

СОДЕРЖАНИЕ

Леонов Н. Н. Некоторые вопросы динамики одноканальных экстремальных систем автоколебательного типа	897
Федоткин М. А. О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке при показательном законе обслуживания машин	912
Стронгин Р. Г. О сходимости поиска экстремума функций по принципу максимума информации при наличии помех	926
Смирнова В. Н., Тай М. Л. Установившийся процесс в простейшей модели экстремальной системы при наличии помех	933
Брусин В. А., Тай М. Л. Абсолютная стохастическая устойчивость	940
Киняпин С. Д. О состоянии равновесия линейного четырехполюсника, замкнутого через два реле	948
Штаерман Э. Я. Об устойчивости в большом стационарных режимов ГЭС с уравнительным резервуаром при постоянном врачающем моменте турбины	961
Аронович М. Г., Соколова Н. И. О влиянии инерции воды в турбинном трубопроводе на устойчивость работы ГЭС с уравнительными резервуарами	973
Климов В. Г. Вынужденные колебания системы с симметричной полигональной петлей гистерезиса	979
Молchanov A. A. Ob асимптотических методах теории колебаний в некоторых задачах нелинейной радиотехники	987
Горюнов В. И. К теории синхронизации квазигармонического осциллятора	999
Горюнов В. И., Серебрякова Е. Н., Королев В. И. К теории регулируемого электродинамического стабилизатора тока	1007
Эйнгорин М. Я. К вопросу о построении многомерного запоминающего устройства или дешифратора с пониженным уровнем помех	1015
Брейдо М. Д. О структуре графа линейной автономной сети	1022
Камышев И. А., Рыбаков А. А. О переключении транзисторной схемы, содержащей ферритовые сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса	1029
Альбер Я. И. Неявная разностная схема для минимизации функционалов и решения нелинейных систем	1035
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Алексеев А. С. О роли метода неопределенных множителей Лагранжа в теории математического программирования	1042

УДК 62—506

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ОДНОКАНАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА

Н. Н. Леонов

В работе рассматриваются экстремальные системы с оптимизаторами автоколебательного типа и с объектами, обладающими инерционностью произвольного порядка. Изучается возможность улучшения качества работы этих систем за счет усложнения сигнала, поступающего в оптимизатор.

1. В настоящей работе рассматриваются экстремальные системы автоколебательного типа с устойчивым объектом, образованным нелинейным безынерционным звеном и одним или двумя линейными инерционными звеньями произвольного порядка. Экстремальные системы автоколебательного типа изучались в работах многих авторов, например, [1—9]. Одним из первых был рассмотрен оптимизатор автоколебательного типа (назовем его оптимизатором А), осуществляющий управление с использованием информации лишь о скоростях изменения входа и выхода объекта (обозначим выход объекта через φ и будем в дальнейшем предполагать, что задача оптимизатора — поддерживать максимальное значение величины φ). Если при изменении входа объекта величина $\dot{\varphi} = \varphi'$ была положительной, то направление изменения входа объекта сохранялось. Если же $\dot{\varphi}$ становилось отрицательным, то направление изменения входа объекта изменялось на противоположное. Однако экстремальная система с оптимизатором типа А обладает неудовлетворительным качеством работы. При изучении экстремальной системы автоколебательного типа с объектом, представленным в виде последовательно соединенных нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена первого порядка, было установлено наличие в фазовом пространстве этой системы области той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненной траекториями режимов скольжения [3]. В [4] было установлено, что при наличии определенного вида помех в области режимов скольжения появляется область неустойчивости поиска, такая, что для любого начального состояния из этой области $\varphi(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. В [7—9] рассматривались экстремальные системы автоколебательного типа с объектами, образованными нелинейным безынерционным звеном и линейными инерционными звеньями второго порядка. В этих работах установлено, что в фазовом пространстве экстремальной системы с таким объектом, управляемой оптимизатором типа А, также существует область той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненная траекториями режимов скольжения. Наличие такой области приводит не только к существованию области неустойчивости поиска при наличии в системе неравномерностей и постоянных составляющих помех, но и к тому, что слежение за экстремальным значением выхода объекта происходит в весьма сложном режиме с большой ошибкой. Это явление характерно для всех экстремальных систем, управляемых оптимизатором типа А, с объектами, инерционность которых не ниже второго порядка.

Для улучшения качества работы экстремальных систем автоколебательного типа предлагались различные варианты оптимизаторов [2, 4, 5]. В работе [7] также предложен один тип оптимизатора, использующего для управления информацию лишь о скорости изменения выхода объекта (назовем его оптимизатором типа Б). Если при этом величина $\dot{\varphi}$ положительная, то направление изменения входа объекта сохраняется. Если $\dot{\varphi}$ становится отрицательной, то вход объекта перестает изменяться до тех пор, пока $\dot{\varphi}$ вновь не станет положительной. При этом изменение входа объекта происходит в направлении, противоположном тому, которое имело место до его остановки. В фазовом пространстве экстремальной системы с оптимизатором типа Б не существует областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями режимов скольжения. Это позволяет резко уменьшить ошибку слежения за экстремальным значением выхода объекта и устраниТЬ влияние определенных видов помех на устойчивость поиска, независимо от порядка инерционности объекта. Если характеристическое уравнение объекта не имеет комплексных корней, то экстремальная система, управляемая оптимизатором типа Б, имеет удовлетворительное качество работы. Если же характеристическое уравнение объекта имеет комплексные корни, то скорость поиска понижается и может оказаться недостаточной для обеспечения требуемого качества работы системы.

Один из путей создания экстремальных систем с высоким качеством работы—использование информации не только о скорости изменения выхода объекта $\dot{\varphi}$, но и о производных от выхода объекта более высоких порядков, а также информации о динамических характеристиках объекта. Правда, необходимость измерения производных высокого порядка от выхода объекта встречает большие и, вообще говоря, непреодолимые трудности на пути построения оптимизаторов такого типа (назовем их оптимизаторами типа В.). Однако изучение путей построения таких оптимизаторов может оказаться полезным, так как может подсказать пути построения оптимизаторов других типов поиска (разностных, шаговых и т. д.) с высоким качеством работы, в то время, как изучение динамики экстремальных систем автоколебательного типа, вообще говоря, менее трудоемкое, нежели изучение динамики экстремальных систем других типов. Поэтому ниже будут рассмотрены экстремальные системы автоколебательного типа, управляемые оптимизаторами типа В., с объектами, содержащими нелинейное безынерционное звено и линейные инерционности произвольного порядка.

2. Рассмотрим сначала систему с устойчивым объектом, представимым в виде последовательно соединенных нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена порядка n , описываемую уравнениями

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)} = -u^2, \quad \dot{u}(t) = \eta(t - \theta), \quad \eta = \Phi[\dot{u}, \sigma], \quad \sigma = \sum_{j=1}^m a_j \varphi^{(j)}, \quad (1)$$

$$\Phi[\dot{u}, \sigma] = \begin{cases} 1, & \text{если } \dot{u} > 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } \dot{u} < 0 \text{ и } \sigma \leq -1 \\ -1, & \text{если } \dot{u} < 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } \dot{u} > 0 \text{ и } \sigma \leq -1 \end{cases}$$

где $\varphi^{(0)} = \varphi$, а $\varphi^{(i)}$ — i -ая производная от φ по времени t . Изучение будем проводить при исчезающем малом θ [3]. Ниже рассматривается тот случай, когда характеристическое уравнение объекта не имеет кратных корней, а $a_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Система (1) имеет $(n+1)$ -мерное фазовое пространство $\Phi^{n+1}(u, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, где $\varphi_i = \varphi^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), образованное двумя $(n+1)$ -мерными пространствами Φ_{+1} и Φ_{-1} , такими, что в них η принимает значения +1 и -1 соответственно. Это фазовое пространство является многомерным аналогом двулистного плоского пространства [3].

В Φ_η движение фазовой точки описывается уравнениями

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)} = -u^2, \quad \dot{u} = \eta. \quad (2)$$

1) Пусть $m < n$. Величина $\sigma = -1$ на некоторой гиперповерхности Γ , уравнение которой имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^m \sigma_j \varphi_j = -1. \quad (3)$$

Уравнение Γ имеет один и тот же вид как в Φ_{+1} , так и в Φ_{-1} . Поэтому Φ^{n+1} делится Γ на две части O_1 и O_2 , такие, что в O_1 $\sigma < -1$, а в O_2 $\sigma > -1$. В O_2 скорость изменения входа объекта постоянна по величине и меняет знак лишь при достижении фазовой точкой гиперповерхности Γ . Для любого начального состояния в O_2 вход объекта может изменяться как в сторону значения, соответствующего экстремуму выхода, так и в противоположную ему сторону. Поэтому область O_2 можно назвать областью ненаправленного поиска.

Для того, чтобы в O_2 отсутствовала возможность неустойчивого поиска, необходимо выполнение условия $a_1 > 0$. Допустим $a_1 < 0$, и покажем, что в этом случае в O_2 существует область Ω неустойчивого поиска. Из (2) следует, что

$$\varphi = \tilde{\varphi}(u) + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (4)$$

где $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а $\tilde{\varphi}(u)$ — частное решение уравнения $a_2 \frac{d^2 \varphi}{du^2} + a_1 \eta \frac{d\varphi}{du} + a_0 \varphi = -u^2$, имеющее следующий вид: $\varphi = Au^2 + Bu + C$, где $A = -a_0^{-1}$, $B = 2a_0^{-2}a_1\eta$, $C = 2a_0^{-2}(a_2 - a_0^{-1}a_1^{-2})$. Обозначим через I_η

фазовую траекторию, описываемую равенствами $\varphi = \tilde{\varphi}(u)$, $\varphi_1 = (2Au + B)\eta$, $\varphi_2 = 2A$, $\varphi_k = 0$ ($k = 3, 4, \dots, n-1$). Траектория I_η пересекается с Γ в точке, для которой, согласно (3), $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 = -1$, т. е., $2Aa_1\eta u = -1 - 2Aa_2 - a_1B\eta$. Та часть этой траектории, для которой $2Aa_1\eta u > -1 - 2Aa_2 - a_1B\eta$, принадлежит O_2 . Если $a_1 < 0$, то O_2 принадлежит та часть I_η , для которой $\eta u > -(1 + 2Aa_2 + a_1B\eta)/0,5A^{-1}a_1^{-1}$.

Так как $\dot{u} = \eta$, то фазовая точка, начав движение по I_η в O_2 , движется по I_η , не достигая никогда Γ и не покидая O_2 ; при этом $\varphi \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Это говорит о том, что та половина I_η , которая принадлежит O_2 , принадлежит и Ω . Если рассмотреть некоторую δ -окрестность траектории I_η : $|\varphi_k| < \delta$ ($k = 3, 4, \dots, n-1$), $|\varphi_2 - 2A| < \delta$, $|\varphi_1 - 2Au\eta - B\eta| < \delta$, $|\varphi - \tilde{\varphi}| < \delta$, то нетрудно обнаружить, что та часть этой окрестности, для которой $\eta u > [1 + \delta \sum_{k=1}^m |\alpha_k| - 2A |\alpha_2| - a_1 |B|] 0,5A^{-1}a_1^{-1}$, принадлежит O_2 . Из (4) следует, что для траектории I_η константы $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Из того же равенства получаем, что если $|C_i| < \delta N^{-1}$ при $t = 0$, где $N = \sup_{0 < k < n-1} (\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^k)$, то фазовые траектории пространства

Φ_η с константами C_i , удовлетворяющими указанным условиям, при надлежат при $t > 0$ упомянутой выше δ -окрестности траектории l_η , т. е. принадлежат, как и l_η , области неустойчивого поиска: Таким образом, если $\alpha_1 < 0$, то в O_2 существует $(n+1)$ -мерная область Ω неустойчивого поиска.

В том случае, когда $\alpha_1 > 0$, области O_2 принадлежит та часть l_η , для которой $\eta u < -(1+2A\alpha_2 + \alpha_1 B\eta) 0,5A^{-1}\alpha_1^{-1}$. Очевидно, фазовая точка, начав движение по l_η в O_2 , через конечный промежуток времени, в силу того, что $\dot{u} = \eta$, достигает гиперповерхности Γ и выходит затем из O_2 . Из (4) следует, что $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) для l_η и что для любой фазовой траектории пространства Φ_η , у которой $|C_i| < \delta$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при $t = 0$, при $t > 0$ имеют место неравенства: $|\varphi_k| < \varepsilon$ ($k = 3, 4, \dots, n-1$), $|\varphi_2 - 2A| < \varepsilon$, $|\varphi_1 - 2A\eta u - B\eta| < \varepsilon$, $|\varphi - \varphi_1| < \varepsilon$, где $\varepsilon = N\delta$, а $N = \sup_{0 < k < n-1} (\sum_{i=1}^n |\lambda_i^k|)$, т. е. все эти траектории принадлежат при $t > 0$, ε -окрестности траектории l_η . Нетрудно убедиться в том, что O_2 принадлежат точки лишь той части рассматриваемой ε -окрестности траектории l_η , для которых $\eta u < [1 + \varepsilon \sum_{k=1}^m |\alpha_k| - 2A|\alpha_2| + \alpha_1|B|] 0,5\alpha_1^{-1}|A^{-1}|$.

Поэтому фазовая точка при движении по этим траекториям из точек области O_2 достигает гиперповерхности Γ через соответствующий конечный промежуток времени. Так как δ — величина произвольная, то это справедливо для точек области O_2 , принадлежащих любой фазовой траектории из этой области. Поэтому при $\alpha_1 > 0$ в O_2 область неустойчивого поиска отсутствует.

Так как в O_1 $\sigma < -1$, то O_1 является областью режимов скольжения, и движение фазовой точки в этой области описывается следующей системой [3]:

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)} = -u^2, \quad \dot{u} = 0. \quad (5)$$

Решение этой системы имеет следующий вид: $u = u_0$, $\varphi = -u_0^2 + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$.

Отсюда с очевидностью следует, что в O_1 система (1) не имеет области неустойчивого поиска.

Уравнения движения (1) рассматриваемой системы записаны в предположении отсутствия помех и неравномерностей в этой системе. Если учсть постоянные составляющие помех и неравномерности (например, такие, как различие величин скоростей изменения входа объекта в сторону увеличения и в сторону уменьшения), то уравнения движения системы могут иметь следующий вид:

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)} = -u^2, \quad \dot{u}(t) = \eta(t - \theta),$$

$$\eta = \begin{cases} 1 + 2\nu, & \text{если } \dot{u} > 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } \dot{u} < 0 \text{ и } \sigma \leq -1 \\ -1, & \text{если } \dot{u} < 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } \dot{u} > 0 \text{ и } \sigma \leq -1 \end{cases}, \quad (6)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi^{(i)}.$$

Параметр ν можно без ограничения общности считать положительным. Фазовое пространство этой системы во многом совпадает с фазовым

пространством системы (1), по крайней мере, качественно. Основная разница заключается в том, что движение фазовой точки в области O_1 для системы (6) при $\theta = 0$ описывается уравнениями

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)} = -u^2, \quad \dot{u} = v. \quad (7)$$

Покажем, что в области O_1 системы (6) при $\alpha_1 > 0$ существует область Ω неустойчивого поиска. Из (7) получается, что $\varphi = \psi(u) + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$, где $\psi(u)$ — частное решение уравнения $a_2 v^2 \frac{d^2 \varphi}{du^2} + a_1 v \frac{d\varphi}{du} + a_0 \varphi = -u^2$, имеющее следующий вид: $\psi = A u^2 + B_1 u + E$, где $A = -a_0^{-1}$, $B_1 = 2a_0^{-2} a_1 v$, $E = 2a_0^{-2} (a_2 v^2 - a_0^{-1} a_1^{-2})$. Обозначим через l_v фазовую траекторию, для которой $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Траектория l_v пересекается с гиперповерхностью Γ в точке, для которой $u = -(1 + 2Aa_2 v^2 + \alpha_1 B_1 v) / 0,5 A^{-1} \alpha_1^{-1} v^{-1}$. Та часть l_v , для которой $u > -(1 + 2Aa_2 v^2 + \alpha_1 B_1 v) / 0,5 A^{-1} \alpha_1^{-1} v^{-1}$, принадлежит O_1 . Так как $\dot{u} = v > 0$, то фазовая точка, начав движение в O_1 по l_v , движется по l_v , не достигая Γ и не покидая O_1 ; при этом $\varphi(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Это говорит о том, что та часть l_v , которая принадлежит O_1 , принадлежит Ω . Далее, используя (3), (7), нетрудно показать, аналогично тому, как это было сделано выше, что Ω является $(n+1)$ -мерной областью.

2) При $m = n$ величина $\sigma = -1$ на гиперповерхности Γ :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i a_n - \alpha_n a_i) \varphi_i - \alpha_n a_0 \varphi - \alpha_n u^2 + a_n = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) величины η не содержит. Поэтому уравнение Γ имеет и в этом случае один и тот же вид как в Φ_{+1} , так и в Φ_{-1} . Пространство Φ^{n+1} опять делится Γ на две части: O_1 — область режимов скольжения и O_2 — область ненаправленного поиска. Как и в предыдущем случае, O_2 содержит область Ω неустойчивого поиска, если $\alpha_1 < 0$. Поэтому для того, чтобы в O_2 отсутствовала возможность неустойчивого поиска, необходимо выполнение условия $\alpha_1 > 0$. Система (1) в O_1 и в этом случае области неустойчивого поиска не имеет. Однако если обратиться к системе (6), то эта система имеет в O_1 $(n+1)$ -мерную область неустойчивого поиска. Доказываются эти утверждения полностью аналогично тому, как это было сделано в пункте 1) (при $m < n$). Разница выражается лишь в записи некоторых аналитических выражений.

3) Очевидно, что наличие областей неустойчивого поиска нельзя считать положительной чертой системы. Кроме того, существование в фазовом пространстве рассматриваемой системы области O_1 режимов скольжения при $m \leq n$ служит причиной еще одного явления, отрицательно сказывающегося на качестве работы этой системы. Если фазовая точка движется в O_2 , то после того, как она выйдет из O_2 и попадет в O_1 , она будет перемещаться вдоль траектории режима скольжения, независимо от того, по траектории пространства Φ_{+1} или по траектории пространства Φ_{-1} она двигалась в O_2 . Если же фазовая точка выходит из O_1 в O_2 , то при $\theta = 0$ в O_2 она может двигаться либо по траектории пространства Φ_{+1} , либо по траектории пространства Φ_{-1} , попадая с какой-то вероятностью на траекторию одного из этих пространств. По какой траектории движется фазовая точка после выхода из O_1 (т. е. по траектории пространства Φ_{+1} или Φ_{-1}), не зависит при этом от того, по какой траектории фазовая точка двигалась до попадания в O_1 .

Поэтому фазовая точка может проходить через O_2 несколько раз подряд по траекториям одного и того же пространства Φ_η . А это приводит к уменьшению скорости поиска и к увеличению ошибки слежения за экстремальным значением выхода объекта, что было обнаружено при $n = 2$ в [7].

4) Рассмотрим вновь систему (1). Если $m = n + 1$, то в выражение для σ входит $\varphi^{(n+1)}$, после замены $\varphi^{(n)}$ и $\varphi^{(n+1)}$ через φ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) и в выражение для σ будет содержать величину η . Поэтому $\sigma = -1$ на гиперповерхности Γ_{+1} в Φ_{+1} и на гиперповерхности Γ_{-1} в Φ_{-1} . Уравнение Γ_η имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\alpha_{n+1}\alpha_n\eta u - (\alpha_{n+1}\alpha_{n-1} - \alpha_n\alpha_n)(u^2 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\varphi_i) - \\ - \alpha_n \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i\alpha_n - \alpha_{n+1}\alpha_{i-1})\varphi_i = a_n^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Гиперповерхности Γ_{+1} и Γ_{-1} разбивают пространство Φ^{n+1} на три части: O_1 , где $\sigma < -1$ как для $\eta = +1$, так и для $\eta = -1$; O_2 , где $\sigma > -1$ как для $\eta = +1$, так и для $\eta = -1$; O_3 , которая, в свою очередь, может быть поделена на O_3^1 и O_3^2 так, что в O_3^1 при $\eta = +1$ имеет место неравенство $\sigma < -1$, а при $\eta = -1$ неравенство $\sigma > -1$, а в O_3^2 при $\eta = +1$ имеет место неравенство $\sigma > -1$, а при $\eta = -1$ неравенство $\sigma < -1$. O_1 есть область режимов скольжения, O_2 — область ненаправленного поиска, а O_3 можно назвать областью направленного поиска, так как в O_3^1 движение фазовой точки происходит по траекториям пространства Φ_{-1} , а в O_3^2 — по траекториям пространства Φ_{+1} .

Рассмотрим движение фазовой точки в O_3 . Введем следующие обозначения: $P = a_0(\alpha_{n+1}\alpha_{n-1} - \alpha_n\alpha_n)$, $Q = -a_n^2 - Pa_0^{-1}(u^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\varphi_i) -$
 $- \alpha_n \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i\alpha_n - \alpha_{n+1}\alpha_{i-1})\varphi_i$. В этих обозначениях уравнение для Γ_η примет следующий вид: $P\varphi = 2\alpha_{n+1}\alpha_n\eta u + Q$. Выражение для Γ_{+1} отличается от выражения для Γ_{-1} лишь величиной, содержащей η . Если обозначить через $\varphi_+ = QP^{-1} + 2a_n\alpha_{n+1}P^{-1}u$, а через $\varphi_- = QP^{-1} - 2a_n\alpha_{n+1}P^{-1}u$, то выражения для Γ_{+1} и Γ_{-1} соответственно равны $\varphi = \varphi_+$ и $\varphi = \varphi_-$.

Пусть $Q > 0$. Тогда $\sigma > -1$, если $\varphi > QP^{-1} + 2a_n\alpha_{n+1}P^{-1}\eta u$. Очевидно, $\varphi_+ > \varphi_-$, если $u > 0$ и $\alpha_{n+1} > 0$, если $u < 0$ и $\alpha_{n+1} < 0$; $\varphi_+ < \varphi_-$, если $u < 0$ и $\alpha_{n+1} > 0$, если $u > 0$ и $\alpha_{n+1} < 0$. Поэтому O_3^1 при $\alpha_{n+1} > 0$ определяется неравенствами $\varphi_- < \varphi < \varphi_+$, $u > 0$, а O_3^2 — неравенствами $\varphi_+ < \varphi < \varphi_-$, $u < 0$. Так как в O_3^1 движение фазовой точки происходит по траекториям пространства Φ_{-1} , а в O_3^2 — по траекториям пространства Φ_{+1} , то в O_3^1 и в O_3^2 при $\alpha_{n+1} > 0$ вход объекта изменяется в сторону значения, соответствующего экстремуму выхода объекта. При $\alpha_{n+1} < 0$ область O_3^1 определяется неравенствами $\varphi_- < \varphi < \varphi_+$, $u < 0$, а O_3^2 — неравенствами $\varphi_+ < \varphi < \varphi_-$, $u > 0$; при этом вход объекта в этих областях изменяется в сторону, противоположную значению, соответствующему экстремуму выхода.

При $Q < 0$ имеет место аналогичная картина. Если $\alpha_{n+1} > 0$, то в O_3 изменение входа объекта происходит в сторону значения, соответствующего экстремуму выхода, а если $\alpha_{n+1} < 0$, то в противоположную сторону. Следовательно, величина α_{n+1} должна быть положительной.

О движении фазовой точки в O_2 можно сказать то же самое, что и в пункте 1). Именно, при $\alpha_1 < 0$ в O_2 существует $(n+1)$ -мерная область Ω неустойчивого поиска. Если же $\alpha_1 > 0$, то фазовая точка из любого начального состояния в O_2 через соответствующее конечное время достигает границы O_2 и покидает ее. Доказываются эти утверждения подобно аналогичным утверждениям пункта 1).

При $\alpha_1 > 0$ в области O_1 системы (1) область неустойчивого поиска отсутствует. Однако если перейдем к системе (6), то в области O_1 этой системы может существовать $(n+1)$ -мерная область Ω неустойчивого поиска. В области O_1 системы (6) фазовая точка движется по траекториям, описываемым уравнениями (7), из которых получаем, что

$\varphi = \psi(u) + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$. Обозначим траекторию системы (7), для которой $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), через l_v . Величину v , как условились выше, считаем положительной. Нетрудно убедиться в том, что O_1 определяется следующими соотношениями:

$$\varphi < \begin{cases} \varphi_-, & \text{если } u > 0 \\ \varphi_+, & \text{если } u < 0 \end{cases} \quad (\text{при } P > 0) \quad \text{и} \quad \varphi > \begin{cases} \varphi_-, & \text{если } u > 0 \\ \varphi_+, & \text{если } u < 0 \end{cases} \quad (\text{при } P < 0).$$

Отсюда следует, что правой границей области O_1 (вдоль оси u) является часть гиперповерхности Γ_{-1} . Поэтому для выяснения возможности неустойчивого поиска в O_1 исследуем движение фазовой точки в O_1 относительно Γ_{-1} . Траектория l_v пересекается с Γ_{-1} в точке, для которой $2uR = -\alpha_n(1 + 2\alpha_2 A v^2 + \alpha_1 B_1 v)$, где $R = \alpha_{n+1}(1 + v) + A\alpha_1\alpha_n v$. Области O_1 принадлежит та часть l_v , для которой $2uR < -\alpha_n(1 + 2\alpha_2 A v^2 + \alpha_1 B_1 v)$. Если $R > 0$, то нетрудно показать, что области Ω неустойчивого поиска в O_1 не существует и что фазовая точка из любого начального состояния в O_1 выходит из O_1 через соответствующий конечный промежуток времени. Если же $R < 0$, то области O_1 принадлежит половина траектории l_v , при движении по которой фазовая точка все время остается в O_1 , причем $\varphi(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. На основании этого можно показать так же, как и в пункте 1), существование при $R < 0$ в O_1 $(n+1)$ -мерной области Ω неустойчивого поиска.

Таким образом, если $m = n + 1$, $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_{n+1} > 0$, то при $\alpha_{n+1}(1 + v) + A\alpha_1\alpha_n v > 0$ в областях O_1 , O_2 и O_3 систем (1) и (6) областей неустойчивого поиска нет. Если же $\alpha_{n+1}(1 + v) + A\alpha_1\alpha_n v < 0$, то в области O_1 системы (6) существует $(n+1)$ -мерная область неустойчивого поиска.

5) Рассмотрим, наконец, тот случай, когда в (1) $m = n + 1$, $\alpha_{n+1} > 0$ и выполняются условия $\alpha_1\alpha_0^{-1} = \alpha_2\alpha_1^{-1} = \dots = \alpha_{n+1}\alpha_n^{-1}$. Из (9) следует, что в этом случае гиперповерхности Γ_η превращаются в гиперплоскости, ортогональные оси u , уравнения которых

$$u = 0,5 \alpha_{n+1}^{-1} \eta. \quad (10)$$

Гиперплоскости Γ_η разбивают Φ^{n+1} на две части O_2 и O_3 . Область O_1 режимов скольжения при этом отсутствует. Областью O_2 является слой $S(-0,5\alpha_n\alpha_{n+1}^{-1} < u < 0,5\alpha_n\alpha_{n+1}^{-1})$, а O_3 — оальная часть пространства Φ^{n+1} . В этом случае система (1) при $\theta = 0$ имеет единственный периодический режим работы, устойчивый в большом. Действительно, фазовая точка в той части O_3 , где $u < -0,5\alpha_n\alpha_{n+1}^{-1}$, движется по траекториям пространства Φ_{+1} , а в той части O_3 , где $u > 0,5\alpha_n\alpha_{n+1}^{-1}$, — по траекториям пространства Φ_{-1} . Поэтому из любого состояния в O_3 фазовая точка через соответствующее конечное время приходит в слой S , из которого затем не выходит.

Изучение движений системы в S сводится к изучению неподвижных точек точечного отображения T гиперплоскости Γ_{-1} в себя. Если $M_0(-0,5a_n\alpha_{n+1}^{-1}, \varphi^0, \varphi_1^0, \dots, \varphi_{n-1}^0)$ — исходная точка гиперплоскости Γ_{-1} , а $M_1(-0,5a_n\alpha_{n+1}^{-1}, \varphi^1, \varphi_1^1, \dots, \varphi_{n-1}^1)$ — отображеная точка ($M_1 = TM_0$), то на основании (4) можно описать отображение T следующей системой:

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= C + \sum_{i=1}^n C_i, \quad \varphi_1^0 = B + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i, \quad \varphi_2^0 = 2A + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 C_i, \\ \varphi_j^0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^j C_i \quad (j = 3, 4, \dots, n-1), \\ \varphi^1 &= A\tau^2 + B\tau + C + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i \tau}, \quad \varphi_1^1 = 2A\tau + B + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i e^{\lambda_i \tau}, \\ \varphi_2^1 &= 2A + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 C_i e^{\lambda_i \tau}, \quad \varphi_j^1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j C_i e^{\lambda_i \tau} \quad (j = 3, 4, \dots, n-1),\end{aligned}\tag{11}$$

где $\tau = a_n \alpha_n^{-1}$. Из (11) следует, что отображение T имеет единственную простую неподвижную точку $M^*(-0,5a_n\alpha_n^{-1}, \varphi^*, \varphi_1^*, \dots, \varphi_{n-1}^*)$, такую, что $M^* = TM^*$. Нетрудно показать, что в переменных $\xi_i = \varphi_i - \varphi_i^*$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) отображение T является линейным и что его характеристические корни равны $\mu_i = e^{\lambda_i \tau}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) [10]. Так как $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то $|\mu_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Это говорит о том, что отображение T сжимающее, поэтому M^* является единственной неподвижной точкой отображения T , устойчивой в большом. Система (1) имеет соответствующий периодический режим работы, устойчивый в большом.

Если рассмотреть систему (6) при $\theta = 0$, $m = n + 1$, $a_{n+1} > 0$ и $a_1 a_0^{-1} = a_2 a_1^{-1} = \dots = a_{n+1} a_n^{-1}$, то эта система также имеет единственный периодический режим работы, устойчивый в большом.

3. Рассмотрим теперь экстремальную систему с устойчивым объектом, представимым в виде последовательно соединенных линейного инерционного звена порядка n и нелинейного безынерционного звена, описываемую уравнениями

$$\varphi = -u^2, \quad \sum_{l=1}^n b_l u^{(l)} = z, \quad \dot{z}(t) = \eta(t - \theta), \quad \eta = \Phi[z, \sigma],$$

$$\Phi[z, \sigma] = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } z < 0 \text{ и } \sigma \leq -1, \\ -1, & \text{если } z < 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } z > 0 \text{ и } \sigma \leq -1 \end{cases}, \tag{12}$$

$$\sigma = \sum_{j=0}^m \beta_j \varphi^{(j+1)},$$

где $u^{(0)} = u$. Величины b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) будем считать положительными. Изучение системы (12) будем проводить при исчезающем малом θ . Рассматривается случай, когда характеристическое уравнение объекта не имеет кратных корней.

Система (12) имеет $(n+1)$ -мерное фазовое пространство $\Phi^{n+1}(u, v, v_1, \dots, v_{n-1})$, где $v = u$, $v_i = v^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), образованное двумя $(n+1)$ -мерными пространствами Φ_{+1} и Φ_{-1} , такими, что в них η равно $+1$ и -1 соответственно. В пространстве Φ_η движение фазовой точки описывается уравнениями

$$\dot{u} = v, \quad \sum_{l=0}^n b_l v^{(l)} = \eta. \quad (13)$$

Из (12) — (13) следует, что

$$\varphi^{(2l+1)} = -2uv^{(2l)} - 2 \sum_{j=0}^{l-1} C_{2l}^j \frac{1+2j}{1+j} v^{(j)} v^{(2l-j-1)}$$

и

$$\varphi^{(2l+2)} = -2uv^{(2l+1)} - 2C_{2l+1}^l [v^{(l)}]^2 - 4 \sum_{j=0}^{l-1} C_{2l+1}^j \frac{1+i}{1+j} v^{(j)} v^{(2l-j)},$$

где C_i^q — биномиальные коэффициенты. Отсюда получаем, что $\sigma = -2u \sum_{j=0}^m \beta_j v^{(j)} - 2V$, где V — квадратичная форма относительно $v^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$).

1) Пусть $m < n$. Тогда $\sigma = -1$ на некоторой гиперповерхности Γ , в уравнении которой величина η не содержится. Поэтому Γ имеет один и тот же вид как в Φ_+ , так и в Φ_- . Гиперповерхность Γ разбивает фазовое пространство на две части: O_1 — область режимов скольжения и O_2 — область ненаправленного поиска.

Рассмотрим движение фазовой точки в области O_2 . Из (13) получаем, что в Φ_η

$$v = \eta b_0^{-1} + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (14)$$

где $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В Φ_η существует единственная прямолинейная траектория l_η : $v = \eta b_0^{-1}$, $v^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). На l_η — функция $V = \beta_1 v^2$. Так как O_2 определяется условием $u \sum_{j=0}^m \beta_j v_j < 0,5 - V$, то области O_2 принадлежит та часть l_η , для которой $\beta_0 b_0^{-1} \eta u < 0,5 - \beta_1 b_0^{-2}$. Если $\beta_0 < 0$, то O_2 принадлежит та часть l_η , для которой $\eta u > (0,5 - \beta_1 b_0^{-2}) \beta_0^{-1} b_0$. Так как на l_η $\dot{u} = \eta$, то фазовая точка, начав движение по l_η в O_2 , продолжает двигаться по l_η неограниченно долго. При этом $\varphi \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что при $\beta_0 < 0$ в O_2 существует $(n+1)$ -мерная область неустойчивого поиска. Можно также показать, что при $\beta_0 > 0$ фазовая точка из любого начального состояния в O_2 выходит из O_2 в соответствующее конечное время. Доказательство проводится аналогично тому, как это делалось выше.

В O_1 движение фазовой точки описывается уравнениями $\dot{u} = v$, $\sum_{j=0}^n b_j v^{(j)} = 0$. Из этих уравнений следует, что $v = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$. Исходя из этого, нетрудно показать, что в области O_1 системы (12) область неустойчивого поиска отсутствует.

Если учесть неравномерности в системе и постоянные составляющие, то уравнения движения могут иметь следующий вид:

$$\varphi = -u^2, \quad \sum_{i=0}^n b_i u^{(i)} = z, \quad \dot{z}(t) = \eta(t - \theta),$$

$$\eta = \begin{cases} 1+2v, & \text{если } z > 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } z < 0 \text{ и } \sigma \leq -1 \\ -1, & \text{если } z < 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } z > 0 \text{ и } \sigma \leq -1 \end{cases}, \quad (15)$$

$$\sigma = \sum_{j=0}^m \beta_j \varphi^{(j+1)}.$$

Движение фазовой точки в области O_1 этой системы при $\theta = 0$ описывается уравнениями ($v > 0$)

$$\dot{u} = v, \quad \sum_{i=0}^n b_i v^{(i)} = v. \quad (16)$$

Из (16) следует, что $v = vb_0^{-1} + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$. На траектории I_v (для которой $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)) функция $V = \beta_1 v^2 b_0^{-2}$. Область O_1 определяется неравенством $u \sum_{i=0}^m \beta_i v_i > 0,5 - V$. Поэтому области O_1 принадлежит та часть I_v , для которой $\beta_0 b_0^{-1} u > 0,5 - V$. Очевидно, при $\beta_0 > 0$ области O_1 принадлежит положительная полутраектория режима скольжения, при движении по которой фазовой точки поиск неустойчив. Далее нетрудно показать, что эта полутраектория принадлежит $(n+1)$ -мерной области Ω неустойчивого поиска, содержащейся в O_1 .

Следует также отметить, что и в рассматриваемых в этом разделе системах при $m < n$, кроме возможности неустойчивого поиска, существует еще одно отрицательное явление, описанное в пункте 3) раздела I, приводящее к ухудшению качества работы системы. Вызывается оно наличием в фазовом пространстве областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями режимов скольжения. Фазовая точка при движении по траекториям системы выходит из O_1 в O_2 через одну и ту же гиперповерхность как в Φ_{+1} , так и в Φ_{-1} . При этом при $\theta = 0$ ничем не обусловлено то, по какой траектории пойдет фазовая точка (т. е. по траектории пространства Φ_{+1} или по траектории пространства Φ_{-1}) после того, как она выйдет из O_1 . Это приводит к уменьшению скорости поиска и к увеличению ошибки слежения за экстремумом выхода объекта.

2) Рассмотрим теперь систему (12) при $m = n$, $\beta_0 b_0^{-1} = \beta_1 b_1^{-1} = \dots = \beta_n b_n^{-1} = g$. В этом случае $\sigma = -2gu - 2V$. Так как в выражение для σ входит величина η , то $\sigma = -1$ на гиперповерхности Γ_{+1} в Φ_{+1} и на гиперповерхности Γ_{-1} в Φ_{-1} . Гиперповерхности Γ_{+1} и Γ_{-1} разбивают фазовое пространство на три части: O_1 (режимов скольжения), O_2 (ненаправленного поиска) и O_3 (направленного поиска). Область O_1 определяется неравенствами $0,5 - V < gu < -0,5 + V$, область O_2 — неравенствами $-0,5 + V < gu < 0,5 - V$, а O_3 распадается на O_3^1 ($gu > 0,5 - V$, $gu < -0,5 + V$) и O_3^2 ($gu < 0,5 - V$, $gu < -0,5 + V$). Очевидно, для того, чтобы при движении фазовой точки в O_3 вход объекта изменялся в сторону значения, соответствующего экстремуму выхода, а не в противоположную сторону, необходимо выполнение условия $g > 0$. Можно показать, что в O_1 и O_2 при $g > 0$ области неустойчивого поиска отсутствуют. Соответствующее доказательство проводится аналогично приведенным выше.

В существовании областей O_1 , O_2 и O_3 в данном случае можно убедиться следующим образом. Если рассмотрим прямую I_C : $v = C$, $v_t = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), то на этой линии $V = \beta_1 C^2$. Поэтому при $C^2 >$

$> 0,5 \beta_1^{-1}$ имеет место неравенство $0,5 - \beta_1 C^2 < -0,5 + \beta_1 C^2$, и та часть l_C , для которой $0,5 - \beta_1 C^2 < u < -0,5 + \beta_1 C^2$, принадлежит O_1 . Если же $C^2 < 0,5 \beta_1^{-1}$, то имеет место неравенство $0,5 - \beta_1 C^2 > -0,5 + \beta_1 C^2$, и та часть l_C , для которой $-0,5 + \beta_1 C^2 < u < 0,5 - \beta_1 C^2$, принадлежит O_2 . Та часть l_C , которая не принадлежит ни O_1 , ни O_2 , естественно, принадлежит O_3 . На основании изложенного уже нетрудно показать и существование $(n+1)$ -мерных областей O_1 , O_2 и O_3 .

Таким образом, при $m = n$ и $\beta_i = g b_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), где $g > 0$, ни в O_1 , ни в O_2 , ни в O_3 областей неустойчивого поиска не имеется. Относительно устойчивости в большом системе в целом здесь ничего сказать не можем.

В рассматриваемом случае в фазовом пространстве экстремальной системы содержится $(n+1)$ -мерная область O_1 режимов скольжения. Однако фазовая точка выходит из O_1 через гиперповерхность Γ_{+1} в Φ_{+1} и через гиперповерхность Γ_{-1} в Φ_{-1} . Поэтому в этом случае недостатки, отмеченные в конце предыдущего пункта, отсутствуют.

4. Рассмотрим, наконец, экстремальную систему с устойчивым объектом, представим в виде последовательно соединенных линейного инерционного звена порядка n , нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена порядка m , описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)} &= \psi, \quad \psi = -u^2, \quad \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)} = z, \quad \dot{z}(t) = \eta(t-\theta), \\ \eta &= \Phi[z, \sigma], \quad \sigma = \sum_{k=0}^p \beta_k \delta^{(k+1)}, \quad \delta = \sum_{l=0}^q \alpha_l \varphi^{(l)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Величины a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) и b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) будем считать положительными, $q \leq n$, $p \leq m$. Будем предполагать, что все корни характеристического уравнения объекта простые. Изучение будем проводить при исчезающем малом θ .

Система (17) имеет $(m+n+1)$ -мерное фазовое пространство $\Phi^{m+n+1}(u, v, v_1, \dots, v_{m-1}, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, образованное двумя $(m+n+1)$ -мерными пространствами Φ_{+1} и Φ_{-1} , такими, что в них величина η равна $+1$ и -1 соответственно. В пространстве Φ_η движение фазовой точки описывается уравнениями

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)} = \psi, \quad \psi = -u^2, \quad \dot{u} = v, \quad \sum_{j=0}^m b_j v^{(j)} = \eta. \quad (18)$$

Из (18) получаем, что в Φ_η имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} v &= \eta b_0^{-1} + \sum_{i=1}^m C_i e^{\lambda_i t}, \quad u = u_0 + \gamma_i b_0^{-1} t + \sum_{i=1}^m C_i \lambda_i^{-1} e^{\lambda_i t}, \\ \varphi &= \tilde{\varphi}(t) - 2 \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{\sum_{i=0}^n a_i \lambda_j^{i+1}} \left(\eta b_0^{-1} t + u_0 - \eta b_0^{-1} \frac{\sum_{i=0}^n i a_i \lambda_j^{i-1}}{\sum_{i=0}^n a_i \lambda_j^i} \right) e^{\lambda_j t} - \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^m \frac{C_i C_j (\lambda_i \lambda_j)^{-1}}{\sum_{k=0}^n a_k (\lambda_i + \lambda_j)^k} \exp [(\lambda_i + \lambda_j) t] + \sum_{i=1}^n C_{m+i} e^{\mu_i t}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t) &= At^2 + Bt + C, \quad A = -b_0^{-2}a_0^{-1}, \quad B = -2a_0^{-1}(\eta b_0^{-1}u_0 + a_1A), \\ C &= -a_0^{-1}(u_0^2 + a_1B + 2a_2A),\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \operatorname{Re} \mu_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

При этом предполагается, что $\sum_{k=0}^n a_k(\lambda_i + \lambda_j)^k \neq 0$. Очевидно, в Φ_η существует единственная траектория, для которой $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m+n$). Обозначим ее через l_η . Движение по l_η описывается следующими равенствами: $\varphi = \tilde{\varphi}(t)$, $u = u_0 + \eta b_0^{-1}t$, $v = \eta b_0^{-1}t$.

Фазовая точка из Φ_η в $\Phi_{-\eta}$ может переходить лишь в той части фазового пространства, где $\sigma < -1$. Из (17) следует, что $\sigma = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \alpha_p \beta_k \varphi^{(k+l+1)}$. Если $p+q < n-1$, то $\sigma = -1$ на некоторой гиперповерхности Γ (одной и той же как в Φ_{+1} , так и в Φ_{-1}), уравнение которой имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \alpha_p \beta_k \varphi^{(k+l+1)} = -1. \quad (19)$$

Если $n-1 \leq p+q < m+n$, то в уравнении гиперповерхности Γ содержатся φ_i ($i=0, 1, \dots, n-1$), u , v_j ($j < m$) и не содержится величина η . Действительно, из (18) можно получить, что $a_n \varphi^{(n+s)} = \sum_{l=0}^s G_{1, l}^s \psi^{(l)} +$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} B_{l, s} \varphi_l \text{ и что } a_n \varphi^{(rn+s)} = \sum_{l=0}^s G_{1, l}^s \psi^{(rn-n+l)} + \sum_{l=0}^{n-1} C_{l, s}^r \varphi_l + \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} G_{l, j}^s \psi^{(rn-l+n+j)},$$

где $0 \leq s < n$, r — натуральное число,

$$B_{ij} = \sum_{k=j-i>0}^j (-1)^{k+1} a_n^{-1} a_{i+k-j} A_{k, 1}; \quad A_{0, 1} = a_n, \quad A_{1, i} = a_{n-i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$A_{i, j} = A_{1, j} A_{i-1, 1} a_n^{-1} - A_{i-1, j+1}, \quad G_{1, i}^s = (-1)^{s-i} a_n^{-1} A_{s-i, 1},$$

$$G_{2, q}^s = \sum_{l=q}^{n-1} (-1)^{l-q} a_n^{-2} A_{l-q, 1} B_{l, s},$$

$$G_{p, q}^s = \sum_{i_{p-1}=q}^{n-1} (-1)^{i_{p-1}-q} a_n^{-p} A_{i_{p-1}-q, 1} \sum_{l_{p-2}=0}^{n-1} B_{l_{p-2}, s} \prod_{j=2}^{p-1} B_{l_j, l_{j-1}} \quad (p \geq 3),$$

$$C_{l, s}^r = a_n^{1-r} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{r-1}=0}^{n-1} B_{i_1, s} B_{i_2, i_{r-1}} \prod_{j=2}^{r-1} B_{i_j, i_{j-1}} \quad (r > 1),$$

$$C_{l, s}^1 = B_{l, s}.$$

Очевидно, можно записать, что $p+q = rn+s$. Обозначив $\gamma_l = \sum_{\substack{k+l=l \\ 0 < k < p \\ 0 < l < q}} \alpha_p \beta_k$, получим на основании приведенных соотношений, что

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_i \varphi_{k+1} + \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \varphi_i + \sum_{i=0}^s G_{1, i} \psi^{(rn-n+i)} + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} G_{2, i} \psi^{(rn-2n+i)} + \sum_{k=0}^{r-3} \sum_{i=0}^{n-1} P_{k, i} \psi^{(kn+i)},$$

где

$$Q_i = \sum_{j=0}^s C_i^{r, s} \gamma_{rn+j-1} a_n^{-1} + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_i^{k, j} \gamma_{kn+j-1} a_n^{-1}, \\ G_{1, i} = \sum_{j=1}^s G_{1, i}^j \gamma_{rn+j-1} a_n^{-1}, \quad G_{2, i} = \sum_{j=0}^s G_{2, i}^j \gamma_{rn+j-1} a_n^{-1} + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} G_{2, i}^j \gamma_{rn-n+j-1} a_n^{-1}, \\ P_{k, i} = \sum_{p=2}^{r-k-1} \sum_{j=0}^{n-1} G_{p, i}^j \gamma_{kn+pn+j-1} a_n^{-1} + \sum_{j=0}^s G_{1, i}^j \gamma_{rn+j-1} a_n^{-1} + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} G_{1, i}^j \gamma_{kn+n+j-1} a_n^{-1}.$$

Так как

$$\psi^{(2i+1)} = -2uv^{(2i)} - 2 \sum_{j=0}^{i-1} C_{2i}^j \frac{1+2i}{1+j} v^{(j)} v^{(2i-j-1)}$$

и

$$\psi^{(2i+2)} = -2uv^{(2i+1)} - 2C_{2i+1}^i [v^{(i)}]^2 - 4 \sum_{j=0}^{i-1} C_{2i+1}^j \frac{1+i}{1+j} v^{(j)} v^{(2i-j)},$$

где C_p^q — биномиальные коэффициенты, то можно убедиться в том, что при $p+q < m+n$ уравнение Γ величины η не содержит.

Гиперповерхность Γ делит все фазовое пространство на две части: O_1 — область режимов скольжения и O_2 — область ненаправленного поиска. Области O_2 принадлежит та часть траектории L_η , для которой $\gamma_0 \varphi_1 + \gamma_1 \varphi_2 > -1$. Так как на L_η $\varphi_1 = \varphi_2 < 0$, то при $\gamma_0 < 0$ в O_2 существует $(m+n+1)$ -мерная область Ω неустойчивого поиска. Если $\gamma_0 > 0$, то ни в O_2 , ни в O_1 система (17) областей неустойчивого поиска не имеет. Однако если рассмотрим вместо (17) систему, учитывающую различные неравномерности и постоянные составляющие помех, то при $\gamma_0 > 0$ в области O_1 фазового пространства этой системы существует область Ω неустойчивого поиска. Доказательства этих утверждений проводятся аналогично доказательствам подобных же утверждений предыдущих разделов.

Следует также отметить, что в рассматриваемых в этом разделе системах при $p+q < m+n$ существует то же самое отрицательное явление, которое описано в пункте 3) раздела I для рассмотренной там системы.

Предположим теперь, что $p=m$, $q=n$, $a_i a_i^{-1} = g$ ($i=0, 1, \dots, n$), $\beta_i b_i^{-1} = h$ ($i=0, 1, \dots, m$). В этом случае $\delta = g\psi$, а $\sigma = -V - 2gh\eta u$,

где V — некоторая квадратичная форма относительно v_i ($i = 0, 1, \dots, m - 1$). Очевидно, $\sigma = -1$ на некоторой гиперповерхности Γ_{+1} в Φ_{+1} и на Γ_{-1} в Φ_{-1} . Гиперповерхности Γ_{+1} и Γ_{-1} разбивают фазовое пространство на три части: O_1 , O_2 , O_3 . Можно показать, что при $gh > 0$ рассматриваемые экстремальные системы не имеют ни в O_1 , ни в O_2 , ни в O_3 областей неустойчивого поиска. Путь доказательства прежний.

Наличие в этом случае $(m + n + 1)$ -мерной области O_1 режимов скольжения в фазовом пространстве рассматриваемых систем не вызывает того отрицательного явления, описанного в пункте 3) раздела I, которое приводит к увеличению ошибки слежения за экстремальным значением выхода объекта.

5. Проведенные исследования показали, что оптимизаторы автоколебательного типа, управляющие объектом синерционностью порядка n , не обеспечивают удовлетворительного качества работы системы, если информация, используемая ими для формирования управляющего сигнала, не содержит, наряду со сведениями о первой производной от выхода объекта, сведений о производной от выхода порядка $n + 1$. Если на оптимизатор поступает с объекта информация о производных порядков не выше n , то у рассмотренных экстремальных систем качество работы неудовлетворительное. Это выражается в существовании возможности неустойчивого поиска в этих системах, а также связано с тем, что процесс слежения за экстремальным значением выхода объекта происходит с большой ошибкой. Если же на оптимизатор поступает с объекта сигнал, являющийся линейной комбинацией производных от выхода объекта порядков до $(n + 1)$ -го включительно, то при определенных условиях на коэффициенты этой линейной комбинации указанные недостатки в рассмотренных экстремальных системах устраняются.

Может показаться, что устранение описанных недостатков может быть достигнуто, если на оптимизатор будет поступать с объекта лишь одна производная $(n + 1)$ -го порядка. Однако это не всегда справедливо. При $n = 1$, когда объект имеет инерционность первого порядка, использование для управления информации лишь о второй производной от выхода объекта позволяет получить удовлетворительное качество работы системы. Если же $n > 1$, то отсутствие в сигнале, поступающем на оптимизатор, первой и второй производных от выхода объекта отрицательно сказывается на качестве работы системы, ибо при отсутствии этих производных в системе всегда существует возможность неустойчивого поиска.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ивахненко, Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования, изд. АН УССР, Киев, 1957.
2. В. В. Казакевич, Тр. I Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению, 2, изд. АН СССР, М., 1961.
3. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 566 (1961).
4. Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 6, 1249 (1963).
5. Ю. И. Борцов, Р. В. Корнилов, В. П. Пуцилло, Автоматика и телемеханика, 24, 183 (1963).
6. Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, 26, 1720 (1965).
7. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 799 (1966).
8. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3, 393 (1967).
9. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3, 405 (1967).
10. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).

**SOME QUESTIONS OF THE AUTOOSCILLATING ONE-CHANNEL
EXTREMAL SYSTEMS DYNAMICS***N. N. Lyeonov*

This paper deals with the extremal systems containing optimizers of the autooscillating type and controlled plants with relaxation links of the arbitrary order. The means to improve the performance of these systems through the complication of the optimizer input signal are studied.

УДК 519.2

О РАБОТЕ АВТОМАТА, РЕГУЛИРУЮЩЕГО УЛИЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ НА ПЕРЕКРЕСТКЕ ПРИ ПОКАЗАТЕЛЬНОМ ЗАКОНЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ МАШИН

M. A. Федоткин

Изучается работа светофора, регулирующего уличное движение на перекрестке в предположениях, что потоки прибывающих машин пуассоновы, что на перекрестке в разрешенном направлении машины обслуживаются по показательному закону и что автомат, управляющий уличным движением на перекрестке, работает в некотором заданном периодическом режиме. Находятся статистические характеристики установившегося режима.

В работе [1] рассматривается автомат, который за время t пропускает $\omega_j(t)$ машин в разрешенном j -ом направлении. В данной работе рассматривается другая модель системы массового обслуживания. Изучается работа автомата, управляющего уличным движением на перекрестке в предположениях, что потоки прибывающих машин пуассоновы, что на перекрестке в разрешенном j -ом направлении машины обслуживаются по показательному закону с параметром $\omega_j(t)$ и что автомат, управляющий уличным движением на перекрестке, работает в некотором заданном периодическом режиме периода τ .

Работа автомата описывается вероятностями $p_j(s, t)$ того, что в момент времени t в j -ом направлении ожидает переезда через перекресток s машин.

В работе находятся уравнения для вероятностей $p_j(s, t)$ и показывается, что в случае достаточной пропускной способности перекрестка и выполнении определенных условий при выборе параметров автомата (с возрастанием времени, вне зависимости от начальных чисел ожидающих машин) вероятности $p_j(s, t)$ стремятся к некоторым периодическим функциям $p_j^*(s, t)$ периода τ . При невыполнении указанных условий все вероятности $p_j(s, t)$ с возрастанием времени стремятся к нулю, а математическое ожидание числа ожидающих переезда через перекресток машин

$$M_j(t) = \sum_{s=0}^{\infty} s p_j(s, t)$$

неограниченно возрастает.

Отыскание периодического движения $p_j^*(s, t)$ и исследование его устойчивости сводится к нахождению и исследованию устойчивости неподвижной точки $p_j^*(s)$ преобразования T , связывающего вероятности $p_j(s, t)$ с вероятностями $p_j(s, t + \tau)$. В работе приводится пример отыскания значений $p_j^*(s)$ для данного ритма работы светофора, параметров перекрестка и плотностей потоков прибывающих к перекрестку машин.

1. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ РАБОТЫ АВТОМАТА. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СВЕДЕНИЕ К ТОЧЕЧНОМУ ОТОБРАЖЕНИЮ

Изучение работы описанного выше автомата можно рассматривать как задачу теории массового обслуживания. В отвлечённой форме, рассматриваемый автомат может быть описан следующим образом: имеется автомат с n состояниями A_1, A_2, \dots, A_n , на который поступает m пуассоновых потоков заявок $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ с плотностями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. В состоянии A_i автомат обслуживает заявки потока Π_j по показательному закону с параметром $\omega_{ij}(t)$. Состояние автомата периодически меняется по заданному закону. Этот закон характеризуется периодом $\tau_{j1}, \tau_{j2}, \dots, \tau_{jp}$ (τ_{jk} — время, в течение которого автомат находится в состоянии A_{jk}) периодически повторяющейся последовательности времен пребывания автомата в различных состояниях.

Пусть на промежутке времени от t до $t + \Delta\tau_i$ автомат находится в состоянии A_i , тогда вероятности $p_j(s, t)$ и $p_j(s, t + \Delta\tau_i)$ связаны соотношениями

$$p_j(0, t + \Delta\tau_i) = p_j(0, t)(1 - \lambda_j \Delta\tau_i) + p_j(1, t) \omega_{ij}(t) \Delta\tau_i + O(\Delta\tau_i)^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p_j(s, t + \Delta\tau_i) &= p_j(s-1, t) \lambda_j \Delta\tau_i + p_j(s, t) [1 - (\lambda_j + \omega_{ij}(t)) \Delta\tau_i] + \\ &\quad + p_j(s+1, t) \omega_{ij}(t) \Delta\tau_i + O(\Delta\tau_i^2) \end{aligned}$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, m).$$

Эти соотношения вытекают из того, что в потоке j спустя время $\Delta\tau_i$ не будет ожидающих машин только в одном из следующих несовместимых случаях: в момент t ожидающих машин не было и за время $\Delta\tau_i$ не прибыло ни одной машины; была одна ожидающая машина, одна машина была обслужена и ни одна машина не прибудет на перекресток; при этом вероятность остальных несовместимых событий есть величина порядка $(\Delta\tau_i)^2$. Аналогично получаются все последующие уравнения. Действительно, вероятность того, что в момент времени $t + \Delta\tau_i$ будет s ожидающих машин, равна вероятности того, что в момент времени t в системе находится $s-1$ машин, умноженная на вероятность того, что за время $\Delta\tau_i$ прибудет одна машина и ни одна машина не будет обслужена; плюс вероятность того, что в момент времени t в системе находится s машин, умноженная на вероятность того, что за время $\Delta\tau_i$ на перекресток не прибудет ни одна машина и ни одна машина не будет обслужена; плюс вероятность того, что в момент времени t в системе находится $s+1$ машин, умноженная на вероятность того, что за время $\Delta\tau_i$ одна машина покинет перекресток и ни одна машина не прибудет на перекресток; плюс вероятности порядка малости $(\Delta\tau_i)^2$. Перенеся $p_j(s, t)$ влево и устремив $\Delta\tau_i$ к нулю, получим уравнения вида

$$\frac{dp_j(0, t)}{dt} = -\lambda_j p_j(0, t) + \omega_{ij}(t) p_j(1, t), \quad (2)$$

$$\frac{dp_j(s, t)}{dt} = \lambda_j p_j(s-1, t) - (\lambda_j + \omega_{ij}(t)) p_j(s, t) + \omega_{ij}(t) p_j(s+1, t)$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, m).$$

Уравнения (2) для вероятностей $p_1(s, t), p_2(s, t), \dots, p_m(s, t)$ распределяются на m независимых систем, причем от состояния автомата в каждой из этих систем зависит только величина коэффициента $\omega_{ij}(t)$. Таким образом, вероятности $p_j(s, t)$, ($s = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, m$) удов-

летворяют бесконечным системам кусочно-линейных дифференциально-разностных уравнений, в силу чего, естественно, исследовать их методом точечных отображений. Если на промежутке времени от t до $t + \tau_i$ автомат находится в состоянии A_i , то из (2) найдем $p_j(s, t + \tau_i) = T(p(s, t))$. Это соотношение можно рассматривать как точечное отображение, переводящее точку P с координатами $p_j(0, t), p_j(1, t), \dots$ в точку \bar{P} с координатами $p_j(0, t + \tau_i), p_j(1, t + \tau_i), \dots$. Для определения $T(\lambda_j, \tau_i, \omega_{ij}(t))$ найдем решение уравнений (2) при $\omega_{ij}(t) = 0$ и $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij}$. Если $\omega_{ij}(t) = 0$, уравнения (2) описывают пуассоновский процесс и имеют решение вида

$$p_j(\bar{s}, t) = \sum_{s=0}^{\bar{s}} p_j(s, 0) \frac{(\lambda_j t)^{\bar{s}-s}}{(\bar{s}-s)!} e^{-\lambda_j t} \quad (3)$$

$(\bar{s}, s = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, m).$

При $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij} \neq 0$ уравнения (2) превращаются в уравнения Эрланга, и после замены $p_j(s, t) = \exp[-(\lambda_j + \omega_{ij})t] Q_j(s, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dQ_j(0, t)}{dt} &= \omega_{ij} Q_j(0, t) + \omega_{ij} Q_j(1, t), \\ \frac{dQ_j(s, t)}{dt} &= \lambda_j Q_j(s-1, t) + \omega_{ij} Q_j(s+1, t) \\ &(s = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) имеют несколько способов решения [2]. Можно предложить простой способ нахождения $Q_j(s, t)$. Найдем фундаментальную систему решений уравнений (4) при начальных условиях вида

$$Q_j(s, 0) = 0 \quad (\text{при } s \neq n) \quad \text{и} \quad Q_j(n, 0) = 1 \quad (5a)$$

$(s, n = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, m).$

Из вида системы уравнений (4) и рекуррентного соотношения для модифицированных функций Бесселя первого рода $2I_k(x) = I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x)$ можно заметить, что частное решение $Q_j(n, s, t)$ системы (4) следует искать в виде ряда по бесселевым функциям мнимого аргумента.

Подберем постоянные a_i, b_i, d, α так, чтобы функции вида

$$\begin{aligned} Q_j(n, s, t) &= a_s b_{n+s} I_{n-s}(\alpha t) + a_s b_{n+s+1} I_{n+s+1}(\alpha t) + \\ &+ a_s d \sum_{k=n+s+2}^{\infty} b_k I_k(\alpha t) \\ &(n, s = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (6)$$

зависящие от целочисленных переменных n и s , удовлетворяли уравнениям (4) и начальным условиям вида (5a). После подстановки (6) в (4) и необходимых преобразований получим

$$Q_j(n, s, t) = \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s}{2}} I_{n-s} (2 \sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t) + \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} I_{n+s+1}(2\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t) + \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^s \times \\
& \times \sum_{k=n+s+2}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t) \\
& (n, s = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}$$

Тогда линейная дифференциально-разностная система уравнений (2) при $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij}$ имеет следующую фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned}
p_j(n, s, t) = & \exp[-(\lambda_j + \omega_{ij}) t] \left[\left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s}{2}} I_{n-s}(2\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t) + \right. \\
& + \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} I_{n+s+1}(2\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t) + \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^s \times \\
& \times \left. \sum_{k=s+n+2}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t) \right] \\
& (n, s = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned} \quad (8)$$

Убедимся непосредственной проверкой, что (8) образует фундаментальную систему решений. Подставляя (8) в (2) при $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij}$ и используя равенство $2I_n(x) = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)$, получим

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n}{2}} (I_{n-1} + I_{n+1}) \sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} + \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n+1}{2}} (I_n + I_{n+2}) \sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} + \\
& + \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} \sum_{k=n+2}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} (I_{k-1} + I_{k+1}) = \omega_{ij} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n}{2}} I_n + \\
& + \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n+1}{2}} \omega_{ij} I_{n+1} + \omega_{ij} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \sum_{k=n+2}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k + \\
& + \omega_{ij} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-1}{2}} I_{n-1} + \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n}{2}} \omega_{ij} I_{n+2} + \omega_{ij} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \sum_{k=n+3}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k,
\end{aligned}$$

где $I_i = I_i(2\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t)$.

Собирая коэффициенты при $I_i(2\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} t)$ и преобразовывая это выражение, получим

$$\left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n}{2}} \left[\sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} + \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \sqrt{\lambda_j \omega_{ij}} \frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} - \omega_{ij} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right] I_{n+1} \equiv 0.$$

Таким образом, нулевое уравнение тождественно удовлетворяется. Подставляя (8) в остальные уравнения (2) при $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij} \neq 0$, получим

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s}{2}} V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} (I_{n-s-1} + I_{n-s+1}) + \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} \times \\
& \times (I_{n+s} + I_{n+s+2}) + \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^s \sum_{k=n+s+2}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} (I_{k-1} + I_{k+1}) = \\
& = \lambda_j \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} I_{n-s+1} + \lambda_j \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+2}{2}} I_{n+s} + \\
& + \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^{s-1} \lambda_j \sum_{k=n+s+1}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k + \omega_{ij} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s-1}{2}} I_{n-s-1} + \\
& + \omega_{ij} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s}{2}} I_{n+s+2} + \omega_{ij} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^{s+1} \sum_{k=n+s+3}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s}{2}} V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} - \omega_{ij} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} \right] I_{n-s-1} + \left[\left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} - \right. \\
& \left. - \lambda_j \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+2}{2}} \right] I_{n+s} + \left[\left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} - \omega_{ij} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s}{2}} \right] I_{n+s+2} + \\
& + \left[\left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s}{2}} V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} - \lambda_j \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{n-s+1}{2}} \right] I_{n-s+1} + \left[\left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^s V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^{s-1} \lambda_j \right] \sum_{k=n+s+2}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k + \left[\left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^s \times \right. \\
& \times \left. V \overline{\lambda_j \omega_{ij}} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{-\frac{1}{2}} - \omega_{ij} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right) \left(\frac{\lambda_j}{\omega_{ij}} \right)^{s+1} \right] \sum_{k=n+s+3}^{\infty} \left(\frac{\omega_{ij}}{\lambda_j} \right)^{\frac{k}{2}} I_k \equiv 0.
\end{aligned}$$

Так как $I_i(x=0)=0$ при $i \neq 0$ и $I_i(x=0)=1$ при $i=0$, система решений (8) удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned}
p_j(n, s, t)|_{t=0} &= 0 \quad (\text{при } s \neq n), \\
p_j(n, s, t)|_{t=0} &= 1 \quad (\text{при } s = n).
\end{aligned} \tag{56}$$

Общее решение системы (2) при $\omega_{ij}(t) = \omega_{ij} \neq 0$ и при любых начальных условиях $p_j(n, 0)$ ($n=0, 1, 2, \dots$; $j=1, 2, \dots, m$) запишется в виде

$$\begin{aligned}
p_j(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_j(n, s, t) p_j(n, 0) \\
(s = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned} \tag{9}$$

При этом имеем соотношение

$$p_j(s, t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} p_j(n, s, 0) p_j(n, 0) = p_j(s, 0) p_j(s, s, 0) = p_j(s, 0).$$

Итак, точечное отображение $T(\lambda_j, \tau_i, \omega_{ij}(t))$ имеет вид (10) при $\omega_{ij}(t)=0$ и (11) при $\omega_{ij}(t)=\omega_{ij}\neq 0$:

$$p_j(s, t+\tau_i) = \sum_{n=0}^s \frac{(\lambda_j \tau_i)^{s-n}}{(s-n)!} e^{-\lambda_j \tau_i} p_j(n, t), \quad (10)$$

$$p_j(s, t+\tau_i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_j(n, s; \tau_i) p_j(n, t) \\ (s = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

Это отображение линейное, и его матрицу будем обозначать через $T(\lambda_j, \tau_i, \omega_{ij}(t))$. Все элементы матрицы $T(\lambda_j, \tau_i, \omega_{ij}(t))$ положительны и сумма элементов каждого ее столбца равна единице. Такую матрицу называют стохастической.

Пусть за промежуток времени от t до $t+\tau_{i_1}+\tau_{i_2}+\dots+\tau_{i_m}$ автомат находится последовательно в состояниях $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ в течение времени $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_m}$ соответственно, тогда вероятности $p_j(s, t + \tau_{i_1} + \tau_{i_2} + \dots + \tau_{i_m})$ выражаются через вероятности $p_j(s, t)$ с помощью линейного преобразования

$$T_{j i_m} T_{j i_{m-1}} \dots T_{j i_1}. \quad (12)$$

Таким образом, исследование работы автомата сведено к исследованию некоторых линейных точечных отображений вида

$$\bar{P} = TP, \quad (13)$$

где T — матрица вида (12), а P и \bar{P} — точки бесконечномерного пространства неотрицательных последовательностей с суммой элементов, равной единице. Под изучением точечного отображения (13) имеется в виду выяснение поведения последовательных преобразований точки P , т. е. поведение последовательности TP, T^2P, T^3P, \dots .

Теорема 1. Если

$$\sum_i \omega_{ij}(t) - \lambda_j \tau_i < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (14)$$

то для любой начальной точки любая компонента последовательности преобразований TP, T^2P, \dots стремится к нулю. При выполнении неравенства

$$\sum_i \omega_{ij}(t) - \lambda_j \tau_i > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (15a)$$

последовательные преобразования TP, T^2P, \dots стремятся к одной и той же предельной точке P^* с положительными компонентами (все $p_s^* > 0$) вне зависимости от начальной точки P . При этом в первом случае математическое ожидание

$$M(n\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} s(T^n P)_s$$

неограниченно возрастает с ростом n , а во втором случае стремится к конечному пределу $\sum_{s=0}^{\infty} s p_s^*$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Ограничимся для простоты исследованием точечного отображения (13) и доказательством сформулированной выше теоремы в простейшем случае, когда промежутки времени τ_2 и τ_1 , в течение которых проезд через перекресток запрещен ($\omega_{ij}(t)=0$) и разрешен ($\omega_{ij}(t)=\omega_{ij} \neq 0$), периодически повторяются. В этом случае значения вероятностей $\bar{p}(s, t+\tau)=\bar{P}_s$ в последующий момент запрещения связаны со значениями вероятностей $p(s, t)=p_s$ в предыдущий момент запрещения переезда через перекресток, согласно (10) и (11), соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{p}_0 &= e^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} p(s, 0) \frac{a^s}{s!} p_0 + e^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} p(s+1, 0) \frac{a^s}{s!} p_1 + \dots, \\ \bar{p}_1 &= e^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} p(s, 1) \frac{a^s}{s!} p_0 + e^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} p(s+1, 1) \frac{a^s}{s!} p_1 + \dots, \\ \vdots &\quad \vdots \\ \bar{p}_n &= e^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} p(s, n) \frac{a^s}{s!} p_0 + e^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} p(s+1, n) \frac{a^s}{s!} p_1 + \dots \\ (n &= 0, 1, 2, \dots; \quad \tau = \tau_1 + \tau_2),\end{aligned}\quad (156)$$

где ради сокращения значения индекса потока j опущен, а $p_j(s, n, \tau_1)$ заменено на $p(s, n)$ и $\lambda \tau_2 = a_j = a$. Покажем, что матрица линейного преобразования (156) стохастическая. Действительно, пусть $p_{ij} = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(s) p(i+s, j)$ ($s, i, j = 0, 1, 2, \dots$), тогда $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(s) p(i+s, j) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(s) \sum_{j=0}^{\infty} p(i+s, j) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(s) = 1$, так как $\sum_{k=0}^{\infty} p(n, k) = 1$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, где $\varphi(s) = e^{-a} \frac{a^s}{s!}$ ($s = 0, 1, 2, \dots$).

Пусть последовательные преобразования TP, T^2P, \dots стремятся к одной и той же предельной точке P^* с положительными компонентами (все $p_s^* > 0$) вне зависимости от начальной точки P , т. е. точечное преобразование вида (156) имеет неподвижную устойчивую точку P^* ; тогда с возрастанием времени вероятности $p(s, t)$ стремятся к некоторым периодическим функциям $p^*(s, t)$ периода τ и удовлетворяют дифференциально-разностным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dp(0, t)}{dt} &= -\lambda p(0, t) + \omega(t) p(1, t), \\ \frac{dp(n, t)}{dt} &= \lambda p(n-1, t) - (\lambda + \omega(t)) p(n, t) + \omega(t) p(n+1, t) \\ (n &= 1, 2, \dots),\end{aligned}\quad (16)$$

где $\omega(t) = \omega$, если проезд через перекресток разрешен, и $\omega(t) = 0$, если проезд запрещен. Разлагая функцию $\omega(t)$ в ряде Фурье, получим

$$\omega(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{2m\pi}{\tau} t + b_m \sin \frac{2m\pi}{\tau} t \right) = \bar{\omega}(t),$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \omega(t) dt = \frac{2\omega\tau_1}{\tau},$$

$$a_m = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \omega(t) \cos \frac{2m\pi}{\tau} t \, dt = - \frac{\omega}{\pi m} \sin \frac{2m\pi}{\tau} \tau_2,$$

$$b_m = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \omega(t) \sin \frac{2m\pi}{\tau} t \, dt = \frac{\omega}{\pi m} \left[\cos \frac{2m\pi}{\tau} \tau_2 - 1 \right]$$

$$(m=1, 2, 3, \dots).$$

Рассмотрим систему (17), которая получается из (16) заменой функции $\omega(t)$ на $\bar{\omega}(t)$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dp(0, t)}{dt} &= -\lambda p(0, t) + \bar{\omega}(t) p(1, t), \\ \frac{dp(n, t)}{dt} &= \lambda p(n-1, t) - (\lambda + \bar{\omega}(t)) p(n, t) + \bar{\omega}(t) p(n+1, t) \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \tag{17}$$

Системы дифференциально-разностных уравнений (16) и (17) имеют одинаковое решение в классе непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную. Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (17) и умножая на ρ , получим

$$p^2 F_0(p) = -\lambda p F_0(p) + \frac{\omega \tau_1}{\tau} p F_1(p) + p f_1(p),$$

$$p^2F_1(p) = \lambda p F_0(p) - \lambda p F_1(p) - \frac{\omega\tau_1}{\tau} p F_1(p) + \frac{\omega\tau_1}{\tau} p F_2(p) - p f_1(p) + p f_2(p), \quad (18)$$

$$p^2F_k(p) = \lambda p F_{k-1}(p) - \lambda p F_k(p) - \frac{\omega_1}{\tau} p F_k(p) + \frac{\omega_1}{\tau} p F_{k+1}(p) - p f_k(p) + p f_{k+1}(p) + p,$$

$$p^2 F_n(p) = \lambda p F_{n-1}(p) - \lambda p F_n(p) - \frac{\omega \tau_1}{\tau} p F_n(p) + \frac{\omega \tau_1}{\tau} p F_{n+1}(p) - p f_n(p) + p f_{n+1}(p)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots; \quad n \neq k), \quad (k=0, 1, \dots),$$

где

$$f_l(p) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m \left[F_l \left(p - \frac{2m\pi}{\tau} i \right) + F_l \left(p + \frac{2m\pi}{\tau} i \right) \right] + b_m \frac{1}{i} \left[F_l \left(p - \frac{2m\pi}{\tau} i \right) - F_l \left(p + \frac{2m\pi}{\tau} i \right) \right] \right\},$$

$$F_t(p) = \int_0^\infty e^{-pt} p(l, t) dt.$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^\infty e^{-pt} \dot{p}(l, t) dt = \int_0^{\tau_2} e^{-pt} \dot{p}(l, t) dt + \int_{\tau_2}^t e^{-pt} \dot{p}(l, t) dt + \dots = pF_l(p) - p(k, 0).$$

Заметим также, что $p(k, t)$ — непрерывная функция. Из существования устойчивой неподвижной точки преобразования (15б) следует выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p(l, t) dt = F_l, \quad (19)$$

где $p(l, t)$ — решение систем уравнений (16) и (17). Тогда в силу известных теорем имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p(l, t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} p \int_p^\infty \frac{F_l(s)}{s} ds = F_l$$

или

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF_l(p) = F_l.$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow 0$ в системе (18), нетрудно проверить, что получим систему уравнений

$$-\lambda F_0 + \frac{\omega\tau_1}{\tau} F_1 = 0, \quad \lambda F_{n-1} - \left(\lambda + \frac{\omega\tau_1}{\tau} \right) F_n + \frac{\omega\tau_1}{\tau} F_{n+1} = 0 \quad (20)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Для существования решения систем уравнений (20) вида

$$F_n = \left(\frac{\lambda\tau}{\omega\tau_1} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda\tau}{\omega\tau_1} \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_n = 1 \quad (21)$$

необходимо выполнение условия (14), т. е. $\lambda\tau - \omega\tau_1 < 0$.

Перейдем к рассмотрению достаточного условия теоремы 1. Для этого напишем уравнение (2) при $\omega_{ij}(t) = \omega \neq 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dp(0, t)}{dt} &= -\lambda p(0, t) + \omega p(1, t), \\ \frac{dp(1, t)}{dt} &= \lambda p(0, t) - (\lambda + \omega) p(1, t) + \omega p(2, t), \\ &\dots \\ \frac{dp(n, t)}{dt} &= \lambda p(n-1, t) - (\lambda + \omega) p(n, t) + \omega p(n+1, t) \\ &(n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

Умножая s -ое уравнение (22) на $s = 0, 1, 2, \dots$ и складывая их почленно, придем к соотношению вида

$$\frac{dM(t)}{dt} = \lambda - \omega + \omega p(0, t) \quad (23)$$

или

$$M(t) = i + (\lambda - \omega) t + \omega \int_0^t p(i, 0, x) dx,$$

где $M(t) = \sum_{s=0}^{\infty} sp(s, t)$ и $p(i, 0) = 1$, $p(n, 0) = 0$ ($i \neq n$; $i, n = 0, 1, 2, \dots$). Из (15б) определим

$$\begin{aligned} M(t+\tau) &= \sum_{s=0}^{\infty} sp(s, t+\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} s \bar{p}_s = \sum_{s=0}^{\infty} s \sum_{l=0}^{\infty} p_l \sum_{k=0}^{\infty} p(k+i, s) \varphi(k) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) \left[k + i + (\lambda - \omega) \tau_1 + \omega \int_0^{\tau_1} p(k+i, 0, x) dx \right] = \\ &= M(t) + \lambda\tau - \omega\tau_1 + \omega \int_0^{\tau_1} p_0(x) dx, \end{aligned}$$

где $p_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p(k+i, 0, x)$ или

$$\bar{M} = M + \lambda\tau - \omega\tau_1 + \omega \int_0^{\tau_1} p_0(x) dx. \quad (24)$$

Теперь из соотношения (24) непосредственно следует, что при $\lambda\tau - \omega\tau_1 > 0$ математическое ожидание числа ожидающих машин неограниченно возрастает и стационарного состояния у системы быть не может. Соотношение (15б) определяет неприводимую непериодическую цепь Маркова, так как $p_{ij} = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(s) p(i+s, j) > 0$ для всех $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Тогда, согласно известной теореме ([3], стр. 384), либо $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j^* > 0$ для любой пары индексов i, j , т. е. существует единственное стационарное распределение, или $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = p_i^* = 0$ и не существует стационарного распределения. Предположим, что при $\lambda\tau - \omega\tau_1 < 0$ все $p_j^* = 0$, тогда, в силу оценки $M(n\tau) = 0 \cdot p_0(n\tau) + 1 \cdot p_1(n\tau) + \dots > m \sum_{j=m}^{\infty} p_j(n\tau) = m \left(1 - \sum_{j=0}^{m-1} p_j(n\tau) \right)$ и того, что сумма конечного числа $p_s(n\tau)$ стремится к нулю, следует, что очередь в системе массового обслуживания неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, при достаточно большом $T = n\tau$ и любом $\bar{k} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} M(T + \bar{k}\tau) &= M(T) + \bar{k}(\lambda\tau - \omega\tau_1) + \omega \sum_{l=1}^{\bar{k}} \int_0^{\tau_1} p_0^{(l-1)}(x) dx = \\ &= M(T) + \bar{k}(\lambda\tau - \omega\tau_1) + \omega \sum_{l=1}^{\bar{k}} \int_0^{\tau_1} \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(l-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p(k+i, 0, x) dx < \\ &< M(T) + \bar{k}(\lambda\tau - \omega\tau_1 + \epsilon) < M(T), \end{aligned}$$

где ϵ — сколь угодно малое положительное число и $\lambda\tau - \omega\tau_1 < 0$.

Действительно, выберем такое J , что $p(k+i, 0, x) < \epsilon/2\omega\tau_1$ для всех $i > J$, и такое n , что $p_i(n\tau) = p_i^0 < \epsilon/2\omega\tau_1$ для всех $i \leq J$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{l=1}^{\bar{k}} \int_0^{\tau_1} \sum_{l=0}^{\infty} p_l^{(l-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p(k+i, 0, x) dx = \\ & = \omega \sum_{l=1}^{\bar{k}} \int_0^{\tau_1} \sum_{l=0}^J p_l^{(l-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p(k+i, 0, x) dx + \\ & + \omega \sum_{l=1}^{\bar{k}} \int_0^{\tau_1} \sum_{l=J+1}^{\infty} p_l^{(l-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p(k+i, 0, x) dx < \bar{k} \varepsilon. \end{aligned}$$

Заметим, что $\lim_{i \rightarrow \infty} p(i, 0, x) = 0$. Таким образом, очередь не увеличивается, тогда система (15б) имеет единственную неподвижную устойчивую точку $p_j^* > 0$ и $\sum_{j=0}^{\infty} p_j^* = 1$.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Так же, как и в работе [1], определим вероятности $p(s, t)$ числа скопившихся на перекрестке машин в произвольный момент времени $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ по формулам

$$p(s, t) = p(s, n\tau) \varphi_0(t-n\tau) + p(s-1, n\tau) \varphi_1(t-n\tau) + \dots + p(0, n\tau) \varphi_s(t-n\tau) \quad (25)$$

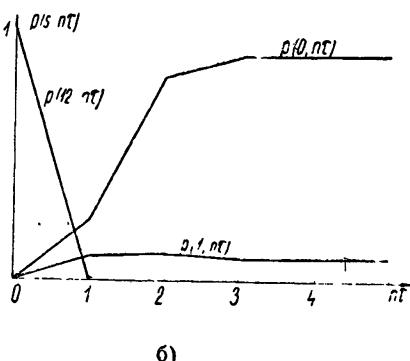
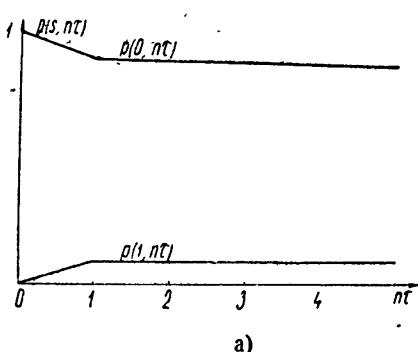
(при $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau - \tau_1$, $(s = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots)$.
Соответственно при $t \geq (n+1)\tau - \tau_1$ имеем

$$p(s, t) = \sum_{m=0}^{\infty} p(m, s, \xi) p(m, \eta) \quad (26)$$

$(s = 0, 1, 2, \dots)$,

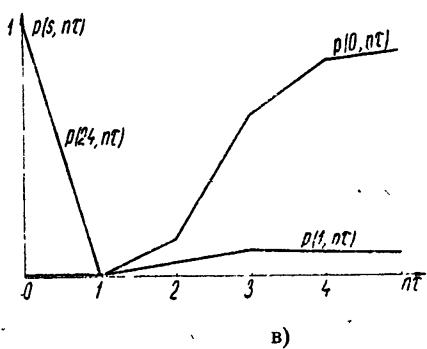
где $\xi = t - (n+1)\tau + \tau_1$, $\eta = (n+1)\tau - \tau_1$. При этом предполагается, что при $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau - \tau_1$ проезд через перекресток в определенном направлении запрещен, а при $(n+1)\tau - \tau_1 \leq t \leq (n+1)\tau$ разрешен. Согласно теореме 1 и формулам (25) и (26), при возрастании t вероятности $p(s, t)$ асимптотически приближаются к некоторым периодическим функциям $p_s^*(s, t)$, полученным из (25) и (26) после замены $p(s, n\tau)$ на p_s^* . Стационарные значения вероятностей p_s^* могут быть найдены путем приближенного решения бесконечной системы дифференциально-разностных уравнений (4) и системы линейных уравнений (15б).

Рассмотрим пример определения стационарных значений вероятностей p_s^* . Примем, что продолжительность желтого света $\tau_0 = 4$ сек. Обозначим через $\tau_3 = 12$ сек и $\tau_k = 10$ сек длительности зеленого и красного света для потока с параметрами $\lambda = 0,1 \text{ м сек}^{-1}$, $\omega = 1 \text{ м сек}^{-1}$, тогда результаты соответствующего расчета на ЭВМ будут следующие: $p_0^* = 0,8968$, $p_1^* = 0,0912$, $p_2^* = 0,0101$, $p_3^* = 0,0014$, $M^* = 0,1176$, при этом в начальный момент $t = 0$, $p_0 = p_1 = \dots = p_8 = p_{10} = \dots = 0$, $p_9 = 1$, а число тактов n переходного процесса, по истечении которого пробка в 9 машин рассасывается и устанавливается стационарное состояние системы, равно 4. На рис. 1, 2 приведены графики последовательных значений вероятностей $p(s, n\tau)$ и математического ожидания $M(n\tau)$ для случаев,

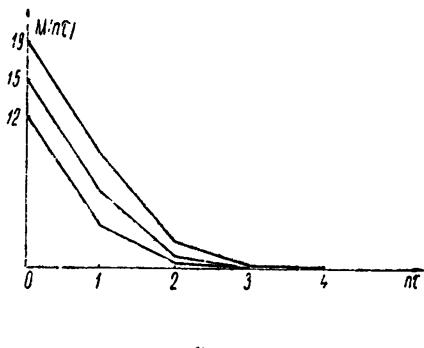


a)

61

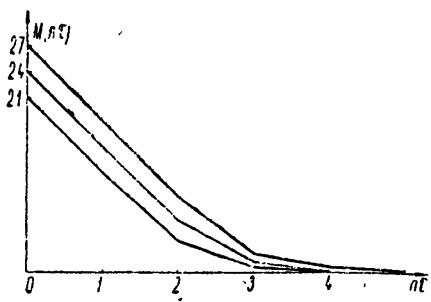


B)



a)

6)

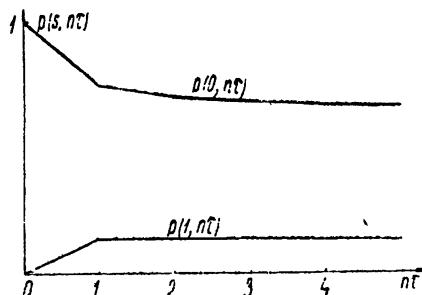


B)

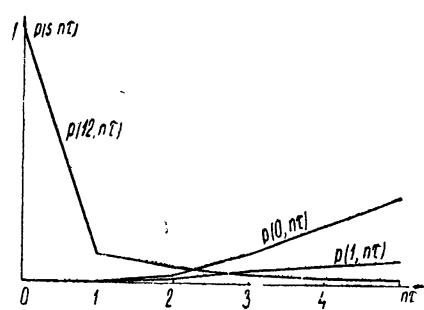
когда в начальный момент $t=0$ $p_s=0$ ($s=0, 1, 2, \dots; s \neq j$), $p_j=1$ ($j=0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$) и $\lambda=0,1 \text{ м сек}^{-1}$, $\omega=1 \text{ м сек}^{-1}$, $\tau_a=12 \text{ сек}$, $\tau_k=10 \text{ сек}$. На рис. 3, 4 при $\tau_a=5 \text{ сек}$, $\tau_k=17 \text{ сек}$. Зная ста-

Рис. 2. Графики изменения математических ожиданий $M(n\tau)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при $\lambda=0, 1$, $\omega=1$, $\tau=30$, $\tau_3=12$, $\tau_k=10$ для ряда значений начальных условий $p(s, 0)=1$ ($s=0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$) и $p(k, 0)=0$, $s \neq k$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

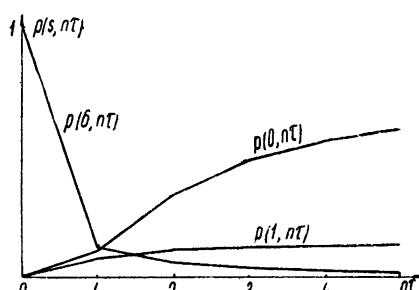
ционарное распределение p_j^* , мы можем решать вопросы, связанные с оптимальным управлением уличного движения на перекрестке по некоторому критерию качества [4-6].



а)

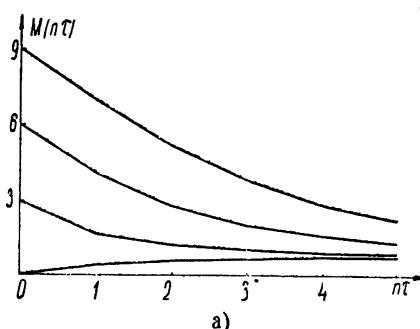


б)

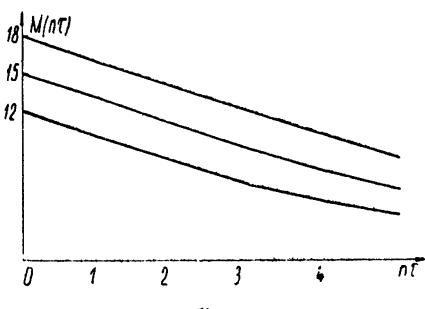


в)

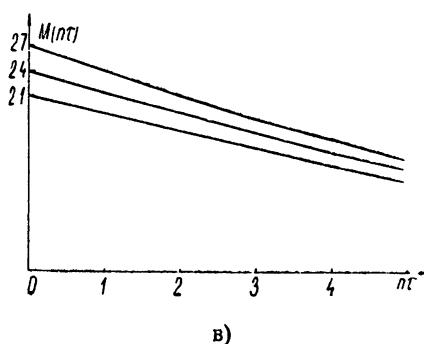
Рис. 3. Графики изменения вероятностей $p(s, n\tau)$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) при $\lambda = 0, 1$, $\omega = 1$, $\tau = 30$, $\tau_s = 5$, $\tau_k = 17$ для ряда значений начальных условий $p(s, 0) = 1$ ($s = 0, 6, 12$) и $p(k, 0) = 0$, $s \neq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).



а)



б)



в)

Рис. 4. Графики изменения математических ожиданий $M(n\tau)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при $\lambda = 0, 1$, $\omega = 1$, $\tau = 30$, $\tau_s = 5$, $\tau_k = 17$ для ряда значений начальных условий $p(s, 0) = 1$ ($s = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$) и $p(k, 0) = 0$, $s \neq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, М. А. Федоткин, Автоматика и телемеханика, 28, № 3, 78 (1966).
2. Т. Саати, Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, изд. Сов. радио, М., 1965.
3. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, М., 1964.
4. Дж. Риордан, Вероятностные системы обслуживания, изд. Связь, М., 1966.
5. F. G. Foster, Ann. Math. Statist., 24, 355 (1953).
6. Bisi Walter, Statistica, 19, № 3, 422 (1959).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 июля 1966 г

ON THE STREET TRAFFIC CONTROL AT A CROSS-ROADS PERFORMED BY
AN AUTOMATION WITH AN EXPONENTIAL SERVICE LAW

M. A. Fedotkin

This paper presents the study of the traffic lights controlling the street traffic at a cross-roads assuming that arrivals are of the Poisson type and that the distribution of the service time is exponential in any allowed direction. Another assumption stipulates that the automation operates in a given periodic mode. Some statistical characteristics of the stationary regime are found.

УДК 62—506+621.391+62—505

О СХОДИМОСТИ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ ПО ПРИНЦИПУ МАКСИМУМА ИНФОРМАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

P. Г. Стронгин

В работе рассматривается поиск экстремума функций при наличии помех с помощью стратегии поиска оптимальной по принципу максимума информации. Показывается, что поиск является сходящимся, т.е. вероятность отказа стремится к нулю, и, кроме того, математическое ожидание затрат на поиск является конечной величиной.

Информационный подход к задаче поиска экстремума функций, в рамках которого формулируется принцип максимума информации для построения стратегий поиска S_{\max} , был предложен и развит в работах [1—3]. В [2] этот подход был применен для частного случая поиска минимума функций одного переменного с одним минимумом в предположении существования случайных ошибок измерения. В настоящей работе мы рассмотрим более общий случай использования S_{\max} при наличии помех.

Пусть минимизируемая функция есть действительная функция $\varphi(x)$, определенная на конечном множестве $X = \{x_i / 1 \leq i \leq n\}$ и принадлежащая конечному функциональному классу $\Phi = \{\varphi_j(x) / 1 \leq j \leq N\}$, в котором задано распределение вероятностей $f(j)$, ($1 \leq j \leq N$). Относительно множества Σ возможностей для получения информации о функции $\varphi(x)$ условимся, что любая возможность $\sigma(i) \in \Sigma = \{\sigma(i) / 1 \leq i \leq n\}$ состоит в определении величины $\xi(i) = \varphi(x_i) + \zeta(i)$, где $\zeta(i) = \zeta$ ($1 \leq i \leq n$) есть случайная величина (помеха при измерении), могущая иметь любое из известных значений.

$$\alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(m) \quad (1)$$

с заданной вероятностью $\gamma(l)$ ($1 \leq l \leq m$), и примем $\gamma(1), \gamma(m) > 0$. Будем считать, что случайные величины $\zeta(i)$ ($1 \leq i \leq n$) независимы и, кроме того, распределение $\gamma(l)$ не меняется после использования любой последовательности возможностей $\sigma(i) \in \Sigma$.

Пусть, далее, для любого целого положительного k функция цены поиска удовлетворяет следующим условиям:

$$T(\sigma_1, \dots, \sigma_k; J_k) = T(k) \text{ и } 0 \leq T(k) - T(k-1) = \nabla T(k) \leq \nabla T,$$

причем $T(1)$ и ∇T конечны.

При этих условиях и некоторой произвольной точности $\epsilon \geq 0$ нас будет интересовать поведение вероятности отказа $P_0(\epsilon, T_{\max})$ (отказом после k шагов поиска называется ситуация, в которой $H(x/J_k) > \epsilon$, $T(k) \leq T_{\max}$, но $T(k+1) > T_{\max}$, где T_{\max} — максимально допустимая цена поиска) и математическое ожидание цены поиска $\mu_0(\epsilon, T_{\max})$ для стратегии S_{\max} при неограниченном увеличении T_{\max} . Покажем, что при любом $\epsilon \geq 0$ справедливо

$$\lim_{T_{\max} \rightarrow \infty} \mu_0(T_{\max}) \leq M < \infty, \quad (2)$$

$$\lim_{T_{\max} \rightarrow \infty} P_0(T_{\max}) = 0. \quad (3)$$

Значение T_{\max} , равное величине $T(k)$, обозначим $T_{\max}(k)$. Тогда при $T_{\max}(k) \leq T_{\max} < T_{\max}(k+1)$ $\mu_0(T_{\max}) = \mu_0(T_{\max}(k))$, так как при любом T_{\max} из указанного полуинтервала число шагов при поиске не может превышать k , ибо при $k' > k$ $T(k') > T_{\max}$. Поэтому рассмотрение $\mu_0(T_{\max})$ при $T_{\max} \rightarrow \infty$ можно заменить рассмотрением $\mu_0(k) = \mu_0(T_{\max}(k))$ при неограниченном увеличении числа допустимых шагов k .

Осуществление $(k+1)$ -го шага поиска увеличивает его цену на $\nabla T(k+1)$. Поскольку необходимость в $(k+1)$ -ом шаге может возникнуть лишь в случае, когда после предыдущих k шагов наблюдался отказ, вероятность которого есть $P_0(k) = P_0(T_{\max}(k))$, то $\mu_0(k+1) = \mu_0(k) + \nabla T(k+1)P_0(k) = \mu_0(1) + \sum_{v=1}^{k-1} P_0(v)\nabla T(v+1)$. Но $\mu_0(1) = T(1)$, $\nabla T(k) \leq \nabla T$ и, следовательно,

$$\mu_0(k) \leq T(1) + \nabla T \sum_{v=1}^{k-1} P_0(v).$$

Теперь, если справедливо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^k P_0(v) \leq M_1 < \infty, \quad (4)$$

то, принимая во внимание, что для любого $v > 0$ $P_0(v+1) \leq P_0(v)$ и $P_0(v) \geq 0$, получаем соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_0(k) \leq M = T(1) + \nabla T M_1 < \infty$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_0(k) = 0,$$

эквивалентные утверждениям (2) и (3). Таким образом, остается доказать справедливость утверждения (4), что мы проделаем в несколько этапов.

1) Пусть минимум $\varphi(x)$ ищется по стратегии S_1 , в соответствии с которой на k -ом шаге поиска ($k = 1, 2, \dots$) используется возможность $\sigma(k \bmod n)$, причем условимся, что $\sigma(0) = \sigma(n)$. Поиск считается оконченным после k шагов, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: а) $T(k+1) > T_{\max}$ или б) значение $\varphi(x_i)$ для всех i ($1 \leq i \leq n$) известно. Выполнение одного лишь первого условия будем рассматривать как отказ. Выполнение же второго условия означает, что функция $\varphi(x)$ известна во всех точках множества X и, следовательно, энтропия расположения минимума на множестве X равна нулю, т. е. $H(x|J_k) = 0$ и при любом заданном $\epsilon \geq 0$ $H(x|J_k) \leq \epsilon$.

Пусть поиск окончен на k -ом шаге. Результаты использования $\sigma(i)$, т. е. соответствующие значения $\xi(i)$ на k шагах поиска пронумеруем по a ($1 \leq a \leq b(i, k)$), где

$$b(i, k) = E(k/n) + \begin{cases} 0, & \text{если } k - nE(k/n) < i \\ 1, & \text{если } k - nE(k/n) \geq i \end{cases}$$

причем $E(k/n)$ есть целая часть от отношения (k/n) и, по-прежнему,

$i = n$ соответствует $i = 0$. Обозначим $\Delta_k \xi(i) = \max(\xi_a(i) - \xi_c(i))$ для всех a и c , где $1 \leq a, c \leq b(i, k)$. Если теперь

$$\Delta_k \xi(i) = \alpha(m) - \alpha(1), \quad (5)$$

то, очевидно, значение функции $\varphi(x)$ в точке x_i равно $\varphi(x_i) = \xi_a(i) - \alpha(m) = \xi_c(i) - \alpha(1)$, где a и c такие, что $\Delta_k \xi(i) = \xi_a(i) - \xi_c(i)$. Действительно, в случае (5) предположение $\varphi(x_i) < \xi_a(i) - \alpha(m)$ противоречит (1), аналогично для предположения $\varphi(x_i) > \xi_c(i) - \alpha(1)$. Следовательно, если при использовании $\sigma(i)$ на некоторых шагах за время k шагов поиска случайная величина $\zeta(i)$ принимала значения $\alpha(1)$ и $\alpha(m)$, то значение $\varphi(x_i)$ известно.

Событие, состоящее в том, что за время k шагов поиска случайная величина $\zeta(i)$ приняла значение $\alpha(1)$ хотя бы однажды, обозначим A_i . Аналогичное событие для значения $\alpha(m)$ обозначим B_i . Тогда после k шагов поиска значение $\varphi(x_i)$ будет неизвестным, если имеет место событие $\overline{A_i B_i}$, где $A_i B_i$ есть событие, состоящее в одновременном появлении событий A_i и B_i , а $\overline{A_i B_i}$ есть событие, обратное событию $A_i B_i$. Вероятность события $\overline{A_i B_i}$ определяется как

$$p(\overline{A_i B_i}) = p(\overline{A_i}) + p(\overline{B_i}) - p(\overline{A_i} \overline{B_i}) \leq p(\overline{A_i}) + p(\overline{B_i}). \quad (6)$$

Из независимости $\zeta(i)$ и неизменности $\gamma(l)$ следует

$$p(\overline{A_i}) = (1 - \gamma(1))^{b(i, k)}, \quad p(\overline{B_i}) = (1 - \gamma(m))^{b(i, k)}. \quad (7)$$

Вероятность того, что значение $\varphi(x_i)$ будет известно после k шагов поиска, равна $[1 - p(\overline{A_i B_i})]$, откуда вероятность того, что $\varphi(x)$ известна во всех точках множества X , определяется как $\prod_{i=1}^n [1 - p(\overline{A_i B_i})]$.

Тогда вероятность отказа после k шагов поиска при использовании стратегии S_1 равна

$$P_1(k) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - p(\overline{A_i B_i})].$$

Из (7) следует, что

$$p(\overline{A_i}) \leq (1 - \gamma)^h, \quad p(\overline{B_i}) \leq (1 - \gamma)^h,$$

где $\gamma = \min(\gamma(1), \gamma(m))$ и $h = E(k/n)$.

Из (6) получаем $p(\overline{A_i B_i}) \leq 2(1 - \gamma)^h$, откуда

$$P_1(k) \leq 1 - \prod_{i=1}^n [1 - 2(1 - \gamma)^h] = 1 - [1 - 2(1 - \gamma)^h]^n. \quad (8)$$

Обозначим $\beta = 1 - \gamma$, где, очевидно, $0 < \beta < 1$, и, воспользовавшись формулой бинома Ньютона, перепишем (8) как

$$\begin{aligned} P_1(k) &\leq 1 - (1 - 2\beta^h)^n = 1 - \sum_{t=0}^n (-1)^t C_n^t (2\beta^h)^t = \\ &= \sum_{t=1}^n (-1)^{t-1} C_n^t (2\beta^h)^t < \sum_{t=1}^n C_n^t (\beta^t)^h 2^t. \end{aligned}$$

Поскольку $\beta^t < \beta < 1$ и $2^t < 2^n$ при $1 \leq t \leq n$, получаем

$$P_1(k) < \sum_{t=1}^n 2^n C_n^t \beta^h = 2^{2n} \beta^h. \quad (9)$$

Заметим, что полученная оценка не зависит от того, с какой именно функцией $\varphi_j(x) \in \Phi$ ($1 \leq j \leq N$) совпадает минимизируемая функция $\varphi(x)$.

Из (9), учитывая свойства убывающей геометрической прогрессии, получим оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_1(k) < n2^{2n} \sum_{v=1}^{\infty} \beta^v = n2^{2n} \beta / (1 - \beta) = M_1$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_1(k) < M_1 < \infty. \quad (10)$$

2) Если на некотором шаге k выполняется условие (5), то от любого шага, $k' > k$, для которого $k' \pmod{n} = i$, где i из (5), будем переходить к шагу $k'+1$, не используя возможности $\sigma(i)$. Такую модификацию стратегии S_1 назовем S_2 .

Параметр k в S_2 учитывает, таким образом, не число использованных возможностей $\sigma(i) \in \Sigma$, как это имело место в S_1 , а число моментов принятия решения о выборе $\sigma(i)$ или о переходе к следующему шагу. Мы, однако, сменим обозначения, сохранив за числом использованных возможностей символ k (мы будем называть его числом шагов), а число принятых решений обозначим g .

Вероятность отказа, соответствующую S_2 при заданном числе k шагов, обозначим $P_2(k)$, а вероятность успешного окончания поиска при числе решений, меньшем или равном g , обозначим $Q(g)$. Из построения S_2 следует, что в случае успешного окончания поиска по S_1 на k -ом шаге поиск по S_2 в этой же ситуации окончится на шаге $k' \leq k$ при числе решений $g = k$. Отсюда

$$Q(k) \geq 1 - P_1(k). \quad (11)$$

Событие, состоящее в успешном окончании поиска по S_2 за k или меньше шагов, согласно определению S_2 , включает в себя все возможные варианты успешного окончания поиска при числе решений $g \leq k$, так как любой из них оканчивается за k или меньше шагов. Поэтому

$$1 - P_2(k) \geq Q(k),$$

и, учтя (11), получаем

$$P_2(k) \leq P_1(k). \quad (12)$$

3) Рассмотрим теперь некоторую стратегию S_3 с произвольным законом выбора $\sigma_i \in \Sigma$ на каждом шаге поиска, имеющую те же правила останова, т. е. окончания поиска, что и S_1 , и удовлетворяющую условию, что $\sigma(i) \in \Sigma$ не используется ни на одном шаге $k' > k$, если $\Delta_k \xi(i) = \alpha(m) - \alpha(1)$. Множество всех стратегий типа S_3 обозначим $\{S_3\}$.

Пусть мы используем S_2 (заметим, что $S_2 \in \{S_3\}$) для поиска минимума некоторой $\varphi(x) \in \Phi$. Рассмотрим некоторый возможный случай A успешного окончания поиска на k -ом шаге. Результаты использования $\sigma(i)$ на этих k шагах пронумеруем в порядке их поступления по a ($1 \leq a \leq b(i)$). Очевидно, что

$$b(1) + \dots + b(n) = k. \quad (13)$$

Предположение об успешном окончании поиска означает, что $\Delta_k \xi(i) = \alpha(m) - \alpha(1)$ для любого i ($1 \leq i \leq n$). Используем теперь произвольную $S_3 \in \{S_3\}$ для поиска минимума той же $\varphi(x)$ в предположении, что,

когда $\sigma(i)$ ($1 \leq i \leq n$) используется a -ый раз, случайная величина $\zeta(i)$ принимает такое значение, что результат применения $\sigma(i)$ равен $\xi_a(i)$, введенному выше. Тогда после k шагов поиска количество результатов, соответствующих $\sigma(i)$ ($1 \leq i \leq n$), не может быть больше $b(i)$, ибо $S_3 \in \{S_3\}$ и $\Delta_k \xi(i) = a(m) - a(1)$, и не может быть меньше $b(i)$ в силу (13), т. е. равно $b(i)$. Следовательно, поиск будет успешно завершен на k -ом шаге (очевидно, что поиск по S_3 не мог закончиться в нашем случае за $k' < k$ шагов, ибо тогда и поиск по S_2 должен был бы закончиться раньше, чем за k шагов).

Таким образом, ситуация A , полученная при использовании S_2 , может быть также получена при использовании S_3 , и вероятность этого события не зависит от $S_3 \in \{S_3\}$ в силу независимости опытов $\sigma(i)$ и случайных величин $\zeta(i)$. Поэтому вероятности успешного окончания поиска минимума $\varphi_j(x) \in \Phi$ в ситуации A на k -ом шаге при использовании S_2 ($q_2(j, k, A)$) и S_3 ($q_3(j, k, A)$) удовлетворяют условию

$$q_2(j, k, A) = q_3(j, k, A). \quad (14)$$

Обозначим

$$q_2(j, k) = \sum_{A \in \{A\}_2} q_2(j, k, A),$$

$$q_3(j, k) = \sum_{A \in \{A\}_3} q_3(j, k, A),$$

где $\{A\}_2$ — множество всех различных случаев успешного окончания поиска минимума $\varphi_j(x)$ на k -ом шаге при использовании S_2 , а множество $\{A\}_3$ имеет аналогичный смысл для S_3 . Множества $\{A\}_2$ и $\{A\}_3$ конечны для любого k и, как следует из рассуждений, имевших место выше, $\{A\}_2 \subset \{A\}_3$. Тогда, учитывая (14), получаем $q_2(j, k) \leq q_3(j, k)$ и, принимая во внимание распределение $f(j)$, окончательно имеем

$$q_2(k) \leq q_3(k), \quad (15)$$

где $q_2(k)$ — вероятность успешного окончания поиска на k -ом шаге при использовании S_2 в случае произвольной $\varphi(x) \in \Phi$, а $q_3(k)$ имеет аналогичный смысл для S_3 .

В силу того, что событие, состоящее в успешном окончании поиска на k -ом шаге, несовместимо с успешным окончанием поиска на шаге $v \neq k$, вероятности успешного окончания поиска на некотором шаге $v \leq k$ для S_2 и S_3 соответственно равны

$$Q_2(k) = q_2(1) + \dots + q_2(k), \quad Q_3(k) = q_3(1) + \dots + q_3(k),$$

откуда в силу (15) следует

$$Q_2(k) \leq Q_3(k). \quad (16)$$

Вероятность отказа после k шагов при поиске по S_3 обозначим $P_3(k) = 1 - Q_3(k)$. Из (16) имеем

$$P_3(k) = 1 - Q_3(k) \leq 1 - Q_2(k) = P_2(k). \quad (17)$$

4) Пусть $\{S_4\}$ есть множество стратегий S_4 , получаемое из $\{S_3\}$ путем изменения условий остановки поиска, соответствующих $S_3 \in \{S_3\}$, таким образом, что поиск считается успешно оконченным на k -ом шаге, если $H(x/J_k) \leq \epsilon$, а $H(x/J_{k-1}) > \epsilon$, где ϵ — заданное неотрицательное. Заметим, что если при использовании S_3 поиск успешно окончился на k -ом шаге, то $H(x/J_k) = 0$, как это отмечалось выше. Поэтому при лю-

бом $\epsilon \geq 0$ новые условия остановки поиска зафиксируют в этом случае успешный исход на шаге $v \leq k$ и, следовательно,

$$P_4(k) \leq P_3(k), \quad (18)$$

где $P_4(k)$ — вероятность отказа после k -го шага поиска при использовании S_4 .

5) Если $S_{\max} \in \{S_4\}$, то, в силу (12), (17), (18), $P_4(k) \leq P_1(k)$, т. е. $P_0(k) \leq P_1(1)$, и из (10) следует соотношение (4), которое требуется получить.

Итак, покажем, что $S_{\max} \in \{S_4\}$. Действительно, условия остановки поиска для S_{\max} и $S_4 \in \{S_i\}$ одинаковы, и остается показать, что если при поиске по S_{\max} на k -ом шаге выполняется условие (5), то соответствующее $\sigma(i)$ не используется ни на одном шаге $k' > k$.

Итак, пусть на k -ом шаге поиска по S_{\max} справедливо $\Delta_k \xi(i) = \alpha(m) - \alpha(1)$, и нас интересует выбор возможности $\sigma \in \Sigma$ на некотором шаге $v > k$ в случае

$$H(x/J_{v-1}) > \epsilon, \quad (19)$$

т. е. когда поиск еще не окончен. Прежде всего заметим, что в этом случае существует хотя бы одна точка $x_t \in X$ ($1 \leq t \leq n$), такая, что $\Delta_{v-1} \xi(i) < \alpha(m) - \alpha(1)$, ибо в противном случае $H(x/J_{v-1}) = 0$, что противоречит (19).

Предположим теперь, что $\sigma_v = \sigma(i)$, где i соответствует условию (5), справедливость которого мы предположили. Тогда результат $\xi(i) = \varphi(x_i) + \zeta(i)$ от использования $\sigma(i)$ на v -ом шаге не может изменить тот факт, что значение $\varphi(x_i)$ известно в силу (5), и не может дать никакой информации о значениях $\varphi(x)$ в других точках в силу независимости величин $\zeta(i)$. Поэтому при $\sigma_v = \sigma(i)$ $f(j/J_{v-1}) = f(j/J_v)$, $H(x/J_{v-1}) = H(x/J_v)$ и, независимо от значения $\xi(i)$, которое будет получено, $G(x/J_v) = G(x/J_{v-1})$, т. е. $G(x/J_v) - G(x/J_{v-1}) = 0$, где $G(x/J_v) = H(x) - H(x/J_v)$ есть количество полученной за v шагов информации о расположении экстремума.

Следовательно, математическое ожидание количества получаемой информации о расположении минимума при использовании $\sigma(i)$ на шаге $v > k$ равно нулю, если справедливо (5). Поэтому, если среди точек $x_i \in X$, в которых $\varphi(x_i)$ неизвестно (множество этих точек обозначим $X_1 \subset X$, $X_1 \neq \emptyset$, где \emptyset — пустое множество), существует хоть одна, которой соответствует $\sigma(t)$, обеспечивающая положительное математическое ожидание количества получаемой информации о расположении минимума $\varphi(x) \in \Phi$, то по принципу максимума информации возможность $\sigma(i)$ не может быть выбрана для использования на шаге $v > k$. Покажем, что такое $\sigma(t)$ существует.

Рассмотрим подмножество Φ_1 множества Φ такое, что $\varphi_j(x) \in \Phi_1$ тогда и только тогда, когда $f(j/J_{v-1}) > 0$, и выберем такую функцию $\varphi^*(x) \in \Phi_1$, которая удовлетворяет условию

$$z = \min_{1 \leq p \leq n} \varphi^*(x_p) = \min_{\varphi_j \in \Phi_1} \min_{1 \leq p \leq n} \varphi_j(x_p).$$

Пусть x_t есть точка, в которой $\varphi^*(x)$ достигает минимума. Если значение функции $\varphi(x)$, минимум которой мы ищем, в точке x_t известно и равно z , то экстремум $\varphi(x)$ расположен в точке x_t и $H(x/J_{v-1}) = 0$, ибо ни в какой другой точке уже не может быть меньшего значения. Поэтому из условия (19) следует, что x_t не совпадает ни с одной из точек x_i , для которых справедливо (5), т. е. $x_t \notin X_1$. Если мы теперь используем возможность $\sigma(t)$ на v -ом шаге, то получим результат $\xi(t) = \varphi(x_t) + \zeta(t)$,

который с положительной вероятностью может оказаться равным $\varphi^*(t) + \alpha(1)$, приводя к $H(x/J_s) = 0$ и $G(x/J_s) - G(x/J_{s-1}) > 0$.

Таким образом, математическое ожидание количества получаемой информации о расположении минимума функции $\varphi(x)$ при использовании данного $\sigma(t)$ будет положительно.

Автор благодарит Л. А. Растигина за полезное предложение использовать марковские цепи для уточнения оценки (10), высказанное в рецензии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Стронгин, Автоматика и телемеханика, 27, 113 (1966).
2. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Стронгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 17 (1966).
3. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Стронгин, Тезисы докладов второго симпозиума по экстремальным задачам, Рига, 1965.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 октября 1966 г.

ON THE CONVERGENCE OF THE EXTREMUM SEEKING METHOD BASED ON THE MAXIMUM INFORMATION PRINCIPLE IN THE PRESENCE OF RANDOM ERRORS

R. G. Strongin

Seeking for an extremum of a real function with the use of a strategy based on the maximum information principle in the presence of random errors is considered in this paper. It is shown that the search converges to a solution (i. e. the probability of not finding an extremum tends to zero) and that the mathematical expectation of the expenses for the search is a finite value.

УДК 62—506

УСТАНОВИВШИЙСЯ ПРОЦЕСС В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

B. N. Смирнова, M. L. Тай

Рассматривается простейшая модель многомерной экстремальной системы при наличии помех, являющаяся обобщением одномерной модели, изученной в [1]. Найдено стационарное распределение, характеризующее установившийся процесс.

1. В [1] впервые был изучен установившийся процесс в одномерной дискретной модели безынерционной экстремальной системы при наличии случайных помех. В дальнейшем эта задача исследовалась в довольно большом количестве работ, обзор которых дан в [2]. Принятые в [1] предположения относительно характера случайной помехи и алгоритма работы экстремальной системы приводят к рассмотрению стационарного распределения в дискретной марковской цепи с одинаковыми для всех состояний (за исключением точки экстремума) вероятностями перехода за один шаг к точке экстремума и от нее. Более сложные модели одномерных экстремальных систем с зависящими от состояний вероятностями перехода изучались в [3, 4] и были использованы при получении полезных и интересных результатов для экстремальных систем с параболической характеристикой [4]. Как было указано [1], представляет интерес обобщение результатов, полученных в одномерном случае для многомерных экстремальных систем.

В связи с этим в данной работе исследуется установившийся процесс в простейшей модели многомерной экстремальной системы при наличии случайных воздействий. Найденные результаты могут быть использованы для определения полезных на практике оценок средней погрешности и оптимальной в смысле минимума средней погрешности конструкции многомерных экстремальных систем.

2. Рассмотрим влияние случайной помехи на простейшую экстремальную систему — систему поиска минимума функции $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в области $G(|x_i| \leq N_i)$. Пусть функция $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет единственную точку минимума (для определенности в начале координат), и при поиске могут измеряться лишь величины $Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y(x_1, x_2, \dots, x_n) + \xi$, где ξ — случайная последовательность с независимыми приращениями.

Предположим, что процесс совершается дискретно по времени и за один такт может произойти перемещение не более, чем вдоль одной из координат, причем величину шага h будем считать одинаковой для всех координат и равной 1*. Из-за влияния помехи изменение координаты за один такт случайно может быть положительным, отрицательным или

* Предположение независимости величины шага от номера координаты не ограничивает общности рассмотрения ввиду того, что этого всегда можно добиться изменением масштабов по координатам.

нулем. Аналогично одномерному случаю будем считать, что в процессе отыскания минимума изменение координат на каждом шаге зависит лишь от того состояния, которое было достигнуто в конце предыдущего шага, и совершенно не зависит от предшествующих перемещений. Тогда процесс поиска является марковской последовательностью и описывается вероятностями перехода из точки \mathbf{x} в точку \mathbf{y} за k шагов $P_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}(k)$. Согласно описанному алгоритму, все вероятности перехода за один шаг, за исключением

$$\begin{aligned} P_i^+(x) &= P_{x_1, \dots, x_l, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_l + 1, \dots, x_n}, \quad P_i^-(x) = P_{x_1, \dots, x_l, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_l - 1, \dots, x_n}, \\ P_x^x(x) &= 1 - \sum_{l=1}^n (P_i^+ + P_i^-), \end{aligned} \quad (1)$$

которые обозначают соответственно вероятности того, что изменение i -ой координаты ($i = 1, 2, \dots, n$) за один шаг равно единице, минус единице или нулю, равны нулю. При отыскании стационарного распределения $\{u(\mathbf{x})\} = \{\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\mathbf{x}}^y(k)\}$, характеризующего установившийся процесс в многомерной системе с произвольными вероятностями перехода (1), по-видимому, невозможно выразить результат в виде поддающемуся анализу, так как даже в одномерном случае соответствующий результат довольно сложен. Ввиду этого необходимо ввести некоторые дополнительные ограничения, позволяющие хотя бы приближенно оценивать установившиеся режимы в реальных многомерных системах.

Ограничение, которое будет введено, является для многомерных систем естественным обобщением условия равенства вероятностей перехода к точке экстремума и от нее, использованного в одномерном случае.

Область G состоит из разделенных координатными плоскостями связных областей G_k ($k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$), где j -ый разряд двоичной записи числа k равен нулю, если $x_j > 0$, и единице, если $x_j < 0$. Будем говорить, что области G_{k_1} и G_{k_2} эквивалентны по координате j ($G_{k_1} \geq G_{k_2}$), если j -ые двоичные разряды чисел k_1 и k_2 совпадают, т. е. в G_{k_1} и G_{k_2} совпадают знаки j -ой координаты. Если области G_{k_1} и G_{k_2} неэквивалентны по координате j , то назовем одну из них положительной ($x_j > 0$), другую — отрицательной по координате j .

Предположим, что вероятности перехода (1) не зависят от положения точки \mathbf{x} внутри области G_k и совпадают в областях, эквивалентных по той координате, которая изменяется при совершении одного шага, т. е.

$$\begin{aligned} P_{x_1, \dots, x_l, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_l + 1, \dots, x_n} &= p_i(1, s_i), \\ P_{x_1, \dots, x_l, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_l - 1, \dots, x_n} &= p_i(-1, s_i), \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_i = \operatorname{sgn} x_i \neq 0$.

Пусть, кроме того, вероятности перехода (1) равны нулю при выполнении хотя бы одного из условий

$$\text{а) } |x_\alpha| > N_\alpha, \quad \text{б) } |y_\alpha| > N_\alpha, \quad \text{в) } x_\alpha = 0, y_\beta \neq x_\beta \text{ (при } \beta \neq \alpha\text{).} \quad (3)$$

Условия а) и б) вытекают из ограниченности области G , а условие в) запрещает переходы по координатным плоскостям, так что все состояния, расположенные на пересечении хотя бы двух координатных плоскостей, являются недостижимыми. Обозначим вероятности перехода из остальных точек координатных плоскостей через

$$\begin{aligned} p_i(1) &= P_{x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n}, \\ p_i(-1) &= P_{x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots, x_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема. В многомерной марковской цепи, вероятности перехода которой удовлетворяют условиям (2), (3), (4), стационарное распределение (μ_x) при x , не лежащем на пересечении координатных плоскостей, задается формулой

$$u(x) = c \prod_{i=1}^n \gamma(x_i) \left[\frac{p_i(1, s_i)}{p_i(-1, s_i)} \right]^{x_i}, \quad (5)$$

где $s_i = \operatorname{sgn} x_i$, $\gamma(x_i) = 1$, если $x_i = 0$, $p_i(s_i)[p_i(s_i, s_i)]^{-1}$, если $x_i \neq 0$, c — постоянная нормировки, определяемая из условия $\sum_{x \in G} u(x) = 1$. Для остальных x $u(x) = 0$.

Доказательство. Последнее утверждение теоремы сразу следует из недостижимости точек, лежащих на пересечении координатных плоскостей.

Стационарное распределение удовлетворяет системе уравнений

$$u(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{x_1, \dots, x_n} p_{x_1, \dots, x_n}^{y_1, \dots, y_n} (1) u(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (6)$$

Согласно условиям (2) — (4), в каждой из областей G_k система уравнений (6) является системой разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Поэтому решение для каждой области G_k будем искать в виде

$$u(x) = a_k \prod_{i=1}^n z_{ik}^{x_i}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) при условии $2 \leq |x_i| \leq N_i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), имеем

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n z_{ik}^{y_i} &= \sum_{l=1}^n \left\{ z_{ik}^{y_l-1} p_i(1, s_i) + z_{ik}^{y_l+1} p_i(-1, s_i) \right\} \prod_{j \neq l} z_{jk}^{y_j} + \\ &+ \left\{ 1 - \sum_{l=1}^n [p_i(1, s_i) + p_i(-1, s_i)] \right\} \prod_{l=1}^n z_{lk}^{y_l}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n [p_i(1, s_i) + p_i(-1, s_i)] = \sum_{i=1}^n [p_i(1, s_i) z_{ik}^{-1} + p_i(-1, s_i) z_{ik}]. \quad (8)$$

После подстановки (7) в (6) при $y_l = \pm N_l$, в силу условий а), б), имеем

$$\begin{aligned} p_i(-s_i, s_i) + \sum_{j \neq i} [p_j(1, s_j) + p_j(-1, s_j)] &= p_i(s_i, s_i) z_{ik}^{-s_i} + \\ &+ \sum_{j \neq i} [p_j(1, s_j) z_{jk}^{-1} + p_j(-1, s_j) z_{jk}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) находим

$$z_{ik} = \frac{p_i(1, s_i)}{p_i(-1, s_i)}. \quad (10)$$

Для того, чтобы найти связь между постоянными a_k в разных областях, рассмотрим сначала две области G_{k_1} и G_{k_2} , эквивалентные по всем координатам, за исключением x_α . Будем считать G_{k_1} положительной, а G_{k_2} отрицательной по координате α . Подставляя (7) в уравнение (6) для точек

$M_1(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, 1, \dots, x_n)$ и $M_2(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, -1, \dots, x_n)$, получаем

$$\begin{aligned} a_{k_1} \sum_{i=1}^n [p_i(1, s_i) + p_i(-1, s_i)] &= p_\alpha(1) u_\alpha(x) \left[\prod_{l=1}^n z_{lk_1}^{x_l} \right]^{-1} + \\ &+ a_{k_1} z_{\alpha k_1}^{-1} p_\alpha(-1, s_\alpha) + a_{k_1} \sum_{j \neq \alpha} [z_{jk_1} p_j(-1, s_j) + z_{jk_1}^{-1} p_j(1, s_j)], \\ a_{k_2} \sum_{i=1}^n [p_i(1, s_i) + p_i(-1, s_i)] &= p_\alpha(-1) u_\alpha(x) \left[\prod_{l=1}^n z_{lk_2}^{x_l} \right]^{-1} + \\ &+ a_{k_2} z_{\alpha k_2}^{-1} p_\alpha(1, s_\alpha) + a_{k_2} \sum_{j \neq \alpha} [z_{jk_2} p_j(-1, s_j) + z_{jk_2}^{-1} p_j(1, s_j)], \end{aligned}$$

где через $u_\alpha(x)$ обозначена вероятность $u(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, 0, x_{\alpha+1}, \dots, x_n)$.

Преобразование последних двух уравнений с помощью (10) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} a_{k_1} p_\alpha(-1, 1) \prod_{l=1}^n z_{lk_1}^{x_l} &= p_\alpha(1) u_\alpha(x), \\ a_{k_2} p_\alpha(1, -1) \prod_{l=1}^n z_{lk_2}^{x_l} &= p_\alpha(-1) u_\alpha(x), \end{aligned} \quad (11)$$

следствием которых является уравнение (6) для точки $(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, 0, x_{\alpha+1}, \dots, x_n)$. Тогда

$$\frac{z_{\alpha k_1} a_{k_1}}{z_{\alpha k_2}^{-1} a_{k_2}} = \frac{p_\alpha(1)}{p_\alpha(-1)} \frac{p_\alpha(1, -1)}{p_\alpha(-1, 1)}$$

и, следовательно,

$$\frac{a_{k_1} p_\alpha(1, 1)}{p_\alpha(1)} = \frac{a_{k_2} p_\alpha(-1, -1)}{p_\alpha(-1)}. \quad (12)$$

Равенство (12) выражает связь между коэффициентами a_k в двух областях, разделенных одной координатной плоскостью, и позволяет доказать, что величина произведения

$$a_k \prod_{i=1}^n \frac{p_i(s_i, -s_i)}{p_i(s_i)} \quad (s_i = \operatorname{sgn} x_i, x \in G_k) \quad (13)$$

не зависит от области G_k . Обозначая эту инвариантную величину через c , получаем

$$a_k = c \prod_{l=1}^n \frac{p_i(s_l)}{p_i(s_l, s_l)}. \quad (14)$$

Чтобы доказать сделанное утверждение, заметим, что любую точку $M_1(x) \in G_{k_1}$ ($x_{j_1} > 0, \dots, x_{j_l} > 0, 1 \leq l \leq m, x_{j_{l+1}} < 0, \dots, x_{j_m} < 0$) можно соединить кривой с произвольной точкой M_2 , принадлежащей области $G_{k_{m+1}}$, эквивалентной G_{k_1} по всем координатам, кроме x_{j_1}, \dots, x_{j_m} .

Пусть L — такая кривая, последовательно проходящая через области $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_{m+1}}$ и пересекающая координатные плоскости $x_{j_1} = 0, \dots, x_{j_m} = 0$, (в силу (4) безразличен порядок, в котором происходит пересечение). Согласно (12),

$$\begin{aligned} \frac{a_{k_1} p_{j_1}(1, 1)}{p_{j_1}(1)} &= \frac{a_{k_2} p_{j_1}(-1, -1)}{p_{j_1}(-1)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \frac{a_{k_l} p_{j_l}(1, 1)}{p_{j_l}(1)} &= \frac{a_{k_{l+1}} p_{j_l}(-1, -1)}{p_{j_l}(-1)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \frac{a_{k_{l+1}} p_{j_{l+1}}(-1, -1)}{p_{j_{l+1}}(-1)} &= \frac{a_{k_{l+2}} p_{j_{l+1}}(1, 1)}{p_{j_{l+1}}(1)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \frac{a_{k_m} p_{j_m}(-1, -1)}{p_{j_m}(-1)} &= \frac{a_{k_{m+1}} p_{j_m}(1, 1)}{p_{j_m}(1)} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_{k_1} \prod_{\alpha=1}^l \frac{p_{j_\alpha}(1, 1)}{p_{j_\alpha}(1)} \prod_{\beta=1}^{m-l} \frac{p_{j_{l+\beta}}(-1, -1)}{p_{j_{l+\beta}}(-1) - 1} &= \\ = a_{k_{m+1}} \prod_{\alpha=1}^l \frac{p_{j_\alpha}(-1, -1)}{p_{j_\alpha}(-1)} \prod_{\beta=1}^{m-l} \frac{p_{j_{l+\beta}}(1, 1)}{p_{j_{l+\beta}}(1)}. & \end{aligned}$$

Ввиду эквивалентности областей G_{k_1} и $G_{k_{m+1}}$ по всем остальным координатам и в согласии с условием (4) получаем (13).

Подставляя (13) и (10) в (6), получаем для всех точек областей G_k

$$u(x) = c \prod_{i=1}^n \frac{p_i(s_i)}{p_i(s_i, s_i)} \left[\frac{p_i(1, s_i)}{p_i(-1, s_i)} \right]^{x_i}, \quad (15)$$

а из (11)

$$u_a(x) = c \prod_{i \neq a} \frac{p_i(s_i)}{p_i(s_i, s_i)} \left[\frac{p_i(1, s_i)}{p_i(-1, s_i)} \right]^{x_i}, \quad (16)$$

что и доказывает теорему*.

* Отметим, что если $p_{x_1, \dots, x_l, \pm 1, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_l, \pm 1, \dots, x_n} = g(\pm 1, x_l) \prod_{\alpha \neq l} s_\alpha(x_\alpha)$, где g_l и s_l всюду положительны, за исключением $g_l(1, N_l) = g_l(-1, -N_l) = g_l(-1, 1 + N_l) = g_l(1, -1, -N_l)$, аналогичным методом получаем $u(x_1, \dots, x_n) = c \cdot \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{\beta=-N_i+1}^{x_i} \frac{9i(1, \beta - 1)}{9i(-1, \beta)} \right\}$.

С помощью найденного стационарного распределения можно находить математические ожидания и дисперсии различных величин, характеризующих установившийся процесс поиска.

3. Отметим некоторые обобщения рассмотренной модели.

а) В отличие от уже изученной модели, где предполагалось, что, за исключением случаев $x_\alpha = N_\alpha$, $y_\alpha = N_\alpha + 1$; $x_\alpha = -N_\alpha$, $y_\alpha = -N_\alpha - 1$ ($\alpha = 1, \dots, n$), все вероятности перехода $P_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}$ равны соответственным вероятностям перехода внутри области G , найдем стационарное распределение в следующей модели. Пусть $P_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} = 0$ при $x_\alpha = y_\alpha = N_\alpha$ ($x_\alpha = -y_\alpha = -N_\alpha$), $x_\beta \neq y_\beta$ и

$$P_{x_1, \dots, x_n}^{x_1, \dots, N_\alpha - 1, \dots, x_n} = q_\alpha(-1), \quad P_{x_1, \dots, -N_\alpha, \dots, x_n}^{x_1, \dots, -N_\alpha + 1, \dots, x_n} = q_\alpha(1)$$

независимо от значений x_i при $i \neq \alpha$ и $x_i \neq 0$. В этой модели недостижимы все точки, лежащие на пересечении хотя бы двух плоскостей $|x_\alpha| = N_\alpha$. Стационарное распределение, характеризующее установившийся процесс, дается формулами (5), если $|x_i| \neq N_i$ ($i = 1, \dots, n$). При $|x_\alpha| = N_\alpha$, $|x_i| \neq N_i$ ($i \neq \alpha$) легко получаем

$$u(x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_n) = c \frac{p_\alpha(-s_\alpha, s_\alpha)}{q_\alpha(-s_\alpha)} \prod_{i=1}^n \frac{p_i(s_i)}{p_i(s_i, s_i)} \left[\frac{p_i(1, s_i)}{p_i(-1, s_i)} \right]^{x_i}.$$

б) Представляет интерес исследование экстремальной системы, в которой область $G \{ |x_i| \leq N_i; i = 1, \dots, n \}$ разбивается более, чем на 2^n областей. Пусть плоскости $x_i = M_i^{k_i}$ ($i = 1, \dots, n$; $k_i = 0, \dots, m_i + 1$; $-N_i = M_i^0 < M_i^1 < \dots < M_i^{m_i+1} = N_i$) разбивают область G на $\prod_{i=1}^n m_i$ связных областей G_k .

В этом случае будем называть области G_{k_1} и G_{k_2} эквивалентными по координате x_α , если интервалы изменения x_α для обеих областей совпадают, т. е. в G_{k_1} и G_{k_2} одновременно $M_\alpha^{k_\alpha} < x_\alpha < M_\alpha^{k_\alpha + 1}$ ($0 \leq k_\alpha \leq m_\alpha$). Так же, как и в основной модели, будем предполагать, что вероятности перехода за один шаг не зависят от положения точки \mathbf{x} внутри области G_k и совпадают в областях, эквивалентных по координате, изменяющейся при совершении шага. Обозначим

$$p_i(1, s_i) = P_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_{i-1} x_i + 1, \dots, x_n}, \quad p_i(-1, s_i) = P_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_{i-1} x_i - 1, \dots, x_n},$$

где s_i определяется из условия $M_i^{s_i} < x_i < M_i^{s_i + 1}$.

Аналогично введем вероятности перехода с разделяющих плоскостей $x_i = M_i^l$:

$$p_i^l(1) = P_{x_1, \dots, x_{i-1}, M_i^l + 1, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_{i-1}, M_i^l + 1, \dots, x_n},$$

$$p_i^l(-1) = P_{x_1, \dots, x_{i-1}, M_i^l - 1, \dots, x_n}^{x_1, \dots, x_{i-1}, M_i^l - 1, \dots, x_n}.$$

Тогда стационарное распределение находится по формуле

$$u(\mathbf{x}) = c \prod_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{p_i(1, s_i)}{p_i(-1, s_i)} \right]^{x_i} \prod_{\alpha=1}^{s_i} \frac{p_i^\alpha(1)}{p_i(1, \alpha)} \prod_{\beta=s_i+1}^{m_i} \frac{p_i^\beta(-1)}{p_i(-1, \beta)} \right\}.$$

в) В основной модели было использовано существенное ограничение — отсутствие перемещений в координатных плоскостях. Попытка полностью освободиться от этого условия приводит к усложнению результатов. Поэтому выясним характер условий, которым должны удовлетворять вероятности перехода в многообразиях разных размерностей, для того, чтобы стационарное распределение в областях, G_k , а следовательно, и в точках координатных плоскостей, не лежащих на их пересечении, определялось согласно (5).

Обозначим через $P_{i(a)}(\pm 1, s_i)$ вероятности перехода из точки $x(x_a = 0, x_i \neq 0)$ в точку $y(y_a = 0, y_i = x_i \pm 1)$. Поставленная задача имеет решение, если уравнения (6) для точек координатных плоскостей, не лежащих на их пересечении, являются следствием уравнений (11). После преобразований это приводит к условию

$$\sum_{i \neq a} [p_i(1, s_i) - p_i(-1, s_i)] \left[\frac{p_{i(a)}(1, s_i)}{p_i(1, s_i)} - \frac{p_{i(a)}(-1, s_i)}{p_i(-1, s_i)} \right] = 0. \quad (17)$$

Простейшими случаями, в которых выполняется (17), являются

$$1) \quad p_{i(a)}(1, s_i) = p_{i(a)}(-1, s_i) = 0,$$

рассмотренный выше в разделе 2,

$$2) \quad \frac{p_{i(a)}(1, s_i)}{p_{i(a)}(-1, s_i)} = \frac{p_i(1, s_i)}{p_i(-1, s_i)}. \quad (18)$$

Формула (18) представляет условие согласования вероятностей перехода в n -мерном и $(n-1)$ -мерном многообразиях. При рассмотрении многообразий размерностей, меньших, чем $(n-1)$, появляются дополнительные условия, аналогичные (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум, Автоматика и телемеханика, **20**, № 8, 1056 (1959).
2. В. П. Тарасенко, В. М. Матушевский, Тр. Сиб. физико-технического института, **44**, 65 (1964).
3. А. А. Первозванский, Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, ИФМНЛ, М., 1962.
4. Т. И. Товстуха, Автоматика и телемеханика, **21**, № 5, 575 (1960).

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете Поступила в редакцию 14 октября 1966 г.

THE STEADY PROCESS IN THE SIMPLIEST MODEL OF THE MULTIDIMENSIONAL EXTREMAL SYSTEM

V. N. Smirnova, M. I. Tay

This paper considers the simpliest model of the multidimensional extremal system with random noise. This model is a generalization of a onedimentional mode presented in [1]. The stationary distribution characterising the steady process is derived

УДК 531.391.5

АБСОЛЮТНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

B. A. Брусин, M. L. Тай

Вводится понятие абсолютной стохастической устойчивости. Методом В. М. Попова находятся достаточные условия абсолютной стохастической устойчивости для класса систем с «нелинейностью в угле». Получены оценки на всевозможные характеристики выходного процесса.

Изучение систем управления, находящихся в реальных условиях, приводит к задаче о поведении динамических систем при наличии случайных возмущений и, в частности, к исследованию устойчивости таких систем.

В связи с этой задачей в [1—2] и других работах были введены статистические обобщения понятия устойчивости в смысле Ляпунова и распространены основные теоремы прямого метода.

Однако интересные результаты, полученные на этом пути, в основном относятся к линейным системам или системам, близким к линейным. Новым этапом в исследовании существенно нелинейных динамических систем (без случайных возмущений) явились работы В. М. Попова, в которых предложен новый подход к изучению таких систем. В частности, Поповым [3] была решена задача об абсолютной устойчивости, поставленная в 1944 году Лурье и Постниковым [4].

Естественно попытаться распространить метод Попова для изучения стохастических нелинейных систем. В настоящей работе делается первая, насколько нам известно, такая попытка.

На основе общей концепции [5] в работе введено понятие стохастической устойчивости, которое позволяет применить метод Попова. В силу специфики метода полученные результаты справедливы не только для отдельной системы, но и для целого класса систем. Поэтому с самого начала вводится понятие абсолютной стохастической устойчивости — понятие, характеризующее класс систем.

Доказанная в работе теорема дает достаточные условия абсолютной стохастической устойчивости и оценки изучаемых стохастических процессов.

1. Пусть $\xi(t, \lambda)$ — функция, определенная на множестве $\Gamma \times \Lambda$, где Γ — упорядоченное множество, и на множестве Λ определена σ -алгебра B и вероятностная мера P [6]. Тогда говорят ([6]), что $\xi(t, \lambda)$ — случайный процесс (случайная функция), заданный на вероятностном пространстве (Λ, B, P) . Функция переменного t (при фиксированном $\lambda \in \Lambda$) $\xi_\lambda(t) = \xi(t, \lambda)$ ($t \in \Gamma$) называется реализацией случайного процесса $\xi(t, \lambda)$.

Будем говорить, что случайный процесс $y(t, \lambda)$ порождается случайнм процессом $\xi(t, \lambda)$, если существует оператор Ω , отображающий множество реализаций $\xi_\lambda(t)$ процесса $\xi(t, \lambda)$ на множество реализаций $y_\lambda(t)$ процесса $y(t, \lambda)$, т. е. $y_\lambda(t) \equiv y_\lambda = \Omega[\xi_\lambda] = \Omega[\xi_\lambda(t), t \in \Gamma]$. В соответствии с общей концепцией [5] будем называть оператор Ω динами-

ческим, если он индуцирует семейство функционалов ω_τ ($\tau \in \Gamma$), определенных на множестве функций переменного t :

$$\xi_\lambda(t) = \{\xi_\lambda(t), \lambda \in \Lambda, t \leq \tau\},$$

и таких, что для всех реализаций $y_\lambda(t) \equiv y_\lambda = \Omega[\xi_\lambda]$ справедливо равенство

$$y_\lambda(\tau) = \omega_\tau [\xi_\lambda(t)]$$

для любого фиксированного $\tau \in \Gamma$.

Пусть Ξ и Y — два множества, элементами которых являются соответственно случайные процессы $\xi(t, \lambda)$ и $y(t, \lambda)$, заданные на вероятностном пространстве (Λ, B, P) , причем каждый случайный процесс $y(t, \lambda) \in Y$ порождается динамическим оператором Ω из некоторого $\xi(t, \lambda) \in \Xi$.

В этом случае скажем, что оператор Ω определяет динамическую систему с входом $\xi(t, \lambda)$ и выходом $y(t, \lambda)$. Для такой динамической системы обычным образом можно ввести понятие устойчивости, определив на множествах Ξ и Y нормы $r(\xi)$ и $\rho(y)$. Так как эти нормы суть некоторые вероятностные характеристики случайных процессов, то и понятие устойчивости, получающееся с помощью этих норм, носит стохастический характер. Учитывая это, вводим следующее определение.

Определение 1. Динамическую систему, входом которой служит случайный процесс $\xi(t, \lambda)$ и выходом — случайный процесс $y(t, \lambda)$, будем называть стохастически устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $r(\xi) < \delta$, то $\rho(y) \leq \varepsilon(\delta)$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Понятие стохастической устойчивости, а также понятие абсолютной стохастической устойчивости, естественно, зависят от способа введения норм $r(\xi)$ и $\rho(y)$. Ниже будем предполагать, что случайный процесс $\xi(t, \lambda)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t \in \Gamma} E \int_{\Lambda} \xi^2(t, \lambda) dP(\lambda) < \infty, \quad (1)$$

а множество Γ — либо полуправая $[0, \infty)$, либо счетное множество $[0, \tau, 2\tau, \dots, n\tau, \dots]$. Тогда в пространстве Ξ введем (норму)

$$r(\xi) = \sup_{t \in \Gamma} E \int_{\Lambda} \xi^2(t, \lambda) dP(\lambda), \quad (2a)$$

а в пространстве Y норму

$$\rho(y) = E \int_{\Lambda} J_y(\lambda) dP(\lambda), \quad (2b)$$

где

$$J_y(\lambda) = \begin{cases} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t, \lambda) dt & (\text{если } \Gamma = [0, \infty)) \\ \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N y^2(n\tau, \lambda) & (\text{если } \Gamma = [0, \tau, \dots]). \end{cases}$$

2. В дальнейшем будем рассматривать конкретную динамическую систему, а именно, систему управления, структурная схема которой изображена на рис. 1, где $w(t)$ — импульсная переходная функция ли-

нейного звена, $W(p)$ — его коэффициент передачи, $\varphi(x)$ — характеристика нелинейного звена. К выходу нелинейного звена при $t > 0$ аддитивно приложен случайный сигнал $\xi(t, \lambda)$, а к выходу линейного звена — неслучайное воздействие $f(t)$.

Объединим случаи $\Gamma = [0, \infty)$ и $\Gamma = [0, \tau, 2\tau, \dots]$, полагая, что в непрерывном случае (т. е. $\Gamma = [0, \infty)$) функции $w(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $f(t)$, $\xi(t, \lambda)$ непрерывные, а в дискретном случае — кусочно-постоянные с раз-

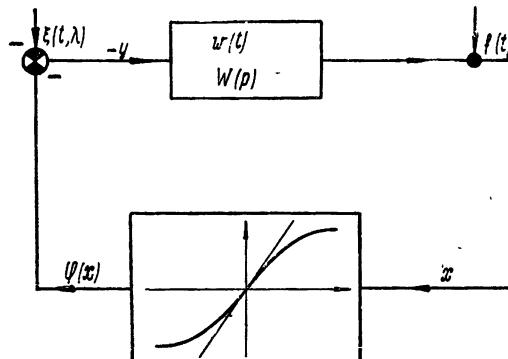


Рис. 1.

рывами в моменты $0, \tau, \dots, n\tau, \dots$. (В дискретном случае $W(p) = W^*(e^{i\tau p})$.) Учитывая это, уравнение системы в обоих случаях записывается в виде

$$\begin{aligned} x(t, \lambda) &= - \int_0^\infty w(\tau) y(t - \tau, \lambda) d\tau + f(t), \\ y(t, \lambda) &= \varphi[x(t, \lambda)] + \xi(t, \lambda) \quad (t \in \Gamma). \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть

1) характеристика $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$0 \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq h \quad (\text{при } x \neq 0, \varphi(0) = 0) \tag{4}$$

и, кроме того,

$$|\varphi(x)| < \infty, \quad x \in [-\infty, +\infty]; \tag{5}$$

$$2) \quad y(t) \equiv 0 \quad (\text{при } t < 0); \tag{6}$$

$$3) \quad \int_0^\infty |w(t)| dt < \infty \quad \int_0^\infty |f(t)| dt < \infty; \tag{7}$$

$$4) \quad E_\lambda \{\xi(t, \lambda)\} = 0, \quad E_\lambda \{\xi^2(t, \lambda)\} < \sigma^2 < \infty. \tag{8}$$

С точки зрения изложенного в разделе 1 систему (3) — (8) можно рассматривать как динамическую систему, зависящую от функционального параметра $f(t)$, входом которой является случайный процесс

$\xi(t, \lambda)$, а выходом — случайный процесс $y(t, \lambda)$. Оператор этой динамической системы задается уравнениями (3)*.

Для класса систем вида (3)–(8), т. е. совокупности всех систем управления, описывающихся уравнениями (3)–(8) с фиксированной функцией $w(t)$ и константой h , введем определение.

Определение 2. Класс систем (3)–(8) будем называть абсолютно стохастически устойчивым, если каждая система из этого класса стохастически устойчива.

3. Ниже будет показано, что метод Попова можно использовать для получения достаточных условий стохастической абсолютной устойчивости класса систем управления (3)–(8). Прежде чем перейти к доказательству соответствующей теоремы, обозначим

$$\sigma_{\xi_p}(t; t_1) = \sup_{\{\mu(\tau)\}} |E\{\xi(t) p(t)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t_1 < t\}| \quad (9)$$

и введем определение.

Определение 3. Назовем случайный процесс $\xi(t, \lambda)$ равномерно условно-коррелированным со случайными процессами $p_j(t, \lambda)$ ($j=1, 2, \dots$), если для любого $t > 0$ существует такое $t_1 < t$ и не зависящая от t константа L ($0 \leq L < \infty$), что $\sigma_{\xi_p} \leq L \sigma^2$.

Примеры. 1) Пусть $\xi(t, \lambda)$ — случайный процесс ($E\{\xi(t, \lambda)\} = 0$), для которого существует такое $v > 0$, что значения $\xi(t, \lambda)$ в моменты t_1 и t_2 статистически независимы при $|t_1 - t_2| > v$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi_1}(t; t_1) &= \sup_{\{\mu(\tau)\}} |E\{\xi(t, \lambda)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t_1 < t - v\}| = \\ &= |E \xi(t, \lambda)| = 0 \quad (\text{при } t_1 < t - v) \end{aligned}$$

и, следовательно, процесс $\xi(t, \lambda)$ равномерно условно-коррелирован с процессом $p(t, \lambda) \equiv 1$.

2) Случайный процесс $\xi(t, \lambda)$, удовлетворяющий условиям

$$E\{\xi^2(t, \lambda)\} \leq \sigma^2 < \infty, \quad \sigma_{\xi_1}(t; t_1) = 0 \quad (\text{при } t_1 < t - v),$$

равномерно условно-коррелирован с процессом $p(t, \lambda) = \int_0^t w(t-\zeta) \xi(\zeta, \lambda) d\zeta$ на выходе линейного динамического звена с $|w(t)| \leq k < \infty$ и с входом $\xi(t, \lambda)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} |E\{\xi(t) p(t)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t - v\}| &\leq k \left| E\{\xi(t, \lambda) \int_0^t \xi(\zeta, \lambda) d\zeta / \xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t - v\} \right| = \\ &= \mu(\tau), \quad \tau \leq t - v \quad \left| \leq k \left| \int_0^{t-v} \mu(s) ds \cdot E\{\xi(t)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t - v\} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} k \int_{t-v}^t E(\xi^2(t, \lambda) + \xi^2(s, \lambda)) ds \leq \sigma^2 k v. \right. \end{aligned}$$

* Предполагается, что для системы (3)–(8) справедлива теорема существования и единственности решения $Y(t, \lambda)$ на множестве τ при заданных функциях $\xi(t, \lambda)$ и $f(t)$.

3) Пусть $p_j(t, \lambda) = F_j(\xi(t, \lambda), \tau \leq t - v)^*$, где F_j — ограниченный оператор, а $\sigma_{\xi_j}(t; t - v) = 0$ ($v > 0$). Тогда при всех t и произвольном $\mu(\tau)$ ($\tau \leq t - v$)

$$|E\{\xi(t)p_j(t)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t - v\}| \leq |F_j\{\mu(\tau), \tau \leq t - v\}| \times \\ \times |E\{\xi(t)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t - v\}| = 0,$$

поэтому случайный процесс $\xi(t, \lambda)$ равномерно условно-коррелирован с процессом $p_j(t, \lambda)$, причем $L = 0$.

Теорема 1. Пусть $\xi(t, \lambda)$ равномерно условно-коррелирован с $p_1(t, \lambda) = x(t, \lambda)$, $p_2(t, \lambda) = \varphi(x(t, \lambda))$ и

$$\operatorname{Re} \left\{ W(j\omega) + \frac{1}{h} \right\} \geq \alpha > 0, \quad \omega \in [0, \infty), \quad W(j\omega) = \int_0^\infty w(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (10)$$

Тогда класс систем (3) — (8) стохастически абсолютно устойчив, причем

$$E\{J_y(\lambda)\} \leq \frac{\sigma^2}{\alpha h} (1 + 2L + Lh). \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим интегралы

$$S_1(T) = E \left\{ \int_0^T s_1(t, \lambda) dt \right\} = E \left\{ \int_0^T \left[x(t, \lambda) y(t, \lambda) + \frac{1}{h} \xi(t, \lambda) y(t, \lambda) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{h} y^2(t, \lambda) \right] dt \right\}, \\ S_2(T) = E \left\{ \int_0^T s_2(t, \lambda) dt \right\} = E \left\{ \int_0^T \xi(t, \lambda) y(t, \lambda) dt \right\} \quad (T \in \Gamma).$$

В силу (3) — (8),

$$|S_1(T)| < \infty, \quad |S_2(T)| < \infty. \quad (12a)$$

Действительно,

$$\left| E \left\{ \int_0^T y^2(t, \lambda) dt \right\} \right| \leq \left| E \left\{ \int_0^T (\varphi(x(t, \lambda)) + \xi(t, \lambda))^2 dt \right\} \right| \leq$$

$$\leq 2E \left\{ \int_0^T \varphi^2(x(t, \lambda)) dt \right\} + 2\sigma^2 T,$$

$$\left| E \left\{ \int_0^T \xi(t, \lambda) y(t, \lambda) dt \right\} \right| \leq E \left\{ \left| \int_0^T \xi^2(t, \lambda) dt \right| \right\} + E \left\{ \left| \int_0^T \xi(t, \lambda) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \varphi(x(t, \lambda)) dt \right| \leq \frac{3}{2} \sigma^2 T + \frac{1}{2} E \int_0^T \varphi^2(x(t, \lambda)) dt,$$

* При $p_j(t) = x^{(j-1)}(t)$ ($j=1, 2, \dots$), где $x(t)$ удовлетворяет системе (3), это предположение выполняется, если $w(t) = 0$ при $t < v$.

$$\begin{aligned}
& \left| E \left\{ \int_0^T x(t, \lambda) y(t, \lambda) dt \right\} \right| = \left| E \left\{ \int_0^T \left[- \int_0^\infty w(\tau) y(t - \tau, \lambda) d\tau + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + f(t) \right] y(t, \lambda) dt \right\} \right| \leq \left| E \left\{ \int_0^T f(t) y(t, \lambda) dt \right\} \right| + \left| E \left\{ \int_0^T \int_0^\infty w(t - \tau, \lambda) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times y(t, \lambda) d\tau dt \right\} \right| \leq \frac{1}{2} E \left\{ \int_0^T |\varphi(x(t, \lambda)) f(t)| dt \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left| \int_0^T |w(\tau)| \left| E \left\{ \int_0^T [y^2(t - \tau, \lambda) + y^2(t, \lambda)] d\tau \right\} \right| \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \sup_x |\varphi(x(t, \lambda))| \int_0^T |f(t)| dt + 2 \int_0^T |w(\tau)| d\tau \times \\
& \times \left[\sigma^2 T + E \left\{ \int_0^T \varphi^2(x(t, \lambda)) dt \right\} \right].
\end{aligned}$$

(Изменение порядка интегрирования по λ и t допустимо в силу известных теорем [6].)

Докажем, что

$$S_1(T) \geq -TL\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{h} \right), \quad S_2(T) \leq \sigma^2 T(1 + L) \quad (126)$$

$$(T \in \Gamma).$$

Учитывая (4), (8), (9), (12),

$$\begin{aligned}
S_1(T) &= \int_0^T E \{ s_1(t, \lambda) dt \} = \int_0^T E_{\mu(\tau)} \{ E[s_1(t, \lambda)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t_1(t)] \} dt \geq \\
&\geq - \int_0^T E_{\mu(\tau)} \left\{ L\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{h} \right) \right\} dt \geq -TL\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{h} \right), \\
S_2(T) &= \int_0^T E_{\mu(\tau)} \{ E[s_2(t, \lambda)/\xi(\tau) = \mu(\tau), \tau \leq t_1(t)] \} dt \leq \sigma^2 T(1 + L).
\end{aligned}$$

Используя (3) и равенство Парсеваля, получим

$$\begin{aligned}
\rho(T, \lambda) &= \int_0^T \left[x(t, \lambda) y(t, \lambda) - \frac{1}{h} y^2(t, \lambda) \right]^2 dt = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_D \left[W(j\omega) + \frac{1}{h} \right] |Y_T(j\omega, \lambda)|^2 d\omega + \int_0^T f(t) y(t, \lambda) dt \quad (T \in \Gamma),
\end{aligned}$$

где $Y(j\omega, \lambda)$ — фурье-преобразование от

$$Y_1(t, \lambda) = \begin{cases} y(t, \lambda) & (0 \leq t \leq T), \\ 0 & (t > T), \end{cases}$$

а $D = (-\infty, \infty)$, если $\Gamma = [0, \infty)$, и $[-\pi, \pi]$, если $\Gamma = [0, \tau, \dots)$. Согласно (10) и (12б), при любом $T > 0$

$$\begin{aligned} -TL\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{h}\right) &\leq \frac{1}{h} S_2(T) + E\{\rho(T, \lambda)\} \leq \frac{T}{h} \sigma^2(1 + L) - \\ -\frac{1}{2\pi} E \left\{ \int_D \left[W(j\omega) + \frac{1}{h} \right] |Y_T(j\omega)|^2 d\omega \right. &+ \int_0^T |f(t)| |\varphi(x(t, \lambda))| dt \leq \\ \leq \frac{T}{h} \sigma^2(1 + L) - \alpha E \left\{ \int_0^T y^2(t, \lambda) dt \right\} &+ \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x(t, \lambda))| \int_0^T |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Откуда после несложных преобразований и перехода к пределу при $T \rightarrow \infty$ получим (11). Теорема доказана.

В случае $\Gamma = [0, \infty)$ справедлива также следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены (2) — (7) и, кроме того, $\int_0^\infty |w(t)| dt < \infty$, $\xi(t, \lambda)$ равномерно условно-коррелировано с $p_1(t, \lambda) = x(t, \lambda)$, $p_2(t, \lambda) = \varphi(x(t, \lambda))$ и $p_3(t, \lambda) = \dot{x}(t, \lambda)$. Тогда если существует $q \geq 0$, такое, что

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + qj\omega) W(j\omega) + \frac{1}{h} \right\} \geq \alpha > 0 \quad (0 \leq \omega < \infty),$$

то класс систем (2) — (6) стохастически абсолютно устойчив, причем

$$E\{J_y(\lambda)\} \leq \frac{\sigma^2}{ah} (1 + Lh + 2L) + qL\sigma^2.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. (Вместо $s_1(t, \lambda)$ нужно рассматривать $\bar{s}_1(t, \lambda) = s_1(t, \lambda) + qx(t, \lambda) y(t, \lambda)$.)

4. В заключение отметим содержащийся в теореме результат, который относится к весьма широкому классу дискретных систем управления; уравнения которых имеют вид

$$\begin{aligned} x_n(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} w_{n-m}(u_m - y_m(\lambda)), \\ y_n(\lambda) &= \varphi(x_n(\lambda)) + \xi_n(\lambda), \end{aligned} \tag{13}$$

где w_n , u_n , $\xi_n(\lambda)$, $\varphi(x_n(\lambda))$ удовлетворяют условиям

$$\sum_n |w_n| < \infty, \quad \sum_n |u_n| < \infty, \quad \sup_x |\varphi(x)| < \infty,$$

$$E\{\xi_n(\lambda)/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\} = 0, \quad E\{\xi_n^2\} \leq \sigma^2 < \infty, \tag{14}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq h, \quad x \neq 0.$$

В этом случае процесс $\xi_n(\lambda)$ равномерно условно-коррелирован с $x_n(\lambda)$ и $\varphi(x_n(\lambda))$, причем константа L равна нулю, и теорема об абсолютной стохастической устойчивости формулируется следующим образом.

Теорема 3. Если

$$\operatorname{Re} W(j\omega) + \frac{1}{h} > \alpha > 0, \quad W(j\omega) = \sum_n w_n e^{-j\omega n}, \quad (15a)$$

то система (13) — (14) стохастически абсолютно устойчива, причем

$$E\{J_y(\lambda)\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma h}. \quad (15b)$$

Замечания. 1) Обозначим — $r = \min_{[-\pi, \pi]} \operatorname{Re} W(j\omega)$, где $W(j\omega) = \sum_n w_n e^{-j\omega n}$.

Покажем, что $r \geq 0$. Рассмотрим функции

$$p_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ 0, & \text{если } n \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad q_n = \sum_{m=0}^{n-1} w_{n-m} p_m.$$

Так как $q(0) = 0$, то $\sum q_n p_n = 0$. Но, с другой стороны, применяя равенство Парсеваля, получим $\sum_n q_n p_n = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} W(j\omega) |P(j\omega)|^2 d\omega = 0$, $P(j\omega) = \sum_m p_m e^{-j\omega m}$. Следовательно, в силу непрерывности существует $\omega^* \in [-\pi, \pi]$, такое, что $\operatorname{Re} W(j\omega^*) = 0$, откуда и следует $r \geq 0$.

Далее, если $-r + 1/h > 0$, то множество тех значений $\alpha > 0$, которые удовлетворяют (15), непусто и имеет максимальный элемент $\alpha_{\max} = -r + 1/h$. Подставляя в (15b) $\alpha = \alpha_{\max}$, получаем вместо (15b)

$$E\{J_y(\lambda)\} \leq \sigma^2(1 - rh)^{-1} \quad (1 - rh > 0). \quad (15b)$$

2) Аналогичным образом при $L = 0$ равенство (11) приводит к оценке

$$E\{J_y(\lambda)\} \leq \sigma^2(1 - rh)^{-1} \quad (1 - rh > 0),$$

где

$$-r = \min_{0 < \omega < \infty} \operatorname{Re} W(j\omega) \leq 0.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, ПММ, 24, № 5, 809 (1960).
2. М. Б. Невельсон, Р. З. Хасминский, Проблемы передачи информации, 2, № 3, 76 (1966).
3. В. М. Попов, Автоматика и телемеханика, 24, № 1, 7 (1963).
4. А. И. Лурье, В. Н. Постников, ПММ, 8, № 3, (1944).
5. Ю. И. Неймарк, ДАН СССР, 127, 961 (1959).
6. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 декабря 1966 г

ABSOLUTE STOCHASTIC STABILITY

V. A. Brusin, M. L. Tay

A concept of absolute stochastic stability is introduced in this paper. The sufficient stability conditions for the specific class of nonlinear systems are found using the V. M. Popov method. A number of output process characteristics are obtained and presented in the paper.

УДК 531.391

О СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА, ЗАМКНУТОГО ЧЕРЕЗ ДВА РЕЛЕ

С. Д. Киняпин

В работе изучено поведение траекторий в достаточно малой окрестности состояния равновесия линейного четырехполюсника, замкнутого через два реле.

Методом точечных преобразований исследуется нулевое «состояние равновесия» $M(0, 0, \dots, 0)$ следующей системы:

$$\begin{aligned} y_1 &= K_{11}(p) \operatorname{sgn} y_1 + K_{12}(p) \operatorname{sgn} y_2, \\ y_2 &= K_{21}(p) \operatorname{sgn} y_1 + K_{22}(p) \operatorname{sgn} y_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$K_{ij}(p) = A_{m_{ij}}^{ij}(p)/B_{n_{ij}}(p),$$

$$B_{n_{ij}}(p) = p^{n_{ij}} + b_1^{ij} p^{n_{ij}-1} + \dots + b_{n_{ij}-1}^{ij} p + b_{n_{ij}}^{ij},$$

$$A_{m_{ij}}^{ij}(p) = a_0^{ij} p^{m_{ij}} + a_1^{ij} p^{m_{ij}-1} + \dots + a_{m_{ij}}^{ij},$$

$$m_{ij} < n_{ij} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2).$$

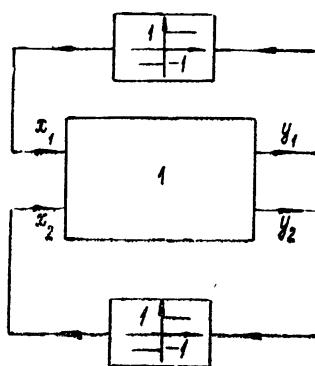


Рис. 1.

Блок-схема системы (1) приведена на рис. 1.

Предполагается, что корни знаменателей матрицы коэффициентов передачи $B_{ij}(p)$ ($i, j = 1, 2$) разные, и, следовательно, коэффициенты передачи четырехполюсника представимы в виде

$$K_{ij}(p) = \sum_{k=1}^{n_{ij}} \frac{c_{ij}^k}{p + \lambda_{ij}^k} \quad (i, j = 1, 2). \quad (2)$$

Введя новые переменные

$$\frac{c_{11}^k \operatorname{sgn} y_1}{p + \lambda_{11}^k} = x_{1k} \quad (k = 1, 2, \dots, n_{11}),$$

$$\frac{c_{21}^s \operatorname{sgn} y_1}{p + \lambda_{21}^s} = x_{1s} \quad (s = n_{11} + 1, n_{11} + 2, \dots, n_{11} + n_{21}),$$

$$\frac{c_{22}^k \operatorname{sgn} y_2}{p + \lambda_{22}^k} = x_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots, n_{22}),$$

$$\frac{c_{12}^s \operatorname{sgn} y_2}{p + \lambda_{12}^s} = x_{2s} \quad (s = n_{22} + 1, n_{22} + 2, \dots, n_{22} + n_{12})$$

и соответствующим образом введя обозначения для λ_{ij}^k и c_{ij}^k , перепишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1i} + \lambda_{1i} x_{1i} &= c_{1i} \operatorname{sgn} y_1 & (i = 1, 2, \dots, n_{11}, n_{11} + 1, \dots, n_{11} + n_{21}), \\ \dot{x}_{2i} + \lambda_{2i} x_{2i} &= c_{2i} \operatorname{sgn} y_2 & (i = 1, 2, \dots, n_{22}, n_{22} + 1, \dots, n_{22} + n_{12}),\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$y_1 = \sum_{l=1}^{n_{11}} x_{1l} + \sum_{l=n_{22}+1}^{n_{22}+n_{12}} x_{2l}, \quad y_2 = \sum_{l=n_{11}+1}^{n_{11}+n_{21}} x_{1l} + \sum_{l=1}^{n_{21}} x_{2l}.$$

Фазовое $(n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22})$ -мерное пространство системы (3) схематично изображено на рис. 2*.

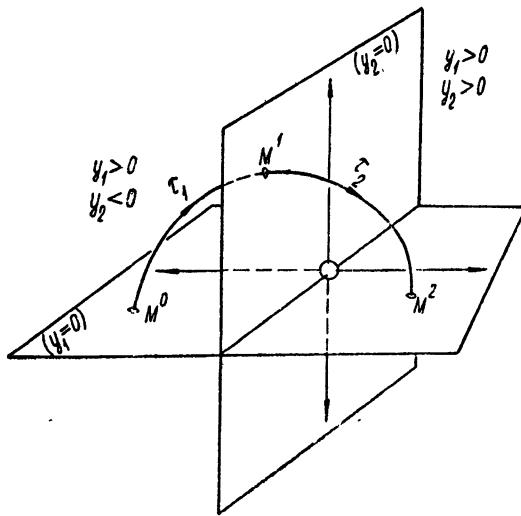


Рис. 2.

Ради удобства, все исследование разбито на исследование двух следующих случаев:

$$1) \sum_{k=1}^{n_{ij}} c_{ij}^k = d_{ij}^0 \neq 0 \quad (i, j = 1, 2),$$

$$2) \quad d_{ij}^0 = 0, \quad d'_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} \lambda_{ij}^k c_{ij}^k \neq 0 \quad (i, j = 1, 2).$$

1) Поскольку

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= - \sum_{l=1}^{n_{11}} \lambda_{1l} x_{1l} - \sum_{l=n_{22}+1}^{n_{22}+n_{12}} \lambda_{2l} x_{2l} + \operatorname{sgn} y_1 \sum_{l=1}^{n_{11}} c_{1l} + \operatorname{sgn} y_2 \sum_{l=n_{22}+1}^{n_{22}+n_{12}} c_{2l}, \\ \dot{y}_2 &= - \sum_{l=n_{11}+1}^{n_{11}+n_{21}} \lambda_{1l} x_{1l} - \sum_{l=1}^{n_{21}} \lambda_{2l} x_{2l} + \operatorname{sgn} y_1 \sum_{l=n_{11}+1}^{n_{11}+n_{21}} c_{1l} + \operatorname{sgn} y_2 \sum_{l=1}^{n_{21}} c_{2l},\end{aligned}\quad (4)$$

* Выбранное фазовое пространство не ограничивает общности рассмотрения, так как все возможные иные случаи фазового пространства сводятся к рассматриваемому соответствующей заменой знаков параметров системы (3).

в случае, когда разность между степенями знаменателей и числителей коэффициентов передачи ($n_{ij} - m_{ij} = 1$; $i, j = 1, 2$) равна 1 или, что тоже самое, $\sum_{(i)} c_{ij} \neq 0$, все траектории системы (3) в достаточно малой

окрестности точки $x_{2i} = x_{1i} = 0$ либо уходят из этой окрестности, либо приходят на пластинку скользящих движений, расположенную в гиперплоскостях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$.

В этом последнем случае исследование состояния равновесия четырехполюсника, замкнутого двумя реле, сводится к обычной задаче исследования состояния равновесия, расположенного на соответствующей гиперплоскости.

2) Пусть $d_{1i}^0 = 0$, $d_{1i}^1 \neq 0$ ($i, j = 1, 2$). Изображающая точка M^0 (рис. 2), лежащая, например, на гиперплоскости $y_1 = 0$, начнет двигаться в фазовом подпространстве $y_1 > 0$, $y_2 < 0$ по траектории

$$x_{1i}(t) = x_{1i}^0 \exp[-\lambda_{1i}(t - t_0)] + \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} \{1 - \exp[-\lambda_{1i}(t - t_0)]\} \\ (i=1,2,\dots,n_{11}, n_{11}+1,\dots,n_{11}+n_{21}), \quad (5)$$

$$x_{2i}(t) = x_{2i}^0 \exp[-\lambda_{2i}(t - t_0)] - \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} \{1 - \exp[-\lambda_{2i}(t - t_0)]\} \\ (i=1,2,\dots,n_{22}, n_{22}+1,\dots,n_{22}+n_{12}),$$

и либо уйдет из рассматриваемой окрестности, либо придет на гиперповерхность $y_2 = 0$.

В этом последнем случае можно написать точечное преобразование T_1 гиперповерхности $y_1 = 0$ в гиперплоскость $y_2 = 0$ в виде

$$\bar{x}_{1i} = x_{1i}^0 \exp(-\lambda_{1i}\tau_1) + \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} [1 - \exp(-\lambda_{1i}\tau_1)] \\ (i=1,2,\dots,n_{11}, n_{11}+1,\dots,n_{11}+n_{21}), \quad (6)$$

$$\bar{x}_{2i} = x_{2i}^0 \exp(-\lambda_{2i}\tau_1) + \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} [1 - \exp(-\lambda_{2i}\tau_1)] \\ (i=1,2,\dots,n_{22}, n_{22}+1,\dots,n_{22}+n_{12}); \\ \sum_{i=n_{11}+1}^{n_{11}+21} \bar{x}_{1i} + \sum_{i=1}^{n_{22}} \bar{x}_{2i} = 0; \quad (7)$$

$$\dot{y}_2(\tau_1) < 0, \quad (8)$$

где минимальный положительный корень уравнения (7) определяет время перехода τ_1 изображающей точки из точки M_0 в M_1 , а уравнение (8) — так называемое уравнение переключения, выполнение которого гарантирует дальнейшее движение изображающей точки в фазовом подпространстве $y_1 > 0$, $y_2 > 0$.

Аналогичным образом пишется точечное преобразование T_2 точек гиперплоскости $y_2 = 0$ в точки гиперплоскости $y_1 = 0$. Воспользовавшись симметрией задачи относительно начала координат и формулами точечных преобразований T_1 и T_2 , запишем точечное преобразование гиперплоскости $y_1 = 0$ в себя W^* в виде

* W есть точечное преобразование T_2 , T_1 , в котором величины \bar{x}_{1i} , \bar{x}_{2i} заменены соответственно на $-\bar{x}_{1i}$ и $-\bar{x}_{2i}$.

$$\bar{x}_{1i} = - \left\{ x_{1i}^0 \exp(-\lambda_{1i} \tau_1) + \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_1)] \right\} \exp(-\lambda_{1i} \tau_2) - \\ - \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_2)] \\ (i = 1, 2, \dots, n_{11}, n_{11} + 1, \dots, n_{11} + n_{21}), \quad (9)$$

$$\bar{x}_{2i} = - \left\{ x_{2i}^0 \exp(-\lambda_{2i} \tau_1) - \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_1)] \right\} \exp(-\lambda_{2i} \tau_2) - \\ - \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_2)] \\ (i = 1, 2, \dots, n_{22}, n_{22} + 1, \dots, n_{22} + n_{12}); \quad (7a)$$

$$\sum_{i=n_{11}+1}^{n_{11}+n_{21}} \left\{ x_{1i}^0 \exp(-\lambda_{1i} \tau_1) + \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_1)] \right\} + \\ + \sum_{i=1}^{n_{22}} \left\{ x_{2i}^0 \exp(-\lambda_{2i} \tau_1) - \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_1)] \right\} = 0; \quad (7a)$$

$$\sum_{i=n_{11}+1}^{n_{11}+n_{21}} \left\{ \lambda_{1i} x_{1i}^0 \exp(-\lambda_{1i} \tau_1) + c_{1i} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_1)] \right\} + \\ + \sum_{i=1}^{n_{22}} \left\{ \lambda_{2i} x_{2i}^0 \exp(-\lambda_{2i} \tau_1) - c_{2i} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_1)] \right\} < 0; \quad (8a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_{11}} \left\{ \left[x_{1i}^0 \exp(-\lambda_{1i} \tau_1) + \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_1)] \right] \exp(-\lambda_{1i} \tau_2) + \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_2)] \right\} + \\ + \sum_{i=n_{22}+1}^{n_{22}+n_{12}} \left\{ \left[x_{2i}^0 \exp(-\lambda_{2i} \tau_1) - \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_1)] \right] \times \right. \\ \left. \times \exp(-\lambda_{2i} \tau_2) + \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_2)] \right\} = 0; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n_{11}} \left\{ \lambda_{1i} \left[x_{1i}^0 \exp(-\lambda_{1i} \tau_1) + \frac{c_{1i}}{\lambda_{1i}} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_1)] \right] \exp(-\lambda_{1i} \tau_2) + \right. \\ \left. + c_{1i} [1 - \exp(-\lambda_{1i} \tau_2)] \right\} + \sum_{i=n_{22}+1}^{n_{22}+n_{12}} \left\{ \lambda_{2i} \left[x_{2i}^0 \exp(-\lambda_{2i} \tau_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{c_{2i}}{\lambda_{2i}} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_1)] \right] \exp(-\lambda_{2i} \tau_2) + c_{2i} [1 - \exp(-\lambda_{2i} \tau_2)] \right\} > 0. \quad (11)$$

Если точечное преобразование W допускает достаточно малую окрестность нулевой точки $M^*(0, 0, \dots, 0)$, в которой любая последовательность $M^0, \bar{M}, \bar{\bar{M}}, \dots$ и т. д. стремится к M^* , так что времена соответствующих переключений $T^0, \bar{T}, \bar{\bar{T}}, \dots$ стремятся к нулю, то будем говорить, что точечное преобразование W имеет устойчивую неподвижную точку M^* , а состояние равновесия четырехполюсника, замкнутого двумя реле, асимптотически устойчиво.

Условие все возрастающих переключений реле [1] будет выполнено, если в уравнениях (7а) и (10) для определения времени переключения τ_1 и τ_2 будут выполнены следующие неравенства:

$$d_{22}^1 - d_{21}^1 > 0, \quad (12)$$

$$d_{12}^1 + d_{11}^1 > 0. \quad (13)$$

При выполнении условий (12) и (13) вопрос об устойчивости состояний равновесия четырехполюсника сводится к исследованию устойчивости неподвижной нулевой точки $M^*(0, 0, \dots, 0)$ точечного преобразования W в достаточно малой окрестности неподвижной точки M^* .

Раскладывая формулы точечного преобразования (9) в ряды по малым величинам $x_{1i}, x_{2i}, \tau_1, \tau_2$ и вводя новую замену переменных

$$\begin{aligned} u_{11}^k &= \sum_{l=1}^{n_{11}} x_{1l} (\lambda_{1l})^k & (k = 0, 1, 2, \dots, n_{11} - 1), \\ u_{12}^k &= \sum_{l=n_{22}+1}^{n_{22}+n_{12}} x_{2l} (\lambda_{2l})^k & (k = 0, 1, 2, \dots, n_{12} - 1), \\ u_{21}^k &= \sum_{l=n_{11}+1}^{n_{11}+n_{21}} x_{1l} (\lambda_{1l})^k & (k = 1, 2, \dots, n_{21} - 1), \\ u_{22}^k &= \sum_{l=1}^{n_{22}} x_{2l} (\lambda_{2l})^k & (k = 1, 2, \dots, n_{22} - 1), \\ \tilde{u}_{22}^0 &= \frac{u_{22}^0}{\tau_1}, \quad \tilde{u}_{21}^0 = \frac{u_{21}^0}{\tau_1}, \quad \tilde{u}_{12}^1 = \frac{u_{12}^1}{\tau_1}, \quad \tilde{u}_{11}^1 = \frac{u_{11}^1}{\tau_1}, \end{aligned}$$

перепишем формулы точечного преобразования W в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_{11}^0 &= u_{11}^0 - d_{11}^1 (\tau_1 + \tau_2)^2 - 2\tilde{u}_{11}^1 \tau_1 (\tau_1 + \tau_2) + d_{11}^2 (\tau_1 + \tau_2)^3 + \dots, \\ \tilde{u}_{11}^1 &= \tilde{u}_{11}^1 - 2u_{11}^2 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} - d_{11}^2 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_1} + d_{11}^3 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^3}{\tau_1} + 2u_{11}^3 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^3}{\tau_1} + \dots, \\ \bar{u}_{11}^s &= u_{11}^s - 2u_{11}^{s+1} (\tau_1 + \tau_2) + (2u_{11}^{s+2} - d_{11}^{s+1}) (\tau_1 + \tau_2)^2 + d_{11}^{s+2} (\tau_1 + \tau_2)^3 + \dots \\ &\quad (s = 2, 3, \dots, n_{11} - 1), \\ \bar{u}_{12}^0 &= u_{12}^0 - 2\tilde{u}_{12}^1 \tau_1 (\tau_1 + \tau_2) + (2u_{12}^2 + d_{12}^1) (\tau_1 + \tau_2)^2 - \\ &- 2d_{12}^1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2) - d_{12}^2 (\tau_1 + \tau_2)^3 + d_{12}^2 \tau_2^2 (\tau_1 + \tau_2) + d_{12}^2 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)^2 + \dots, \\ \tilde{u}_{12}^1 &= \tilde{u}_{12}^1 - 2u_{12}^2 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} + (2u_{12}^3 + d_{12}^2) \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_1} - 2d_{12}^2 \tau_2 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} - \\ &- d_{12}^3 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^3}{\tau_1} + d_{12}^3 \tau_2^2 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} + d_{12}^3 \tau_2 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_1} + \dots, \\ \bar{u}_{12}^s &= u_{12}^s - 2u_{12}^{s+1} (\tau_1 + \tau_2) + (2u_{12}^{s+2} + d_{12}^{s+1}) (\tau_1 + \tau_2)^2 - 2d_{12}^{s+1} \tau_2 (\tau_1 + \tau_2) - \\ &- d_{12}^{s+2} (\tau_1 + \tau_2)^3 + d_{12}^{s+2} \tau_2^2 (\tau_1 + \tau_2) + d_{12}^{s+2} \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)^2 + \dots \\ &\quad (s = 2, 3, \dots, n_{12} - 1), \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\tilde{u}_{21}^0 = \tilde{u}_{21}^0 - 2u_{21}^1 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} + (2u_{21}^2 - d_{21}^1) \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_1} + d_{21}^2 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^3}{\tau_1} + \dots,$$

$$\tilde{u}_{21}^s = u_{21}^s - 2u_{21}^{s+1} (\tau_1 + \tau_2) + (2u_{21}^{s+2} - d_{21}^{s+1}) (\tau_1 + \tau_2)^2 + d_{21}^{s+2} (\tau_1 + \tau_2)^3 + \dots \\ (s = 1, 2, \dots, n_{21} - 1),$$

$$\tilde{u}_{22}^0 = \tilde{u}_{22}^0 - 2u_{22}^1 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} + (2u_{22}^2 + d_{22}^1) \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_1} - 2d_{22}^1 \tau_2 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} - \\ - d_{22}^2 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^3}{\tau_1} + d_{22}^2 \tau_2^2 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} + d_{22}^2 \tau_2 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_1} + \dots,$$

$$\tilde{u}_{22}^s = u_{22}^s - 2u_{22}^{s+1} (\tau_1 + \tau_2) + (2u_{22}^{s+2} + d_{22}^{s+1}) (\tau_1 + \tau_2)^2 - 2d_{22}^{s+1} \tau_2 (\tau_1 + \tau_2) - \\ - d_{22}^{s+2} (\tau_1 + \tau_2)^3 + d_{22}^{s+2} \tau_2^2 (\tau_1 + \tau_2) + d_{22}^{s+2} \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)^2 + \dots \\ (s = 1, 2, \dots, n_{22} - 1);$$

$$\tilde{u}_{21}^0 + \tilde{u}_{22}^0 - (u_{21}^1 + u_{22}^1) + \frac{1}{2} (d_{22}^1 - d_{21}^1) \tau_1 + \dots = 0; \quad (76)$$

$$-\frac{1}{2} (d_{11}^1 - d_{12}^1) (\tau_1 + \tau_2)^2 - d_{12}^1 \tau_2^2 - (\tilde{u}_{11}^1 + \tilde{u}_{12}^1) \tau_1 (\tau_1 + \tau_2) + \dots = 0. \quad (10a)$$

Непосредственно проверяется выполнение условий переключений (8а) — (11) как в старых x_{ij} , так и в новых u_{ij} переменных. Из (76) находим, что время переключений равно

$$\tau_1 = \frac{2 \{ -(\tilde{u}_{21}^0 + \tilde{u}_{22}^0) + (u_{21}^1 + u_{22}^1) \}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} + \dots . \quad (14)$$

Из уравнения (10а), которое удобно переписать в виде

$$\tau_2^2 + 2a \tau_1 \tau_2 + a \tau_1^2 + \dots = 0, \quad (15)$$

где

$$a = \frac{d_{11}^1 - d_{12}^1}{d_{11}^1 + d_{12}^1},$$

получаем, что время переключения τ_2 , равное

$$\tau_2 = \tau_1 \{ -a + \sqrt{a^2 - a} \}, \quad (16)$$

существует, если только имеет место неравенство

$$d_{12}^1 - d_{11}^1 > 0. \quad (17)$$

Введя еще одну замену переменных

$$\xi = \tilde{u}_{21}^0 + \tilde{u}_{22}^0, \quad \eta = D \tilde{u}_{21}^0 + C \tilde{u}_{22}^0,$$

где

$$D = \frac{2ABd_{22}^1}{d_{22}^1 - d_{21}^1}, \quad C = \frac{2A^2 d_{21}^1}{d_{22}^1 - d_{21}^1},$$

$$A = \frac{2d_{12}^1 + [2d_{12}^1(d_{12}^1 - d_{11}^1)]^{1/2}}{d_{12}^1 + d_{11}^1}, \quad B = \frac{2d_{11}^1 - [2d_{12}^1(d_{12}^1 - d_{11}^1)]^{1/2}}{d_{12}^1 + d_{11}^1},$$

остальные переменные остаются старые, и воспользовавшись равенствами, которые следуют из (16),

$$\tau_2 = (1 - B)\tau_1 = (A - 1)\tau_1 + \dots,$$

$$\tau_1 + \tau_2 = T = A\tau_1 + \dots,$$

$$\tau_1 - \tau_2 = B\tau_1 + \dots,$$

перепишем точечное преобразование W в виде

$$\bar{\xi} = (1 - C + D)\xi - \frac{2A(A - 1)(d_{22}^1 + d_{21}^1)}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (u_{21}^1 + u_{22}^1) + \dots,$$

$$\bar{\eta} = \eta - 2A(Du_{21}^1 + C_2 u_{22}^1) + \dots,$$

$$\bar{\bar{u}}_{11}^1 = \tilde{u}_{11}^1 - 2 \left[u_{11}^2 + \frac{Ad_{11}^2}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] \frac{T}{\tau_1} + \dots,$$

$$\bar{\bar{u}}_{12}^1 = \tilde{u}_{12}^1 - 2 \left[u_{12}^2 - \frac{Bd_{12}^2}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] \frac{T}{\tau_1} + \dots,$$

$$\bar{\bar{u}}_{11}^0 = u_{11}^0 - \frac{2Ad_{11}^1}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) T + \dots,$$

$$\bar{\bar{u}}_{11}^s = u_{11}^s - 2 \left[u_{11}^{s+1} + \frac{Ad_{11}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T + \dots$$

$$(s = 2, 3, \dots, n_{11} - 1), \quad (18)$$

$$\bar{\bar{u}}_{12}^0 = u_{12}^0 + 2 \frac{Bd_{12}^1}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) T + \dots,$$

$$\bar{\bar{u}}_{12}^s = u_{12}^s - 2 \left[u_{12}^{s+1} - \frac{Bd_{12}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T + \dots$$

$$(s = 2, 3, \dots, n_{12} - 1),$$

$$\bar{\bar{u}}_{21}^s = u_{21}^s - 2 \left[u_{21}^{s+1} + \frac{Ad_{21}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T + \dots$$

$$(s = 1, 2, \dots, n_{21} - 1),$$

$$\bar{\bar{u}}_{22}^s = u_{22}^s - 2 \left[u_{22}^{s+1} - \frac{Bd_{22}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T + \dots$$

$$(s = 1, 2, \dots, n_{22} - 1).$$

Теперь в этом точечном преобразовании сделаем последнюю замену координат, а именно, введем новые величины \tilde{u}_{11}^1 и \tilde{u}_{12}^1 посредством следующих соотношений:

$$u_{11}^1 = \tilde{u}_{11}^1 \tau_1, \quad u_{12}^1 = \tilde{u}_{12}^1 \tau_1. \quad (19)$$

Все остальные переменные оставим прежними.

При этой замене соотношения (16) не остаются справедливыми. Однако, как это видно из соотношения (10а) и выполнения условий переключений (7а) и (11), τ_2 существует и имеет такой же порядок малости, что и τ_1 , т. е. порядок малости величины u_{ij} . Следовательно, можно утверждать, что существует время переключений $T' = \tau_1 + \tau_2$, которое обладает нужными свойствами: $T' \rightarrow 0$, когда $M, \bar{M}, \bar{\bar{M}}, \dots \rightarrow M^*(0, 0, \dots, 0)$. В новых переменных точечные преобразования (18) перепишем в окончательном виде*:

$$\bar{\xi} = (1 + C - D)\xi - \frac{2A(A - 1)(d_{22}^1 + d_{21}^1)}{d_{22}^1 - d_{21}^1}(u_{21}^1 + u_{22}^1) + \dots,$$

$$\bar{\eta} = \eta - 2A(Du_{21}^1 + Cu_{22}^1) + \dots,$$

$$\bar{u}_{11}^s = u_{11}^s - 2 \left[u_{11}^{s+1} + \frac{Ad_{11}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T' + \dots \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n_{11} - 1),$$

$$\bar{u}_{12}^s = u_{12}^s - 2 \left[u_{12}^{s+1} - \frac{Bd_{12}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T' + \dots \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n_{12} - 1),$$

$$\bar{u}_{21}^s = u_{21}^s - 2 \left[u_{21}^{s+1} + \frac{Ad_{21}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T' + \dots \quad (s = 1, 2, \dots, n_{21} - 1),$$

$$\bar{u}_{22}^s = u_{22}^s - 2 \left[u_{22}^{s+1} - \frac{Bd_{22}^{s+1}}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (-\xi + u_{21}^1 + u_{22}^1) \right] T' + \dots \quad (s = 1, 2, \dots, n_{22} - 1).$$

Нулевая неподвижная точка M^* точечного преобразования W (20) будет устойчива, если

$$\left(\frac{u_{12}^1 + u_{11}^1}{d_{12}^1 - d_{11}^1} - \frac{u_{21}^1 + u_{22}^1}{d_{22}^1 - d_{21}^1} \right) \text{ и } \left(\frac{2d_{22}^1}{d_{22}^1 - d_{21}^1} \xi - \frac{d_{22}^1 + d_{21}^1}{d_{22}^1 - d_{21}^1} (u_{21}^1 + u_{22}^1) \right) \quad (21)$$

— второго порядка малости относительно величин ξ, u_{ij}^1, u_{ij}^2 , если выполнено неравенство $-1 < 1 + C - D < +1$, что удобно записать в следующем виде:

$$\frac{A - 1}{A} (d_{22}^1 - d_{21}^1) < (A - 1)(d_{22}^1 + d_{21}^1) < (d_{22}^1 - d_{21}^1); \quad (22)$$

и если асимптотически устойчиво нулевое состояние равновесия следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\dot{u}_{11}^s = -u_{11}^{s+1} - kd_{11}^{s+1}(u_{21}^1 + u_{22}^1) + \dots \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n_{11} - 1),$$

* Исследование устойчивости неподвижной точки $M^0(0, 0, \dots, 0)$ точечного преобразования (20) будет опубликовано в отдельной заметке.

$$\begin{aligned} \dot{u}_{12}^s &= -u_{12}^{s+1} + ld_{12}^{s+1}(u_{21}^1 + u_{22}^1) + \dots \\ &\quad (s = 0, 1, 2, \dots, n_{12} - 1), \\ \dot{u}_{21}^s &= -u_{21}^{s+1} - kd_{21}^{s+1}(u_{21}^1 + u_{22}^1) + \dots \\ &\quad (s = 1, 2, \dots, n_{21} - 1), \\ \dot{u}_{22}^s &= -u_{22}^{s+1} + ld_{22}^{s+1}(u_{21}^1 + u_{22}^1) + \dots \\ &\quad (s = 1, 2, \dots, n_{22} - 1), \end{aligned} \quad (23)$$

где $k = A(d_{22}^1 - d_{21}^1)^{-1}$, $l = B(d_{22}^1 - d_{21}^1)^{-1}$, $\dot{u}_{ij}^s = \frac{d}{dt}(u_{ij}^s)$.

Исследование устойчивости состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (23) проводится обычным образом. Именно, нулевое состояние равновесия системы (23) будет асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения Δ , равного

$$\begin{aligned} \Delta = & B_{n_{11}}^{11}(p) B_{n_{12}}^{12}(p) \{ A_m^{22}(B_{n_{21}}^{21}(p) - b_{n_{21}}^{21}) - A_m^{21}(B_{n_{22}}^{22}(p) - b_{n_{22}}^{22}) + \\ & + (A - 1) [-A_m^{22}(B_{n_{21}}^{21}(p) - b_{n_{21}}^{21}) - A_m^{21}(B_{n_{22}}^{22}(p) - b_{n_{22}}^{22}) + \\ & + (d_{21}^1 + d_{22}^1)(p^{n_{21}-1} + b_{21}^{21}p^{n_{21}-2} + \dots + b_{n_{21}-1}^{21})(p^{n_{22}-1} + \\ & + b_{22}^{22}p^{n_{22}-2} + \dots + b_{n_{22}-1}^{22})] \}, \end{aligned} \quad (24)$$

лежат строго на левой полуплоскости. Нулевая неподвижная точка M^* будет неустойчива в противном случае.

Таким образом:

1) если при выполнении условий

$$\begin{aligned} d_{11}^0 &= d_{12}^0 = d_{21}^0 = d_{22}^0 = 0, \\ d_{11}^1 &\neq 0, \quad d_{12}^1 \neq 0, \quad d_{21}^1 \neq 0, \quad d_{22}^1 \neq 0 \end{aligned}$$

- a) разности величин (21) — второго порядка малости,
б) выполнены следующие неравенства:

$$(d_{12}^1 + d_{11}^1) > 0, \quad (d_{12}^1 - d_{11}^1) > 0,$$

$$d_{22}^1 - d_{21}^1 > 0, \quad \frac{A-1}{A}(d_{22}^1 - d_{21}^1) < (A-1)(d_{22}^1 + d_{21}^1) < (d_{22}^1 - d_{21}^1),$$

в) все корни уравнения (24) лежат на левой полуплоскости, то состояние равновесия четырехполюсника, замкнутого через два реле, устойчиво;

2) если не выполняется одно из условий (а) — (в), то состояние равновесия четырехполюсника, замкнутого через два реле, неустойчиво;

3) если при выполнении условий (б), (в) первое условие (а) невыполняется, то состояние равновесия четырехполюсника седлового типа в окрестности рассматриваемого состояния равновесия существует устойчивая $(n-1)$ -мерная гиперплоскость и две неустойчивые одномерные прямые.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Учитывая, что между переменными u_{ij}^k и коэффициентами b_{ij}^{ij} знаменателей коэффициентов передачи четырехполюсника $B_{n_{ij}}^{ij}(p) = p^n_{ij} + b_1^{ij} p^{n_{ij}-1} + \dots + b_{n_{ij}}^{ij}$ с точностью до величин второго порядка малости справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_{11}^{n_{11}} &\Delta b_1^{11} u_{11}^{n_{11}-1} + \dots + (-1)^{n_{11}-1} b_{n_{11}-1}^{11} u_{11}^1 + (-1)^{n_{11}} b_{n_{11}}^{11} u_{11}^0 = 0, \\ u_{12}^{n_{12}} &- b_1^{12} u_{12}^{n_{12}-1} + \dots + (-1)^{n_{12}-1} b_{n_{12}-1}^{12} u_{12}^1 + (-1)^{n_{12}} b_{n_{12}}^{12} u_{12}^0 = 0, \quad (\Pi.1) \\ u_{21}^{n_{21}} &- b_1^{21} u_{21}^{n_{21}-1} + \dots + (-1)^{n_{21}-1} b_{n_{21}-1}^{21} u_{21}^1 = 0, \\ u_{22}^{n_{22}} &- b_1^{22} u_{22}^{n_{22}-1} + \dots + (-1)^{n_{22}-1} b_{n_{22}-1}^{22} u_{22}^1 = 0, \end{aligned}$$

запишем характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (24) в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & G \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$|E| = \begin{vmatrix} p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ (-1)^{n_{11}} b_{n_{11}}^{11} & (-1)^{n_{11}-1} b_{n_{11}-1}^{11} & (-1)^{n_{11}-2} b_{n_{11}-2}^{11} & \dots & -b_1^{11} & 1 \end{vmatrix},$$

$$|F| = \begin{vmatrix} p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ -(1)^{n_{12}} b_{n_{12}}^{12} & (-1)^{n_{12}-1} b_{n_{12}-1}^{12} & (-1)^{n_{12}-2} b_{n_{12}-2}^{12} & \dots & -b_1^{12} & 1 \end{vmatrix},$$

$$|G| = \begin{vmatrix} p + kd_{21}^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & kd_{21}^2 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ kd_{21}^3 & p & 1 & \dots & 0 & 0 & kd_{21}^3 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ kd_{21}^{n_{21}} & 0 & 0 & \dots & p & 1 & kd_{21}^{n_{21}} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ (-1)^{n_{21}-1} b_{n_{21}-1}^{21} & (-1)^{n_{21}-2} b_{n_{21}-2}^{21} & (-1)^{n_{21}-3} b_{n_{21}-3}^{21} & \dots & -b_1^{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ld_{22}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ -ld_{22}^3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & H \\ -ld_{22}^{n_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \end{vmatrix},$$

$$|H| = \begin{vmatrix} p - ld_{22}^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -ld_{22}^3 & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ld_{22}^{n_{22}} & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ (-1)^{n_{22}-1} b_{n_{22}-1}^{22} & (-1)^{n_{22}-2} b_{n_{22}-2}^{22} & (-1)^{n_{22}-3} b_{n_{22}-3}^{22} & \dots & -b_1^{22} & 1 \end{vmatrix}$$

Раскрывая определители $|E|$ и $|F|$ последовательно по последним столбцам, получим, что $|E|$ и $|F|$ соответственно равны

$$|E| = B_{n_{11}}^{11}(p) = p^{n_{11}} + b_1^{11} p^{n_{11}-1} + \dots + b_{n_{11}-1}^{11} p + b_{n_{11}}^{11},$$

$$|F| = B_{n_{12}}^{12}(p) = p^{n_{12}} + b_1^{12} p^{n_{12}-1} + \dots + b_{n_{12}-1}^{12} p + b_{n_{12}}^{12}.$$

Раскрывая определитель $|G|$ по первой строчке, имеем

$$|G| = (p + kd_{21}^2)(21, n-2)|H| -$$

$$\begin{vmatrix} kd_{21}^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & kd_{21}^3 & 0 & \dots & 0 \\ kd_{21}^4 & p & 1 & \dots & 0 & 0 & kd_{21}^4 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ kd_{21}^{n_{21}} & 0 & 0 & \dots & p & 1 & kd_{21}^{n_{21}} & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^{n_{21}-1} b_{n_{21}-1}^{21} & (-1)^{n_{21}-2} b_{n_{21}-2}^{21} & \dots & -b_1^{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -ld_{21}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ld_{21}^{n_{21}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} H$$

$$+ (-1)^{n_{21}} kd_{21}^2 \begin{vmatrix} kd_{21}^3 & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ kd_{21}^4 & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ kd_{21}^{n_{21}} & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ (-1)^{n_{21}-1} b_{n_{21}-1}^{21} & (-1)^{n_{21}-2} b_{n_{21}-2}^{21} & \dots & -b_1^{21} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -ld_{22}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -ld_{22}^3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ld_{22}^{n_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} n_{21} \\ n_{21}-1 \\ \dots \\ n_{21}-1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ p \\ \dots \\ \dots \\ p \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n_{22} \\ n_{22}-1 \\ \dots \\ n_{22}-1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ p \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ p \\ 1 \end{matrix}$$

Раскрывая последний определитель по первым n_{21} столбцам, получим, что он равен

$$\begin{vmatrix} A' & \dots & (22, n-2) & \dots & A' & \dots & (22, n-3) & \dots \\ \dots & \dots \\ -ld_{22}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -ld_{22}^3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + (-1)^{n_{21}} \begin{vmatrix} A' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -pd_{22}^{n_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$|A'| = \begin{vmatrix} kd_{21}^3 & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ kd_{21}^4 & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ kd_{21}^{n_{21}} & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ (-1)^{n_{21}-1} b_{n_{21}-1}^{21} & (-1)^{n_{21}-2} b_{n_{21}-2}^{21} & \dots & -b_1^{21} & 1 \end{vmatrix},$$

$$(21, n-k) = p^{n_{21}-k} + b_1^{21} p^{n_{21}-k-1} + \dots + b_{n_{21}-k}^{21},$$

$$(22, n-k) = p^{n_{22}-k} + b_1^{22} p^{n_{22}-k-1} + \dots + b_{n_{22}-k}^{22}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n_{2j}; j = 1, 2).$$

Кроме того, поскольку

$$|H| = \begin{vmatrix} p - ld_{22}^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -ld_{22}^3 & p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ld_{22}^{n_{22}} & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ (-1)^{n_{22}-1} b_{n_{22}-1}^{22} & (-1)^{n_{22}-2} b_{n_{22}-2}^{22} & (-1)^{n_{22}-3} b_{n_{22}-3}^{22} & \dots & -b_1^{22} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (p - ld_{22}^2)(22, n-2) + ld_{22}^3(22, n-3) + \dots + (-1)^{n_{22}}(-l)d_{22}^{n_{22}} + b_{n_{22}-1}^{22},$$

то

$$|G| = (p + kd_{21}^2)(21, n-2) \{ (p - ld_{22}^2)(22, n-2) + ld_{22}^3(22, n-3) + \dots + b_{n_{22}-1}^{22} \} -$$

$$- |H^*| + kd_{21}^2(21, n-2) \{ ld_{22}^2(22, n-2) - ld_{22}^3(22, n-3) + \dots + (-1)^{n_{22}} ld_{22}^{n_{22}} \}.$$

Раскрывая оставшийся определитель $|H^*|$ аналогичным образом по первой строке и т. д., имеем

$$|G| = (21, n-1)(22, n-1) + kK(22, n-1) + (-l)L(21, n-1),$$

где

$$K = d_{21}^2(21, n-2) - d_{21}^3(21, n-3) + \dots + (-1)^{n_{21}} d_{21}^{n_{21}},$$

$$L = d_{22}^2(22, n-2) - d_{22}^3(22, n-3) + \dots + (-1)^{n_{22}} d_{22}^{n_{22}}.$$

Учитывая, что

$$k = \frac{A}{d_{22}^1 - d_{21}^1}, \quad -l = \frac{-B}{d_{22}^1 - d_{21}^1},$$

и умножая все на $(d_{22}^1 - d_{21}^1)$, имеем

$$|G|(d_{22}^1 - d_{21}^1) = (22, n-1)(22, n-1) \{ -d_{21}^1(21, n-1) + AK \} +$$

$$+ (21, n-1) \{ d_{22}^1(22, n-1) - BL \} = (22, n-1) \{ -d_{21}^1(21, n-1) +$$

$$+ K + (A-1)K \} + (21, n-1) \{ d_{22}^1(22, n-1) - L + (1-B)L \}.$$

Так как свободные члены выражений $-d_{21}^1(21, n-1) + K$ и $d_{22}^1(22, n-1) - L$,

согласно Приложению [1], равны 0, а сами выражения равны соответственно числителям коэффициентов передачи $-A_m^{21}(p)$ и $+A_m^{22}(p)$ и имеет место равенство $A - 1 = 1 - B$, то

$$\begin{aligned} |G| = & (22, n-1) \left\{ -d_{21}^1(21, n-1) + K \right\} + (21, n-1) \left\{ d_{22}^1(22, n-1) - L \right\} + \\ & + (A-1) \left\{ (22, n-1)K + (21, n-1)L \right\} = - (22, -1)pA_m^{21}(p) + \\ & + (21, n-1)pA_m^{22}(p) + (A-1) \left\{ (22, n-1) \left[K - d_{21}^1(21, n-1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + d_{21}^1(21, n-1) \right] + (21, n-1) \left[L - d_{22}^1(22, n-1) + d_{22}^1(22, n-1) \right] \right\} = \\ & = A_m^{22}(p) \left(B_{n_{21}}^{21}(p) - b_{n_{21}}^{21} \right) - A_m^{21}(p) \left(B_{n_{22}}^{22}(p) - b_{n_{22}}^{22} \right) + \\ & + (A-1) \left\{ -A_m^{22}(p) \left(B_{n_{21}}^{21}(p) - b_{n_{21}}^{21} \right) - A_m^{21}(p) \left(B_{n_{22}}^{22}(p) - b_{n_{22}}^{22} \right) + \right. \\ & \left. + (d_{21}^1 + d_{22}^1)(21, n-1)(22, n-1) \right\}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

С. Д. Киняпин, Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 20, 1153 (1959).

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете Поступила в редакцию 13 июня 1966 г.

ABOUT THE STATIONARY STATE OF A LINEAR FOUR-TERM NETWORK CLOSED THROUGH TWO RELAYS

S. D. Kinypin

The behaviour of the phase paths in a fairly small environment of a stationary state of a linear four-term network closed through two relays is studied in this paper.

УДК 62—501.32

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В БОЛЬШОМ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГЭС С УРАВНИТЕЛЬНЫМ РЕЗЕРВУАРОМ ПРИ ПОСТОЯННОМ ВРАЩАЮЩЕМ МОМЕНТЕ ТУРБИНЫ*

Э. Я. Штаерман

Рассматривается задача об устойчивости в большом процессов в напорной системе ГЭС с простым уравнительным резервуаром в предположении постоянства вращающего момента турбин, равного моменту сил сопротивлений. Задача рассматривается методами качественной теории дифференциальных уравнений.

Анализ устойчивости в большом стационарных режимов в напорных сооружениях гидроэлектростанций с уравнительными резервуарами обычно проводится в предположении, что на турбинах установлены так называемые «идеальные» регуляторы, поддерживающие механическую мощность гидроагрегатов постоянной, равной мощности сил сопротивлений (обзор соответствующих работ дан в [1], некоторые дополнительные работы отмечены в [2]).

В настоящей статье рассматривается задача об устойчивости в большом процессов в напорной системе ГЭС с простым уравнительным резервуаром при более общем предположении, а именно, в предположении о постоянстве вращающего момента турбины, равного моменту сил сопротивлений. Гипотеза «идеальных» регуляторов вытекает из данного предположения как частный случай при условии отсутствия неравномерности регулирования. Исследование проводится в предположении прямого течения и постоянного КПД. Задача рассматривается методами качественной теории дифференциальных уравнений.

В статье получены следующие результаты: а) показано, что граница области устойчивости является опасной; б) указаны две области таких значений параметров (из имеющихся практический смысл), при которых система заведомо не имеет предельных циклов; для точек одной из них система устойчива в большом, для другой неустойчива; определены качественные структуры разбиения фазовой плоскости на траектории, соответствующие этим значениям параметров; в) показано, что область возможных начальных отклонений при $\delta = 0$ (δ — неравномерность регулирования) меньше, чем при $\delta \neq 0$; последний результат качественно согласуется с одним из выводов работы [4], полученным при исследовании устойчивости соответствующей системы в малом; г) показано, что при $\delta > \delta_{kp}$ область устойчивости системы в большом существенно расширяется.

Рассмотрим напорную систему изолированной гидроэлектрической установки с простым цилиндрическим резервуаром, питающей активную турбину (отметим, что учет расходной характеристики реактивной турбины при соответствующей идеализации лишь несколько усложняет

* В настоящей статье изложены основные результаты дипломной работы, выполненной в 1966 г. в ГГУ под руководством Г. В. Ароновича.

исследование). Пусть дифференциальные уравнения, описывающие процессы в системе, будут следующими [3] (рис. 1):

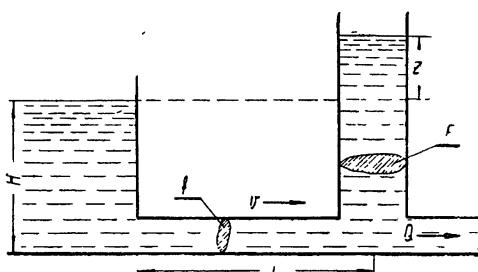


Рис. 1.

уравнение неразрывности

$$F \frac{dz}{dt} = fv - Q, \quad (1)$$

уравнение течения в напорной деривации ($v > 0$)

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + z + Pv^2 = 0, \quad (2)$$

уравнение расхода активной турбины

$$Q = c\alpha \sqrt{2g(H+z)}, \quad (3)$$

уравнение вращения агрегата

$$J \frac{d\omega}{dt} = \eta_1 \gamma \frac{Q(H+z)}{\omega} - M_c, \quad (4)$$

уравнение чувствительного элемента (массой регулятора пренебрегаем)

$$T_k \frac{d\eta}{dt} + \delta\eta + \varphi = 0, \quad (5)$$

уравнение сервомотора (регулятор с жесткой обратной связью)

$$T_s \frac{d\mu}{dt} = f(\eta - \mu). \quad (6)$$

Здесь $\varphi = (\omega - \omega_0)/\omega_{\text{ном}}$ — относительное изменение угловой скорости агрегата, $\alpha = \alpha_0(1 + \mu)$ — открытие сопла (пропорциональное относительному смещению поршня сервомотора), остальные обозначения общепринятые. Характеристику сервомотора $f(\sigma)$ ($\sigma \equiv \eta - \mu$) считаем линеаризуемой, удовлетворяющей условиям $f(\sigma) \sigma > 0$ и $f(0) = 0$. Считаем также, что коэффициент полезного действия агрегата $\eta_1 = \text{const}$ и момент сил сопротивления $M_c = \text{const}$.

Введя безразмерные переменные $y = v/v_0$, $x = z/Pv_0^2$, $q = Q/Q_0$, $\bar{\omega}_1 = \omega/\omega_{\text{ном}} = \omega/\omega_0$, где индексом ноль обозначены величины в стационарном режиме и принято, что $\omega_{\text{ном}} = \omega_0$, и обозначая

$$\beta = \frac{Pv_0^2}{H}, \quad T_1 = \frac{FPv_0^2}{fv_0}, \quad T_2 = \frac{Lv_0}{gPv_0^2},$$

$$T_3 = \frac{J\omega_0^2}{\eta_1 \gamma Q_0 H}, \quad m_c = \frac{M_c \omega_0}{\eta_1 \gamma Q_0 H} = \text{const}, \quad T_4 = T_k, \quad T_5 = T_s,$$

перепишем уравнения (1) — (6) в следующем виде:

$$T_1 \frac{dx}{dt} = x - q, \quad (1a)$$

$$T_2 \frac{dy}{dt} + x + y^2 = 0, \quad (2a)$$

$$q = c \frac{\alpha}{Q_0} \sqrt{2gH(1 + \beta x)}, \quad (3a)$$

$$T_3 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{q(1+\beta x)}{\omega_1} - m_c, \quad (4a)$$

$$T_4 \frac{d\eta}{dt} + \delta\eta + \varphi = 0, \quad (5a)$$

$$T_5 \frac{d\mu}{dt} = f(\eta - \mu), \quad (6a)$$

где $\mu = (\alpha - \alpha_0)/\alpha_0$. Здесь $1 + \beta x > 0$ (так как уровень жидкости в уравнительном резервуаре не может быть ниже его дна). Предположим, что постоянные времени T_i удовлетворяют следующему неравенству:

$$T_4, T_5 \ll T_3 \ll T_1, T_2. \quad (7)$$

В соответствии с (7) часть дифференциальных уравнений задачи можно рассматривать как содержащие малый параметр при производных, и все движения в системе можно разделить на «самые быстрые» (η, μ), «менее быстрые» (φ) и медленные (x, y) [6]. Приближенными уравнениями самых быстрых движений будут уравнения

$$T_4 \frac{d\eta}{dt} + \delta\eta + \varphi = 0 \quad (\varphi = \text{const}), \quad (8)$$

$$T_5 \frac{d\mu}{dt} = f(\eta - \mu). \quad (9)$$

Точки фазовых подпространств $\delta\eta + \varphi = 0$ и $\eta - \mu = 0$ являются (для данной характеристики сервомотора и $\delta > 0$) устойчивыми состояниями равновесия самых быстрых движений. Следовательно, если в начальный момент времени изображающая точка не находилась вблизи этих подпространств, то, перемещаясь по траекториям самых быстрых движений, она придет к этим подпространствам и в дальнейшем будет двигаться внутри них. В соответствии с (3а), (4а) приближенное уравнение менее быстрых движений имеет вид

$$T_3 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c\alpha_0(1-\varphi\delta^{-1})Q_0^{-1}\sqrt{2gH(1+\beta x)(1+\beta x)}}{\omega_1} - m_c \equiv F_3(x, \varphi) \quad (x = \text{const}), \quad (10)$$

где $\mu = \eta = -\varphi/\delta$, $\omega_1 = 1 + \varphi$. Состоянием равновесия этих движений будет подпространство $F_3(x, \varphi) = 0$, причем легко убедиться, что $\frac{\partial F_3}{\partial \varphi} < 0$, и, следовательно, это состояние равновесия устойчиво. Из уравнения

$$F_3(x, \varphi) = 0 \quad (11)$$

получим, что

$$\varphi = \frac{c\alpha_0\sqrt{2gH(1+\beta x)(1+\beta x)} - m_c Q_0}{m_c Q_0 + c\alpha_0 \delta^{-1} \sqrt{2gH(1+\beta x)(1+\beta x)}}. \quad (12)$$

Здесь $Q_0 = c\alpha \sqrt{2gH(1+\beta x_0)}$.

Уравнение (11) и является условием постоянства врачающегося момента турбины. Его можно было бы непосредственно ввести в уравнения системы, заменив (4а) на соотношение

$$\frac{q(1+\beta x)}{\omega_1} = m_c = \text{const} \quad (13)$$

(последнее формально получается из (4а) при $T_3 = 0$ и $\frac{d\varphi}{dt} \neq \infty$, т. е. при отсутствии бесконечных ускорений). Однако получение соотношения (11) с помощью уравнения (10) можно считать более предпочтительным, поскольку тем самым удается выявить несущественность для поведения системы (при малом параметре T_3) малых нарушений равенства (11) (т. е. соотношения (13)).

Медленным движениям отвечают уравнения (1а), (2а), в которых в соответствии с (3а) и (11)

$$q = \frac{(\delta + 1)m_c(1 + \beta x)^{1/2}}{\delta m_c(1 + \beta x_0)^{1/2} + (1 + \beta x)^{3/2}}.$$

Учитывая, что в стационарном режиме медленных движений $m_c = \text{const} = \frac{q_0(1 + \beta x_0)}{\omega_{10}} = 1 + \beta x_0$ (так как $q_0 = \omega_{10} = 1$), запишем выражение для q в виде

$$q = (1 + \delta) \left[\delta \left(\frac{1 + \beta x_0}{1 + \beta x} \right)^{1/2} + \frac{1 + \beta x}{1 + \beta x_0} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Из уравнения (2) следует, что $z_0 = -Pv_0^2$ и, следовательно, $x_0 = -1$. Введя новое время $t_1 = t/T_1$ и обозначив $T_2/T_1 \equiv \epsilon$, получим следующие дифференциальные уравнения медленных движений системы (при $y > 0$):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= y - q, \\ \frac{dy}{dt_1} &= -\epsilon(x + y^2), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$q = (1 + \delta) \left[\delta \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta x} \right)^{1/2} + \frac{1 + \beta x}{1 - \beta} \right]^{-1} > 0, \quad (16)$$

причем, как отмечено выше, $1 + \beta x > 0$. При $\delta = 0$ уравнения (15) и (16) совпадают с уравнениями системы с «идеальным» регулятором [3]. Уравнения (15), (16) и будем считать основными уравнениями задачи. Изложенное ниже посвящено установлению качественной картины разбиения на траектории фазовой плоскости динамической системы, описываемой уравнениями (15), (16). Поэтому в дальнейшем термин «медленные» в характеристике движений опускается*.

Условия устойчивости системы в малом получим, если подставим в уравнение (15) (где q определяется выражением (16))

$$x = -1 + u, \quad y = 1 + w \quad (17)$$

и линеаризуем задачу. Тогда условия Раута—Гурвица приведут к следующим неравенствам:

$$1 + \delta - 3\beta > 0, \quad \epsilon > \frac{\beta(2 - \delta)}{4(1 - \beta)(1 + \delta)}. \quad (18)$$

Исследование устойчивости системы в большом требует качественного рассмотрения системы (15) или эквивалентного ей уравнения

* Отметим, что при $\delta \rightarrow \infty$ уравнения (15), (16) формально переходят в систему уравнений, соответствующих постоянному открытию турбины. В этом случае расход рабен $q = \sqrt{1 + \beta x} / \sqrt{1 - \beta}$. При $\beta = \delta = 0$ (но $\epsilon \neq 0$) придет к случаю постоянного расхода турбины $q = 1$.

$$\frac{dy}{dx} = [\epsilon(x + y^2)] \left\{ (1 + \delta) \left[\delta \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta x} \right)^{1/2} + \frac{1 + \beta x}{1 - \beta} \right]^{-1} - y \right\}^{-1}, \quad (19)$$

где $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $0 < \beta < 1/3 < \frac{1+\delta}{3}$ и где временно считаем $y \geq 0$.

Из (19) следует, что уравнение изоклины горизонтальных наклонов имеет вид $x + y^2 = 0$ или

$$y = f_1(x) = \pm \sqrt{-x}, \quad (20)$$

а уравнение изоклины вертикальных наклонов

$$y = f_2(x) = (1 + \delta) \left[\delta \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta x} \right)^{1/2} + \frac{1 + \beta x}{1 - \beta} \right]^{-1}. \quad (21)$$

При $\delta = 0$ («идеальный» регулятор) уравнение (21) дает

$$y = (1 - \beta)(1 + \beta x)^{-1}. \quad (22)$$

Обозначим $z \equiv (1 + \beta x)(1 - \beta)^{-1}$. При $-1/\beta \leq x \leq -1$ $0 \leq z \leq 1$. В этом интервале из уравнения (21) следует

$$\Delta \equiv y_{\delta=0} - y_{\delta>0} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta x} - (1 + \delta) \left[\delta \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta x} \right)^{1/2} + \frac{1 + \beta x}{1 - \beta} \right]^{-1} = \\ = \frac{1}{z} - (1 + \delta) \left(\frac{\delta}{\sqrt{z}} + z \right)^{-1} = \frac{\delta(1 - z^{3/2})}{z(\delta + z^{3/2})} > 0,$$

т. е. в интервале $0 \leq z \leq 1$ кривая (22) лежит выше кривой (21). При этом, когда $x \rightarrow -1/\beta$ справа, кривая (22) уходит в бесконечность, а кривая (21) стремится к точке $(-1/\beta, 0)$. В связи с этим в рассматриваемой части фазовой плоскости ($x > -1/\beta$) система (15) имеет или три изолированных состояния равновесия $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $O_3(x_3, y_3)$ (рис. 2а), или одно $O_1(x_1, y_1)$ (рис. 2б). Координаты состояния равновесия $O_1(x_1, y_1)$ следующие: $x_1 = -1$, $y_1 = +1$.

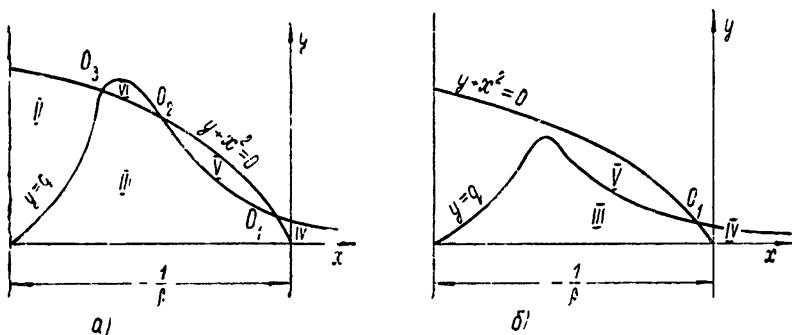


Рис. 2.

Координаты состояний равновесия O_2 и O_3 в явном виде записать не удается. Их можно определить графически, находя построением для различных β и δ точки пересечения кривых (20) и (21) (при $0 \leq z = (1 + \beta x)(1 - \beta)^{-1} \leq 1$). На фазовой плоскости (x, y) при $\delta \neq 0$ точка O_2 лежит всегда левее точки O_3 , соответствующей $\delta = 0$. Характер особых точек найдем, определив в характеристическом уравнении

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

коэффициенты p и q . Несложные подсчеты дают для них следующие выражения:

$$p = y_0 \left[\frac{1}{2z_0} \frac{\beta}{1-\beta} \left(\frac{\delta - 2z_0^{3/2}}{\delta + z_0^{3/2}} \right) + 2\epsilon \right], \quad (23)$$

$$q = \epsilon \left[\frac{\beta y_0^2}{z_0(1-\beta)} \frac{\delta - 2z_0^{3/2}}{\delta + z_0^{3/2}} + 1 \right] = \epsilon \frac{(1+3\beta x_0) z_0^{3/2} + \delta}{(1+\beta x_0)(\delta + z_0^{3/2})}. \quad (24)$$

В состоянии равновесия O_1 коэффициент $q > 0$. Особая точка, соответствующая состоянию равновесия O_1 , будет устойчивым или неустойчивым фокусом, или узлом (устойчивым, если $\epsilon > \beta(2-\delta)/4(1-\beta)(1+\delta)$, неустойчивым — при обратном знаке неравенства)*. Численные подсчеты показывают, что особая точка O_2 — седло, а особая точка O_3 — узел или фокус, что согласуется с утверждением известной теоремы Пуанкаре о чередовании особых точек**. С ростом δ при фиксированном β точки O_2 и O_3 сближаются и при некоторых бифуркационных значениях параметров β , δ сливаются, образуя сложную особую точку $O_2 - O_3$ — седло-узел. В этой точке $q = 0$, что позволяет определить критическое δ , соответствующее точке бифуркации:

$$\delta_{kp} = -(1+3\beta x) z^{3/2} = [2-3(1-\beta) z] z^{3/2}. \quad (25)$$

Подставив (25) в уравнение

$$\frac{1+\delta}{\delta/\sqrt{z} + z} = \left[\left(1 - \frac{1}{\beta} \right) z + \frac{1}{\beta} \right]^{1/2},$$

полученное путем приравнивания друг другу выражений (20) и (21), найдем уравнение для определения координат сложной особой точки в зависимости от β :

$$\frac{z^{3/2}[2-3z(1-\beta)] + 1}{[1-(1-\beta)z]^{3/2}} = \frac{3z}{\beta^{1/2}}. \quad (26)$$

Отметим, что уравнение (26) можно также получить из соотношений

$$f_1(x) = f_2(x), \quad \frac{df_1}{dx} = \frac{df_2}{dx},$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в (20) и (21). При $\delta > \delta_{kp}$ сложная особая точка $O_2 - O_3$ исчезает и остается лишь особая точка O_1 . Так как обычно $0 < \delta < 0,1$, то практически эта бифуркация может иметь место не при всех β ($0 < \beta < 1/3$).

В сложной особой точке $O_2 - O_3$

$$p|_{q=0} = y_0(2\epsilon + 1/2x_0). \quad (27)$$

Отметим, что в сложной особой точке $2z^{3/2} > \delta$. Так как наклон изоклины вертикальных наклонов определяется выражением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\delta}{2(\delta+z^{3/2})^2} \frac{(\delta-2z^{3/2})\beta}{z^{1/2}(1-\beta)},$$

* Точка O_1 — фокус, если $\lambda_1 \equiv \beta^2(\delta-2)^2 + 4\epsilon(1-\beta)(1+\delta) [4\epsilon(1-\beta)(1+\delta) + 2\beta - 1 - \delta + \beta\delta/2] < 0$, и узел если $\lambda_1 > 0$.

** Стационарный режим, соответствующий устойчивой особой точке O_3 , практически не реализуется, так как ему соответствует малый напор у турбины. Но для определения качественной картины поведения системы учет особой точки O_3 необходим.

то кривая (21) имеет максимум при $2z^{3/2} = \delta$. Следовательно, сложная особая точка $O_2 - O_3$ лежит на падающем участке кривой (21) $y = f_2(x)$ правее ее максимума. При $\beta = 1/3$ особые точки O_1, O_2, O_3 сливаются в одну сложную особую точку с координатами $x = -1, y = +1$.

Установим качественную картину разбиения фазовой плоскости x, y на траектории, использовав для этого с соответствующими изменениями приемы исследования работы [3].

1) Пусть $\delta < \delta_{kp}$. Проследим за поведением в полуплоскости $1 + \beta x > 0$ сепаратрис седла O_2 . Изоклины горизонтальных и вертикальных наклонов (20), (21) разбивают рассматриваемую часть на области I—VI, в которых $\frac{dx}{dt_1}$ и $\frac{dy}{dt_1}$ сохраняют знаки (рис. 2а, 2б). На рис. 2а представлен случай трех особых точек O_1, O_2, O_3 , на рис. 2б—одной особой точки O_1 . В области I $\frac{dy}{dt_1} < 0, \frac{dx}{dt_1} > 0$, в областях II, V $\frac{dy}{dt_1} > 0, \frac{dx}{dt_1} > 0$, в III $\frac{dy}{dt_1} > 0, \frac{dx}{dt_1} < 0$, в IV, VI $\frac{dy}{dt_1} < 0, \frac{dx}{dt_1} < 0$. Уравнение наклона сепаратрис в седле O_2 (рис. 2а) имеет вид

$$K^2 + \left[2\varepsilon + \frac{(2z_2^{3/2} - \delta)\beta}{2z_2(1-\beta)} \right] y_2 K + \varepsilon = 0, \quad (28)$$

где $z_2 \equiv (1 + \beta x_2)(1 - \beta)^{-1}$.

Так как $y_1 > 0, 0 < z_2 \leq 1$ и $2z_2^{3/2} > \delta$, то выражение в скобках уравнения (28) положительно и, следовательно, оба наклона сепаратрис в седле отрицательны. Поэтому две сепаратрисы седла $O_2 - L_1$ (входящая в седло) и L_2 (выходящая из седла) попадают в область I, где $\frac{dx}{dt_1} > 0, \frac{dy}{dt_1} < 0$, а две сепаратрисы L_3 (входящая в седло) и L_4 (выходящая из седла)—в область III, где $\frac{dx}{dt_1} < 0, \frac{dy}{dt_1} > 0$.

Непосредственно видно, что в областях V, VI сепаратрисы попасть не могут. Отметим, что сепаратриса седла L_3 является аналитическим продолжением через седло сепаратрисы L_1 , а сепаратриса L_4 —аналитическим продолжением сепаратрисы L_2 . Нетрудно видеть, что сепаратриса L_1 при неограниченном убывании t_1 уйдет в бесконечность в положительном направлении оси y , сепаратриса L_4 при возрастании t_1 будет стремиться к точке O_3 , либо оставаясь в области III, либо пересекая изоклину вертикальных наклонов и попадая в область II.

Проследим ход сепаратрисы L_2 . Эта сепаратриса попадает из седла в область I, где $\frac{dx}{dt_1} > 0, \frac{dy}{dt_1} < 0$, так что при увеличении t_1 абсцисса точек возрастает, а ордината убывает. Нетрудно видеть, что сепаратриса L_2 не может, не выходя из рассматриваемой области, пересечь изоклину горизонтальных наклонов (20), но непременно пересечет изоклину вертикальных наклонов (21). Последнее следует из того, что во всех точках $M(x, y)$ области I, у которых $x > x^*$ ($x^* > 0$ —некоторая достаточно большая величина) и $y < y_2$ (y_2 —ордината седла), имеет место неравенство

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon(x + y^2) \left\{ (1 + \delta) \left[\delta \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta x} \right)^{1/2} + \frac{1 + \beta x}{1 - \beta} \right]^{-1} - y \right\}^{-1} < -N,$$

где $N > 0$ —некоторая, надлежащим образом подобранные величина, так что сепаратриса L_2 не может при $x \rightarrow \infty$ асимптотически прибли-

жаться к оси x . Таким образом, сепаратриса L_2 пересекает изоклину (21) и входит в область IV, где $\frac{dx}{dt_1} < 0$, $\frac{dy}{dt_1} < 0$. Принимая во внимание знаки $\frac{dx}{dt_1}$ и $\frac{dy}{dt_1}$ в тех областях, в которые может попасть сепаратриса L_2 при дальнейшем увеличении t_1 , можно показать, что для ее хода существуют следующие возможности, а именно, она может а) стремиться к состоянию равновесия O_1 б) накручиваться на предельный цикл, окружающий точку O_1 , в) стремиться к седлу O_2 , г) стремиться к точке O_3 , 4) пересечь прямую $1+\beta x = 0$.

Поведение сепаратрисы L_3 определяется поведением сепаратрисы L_2 . Обратимся теперь к вопросу о существовании или отсутствии предельных циклов. Заметим, что если предельные циклы существуют, то они лежат в области, ограниченной двумя параллельными оси y прямыми: прямой $x = x_2$ (x_2 — абсцисса седла) и, если x^0 есть абсцисса точки пересечения сепаратрисы L_2 с кривой (21), прямой $x = x^0$. При $0 < \delta \leq \delta_{kp}$ седло O_2 лежит левее и выше положения, которое оно занимает при $\delta=0$ (т. е. при «идеальном» регуляторе). Поэтому при $0 < \delta \leq \delta_{kp}$ область возможного существования предельных циклов больше, чем в случае $\delta=0$.

Предложение 1. При значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \beta < \frac{1}{3}, \quad \varepsilon \geq \frac{\beta}{4(1-\beta)(2\delta)^{2/3}} \quad (0 < \delta < \delta_{kp}),$$

система (15) не имеет предельных циклов.

Согласно критерию Дюляка, если существует такая непрерывная с непрерывными производными функция $F(x, y)$, что в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение $\frac{\partial}{\partial x}(FX) + \frac{\partial}{\partial y}(FY)$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (15). В нашем случае

$$\frac{dx}{dt_1} = y - q = y - \frac{1+\delta}{\delta z^{-1/2} + z} \equiv X \quad \left(z = \frac{1+\beta x}{1-\beta} \right),$$

$$\frac{dy}{dt_1} = -\varepsilon(x+y^2) \equiv Y.$$

Положим $F(x, y) = e^{2\varepsilon x}$. Тогда

$$A \equiv \frac{\partial(FX)}{\partial x} + \frac{\partial(FY)}{\partial y} = -e^{2\varepsilon x} \frac{(1+\delta)z^{1/2}}{\delta + z^{3/2}} \times \\ \times \left[\frac{\beta}{2(1-\beta)z} \frac{\delta - 2z^{3/2}}{\delta + z^{3/2}} + 2\varepsilon \right] \equiv K(D+2\varepsilon), \quad (29)$$

где $D \equiv \beta(\delta - 2z^{3/2})/2(1-\beta)z(\delta + z^{3/2})$ ($K > 0$); A обращается в нуль тогда, когда в (29) равно нулю выражение в квадратных скобках (или коэффициент p из (23)). Построим кривую $D = D(z)$. Ее вид представлен на рис. 3. Кривая $D(z)$ имеет минимум при $z = (2\delta)^{2/3}$, причем $D_{min} = -\beta/2(1-\beta)(2\delta)^{2/3}$. Очевидно, что A не обращается в нуль, и, следовательно, не существует предельных циклов, если

$$2\varepsilon \geq \frac{\beta}{2(1-\beta)(2\delta)^{2/3}}. \quad (30)$$

Неравенство (30) можно в ряде случаев значительно ослабить, если учесть, что при $\delta \neq 0$ величина D в седле O_2 (обозначим ее D_2) может лежать (в области отрицательных D) в зависимости от β и δ как на падающем (с ростом z), так и на возрастающем (с ростом z) участке кривой $D(z)$. Если D_2 лежит на падающем участке, то справедлива оценка (30). Если же D_2 лежит на возрастающем участке кривой ($z_2 > (2\delta)^{2/3}$), то вместо неравенства (30) достаточно выполнения более слабого неравенства

$$2\epsilon \geq -D_2 \quad (31)$$

(где D_2 находится по z_2 в седле). В этом случае величина A может менять знак лишь при $z < z_2$, а область возможного расположения предельных циклов лежит справа от прямой $z = z_2$. Отметим, что при $\delta = 0$ кривая $D(z)$ при всех $z > 0$ не имеет падающих участков и поэтому справедлива оценка (31).

Предложение 2. При значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \beta < 1/3, \quad 2\epsilon \ll \min(-D^*, -D_2) \quad (0 < \delta < \delta_{kp}),$$

где $D^* = D(z^*)$, $z^* \equiv (1 + \beta x^*)(1 - \beta)^{-1}$, x^* — положительный корень (единственный) уравнения

$$1 - 2\epsilon \left\{ x^* + \left[\frac{1 + \delta}{\delta(z^*)^{-1/2} + z^*} \right]^2 \right\} = \exp[-2\epsilon(x^* - x_2)], \quad (31)$$

система (15) не имеет предельных циклов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение консервативной системы

$$\frac{dy}{dx} = -\epsilon \frac{x+y^2}{y}, \quad (32)$$

получающееся из уравнения (19) при $\beta = 1$. Оно интегрируется в квадратурах и его общий интеграл имеет вид

$$h = e^{2\epsilon x} \left(\frac{1}{2\epsilon} - x - y^2 \right). \quad (33)$$

Для интегральной кривой уравнения (32), проходящей через седло $O_2(x_2, y_2)$, постоянная $h = (1/2\epsilon) \exp(2\epsilon x_2)$, а наклон в O_2 $\frac{dy}{dx} = 0$. Эта интегральная кривая лежит в области I, где $\frac{dx}{dt_1} > 0$, $\frac{dy}{dt_1} < 0$, и пересекает изоклину вертикальных наклонов (21) правее седла в точке $M(x^*, y^*)$, определяемой равенством (31). Рассмотрим дугу Λ этой интегральной кривой (лежащую в области I) от точки O_2 до M . Во всех точках этой дуги

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{\beta=1/3} - \frac{dy}{dx} \Big|_{\beta=1} &= [\epsilon(x+y^2)] \left[\frac{1+\delta}{\delta(z)^{-1/2}+z} - y \right]^{-1} + \\ &+ \frac{\epsilon(x+y^2)}{y} = \frac{\epsilon(x+y^2)(1+\delta)}{y[(1+\delta)(\delta/Vz+z)^{-1}-y](\delta/Vz+z)} < 0, \end{aligned} \quad (34)$$

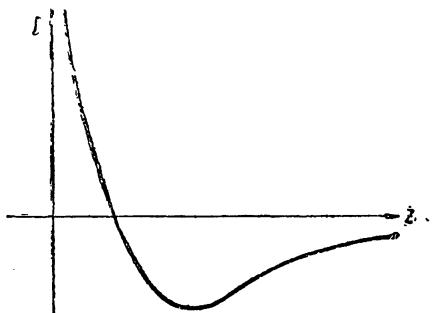


Рис. 3.

т. е. дуга Λ является дугой без контакта для интегральных кривых системы (15) (так как Λ ни в одной точке не касается интегральных кривых).

Сепаратриса L_2 , выходя из седла, попадает внутрь области, ограниченной дуги Λ и дугой O_2M^* кривой (21) (так как в седле наклон дуги Λ равен нулю, а сепаратрисы L_2 — отрицателен). Вследствие того, что сепаратриса не может пересечь дугу без контакта Λ , она выйдет из этой области, непременно пересекая дугу O_1M^* кривой (21) в точке, расположенной левее x^* . Отсюда следует, что прямая $x = x^*$ лежит справа от области, в которой возможны предельные циклы. Следовательно, в соответствии с (29) (см. рис. 3) необходимым условием отсутствия предельных циклов будет условие

$$2\varepsilon \leq -D^* = -\frac{\beta(\delta - 2z^{*3/2})}{2(1-\beta)z^*(\delta + z^{*3/2})}. \quad (35)$$

Это условие будет и достаточным, если D_2 (в седле) лежит на возрастающем участке (с ростом z) кривой $D(z)$. Если же D_2 лежит на падающем (с ростом z) участке кривой $D(z)$, то критерий Дюляка отсутствия предельных циклов будет удовлетворен в интервале $z_2 < z < z^*$, где $D < 0$, если при $D_2 < D^*$ выполняется неравенство $2\varepsilon < -D^*$, а при $D_2 > D^*$, если $2\varepsilon \leq -D_2$, т. е. при наименьшем ε .

Для β , ε и $\delta < \delta_{kp}$, удовлетворяющих условиям, сформулированным выше предложений 1 и 2, поведение сепаратрис однозначно определяется характером устойчивости состояния равновесия в точке $(-1, 1)$. Для ε , β , δ , удовлетворяющих условиям предложения 2, состояние равновесия неустойчиво и система неустойчива в большом. Для ε , β , δ , удовлетворяющих условиям предложения 1, состояние равновесия точки $(-1, +1)$ устойчиво и система устойчива в большом. Зафиксируем β и $\delta < \delta_{kp}$ и проследим за изменением качественной структуры разбиения на траектории в окрестности состояния равновесия $(-1, +1)$ с изменением ε . Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0$ — корень уравнения

$$R \equiv \frac{\beta(\delta - 2)}{2(1-\beta)(1+\delta)} + 2\varepsilon = 0. \quad (36)$$

Вычисляя первую ляпуновскую величину $L_1 = L_1(\varepsilon_0)$ [7], находим

$$\begin{aligned} L_1(\varepsilon_0) = & \frac{2\pi\beta^4(2-\delta)}{64[(2-\delta)\beta(1-3\beta+\delta)]^{3/2}(1-\beta)^2(1+\delta)^2} \times \\ & \times (40 - 72\beta - 71\delta + 845\beta\delta - 129\delta^2 + 1298\beta\delta^2 - 20\delta^3 + \\ & + 1410\beta\delta^3 - 2\delta^4 + 588\beta\delta^4 - 465\beta\delta^5 + \beta\delta^6). \end{aligned} \quad (37)$$

При $\delta = 0$ выражение (37) совпадает с соответствующим выражением работы [3].

Так как $0 < \beta < 1/3$ и практически $0 < \delta < 0,1$, то $L_1(\varepsilon_0) > 0$ и граница области устойчивости будет опасной. Следовательно, при изменении ε от значений $< \varepsilon_0$ до значений $> \varepsilon_0$ (при превращении фокуса из неустойчивого в устойчивый) из состояния равновесия $(-1, \mp 1)$ появляется единственный неустойчивый предельный цикл, внутренность которого будет областью устойчивости в большом для рассматриваемого состояния равновесия. Однако при ε , не удовлетворяющих условиям предложений 1 и 2, кроме этого предельного цикла возможны и другие (родившиеся не из фокуса); общее число их должно быть нечетным при $\varepsilon > \varepsilon_0$, что следует из расположения сепаратрис. С точ-

нностью до четного числа предельных циклов качественная картина для этого случая показана на рис. 4.

Размеры области притяжения устойчивого состояния равновесия O_1 на фазовой плоскости можно найти лишь численным или графическим интегрированием*. Однако с помощью прямого метода Ляпунова можно определить внутри области притяжения некоторую подобласть, окружающую точку O_1 , такую, что если начальные возмущения лежат внутри указанной подобласти, то изображающая точка, двигаясь по фазовым траекториям, будет заведомо стремиться к точке O_1 .

2) Пусть $\delta > \delta_{kp}$. В этом случае на фазовой полуплоскости $1 + \beta x > 0$ имеется лишь одна особыя точка O_1 типа фокуса или узла (устойчивого или неустойчивого).

Знаки, $\frac{dx}{dt_1}$ и $\frac{dy}{dt_1}$ в областях, на которые в этом случае полуплоскость $1 + \beta x > 0$ разбивается изоклиниами горизонтальных и вертикальных наклонов, отмечены выше (рис. 2б). Область возможного существования предельных циклов здесь ограничена слева прямой $x = -1/\beta$. Справа эта область ограничена прямой $x = x^0$, где x^0 удовлетворяет уравнению

$$\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\beta}\right) = (1 - 2\varepsilon x^0) \exp(2\varepsilon x^0). \quad (38)$$

Последнее вытекает из следующего. Возьмем интегральную кривую уравнения (33), проходящую через точку $x = -1/\beta$ параболы $x + y^2 = 0$. Ее уравнение следующее:

$$h = \frac{1}{2\varepsilon} \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\beta}\right) = \left(\frac{1}{2\varepsilon} - x - y^2\right) \exp(2\varepsilon x). \quad (39)$$

(Так как $1/2\varepsilon > h > 0$, то эта интегральная кривая замкнутая ([6], стр. 172.) В соответствии с неравенством (34), справедливым как для $\delta < \delta_{kp}$, так и для $\delta > \delta_{kp}$, в области I (где $\frac{dx}{dt_1} > 0$, $\frac{dy}{dt_1} < 0$) отрица-

тельный наклон интегральных кривых дифференциального уравнения (19) больше отрицательного наклона интегральных кривых дифференциального уравнения (32). Поэтому, если изображающая точка системы, двигаясь по фазовым траекториям уравнения (19), попадает в область I из области II (что обязательно должно иметь место при ее движении по предельному циклу, то она не сможет в области I пересечь кривую (39). Так как кривая (39) пересекает ось абсцисс в точке x^0 , определяемой уравнением (38), то отсюда и вытекает сделанное выше утверждение.

* Последнее, в частности, показало в [3], что при $\delta = 0$ размеры неустойчивого предельного цикла растут с ростом ε и при некотором $\varepsilon = \varepsilon_{kp}$ предельный цикл вливается в петлю сепаратрисы, расположенную (при взятых значениях параметров) в полу-плоскости $y > 0$.

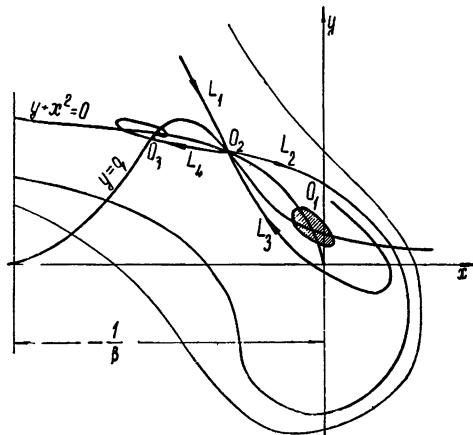


Рис. 4.

Предложение 1 для $\delta > \delta_{kp}$ сохраняет свою силу, предложение 2 теряет смысл. При смене устойчивости из сложного фокуса в соответствии со знаком выражения (37) появляется неустойчивый предельный цикл, размеры которого растут с ростом ϵ . С помощью прямого метода Ляпунова здесь также можно определить подобласть устойчивости G внутри предельного цикла.

Из сказанного в случаях 1) и 2) вытекает, что при $\delta > 0$ и $\eta_1 = \text{const}$ область возможного существования предельных циклов больше, чем при $\delta = 0$. Это означает, что гипотеза «идеального» регулятора при определении устойчивости системы в большом накладывает более тяжелые условия на начальные отклонения системы от стационарного режима, чем учет статических регуляторов ($\delta \neq 0$). Этот результат качественно согласуется с одним из выводов работы [4], полученным при исследовании устойчивости соответствующих систем в малом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Аронович, Л. Н. Беллюстина, Н. А. Карцевелишили, Я. К. Любимцев, Ж. прикладной математики и технической физики, № 3, 56 (1961).
2. Г. В. Аронович, Н. А. Карцевелишили, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 5, 131 (1964).
3. Г. В. Аронович, Л. Н. Беллюстина, Инженерный сб. (ин-т Механики АН СССР), 13, 131 (1952).
4. Д. А. Догонадзе, Н. А. Карцевелишили, Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденева; 77, 101 (1965).
5. Г. В. Аронович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 748 (1961).
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
7. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Л.—М., 1949.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию 21 ноября 1966 г.

ON THE GLOBAL STABILITY OF THE STATIONARY REGIMES FOR THE HYDRO-ELECTRIC POWER STATIONS WITH AN EQUALIZING RESERVOIR WHEN THE TURBINE TORQUE IS CONSTANT

E. Ya. Shtaerman

The global stability of the processes in the hydroelectric power station pressure system is considered using the qualitative methods of the differential equations theory. The investigation is carried out assuming that the station is equipped with the simple equalizing reservoir and that the turbine torque is constant and equal to the moment of resistance.

УДК 62—501.32

О ВЛИЯНИИ ИНЕРЦИИ ВОДЫ В ТУРБИННОМ ТРУБОПРОВОДЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАБОТЫ ГЭС С УРАВНИТЕЛЬНЫМИ РЕЗЕРВУАРАМИ*

М. Г. Аронович, Н. И. Соколова

Рассматривается устойчивость в малом процессов в напорной системе ГЭС с уравнительным резервуаром при учете инерции воды в турбинном трубопроводе и статической системе регулирования. Задача исследуется в дискретной и распределенной идеализациях (в последнем случае учитываются волновые явления в напорной деривации и турбинном трубопроводе).

В исследованиях устойчивости в малом стационарных режимов ГЭС с уравнительными резервуарами при наличии так называемых идеальных регуляторов обычно пренебрегают инерцией воды в напорном турбинном трубопроводе**. Между тем учет даже сколь угодно короткого турбинного трубопровода как инерционного звена приводит (при $\delta = 0$) к характеристическому уравнению с малым отрицательным коэффициентом при старшем члене, что свидетельствует о неустойчивости системы [1]. Этот результат, отмечавшийся ранее в работах [2-4], указывает на необходимость построения более совершенной математической модели рассматриваемой динамической системы, так как физически ясно, что малая масса воды в турбинном трубопроводе не может нарушить устойчивость работы установки. По существу здесь имеет место типичный случай, когда в уравнениях динамики приходится дополнительно учитывать некоторые малые параметры, поскольку последние существенны для процессов в системе и пренебрежение ими делает модель дефектной [1].

Для того чтобы при учете инерции воды в турбинном трубопроводе избежать указанного выше противоречащего результата, в работе [2] отбрасывалось предположение об идеальном регуляторе и в уравнениях задачи наряду с уравнениями напорной части системы учитывались уравнения астатической системы регулирования и приближенное уравнение характеристики турбины. Исследование полученного характеристического уравнения шестой степени привело автора работы [2] к следующему выводу. Вся система устойчива в малом, если устойчивы в малом две следующие системы:

- 1) система с реальным уравнительным резервуаром, с безинерционным трубопроводом (но при учете потерь напора в последнем) и идеальным регулятором;

* В заметке изложены некоторые результаты дипломной работы, защищенной в ГГУ в 1966 г.

** «Идеальными» называют регуляторы, которые поддерживают мощность на выходе гидравлической части системы постоянной, равной мощности сил сопротивления. Известно, что идеальными при некоторых условиях можно считать астатические регуляторы с нулевой степенью неравномерности ($\delta=0$).

2) система с реальным трубопроводом, реальным регулятором и уравнительным резервуаром бесконечно больших размеров.

В настоящей работе вопрос об устойчивости в малом процессов в напорной системе ГЭС при учете инерции воды в турбинном трубопроводе исследуется в предположении статической системы регулирования числа оборотов гидроагрегата.

Задача рассматривается в дискретной и распределенной идеализациях (учитываются волновые явления в напорной деривации и турбинном трубопроводе). Решение дискретной задачи сведено к исследованию характеристического уравнения четвертой степени, решение распределенной задачи — к исследованию характеристического уравнения типа квазиполинома.

1. Рассмотрим напорную систему изолированной гидроэлектрической установки с простым цилиндрическим резервуаром и турбинным трубопроводом длиною L_1 , питающим активную турбину. При учете инерции воды и потерь напора в турбинном трубопроводе напор у турбины

$$H_c = H + z - P_1 v_1^2 - \frac{L_1}{g} \frac{dv_1}{dt}. \quad (1)$$

Здесь индексом 1 обозначены величины, соответствующие турбинному трубопроводу. Используя обозначения и идеализацию работы [5], пренебрегая постоянными временеми системы регулирования T_4, T_5 по сравнению с T_1, T_2, T_3 и считая (в отличие от [5]), что постоянная времени агрегата T_3 одного порядка с T_1, T_2 , запишем (с учетом (1)) следующую систему уравнений процессов в напорной системе ГЭС:

$$T_1 \frac{dx}{dt} = y - q, \quad (2)$$

$$T_2 \frac{dy}{dt} + x + y^2 = 0, \quad (3)$$

$$T_3 \frac{d\varphi}{dt} = q \left(1 + \beta x - \beta_1 y_1^2 - T_c \frac{dy_1}{dt} \right) \omega_1^{-1} - m_c, \quad (4)$$

$$q = \frac{c \alpha_0 (1 - \varphi/\delta)}{Q_0} \left[2gH \left(1 + \beta x - \beta_1 y_1^2 - T_c \frac{dy_1}{dt} \right) \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Здесь введены дополнительные обозначения $\beta_1 = P_1 v_{10}^2 / H$, $y_1 = v_1 / v_{10}$, $T_c = L_1 v_{10} / gH$, $m_c = 1 - \beta - \beta_1$. Полагая в (2)–(5) $x = -1 + \xi_1$, $y = 1 + \xi_2$, $q = y_1 = 1 + \xi_3$, $\omega_1 = 1 + \varphi \equiv 1 + \xi_4$ и линеаризуя уравнения, придем к следующему характеристическому уравнению:

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_1 p^2 + a_3 p + a_4 = 0, \quad (6)$$

где

$$a_0 = \frac{T_1 T_2 T_3 T_c}{2(1 - \beta - \beta_1)},$$

$$a_1 = -\frac{T_1 T_2 T_c}{\delta} + \frac{T_1 T_3 T_c}{1 - \beta - \beta_1} + \frac{T_1 T_2 T_c}{2} + \frac{T_1 T_2 T_3 (1 - \beta)}{1 - \beta - \beta_1},$$

$$a_2 = \frac{T_1 T_2 (1 - \beta - 3\beta_1) - 2T_1 T_c}{\delta} + T_1 T_2 (1 - \beta) + T_1 T_c +$$

$$+ \frac{2T_1 T_3 (1 - \beta)}{1 - \beta - \beta_1} + \frac{T_3 T_c + T_2 T_3 \beta}{2(1 - \beta - \beta_1)},$$

$$a_3 = \frac{2T_1(1-\beta-3\beta_1)-T_2\beta-T_c}{\delta} + 2T_1(1-\beta) + \frac{T_2\beta+T_c}{2} + \frac{T_3}{1-\beta-\beta_1},$$

$$a_4 = 1 + \frac{1-3\beta-3\beta_1}{\delta}.$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все $a_i > 0$ и чтобы

$$a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0. \quad (7)$$

Легко видеть, что если $T_3 = 0$, то всегда $a_1 < 0$ (так как практически $\delta < 0,1$). Далее, при $T_3 \neq 0$ a_1 может быть положительным, если T_c/δ порядка T_3 . Поэтому, если $\delta \rightarrow 0$ (идеальный регулятор), то для устойчивости необходимо, чтобы $T_c \rightarrow 0$. Условие (7) при замене знака неравенства на знак равенства определяет предельно возможную длину турбинного трубопровода. Можно показать, что если T_c достаточно мало, то рассматриваемый стационарный режим системы (2)–(5) устойчив при выполнении условий Тома. В самом деле, обозначая $T_c \equiv \mu$ и переписывая коэффициенты a_i , характеристическое уравнение (6) в виде

$$a_0 = \mu B_0, \quad a_1 = \mu B_1 + A_0, \quad a_2 = \mu B_2 + A_1,$$

$$a_3 = \mu B_3 + A_2, \quad a_4 = A_3,$$

где

$$B_0 = \frac{T_1 T_2 T_3}{2(1-\beta-\beta_1)}, \quad A_0 = \frac{T_1 T_2 T_3(1-\beta)}{1-\beta-\beta_1}, \quad B_1 = T_1 T_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{T_1 T_3}{1-\beta-\beta_1}$$

и т. д., запишем характеристическое уравнение (6) в виде

$$\mu(B_0p^4 + B_1p^3 + B_2p^2 + B_3p) + A_0p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3 = 0. \quad (8)$$

Стационарный режим системы (2)–(5) устойчив при достаточно малом μ (теоретически при $\mu \rightarrow 0$), если все корни вырожденного уравнения

$$A_0p^3 + A_1p^2 + A_2p + A_3 = 0 \quad (9)$$

лежат на левой полуплоскости и если выполняется условие [6]*

$$A_0/B_0 = 2(1-\beta) > 0. \quad (10)$$

Практически условие (10) выполняется всегда. При $1-3\beta-3\beta_1 > 0$ и $T_1/T_2 \equiv \epsilon > \beta/2(1-\beta-\beta_1)$ полином (9) — полином Гурвица (условия $A_i > 0$ и $A_1A_2 - A_0A_3 > 0$ проверяются непосредственно). Следовательно, при достаточно малых $\mu = T_c$ система устойчива.

Таким образом, при учете инерции воды в турбинном трубопроводе для устойчивости системы в уравнениях движения необходимо учитывать остаточную неравномерность регулирования и постоянную времени агрегата.

2. В предыдущем разделе рассматриваемая задача решалась в дискретной идеализации. Приведем решение этой же задачи, учитывая волновые явления как в напорной штолле, так и в трубопроводе между уравнительным резервуаром и турбиной**.

* Предполагается, что $\mu \equiv T_c$ стремится к нулю медленнее, чем T_4 и T_5 .

** Влияние на устойчивость волновых явлений в системе из трех звеньев, из которых одно моделировало простой уравнительный резервуар с неизменным уровнем воды, рассмотрено в [7].

Уравнения задачи в соответствии с направлением отсчета координаты x (рис. 1) имеют следующий вид:
для напорной штолни

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = g \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (11)$$

при граничных условиях

$$x = L_1: \quad h_1 = H, \quad (12)$$

$$x = 0: \quad v_1 \sigma_1 = F \frac{dz}{dt} + Q, \quad h_1 - P_1 v_1^2 = H + z;$$

для турбинного трубопровода

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -g \frac{\partial h_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{g}{a^2} \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad (13)$$

при граничных условиях

$$x = 0: \quad h_2 = H + z, \quad (14)$$

$$x = L_2: \quad Q = c \alpha_0 (1 - \varphi/\delta) \cdot [2g(h_2 - P_2 v_2^2)]^{1/2}$$

и выполнении дифференциального уравнения

$$J \frac{d\omega}{dt} = \eta_1 \gamma \frac{Q(h_2 - P_2 v_2^2)}{\omega} - M_c,$$

где $\varphi = (\omega - \omega_0)/\omega_0$.

Знак минус в правых частях уравнений (13) появляется ввиду совпадения направлений отсчета координаты x и скорости v_2 .

В уравнениях (11) и (13) принято для простоты, что скорости распространения малых возмущений a в напорной штолне и трубопроводе одинаковы, т. е. $a_1 = a_2 = a$.

Линеаризуя граничные условия и проводя стандартные выкладки, можно получить характеристическое уравнение системы (11)–(14) в следующем виде:

$$Fp + \frac{\alpha_1}{\alpha_3 + \operatorname{th}(p\tau_1/2)} = \frac{-P_1(p) e^{p\tau_2/2}}{[P'_1(p) \operatorname{th}(p\tau_2/2) + P''_1(p)] \operatorname{ch}(p\tau_2/2)}, \quad (15)$$

где

$$P_1(p) = P'_1(p) \alpha_2,$$

$$P'_1(p) = T_3 \frac{x}{2} p + \frac{\gamma x}{2} - \frac{Q_0}{H\delta},$$

$$P''_1(p) = T_3 \left(\frac{x}{2} \alpha_4 + \alpha_2 \right) p + \gamma \left(\frac{x}{2} \alpha_4 + \alpha_2 \right) - \frac{Q_0}{H\delta} \left(\alpha_4 - \frac{\alpha_2}{x} \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{g \sigma_1}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{g \sigma_2}{a}, \quad \alpha_3 = \frac{2P_1 v_{10} g}{a}, \quad \alpha_4 = \frac{2P_2 v_{20} g}{a},$$

$$\gamma = 1 - \beta - \beta_1 \equiv 1 - \frac{P_1 v_{10}^2}{H} - \frac{P_2 v_{20}^2}{H},$$

$$x = \frac{Q_0}{H\gamma}, \quad \tau_1 = \frac{2L_1}{a}, \quad \tau_2 = \frac{2L_2}{a}.$$

Отметим, что в уравнении (15) от τ_2 зависит лишь его правая часть, а от τ_1 — лишь один член левой части, что делает уравнение в форме (15) удобным для исследования.

При $a \rightarrow \infty$ характеристическое уравнение (15) переходит в уравнение (6) (чтобы это показать, надо в уравнении (15) гиперболические и экспоненциальную функции разложить в ряды и ограничиться первыми членами разложений).

Для определения условий устойчивости системы уравнений (11) — (14) построим D -разбиение по параметру F (площади сечения резервуара), считая его временно комплексным. Выделяя из уравнения (15) параметр F и полагая затем $p = i\omega$, получим, что

$$F = \frac{i}{\omega} \left\{ \frac{P_1(i\omega) \exp(i\omega\tau_2/2)}{[P'_1(i\omega) i \operatorname{tg}(\omega\tau_2/2) + P''_1(i\omega)] \cos(\omega\tau_2/2)} + \frac{\alpha_1}{\alpha_3 + i \operatorname{tg}(\omega\tau_1/2)} \right\}. \quad (16)$$

Соответствующая диаграмма D -разбиения при заданных значениях всех остальных параметров задачи приведена на рис. 2. Система устойчива при $F > F_{\min}$ (на рис. 2 отрезок устойчивости отмечен толстой чертой). Строго говоря, этот отрезок лишь претендует быть отрезком устойчивости. Но так как при $\tau_2 = 0$ ($L_2 = 0$) и $a \rightarrow \infty$ этот отрезок непрерывно переходит в отрезок устойчивости системы с характеристическим уравнением (9), то претендент действительно является отрезком устойчивости. Далее методом D -разбиения с помощью ЭЦВМ была построена диаграмма устойчивости по двум параметрам τ_1 и F для нескольких значений параметра τ_2 и фиксированных значений остальных параметров. Расчеты показали, что с ростом τ_2 (при $\tau_1 = \text{const}$) F_{kp} растет. В целом исследование раздела 2 выявило несущественность в обычных условиях влияния волновых явлений в напорной штолне и трубопроводе

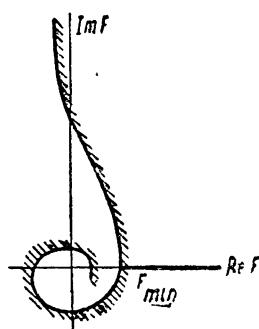


Рис. 2.

на устойчивость системы, что может служить обоснованием дискретной идеализации задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, гл. X, Физматгиз, М., 1959.
2. И. П. Андреева, Труды МЭИ, № 19, 95 (1956).
3. Н. А. Карцевелишили, Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 43 (1957).
4. Г. В. Аронович, Я. К. Любимцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 538 (1960).
5. Э. Я. Штаерман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 7 (1967).
6. М. В. Мееров, Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, М., 1959.
7. Ю. И. Неймарк, Ученые записки ГГУ, 16, Изд. ГГУ, 1950.

**ON THE EFFECT OF WATER INERTIA IN THE TURBINE TUBING UPON
THE HYDRO-ELECTRIC POWER STATION OPERATION STABILITY***M. G. Aronovich, N. I. Sokolova*

The local stability of the processes in the pressure system of the hydroelectric power station equipped with an equalizing reservoir is considered, and the account of water inertia in the turbine tubing and in the static control system has been taken. The problem is tackled using both discret and distributed models (and in the last case some wave phenomenons in the tubing are explored).

УДК 531.391

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

B. Г. Климов

Методом точечных преобразований решается задача о вынужденных колебаниях в системе с симметричной полигональной петлей гистерезиса, определяется область существования и устойчивости простейшего периодического режима, строятся амплитудно-частотные характеристики. Численный анализ произведен с помощью ЭВМ.

Исследованию динамики систем с полигональной гистерезисной характеристикой посвящены многочисленные работы, решающие задачу либо приближенными методами, либо посредством моделирования уравнений на вычислительных машинах. Наиболее полный перечень литературы по данному вопросу имеется в работе [1].

В настоящей работе задача о вынужденных колебаниях в системе с одной степенью свободы с симметричной полигональной петлей гистерезиса решается методом точечных преобразований. Определяется область существования простейшего периодического режима, строятся амплитудно-частотные характеристики в области устойчивости, проводятся сравнения с результатами, полученными приближенными методами.

1. Задача о вынужденных колебаниях в системе с симметричной полигональной петлей гистерезиса сводится при обычных упрощениях [1] к решению уравнения вида

$$m\ddot{x} + F(x) = P \sin(\Omega t), \quad (1)$$

где m — масса системы, P — амплитуда вынуждающей силы, Ω — частота вынуждающей силы. Зависимость функции $F(x)$ от x представлена на рис. 1.

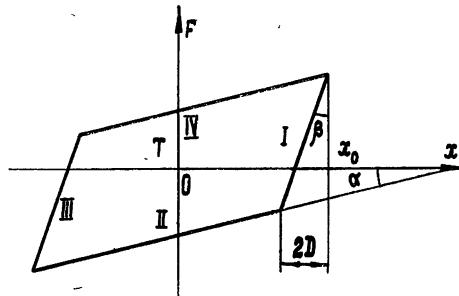


Рис. 1.

Так же, как и в работе [1], рассмотрим петлю, крутизны ветвей которой относятся как $1:4$ ($\operatorname{tg} \alpha = k$, $\operatorname{ctg} \beta = 4k$), где k — жесткость системы,

Сделав замену переменных $t = \sqrt{mk^{-1}}\tau$, $x = Pk^{-1}\xi$ и введя безразмерные параметры $\omega = \Omega\sqrt{mk^{-1}}$ и $d = DkP^{-1}$, получим следующее уравнение движения системы:

$$\ddot{\xi} + f(\xi) = \sin(\omega\tau). \quad (2)$$

Трехмерное фазовое пространство системы $(\xi, \dot{\xi}, \tau \geq 0)$ соответственно ее нахождению на одной из ветвей петли гистерезиса разделено на четыре области, в каждой из которых движение описывается линейным уравнением.

Область I ограничена плоскостями $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_0 - 2d$, и движение в ней описывается уравнением

$$\ddot{\xi} + 4\xi - 4\alpha_1 = \sin(\omega\tau), \quad (3)$$

где $\alpha_1 = (3/4)(\xi_0 - d)$.

Область II ограничена плоскостями $\xi = \xi_0 - 2d$ и $\xi = \xi_2$, движение в ней происходит при $\xi < 0$ и описывается уравнением

$$\ddot{\xi} + \xi - \alpha_2 = \sin(\omega\tau), \quad (4)$$

где $\alpha_2 = 3d$.

Область III ограничена плоскостями $\xi = \xi_2$ и $\xi = \xi_2 + 2d$ и движение в ней описывается уравнением

$$\ddot{\xi} + 4\xi - 4\alpha_3 = \sin(\omega\tau), \quad (5)$$

где $\alpha_3 = (3/4)(\xi_2 + d)$.

Область IV ограничена плоскостями $\xi = \xi_2 + 2d$ и $\xi = \xi_0$, движение в ней происходит при $\xi > 0$ и описывается уравнением

$$\ddot{\xi} + \xi - \alpha_4 = \sin(\omega\tau), \quad (6)$$

где $\alpha_4 = -3d$.

Характерной особенностью фазового пространства является подвижность областей I и III, имеющих постоянную ширину $2d$. Если изображающая точка находится в области I, то при своем движении она может покинуть область, переходя либо в область II при $\xi = \xi_0 - 2d$ и $\dot{\xi} < 0$, либо в область IV при $\xi = \xi_0$ и $\dot{\xi} > 0$. Выход изображающей точки из области II возможен лишь в область III, а из области IV — в область I.

Целью данной работы является изучение симметричного периодического режима со следующим порядком прохождения изображающей точки по областям: I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV \rightarrow I.

2. Для стыскания периодического решения системы уравнений (3)–(6) применим метод точечных преобразований. В фазовом пространстве системы можно ввести шесть возможных типов точечных преобразований: $T_{12}, T_{23}, T_{34}, T_{41}, T_{14}, T_{32}$. Начальный и конечный индексы указывают на порядок прохождения изображающей точкой областей фазового полупространства. Начальные и конечные точки преобразований расположены на граничных плоскостях $\xi = \xi_0$, $\xi = \xi_0 - 2d$, $\xi = \xi_2$, $\xi = \xi_2 + 2d$, а аналитическое выражение преобразования получается путем решения соответствующих уравнений системы при вышеуказанных начальных условиях.

Изучение любого периодического режима сводится к исследованию некоторого сложного точечного преобразования, составленного из шести

исходных таким образом, чтобы второй индекс предыдущего преобразования совпадал с первым индексом следующего.

Целью данной работы является изучение простейшего симметричного режима, описываемого преобразованием $T_{12}, T_{23}, T_{34}, T_{41}$. В силу симметрии достаточно рассмотрения уравнений (3) и (4). Преобразование T_{12} согласно уравнению (3) переводит точку $A_0(\xi_0, \dot{\xi}_0, \tau_0)$ в точку $A_1(\xi_1, \dot{\xi}_1, \tau_1)$, а $T_{23} - A_1(\xi_0 - 2d, \dot{\xi}_1, \tau_1)$ в $A_{II}(\xi_{II}, \dot{\xi}_{II}, \tau_{II})$ согласно уравнению (4). Переход от преобразования T_{12} к T_{23} проходит при $\xi_1 = \xi_0 - 2d$ и $\dot{\xi}_1 < 0$.

Зададимся начальными условиями $\tau = \tau_0, \dot{\xi}_{I_0} = \xi_0, \ddot{\xi}_{I_0} = 0$, т. е. отклоним систему из положения равновесия на величину $\xi_0 > 2d$ и, не сообщая ей скорости, будем изучать ее движение. Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \left[\xi_0 - \alpha_1 - \frac{\sin(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \cos[2(\tau - \tau_0)] - \frac{\omega \cos(\omega\tau_0)}{2(4 - \omega^2)} \sin[2(\tau - \tau_0)] + \\ &\quad + \frac{\sin(\omega\tau)}{4 - \omega^2} + \alpha_1, \\ \dot{\xi}_1 &= -2 \left[\xi_0 - \alpha_1 - \frac{\sin(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \sin[2(\tau - \tau_0)] - \\ &\quad - \frac{\omega \cos(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \cos[2(\tau - \tau_0)] + \frac{\omega \cos(\omega\tau)}{4 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

При $\xi_1 = \xi_0 - 2d$ поведение системы описывается уравнением (4) со следующими начальными условиями:

$$\tau = \tau_1, \quad \dot{\xi}_{II_0} = \xi_0 - 2d, \quad \ddot{\xi}_{II_0} = \dot{\xi}_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi_{II} &= \left\{ \frac{-\omega \cos(\omega\tau_1)}{1 - \omega^2} - 2 \left[\xi_0 - \alpha_1 - \frac{\sin(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \sin[2(\tau_1 - \tau_0)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega \cos(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \cos[2(\tau_1 - \tau_0)] + \frac{\omega \cos(\omega\tau_1)}{4 - \omega^2} \right\} \sin(\tau - \tau_1) + \\ &\quad + \left[\xi_0 - 2d - \alpha_2 - \frac{\sin(\omega\tau_1)}{1 - \omega^2} \right] \cos(\tau - \tau_1) + \frac{\sin(\omega\tau)}{1 - \omega^2} + \alpha_2, \\ \dot{\xi}_{II} &= \left\{ \frac{-\omega \cos(\omega\tau_1)}{1 - \omega^2} - 2 \left[\xi_0 - \alpha_1 - \frac{\sin(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \sin[2(\tau_1 - \tau_0)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega \cos(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \cos[2(\tau_1 - \tau_0)] + \frac{\omega \cos(\omega\tau_1)}{4 - \omega^2} \right\} \cos(\tau - \tau_1) - \\ &\quad - \left[\xi_0 - 2d - \alpha_2 - \frac{\sin(\omega\tau_1)}{1 - \omega^2} \right] \sin(\tau - \tau_1) + \frac{\omega \cos(\omega\tau)}{1 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Условия существования простейшего периодического режима таковы:

$$\xi_{II}(\tau_2) = -\xi_0, \quad \dot{\xi}_{II}(\tau_2) = 0, \quad \xi_1(\tau_1) = \xi_0 - 2d.$$

После ряда преобразований из уравнений (7), (8) получаем систему уравнений для определения параметров периодического движения:

$$\begin{aligned}\xi_{II}(\tau_2) &= \varphi_1(\tau_2, \tau_1, \tau_0, \xi_0, d, \omega)^* = -\xi_0^*, \\ \dot{\xi}_{II}(\tau_2) &= \varphi_2(\tau_2, \tau_1, \tau_0, \xi_0, d, \omega)^* = 0, \\ \xi_I(\tau_1) &= \varphi_3(\tau_1, \tau_0, \xi_0, d, \omega)^* = \xi_0^* - 2d, \\ \omega(\tau_2^* - \tau_0^*) &= \pi.\end{aligned}\tag{9}$$

3. Для исследования устойчивости периодического режима составим уравнение в вариациях

$$\begin{aligned}\delta\xi_{II} &= -z\delta\xi_0 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_0}\delta\xi_0 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_0}\delta\tau_0 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1}\delta\tau_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_2}\delta\tau_2, \\ \dot{\delta\xi}_{II} &= 0 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_0}\delta\xi_0 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_0}\delta\tau_0 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1}\delta\tau_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_2}\delta\tau_2, \\ \delta\xi_I &= \delta\xi_0 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_0}\delta\xi_0 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\tau_0}\delta\tau_0 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\tau_1}\delta\tau_1.\end{aligned}\tag{10}$$

Полагая $\delta\xi_{II} = -z\delta\xi_0$ и $\delta\tau_2 = z\delta\tau_0$, составим характеристический полином

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_0} + z & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_0} + z\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_0} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_0} + z\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_0} - 1 & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\tau_0} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\tau_1} \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Все производные берутся в неподвижных точках, определяющих периодический режим. Раскрыв детерминант и сделав ряд преобразований, получим

$$\chi(z) = [\xi_0^* + 3d - \sin(\omega\tau_0^*)] \dot{\xi}_I(\tau_1^*) \Delta'(z) = 0.$$

В общем случае $\xi_0^* + 3d - \sin(\omega\tau_0^*) \neq 0$ и $\dot{\xi}_I(\tau_1^*) \neq 0$. (Случай $\dot{\xi}_I(\tau_1^*) = 0$ является граничным, при котором движение системы на протяжении всего периода описывается одним линейным уравнением (3).)

Следовательно, характеристическое уравнение сводится к условию

$$\Delta' = 0 \tag{12}$$

или

$$\begin{aligned}z^3 + \left\{ \frac{5}{4} \cos(\tau_2^* - \tau_1^*) \cos[2(\tau_1^* - \tau_0^*)] - \sin[2(\tau_1^* - \tau_0^*)] \right. \\ \times \sin(\tau_2^* - \tau_1^*) + \frac{3}{4} \cos(\tau_2^* - \tau_1^*) \Big\} z + \frac{1}{4} \{1 + 3 \cos[2(\tau_1^* - \tau_0^*)]\} = 0.\end{aligned}$$

Периодический симметричный режим устойчив при $|z| < 1$. Уравнения для границ устойчивости получим, положив в (12) $z = 1$, $z = -1$, $z = e^{iy}|^2|$.

Тогда границы N_{+1} , N_{-1} , N_φ определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} N_\varphi \cdot \frac{1}{4} [1 + 3 \cos(\tau_1^* - \tau_0^*)] &= 1, \\ N_{\pm 1} \quad 1 \pm \left\{ \frac{5}{4} \cos(\tau_2^* - \tau_1^*) \cos[2(\tau_1^* - \tau_0^*)] - \sin[2(\tau_1^* - \tau_0^*)] \times \right. \\ \left. \times \sin(\tau_2^* - \tau_1^*) + \frac{3}{4} \cos(\tau_2^* - \tau_1^*) \right\} + \frac{1}{4} [1 + 3 \cos(\tau_1^* - \tau_0^*)] &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (13) совместно с уравнением (9) позволяют выделить в плоскости параметров (d, ω) область существования и устойчивости простейшего периодического режима.

Поскольку исследование устойчивости колебаний сводится к решению систем трансцендентных уравнений и связано со значительными вычислительными трудностями, решение их в наиболее важной для практики области изменения параметров (d, ω) произведено на ЭВМ.

Полученные результаты отображены на графике, представленном на рис. 2. Плоскость параметров (d, ω) разделена кривой AA на две области. Область исследуемых периодических режимов, лежащая ниже кривой AA , сужается в районе $\omega = 2$, причем d неограниченно возрастает. Уравнение для граничной кривой AA

$$d = \frac{1}{|4 - \omega^2|}$$

получается из системы уравнений (9) при $\tau_1 = \tau_2$. Этот случай соответствует отсутствию проскальзывания в системе и ее колебаниям с частотой вынуждающей силы и амплитудой $A_{\max}(\omega) = d$. Выше кривой AA расположена область движений, целиком описываемая одним линейным уравнением (3). Кри-

вья $d = 0$ получается из системы уравнений (9) при $\tau_1 = 0$ и соответствует другому граничному случаю полного отсутствия нелинейной связи в системе. Такое движение полностью описывается уравнением (4). Оси абсцисс соответствуют одна из ветвей N_φ . Область исследуемых периодических режимов разделяется кривыми N_{+1} , N_{-1} , N_φ на ряд зон. Для исследования поведения системы в этих зонах перейдем к выделению областей устойчивости простейшего периодического режима.

Учитывая, что для симметричного режима $\omega(\tau_2^* - \tau_0^*) = \pi$, и положив $(\tau_1^* - \tau_0^*) = \delta\omega^{-1}$, где $0 < \delta < 1$, характеристическое уравнение (12) получим в виде

$$\begin{aligned} z^2 + a(\omega, \delta)z + b(\omega, \delta) &= z^2 + \left\{ \frac{5}{4} \cos\left[\frac{\pi}{\omega}(1 - \delta)\right] \cos\left(2\delta\frac{\pi}{\omega}\right) - \right. \\ &\quad - \sin\left(2\delta\frac{\pi}{\omega}\right) \sin\left[\frac{\pi}{\omega}(1 - \delta)\right] + \frac{3}{4} \cos\left[\frac{\pi}{\omega}(1 - \delta)\right] \left. \right\} z + \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[1 + 3 \cos\left(2\delta\frac{\pi}{\omega}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

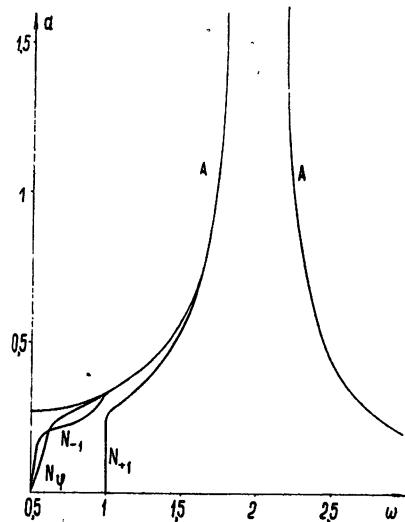


Рис. 2.

и уравнения для граничных кривых (13) в виде

$$\begin{aligned} N_{\pm 1} & \quad 1 \pm a(\omega, \delta) + b(\omega, \delta) = 0, \\ N_{\varphi} & \quad b(\omega, \delta) = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Построим граничные кривые N_{+1} , N_{-1} , N_{φ} в плоскости параметров $a(\omega, \delta)$, $b(\omega, \delta)$. Вместо рассмотрения круга радиуса $|z|=1$ исследование устойчивости системы можно свести к анализу расположения коэффициентов характеристического полинома $a(\omega, \delta)$, $b(\omega, \delta)$ относительно треугольника, образованного прямыми N_{+1} , N_{-1} , N_{φ} . При данных зна-

чениях параметров (d, ω) система устойчива, если коэффициенты $a(\omega, \delta)$, $b(\omega, \delta)$ лежат внутри треугольника. Численный анализ поведения вспомогательных параметров характеристического полинома, проведенный при помощи ЭВМ в интервалах $0 \leq \delta \leq 1$, $0,5 \leq \omega \leq 3$, показал, что все они не выходят за границы указанного треугольника (рис. 3). Следовательно, можно сделать вывод, что корни касаются окружности радиуса $|z|=1$ и опять уменьшаются, уходя внутрь круга. Таким образом, простейший симметричный режим устойчив для интервала частот $0,5 \leq \omega \leq 3$ и нужны дополнительные расчеты для анализа поведения системы в разных зонах плоскости параметров.

Для выделения областей существования сложных режимов строятся бифуркационные границы C_{τ} , на которых происходит нарушение точечного преобразования простейшего периодического режима за счет дополнительного выхода изображающей точки в соседние зоны. Граница C_{τ_1} опреде-

ляется из условия касания фазовой траектории плоскости $\xi_I(\tau^*) = \xi_0 - 2d$ в момент времени $\tau_0 \leq \tau^* \leq \tau_1$ с нулевой скоростью $\dot{\xi}_I$ или

$$\begin{aligned} \xi_I(\tau^*) &= \left[\frac{\xi_0}{4} + \frac{3d}{4} - \frac{\sin(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \cos [2(\tau^* - \tau_0)] - \\ &- \frac{\omega \cos(\omega\tau_0)}{2(4 - \omega^2)} \sin [2(\tau^* - \tau_0)] + \frac{\sin(\omega\tau^*)}{4 - \omega^2} + \frac{3}{4} (\xi_0 - d) = \xi_0 - 2d, \\ \dot{\xi}_I(\tau^*) &= -2 \left[\frac{\xi_0}{4} + \frac{3d}{4} - \frac{\sin(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \sin [2(\tau^* - \tau_0)] - \\ &- \frac{\omega \cos(\omega\tau_0)}{4 - \omega^2} \cos [2(\tau^* - \tau_0)] + \frac{\omega \cos(\omega\tau^*)}{4 - \omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Бифуркационная граница C_{τ_1} находится из условия касания фазовой траектории плоскости $\xi_{II}(\tau^{**}) = 0$ с нулевым ускорением $\ddot{\xi}_{II}$ в момент времени $\tau_1 \leq \tau^{**} \leq \tau_2$, т. е.

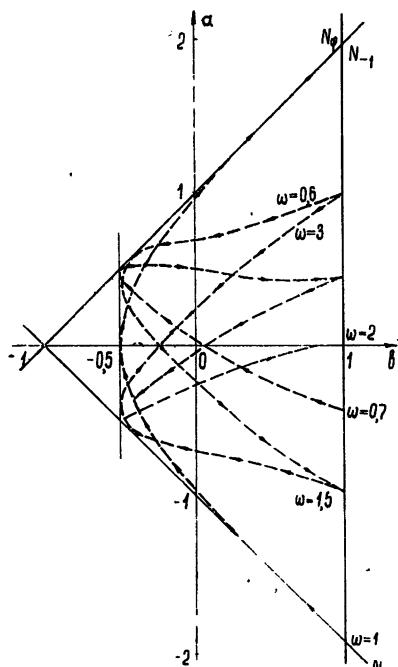


Рис. 3.

$$\begin{aligned} \xi_{II}(\tau^{**}) = & \left\{ \frac{-\omega \cos(\omega \tau_1)}{1 - \omega^2} - 2 \left[\frac{\xi_0}{4} + \frac{3d}{4} - \frac{\sin(\omega \tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \sin[2(\tau_1 - \tau_0)] - \right. \\ & \left. - \frac{\omega \cos(\omega \tau_0)}{4 - \omega^2} \cos[2(\tau_1 - \tau_0)] + \frac{\omega \cos(\omega \tau_1)}{4 - \omega^2} \right\} \cos(\tau^{**} - \tau_1) - \\ & - \left[\xi_0 - 5d - \frac{\sin(\omega \tau_1)}{1 - \omega^2} \right] \sin(\tau^{**} - \tau_1) + \frac{\omega \cos(\omega \tau^{**})}{1 - \omega^2} = 0, \\ \ddot{\xi}_{II}(\tau^{**}) = & - \left\{ \frac{-\omega \cos(\omega \tau_1)}{1 - \omega^2} - 2 \left[\frac{\xi_0}{4} + \frac{3d}{4} - \frac{\sin(\omega \tau_0)}{4 - \omega^2} \right] \sin[2(\tau_1 - \tau_0)] - \right. \\ & \left. - \frac{\omega \cos(\omega \tau_0)}{4 - \omega^2} \cos[2(\tau_1 - \tau_0)] + \frac{\omega \cos(\omega \tau_1)}{4 - \omega^2} \right\} \sin(\tau^{**} - \tau_1) - \\ & - \left[\xi_0 - 5d - \frac{\sin(\omega \tau_1)}{1 - \omega^2} \right] \cos(\tau^{**} - \tau_1) - \frac{\omega^2 \sin(\omega \tau^{**})}{1 - \omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение вышеуказанных уравнений совместно с (9) позволяет выделить в плоскости параметров (d, ω) области существования сложных режимов. В настоящей работе построение бифуркационных границ не производилось. Просмотр пространства параметров с помощью моделирования на ЭВМ указывает на наличие сложных режимов в районе $\omega \leq 0,5$. Моделирование на аналоговых машинах дает аналогичный результат, когда при $\omega \leq 0,5$ при малом трении в системе на фазовой плоскости (x, \dot{x}) наблюдаются сложные многооборотные циклы [3].

4. Для анализа поведения системы в областях простейшего периодического режима, разделяемых кривой N_{+1} , были построены амплитудно-частотные характеристики $A(\omega)$, представленные на рис. 4.

Амплитудные характеристики при $d > 0,25$ начинаются и кончаются на кривой AA ($A(\omega) = |1/(4 - \omega^2)|$), соответствующей линейному граничному случаю полного отсутствия проскальзывания в системе. При $d < 0,25$ наблюдаются резонансные явления в области $\omega \approx 1$. Асимптотическая кривая BB ($A(\omega) = |1/(1 - \omega^2)|$) соответствует другому граничному линейному случаю отсутствия нелинейной связи в системе. Оптимальное демпфирование получается при $d = 0,5$. В этом случае $A_{\max}(\omega) = 1,08$. Построенные амплитудно-частотные характеристики позволяют понять сущность кривой N_{+1} , разделяющей область существования и устойчивости простейшего периодического режима. На этой кривой происходит скачкообразное изменение амплитуды колебаний в системе. Следует отметить, что пересечение амплитудных характеристик указывает на наличие в системе устойчивых периодических колебаний одинаковой амплитуды при разных значениях параметра d . Для

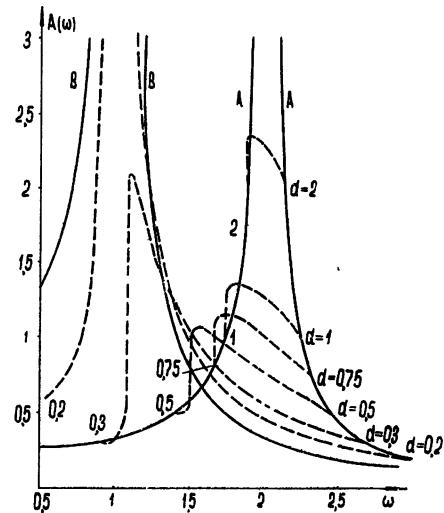


Рис. 4.

проведения сравнения полученных результатов с данными работ [1, 3] необходимо установить соответствие между безразмерными параметрами, несколько отличающимися друг от друга. Из геометрического рассмотрения рис. 1 при помощи несложных арифметических преобразований получим

$$T = 3kD, \quad \beta = \frac{\pi}{3d} \simeq \frac{1}{d}, \quad \mu = A(\omega), \quad \gamma = \omega.$$

Амплитудные характеристики, представленные в работе [1], свидетельствуют о гистерезисных (наличие колебаний разной амплитуды при одинаковых значениях параметров γ , β) свойствах системы. Данные же настоящей работы свидетельствуют лишь о наличии скачкообразного изменения амплитуды колебаний системы при переходе через граничную кривую N_{+1} . Максимальные значения амплитуд при $\beta = 1, 2, 3$ (см. рис. 7 [1]) хорошо совпадают с данными настоящей работы. Отличия имеются лишь в области перехода амплитудных характеристик на кривую $\beta=0$, соответствующую случаю полного отсутствия проскальзывания в системе. Но и здесь расхождение не превышает 10% по частоте и амплитуде. Качественное же совпадение очень хорошее.

Таким образом, инженерные методы, использующие энергетические соображения и линеаризацию уравнений, дают в наиболее интересной для практики области частот достаточно хороший результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Пановко, сб. *Динамика машин*, Машгиз, М., 1963, стр. 209.
2. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41; № 2, 95 (1958).
3. И. Г. Прусиц, Г. И. Страхов, сб. *Вопросы динамики и прочности*, вып. 10, изд. АН Латв. ЭССР, Рига, 1963, стр. 175.

Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию
6 июля 1966 г.

FORCED OSCILLATIONS IN THE SYSTEM WITH A SYMMETRICAL POLYGONAL HYSTERESIS LOOP

V. G. Climov

Forced oscillations in the system with a symmetrical polygonal hysteresis loop are explored using the point-to-point mapping technique. The domain of a most simple periodical solution and its stability region are found and the gain-frequency characteristics are described. The numerical analysis is carried out with the aid of a digital computer.

УДК 531.391

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ РАДИОТЕХНИКИ

A. A. Молчанов

На основе предположения о достаточной близости колебательных процессов в нелинейных резонансных схемах к гармоническим показывается, что асимптотические методы Крылова—Боголюбова позволяют построить любое приближение дифференциального уравнения, малые нелинейные члены которого содержат производные второго и более высокого порядков. Выводятся рекуррентные формулы для построения асимптотических приближений, знание которых позволяет воспользоваться при анализе конкретных нелинейных схем средствами вычислительной техники.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Современное развитие автоматики и вычислительной техники тесно связано с широким использованием целого класса нелинейных резонансных схем, характеризуемых периодичностью процессов, близких к гармоническим [1, 2]. Многими авторами проводилось аналитическое исследование подобных схем, причем зачастую вводились столь существенные упрощения (идеализация цепей смещения, генератора, нелинейных элементов схемы и др.), что полученные результаты позволяли судить лишь о качественной картине процессов. При указанных допущениях дифференциальное уравнение нелинейной схемы, как правило, приводилось к стандартному виду уравнения гармонического осциллятора с малым нелинейным возмущением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \nu t\right). \quad (1)$$

К анализу таких уравнений применим один из важнейших приближенных методов теории нелинейных колебаний — одночастотный асимптотический метод, разработанный в [3, 4]. В уравнении (1) возмущающий и диссипативный члены внесены под знак малого параметра $\varepsilon > 0$, так как считается, что они удовлетворяют условию малости.

Между тем анализ ряда нелинейных схем, например, резонансных контуров с управляемой полупроводниковой емкостью и цепью автосмещения [1, 5], приводит к необходимости уточнения их математической модели. Результатом такого более полного математического описания исследуемых схем является появление в функции f членов, содержащих производные второго и более высокого порядка. Практическая малость таких членов позволяет объединить их под знаком малого параметра ε , однако при этом не следует забывать, что если за период колебаний влияние малых нелинейных членов на процессы в схеме незначительно, то при длительном их действии эффект, производимый ими, может быть существенным. Таким образом, малые нелинейные члены, содержащие производные высоких порядков, оказывают как бы кумулятивное действие. Поэтому будет правильно, если предположить, что в общем случае малое нелинейное возмущение зависит от производных независимой

переменной x до n -го порядка включительно ($n = 1, 2, 3, \dots$). Это ставит перед нами задачу анализа процессов в нелинейных резонансных схемах в более общей постановке. В [6] указывается на возможность применения метода малого параметра, разработанного в [7], для решения уравнений вида (1), когда нелинейная функция f зависит от $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$.

Считая, что колебательные процессы в исследуемых схемах достаточно близки к гармоническим, покажем, что асимптотические методы Крылова—Боголюбова позволяют построить любое k -ое приближение решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}, \nu t\right), \quad (2)$$

где ϵ — малый положительный параметр, $f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}, \nu t\right)$ — функция, периодическая по отношению к νt с периодом 2π , которая может быть представлена в виде $f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}, \nu t\right) = \sum_{i=-N}^N e^{i\nu t} f_i\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right)$.

При этом будем предполагать, что коэффициенты $f_i\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right)$ в конечной сумме являются полиномами по отношению к $x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}$.

Естественно, что проблема сходимости асимптотических рядов для уравнений типа (2) (т. е. доказательство асимптотичности получаемых разложений) — весьма трудоемкая математическая задача. В настоящее время автором показана возможность эффективного применения асимптотического метода для анализа нелинейных последовательно-параллельных контуров, которые описываются дифференциальными уравнениями, содержащими под знаком малого параметра производные не выше третьего порядка. Более того, в ряде случаев приходится сталкиваться с фактом, когда аналогичные разложения заведомо расходятся.

Не изучая пока сходимости получаемых разложений при $t \rightarrow \infty$, а учитывая, что практически мы ищем два—три первых приближения решения, условимся рассматривать эти разложения как формальные, необходимые для построения приближенного решения исходного дифференциального уравнения. Поэтому в работе не связывается изложение способа построения приближений для уравнений, в которых нелинейное возмущение содержит производные второго и более высокого порядка, с доказательством сходимости, и рядом, расположенным по степеням малого параметра, придается вышеуказанный формальный смысл. В связи с этим все результаты теоретического исследования конкретных резонансных схем требуют обязательной численной и экспериментальной проверки получаемых приближений. Исследование устойчивости получаемых решений проводится автором пока при анализе схем нелинейных контуров с управляемой емкостью p — n -перехода. Осветить вопросы устойчивости для уравнения общего вида (2) в настоящее время весьма затруднительно.

2. СЛУЧАЙ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Выведем рекуррентные формулы для построения асимптотических приближений, в первую очередь, для случая колебаний, определяемых дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f \left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n} \right), \quad (3)$$

справедливым, когда отсутствует внешняя возмущающая сила. Следуя [4], ищем решение рассматриваемого уравнения в виде разложения

$$x = a \cos \psi + \epsilon U_1(a, \psi) + \epsilon^2 U_2(a, \psi) + \dots + \epsilon^k U_k(a, \psi) \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

где $\psi = \omega t + \theta$ (амплитуда a и фаза θ колебания будут постоянными во времени величинами, зависящими от начальных условий), $U_i(a, \psi)$ — периодические функции угла ψ с периодом 2π , причем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} U_i(a, \psi) \cos \psi d\psi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} U_i(a, \psi) \sin \psi d\psi &= 0 \quad (5) \\ (i &= 1, 2, 3, \dots, k). \end{aligned}$$

Равенства (5) выражают условие отсутствия первой гармоники в выражениях $U_i(a, \psi)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). С физической точки зрения принятие этих условий соответствует выбору в качестве величины a полной амплитуды первой основной гармоники колебаний. Величины a и θ найдем из системы

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots + \epsilon^k A_k(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots + \epsilon^k B_k(a). \quad (6) \end{aligned}$$

Учитывая (4) и (6), получаем систему k уравнений для определения $U_i(a, \psi)$, а также $A_i(a)$ и $B_i(a)$:

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial \psi^2} + U_i \right) &= f_{i-1}(a, \psi) + 2\omega A_i \sin \psi + 2\omega a B_i \cos \psi \quad (7) \\ (i &= 1, 2, 3, \dots, k-1), \end{aligned}$$

причем i -ое уравнение системы объединяет члены только при ϵ^i . Функция f_{k-1} , соответствующая k -му приближению, определяется с учетом (5) и (6) формулой

$$\begin{aligned} \epsilon^k f_{k-1}(a, \psi) &= \epsilon^k \sum_{r=0}^n \left\{ r [A_{k-1}(a) \cos \psi - a B_{k-1}(a) \sin \psi]_t^{(r-1)} + \right. \\ &+ [U_{k-1}(a, \psi)]_t^{(r)} f'_{x_t^{(r)}}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi, \dots) + \epsilon^k \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \left[\left(-a B_i \dot{\psi}_{s, k-i} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - A_i \frac{\partial \dot{a}_{c, k-i}}{\partial a} \right) \cos \psi \right]_t^{(r-1)} + \epsilon^k \sum_{i=1}^{k-1} \left[\left(2 \dot{a}_{c, k-i} B_i - a A_i \frac{\partial \dot{\psi}_{s, k-i}}{\partial a} \right) \sin \psi \right]_t^{(r-1)} \right\} - \\ &- \epsilon^k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d^2 U_i}{dt^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{d^2 U_i}{dt^2} = 0$ при $k = 1$, множитель ϵ^k перед всеми членами формулы (8) определяет степень их малости (члены более высокого порядка малости опускаются). При $k = 1$ равенство (8) вырождается в простое выражение для $f_0(a, \psi)$ [4], соответствующее первому приближению решения уравнения (3):

$$\epsilon f_0(a, \psi) = \epsilon f \left(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, -a\omega^2 \cos \psi, \dots, \operatorname{sgn} \times \right) \quad (9)$$

$$\times \begin{cases} (-1) \text{ при } \begin{bmatrix} n=1+4(\lambda-1) \\ n=2(2\lambda-1) \end{bmatrix} \\ (+1) \text{ при } \begin{bmatrix} n=4\lambda-1 \\ n=4\lambda \end{bmatrix} \end{cases} a\omega^n \begin{cases} \sin \psi \text{ (при } n-\text{нечетном)} \\ \cos \psi \text{ (при } n-\text{четном)} \end{cases} \right),$$

где n — номер производной, $\lambda = 1, 2, \dots$ — целые числа. В формуле (8) введены следующие обозначения: $\dot{a}_c = \dot{a}_{\cos} = \frac{da}{dt}$, $\dot{\psi}_s = \dot{\psi}_{\sin} = -\frac{d\psi}{dt}$, при-

чем $\frac{da}{dt}$ и $-a \frac{d\psi}{dt}$ — коэффициенты перед косинусной и синусной состав-

ляющими в разложении $\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \psi - a \frac{d\psi}{dt} \sin \psi$. Индексы i, k и $k-i$ указывают, в первую очередь, на порядок малости сомножителей в (8); например, при определении производной $\frac{\partial \dot{a}_{c, k-i}}{\partial a} = \frac{\partial a_{c, k-i}}{\partial a \partial t}$ с учетом (6)

необходимо из первого уравнения системы (6) выбрать член малости ϵ^{k-i} , т. е. слагаемое A_{k-i} . При этом считаем, что для $k = 1$ ($i = 1$), что соответствует первому приближению, $\frac{\partial \dot{a}_{c, 0}}{\partial a} = \frac{\partial \dot{\psi}_{s, 0}}{\partial a} = \dot{a}_{c, 0} =$

$= \dot{\psi}_{s, 0} = 0$. Нетрудно видеть, что $f_{k-1}(a, \psi)$ есть периодическая функция переменной ψ с периодом 2π , зависящая от a . Неявное выражение периодической функции $f_{k-1}(a, \psi)$ будет известно как только будут найдены выражения для $A_i(a)$, $B_i(a)$, $U_i(a, \psi)$ до $(k-1)$ -го номера включительно. Используя разложение Фурье для функций $f_{k-1}(a, \psi)$ и $U_k(a, \psi)$:

$$f_{k-1}(a, \psi) = g_0^{(k-1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n^{(k-1)}(a) \cos(n\psi) + h_n^{(k-1)}(a) \sin(n\psi)\}, \quad (10)$$

$$U_k(a, \psi) = v_0^{(k-1)}(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \{v_n^{(k-1)}(a) \cos(n\psi) + W_n^{(k-1)}(a) \sin(n\psi)\},$$

где

$$g_n^{(k-1)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{k-1}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \dots) \cos(n\psi) d\psi, \quad (11)$$

$$h_n^{(k-1)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{k-1}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi, \dots) \sin(n\psi) d\psi,$$

и учитывая формулы (4), (6) и (7), запишем рекуррентные формулы для определения k -го приближения решения уравнения (3):

$$A_k = -\frac{1}{2\omega} h_1^{(k-1)}(a), \quad B_k = -\frac{1}{2\omega a} g_1^{(k-1)}(a), \quad (12)$$

$$U_k = \frac{g_0^{(k-1)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \{g_n^{(k-1)}(a) \cos(n\psi) + h_n^{(k-1)}(a) \sin(n\psi)\} \frac{1}{1-n^2}, \quad (13)$$

где $h_1^{(k-1)}(a)$ и $g_1^{(k-1)}(a)$ определяются из k -го уравнения системы (7) после подстановки в него правых частей выражений (10) и приведения коэффициентов при одинаковых гармониках. Определив полностью U_k , B_k , A_k , мы тем самым в соответствии с (8) имеем явное выражение для $f_k(a, \psi)$. Разлагая его в ряд Фурье и воспользовавшись $(k+1)$ -ым уравнением системы (7) и условием (5), совершенно аналогично находим $A_{k+1}(a)$, $B_{k+1}(a)$, $U_{k+1}(a, \psi)$.

Приведем явные рекуррентные формулы для $A_k(a)$, $B_k(a)$ и функции $U_{k-1}(a, \psi)$, соответствующей k -му приближению. Из (8), (10), (12) и (13) имеем:

$$\begin{aligned} A_k(a) &= -\frac{1}{2\omega} \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \left(2\dot{a}_{c, k-i}^{(r-1)} B_i - \frac{\partial \dot{\psi}_{s, k-i}^{(r-1)}}{\partial a} A_i \right) \right\} - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_{k-1}(a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ B_k(a) &= -\frac{1}{2a\omega} \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\dot{\psi}_{s, k-i}^{(r-1)} B_i a - \frac{\partial \dot{a}_{c, k-i}^{(r-1)}}{\partial a} A_i \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f_{k-1}(a, \psi) \cos \psi d\psi; \end{aligned} \quad (14)$$

$$U_{k-1}(a, \psi) = \frac{g_0^{(k-2)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{g_n^{(k-2)}(a) \cos(n\psi) + h_n^{(k-2)}(a) \sin(n\psi)}{1-n^2} \right\}, \quad (15)$$

где $g_n^{(k-2)}(a)$ и $h_n^{(k-2)}(a)$ выражаются через функцию $f_{k-2}(a, \psi)$ из (11). Нетрудно увидеть, что формулы (14), (15) позволяют выразить также функцию f_{k-1} , соответствующую k -му приближению, через функцию f_{k-2} , соответствующую $(k-1)$ -му приближению. Действительно, подставляя значения A_{k-1} , B_{k-1} , U_{k-1} , найденные с помощью (14) и (15), в (8), выявляем искомую зависимость.

Наконец, учитывая (4) и (6), приведем рекуррентную формулу для записи n -ой производной от x , используемую при определении функций $f_i(a, \psi)$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$):

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k [a_{c, k}^{(n)}(a) \cos \psi + \psi_{s, k}^{(n)}(a) \sin \psi + U_k^{(n)}(a, \psi)], \quad (16)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. При $n = 0$ имеем зависимость (4) в виде (16): [$a_{c, k}^{(0)} = a$, $\psi_{s, k}^{(0)} = 0$, $U_k^{(0)} = U_k$]. Выражения для $a_{c, k}^{(n)}$, $\psi_{s, k}^{(n)}$, $U_k^{(n)}$ находятся через функции $(n-1)$ -ой производной x из системы

$$a_{c, k}^{(n)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial a_{c, k-i}^{(n-1)}}{\partial a} A_i + \psi_{s, k-i}^{(n-1)} B_i a \right),$$

$$\psi_{s, k}^{(n)} = \sum_{i=1}^k \left(-\frac{\partial \psi_{s, k-i}^{(n-1)}}{\partial a} A_i a + 2a_{c, k-i}^{(n-1)} B_i \right), \quad (17)$$

$$U_k^{(n)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial U_{k-i}^{(n-1)}}{\partial \psi} B_i + \frac{\partial U_{k-i}^{(n-1)}}{\partial a} A_i \right).$$

Рассматривая для примера частный случай, когда $n = 1$, найдем второе приближение ($k=2$) решения уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}). \quad (18)$$

Следуя [4], решение ищем в виде $x = a \cos \psi + \epsilon U_1(a, \psi)$, где функции времени a и ψ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a). \end{aligned} \quad (19)$$

Полагая в формулах (14), (15), (8) и (11) $k = 2$, $n = 1$, находим с учетом (18) и (19)

$$\begin{aligned} f_1(a, \psi) &= U_1 f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \left[A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right] \times \\ &\quad \times f'_{\dot{x}}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \left(a B_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \\ &\quad + \left(2 A_1 B_1 + A_1 a \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi - 2 \omega A_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial \psi} - 2 \omega B_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2}, \end{aligned}$$

где

$$A_1(a) = - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$B_1(a) = - \frac{1}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

$$\begin{aligned} U_1(a, \psi) &= \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos(n\psi) d\psi \right] \times \right. \\ &\quad \times \cos(n\psi) + \left. \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin(n\psi) d\psi \right] \sin(n\psi) \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, из (14) определяем $A_2(a)$ и $B_2(a)$:

$$\begin{aligned} A_2(a) &= - \frac{1}{2\omega} \left[2 A_1 B_1 + A_1 a \frac{dB_1}{da} \right] - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \left[U_1 f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) f'_{\dot{x}}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \right] \sin \psi d\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(a) &= - \frac{1}{2\omega a} \left[a B_1^2 - A_1 a \frac{dA_1}{da} \right] - \frac{1}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} \left[U_1 f'_x(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) f'_{\dot{x}}(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \right] \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

Полученные формулы совпадают с выражениями для $A_1, B_1, A_2, B_2, U_1, f_1$, выведенными в работе [4] при построении асимптотических разложений для первого и второго приближений. Они сложны, так как записаны в самом общем случае, однако для конкретных колебательных систем, как показано в [4], эти выражения значительно упрощаются.

3. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

При воздействии на колебательную систему гармонического возбуждения уравнение, описывающее ее, принимает вид (2). Рассмотрим самый общий случай. Пусть требуется исследовать поведение системы как вблизи резонанса, так и для подходов к резонансной области из нерезонансной зоны. Для этого необходимо построить такие приближенные решения, которые давали бы возможность изучать поведение системы для достаточно большого интервала частот и из которых (как частные случаи) можно было бы получить рекуррентные формулы как для резонансного случая, так и для нерезонансного. В общем случае мы не можем считать, что расстройка мала, и поэтому приближенное решение должны искать непосредственно для уравнения (2). Таким образом, следя [4], решение ищем в виде ряда

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \theta \right) + \epsilon U_1(a, vt, \psi) + \epsilon^2 U_2(a, vt, \psi) + \dots + \epsilon^k U_k(a, vt, \psi), \quad (20)$$

где $\psi = \frac{p}{q} vt + \theta$, p, q — целые числа, определяющие исследуемый режим

с заданным соотношением резонансной (ω) и возбуждающей (v) частот, a — полная амплитуда гармоники ψ , θ — фазовый угол, представляющий в общем случае функцию амплитуды и времени. Для определения a и θ имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \epsilon A_1(a, \theta) + \epsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots + \epsilon^k A_k(a, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} v + \epsilon B_1(a, \theta) + \epsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots + \epsilon^k B_k(a, \theta), \end{aligned} \quad (21)$$

причем разность $\omega - \frac{p}{q} v$ не обязательно мала. Функции $U_i(a, vt, \psi)$

обладают периодом по отношению к обеим угловым переменным ψ и vt , а $A_i(a, \theta)$ и $B_i(a, \theta)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) — периодические с периодом 2π по отношению к угловой переменной θ . Для определения функций $U_i(a, vt, \psi)$, $B_i(a, \theta)$, $A_i(a, \theta)$ можно воспользоваться приемом непосредственного дифференцирования разложения (20) и подстановкой результата в основное уравнение (2) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ϵ . Вместо этого воспользуемся рассуждениями, аналогичными тем, которые были применены при изложении метода гармонического баланса в [4]. Для получения k -го приближения необходимо при определении главной гармоники в левой части уравнения (2) (после подстановки в него главной гармоники $x = a \cos \psi$ с учетом системы (21)) учесть члены при ϵ^k , а в выражении для $f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}, vt)$ нужно учесть члены с $\epsilon^{k-1} U_{k-1}(a, vt, \psi)$. Таким образом, в k -ом приближении, используя принцип гармонического баланса, получаем для главной гармоники левой части (2) с учетом (21) общее выражение:

$$\begin{aligned}
 \text{главная гармоника } \{ \ddot{x} + \omega^2 x \} = & \\
 = \sum_{l=1}^k & \left[\epsilon^l \left\{ \left[\left(\omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial A_l}{\partial \theta} - 2\omega a B_l \right] \cos \psi - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left[\left(\omega - \frac{p}{q} v \right) a \frac{\partial B_l}{\partial \theta} + 2\omega A_l \right] \sin \psi \right\} \right] + \\
 + \sum_{r=1}^n & \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon^{i+1} \left[\left(\frac{\partial \dot{a}_{c, k-l}^{(r-1)}}{\partial a} A_l + \frac{\partial \dot{a}_{c, k-l}^{(r-1)}}{\partial \theta} B_l + \dot{\psi}_{s, k-l}^{(r-1)} B_l a \right) \cos \psi - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left(\frac{\partial \dot{\psi}_{s, k-l}^{(r-1)}}{\partial \theta} B_l a + \frac{\partial \dot{\psi}_{s, k-l}^{(r-1)}}{\partial a} A_l a + 2a_{c, k-l}^{(r-1)} B_l \right) \sin \psi \right] \right\}, \tag{22}
 \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ — номер приближения. При $k = 1$, $k - i \equiv 0$ и вторая сумма в (22) «автоматически» становится равной нулю, что соответствует первому приближению. Подставляя в правую часть (2) $x = a \cos \psi + \epsilon f_1(a, vt, \psi) + \dots + \epsilon^{k-1} U_{k-1}(a, vt, \psi)$, получаем с точностью до величины k -го порядка малости для главной гармоники следующее общее выражение:

$$\begin{aligned}
 \text{главная гармоника } \{ \epsilon f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}, \dot{v}t) \} = & \\
 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=1}^k & \sum_{\sigma} \left\{ \epsilon^l e^{iq\sigma\theta} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{l-1}(a, vt, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \psi dvt d\psi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{l-1}(a, vt, \psi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \psi dvt d\psi \right] \right\}, \tag{23}
 \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем $i = 1, 2, 3, \dots, k$ и для всех значений $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, для которых интегралы, стоящие под знаком суммы, отличны от нуля, $\theta' = \psi - \frac{p}{q} vt$. Эти интегралы, как показано в [4], будут отличны от нуля для тех значений σ , для которых суммарный показатель соответствующей экспоненты, полученной после разложения в ряд Фурье подынтегрального выражения, равен нулю. Функция $f_{l-1}(a, vt, \psi)$ является l -ым приближением для функции f . Следуя [4] и учитывая (20), (21) и (5), запишем важную рекуррентную формулу для определения функции $f_{k-1}(a, vt, \psi)$ соответствующей k -му приближению:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^k f_{k-1}(a, vt, \psi) = \epsilon^k \sum_{r=0}^n & \left\{ r[A_{k-r} \cos \psi - aB_{k-r} \sin \psi] \right\}_t^{(r-1)} + (U_{k-1})_t^{(r)} \times \\
 \times f'_{x_t^{(r)}} \left(a \cos \psi, -a \sin \psi, \dots, \operatorname{sgn} \begin{cases} (-1) & \text{при } \begin{bmatrix} n=1+4(\lambda-1) \\ n=2(2\lambda-1) \end{bmatrix} \\ (+1) & \text{при } \begin{bmatrix} n=4\lambda-1 \\ n=4\lambda \end{bmatrix} \end{cases} \right) a \omega^n \times & \\
 \times \left\{ \begin{array}{l} \sin \psi \text{ (при } n-\text{нечетном)} \\ \cos \psi \text{ (при } n-\text{четном)} \end{array} \right\} \right) - \epsilon^k \sum_{l=1}^{k-1} \frac{d^2 U_l}{dt^2}, & \tag{24}
 \end{aligned}$$

где множители ϵ^k играют ту же роль, что и в (8), а функция U_{k-1} определяется из выражения

$$\varepsilon^{k-1} U_{k-1}(a, \nu t, \psi) = \sum_m \sum_n \frac{e^{j(m\psi + n\nu t)}}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} f_{mn}^{(k-2)}(a), \quad (25)$$

справедливого для всех m и n , удовлетворяющих неравенству $nq + (m \pm 1)p \neq 0$, причем

$$f_{mn}^{(k-2)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{k-2}(a, \nu t, \psi) e^{-j(n\nu t + m\psi)} d\nu t d\psi. \quad (26)$$

Таким образом, формула (24) позволяет выразить функцию $f_{k-1}(a, \nu t, \psi)$, соответствующую k -ому приближению, через функцию $f_{k-2}(a, \nu t, \psi)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в выражениях (22) и (23), получаем рекуррентные формулы для определения A_k , B_k :

$$\left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_k}{\partial \theta} - 2a\omega B_k = - \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \dot{a}_{c, k-i}^{(r-1)}}{\partial a} A_i + \frac{\partial \dot{a}_{c, k-i}^{(r-1)}}{\partial \theta} B_i + \right. \quad (27)$$

$$\left. + \dot{\psi}_{s, k-i}^{(r-1)} B_i a \right) + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} \left[e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{k-1}(a, \nu t, \psi) e^{-j(q\sigma\theta)} \cos \psi d\nu t d\psi \right],$$

$$\left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_k}{\partial \theta} + 2\omega A_k = - \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} \left(- \frac{\partial \dot{\psi}_{s, k-i}^{(r-1)}}{\partial \theta} B_i a - \frac{\partial \dot{\psi}_{s, k-i}^{(r-1)}}{\partial a} A_i a + \right. \quad (28)$$

$$\left. + 2\dot{a}_{c, k-i}^{(r-1)} B_i \right) - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} \left[e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{k-1}(a, \nu t, \psi) e^{-j(q\sigma\theta)} \sin \psi d\nu t d\psi \right],$$

справедливые для всех $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Выражение для $\varepsilon^{k-1} U_{k-1}(a, \nu t, \psi)$, соответствующее k -му приближению, определяем как вынужденные колебания, возбуждаемые действием высших гармоник внешней силы $\varepsilon f(x, \dot{x}, \dots, x^n, \nu t)$, с помощью формул (25), (26). Правые части уравнений (27), (28) периодические по θ и представляют собой суммы вида $\sum k_n e^{in\theta}$, поэтому и решение для A_i , B_i мы должны искать в виде аналогичных сумм. Представляя правые части (27), (28) в виде сумм $\sum_{\sigma} \alpha_{k\sigma}(a) e^{iq\sigma\theta}$ и $\sum_{\sigma} \beta_{k\sigma}(a) e^{iq\sigma\theta}$, нетрудно получить формулы для определения A_k и B_k в виде:

$$A_k = \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \left[\frac{\alpha_{k\sigma} j\sigma(q\omega - p\nu) - 2\omega \beta_{k\sigma}}{4\omega^2 - \sigma^2(q\omega - p\nu)^2} \right], \quad (29)$$

$$B_k = \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \left[\frac{\beta_{k\sigma} j\sigma(q\omega - p\nu) + 2\omega \alpha_{k\sigma}}{4\omega^2 - \sigma^2(q\omega - p\nu)^2} \right]. \quad (30)$$

Согласно принципу гармонического баланса уравнение (2) для k -го приближения можно представить с учетом (27), (28) в виде [8]

$$\ddot{a}_{c, k} \cos \psi + \dot{\psi}_{s, k} \sin \psi + V_k(a, \nu t, \psi) + \omega^2 V_k(a, \nu t, \psi) = F_k(a, \nu t, \psi), \quad (31)$$

где $V_k(a, \nu t, \psi) = U_{k-1}(a, \nu t, \psi)$, $F_k(a, \nu t, \psi) = f_{k-1}(a, \nu t, \psi)$, функция U_{k-1} определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta \partial t} \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) + \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial \theta^2} \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right)^2 + \omega^2 U_{k-1} = \quad (32)$$

$$= \sum_m \sum_n \left\{ \frac{e^{j(m\psi + nv)} t}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{k-2}(a, vt, \psi) e^{-j(nv + m\omega)} dv dt d\psi \right\} - \\ - \sum_{r=1}^n \sum_{l=1}^{k-1} \left[\frac{\partial U_{k-l}^{(r-1)}}{\partial \theta} B_l + \frac{\partial U_{k-l}^{(r-1)}}{\partial a} A_l \right],$$

справедливого для всех целых m и n , удовлетворяющих неравенству $nv + (m \pm 1) p \neq 0$. Частное решение (32) представляет собой выражение (25). Функции $a_{c,k}$, $\psi_{s,k}$, $U_k^{(n)}$ определяются с помощью рекуррентной формулы для записи n -ой производной от x :

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [a_{c,k}^{(n)}(a, \theta) \cos \psi + \psi_{s,k}^{(n)}(a, \theta) \sin \psi + U_k^{(n)}(a, vt, \psi)]. \quad (33)$$

Функции $a_{c,k}^{(n)}$, $\psi_{s,k}^{(n)}$, $U_k^{(n)}$ находятся через функции $(n-1)$ -ой производной из системы

$$\begin{aligned} a_{c,k}^{(n)} &= \left[\frac{\partial a_{c,k}^{(n-1)}}{\partial \theta} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) + \psi_{s,k}^{(n-1)} \omega \right] + \sum_{l=1}^k \left[\frac{\partial a_{c,k-l}^{(n-1)}}{\partial \theta} B_l + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial a_{c,k-l}^{(n-1)}}{\partial a} A_l + \psi_{s,k-l}^{(n-1)} B_l a \right], \\ \psi_{s,k}^{(n)} &= \left[\frac{\partial \psi_{s,k}^{(n-1)}}{\partial \theta} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) - a_{c,k}^{(n-1)} \omega \right] + \sum_{l=1}^k \left[- \frac{\partial \psi_{s,k-l}^{(n-1)}}{\partial \theta} B_l a - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \psi_{s,k-l}^{(n-1)}}{\partial a} A_l a + 2a_{c,k-l}^{(n-1)} B_l \right], \\ U_k^{(n)} &= \left[\frac{\partial U_k^{(n-1)}}{\partial t} + \frac{\partial U_k^{(n-1)}}{\partial \theta} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) \right] + \\ &\quad + \sum_{l=1}^k \left[\frac{\partial U_{k-l}^{(n-1)}}{\partial \theta} B_l + \frac{\partial U_{k-l}^{(n-1)}}{\partial a} A_l \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Резюмируя, приведем схему построения решения уравнения (2) в первом и во втором приближениях для самого общего случая. В качестве первого приближения, согласно [4], принимаем

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \theta \right), \quad (35)$$

где a и θ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} v + \varepsilon B_1(a, \theta), \end{aligned} \quad (36)$$

в которых $A_1(a, \theta)$ и $B_1(a, \theta)$ —частные периодические решения системы (27)–(28). Во втором приближении получаем

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} vt + \theta \right) + \varepsilon U_1 \left(a, vt, \frac{p}{q} vt + \theta \right), \quad (37)$$

где a и θ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} v + \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta), \end{aligned} \quad (38)$$

в которых A_1, B_1, A_2, B_2 находятся из (27), (28) при $k = 1$ и $k = 2$, а U_1 — по формуле (25). Придавая индексу k значение $k = 1$, получаем формулы, необходимые для построения первого приближения:

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a\omega B_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, vt, \psi) e^{-iq\sigma\psi} \cos \psi d\psi dt d\psi, \\ \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\omega A_1 &= - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, vt, \psi) e^{-iq\sigma\psi} \sin \psi d\psi dt d\psi, \end{aligned} \quad (39)$$

где $f_0(a, vt, \psi)$ определяется из (9). Во втором приближении ($k = 2$) из (27), (28) находим

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - 2\omega a B_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, vt, \psi) e^{-iq\sigma\psi} \cos \psi d\psi dt d\psi - \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - a B_1^2 \right\}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial B_2}{\partial \theta} a + 2\omega A_2 &= - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, vt, \psi) e^{-iq\sigma\psi} \times \\ &\quad \times \sin \psi d\psi dt d\psi - \left\{ a \frac{dB_1}{da} A_1 + a \frac{dB_1}{d\theta} B_1 + 2A_1 B_1 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 f_1(a, vt, \psi) &= \varepsilon^2 \sum_{i=0}^n \left[[i[A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi]_t^{(i)} + \right. \\ &\quad + (U_1)_t^{(i)}] f'_t^{(i)}(vt, a \cos \psi, -a \omega \sin \psi, \dots) \left. \right] - \varepsilon^2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial a} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad + \frac{\partial U_1}{\partial \theta} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} B_1 \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial t} A_1 + \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta \partial t} B_1 + 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial \theta} \left(\omega - \frac{p}{q} v \right) A_1 \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее, из (25) и (26) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon U_1(a, vt, \psi) &= \\ &= \sum_m \sum_n \left[\frac{e^{i(nvt+m\psi)}}{\omega^2 - (nv+m\omega)^2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, vt, \psi) e^{-i(nvt+m\psi)} d\psi dt \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Следует отметить, что при анализе конкретных нелинейных схем даже во втором приближении, как правило, получаются сравнительно простые уравнения, определяющие амплитуду и фазу колебаний.

В заключение отмечим следующее. Поскольку правые части уравнений (36), (38) зависят от a и от θ , то проинтегрировать их в замкнутом виде в общем случае не удается. Качественный характер решений может быть, однако, исследован и в общем случае с помощью теории Пуанкаре, потому что здесь мы имеем дело с двумя уравнениями первого порядка. Анализ стационарного режима колебательной системы $\left(\frac{da}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0\right)$ дает возможность найти зависимость амплитуды a от параметров схемы и питающего напряжения, при построении которых зачастую целесообразно привлечение численных методов.

Очевидно, аналитическое построение асимптотических приближений выше второго при исследовании конкретных нелинейных схем связано со значительными математическими трудностями вычислительного характера, однако умелые и своевременные упрощения, основанные на хорошем знании технической стороны исследуемого процесса, могут в значительной степени помочь их избежать.

И, наконец, знание рекуррентных формул, приведенных выше, позволяет воспользоваться при построении асимптотических разложений в любом приближении средствами вычислительной техники (создание стандартных символьических программ построения асимптотических приближений с последующим вводом последних в ЭВМ).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дущенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 8, № 12, 222 (1965).
2. В. И. Самойленко, Е. М. Злочевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 4, № 6, 640 (1961).
3. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, изд. АН УССР, Киев, 1937.
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
5. А. А. Молчанов, И. Н. Таничев, Радиотехника и электроника, 11, № 3, 456 (1966).
6. Г. Я. Карасик, А. Б. Ляско, Радиотехника, 19, № 12 (1964).
7. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
8. И. Н. Таничев, Радиотехника и электроника, 10, № 10, 1901 (1965).

Киевский политехнический институт

Поступила в редакцию
13 декабря 1965 г.

ON THE ASSUMPTOTIC METHODS OF THE OSCILLATIONS THEORY IN SOME PROBLEMS OF THE NONLINEAR RADIOTECHNICS

A. A. Molchanov

Assuming oscillation processes in the nonlinear resonance circuits to be fairly similar with the processes in the harmonic systems, this paper proves that any approximation to the differential equation with small nonlinear components containing derivatives of second and higher orders obtained using Kralov—Bogolyobov asymptotic methods is valid. The recurrent formulas for this asymptotic approximation construction are obtained. These formulas could be used for the analysis of the concrete nonlinear circuits with the aid of computer.

УДК 621.373

К ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

B. I. Горюнов

На примере синхронизации осциллятора с «подталкивающим трением» приводится один метод расчета синхронизации квазигармонического осциллятора.

В работе на простом примере, для которого известны некоторые точные результаты, поясняется один метод приближенного исследования синхронизации квазигармонического осциллятора кусочно-постоянной периодической внешней силой. Идея метода состоит в следующем. В каждом из интервалов постоянства внешней силы исходная система рассматривается как автономная и для нее методом Ван-дер-Поля ищется приближенное решение. Последнее позволяет построить приближенное точечное преобразование плоскости в плоскость для нахождения режимов синхронизации и выяснения их устойчивости.

Для удобства сравнения точных и приближенных результатов приводимое ниже исследование ограничивается кругом вопросов, рассмотренных в [1].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ТОЧЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + x = \frac{\pi}{2} \gamma \operatorname{sgn}[\dot{x}] + \lambda \operatorname{sgn}[\sin(\tau/p)], \quad (1.1)$$

где $0 < \gamma \ll 1$. К этому уравнению сводится исходное уравнение работы [1] при $\omega RC \ll 1$. Обозначения (1.1) и исходного уравнения [1] связаны следующим образом: $\tau = \omega t$ — новое время, по которому в (1.1) точкой сверху обозначено дифференцирование, $\omega = (LC)^{-1/2}$, переменная $x = \frac{\pi}{2} \gamma \left(\frac{2i}{i_s} - 1 \right)$, $\gamma = RC\omega/2$ — обобщенные потери, $\lambda = \pi\gamma C\Omega\varepsilon/i_s$ — обобщенная амплитуда внешней силы, $p = \omega/\Omega$ — обобщенный период внешней силы. Как и в [1], не оговаривая общности, будем считать $\lambda > 0$.

Рассмотрим (1.1) в интервале знакопостоянства внешней силы, например, для $0 < \tau < p\pi$. Тогда простой заменой переменной $z = x - \lambda$ уравнение (1.1) приводится к уравнению квазигармонического осциллятора

$$\ddot{z} + z = \gamma \left(-2\dot{z} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[\dot{z}] \right), \quad (1.2)$$

для которого с помощью известного метода Ван-дер-Поля (см., например, [2]) легко найти первый член в разложении точного решения (1.2) в ряд по $\gamma \ll 1$.

При $p\pi < \tau < 2p\pi$ (1.1) соответствующей заменой x также сводится к уравнению вида (1.2). Нетрудно проверить, что при сделанных огра-

ничениях в каждом из интервалов знакопостоянства внешней силы с точностью до γ^2 решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= (1 - Ce^{-\tau}) \cos(\tau + \vartheta) + \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right], \\ \dot{x} &= -(1 - Ce^{-\tau}) \sin(\tau + \vartheta), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где C и ϑ — постоянные интегрирования (постоянные лишь в интервалах знакопостоянства внешней силы). Будем, как и в [1], считать, что (1.3) приближенно описывает непрерывные траектории уравнения (1.1), в том числе и в момент переключения внешней силы.

Построим точечное преобразование плоскости $\tau = 0$ в плоскость $\tau = p\pi$, осуществляемое траекториями (1.3). При $\tau = 0$ имеем плоскость начальных условий

$$\begin{aligned} x_0 &= (1 - C) \cos \vartheta + \lambda, \\ \dot{x}_0 &= -(1 - C) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что плоскость начальных условий $-\infty < x_0 < +\infty$, $-\infty < \dot{x}_0 < +\infty$ однозначно задается с помощью C и ϑ при $-\infty < C \leq 1$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

При $\tau = p\pi$ имеем плоскость $-x'$, $-\dot{x}'$, где

$$\begin{aligned} x' &= -(1 - Ce^{-p\pi}) \cos(p\pi + \vartheta) - \lambda, \\ \dot{x}' &= (1 - Ce^{-p\pi}) \sin(p\pi + \vartheta). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) дают нам точечное преобразование S' точек (x_0, \dot{x}_0) в точки (x', \dot{x}') в параметрическом виде (параметры C и ϑ). Нетрудно проверить, используя (1.3), что, аналогично [1], преобразование точек (x', \dot{x}') в точки (x_1, \dot{x}_1) плоскости $\tau = 2p\pi$ описывается этим же преобразованием S' . Поэтому для существования устойчивого (неустойчивого) решения системы (1.1) с периодом внешней силы необходимо и достаточно существования устойчивой (неустойчивой) неподвижной точки точечного преобразования S' .

2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ S' И ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

Неподвижные точки точечного преобразования находим из условий

$$\begin{aligned} x_0(C^*, \vartheta^*) &= x'(C^*, \vartheta^*), \\ \dot{x}_0(C^*, \vartheta^*) &= \dot{x}'(C^*, \vartheta^*). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя (1.4), (1.5) в (2.1) и решая полученную систему, имеем:

1) для p , не равного целочисленному значению,

$$\lambda = \frac{(e^{ip\pi} - 1) \sin(p\pi)}{2 [\sin(p\pi + \vartheta^*) + e^{ip\pi} \sin \vartheta^*]}, \quad (2.2)$$

$$C^* = 1 + \frac{(e^{ip\pi} - 1) \sin(p\pi + \vartheta^*)}{\sin(p\pi + \vartheta^*) + e^{ip\pi} \sin \vartheta^*}; \quad (2.3)$$

2) для целочисленных значений p и $\lambda \neq 0$

$$C^* = \frac{2\lambda e^{ip\pi} \cos \vartheta^*}{e^{ip\pi} - 1}, \quad \vartheta^* = 0, \pi \quad (p \text{ --- нечетное}), \quad (2.4)$$

$$C^* = -\frac{2(\lambda - 1) e^{ip\pi}}{e^{ip\pi} - 1}, \quad \vartheta^* = \pi \quad (p \text{ — четное}); \quad (2.5)$$

3) при нечетном p и $\lambda = 0$ $C^* = 0$, ϑ^* — любое и соответствует предельному циклу автономной задачи;

4) при $\lambda = 0$, $p = 0$ решение имеет вид $C^* = 1$, ϑ^* — любое.

Рассмотрим ряд свойств (2.2) и (2.3). Используя условия $\lambda > 0$, $C^* \leq 1$, из (2.2) и (2.3) имеем

$$\sin(p\pi + \vartheta^*) + e^{ip\pi} \sin \vartheta^* > 0, \quad \sin(p\pi + \vartheta^*) \leq 0 \quad (\text{при } \sin(p\pi) > 0), \quad (2.6)$$

$$\sin(p\pi + \vartheta^*) + e^{ip\pi} \sin \vartheta^* < 0, \quad \sin(p\pi + \vartheta^*) \geq 0 \quad (\text{при } \sin(p\pi) < 0). \quad (2.7)$$

Анализируя (2.6) и (2.7), получаем, что область существования ϑ^* системы уравнений (2.2), (2.3) удовлетворяет двум условиям, из которых первое имеет вид

$$-\frac{\cos(p\pi) + e^{ip\pi}}{\sin(p\pi)} < \operatorname{ctg} \vartheta^* \leq -\operatorname{ctg}(p\pi), \quad (2.8)$$

а второе означает, что $\sin \vartheta^* \sin(p\pi) > 0$.

Нетрудно проверить, что в области существования ϑ^* системы (2.2), (2.3) зависимость C^* от ϑ^* , согласно (2.3), имеет монотонный характер, причем C^* принимает свое максимальное значение $C^* = 1$ при выполнении равенства в (2.8).

Зависимость λ от ϑ^* , согласно (2.2), в области существования ϑ^* системы (2.2), (2.3) может иметь локальный минимум при $\vartheta^* = \bar{\vartheta}^*$, где

$$\operatorname{ctg} \bar{\vartheta}^* = \frac{\sin(p\pi)}{\cos(p\pi) + e^{ip\pi}}. \quad (2.9)$$

Из совместного анализа (2.8) и (2.9) следует, что минимум зависимости λ от ϑ^* , согласно (2.2), существует в простых интервалах p , включающих нечетные целочисленные значения. Границы этих интервалов определяются уравнением

$$1 + e^{ip\pi} \cos(p\pi) = 0. \quad (2.10)$$

Считая в (2.2) $C^* = 1$ и подставляя найденное при этом условии из (2.2) значение ϑ^* в (2.3), получаем соответствующее этому случаю

$$\lambda_{rp} = (1 - e^{-ip\pi})/2. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.9) в (2.2) и (2.3), находим значение λ_{\min} и соответствующее ему значение $C^* = (C^*)_{\lambda_{\min}}$:

$$\lambda_{\min} = \frac{(e^{ip\pi} - 1) |\sin(p\pi)|}{2[1 + 2e^{ip\pi} \cos(p\pi) + e^{2ip\pi}]^{1/2}}, \quad (2.12)$$

$$(C^*)_{\lambda_{\min}} = 1 + \frac{(e^{ip\pi} - 1)(1 + e^{ip\pi} \cos(p\pi))}{1 + 2e^{ip\pi} \cos(p\pi) + e^{2ip\pi}}. \quad (2.13)$$

Согласно (2.10), (2.11) и (2.12), на рис. 1 в пространстве параметров p , γ , λ/γ построены границы существования различного числа неподвижных точек точечного преобразования S' . Области существования двух

неподвижных точек точечного преобразования S' лежат внутри клинообразных «зубьев». Вне «зубьев» над граничной поверхностью существует одна неподвижная точка S' -преобразования, под граничной поверхностью неподвижных точек S' -преобразования нет.

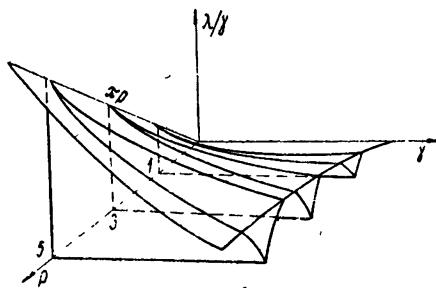


Рис. 1.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК S' -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для получения характеристического полинома, решающего вопрос устойчивости неподвижных точек точечного преобразования S' , достаточно, как и в [1], представить S' -преобразование близких с (C^*, ϑ^*) точек в виде рядов по малым приращениям C и ϑ и ограничиться линейными членами. После несложных вычислений приходим к характеристическому полиному

$$Az^2 + Bz + C = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1 - C^*, \\ B &= (1 + e^{-\imath p\pi} - 2C^*e^{-\imath p\pi}) \cos(p\pi), \\ C &= e^{-\imath p\pi}(1 - C^*e^{-\imath p\pi}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим границы области устойчивости на плоскости p, C^* , начиная с особых. Две особые границы получаются из (3.1) при $z = \pm 1$ и имеют соответственно вид

$$C^* = 1 + \frac{(e^{\imath p\pi} - 1)(1 \pm e^{\imath p\pi} \cos(p\pi))}{1 \pm 2e^{\imath p\pi} \cos(p\pi) + e^{2\imath p\pi}}. \quad (3.3)$$

Простая граница устойчивости удовлетворяет системе

$$A - C = 0, \quad 2A \cos \varphi + B = 0, \quad (3.4)$$

где φ — параметр, пробегающий значения от нуля до 2π .

4. АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ S' -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Нетрудно убедиться, аналогично [1], что неподвижной точке S' -преобразований на плоскости x, \dot{x} соответствует периодическое движение, симметричное относительно начала координат и принимающее свое амплитудное значение $H = |x_{\max}(C^*, \vartheta^*, \tau)|$ в каждый из полупериодов внешней силы. Из сказанного и (1.5) следует, что для $p \geq 1$ H дается следующими формулами:

$$H = 1 - C^* e^{-\gamma(2\pi-\theta^*)} + \lambda \quad (\text{при } C^* \leq 0), \quad (4.1)$$

$$H = 1 - C^* e^{-\gamma(N\pi-\theta^*)} + \lambda \quad (\text{при } \sin(p\pi) > 0 \text{ и } 0 \leq C^* \leq 1), \quad (4.2)$$

$$H = 1 - C^* e^{-\gamma[(N+1)\pi-\theta^*]} + \lambda \quad (\text{при } \sin(p\pi) < 0 \text{ и } 0 \leq C^* \leq 1), \quad (4.3)$$

где N — целая часть p . Заметим, что при $N = 2$ (4.2) совпадает по форме записи с (4.1), а при $N = 1$ (4.3) совпадает по форме записи с (4.1). Это объясняется единственным пересечением траекторией рассматриваемого движения плоскости $x = 0$ фазового пространства x, \dot{x}, τ системы (1.1) в каждый полупериод внешней силы. По этой же причине при $p \leq 1$ для $-\infty < C^* \leq 1$

$$H = 1 - C^* e^{-\gamma(\pi-\theta^*)} - \lambda. \quad (4.4)$$

Отметим, что при $C^* = 0$ зависимости (4.1) — (4.3) совпадают, что соответствует непрерывной зависимости H от p при переходе C^* через нулевое значение. Из других свойств резонансных кривых, т. е. зависимости H от p , следует отметить следующее:

- 1) если $H(p)$ существует, то она непрерывна;
- 2) для целочисленных значений p и конечных значений γ и λ имеют место следующие соотношения:

$$H = 0 \quad (\text{при } p = 0);$$

$$H = 1 + \left(1 - \frac{2e^{-\gamma\pi(p-1)}}{1 - e^{-\gamma p\pi}} \right) \lambda, \quad (4.5)$$

$$H = 1 + \left(1 + \frac{2e^{-\gamma\pi}}{1 - e^{-\gamma p\pi}} \right) \lambda \quad (4.6)$$

(при $p = 1, 3, 5, \dots$);

$$H = 1 + \frac{2(\lambda - 1)}{1 + e^{-\gamma p\pi}} e^{-\gamma\pi} + \lambda \quad (\lambda \geq 1),$$

$$H = 1 + \frac{2(\lambda - 1)}{1 + e^{-\gamma p\pi}} e^{-\gamma\pi(p-1)} + \lambda \quad (\lambda \geq 1) \quad (4.7)$$

(при $p = 2, 4, 6, \dots$);

$$3) \frac{dH}{dp} > 0 \quad (\text{при } p = 1, 3, 5, \dots);$$

$$4) \operatorname{sgn} \frac{dH}{dp} = \operatorname{sgn} [1 - \lambda] \quad (\text{при } p = 2, 4, 6, \dots);$$

5) граница исчезновения резонансных кривых, соответствующая λ_{rp} , имеет вид

$$H_{rp} = \frac{1}{2} (1 - e^{-\gamma p\pi}) \quad (0 \leq p \leq 1), \quad (4.8)$$

$$H_{rp} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} + e^{\gamma\pi} \right) e^{-\gamma p\pi} \quad (p \geq 1), \quad (4.9)$$

т. е. $H_{rp}(p)$ непрерывна, но при $p = 1$ первая производная терпит скачок первого ряда, равный $\gamma\pi$, в сторону увеличения p ;

6) из (4.6) и (4.9) следует, что при любой конечной γ существует такое p^* , что при $p > p^*$ ($p = 3, 5, 7, \dots$) $\frac{dH}{d\lambda} > 0$ для любых допустимых λ ; $H_{rp} = H(p = 3, 5, 7, \dots; \lambda = 0) = 1$ соответствует определенному значению γ , получающемуся из первой формулы (4.6) при $H = 1, \lambda \neq 0$;

7) при $\gamma \neq 0$ H_{rp} ($p = 1$) < 1 , что выделяет случай $p = 1$ из остальных нечетных целочисленных значений p ;

8) поскольку (1.3) не включает в себя решение (1.1) вида $x = \lambda \operatorname{sgn} \left[\sin \frac{\tau}{p} \right] (\dot{x} = 0)$ в каждый из полупериодов внешней силы, необходимо считать, что при $\lambda = 0$ и любых p и $\gamma \neq 0$ этому виду неустойчивого движения соответствует $H = 0$, а в пространстве параметров плоскость $\lambda = 0$.

5. ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ НА ПЛОСКОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ

Построение границ устойчивости на плоскости резонансных кривых H, p состоит в построении (4.1) — (4.4) при условии выполнения (3.3) и (3.4).

Отметим некоторые свойства поведения границ устойчивости. Поскольку при $p = 1, 3, 5, \dots$ C^* и $\frac{dC^*}{dp}$, согласно (2.13), равны нулю, поскольку для особой границы, совпадающей с $H_{\lambda_{\min}}$, имеет место

$$\frac{dH_{\lambda_{\min}}}{dp} = -\frac{d\lambda_{\min}}{dp} \quad (p = 1 - 0), \quad (5.1)$$

$$\frac{dH_{\lambda_{\min}}}{dp} = \frac{d\lambda_{\min}}{dp} \quad (p = 1 + 0, 3 \pm 0, 5 \pm 0, \dots). \quad (5.2)$$

Используя (2.12), имеем

$$\frac{dH_{\lambda_{\min}}}{dp} = \frac{\pi}{2} \quad (p = 1 \pm 0), \quad (5.3)$$

$$\frac{dN_{\lambda_{\min}}}{dp} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} [\sin(p\pi)] \quad (p \pm 0 = 3, 5, 7, \dots), \quad (5.4)$$

т. е. при $p = 1$ указанная особая граница не имеет излома, в то время как при $p = 3, 5, 7, \dots$ всегда имеется излом.

Чтобы убедиться, что граница устойчивости на плоскости H, p при $p = 0$ проходит через $H = 0$, достаточно убедиться, что при $p \rightarrow 0$ для $z = -1$ в (3.3) существует конечный предел C^* , поскольку в этом случае имеет место (4.5).

При $p = 2, 4, 6, \dots$ граница устойчивости носит гладкий характер. В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись любой из формул (4.1) — (4.3), помня, что H и $\frac{dH}{dp}$ в этом случае находятся при условии $\theta^* = \pi$,

$C^* = 0$, $\frac{dC^*}{dp} = 0$, $\lambda = \text{const}$. Очевидно, что в этом случае для границы устойчивости $\frac{dH}{dp} = 0$ ($p = 2, 4, 6, \dots$). Общая картина поведения резонансных кривых и границ устойчивости приведена на рисунках 2 и 3.

По-прежнему, как и в [1], при $p > \left(\frac{1}{\gamma\pi} \ln(1 + 2e^{\gamma\pi})\right)$ у двузначных резонансных кривых устойчивому движению соответствуют вышележащие ветви. Знаком D обозначено количество корней $|z| > 1$ характеристического полинома (3.1).

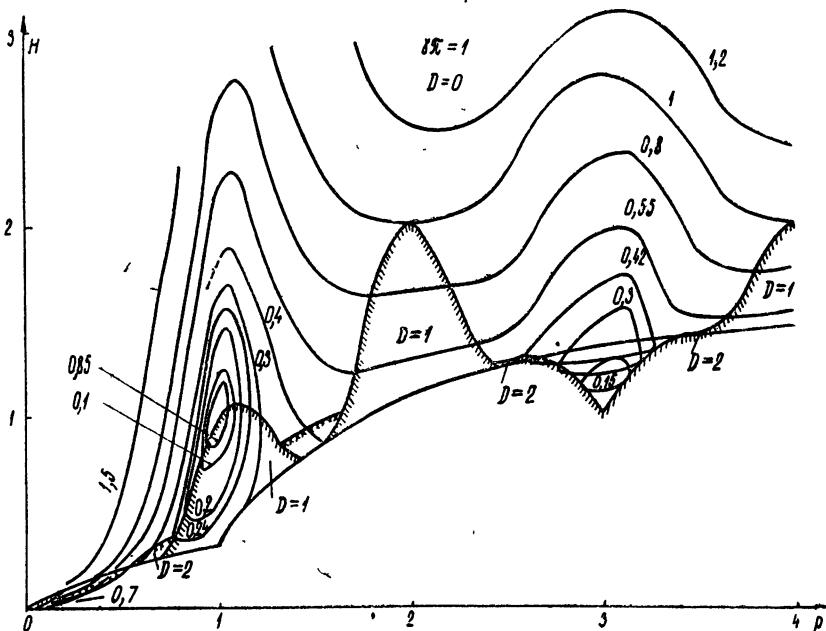


Рис. 2.

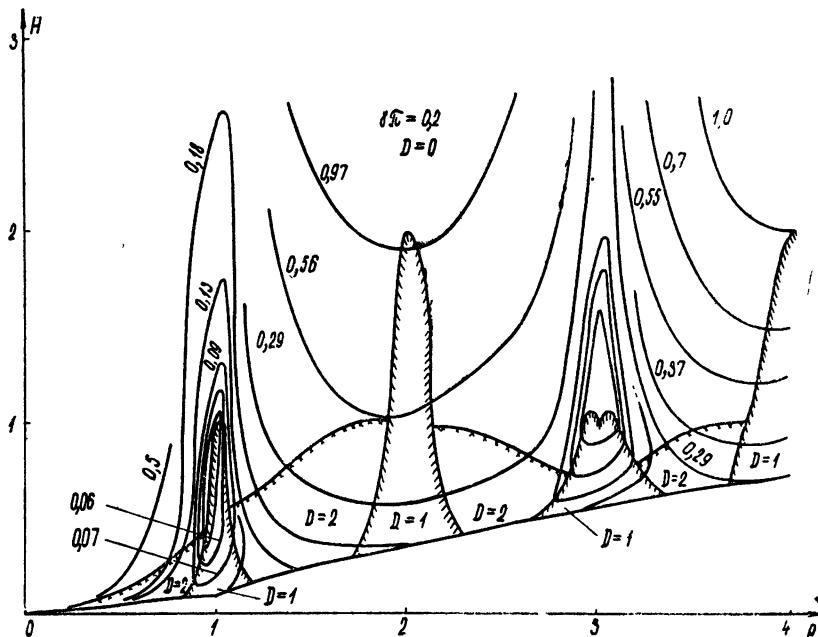


Рис. 3.

6. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЙ

Пользуясь обозначениями (1.1), покажем, что при $\gamma \rightarrow 0$ результаты настоящей работы и работы [1] совпадают. Вводя в уравнение (1.2) работы [1] $x = \frac{\pi}{2} \gamma x_{ct}$ и $\lambda = \frac{\pi}{2} \gamma \lambda_{ct}$, где x_{ct} и λ_{ct} — переменная и параметр уравнения (1.2) работы [1], убеждаемся, что при $\gamma \rightarrow 0$ (1.1) и уравнение (1.2) работы [1] совпадают. Последнее, как нетрудно убедиться, приводит к тому, что как решения, так и S' -преобразования (1.1) настоящей работы и (1.2) работы [1] с точностью до знака λ и параметрической формы записи эквивалентны. Отмеченное обстоятельство обуславливает совпадение всех результатов настоящей работы и работы [1], полученных на основе рассмотрения вида решения и свойств S' -преобразования при $\gamma \rightarrow 0$. Не останавливаясь здесь на формальном сравнении зависимостей настоящей работы и соответствующих им зависимостей работы [1] при $\gamma \rightarrow 0$, что при желании всегда можно сделать, ограничимся следующими замечаниями.

Границы разбиения пространства параметров на области существования различного числа решений (1.1) с периодом внешней силы при $\gamma \rightarrow 0$ сливаются с плоскостью $\lambda = 0$. Пороговые значения резонансных кривых при этом становятся нулевыми, т. е. порог фактически исчезает. Резонансные кривые в окрестности $p = 1, 3, 5, \dots$ и $\lambda \neq 0$ при $\gamma \rightarrow 0$ имеют резкий максимум с $H_{\max} \rightarrow \infty$. В соответствии с этим деформируются и границы устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 5, 962 (1964).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959, стр. 653.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 июня 1966 г.

TO THE THEORY OF QUASIHARMONIC OSCILLATOR SYNCHRONIZATION

V. I. Goryoonov

This paper presents a method for calculation of a quasiharmonic oscillator synchronization. The use of a method is demonstrated for the oscillator with a „pushing friction“.

УДК 621.316.722.1 025

К ТЕОРИИ РЕГУЛИРУЕМОГО ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО СТАБИЛИЗАТОРА ТОКА

В. И. Горюнов, Е. Н. Серебрякова, В. И. Королев

Дается методика расчета регулируемого электродинамического стабилизатора тока. В пространстве параметров указывается область существования единственного устойчивого режима стабилизации. Обсуждаются вопросы качества стабилизации.

В работах [1, 2] приведены некоторые опытные и теоретические результаты исследования статических и динамических режимов работы электродинамического стабилизатора тока [3]. Однако вопросы существования, устойчивости и качества стабилизации, основанные на изучении динамической модели системы, остались не рассмотренными. Ниже дается общее исследование предложенной системы, исходя из динамической модели в предположении существенной инерционности механической части системы и выполнении одного общего ограничения, наложенного на вид зависимости коэффициента взаимной индукции обмоток трансформатора от расстояния между последними.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим физическую модель действующего электродинамического стабилизатора тока (рис. 1a), представляющего собой трансформатор, первичная обмотка I которого закреплена, а вторичная обмотка

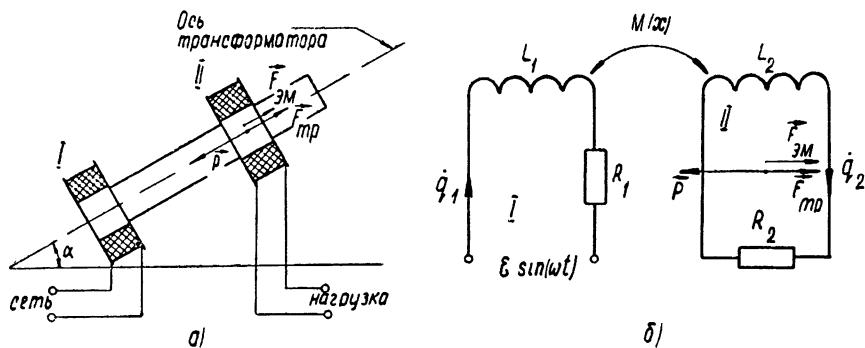


Рис. 1.

II может перемещаться по магнитопроводу трансформатора, удаляясь на максимальное расстояние l относительно первичной обмотки. Возможное перемещение вторичной обмотки происходит под действием скатывающей силы P , обусловленной весом обмотки, силы вязкого трения F_{trp} и силы взаимного электромагнитного отталкивания полей

токов обмоток $F_{\text{эм}}$. В режиме стабилизации вторичная обмотка вследствие своей инерционности совершает быстрые колебания малой амплитуды около некоторого среднего положения на магнитопроводе. При этом через R_2 , включающее нагрузку, проходит ток определенной амплитуды.

Для того, чтобы пояснить принцип действия стабилизатора, предположим, что среднее во времени равновесие сил P , $F_{\text{тр}}$ и $F_{\text{эм}}$ нарушилось вследствие изменения амплитуды тока, протекающего через нагрузку. В этом случае изменяется абсолютная величина $F_{\text{эм}}$ и среднее положение вторичной обмотки на магнитопроводе. При этом, как правило, среднее расстояние между обмотками уменьшается (увеличивается) при уменьшении (увеличении) амплитуды тока, протекающего через нагрузку. Указанное выше изменение среднего расстояния между обмотками означает, в свою очередь, соответственное увеличение (уменьшение) коэффициента взаимоиндукции трансформатора, что и составляет сущность стабилизации, поскольку при этом амплитуда тока, протекающего через нагрузку, будет стабилизирована к тому значению, которое было до предполагаемого ее изменения.

Из принципа действия стабилизатора очевидно, что наличие сил кулоновского трения вторичной обмотки по магнитопроводу нежелательно, так как оно соответствует частичному закреплению вторичной обмотки и, следовательно, ухудшает или нарушает процесс стабилизации амплитуды тока в нагрузке. Необходимо также отметить, что прочность конструкции обмоток и магнитопровода трансформатора, а также качество его материала, при отсутствии специальных гасящих устройств, обуславливает возможность неупругих ударов вторичной обмотки о стенки магнитопровода.

Перейдем к математической формулировке вопроса. Для этого обратимся к эквивалентной схеме электродинамического стабилизатора тока (рис. 1б). На рис. 1б введены обозначения: \dot{q} , L , R (с индексами один и два) — ток, индуктивность и активное сопротивление первичной и вторичной (включая нагрузку) цепей трансформатора соответственно; $M(x)$ — коэффициент взаимоиндукции (функция x — расстояния между обмотками, где $x = 0$ соответствует их касанию); $P = mg \sin \alpha$ — величина силы, скатывающей вторичный контур массой m к закрепленному первичному; $F_{\text{тр}} = -h\dot{x}$ — величина силы вязкого трения, возникающего при движении вторичной обмотки по магнитопроводу со скоростью \dot{x} ; $\mathcal{E} \sin(\omega t)$ — переменное напряжение сети, подаваемое на вход первичной обмотки.

Согласно выбранной эквивалентной схеме нетрудно написать уравнения, описывающие динамику системы [4]. Действительно, в нашем случае кинетическая энергия системы

$$T = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2} + M(x) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{m \dot{x}^2}{2}, \quad (1.1)$$

потенциальная энергия поднятой вторичной обмотки

$$V = mg \sin \alpha x, \quad (1.2)$$

обобщенные неконсервативные силы электрического и механического происхождения

$$F_{\dot{q}_1} = \mathcal{E} \sin(\omega t), \quad F_{\dot{x}} = -h\dot{x}. \quad (1.3)$$

Согласно [4], получаем уравнения системы

$$L_1 \ddot{\dot{q}}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{d}{dt} [M(x) \dot{q}_2] = \mathcal{E} \sin(\omega t), \quad (1.4)$$

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{d}{dt} [M(x) \dot{q}_1] = 0, \quad (1.5)$$

$$m \ddot{x} + h \dot{x} + P = \frac{\partial M(x)}{\partial x} \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (1.6)$$

где в (1.4) — (1.6) точкой обозначено дифференцирование по времени.

Поскольку нас не интересует динамика первичной обмотки, сведем рассмотрение системы трех уравнений (1.4) — (1.6) к системе двух уравнений. Для этого исключим из системы (1.4) — (1.6) \dot{q}_1 и \dot{q}_2 . Последнее можно сделать просто, поскольку при нулевых начальных (при $t = 0$) значениях зарядов и токов в системе из (1.5) интегрированием по t получаем

$$M(x) \dot{q}_1 = - L_2 \dot{q}_2 - R_2 q_2. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.4) и (1.6), получаем систему

$$(L_1 L_2 - M^2) \ddot{q}_2 + [L_1 R_2 + L_2 R_1 - (L_1 L_2 + M^2) (M'_x / M) \dot{x}] q_2 + \quad (1.8)$$

$$+ [R_1 R_2 - L_1 R_2 (M'_x / M) \dot{x}] \dot{q}_2 = - M \varepsilon \sin(\omega t),$$

$$m \ddot{x} + h \dot{x} + P = - (M'_x / M) (L_2 \dot{q}_2 + R_2 q_2) \dot{q}_2, \quad (1.9)$$

где, для упрощения записи, $\frac{dM(x)}{dx}$ и $M(x)$ обозначены через M'_x и M .

При $t = 0$ q_2 и \dot{q}_2 равны нулю, а x и \dot{x} произвольны при условии выполнения ограничения $0 < x < l$.

Отметим, что в (1.8), (1.9) содержится большое количество физических параметров, поэтому имеет смысл сформулировать задачу в безразмерном виде, оставив существенные параметры. Для этого в (1.8), (1.9) и граничных условиях перейдем к безразмерным переменным $y = x/l$, $q = \sqrt{L_1 L_2} \omega^2 q_2 / \varepsilon$, безразмерному времени $\tau = \omega t$ и безразмерным параметрам $r_1 = R_1 / L_1 \omega$, $r_2 = R_2 / L_2 \omega$, $\mu = h/m\omega$, $\sigma = mg/h\omega l$, $e = \varepsilon^2 / 2h\omega^3 L_1 l^2$, физический смысл которых очевиден. Безразмерный коэффициент взаимоиндукции обозначим через $n = M / \sqrt{L_1 L_2}$. Обозначая $\frac{\partial n(y)}{\partial y} = n'_y$, получаем (1.8), (1.9) в виде

$$(1 - n^2) \ddot{q} + [r_1 + r_2 - (1 + n^2)(n'_y/n) \dot{y}] \dot{q} + r_2 [r_1 - (n'_y/n) \dot{y}] q = - n \sin \tau, \quad (1.10)$$

$$\dot{y} = - \mu [\dot{y} + \sigma \sin \tau + 2e(n'_y/n) (\dot{q} + r_2 q) \dot{q}]. \quad (1.11)$$

При $\tau = 0$ $q = \dot{q} = 0$, а $0 < y < 1$. В качестве граничных условий возьмем следующие. Будем считать, что при $y=0$ и $y=1$ изображающая точка движения в фазовом пространстве системы (1.10), (1.11) совершает скачок на гиперплоскость $y=0$ при постоянных y , q , \dot{q} с возможностью последующего ухода в область $0 < y < 1$. Отметим, что приведенные выше граничные условия соответствуют предположению об ограниченности токов и напряжений во вторичной обмотке трансформатора в момент ее абсолютно неупругого удара о стенки магнитопровода и представляются естественными.

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ ДИНАМИКИ

Изучение общих свойств (1.10), (1.11) с соответствующими начальными и граничными условиями является достаточно сложной задачей. Поэтому ограничимся одним практически важным случаем, когда

вследствие существенной инерционности вторичной обмотки трансформатора на частоте сети $\mu \ll 1$ при конечных значениях других параметров, включая и σ . Тогда, согласно (1.10), (1.11), в ограниченной по q, \dot{q}, y, \dot{y} части фазового пространства (1.10), (1.11), за исключением малой (порядка $V\mu$) окрестности гиперплоскости $\dot{y}=0$, траектории движений с точностью, определяемой малостью μ , удовлетворяют условию $y = \text{const}$. Последнее означает, что траектории (1.10), (1.11), начинающиеся в ограниченной части фазового пространства, в общем случае делятся на два вида. Изображающие точки траекторий первого вида с течением времени приходят на одну из границ $y=0, y=1$ и совершают скачок вдоль границ на гиперплоскость $\dot{y}=0$. Траектории второго вида, существование которых возможно в малой ϵ окрестности гиперплоскости $\dot{y}=0$, на границы $y=0$ и $y=1$ не приходят. Следовательно, вместо общего исследования свойств (1.10), (1.11) в нашем случае достаточно ограничиться исследованием движений, начинающихся в ϵ окрестности гиперплоскости $\dot{y}=0$ ($V\mu < \epsilon \ll 1$).

Применим для исследования движений, начинающихся в ϵ окрестности гиперплоскости $\dot{y}=0$, метод усреднения [5]. Действительно, в этом случае скорости изменения q и \dot{q} во времени сравнимы с единицей, а скорости y и $\dot{y} \ll 1$. Поэтому, считая в (1.10) y и \dot{y} постоянными, находя при этом условии вынужденное решение для q, \dot{q} , подставляя полученное для q, \dot{q} решение в (1.11) и усредняя получающуюся правую часть (1.11) по явно входящему времени, получаем уравнение

$$\ddot{y} = -\mu \left[\dot{y} + \sigma \sin \alpha + \frac{en(n'y)}{r_2[r_1 - (n'_y/n)\dot{y}] - 1 + n^2 + [r_1 + r_2 - (1 + n^2)(n'_y/n)\dot{y}]^2} \right], \quad (2.1)$$

которое приближенно описывает свойства исходной системы (1.10), (1.11) в ϵ окрестности гиперплоскости $\dot{y}=0$.

Таким образом, мы пришли к необходимости рассмотрения характера траекторий (2.1) на фазовой плоскости y, \dot{y} в ϵ окрестности $\dot{y}=0$ при $0 < y < 1$. В случае прихода изображающей точки фазовой траектории на границу $y=0$ или $y=1$ она совершает скачок вдоль одной из указанных границ на линию $\dot{y}=0$ с возможностью последующего ухода в область $0 < y < 1$.

Выясним вопрос о количестве и устойчивости состояний равновесия (2.1). Положим в (2.1) $\dot{y} = \ddot{y} = 0$. Вводя для удобства дальнейшего исследования функции

$$\varphi_1 = \frac{en}{(r_1 r_2 - 1 + n^2)^2 + (r_1 + r_2)^2}, \quad (2.2)$$

$$\varphi_2 = -\sigma \sin \alpha / n'_y, \quad (2.3)$$

получаем, что состояния равновесия (2.1) задаются точкой $y=y_0$, где $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(y_0)$. Последнее равенство удобно исследовать графически на плоскости y, φ_k ($k=1, 2$). Пусть $n(y)(y>0)$ — монотонно убывающая функция с положительной второй производной. Тогда варианты различного взаимного поведения φ_1 и φ_2 имеют вид, приведенный на рис. 2. Существенным моментом здесь является доказательство монотонно убывающего характера φ_1 . Для доказательства последнего воспользуемся тем, что $\operatorname{sgn} \left[\frac{d\varphi_1}{dy} \right] = -\operatorname{sgn} \left[\frac{d\varphi_1}{dn} \right]$, но числитель $\frac{d\varphi_1}{dn}$, как видно

из нижеприведенного, всегда положителен (при положительном знаменателе):

$$g(y) + (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 h^2 > g(y) + (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 = g(y) + (r_1 - r_2)^2 > 0, \quad (2.4)$$

где

$$g(y) = (r_1 r_2 - 1 + n^2)^2 + 4(1 - n^2) n^2 > 0.$$

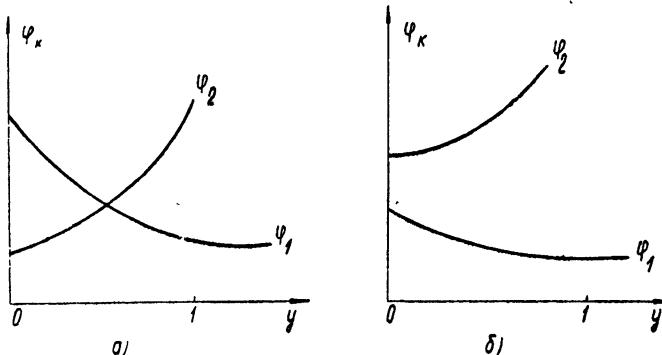


Рис. 2:

Очевидно, что случай, изображенный на рис. 2б, соответствует отсутствию режима стабилизации, когда сила отталкивания, возникающая между обмотками трансформатора, меньше, чем сила, скатывающая вторичную обмотку, вследствие чего обмотки касаются. Случай, изображенный на рис. 2а, соответствует наличию режима стабилизации (при условии устойчивости состояния равновесия (2.1)). При $y_0 > 1$ режим стабилизации отсутствует вследствие очень большой отталкивающей силы обмотки.

Перепишем (2.1) в виде системы

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = -\mu \left[z + \sigma \sin \alpha + \frac{en(n'_y)}{\{r_2[r_1 - (n'_y/n)z] - 1 + n^2\}^2 + \{r_1 + r_2 - (1 + n^2)(n'_y/n)z\}^2} \right], \quad (2.5)$$

и рассмотрим ее на фазовой плоскости y, z при условии $0 < y < 1, |z| < \epsilon$. Из характеристического уравнения (2.5) в состоянии равновесия $y = y_0, z = 0$ [6] следует, что последнее устойчиво при $1 + F(y = y_0) > 0, \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} (y = y_0) < 1$, где

$$F(y) = 2e(n'_y)^2 \frac{r_1 r_2^2 + 2n^2 r_2 + r_1(1 + n^2)}{[(r_1 r_2 - 1 + n^2)^2 + (r_1 + r_2)^2]^2} > 0. \quad (2.6)$$

В нашем случае оба условия выполняются, т. е. состояние равновесия (2.5) устойчиво. Условие апериодичности переходного процесса вблизи состояния равновесия $y = y_0, z = 0$, согласно (2.5), имеет вид

$$\mu > 4\sigma \sin \alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right)_{y=y_0} [1 + F(y = y_0)]^{-2} \quad (2.7)$$

и означает, что вязкое трение должно быть достаточно велико.

Поскольку, согласно критерию Бендиクсона [6], на фазовой плоскости y, z целиком в полосе $|z| < \epsilon$ не может лежать ни один предельный цикл (2.5), то качественное построение фазового портрета (2.5) при $0 < y < 1, |z| < \epsilon$ не представляет труда. Разлагая нелинейность пра-

вой части (2.5) в ряд по малым z , ограничиваясь линейным членом, получаем, что приближенно изоклина горизонтальных касательных

$$z = \frac{n'_y}{1 + F(y)} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.8)$$

имеет вид, изображенный пунктиром на рис. 3.

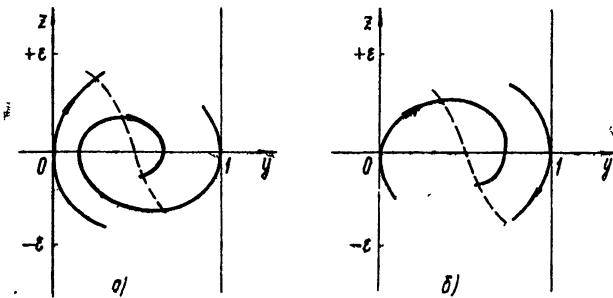


Рис. 3.

Зная поведение изоклины горизонтальных касательных, считая μ фиксированным, а μ достаточно малым, нетрудно качественно изобразить ход фазовых траекторий при $0 < y < 1$, $|z| < \epsilon$. Для нас существенным моментом здесь является следующее. При достаточной малости μ хотя бы одна из полураекторий, выходящих из точек $(0,0)$ или $(1,0)$ плоскости y, z , не выходит из полосы $|z| < \epsilon$ и с течением времени стремится к состоянию равновесия (рис. 3). Если теперь вспомнить, что при $y=0$, $y=1$ изображающая точка фазовой траектории (1.10), (1.11) совершает скачок на гиперплоскость $y=0$, то становится очевидным, что при $0 \leq y \leq 1$ имеет место установление единственного режима стабилизации за исключением не более двух ударов, могущих быть в начале движения вторичной обмотки.

3. КАЧЕСТВО СТАБИЛИЗАЦИИ

Учитывая все вышеизложенное, мы можем указать в пространстве параметров задачи область существования режима стабилизации. Из условия $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(y_0)$ имеем

$$e = - \frac{\sigma \sin \alpha}{n(n'_y)} [(r_1 r_2 - 1 + n^2)^2 + (r_1 + r_2)^2]. \quad (3.1)$$

Напомним, что e является обобщенной амплитудой напряжения сети, а r_2 включает нагрузку. При $y_0 = 0$ (3.1) дает одну границу исчезновения режима стабилизации, а при $y_0 = 1$ — другую. Поскольку из (3.1) следует, что

$$\frac{de}{dr_2} = - \frac{2\sigma \sin \alpha}{n(n'_y)} [(r_1^2 + 1)r_2 + n^2 r_1] > 0, \quad (3.2)$$

а зависимость e от y_0 согласно (3.1), соответствует отношению $\varphi_2(y_0)$ к $\varphi_1(y_0)$, то нетрудно качественно представить область существования режима стабилизации в пространстве e, r_2, α (рис. 4).

Далее, качество стабилизации характеризуется не только величиной

и формой области существования режима стабилизации, но и зависимостью амплитуды стабилизированных колебаний тока в нагрузке от параметров, например, e , r_2 , α . Ради удобства изложения будем рассматривать указанные зависимости для квадрата амплитуды стабилизированного тока

$$\begin{aligned} K(\dot{q}_{2\max})^2 &= n(y_0) \varphi_1(y_0) = \\ &= n(y_0) \varphi_2(y_0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $K = L_2/2h\omega l^2$ получается при пересчете от масштаба q к безразмерной форме записи (3.3). В общем случае имеет смысл исследовать необходимые зависимости параметрически, взяв в качестве параметра y_0 . Для этого из (3.3) возьмем, как наиболее простое, второе равенство

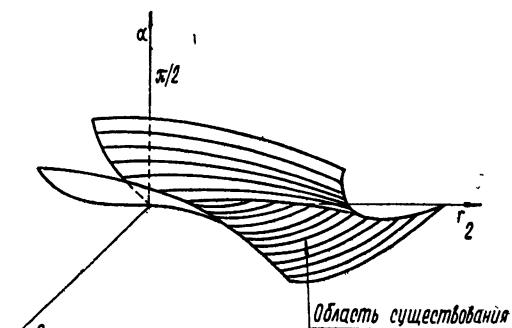


Рис. 4.

$$K(\dot{q}_{2\max})^2 = -\sigma \sin \alpha n(y_0)/n'_y(y_0), \quad (3.4)$$

а условие существования режима стабилизации возьмем в форме (3.1). Графики (3.1) и (3.4), построенные совместно, дают количественную связь между $K(\dot{q}_{2\max})^2$ и e при постоянных других параметрах. На рис. 5 качественно изображены интересующие нас зависимости в предположении существенной нелинейности $n(y)$. Пунктиром на рисунке указан способ получения зависимости $K(\dot{q}_{2\max})^2$ от e . Аналогичным способом можно выяснить зависимость $q_{2\max}$ от других параметров задачи, в частности, от r_2 .

При предложенном методе выяснения характера зависимости $q_{2\max}$ от параметров легко понять регулирующую роль угла α . Для этого предположим, что при $\alpha = \alpha_0 < \pi/2$ и значительном увеличении (уменьшении) e система вышла из

области существования режима стабилизации (рис. 4). Тогда, увеличивая (уменьшая) α , мы, согласно (3.1) и (3.3), одновременно сместим графики (рис. 5) вверх (вниз). Последнее, очевидно, соответствует тому, что система вновь сможет стабилизировать $q_{2\max}$. Более того, часто выбором соответствующего угла α можно при фиксированном e так сместить графики (рис. 5) вверх (вниз), что придем на более пологий участок зависимости $K(\dot{q}_{2\max})^2$ от y_0 , т. е. улучшим качество стабилизации относительно малых изменений параметров.

Следует отметить, что идеальная стабилизация относительно e и r_2 выполняется, если $n(y)$ удов-

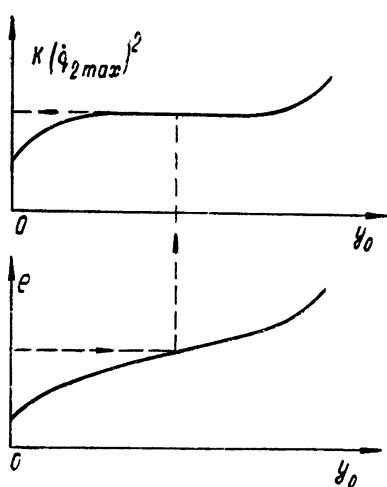


Рис. 5.

летворяет, согласно (3.4), условию

$$\frac{dq_{2\max}}{dy_0} = 0, \quad (3.5)$$

т. е. $n(y_0)$ удовлетворяет уравнению

$$(n'_y)^2 = nn''_{yy}, \quad (3.6)$$

решение которого в нашем случае имеет вид [7]

$$n(y_0) = C_1 e^{-Cy_0}, \quad (3.7)$$

где C_1 и C — положительные произвольные постоянные. Следовательно, близость $n(y)$ на рабочем участке к функции вида (3.7) характеризует близость стабилизации к идеальной.

В заключение следует отметить, что, зная конкретный вид $M(x)$, можно указанным в работе способом легко получить основные данные, характеризующие работу регулируемого электродинамического стабилизатора тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Серебрякова, Регулируемый электродинамический стабилизатор тока, ГОСИНТИ, № 28-64-1260/49, М., 1964.
2. Е. Н. Серебрякова, Тр. Горьк. политехн. ин-та, 20, вып 6, (1965).
3. Е. Н. Серебрякова, Трансформатор с подвижными обмотками, Авт. свидетельство, № 164354, класс 21d², 54.
4. Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, М., 1960.
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
7. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Наука, М., 1965.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 июня 1966 г.

TO THE THEORY OF THE CONTROLLED ELECTRODYNAMIK CURRENT STABILIZER

V. I. Goryoonov, Je. N. Syerebryakova, V. I. Korolyev

This paper presents a method for calculation of a controlled electrodynamic current stabilizer. The existence domain for the only stable stabilization mode is given in a parameter space. The stabilization performance is discussed.

УДК 681.14

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ МНОГОМЕРНОГО ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ИЛИ ДЕШИФРАТОРА С ПОНИЖЕННЫМ УРОВНЕМ ПОМЕХ

М. Я. Эйнгорин

В работе рассматривается случай построения N -мерного запоминающего или дешифрующего прямоугольника с пониженным уровнем помех за счет увеличения числа координат. Доказывается теорема о наибольшем числе независимых координат, которые могут быть введены. Рассмотрен ряд следствий из основной теоремы. Проведено некоторое обсуждение полученных результатов.

В работе [1] рассматривается построение N -мерных запоминающих устройств с пониженным уровнем помех для случая N -мерного куба с числом точек n по каждой из координатных осей. В ряде случаев представляет большой практический интерес выполнение запоминающих N -мерных устройств с пониженным уровнем помех для прямоугольника с числом точек n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) по соответствующим координатным осям. Далее, для краткости, величину числа точек прямоугольника, лежащих на i -ой координатной оси, будем называть n_i -ым измерением.

Для того, чтобы сформулировать утверждения о наибольшем числе прошивок* или наилучшем изображающем отношении [1] в таких запоминающих устройствах, дадим некоторые определения, необходимые для дальнейшего.

Рассмотрим N -мерную матрицу с измерениями n_i ($i = 1, 2, \dots, N$), состоящую из $\prod_{i=1}^N n_i$ магнитных сердечников с прямоугольной петлей гистерезиса, работающую по принципу K -кратного совпадения токов, где N —размерность пространства, в котором рассматривается матрица. Нетрудно видеть, что в такой матрице для однозначной дешифрации каждого сердечника необходимо и достаточно N координат или прошивок. Пусть $K \geq N$. При этом, если назвать элементом прошивки (или просто элементом) провод, проходящий через n_i сердечников, удовлетворяющий, как и в работе [1], двум условиям: 1) ни один сердечник не прошивается двумя элементами одной и той же прошивки, 2) ни одна пара элементов разных прошивок не пересекается более чем в одном сердечнике, то, по-видимому, для дешифрации сердечников наша N -мерная матрица может быть прошита K группами элементов (прошивок) по

$$\rho\{L_j\}_N = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N n_i \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

* Ниже рассмотрим построение многомерных запоминающих устройств, например, на ферритовых сердечниках, с прямоугольной петлей гистерезиса, как наиболее известных и простых для рассуждений. Заметим, что все рассмотренное ниже легко может быть использовано для построения аналогичных функциональных запоминающих устройств на другой физической основе.

элементов в каждой. Число прошивок, обладающих одним и тем же числом ферритов (точек) в каждом элементе, обозначим через k_i , при этом

$$K = \sum_{i=1}^N k_i. \quad (2)$$

Для случая наименьшего числа прошивок $K = N$, достаточных для однозначной дешифрации заданного сердечника в N -мерном пространстве, в каждом из элементов необходим ток $i = I^0/N$. В нашу же задачу входит стремление довести ток $i = I^0/K$ до некоторой минимальной величины i_{\min} при заданных параметрах n_i и N . Поскольку для ферритов в данной матрице ток перемагничивания $I^0 = \text{const}$, то для решения поставленной задачи необходимо найти максимальное число прошивок K_{\max} , элементы которых удовлетворяют условиям 1) и 2).

Сопоставим каждому сердечнику матрицы точку a_{i_1, i_2, \dots, i_N} ($1 \leq i_j \leq n_j$) некоторого множества $\{M\}_N$ в N -мерном пространстве, каждому элементу прошивки, состоящему из n_j точек множества $\{M\}_N$, — элемент некоторого множества $\{D_j\}_N$. Тогда мощность множества* всех элементов $\{\bar{D}\}_N = \sum_{j=1}^N \{D_j\}_N$. Множество $\{D_j\}_N$ может быть выражено через множество $\{L_j\}_N$, соответствующее всем элементам j -й прошивки, которое имеет (1) элементов. Как будет показано ниже,

$$\{\bar{D}\}_N = k_j \{\bar{L}_j\}_N = k_j \rho \{L_j\}_N. \quad (3)$$

Множество $\{D\}_N$ назовем полным, если в него входят все элементы K различных прошивок, где $N \leq K \leq K_{\max}$, причем $\{\bar{D}\}_N = \sum_{j=1}^N k_j \{\bar{L}_j\}_N$.

Множество $\{D\}_N$ назовем полным и максимальным, если оно состоит из элементов всех возможных прошивок, удовлетворяющих условиям 1) и 2), т. е. состоит из K_{\max} прошивок. Для дальнейшего число элементов множества $\{D\}_N$, $\{D_j\}_N$ или $\{L_j\}_N$ назовем его размерностью и обозначим через $\rho \{D\}_N$, $\rho \{D_j\}_N$ или $\rho \{L_j\}_N$ соответственно, а размерность полного максимального множества $\{D\}_N$ — через $\rho_{\max} \{D\}_N$.

Теорема. Для любого множества $\{M\}_N$, заданного в N -мерном пространстве с измерениями координат n_i ($i = 1, 2, \dots, N$), где n_i — простые числа, существует (с точностью до нумерации элементов) единственное полное максимальное множество $\{D\}_N$ с размерностью

$$\rho_{\max} \{D\}_N = \sum_{j=1}^N k'_j \rho \{L_j\}_N, \quad (4)$$

где $\rho \{L_j\}_N$ — число элементов в j -й прошивке N -мерного прямоугольника, $k'_j = \prod_{i=j+1}^N n_i$ — число прошивок, множество $\{L_j\}_N$ которых имеет размерность $\rho \{L_j\}_N$, а $\prod_{i=N+1}^N n_i = 1$.

* Здесь и в дальнейшем через $\{\bar{M}\}$ будем обозначать мощность множества $\{M\}$.

Для доказательства теоремы расположим величины измерений координат n_i в порядке возрастания. Пусть

$$n_N \geq n_{N-1} \geq \dots \geq n_i \geq \dots \geq n_2 \geq n_1. \quad (5)$$

Перенумеруем по порядку все $\{\bar{M}\}_N = \prod_{i=1}^N n_i = H$ точек (ферритов) нашего N -мерного прямоугольника и обозначим их через a_1, a_2, \dots, a_H . Образуем n_1 столбцов, в каждом из которых $\prod_{i=2}^N n_i$ точек. Для определения всех элементов, имеющих n_1 точек, удовлетворяющих условиям 1) и 2), воспользуемся методом «кручения», подробно разобранным в [1]. Из метода «кручения» выражение для числа всех элементов $\rho\{D_1\}_N$, имеющих n_1 точек, имеет вид

$$\rho\{D_1\}_N = \prod_{i=2}^N n_i^2 = \prod_{i=2}^N n_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N n_j = k'_1 \rho\{L_1\}_N. \quad (6)$$

Далее, разделим каждый столбец первой таблицы на n_2 . Получим n_1 таблиц с n_2 точками (ферритами) в каждой строке. Выражение для числа элементов, имеющих по n_2 точек, согласно методу «кручения» для всех n_1 таблиц имеет вид

$$\rho\{D_2\}_N = n_1 \prod_{i=3}^N n_i^2 = \prod_{i=3}^N n_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N n_j = k'_2 \rho\{L_2\}_N. \quad (7)$$

Действуя аналогичным образом, получим, что число элементов, имеющих по n_j точек,

$$\rho\{D_j\}_N = \prod_{i=1}^{j-1} n_i \prod_{\substack{j=N+1 \\ j \neq i}}^N n_j^2 = \prod_{i=j+1}^N n_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N n_j = k'_j \rho\{L_j\}_N. \quad (8)$$

Продолжая аналогичное деление, получим для элементов с n_{N-1} и n_N точками

$$\rho\{D_{N-1}\}_N = \prod_{i=1}^{N-2} n_i \prod_{\substack{j=N \\ j \neq i}}^N n_j^2 = n_N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq N-1}}^N n_j = k'_{N-1} \rho\{L_{N-1}\}_N, \quad (9)$$

$$\rho\{D_N\} = \prod_{i=1}^{N-1} n_i \cdot 1 = 1 \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq N}}^N n_j = k'_N \rho\{L_N\}_N.$$

Если для общности положить $\prod_{i=N+1}^N n_i = 1$, то нетрудно видеть,

что

$$k'_1 = \prod_{i=2}^N n_i; \quad k'_2 = \prod_{i=3}^N n_i; \dots; \quad k'_j = \prod_{i=j+1}^N n_i; \dots; \quad k'_{N-1} = n_N; \quad k'_N = 1 \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \rho\{L_1\}_N &= \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq 1}}^N n_\gamma; \quad \rho\{L_2\}_N = \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq 2}}^N n_\gamma; \dots; \quad \rho\{L_j\}_N = \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq j}}^N n_\gamma; \dots; \\ \rho\{L_{N-L}\}_N &= \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq N-1}}^N n_\gamma; \quad \rho\{L_N\}_N = \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq N}}^N n_\gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнивая полученные выражения с выражениями, данными в формулировке теоремы, легко видеть, что теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим случай $N = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$. По нашим формулам получим $k'_1 = 15$, $\rho\{L_1\}_3 = 15$; $k'_2 = 5$, $\rho\{L_2\}_3 = 10$; $k'_3 = 1$, $\rho\{L_3\}_3 = 6$ и $\rho_{\max}\{D\}_3 = 15 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 6 = 281$, т. е. в прямоугольнике может быть выполнен 281 элемент, удовлетворяющий условиям 1) и 2).

Рассмотрим несколько следствий, вытекающих непосредственно из доказательства теоремы.

Следствие 1. В $\rho_{\max}\{D\}_N$ не войдет ни один элемент, имеющий число точек, отличное от n_i для всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Следствие 2. Величины

$$k_{i_{\max}} = k'_i \quad (\text{для всех } i = 1, 2, \dots, N), \quad (12)$$

где $k_{i_{\max}}$ — наибольшее число прошивок, обладающих элементами с n_i ферритами (точками) в каждом.

Следствие 3. Все $k_{i_{\max}}$ прошивок, элементы которых обладают n_i точками, имеют одно и то же число элементов $\rho\{L_i\}_N$.

Следствие 4. Наибольшее число координат, которое может быть выполнено в N -мерном прямоугольнике с заданными n_i ($i = 1, 2, \dots, N$),

$$K_{\max} = \sum_{i=1}^N k'_i, \quad (13)$$

где $k'_i = \prod_{l=i+1}^N n_l$ — наибольшее число прошивок, которое может быть выполнено в прямоугольнике с элементами, имеющими n_l точек (ферритов), удовлетворяющих условиям 1) и 2). В формуле для K_{\max}

будем так же, как и раньше, считать, что $k'_N = \prod_{i=N+1}^N n_i = 1$. Интересно отметить, что для равных n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) K_{\max} в зависимости от n представляет из себя сумму степеней n от n^{N-1} до 1.

Замечание. Если несколько величин n_i прямоугольника равны между собой ($n_i = n_{i+1} = \dots = n_{i+a}$), то наибольшее число прошивок, удовлетворяющих условиям 1) и 2), с элементами, содержащими n_i точек,

$$k_i = \sum_{\gamma=i}^{i+a} k_\gamma. \quad (14)$$

Следствие 5. Для однозначной дешифрации каждого сердечника матрицы величины \tilde{k}_j могут лежать в пределах

$$0 \leq \tilde{k}_j \leq k_j \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (15)$$

Необходимо лишь, чтобы общее число прошивок K для получения однозначной дешифрации каждой точки (феррита) лежало в пределах

$$N \leq K \leq K_{\max}. \quad (16)$$

Следует заметить, что совершенно неважно, какие из K_{\max} прошивок для однозначной дешифрации будут выбраны, необходимо лишь, чтобы их было не менее N .

В частности, если $k_j \geq N$, то в качестве дешифрующих прошивок могут быть взяты \tilde{k}_j ($N \leq \tilde{k}_j \leq k_j$) прошивок, имеющих длину элемента n_j , необходимо лишь, чтобы $n_j^{\tilde{k}_j} > \prod_{i=1}^N n_i$.

Для однозначной дешифрации заданного сердечника в N -мерном прямоугольнике достаточно подать ток I^0/N в

$$\rho \{L_j\}_N^{\gamma} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \gamma \\ i \neq j}}^N n_i \quad (17)$$

$$(\gamma = 1, 2, \dots, N; j = (\gamma + \alpha)_{\text{mod } N}; \alpha = \text{const}, 1 \leq \alpha \leq N)$$

элементов каждой j -ой прошивки, где γ — ось отсчета γ -ой координаты (наибольшая величина координаты n_γ), j — ось направления j -ой прошивки (число точек в каждом элементе n_j), α — константа данного N -мерного прямоугольника. При этом элементы $\rho \{L_j\}_N^{\gamma}$ образуют гиперплоскость, определяемую координатой γ и проходящую через выбранную (дешифруемую) точку (сердечник).

В этом случае для неизбранных сердечников ток помехи будет лежать в пределах

$$I^0/N \leq i_p \leq (N - 1) I^0/N. \quad (18)$$

Дадим распределение сердечников прямоугольника по кратности совпадения действующего в них тока I^0/N . При дешифрации заданного сердечника в N -мерном прямоугольнике с произвольными измерениями n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) будем иметь

$$G_h = \sum_{\alpha=1}^{C_N^{N-h}} Q_\alpha^h \quad (19)$$

ферритовых сердечников с h -кратным совпадением тока I^0/N , т. е. ток $i_p = hI^0/N$, где $Q_\alpha^h = \prod_{i=1}^{N-h} (n_{\alpha_i} - 1)$ — различные функции, опреде-

ляемые всеми возможными C_N^{N-h} наборами величины n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) α_i — номер измерения при $1 \leq \alpha_i \leq N$.

Отметим, что для функций G_h справедливо соотношение

$$\sum_{h=0}^N G_h = \prod_{i=1}^N n_i. \quad (20)$$

В частности, для N -мерного куба (все координаты равны n):

$$G_h = C_N^{N-h} (n-1)^{N-h} \quad (21)$$

сердечников имеет ток $i_p = h I^0/N$ и

$$\sum_{h=0}^N C_N^{N-h} (n-1)^{N-h} = n^N. \quad (22)$$

Рассмотренное распределение токов в N -мерном прямоугольнике при дешифрации избранного сердечника является неудовлетворительным с точки зрения построения запоминающих устройств с наименьшей помехой. Рассмотрим, что дает возможность увеличения числа прошивок в прямоугольнике до величины $K > N$.

Из теоремы следует, что для уменьшения помехи i_p необходимо подать ток I^0/K_{\max} не в N , а в K_{\max} различных гиперплоскостей K_{\max} -мерного пространства, проходящих через выбранный сердечник. Каждая из гиперплоскостей нового пространства неполна и имеет число элементов, совпадающее с числом элементов гиперплоскостей «старого» N -мерного пространства. При этом прошивка j в новом пространстве, согласно теореме, повторяется k_j раз, а ток i_p лежит в

$$I^0/K_{\max} \leq i_p \leq (N-1) I^0/K_{\max}. \quad (23)$$

Практически K_{\max} весьма велико. Поэтому более удобным является выбор размерности нового пространства K промежуточным и лежащим в пределах $N < K < K_{\max}$. В этом случае наибольший ток i_p будет лежать в пределах

$$(N-1) I^0/N < i_p < (N-1) I^0/K_{\max}. \quad (24)$$

Следует заметить, что, как и в работе [1], при 1) $N = \text{const}$, $n \rightarrow \infty$, 2) $N \rightarrow \infty$, $n = \text{const}$, 3) $N \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ ток $i_p \rightarrow 0$, с помощью чего можно добиться сколь угодно малой помехи считывания за счет увеличения величин n и N путем выбора соответствующего K .

Следствие 6. Как и в случае равных n , для случая n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) можно указать ряд эквивалентных способов прошивания N -мерного прямоугольника. Все способы могут быть получены путем всевозможных перестановок, определяемых порядком нумерации ферритов прямоугольника.

Следствие 7. Все K_{\max} прошивок прямоугольника могут быть практически легко получены методом «кручения», использованным при доказательстве основной теоремы.

Как уже отмечалось в работе [1], введение в N -мерный прямоугольник дополнительных прошивок эквивалентно переходу от N -мерного к некоторому K -мерному пространству ($N \leq K \leq K_{\max}$), в котором

занято (ферритами) $\prod_{i=1}^N n_i$ координатных точек. Остальные точки

нового K -мерного пространства являются пустыми, причем пустыми являются те точки, кратность совпадения в которых (ток помехи) была бы больше $(N-1) I^0/K$. Это и обеспечивает возможность получения достаточно малых сигналов помехи. Ясно, что в этом случае в K -мерном пространстве мы будем иметь $K - N$ избыточных координат. Можно ввести и величину Q , равную отношению объема координатных точек «нового» пространства K к «старому» пространству N измерений, занятых ферритовыми сердечниками:

$$\tilde{Q}_{K-N} = \prod_{j=1}^K n_j / \prod_{i=1}^N n_i. \quad (25)$$

Рассмотрим случай, когда все координатные точки «нового» прямоугольника заняты ферритовыми сердечниками с прямоугольной петлей гистерезиса. В этом случае весь «новый» прямоугольник может быть разделен на $K - N$ отдельных N -мерных прямоугольников, каждый из которых имеет K прошивок. В этом случае в зависимости от заданных координат может быть включен лишь тот из $K - N$ прямоугольников, в котором наибольшая помеха не превышает $(N - 1) I^0 / K$. В этом случае все N -мерные прямоугольники с большей помехой должны быть отключены для заданных координат. При других значениях координат может работать другой N -мерный прямоугольник. Остальные $K - N - 1$ прямоугольники должны быть, как и раньше, отключены.

В случае необходимости построения m -разрядного запоминающего устройства достаточно взять не один, а m описанных запоминающих N -мерных прямоугольников.

На основе настоящей работы на том же принципе могут быть построены многомерные дешифраторы для запоминающих устройств и других узлов цифровых вычислительных и управляемых машин.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 1020 (1966).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 октября 1966 г

TO THE CONSTRUCTION OF A MULTIDIMENSIONAL STORAGE OR A DECODER WITH A REDUCED LEVEL OF NOISE

M. Ja. Eyngorin

This paper is concerned with the construction of N -dimensional storage or decoder with a reduced level of noise due to the increased number of coordinates. The theorem on the largest number of independent coordinates that could be introduced is stated and proved.

Some consequences of the main theorem are considered and the discussion of the results is provided.

УДК 62 — 507

О СТРУКТУРЕ ГРАФА ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СЕТИ

М. Д. Брейдо

В статье рассматриваются возможные поведения линейной автономной сети с вырожденной характеристической матрицей. Показано, что в общем случае граф состояний такой сети представляет собой множество попарно изоморфных деревьев, отвечающих от каждой вершины простых циклов, где каждое дерево однозначно определяется набором дефектов последовательных степеней характеристической матрицы.

Автономной линейной сетью будем называть конечный автомат, описываемый линейным векторным уравнением

$$\mathbf{s}(n+1) = A \mathbf{s}(n) \mid \text{mod } p, \quad (1)$$

где $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, m$) — квадратная матрица порядка m , элементы которой определены над полем F по модулю p . Вектор $\mathbf{s}(n)$ с компонентами $s_i(n) \in F$ ($i = 1, m$) называется состоянием сети в момент времени n . Он может быть представлен как вектор-столбец матрицы с элементами $s_i(n)$, расположенными в i -ой строке.

Сеть переходит из одного состояния в другое в дискретные интервалы времени, называемые тактами. Если в момент n сеть находится в состоянии $\mathbf{s}(n)$, то ее состояние $\mathbf{s}(n+1)$ через один такт определяется соотношением (1), где все операции производятся в поле F по модулю p . Состояние линейной автономной сети через k тактов однозначно определяется структурой матрицы A и начальным состоянием $\mathbf{s}(n)$ по формуле $\mathbf{s}(n+k) = A^k \mathbf{s}(n)$. Состояние $\mathbf{s}(n)$ называется равновесием, если $\mathbf{s}(n+1) = \mathbf{s}(n) \mid \text{mod } p$. В частности, равновесное состояние $\mathbf{0}(0, \dots, 0)$ называется нулевым состоянием. Так как каждая компонента вектора состояния принимает целочисленные значения по $\text{mod } p$, то число различных состояний сети есть p^m и, следовательно, конечно.

Изучению автономных линейных переключательных схем посвящен ряд работ [1—10]. Наиболее полно исследованы автономные невырожденные сети с применением матричных методов анализа [1—4]. Для них получены алгоритмы определения числа и периодов циклов в графе состояний фиксированной сети, а также частично решена задача синтеза, позволяя находить логическую структуру сети, реализующей заданное множество циклов. В [5, 6] рассмотрены линейные сети с вырожденной и нильпотентной характеристическими матрицами. Для случая вырожденной матрицы в [5] приведен алгоритм определения периода установившегося цикла. Свойства сети с нильпотентной матрицей [6] описаны в терминах структуры их графов. Получены формулы для построения характеристической матрицы таких сетей.

Изучение линейных переключательных схем с точки зрения линейных фильтров было начато работами Хаффмана [7, 8] и основано на применении математического аппарата алгебры многочленов. Существенное развитие эти идеи получили в работах [9, 10], где для анализа линейных сетей использованы методы дискретного преобразования

Лапласа—Галуа. Цель настоящей работы—изучение возможных структур деревьев графов состояний автономных линейных сетей с вырожденной характеристической матрицей и методов их однозначного определения. Математическим аппаратом такого изучения является теория групп.

Хорошо известно [11, 12], что множество S_m всех m -мерных векторов состояния, имеющих компонентами элементы поля F при определении операции сложения векторов, как покоординатного сложения, является конечной аддитивной абелевой группой, т. е. из условия $s_1, s_2 \in S_m$ следует, что $s_1 * s_2 \in S_m$, $s_2 * s_1 \in S_m$ и выполняются другие аксиомы группы*. Для удобства в дальнейшем элементы группы S_m будем обозначать через s_i ($i = 1, p^m$). Множество последующих состояний $\{s(n+k)\} = \{A^k s(n)\}$ для каждого фиксированного k образует конечную подгруппу H_k в S_m , так как если $s_1 * s_2 = s \in S_m$, то из $A^k s_1, A^k s_2 \in H_k$ следует, что $A^k s_1 * A^k s_2 = A^k(s_1 * s_2) \in H_k$. Отображение $S_m \rightarrow H_k$, определяемое формулой $\varphi_k(s) = A^k s$, является эндоморфизмом, так как $s_1 * s_2 \rightarrow A^k(s_1 * s_2) = A^k s_1 * A^k s_2$. По теореме о гомоморфизмах [13] множество T_k элементов группы S_m , отображенных на единицу группы H_k , является нормальным делителем в S_m , т. е. в инвариантную подгруппу T_k входят состояния сети, переходящие в нулевое состояние не более, чем за k тактов, и удовлетворяющие соотношению

$$A^k s = 0 \pmod{p}. \quad (2)$$

Причем два элемента из S_m имеют один и тот же образ в H_k тогда и только тогда, когда они лежат в одном смежном классе $T_k s_i$ по T_k (s_i — образующая смежного класса). Смежные классы $T_k, T_k s_2, \dots, T_k s_{r_k}$ не пересекаются и исчерпывают всю группу S_m , т. е.

$$S_m = T_k \cup T_k s_2 \cup \dots \cup T_k s_{r_k}.$$

Таким образом, состояния сети, входящие в один смежный класс, переходят не более чем через k тактов в одно и то же состояние. Состояниям, входящим в разные смежные классы $T_k s_i$, соответствуют различные последующие состояния.

Смежные классы $T_k s_i$ имеют одинаковое число состояний (равно-мощны) с подгруппой T_k . Порядок подгруппы T_k и число смежных классов r_k (порядок подгруппы H_k) являются делителями порядка группы S_m , равного p^m . Уравнению (2) удовлетворяют состояния, расположенные на первых k уровнях дерева с нулевым состоянием в корне. Порядок T_k при этом есть сумма чисел состояний N_i на всех этих уровнях. Условно будем считать, что нулевое состояние расположено на нулевом уровне, т. е. $N_0 = 1$.

С другой стороны, рассматривая A^k как матрицу линейного преобразования φ_k линейного векторного пространства S_m , заметим, что уравнению (2) удовлетворяет совокупность всех векторов $s(n)$, входящих в ядро преобразования размерности $d(A^k)$ (дефект линейного преобразования φ_k). Так как любой набор базисных векторов линейного подпространства можно рассматривать как строки некоторой матрицы, то вектор принадлежит ядру преобразования тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией строк этой матрицы. Размерность нашего подпространства равна $d(A^k)$. Поэтому число строк базисной матрицы (равное ее рангу, потому что строки матрицы должны быть линейно независимы) равно $d(A^k)$. Если бы какие-либо две линейные комбинации были равны, то существовало бы соотношение зависи-

* Здесь и в дальнейшем знаком * будем обозначать сумму по \pmod{p} .

ности между строками матрицы. Следовательно, различные комбинации дают различные векторы, и так как имеется $d(A^k)$ коэффициентов с r возможными значениями для каждого, то ядро преобразования Φ_k содержит всего $p^{d(A^k)}$ векторов состояний. Таким образом, порядок T_k равен $p^{d(A^k)}$ и равен числу элементов в каждом смежном классе $T_k s_i$. Отсюда

$$r_k = p^{m-d(A^k)}, \quad \sum_{i=0}^k N_i = p^{d(A^k)}. \quad (3)$$

Суммируя все сказанное, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Множество состояний S_m линейной последовательностной сети разбивается на ряд непересекающихся подмножеств $T_k s_i(n)$ мощности $p^{d(A^k)}$ каждого, таких, что если

$$s_1(n), s_2(n) \in T_k s_i(n), \text{ то } A^k s_1(n) = A^k s_2(n).$$

Если же $s_1(n) \in T_k s_i(n)$, $s_2(n) \in T_k s_k(n)$, причем $T_k s_i(n) \neq T_k s_k(n)$, то $A^k s_1(n) \neq A^k s_2(n)$.

На основании этой теоремы из условия равнomoщности смежных классов с подгруппой T_k получаем следующие следствия.

Следствие 1. Число состояний N_{k+1} на $(k+1)$ -ом уровне дерева с нулевым корнем кратно сумме чисел состояний на k предшествующих уровнях, т. е.

$$N_{k+1} = b_k \sum_{i=0}^k N_i = b_k p^{d(A^k)} \quad (k=0,1,2,\dots; b_k = \overline{0, r_k - 1}), \quad (4)$$

где b_k — число смежных классов $T_k s_i$, состояния которых переходят в нулевое состояние за $k+1$ тактов, определяется из условия

$$\sum_{i=0}^{k+1} N_i = p^{d(A^{k+1})}. \text{ С учетом (4) имеем}$$

$$b_k + 1 = p^{d(A^{k+1}) - d(A^k)}, \quad (5)$$

откуда

$$N_{k+1} = p^{d(A^{k+1})} - p^{d(A^k)}. \quad (6)$$

Условно считаем, что $d(A^0) = 0$. Из (5) следует, что $r_{1,k} = \prod_{l=1}^{k-1} (b_l + 1) = p^{d(A^k) - d(A)}$, а согласно (3) имеем

$$\sum_{i=0}^k N_i = r_{1,k} p^{d(A)}. \quad (7)$$

Здесь $r_{1,k}$ — число смежных классов $T_1 s_i$, расположенных на первых k уровнях дерева с нулевым корнем. Минимальное значение k , при котором $b_k = 0$, т. е. $d(A^{k+1}) = d(A^k)$, назовем высотой дерева и обозначим через h .

Следствие 2. Число состояний l_k , переходящих в заданное состояние s_j не более, чем за k тактов, либо равно нулю, если $s_j \notin H_k$, либо постоянно, независимо от состояния, если $s_j \in H_k$, и равно числу состояний, переходящих в нулевое состояние за k тактов, т. е.

$$l_k = \sum_{i=0}^k N_i = p^{d(A^k)}.$$

Теорема 2. Для любого фиксированного k существует некоторое число a_k , состояний s_j линейной последовательности сети, входящих

в инвариантную подгруппу T_k и удовлетворяющих условию

$$s_j = A^k s_i,$$

где $s_i \in T_k s_i$. При этом каждый смежный класс $T_k s_i$ либо содержит то же самое число a_k состояний данного типа, либо не содержит ни одного.

Доказательство. Пересечение подгруппы H_k и инвариантной подгруппы T_k есть нормальный делитель в H_k . Обозначив $H_k \cap T_k$ через D_k , можно написать

$$H_k = D_k \cup D_k s_2 \cup \dots \cup D_k s_{n_k}, \quad (8)$$

где n_k делит r_k . Очевидно, что множество D_k непусто и $1 \leq a_k \leq p^{d(A^k)}$. С другой стороны, согласно теореме 1, H_k и T_k — подгруппы, допустимые относительно оператора A^k на S_m . Тогда по теореме о допустимых подгруппах [2] соответствие

$$D_k s_i \rightarrow T_k s_i \quad (9)$$

есть операторный изоморфизм.

Из соотношений (8) и (9) следует утверждение теоремы.

Обозначив порядок D_k через a_k , нетрудно видеть, что $a_1 = b_1 + 1$ и $a_h = 1$, т. е. при $k = h$ все смежные классы $T_h s_i$ содержат по одному последующему состоянию $s(n+k)$.

Из теорем 1, 2 и следствия 2 можно сделать следующий вывод.

С точностью до изоморфизма дерево с нулевым корнем однозначно определяется заданием множества $\{d(A^i)\}$ ($i = 0, h$).

Следствие 3. Если h — наименьшее неотрицательное целое число, такое, что $d(A^{h+1}) = d(A^h)$, то $d(A^{h+j}) = d(A^h)$ для любых целых неотрицательных j .

Доказательство. Условию $d(A^{h+1}) = d(A^h)$ соответствует дерево состояний с нулевым корнем высоты h , все состояния которого входят в инвариантную подгруппу T_h . При этом $b_h = 0$, $N_{h+1} = 0$. Но тогда $N_{h+j} = 0$ для $j = 1, 2, \dots$. Следовательно, $b_{h+j} = 0$ и $d(A^{h+j}) = d(A^h)$, т. е. ранг любой степени матрицы A выше h равен рангу матрицы A^h . Очевидно, что $b_{h-j} > 0$ для $j = 1, h-1$, ибо в противном случае имеем $d(A^{h-i+1}) = d(A^{h-i})$ при $h-i < h$, а это противоречит условию, что h — наименьшее число, удовлетворяющее соотношению вида $d(A^{k+1}) = d(A^k)$.

Теорема 3. Граф состояний линейной автономной последовательностной сети представляет собой:

1) множество непересекающихся простых циклов, если матрица A невырождена,

2) одно дерево с нулевым корнем, если матрица A нильпотентна,

3) множество изоморфных между собой деревьев, ответвляющихся от каждой вершины простых циклов, если матрица A вырождена.

Доказательство. Построим подгруппы T_k , H_k , D_k для $k = 1, 2, \dots$. Ввиду конечности группы S_m при некотором $k = h$ подгруппа D_h содержит только нулевое состояние. Тогда по теореме 1 отображение $\varphi_h(s)$, определенное на подгруппе H_h , есть автоморфизм, т. е. каждому элементу из H_h взаимно однозначно соответствует один элемент из образа автоморфизма. Так как H_h — конечная подгруппа, то все ее ненулевые элементы образуют простые циклы или являются состояниями равновесия. Нулевой элемент в линейных сетях всегда является состоянием равновесия. Из теорем 1 и 2, применяя их последовательно для $k = 1, h$, следует, что к каждой вершине простых циклов и к состояниям равно-

весия сходятся идентичные между собой деревья высоты h . Каждое дерево содержит все состояния, входящие в смежный класс $T_h s_i$, соответствующий данной вершине цикла или состоянию равновесия, как последующему состоянию $s(n+h)$. Элементы H_h , являющиеся состояниями равновесия, по определению образуют циклы единичной длины или корни деревьев. Поэтому число R компонент связности графа состояний, представляющих изолированные деревья, определяется дефектом линейного преобразования $A - E$ и равно

$$R = p^{d(A-E)}. \quad (10)$$

Рассмотрим два возможных предельных случая.

Первый предельный случай. Подгруппа H_h есть единичная подгруппа (состоит из одного нулевого элемента). При этом T_h содержит все состояния сети, т. е. $d(A^h) = m$, что означает nilпотентность матрицы A . Граф такой сети состоит из одного дерева высоты h с нулевым состоянием в корне [3]. Представляя nilпотентную характеристическую матрицу A в канонической форме [14], т. е.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & \dots & \\ 0 & & & A_m \end{pmatrix},$$

где

$$A_i = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

и обозначая через e наибольший из порядков подматриц A_i , а через n_i — число подматриц A_i порядка i , можно записать

$$n_i = \begin{cases} n_i & (i \leq e) \\ 0 & (i > e) \end{cases}.$$

Тогда нетрудно показать, что

$$d(A^k) = \sum_{i=0}^{k-1} i n_i + k \sum_{i=k}^{\infty} n_i, \quad (11)$$

откуда следует $d(A^e) = d(A^{e+1})$, т. е. высота дерева nilpotentной сети $h = e$.

Рассматривая первые e соотношений (11), можно записать их в векторной форме

$$\mathbf{d} = B\mathbf{n}, \quad (12)$$

где \mathbf{d} — вектор с компонентами $(d(A), d(A^2), \dots, d(A^e))$, вектор \mathbf{n} имеет компоненты (n_1, n_2, \dots, n_e) и B — матрица следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & e \end{pmatrix}.$$

По заданному вектору d , используя соотношение (12), можно вычислить компоненты n , т. е. построить характеристическую матрицу сети. Эти результаты совпадают с результатами [6], где они получены несколько иным способом.

Второй предельный случай. Подгруппа H_h совпадает со всей группой S_m . Этот случай возможен лишь при условии, что порядок T_h равен единице или, согласно следствию 3, $d(A^h + I) = 0$ для любого $j \geq 0$. Так как ранг произведения матриц не выше ранга каждого из сомножителей, т. е. $d(A^h - I) \leq d(A^h)$ для $j=1, h-1$, то $d(A^k) = 0$ для любого целого k . В частности, $d(A) = 0$, т. е. рассматриваемый случай соответствует невырожденной матрице линейного преобразования. При этом все смежные классы $T_1 s_i$ порядка $p^{d(A)} = 1$ содержат по одному последующему состоянию. Отображение $\varphi_1(s)$, определенное на всей группе S_m , есть автоморфизм. Следовательно, компоненты связности графа состояний невырожденной сети являются простыми циклами без деревьев. Инвариантной подгруппе T_1 соответствует цикл единичной длины. Нетрудно видеть, что верно и обратное утверждение, т. е. если граф состояний некоторой линейной автономной сети состоит только из простых циклов без деревьев, то сеть описывается невырожденным оператором A . Подробно теория линейных невырожденных автономных сетей рассмотрена в работе [2].

Пример. Пусть задана сеть с характеристической матрицей A , все элементы которой определены над полем F по модулю $p = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями (учитывая, что все операции производятся по $\text{mod } 2$) нетрудно найти, что $d(A) = 1$, $d(A^2) = 1$, $d(A - E) = 2$. Тогда, согласно следствию 1, имеем $h = 1$, а по теореме 3 $R = 4$. Следовательно, граф состояний данной сети содержит 4 дерева единичной высоты, каждое из которых состоит из двух состояний — корня дерева и одного состояния на уровне N_1 . Оставшиеся 8 состояний образуют циклы, к каждой из которых подходит одно состояние. Полный граф состояний изучаемой сети представлен на рис. 1, где T_1 — инвари-

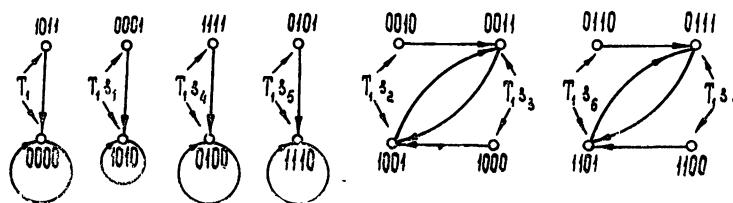


Рис. 1.

антная подгруппа, состоящая из двух состояний (0000 и 1011), удовлетворяющих условию $As(n) = 0 \text{ mod } 2$, а $T_1 s_i (i = 1, 7)$ — состояния, входящие в смежные классы по этой подгруппе с образующими s_i (i — десятичный эквивалент двоичного кода).

Изложенный метод рассмотрения структуры графов вырожденных линейных автономных сетей требует вычисления дефектов последова-

тельных степеней матриц линейного преобразования, описывающих данные сети. Вычисления производятся до выполнения условия $d(A^{h+1}) = d(A^h)$, означающего, что высота всех деревьев в графе равна h . Согласно доказанным теоремам, последовательность $d(A)$, $d(A^2), \dots, d(A^h)$ однозначно определяет множество $\{N_i\}$ чисел состояний на всех уровнях деревьев. Корни деревьев могут образовывать простые циклы, для выявления которых строится нормальный делитель T_h и смежные классы по нему. Отображение φ_h при этом определяет состояния сети, входящие в циклы.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. И. Неймарку, под руководством которого выполнена работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Питерсон, Коды, исправляющие ошибки, изд. Мир, М., 1964
2. В. Elspas, IRE Trans. Circuit Theory, CT—6, № 1, 45 (1959).
3. R. H. Crowell, J. Soc. Indust Appl. Math., 10, № 1, 103 (1962).
4. T. L. Booth, Proc. of the Symp. on Math. Theory of Automata, 12, Polytechnic Press., Brooklyn, N.Y., 1963
5. B. Friedland, IRE Trans. Circuit Theory, CT—6, 61 (1959).
6. A. Gill, J. Assoc Comput. Mach., 12, № 1, 141 (1965).
7. D. A. Huffman, IRE Trans. Inform. Theory, IT—2, № 3, 20 (1956).
8. Д. А. Хаффмен, Теория передачи сообщений, ИЛ, М., 1957.
9. Р. Г. Фараджев, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 93 (1965).
10. Я. З. Цыпкин, Р. Г. Фараджев, ДАН СССР, 166, № 3, 570 (1966).
11. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, изд. Наука, М., 1965
12. К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.
13. М. Холл, Теория групп, ИЛ, М., 1962.
14. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию 15 июля 1966 г.

ON THE STRUCTURE OF A GRAPH FOR THE LINEAR NON-INTERACTING CIRCUIT

M. D. Bryedo

The possible behaviour of the linear non-interacting circuit with a degenerate characteristic matrix is considered in this paper. It is shown that the state diagram graph for this circuit in general case is a set of dually isomorphic trees.

УДК 681.142.6

О ПЕРЕКЛЮЧЕНИИ ТРАНЗИСТОРНОЙ СХЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ФЕРРИТОВЫЕ СЕРДЕЧНИКИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

И. А. Камышев, А. А. Рыбаков

Исследуется переходный процесс в схеме, содержащей транзистор и сердечники с ППГ, методом, позволяющим учесть как динамику переключения триода, так и динамику перемагничивания сердечника. Приводятся результаты расчета конкретной схемы, которые сравниваются с экспериментальными данными.

В настоящее время в устройствах автоматики и вычислительной техники нашли широкое применение схемы, содержащие ферромагнитные элементы с прямоугольной петлей гистерезиса (ППГ), переключаемые транзисторами. Определение переходного процесса в схемах такого типа аналитически представляет значительную сложность. Существующие методы описания процесса переключения полупроводникового триода предполагают решение системы нелинейных дифференциальных уравнений. Учет нелинейности нагрузки (ферромагнитного элемента с ППГ) еще в большей степени усложняет задачу. Процесс переключения ферритового сердечника с ППГ описывается, согласно [1], уравнением

$$\frac{dB}{dt} = r_m \left(1 - \frac{B^2}{B_s^2} \right) [H(t) - H_0] \quad (H(t) > H_0), \quad (1)$$

где B — индукция в сердечнике (*стл*), $H(t)$ — напряженность действующего внешнего поля ($\text{a} \cdot \text{см}^{-1}$), r_m — максимум приведенного динамического сопротивления сердечника ($\text{ом} \cdot \text{см}^{-1}$), H_0 — поле старта ($\text{a} \cdot \text{см}^{-1}$), B_s — индукция насыщения сердечника (*стл*).

Переключение полупроводникового триода описывается методом заряда. «Зарядовая» эквивалентная схема позволяет рассматривать работу транзистора в области отсечки, в активной области и в области насыщения.

Исследуем процессы переключения в схеме, изображенной на рис. 1. Представим триод в виде зарядовой эквивалентной схемы; а ферритовые сердечники — как параллельное соединение генератора тока I_0 , нелинейного сопротивления переключаемых сердечников $\times R(B)$ и сопротивления нагрузки R_h :

$$I_0 = H_0 v, \quad r(B) = r_m \left(1 - \frac{B^2}{B_s^2} \right), \quad (2)$$

$$\times R(B) = \frac{r(B) S \times}{v} \quad (I(t) > I_0), \quad R(B) = 0 \quad (I(t) \leq I_0),$$

где S — площадь поперечного сечения сердечника (см^2), v — длина

средней линии сердечника (*см*), *x* — число переключаемых сердечников.

Считаем, что число витков первичной и вторичной обмоток одинаково и равно 1. Тогда схема (рис. 1) может быть представлена в виде эквивалентной схемы, изображенной на рис. 2, где пунктиром обведена «зарядовая» эквивалентная схема транзистора. В этой схеме, согласно [2, 6], генераторы U_k и U_α представляют собой напряжения на коллекторном и эмиттерном переходах. Заряд в базе триода можно представить в виде суммы неравновесного заряда дырок Q и избыточного заряда при насыщении q_s . Ток коллектора связан с зарядом неосновных

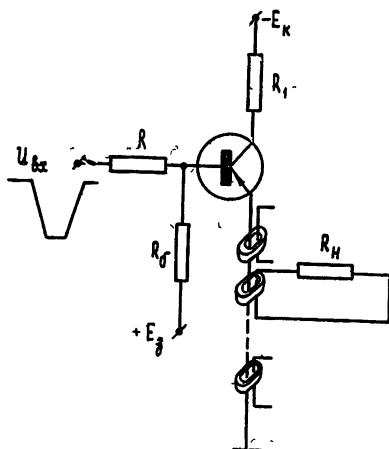


Рис. 1.

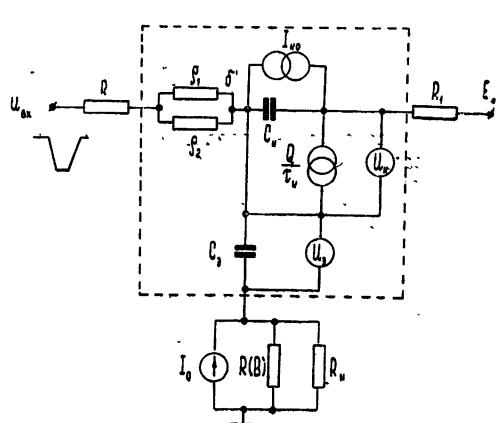


Рис. 2.

носителей в базе соотношением $I_k = Q/\tau_k$, где τ_k — время прохождения базы. Если обозначить: τ — эффективное время жизни неосновных носителей в базе, τ_s — время жизни неосновных носителей в базе в режиме насыщения, то через генератор U_α протекает ток, равный

$$I'_\alpha = \frac{Q}{\tau_k} + \frac{1}{2} \frac{q_s}{\tau_s} + \frac{d(Q+q_s/2)}{dt} + \frac{Q}{\tau}. \quad (3)$$

Через генератор U_k протекает ток, равный

$$I'_k = \frac{1}{2} \frac{q_s}{\tau_s} + \frac{1}{2} \frac{dq_s}{dt}, \quad (4)$$

где I_{k0} — генератор теплового тока коллектора, C_α , C_k — емкости эмиттерного и коллекторного переходов. Базовая проводимость представлена в виде суммы проводимостей, одна из которых ρ_1 постоянна, а другая ρ_2 моделирует увеличение общей проводимости базы при увеличении заряда и может быть записана следующим образом: $\rho_2 = k_t(Q + q_s)$, где k_t — коэффициент пропорциональности. Напряжения U_α и U_k представляют собой разность потенциалов коллекторного и эмиттерного выводов триода и внутренней точки базы δ' . Напряжения U_α и U_k связаны с зарядом в базе следующими соотношениями:

$$Q + \frac{q_s}{2} = \frac{I_{k0}\tau}{1+\beta} \left(\exp \frac{qU_\alpha}{KT} - 1 \right), \quad (5)$$

$$\frac{q_s}{2} = \frac{I_{k0}\tau}{1+\beta} \exp \frac{qU_k}{KT}, \quad (6)$$

где I_{s0} — тепловой ток эмиттера, KT/q — температурный потенциал, β — коэффициент усиления транзистора по току.

Известно, что метод заряда является приближенным методом описания переходного процесса в транзисторе. В частности, соотношение $I_k = Q/\tau_k$ означает, что реальное распределение заряда в базе полагается линейным, кроме того, выполняется принцип подобия, т. е. характер распределения остается постоянным как в статике, так и в динамике. Однако, согласно [3], в большинстве случаев метод заряда дает результаты, хорошо совпадающие с экспериментом, если берутся параметры, измеренные в режиме, при котором работает рассчитываемая транзисторная схема.

Продифференцируем уравнения (5) и (6) по времени. Разрешив полученные после дифференцирования уравнения относительно exh и подставив выражения для exh в уравнения (5) и (6), получим

$$\frac{1}{2} \frac{dq_s}{dt} = \frac{q}{KT} \left(\frac{q_s}{2} \right) \frac{dU_k}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{q}{KT} \left(Q + \frac{q_s}{2} + \frac{I_{s0}\tau}{1+\beta} \right) \frac{dU_s}{dt} - \frac{q}{KT} \frac{q_s}{2} \frac{dU_k}{dt}. \quad (8)$$

На основании законов Кирхгофа, соотношений (2), (7), (8) и уравнения динамического состояния сердечника типа (1) получим систему дифференциальных уравнений, описывающих переходный процесс в схеме рис. 1. Приведя эту систему уравнений к виду, удобному для решения на ЦВМ численным методом, получим следующую систему уравнений:

$$\varphi(B) = \frac{\times R(B)}{1+R(B)/R_h}, \quad (9)$$

$$C_{s\pi} = C_s + \left(Q + \frac{q_s}{2} + \frac{I_{s0}\tau}{1+\beta} \right) \frac{q}{KT}, \quad (10)$$

$$C_{k\pi} = C_k + \frac{q}{KT} \frac{q_s}{2}, \quad (11)$$

$$R_{bx} = R + \frac{1}{\rho_1 + k_t(Q + q_s)}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_s}{dt} &= \varphi(B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{bx}} \right) \left(I_0 - \frac{Q}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{q_s}{\tau_s} - \frac{Q}{\tau_k} \right) \times \\ &\times \left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{bx}} \right) \varphi(B) \right]^{-1} C_{s\pi}^{-1} - \left[\left(\frac{Q}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{q_s}{\tau_s} + \frac{Q}{\tau_k} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{U_{bx} + U_s}{R_{bx}} + \frac{U_k - U_s - E_k}{R_1} \right] \left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{bx}} \right) \varphi(B) \right]^{-1} C_{s\pi}^{-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$I_s = \frac{Q}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{q_s}{\tau_s} + \frac{Q}{\tau_k} + C_{s\pi} \frac{dU_s}{dt}, \quad (14)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\varphi(B)}{Sx} (I_s - I_0), \quad (15)$$

$$e = -S \frac{dB}{dt}, \quad (16)$$

$$\frac{dU_k}{dt} = \left(I_{k0} - \frac{Q}{\tau_k} - \frac{1}{2} \frac{q_s}{\tau_s} + \frac{-U_k + U_3 - ex + E_k}{R_1} \right) C_{kn}^{-1}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dq_s}{dt} = \frac{q}{KT} \left(\frac{q_s}{2} \right) \frac{dU_k}{dt}, \quad (18)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{q}{KT} \left(Q + \frac{q_s}{2} + \frac{I_{s0}\tau}{1+\beta} \right) \frac{dU_3}{dt} - \frac{q}{KT} \frac{q_s}{2} \frac{dU_k}{dt}. \quad (19)$$

Выражения для правой части уравнений (10) и (11) имеют смысл юльных зарядных емкостей эмиттерного и коллекторного переходов.

Расчет переходного процесса по системе уравнений (9)–(19) проводился для схемы (рис. 1), составленной из триода П-605, семнадцати сердечников марки ВТ-7 с размерами $1 \times 0,7 \times 0,35$ мм при $R_1 = 20$ ом, $R = 20$ ом, $R_n = 200$ ом, $E_k = -40$ в.

Параметры, необходимые для описания переходного процесса в транзисторе, измерялись согласно методике, изложенной в работах [3–5]. Для транзистора П-605 были найдены следующие числовые значения параметров: $\tau = 1,25$ мксек, $\tau_s = 1$ мксек, $\tau_k = 0,021$ мксек, $\rho_1 = 0,59 \cdot 10^{-2}$ ом $^{-1}$, $k_t = 11,2$ ом $^{-1} \cdot$ мккул $^{-1}$, $\beta = 60$, $I_{k0} = 2$ ма, $I_{s0} = 1$ ма. В качестве параметров c_k и c_s были взяты средние значения, равные соответственно 100 пФ и 500 пФ. Параметры ферритовых сердечников, согласно [1], равны: $I_0 = 0,6$ а, $B_s = 20$ стл, $B_\mu = 18$ стл.

Задавались амплитуда U_m , длительность по основанию t_n , а также передний и задний фронты сигнала на входе транзистора $t_{\Phi n}$, $t_{\Phi z}$. На рис. 3 представлены результаты решения одного из вариантов при $U_m = -7$ в, $t_{\Phi n} = 0,15$, $t_{\Phi z} = 0$, $t_n = 0,75$ мксек.

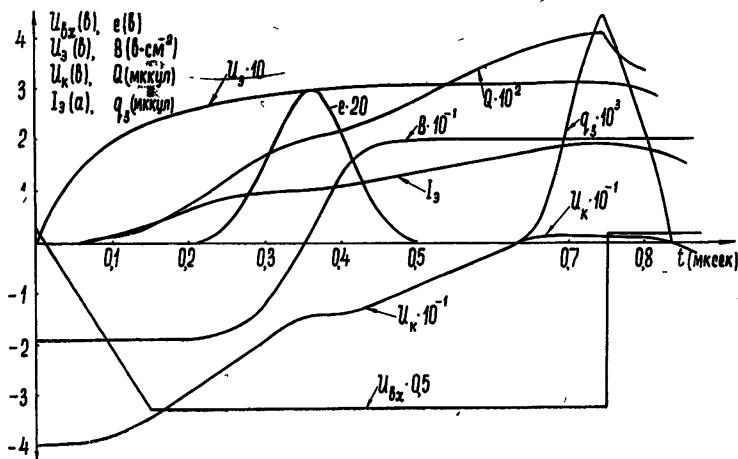


Рис. 3. Результаты расчета переходного процесса в исследуемой схеме.

По кривым $e(t)$ (выходной сигнал с сердечника) и $I_3(t)$ видно, что сердечник переключился во время переднего фронта перемагничивающего тока $I_3(t)$. Заметна реакция схемы в момент переключения сердечников в виде провала на фронте тока $I_3(t)$. Триод вошел в на-

сыщение через 0,6 мкеск после начала процесса, что видно по кривым $q_s(t)$ и $U_k(t)$. Максимум выходного сигнала $e(t)$, равный 107 мв, наблюдался в момент $t = 0,35$ мкеск. Триод вышел из насыщения спустя 0,05 мкеск после выключения входного сигнала.

На рис. 4 приведены результаты, полученные при $t_n = 0,75$ мкеск, $U_m = -5$ в и при различных фронтах входных сигналов. Схема (рис. 1) была собрана и исследована экспериментально. Согласие расчетных и экспериментальных данных показано на рис. 4.

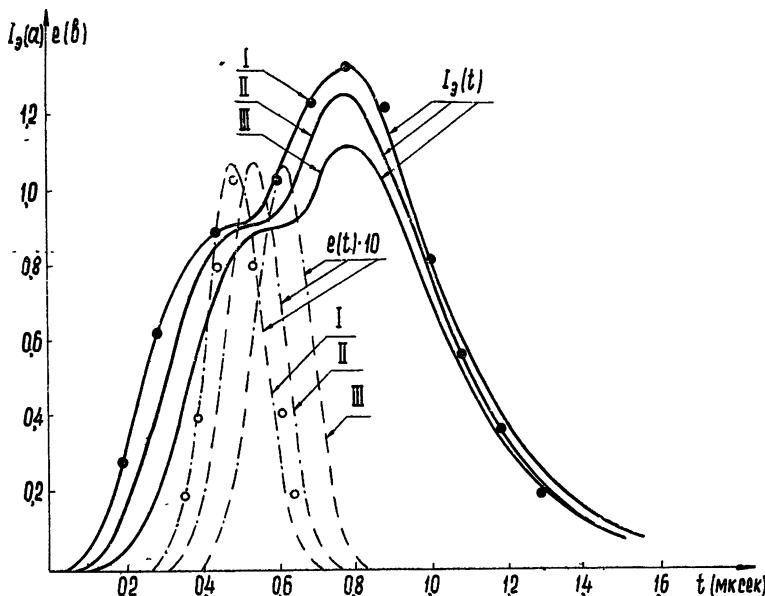


Рис. 4. Зависимости выходных сигналов $e(t)$ и перемагничивающих токов $I_3(t)$ при различных фронтах входного сигнала.

Кривые I: $U_m = -5$ в, $t_{\Phi n} = 0,15$ мкеск,

кривые II: $U_m = -5$ в, $t_{\Phi n} = 0,25$ мкеск,

кривые III: $U_m = -5$ в, $t_{\Phi n} = 0,37$ мкеск.

Точками отмечены экспериментальные данные.

Экспериментальные данные были получены при наблюдении переходного процесса на осциллографе типа С1-8 (УО-1М), обеспечивающим погрешность измерения не более $\pm (3\% + 1 \text{ мм})$ шкалы, отнесенный к измеряемому участку).

Измерение значений $I(t)$ (см. рис. 4) было проведено с погрешностью, не превышающей $\pm \left(3 + \frac{4}{I(t)} \% \right)$. Погрешность измерения $e(t)$ не превышает $\pm \left(3 + \frac{0,18}{e(t)} \% \right)$. Временные интервалы измерены с погрешностью не более $\pm \left(3 + \frac{2}{t} \% \right)$.

Существующие методы расчета схем с сердечниками предполагают известным входное воздействие $H(t)$, которое, вообще говоря, невозможно определить без эксперимента, поскольку реальные генераторы перемагничивающего тока имеют конечную мощность.

Рассмотренный метод позволяет исследовать переходный процесс с учетом реального воздействия $H(t)$. Использование в схемах автоматики и вычислительной техники сердечников малых размеров (с наруж-

ным диаметром $\ll 1$ мм) позволило строить быстродействующие схемы с временами переключения сердечников $t_n < 0,3$ мкsec. Предложенный метод позволяет оценить частотные свойства таких схем (времена задержек, длительности фронтов, времена восстановления схемы). Возможна оценка реальных характеристик выходного сигнала с переключаемого сердечника (разброс амплитуды, длительности и времени задержки), учет которых особенно важен при проектировании запоминающих устройств ЦВМ. Целесообразно использование предложенного метода при анализе вопросов надежности проектируемых схем. В частности, возможно исследование зависимости параметров выходных сигналов от разброса параметров элементов схемы, номиналов питания, входных сигналов, а также от изменения внешних условий и старения. Такое исследование для конкретной схемы может быть проведено без изменения описания переходного процесса и программы вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. И. Пирогов, Ю. М. Шамаев, Магнитные сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса, изд. Энергия, М—Л, 1964.
- 2 R. Beafoy, J. J. Sparkes, Proc. IRE, 45, № 12, 1740 (1957).
- 3 Н. Г. Недолужко, И. Л. Каганов, Сб. статей Полупроводниковые приборы и их применение, под редакцией Я. А. Федотова, изд. Сов. радио, М., вып 13, 1965.
- 4 В. И. Швейкин, Радиотехника и электроника, 6, 999 (1961).
- 5 В. И. Швейкин, Радиотехника и электроника, 5, 1158 (1960).
- 6 J. Cho, IEEE Trans. Electr. Comp., EC—12, № 5, 492 (1963).
- 7 Т. М. Агаханян, Электронные ключи и нелинейные импульсные усилители, изд. Сов. радио, М., 1966.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
4 июля 1966 г.

ON A CHANGE-OVER PROCESS IN THE TRANSISTOR CIRCUIT CONTAINING MAGNETIC CORES WITH A RECTANGULAR HYSTERESIS

I. A. Kamashyev, A. A. Rabakov

The transient process in the circuit containing a transistor and magnetic cores with a rectangular hysteresis is studied using a particular method which allows to consider the dynamics of a change-over in a transistor and the dynamics of a change-over of the magnetic flow in the cores as well. The paper presents also the results of the design for the concrete circuit which are compared with the experimental data.

УДК 518
517.925НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ
ФУНКЦИОНАЛОВ И РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Я. И. Альбер

В работе рассматривается итерационный процесс, являющийся разностной аппроксимацией уравнения дифференциального спуска. Минимизирующая последовательность x_k для функции $u(x) \in C^2(G)$ определяется из системы уравнений в неявном виде. Устанавливается достаточный признак существования минимума x^* функции $u(x)$ и сходимости x_k к x^* при $k \rightarrow \infty$.

Пусть в области G с границей ∂G пространства R^n задана функция $u(x^1, \dots, x^n)$, принадлежащая классу $C^2(G)$, причем

$$\min_{\partial G} u(x) > \min_G u(x) \geq 0, \quad x = (x^1, \dots, x^n). \quad (1)$$

В [1, 2] для функции $u(x)$ изучались условия сходимости траекторий уравнения дифференциального спуска

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{u}{|\operatorname{grad} u|^2} \operatorname{grad} u. \quad (2)$$

к точкам минимума $u(x)$ внутри области G .

В настоящей заметке для итерационного процесса разностной аппроксимации уравнения (2) устанавливаются некоторые теоремы, аналогичные [1, 2].

Введем следующие обозначения:

$$u(x_k) = u(x_k^1, \dots, x_k^n), \quad (3)$$

$$\Delta x_{k+1}^l = x_{k+1}^l - x_k^l, \quad (4)$$

$$u^l(x_{k+1}, x_k) = u(x_{k+1}^1, \dots, x_{k+1}^l, x_k^{l+1}, \dots, x_k^n), \quad (5)$$

$$\Delta u^l(x_{k+1}, x_k) = u^l(x_{k+1}, x_k) - u^{l-1}(x_{k+1}, x_k). \quad (6)$$

Минимизирующая последовательность x_k для функции $u(x)$ при условии (1) определяется из системы уравнений в неявном виде

$$x_{k+1}^i = x_k^i - \Delta t \sum_i \left(\frac{\Delta u^i(x_{k+1}, x_k)}{\Delta x_{k+1}^i} \right)^2 \frac{\Delta u^i(x_{k+1}, x_k)}{\Delta x_{k+1}^i} \quad (7)$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Замечание 1. Если в системе (7) $\Delta x_{k+1}^i = 0$, то соответствующее ему выражение

$$\frac{\Delta u^i(x_{k+1}, x_k)}{\Delta x_{k+1}^i}$$

следует заменить частной производной $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ в точке

$$x = (x_{k+1}^1, \dots, x_{k+1}^{i-1}, x_k^i, \dots, x_k^n).$$

Теорема 1. Если x_{k+1} и x_k являются решениями системы (7), то выполняется равенство

$$u(x_{k+1}) = u(x_k) (1 - \Delta t). \quad (8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{\Delta t} &= \sum_i \frac{\Delta u^i(x_{k+1}, x_k)}{\Delta x_{k+1}^i} \frac{\Delta x_{k+1}^i}{\Delta t} = \\ &= - \sum_i \frac{u(x_k)}{\sum_l \left(\frac{\Delta u^l(x_{k+1}, x_k)}{\Delta x_{k+1}^l} \right)^2} \left(\frac{\Delta u^i(x_{k+1}, x_k)}{\Delta x_{k+1}^i} \right)^2 = -u(x_k), \end{aligned}$$

откуда следует (8).

Применяя последовательно равенство (8) при постоянном Δt , получим

$$u(x_k) = (1 - \Delta t)^k u(x_0). \quad (9a)$$

Теорема 2. Пусть существует последовательность x_k , определенная системой (7), и все x_k лежат в круге K_{ρ, x_0} : $|x - x_0| \leq \rho$, принадлежащем G . Если для любой точки x_k выполняется неравенство

$$c \left(\sum_i \left(\frac{\Delta u^i(x_{k+1}, x_k)}{\Delta x_{k+1}^i} \right)^2 \right)^{\frac{m}{2}} > u(x_k) \quad (10)$$

для $u(x_k) \neq 0$ и, кроме того, $\Delta t < 1$,

$$u(x_0) < x_0^{\rho/2}, \quad \kappa = \left(\frac{1 - (1 - \Delta t)^{\beta}}{2c^{1/m} \Delta t} \right)^{1/\beta}, \quad (11)$$

где $\beta = (m-1)/m$, то функция $u(x)$ имеет минимум $x^* \in K_{\rho/2, x_0}$ и существует предел последовательности x_k , причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*.$$

Скорость сходимости оценивается по формуле

$$|x_k - x^*| \leq \frac{\rho}{2} (1 - \Delta t)^{\beta k}. \quad (12)$$

Доказательство:

$$x_{k+l}^i - x_k^i = - \sum_{s=k}^{k+l-1} \Delta t \frac{u(x_s)}{\sum_l \left(\frac{\Delta u^l(x_{s+1}, x_s)}{\Delta x_{s+1}^l} \right)^2} \frac{\Delta u^i(x_{s+1}, x_s)}{\Delta x_{s+1}^i}, \quad (13)$$

$$|x_{k+l} - x_k| = \sum_{s=k}^{k+l-1} \Delta t \frac{u(x_s)}{\left[\sum_l \left(\frac{\Delta u^l(x_{s+1}, x_s)}{\Delta x_{s+1}^l} \right)^2 \right]^{1/2}} \leq \sum_{s=k}^{k+l-1} \Delta t c^{1/m} (u(x_s))^{1-1/m} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (u(x_0))^{\beta} \Delta t c^{1/m} ((1 - \Delta t)^{\beta k} + \dots + (1 - \Delta t)^{\beta(k+l-1)}) = \\
 &= (u(x_0))^{\beta} \Delta t c^{1/m} (1 - \Delta t)^{\beta k} (1 + (1 - \Delta t)^{\beta} + \dots + (1 - \Delta t)^{\beta(l-1)}) = \\
 &= (u(x_0))^{\beta} \Delta t c^{1/m} (1 - \Delta t)^{\beta k} \frac{1 - (1 - \Delta t)^{\beta l}}{1 - (1 - \Delta t)^{\beta}} = \\
 &= (u(x_0))^{\beta} c^{1/m} \frac{\Delta t}{1 - (1 - \Delta t)^{\beta}} ((1 - \Delta t)^{\beta k} - (1 - \Delta t)^{\beta(k+l)}) \leqslant \\
 &\leqslant \frac{p}{2} ((1 - \Delta t)^{\beta k} - (1 - \Delta t)^{\beta(k+l)}).
 \end{aligned} \tag{14a}$$

Таким образом, последовательность x_k — фундаментальная и существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*.$$

Из равенства (9a) следует, что $u(x^*) = 0$, т. е. x^* — точка минимума для функции $u(x)$. Утверждение (12) получаем, переходя в последнем неравенстве к пределу при $l \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Пусть в (9a) $\Delta t = T/k$, тогда

$$u(x_k) = (1 - T/k)^k u(x_0).$$

Если $k \rightarrow \infty$, то

$$u(x_T) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - T/k)^k u(x_0) = u(x_0) e^{-T}. \tag{96}$$

Аналогично положим в (14a) $\Delta t = t/k$ или $\Delta t = \tau/(k+l)$, тогда получим

$$|x(\tau) - x(t)| \leq c_1 (e^{-\beta t} - e^{-\beta \tau}), \tag{14b}$$

так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{1 - (1 - \Delta t)^{\beta}} \left(\left(1 - \frac{t}{k}\right)^{\beta k} - \left(1 - \frac{\tau}{k+l}\right)^{k+l} \right) = \frac{1}{\beta} (e^{-\beta t} - e^{-\beta \tau}).$$

Оценки (96) и (14b) совпадают с соответствующими оценками в [1, 2].

Для нахождения x_{k+1} при известном x_k можно применить метод последовательных приближений, сходимость которого устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть в круге $K_{p_k}, x_k \in G$ выполнены неравенства

$$c \left(\sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi, x_k)}{\xi^i - x_k^i} \right)^2 \right)^{m/2} \geq u(x_k), \tag{15}$$

$$|u''(x)|_{C^2} \leq M, \quad \Delta t_k \leq \min(\delta_1, \delta_2), \tag{16}$$

$$\delta_1 = \frac{p_k}{c^{1/m} (u(x_k))^{1-1/m}}, \quad \delta_2 = \frac{1}{c^{2/m} (u(x_k))^{1-2/m} M \sqrt{n}}. \tag{17}$$

Тогда метод последовательных приближений для системы (7) сходится.

Доказательство. Обозначим p -ую итерацию x_{k+1} через ξ_p . Тогда

$$|\xi_p - x_k|^2 = (\Delta t_k)^2 \sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2.$$

Отсюда и из (15) следует, что

$$|\xi_p - x_k| = \Delta t \frac{u(x_k)}{\left[\sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2 \right]^{1/2}} \leq \Delta t_k (u(x_k))^{1-1/m} c^{1/m}.$$

Потребуем, чтобы $\Delta t_k \leq \delta_1$, тогда $|\xi_p - x_k| \leq \rho_k$. Далее,

$$|\xi_{p+1}^i - \xi_p^i| = \Delta t u(x_k) \left[\frac{1}{\sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2} \frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} - \frac{1}{\sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_p, x_k)}{\xi_p^i - x_k^i} \right)^2} \frac{\Delta u^i(\xi_p, x_k)}{\xi_p^i - x_k^i} \right].$$

Покажем, прежде всего, что

$$\sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_p, x_k)}{\xi_p^i - x_k^i} - \frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2 \leq M^2 n |\xi_p - \xi_{p-1}|^2. \quad (18)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_p, x_k)}{\xi_p^i - x_k^i} - \frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2 = \\ & = \sum_i \left(\frac{u(\xi_p^1, \dots, \xi_p^i, x_k^{i+1}, \dots, x_k^n) - u(\xi_p^1, \dots, \xi_p^{i-1}, x_k^i, \dots, x_k^n)}{\xi_p^i - x_k^i} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{u(\xi_{p-1}^1, \dots, \xi_{p-1}^i, x_k^{i+1}, \dots, x_k^n) - u(\xi_{p-1}^1, \dots, \xi_{p-1}^{i-1}, x_k^i, \dots, x_k^n)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\frac{u(\xi_p^1, \dots, \xi_p^i, x_k^{i+1}, \dots, x_k^n) - u(\xi_p^1, \dots, \xi_p^{i-1}, x_k^i, \dots, x_k^n)}{\xi_p^i - x_k^i} = \Phi^i(\xi_p, x_k),$$

имеем

$$\Phi^i(\xi_p, x_k) - \Phi^i(\xi_{p-1}, x_k) = \sum_{j=1}^i \frac{\partial \Phi^i(\xi_p^j, x_k)}{\partial \xi_p^j} (\xi_p^j - \xi_{p-1}^j); \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi_p^i} = \left[\frac{\partial u^i(\xi_p, x_k)}{\partial \xi_p^i} - \frac{\partial u^{i-1}(\xi_p, x_k)}{\partial \xi_p^i} \right] (\xi_p^i - x_k^i)^{-1} = u_{\xi_p^i}''(\xi_p^i, x_k) \quad (j \neq i), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi_p^i} &= \left[\frac{\partial u^i(\xi_p, x_k)}{\partial \xi_p^i} (\xi_p^i - x_k^i) - u^i(\xi_p, x_k) + u^{i-1}(\xi_p, x_k) \right] (\xi_p^i - x_k^i)^{-2} = \\ &= \frac{1}{2} u_{\xi_p^i}''(\xi_p^i, x_k). \end{aligned}$$

Оценивая левую часть (18) по неравенству Коши в соответствии с (19), (20) и (16), получим

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_p, x_k)}{\xi_p^i - x_k^i} - \frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2 &\leq \sum_i \left(\sum_{j=1}^i \frac{\partial^2 u(\bar{\xi}_p^j, x_k)}{\partial \xi_p^{j2}} (\xi_p^j - \xi_{p-1}^j) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_i \left(\sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial^2 u(\bar{\xi}_p^j, x_k)}{\partial \xi_p^{j2}} \right)^2 \sum_{j=1}^i (\xi_p^j - \xi_{p-1}^j)^2 \right) \leq n M^2 |\xi_p - \xi_{p-1}|^2. \end{aligned}$$

Тогда из (10) и (16) следует, что

$$\begin{aligned} |\xi_{p+1} - \xi_p|^2 &= (\Delta t)^2 (u(x_k))^2 \sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_p, x_k)}{\xi_p^i - x_k^i} - \frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2 \times \\ &\times \left[\sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_p, x_k)}{\xi_p^i - x_k^i} \right)^2 \sum_i \left(\frac{\Delta u^i(\xi_{p-1}, x_k)}{\xi_{p-1}^i - x_k^i} \right)^2 \right]^{-1} \leq c^{4/m} (\Delta t)^2 \times \\ &\times (u(x_k))^{2-4/m} M^2 n |\xi_p - \xi_{p-1}|^2. \end{aligned}$$

И, следовательно,

$$|\xi_{p+1} - \xi_p| \leq c^{2/m} \Delta t (u(x_k))^{1-2/m} M \sqrt{n} |\xi_p - \xi_{p-1}| = q |\xi_p - \xi_{p-1}|.$$

Таким образом, поскольку по условию (16) $q \leq 1$, метод последовательных приближений сходится к решению $x_{k+1} \in K_{p_k, x_k}$. Теорема доказана.

Замечание 3. Нулевое приближение для x_{k+1} будет определяться системой

$$x_{k+1}^i = x_k^i - \Delta t \frac{u(x_k)}{\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2} \frac{du}{dx^i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (21)$$

Итерационный процесс (21) с $\Delta t = 1$ изучался в работах [3, 4, 5, 6].

Здесь рассматривался итерационный процесс (7) с постоянным Δt . Можно, однако, рассмотреть этот же метод при различных Δt_k . В этом случае выражение (9) принимает следующий вид:

$$u(x_k) = \prod_{i=1}^k (1 - \Delta t_i) u(x_0). \quad (22)$$

Лемма. Пусть $u(x_k)$ определяется формулой (22):

$$\sum_{i=1}^k \Delta t_i = T \quad (0 < \Delta t_i < 1).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$u(x_k) \leq (1 - \Delta t)^k u(x_0),$$

где $\Delta t = T/k$.

Доказательство. Обозначим $1 - \Delta t_i = s_i$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k s_i &= k - T = C, \quad s_k = C - \sum_{i=1}^{k-1} s_i, \\ \prod_{i=1}^k (1 - \Delta t_i) &= s_1 \dots s_{k-1} \left(C - \sum_{i=1}^{k-1} s_i \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Определим значения s_i , при которых (23) принимает максимальное значение:

$$\frac{\partial}{\partial s_j} \prod_{i=1}^k (1 - \Delta t_i) = s_1 \dots \hat{s}_j \dots s_{k-1} \left(C - \sum_{i=1}^{k-1} s_i \right) - s_1 \dots s_{k-1} \quad (j=1, \dots, k). \quad (24)$$

Так как произведение $s_1 \dots \hat{s}_j \dots s_{k-1} \neq 0$, то из (24) получаем систему

$$C - \sum_{i=1}^{k-1} s_i - s_j = 0 \quad (j = 1, \dots, k), \quad (25)$$

откуда

$$s_j = C - \sum_{i=1}^{k-1} s_i = \text{const.}$$

Далее,

$$\sum_{j=1}^{k-1} s_j = (k-1) \left(C - \sum_{i=1}^{k-1} s_i \right), \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} s_j = \frac{(k-1)C}{k}. \quad (27)$$

Из (25) и (27) следует

$$s_j = C - \frac{(k-1)C}{k} = \frac{C}{k} = 1 - \frac{T}{k}, \quad (28)$$

т. е. наибольшее значение $\prod_{i=1}^k (1 - \Delta t_i)$ принимает при $\Delta t_i = \frac{T}{k}$. Утверждение леммы доказано.

Из неравенства $u(x_k) \leq (1-T/k)^k u(x_0)$ следует, что $u(x_k) \rightarrow 0$ в том и только в том случае, если $\sum_i \Delta t_i \rightarrow \infty$.

Пусть задана система нелинейных уравнений

$$f_i(x^1, \dots, x^n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (29)$$

Предположим, что функции f_1, \dots, f_n определены и принадлежат к классу $C^2(G)$ в области G . Для нахождения решения системы (22) в теоремах 1—3 необходимо положить

$$u(x^1, \dots, x^n) = \sum_i f_i^2, \quad u(x^1, \dots, x^n) = \sqrt{\sum_i f_i^2}. \quad (30)$$

Описанный метод применяется к решению систем нелинейных уравнений, которые получаются при приложении метода Ритца к нелинейным функционалам и метода конечных разностей для краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. И. Альбер, Я. И. Альбер, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, № 1, 14 (1967).
- 2 С. И. Альбер, Я. И. Альбер, ДАН СССР, 171, № 6, 1247 (1966).
- 3 Ч. Б. Томпкинс. Методы быстрого спуска, в книге Современная математика для инженеров, ИЛ, М., 1958, стр. 441.
- 4 M. Altman, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 9, № 12, 877 (1961).

5. В. М. Фридман, ДАН СССР, 139, № 5, 1063 (1961).
6. R. H. Moore, Newton's Method and Variations, Nonlinear integral equations, Madison, The University of Wisconsin Press, 1964, p. 65.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 ноября 1966 г.

A DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING NONLINEAR SYSTEMS AND FUNCTIONAL MINIMIZATION

Ya. I. Al'ber

This paper presents a consideration of an iterative process which is a difference approximation to the equation of differential descent. A minimizing sequence x_k for the function $u(x) \in C^2(G)$ is determined in not explicit form from the system of equations. The sufficient conditions for the existence of a minimum point x^* and for the convergence of x_k to x^* , when $k \rightarrow \infty$, are stated.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 519.83

О РОЛИ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

A. С. Алексеев

Пусть x, λ и $g(x), z$ есть матрицы-столбцы соответственно типа $(n \times 1)$, $(m \times 1)$, $((n+m) \times 1)$, $f(z)$ и $\varphi(x)$ — скалярные функции этих матриц и пусть

$$\begin{aligned} z &= \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|, \quad \partial\varphi(x)^T = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \right\|, \\ \partial f(z)^T &= \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial \lambda_m} \right\|. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда, как известно [1], метод неопределенных множителей Лагранжа для отыскания в неограниченном пространстве x экстремумов функции $\varphi(x)$ при условии

$$g(x) = 0 \quad (2)$$

дает в качестве необходимых условий систему $n+m$ уравнений ($m < n$)

$$\partial f(z) = 0, \quad (3)$$

где

$$f(z) = \varphi(x) - g(x)^T \lambda. \quad (4)$$

Система (3) после исключения линейно входящих в нее множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ образует n уравнений для нахождения точек x , среди которых найдутся x^* , дающие экстремумы $\varphi(x)$ при $g(x) = 0$. Наибольшее или наименьшее значение $\varphi(x)$ находятся, вообще говоря, перебором.

Если все или некоторые из условий (2) являются «нежесткими», т. е. если

$$g(x) = \left\| \frac{g_I(x)}{g_{II}(x)} \right\|, \quad (5)$$

где $g_I(x)$ и $g_{II}(x)$ — матрицы-столбцы типа $(m_1 \times 1)$ и $(m_2 \times 1)$, $(m_1 < n)$, подчинены условиям соответственно

$$g_I(x) = 0, \quad (6)$$

$$g_{II}(x) \geq 0, \quad (7)$$

то для решения задачи естественно применить вышеуказанную методику Лагранжа. Действительно, можно сначала решить задачу (3) при условиях (6) и оставить те решения, которые удовлетворяют неравенствам (7). Далее можно решить аналогичную задачу Лагранжа, прибавляя к неравенствам (6) одно равенство из условий (7). Затем, поступая аналогично, прибавляя к равенствам (6) все комбинации равенств из условий (7) по одному, по два и т. д. до числа $m_3 = n - m_1$, отыскивать последовательно экстремумы при условиях типа (6) внутри допустимой области и на ее границах. После этого среди всех оставшихся решений наибольшее или наименьшее решение придется определять перебором. Разумеется, при отыскании решений на границах, задаваемых простыми уравнениями, уместно с их помощью производить предварительное исключение переменных из φ и g . Известно, что рассмотренная задача является общей задачей математического (нелинейного) программирования, где равенства (6) можно заменить удвоенным количеством неравенств

$$g_I(x) \geq 0, \quad -g_I(x) \geq 0, \quad (8)$$

для которой справедлива теорема Куна и Таккера [2-5]. Эта теорема дает для отыскания экстремумов $\varphi(x)$ при условиях $g(x) \geq 0, x \geq 0$ в качестве необходимых условий систему уравнений

$$\partial\varphi(x) - dg(x)^T y \geq 0, \quad (9)$$

$$g(x) \geq 0; \quad (10)$$

$$y \geq 0, \quad (11)$$

$$x \geq 0, \quad (12)$$

$$y^T g(x) = 0, \quad (13)$$

$$x^T (\partial\varphi(x) - dg(x)^T y) = 0, \quad (14)$$

где $y^T = \|y_1, y_2, \dots, y_m\|$, а

$$dg(x) = \left\| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right\| \quad (15)$$

— матрица частных производных типа $(m \times n)$. В силу (10), (11) и (9), (12) каждый член в скалярных произведениях (13) и (14) равен нулю, что и дает систему $(n+m)$ необходимых уравнений.

Вводя неотрицательные матрицы-столбцы $v(n \times 1)$ и $u(m \times 1)$, ту же систему уравнений получают так называемым обобщенным методом Лагранжа [3, 5]:

$$dg(x)^T y - \partial\varphi(x) + v = 0, \quad g(x) - u = 0, \quad (16)$$

$$x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad u \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (17)$$

$$v^T x = 0, \quad (18)$$

$$y^T g(x) = 0, \quad (19)$$

где уравнения (18) и (19), в которых также, в силу (17), каждое слагаемое в отдельности равно нулю, носят название условий дополнительной нежесткости.

Очевидно, системы уравнений и неравенств (9)–(14) и (16)–(19) представляют собой полную и сжатую математическую запись всех многообразных вариантов рассматриваемой задачи, которая позволила получить ряд общих результатов (неполную, но геометрически ясную формулировку условий достаточности, двойственность, богатые возможности применения градиентных методов при численном счете и т. д.). Однако, как нетрудно усмотреть, при аналитическом нахождении решений этих систем ничего не прибавляется по сравнению с процедурой обычного метода неопределенных множителей Лагранжа, рассмотренной выше, а содержит лишь некоторое количество дополнительных переменных, нахождение которых не представляет интереса. Действительно, если решение имеется внутри допустимой области, то в силу (17), (18) $v = 0$ и присутствуют в виде (3) все $(2m_1 + n)$ уравнений из (14) или (16) для x и тех $2m_1$ величин y_i , которые в силу (11), (12) или (18), (19) в этом случае строго положительны. Если решение ищется на внутренних точках ребра границы допустимой области, где, скажем, $g_{m_1+1}(x) = g_{m_1+2}(x) = 0$, то, как нетрудно видеть, эти уравнения автоматически добавляются, а y_{2m_1+1} и y_{2m_1+2} строго положительны, и опять получаемая система имеет вид (3). Если, наконец, мы интересуемся внутренними точками ребра, где, скажем, кроме предыдущего, еще $x_1 = x_2 = 0$, то $v_1, v_2 > 0$, в силу (17), (18), и из (14) выпадают, а из (16) могут быть отброшены первые два уравнения, так как нахождение v_1 и v_2 не представляет интереса. В результате снова повторяется прежняя картина и т. д.

В силу изложенного представляется, что методы (9)–(14) и (16)–(19) в случае аналитического нахождения решений являются рецептурой автоматического получения обычных уравнений Лагранжа в каждом конкретном случае рассматриваемой задачи.

Более того, в представленной выше обычной процедуре применения метода неопределенных множителей Лагранжа, во-первых, не приходится заботиться об обеспечении положительности матрицы λ (или y), и, кроме того, условия достаточности минимума φ , даваемые условиями положительности квадратичной формы второго дифференциала функции Лагранжа [6], вообще говоря, шире, чем те, что имеются в теореме Куна и Таккера. Действительно, в примере, где $\varphi=(x-1)^2+(y-1)^2$ и $g=x^2+y^2-8 \geq 0$, $x, y \geq 0$, следуя обычной процедуре Лагранжа, нетрудно получить очевидный минимум φ при $x = y = 2$ ($\lambda = 1/2 > 0$) на границе $g = 0$, в то время как функционал и допустимое множество вогнуты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. А. Лагранж, Аналитическая механика, 1, изд. М.—Л., 1950.
2. H. W. Кун, A. W. Тьюкетт, Nonlinear programming, Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (под ред. Дж. Неймана), Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951, p. 481.
3. Дж. Б. Денис, Математическое программирование и электрические цепи, ИЛ, М., 1961.
4. К. Дж. Эрроу, Л Гурвиц, Х. Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, М., 1962.
5. Ю. М. Ермольев, Кибернетика, 4, 1 (1966).
6. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1, М.—Л., 1947.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 января 1967 г.