delta \rho)$ переходила в $\Delta \rho^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, а $\overline{\langle F \rangle}$ — в $\overline{\langle \Delta \rho^2 \rangle}$). Указанные условия однозначно определяют коэффициенты γ_k в (18):

$$\gamma_1 = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \sin^2 \theta + (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \cos^2 \theta,$$

$$\gamma_2 = [(1 - \varepsilon^2)^{-1/2} + (1 - \varepsilon^2)^{1/2}] \cos \theta \sin \theta,$$

$$\gamma_3 = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \cos^2 \theta + (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \sin^2 \theta.$$

Простые соображения показывают, что величину $\overline{\langle F \rangle}$ можно минимизировать по параметрам ε и θ . Пусть, например, линии равной освещенности $I_s(\rho) = \text{const}$ имеют вид овалов (что типично для антенн, не обладающих осевой симметрией), ориентированных под углом α к оси y . Очевидно, для фиксированного ε величина $\overline{\langle F \rangle}$ примет минимальное значение при одинаковой ориентации больших осей овалов $I_s(\rho) = \text{const}$ и эллипсов $F(\Delta \rho) = \text{const}$, т. е. при $\theta = \alpha$ (и максимальное значение — при ортогональности больших осей, $\theta = \alpha + \pi/2$). Существование минимума по ε менее очевидно, но, как показывают прямые вычисления, этот минимум всегда существует.

Если величину $\langle \bar{F} \rangle_{\min}$ принять за меру площади освещенной области, то значения ε_0 и θ_0 , при которых достигается минимум $\langle \bar{F} \rangle$, будут характеризовать степень вытянутости и ориентацию освещенной области в плоскости наблюдения S . Протяженность освещенной области (а. следовательно, и разрешающая способность антенны) в направлениях θ_0 и $\theta_0 + \pi/2$ будут равны соответственно $\sqrt{\langle \bar{F} \rangle_{\min}} (1 - \varepsilon_0^2)^{-1/4}$ и $\sqrt{\langle \bar{F} \rangle_{\min}} (1 - \varepsilon_0^2)^{1/4}$.

Вычислим $\langle \bar{F} \rangle_{\min}$ в предположении, что невозмущенное распределение поля $u_0(\rho_0)$ вещественно и симметрично относительно хотя бы одной из осей x и y и что флюктуации $K(\rho)$ статистически однородны и анизотропны, причем главные оси момента $B(\rho_1 - \rho_2) = \Gamma_2(\rho_1, \rho_2)$ параллельны осям x и y . Прежде всего, заметим, что, согласно (17) и (18),

$$\langle \bar{F} \rangle = \gamma_1 \langle \Delta x^2 \rangle + 2\gamma_2 \langle \Delta x \Delta y \rangle + \gamma_3 \langle \Delta y^2 \rangle. \quad (19)$$

Расчет $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \bar{x}^2 \rangle - \bar{x}_c^2$ приводит к формуле, подобной (11), (12):

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle &= \frac{\int_{S_0} \beta_x^2 u_0^2(\beta) d\beta}{\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta} + \frac{L^2}{k^2} \frac{\int_{S_0} [\partial u_0(\beta)/\partial \beta_x]^2 d\beta}{\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta} - \\ &- \frac{L^2 B''_{xx}(0)}{k^2 B(0)} - \frac{L^2}{k^2} \left[\int_{S_0} \int_{S_0} u_0^2(\beta_1) u_0^2(\beta_2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{1x} \partial \alpha_{2x}} \Gamma_4(\dots) \Big|_{\alpha_1 = \alpha_2 = 0} d\beta_1 d\beta_2 \right] \times \\ &\times \left[\int_{S_0} u_0^2(\beta) d\beta \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение для $\langle \Delta y^2 \rangle$ получается из (20) заменой x на y , а величина $\langle \Delta x \Delta y \rangle$ оказывается равной нулю.

Минимизируя затем (19) по ε и θ , легко найти, что минимальное значение

$$\langle \bar{F} \rangle_{\min} = 2 \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta y^2 \rangle} \quad (21)$$

достигается при $\varepsilon_0 = (1 - \langle \Delta x^2 \rangle / \langle \Delta y^2 \rangle)^{1/2}$ и $\theta_0 = 0$, если $(\langle \Delta x^2 \rangle / \langle \Delta y^2 \rangle) < 1$, и при $\varepsilon_0 = (1 - \langle \Delta y^2 \rangle / \langle \Delta x^2 \rangle)^{1/2}$, $\theta_0 = \pi/2$ в случае $(\langle \Delta x^2 \rangle / \langle \Delta y^2 \rangle) > 1$. Эксцентриситет освещенной области ε_0 обращается в нуль на расстоянии L_0 от антенны, которое определяется из условия $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle$. При $L = L_0$ происходит скачкообразный поворот большой оси освещенной области на $\pi/2$. Максимальная протяженность освещенной области, т. е. протяженность в направлении θ_0 , определяется большей, а минимальная (в направлении $\theta_0 + \pi/2$) — меньшей из величин $2 \sqrt{\langle \Delta y^2 \rangle}$ и $2 \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$.

8. Применим теперь изложенные результаты к параболическому рефлектору с плавными неоднородностями зеркала. Сначала рассмотрим осесимметричный случай.

Пусть облучатель создает у поверхности идеального проводящего зеркала поле $V(\rho_0)$, которое порождает отраженную волну $V_{\text{отр}}$, равную на поверхности зеркала — $V(\rho_0)$. Поле в плоскости наблюдения S будет

$$u_s(\rho) = -\frac{k}{2\pi i} \int_{S_0} V(\rho_0) \frac{\exp(ikR)}{R} dS_{\text{рефл}} = \\ = -\frac{k \exp(ikL)}{2\pi i L} \int_{S_0} V(\rho_0) \exp\left\{-ikz(\rho_0) + \frac{ik(\rho - \rho_0)^2}{2L}\right\} dS_{\text{рефл}}. \quad (22)$$

В (22) использовано приближенное равенство $R \equiv [L - z(\rho_0)]^2 + (\rho - \rho_0)^2)^{1/2} \approx L - z(\rho_0) + (\rho - \rho_0)^2/2L$ и интегрирование ведется по шероховатой поверхности рефлектора $z = z(\rho_0) = \rho_0^2/4b + \zeta(\rho_0)$, где $z = \rho_0^2/4b$ — уравнение гладкого параболоида, а $\zeta(\rho_0)$ — случайные неровности в направлении z . Поле облучателя, помещенного в фокус $(0, 0, b)$, представим в виде

$$V(\rho_0) = f(\rho_0) \exp(ikr_1)/r_1, \quad (23)$$

где $r_1 = \{[b - z(\rho_0)]^2 + \rho_0^2\}^{1/2}$ — расстояние от фазового центра облучателя до точки зеркала с радиусом-вектором ρ_0 .

Считая флуктуации $\zeta(\rho_0)$ малыми по сравнению с b (но не с λ), заменим r_1 в показателе экспоненты на

$$r_1 \approx b + \frac{\rho_0^2}{4b} - \zeta(\rho_0) \frac{b - \rho_0^2/4b}{b + \rho_0^2/4b}, \quad (24)$$

а в знаменателе (23) на $r_1 \approx b + \rho_0^2/4b$. Далее, используя плавность неровностей, будем вести интегрирование в (22) по «невозмущенному» параболоиду $z_0 = \rho_0^2/4b$ (прием, часто используемый в теории рассеяния на поверхности с плавными неровностями, см., например, [10]). Учитывая, что

$$dS_{\text{рефл}} \approx (1 + \rho_0^2/4b)^{1/2} d\rho_0, \quad (25)$$

перейдем затем к интегрированию по плоскости S_0 .

Подставив (23) — (25) в (22), получаем выражение

$$u_s(\rho) = \frac{k \exp(ik(L + b))}{2\pi i L} \int_{S_0} \frac{f(\rho_0)}{b(1 + \rho_0^2/4b^2)^{1/2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{2ik\zeta(\rho_0)}{1 + \rho_0^2/4b^2} + \frac{ik(\rho - \rho_0)^2}{2L}\right\} d\rho_0, \quad (26)$$

которое совпадает с (4), если под $u_0(\rho_0)$ понимать $f(\rho_0)/b(1 + \rho_0^2/4b^2)^{1/2}$, а под $K(\rho_0)$ — величину $\exp\{-2ik\zeta(\rho_0)/(1 + \rho_0^2/4b^2)\}$ (появление в (26) постоянного множителя $\exp(ikb)$ несущественно). На краях зеркала функция $f(\rho_0)$, характеризующая диаграмму облучателя, обычно равна нулю (этим достигается снижение уровня боковых лепестков). При этом условии разрыв поля $u_0(\rho_0)$ на краю зеркала отсутствует, так что использование меры (2) разрешающей способности в данном случае вполне оправдано. Проверка показывает, что для однородных на зеркале гауссовских флуктуаций ζ корреляционные моменты Γ_2 и Γ_4 удовлетворяют соотношениям (10), и поэтому для определения ширины освещенной области можно использовать выражения (5) — (8).

Обычно радиус рефлектора a не превышает расстояние b между зеркалом и облучателем: $a \leq b$. При этом условии можно положить $(1 + \rho_0^2/4b^2)^{-1} \approx 1$ (с точностью, не худшей 20%), и тогда $K(\rho_0) \approx$

$\simeq \exp[-2ik\zeta(\rho_0)]$. Если флуктуации ζ статистически однородны на поверхности параболического зеркала, то при $a \leq b$ их можно считать статистически однородными и в плоскости S_0 . Теперь мы можем использовать результаты п. 5. Именно, для флуктуаций ζ , распределенных по нормальному закону, при гауссовой диаграмме облучателя и гауссовой корреляционной функции $B_\zeta(r)$ результирующая ширина диаграммы направленности дается выражением (13), в котором нужно положить $\bar{s}^2 = 4k^2\zeta^2$. Относительное уширение диаграммы направленности определится, таким образом, величиной

$$\chi = \frac{\langle \Delta \rho^2 \rangle}{\langle \rho^2 \rangle_0} = 1 + 16\bar{s}^2 k^2 A^2 l^{-2} \Phi\left(\frac{l}{a}\right), \quad (27)$$

где $\Phi(x) = 1 - x^4(x^2 + 2)^{-2}$. Если задаться максимальным допустимым уровнем относительного уширения χ_{\max} , то из (27) можно найти соответствующую минимальную длину волны:

$$\lambda_{\min}^2 = 64\pi^2 \bar{s}^2 A^2 \Phi\left(\frac{l}{a}\right) \Big| l^2 (\chi_{\max} - 1). \quad (28)$$

9. Кроме неровностей зеркала, на ширину диаграммы направленности влияет неточность установки облучателя. Пусть облучатель расположен в точке $(\delta_x, \delta_y, b + \delta_z)$, где δ_x, δ_y и δ_z — случайные величины с нулевыми средними значениями. Считая смещение δ_z малыми по сравнению с b , при $a \leq b$ имеем

$$r_1 \simeq b + \delta_z + \frac{\rho_0^2}{4b} - \zeta(\rho_0) - \frac{\delta_z \rho_0^2}{b^2} + \frac{\rho_0 \delta_z}{b}, \quad (29)$$

где $\delta_z = (\delta_x, \delta_y)$ — поперечное смещение облучателя. Из (29) следует, что распределение поля $u_0(\rho_0)$ отличается от рассмотренного выше множителем $\exp(i\gamma\rho_0 + i\chi\rho_0^2)$, где $\gamma = \delta_z/b$ и $\chi = \delta_z/b^2$ (множитель $\exp(ik\delta_z)$ несуществен). Поэтому мы можем воспользоваться результатами п. 6, подставив в выражения (15) и (16) $\bar{s}^2 = \bar{\delta}_z^2 b^{-2} = (\bar{\delta}_x^2 + \bar{\delta}_y^2) b^{-2}$ и $\bar{\chi}^2 = \bar{\delta}_z^2 b^{-4}$. Как и следовало ожидать, уширение диаграммы направленности связано только с продольными смещениями облучателя, тогда как перемещение «центра тяжести» зависит от сдвига облучателя в поперечном направлении.

10. При рассмотрении характеристик излучения вытянутых зеркальных антенн с анизотропными случайными неровностями (анизотропия неровностей может явиться следствием конструктивных особенностей зеркала) также можно воспользоваться уже полученными результатами (см. п. 7). Результирующая ширина диаграммы направленности определяется по формулам (20), (21), причем в качестве поля $u_0(\rho_0)$ нужно взять $f(\rho_0)/b(1 + \rho_0^2/4b^2)$, где $f(\rho_0)$ — анизотропная диаграмма облучателя, а в качестве $K(\rho_0)$ — величину $\exp(-2ik\zeta(\rho_0))$, где случайное после $\zeta(\rho_0)$ анизотропно.

11. Изложенную в пп. 2—7 теорию можно применить и к другим устройствам с непрерывным распределением поля, например, к линзовым антеннам. При этом можно исследовать уширение освещенной области как из-за неоднородностей материала и неровностей поверхности линзы, так и из-за случайных смещений и перекосов фокусирующих и облучающих элементов. Кроме того, меру (2) можно применить к исследованию ширины волнового пучка в квазиоптических линиях передачи. В частности, имеется возможность определить число фокусирующих элементов, после прохождения которых пучок уширяется

настолько, что выйдет за пределы линзы и дальнейшее распространение будет сопровождаться сильными потерями.

Авторы выражают благодарность С. М. Рытову, а также В. П. Яковлеву и В. В. Сазонову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R u z e, Nuovo Cimento, 9, Suppl. 3, 364 (1952).
2. D. K. C h e n g, IRE Trans., AP-3 № 3, 145 (1955).
3. Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, С. Э. Хайкин, Радиотехника и электроника, 5, № 4, 584 (1960).
4. Я. С. Шифрин, Статистика поля линейной антенны, изд. АРТА, Харьков, 1962.
5. W. M. Brown, C. J. Palermo, IEEE Trans., MIL-9, № 1, 4 (1965).
6. W. M. Brown, C. J. Palermo, IEEE Trans., MIL-9, № 3—4, 299 (1965).
7. J. P. Ruina, C. M. Angulo, IEEE Trans., AP-11, № 2, 153 (1963).
8. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 888 (1966).
9. З. И. Фейзуллин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
10. М. А. Исаакович, ЖЭТФ, 23, 3 (9), 305 (1952).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
8 сентября 1966 г.

RESOLUTION OF HIGH-DIRECTIONAL ANTENNAE WITH STRONG FLUCTUATIONS OF FIELD DISTRIBUTION

Yu. A. Kravtsov, Z. I. Feizoulin

On the basis of the mean square estimation of the width of the antenna pattern, the resolution of two-dimensional antenna with random errors of the aperture has been found. The cases of statistically nonuniform and anisotropic fluctuations are investigated both for axially symmetric and prolonged antennae. Parabolic reflectors with rough mirror surfaces are studied in detail. Consideration included the case of strong fluctuations although they are assumed to be slow.

УДК 621.375.3

ФЕРРИТОВЫЙ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ ВЫРОЖДЕННОГО ТИПА С РЕЗОНАТОРНОЙ СВЯЗЬЮ

A. П. Сафантьевский, В. М. Михайлов

Рассмотрено поведение коэффициента отражения от резонатора произвольной формы, колебания которого связаны с регенерированными магнитостатическими колебаниями типа 2, 0, 1. В линейном приближении и без учета влияния спиновых волн вычислены основные характеристики усилителя в зависимости от параметров феррита и резонатора. Рассмотрены некоторые возможные варианты усилителя на колебаниях типа 2, 0, 1 и проведена их сравнительная оценка.

В теории ферромагнитного магнитостатического усилителя, предложенной Суллом [1] и Дентоном [2], предполагалось, что связь магнитостатических колебаний с нагрузкой является апериодической. Впоследствии Пистолькорсом [3], Моносовым [4] и Вашковским [5] была развита теория резонаторного магнитостатического усилителя. Были исследованы общие закономерности регенерации колебаний резонатора, связанных с магнитостатическими колебаниями типа 2, 0, 1, как непосредственно через магнитное поле [3, 4], так и «косвенным путем» через электростатические колебания типа 1, 0 [5]. Однако в работах [3–5] анализ проводился лишь для резонаторов сферической и прямоугольной формы. Кроме того, сделанные приближения не позволяли оценить параметры усилителя в наиболее интересном случае—при критической связи феррита с резонатором.

В данной работе анализируются характеристики магнитостатического усилителя на колебаниях типа 2, 0, 1, связанных косвенным путем с колебаниями резонатора произвольной формы. Получены более строгие выражения для полосы и площади усиления. Рассмотрены возможные варианты усилителя и вычислены их рабочие характеристики. Проводится также сравнение характеристик усилителя с резонаторной и волноводной связью.

1. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ОТ РЕЗОНАТОРА С РЕГЕНЕРИРОВАННЫМ ФЕРРИТОВЫМ ОБРАЗЦОМ

Рассмотрим резонатор произвольной формы, содержащий намагниченную ферритовую сферу. Будем полагать, что размеры ферритового образца значительно меньше длины волны, а структура невозмущенного поля в резонаторе совпадает со структурой электростатических колебаний типа 1,0. Кроме того, к ферритовому образцу приложено линейно поляризованное магнитное поле накачки с частотой ω_n , параллельное постоянному полю.

Определим коэффициент усиления резонатора с регенерированным ферритовым образцом, численно равный коэффициенту отражения. Для вычисления последнего воспользуемся обычным в этих случаях способом: сначала, используя метод возмущений, определим изменения собственной частоты и добротности резонатора с намагниченным ферритом

при воздействии накачки, а затем введем их в выражение для коэффициента отражения от пустого резонатора.

Возмущенное состояние резонатора с ферритом описывается уравнением [7]

$$\frac{\omega_b - \omega_p}{\omega_p} = - \frac{\int_{V_\Phi} [\overset{\leftrightarrow}{H_0}(\mu - \mu_0) H + E_0(\epsilon - \epsilon_0) E] dV}{2 \int_{V_0} |E_0|^2 dV}, \quad (1)$$

где $\omega_p = \omega_0 + i\omega_0/2Q$ — собственная комплексная частота пустого резонатора; ω_b — возмущенная частота резонатора; E_0 , H_0 и E , H — начальные и возмущенные поля в резонаторе; V_Φ , V_0 — объемы феррита и резонатора; μ , ϵ — возмущающие магнитная и диэлектрическая проницаемости феррита.

Электрические колебания типа 1,0 всегда связаны с магнитостатическими типа 2,0,1. Для малого эллипсоида, расположенного в максимуме электрического поля резонатора, $H_0 = 0$, а возмущенное поле E можно представить в виде [8]

$$E = \left[1 + D' \frac{\Phi d\omega - i(F'' - 2L'|p|)}{(\Phi d\omega)^2 + (F'' - 2L'|p|)^2} \right] \frac{3|E_0|}{\epsilon + 2}, \quad (2)$$

где E_0 — амплитуда поля в области расположения феррита, остальные обозначения такие же, как в работе [8].

Подставляя (2) в (1) и вычисляя интеграл в числителе, имеем

$$-\delta_b + id_b = -\kappa \frac{\Phi d\omega - i(F'' - 2L'|p|)}{(\Phi d\omega)^2 + (F'' - 2L'|p|)^2}, \quad (3)$$

где δ_b и d_b — приращения частоты и добротности резонатора, обусловленные лишь магнитными свойствами феррита:

$$\begin{aligned} \delta_b &= 2(\omega_b - \omega_d)/\omega_d, \\ d_b &= (1/Q_b) - (1/Q_d); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\kappa = 3V_\Phi ND' \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}, \quad (5)$$

$$N = E_0^2 / \int_V E_m^2 dV,$$

N — коэффициент, характеризующий концентрацию поля в точке расположения феррита,

$$\omega_d = \omega_p \left(1 - \frac{\omega_b}{\omega_p} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} V_\Phi N \right) \approx \left(1 - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} V_\Phi N \right) \quad (6)$$

— частота резонатора с ненамагнченным ферритом, отличающаяся от собственной частоты резонатора ω_p вследствие диэлектрических свойств феррита.

Коэффициент отражения вблизи резонансной частоты одного из типов собственных колебаний резонатора с ненамагнченным ферритом удобно записать следующим образом:

$$R = \frac{d_{cb} - d_d - i\delta_d}{d_{cb} + d_d + i\delta_d}, \quad (7)$$

где $d_{cb} = 1/Q_{cb}$, $d_d = 1/Q_d$, $\delta_d = 2d\omega/\omega_d$, Q_d — добротность резонатора с ненамагнченным ферритом, Q_{cb} — добротность связи, δ_d — относи-

тельная расстройка частоты сигнала от резонансной частоты резонатора с ненамагниченным ферритом.

Если внешнее постоянное магнитное поле выбрано таким, что резонансная частота магнитостатических колебаний совпадает с частотой резонатора ω_d , то коэффициент отражения от резонатора с намагниченным ферритом при наличии накачки можно представить в виде

$$R = \frac{d_{cb} - d_d - d_b - i(\delta_d - \delta_b)}{d_{cb} + d_d + d_b + i(\delta_d - \delta_b)}. \quad (8)$$

Подставляя (3) в (8) и считая, что резонатор согласован с линией ($d_{cb} = d_d$), после преобразований имеем

$$|R|^2 = \frac{(S^4 g)^2 + v^2(v^2 + S^4 g^2 - S^2)^2}{(v^2 + S^4 g^2 - S^4 g)^2 + v^2(v^2 + S^4 g^2 - S^2)^2}. \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$S = Q_{nd} K_{cb}, \quad (10)$$

Q_{nd} — нагруженная добротность резонатора с ненамагниченным ферритом; K_{cb} — коэффициент связи феррита с резонатором, аналогичный коэффициенту связи между контурами:

$$K_{cb} = \left(\frac{2\kappa}{\omega_0 \Phi} \right)^{1/2}; \quad (11)$$

v — приведенная расстройка частоты сигнала относительно резонансной частоты резонатора $\omega_d = \omega_n/2$:

$$v = 2Q_{nd} \frac{d\omega}{\omega_d} = \frac{d\omega}{\Delta\omega_{nd}}, \quad (12)$$

$\Delta\omega_{nd}$ — полуширина резонансной кривой напруженного резонатора; g — параметр регенерации, характеризующий потери в резонаторе с ферритом при наличии накачки:

$$g = \frac{2L'|p| - F''^2}{\times Q_{nd}} = \frac{2L'|p| - F''}{S^2 \omega_0 \Phi / 2Q_{nd}}. \quad (13)$$

Значение $g = 0$ соответствует полной компенсации собственных потерь в феррите.

Выражение (9) определяет поведение коэффициента отражения от резонатора с регенерированным ферритовым образцом в зависимости от частоты сигнала, параметров феррита и резонатора и степени регенерации при постоянной частоте накачки $\omega_n = 2\omega_d$.

Используя принятые ранее обозначения и учитывая, что для ферритов в сантиметровом диапазоне волн $\epsilon > 10$, имеем

$$S \approx Q_0 \sqrt{\frac{\pi^3 \epsilon N r^5}{2\lambda^2}}. \quad (14)$$

Коэффициент S наиболее сильно зависит от радиуса ферритовой сферы и параметров резонатора и может быть легко вычислен для резонаторов различной формы. В результате косвенного взаимодействия величина S зависит также от диэлектрической проницаемости феррита.

2. ПОРОГ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Пороговый уровень параметрического возбуждения определим из условия, что коэффициент отражения в точке порога стремится к бесконечности, т. е. из равенства нулю знаменателя в выражении (9). При любых значениях $S > 0$ и $g > 0$ последний равен нулю в двух случаях:

$$A) \quad v = 0, \quad g = 1; \quad (15)$$

$$B) \quad v_{1,2} = \pm (S^2 - 1)^{1/2}, \quad S^2 g = 1. \quad (16)$$

Случай А соответствует гармоническому режиму генерации на частоте $\omega_0 = \omega_h/2$. Пороговое поле при этом равно

$$h_{kp}^A = \left(F'' + S^2 \frac{\omega\Phi}{2Q_{нд}} \right) \frac{4\pi M}{2L'}. \quad (17)$$

Случай Б соответствует бигармоническому режиму генерации на частотах $\omega_{1,2} = (\omega_h/2) \pm (S^2 - 1)^{1/2} \Delta\omega_{нд}$, а пороговое поле равно

$$h_{kp}^B = \left(F'' + \frac{\omega\Phi}{2Q_{нд}} \right) \frac{4\pi M}{2L'}. \quad (18)$$

Первый член в скобках уравнений (17), (18) определяет «собственные» потери в феррите; второй член—потери, вносимые в феррит из резонатора, которые обратно пропорциональны нагруженной добротности резонатора. На рис. 1 приведены зависимости порогового поля h_{kp}^A, h_{kp}^B

от величины коэффициента связи феррита с резонатором S , вычисленные для $\Delta H = 0,5$ э, $4\pi M = 1700$ гс. Пунктирная линия соответствует порогу возбуждения колебаний типа 2, 0, 1 в безграничном пространстве. Из рисунка 1 видно, что пороговое поле в гармоническом режиме резко возрастает с увеличением связи феррита с резонатором S , а в бигармоническом — не зависит от S . При $S > 1$ с увеличением поля накачки вначале возникает генерация на частотах $\omega_{1,2}$, а затем на частоте ω_0 . Таким образом, при $S > 1$ и $g > 1$ генерация имеет место одновременно на трех частотах.

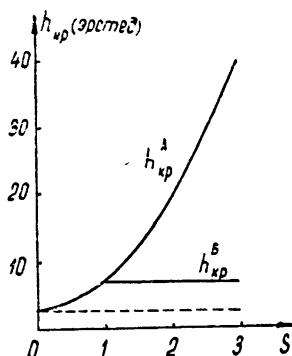


Рис. 1. Зависимость порогового поля от величины связи феррита с резонатором S в гармоническом и бигармоническом режимах.

Дальнейшее рассмотрение удобно проводить, используя два параметра регенерации: g — для режима А и $g_B = S^2 g$ — для режима Б, которые связаны с h/h_{kp} следующим образом:

$$g = \frac{h}{h_{kp}^A} - \frac{t}{S^2} \left(1 - \frac{h}{h_{kp}^A} \right), \quad (19)$$

$$g_B = \frac{h}{h_{kp}^B} - t \left(1 - \frac{h}{h_{kp}^B} \right),$$

где

$$t = \frac{5}{4} \frac{\omega_r}{\omega_0} \left(\frac{\omega_L}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_L} \right) Q_{нд}. \quad (20)$$

Для определения величин относительных расстроек v , соответствующих экстремумам кривой $|R|^2$, вычислим производную $d|R|^2/dv$ и приравняем числитель нулю:

$$v^4 + 2g_B(g_B - 2S^2)v^2 + g_B(g_B - 2S^2)(g_B^2 - 2S^2) - S^4 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

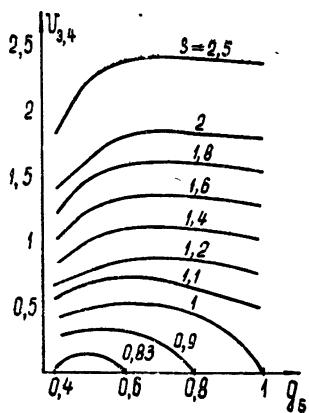
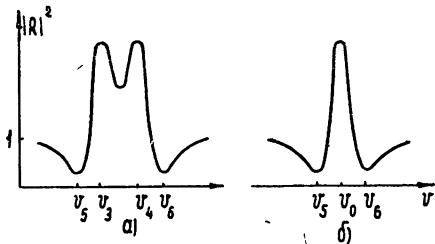
$$\begin{aligned} v_{3,4} &= \pm \{g_B(2S^2 - g_B) - S[S^2[1 - 4g_B(1 - g_B)] + 2g_B^2(1 - g_B)]\}^{1/2}, \\ v_{5,6} &= \pm \{g_B(2S^2 - g_B) + S[S^2[1 - 4g_B(1 - g_B)] + 2g_B^2(1 - g_B)]\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Легко убедиться, что при $g_B \leq 1$ корни $v_{3,4}$ соответствуют максимумам коэффициента отражения (см. рис. 2а) и существуют только при условии

$$S^4(4g_B - 1) - 2S^2g_B^2(1 + g_B) + g_B^4 > 0, \quad (22)$$

которое определяет возникновение седловины в резонансной кривой вблизи точки $v = 0$.

Рис. 2. Форма частотных характеристик усиленителя в бигармоническом (а) и гармоническом (б) режимах.



Корни $v_{5,6}$ определяют положение минимумов коэффициента отражения (см. рис. 2). Если условие (22) не выполняется, то в точке $v = 0$ имеет место максимум коэффициента отражения (см. рис. 2б), однако и в этом случае корни $v_{5,6}$ определяют положение минимумов $|R|^2$.

На рис. 3 построены зависимости относительных расстроек $v_{3,4}$, соответствующих максимумам $|R|^2$, от параметра регенерации g .

Рис. 3. Зависимость частот связи, соответствующих максимумам коэффициента усиления, от параметра регенерации g .

4. КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ, ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ

Из уравнения (9) и рис. 3 следует, что частотная характеристика усиленителя является двугорбой даже при связи меньше критической ($S < 1$). Однако при любых значениях $S \leq 1$ и $0 < g < 1$ величина $|R|^2$ в точке $v = 0$ мало отличается от ее значения в точках $v_{3,4}$. Поэтому для вычисления полосы пропускания за резонансное значение можно принять величину $|R|^2$ в точке $v = 0$. В бигармоническом режиме ($S > 1$) при малом различии частот резонансных кривых выражения для полосы пропускания получаются очень громоздкими. Однако при $S > 2$ и $g_B > 0,6$ разность частот значительно больше полу-

ширины соответствующих резонансных кривых, а частоты $v_{3,4} \approx v_{1,2}$. С учетом этих приближений, выражения для коэффициентов усиления при резонансе принимают следующий вид:

режим А

$$|R|_{v=0}^2 = (1-g)^{-2}, \quad (23)$$

режим Б

$$|R|_{v_{3,4}}^2 = \frac{1 + g_B^2(S^2 - 1)}{S^2(1 - g_B^2)}.$$

Относительные расстройки v на границах полосы пропускания определим из условий

$$\begin{aligned} 0,5 |R|_{v=0}^2 &= |R|^2, \\ 0,5 |R|_{v_{3,4}}^2 &= |R|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставим (9) и (23) в (24) и решим уравнения относительно v . Учитывая, что приведенная полоса пропускания в режиме А равна $2v$, а в режиме Б равна $v_2^* - v_1^*$, имеем

$$\begin{aligned} B_{\text{пр}}^A &= 2 \left[q \pm \left(q^2 + \frac{S^4(g-1)^2}{1+2(g-1)^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \\ B_{\text{пр}}^B &\simeq (1-g_B), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$q = \frac{S^2(2 - S^2g^2)[1 - 2(g-1)^2] - 1}{2[1 - 2(g-1)^2]}.$$

На рис. 4, 5 построены зависимости приведенной полосы пропускания в режимах А и Б от параметра регенерации g и коэффициента связи S . Из рисунка видно, что в режиме А полоса пропускания быстро растет с увеличением коэффициента связи, а в режиме Б (при $g > 0,7$) не зависит от S . Кроме того, имеется существенное различие в поведении полосы пропускания B от параметра регенерации.

Приведенную площадь усиления легко вычислить, используя выражения (23)–(25):

$$\Pi_{\text{пр}}^A = \frac{2}{1-g} \left[q \pm \left(q^2 + \frac{S^4(g-1)^2}{1-2(g-1)} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (26)$$

$$\Pi_{\text{пр}}^B = \frac{1}{S} [1 + g^2(S^2 - 1)]^{1/2}.$$

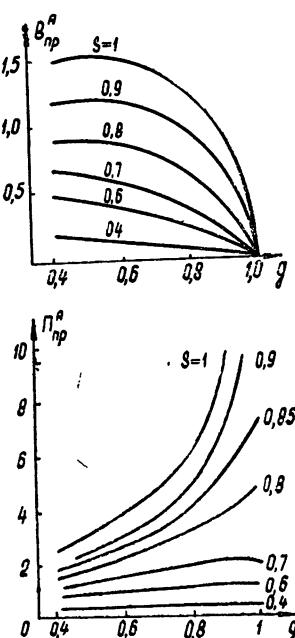
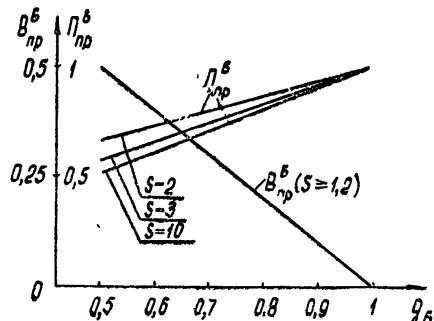


Рис. 4. Зависимости приведенной полосы пропускания $B_{\text{пр}}$ и площади усиления $\Pi_{\text{пр}}$ от параметра регенерации в гармоническом режиме.

Зависимости приведённой площади усиления в режимах А и Б от параметров g и S построены на рис. 4, 5. Из рисунка видно, что при слабой связи ($S < 0,6$) в режиме А площадь усиления не зависит от параметра g , аналогично случаю апериодической (вольноводной) связи феррита с нагрузкой [8]. При связи, близкой к критической ($S \rightarrow 1$), площадь усиления растет с увеличением параметра ре-

генерации. На рис. 6 приведена кривая площади усиления как функция параметра S при постоянной величине параметра регенерации $g = 0,9$. Площадь усиления максимальна при связи, равной критической ($S=1$),

Рис. 5. Зависимости приведенной полосы пропускания $B_{\text{пр}}$ и площади усиления $\Pi_{\text{пр}}$ от параметра регенерации в бигармоническом режиме.



что понятно из аналогии со связанными контурами: при критической связи получается наиболее широкая резонансная кривая системы связанных контуров.

Результаты проведенного анализа характеристик резонаторного магнитостатического усилителя на колебаниях типа 2, 0, 1 качественно согласуются с полученными ранее в работах [3-5].

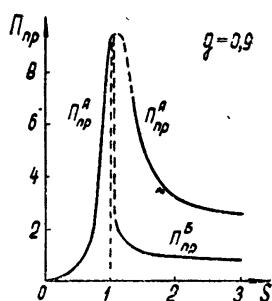


Рис. 6. Зависимость приведенной площади усиления от параметра связи феррита с резонатором при постоянной степени регенерации $g = 0,9$.

Однако найденные условия возникновения бигармонического режима генерации и усиления различны: первый имеет место при коэффициенте связи $S > 1$, второй — при $S > 0,8$. Выражения для полосы пропускания и площади усиления также отличаются от полученных в работах [3-5]. При критической связи феррита с резонатором ($S = 1$) площадь усиления имеет конечную величину, зависящую от степени регенерации и не превышающую $15\Delta f_{\text{нд}}$ ($\Delta f_{\text{нд}}$ — полуширина резонансной кривой напруженного резонатора с ненамагниченным ферритом). В сантиметровом диапазоне волн при малой добротности резонатора $Q_{\text{нд}} = 500$ и коэффициенте усиления по мощности 20 дБ полоса пропускания может достигать 7—10 Мгц. Порогового поля при этом составляет не менее 10 эрстед (при $\Delta H = 0,5$ э).

Основными достоинствами резонаторного магнитостатического усилителя по сравнению с усилителем с апериодической (вольноводной) связью [2,8] являются: 1) значительно большая площадь усиления, 2) возможность применения в усилителе ферритовых образцов малого диаметра, 3) возможность работы в бигармоническом режиме, что устраняет фазовую зависимость усиливаемого сигнала.

Необходимо, однако, отметить, что площадь усиления в бигармоническом режиме не может быть больше, чем в усилителе с волноводной связью [8] при оптимальных параметрах последнего.

5. ВЫБОР РЕЗОНАТОРОВ ДЛЯ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ НА КОЛЕБАНИЯХ ТИПА 2, 0, 1

Полученные результаты позволяют оценить характеристики усилителя при использовании различных резонаторов в цепи сигнала.

Кроме коэффициента усиления, полосы пропускания и порогового поля одним из основных параметров усилителя является пороговая

мощность накачки. Пороговое поле составляет несколько эрстед даже при использовании ферритов с узкой резонансной кривой. Для достижения такого большого значения порогового поля при сравнительно небольших мощностях источника накачки обычно применяют резонатор, концентрирующий энергию накачки в области расположения ферритового образца.

Рассмотрим некоторые возможные варианты магнитостатического усилителя на колебаниях типа 2, 0, 1. Усилитель может быть выполнен двумя способами: либо путем использования в цепи сигнала и накачки одного резонатора с двумя типами колебаний, либо путем использования различных резонаторов, что позволяет выбрать для каждой из цепей резонатор с наиболее подходящими параметрами.

В обоих случаях необходимо, чтобы в точке расположения ферритового образца электрическое поле сигнала и магнитное поле накачки были параллельны между собой, а собственные частоты колебаний резонаторов были равны частоте накачки ω_n и сигнала ω_c и удовлетворяли условию $\omega_c = \omega_n/2$. Для выполнения этого условия при использовании резонатора с двумя типами колебаний необходимо, чтобы один из индексов колебаний накачки или сигнала был равен нулю. Пользуясь nomogrammой типов колебаний и картиной распределения полей в резонаторах [7], можно показать, что возможными парами колебаний могут быть: в прямоугольном резонаторе — колебания типа E_{110} , H_{021} , а в цилиндрическом — E_{010} , H_{011} или H_{111} , E_{110} (первый тип относится к сигналу, второй — к накачке).

Возможных вариантов усилителя с раздельными резонаторами значительно больше. Для осуществления одновременного воздействия на феррит полей накачки и сигнала можно врезать один резонатор в другой или применять дополнительную петлю связи с ёмкостью на конце, связанную с сигнальным резонатором. Наиболее простым вариантом усилителя с раздельными резонаторами является усилитель со скрещенными и врезанными друг в друга прямоугольными резонаторами типа E_{110} (см. табл. 1).

Сравним характеристики перечисленных выше вариантов усилителя. Сравнение будем проводить при критической величине связи феррита с резонатором ($S = 1$), когда площадь усиления максимальна. Так как величина связи зависит от параметров феррита и резонатора, то для каждого резонатора необходимо вычислить величину N и Q_0 , а также критический диаметр ферритовой сферы $2r_{kp}$, при котором $S = 1$. Примем $4\pi M = 1700$ Гс, $\Delta H = 0,5$ э, $\epsilon = 10$, $f = 4,7$ Гц. Для вычисления N и $2r_{kp}$ воспользуемся выражениями (5) и (14), а ненагруженную добротность Q_0 определим из уравнения [7]

$$Q_0 = \frac{1}{\Delta} \int_V H_m^2 dV \Big| \int_S H_m^2 dS,$$

где Δ — глубина проникания (для серебра $\Delta = 64,2 \cdot 10^{-3} f^{-1/2} m$). Результаты расчета N , Q_0 , $2r_{kp}$, а также величины порогового поля приведены в таблицах 1 и 2.

Пороговое поле легко связать с пороговой мощностью, если учесть, что для согласованного резонатора с одним отверстием связь мощность, поглощаемая в стенках резонатора, равна половине падающей мощности

$$\frac{P_{пад}}{2} = \frac{1}{2 \sigma \Delta} \int_S H_m^2 dS.$$

Сравнение полосы пропускания будем проводить при коэффициенте регенерации $g = 0,9$, что соответствует коэффициенту усиления по напря-

Таблица 1

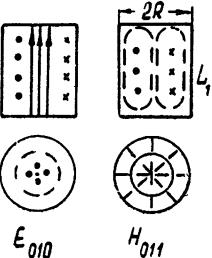
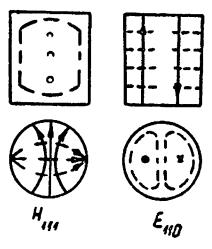
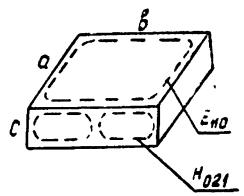
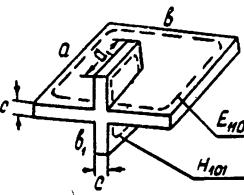
 E_{010} H_{011}	$Q_0 = \frac{1}{\Delta} \frac{L_1 R}{L_1 + R}$ $N = 2/\pi L_1 R^2 J_1(B_{01})$ $P_{kp} = \left(2 \frac{\pi^2 R^4}{L_1^2 A_{01}^2} + RL_1 \right) \frac{\pi J_0^2(A_{01})}{\sigma \Delta} h_{kp}^2$
 H_{111} E_{110}	$Q_0 = \frac{1}{\Delta} \frac{RL_1}{(2R - L_1)(\lambda_0/2L_1)^2 + L_1 A_{11}^2 (A_{11}^2 - 1)}$ $N = 4 A_{11}^2 / \pi R^2 L_1 (A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11})$ $P_{kp} = (1/\sigma \Delta) \pi R (R + L_1) J_0^2(B_{11}) h_{kp}^2$
 H_{021}	$P_{kp} = \frac{1}{\sigma \Delta} \frac{b^2}{2} \left[bc \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{4c^2} \right) + a \left(\frac{b}{2c^2} + \frac{2c}{b^2} \right) \right] h_{kp}^2$ $Q_0 = \frac{1}{\Delta} \frac{abc(a^2 + b^2)}{ab(a^2 + b^2) + 2c(a^3 + b^3)}$ $N = 4/abc$
 H_{101}	$P_{kp} = \frac{1}{\sigma \Delta} b_1^2 \left[\frac{a_1 b_1}{2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} \right) + c \left(\frac{a_1}{b_1^2} + \frac{b_1}{a_1^2} \right) \right] h_{kp}^2$

Таблица 2

Тип резонатора	Размеры резонаторов (см)	$Q_0 \cdot 10^{-3}$	$N (cm^{-3})$	$2r_{kp} (\mu m)$	$B (Mz)$	$h_{kp} (cm)$	$P_{kp} (em)$
Цилиндрический E_{010}, H_{011}	$R = 2,43$ $L_1 = 2,64$	13,4	0,152	0,5	0,35	3,2	0,87
Цилиндрический H_{111}, E_{110}	$R = 1,94$ $L_1 = 11,2$	30	0,08	0,41	0,15	2,95	2,12
Прямоугольный E_{110}, H_{021}	$a=b=2c=4,5$	12	0,09	0,582	0,39	3,3	6,9
Прямоугольный (скрещенный) E_{110}, H_{101}	$a=b=2a_1=4,5$ $c=0,2$	20	1	0,74	2,4	6,8	4,25

жению, равному 10 (20 дБ по мощности). Из рис. 5 видно, что при $S = 1$ и $g = 0,9$ приведенная полоса пропускания $B_{\text{пр}} = 1$. Действительная полоса пропускания

$$B = B_{\text{пр}} 2 \Delta f_0,$$

где $2 \Delta f_0$ — ширина резонансной кривой резонатора без феррита. Результаты расчета $P_{\text{кр}}$ и B приведены в таблице 2.

Из таблицы видно, что величина критического диаметра ферритового образца слабо зависит от типа резонатора, что и следовало ожидать, так как для рассматриваемых резонаторов произведение $\sqrt[5]{Q^2 N}$ примерно одинаково. Величины порогового поля и полосы пропускания имеют наибольшее значение для прямоугольного резонатора с малым размером, вдоль которого индекс колебаний E_{110} равен нулю, и обусловлены меньшей добротностью этого резонатора по сравнению с другими. Пороговые поля для трех других конструкций усилителя примерно одинаковы. Однако пороговые мощности существенно отличаются. Это вызвано различной концентрацией поля накачки, действующего на образец, величину которой удобно определять как отношение квадрата амплитуды поля в месте расположения ферритового образца к падающей на резонатор мощности.

Из рассмотренных выше вариантов наибольший интерес представляет усилитель со скрещенными резонаторами, имеющий наибольшую полосу пропускания, и усилитель с цилиндрическим резонатором (с колебаниями типа E_{010}, H_{011}), имеющий наименьшую величину пороговой мощности.

Необходимо отметить, что на практике добротность резонаторов всегда будет меньше расчетной. Это приведет к увеличению критического диаметра феррита, пороговой мощности и полосы пропускания.

При анализе характеристик вырожденного магнитостатического усилителя не учитывались спиновые волны. Порог возбуждения последних всегда меньше порога рабочих магнитостатических колебаний, нагруженных резонатором. В результате этого за порогом возбуждения спиновых волн имеет место «замораживание» коэффициента усиления и большой нетелевой шум [2]. Однако при использовании модулированной накачки влияние спиновых волн заметно уменьшается и можно наблюдать работу усилителя как в гармоническом, так и бигармоническом режимах. При этом зависимость характеристик усилителя от параметров феррита и резонатора качественно совпадает с расчетом.

На рис. 7 приведены осциллограммы частотных характеристик усилителя в бигармоническом режиме при различных значениях мощности накачки ($P_b > P_a$). Частотный масштаб на этих осциллограммах одинаковый. Из осциллограмм видно, что при мощности накачки, близкой к пороговой, имеет место трехчастотный режим усиления. Такой режим возможен только при $1 < S < 1,5$, когда пороговые поля в гармоническом и бигармоническом режимах близки по величине (см. рис. 1).

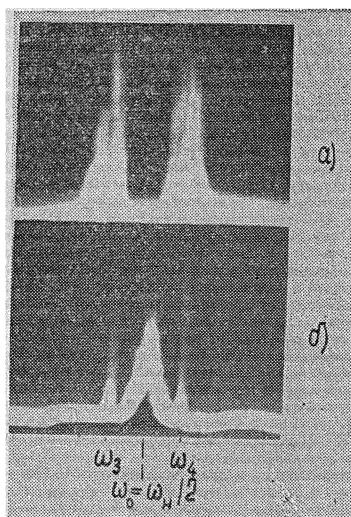


Рис. 7. Осциллограммы частотных характеристик усилителя в бигармоническом режиме при различных значениях мощности накачки ($P_b > P_a$).

На рис. 7 приведены осциллограммы частотных характеристик усилителя в бигармоническом режиме при двух значениях мощности накачки ($P_a < P_b$). Частотный масштаб на этих осциллограммах одинаковый. Из осциллограмм видно, что при мощности накачки, близкой к пороговой, имеет место трехчастотный режим усиления. Такой режим возможен только при $1 < S < 1,5$, когда пороговые поля в гармоническом и бигармоническом режимах близки по величине (см. рис. 1).

Однако коэффициент усиления на частоте ω_0 в этом случае всегда значительно меньше, чем на частотах ω_3 и ω_4 . Осциллограммы, иллюстрирующие работу резонаторного усилителя в гармоническом режиме, были приведены ранее [9].

Авторы признательны Я. А. Моносову и А. В. Вашковскому за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Suhl, J. Appl. Phys., **28**, № 11, 1125 (1957).
2. R. T. Denton, J. Appl. Phys. Suppl., **32**, № 3, 300 s (1961).
3. А. А. Пистолькорс, Радиотехника и электроника, **7**, № 3, 416 (1962).
4. Я. А. Моносов, Радиотехника и электроника, **7**, № 7, 1130 (1962).
5. А. В. Вашковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 6, 1162 (1964).
6. А. В. Вашковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 1, 85 (1963).
7. В. В. Никольский, Теория электромагнитного поля, изд. Высшая школа, М., 1964.
8. А. П. Сафантьевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 8, 1153 (1967).
9. А. П. Сафантьевский, С. В. Рыков, В. В. Масленникова, Радиотехника и электроника, **9**, № 11, 2077 (1966).

Центральный научно-исследовательский институт
приборов автоматики

Поступила в редакцию
14 сентября 1966 г.

FERRITE MAGNETOSTATIC DEGENERATED-TYPE AMPLIFIER WITH RESONATOR COUPLING

A. P. Safant'evskii, V. M. Mikhaylov

The behaviour of the coefficient of reflection from an arbitrary-form resonator which oscillations are coupled with regenerated magnetostatic oscillations of 2, 0, 1 type is considered. In a linear approximation and without allowance for the effects of spin waves, there are calculated the basic amplifier characteristics as dependent on the ferrite and resonator parameters. Certain possible variants for the amplifier on 2, 0, 1 type oscillations are considered and their comparative estimation is given.

УДК 621.375.3

ФЕРРИТОВЫЙ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ ВЫРОЖДЕННОГО ТИПА С ВОЛНОВОДНОЙ СВЯЗЬЮ

А. П. Сафантьевский

Рассмотрено поведение коэффициента отражения от волновода произвольной формы, поле которого связано с регенерированными магнитостатическими колебаниями типа 2, 0, 1. В линейном приближении и без учета влияния спиновых волн вычислены характеристики такого усилителя в зависимости от параметров феррита и волновода

Дентон [1] впервые развел теорию ферритового магнитостатического усилителя с продольной накачкой и подтвердил основы теории экспериментальным исследованием усилителя на колебаниях типа 3, 1, 1 и 3, 1, 1. В усилителе Дентона взаимодействие магнитостатических колебаний с полем усиливаемого сигнала осуществлялось с помощью петли, являющейся оконечной нагрузкой коаксиальной линии. Недостатки такой конструкции связи очевидны и отмечались в работе [1]. Для увеличения связи феррита с нагрузкой и создания неоднородного поля сигнала в месте расположения ферритового образца диаметр петли должен быть малым. Это приводит к экранированию поля накачки, действующего на образец, и затрудняет использование такой конструкции усилителя на частотах выше 5 Гц.

В усилителе с продольной накачкой можно использовать и другие типы магнитостатических колебаний, удовлетворяющие соответствующему правилу отбора [2]. При этом для увеличения связи феррита с нагрузкой необходимо использовать колебания низших типов. Наиболее приемлемыми являются колебания типа 2, 0, 1 [3]. Взаимодействие этих колебаний с полем усиливаемого сигнала можно осуществить как непосредственно через магнитное поле, так и «косвенным путем» — через электростатические колебания типа 1, 0 [4, 6]. В первом случае структура поля усиливаемых колебаний в области расположения ферритового образца должна совпадать со структурой магнитостатических колебаний типа 2, 0, 1, во втором — со структурой электростатических колебаний типа 1, 0. Второй случай наиболее прост и позволяет упростить конструктивные недостатки, присущие усилителю Дентона.

В данной работе анализируются характеристики магнитостатического усилителя на колебаниях типа 2, 0, 1, связанных через электростатические колебания типа 1, 0 с полем прямоупольного волновода.

1. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ОТ ЗАКОРОЧЕННОГО ВОЛНОВОДА С РЕГЕНЕРИРОВАННЫМ ФЕРРИТОВЫМ ОБРАЗЦОМ

Рассмотрим закороченный волновод произвольной формы, в пучность электрического поля которого помещена ферритовая сфера, намагниченная вдоль оси z (рис. 1). Будем полагать, что в волноводе может распространяться только одна из нормальных волн. Примем также, что размеры ферритового образца значительно меньше длины волны в волноводе, а структура невозмущенного поля в области расположе-

ния ферритового образца совпадает со структурой электростатических колебаний типа 1,0 и описывается в прямоугольной системе координат уравнениями

$$E_z = E_0, \quad E_x = E_y = 0. \quad (1)$$

В ферритовом образце электростатические колебания типа 1,0 всегда связаны с магнитостатическими типа 2,0, 1 [4]. Последние могут быть регенериированы на частоте усиливаемого сигнала ω_0 . Для этого необходимо к ферритовому образцу приложить переменное магнитное поле накачки с частотой $\omega_n = 2\omega_0$, линейно поляризованное в направлении оси z .

Наиболее полно характеристики регенеративного усилителя можно описать с помощью коэффициента отражения. Коэффициент отражения от закороченного волновода, содержащего ферритовый образец, представим в виде

$$R = \frac{2\xi - 1}{2\xi + 1}, \quad (2)$$

где [5]

$$\xi = \frac{i\omega_0 W}{2c} \frac{\int_{V_\Phi} [H_0(\mu - \mu_0)H + E_0(\epsilon - \epsilon_0)E] dV}{\int_S |E_\perp|^2 dS}. \quad (3)$$

Здесь H_0 , E_0 и H , E — начальные и возмущенные поля в волноводе в области расположения феррита, μ , ϵ — магнитная и диэлектрическая проницаемости феррита, V_Φ — его объем, S , W — поперечное сечение и волновое сопротивление волновода.

Для образца малых размеров, расположенного в пучности электрического поля волновода, можно принять $H_0 = 0$. Тогда для вычисления интеграла в числителе выражения (3) необходимо знать лишь возмущенное поле E :

$$E = \text{grad } \psi_E. \quad (4)$$

Потенциал электрического поля колебаний типа 1,0 имеет вид

$$\psi_E = \alpha_E z, \quad (5)$$

где α_E — комплексная амплитуда электростатического потенциала, описывающая поле внутри сферы.

Величину α_E с учетом связи электростатических и магнитостатических колебаний при наличии накачки определим, используя граничные условия для потенциалов на поверхности сферы, полученные в работе [6] из решения электродинамической задачи для сферы в безграничном пространстве. При наличии поля усиливаемого сигнала, соответствующего начальному полю волновода в области расположения феррита E_0 , эти уравнения принимают вид

$$\alpha_E - \frac{2}{5} \frac{\omega}{c} k r^2 \alpha_H = \beta_E r^{-3} + E_0,$$

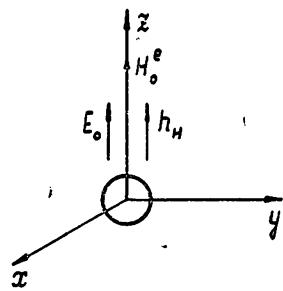


Рис. 1.

$$\varepsilon \alpha_E - \frac{1}{5} k r^2 \alpha_H = -2\beta_E r^{-3} - 2E_0,$$

$$\frac{\omega}{c} \varepsilon k \alpha_E + (2\mu + 1) \alpha_H - p[(\mu - 1)^2 - k^2] \alpha_H^* = -3\beta_H^* r^{-5}, \quad (6)$$

$$\frac{\omega}{c} \varepsilon k \alpha_E + 2\mu \alpha_H - p[(\mu - 1)^2 - k^2] \alpha_H^* = 3\beta_H r^{-5}.$$

Здесь r — радиус ферритовой сферы; β_H , β_E — амплитуды магнитостатических и электростатических потенциалов, описывающие поля снаружи сферы;

$$p = h_a / 4\pi M, \quad (7)$$

h_a — комплексная амплитуда поля накачки; μ , k — компоненты тензора магнитной проницаемости феррита (по Полдеру), которые с учетом потерь имеют вид

$$\begin{aligned} \mu &= 1 + \frac{\omega_M(\omega_i + i\omega_r)}{(\omega_i + i\omega_r)^2 - \omega^2}, \\ k &= -\frac{\omega_M \omega}{(\omega_i + i\omega_r)^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\omega_M = 4\pi\gamma M$, $\omega_i = \gamma H_i$, $\omega_r = \gamma \Delta H$, $\omega = 2\pi f$, M — намагниченность насыщения, H_i — внутреннее поле, ΔH — полуширина резонансной кривой.

Из уравнений (6) выразим α_E через амплитуду электрического поля в области расположения ферритового образца E_0 :

$$\alpha_E = \left[1 - \frac{D}{F + D - 2L'p \exp[i(\varphi - 2\varphi_0)]} \right] \frac{3|E_0|}{\varepsilon + 2}. \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F &= 4\mu + 1, \\ L &= (\mu - 1)^2 - k^2, \\ D &= \frac{2}{5} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 k^2 \varepsilon \frac{\varepsilon + 4}{\varepsilon + 2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$(\varphi - 2\varphi_0)$ — разность начальных фаз колебаний накачки и сигнала.

Условием резонанса магнитостатических колебаний типа 2,0,1 в беспраничном пространстве с учетом размеров образца и диэлектрической проницаемости является соотношение [6]

$$F' + D' = 0. \quad (11)$$

Однако можно приближенно считать, что резонанс имеет место при $F' = 0$, т. е. при [8]

$$\omega_0 = \left(\omega_i^2 + \frac{4}{5} \omega_i \omega_M \right)^{1/2}. \quad (12)$$

С учетом этого приближения выражения для F , L , D вблизи резонансной частоты колебаний типа 2,0,1 можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 F &= F_0 + \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega \simeq -\frac{5}{4} \frac{8\omega_0 d\omega}{\omega_i \omega_M} - i \left(\frac{5}{4} \right)^2 \frac{4\omega_r}{\omega_M} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_i^2} \right) = \\
 &= -F' - iF'', \\
 L &= L_0 + \frac{\partial L}{\partial \omega} d\omega \simeq -\frac{5}{4} \frac{\omega_M}{\omega_i} - i \left(\frac{5}{4} \right)^2 \frac{2\omega_r}{\omega_i} = -L' - iL'', \\
 D &= D_0 + \frac{\partial D}{\partial \omega} d\omega \simeq \frac{2}{5} \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right)^2 \frac{\epsilon + 4}{\epsilon + 2} \left[\left(\frac{5}{4} \frac{\omega_0}{\omega_i} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + i \left(\frac{5}{4} \right)^3 \left(\frac{2\omega_0}{\omega_i} \right)^2 \frac{\omega_r}{\omega_M} \right] = D' + iD'',
 \end{aligned} \tag{13}$$

где F_0, L_0, D_0 — значения функций при резонансе колебаний типа 2, 0, 1.

Подставим последние выражения в уравнение (9) и примем оптимальную разность фаз накачки и сигнала $\varphi_0 - 2\varphi = \pi/2$. При достаточно сильной регенерации единицей в квадратных скобках и величиной D в знаменателе уравнения (9) можно пренебречь. Тогда, используя (4), (9), (13) и вычисляя интеграл в числителе уравнения (3), получим

$$\xi = \times \frac{(F'' - 2L' |p|) + i\Phi d\omega}{(F'' - 2L' |p|)^2 + (\Phi d\omega)^2}, \tag{14}$$

где \times — коэффициент связи феррита с волноводом, определяемый параметрами феррита, размерами образца и волновода:

$$\times = \frac{3}{2} \frac{\omega_0 W}{c} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} V_\Phi N D',$$

$$N = E_0^2 / \int_S |E_\perp|^2 dS,$$

$$\Phi = F'/d\omega, \quad d\omega = \omega - \omega_0.$$

Учитывая, что для ферритов в сантиметровом диапазоне $\epsilon \gg 10$, имеем

$$\times \simeq 10 W N \epsilon \frac{\pi^4 r^5}{\lambda^3} \left(\frac{\omega_0}{\omega_i} \right)^2. \tag{15}$$

Подставляя (14) в (2), получим окончательное выражение для коэффициента отражения от закороченного волновода с регенерированным ферритовым образцом:

$$R = - \frac{v^2 + g(1+g) - iv}{v^2 - g(1-g) + iv}. \tag{16}$$

Здесь v — приведенная расстройка частоты относительно резонансной частоты колебаний типа 2, 0, 1:

$$v = \frac{\Phi d\omega}{2\times}, \tag{17}$$

g — параметр регенерации:

$$g = \frac{2L' |p| - F''}{2\times}. \tag{18}$$

При таком обозначении параметра регенерации значение $g = 0$ соответствует полной компенсации «собственных» потерь в феррите.

Коэффициент усиления по мощности численно равен модулю коэффициента отражения

$$|R|^2 = \frac{[v^2 + g(1+g)]^2 + v^2}{[v^2 - g(1-g)]^2 + v^2}. \quad (19)$$

Последнее выражение определяет поведение коэффициента усиления в зависимости от параметров феррита и волновода, частоты сигнала и мощности накачки (при постоянной частоте накачки).

Рассмотрим основные характеристики усилителя при использовании волновода прямоугольной формы с волной типа E_{110} . Одна из возможных конструкций такого усилителя схематически изображена на рис. 2.

2. ПОРОГ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Порог возбуждения определим из условия $|R|^2 \rightarrow \infty$, которое выполняется при $v = 0, g = 1$. Первое условие показывает, что генерация возникает на частоте резонанса магнитостатического типа $\omega_0 = \omega_n/2$. Из второго условия получаем выражение для порогового поля:

$$h_{kp}^0 = (2x + F'') \frac{4\pi M}{2L'} = h_{kp}^0 + \frac{x4\pi M}{L'}. \quad (20)$$

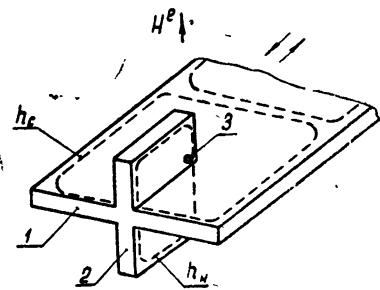


Рис. 2. Магнитостатический усилитель на колебаниях типа 2, 0, 1 с волноводной связью: 1—прямоугольный волновод, 2—прямоугольный резонатор накачки типа E_{110} , 3—ферритовая сфера, h_c , h_n — силовые линии магнитных полей сигнала и накачки.

Здесь h_{kp}^0 — порог возбуждения колебаний типа 2, 0, 1 в беспространственном пространстве,

$$h_{kp}^0 = \frac{2\Delta H}{\omega_M} \frac{5}{4} \omega_i \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_i^2} \right). \quad (21)$$

Второй член в правой части уравнения (20) характеризует увеличение порогового поля, обусловленное потерями, вносимыми в феррит из волновода:

$$\frac{x4\pi M}{L'} = 8WN\epsilon \frac{\pi^4 r^5}{\lambda^3} \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_M} 4\pi M. \quad (22)$$

Для закрепленного прямоугольного волновода с волной E_{110} амплитуда поля в пучности равна удвоенной амплитуде падающей волны $E_0 = 2E^+$,

$$N = \frac{E_0^2}{\int_S |E_\perp|^2 dS} = \frac{8}{ab},$$

$$W = W_0 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

где a, b — поперечные размеры волновода.

Принимая для упрощения, что $\omega_0^2/\omega_1\omega_M = 2$, получим

$$\frac{\pi^4 M}{L'} \simeq 130 \epsilon \frac{\pi^4 r^5}{ab\lambda^3} 4\pi M. \quad (23)$$

Таким образом, при помещении феррита в пучность электрического поля волновода пороговое поле магнитостатических колебаний типа 2,0,1 возрастает с увеличением диэлектрической проницаемости феррита и намагниченности насыщения и уменьшением поперечного сечения волновода. Однако наибольшее влияние на пороговый уровень оказывают размеры ферритового образца и рабочая длина волны.

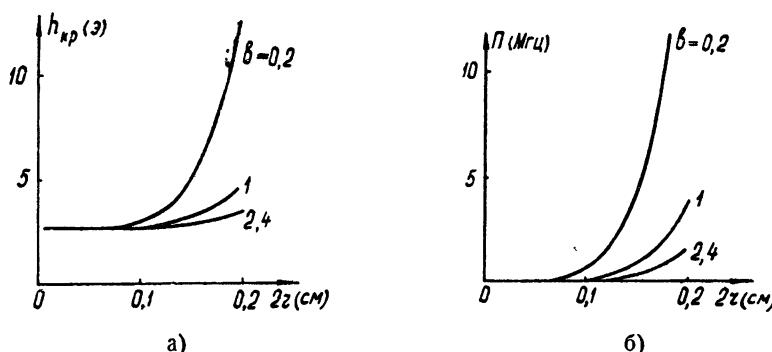


Рис. 3. Зависимость порогового поля (а) и площади усиления (б) от диаметра ферритового образца и поперечных размеров волновода. Один из размеров волновода принят постоянным и равным 4,8 см.

На рис. 3 изображена зависимость порогового поля от диаметра ферритового образца при различных поперечных размерах волновода, вычисленная по формуле (20) для $\lambda = 6$ см, $4\pi M = 1700$ гс, $\epsilon = 10$, $\Delta H = 0,5$ э.

3. КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ, ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ

Из уравнения (19) следует, что на резонансной частоте магнитостатического типа коэффициент усиления равен

$$|R|_{v=0}^2 = \frac{(1+g)^2}{(1-g)^2}. \quad (24)$$

Для определения полосы пропускания вычислим относительную расстройку v , при которой

$$|R|^2 = 0,5 |R|_{v=0}^2.$$

Решая последнее уравнение относительно v и учитывая, что полная приведенная полоса пропускания

$$B_{np} = 2v,$$

имеем

$$B_{np} = 2 \left\{ -\frac{1-g^2-6g^3+2g^4}{2(1-6g+g^2)} + \left[\left(\frac{1-g^2-6g^3+2g^4}{2(1-6g+g^2)} \right)^2 - \frac{g^2(1-g^2)^2}{1-6g+g^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (25)$$

Наиболее полной характеристикой регенеративного усилителя является площадь усиления — произведение коэффициента усиления (по напряжению) на полосу пропускания:

$$\Pi_{\text{пр}} = |R|_{v=0} B_{\text{пр}}. \quad (26)$$

При коэффициенте усиления $|R| > 5$ выражение для приведенной полосы упрощается:

$$B_{\text{пр}} \simeq 4 \frac{(1-g)}{(1+g)}, \quad (27)$$

а приведенная площадь усиления равна

$$\Pi_{\text{пр}} \simeq 4.$$

На рис. 4 построены зависимости $|R|$, $B_{\text{пр}}$, $\Pi_{\text{пр}}$ от параметра регенерации g , вычисленные из уравнений (24) — (26). Зная приведенные характеристики усилителя, легко вычислить их действительные значения:

$$\Pi = \Pi_{\text{пр}} \frac{2x}{\Phi}. \quad (28)$$

Если размеры образца и волновода выразить в сантиметрах, то для прямоугольного волновода с волной E_{110} площадь усиления в мегагерцах равна

$$\Pi = 2,56 \cdot 10^6 \varepsilon - \frac{\pi^4 r^5}{ab^3}. \quad (29)$$

Таким образом, площадь усиления растет с увеличением диэлектрической проницаемости и радиуса феррита и уменьшением поперечного сечения волновода. Следует отметить, что площадь усиления не зависит от ширины резонансной кривой ферритового

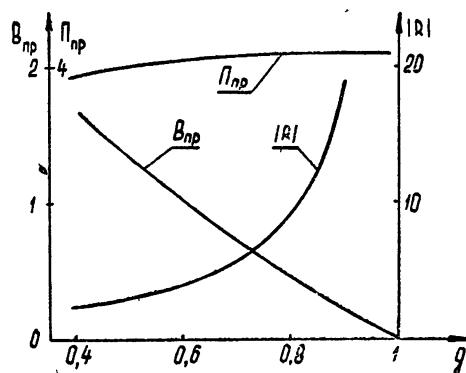


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления, полосы пропускания и площади усиления от параметра регенерации g .

образца $2\Delta H$; увеличение последней приводит только к возрастанию порога возбуждения усилителя.

На рис. 3 приведены зависимости площади усиления от диаметра ферритового образца и поперечных размеров волновода, вычисленные из уравнения (29) для $\varepsilon = 10$, $\lambda = 6 \text{ см}$. Из этого рисунка видно, что при использовании волновода сечением $4,8 \times 0,2 \text{ см}$ и образца диаметром $1,8 \text{ мм}$ площадь усиления не превышает 12 Мгц . При коэффициенте усиления равном 10 (20 дБ по мощности) полоса пропускания оказывается равной $1,2 \text{ Мгц}$. Это значение полосы пропускания примерно на порядок больше, чем для усилителя Дентона с петлевой связью [1], но значительно меньше, чем для усилителей на полупроводниковых диодах [9].

Таким образом, вследствие малой полосы пропускания и большой пороговой мощности ферритовый магнитостатический усилитель с волноводной связью не может представлять практического интереса даже при отсутствии вредного влияния спиновых волн.

Экспериментальное исследование макета усилителя, изображенного на рис. 2, проводилось с прямоугольным волноводом, поперечные размеры которого составляли $4,5 \times 0,2$ см. В усилителе использовалась сфера из монокристалла железо-иттриевого граната диаметром 1,4 мм и шириной резонансной кривой $2\Delta H \approx 1$ э. При коэффициенте усиления 8 дБ полоса пропускания была равна $0,9 \pm 0,15$ Мгц, что качественно согласуется с расчетом. За порогом возбуждения спиновых волн зависимости коэффициента шума и площади усиления от мощности на-качки были аналогичны усилителю с петлевой связью [1, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. T. Denton, J. Appl. Phys. Suppl., 32, № 3, 300 (1961).
2. А. Л. Микаэлян, А. А. Васильев, В. В. Дьяченко, Радиотехника и электроника, 6, № 5, 846 (1961).
3. Я. А. Моносов, Радиотехника и электроника, 7, № 7, 1130 (1962).
4. Сюй Янь-шень, Радиотехника и электроника, 6, № 1, 101 (1961).
5. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
6. А. В. Вашковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 1, 85 (1963).
7. E. R. Pergessini, T. S. Hartwick, M. T. Weiss, J. Appl. Phys., 33, № 11, 3292 (1962).
8. P. C. Fletcher, R. O. Bell, J. Appl. Phys., 30, № 5, 687 (1959).
9. В. С. Эткин, Е. М. Гершензон, Параметрические системы на полупроводниковых диодах, изд. Сов. радио, М., 1964.

Центральный научно-исследовательский институт
приборов автоматики

Поступила в редакцию
13 августа 1966 г.

FERRITE MAGNETOSTATIC DEGENERATED-TYPE AMPLIFIER WITH WAVEGUIDE COUPLING

A. P. Safant'evskii

There has been considered the behaviour of the coefficient of reflection from an arbitrary-form waveguide the field of which is related with regenerated magnetostatic 2, 0, 1-type oscillations. In a linear approximation and without allowance for spin wave effects, the amplifier characteristics as dependent on the ferrite and waveguide parameters have been calculated.

УДК 621.378.323

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЦИКЛОТРОННОГО МАЗЕРА

А. Ф. Курин

Рассмотрено возбуждение резонатора, помещенного в однородное магнитное поле, сторонним током с отрицательной электропроводностью вблизи электронной циклотронной частоты. Получено выражение для тока самовозбуждения. Обсуждается зависимость частоты генерации от настройки резонатора.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] показано, что действительная часть проводимости плазмы, находящейся в магнитном поле, принимает отрицательное значение, если для невозмущенной переменным электрическим полем внешней волны функции распределения электронов по импульсам $f_0(p)$ выполняется необходимое условие

$$\frac{\partial f_0}{\partial p} > 0. \quad (1)$$

Это значит, что функция f_0 должна отличаться от равновесной и что в определенном интервале энергий число частиц в состоянии с высокой кинетической энергией больше, чем в состоянии с низкой кинетической энергией. В работе [1] в качестве f_0 была взята дельта-функция

$$f_0 = C\delta(p - p_0)$$

и показано, что для получения отрицательной электропроводности условия (1) недостаточно: необходима зависимость времени релаксации τ или массы электронов от импульса.

В предлагаемой работе рассматривается действие возмущающего линейно поляризованного переменного электрического поля резонатора, помещенного в постоянное однородное магнитное поле с направлением вдоль оси резонатора, на монохроматический по импульсам электронный поток, проходящий через резонатор. Действием магнитного поля волны пренебрегаем, что соответствует случаю слабо релятивистского движения электронов.

Электрон влетает в резонатор под некоторым углом $\theta = \arctg(p_\perp/p_\parallel)$

к его оси (рис. 1), как это имело место в экспериментах с циклотронными мазерами [2, 3]. На рисунке H — внешнее постоянное однородное магнитное поле, p_\perp и p_\parallel — продольная и поперечная компоненты импульса электронов. В качестве $f_0(p)$ выберем произведение дельта-функций

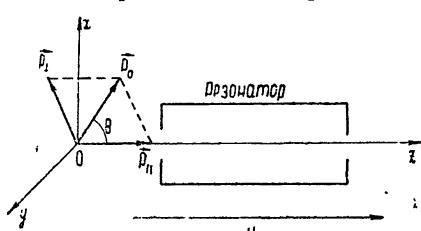


Рис. 1. Составляющие импульса электронов при влете в резонатор.

$$f_0(p) = C\delta(p_\perp - p_\perp^0)\delta(p_\parallel - p_\parallel^0), \quad (2)$$

C — нормировочная постоянная, которая находится из условия

$$\int f_0(p) dp_x dp_y dp_z = N$$

и после вычисления в цилиндрической системе координат оказывается равной

$$C = N/2\pi p_{\perp}^0. \quad (3)$$

В двух предыдущих выражениях N — число электронов в 1 см³ объема резонатора.

Электрон с массой m находится в резонаторе, имеющем длину l , конечное время

$$\tau = lm/p_{\parallel}, \quad (4)$$

которое является временем релаксации. Обратная величина $1/\tau$ дает ширину линии циклотронного поглощения. Расчеты показывают, что при p_{\parallel} , соизмеримом с p_{\perp} , время между столкновениями электронов с нейтральными атомами остаточного газа в условиях технического вакуума на несколько порядков больше, чем τ (4), и только при очень малых p_{\parallel} эти времена сравнимы. Предположение о том, что при конечной длине резонатора τ обратно пропорционально p_{\parallel} , высказано в работе [2].

Аналогично тому, как это сделано в работе [1], представим электрическое поле $E_0 \exp(i\omega t)$ в виде компонент с правой и левой круговой поляризацией:

$$E_+ = E_x + iE_y, \quad E_- = E_x - iE_y.$$

Тогда для плотности электрического тока получаем

$$\begin{aligned} j_+ &= \sigma_+ E_{0+} \exp(i\omega t), \\ j_- &= \sigma_- E_{0-} \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{\pm} = \sigma'_\pm + i\sigma''_\pm$ — комплексная проводимость. Вещественная и мнимая части интересующей нас проводимости σ_- оказываются равными

$$\sigma_- = \frac{Ne^2\tau_0}{m_0} \left[\frac{1}{1+x_0^2} - \beta_{\perp}^2 \frac{x_0(x_0 + Q_H)}{(1+x_0^2)^2} \right]; \quad (6)$$

$$\sigma'_- = - \frac{Ne^2\tau_0}{m_0} \left[\frac{x_0}{1+x_0^2} - \frac{\beta_{\perp}^2}{2} \frac{(x_0^2 - 1)(x_0 + Q_H)}{(1+x_0^2)^2} \right]. \quad (7)$$

При этом введены обозначения

$$(\omega - \Omega_H) \tau_0 = x_0; \quad (8)$$

$$v_{\perp}^2/c^2 = \beta_{\perp}^2; \quad (9)$$

$$\Omega_H \tau_0 = Q_H, \quad (10)$$

где ω — частота электрического поля, $\Omega_H = eH/m_0c$ — электронная циклотронная частота, v_{\perp} — поперечная составляющая скорости электрона, c — скорость света, m_0 означает массу электрона, обладающего импульсом p_0 , $\tau_0 = lm_0/p_{\parallel}^0$.

При $\tau \rightarrow \infty$ (6) и (7) дают соответствующие выражения, полученные в работе [4], если при их выводе пренебречь действием на электроны магнитного поля волны.

Из выражения (5) нетрудно показать, что σ_- может стать отрицательной, если

$$\beta_{\perp}^2 Q_H / 2 > 1. \quad (11)$$

В дальнейшем вместо j_- , σ_- , E_- , m_0 будем писать j , σ , E , m :

Задача о возбуждении колебаний циклотронного генератора сводится к задаче [5] о возбуждении резонатора сторонним током j_- , выражение которого приведено в (5). В работе [6], в которой выводятся уравнения молекулярного генератора, показано, что, если частота колебаний возбуждающего тока близка к одной из собственных частот резонатора ω , и потери в нем малы, то дифференциальное уравнение для электрического поля в резонаторе может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{\omega_v}{Q} \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 E = - \frac{dj}{dt}, \quad (12)$$

где $Q = (1/Q_v + 1/Q^{cb})^{-1}$ — полная добротность резонатора, добротность Q_v связана с потерями в стенках резонатора, Q^{cb} — добротность связи рассматриваемого типа колебаний резонатора с волноводной системой, ω_0 — частота, определяемая как $\omega_0 = \omega_v (1 + 1/Q_v)^{1/2}$.

Подставим второе выражение (5) в уравнение (12) и будем искать решение в виде $E = E_0 \exp(i\omega t)$. Отделяя вещественную и мнимую части полученного комплексного выражения, приходим к системе двух уравнений для определения N и ω :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_v}{Q} + \sigma' &= 0, \\ \omega^2 + \omega \sigma'' - \omega_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение для N как функции частоты представляет собой условие самовозбуждения, которое исследуется ниже.

2. УСЛОВИЕ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ

Используя выражение (6), запишем первое уравнение системы (13) в виде

$$N = - \frac{\omega_v m_0}{Q e^2 \tau_0} \frac{(1 + x_0^2)^2}{1 + x_0^2 - Q_H \beta_{\perp}^2 x_0}, \quad (14)$$

пренебрегая здесь и далее β_{\perp}^2 по сравнению с 1. Из этого равенства видно, что $N > 0$ в интервале

$$A/2 - \sqrt{A^2/4 - 1} < x_0 < A/2 + \sqrt{A^2/4 - 1}, \quad (15)$$

где

$$A = Q_H \beta_{\perp}. \quad (16)$$

Так как время прохождения электроном резонатора равно (4), то

$$N = I m_0 / e p_{\parallel} V, \quad (17)$$

где I — электронный ток, а V — объем резонатора.

Приравнивая выражения для N (17) и (14), получим силу тока, соответствующую условию самовозбуждения, как функцию от x_0 :

$$I = - \frac{p_{\perp}^0}{e \tau_0} \frac{V \omega_v}{l Q} \frac{(1 + x_0^2)^2}{1 + x_0^2 - Q_H \beta_{\perp}^2 x_0}. \quad (18)$$

Определим x_0 , при котором I минимально в области (15). Для этого решим уравнение

$$\frac{d}{dx_0} \left[\frac{(1+x_0^2)^2}{1+x_0^2 - Q_H \beta_{\perp}^2 x_0} \right] = 0.$$

Оно имеет три действительных корня, среди которых искомым является

$$x_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{9} \frac{1}{A} + \frac{16}{27\sqrt{3}} \frac{1}{A^2}. \quad (19)$$

Учитывая (11), можно с достаточной точностью ограничиться членами $\sim A^{-2}$. Очевидно, точность возрастает с увеличением A . Подставляя (19) в (18) и используя (16) и (4), получим силу тока в амперах, необходимую для самовозбуждения генератора при $x_0 = x_0^{(0)}$:

$$I(x_0^{(0)}) \simeq 5,35 \cdot 10^4 \frac{V}{Ql^3} \frac{\beta_{\perp}^3}{\beta_{\perp}^2} \left(1 + 0,37 \frac{\beta_{\parallel}}{\beta_{\perp}^2} \frac{\lambda_H}{l} \right). \quad (20)$$

Здесь использовано приближенное равенство $\omega \simeq \Omega_H$ и введены обозначения $\beta_{\parallel} = p_{\parallel}^0/m_0c$, λ_H — длина волны, соответствующая циклотронной частоте.

В работе [3] приведена формула пускового тока, которая качественно соответствовала экспериментальным результатам. Первый член выражения (20) несколько отличается от этой формулы, но хорошо совпадает с ней при значениях β_{\perp} , использованных в эксперименте [3]. Второй член формулы (20) дает заметный вклад в ток возбуждения при большой продольной скорости электронов.

3. ЧАСТОТА ГЕНЕРАЦИИ

Уравнение, связывающее частоту генерации и настройку резонатора, получается из системы (13), если исключить из нее N :

$$(x_0 + Q_H)^2 + (y_0 + Q_H)(x_0 + Q_H) \frac{k}{2Q} \frac{2x_0^3 - Ax_0^2 + 2x_0 + A}{x_0^2 - Ax_0 + 1} - (y + Q_H)^2 = 0. \quad (21)$$

Здесь $y_0 = (\omega_0 - \Omega_H)\tau_0$ и $k = (1 + 1/Q_v)^{-1/2}$. При $\tau \rightarrow \infty$ и $Q \rightarrow \infty$ из двух уравнений системы (13) остается только второе. Его анализ для частот, близких к Ω_H , проводится в работе [7], в которой рассматривается взаимодействие кольцевого электронного потока с полем резонатора.

Интерес представляет настройка резонатора $y_0^{(0)}$, которая обеспечивает генерацию на частоте, соответствующей $x_0^{(0)}$ (19). В этом случае для возбуждения резонатора при данных β_{\perp} , β_{\parallel} и Q необходим наименьший ток возбуждения (20). Величину $y_0^{(0)}$ находим из уравнения (21), оставляя при этом члены с A^{-1} :

$$y_0^{(0)} = x_0^{(0)} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{kQ_H}{Q} - \frac{1}{A} \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{24} \frac{kQ_H}{Q} \right) \frac{kQ_H}{Q}.$$

Видно, что разница между $x_0^{(0)}$ и $y_0^{(0)}$ увеличивается с ростом отношения kQ_H/Q , т. е. с уменьшением добротности резонатора Q . При $Q \gg Q_H$, $y_0^{(0)} \simeq x_0^{(0)}$. В двух точках $x_0^{(1)} \simeq 1 + 2/A$ и $x_0^{(2)} \simeq A/2 - 4/A$

независимо от отношения kQ_H/Q $x_0 = y_0$. При этих значениях x_0 числитель дроби в (21) обращается в нуль. Для $x_0^{(2)} > x_0 > x_0^{(1)}$ $y_0 > x_0$, для всех остальных x_0 в области (15) $y_0 < x_0$. График зависимости y_0 от x_0 имеет максимум в точке, координаты которой при выбранных Q_H и A определяются отношением kQ_H/Q . Дальнейшее увеличение y_0 приводит к исчезновению действительных корней уравнения (21), что означает срыв колебаний генератора. Предельный случай бесконечно большой добротности Q резонатора соответствует равенству $x_0 = y_0$ во всей области (15).

На рис. 2 в качестве примера представлены кривые зависимости y_0 от x_0 для $Q_H = 10^4$ и $A = 2 \cdot 10^2$ при трех значениях параметра $kQ_H/Q = 10; 1; 0,1$. Видно, что фиксированной настройке y_0 соответствуют два значения x_0 , удовлетворяющие уравнению (21). Это говорит о возможности генерации на двух частотах. Однако первыми возникают колебания с частотой, соответствующей меньшему x_0 , так как для них необходим меньший электронный ток самовозбуждения (18). Эти колебания, возникшие первыми, будут существовать и в дальнейшем, даже если условия самовозбуждения выполняются одновременно для обоих x_0 .

Рис. 2. Зависимость y_0 от x_0 :

1 — $kQ_H/Q = 10$; 2 — $kQ_H/Q = 1$; 3 — $kQ_H/Q = 0,1$;
4 — $kQ_H/Q = 0$. Здесь $Q_H = 10^4$, $A = 2 \cdot 10^2$.

В заключение выражают благодарность Ф. А. Королеву за обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schneider, Zeitschrift für Naturforschung, 15a, 487 (1960).
2. J. L. Hirshfield, J. M. Wachtel, Phys. Rev. Letters, 12, № 19, 533 (1964).
3. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма ЖЭТФ, 2, № 9, 430 (1965).
4. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 1, 57 (1960).
5. Дж. Слэтер, Электроника сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1948.
6. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
7. А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Радиотехника и электроника, 7, № 4, 631 (1962).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
27 июня 1966 г.

LINEAR THEORY OF CYCLOTRON MASER

A. F. Kourin

The author has considered the excitation of a resonator placed in a uniform magnetic field, by an external current with a negative electroconductibility near the electron cyclotron frequency. The expression for the self-excitation current has been derived. The dependence of generator frequency upon the resonator tuning is discussed.

УДК 621.385.64

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА И АНОДНЫЙ ТОК В МАГНЕТРОНЕ В ПРЕДОСЦИЛЛЯЦИОННОМ РЕЖИМЕ

М. И. Кузнецов

Исследуется влияние флуктуаций электрического поля на распределение пространственного заряда и анодный ток магнетрона в режиме отсечки при наличии бриллюэновского состояния пространственного заряда в верхней части облака. Результаты расчета совпадают с экспериментальными данными.

Известно, что анодный ток и распределение пространственного заряда в магнетроне, наблюдающиеся в предосцилляционном режиме при $B > B_{kp}$, существенно отличаются от предсказываемых теорией [1-4]. В работе [5] было показано, что это несовпадение теоретических и экспериментальных данных может быть объяснено влиянием флуктуаций поля на движение электронов. Однако анализ влияния флукуационного поля на распределение заряда и анодный ток был выполнен только для так называемого «бидромического» режима с одним виртуальным катодом, расположенным примерно посередине электронного облака. Но экспериментальные данные [6] и результаты интегрирования соответствующих уравнений [7] не позволяют однозначно решить вопрос о наличии бидромического состояния с одним виртуальным катодом в предосцилляционном режиме магнетрона. Несомненно лишь то, что первый виртуальный катод действительно существует и находится на расстоянии от катода, примерно соответствующем расчетному для бидромического состояния с одним виртуальным катодом.

Вполне вероятно, что в слое пространственного заряда, расположенным между первым виртуальным катодом и верхней границей облака, имеется еще один или несколько виртуальных катодов. В последнем случае скорость радиального движения электронов между виртуальными катодами оказывается весьма малой. Для практически интересных режимов она сравнима со средним значением их радиальной скорости в плоскостях виртуальных катодов, обусловленной наличием максвелловского распределения электронов по тангенциальным скоростям при вылете из катода. Поэтому плотность пространственного заряда в рассматриваемой области практически не зависит от радиуса. Таким образом, при наличии двух или большего числа виртуальных катодов состояние пространственного заряда в верхней половине облака близко к бриллюэновскому с точностью до теплового разброса скоростей.

Подтверждением существования подобного состояния является совпадение собственных частот колебаний пространственного заряда магнетрона, рассчитанных для этого состояния, с действительно наблюдающимися собственными частотами [8].

В настоящей работе рассматривается влияние флукуаций поля на распределение заряда и анодный ток магнетрона для этого состояния пространственного заряда. Как и в [5], предполагается, что анодный

ток и наличие заряда за расчетной границей облака вызываются диффузией электронов из верхнего слоя облака под воздействием флюктуационного поля. Однако, в отличие от [5], принимается во внимание распределение электронов по радиальным скоростям, обусловленное распределением электронов по тангенциальным скоростям при вылете из катода.

1. Исходя из вышеизложенного, мы будем рассматривать такой режим магнетрона, в котором состояние пространственного заряда в верхней части облака является бидромическим. Число виртуальных катодов в этой части облака будем считать настолько большим, чтобы средние радиальные скорости электрона, в основном, определялись их начальными тангенциальными скоростями*:

$$V_x = (2\omega_H x V_{0y})^{1/2}, \quad (1)$$

где x — расстояние точки наблюдения от катода, V_{0y} — тангенциальная компонента начальной скорости электрона. (Рассматривается квазиплоский случай.)

Выражение (1) позволяет вычислить плотность заряда в облаке по формуле

$$\rho = \int_0^{\infty} \frac{2 dj(V_{0y})}{(2\omega_H x V_{0y})^{1/2}}, \quad (2)$$

где $dj(V_{0y})$ — дифференциал плотности тока с учетом максвелловского распределения электронов по тангенциальным начальным скоростям**:

$$dj(V_{0y}) = \begin{cases} A \exp\left(-\frac{m V_{0y}^2}{2 kT}\right) dV_{0y} & (0 < V_{0y} < \infty) \\ 0 & (V_{0y} < 0) \end{cases}.$$

Для упрощения расчетов мы заменим это распределение прямоугольным:

$$dj(V_{0y}) = \begin{cases} \frac{j_0}{V_T} dV_{0y} & (0 < V_{0y} < V_T) \\ 0 & (V_{0y} > V_T) \\ 0 & (V_{0y} < 0) \end{cases}, \quad (3)$$

где $V_T = \sqrt{2 kT/m}$, k — постоянная Больцмана, T — температура катода, m — масса электрона.

Тогда

$$\rho(x) = \int_0^{V_T} \frac{2 j_0 dV_{0y}}{V_T (2\omega_H x V_{0y})^{1/2}} = \frac{4 j_0}{(2\omega_H x V_T)^{1/2}}. \quad (4)$$

Постоянный ток j_0 можно определить из условия, что плотность заряда в середине рассматриваемой части облака совпадает с бриллюэновской:

* Выражение (1) является очевидным следствием закона сохранения энергии и инварианта Пуанкаре (см., например, [9]).

** Как известно, влияние радиальных компонент начальных скоростей электронов на движение электронов в магнетроне мало по сравнению с влиянием тангенциальных.

$$\rho_0 = \frac{\epsilon_0 \omega_H^2}{e/m} = \frac{4j_0}{(2\omega_H x V_T)^{1/2}}. \quad (5)$$

Отсюда

$$j_0 = \frac{\epsilon_0 \omega_H^2}{4e/m} (2\omega_H x V_T)^{1/2}. \quad (6)$$

Из (4) и (6) следует, что

$$\rho(x) = \frac{\epsilon_0 \omega_H^2}{e/m} \sqrt{\frac{x}{x}} = \rho_0 \sqrt{\frac{x}{x}}.$$

Поскольку $\frac{2}{3} < \frac{\bar{x}}{x} < \frac{4}{3}$, плотность заряда на краях облака отличается

от бриллюэновской не более чем на 15%!

Таким образом, исследуемое нами состояние пространственного заряда, действительно, близко к бриллюэновскому и отличается от него тем, что невозмущенные траектории электронов представляют собой не окружности, а медленно раскручивающиеся и столь же медленно скручивающиеся спирали. В соответствии с (1), шаг спирали тем больше, чем больше начальная тангенциальная скорость электрона.

Выражение (1) показывает, что в электронном облаке имеются электроны как с относительно большими радиальными скоростями (более 15 эв при потенциале на верхней границе облака более 1000 в), так и с малыми. (Например, при том же потенциале на границе облака около 10% электронов имеют скорости менее 1,5 эв.)

При напряженности флуктуационного высокочастотного поля, составляющей обычно несколько процентов напряженности постоянного, скорость дрейфа электронов, обусловленного этим полем, примерно равна $10^5 \div 10^6 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$, т. е. $0,02 \div 2 \text{ эв}$. Следовательно, это высокочастотное поле может существенно изменить движение электронов с малыми радиальными скоростями, так как скорость дрейфа, обусловленная высокочастотным полем, может оказаться большей, чем радиальная скорость невозмущенного движения электрона. Такие электроны могут, подойдя к границе облака, пересечь ее и войти в пространство между анодом и границей облака; иначе говоря, они могут принять участие в диффузионном движении под воздействием случайно изменяющегося высокочастотного поля.

Эти электроны составляют относительно небольшую часть заряда облака. Действительно, в соответствии с вышеизложенным, условие «захвата» электронов высокочастотным полем выражается неравенством

$$(2\omega_H x_{rp} V_{0y})^{1/2} < E_\tau / B,$$

где E_τ — тангенциальная компонента переменного поля, действующего на электрон, x_{rp} — координата границы облака. Среднее значение плотности электронов в облаке, которые могут быть вовлечены в диффузионное движение, равно

$$\rho_1 = \int_0^{\bar{V}_{0y}} d\rho(V_{0y}), \quad \bar{V}_{0y} = E_\tau^2 (2\omega_H x_{rp} B^2)^{-1}, \quad (7)$$

где $d\rho(V_{0y})$ — функция распределения электронов вблизи границы облака по величине тангенциальной составляющей начальной скорости. Из (3) и (6) следует, что

$$d\rho(V_{0y}) = \frac{\epsilon_0 \omega_H^2}{2eV_T/m} \sqrt{\frac{x}{x_{rp}}} \sqrt{\frac{V_T}{V_{0y}}} dV_{0y} \simeq \frac{\rho_0 V_T^{-1}}{2} \sqrt{\frac{V_T}{V_{0y}}} dV_{0y}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), находим

$$\rho_1 = \rho_0 \sqrt{\frac{\bar{V}_{0y}}{V_T}} = \frac{\rho_0 \alpha}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\varphi_{rp}}{\varphi_T}}, \quad (9)$$

где ρ_0 — плотность заряда в облаке, α — отношение среднеквадратичной напряженности флуктуационного поля к напряженности постоянного поля на границе облака, φ_T — потенциал, численно равный энержии теплового движения электронов в электрон-вольтах, φ_{rp} — потенциал на границе облака.

Если потенциал на границе облака равен 1000 в, а $\alpha = 0,03 \div 0,05$, то $\rho_1 = 0,15 \div 0,2 \rho_0$. Следовательно, плотность заряда при переходе через бриллюэновскую границу облака должна упасть до $0,15 \div 0,2 \rho_0$, т. е. в 5—7 раз. Изменение плотности заряда на участке от бриллюэновской границы до анода будет рассчитано в следующем разделе.

2. Для расчета диффузионного тока и плотности заряда в пространстве между бриллюэновской частью облака и анодом необходимо решить диффузионное уравнение

$$\frac{d}{dx} (D\rho) = -j_a, \quad (10)$$

где j_a — плотность анодного тока. Коэффициент диффузии в левой части уравнения (10) равен $D = \bar{l}^2/2\tau$, где \bar{l}^2 — средняя величина смещения электрона за время корреляции флукутаций поля τ .

Принимая во внимание, что колебания облака представляют собой колебания контура, возбуждаемые случайным током дробового характера, можно показать, что

$$\bar{l}^2 = \bar{E}_\tau^2 B^{-2} (p^2 + \omega_e^2)^{-1},$$

где $\omega_e = \omega(1 - \omega_H x/V_\Phi)$, V_Φ — фазовая скорость волны, p — декремент затухания колебаний.

Обычно $p^2 \ll \omega_e^2$, так как $V_\Phi < \omega_H x_{rp}$ (см. [8]). Следовательно,

$$D(x) = \bar{E}_\tau^2(x)/4B^2 \omega \left(1 - \frac{\omega_H x}{V_\Phi}\right)^2 \pi Q,$$

где Q — добротность электронного резонатора. Границные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (10), определяются из следующих соображений. При $x = x_{rp}$ $\rho = \rho_1$, $D = D(x_{rp})$. Как и в [5], будем считать, что $\rho = 0$ в плоскости $x = a - \Delta = a_1$,

где $\Delta = \frac{e}{m} \omega_H^{-2} \sqrt{\bar{E}_\tau^2(x_{rp})}$, a — расстояние от катода до анода.

Решение уравнения (10) при указанных выше условиях есть

$$D\rho = \frac{\rho_1 D(x_{rp})(a_1 - x)}{a_1 - x_{rp}} \quad (x_{rp} < x < a_1),$$

$$D\rho = 0 \quad (a_1 < x < a). \quad (11)$$

Из (11), (10) следует, что плотность анодного тока равна

$$\begin{aligned} j_a &= \frac{\bar{E}_\tau^2(x_{rp}) \alpha \rho_0 (\varphi_{rp}/\varphi_T)^{1/4}}{4\sqrt{2}\pi B^2 \omega Q (1 - x_{rp}/x_{sin})^2} = \\ &= \alpha^3 \frac{\omega_H \varepsilon_0 \varphi_{rp}^{3/2} \sqrt{2e/m} (\varphi_{rp}/\varphi_T)^{1/4}}{\omega 2\sqrt{2} \pi Q (a_1 - x_{rp}) x_{rp} (1 - x_{rp}/x_{sin})}, \end{aligned} \quad (12)$$

где расстояние синхронного слоя от катода $x_{sin} = V_\Phi/\omega_H$. Это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$j_a = \alpha^3 \frac{\omega_H}{\omega} \frac{x_{rp} (\varphi_{rp}/\varphi_T)^{1/4}}{(a_1 - x_{rp}) (1 - x_{rp}/x_{sin})^2} \frac{9}{16\sqrt{2} \pi Q} j_{3/2},$$

где $j_{3/2} = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{2e/m} \varphi_{rp}^{3/2} x_{rp}^{-2}$ — ток, ограниченный пространственным

зарядом в диоде с расстоянием между анодом и катодом, равным x_{rp} , при анодном напряжении, равном φ_{rp} .

Величина x_{sin} как функция режима лампы рассчитана в работе [8]: $x_{sin} = x_{rp}^2/2a + x_{rp}/2$. Если, например, $x_{rp} = a/2$, то $x_{rp}/x_{sin} = 4/3$. Следовательно, в этом случае $j \approx (\varphi_{rp}/\varphi_T)^{1/4} 5\alpha^3 \omega_H/\pi Q \omega$. Если, например, $\omega_H/\omega = 10$, $Q = 20$, $\varphi_{rp} = 1000 \text{ в}$, то $j_a = 20 \alpha^3 j_{3/2}$. При $\alpha = 0,03 \div 0,05$ $j_a = (1,1 \div 5) \cdot 10^{-3} j_{3/2}$. Экспериментальная величина тока j_a в соответствующем режиме лежит в этих пределах. Таким образом, и при наличии квазибриллюэновского состояния в верхней части облака анодный ток магнетрона может быть, в основном, обусловлен действием флукуационного поля на электроны.

Распределение заряда за бриллюэновской границей облака определяется выражением

$$\rho(x) = \frac{D(x_{rp}) \rho_1 (a_1 - x)}{D(x) (a_1 - x_{rp})}. \quad (13)$$

Графики этой функции для рассмотренных выше прижимов и $\alpha = 3\%$ и $\alpha = 5\%$ построены на рис. 1, 2. Как видно из этих графиков, пространственный заряд занимает практически все междупланарное пространство лампы. На границе бриллюэновского облака плотность заря-

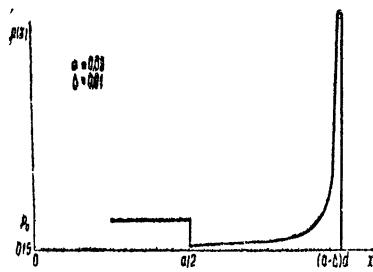


Рис. 1.

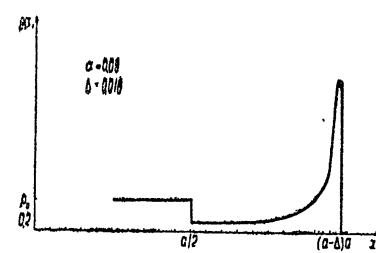


Рис. 2.

да падает в 5—7 раз, но затем вновь возрастает, увеличиваясь примерно до 1/4—1/5 бриллюэновской плотности к середине промежутка между анодом и бриллюэновской границей облака и примерно до бриллюэновской плотности на расстоянии от анода, равном 0,2 расстояния

между границей облака и анодом. Вблизи анода она проходит через максимум и быстро падает до нуля*. Результаты расчета, таким образом, согласуются с известными экспериментальными данными работ [9,10], в которых было обнаружено наличие заметного заряда во всем междуэлектродном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Бриллюэн, Теория магнетрона, изд. Сов. радио, М., 1946.
2. С. Я. Брауде, ЖТФ, 10, 455 (1940).
3. R. Q. Twiss, Advances in Electronics, 5, 247 (1957).
4. L. Page and P. Adams, Phys. Rev., 69, 492 (1946).
5. Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 998 (1966).
6. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1104 (1961).
7. В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 4, 562 (1967).
8. М. И. Кузнецов, Э. Г. Васильев, С. В. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
9. H. Neddermann, J. Appl. Phys., 26, 1420 (1955).
10. L. Mathias, J. Electronics, 1, 8 (1955).

Поступила в редакцию
21 сентября 1966 г.

INFLUENCE OF ELECTROMAGNETIC FIELD FLUCTUATIONS ON CHARGE DISTRIBUTION AND ANODE CURRENT IN A MAGNETRON IN PRE-OSCILLATION REGIME

M. I. Kouznetsov

Influence of electric field fluctuations on the spatial charge distribution and the anode current in a magnetron in a margin regime is studied in the presence of Brillouin state of the spatial charge in the upper layer of the cloud. Results agree with the experimental data.

* Необходимо отметить, что поле пространственного заряда с высокой плотностью вблизи анода практически полностью компенсируется полем зеркального отражения этого заряда от плоскости анода во всем междуэлектродном пространстве лампы, за исключением узкой области вблизи самого анода.

УДК 621.385.64

К СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНЕТРОНА II. МНОГОСЛОЙНЫЕ РЕЖИМЫ

B. E. Белов, L. V. Родыгин

Рассмотрена задача о состоянии электронного облака в цилиндрическом магнетроне в случае нулевых начальных скоростей электронов. Показано, что наряду с бриллюэновским и бидромическими возможен целый ряд азимутально-симметричных режимов, электронное облако в которых распадается на концентрические слои с различными радиальными токами. Эти режимы названы многослойными. Выяснены особенности движения электронов в различных слоях, дана классификация всех возможных статических состояний магнетрона в условиях принятой идеализации.

В результате анализа решений уравнений задачи о состоянии электронного облака в цилиндрическом магнетроне, полученных в предположении нулевых начальных скоростей электронов*, было установлено, что в закритических режимах (магнитное поле B больше критического B_{kp}) могут осуществляться либо однопоточные (бриллюэновские), либо двухпоточные (бидромические) состояния различных порядков n . В свою очередь, характер бидромических состояний, их порядок оказался в сильной степени зависящим от значения критического радиуса $x_{kp} = r_{kp}/r_k$ и величины безразмерного параметра тока $a = 2|e|I/\epsilon_0\pi m\omega_B^3 r_k^2$ **. В соответствии с этим весь интервал $x_{kp} > 1$ был разбит на три области, в которых

1) при $1 < x_{kp} < 2,023$ единственным является однопоточный режим;

2) при $x_{kp} > 2,87$ теоретически возможны два режима: однопоточный и бидромический первого порядка;

3) при $2,023 < x_{kp} < 2,87$, наряду с однопоточным, возможны бидромические режимы порядка $n \geq 2$.

Далее, при вполне определенных значениях параметра $a = a_n$ были получены так называемые состояния с виртуальным катодом, на котором одновременно обращаются в нуль радиальные компоненты скорости и силы, действующей на электрон.

Этим, собственно, и ограничивалось обсуждение вопроса о возможных состояниях электронного облака как с точки зрения геометрии магнетронов, так и с точки зрения влияния величины пространственного заряда.

Однако при изучении состояний с виртуальным катодом обнаруживаются некоторые особенности, заставляющие более детального рассмотрения. Дело в том, что эти состояния являются предельными для бидромических режимов соседних порядков, и потому неясен порядок их самих. В самом деле, рассмотрим бидромические режимы с парамет-

* См. литературу [1], пп. 1—7.

** Здесь используются те же обозначения, что и в первой части работы. Ссылки на нее отмечены римской цифрой I.

рами $a_n + \epsilon$ и $a_n - \epsilon$, где $\epsilon < |a_n - a_{n-1}|$. На рис. 1 схематически изображены соответствующие кривые зависимости радиальных скоростей v от x . Если $\epsilon \rightarrow 0$, пределом сверху будет бидромическое состояние, в котором виртуальный катод является верхней границей электронного облака. Кривая $v(x)$ на рис. 1 в этом случае выделена сплошной линией. При стремлении к a_n снизу получаем в пределе состояние с виртуальным катодом внутри облака электронов, а порядок режима на единицу больше. Кривая $v(x)$ должна быть продолжена дальше и оборвана в точке $x_{kp} > x_b$ (ход кривой в интервале $[x_b, x_{kp}]$ на рис. 1 изображен штриховой линией). Это означает, что в первом случае все электроны по достижении виртуального катода поворачивают обратно к катоду, во втором—все они проходят дальше и образуют еще один «слой» электронов. Вместе с тем, физически не исключена возможность частичного прохождения электронов через виртуальный катод. Это было отмечено еще Бриллюэном при анализе докритических состояний в плоском магнетроне [2].

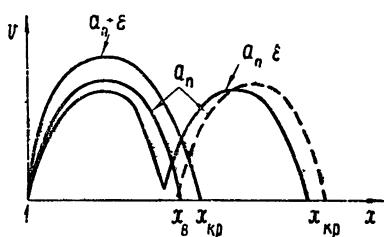


Рис. 1.

В данной части работы подробно обсужден вопрос о токораспределении на виртуальном катоде и ограничениях, наложенных на парциальные токи в магнетроне. В результате показано, что физическими условиями задачи допускается целый ряд новых решений, которым соответствуют другие, несколько своеобразные состояния электронного облака.

1. ПОЛНЫЙ И ПАРЦИАЛЬНЫЙ ТОКИ В МАГНЕТРОНЕ

При рассмотрении бидромических режимов мы использовали систему уравнений (I(1.1)), предполагая при этом, что суммарный ток I равен просто катодному току в докритическом режиме и удвоенному катодному току в закритическом случае. Однако описание состояний с виртуальным катодом требует более аккуратного подхода к определению величины I .

Известно, что основным требованием, которому должен удовлетворять стационарный установившийся поток, является условие непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (1.1)$$

где \mathbf{j} — полный вектор плотности тока, ρ_i , и \mathbf{v}_i — плотность и скорость электронов (частиц) в i -ом парциальном потоке, N —число парциальных потоков.

Условие (1.1) часто удобнее рассматривать в интегральной форме

$$I = \sum_{i=1}^N I_i = \text{const}, \quad (1.2)$$

I —полный суммарный ток, проходящий через некоторую замкнутую поверхность S , $I_i = \oint \mathbf{j}_i ds = \oint_S \rho_i (\mathbf{v}_i ds)$ —полный ток i -го парциального потока через поверхность S . Условие (1.2) означает, что внутри поверхности S не происходит накопления зарядов.

Следовательно, поток электронов в установленном статическом режиме магнетрона должен удовлетворять условию (1.1) или (1.2). При рассмотрении условия (1.2) в цилиндрическом магнетроне обычно выбирают поверхность, соосную с катодом. Далее, из первых двух уравнений системы (I(1.1)) следует, что азимутальная скорость v и квадрат радиальной скорости v^2 являются однозначными функциями радиуса r . Это значит, что через каждую точку междуэлектродного пространства может проходить не более двух парциальных потоков I_1 и I_2 , отличающихся друг от друга лишь знаком радиальной скорости. Условие непрерывности электронного потока (1.2) сводится в данном случае к требованию неизменности величины полного тока I на любом расстоянии от катода. Составляющие его парциальные токи I_1 и I_2 будут оставаться постоянными только лишь в том интервале значений x , где скорости электронов $v > 0$. В точках, где $v = 0$, величина тока I_1 в парциальном потоке может меняться по величине в зависимости от условий, определяющих дальнейшее поведение электронов после достижения ими поверхностей, соответствующих этим точкам.

Как известно, радиальная скорость электронов v становится равной нулю на границе электронного облака при $x = x_{kp}$ или на поверхности виртуального катода при $x = x_b$. При $x = x_{kp}$ на электроны действуют силы, заставляющие их начать обратное движение к катоду. Это приводит к обрыву парциального потока, направленного в сторону анода, и рождению потока, движущегося к катоду. Тогда, если внутри интервала $[1, x_{kp}]$ $v^2 > 0$, то в нем будут оставаться постоянными как полный ток I , так и парциальные токи I_1 и I_2 . В этом случае каждому возможному состоянию электронного облака сопоставляется одно вполне определенное значение параметра тока a .

Виртуальные катоды замечательны тем, что на них радиальные компоненты скорости электрона и силы обращаются в нуль ($v = dv/d\tau = 0$ [1]). Дальнейшее поведение коллектива электронов после достижения ими поверхности виртуального катода не может быть определено из уравнений задачи и становится в некотором смысле произвольным.

Таким образом, условия, определяющие установленное движение электронов в магнетроне, накладывают ограничение только на полный ток I ; для парциальных потоков токораспределение на виртуальных катодах в условиях принятой идеализации оказывается произвольным. Это обстоятельство значительно расширяет типы возможных состояний электронного облака в магнетроне.

2. ОБСУЖДЕНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА В МАГНЕТРОНЕ

В общем случае для состояний с виртуальным катодом распределение парциальных токов в облаке электронов схематически представлено на рис. 2. Согласно условию (1.2), парциальные токи I_1 , I'_1 , I_2 , I'_2 связаны соотношением

$$I_1 - I_2 = I'_1 - I'_2 = I, \quad (2.1)$$

причем

$$I_1 \geq I'_1, \quad I_2 \geq I'_2.$$

Очевидно, полный ток I равен анодному току I_a .

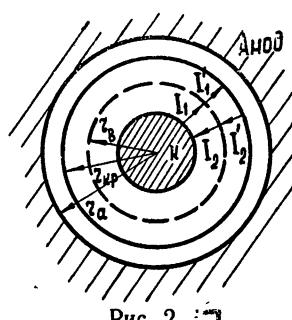


Рис. 2.

1. *Закритические режимы.* При $B > B_{\text{кр}}$ электроны не достигают поверхности анода и потому $I = I_a = 0$. Отсюда

$$I_1 = I_2, \quad I'_1 = I'_2. \quad (2.2)$$

Можно показать, что параметр тока a пропорционален сумме парциальных токов [1]. Поэтому его значения внутри и вне поверхности виртуального катода будут соответственно равны

$$a_n = k \cdot 2I_1, \quad a' = k \cdot 2I'_1, \quad k = \frac{2|e|}{\epsilon_0 \pi m \omega_B^3 r_k^2}. \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.3) получаем

$$a_n \geq a', \quad (2.4)$$

т. е., не входя в противоречие с физическими представлениями, можно считать, что параметр тока a над виртуальным катодом может принимать любое значение.

В результате возникают новые типы возможных режимов, которые требуют для своего описания введения дополнительных параметров. Мы будем называть их многослойными, понимая под слоями частицы электронного облака, расположенные между соседними поверхностями катода, виртуальных катодов и критической поверхностью. Естественно назвать все слои, кроме примыкающего к катоду, «подвешенными».

Выше уже отмечалось, что уравнения (1(1.1)) не накладывают ограничений на характер токораспределения на виртуальном катоде. Можно лишь предполагать осуществление одного из следующих вариантов.

а) Часть электронного потока после достижения поверхности виртуального катода поворачивает к катоду, другая — проходит дальше. Парциальный ток в подвешенном слое создается только электронами из первого слоя. При этом

$$0 < I' \leq I \quad \text{и} \quad 0 < a \leq a_n.$$

б) На виртуальном катоде не происходит обмена электронами между соседними слоями, электронные потоки в них независимы. В внешнем слое электронный поток создается за счет электронов, накопленных над виртуальным катодом в процессе установления. Парциальный ток I' и параметр a могут принимать в нем любые положительные значения ($I' \geq 0, a \geq 0$).

в) Парциальные токи во внешнем слое создаются за счет электронов как проникших через поверхность виртуального катода из соседнего внутреннего слоя, так и накопленных в нем в процессе установления движения. В этом случае значения I' и a всегда отличны от нуля ($I' > 0, a > 0$).

«Подвешенным» состоянием с $a = 0$ является бриллюэновский поток. Но в области бриллюэновских движений при любом значении радиуса $v = dv/d\tau = 0$ (условия на виртуальном катоде). Это значит, что к бриллюэновскому потоку можно «подвесить» еще один слой с $a > 0$. Образовавшуюся трехслойную картину траекторий можно истолковать как двухслойную с «распухшим» виртуальным катодом.

Численные расчеты и асимптотический (для малых a) анализ, приведенный ниже, показывают, что, если относительный радиус границы прикатодного слоя $x_b \geq \sqrt{2}$, «подвешенные» состояния с $a > 0$ имеют один максимум радиальной скорости и не могут быть ограничены сверху виртуальным катодом. Поэтому внешняя граница верхнего «подвешенного» слоя с $a > 0$ одновременно является и границей всего облака электронов.

Если описывать многослойные режимы последовательностью параметров a , характерных для каждого слоя, все перечисленные состояния можно разбить на три группы, которые будем изображать условными «формулами»:

$$[a_n, 0], \quad [a_n, a], \quad [a_n, 0, a]. \quad (2.5)$$

Аналогичное рассмотрение можно провести в случае, когда бриллюэновский поток примыкает непосредственно к катоду. К нему также можно подвесить слой с $a \neq 0$. Характер и структура возможных в этом случае многослойных состояний будут подробно рассмотрены в следующем разделе.

2. Докритические режимы. При $B < B_{kp}$ анодный ток в магнетроне $I_a > 0$, и поэтому $I = I_a = \text{const} > 0$. Обычно в этом случае имеет место единственный восходящий к аноду поток электронов. Однако, когда между катодом и анодом образуется виртуальный катод, на последнем возможно токораспределение, которое схематически показано на рис. 3.

Исходя из (2.1), можно записать

$$I = I_1 - I_2 = I'_1 > 0, \quad I_1 > I'_1, \quad I'_2 = 0. \quad (2.6)$$

Характерно, что парциальные токи I_1 и I_2 в прикатодном слое будут различны, хотя величины радиальных скоростей электронов в обоих потоках на одинаковом расстоянии от катода равны (закон сохранения энергии). В связи с этим плотность заряда в потоках

$$\rho_1(r) > \rho_2(r), \quad \rho = \rho_1 + \rho_2. \quad (2.7)$$

Параметры тока a , характеризующие состояние электронного облака в прикатодном и «подвешенном» слоях, будут соответственно равны

$$a_n = k(I_1 + I_2), \quad a_n > a', \quad a' = kI'_1. \quad (2.8)$$

Таким образом, в докритическом режиме возможны двухслойные состояния, которые обозначаются «формулой» $[a_n, a]$.

3. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В «ПОДВЕШЕННЫХ» СЛОЯХ

Задача о нахождении параметров, характеризующих состояние электронного облака в многослойных режимах, сводится к решению уравнений движения электронов отдельно для каждого слоя и «сшиванию» полученных решений на поверхностях виртуальных катодов.

При составлении уравнений движения электронов в «подвешенных» слоях необходимо учитывать, что электроны стартуют с поверхности виртуального катода ($x_b > 1$, x_b — безразмерный радиус нижней границы «подвешенного» слоя) с отличными от нуля азимутальными скоростями. Дифференциальные уравнения для введенных в [1] функций R , Ψ , Θ , τ будут такими же, как и в прикатодном слое (см. (1(1.3))). Однако их решения должны удовлетворять уже другим начальным условиям:

$$x = x_b, \quad \Psi = \Theta = \tau = 0, \quad R = \frac{2x_b^3}{1+x_b^4}. \quad (3.1)$$

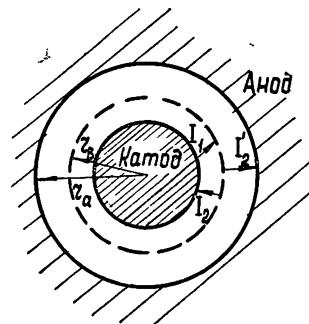


Рис. 3.

В случае малых a для нахождения решения будем использовать, как и в [1], метод усреднения. В первом приближении решения принимают вид

$$\tau = \frac{1}{2a} (x^2 - x^{-2} - x_B^2 + x_B^{-2}); \quad (3.2a)$$

$$\Theta = \frac{1}{2a} \left[\frac{(x^4 - 1)(2x^2 - 1)}{4x^4} - \frac{(x_B^4 - 1)(2x_B^2 - 1)}{4x_B^4} - \ln \frac{x}{x_B} \right]; \quad (3.2b)$$

$$\Psi = \frac{1}{4a} \left[\left(\frac{x^4 + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{2x^4 - 1}{x^4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{x^2 [1 + (1 + x_B^4)^{1/2}]}{x_B^2 [1 + (1 + x^4)^{1/2}]} - \left(\frac{x_B^4 + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{2x_B^4 - 1}{x_B^4} \right]; \quad (3.2b)$$

$$R = \frac{2x_B^4}{(1 + x_B^4)^{5/4}} \left(\frac{1 + x^4}{x^4} \right)^{1/4}. \quad (3.2c)$$

Здесь параметр a характеризует состояние электронного облака в выбранном «подвешенном» слое, а интервал изменения x определяется его границами.

Зная R , Ψ , Θ , τ , можно, как и в [1], найти выражения для плотности пространственного заряда $\rho(x)$, потенциала $\Phi(x)$, скоростей электронов в слое.

Подставляя (3.2b), (3.2c) в (I.1.4a), (1.4б)), в первом приближении получим радиальную скорость электрона в слое

$$v = a \left(\frac{1 + x^4}{x^4} \right)^{1/4} \left[\frac{x^4}{(1 + x^4)^{5/4}} - \frac{x_B^4}{(1 + x_B^4)^{5/4}} \cos \Psi \right] \quad (3.3)$$

и ее производную по времени

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{x_B^4}{(1 + x_B^4)^{5/4}} \left(\frac{1 + x^4}{x^4} \right)^{3/4} \sin \Psi. \quad (3.4)$$

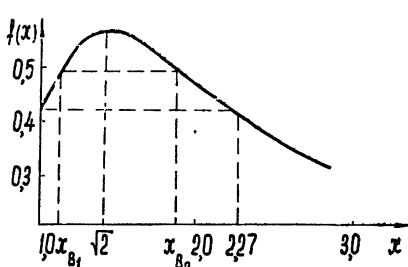


Рис. 4.

На рис. 4 изображена кривая зависимости $f(x) = x^4(1 + x^4)^{-5/4}$, около которой происходят колебания величины приведенной радиальной скорости электрона $v' = va^{-1}x(1 + x^4)^{-1/4}$. Функция $f(x)$ имеет один максимум при $x = \sqrt{2}$ и в области $x > \sqrt{2}$ с увеличением x монотонно убывает.

Из выражения (3.3) следует, что для $x_B \geq \sqrt{2}$ радиальная скорость v будет оставаться положительной, если

$$0 \leq \Psi \leq \Psi_0, \quad \frac{3\pi}{2} < \Psi_0 < 2\pi, \quad (3.5)$$

где Ψ_0 соответствует такому значению x , при котором $v = 0$. Подставляя Ψ в (3.4), находим, что в этой точке $dv/d\tau < 0$, т. е. точка является критической. Следовательно, радиальная скорость электрона v

имеет только один максимум, и обрыв кривой $v(x)$ происходит в критической точке.

Таким образом, если поверхность виртуального катода имеет относительный радиус $x_{\text{в}} \geq \sqrt{2}$, то при малых a в «подвешенном» слое осуществляется бидромический режим первого порядка, и внешняя граница этого слоя определяет границу всего облака электронов в многослойном состоянии. Численные расчеты показывают, что этот вывод справедлив и при больших значениях параметра a в «подвешенном» слое.

Для $1 < x_{\text{в}} < \sqrt{2}$ радиальная скорость электрона при достаточно малых a имеет колебательный характер. Из выражения (3.3) следует, что в пределах первого приближения колебания кривой $v(x)$ располагаются в полосе

$$a \left(\frac{1+x^4}{x^4} \right)^{1/4} \left[\frac{x^4}{(1+x^4)^{5/4}} - \frac{x_{\text{в}}^4}{(1+x_{\text{в}}^4)^{5/4}} \right] \leq v \leq a \left(\frac{1+x^4}{x^4} \right)^{1/4} \times \\ \times \left[\frac{x^4}{(1+x^4)^{5/4}} + \frac{x_{\text{в}}^4}{(1+x_{\text{в}}^4)^{5/4}} \right], \quad (3.6)$$

а чилю их тем больше, чем меньше a . Зависимость a от x_{kp} определяется соотношением

$$a = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{x_{\text{kp}}^4 + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{2x_{\text{kp}}^4 - 1}{x_{\text{kp}}^4} - \left(\frac{x_{\text{в}}^4 + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{2x_{\text{в}}^4 - 1}{x_{\text{в}}^4} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{x_{\text{kp}}^2 [1 + (1+x_{\text{в}}^4)^{1/2}]}{x_{\text{в}}^2 [1 + (1+x_{\text{kp}}^4)^{1/2}]} \right\} \left\{ 2\pi n - \arccos \left(\frac{x_{\text{kp}}}{x_{\text{в}}} \right)^4 \left(\frac{1+x_{\text{в}}^4}{1+x_{\text{kp}}^4} \right)^{5/4} \right\}^{-1}. \quad (3.7)$$

Кривая $a(x_{\text{kp}})$, описываемая (3.7), подобна аналогичной кривой, рассмотренной для бидромических состояний в [1]. Однако расположение ее на плоскости (a, x) и характеристические размеры существенным образом зависят от радиуса 1-го виртуального катода $x_{\text{в}_1}$.

Линии виртуальных квазикатодов будут выходить уже из точки $x = x_{\text{в}_1}$, а координаты виртуальных катодов $x_{\text{в}_2}$ располагаются на прямой

$$\frac{x_{\text{в}_2}^4}{(1+x_{\text{в}_2})^{5/4}} = \frac{x_{\text{в}_1}^4}{(1+x_{\text{в}_1})^{5/4}}. \quad (3.8)$$

(индексами 1 и 2 обозначаем соответственно внутренний и внешний виртуальные катоды). Из соотношения (3.8) и рис. 4 видно, что $x_{\text{в}_2}$, а следовательно, и x_{kp} всегда больше $\sqrt{2}$, если $x_{\text{в}_1} < \sqrt{2}$. Интервал значений $a \in [0, a_{\text{max}}]$, при которых в «подвешенном» слое осуществляются бидромические состояния порядка $n \geq 2$ ($a_{\text{max}} \sim n = 2$), для $x_{\text{в}_1} \rightarrow \sqrt{2}$ уменьшается до нуля, а соответствующие им $x_{\text{kp}} \rightarrow x_{\text{в}_2} \rightarrow \sqrt{2}$.

Анализ приближенных решений, а при средних и больших a — результатов численного интегрирования уравнений задачи, показывает, что для $a > a_{\text{max}}$ в «подвешенном» слое возможны лишь состояния с $n = 1$, у которых $x_{\text{kp}} > \sqrt{2}$.

Итак, в случае, когда граница прикатодного слоя, образованного бриллюэновским потоком, $x_{\text{в}_1} < \sqrt{2}$, любой «подвешенный» слой может иметь внешнюю границу только в области $x > \sqrt{2}$.

Следовательно, если критический радиус электронного облака $x_{\text{kp}} < \sqrt{2}$, система уравнений (I(1.1)) допускает только единственное

решение $v = 0$, т. е. движение электронов может происходить лишь по концентрическим окружностям (бриллюэновский поток).

Рассмотрим, наконец, возможные многослойные режимы в случае бриллюэновского потока в прикатодном слое. Если граница первого слоя $x_{B_1} \geq \sqrt{2}$, в «подвешенном» слое имеют место бидромические состояния первого порядка. При $x_{B_1} < \sqrt{2}$ и $a = a_n(x_{B_1}, x_{B_2})$ «подвешенный» слой ограничен сверху виртуальным катодом, и тогда допускается примыкание к нему новых слоев. Если же $a \neq a_n(x_{B_1}, x_{B_2})$, к бриллюэновскому потоку можно подвесить только один слой, в котором, однако, возможны бидромические состояния любого порядка. В результате получаем еще 4 группы возможных многослойных состояний:

$$[0, a]; \quad [0, a_n, 0]; \quad [0, a_n, a]; \quad [0, a_n, 0, a].$$

Формально они могут быть образованы из описанных ранее, если добавить к последним поверхность катода, «распухшую» в бриллюэновский поток.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ВОЗМОЖНЫХ СТАТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В МАГНЕТРОНЕ

Из приведенного анализа следует, что в цилиндрическом магнетроне в условиях принятой идеализации возможные статические состояния электронного облака можно разбить на несколько групп, отличающихся друг от друга числом слоев в облаке и набором параметров тока a . На рис. 5 и 6 схематически построены кривые зависимостей $v(x)$,

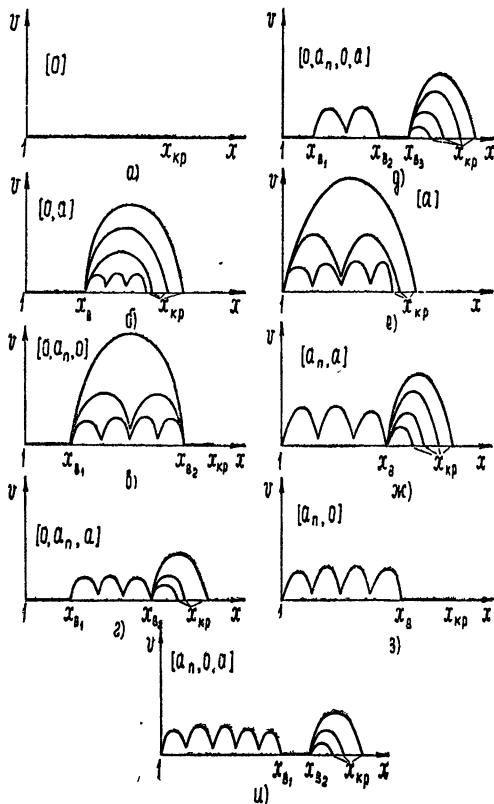


Рис. 5.

характерные для каждой группы. Возможна следующая классификация статических режимов.

Закритические режимы ($B > B_{kp}$):

$[0] - x_{kp}$ любое, однослойные бриллюэновские состояния (рис. 5а);

$[0, a] - a, x_b$ любые, $x_{kp} > \sqrt{2}$ (рис. 5б);

$[0, a_n, 0] - x_b < \sqrt{2} < x_{b_1} < x_{kp}$, n любые (рис. 5в);

$[0, a_n, a] - x_b < \sqrt{2} < x_{b_1} < x_{kp}$, $a_n \leq a$, n любые (рис. 5г);

$[0, a_n, 0, a] - x_b < \sqrt{2} < x_{kp}$, a, n любые (рис. 5д);

$[a] - x_{kp} > 2,023$, однослойные бидромические состояния любого порядка (рис. 5е);

$[a_n, a] - 2,023 < x_b < 2,271$, $x_{kp} > x_b$, $a \leq a_n$ (рис. 5ж);

$[a_n, 0] - 2,023 < x_b < 2,271$, $x_{kp} > x_b$, n любые (рис. 5з);

$[a_n, 0, a] - 2,023 < x_b < 2,271$, $x_{kp} > x_{b_1} > x_{b_2}$, n любые (рис. 5и).

Докритические режимы ($B < B_{kp}$):

$[a] - x_a$ любое (рис. 6а);

$[a_n, a] - 2,023 < x_b < 2,271$, $x_b < x_n < 2,87$ (рис. 6б).

В заключение авторы выражают благодарность В. Е. Нечаеву, Р. А. Дуднику и Л. М. Грошкову за постоянный интерес и ценные обсуждения настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 4, 562 (1967)
2. L. Brillouin, Advances in Electronics, 3, 85 (1951).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 сентября 1966 г.

ON STATISTIC THEORY OF A CYLINDRICAL MAGNETRON. II. MULTILAYER REGIMES

V. E. Belov, L. V. Rodygin

The state of an electron cloud in a cylindrical magnetron has been considered in the case of zero initial electron velocities. It is shown that along with Brillouin and bidromical regimes, the whole number of azimuth-symmetric regimes is possible in which the electron cloud decomposes into concentric layers with different radial currents. These regimes are called multilayer-ones. The peculiarities of the electron motion in different layers have been found. Classification of all possible static magnetron states is given in the case of the given idealization,

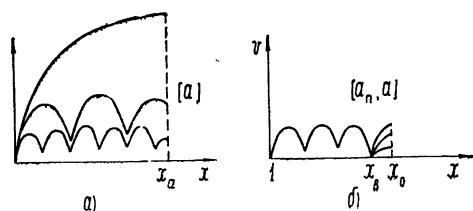


Рис. 6

Примечание при корректуре. На рис 3 вместо I_2' следует читать I_1' .

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523 164.523 752

**О ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ХРОМОСФЕРЫ
ПО ДАННЫМ РАДИОНАБЛЮДЕНИЙ**

О. И. Юдин

Интенсивное изучение солнечной хромосферы в последние годы позволило в самых общих чертах построить ряд моделей хромосферы, согласующихся с результатами оптических и радиоастрономических наблюдений [1, 2]. Однако сложность строения и динамики солнечной хромосферы заставляет постоянно совершенствовать методы экспериментальных исследований для получения новых данных. В работе рассматривается возможность оценки среднего значения «времени жизни» спикул $\bar{\theta}$ и среднего значения разности яркостных температур участков поверхности Солнца, занятых соответственно спикулой и межспикульным пространством $\Delta T_y = T_{\text{сп}} - T_{\text{пр}}$, используя измерения функции корреляции флюктуаций потока радиоизлучения Солнца.

Исходя из современных представлений о спикульной структуре хромосферы Солнца [3–6], можно для расчетов принять модель «спокойного» Солнца в виде излучающего диска, который состоит из большого числа элементов с различной яркостной температурой. Число «ярких» элементов на диске является случайной функцией времени, что ведет к случайным изменениям потока радиоизлучения от всего диска. Такая плоская модель, не учитывающая экранирующего действия спикул на краю диска Солнца, оправдана тем, что наблюдения целесообразно вести с узконаправленной антенной ($\Omega_A < \Omega_{\odot}$).

Сигнал на выходе радиометра можно представить в виде

$$T_b(t) = T_0 + T(t),$$

где $T(t)$ — стационарный случайный процесс, являющийся результатом наложения отдельных возмущений вида

$$v(t) = \begin{cases} \Delta T & 0 < t < \bar{\theta} \\ 0 & t < 0, t > \bar{\theta} \end{cases}.$$

Для флюктуаций такого процесса функция корреляции имеет вид [7]

$$B(\tau) = \begin{cases} n_1 \Delta T^2 (\bar{\theta} - |\tau|) & |\tau| < \bar{\theta} \\ 0 & |\tau| > \bar{\theta} \end{cases},$$

где n_1 — среднее число появления спикул за единицу времени и принято, что величина $\bar{\theta}$ имеет нормальное распределение. Если ввести среднее число спикул на диске $\bar{N} = n_1 \bar{\theta}$, то

$$B(\tau) = \begin{cases} \bar{N} \Delta T^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\bar{\theta}}\right) & |\tau| < \bar{\theta} \\ 0 & |\tau| > \bar{\theta} \end{cases}.$$

Для оценки полученной величины необходимо учесть соотношения

$$\bar{N} = \bar{N}_y \frac{\Omega_A}{\Omega_{\odot}}, \quad \Delta T = \Delta T_y \frac{\Omega_{\text{сп}}}{\Omega_A} \eta,$$

где \bar{N}_y — полное число спикул на диске Солнца, $\Omega_{\text{сп}}$ — телесный угол, под которым видна спикула, и η — КПД антенны.

Известные из литературы данные о значениях \bar{N}_Σ и ΔT_y пока еще слишком присторечивы, чтобы по ним можно было достаточно точно оценить величину $B(0) = \bar{N}\Delta T^2$. Оценки, проведенные с использованием различных моделей хромосферы, дают по порядку величины одинаковые значения $B(0)$, поэтому мы воспользуемся одной из моделей хромосферы [2] для оценки экспериментальных возможностей измерения $B(\tau)$. Примем, что температура спикалы $T_{\text{сп}} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ К}$, плотность электронов $N_e = 8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ и полное число спикал $\bar{N}_\Sigma = 10^4$. Так как спикала представляет собой оптически плотное образование до волн порядка 4–6 мкм, то ее яркостная температура $T_y \approx T_{\text{сп}} = 4 \cdot 10^4 \text{ К}$. Средняя яркостная температура «спокойного» Солнца равна $T_\odot \approx 7000^\circ$ на волне 4 мкм, при $\lambda = 8,6 \text{ мкм}$ $T_\odot = (8 \div 8,5) \cdot 10^3 \text{ К}$, при $\lambda = 3 \text{ см}$ $T_\odot = (14 \div 16) \cdot 10^3 \text{ К}$ и $T_\odot = (20 \div 40) \cdot 10^3 \text{ К}$ на волне 10 см. Тогда ΔT_y соответственно равны $33 \cdot 10^3 \text{ К}$, $(32 \div 31,5) \cdot 10^3 \text{ К}$, $(24 \div 26) \cdot 10^3 \text{ К}$ и $20 \cdot 10^3 \text{ К}$ до 0°К на $\lambda = 10 \text{ см}$.

Из этих оценок видно, что наибольшие значения ΔT_y приходятся на диапазон миллиметровых волн. Если же принять во внимание неоднородности тропосферы, то более целесообразным для наблюдений может оказаться диапазон 3 см. Во всяком случае, оценка $\Delta T_y \approx (2 \div 3) \cdot 10^4 \text{ К}$ по порядку величины не противоречит имеющимся данным. Примем $\bar{N}_\Sigma = 10^4$, полуширину диаграммы направленности антенны равной 5°, а $\eta \approx 0,5$. Тогда

$$B(0) = \bar{N}\Delta T^2 = \bar{N}_\Sigma \Delta T_y \eta \frac{\Omega_{\text{сп}}^2}{\Omega_\odot \Omega_A} \approx 9 \text{ град}^2$$

и при $\Omega_A \approx \Omega_\odot$ $B(0) \approx 1 \text{ град}^2$.

Как известно [9], неоднородности тропосферы приводят к флюктуациям уровня сигнала, причем в обычных условиях спектр этих флюктуаций лежит в том же диапазоне частот, что и спектр флюктуаций, обусловленный влиянием спикал (он лежит в пределах от 2 до 15 мин). Поэтому для уменьшения влияния атмосферы на результаты измерений необходимо измерять функцию взаимной корреляции сигналов, записанных на двух одинаковых радиотелескопах, разнесенных на расстояние, превышающее радиус корреляции флюктуаций уровня сигнала, вызванных турбулентностью тропосферы. При этом, конечно, необходимо, чтобы обе антенны принимали излучение из одной и той же области Солнца. В этом случае флюктуации, обусловленные влиянием тропосферы, в отличие от флюктуаций уровня излучения области Солнца, будут некоррелированы и ошибка измерения определится дисперсией функции взаимной корреляции двух случайных процессов, связанной с конечной длительностью реализации. Как известно [8], оценка дисперсии функции корреляции двух процессов, представляющих собой сумму одинаковых сигналов $s(t)$ и взаимно некоррелированных шумов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ вида

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + n_1(t), \\ y(t) &= s(t) + n_2(t), \end{aligned}$$

приводит к следующему приближенному соотношению при любых $\tau < T$:

$$\sigma_{x,y}(\tau, T) = \frac{S^2[k + (N_1/S) + (N_2/S) + (N_1/S)(N_2/S)]}{bT},$$

где $S = \overline{s(t)^2}$, $N_1 = \overline{n_1(t)^2}$, $N_2 = \overline{n_2(t)^2}$, b — полуширина спектра процесса, T — длина реализации и $1 < k < 2$.

Используя это соотношение, можно найти отношение $B(0)/\sigma_{x,y}$, которое характеризует точность измерения функции корреляции. Так как собственные шумы приемника могут быть сделаны достаточно малыми, то величины N_1 и N_2 будут в основном определяться флюктуациями сигнала в атмосфере. Дальнейшее повышение точности может быть достигнуто за счет усреднения функции корреляции по многим реализациям. Оценки показывают, что для одной реализации может быть получено

$$\frac{B(0)}{\sigma_{x,y}} \approx 10,$$

что дает точность определения корреляционной кривой 20%. Таким образом, приведенные выше оценки показывают, что имеется возможность измерить функцию корреляции флюктуаций потока радиоизлучения «спокойного» Солнца и оценить θ и $\bar{N}_\Sigma \Delta T_y^2$, что, в свою очередь, позволит внести уточнение в модель хромосферы. Эти измерения, проведенные в диапазоне волн от 4–6 мкм до 10 см, даже в случае отри-

цательного результата позволят получить верхнюю границу величины $N_e \Delta T_g^2$, что при современном уровне знаний о структуре хромосферы представляет определенный интерес*.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Р. Томас, Р. Атей, Физика солнечной хромосферы, изд. Мир, М., 1965.
- 2 В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
- 3 К. де Ягер, Строение и динамика атмосферы Солнца, ИЛ, М., 1962.
- 4 В. А. Крат, Изв. ГАО, 22, № 167, 6 (1961).
- 5 Г. М. Никольский, Астрон. ж., 42, № 1, 86 (1965).
- 6 Э. В. Кононович, Астрон. ж., 42, № 2, 233 (1965).
- 7 В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
- 8 Дж. Бенда, Основы теории случайных шумов и ее применение, изд. Наука, М., 1965.
- 9 В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 декабря 1966 г.

УДК 621.396.628·523 164

О НЕКОТОРЫХ СХЕМАХ КОМПЕНСАЦИИ СИГНАЛА В РАДИОМЕТРАХ

М. С. Дурасова, О. И. Юдин

Для повышения стабильности работы радиоастрономических приемников и увеличения точности измерений часто используют сбалансированные по входу радиометры Дике. Кроме того, «квазинулевой метод» — компенсация средней интенсивности сигнала — применяется в тех случаях, когда представляет интерес исследование слабых возмущений потока излучения типа микровсплесков радиоизлучения Солнца [1, 2]. Применение компенсации позволяет усилить переменную составляющую сигнала до необходимой величины, не выходя за пределы линейной части характеристики приемника. Обычно в сбалансированном радиометре в качестве компенсирующего сигнала применяются генераторы шума, подключаемые ко второму плечу модулятора [3, 4]. Однако при одноканальном модуляторе, работающем по принципу периодического введения поглощающей нагрузки на/ходе приемника, невозможно использовать для компенсации сигнал от генератора шума, кроме случая, когда при измерении слабых сигналов применяется «дошумливание».

В [5] описан радиометр, в котором компенсация осуществлялась изменением коэффициента передачи одного из каскадов усилителя промежуточной частоты синхронно с частотой модуляции. Нами были проверены схемы сбалансированного приема, использующие периодическое изменение коэффициента усиления в усилителе низкой частоты или изменение коэффициента преобразования кристаллического балансного смесителя. В этих схемах модулирующий сигнал, переключающий вход в приемнике с антенны на согласованную нагрузку, подавался через регулируемый усилитель и фазовращатель на сетки лампы апериодического предварительного усилителя низкой частоты или на кристаллические диодные смесители.

На рис. 1 приведена принципиальная блок-схема радиометра, в котором при помощи переключателей P_1 и P_2 можно осуществить компенсацию сигнала или с помощью генератора шума, или периодическим изменением коэффициента усиления ПУЧ, или изменением коэффициента преобразования кристаллов. Калибровка радиометра осуществляется сигналом от шумового генератора, подаваемым через направленный ответвитель в антенный тракт приемника. Были измерены среднеквадратичные значения флуктуаций сигнала на выходе радиометра при вышеуказанных видах компен-

* Э. И. Могилевский обратил наше внимание на то, что имеются основания считать, что в нижней короне и верхней хромосфере могут существовать неоднородности температуры и электронной плотности с характерным масштабом, значительно меньшим, чем размер спикул. Экспериментальная корреляционная функция будет содержать информацию о флуктуациях различных масштабов.

сации. При этих измерениях на вход приемника подавался сигнал от шумового генератора.

Оказалось, что чувствительность радиометра при всех видах компенсации практически одинакова и составляет $1-1,5^{\circ}$ при постоянной времени $\tau = 2$ сек и температуре на входе приемника 1500°K . Результаты сравнения работы радиометра показали, что наибольшей стабильностью, как и следовало ожидать, отличается схема компенсации с помощью генератора шума.

Средний уход уровня скомпенсированного сигнала за 1 час составляет 3° . В схеме, в которой компенсирующий сигнал подается на кристаллические смесители, этот уход больше 6° . Наименее стабильной оказывается схема компенсации по УНЧ. Длительные записи радиоизлучения Солнца на $\lambda = 3.2 \text{ см}$ с применением этой схемы показали, что она более других подвержена влиянию помех. Средний уход уровня сигнала за 1 час составил 12° .

Результаты приведенных измерений подтвердились при длительных наблюдениях радиоизлучения Солнца «квазинулевым» методом с помощью всех трех видов компенсации.

Таким образом, в тех случаях, когда применение генератора шума для компенсации затруднительно, может быть использована схема, в которой компенсирующий сигнал подается на кристаллические смесители.

Авторы выражают благодарность Лавринову Г. А. за постоянное участие в проведении экспериментальных работ.

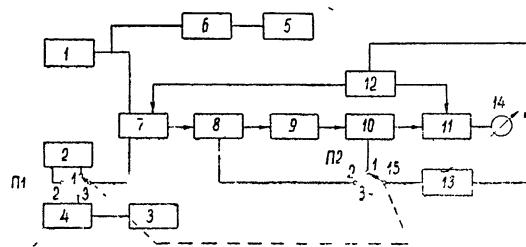


Рис. 1. Блок-схема установки для проведения работы схем компенсации:

1—вход антенны; 2—согласованная нагрузка; 3—шумовой генератор для компенсации сигнала; 4—аттенюатор; 5—направленный ответвитель; 6—шумовой генератор для калибровки радиометра; 7—модулятор; 8—смеситель; 9—усилитель промежуточной частоты и квадратичный детектор; 10—усилитель низкой частоты; 11—RC-усилитель, синхронный детектор; 12—генератор опорного напряжения; 13—фазовращатель с аттенюатором для подачи компенсирующего сигнала на вход УНЧ или на кристаллический смеситель; 14—регистрирующий прибор. Самописец ЭПП-0.9.

ЛИТЕРАТУРА

- М. С. Дурачкова, Г. А. Лавринов, В. М. Шумкина, О. И. Юдин, Геомагнетизм и аэрономия 4, № 5. 988 (1964).
- М. С. Дурачкова, О. И. Юдин, Солнечные данные, № 7, 72 (1966).
- В. А. Ефанов, И. Г. Моисеев, Изв. Крымск. астрофиз. обс., 34, 53 (1965).
- Ю. Ф. Юровский, Изв. Крымск. астрофиз. обс., 34, 60 (1965).
- T. Oghaag, W. Waltman, Publ. Nat. Radio Astron. Obs., 1, 12 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 октября 1966 г.

УДК 538.566

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С ДВИЖУЩИМСЯ СКАЧКОМ ПАРАМЕТРА

Л. А. Островский, Б. А. Соломин

1 Эффекты допплеровского преобразования спектра электромагнитных волн движущимся скачком параметра исследовались теоретически и экспериментально для различных сред [1-6]. Решение задачи обычно сводится к получению граничных условий, соответствующих непрерывности (в сопровождающей системе координат) тангенциальных к поверхности скачка компонент напряженности полей E и H .

Специального рассмотрения заслуживает, однако, вопрос о существовании и единственности решения в тех случаях, когда скорость скачка является сверхсветовой по отношению к среде по одну или обе стороны от него*. Так, для одномерного волно-

* При этом имеет смысл говорить и о движении скачка быстрее скорости света в пустоте.

вого уравнения число величин, которые необходимо задать на границе области, равно числу характеристик, отходящих от границы внутрь области на плоскости независимых переменных (z, t) [7]. Легко видеть, что это число меняется, если движение границы сверхсветовое. Следует ожидать поэтому, что два граничных условия для E, H на скачке не всегда корректно определяют все прошедшие и отраженные волны.

Покажем это на простом примере одномерного распространения в изотропной недиспергирующей среде ($D = \epsilon E$, $B = \mu H$). Граничные условия на движущемся скачке параметров имеют вид

$$[n, E_2 - E_1] = \frac{v_p}{c} (\mu_2 H_2 - \mu_1 H_1), \quad [n, H_2 - H_1] = -\frac{v_p}{c} (\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1), \quad (1)$$

$$\epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_1 E_{n1}, \quad \mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1},$$

где n — нормаль к поверхности разрыва, v_p — нормальная компонента ее скорости, индексы 1 и 2 относятся к величинам соответственно до и после скачка.

Стандартная электродинамическая задача состоит в определении поля по заданным источникам с учетом граничных условий. В нашем случае это означает, что по заданной волне, падающей на скачок, находятся все волны, уходящие от него. При нормальном падении поля с каждой стороны скачка является (в лабораторной системе) суперпозицией двух бегущих в противоположных направлениях волн:

$$E_l = E_l^+ + E_l^-, \quad H_l = \rho_l^{-1} (E_l^+ - E_l^-), \quad (2)$$

где $v_l = c/\sqrt{\epsilon_l \mu_l}$, $\rho_l = \sqrt{\mu_l/\epsilon_l}$, $l = 1, 2$, E_l^\pm зависят соответственно от переменных $z \mp v_l t$. В общем случае имеются три неизвестных величины E_l^\pm (падающая волна задана), связанных двумя соотношениями (1). Поэтому такая задача корректна лишь в тех случаях, когда одна из неизвестных волн не может распространяться от скачка и должна быть отброшена*. Как легко убедиться, это действительно имеет место, если v_p и значения скорости распространения сигнала $v = c/\sqrt{\epsilon \mu}$ удовлетворяют одному из неравенств

$$|v_p| < v_1, v_2; \quad (3a)$$

$$|v_p| > v_1, v_2. \quad (3b)$$

Для определенности далее будем считать заданной волну $E_1^+ = E_n$, падающую навстречу скачку, бегущему в отрицательном направлении. Тогда, очевидно, в случае (3a) невозможна волна E_2^+ в области 2 (рис. 1a), а в случае (3b) — волна E_1^- в области 1 (рис. 1b). При этом для остальных волн из (1) и (2) получаем в случае (3a)

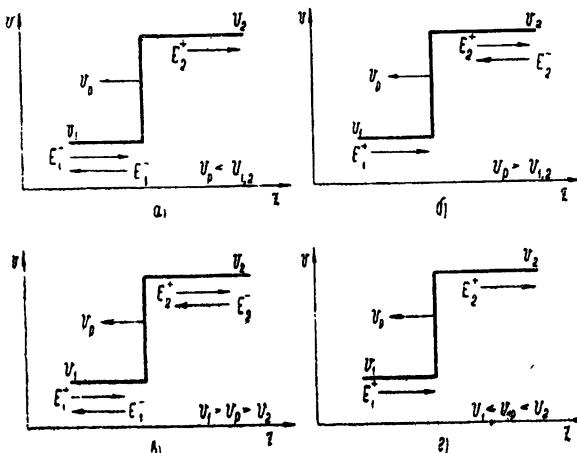


Рис. 1.

* Отсутствие таких волн в случае, если падающая волна имеет конечную длительность, вытекает из начальных условий, а для стационарных гармонических волн — из условия излучения.

$$E_2^+ = E_n \left(\frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 + v_p/v_2} \right), \quad E_1^- = E_n \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right) \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 - v_p/v_1} \right), \quad (4a)$$

в случае (3б)

$$E_2^+ = E_n \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1} \right) \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 + v_p/v_2} \right), \quad E_2^- = E_n \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_1} \right) \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 - v_p/v_2} \right). \quad (4b)$$

Здесь и далее через v_p обозначаем модуль скорости скачка.

Соотношения (4) выполняются для мгновенных значений полей. Для синусоидальных сигналов частным случаем (4) являются следующие из непрерывности фазы допплеровские формулы для соответствующих частот*:

$$\omega_2^+ = \omega_n \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 + v_p/v_2} \right), \quad \omega_1^- = \omega_n \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 - v_p/v_1} \right), \quad \omega_2^- = \omega_n \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 - v_p/v_2} \right). \quad (5)$$

2. Иная ситуация возникает в случаях, когда условия (3) не выполняются, т. е.

$$v_1 > |v_p| > v_2; \quad (6a)$$

$$v_1 < |v_p| < v_2. \quad (6b)$$

Особенность этих случаев видна уже из следующих соображений. Заменим скачок областью δ быстрого, но непрерывного изменения параметров $\epsilon(z, t)$, $\mu(z, t)$. Тогда исходное волновое уравнение имеет на плоскости z, t два семейства характеристик $dz = \pm v(z, t)dt$ (вдали от области δ это прямые). При условиях (6) область δ содержит «точку синхронизма», где $v = v_p$; траектория этой точки ($dz = v_p dt$) сама принадлежит одному из семейств характеристик. Следовательно, граничные условия (1) связывают величины в окрестности характеристической линии; соответствующие задачи являются, как известно, особыми в математическом отношении.

Рассмотрим сначала случай (6a). Если, как и выше, задана волна $E_1^+ = E_n$, то в каждой из областей возможны обе волны (рис. 1в); имеются, следовательно, три неизвестные величины (E_1^- , E_2^+ , E_2^-), удовлетворяющие двум уравнениям (1). В такой постановке задача некорректна; необходимо отказаться от «разрывного» описания области изменения параметров и конкретизировать структуру «скакачка».

Чтобы пояснить последнее утверждение, рассмотрим (рис. 2) область, в которой v изменяется двумя скачками (1 и 3), разделенными сравнительно плавной областью 2, где v меняется от значения $v_1 = v_p + \Delta v$ до $v_2 = v_p - \Delta v$, а $\Delta v > 0$ — достаточно малая величина. Тогда, как легко видеть, в области 2 имеется лишь одна волна, бегущая в положительном направлении (E'), и на скачке 1 выполняются соотношения (4a) (в которых вместо E_2^+ следует подставить E'), а на скачке 2 — соотношения (4b), (в которых нужно заменить E_1^+ на E'), значения E' на границах области 2 можно считать одинаковыми. Здесь 4 неизвестные величины (E_1^- , E' , E_2^+ , E_2^-) и столько же уравнений для их определения (по два на скачках 1 и 2). Исключая E' , получим, например, для E_2^+

$$E_2^+ = E_n \left(\frac{1 + \rho_2/\rho'}{1 + \rho_1/\rho'} \right) \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 + v_p/v_2} \right) \left(\frac{1 + v_p/(v_p - \Delta v)}{1 + v_p/(v_p + \Delta v)} \right). \quad (7)$$

При $\Delta v \rightarrow 0$ последний множитель в (7) равен 1. Следовательно, величина E_2^+ определяется однозначно, если, кроме значений параметров на концах области, задать $\rho = \rho'$ в точке, где $v = v_p$ (величины v , ρ однозначно определяют параметры ϵ , μ). Поступая аналогично с другими неизвестными, получим

$$E_2^+ = E_n \left(\frac{\rho' + \rho_2}{\rho' + \rho_1} \right) \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 + v_p/v_2} \right), \quad E_2^- = E_n \left(\frac{\rho_2 - \rho'}{\rho_1 + \rho'} \right) \times \\ \times \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 - v_p/v_2} \right), \quad E_1^- = E_n \left(\frac{\rho' - \rho_1}{\rho' + \rho_1} \right) \left(\frac{1 + v_p/v_1}{1 - v_p/v_1} \right). \quad (8)$$

* Ввиду отсутствия дисперсии сигналы произвольной формы преобразуются без искажения; формулы (5) справедливы для величин, обратных длительностям соответствующих волн.

Так как ширина области 2 не входит в результат, то, считая ее исчезающей малой, получим искомое преобразование сигнала одним скачком

Таким образом, достаточная (при монотонном изменении v) дополнительная информация о структуре области скачка сводится к заданию параметров ϵ и μ в точке синхронизма ($v = v_p$); в остальном эта структура произвольна*

Полученный результат нетрудно понять, учитывая, что точка $v=v_p$ (и соответствующая характеристика на плоскости z, t) служит здесь некоторым «водоразделом» — отраженные волны как до, так и после такой точки могут лишь удаляться от нее, и процессы в соответствующих областях не связаны друг с другом

3 Рассмотрим теперь случай (бб). Здесь волна E_1^+ , падающая навстречу скачку, порождает лишь одну — прошедшую волну E_2^- (рис. 1), для определения которой

имеются два уравнения (1). Эта задача, следовательно, также некорректна (переопределена). Использованный выше метод — разделение скачка на два — здесь непригоден, так как число неизвестных остается меньшим числа уравнений. Физической причиной этого является группировка — отраженные внутри скачка волны, как легко видеть, сходятся в окрестность точки $v = v_p$. Плотность энергии в этой точке неограниченно растет, и задача не имеет конечного стационарного (даже в масштабе ширины «скакка») решения, соответствующего условиям (1), которые здесь теряют применимость. Для получения определенного решения нужно учитывать дополнительные факторы в исходных уравнениях. Так, учет нелинейности (влияния сигнала на скорость распространения скачка) в простейшем случае приводит к задаче о взаимодействии сигнала с ударной электромагнитной волной. Недостающей неизвестной при этом служит возмущение скорости скачка**. Для электромагнитных волн эта задача решена в работе [3]; полученные граничные условия отличны от (1).

Если среда обладает дисперсией, то соответствующие задачи усложняются (заметим, что при движении границы временная дисперсия переходит в пространственную). Для диспергирующих сред следует учитывать различие между задачами с начальными условиями (когда решение определяется характеристиками исходных уравнений) и задачами о стационарных монохроматических волнах. В последнем случае число возможных волн определяется неравенствами типа (3), (6) для групповых скоростей на соответствующих частотах. Этот вопрос заслуживает специального рассмотрения.

Следует отметить, что все сделанные выводы без труда обобщаются на случай произвольных одномерных волн, в частности, акустических и магнитогидродинамических.

В заключение выражаем признательность А. В. Гапонову за интересные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лампарт, Phys. Rev., 102, 299 (1956).
2. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, 29, 491 (1959).
3. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 5, 833 (1959).
4. В. И. Курилко, ЖТФ, 31, 71 (1961).
5. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, 226 (1961).
6. С. Н. Столяров, ЖТФ, 33, 565 (1963).
7. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1965.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1954.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 января 1967 г.

* Если меняется только один из параметров ϵ , μ , то ρ' однозначно связано с v_p .

** Заметим, что условие (бб) необходимо для устойчивости самой ударной волны [8].

К РАСЧЕТУ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НАПРАВЛЕННОСТИ ВИБРАТОРА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА РЕБРЕ КЛИНА

В. С. Кулагин, Н. Н. Филиппов

Общее решение задачи о возбуждении бесконечного клина дано в [1]. Ряд частных решений приводится в [2—4]. В настоящей работе рассматривается пространственное распределение ортогональных составляющих электрического поля вибратора с синусоидальным током, расположенного на ребре клина по биссектрисе его внешнего угла.

Нормированные характеристики могут быть найдены из следующих выражений:

$$F_\varphi(\varphi, \theta) = \frac{|f_\varphi(\varphi, \theta)|}{|f_\varphi(\varphi, \theta)|_{\max}}, \quad F_\theta(\varphi, \theta) = \frac{|f_\theta(\varphi, \theta)|}{|f_\theta(\varphi, \theta)|_{\max}},$$

где

$$f_\varphi(\varphi, \theta) = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (L_{v+1} + L_{v-1}) \cos(0,5\pi v) \cos(v\varphi) + \right. \\ \left. + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (L_{v+1} + L_{v-1}) \sin(0,5\pi v) \cos(v\varphi) \right]; \quad (1)$$

$$f_\theta(\varphi, \theta) = \frac{\cos \theta}{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (L_{v+1} - L_{v-1}) \cos(0,5\pi v) \sin(v\varphi) + \right. \\ \left. + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (L_{v+1} - L_{v-1}) \sin(0,5\pi v) \sin(v\varphi) \right]. \quad (2)$$

Здесь $L_{v\pm 1} = \int_0^l J_{v\pm 1}(mx \sin \theta) \sin[m(l-x)] dx$, $m = 2\pi/\lambda$; $J_{v\pm 1}$ — функция Бесселя

первого рода $v \pm 1$ порядка, $v = \frac{\pi}{\alpha} (2k+1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); α — внешний угол клина; l — длина вибратора; θ — угол, откладываемый от нормали к оси вибратора, и φ — азимутальный угол. Расчеты выполнялись для различных значений внешнего угла клина при $l/\lambda < 0,25$ (0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25) на ЭВЦМ «Минск-1». При этом первые пять членов бесконечных сумм в выражениях (1) и (2) обеспечивали точность счета не хуже 1%. Анализ пространственных диаграмм позволяет констатировать слабую зависимость характеристик направленности вибратора от его длины при $l/\lambda \leq 0,25$, что дает возможность в инженерных расчетах пользоваться для оценки направленных свойств и некоторых других характеристик вибратора на кромке клина формулами для элементарного вибратора, полученными в [2—4].

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Т. Марков, Возбуждение бесконечного клина, Труды МЭИ, вып. 21, стр. 4, Радиотехника, Госэнергоиздат, М., 1956
- А. Н. Потехин, Л. Б. Тартаковский, Радиотехника и электроника, 3, № 3, 592 (1958).
- А. Н. Коваленко, Г. Т. Марков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 566 (1964).
- W. A. Johnson, Proc. IEE, 102, 211 (1955).

О КОЭФФИЦИЕНТЕ УСИЛЕНИЯ АКТИВНОЙ СРЕДЫ ГАЗОВЫХ ОКГ

B. I. Matveev

При расчете выходной мощности газовых ОКГ в зависимости от условий эксперимента для коэффициента усиления активной среды используют выражение, соответствующее либо чисто однородному [1], либо чисто неоднородному [2] уширению спектральной линии рабочего перехода. В настоящей работе получено аналитическое выражение для промежуточного случая, который более соответствует условиям работы газовых ОКГ.

Будем считать, что реальный контур спектральной линии рабочего перехода возникает в результате одновременного действия естественного уширения и явления Доплера, которые можно рассматривать как не зависимые друг от друга причины расширения спектральной линии. Тогда зависимость коэффициента усиления $g(v)$ от интенсивности излучения $S(v)$ в общем виде определяется выражением [3]

$$g(v) = \frac{g_0}{\pi} \frac{\Delta v_N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta v_D} (v' - v_0) \right]^2 \right\} \times \\ \times \left\{ (v' - v)^2 + \left(\frac{\Delta v_N}{2} \right)^2 \left[1 + \frac{S(v)}{\beta} \right] \right\}^{-1} dv', \quad (1)$$

где v — частота в пределах спектральной линии рабочего перехода, g_0 — постоянная, определяемая скоростью накачки и временами жизни рабочих уровней, v_0 — центральная частота спектральной линии, Δv_N и Δv_D — ширина естественной и доплеровской линий соответственно (на уровне 0,5), β — параметр насыщения. Обозначив

$$1 + \frac{S(v)}{\beta} = F, \quad \eta = \frac{\Delta v_N}{\Delta v_D} \sqrt{F \ln 2}, \quad b = \frac{2(v - v_0)}{\Delta v_N \sqrt{F}}, \quad y = \frac{2(v - v')}{\Delta v_N \sqrt{F}}, \quad (2)$$

из (1) находим

$$g(v) = \frac{g_0}{\pi} (F)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \{ -[\eta(b-y)^2] \}}{y^2 + 1} dy. \quad (3)$$

Интеграл в (3) является действительной частью функции [4]

$$\varphi(\eta, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -[\eta(b-y)^2] \} \frac{dy}{1-iy}, \quad (4)$$

которая не может быть проинтегрирована в общем виде. Ее действительная и мнимая части табулированы в [5].

Для практических расчетов можно получить аналитическое выражение $g(v)$. В работе [4] показано, что (4) приводится к виду

$$\varphi(\eta, b) = 2\sqrt{\pi} \exp [\eta(1-ib)]^2 \int_{\eta(1-ib)}^{\infty} \exp (-z^2) dz. \quad (5)$$

Вводя гауссов интеграл ошибок для комплексного аргумента, из (5) получаем

$$\varphi(\eta, b) = \pi \exp [\eta(1-ib)]^2 (1 - \Phi[\eta(1-ib)]). \quad (6)$$

В реальных газовых ОКГ $0 < \Delta v_N / \Delta v_D < 1$ (например, для He—Ne ОКГ с $\lambda = 6328 \text{ мкм}$ $\Delta v_N \approx (100 \div 200) \text{ МГц}$ и $\Delta v_D = 1530 \text{ МГц}$). Тогда, представляя интеграл вероятности при малом значении параметра степенным рядом и ограничиваясь членами первого порядка, находим действительную часть (6) или (4) в виде

$$\operatorname{Re} \varphi = \pi \exp [-(\eta b)^2] (1 - 2\eta/\sqrt{\pi}). \quad (7)$$

Из (3) с учетом (2) и (7) следует

$$g(v) = g_0 \left[1 + \frac{S(v)}{\beta} \right]^{-1/2} \exp \left\{ - \left[\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta v_D} (v - v_0) \right]^2 \right\} \times \\ \times \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta v_N \sqrt{\ln 2}}{\Delta v_D} \sqrt{1 + \frac{S(v)}{\beta}} \right]. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что выражение для $g(v)$, имеющееся в [2], является частным случаем (8) при $\Delta v_N/\Delta v_D = 0$. Анализ показывает, что в диапазоне $0 < \Delta v_N/\Delta v_D < 0,3$, который соответствует условиям работы большинства реальных газовых ОКГ, максимальная ошибка в определении $g(v)$ по формуле (8) не превышает 10%.

В заключение отметим, что при использовании выражения (8) в расчетах выходной мощности газовых ОКГ необходимо учитывать зависимость Δv_N и β от давления газов в трубке ОКГ [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. D. White, E. I. Gordon, J. D. Rigden, Appl. Phys. Lett., **2**, № 5, 189 (1963).
2. W. W. Rigrod, J. Appl. Phys., **34**, № 9, 2602 (1963) (см. перевод в сб. Оптические квантовые генераторы, изд. Мир, М., 1966).
3. E. I. Gordon, A. D. White, J. D. Rigden, Proceeding of the symposium on optical masers, New-York, Polytechn. Press, 1963, p. 309.
4. М. Борн, Оптика,ОНТИ, Киев—Харьков, 1937.
5. B. D. Fried, S. D. Conte, The Plasma Dispersion Function (Hilbert Transform of the Gaussian), New-York, 1961.
6. P. W. Smith, J. Appl. Phys., **37**, № 5, 2089 (1966).

Высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
31 января 1967 г.

УДК 621.378.325

О ПРИМЕНЕНИИ ПЛАСТИНЫ ЛЮММЕРА—ГЕРКЕ В ОКГ НА РУБИНЕ

B. N. Ищенко, B. N. Старинский

Пластина Люммера—Герке (ЛГ) представляет собой плоскопараллельную пластину из оптически прозрачного материала с плотностью $n > 1$, внутри которой распространяется световое излучение под углами, близкими к критическому углу полного внутреннего отражения (рис. 1). Быстрый рост коэффициента отражения с увеличением угла падения до критического с учетом многократных отражений обуславливает значительную угловую селективность такой системы.

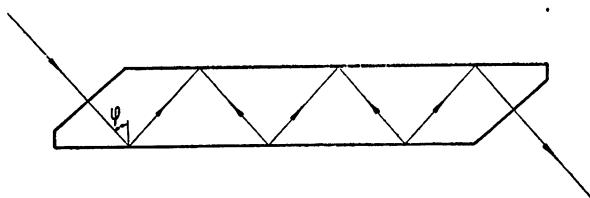


Рис. 1. Пластина Люммера—Герке. Угол падения близок к критическому: $\varphi = \varphi_{kp} \pm \delta$, $\delta \ll 1$.

Расчет по формуле [1]

$$T_p = R_p^m = \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)} \right]^{2m},$$

где T_p — пропускание пластины ЛГ для p -компоненты, R_p — энергетический коэффициент отражения, φ и χ — соответственно углы падения и преломления, связанные обычным соотношением геометрической оптики, m — число отражений, показывает, что, например, для стекла К-8 с $n = 1,51$, $m = 10$ коэффициент пропускания T_p изменяется от 1 до 0,22 при отклонении угла падения от φ_{kp} на $30''$. Аналогичный расчет для стекла ТФ-12 ($n = 1,78$) дает то же изменение коэффициента пропускания при отклонении угла падения от φ_{kp} на $20''$.

Помещенная в резонатор ОКГ пластина ЛГ должна играть роль селектора угловых типов колебаний, уменьшая тем самым расходимость выходного луча [2].

Предварительные эксперименты с рубиновым ОКГ и пластинами ЛГ двух размеров из стекла К-8 и ТФ-12 показали, что расходимость уменьшается примерно в три раза по сравнению с аналогичным генератором без пластины и достигает величины $\sim 3 \div 5'$. При оптимизации всех параметров генератора с пластиной ЛГ можно ожидать уменьшения расходимости еще на 2 порядка.

Другое возможное применение пластины ЛГ в лазерной технике заключается в уменьшении времени восстановления добротности резонатора ОКГ с механическим модулятором (вращающаяся призма полного внутреннего отражения). Основным недостатком такого модулятора является малая скорость восстановления добротности (открытия) резонатора, приводящая к ограничению амплитуды, искажению формы импульса и нарушению моноимпульсного режима — появлению вторичных импульсов. Скорость открывания резонатора можно вычислить, зная скорость вращения призмы и зависимость потерь от угла поворота зеркала.

Практически удобнее измерять зависимость порогового значения энергии накачки (ниже эту величину будем называть порогом) от угла поворота призмы относительно оси резонатора (угол расстройки). Эта зависимость дает возможность в адиабатическом приближении прямо определить угол расстройки, при котором с данной накачкой возникает генерация, и оценить время открывания резонатора. Пример такой зависимости для рубинового ОКГ приведен на рис. 2 (кривая а). Из графика видно, что при скорости вращения призмы $26 \text{ тыс. об. мин}^{-1}$ время открывания при 80% превышении над порогом составляет $\sim 1,5 \text{ мксек}$ при почти линейном понижении порога.

При внесении в резонатор ОКГ пластины ЛГ эта зависимость резко изменяется (рис. 2, кривые б, в, г) и время открывания сокращается до $200 \div 300 \text{ нсек}$, что становится уже сравнимым с временем развития генерации $\sim 30 \div 200 \text{ нсек}^*$.

Предварительные эксперименты, проведенные с механическим модулятором и пла-

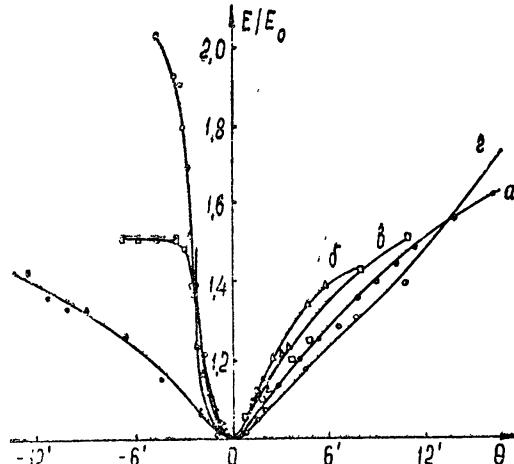


Рис. 2. Зависимость порога генерации от угла поворота плотного зеркала θ .

а) Кривая получена на резонаторе с плотным и 15% зеркалами длиной 90 см. Рубин выставлен по оси резонатора. б) Кривая получена на том же резонаторе с пластиной ЛГ из стекла ТФ-12 с 10 отражениями. в) То же с пластиной ЛГ из стекла К-8 с 6 отражениями. г) То же с пластиной ЛГ из стекла К-8 с 10 отражениями.

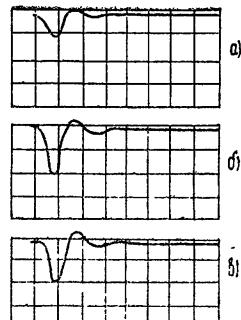


Рис. 3. Осциллограммы выходного излучения. Разворотка 50 нсек. см^{-1} .

а) Обычный призменный модулятор. Превышение над порогом 40%. б) То же с пластиной ЛГ из стекла ТФ-12 на 6 отражений. в) То же с пластиной ЛГ из стекла К-8 на 6 отражений. Чувствительность осциллографа в случае а и б одинаковая, в случае в уменьшена в 2,5 раза.

* А. Н. Бондаренко. Частное сообщение.

стиной ЛГ, показали, что длительность импульса сокращается по сравнению с таким же генератором без пластины в 1,5—2,5 раза, стабилизируется форма и длительность импульса и растет пиковая мощность излучения. Заметного уменьшения общей энергии излучения не наблюдалось. Примеры осциллограмм импульсов, полученных с механическим модулятором и пластиной ЛГ, приведены на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Ландсберг, Оптика, 3, ГИТЛ, М., 1957.
2. J. A. Giordmaine, W. Kaiser, J. Appl. Phys., 35, № 12, 3446 (1964).

Институт физики полупроводников
Сибирского отделения АН СССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1966 г.

УДК 621.385.622

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ СТРОФОТРОН

В. А. Бербасов, Л. П. Федотова

Движение электронов в электрическом поле, имеющем особенность типа «седло», рассмотрено Пирсом [1]. В этом случае можно получить простое гармоническое движение электронов вдоль сильного постоянного магнитного поля. Высокочастотные генераторы, в которых эти поля используются, получили название строфotronов [2—4]. В аксиально-симметричном случае необходимое распределение потенциала создается с помощью гиперболических электродов, показанных на рис. 1 в поперечном сечении.

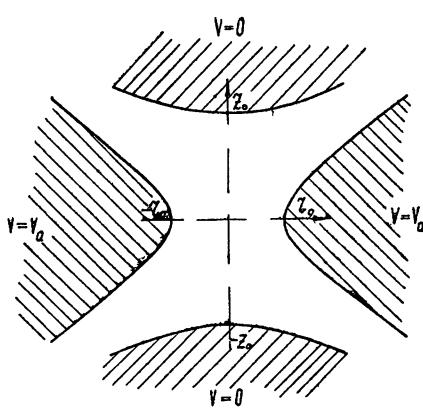


Рис. 1.

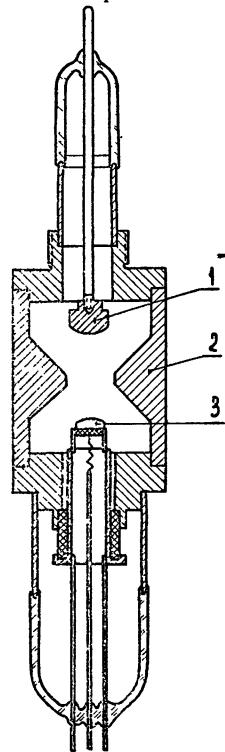


Рис. 2.
1—отражатель,
2—анод, 3—катод.

Известно (см., например, [5]), что для приборов со скрещенными полями в режимах, когда величина магнитного поля превышает критическое значение, но условия самовозбуждения не выполнены, характерны интенсивные флуктуации пространственного заряда. Такие флуктуации имеют место и в строфотронах. В настоящем сообщении приводятся результаты измерения спектра флуктуаций тока коллектора в лампе, изображенной на рис. 2. Форма электродов (катод, анод, коллектор) близка к гиперболической с параметрами $r_0 = 9,5 \text{ мм}$ и $z_0 = 17 \text{ мм}$. Катод имеет синтерированное оксидное покрытие до радиуса $r_k = 8 \text{ мм}$.

Лампа работала при ограничении тока пространственным зарядом, поэтому не наблюдалось сколько-нибудь заметных изменений измеряемых величин при отклонении тока накала на $\pm 30\%$ от своего номинального значения. Величина напряженности магнитного поля превышала критическое значение в 3—6 раз. Напряженность магнитного поля в режиме отсечки определялась при отсутствии пространственного заряда.

В этом случае уравнения движения

$$\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = \omega_H r \dot{r}; \quad (1)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial r} - \omega_H \dot{\varphi}; \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (3)$$

где

$$V = V_a \frac{r^2 + 2(z_0^2 - z^2)}{r_0^2 + 2z_0^2}, \quad (4)$$

имеют при начальных условиях $t = 0, r = r_1, z = -z_1$ следующие решения:

$$z = -z_1 \cos(\omega_z t); \quad (5)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_H}{2} (1 - r_1^2/r^2); \quad (6)$$

$$r^2 = r_1^2 + (r_2^2 - r_1^2) \sin^2 \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} t. \quad (7)$$

Частота осевых колебаний равна

$$\omega_z = 2 \sqrt{\frac{e}{m} \frac{V_a}{r_0^2 + 2z_0^2}}, \quad (8)$$

интервал радиальных колебаний составляет

$$r_1^2 < r^2 < r_2^2 = \frac{r_1^2}{1 - 2\omega_z^2/\omega_H^2}. \quad (9)$$

Если катодная поверхность покрыта эмитирующими слоем до радиуса r_k , критическое значение напряженности магнитного поля определяется равенством

$$r_0^2 = \frac{r_k^2}{1 - 2\omega_z^2/\omega_H^2}. \quad (10)$$

Разрешая (10) относительно H_{kp} , получим

$$H_{kp} = 2^{3/2} \sqrt{\frac{m}{e}} \sqrt{V_a} r_0^{-1} [(1 + 2z_0^2/r_0^2)(1 - r_k^2/r_0^2)]^{-1/2}. \quad (11)$$

На рис. 3 представлены спектры флюктуаций тока коллектора при отрицательных напряжениях на коллекторе $|V_k| = 250, 200, 150, 100$ в, анодном напряжении $V_a = 600$ в ($H_{kp} = 120$ эрстед) и напряженности магнитного поля $H = 600$ эрстед. В этих режимах наблюдались интенсивные флюктуации тока, наведенного на коллектор; спектральная плотность интенсивности флюктуаций J_f^2 достигала величины $10^{-12} \text{ а}^2 \text{ Гц}^{-1}$. Величина анодного тока изменялась в пределах $J_a = 10 \div 50$ ма. Однако следует отметить, что при довольно больших (50—60%) изменениях величины магнитного поля заметных изменений спектра не происходило.

На рис. 4 крестиками отмечены частоты, на которых наблюдались максимумы спектральной плотности, и интервалы частот, в которых величина спектральной плотности составляла не менее половины от максимальной. На этом же рисунке приведена кривая зависимости частоты осевых колебаний, рассчитанная по формуле (8).

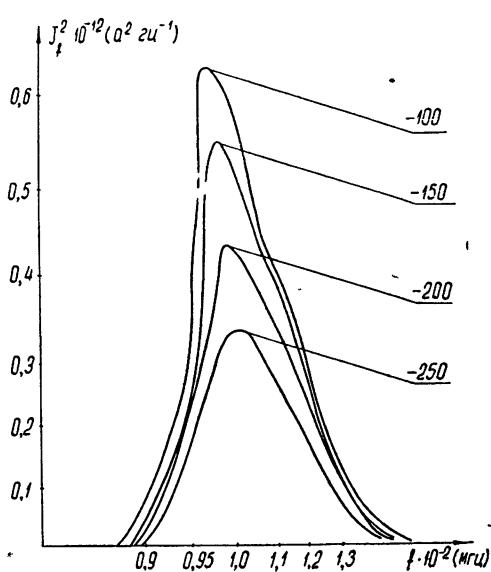


Рис. 3.

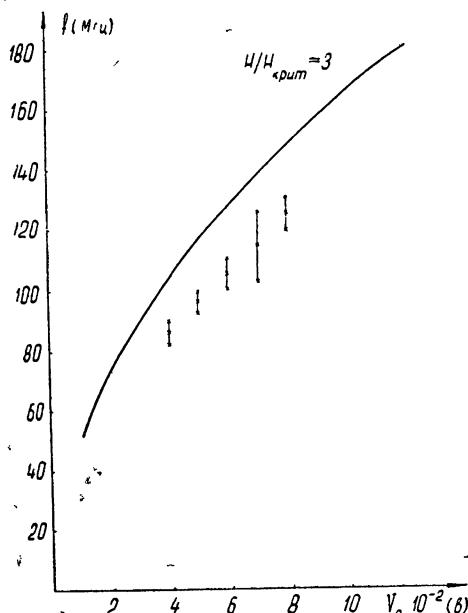


Рис. 4.

Данные эксперимента позволяют сделать вывод, что собственная частота системы, на которой наблюдаются резко выраженные шумовые максимумы, совпадает с частотой осевых качаний электронов. Тот факт, что частоты, на которых наблюдались наибольшие плотности спектра, меньше рассчитанных по формуле (8), вполне естественно объяснить увеличением периода колебаний электронов при наличии пространственного заряда.

Авторы выражают благодарность Кузнецову М. И. за идею постановки настоящей работы и Рубцовой К. Н. за участие в измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
2. Н. Альвен, Д. Ромейл, PIRE, 42, 1239 (1954).
3. Агадур, Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 2, 93, 1961.
4. П. А. Бородовский, А. Ф. Булдыгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 209 (1966).
5. Ван Дузер, Уинер, Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1, 278, 1961.

Поступила в редакцию
22 февраля 1966 г.,
после доработки
17 февраля 1967 г.

УДК 537.525

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА В ЯЧЕЙКЕ ПЕННИНГА ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Т. И. Иванова

При разряде в ячейке Пенninga в случае низких давлений и сильных магнитных полей между электродами существует отрицательный пространственный заряд [1]. Для изучения многих явлений в таком разряде желательно знать распределение потенциала

в этом случае. В работе [2] были подобраны эмпирические формулы для семейства конкретных экспериментальных кривых распределения потенциала только по оси разрядного промежутка и по радиусу в плоскости симметрии ячейки.

В настоящей работе получено решение уравнения Пуассона в области, ограниченной электродами типа Пеннинга, с заданными граничными условиями — потенциалами на электродах — в том случае, когда пространственный заряд равномерно распределен внутри цилиндрического слоя. Близкое к этому распределение пространственного заряда было найдено при наблюдении Штарк-эффекта в горячем разряде [3]. В действительности распределение заряда в разряде сильно зависит от давления и магнитного поля и может быть более сложным. Однако в большинстве случаев экспериментальное распределение заряда можно представить в виде нескольких цилиндрических слоев, отличающихся друг от друга радиусами, длиной и плотностью заряда внутри них. Поэтому предложенное решение может быть распространено и на случай неравномерного распределения заряда.

Рассмотрим ячейку Пеннинга (рис. 1) с бесконечно протяженными катодами, расстояние между которыми $2d$; длиной анода $2l$ и радиусом его r_a . Внутри анода расположен пространственный заряд, равномерно распределенный с плотностью ρ по цилиндрическому слою, длина которого 2λ , внутренний радиус r_1 , а внешний r_2 . Потенциал анода $\varphi_a = 1$.

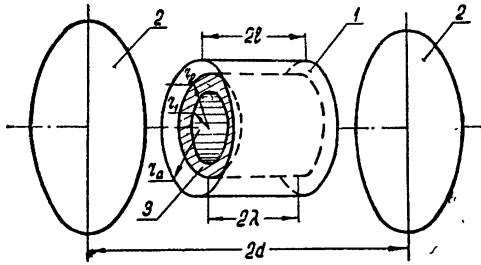


Рис. 1. Ячейка Пеннинга:
1—анод, 2—катоды, 3—пространственный заряд.

Решение уравнения Пуассона (в цилиндрической системе координат)

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & (r_1 < r < r_2, |z| < \lambda) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

граничными условиями

$$\varphi(r, \pm d) = 0; \quad (2)$$

$$\varphi(r_a, z) = 1 \quad (|z| \leq l); \quad (3)$$

$$\varphi(0, z) < \infty; \quad (4)$$

$$\varphi(\infty) = 0 \quad (5)$$

можно представить в виде суммы двух функций:

$$\varphi(r, z) = \varphi_1(r, z) + \varphi_2(r, z), \quad (6)$$

где $\varphi_2(r, z)$ является решением уравнения (1) с граничными условиями (2), (4), (5), а $\varphi_1(r, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi_1 = 0$ с граничными условиями (2), (3), (5) и

$$\varphi_1(r_a, z) = 1 - \varphi_2(r_a, z) \quad (|z| \leq l). \quad (7)$$

Функция $\varphi_2(r, z)$ может быть найдена при помощи метода отражений [5]. Согласно этому методу, уравнение (1) и граничные условия (2) будут удовлетворены, если $\varphi_2(r, z)$ представляет собой сумму потенциалов, создаваемых заряженным цилиндрическим слоем и его многократными отражениями в обоих катодах. Потенциалы, создаваемые самим заряженным слоем и его отражениями, обращающиеся в нуль на бесконечности, можно представить в виде интегралов Пуассона. Таким образом,

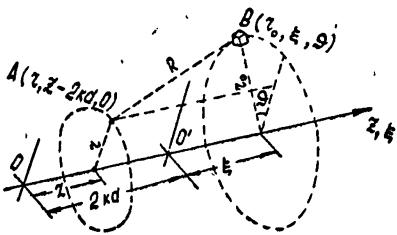
$$\varphi_2(r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \rho r_0 d\xi dr_0 d\theta [(z - 2kd - \xi)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta]^{-1/2}, \quad (8)$$

где ξ, r_0, θ — цилиндрические координаты элементарного объема внутри заряженного слоя или его отражения, если начало координат находится в центре симметрии этого

слоя или отражения (рис. 2); $r, z - 2kd$, O — координаты точки промежутка между катодами, в которой вычисляется потенциал, взятые в той же системе координат; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — номер отражения.

Рис. 2. Выбор координат для интегралов Пуассона:

O — центр симметрии ячейки; O' — центр симметрии k -го отражения; A — точка, в которой определяется потенциал; B — элементарный объемный заряд k -го отражения.



Проинтегрировав выражение (8), получим

$$\varphi_0(r, z) = 2\pi\rho \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sum_{l, j=1}^2 (-1)^{l+j} \left\{ \frac{\zeta_{jk}}{2} P_{ijk} + \frac{r_i^2}{2} \ln |\zeta_{jk} + P_{ijk}| - \right. \\ \left. - \frac{r^2 r_i^2 \zeta_{jk}}{4(r^2 + r_i^2) P_{ijk}} - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n C_{2n}^n C_{4n}^{2n} \left(\frac{r}{4} \right)^{2n} A_{ijkl} \right\}, \quad (9)$$

где

$$\zeta_{jk} = z - 2kd + (-1)^j \lambda, \quad P_{ijk} = (\zeta_{jk} + r_i^2 + r^2)^{1/2},$$

$$A_{ijkl} = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m C_n^m}{2n + 2m - 1} B_{ijklm},$$

$$B_{ijklm} = \sum_{\mu=0}^m \frac{(-1)^\mu C_m^\mu r_i^{2\mu}}{(r^2 + r_i^2)^{n+\mu-1}} D_{ijklm\mu},$$

$$D_{ijklm\mu} = \sum_{v=0}^{n+\mu-2} \frac{(-1)^v C_{n+\mu-2}^v \zeta_{jk}^{2v+1}}{(2v+1) P_{ijkl}^{2v+1}},$$

C_α^β — биномиальные коэффициенты.

Выражение (9) содержит бесконечные суммы по n и по k . Ряды по n сходятся достаточно быстро, и обычно в них можно ограничиться двумя-тремя членами. При суммировании же по k следует учесть, что потенциал $\varphi_k(r, z)$, создаваемый в промежутке между катодами изображением с достаточно большим номером k , можно рассматривать как потенциал точечного заряда и рассчитывать его по упрощенной формуле

$$\varphi_k(r, z) = \frac{(-1)^k 2\pi\rho \lambda (r_2^2 - r_1^2)}{[(2kd - z)^2 + r^2]^{1/2}}. \quad (10)$$

Задача о нахождении функции $\varphi_1(r, z)$ подробно рассмотрена в работе [4]. Функцию $\varphi_2(r_a, z)$, которая входит в условие (7), следует предварительно найти на отрезке $|z| \leq l$ в численном виде при помощи формулы (9).

Таким образом, найдя функцию $\varphi_2(r, z)$, а затем $\varphi_1(r, z)$, мы можем определить значение потенциала в любой точке внутри ячейки Пеннинга в зависимости от ее геометрических размеров и потенциалов на ее электродах при наличии пространственного заряда. На рис. 3 в качестве примера приведены кривые распределения потенциала по оси разряда и по радиусу в плоскости симметрии разрядного промежутка при различных значениях ρ . Предложенный метод позволяет получить распределение потенциала принципиально с любой точностью. Однако объем необходимых для этого вычислений может оказаться большим. Поэтому метод наиболее целесообразен для расчета на быстродействующих вычислительных машинах.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность профессору Э. М. Рейхруделю за предложенную тему и доценту Г. Е. Пустовалову за помощь при выполнении работы.

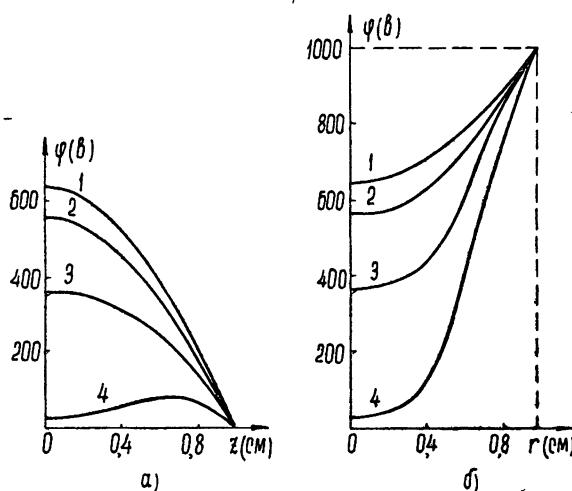


Рис. 3. Распределение потенциала в ячейке Пеннинга:

а) вдоль оси ячейки, б) по радиусу в плоскости $z=0$: $d=1$ см; $l=0,5$ см; $r_a = 1$ см; $\varphi_a = 1000$ в; $\lambda = 0,5$ см; $r_1 = 0,4$ см; $r_2 = 0,6$ см; 1) $\rho = 0$; 2) $\rho = -1,76 \cdot 10^{-10}$ к \cdot см $^{-3}$; 3) $\rho = -5,9 \cdot 10^{-10}$ к \cdot см $^{-3}$; 4) $\rho = -12,8 \cdot 10^{-10}$ к \cdot см $^{-3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Рейхрудель, А. В. Чернетский, И. А. Васильева, ЖТФ, 22, № 12, 1945 (1952).
E. M. Reikhruedel, G. V. Smirnitskaya, R. P. Baberetsyan, 7-th International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Beograd (Abstr), 1965, p. 42; ЖТФ, 36, № 7, 1226 (1966).
2. В. Кнаег, R. L. Poesscheil, z-th International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Beograd (Abstr), 1965, p. 152.
3. М. Н. Васильева, Э. М. Рейхрудель, Радиотехника и электроника, ЖТФ, 32, 725 (1962).
4. W. Knaeg, M. Lutz, Appl. Phys. Letters, 2, 109 (1963).
5. Т. И. Иванова, Г. Е. Пустовалов, Э. М. Рейхрудель, ЖТФ, 36, № 5, 907 (1966).
6. В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, М., 1954.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
13 июня 1966 г.