

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Кукин Л. М., Лубяко Л. В., Федосеев Л. И.</b> Измерение атмосферного поглощения в диапазоне волн $\lambda = 1,8 - 0,87 \text{ мм}$	747
<b>Яшин Ю. Я.</b> О приближении геометрической оптики в теории распространения электромагнитных волн в гиротропной среде со слабым поглощением	756
<b>Волотовская Н. К.</b> Эффективная площадь рассеяния объектов при облучении их неоднородным полем	763
<b>Аблязов В. С.</b> Оценка флюктуационной чувствительности измерительного приемника с модуляцией по УПЧ	768
<b>Грачева М. Е.</b> Исследование статистических свойств сильных флюктуаций интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы	775
<b>Розенберг А. Д., Калмыков А. И., Зельдис В. И.</b> Обратное рассеяние звуковых волн на правильной ряби	789
<b>Калмыков А. И., Розенберг А. Д., Зельдис В. И.</b> Обратное рассеяние звуковых и радиоволн нерегулярной рябью	797
<b>Константинов Ю. С.</b> О взаимодействии ядерных магнитных моментов с автоколебательной системой при учете насыщения	803
<b>Потемкин В. В., Жигальский Г. П.</b> Шумы синусоидального перемагничивания тонких магнитных пленок	809
<b>Якименко И. П., Кельнер Т. Р.</b> О собственных колебаниях цилиндрических резонаторов с магнитоактивной плазмой	815
<b>Горшков А. С., Марченко В. Ф.</b> О взаимодействии волн в нелинейной периодически неоднородной среде	825
<b>Горшков А. С., Марченко В. Ф., Титов В. Г.</b> Исследование взаимодействия волн в нелинейных периодически неоднородных линиях	837
<b>Юлпатов В. К.</b> Нелинейная теория взаимодействия периодического электронного пучка с электромагнитной волной	846
<b>Дудник Р. А., Фукс М. И.</b> Об одном численном способе исследования лампы с поперечным взаимодействием	857
<b>Ягупов А. Е., Малышев В. А.</b> К нелинейной теории ЛБВО с большим усилением	866
<b>Амадзиев А. М., Белянина В. Ф., Мясников Л. Л.</b> Поверхностная ионизация атомов таллия и натрия на рении	873
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Молдавская В. М.</b> О влиянии статической поляризации нелинейной среды на генерацию второй гармоники	876
<b>Анциферов В. В., Кривошеков Г. В., Фолин К. Г.</b> Об одном методе сужения спектра излучения ОКГ на рубине	879
<b>Герценштейн М. Е.</b> К вопросу о прямом измерении частоты лазера	880
<b>Герценштейн М. Е.</b> Об «импедансном» режиме приемной трехуровневой схемы	882
<b>Малахов А. Н.</b> Форма спектральной линии колебания при малых флюктуациях амплитуды и частоты	885

## Информация

Аннотации статей, помещенных в ж «Геомагнетизм и аэрономия», т. VII, № 1, 1967 г.

889

УДК 621.371.166 . 621.371.59

## ИЗМЕРЕНИЕ АТМОСФЕРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИАПАЗОНЕ ВОЛН $\lambda = 1,8 \div 0,87$ мм

*Л. М. Кукин, Л. В. Лубяко, Л. И. Федосеев*

Описывается методика и результаты измерений полного вертикального поглощения атмосферы. Выделена не зависящая от влажности часть поглощения. Полученные результаты сравниваются с данными других авторов.

Для оценки возможных условий радиоастрономических измерений, обработки результатов этих измерений и в ряде других случаев необходимо знать величину полного вертикального поглощения атмосферы  $\Gamma_a$  (поглощение во всем вертикальном столбе атмосферы). В настоящей работе описываются измерения этой величины, выполненные радиоастрономическими методами в 1960—1966 гг. на различных волнах в интервале  $1,8 \div 0,87$  мм.

В указанном диапазоне  $\Gamma_a$  определяется молекулярным поглощением кислорода и водяного пара, а также поглощением в гидрообразованиях (дожь, туман, снег и т. д.). Ограничивааясь только молекулярным поглощением, можно записать

$$\Gamma_a(h, \lambda, \rho_h) = \Gamma_k(h, \lambda) + \Gamma_b(\lambda, h, \rho_h), \quad (1)$$

где  $\Gamma_k$  и  $\Gamma_b$  — полное вертикальное поглощение в кислороде и водяном паре соответственно;  $h$  — высота места наблюдения над уровнем моря;  $\lambda$  — длина волн;  $\rho_h$  — абсолютная влажность в месте наблюдения.

Из работ [1, 2] следует, что вне линий поглощения, несмотря на отличие распределения удельной влажности  $Q$  в стратосфере от экспоненциального, изменение с высотой  $\Gamma_b$  с достаточной степенью точности может быть описано (при  $h < 10$  км) следующими формулами:

$$\Gamma_b(h, \lambda, \rho_h) = \Gamma_b(0, \lambda, \rho_0) \exp\left(-\frac{h}{H_b}\right); \quad (2)$$

$$\Gamma_b(h, \lambda, \rho_h) = x_b(h, \lambda, \rho_h) H_b, \quad (3)$$

где  $H_b$  — характеристическая высота поглощения водяным паром;  $\Gamma_b(0, \lambda, \rho_0)$  — полное вертикальное поглощение в водяном паре от уровня моря;  $\rho_0$  — абсолютная влажность на уровне моря\*;  $x_b$  — коэффициент поглощения.

Заметим, что  $\Gamma_k$  от влажности не зависит, а

$$\Gamma_b(h, \lambda, \rho_h) = \gamma_b(h, \lambda) \rho_h, \quad (4)$$

\* Формулы (2) и (3) описывают поглощение мономерами водяного пара. На высотах  $h < 2$  км, вообще говоря, присутствуют и димеры воды, что может привести к отклонениям от указанной в (2) и (3) закономерности, так как характеристические высоты вертикального распределения димеров и мономеров различны [1]. Однако прямые экспериментальные указания на заметное поглощение в атмосфере димерами отсутствуют. Поэтому мы будем считать, что их поглощение пренебрежимо мало.

где  $\gamma_b(h, \lambda)$  — некоторый коэффициент пропорциональности. Поэтому  $\Gamma_b$  и  $\Gamma_k$  могут быть легко разделены, если измерения  $\Gamma_a$  производить при различных влажностях. В свою очередь по найденным значениям  $\Gamma_b$  с помощью уравнения (3) легко определить  $H_b$ , если известно  $x_b(h, \lambda, \rho_h)$ . Обычно в литературе [3, 4] приводятся только значения  $x_b(0, \lambda, \rho_0)$  для уровня моря. Поэтому для нахождения  $H_b$  необходимо знать еще и закон распределения абсолютной влажности по высоте.

Согласно [5],

$$\rho \sim \frac{pQ}{T}, \quad p \sim dT, \quad (5)$$

где  $Q$  — удельная влажность,  $p$  — давление,  $T$  — абсолютная температура,  $d$  — плотность воздуха. По данным измерений, приведенным в [5, 6], в интервале высот  $0 < h < 10 \div 16$  км

$$Q \sim \exp(-ah) \quad (6)$$

( $a$  — некоторый коэффициент, величина которого зависит от времени года и местных климатических условий). Зависимость  $d(h)$  можно найти в [1]. Она хорошо аппроксимируется выражением

$$d(h) = d(0) \exp(-bh), \quad (7)$$

причем  $b = 0,104$  летом и  $0,116$  зимой (см. рис. 1).

Воспользовавшись соотношениями (5) — (7), находим

$$\rho(h) = \rho_0 \exp[-(a+b)h], \quad (8)$$

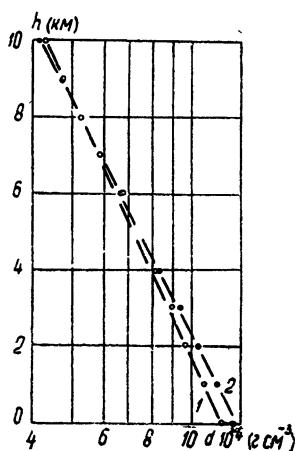


Рис. 1. Зависимость плотности воздуха  $d$  от высоты  $h$  (временная стандартная атмосфера 1960 г. [1, 12]);  $\circ$  — летние значения,  $\bullet$  — зимние. Прямая 1 соответствует экспоненте  $\exp(-0,104h)$ , прямая 2 — экспоненте  $\exp(-0,116h)$ .

а из (2) — (4) и (8) нетрудно получить\* уравнение для определения  $H_b$ :

$$H_b = \frac{\gamma_b(h, \lambda) \rho_0 \exp[-(a+b)h]}{x_b(0, \lambda, \rho_0) \exp(-h/H_b)}. \quad (9)$$

Изменение с высотой полного вертикального поглощения в кислороде  $\Gamma_k$  и коэффициента поглощения  $x_k$  может быть описано путем введения эквивалентной длины пути  $H_k$ , зависящей от  $h$ \*\*. Расчет  $H_k(h, T)$  выполнен в [2]. Воспользовавшись результатами этой работы, по измеренным значениям  $\Gamma_k$  можно найти спектр кислородного поглощения  $x_k(0, \lambda)$  на уровне моря. Полученные значения  $H_b$ ,  $x_k(0, \lambda)$  приведены ниже после описания методики и результатов измерений  $\Gamma_a$ .

\* Имеется в виду, что  $\gamma_b$  измерено с высоты  $h$ , не превышающей  $8 \div 10$  км.

\*\* Для водяного пара характеристическая высота и эквивалентная длина пути, согласно [1, 2], совпадают при  $h < 10$  км, так как на высотах до  $10 \div 16$  км коэффициент поглощения водяного пара убывает практически по экспоненте.

## 1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения  $\Gamma_a$  производились радиоастрономическим методом и в большинстве случаев одновременно с радиоастрономическими наблюдениями (летом — в горах, зимой — с уровня моря). При этом использовались радиотелескопы, каждый из которых включал в себя параболическую антенну и детекторный радиометр. Некоторые характеристики их приведены в таблице 1 (см. также [3, 8]).

Во время измерений записывался уровень радиоизлучения атмосферы под различными углами над горизонтом. Обозначим показания выходного прибора радиометра  $\alpha_0$ ,  $\alpha_3$  и  $\alpha_\theta$  при антенне, направленной соответственно на горизонт, зенит и на область неба с зенитным расстоянием  $\theta$ . Тогда, проделав выкладки, аналогичные приведенным в [9], можно получить

$$\ln q = \ln \frac{\alpha_0 - \alpha_\theta}{\alpha_0 - \alpha_3} = -\Gamma_a \cdot (\sec \theta - 1) + \ln \frac{T_0 + \Delta T_1(\Gamma_a \sec \theta) + \Delta T_2(\Gamma_a \sec \theta)}{T_0 + \Delta T_1(\Gamma_a) + \Delta T_2(\Gamma_a)}, \quad (10)$$

где  $T_0$  — температура воздуха в месте наблюдения;  $\Delta T_1(\Gamma)$  — поправка, учитывающая изменение температуры воздуха с высотой ( $\Gamma = \Gamma_a \sec \theta$  — поглощение в направлении  $\theta$ );  $\Delta T_2(\Gamma)$  — поправка на неизотропность рассеяния антенны вне достаточно узкого главного лепестка диаграммы направленности, в пределах которого можно считать, что  $\Gamma$  не зависит от  $\theta$ \*.

Если  $\Delta T_1 + \Delta T_2$  мало меняется с ростом  $\theta$  от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , то графическая зависимость  $\ln q$  от  $\sec \theta$  будет представлена прямой, по наклону которой легко определить  $\Gamma_a$ . Однако в ряде случаев приходится учитывать зависимость  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  от  $\theta$ . Отметим, что  $\Delta T_1$  всегда положительна (если нет инверсий температуры) и пренебрежение ею приводит к систематическому занижению  $\Gamma_a$  (при этом ошибка не превышает 10%, если  $\Gamma_a \leq 0,5 \text{ nep}$ ).

Вторая поправка  $\Delta T_2$  в зависимости от характера рассеяния антенны может быть либо положительной, либо отрицательной, так как сбычно преобладают либо передние, либо задние боковые лепестки. Величину ее можно определить экспериментально. Для этого достаточно воспользоваться тем обстоятельством, что точно такую же поправку необходимо вводить и при измерении температуры внеземных источников, если калибровка осуществляется по собственному излучению атмосферы. Поэтому зависимость  $\Delta T_2$  от  $\Gamma_a$ ,  $T_0$  и  $\theta$  может быть найдена с помощью измерений по этому методу температуры какого-либо стабильного источника, например, Солнца или Луны.

Как показали измерения на волнах 1,2 и 1,3 мм,  $\Delta T_2$  практически не зависит от  $T_0$  и  $\Gamma_a$  (при  $\theta = \text{const}$ ). Характер же зависимости  $\Delta T_2$  от зенитного угла для использованных антенн представлен на рис. 2, откуда видно, что  $\Delta T_2$  оказалась отрицательной при любых углах  $\theta$ . Поэтому обработка результатов измерений проводилась в предположении, что  $\Delta T_1 + \Delta T_2 \approx 0$ . Возникающая из-за этого ошибки определения  $\Gamma_a$  не превышает 10%.

\* Выражение для  $\Delta T_1$  (в случае поглощения кислородом и водяным паром) приведено в работе [10], а для  $\Delta T_2$  в [9].

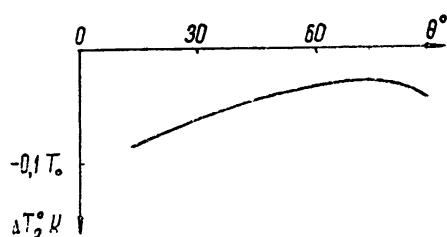


Рис. 2.

Таблица 1

Даты	Район измерений. Местные условия	$\hbar$ ( $\text{eV}$ )	$\lambda$ ( $\text{м.м.}$ )	Относительная полоса частот $\Delta f/f_0$ (%)	Ширина диапазона направленности (угл. мин.)	$T_h$ (°К)	$\rho_h$ ( $2 \cdot \text{м}^{-3}$ )	$\Gamma_a(h)$ (нет)
Июль—август 1960 г.	Кавказ, гора Эльбрус. Горные хребты покрыты снегом выше места наблюдения	3,06	1,8	$\pm 20$	20	$273 \div 287$	$0,2 \div 8$	$(0,054 \pm 0,03) + (0,065 \pm 0,03)\rho_h$
Август—сентябрь 1962 г.	Восточный Памир. Измерения производились над широкой горной долиной, свободной от снега	3,86	1,3	$\pm 7 \div 10$	10	$270 \div 285$	$0,2 \div 6$	$(0,1 \pm 0,03) + (0,067 \pm 0,02)\rho_h$
Июль 1963 г.	Арmenия, гора Арагац. На склоне горы выше места наблюдения сплошной снеговой покров	3,25	1,19 1,16 0,873	$\pm 6$ $\pm 7$ $\pm 6$	7 8 8	$275 \div 282$ $282$ $281$	$3 \div 6$ 6 5,8	$(0,07 \pm 0,03) + (0,076 \pm 0,03)\rho_h$ 0,57 1,33
Январь 1964 г.	Город Уссурийск. Покрытая снегом равнина	0	1,2	$\pm 6$	8	263	1,32	0,332
Октябрь—декабрь 1966 г.	Тянь-Шань. Измерения производились над горами, покрытыми снегом	2,71	1,45 1,26 1,06 0,87	$\pm 8$ $\pm 5$ $\pm 5$ $\pm 5$	18,5 8 13,5 14	$250 \div 270$ $250 \div 280$ $250 \div 280$ $250 \div 280$	$0,5 \div 2,5$ $0,7 \div 3,1$ $0,5 \div 2,5$ $0,5 \div 3,2$	$(0,14 \pm 0,026) + (0,028 \pm 0,023)\rho_h$ $(0,17 \pm 0,06) + (0,05 \pm 0,045)\rho_h$ $(0,16 \pm 0,05) + (0,035 \pm 0,033)\rho_h$ $(0,23 \pm 0,15) + (0,328 \pm 0,135)\rho_h$

Одновременно с записью уровня радиоизлучения атмосферы с помощью аспирационных психрометров производились замеры абсолютной влажности в месте наблюдения.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Измеренные на волнах 1,8\*; 1,45; 1,3; 1,26; 1,2; 1,19; 1,16; 1,06; 0,873; 0,87 мм значения полного вертикального поглощения приведены в таблице 1.

Благодаря длительному периоду измерений, в течение которого влажность менялась в значительных пределах, на волнах 1,8; 1,45; 1,3; 1,26; 1,19; 1,06 и 0,87 мм удалось получить зависимость  $\Gamma_a$  от влажности и выделить не зависящую от нее компоненту. Полученные же на волнах 1,2; 1,16 и 0,873 мм значения полного вертикального поглощения пришлось отнести к средней за время наблюдений влажности, так как диапазон ее изменений во время измерений, к сожалению, был сравнительно невелик.

Отметим, что на высотах 3—4 км даже летом в диапазоне 1,4—1,06 мм  $\Gamma_a$  редко превышает 0,5 nep, что позволяет производить радиоастрономические наблюдения некоторых внеземных источников. Однако имеют место значительные изменения поглощения, связанные с суточными и более быстрыми вариациями влажности.

На рис. 3 приведена типичная зависимость  $\Gamma_a$  от абсолютной влажности ( $\lambda = 1,3$  мм,  $h = 3,86$  км), позволяющая судить и о разбросе измеряемой величины  $\Gamma_a$ . Существенно, что разброс точек определяется

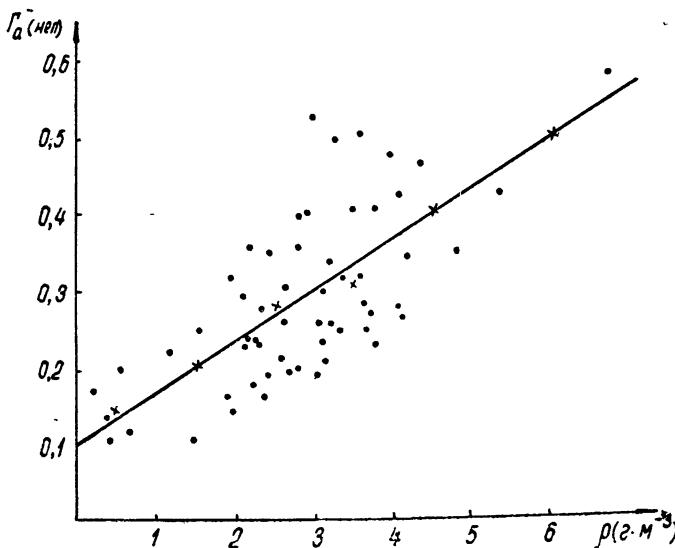


Рис. 3. Зависимость полного вертикального поглощения атмосферы  $\Gamma_a$  от абсолютной влажности  $\rho$  ( $\lambda = 1,3$  мм,  $h = 3,86$  км); ● — экспериментальные точки, × — усредненные значения.

не ошибками измерений, а отклонениями распределения метеопараметров (в первую очередь — влажности) по высоте от принятого для стандартной атмосферы. В пользу этого говорит тот факт, что зависимость  $\ln q$  от  $\sec \theta$  часто сильно отличалась от линейной. Иногда в результате

\* Измерения на волне 1,8 мм выполнялись совместно с Н. А. Гороховым и Ю. А. Дрягиным,

серии непрерывных наблюдений удавалось зафиксировать образование и развитие областей повышенного поглощения (см. рис. 4). Любопытно, что такие аномалии, как правило, имели место в горах и при измерениях над равниной не наблюдались.

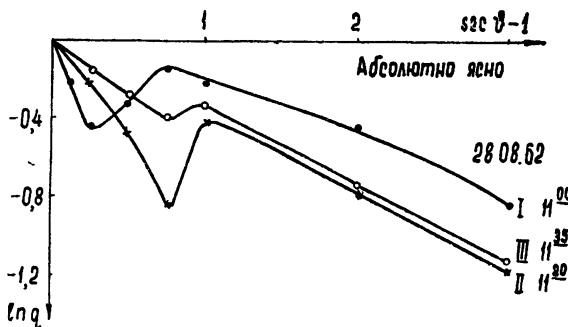


Рис. 4.

### 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ВЫСОТА ПОГЛОЩЕНИЯ ВОДЯНЫМ ПАРОМ

Для определения характеристической высоты  $H_b$  из уравнения (9) могут быть использованы полученные на волнах 1,3; 1,26; 1,19; 1,06 и 0,87 мм зависимости  $\Gamma_a$  от  $\rho^*$ . Необходимые для вычислений значения коэффициента поглощения водяным паром  $x_b(0, \lambda, \rho_0)$  были взяты из работ [3, 4]. При этом считалось, что зависящее от влажности поглощение и на уровне моря определяется только мономерами водяного пара.

Несколько слов о выборе коэффициента  $a$ , входящего в показатель выражения (6) и характеризующего быстроту убывания влажности с высотой. Различные авторы приводят и используют при расчете сильно отличающиеся значения. Так, по данным экспериментальных работ, обзор которых имеется в [6], величина  $a$  колеблется в пределах  $0,42 \div 0,56 \text{ км}^{-1}$ ; расчет [1] выполнен в предположении, что  $a = 0,48 \text{ км}^{-1}$ ; в работе [2] полагалось, что  $a$  может и отличаться от этого значения, достигая величины  $0,35 \text{ км}^{-1}$ ; в [11] принималось значение характеристической высоты распределения плотности водяного пара  $H_p = 1/(a+b) = 2,5 \text{ км}$ , т. е.  $a \approx 0,3 \text{ км}^{-1}$ . Наконец, в формуле Ганна [5], основанной на данных измерений альпийских горных метеостанций, используется значение  $a = 0,23 \text{ км}^{-1}$ .

К сожалению, наши измерения  $\Gamma_a$  обычно сопровождались замерами влажности лишь в месте расположения телескопа. Только в августе 1960 г. при работе в районе Эльбруса проводились одновременные систематические измерения влажности на высотах 3,06 и 2,15 км, в результате которых было получено, что в среднем  $H_p = 2,5 \text{ км}$ ,  $a = 0,3 \text{ км}^{-1}$ . Этому значению  $a$ , по нашему мнению, следует отдать предпочтение при обработке результатов описываемых измерений, которые также производились в горной местности. Ему соответствует характеристическая высота поглощения водяным паром  $H_b = (1,63 \pm 0,25) \text{ км}$  — летом и  $H_b = (1,47 \pm 0,25) \text{ км}$  — зимой.

Заметим, что неопределенность величины  $a$  не так уж сильно влияет на  $H_b$ , в чем можно убедиться, обратившись к таблице 2. Приведенные в ней значения  $H_b$  получены с помощью формулы (9) по данным

\* Полученные на волнах 1,8 и 1,45 мм зависимости  $\Gamma_a = \Gamma_a(\rho)$  не могут быть использованы для этой цели, так как в полосе приемников попадали участки спектра, примыкающие к пику поглощения мономеров водяного пара ( $\lambda = 1,63 \text{ мкм}$ ).

измерений  $\Gamma_a$  на волнах 0,87; 1,06; 1,19; 1,26 и 1,3 мм и отличаются друг от друга (при изменении  $a$  в два раза) не более чем на 30%.

Таблица 2

$a$ ( $\text{км}^{-1}$ )	$H_p$ ( $\text{км}$ )	$H_b$ ( $\text{км}$ ) (теория)	$H_b$ ( $\text{км}$ ) лето		$H_b$ ( $\text{км}$ ) зима		
			$\lambda=1,3$ мм	$\lambda=1,19$ мм	$\lambda=1,26$ мм	$\lambda=1,06$ мм	$\lambda=0,87$ мм
0,48	1,7	1,56 (лето) [1] 1,48 (зима)	$1,4 \pm 0,15$	$1,32 \pm 0,25$	$1,26 \pm 0,2$	$1,13 \pm 0,13$	$1,35 \pm 0,25$
0,35	2,2	1,75 [2]	$1,63 \pm 0,2$	$1,49 \pm 0,25$	$1,4 \pm 0,25$	$1,25 \pm 0,16$	$1,5 \pm 0,25$
0,3	2,5	2,1* [11]	$1,73 \pm 0,25$	$1,53 \pm 0,3$	$1,5 \pm 0,3$	$1,3 \pm 0,17$	$1,6 \pm 0,3$
0,23	2,9	—	$1,85 \pm 0,3$	$1,68 \pm 0,35$	$1,6 \pm 0,35$	$1,39 \pm 0,2$	$1,7 \pm 0,35$

Рассчитанные в [1, 2, 11] величины  $H_b$  примерно на 10–20% превышают значения, полученные из данных измерений  $\Gamma_a$ . Это, по-видимому, связано с возможной систематической ошибкой определения  $\Gamma_a$  (при обработке полагалось, что  $\Delta T_1 + \Delta T_2 \approx 0$ ), а также с некоторым несоответствием действительности моделей атмосферы, принятых и при расчете, и при обработке экспериментальных данных (пренебрежение поглощением димерами водяного пара и зависимостью  $H_p$  от времени суток).

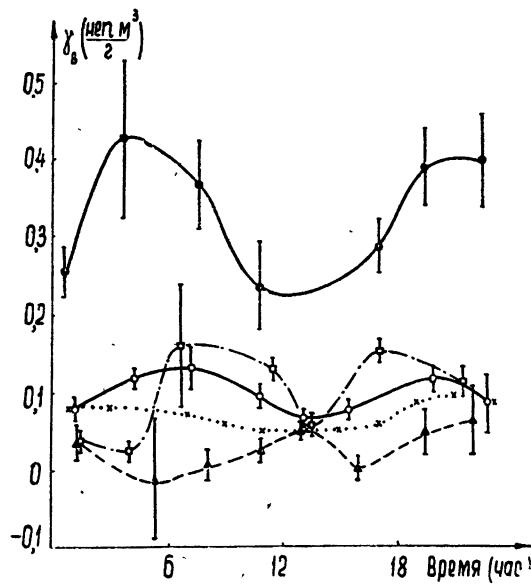


Рис. 5. Суточные вариации величины  $\gamma_b = [\Gamma_a(h) - \Gamma_k(h)]/\rho_h$ ;

● —  $\lambda = 0,87$  мм, ○ —  $\lambda = 1,06$  мм, □ —  $\lambda = 1,26$  мм, × —  $\lambda = 1,3$  мм, ▲ —  $\lambda = 1,45$  мм.

изменения  $\gamma$  находятся почти «в противофазе» с изменениями на других

Выше отмечалось, что вертикальное распределение метеопараметров в реальной атмосфере подвержено заметным изменениям. Наиболее резко меняется количество водяного пара и его распределение по высоте, вызывая соответствующие вариации полного вертикального поглощения. На рис. 5 представлено суточное изменение величины полного вертикального поглощения в водяном паре, отнесенное к абсолютной влажности в месте расположения радиотелескопа ( $\gamma_b$ ). На волнах 0,87; 1,06; 1,26 и 1,3 мм эта величина максимальна в районе 6–8 часов и 18–21 часа и имеет минимум около 13 часов. Летом указанные вариации заметно меньше ( $\lambda = 1,3$  мм), чем зимой. На волне 1,45 мм суточные из-

\* При расчете в [11] принято, что  $x_b \sim T^{-3/2}$ , тогда как, согласно [7],  $x_b \sim T^{-1}$ . Это означает, что значение 2,1 км является несколько завышенным.

волнах. Это может быть связано с тем, что на волне  $\lambda = 1,45 \text{ мм}$  в полосу приемника попадала линия поглощения мономеров водяного пара ( $\lambda = 1,63 \text{ мм}$ ), а зависимости поглощения от температуры и давления в пике отличны от соответствующих зависимостей в окне прозрачности.

#### 4. НЕ ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ВЛАЖНОСТИ ЧАСТЬ АТМОСФЕРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

На волнах 1,8; 1,45; 1,3; 1,26; 1,19; 1,06 и 0,87 мм удалось выделить часть полного вертикального поглощения атмосферы, не зависящую от абсолютной влажности. Согласно [7], наиболее вероятно, что указанное поглощение является поглощением в кислороде.

Для того, чтобы получить спектр коэффициента кислородного поглощения  $x_k(0, \lambda)$ , необходимо перейти от измеренных на высоте  $h$  значений  $\Gamma_k(h, \lambda)$  к значениям  $\Gamma_k(0, \lambda)$  на уровне моря и ввести температурные поправки. Для этого использовались зависимости полного вертикального поглощения от высоты и эквивалентной длины пути от температуры, приведенные в работе [2], а также учитывалось, что, согласно [13],  $x_k$  (нерезонансное) пропорционально  $T^{-9/2}$ .

На волнах 1,2; 1,16; 0,873 мм кислородное поглощение находилось путем вычитания из полного вертикального поглощения атмосферы  $\Gamma_a$  величины  $\Gamma_b$ , рассчитанной по формулам (2) и (3). При этом значения  $x_b(0)$  брались из работ [3, 4] с учетом зависимости от температуры [7]. Характеристическая высота  $H_b$  при обработке полученных в горах данных принималась равной  $(1,63 \pm 0,25) \text{ км}$ , а при обработке результатов измерений на волне 1,2 мм, проводившихся зимой практически на уровне моря, — 1,48 км [1].

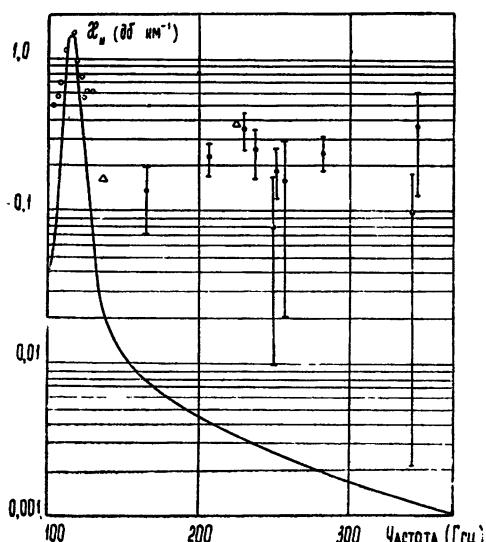


Рис. 6. Зависимость коэффициента поглощения кислорода  $x_k$  от частоты ( $h=0, T=290^\circ\text{K}$ ); ● — значения, полученные в настоящей работе, ○ — по данным работы [3], △ — по данным [14]. Сплошная кривая изображает спектр резонансного кислородного поглощения.

Полученные таким образом значения  $x_k = x_k(0, \lambda)$  вместе с возможной ошибкой, а также значения  $x_k$ , полученные путем аналогичной обработки данных работы [14]\*, и результаты работы [3] приведены из рис. 6 ( $T=290^\circ\text{K}$ ). На этом же рисунке сплошной кривой изображен спектр резонансного поглощения кислорода\*\*. Все экспериментальные значения вне линии значительно превышают теоретический уровень резонансного поглощения, а также асимптотическое значение нерезонансного поглощения ( $\sim 0,02 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ ), следующее из формулы Дебая.

При прогнозировании условий распространения волн рассматриваемого диапазона необходимо также иметь в виду, что нерезонансное поглощение в кислороде зимой может значительно превышать поглощение в водяном паре. Так, согласно расчету [7], в районе Верхоянска при температуре  $-40^\circ\text{C}$  коэффициент погло-

\* По этому поводу см. [15].

\*\* Расчет резонансного поглощения кислорода по нашей просьбе любезно был выполнен А. П. Наумовым и М. Б. Флаксман.

щения в приземном слое воздуха на волне 1,3  $\text{мм}$  составляет лишь 0,023  $\text{дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ . В свете данных настоящей работы следует считать, что это значение занижено примерно на порядок.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить А. П. Наумова за участие в обсуждении полученных результатов, М. Б. Флаксман за расчет резонансного поглощения в кислороде и И. Л. Берштейна за замечания, сделанные им по прочтении рукописи статьи.

### ЛИТЕРАТУРА

- С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 433 (1966).
- А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 451 (1966).
- Ю. А. Дрягин, А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, А. И. Наумов, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1078 (1966).
- В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 859 (1966).
- А. Х. Хргиан, Физика атмосферы, Гостехиздат, М., 1958.
- М. С. Малкевич, Ю. В. Самсонов, Л. М. Копрова, УФН, 80, № 1, 93 (1963).
- С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 4, 674 (1963).
- Л. И. Федосеев, Д. М. Козицын, Приборы и техника эксперимента, № 1, 125 (1967).
- А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 433 (1961).
- С. А. Каменская, А. Г. Кисляков, В. Д. Кротиков, А. И. Наумов, В. Н. Никонов, В. А. Порфирьев, В. М. Плечков, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Л. В. Лубяков, Э. П. Сорокина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 2, 219 (1965).
- С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
- Приложение № 2 к временной стандартной атмосфере 1960 г. (ВСА-60), изд. ЦАГИ, 1962.
- К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 98 (1965).
- М. Соhn, F. L. Wentworf, J. C. Wiltse, Proc. IEEE, 51, 1227 (1963).
- А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 668 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 августа 1966 г.

### ATMOSPHERIC ABSORPTION MEASUREMENT AT THE WAVELENGTH $\lambda = 1.8 \pm 0.87 \text{ mm}$

*L. M. Koukin, L. V. Loubyako, L. I. Fedoseev*

There is described the methods and measurement data of total vertical absorption of the atmosphere. The component independent of humidity is separated out. The results obtained are compared with the data published elsewhere.

УДК 535.31: 621.371.122

## О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ СО СЛАБЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Ю. Я. Яшин

Рассмотрена задача о распространении электромагнитных волн в слабопоглощающей гиротропной среде в случае, когда справедливо приближение геометрической оптики. Получены и обсуждаются уравнения, описывающие амплитуду поля, а также вращение векторов поля.

Настоящая работа посвящена геометрооптическому описанию распространения электромагнитных волн в слабонеоднородной поглощающей среде в предположении, что компоненты антиэрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}_{ij}$  по абсолютной величине много меньше компонент эрмитовой части (поглощение слабое) (по существу, это совпадает с классической схемой, примененной ранее для исследования аналогичных вопросов в других случаях [1,2]). Кроме того, как обычно, предполагается, что свойства среды не зависят от времени, так что для векторов поля может быть принята гармоническая зависимость  $E \sim \exp(i\omega t)$ ,  $H \sim \exp(i\omega t)$  ( $\omega$  — циклическая частота).

Данная статья является развитием предшествующей работы автора [3], в которой рассматривались аналогичные вопросы без учета поглощения.

### 1. Исходим из уравнений Максвелла

$$\text{rot } E = -i \frac{\omega}{c} H, \quad \text{rot } H = i \frac{\omega}{c} \hat{\epsilon} E, \quad (1)$$

$$\text{rot } E^* = i \frac{\omega}{c} H^*, \quad \text{rot } H^* = -i \frac{\omega}{c} \hat{\epsilon}^* E^*,$$

где  $E$  и  $H$  — электрический и магнитный векторы поля, а  $E^*$  и  $H^*$  — комплексно сопряженные им векторы. В тензоре диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon}_{ij} \equiv \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_1 \quad (2)$$

можно выделить эрмитовскую и антиэрмитовскую части  $\hat{\epsilon}_0$  и  $\hat{\epsilon}_1$ . Считаем

$$|\hat{\epsilon}_1| \ll |\hat{\epsilon}_0|. \quad (3)$$

При обычном для геометрооптического приближения предположении, что компоненты  $\hat{\epsilon}$  являются медленно меняющимися функциями координат, решение (1) будем искать в виде

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{E}_0 + \frac{1}{k_0} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{k_0^2} \mathbf{E}_2 + \dots \right) \exp(iS), \quad (4)$$

$$\mathbf{E}^* = \left( \mathbf{E}_0^* + \frac{1}{k_0} \mathbf{E}_1^* + \frac{1}{k_0^2} \mathbf{E}_2^* + \dots \right) \exp(-iS^*),$$

где  $S$  — фаза,  $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots$  — амплитуды поля нулевого, первого и последующих приближений. Считая, как обычно, что фаза изменяется значительно быстрее, чем амплитуда, получим системы уравнений, описывающие поле в различных приближениях метода геометрической оптики:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{H}_0 = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 - \overset{\wedge}{\epsilon}_0 \mathbf{E}_0 = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{n}^* \times \mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0^* = 0, \quad -\mathbf{n}^* \times \mathbf{H}_0^* + \overset{\wedge}{\epsilon}_0^* \mathbf{E}_0^* = 0;$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_1 = i \frac{\omega}{c} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 - \overset{\wedge}{\epsilon}_0 \mathbf{E}_1 = i \frac{\omega}{c} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + \overset{\wedge}{\epsilon}_1 \mathbf{E}_0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^* \times \mathbf{E}_1^* + \mathbf{H}_1^* &= -i \frac{\omega}{c} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^*, \quad \mathbf{n}^* \times \mathbf{H}_1^* - \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* \mathbf{E}_1^* = \\ &= -i \frac{\omega}{c} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^* + \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* \mathbf{E}_0^* \quad \left( \mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \nabla S, \quad \mathbf{n}^* = \frac{c}{\omega} \nabla S^* \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Обратимся сначала к системе уравнений (5). Поскольку тензор нулевого приближения  $\overset{\wedge}{\epsilon}_0$  эрмитовский, то детерминанты первой и второй пар уравнений системы (5) будут вещественными. Как известно, равенство нулю этих детерминантов является условием существования нетривиального решения системы уравнений нулевого приближения. Тогда, исключая из рассмотрения неоднородные волны, можно считать, что  $S = S^*$ , т. е.  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^*$ . Уравнение эйконала запишется при этом следующим образом:

$$\| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{0ij} \| = \| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{0ij}^* \| = 0.$$

Условия разрешимости системы уравнений первого приближения (6), сводящиеся к требованию ортогональности их правых частей решениям транспонированной системы однородных уравнений нулевого приближения [1,4], имеют вид [3]

$$\mathbf{E}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_0^* \overset{\wedge}{\epsilon}_1 \mathbf{E}_0 = 0,$$

$$\mathbf{H}_0 \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^* - \mathbf{E}_0 \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^* - i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_0 \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* \mathbf{E}_0^* = 0,$$

$$\mathbf{E}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 + \mathbf{H}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 - i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_0^* \overset{\wedge}{\epsilon}_1 \mathbf{E}_0 = 0,$$

$$\mathbf{E}_0 \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0 \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^* + i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_0 \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* \mathbf{E}_0^* = 0.$$

Вычитая и складывая попарно два первых и два последних уравнения этой системы, получим

$$\operatorname{div} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0) - i \frac{\omega}{c} (\mathbf{E}_0 \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* \mathbf{E}_0^* - \mathbf{E}_0^* \overset{\wedge}{\epsilon}_1 \mathbf{E}_0) = 0,$$

$$E_0 \operatorname{rot} E_0^* + H_0 \operatorname{rot} H_0^* + E_0^* \operatorname{rot} E_0 + H_0^* \operatorname{rot} H_0 - i \frac{\omega}{c} \times$$

$$\times (H_0^* \overset{\wedge}{\epsilon}_1 E_0 - H_0 \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* E_0^*) = 0,$$

$$\operatorname{div} (E_0 \times E_0^* + H_0 \times H_0^*) - i \frac{\omega}{c} (H_0^* \overset{\wedge}{\epsilon}_1 E_0 + H_0 \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* E_0^*) = 0,$$

$$E_0^* \operatorname{rot} H_0 + H_0 \operatorname{rot} E_0^* - H_0^* \operatorname{rot} E_0 - E_0 \operatorname{rot} H_0^* -$$

$$- i \frac{\omega}{c} (E_0^* \overset{\wedge}{\epsilon}_1 E_0 + E_0 \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* E_0^*) = 0.$$

Полагая далее

$$E_0 = E_0^{(1)} + i E_0^{(2)}, \quad H_0 = H_0^{(1)} + i H_0^{(2)}, \quad (7)$$

а также учитывая, что антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости может быть записана в виде [5]

$$\overset{\wedge}{\epsilon}_1 = - i \frac{4\pi}{\omega} \overset{\wedge}{\sigma}, \quad \overset{\wedge}{\epsilon}_1^* = i \frac{4\pi}{\omega} \overset{\wedge}{\sigma}^*$$

(тензор проводимости  $\overset{\wedge}{\sigma}$  здесь является уже эрмитовским), представим последнюю систему уравнений следующим образом:

$$\operatorname{div} [E_0^{(1)} \times H_0^{(1)} + E_0^{(2)} \times H_0^{(2)}] + \frac{2\pi}{c} [E_0^{(1)} (\overset{\wedge}{\sigma} + \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(1)} + E_0^{(2)} (\overset{\wedge}{\sigma} + \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(2)}] = 0; \quad (8)$$

$$E_0^{(1)} \operatorname{rot} E_0^{(1)} + E_0^{(2)} \operatorname{rot} E_0^{(2)} + H_0^{(1)} \operatorname{rot} H_0^{(1)} + H_0^{(2)} \operatorname{rot} H_0^{(2)} - \frac{2\pi}{c} \{H_0^{(1)} (\overset{\wedge}{\sigma} + \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(1)} + H_0^{(2)} (\overset{\wedge}{\sigma} + \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(2)} + i [H_0^{(1)} (\overset{\wedge}{\sigma} - \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(1)} - H_0^{(2)} (\overset{\wedge}{\sigma} - \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(2)}]\} = 0;$$

$$E_0^{(1)} \operatorname{rot} H_0^{(2)} + H_0^{(2)} \operatorname{rot} E_0^{(1)} - E_0^{(2)} \operatorname{rot} H_0^{(1)} - H_0^{(1)} \operatorname{rot} E_0^{(2)} + \frac{2\pi i}{c} \{E_0^{(1)} (\overset{\wedge}{\sigma} - \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(1)} + E_0^{(2)} (\overset{\wedge}{\sigma} - \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(2)}\} = 0; \quad (10)$$

$$\operatorname{div} [E_0^{(1)} \times E_0^{(2)} + H_0^{(1)} \times H_0^{(2)}] + \frac{2\pi}{c} \{H_0^{(1)} (\overset{\wedge}{\sigma} + \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(2)} - H_0^{(2)} (\overset{\wedge}{\sigma} + \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(1)} - i [H_0^{(1)} (\overset{\wedge}{\sigma} - \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(1)} + H_0^{(2)} (\overset{\wedge}{\sigma} - \overset{\wedge}{\sigma}^*) E_0^{(2)}]\} = 0. \quad (11)$$

Если в (8) — (11) положить антиэрмитовскую часть тензора  $\overset{\wedge}{\epsilon}_{ij}$  равной нулю, т. е.

$$\overset{\wedge}{\sigma} = \overset{\wedge}{\sigma}^* = 0,$$

то эти уравнения совпадают с соответствующими уравнениями, полученными в [3], которые описывают изменение амплитуды и вращение векторов поля в непоглощающей гиротропной среде.

2. Представим векторы  $E_0$  и  $E_0^*$  в виде

$$E_0 = \frac{\Phi}{n} f, \quad E_0^* = \frac{\Phi^*}{n} f^*, \quad (12)$$

где  $\Phi$  — амплитуда в нулевом приближении, а  $f$  — вектор поляризации, компоненты которого определяются из соотношений

$$f_1/T_{1l} = f_2/T_{2l} = f_3/T_{3l} \quad (13)$$

( $T_{ij}$  — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы  $n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}$ ).

Отнормируем вектор поляризации на единицу, чтобы выполнялось условие  $ff^*=1$ . Тогда можно записать [3]

$$f = f_1 + if_2 = \alpha \mu + i\beta \nu, \quad (14)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  — единичные векторы в направлениях  $f_1$  и  $f_2$ , а  $\alpha = |f_1| = \cos \chi$ ,  $\beta = |f_2| = \sin \chi (\operatorname{tg} \chi = \beta/\alpha)$ . Подставляя соотношения (12) с учетом (14) в уравнение (8), получим

$$\operatorname{div} \left( \frac{\Phi^2}{n} \gamma s \right) + \frac{2\pi}{cn^2} \Phi^2 [\alpha^2 \mu (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \mu + \beta^2 \nu (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \nu] = 0, \quad (15)$$

где  $\gamma = |\alpha^2(\mu \times t \times \mu) + \beta^2(\nu \times t \times \nu)|$ ,  $t = n/n$ , а единичный вектор

$$s = \frac{1}{\gamma} [\alpha^2 (\mu \times t \times \mu) + \beta^2 (\nu \times t \times \nu)]$$

определяет направление потока энергии. Поскольку тензор  $\hat{\sigma}$  является эрмитовским, оператор  $(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*)$  — вещественный. Тогда чисто вещественным будет и уравнение (8), а вместе с ним и (15). В этом случае можно считать, что  $|\Phi|^2 = \Phi^2$ . Последнее учтено при переходе от (8) к (15). Решение уравнения (15) может быть записано следующим образом:

$$\Phi = \Phi_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \left\langle \operatorname{div} \left( \frac{\gamma}{n} s \right) + \frac{2\pi}{cn^2} [\alpha^2 \mu (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \mu + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \beta^2 \nu (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \nu] \right\rangle \frac{n}{\gamma} ds \right\}, \quad (16)$$

где  $s$  — параметр вдоль луча, а  $\Phi_0$  — значение функции  $\Phi$  в начальной точке  $s = s_0$ . Первый член в подынтегральном выражении в (16) определяет изменение амплитуды за счет расходности лучевой трубки, тогда как второй связан с поглощением в среде.

Рассмотрим несколько подробнее выражение, определяющее поглощение в гиротропной среде. Если изменить магнитное поле  $H_0$  на  $-H_0$ , то тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}_0$  изменится на транспонированный [5], так что уравнение эйконала в силу эрмитовости  $\hat{\epsilon}_0$  не изменит своего вида. Следовательно, как  $n$ , так и все связанные с ним величины, стоящие в подынтегральном выражении (16) ( $\gamma, s$  и т. д.), не изменятся. С другой стороны, из соотношений

$$\epsilon'_{ij}(H_0) = \epsilon'_{ji}(-H_0)$$

(см., например, [5], § 29) вытекает также аналогичное свойство и для тензора  $\hat{\sigma}$ . В силу эрмитовости  $\hat{\sigma}$  отсюда следует, что имеет место равенство

$$\hat{\sigma}(\mathbf{H}_0) + \hat{\sigma}^*(\mathbf{H}_0) = \hat{\sigma}(\mathbf{H}_0) + \hat{\sigma}(-\mathbf{H}_0).$$

Таким образом, мы видим, что в выражении, определяющем поглощение волны, члены, зависящие от  $\mathbf{H}_0$  и от  $-\mathbf{H}_0$ , равны друг другу. Отсюда следует, что в приближении геометрической оптики в предположении малости антиэрмитовой части тейзора диэлектрической проницаемости поглощение не меняется с изменением направления  $\mathbf{H}_0$  на обратное. Это верно лишь при соблюдении всех указанных ограничений. Если, например, не выполнено условие малости антиэрмитовой части  $\hat{\sigma}$  или распространение волн не может рассматриваться в рамках геометрической оптики, то данный вывод, вообще говоря, несправедлив.

3. Уравнения (9)–(11), так же, как и в среде без поглощения, описывают вращение и деформацию эллипса поляризации. Остановимся на этом несколько подробнее. Подставляя в (9)–(11) соотношения (12) с учетом (14), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} (\alpha^2 \mu \operatorname{rot} \mu + \beta^2 \nu \operatorname{rot} \nu) + \alpha^2 (\mathbf{t} \times \mu) \operatorname{rot} (\mathbf{t} \times \mu) + \\ & + \beta^2 (\mathbf{t} \times \nu) \operatorname{rot} (\mathbf{t} \times \nu) - \frac{2\pi}{cn} \{ \alpha^2 (\mathbf{t} \times \mu) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \mu + \\ & + \beta^2 (\mathbf{t} \times \nu) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \nu + i \alpha \beta [(\mathbf{t} \times \mu) (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \nu - (\mathbf{t} \times \nu) (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \mu] \} = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \mu \operatorname{rot} (\mathbf{t} \times \nu) + (\mathbf{t} \times \nu) \operatorname{rot} \mu - \nu \operatorname{rot} (\mathbf{t} \times \mu) - (\mathbf{t} \times \mu) \operatorname{rot} \nu + \\ & + \nabla \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} n \right) (\nu \times \mathbf{t} \times \mu) - \nabla \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} n \right) (\mu \times \mathbf{t} \times \nu) - \\ & - i \frac{2\pi}{cn} \left[ \frac{\alpha}{\beta} \mu (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \mu + \frac{\beta}{\alpha} \nu (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \nu \right] = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left\{ \Phi^2 \alpha \beta \left[ \frac{\mu \times \nu}{n^2} + \mathbf{t} (\mathbf{t} (\mu \times \nu)) \right] \right\} + \frac{2\pi}{cn} \Phi^2 [\alpha \beta [(\mathbf{t} \times \mu) \times \\ & \times (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \nu - (\mathbf{t} \times \nu) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \mu] - i [\alpha^2 (\mathbf{t} \times \mu) \times \\ & \times (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \mu + \beta^2 (\mathbf{t} \times \nu) (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \nu]] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения (17)–(19) вещественны, поскольку  $\hat{\sigma}$  — эрмитовский тензор, а  $(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*)$  — величина чисто мнимая. Эти уравнения неинвариантны относительно замены  $\mathbf{H}_0$  на  $-\mathbf{H}_0$ , поскольку в них входит величина  $(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*)$ , которая не сохраняется при такой замене. Это нетрудно понять, если учесть, что даже в случае однородной гиротропной среды поляризация волн существенно зависит от направления  $\mathbf{H}_0$ .

Введем подвижную тройку векторов, связанную с линией, касательной к которой в каждой точке является вектор  $\mathbf{t} = \mathbf{n}/n$ . Выберем, как и в [3], вектор поляризации  $\mathbf{f}$  так, чтобы его компонента вдоль  $\mathbf{t}$  была вещественна. Тогда, учитывая (14), можно представить векторы  $\mu$  и  $\nu$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu &= t \cos \theta + \sin \theta (N \cos \varphi + b \sin \varphi), \\ \nu &= N \cos \vartheta + b \sin \vartheta,\end{aligned}\quad (20)$$

где  $N$  — нормаль, а  $b$  — бинормаль к кривой  $t$ ,  $\theta$  — угол между  $t$  и  $\mu$ ,  $\varphi$  — угол между проекцией вектора  $\mu$  на поверхность  $S = \text{const}$  в той же точке и  $N$ , а  $\vartheta$  — угол между  $\nu$  и  $N$ .

Если теперь подставить выражения (20) в уравнения (17) — (19), принимая во внимание формулы Френе для кривой в пространстве и аналогичные формулы для кривой на поверхности [6,7], а также применить ряд векторных соотношений, вытекающих из этих формул [3], то после преобразований, аналогичных проведенным в работе [3], уравнения (17) — (19) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\alpha^2 \left\{ \frac{1}{n^2} \left( \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) - \left( \frac{\sin^2 \theta}{n^2} + 1 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta \cos \theta}{n^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \right\} - \beta^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \\ + \frac{\alpha^2 \sin \theta \cos \theta}{n^2} [\chi \sin \varphi + (\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi)] + \end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1 \right) \delta' + \beta^2 \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) \delta'' - \left[ \alpha^2 \left( 1 + \frac{\sin^2 \theta}{n^2} \right) + \beta^2 \left( 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{n^2} \right) \right] \sigma - \frac{2\pi}{cn} \{ \alpha^2 (t \times \mu) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \mu + \beta^2 (t \times \nu) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \nu + \right. \\ \left. + i \alpha \beta [(t \times \mu) (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \nu - (t \times \nu) (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \mu] \} = 0; \\ 2 \cos \theta \cos (\vartheta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sin \theta \left( \cos \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \sin \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + \\ + \sin (\vartheta - \varphi) (1 + \cos \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + 2 \sin \theta \sin (\vartheta - \varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \cos \theta \times \\ \times \left( - \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \right) + 4 \sin \theta \sin (\vartheta - \varphi) \sigma - \cos \theta \cos \vartheta \chi - \\ - \cos \theta (\gamma_1 \sin \vartheta + \gamma_2 \cos \vartheta) + \nabla \ln \left( \frac{\sigma}{\beta} n \right) (\nu \times t \times \mu) - \\ - \nabla \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} n \right) (\mu \times t \times \nu) - i \frac{2\pi}{cn} \left[ \frac{\alpha}{\beta} \mu (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \mu + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{\alpha} \nu (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \nu \right] = 0;\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \cos \theta \sin (\vartheta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\sin \theta}{n^2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \cos \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + \\ + (\mu \times \nu) \nabla \left( \frac{1}{n^2} \right) + \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \sin \theta \cos (\vartheta - \varphi) \frac{\partial (\vartheta - \varphi)}{\partial \tau} - \frac{\cos \theta}{n^2} \times \\ \times \left( \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \right) + \nabla \ln (\Phi^2 \alpha \beta) \left\{ \frac{\mu \times \nu}{n^2} + t [\mu \times \nu] \right\} + \end{aligned}\quad (23)$$

$$+ \frac{2\pi}{cn} \left\{ (t \times \mu) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \nu - (t \times \nu) (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^*) \mu - i \left[ \frac{\alpha}{\beta} (t \times \mu) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \mu + \frac{\beta}{\alpha} (t \times \nu) (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \nu \right] \right\} = 0,$$

где  $\tau, \xi, \zeta$  — переменные вдоль линий  $t, N$  и  $b$ . В уравнениях (21) — (23) использованы следующие обозначения:  $x$  — кривизна,  $\sigma$  — кручение кривой, касательной к которой является вектор  $t$ ;  $\delta_1, \nu_1$  и  $\gamma_1$  есть соответственно геодезическое кручение, нормальная и геодезическая кривизны линий  $N$ , а  $\nu_2$  и  $\gamma_2$  — нормальная и геодезическая кривизны линий  $b$ . Кроме того, через  $\delta'$ , равное  $\delta' = \delta(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (\nu_1 - \nu_2) \sin \varphi \cos \varphi$ ,  $\delta'' = \delta(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + (\nu_1 - \nu_2) \sin \vartheta \cos \vartheta$ , обозначены геодезические кручения проекции линии  $\mu$  на поверхности  $S = \text{const}$  и линии  $\nu$  на той же поверхности.

Таким образом, уравнения (15) и (21) — (23) определяют амплитуду поля, а также вращение и деформацию эллипса поляризации в приближении геометрической оптики при распространении волн в слабопоглощающей гиротропной среде.

4. Если выводы пп. 2 и 3 применить к случаю распространения радиоволн в ионосфере или экзосфере Земли, где для весьма широкого диапазона частот геометрическая оптика обычно применима, а поглощение, как правило, можно считать малым, то следует ожидать, что в точках, симметричных относительно плоскости магнитного экватора, на участках траекторий, которые также симметричны относительно этой плоскости, поглощение будет одинаково, а поляризация различна. Этот факт может быть использован, например, при определении ослабления низкочастотных волн свистового диапазона, распространяющихся в верхней ионосфере. В частности, можно ожидать, что, если луч симметричен относительно плоскости магнитного экватора, то, очевидно, ослабление будет одинаково при распространении с севера на юг и наоборот.

В заключение благодарю Б. Н. Гершмана за постоянное внимание к работе, а также Ю. А. Кравцова за обсуждение результатов и ряд полезных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, ДАН СССР, 43, 263 (1938); Труды ФИАН, 2, 1 (1940).
2. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Акуст. ж., 2, 173 (1956).
3. Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1108 (1966).
4. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математики, 1, ГИТТЛ, М., 1951.
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. М. Лагалли, Векторное исчисление, ОНТИ-НКТП, М., 1936.
7. П. К. Ращевский, Курс дифференциальной геометрии, ГИТТЛ, М., 1950.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 августа 1966 г

#### THE GEOMETRICAL OPTICS APPROXIMATION IN THE THEORY OF PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN GYROTROPIC MEDIUM WITH WEAK ABSORPTION

*Yu. Ya. Yashin*

The problem of propagation of electromagnetic waves in a weakly-absorbing gyrotropic medium is considered in the case when the geometrical optics approximation is valid. There are obtained and discussed the equations describing the behaviour of the field amplitude, as well as the rotation of the field vectors.

УДК 621.371.162

## ЭФФЕКТИВНАЯ ПЛОЩАДЬ РАССЕЯНИЯ ОБЪЕКТОВ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ИХ НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ

*H. K. Волотовская*

Рассмотрено отражение радиоволн сантиметрового и дециметрового диапазонов от объектов, расположенных на поверхности суши или моря. Показано, что, если объект находится в области тени или в дальней части освещенной области и имеет небольшую высоту над поверхностью Земли или моря (от нескольких метров до нескольких десятков метров, в зависимости от длины волны), то для него можно ввести понятие эффективной площади рассеяния таким образом, что она не будет зависеть ни от расстояния до излучателя, ни от высоты излучателя, а будет определяться исключительно свойствами самого объекта (его размерами, формой, ориентацией) и длиной волны.

Как известно, рассеивающие свойства объекта, находящегося в свободном пространстве, полностью определяются эффективной площадью рассеяния. Величина этой площади при заданной длине волны зависит только от характера рассеивающего объекта (его размеров, формы, ориентации) и в приближении Кирхгофа определяется формулой [1]

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left[ \int_S (\mathbf{n} \mathbf{n}_1) \exp(-2iknr) dS \right]^2, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $dS$  — элемент поверхности объекта,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении падающей волны,  $\mathbf{n}_1$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности объекта,  $r$  — расстояние между элементами поверхности объекта и произвольной точкой на нем, принятой за начало координат.

Если же рассеивающий объект расположен вблизи поверхности земли, то невозможно, вообще говоря, охарактеризовать его отражательную способность какой-либо величиной, не зависящей от положения излучателя и рассеивателя относительно земной поверхности. Это объясняется тем, что в области пространства, где существенны отражение радиоволн от земной поверхности и их дифракция, интенсивность рассеянного поля зависит не только от расстояния до излучателя, но и от высоты излучателя и точки наблюдения над поверхностью.

Действительно, амплитуды компонент электромагнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , создаваемого дипольным излучателем, расположенным на высоте  $h_1$  над поверхностью в точке, находящейся на расстоянии  $R$  от него на высоте  $h_2$ , пропорциональны так называемой «функции ослабления»  $V(x_1, y_1, y_2, q)$  [2,3], где  $x$  — приведенное расстояние,  $y_{1,2}$  — приведенные высоты  $h_1$  и  $h_2$ ,  $q$  — параметр, характеризующий проводимость поверхности.

Параметр  $q$  зависит от рода поляризации излучения. Для вертикальной поляризации

$$q = iM \frac{(\epsilon - 1 + i4\pi\eta/\omega)^{1/2}}{\epsilon + i4\pi\eta/\omega},$$

а для горизонтальной

$$q' = q \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\eta}{\omega} \right) = iM \left( \varepsilon - 1 + i \frac{4\pi\eta}{\omega} \right)^{1/2}.$$

Здесь  $M = (ka^*/2)^{1/3}$  — большой параметр,  $\eta$  — проводимость земли,  $a^*$  — эффективный радиус Земли, учитывающий рефракцию в атмосфере,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость земли,  $\omega$  — круговая частота.

При длинах волн, используемых в настоящее время в радиолокации, величины  $q$  и  $q'$  велики. При этом можно с хорошей точностью считать  $q \rightarrow \infty$  [3], что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Повторяя вывод, аналогичный выводу формулы (1) (разница состоит лишь в том, что компоненты падающего поля  $E$  и  $H$  умножаются на функцию ослабления), нетрудно получить формулу для эффективной площади рассеяния объекта в неоднородном поле [1,4]:

$$\sigma = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left[ \int_S V^2(x_1, y_1, y_2, \infty) (\mathbf{n}n_1) \exp(-2iknr) dS \right]^2, \quad (2)$$

где  $V(x_1, y_1, y_2, \infty)$  — функция ослабления, учитывающая влияние поверхности Земли;  $x = M\bar{R}/a^*$  — приведенное расстояние от РЛС до объекта;  $y_1 = kh_1/M$  — приведенная высота антенны;  $y_2 = kh_2/M$  — переменная приведенная высота точки наблюдения на объекте. Заметим, что  $\sigma$  имеет размерность площади и входит в основное уравнение радиолокации для неоднородного поля следующим образом:

$$P_{\text{пр}} = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}, \quad (3)$$

где  $P_t$  — мощность передатчика,  $R$  — расстояние от РЛС до произвольно выбранной точки объекта,  $P_{\text{пр}}$  — принятая мощность.

Величина  $\sigma$  сложным образом зависит от  $x, y_1$  и  $y_2$ , поэтому пользоваться ею для характеристики объекта неудобно. Тем же недостатком обладают и другие определения понятия эффективной площади рассеяния в неоднородном поле [1,5].

Положение существенно упрощается, если высота объекта настолько мала, что  $y_2 < 1$ . В этом случае функцию  $V(x_1, y_1, y_2, \infty)$  можно разложить в ряд по степеням  $y_2$  и ограничиться первым неисчезающим членом разложения (см. Приложение). Поскольку  $V(x_1, y_1, 0, \infty) = 0$ , то разложение начинается с линейного члена:

$$V(x_1, y_1, y_2, \infty) = y_2 \Phi(x_1, y_1) + \dots, \quad (4)$$

где функция

$$\Phi(x_1, y_1) = \frac{\partial V(x_1, y_1, y_2, \infty)}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} \quad (5)$$

табулирована в работе [3]

Подставляя (4) в (2), получим

$$\sigma = \sigma_n [\Phi(x_1, y_1)]^4, \quad (6)$$

где  $\sigma_n$  — эффективная площадь рассеяния объекта в неоднородном поле, выражаящаяся формулой

$$\sigma_n = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left[ \int_S y_2^2 (\mathbf{n}n_1) \exp(-2iknr) dS \right]^2 \quad (7)$$

и зависящая только от свойств отражающего объекта и от высоты, на которую поднят объект относительно поверхности Земли. Этой величиной пользоваться столь же удобно, как и обычной площадью рассеяния для свободного пространства. Очевидно, что значения  $y_2$ , для которых справедливо приближение (4), зависят от соотношения между  $x$  и  $y_1$ , т. е. от того, в какой зоне находится цель. Хорошо известно [2,3], что в области тени и полутени функция ослабления  $V(x_1, y_1, y_2, \infty)$  зависит от  $y_2$  практически линейно вплоть до  $y_2 = 1$ , в то время как в освещенной зоне линейный характер имеет место только на очень малых высотах (под первым лепестком диаграммы направленности). В Приложении вычислен следующий член разложения (4) и приведена оценка, подтверждающая этот вывод.

Следовательно, формула (7) может иметь практический интерес лишь в случае, когда объект находится в области тени, полутени и в дальней части освещенной области. Предельные высоты объекта, для которых справедлива формула (7), определяются соотношением

$$y_{2\max} = 1. \quad (8)$$

Зависимость максимальной высоты цели  $h_{2\max}$  от длины волны при  $a^* = 10000 \text{ км}$  изображена на рис. 1 [3]. Из рис. 1 видно, что в диапазоне волн порядка 3 см формула (7) справедлива только для очень низких объектов (высотой 5–7 м), однако уже для дециметрового диапазона ( $\lambda > 10 \text{ см}$ ) формула (7) пригодна при высоте объектов до  $20 \div 40 \text{ м}$ .

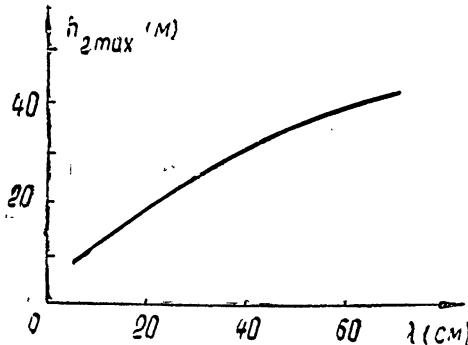


Рис. 1.

Подставляя (6) в (3), можно получить основное уравнение радиолокации в области тени и полутени в виде

$$P_{\text{пр}} = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma_n}{(4\pi)^3 R^4} \Phi^i(x_1, y_1), \quad (9)$$

где  $\sigma_n$  — эффективная площадь рассеяния объекта в неоднородном поле (в области тени, полутени и в дальней части освещенной области).

В ряде случаев возможны дальнейшие упрощения. Если, например,  $y_1$  также мало, то  $\Phi(x_1, y_1)$  можно разложить в ряд по степеням  $y_1$ :

$$\Phi(x_1, y_1) = F(x) y_1 + \dots, \quad (10)$$

причем функция  $F(x) = \partial^2 V(x_1, y_1, y_2, \infty) / \partial y_1 \partial y_2$  табулирована [3]. Если же  $y_1$  велико, то  $\Phi(x_1, y_1)$  зависит только от одной переменной  $z = x - \sqrt{y_1}$  и

$$\Phi(x_1, y_1) = \exp\left(i \frac{2}{3} y_1^{3/2}\right) \Phi_1(z),$$

где

$$\Phi_1(z) = -\lim_{q \rightarrow \infty} q V_1(z, q).$$

(Функция  $V_1(z, q)$  подробно исследована Фоком [2]. При этом формула (7) справедлива, если  $y_2 < 1$  и  $z > -1$ .)

В заключение отметим, что в области тени можно получить формулу, аналогичную (7), без предположения о малости высоты объекта. Действительно, в этой области для сантиметрового диапазона волн и морской поверхности [2]

$$V(x_1, y_1, y_2, \infty) = -\exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) 2 \sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \exp(ixt_s) g_s(y_1) g_s(y_2). \quad (11)$$

Здесь  $t_s$  — корни уравнения  $w(t_s) = 0$ ,  $g_s(y_{1,2}) = w(t_s - y_{1,2})/w(t_s)$  — высотные множители, табулированные в [1].

Подставляя (11) в (2), получим формулу для  $\sigma_{\text{тени}}$  — эффективной площади рассеяния в области тени, аналогичную (7):

$$\sigma_{\text{тени}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left[ \int_S g_1^2(y_2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) \exp(-2iknr) dS \right]^2. \quad (12)$$

Так как  $g_1(y_2)$  является функцией только  $y_2$ , то  $\sigma_{\text{тени}}$ , найденная по этой формуле, полностью определяется характером объекта и положением его относительно поверхности Земли.

Из графиков, приведенных в [3], следует, что для диапазона волн (3—100 см) и высоты антенн 15—25 м граница области тени лежит приблизительно на расстоянии 40 км от РЛС, т. е. формула (12) применима для объектов, находящихся на расстоянии 40 км и дальше.

Полученные в данной работе формулы (7) и (12) определяют величину эффективной площади рассеяния наземных и надводных объектов, которая зависит только от геометрических размеров объекта и от длины волны. При этом формула (7) верна, если приведенная высота объекта меньше или порядка единицы (для диапазона волн 10—50 см это соответствует высоте 15—40 м), в то время как формулой (12) можно пользоваться для любых приведенных высот. Однако формула (12) справедлива лишь в области тени, где можно ограничиться первым членом ряда (11); в этом смысле применимости формулы (7) для  $\lambda \geq 10$  см (или небольших объектов) шире, так как она верна даже для освещенной области, если объекты находятся под склоном первого лепестка диаграммы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л. И. Богину за обсуждение работы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем Приложении получены некоторые формулы, использованные в тексте. Покажем, что в формуле (4) можно ограничиться линейным членом разложения. Для этого составим выражение для функции ослабления при  $q = \infty$  [3]:

$$V(x_1, y_1, y_2, \infty) = -\exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) 2 \sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \exp(ixt_s) \frac{w(t_s - y_1)}{w'(t_s)} \frac{w(t_s - y_2)}{w'(t_s)}, \quad (1.1)$$

где  $t_s$  — корни уравнения  $w(t_s) = 0$ .

Напишем разложение функции Эйри  $w(t_s - y_2)$  по  $y_2$ :

$$w(t_s - y_2) = w(t_s) - w'(t_s)y_2 + \frac{1}{2}w''(t_s)y_2^2 - \frac{1}{6}w'''(t_s)y_2^3. \quad (2.\Pi)$$

Из дифференциального уравнения для функции Эйри находим

$$w''(t_s) = t_s w(t_s) = 0 \quad (3.\Pi)$$

и

$$w'''(t_s) = [tw(t_s)]' = w(t_s) + t_s w'(t_s) = t_s w(t_s). \quad (4.\Pi)$$

Следовательно,

$$w(t_s - y_2) = -w'(t_s) \left[ y_2 + \frac{t_s}{6}y_2^3 \dots \right]. \quad (5.\Pi)$$

Подставляя (5 П) в (1 П) и вынося  $\sqrt{x}$  отдельным множителем, получим

$$V(x_1, y_1, y_2, \infty) = \sqrt{x} \left[ y_2 \Phi_1(x_1, y_1) - \frac{i}{6} y_2^3 \frac{\partial \Phi_1(x_1, y_1)}{\partial x} \dots \right], \quad (6.\Pi)$$

так

$$\sqrt{x} \Phi_1(x_1, y_1) = \Phi(x_1, y_1). \quad (7.\Pi)$$

Пользуясь выражением (10), функцию  $\Phi(x_1, y_1)$  можно представить в виде сходящихся рядов при  $x \geq 1$ . Так как при этом члены с большим « $s$ » несущественны, а при конечных « $s$ »  $t_s$  порядка единицы [2], то  $\Phi(x_1, y_1)$  и  $\partial \Phi(x_1, y_1)/\partial x$  в этой области — величины одного порядка; отсюда видно, что при условии  $y_2 < 1$  второй член в выражении (6.П) мал по сравнению с первым.

Таким образом, разложение (4) применимо, если  $y_2 < 1, x \geq 1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Распространение ультракоротких волн, под ред. Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио. М., 1954.
- 2 В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.
- 3 П. А. Азриянт, М. Г. Белкина, Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1957.
- 4 В. А. Фок, ЖЭТФ, 15, вып. 12, 693 (1945).
- 5 В. П. Пересада, Радиолокационная видимость морских объектов, изд. Судпромгиз, Л., 1961.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию

30 июня 1966 г.

## OBJECT EFFECTIVE SCATTERING AREA WHEN ILLUMINATING BY AN INHOMOGENEOUS FIELD

N. K. Volotovskaya

Centimeter and decimeter radio wave reflection from the objects situated on the land or sea surface is considered. It is shown that if the object is in the shade region or in a far zone of the illuminated region and has a small height above the land or sea surface (several meters to several tens of meters depending on the wavelength), then the notion of an effective scattering area may be used for the object so that it will not depend neither on the distance from the radiator nor on its height but it will be determined exclusively by the properties of the object itself (its sizes, form, orientation) and the wavelength.

УДК 621.317.743.5

## ОЦЕНКА ФЛУКТУАЦИОННОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРИЕМНИКА С МОДУЛЯЦИЕЙ ПО УПЧ

B. C. Аблязов

Рассматривается флуктуационная чувствительность модуляционного измерительного СВЧ приемника (с модуляцией сигнала на промежуточной частоте) при компенсации паразитной модуляции шумов противофазно модулированными шумами компенсационного генератора шума

В связи с широким применением модуляционного метода измерения СВЧ сигнала с помощью модуляций измеряемого сигнала на промежуточной частоте при компенсации паразитной модуляции собственных шумов приемника [1] появилась необходимость оценки флуктуационной чувствительности измерительных приемников, разработанных на этом принципе.

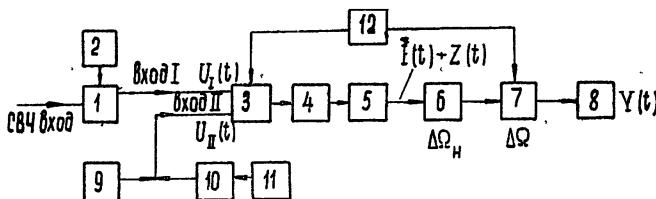


Рис. 1. Блок-схема измерения СВЧ сигнала:

1—смеситель, 2—гетеродин, 3—электронный переключатель, 4—усилитель промежуточной частоты, 5—квадратичный детектор, 6—избирательный усилитель частоты модуляции, 7—фазовый детектор, 8—выходной индикатор, 9—компенсационный генератор шума, 10—образцовый ослабитель, 11—генератор промежуточной частоты, 12—задающий генератор.

В соответствии с блок-схемой рис. 1 измерение СВЧ сигнала производится методом сравнения преобразованного сигнала с выхода смесителя 1 с сигналом генератора промежуточной частоты 11, проходящего через образцовый ослабитель 10. Возникающая при модуляции УПЧ паразитная модуляция собственных шумов приемника компенсируется противофазно модулированными шумами компенсационного генератора шума 9.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА НИЗКОЧАСТОТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ВЫХОДЕ КВАДРАТИЧНОГО ДЕТЕКТОРА.

Обозначая напряжения суммарных шумов, приведенные к входам I и II (см. рис. 1), через  $U_I(t)$ ,  $U_{II}(t)$ , коэффициенты передачи приемника до квадратичного детектора 5 — соответственно через  $K_I(t)$ ,  $K_{II}(t)$ , а коэффициент передачи детектора — через  $\beta$ , получим выражение тока детектора  $I_d(t)$ :

$$I_d(t) = \beta [U_I(t)K_I(t) + U_{II}(t)K_{II}(t)]^2. \quad (1)$$

Коэффициенты передачи  $K_I(t)$  и  $K_{II}(t)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} K_I(t) &= K_1 m_1(t) [1 + \alpha_I(t)], \\ K_{II}(t) &= K_2 m_2(t) [1 + \alpha_{II}(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — коэффициенты усиления со входов I и II,  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$  — регулярные периодические функции с периодом модуляции сигналов по УПЧ и единичной амплитудой,  $\alpha_I(t)$  и  $\alpha_{II}(t)$  — случайные процессы, учитывающие флуктуации коэффициентов усиления со входов I и II.

В общем случае процессы  $\alpha_I(t)$  и  $\alpha_{II}(t)$  и напряжения  $U_I(t)$  и  $U_{II}(t)$  частично коррелированы (в первую очередь за счет общего УПЧ, включенного после электронного переключателя). Считая  $K_1^2 \beta = 1$ ,  $m_1(t) + m_2(t) = 1$ , а  $U_I(t)$ ,  $U_{II}(t)$ ,  $\alpha_I(t)$  и  $\alpha_{II}(t)$  — стационарными и обозначая регулярную составляющую тока детектора через  $\tilde{I}_d(t)$ , получим выражение для функции корреляции  $\overline{ZZ}_\tau$  нестационарного случайного процесса  $Z(t) = I_d(t) - \tilde{I}_d(t)$ :

$$\begin{aligned} \overline{ZZ}_\tau &= \sigma_I^2 R_I^2(\tau) + b^2 \sigma_{II}^2 R_{II}^2(\tau) + 4b\sigma_I^2 \sigma_{II}^2 \overline{\alpha_0 \alpha_{0\tau}} + \\ &+ 4\overline{m_1 m_{1\tau}} [(\sigma_I^2 - b\sigma_{II}^2)^2 \overline{\alpha_0 \alpha_{0\tau}} + \sigma_I^4 \overline{\alpha_1 \alpha_{1\tau}} + b^2 \sigma_{II}^4 \overline{\alpha_2 \alpha_{2\tau}}], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\sigma_I^2 = \overline{U_I^2(t)}$ ,  $\sigma_{II}^2 = \overline{U_{II}^2(t)}$  — дисперсии шумов, приведенные ко входам I и II;  $R_I(\tau)$ ,  $R_{II}(\tau)$  — соответствующие коэффициенты корреляции напряжений  $U_I(t)$ ,  $U_{II}(t)$ ;  $b = K_2^2 K_1^{-2}$  — отношение квадратов коэффициентов усиления;  $\alpha_0 \alpha_{0\tau}$  — функция корреляции коррелированной составляющей процессов  $\alpha_I(t)$  и  $\alpha_{II}(t)$ ;  $\alpha_1 \alpha_{1\tau}$ ,  $\alpha_2 \alpha_{2\tau}$  — соответствующие функции корреляции некоррелированных составляющих тех же процессов ( $\alpha_I(t) = \alpha_1 + \alpha_0$ ,  $\alpha_{II}(t) = \alpha_2 - \alpha_0$ ). Поскольку считалось, что ширина полосы пропускания УПЧ много больше частоты модуляции, то в (3) не вошли члены, учитывающие корреляцию шумов  $U_I(t)$  и  $U_{II}(t)$ .

С помощью преобразований Н. Винера и А. Я. Хинчина получим выражение спектра интенсивности флуктуаций процесса  $Z(t)$  в случае, когда  $m_1(t)$  — меандр:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [\sigma_I^4 R_I^2(\tau) + b^2 \sigma_{II}^4 R_{II}^2(\tau)] \cos(\omega\tau) d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [(\sigma_I^2 + b\sigma_{II}^2)^2 \overline{\alpha_0 \alpha_{0\tau}} + \sigma_I^4 \overline{\alpha_1 \alpha_{1\tau}} + b^2 \sigma_{II}^4 \overline{\alpha_2 \alpha_{2\tau}}] \cos(\omega\tau) d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [(\sigma_I^2 - b\sigma_{II}^2)^2 \overline{\alpha_0 \alpha_{0\tau}} + \sigma_I^4 \overline{\alpha_1 \alpha_{1\tau}} + b^2 \sigma_{II}^4 \overline{\alpha_2 \alpha_{2\tau}}] \cos(\omega\tau) \times \\ &\times \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^\infty \sin(\pi i/2) i^{-2} \cos(\Omega\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Omega$  — частота модуляции,  $i$  — целые числа  $(1, 2, 3, \dots)$ .

Первый тензорный интеграл выражения (4) представляет собой спектр интенсивности флуктуаций на выходе квадратичного детектора без учёта

флуктуаций коэффициентов усиления, второй — «аномальный» спектр, обусловленный флуктуациями коэффициентов усиливий, и третий — спектр, обусловленный воздействием флуктуаций коэффициентов усиливий на составляющие регулярной модуляции шумов.

В соответствии с этим удобно спектр интенсивности флуктуаций представить в виде суммы трех отдельных спектров:

$$G(\omega) = G_0(\omega) + G_a(\omega) + G_{am}(\omega). \quad (5)$$

Первый спектр  $G_0(\omega)$  содержит два однотипных интеграла, обусловленных детектированием шумов  $U_1(t)$  и  $U_{II}(t)$ , которые в общем случае дают интересующий нас низкочастотный спектр  $G_0^*(\omega)$  и высокочастотный (на двойной частоте УПЧ) спектр  $G_0^B(\omega)$  [2].

При полосе пропускания УПЧ  $\Delta\omega$ , близкой по форме к прямоугольной, в диапазоне интересующих нас частот  $0 < \omega \ll \Delta\omega$  первый интеграл дает равномерный низкочастотный спектр

$$G_0(\omega) \simeq G_0(0) = \frac{\sigma_1^4}{\Delta\omega_I} + \frac{\sigma_{II}^4}{\Delta\omega_{II}} b^2, \quad (6)$$

где  $\Delta\omega_I$  и  $\Delta\omega_{II}$  — полосы пропускания соответственно со входов I и II.

Второй интеграл выражения (4), определяющий спектр  $G_a(\omega)$  с полосой до 30—50 Гц при частоте модуляции УПЧ более 400 Гц, практически не дает заметного вклада во флуктуационную чувствительность, поэтому в дальнейшем он не учитывается.

Спектр  $G_{am}(\omega)$ , в свою очередь, состоит из трех частей, обусловленных тремя составляющими коэффициентов флуктуаций  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , спектр каждой из которых перенесен на частоты  $\Omega$ ,  $3\Omega$ ,  $5\Omega$  и т. д.

Поскольку избирательный усилитель настроен на частоту  $\Omega$ , рассмотрим только спектр  $G_{am}^*(\omega)$  вблизи частоты  $\Omega$  в предположении, что функции корреляции  $\overline{\alpha_0\alpha_{0\tau}}$ ,  $\overline{\alpha_1\alpha_{1\tau}}$  и  $\overline{\alpha_2\alpha_{2\tau}}$  можно представить в виде [3]

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_0\alpha_{0\tau}} &= \overline{\alpha_0^2} \exp \left[ - \left| \frac{2\Delta\Omega_0}{\pi} \tau \right| \right], \\ \overline{\alpha_1\alpha_{1\tau}} &= \overline{\alpha_1^2} \exp \left[ - \left| \frac{2\Delta\Omega_1}{\pi} \tau \right| \right], \\ \overline{\alpha_2\alpha_{2\tau}} &= \overline{\alpha_2^2} \exp \left[ - \left| \frac{2\Delta\Omega_2}{\pi} \tau \right| \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Delta\Omega_0$ ,  $\Delta\Omega_1$ ,  $\Delta\Omega_2$  — эффективные полосы соответствующих спектров флуктуаций  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , а  $\overline{\alpha_0^2}$ ,  $\overline{\alpha_1^2}$ ,  $\overline{\alpha_2^2}$  — средние значения их квадратов. Тогда

$$\begin{aligned} G_{am}^*(\omega) &= \frac{4}{\pi^2} \left[ (\sigma_1^2 - b\sigma_{II}^2)^2 \frac{\overline{\alpha_0^2}\Delta\Omega_0}{\Delta\Omega_0^2 + (\pi^2/4)(\omega - \Omega)^2} + \sigma_1^4 \frac{\overline{\alpha_1^2}\Delta\Omega_1}{\Delta\Omega_1^2 + (\pi^2/4)(\omega - \Omega)^2} + \right. \\ &\quad \left. + b^2\sigma_{II}^4 \frac{\overline{\alpha_2^2}\Delta\Omega_2}{\Delta\Omega_2^2 + (\pi^2/4)(\omega - \Omega)^2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФЛУКТУАЦИОННОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИЕМНИКА

После прохождения спектра  $G(\omega)$  через избирательный усилитель 6 с полосой  $\Delta\Omega_H$  и преобразования в фазовом детекторе 7 с полосой на

выходе  $\Delta\Omega^*$  ( $\Delta\Omega \ll \Delta\Omega_H$ ) с учетом нестационарности процесса  $Z(t)$  [4] получим выражение интенсивности флюктуаций  $\bar{Y}^2$  на выходе приемника:

$$\bar{Y}^2 = \frac{K_y^2 \Delta\Omega}{2} \left[ \left( \frac{\sigma_I^4}{\Delta\omega_I} + \frac{\sigma_{II}^4}{\Delta\omega_{II}} b^2 \right) + (\sigma_I^2 - b\sigma_{II}^2)^2 \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{2\bar{\alpha}_0^2}{\Delta\Omega_0} + \frac{\bar{\alpha}_1^2}{\Delta\Omega_1} + \frac{\bar{\alpha}_2^2}{\Delta\Omega_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi^2} \left( \sigma_I^4 \frac{\bar{\alpha}_1^2}{\Delta\Omega_1} + b^2 \sigma_{II}^4 \frac{\bar{\alpha}_2^2}{\Delta\Omega_2} \right) \right], \quad (9)$$

где  $K_y$  — коэффициент передачи усилителей (6) и (7).

Приравняв, согласно определению [3], приращение показания выходного индикатора за счет некоторой мощности СВЧ сигнала  $(\delta P)$  среднеквадратичному отклонению  $\sqrt{\bar{Y}^2}$ , получим выражение флюктуационной чувствительности приемника по мощности:

$$\delta P = \frac{k}{2} \sqrt{(T_I^2 + nT_{II}^2)/2} \sqrt{\Delta\Omega \Delta\omega_I} \left\{ 1 + \frac{4\Delta\omega_I}{\pi^2 (T_I^2 + nT_{II}^2)} \left[ (T_I - nT_{II})^2 \times \right. \right. \\ \left. \times \left( \frac{2\bar{\alpha}_0^2}{\Delta\Omega_0} + \frac{\bar{\alpha}_1^2}{\Delta\Omega_1} + \frac{\bar{\alpha}_2^2}{\Delta\Omega_2} \right) + T_I^2 \frac{\bar{\alpha}_1^2}{\Delta\Omega_1} + n^2 T_{II}^2 \frac{\bar{\alpha}_2^2}{\Delta\Omega_2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана;  $T_I, T_{II}$  — эквивалентные температуры шумов приемника, приведенные со входов I и II ко входу смесителя 1;  $n = \Delta\omega_I/\Delta\omega_{II}$  — отношение полос.

Следует отметить, что хотя формула (10) получена при условии, что  $U_I(t)$  и  $U_{II}(t)$  модулируются на 100%, она справедлива, когда немодулированная часть шумов велика и действительный процент модуляции существенно меньше 100. Например, при СВЧ модуляции сигнала на входе приемника собственные шумы последнего совсем не будут подвержены модуляции и процент модуляции может быть равным даже нулю. Справедливость формулы (10) для малого процента модуляции следует из того, что (как уже было отмечено выше) спектр шумов на выходе детектора при  $\Delta\omega \gg \Omega$  не зависит от степени корреляции шумов, приведенных на входы I и II модулятора З со 100% модуляцией.

Учет же флюктуации коэффициентов усиления для различной степени модуляции проводится автоматически при определении степени корреляции коэффициентов  $\alpha_I(t)$  и  $\alpha_{II}(t)$ .

### 3. ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ФЛЮКТУАЦИОННОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РАДИОМЕТРИЧЕСКИХ ПРИЕМНИКОВ С МОДУЛЯЦИЕЙ ПО УПЧ

Рассмотрим частные случаи применения формулы (10) для оценки чувствительности.

1) Пусть  $\Delta\omega_I = \Delta\omega_{II} = \Delta\omega$ , а флюктуации коэффициентов усиления полностью коррелированы, т. е.  $\alpha_I = \alpha_{II} = 0$ . Тогда

$$\delta P = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{T_I^2 + T_{II}^2}{2}} \sqrt{\Delta\Omega \Delta\omega} \left[ 1 + \frac{(T_I - T_{II})^2}{T_I^2 + T_{II}^2} \frac{8\Delta\omega \bar{\alpha}_0^2}{\pi^2 \Delta\Omega_0} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

\* Для простого  $RC$ -фильтра  $\Delta\Omega = \pi/2RC$ .

2) Если  $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_{II} = \Delta\omega$ , а флуктуации коэффициентов усиления слабо коррелированы, т. е.  $\alpha_0 \approx 0$ , тогда

$$\delta P = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{T_1^2 + T_{II}^2}{2}} \sqrt{\Delta\Omega\Delta\omega} \left\{ 1 + \frac{4\Delta\omega}{\pi^2(T_1^2 + T_{II}^2)} \right\} (T_1 - T_{II})^2 \times \\ \times \left( \frac{\overline{\alpha_1^2}}{\Delta\Omega_1} + \frac{\overline{\alpha_2^2}}{\Delta\Omega_2} \right) + T_1^2 \frac{\overline{\alpha_1^2}}{\Delta\Omega_1} + T_{II}^2 \frac{\overline{\alpha_2^2}}{\Delta\Omega_2} \Biggr\}^{1/2}. \quad (12)$$

Из сравнения выражений (11) и (12) следует, что чувствительность приемника при тех же  $T_1$  и  $T_{II}$  тем выше, чем более коррелированы флуктуации коэффициентов усиления по каналам I и II. Случай полной корреляции является предельным для измерительного приемника.

Практически для измерительных приемников с хорошим УПЧ (без специально принятых мер к снижению флуктуаций коэффициентов усиления) при коэффициенте шума смесителя приемника выше 20 дБ коэффициенты флуктуаций  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_{II}(t)$  можно считать слабо коррелированными. В этом случае наибольший интерес представляет режим полной компенсации паразитной модуляции ( $T_1 = T_{II} = FT_0$ ) при  $\Delta\omega_1 \approx \Delta\omega_{II} = \Delta\omega$ . Обычно в таких приемниках  $(\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1 + \overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2) \gg \pi^2/2\Delta\omega$ , поэтому

$$\delta P = \frac{kT_0 F \Delta\omega}{2\pi} \left[ 2\Delta\Omega \left( \frac{\overline{\alpha_1^2}}{\Delta\Omega_1} + \frac{\overline{\alpha_2^2}}{\Delta\Omega_2} \right) \right]^{1/2}, \quad (13)$$

где  $F$  — коэффициент шума приемника,  $T_0 = 293^\circ\text{K}$ .

Из выражения (13) видно, что в случае достаточно больших средних спектральных плотностей интенсивностей флуктуаций  $(\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1 + \overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2)$  некоррелированных коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  флукуационная чувствительность пропорциональна первой степени полосы пропускания до детектора, а не  $\sqrt{\Delta\omega}$ . Поэтому с точки зрения чувствительности целесообразно полосу УПЧ уменьшить, так как это даст чистый выигрыш по чувствительности.

Следовательно, основным условием выбора полосы пропускания УПЧ приемника в этом случае будет условие «удержания» промежуточной частоты в пределах плоской вершины полосы УПЧ при заданных нестабильностях частот сигнала и гетеродина. С учетом нестабильностей существующих СВЧ генераторов сантиметрового диапазона волн полоса УПЧ в измерительных приемниках и взята в пределах 10—15 МГц.

Таким образом, можно отметить следующие основные пути повышения флукуационной чувствительности для измерения дискретных сигналов: 1) уменьшение коэффициента шума приемника; 2) увеличение степени корреляции флуктуаций коэффициентов передачи по входам I и II; 3) снижение спектральных плотностей интенсивностей флуктуаций  $\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1$  и  $\overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2$ ; 4) увеличение времени накопления сигнала (уменьшение полосы  $\Delta\Omega$  после детектора); 5) разумное сужение полосы пропускания приемника до детектора (особенно при  $(\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1 + \overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2) \gg \pi^2/2\Delta\omega$ , когда  $\delta P \equiv \Delta\omega$ ).

Для измерения шумовых сигналов первые четыре пункта также справедливы. В последнем пункте следует учитывать, что мощность шумового сигнала пропорциональна полосе ( $\delta P = k\delta T\Delta\omega/2\pi$ ), поэтому чувствительность в градусах ( $\delta T$ ) будет обратно пропорциональна кор-

нию из полосы ( $\delta T \equiv (\Delta\omega)^{-1/2}$ ), а в случае  $(\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1 + \overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2) \gg \pi^2/2\Delta\omega$  не будет зависеть от полосы.

#### 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера был произведен расчет чувствительности приемника для случая полной компенсации паразитной модуляции шумов при  $F = 100$ ,  $\Delta\omega = 2\pi \cdot 10^7$ ,  $\Delta\Omega = \pi/8$  и некоррелированных флуктуаций коэффициентов усиления с  $\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1 = \overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2 = 10^{-6}$ . Из формулы (12) тогда следует, что  $\delta P = 5 \cdot 10^{-15} \text{ вт}$ . В случае коррелированных флуктуаций коэффициентов усиления при тех же параметрах приемника получим  $\delta P = 10^{-15} \text{ вт}$ . Эффект корреляции флуктуаций коэффициентов усиления очевиден.

При вышеперчисленных параметрах (без раздельного измерения величин  $\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1$  и  $\overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2$ ) была произведена экспериментальная проверка флуктуационной чувствительности на действующем макете приемника. Флуктуационная чувствительность в случае компенсации паразитной модуляции составляла около  $4 \cdot 10^{-15} \text{ вт}$ . Меньшее значение чувствительности по сравнению с расчетной ( $5 \cdot 10^{-15} \text{ вт}$ ) объясняется тем, что реальная величина  $\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1 + \overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2$  меньше взятого при расчете значения  $2 \cdot 10^{-6}$ .

После выключения модуляции по УПЧ и полностью отключенной лампе второго канала флуктуации коэффициентов передачи стали полностью коррелированы, флуктуации стрелки выходного прибора уменьшились примерно в 3,6 раза, что равноценно увеличению чувствительности с  $4 \cdot 10^{-15}$  до  $1,1 \cdot 10^{-15} \text{ вт}$ . Небольшое ухудшение чувствительности по сравнению с расчетной ( $10^{-15}$ ) объясняется, по-видимому, некоторым несоответствием формы полосы пропускания УПЧ приемника по сравнению с расчетной и погрешностями измерения.

Описанный способ отключения модуляции УПЧ при  $T_1 = T_{11}$  весьма удобен для оценки величины эквивалентной некоррелированной составляющей флуктуаций коэффициентов усиления действующего приемника и других аналогичных устройств.

Действительно, обозначив уменьшение флуктуаций на выходном индикаторе после выключения модуляции в УПЧ через  $d$  ( $d > 1$ ), из соотношения (12) и (11) при  $T_1 = T_{11}$  получим

$$\frac{\overline{\alpha_1^2}}{\Delta\Omega_1} + \frac{\overline{\alpha_2^2}}{\Delta\Omega_2} = \frac{\pi^2}{2\Delta\omega} (d^2 - 1). \quad (14)$$

В рассмотренном случае  $d = 3,6$ , следовательно  $\overline{\alpha_1^2}/\Delta\Omega_1 + \overline{\alpha_2^2}/\Delta\Omega_2 = 0,95 \cdot 10^{-6}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Аблязов, Измерительный приемник для сверхвысоких частот, Авторское свидетельство № 118081 от 19 сентября 1957 г.
2. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
3. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, 25, 430 (1955).
4. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, 25, 733 (1955).

**ESTIMATION OF FLUCTUATION SENSITIVITY OF RADIOMETER WITH  
RF-AMPLIFIER MODULATION***V. S. Ablyasov*

There is considered the fluctuation sensitivity of a UHF-radiometer (with signal modulation at the intermediate frequency) when compensating the spurious noise modulation by antiphase modulated noises of compensatory noise generator.

---

УДК 535.3.551.51

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

*M. E. Грачева*

Экспериментально исследована область сильных флюктуаций интенсивности света при распространении в турбулентной атмосфере на приземных трассах. Сопоставляются экспериментально измеренные значения для среднего квадрата флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma_0$  с величинами  $\sigma_1$ , рассчитанными теоретически; получены эмпирические функции распределения вероятностей и функции корреляции флюктуаций интенсивности в области сильных флюктуаций, сделана попытка измерить частотные спектры сильных флюктуаций интенсивности.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время хорошо известно, что атмосферная турбулентность приводит к флюктуациям амплитуды, направления распространения, фазы волны, проходящей через атмосферу. Особенно значительны эти явления в оптическом диапазоне электромагнитных волн.

Теоретически исследованы статистические свойства флюктуаций параметров в плоской волне. Теория, развитая Татарским [1], позволяет рассчитать средний квадрат флюктуаций интенсивности, пространственные корреляционные функции, частотные спектры этих флюктуаций и т. д. Экспериментальные данные [2–7, 13] в основном подтверждают результаты теории, развитой для случая, когда флюктуации интенсивности невелики, т. е. средний квадрат флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma^2 = \overline{(\ln I - \overline{\ln I})^2}$  меньше единицы.

В этой работе будут изложены некоторые экспериментальные результаты по исследованию статистических свойств сильных флюктуаций интенсивности ( $\sigma > 1$ ) при распространении света на приземных достаточно протяженных (порядка 2 км) трассах. Эксперимент был проведен летом 1964 и 1965 годов в радиоакустической лаборатории ИФА АН СССР. Измерительная аппаратура существенно изменилась как по объему, так и по качеству по сравнению с аппаратурой, описанной в [10].

В настоящей работе 1) изучалась зависимость флюктуаций логарифма интенсивности света  $\sigma$  от расстояния  $L$  между источником света и приемником и структурной постоянной  $C_n$  показателя преломления и выяснялся вид этой зависимости в случае сильных флюктуаций, 2) исследовался закон распределения вероятностей флюктуаций интенсивности; 3) определялись пространственные корреляционные функции мерцания в плоскости, перпендикулярной направлению распространения луча и 4) была сделана попытка изучить частотные спектры флюктуаций интенсивности света в случае сильного мерцания.

В реальной атмосфере флюктуации показателя преломления  $n$ , которые вызывают флюктуации в распространяющейся волне, подчинены «закону 2/3» [8, 9, 14]:

$$D_n(r) = \sqrt{[n(\rho) - n(\rho + r)]^2} = C_n^2 r^{2/3}$$

для  $l_0 \ll r \ll L_0$ , где  $D_n(r)$  — структурная функция показателя преломления  $n$ ,  $\rho$  и  $\rho+r$  — радиусы-векторы двух точек наблюдения,  $l_0$  — внутренний,  $L_0$  — внешний масштабы турбулентности,  $C_n$  — структурная постоянная. При этом средний квадрат флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma^2$  в плоской волне, проходящей расстояние  $L$  в турбулентной среде, определяется следующим соотношением, полученным при решении волнового уравнения методом плавных возмущений в первом приближении [1]:

$$\sigma_1^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны. Соотношение (1) справедливо при условии  $\sqrt{\lambda L} \gg l_0$ .

Зависимость дисперсии флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma^2$  от расстояния  $L$ , проходимого волной в турбулентной среде, проверялась экспериментально, и для случая слабых флюктуаций  $\sigma_1 < 1$  получено удовлетворительное совпадение экспериментальных данных с теоретической зависимостью  $\sigma^2 \sim L^{11/6}$ , которая следует из формулы (1) [2,3].

В работе [10] изложены результаты измерений флюктуаций интенсивности наземного источника в дневных условиях, когда следует ожидать значительного увеличения интенсивности мерцания по сравнению с ночных данными (в [2–5] изложены результаты измерений, проведенных ночью). Аппаратура, применявшаяся в [10], дала возможность изучить зависимость дисперсии флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma^2$  только от расстояния  $L$ , проходимого лучом в турбулентной атмосфере, и характера метеорологических условий. Однако было надежно установлено, что существуют две области флюктуаций интенсивности: 1) область слабых флюктуаций ( $\sigma_1 < 1$ ), где зависимость  $\sigma^2$  от расстояния  $L$  и  $C_n$  хорошо согласуется с формулой (1), и 2) область сильных флюктуаций ( $\sigma_1 > 1$ ), где зависимость  $\sigma^2$  от  $L$  и  $C_n$  имеет совершенно иной характер.

Область сильных флюктуаций амплитуды плоской монохроматической волны, распространяющейся в турбулентной среде, теоретически исследована Татарским в работе [11]. Для решения волнового уравнения в случае сильных флюктуаций, строго говоря, уже не применим метод плавных возмущений. Поэтому для решения задачи используется другой метод, который позволяет учесть накапливающиеся искажения фазы в падающей волне, получить решение, удовлетворительно описывающее основные особенности сильных флюктуаций амплитуды волны, и объяснить экспериментально обнаруженный эффект «насыщения» амплитудных флюктуаций при увеличении расстояния, проходимого волной в турбулентной среде. Кроме того, в работе [11] получено, что в общем случае средний квадрат флюктуаций амплитуды волны является универсальной функцией дисперсии флюктуаций логарифма амплитуды  $\sigma_1^2$ , полученной методом плавных возмущений в первом приближении, т. е.  $\sigma^2 = \sigma(\sigma_1^2)$ .

### АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения проводились на Цимлянской научной станции ИФА АН СССР днем на ровном участке степи, что обеспечивало однородность турбулентного режима вдоль всего пути распространения луча. Трасса проходила в среднем на высоте около двух метров над землей. Длина пути, проходимого лучом в турбулентной атмосфере, составляла

250, 500, 1000 и 1750 метров. Одновременно проводились регулярные измерения вертикальных профилей температуры и скорости ветра в слое от 0,5 до 12 м\*, что позволяло рассчитывать величину структурной постоянной показателя преломления  $C_n$ . При записях спектров флюктуаций интенсивности света регистрировалось также направление ветра.

В качестве источника света использовалась ртутная лампа, имеющая яркость 700 меганит. Лампа помещалась в фокусе объектива с фокусным расстоянием 200 мм. Точность установки светящегося тела лампы в фокусе—около 0,5 мм. При расчетах принималось, что длина световой волны  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ .

Если бы источник света (светящееся тело лампы) был линейно протяженным, то на выходе объектива получался бы набор плоских волн. В действительности же источником света является светящаяся дуга диаметром 0,3 мм, т. е. протяженный источник, который можно рассматривать как цепочку независимых точечных источников, каждый из которых дает на выходе объектива сферическую волну. Действительно, каждая светящаяся точка,мещенная относительно фокальной плоскости объектива на некоторое расстояние (малое по сравнению с фокусом), эквивалентна некоему фиктивному точечному источнику сферических волн, расположенному на расстоянии от объектива, существенно превышающем фокусное. Так, например, светящаяся точка, находящаяся на оптической оси имещенная относительно фокуса объектива на 0,3 мм, равнозначна фиктивному точечному источнику, помещенному на 130 метрах от объектива.

В работе [1] Татарским показано, что для сферической волны зависимость среднего квадрата флюктуаций амплитуды от расстояния  $L$  и структурной постоянной  $C_n$  имеет тот же характер, что и для плоской волны, но отличается от него лишь численным коэффициентом (средний квадрат флюктуаций амплитуды сферической волны в случае  $\sqrt{\lambda L} \gg l_0$  приблизительно в 2,4 раза меньше соответствующей величины для плоской волны).

При измерениях диаметр выходного отверстия объектива источника был равен одной зоне Френеля  $\sqrt{\lambda L}$  для всех расстояний  $L$ . Диаметр входной диафрагмы приемника составлял от 2 до 5 мм, что было меньше  $\sqrt{\lambda L}$ . Это позволяло считать приемник точечным и не учитывать влияния осреднения флюктуаций по его апертуре [1]. Для исключения помех от дневного света источник модулировался частотой 5 кгц. Полоса пропускания системы ( $\sim 600$  гц) была достаточной для того, чтобы пропустить практически весь спектр флюктуаций интенсивности, как это подтверждают измерения частотных спектров мерцания [2].

Для измерения корреляционных функций флюктуаций интенсивности в двух точках, расположенных на горизонтальной прямой в плоскости, перпендикулярной направлению распространения луча, использовался двухканальный приемник света. Расстояние между центрами двух входных диафрагм  $\rho$  могло изменяться от 4 до 350 мм. Измерения проводились на расстояниях 500 и 1750 м при  $\rho$ , равном 0,25  $\sqrt{\lambda L}$ ; 0,5  $\sqrt{\lambda L}$ ;  $\sqrt{\lambda L}$ ; 1,5  $\sqrt{\lambda L}$ ; 2  $\sqrt{\lambda L}$ ; 4  $\sqrt{\lambda L}$  и 8  $\sqrt{\lambda L}$ .

В эксперименте измерялись следующие величины: средний уровень интенсивности  $I$  и средний квадрат флюктуаций  $(I - \bar{I})^2$ , для чего использовался квадратор на нелинейных полупроводниковых сопротивлениях НПС-20, изготовленный в Радиоакустической лаборатории ИФА.

\* Градиентные измерения проводились под руководством Д. Ф. Тимановского.

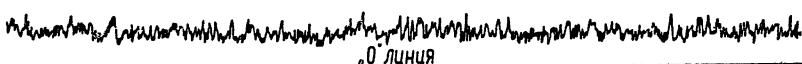
При изучении корреляционных функций измерялись  $\bar{I}_1$  и  $(\bar{I}_1 - \bar{I}_1)^2$  для первого канала;  $\bar{I}_2$ ,  $(\bar{I}_2 - \bar{I}_2)^2$  для второго канала и структурная функция  $D(I) = (\bar{I}_1 - \bar{I}_2)^2$ . Специальная следящая система обеспечивала равенство средних уровней интенсивности  $\bar{I}_1 = \bar{I}_2$ . По измеренным величинам вычислялись относительная дисперсия флуктуаций интенсивности  $\beta^2 = (\bar{I} - \bar{I})^2 / \bar{I}^2$  и коэффициент корреляции  $R_I$ :

$$R_I = \frac{\overline{(I_1 - \bar{I}_1)(I_2 - \bar{I}_2)}}{[\overline{(I_1 - \bar{I}_1)^2}(\overline{(I_2 - \bar{I}_2)^2})]^{-1/2}},$$

$R_I$  связан с измеряемыми величинами следующим соотношением:

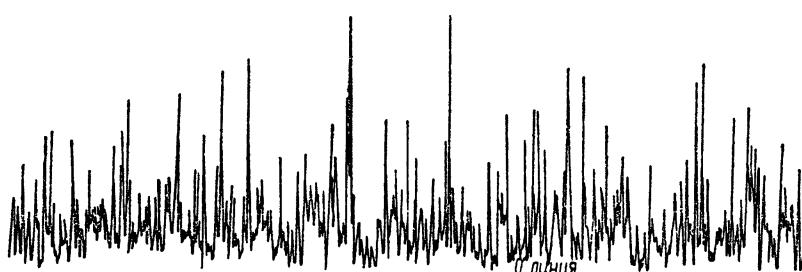
$$\begin{aligned} R_I &= 1 - \frac{1}{2} D(I) \frac{\overline{(I_1 - \bar{I}_1)^2}}{\overline{(I_2 - \bar{I}_2)^2}} \frac{\overline{(I_2 - \bar{I}_2)^2}}{D(I)}^{-1/2} = \\ &= \frac{\overline{(I_1 - \bar{I}_1)^2}}{\overline{(I_2 - \bar{I}_2)^2}} + \frac{\overline{(I_2 - \bar{I}_2)^2}}{\overline{(I_1 - \bar{I}_1)^2}} - D(I) \frac{1}{2} [\overline{(I_1 - \bar{I}_1)^2}]^{-1/2} [\overline{(I_2 - \bar{I}_2)^2}]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

1 сек



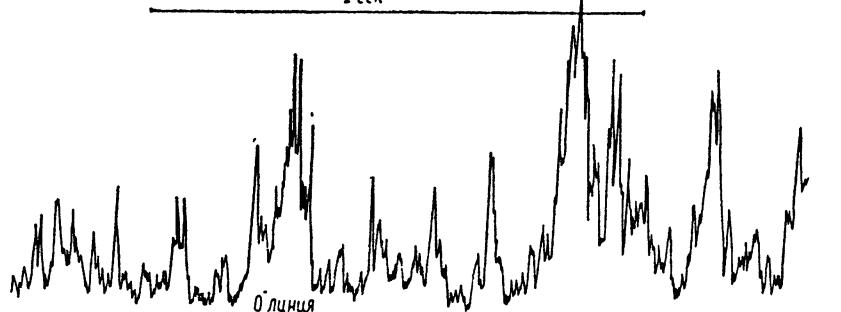
a)

1 сек



б)

1 сек



в)

Рис. 1. Образцы записи мерцания на различных расстояниях между источником света и приемником:

а) —  $L = 125$  м, б) —  $L = 500$  м, в) —  $L = 1750$  м.

Для измерения частотных спектров флуктуаций интенсивности света использовался частотный анализатор, состоящий из 26 фильтров с полосой пропускания в 0,5 октавы каждый, расставленных примерно через полоктавы от 0,063 до 600 гц.

Для изучения закона распределения вероятностей флуктуаций интенсивности производилась запись мгновенных значений интенсивности на шлейфовом осциллографе Н-700. На рис. 1 приведены образцы записей мерцания на различных расстояниях  $L$  между источником света и приемником, сделанные при примерно одинаковом среднем уровне интенсивности. При  $L = 125$  м мерцания слабые, при  $L = 500$  м начинается переход в область сильных флуктуаций интенсивности и при  $L = 1750$  м имеют место сильные флуктуации. Как видно из рис. 1в, мгновенная интенсивность света через диафрагму приемника значительную часть времени лишь немного превышает нулевой уровень, что затрудняет обработку записей и снижает точность обработки.

В данной работе записи мгновенных значений интенсивности, предназначенные для получения эмпирических функций распределения вероятностей флуктуаций интенсивности, производились с помощью нелинейного тракта, характеристика которого близка к логарифмической. Это позволило упростить обработку записей и расширить исследуемый диапазон вероятностей.

По результатам обработки полученных записей были построены эмпирические функции распределения вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности.

Следует отметить, что полоса пропускания нелинейного тракта была несколько уже полосы пропускания приемного усилителя. Вследствие этого дисперсия флуктуаций логарифма интенсивности  $\sigma^2$ , рассчитанная по эмпирическим функциям распределения, несколько меньше, чем значения  $\sigma^2$ , вычисленные по эмпирическим данным, полученным с помощью квадратора.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Рассмотрим эмпирические функции распределения вероятностей флуктуаций интенсивности света в случае сильных мерцаний. В работе Татарского [1] показано, что в случае слабых пульсаций флуктуации интенсивности подчинены нормальному-логарифмическому закону распределения. Этот вывод хорошо подтверждается экспериментальными результатами, полученными в [2]. В работе [10] было сделано несколько пробных записей мгновенных значений интенсивности света для случая сильных флуктуаций. Оказалось, что и в этом случае флуктуации интенсивности света подчинены нормальному-логарифмическому закону распределения.

В данной работе функции распределения вероятностей для случая  $\sigma > 1$  исследовались более тщательно и в большем диапазоне значений вероятностей. Всего обработано около 20 записей, полученных при различных значениях  $\sigma_1$ . Все имеющиеся эмпирические функции распределения были разбиты на четыре группы в зависимости от  $\sigma_1$ . На рис. 2 приведена одна из групп эмпирических функций с наибольшими значениями  $\sigma_1$ :  $8 < \sigma_1 < 9,3$ . По оси абсцисс отложен логарифм интенсивности  $\ln I$ , а по оси ординат  $F(I)$  — интеграл вероятности и  $F^{-1}(I)$  — функция, обратная интегралу вероятности (вероятностный масштаб). В координатах  $F^{-1}(I)$  и  $\ln I$  нормально-логарифмический закон распре-

деления вероятностей выражается прямой линией. Из графика видно, что систематических отклонений эмпирических функций распределения вероятностей флюктуаций интенсивности от нормально-логарифмического закона незаметно. Таким образом, флюктуации интенсивности света и в случае сильных пульсаций распределены логарифмически нормально.

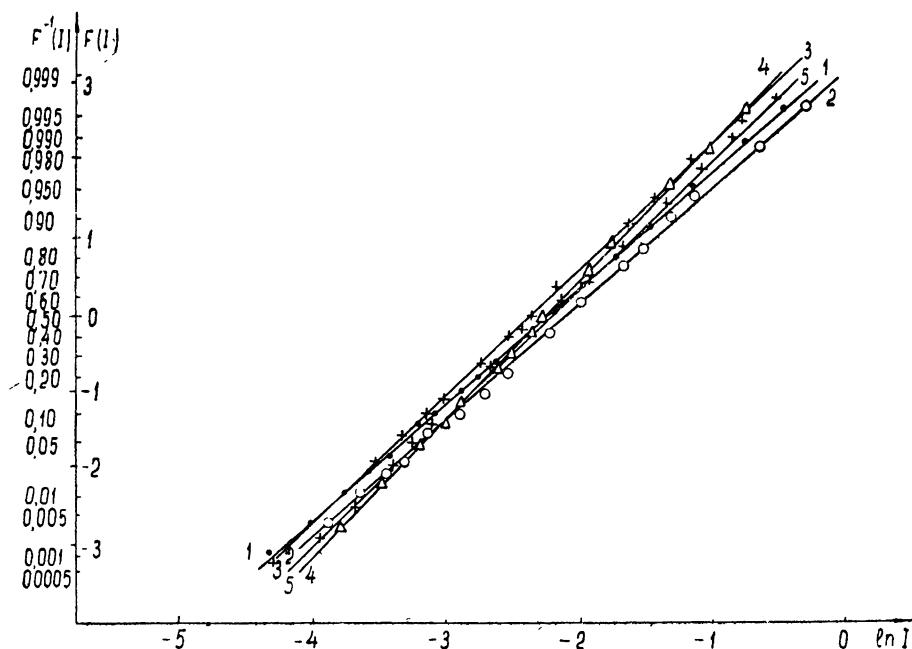


Рис. 2. Эмпирические функции распределения вероятностей флюктуаций интенсивности света для  $\sigma_1 = 8 \div 9,3$ :

$$1 - \sigma_1 = 8,04, \quad 2 - \sigma_1 = 8,22, \quad 3 - \sigma_1 = 9,0, \quad 4 - \sigma_1 = 9,01, \quad 5 - \sigma_1 = 9,33.$$

Используя это положение, можно получить выражение для флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma^2 = (\ln I - \bar{\ln} I)^2$  через величины, измеряемые в эксперименте:

$$\sigma^2 = \ln \left( 1 + \frac{(\bar{I} - \bar{\ln} I)^2}{\bar{I}^2} \right) = \ln(1 + \beta^2). \quad (3)$$

Это соотношение использовалось при дальнейшей обработке результатов измерений. Вычисленные по формуле (3) из данных эксперимента значения  $\sigma$  были названы  $\sigma_a$ .

2. Как уже упоминалось выше, в работе [11] показано, что в общем случае средний квадрат флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma^2$  является универсальной функцией дисперсии флюктуаций логарифма интенсивности  $\sigma_1^2$ , полученной как первое приближение метода плавных возмущений. Поэтому особый интерес представляет проверка этого положения теории и экспериментальное установление вида зависимости  $\sigma^2 = \sigma(\sigma_1^2)$ .

На рис. 3 по оси ординат отложены полученные в результате обработки экспериментальных данных значения  $\sigma_a$  для случая, когда размер

источника был равен зоне Френеля  $\sqrt{\lambda L}$ , а по оси абсцисс—значения  $\sigma_1$ , вычисленные по формуле (1), где  $C_n^2$  рассчитываются по вертикальным профилям температуры и скорости ветра. Методика вычисления  $C_n^2$  описана в [10].

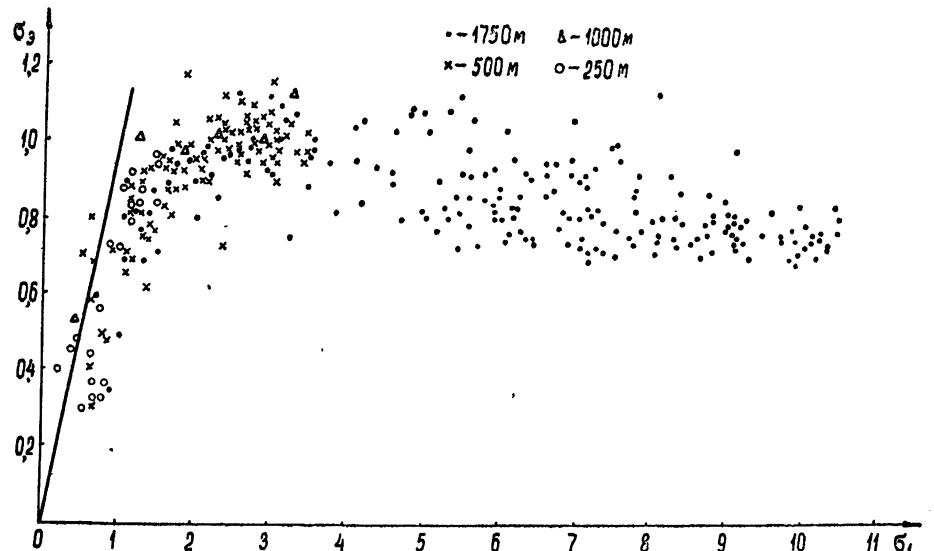


Рис. 3. Сравнение экспериментальных значений флюктуаций логарифма интенсивности света  $\sigma_3$  для источника размером  $\sqrt{\lambda L}$  с результатами расчета  $\sigma_1$  по формуле (1) и прямая точного совпадения  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$  для источника с бесконечно малыми угловыми размерами.

На графике нанесены результаты 340 измерений, проведенных в стационарных метеорологических условиях, для которых можно было вычислять  $C_n^2$ . Из них 70 значений были получены в 1964 году на расстояниях 250, 500 и 1000 м. В 1965 году измерения проводились только на расстояниях 500 и 1750 м. Тут же на графике проведена прямая, соответствующая точному совпадению экспериментальных  $\sigma_3$  и расчетных данных  $\sigma_1$  для источника бесконечно малых угловых размеров. Небольшое отклонение полученных данных от этой прямой объясняется тем, что измерения проводились не с источником плоских волн, имеющим бесконечно малые угловые размеры, а с источником конечных угловых размеров, что привело к ослаблению мерцания из-за осреднения по диафрагме источника [12]. Была сделана попытка привести данные рис. 3 для значений  $\sigma_1 < 2$  к источнику бесконечно малых угловых размеров с использованием результатов из [12]. Расчеты показывают, что в результате такого приведения наблюдается удовлетворительное совпадение экспериментально измеренных и рассчитанных по теории значений для флюктуаций логарифма интенсивности света, когда  $\sigma_1 \leq 1$ .

На рис. 3 данные, полученные на различных расстояниях между источником света и приемником, нанесены различными знаками. Кроме того, измерения на каждом расстоянии проводились при различных метеорологических условиях (в период времени от 9 до 17 часов), т. е. при различных значениях структурной постоянной показателя преломления  $C_n^2$ . Тем не менее, данные, полученные при различных  $L$

и  $C_n^2$  и в разные годы, ложатся на некоторую кривую. Это позволяет сделать вывод, что действительно дисперсия флуктуаций логарифма интенсивности света является универсальной функцией аргументов  $C_n^2$  и  $L$ :  $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma^2(C_n^2, L, k)$ , что можно рассматривать как экспериментальное подтверждение результатов работы [11]. Данные рис. 3 позволяют установить характер зависимости  $\sigma$  от  $\sigma_1$  в диапазоне  $0 < \sigma_1 < 10$  для реального источника, описанного выше.

Из рисунка видно, что на полученной кривой можно выделить три основных участка: 1) область слабых флуктуаций, где имеет место удовлетворительное согласие между экспериментальными и расчетными значениями  $\sigma$ , 2) слабо выраженный максимум при  $\sigma_1 \approx 2 \div 3$ , 3) область, где наблюдается небольшой спад  $\sigma$  при росте  $\sigma_1$ . К сожалению, применяющийся источник был далек от идеального источника плоских волн, и поэтому полученные данные позволяют, по-видимому, лишь наметить основные особенности поведения функции  $\sigma(\sigma_1)$ .

Для уточнения вида этой зависимости при  $\sigma_1 \approx 2 \div 10$  необходимы измерения мерцания с применением источника плоских волн и малых угловых размеров. Кроме того, желательно иметь экспериментальные данные на расстояниях, больших чем 1750 м, но при тех же значениях  $\sigma_1$ .

3. Переходим к исследованию корреляционных функций флуктуаций интенсивности света в случае сильного мерцания. Как следует из теории слабых флуктуаций [1], при  $V\sqrt{\lambda L} \gg l_0$  радиус корреляции флуктуаций интенсивности света имеет порядок  $V\sqrt{\lambda L}$ , а нормированная корреляционная функция флуктуаций интенсивности есть универсальная функция аргумента  $\rho/V\sqrt{\lambda L}$ , где  $\rho$  — расстояние между двумя точками наблюдения. В случае сильного мерцания  $\sigma > 1$  можно ожидать, что корреляционная функция флуктуаций интенсивности является функцией аргументов  $\rho/V\sqrt{\lambda L}$  и  $\sigma_1$ .

В проведенном эксперименте проверялась эта гипотеза. Измерения коэффициента корреляции  $R_I$  осуществлялись при двух различных значениях  $V\sqrt{\lambda L}$ , соответствующих  $L = 500$  и 1750 м. Расстояние  $\rho$  между центрами двух входных диафрагм устанавливалось таким образом, что величина  $\rho/V\sqrt{\lambda L}$  принимала одинаковые значения для обоих расстояний  $L$ .

На рис. 4а и 4б приведены все 45 корреляционных функций, полученных в дневное время с 10 до 17 часов при различных метеорологических условиях и, следовательно, при разных значениях  $\sigma_1$ . По оси ординат отложен коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности  $R_I$ , вычисленный по формуле (2) из экспериментальных данных, а по оси абсцисс — отношение  $\rho/V\sqrt{\lambda L}$ .

Дальнейшая обработка происходила следующим образом: выделялось фиксированное значение  $\rho/V\sqrt{\lambda L}$  и для этого значения аргумента все корреляционные функции  $R_I$  (не обращая внимания на расстояние  $L$ ) разбивались на три группы в зависимости от  $\sigma_1$ :  $\sigma_1 = 1 \div 3$ ,  $\sigma_1 = 3 \div 7$ ,  $\sigma_1 = 7 \div 11$ . Затем подобная же операция проводилась для всех остальных значений аргумента  $\rho/V\sqrt{\lambda L}$ .

Таким образом, получилось три группы корреляционных функций  $R_I$ , отличающихся значениями  $\sigma_1$ . Затем в каждой группе было произведено осреднение при каждом значении  $\rho/V\sqrt{\lambda L}$ . В результате имеем три корреляционные функции флуктуаций интенсивности света  $R_I$  для трех различных диапазонов изменения  $\sigma_1$ . Эти корреляционные функции представлены на рис. 5. Здесь же нанесены доверительные интер-

валы  $\delta$  для  $R_I$ :  $\delta = \pm \sqrt{(\bar{R}_I^2 - (\bar{R}_I)^2)/(n-1)}$ , где  $n$  — число измерений при данном значении  $\rho/\sqrt{\lambda E}$ . На графике построена также корре-

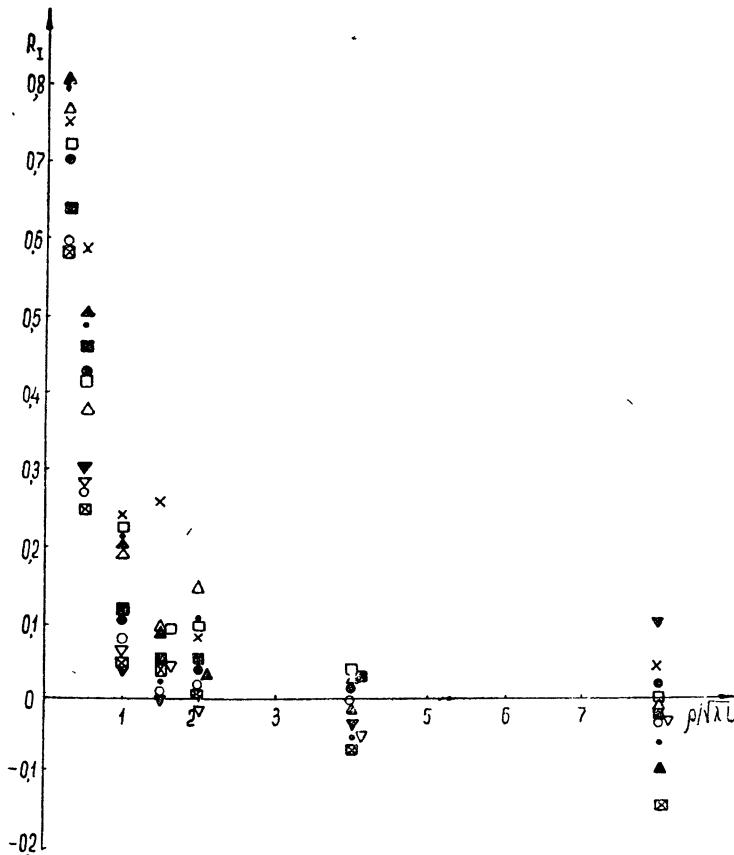


Рис. 4а Эмпирические корреляционные функции  $R_j$  флуктуаций интенсивности света для  $L=500 \text{ м}$ .

ляционная функция флюктуаций интенсивности  $R_I$ , полученная экспериментально в [2] для случая слабого мерцания  $\sigma < 1$ , и теоретическая функция корреляции для флюктуаций логарифма амплитуды волны  $R_\chi$  из [1] для  $\sigma \rightarrow 0$ .

Из закона сохранения энергии вытекает одно очень важное свойство корреляционной функции флуктуаций интенсивности света [1]:

$$\int_0^\infty B(\rho) \rho d\rho = 0. \quad (4)$$

Это соотношение должно выполняться вне зависимости от вида структурной функции коэффициента преломления. Из уравнения (4) следует, что корреляционная функция флуктуаций интенсивности обязательно должна менять свой знак.

В связи с этим следует отметить недостаточную точность полученных в эксперименте значений для коэффициента корреляции  $R_1$  при

больших значениях аргумента  $\rho/\sqrt{\lambda L}$ . Дело в том, что измерялась не корреляционная, а структурная функция флюктуаций интенсивности,

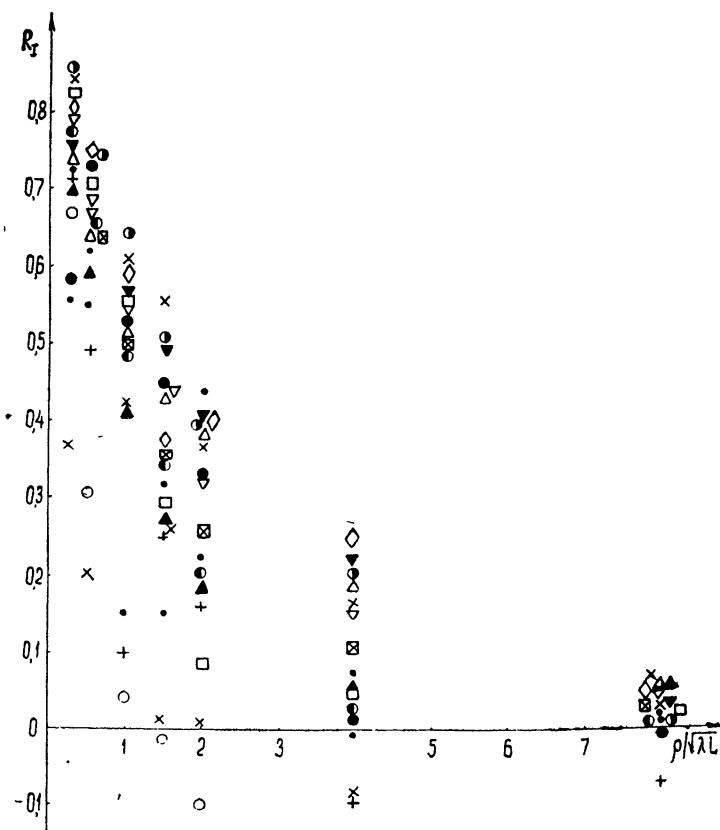


Рис. 46. Эмпирические корреляционные функции  $R_I$  флюктуаций интенсивности света для  $L=1750$  м

в связи с чем  $R_I$  при больших  $\rho/\sqrt{\lambda L}$  (как следует из формулы (2)) представляет собой малую разность двух больших величин. Поэтому небольшая погрешность в измерении  $D(I)$  приводит к значительной ошибке при подсчете коэффициента корреляции  $R_I$ .

Из рассмотрения графика 5 можно заключить, что при возрастании  $\sigma_1$ , радиус корреляции заметно увеличивается. (Радиус корреляции определяется как значение  $\rho$ , при котором  $R_I$  заметно спадает по отношению к величине  $R_I(0) = 1$ .)

4. Переходим к изложению результатов пробных измерений частотных спектров сильных (флюктуаций интенсивности света).

Исходя из гипотезы «замороженной» турбулентности, в работе [1] показано, что временной частотный спектр флюктуаций интенсивности  $fF(f)/\sigma^2$  (где  $f$  — частота,  $F(f)$  — спектральная плотность флюктуаций интенсивности) является функцией аргумента  $f\sqrt{\lambda L}/V_n$ , не меняющей своего вида при изменениях  $V_n$  и  $L$ .

На основании той же гипотезы «замороженности» можно выразить временную автокорреляционную функцию флюктуаций интенсивности  $R(\tau)$  через пространственную корреляционную функцию  $B(\rho)$ :

$$R(\tau) = B(V_n \tau) = B(\rho), \quad (5)$$

где  $V_n$  — компонента скорости ветра, перпендикулярная направлению распространения луча.

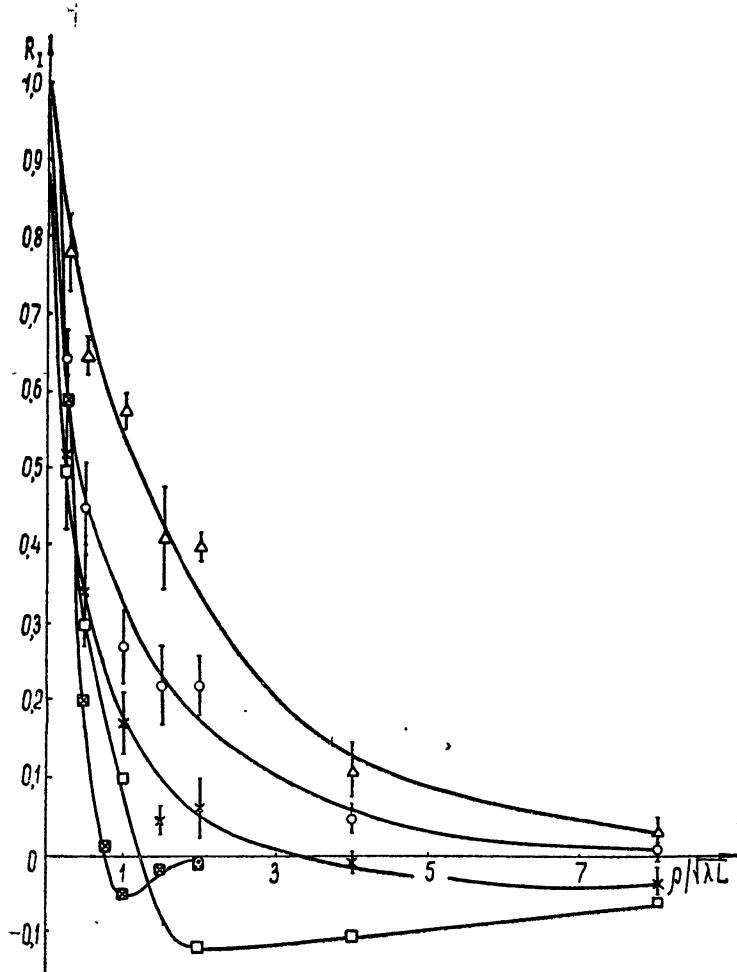


Рис. 5. Усредненные корреляционные функции  $R_I$  флюктуаций интенсивности света:

\* —  $\sigma_1=1,0-3,0$ ;  $\circ$  —  $\sigma_1=3 \div 7$ ;  $\triangle$  —  $\sigma_1=7 \div 11$ ;  $\square$  — эмпирическая корреляционная функция для  $\sigma_1 < 1$  из [1];  $\blacksquare$  — теоретическая корреляционная функция флюктуаций логарифма амплитуды волны из [1].

Всего за время измерений было получено 10 частотных спектров флюктуаций интенсивности света на расстояниях  $L = 500$  и  $1750$  м, и выходной диафрагме источника, равной одной зоне Френеля  $\sqrt{\lambda L}$ . При обработке все спектры были разбиты на две группы в зависимости от значений  $\sigma_1$ :  $\sigma_1=0,7 \div 3$ ;  $\sigma_1=3 \div 11$ . Затем в обеих группах было произведено приведение спектров к безразмерному аргументу  $f\sqrt{\lambda L}/V_n$  и в каждой группе получены средние спектральные плотности флюктуаций интенсивности, нормированные на дисперсию  $\omega F(\omega)/\sigma^2$ , где  $\omega = 2\pi f$ ,

$\sigma^2 = \int_0^\infty F(\omega) d\omega$ . Осредненные спектры для двух диапазонов значений  $\sigma_1$  в зависимости от аргумента  $f\sqrt{\lambda L}/V_n$  приведены на рис. 6.

Из рис. 6 видно, что при увеличении  $\sigma_1$  имеет место расширение спектра в области низких частот. На рис. 7 приведены примеры спект-

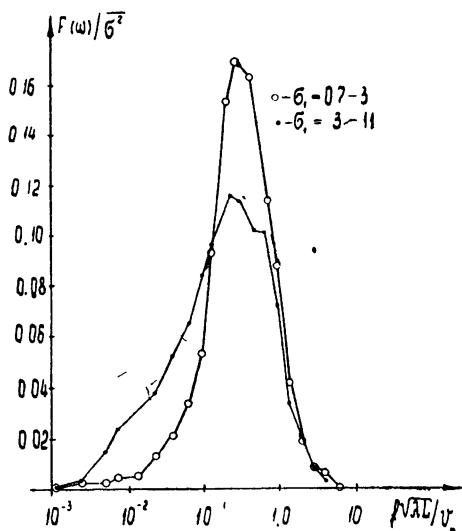


Рис. 6. Усредненные по группам нормированные на дисперсию спектры флюктуаций интенсивности света, приведенные к безразмерному аргументу  $f\sqrt{\lambda L}/V_n$ .

ральных функций  $F(\omega)/\sigma^2$  для  $\sigma_1 = 1,07$ , и  $\sigma_1 = 10,6$ . Можно отметить, что поведение спектральных функций в области низких частот при малых и больших  $\sigma_1$  различно.

По осредненным временными спектрам для двух групп значений  $\sigma_1$  были рассчитаны пространственные корреляционные функции флюктуаций интенсивности, поскольку спектральная плотность и функция корреляции сопряжены по Фурье:

$$R(\tau) = \int_0^\infty W(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (6)$$

(в нашем случае  $W(\omega) = F(\omega)/\sigma^2$ ). Вычисление интеграла (6) производилось численно.

Переход от временных корреляционных функций к пространственным осуществлялся по формуле (5).

Из рассмотрения корреляционных функций, полученных по спектрам, также видно, что с увеличением  $\sigma_1$  радиус корреляции возрастает, причем примерно во столько же раз, во сколько имеет место его увеличение для экспериментально измеренных  $R_I$ .

Таким образом, увеличение доли мощности, приходящейся в спектре флюктуаций интенсивности на низкие частоты при больших  $\sigma_1$ , по-видимому, хорошо согласуется с отмеченной выше особенностью поведения корреляционных функций.

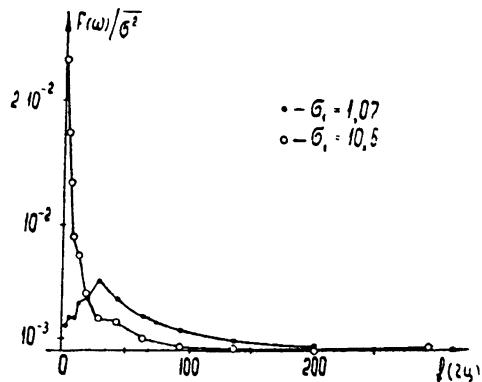


Рис. 7. Спектральная плотность флюктуаций интенсивности света в зависимости от логарифма частоты.

В заключение сформулируем основные результаты эксперимента.

1. Флуктуации интенсивности света, вызванные турбулентностью атмосферы, в случае сильного мерцания подчинены логарифмически нормальному закону распределения.

2. Результаты измерений позволяют сделать вывод, что в исследованном диапазоне значений  $\sigma_1$  ( $0 < \sigma_1 < 10$ ) дисперсия флуктуаций логарифма интенсивности света  $\sigma^2$  является универсальной функцией аргумента  $\sigma_1^2 \simeq C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}$ .

3. Для  $\sigma_1 < 1$  значения  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$  удовлетворительно совпадают, что соответствует области слабых флуктуаций, для которой справедливы результаты теории, полученные на основе решения волнового уравнения методом плавных возмущений в первом приближении.

4. Для значений  $\sigma_1 > 1$  установлен вид функции  $\sigma = \sigma(\sigma_1)$  вплоть до значений  $\sigma_1 = 10$ . Результаты эксперимента удовлетворительно согласуются с теоретическими расчетами из [11].

5. Экспериментально показано, что коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности  $R_I$  есть функция  $\rho/\sqrt{\lambda L}$  и  $\sigma_1$ . При увеличении  $\sigma_1$  радиус корреляции флуктуаций интенсивности заметно увеличивается.

6. В частотных спектрах сильных флуктуаций интенсивности значительно подняты низкие частоты, что согласуется с увеличением радиуса корреляции при больших  $\sigma_1$ .

Автор выражает глубокую признательность А. С. Гурвичу за постоянное руководство, В. И. Татарскому за ценные советы при подготовке и проведении эксперимента, а также выражает благодарность всем сотрудникам Радиоакустической лаборатории ИФА, которые принимали участие в проведении измерений и обработке результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флукуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цванг, ДАН СССР, 123, 655 (1958).
3. В. И. Татарский, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Л. В. Терентьева, Астрон. ж., 35, 623 (1958).
4. А. С. Гурвич, Г. С. Голицын, В. И. Татарский, Акуст. ж., 6, 187 (1960).
5. В. М. Бовшеверов, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 5, 886 (1961).
6. J. W. Herbstriteit, M. C. Thompson, Proc. IRE, 43, 1391 (1955).
7. J. Goldstein, R. A. Miles, A. Chabot, Proc. IEEE, 53, № 9, 1172 (1965).
8. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, 30, 299 (1941).
9. А. М. Обухов, ДАН СССР, 32, 22 (1941).
10. М. Е. Грачёва, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
11. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 49, 1581 (1965).
12. А. И. Кош, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 306 (1964).
13. Edward Bygon N., Steen Roland R., Appl. Optics, 4, № 3, 311 (1965).
14. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 13, № 1, 58 (1949).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
11 июня 1966 г.

## INVESTIGATION OF STATISTICAL PROPERTIES OF STRONG FLUCTUATIONS OF LIGHT INTENSITY IN ATMOSPHERIC LAYER NEAR THE EARTH

M. E. Gracheva

The region of strong fluctuations of light intensity has been investigated experimentally when propagating in a turbulent atmosphere near the Earth. Mean squares of fluctuations of the intensity logarithm measured experimentally ( $\sigma_e$ ) and calculated

theoretically ( $\sigma_1$ ) have been compared. There obtained the empiric functions of probability distribution and the correlation functions of intensity fluctuations in the region of strong fluctuations. An attempt has been made to measure the frequency spectra of strong intensity fluctuations.

*Примечание при корректуре.* Экспериментальные данные, полученные в 1966 году на трассах 1750 и 5500 м, позволили исследовать зависимость  $\sigma = \sigma(\sigma_1)$  до значений  $\sigma_1 = 17$ . Отклонений от зависимости, приведенной на рис. 3, не обнаружено.

УДК 621.371.165 : 534 222

## ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ПРАВИЛЬНОЙ РЯБИ

*А. Д. Розенберг, А. И. Калмыков, В. И. Зельдис*

Приводятся результаты экспериментального исследования амплитудных и фазовых характеристик звукового сигнала в диапазоне от 4 до 7 см, рассеянного правильной одномерной рябью, создаваемой в искусственном бассейне. Полученные данные удовлетворительно совпадают с расчетами, проведенными в приближении теории малых возмущений. Приведенные результаты могут помочь при объяснении ряда эффектов, связанных с рассеянием радиоволн СВЧ от взволнованной поверхности моря.

Результаты исследования характеристик сигналов, рассеянных взволнованной поверхностью моря, свидетельствуют о существенном вкладе ряби в рассеяние. В последнее время для объяснения механизма рассеяния используется модель поверхности как совокупности двух типов неровностей—ряби с размерами порядка длины радиоволны, расположенной на крупных волнах [1].

Попытки непосредственного изучения влияния ряби на характеристики рассеянного морем сигнала предпринимались в [2, 3]. В этих исследованиях, проведенных в естественных условиях, использовались как амплитудные, так и фазовые методы. В [2] исследовалось влияние ряби на интенсивность обратно рассеянного сигнала. Путем сравнения сигналов от соседних участков моря (с рябью и без ряби) было найдено, что  $\sigma_0$  (удельная эффективная отражающая площадь) без ряби меньше. В [3] было установлено, что фазовые характеристики СВЧ сигнала, рассеянного морем, определяются гидродинамическими параметрами ряби.

Однако в естественных условиях точная оценка параметров ряби представляет большие трудности, так как при рассеянии радиосигнала с больших площадей рябь в пределах рассеивающего участка может иметь нестационарный характер. Строго говоря, разделение волнения на «рябь» и «крупную волну» в силу непрерывности спектра волнения носит чисто условный характер.

Поэтому упомянутые измерения имели, в основном, качественный характер. Точное определение связи характеристик рассеянного сигнала с параметрами ряби возможно только в условиях закрытого бассейна, но при этом возникает проблема селекции полезного сигнала.

Действительно, при проведении радиолокационных измерений в закрытом помещении уровень помех, создаваемых многократными зеркальными отражениями от стен, потолка и рабочих конструкций, бывает, как правило, больше полезного сигнала.

Для выделения полезного сигнала наиболее просто использовать пространственную селекцию (было установлено, что для рабочих размеров используемого бассейна необходимое разрешение по дистанции должно составлять 10—20 см). Радиолокационная аппаратура, обеспечивающая указанную разрешающую способность, достаточно сложна

(передатчик с длительностью импульса в 2 мсек, приемник с эффективной полосой в 500 Мгц). Значительно проще указанное разрешение обеспечивается с помощью звуколокатора, работающего в том же диапазоне волн (частота звука в несколько килогерц соответствует сантиметровому диапазону волн).

Рассмотрим ограничения, связанные с интерпретацией результатов рассеяния звуковых волн применительно к случаю электромагнитных колебаний. При нахождении рассеянного поля над шероховатой поверхностью с идеальной проводимостью или высокой плотностью граничные условия для среднего поля на плоскости  $z = 0$  записываются одинаково как в электромагнитном, так и в акустическом случаях:

$$\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial z} = -ik\eta \bar{E}_z, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число, а  $\eta$  — величина, определяемая эффективной диэлектрической проницаемостью (или эффективной плотностью) шероховатой границы раздела, черта наверху означает статистическое усреднение.

Несмотря на то, что в общем случае выражения для  $\eta$  в электромагнитном и акустическом случаях различны, в предельных случаях (скользящее распространение и нормальное падение при  $kl \gg 1$ ,  $kl \ll 1$ , где  $l$  — радиус корреляции неровностей) они совпадают [4, 5]. Совпадает также ряд закономерностей: избирательный характер рассеяния, падение интенсивности обратного рассеяния с углом скольжения и пр.

Все это позволяет проводить сопоставление результатов, полученных в акустическом и электромагнитном (вертикальная поляризация) случаях, учитывая, однако, их неадекватность.

## 1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

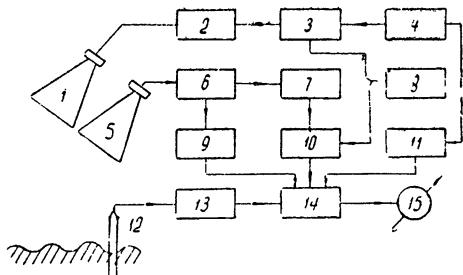
Исследование амплитудных и фазовых характеристик рассеянного рябью звукового сигнала производилось с помощью измерительного импульсного звуколокатора (рис. 1). В качестве источника колебаний использовался звуковой генератор с частотой, которую можно было изменять в пределах нескольких килогерц ( $f = 4 \div 7$  см); после модулятора и усилителя мощности сигнал звуковой частоты длительностью 1 мсек и мощностью 10 вт поступал на излучатель — высокочастотную электродинамическую головку 1 А17. Рассеянный сигнал принимался электродинамическим микрофоном и после усиления малошумящим избирательным усилителем поступал на амплитудный детектор; этот же сигнал после ограничения сравнивался на фазовом детекторе с опорным сигналом задающего генератора. Устройство стробирования (длительность стробирующего импульса 1 мсек) обеспечивало селекцию участков пространства протяженностью в 17 см. Выделенный сигнал поступал в блок записи, где производилась синхронная запись амплитуды и фазы сигнала на фотописец; на эту же ленту записывались показания струнного волномера, регистрирующего изменение высоты водной поверхности (с точностью до 0,02 мм).

Передающая и приемные головки были снабжены коническими рупорами; ширина диаграммы направленности как в азимутальном, так и угломестном направлениях составляла  $10^\circ$  и  $20^\circ$  для крайних частот рабочего диапазона соответственно. Рупоры размещались на поворотном устройстве, укрепленном над бассейном. Бассейн представлял собой цементную ванну размерами  $9 \times 3 \times 2$  м, наполненную водой на 1,5 м. В бассейне можно было создавать как крупную волну ( $H \leq 0,3$  м,

$\Lambda \leq 4 \text{ м}$ ) с помощью волнопродуктора поршневого типа, так и рябь ( $h \leq 1 \text{ мм}$ ,  $\Lambda \leq 10 \text{ см}$ ) с помощью вибрационного волнопродуктора.

Рис. 1. Функциональная схема установки:

1—излучатель, 2—усилитель, 3—модулятор, 4—импульсный генератор, 5—микрофон, 6—усилитель, 7—ограничитель, 8—задающий генератор, 9—амплитудный детектор, 10—фазовый детектор, 11—задержка строба, 12—волномер, 13—усилитель волномера, 14—блок записи со стробирующими каскадами, 15—самописец.



При экспериментах определялась зависимость амплитуды и фазы обратно рассеянного сигнала как от условий облучения (угла скольжения  $\psi$ , азимутального угла  $\beta$  по отношению к фронту ряби, дистанции  $R$  и длины звуковой волны  $\lambda$ ), так и от параметров водной поверхности (высоты ряби  $h$ , периода  $T$  и длины волны ряби  $\Lambda$ , высоты и периода крупной волны).

Особое внимание было удалено созданию плоской звуковой волны. Соответствующим подбором характеристик рупоров и расстояний до облучаемого участка была получена практически плоская волна, что подтверждилось специальными фазовыми измерениями. Были приняты также меры по уменьшению переотражений от местных предметов: применение специальных поглощающих экранов позволило снизить уровень помех, не селектируемых по дистанции, по крайней мере на 20 дБ по сравнению с полезным сигналом. На рис. 2 приведен

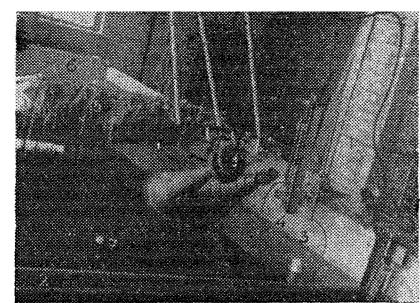


Рис. 2. Внешний вид установки.

общий вид установки. Видны приемо-передающие рупоры с головками на поворотном устройстве 1, вибрационный волнопродуктор 2, струнные волномеры для измерения параметров ряби на крупной волне 3 и универсальный волномер 4, поглощающий экран 5, вибрационный волнопродуктор крупных волн 6 и градуировочный шарик 7.

## 2. РЕЗОНАНСНЫЙ ХАРАКТЕР ОТРАЖЕНИЯ ОТ РЯБИ

При рассеянии от шероховатой поверхности для сигнала, определяемого методом малых возмущений, имеет место пространственный резонанс [6]. Условием резонанса для обратного рассеяния от правильной синусоидальной поверхности  $z=h_0 \cos kx$ , где  $k=2\pi/\Lambda$ , является

$$n \cdot k = 2k \cos \psi \quad (2)$$

или

$$\Lambda = \lambda / n / 2 \cos \psi,$$

где  $\Lambda$  и  $\lambda$  — длина морской и звуковой волн соответственно,  $\psi$  — угол скольжения,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядок пространственного спектра. Следует отметить, что для пологой волны ( $dh/dx \ll 1$ ) и достаточно малых  $h$  интенсивность спектров высших порядков (второго и третьего) достаточно мала.

Приведенное соотношение (2) с высокой степенью точности подтверждается экспериментально во всех случаях измерений в широком диапазоне углов скольжения (от 20 до 75°) и длин звуковых волн (от 4 до 7 см). В качестве примера такого совпадения на рис. 3 приведена зависимость величины рассеянного сигнала (в относительных единицах) от периода (длины) возбуждаемых волнопродуктором волн (кривая 1);

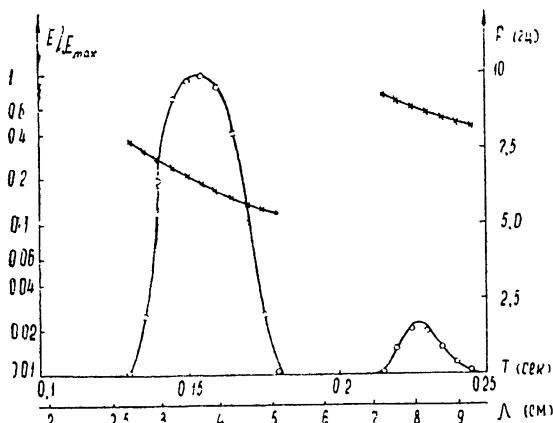


Рис. 3. Амплитудно-фазовые характеристики рассеянного сигнала:

$\lambda=4,2 \text{ см}$ ,  $\psi=55^\circ$ ,  $n=0,14 \text{ мк}$ ;  $\circ - E/E_{\max}$  (кривая 1),  $\times - F$  (кривая 2).

резонанса: рассеяние происходит на правильной пространственной структуре типа дифракционной решетки, движущейся с фазовой скоростью возбуждаемой волны  $V_\phi$ . При этом смещение частоты принятого сигнала относительно излученного определяется как

$$F_{\text{см}} = \pm 2V_\phi \cos \psi / \lambda. \quad (3)$$

Учитывая условия резонанса (2), получим из (3)

$$F_{\text{см}} = \pm \frac{nV_\phi}{\Lambda} = \pm \frac{n}{T_{\text{рез}}} = \pm nF_{\text{рез}}, \quad (4)$$

где  $T_{\text{рез}}$  — период, а  $F_{\text{рез}}$  — частота возбуждаемой волны, для которой выполняется условие резонанса.

Таким образом, при обратном рассеянии от ряби частота сигнала всегда сдвинута на величину, кратную (или равную при  $n=1$ ) частоте резонансной ряби. На рис. 3 (кривая 2) приведена зависимость изменения фазы рассеянного сигнала ( $F=\partial\phi/\partial t$ ) от периода возбуждаемых волн; видно очень хорошее соответствие частоты смещения  $F_{\text{см}}$  периоду ряби.

Величина частоты смещения может быть также определена непосредственно из параметров облучения, соответствующего резонансу [3, 6]. Из гидродинамики для фазовой скорости волны

$$V_\phi = \sqrt{g\Lambda/2\pi} \quad (5)$$

(без учета капиллярности). Подставляя (5) в (3) и учитывая (4), получим

$$F_{\text{см}} = \pm (ng \cos \psi / \lambda \pi)^{1/2}, \quad (6)$$

где  $g$  — постоянная тяготения.

угол скольжения и длина звуковой волны в течение опыта оставались неизменными. Из приведенной кривой хорошо видны резкие всплески сигнала, соответствующие условиям резонанса для  $n=1$  и  $n=2$ ; положения максимумов совпадают с расчетными с точностью до 10%; величина сигнала в первом максимуме по крайней мере на 40 дБ превышает уровень сигнала вне резонанса. Таким образом, наблюдавшиеся амплитудные зависимости подтверждают справедливость механизма пространственного резонанса.

Значения  $F_{\text{см}}$ , подсчитанные по (6) для случая, приведенного на рис. 3 ( $F'_{\text{см}} = 6,5 \text{ гц}$  и  $F''_{\text{см}} = 9,2 \text{ гц}$ ), хорошо совпадают с измеренными при разонансах значениями.

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ $E(\Lambda)$ ОТ $R_0$ И $L$

Как следует из условий резонанса (2), зависимость  $E(\Lambda)$  для правильной одномерной ряби в случае плоской волны выражается  $\delta$ -функцией. Вместе с тем из рассмотрения кривой 1 рис. 3 виден непрерывный ход кривой  $E/E_{\max}$  в областях резонанса.

Оценим уширение резонансной кривой  $E(\Lambda)/E_{\max}$ , связанное с неидеальными условиями наблюдения в бассейне (ограниченность освещаемой площадки, искривление фазового фронта падающей волны).

Введем величину добротности  $Q$ , определяемую через относительную ширину резонансной кривой  $E(\Lambda)/E_{\max}$  на уровне 0,7:

$$Q = \frac{\Lambda_0}{\delta\Lambda} \quad \left( \Lambda_0 = \frac{\lambda}{2\cos\psi} \quad \text{при } n = 1 \right). \quad (7)$$

Учитывая сферичность облучающего поля и конечность размеров освещаемой площадки при расчете рассеянного поля, определим  $Q$  как

$$Q = \frac{1}{2} \cos\psi [(1/kL)^2 + (L/R_0)^2 \sin^4\psi]^{-1/2}, \quad (8)$$

где  $L$  — продольный размер облучаемой площадки, определяемый либо диаграммой направленности, либо зондирующими импульсом  $L = c\tau/2\cos\psi$ ;  $R_0$  — радиус кривизны фазового фронта.

На рис. 4 приведено семейство кривых  $Q(\lambda)$ , подсчитанных по (8) для различных углов скольжения  $\psi$  при  $L=17/\cos\psi$  (см) и  $R_0 = 250 \text{ см}$  (значение  $R_0$  подобрано эмпирически); точками нанесены измеренные значения  $Q$ . Из рассмотрения кривых видно, что с уменьшением длины звуковой волны и угла скольжения добротность резонансной кривой растет, достигая существенной величины ( $Q > 10$ ). Физический смысл такой зависимости ясен, поскольку уменьшение  $\lambda$  и  $\psi$  эквивалентно увеличению эффективной площади рассевающего участка (количеству элементов пространственной резонансной структуры).

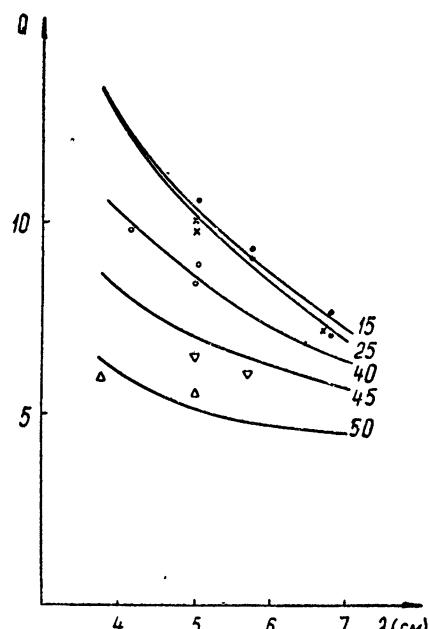


Рис. 4. Добротность резонансной кривой при избирательном рассеянии.

### 4. ВЛИЯНИЕ ВЫСОТЫ РЯБИ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим зависимость обратно рассеянного поля от высоты шероховатости. Для этого представим поле на неровной поверхности в виде разложения по степеням отклонения  $h$  от средней поверхности  $z = 0$ :

$$E(x, y, z = h) = E(x, y, 0) + \left( \frac{\partial E}{\partial z} \right)_{z=0} h + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right)_{z=0} \frac{h^2}{2} + \dots \quad (9)$$

Для правильной ряби  $z = h_0 \cos x$  с малой высотой вкладом членов со степенью, выше первой, можно пренебречь. При этом рассеяние происходит только на структуре с волновым числом  $\kappa = 2k \cos \psi$  (первая гармоника), а рассеянное поле  $E' \sim h$ . С ростом высоты ряби необходимо учитывать также и квадратичный член выражения (9). В этом случае появляется

рассеянный сигнал при  $\kappa = k \cos \psi$  (вторая гармоника); зависимость поля второй гармоники от высоты волны должна быть квадратичной  $E'' \propto h^2$ . На рис. 5 приведены экспериментальные зависимости  $E'$  и  $E''$  от высоты ряби  $h$ . Длина поверхности волны в этих опытах не менялась, вследствие чего значения звуковой волны для  $E'$  и  $E''$  отличаются в два раза. Из рисунка хорошо виден линейный ход зависимости  $E'(h)$ ; кривая  $E''(h)$  достаточно хорошо аппроксируется параболой.

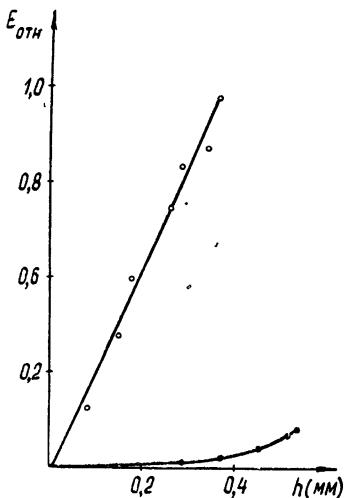


Рис. 5. Зависимость поля рассеянного сигнала от высоты ряби ( $\Lambda = 6 \text{ см}$ ,  $\psi = 55^\circ$ ,  $\lambda' = 6,8 \text{ см}$ ,  $\lambda = 3,4 \text{ см}$ );  $\circ$  —  $E'$ ,

$\bullet$  —  $E''$ .

## 5. ВЛИЯНИЕ КРУПНОЙ ВОЛНЫ

Выше рассматривались амплитудные и фазовые характеристики рассеянного сигнала при условии, что рябь находилась на горизонтальной плоскости; наличие крупной волны искажает как амплитудную, так и фазовую структуру рассеянного поля. Ограничимся учетом влияния крупной волны в случае длинных пологих волн:

$$H'/T' \ll 1, \quad \Lambda' \gg \lambda, \quad \Lambda' > L, \quad (10)$$

где  $H'$ ,  $\Lambda'$ ,  $T'$  — параметры крупных волн,  $L$  — длина облучаемого участка.

Из геометрических представлений следует, что влияние крупной волны на рассеивающие свойства ряби сводится к периодическому изменению угла, под которым освещается рассеивающая площадка, на величину  $\Delta\phi = \pm 2H'/T'$ . Указанный эффект вызывает амплитудную модуляцию рассеянного сигнала с периодом  $\Lambda'$ ; глубина модуляции может быть определена из кривой  $E(\Lambda)/E_{\max}$ , полученной для соответствующих условий облучения в отсутствие крупной волны. Обычно глубина модуляции бывает незначительной в силу условия (10) и не превышает 10%.

Более сложными являются фазовые искажения, вызванные наличием крупной волны. В этом случае помимо смещения частоты  $F_{\text{см}}$ , обусловленного механизмом, описанным в разделе 2, появляется дополнительная составляющая смещения частоты  $\Delta F$ , связанная с колебательным характером изменения расстояния до рассеивающего пятна. Ввиду сложности характера этого движения  $\Delta F$  изменяется как по знаку, так и по величине. Среднее значение  $\bar{\Delta F}$  для одного склона может быть рассчитано, исходя из представлений о круговой траектории частиц воды, перемещающихся со средней скоростью

$$|\bar{\Delta V}| = \frac{2\pi H'}{T'}. \quad (11)$$

Направление  $\Delta V$  совпадает с направлением движения фронта волны

на гребне и противоположно во впадине; допплеровское смещение частоты  $\Delta F$  не зависит при этом от угла скольжения  $\psi$  (ввиду вращательного движения частиц) и определяется как

$$\overline{\Delta F} = \pm \frac{2 |\Delta V|}{\lambda} = \pm \frac{4\pi H'}{kT'}. \quad (12)$$

На рис. 6 приведены рассчитанные по (12) для двух длин волн ( $4,5 \text{ см}$  и  $6,7 \text{ см}$ ) зависимости дополнительного смещения частоты  $\overline{\Delta F}$  от отношения высоты крупной волны к ее периоду: точками нанесены измеренные значения  $\overline{\Delta F}$  для этих же длин волн, снятые при углах скольжения  $15^\circ$  и  $65^\circ$ . Величина  $\overline{\Delta F}$  определялась из записи фазы отраженного сигнала при усреднении за половину периода крупной волны (время прохождения переднего или заднего склона крупной волны):

$$\overline{\Delta F} = |\bar{F} - F_0|_{t=T'/2}, \quad (13)$$

где  $\bar{F}$  — среднее значение частоты, определяемое за половину периода,  $F_0$  — частота смещения в отсутствие крупной волны.

Таким образом, наличие крупной волны приводит к появлению дополнительной амплитудной и фазовой модуляции в рассеянном сигнале. Эффект от последней может привести к существенному уширению спектра рассеянного сигнала [3].

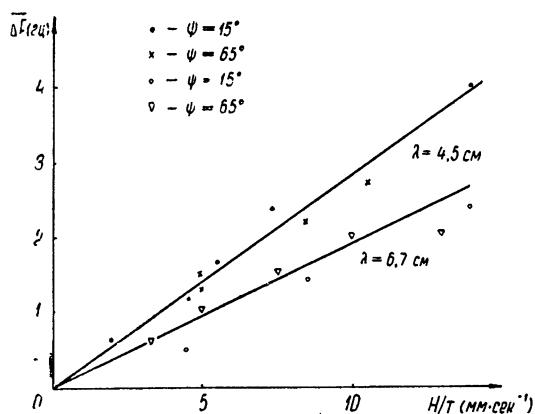


Рис. 6. Зависимость дополнительного смещения частоты рассеянного сигнала от параметров крупной волны.

Полученные закономерности рассеяния звукового сигнала правильной одномерной рябью хорошо согласуются с расчетами, проведенными в первом и втором приближениях теории возмущений.

Несмотря на существенное отличие условий проведения измерений от естественных, можно сделать ряд заключений о механизме рассеяния СВЧ сигнала от взволнованной поверхности моря. К важнейшим из них относятся: 1) избирательный механизм рассеяния от ряби, 2) амплитудная зависимость интенсивности рассеянного сигнала от высоты ряби, 3) дополнительная амплитудная и фазовая модуляция сигнала за счет наличия крупных волн.

Измерения в бассейне рассеяния от волнения, имеющего заранее обусловленные случайные параметры, близкие к существующим в естественных условиях, будут способствовать, по-видимому, более глубокому пониманию механизма рассеяния СВЧ от взволнованной поверхности моря.

Авторы благодарят И. Е. Островского за руководство работой, И. М. Фукса и В. Н. Ланового за помощь в расчетах и при изготовлении аппаратуры,

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 8, № 6, 1117 (1965).
- 2 J. W. Crispin, R. G. Delosh, E. T. Johnson, D. E. Lamphier, O. L. Tiffaney, B. W. Wentworth, 5-th National Convention Military Electronics, 6, 437, 1961.
- 3 А. Д. Розенберг, И. Е. Островский, А. И. Калмыков, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 9, № 2, 234 (1966).
- 4 Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 4, № 3, 476 (1961).
- 5 И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 8, № 1, 104 (1965).
- 6 Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 2, 290 (1963).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
18 июня 1966 г.

## SOUND WAVE BACKSCATTERING BY REGULAR RIPPLE

*A. D. Rosenberg, A. I. Kalmukov, V. I. Zel'dis*

Data are given of an experimental investigation of the amplitude and phase characteristics of the 4–7 cm sound signal scattered by a regular one-dimensional ripple produced in a test tank. The data obtained agree satisfactorily with calculations made in the approximation of small perturbation theory. The results presented may be useful to explain a number of effects associated with UHF radio waves scattering from the rippled sea surface.

УДК 621.371.165 : 534.222

## ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ И РАДИОВОЛН НЕРЕГУЛЯРНОЙ РЯБЬЮ

*A. И. Калмыков, А. Д. Розенберг, В. И. Зельдис*

Приводятся результаты экспериментальных исследований рассеяния звуковых сигналов нерегулярной рябью. Показано, что избирательный механизм рассеяния имеет место и при рассеянии рябью, имеющей широкий спектр. Приведены результаты измерений зависимости величины рассеянного поля от длины волны облучения и угла скольжения. Показана необходимость учета реального вида спектра морского волнения при расчете характеристик рассеяния поверхностью моря.

В работе [1] были рассмотрены амплитудные и фазовые характеристики сигналов, рассеянных правильной рябью, и показано наличие избирательного механизма рассеяния. В естественных условиях (при рассеянии поверхностью моря) рябь является нерегулярной, поэтому представляет интерес исследовать рассеивающие свойства ряби, обладающей широким спектром.

Зависимость величины обратно рассеянного звукового (или электромагнитного) поля от параметров облучения и свойств рассеивающей поверхности в границах применимости метода малых возмущений определяется выражением [2]

$$E \sim k^2 E_0 \frac{\exp(2ikR)}{R} B(\psi) \zeta(q_{\perp}). \quad (1)$$

Здесь  $E_0$  — падающее поле;  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны падающего излучения;  $R$  — расстояние от локатора до точки отражения;  $\psi$  — угол скольжения;  $\zeta(q_{\perp}) = (2\pi)^{-1} \int_S \zeta(r) \exp(-iqr) dr$  — фурье-компоненты высоты ряби  $\zeta(r)$ , взятая для  $q_{\perp}$  — проекции  $q = 2k$  на плоскость;  $r$  — радиус-вектор точки на неровной поверхности. Следует отметить, что выражение (1) справедливо для ряби, расположенной на плоскости. Влияние крупных волн сводится, в основном, к изменению угла облучения ряби [3].

Интенсивность рассеяния характеризуется средней эффективной площадью рассеяния  $\sigma_0$ , которая определяется как

$$\sigma_0 = \frac{\overline{EE^*} R^2}{S_0 |E_0|^2} \sim k^4 B^2(\psi) S(q_{\perp}), \quad (2)$$

где  $S_0$  — рассеивающая площадь, а

$$S(q_{\perp}) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_S \overline{\zeta(r) \zeta(r + \rho)} \exp(iq\rho) d\rho \quad (3)$$

— пространственный спектр ряби.

Таким образом, рассеяние нерегулярной рябью имеет избиратель-

ный характер: в рассеянии участвуют только составляющие спектра ряби с волновыми числами

$$\kappa_0 = 2k \cos \psi, \quad (4)$$

а интенсивность рассеяния нерегулярной рябью определяется спектральной плотностью этих составляющих. Это позволяет использовать основные закономерности рассеяния правильной рябью, полученные в работе [1], для исследования рассеяния нерегулярной рябью.

1. Представляло интерес экспериментально проверить соотношение (1). Измерения характеристик рассеяния нерегулярной рябью проводились в бассейне с помощью измерительного импульсного звуко-локатора, описанного в [1].

a) Экспериментальная проверка зависимости  $\sigma_0$  от  $S(x)$  заключа-

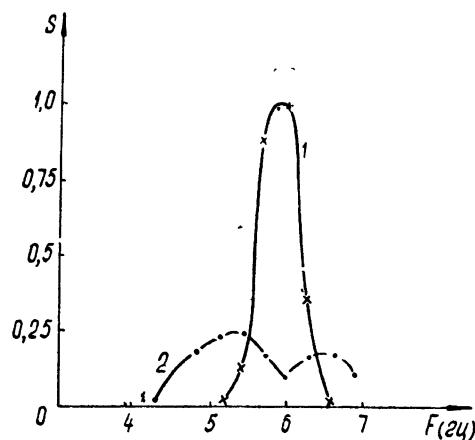


Рис. 1. Спектры перегулярной ряби ( $f = 4,7$  кгц,  $F_{рез} = 5,9$  гц,  $\psi = 40^\circ$ ).

рение силы тяжести; различная степень дисперсии вращений волнопродуктора определяла различие в ширине спектров ряби. Спектральные плотности этих спектров в области резонансной частоты (при  $\psi = 40^\circ$  и  $\lambda = 7$  см  $F_{рез} = 5,9$  гц) относятся\* как

$$\left. \frac{S_1(F)}{S_2(F)} \right|_{F=F_{рез}} = 4,4,$$

где  $S(F)$  — частотный спектр ряби, связанный с пространственным спектром  $S(x)$  формулами (8) или (9) (см. ниже). Отношение интенсивностей обратного рассеяния, полученных для условия  $F_{рез} = 5,9$  гц, составляло 3,8.

Значительное число подобных опытов подтверждает правильность сделанного предположения о том, что при рассеянии от ряби, имеющей широкий спектр  $S(x)$ , интенсивность рассеянного сигнала пропорциональна спектральной плотности только определенных составляющих спектра  $S(\kappa_0)$ .

Основные закономерности рассеяния (изменение величины поля в зависимости от угла скольжения  $\psi$  и длины радиоволны  $\lambda$ ) описываются выражением (1). Наличие избирательного рассеяния позволило производить исследования зависимостей  $E(\psi)$  и  $E(\lambda)$  на правильной ряби с различными волновыми числами  $\kappa$ .

\* С учетом уширений резонансной кривой, определяемых из (8) [1].

б) Зависимость рассеянного поля  $E$  от длины волны падающего излучения  $\lambda$ . При равномерном спектре волнения и неизменном угле скольжения рассеянное поле согласно (1) должно быть пропорциональным  $k^2$ .

Исследование зависимости  $E(\lambda)$  проводилось в диапазоне длин волн от 3,5 до 6,8 см. При измерениях угол скольжения  $\phi$  и расстояние до облучаемого участка не изменялись, а создаваемая правильная рябь удовлетворяла условию (4). Учет различия высот ряби для разных волновых чисел  $x$  производился приведением рассеянного поля  $E$  к одной и той же высоте  $\zeta$ , поскольку  $E \sim \zeta$ . Поскольку измерения в диапазоне волн связаны с изменением потенциала установки (неравномерность частотных характеристик приемно-передающего тракта, изменение диаграмм направленности антенн), проводилось сопоставление принятого сигнала с сигналом, полученным при отражении от эталонных шариков. На рис. 2 приведена зависимость полученной таким образом относительной величины рассеянного поля  $E_{\text{отн}} = E_{\text{рас}}/E_{\text{шар}}$  от длины волны падающего излучения. Зависимость  $E \sim \lambda^{-2}$  показана сплошной линией. Видно хорошее совпадение результатов измерений с

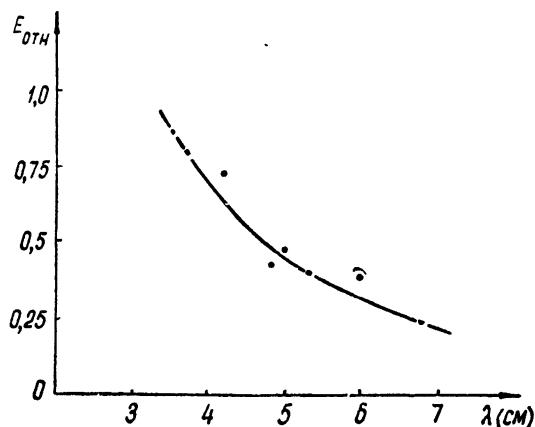


Рис. 2. Частотная зависимость рассеянного поля ( $\psi = 40^\circ$ ,  $\lambda = 2\Lambda \cos \psi$ ).

расчетной кривой.

в) Зависимость рассеянного поля  $E$  от угла скольжения  $\phi$  определяется множителем  $B(\phi)$  (1). Вид  $B(\phi)$  связан со степенью жесткости поверхности (для звуковых волн) и поляризацией и диэлектрическими свойствами рассеивающей поверхности (для радиоволн). В частности, для жесткой поверхности (или при диэлектрической проницаемости  $\epsilon \rightarrow \infty$  и вертикальной поляризации) [2]

$$B(\phi) = 1 + \cos^2 \phi. \quad (5)$$

Таким образом, при фиксированной волне и для одинаковых высот  $\zeta$  различных составляющих ряби  $x$ , величина рассеянного поля  $E$  также пропорциональна  $(1 + \cos^2 \phi)$ .

Измерение  $E(\phi)$  проводилось в диапазоне углов скольжения от 30 до 60°. В течение опыта расстояние  $R$  до рассеивающего участка и длина волны излучения  $\lambda$  сохранялись неизменными. Рассеянное поле для различных волн правильной ряби, для которых под разными углами  $\phi$  выполнено (4), нормировалось так же, как и при определении зависимости  $E(\lambda)$ , на одну и ту же величину  $\zeta$ . На рис. 3 показана зависимость  $E(\phi)$ , полученная для трех значений частоты падающего излучения. При этом зависимости  $E(\phi)$  приведены к одной частоте согласно условию  $E \sim k^2$ . Результаты измерений на разных частотах приводят к зависимости, несколько отличающейся от  $(1 + \cos^2 \phi)$  (сплошная кривая). Это связано с понижением точности измерений при изменении угла  $\phi$  (ввиду изменения расстояния от локатора до рассеивающего пятна

и некоторого смещения этого пятна\*). Из рис. 3 видно, что зависимость  $E(\psi)$  во всяком случае не сильнее, чем  $(1+\cos^2\psi)$ .

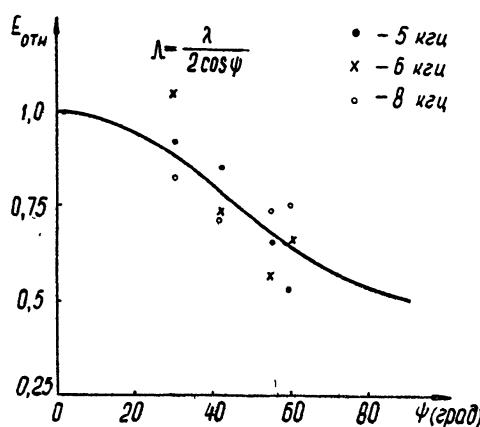


Рис. 3. Зависимость величины рассеянного поля от угла скольжения.

На рис. 4 в качестве иллюстрации приведены два спектра ряби, первый из которых измерен непосредственно, а второй рассчитан по измеренным значениям  $\sigma_0$  для разных  $k$  и фиксированного  $\psi$ . Из соображений удобства сопоставлялись частотные спектры ряби  $S(x)$ ; переход к пространственному спектру  $S(F)$  осуществляется с учетом дисперсии  $F = \sqrt{g^x}/2\pi$ . Непосредственное измерение спектра производилось путем статистической обработки показаний волномера [1];

на рис. 4  $h_{\text{отн}}(F) = \left[ \int_{F_1}^{F_2} S(F) dF \right]^{1/2}$  — среднеквадратичная высота состав-

ляющих ряби в диапазоне частот от  $F_1$  до  $F_2$ , определяющих ширину резонансной кривой  $E(F)$  по уровню 0,7 (рис. 3, [1]). Расчетные точки (кривая  $\bar{E}_{\text{отн}}(F)$ ) получены из измерений падающего излучения на разных частотах (от 5 до 10 кГц) с учетом изменения потенциала локатора. Из рисунка видно хорошее совпадение спектра ряби, воспроизведенного по измерениям рассеянного поля и непосредственно измеренного волномером.

2. Справедливость (2) была установлена для случая рассеяния звуковых волн нерегулярной, искусственно

г) Определение высокочастотной части спектра волнения по измерениям рассеянного сигнала. Проведенные измерения, подтверждающие справедливость (1) и (2), позволяют в ряде случаев решить обратную задачу: по измеренным значениям  $\sigma_0$  рассчитать спектр ряби. Действительно, из (2) следует, что

$$S(x_0) \sim \frac{\sigma_0}{k^4 (1 + \cos^2 \psi)}, \quad (6)$$

и для определения спектра ряби достаточно измерить рассеянное поле при разных углах скольжения или частотах падающего излучения.

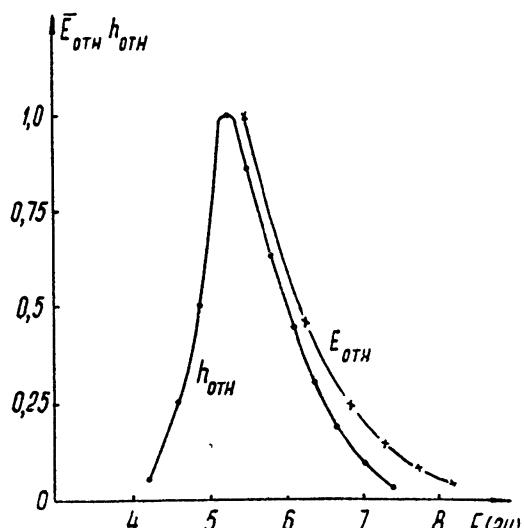


Рис. 4. Пример сопоставления спектра ряби и рассеянного ею поля ( $\psi = 45^\circ$ ).

\* Так, например, оценка показывает, что изменение только расстояния на 6% вызовет наблюдаемые на рис. 3 отклонения результатов измерений от зависимости  $(1 + \cos^2 \psi)$ .

созданной рябью в условиях бассейна. Покажем, что учет реальных спектров морского волнения позволяет, исходя из (2), объяснить ряд закономерностей рассеяния радиоволн взволнованной поверхностью моря. Рассмотрение также ограничим случаем рассеяния сантиметровых радиоволн от ряби (крупные волны отсутствуют).

а) *Зависимость интенсивности рассеянного поля от длины волны падающего излучения.* Для определения зависимости  $\sigma_0$  от  $\lambda$  в (2) должно быть подставлено аналитическое выражение пространственного спектра волнения  $S(x)$ . В океанографии обычно определяют частотный спектр  $S(F)$ , который в общем случае имеет вид [4]

$$S(F) = AF^{-n} \exp(BF^{-p}). \quad (7)$$

Характер спектра в области высоких частот (рябь) определяется степенным множителем  $F^{-n}$ , где  $n = 4 \div 6$ . Связь  $S(F)$  с  $S(x)$  зависит от степени анизотропии ряби в одномерном случае

$$S(x) dx = S(F)dF. \quad (8)$$

Для изотропной ряби

$$S(x, \beta) \times d \times d\beta = S(F, \beta) dFd\beta, \quad (9)$$

где  $\beta$  — направление наблюдения.

Учитывая тогда законы дисперсии для малых гравитационных волн на поверхности глубокого моря, получаем для одномерной ряби

$$S(x) \sim A_1 x^{-(n+1)/2} \quad (10)$$

и для изотропной ряби

$$S(x) \sim A_2 x^{-(n+3)/2}. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (2) и учитывая условие (4), получим для одномерной ряби

$$\sigma_0 \sim k^{-(n-7)/2} (\cos \psi)^{-(n+1)/2} B^2(\psi). \quad (12)$$

В изотропном случае

$$\sigma_0 \sim k^{-(n-5)/2} (\cos \psi)^{-(n+3)/2} B^2(\psi). \quad (13)$$

Из формул (12) и (13) следует, что зависимость  $\sigma_0$  от  $\lambda$  может быть разной для различных степеней анизотропии ряби. Полагая  $n = 5$  (из условия правильной размерности  $S(F)$ , [4]), получаем  $\sigma_0(k) \sim k^0 \div k^1$ . Наблюдаемые экспериментальные зависимости  $\sigma_0(\lambda)$  для случая рассеяния сантиметровых волн от сравнительно спокойного моря также показывают, что  $\sigma_0 \sim \lambda^0$  [5],  $\sigma_0 \sim \lambda^{-0.5}$  [6] и  $\sigma_0 \sim \lambda^{-1}$  [7].

б) *Зависимость интенсивности рассеянного поля от угла скольжения для реального морского спектра ряби* можно определить из (12) или (13). Рассмотрим случай изотропного волнения. Угловая зависимость определяется в этом случае произведением  $\cos^{-m} \phi B^2(\psi)$ . В [3] показано, что при углах скольжения  $\phi > 10^\circ$  для вертикальной поляризации

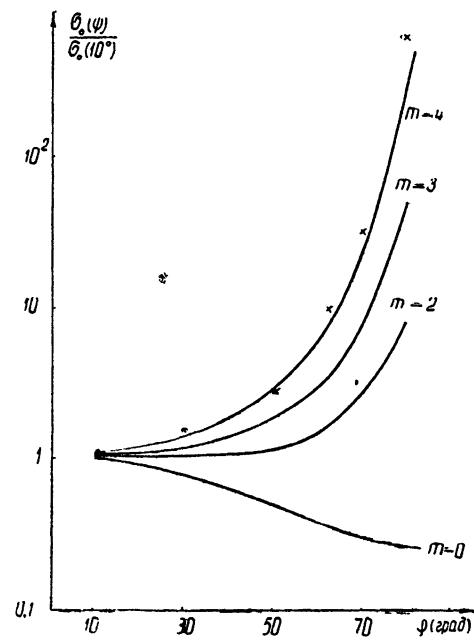


Рис. 5. Зависимость  $\theta_0(\psi)$  для различных видов спектров ряби.

$B(\psi) = 1 + \cos^2\psi$ . На рис. 5 приведены кривые зависимостей  $\sigma_0(\psi)$ , рассчитанные для различных видов спектра  $S(x)$ . Значения  $\sigma_0(\psi)$  нормированы на  $\sigma_0(10^\circ)$ , поскольку при  $\psi < 10^\circ$   $\sigma_0$  практически не зависит от вида спектра  $S(x)$ . Кривая для  $m = 0$  соответствует равномерному спектру  $S(x)$ ; при этом  $\sigma_0 \sim (1 + \cos^2\psi)^2$ . Если  $m > 0$ , видно резкое увеличение  $\sigma_0(\psi)$  при углах, превышающих  $50^\circ$ . На рис. 5 приведена также экспериментальная зависимость  $\sigma_0(\psi)$ , полученная для спокойного моря (рис. VI, 14а, [7]). Наблюдается хорошее совпадение результатов эксперимента с расчетной кривой для  $m = 4$  (т. е. при  $n = 5$  для изотропной ряби).

Таким образом, исследования обратного рассеяния звуковых волн нерегулярной рябью в условиях бассейна подтверждают справедливость механизма избирательного рассеяния и в случае нерегулярной ряби. При обратном рассеянии от нерегулярной ряби, имеющей широкий спектр частот, в рассеянии участвуют только те составляющие ряби, для которых выполняется условие пространственного резонанса (4).

Измерения величины рассеянного поля для разных углов скольжения, различных частот падающего излучения и при различных спектральных плотностях резонансных составляющих соответствуют расчету. Это позволяет по величине рассеянного поля на разных частотах определить пространственный спектр ряби.

Учет реального вида спектра морского волнения позволяет объяснить зависимость интенсивности радиолокационных сигналов, рассеянных поверхностью моря, от угла скольжения  $\psi$  и длины радиоволн  $\lambda$ .

Авторы благодарят И. Е. Островского за руководство работой и И. М. Фукса за полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Д. Розенберг, А. И. Калмыков, В. И. Зельдис, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **10**, № 6, 789 (1967)
- 2 Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, 3, 180 (1958).
- 3 А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 9, № 6, 1095 (1966).
- 4 Ветровые волны, перевод с англ. под ред Ю. М. Крылова, ИЛ, М., 1962
- 5 J. C. Wiltse, S. P. Schlesinger, C. M. Johnson, Proc. IRE, **45**, № 2, 220 (1957).
- 6 M. W. Long, IEEE Trans., AP-13, № 5, 749 (1965).
- 7 Распространение ультракоротких радиоволн, перевод с англ. под ред Б. А. Шиллера, изд. Сов. радио, М., 1954.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
29 июня 1966 г.

#### SOUND AND RADIO WAVE SCATTERING BY IRREGULAR RIPPLE

A. I. Kalmykov, A. D. Rosenberg, V. I. Zel'dis

Data of experimental investigation on sound signal scattering by an irregular ripple are given. A selective mechanism of scattering is shown to take place for the ripple with a wide spectrum. The measurement data of a scattered field dependence on the irradiation wavelength and the angle of convergence are given. It is shown that the allowance for a real form of sea ripple spectrum is necessary in calculating the characteristics of scattering by the sea surface.

УДК 539.284

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЯДЕРНЫХ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ С АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ УЧЕТЕ НАСЫЩЕНИЯ

Ю. С. Константинов

Рассмотрена задача о влиянии эффекта насыщения на форму сигналов ядерного магнитного резонанса при использовании автодинной методики наблюдения. Показано, что форма сигналов существенно зависит от величины связи между автодином и спин-системой. Величина связи, в свою очередь, при прочих равных условиях зависит от степени насыщения спин-системы. Определены устойчивые участки амплитудных и частотных кривых автодина в случае, когда изменение его стационарной амплитуды при прохождении через резонанс мало и связь превышает критическую.

Известно, что форма сигналов, наблюдаваемых в экспериментах по ядерному магнитному резонансу, зависит не только от свойств исследуемой спин-системы, для описания которой при определенных условиях могут быть использованы уравнения Блоха [1], но и от характера взаимодействия этой системы с приемным колебательным контуром датчика сигналов. В работах [2, 3] показано, что возникающие в результате такого взаимодействия изменения амплитуды и фазы высокочастотного магнитного поля, действующего на спин-систему, приводят к искажению формы сигналов. В работе [2] отмечается, в частности, что влияние взаимодействия на форму сигналов может быть особенно заметным, если в качестве датчика используется генератор слабых колебаний (автодин), поскольку в этом случае при прохождении через резонанс изменяется как амплитуда, так и частота высокочастотного магнитного поля. При этом, если связь между спин-системой и автодином превышает критическую, наблюдаются скачки амплитуды и частоты колебаний датчика (затягивание частоты). Исследование формы сигналов ядерного магнитного резонанса, наблюдаваемых с помощью автодинов, посвящено значительное число работ (см., например, [4–6]). В этих работах уравнения Блоха решались совместно с уравнением автоколебательной системы. При этом предполагалось, что амплитуда колебаний генератора настолько мала, что изменением продольной составляющей вектора намагниченности  $M_z$  можно пренебречь и считать  $M_z \approx M_0$ , где  $M_0$  — равновесное значение намагниченности\*. Тем самым из рассмотрения исключался эффект насыщения спин-системы, хотя при использовании автодинной методики насыщением часто нельзя пренебречь, поскольку амплитуда колебаний датчика не может быть сделана сколь угодно малой. Целью настоящей работы является исследование влияния насыщения на форму сигналов ядерного магнитного резонанса, получаемых с помощью автодиновых датчиков.

\* Следует заметить, что при  $M_z \approx M_0$  рассмотренная в работе [5] задача по существу не отличается от подробно исследованной ранее задачи о колебаниях двух связанных контуров, один из которых регенерирован лампой (см., например, [7–10]).

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Предположим, что характеристика лампы генератора аппроксимирована кубическим полиномом, и ограничимся исследованием случая медленного прохождения через резонанс. Тогда для решения рассматриваемой задачи можно воспользоваться следующей системой уравнений первого приближения [4]:

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2Q_r} (1 - A^2) A - \frac{\alpha_1}{2} v; \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\alpha_1 u}{2A}; \quad (2)$$

$$\frac{du}{d\tau} = \left( -\Delta\Omega + \frac{d\varphi}{d\tau} \right) v - \nu_2 u; \quad (3)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = - \left( -\Delta\Omega + \frac{d\varphi}{d\tau} \right) u - \nu_2 v + \frac{\alpha_2 A}{2} (1 + z); \quad (4)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = - \nu_1 z - \frac{\alpha_2 A}{2} v. \quad (5)$$

В уравнениях (1)–(5) приняты следующие обозначения:  $A$  — отношение амплитуды колебаний генератора к его стационарной амплитуде  $A_0$  при  $\alpha_1 = 0$ ;  $Q_r \gg 1$  — эквивалентная добротность контура с учетом регенерации;  $u, v, 1 + z$  — компоненты приведенного вектора намагниченности  $M/M_0$  в системе координат, вращающейся с частотой генератора  $1 + d\varphi/d\tau = \omega/\omega_1$ ;  $\omega_1$  — резонансная частота контура генератора;  $\tau = \omega_1 t$ ;  $\Delta\Omega = \omega_0/\omega_1 - 1$ ;  $M_0 = \chi_0 H_0$ ;  $\chi_0$  — статическая ядерная восприимчивость;  $\omega_0 = \gamma H_0$  — частота ларморовой прецессии;  $\gamma$  — гиромагнитное отношение;  $\nu_i = 1/\omega_1 T_i$  ( $i = 1, 2$ );  $T_1, T_2$  — времена релаксации;  $\alpha_1 = 4\pi N\sigma F\omega_1 \omega_0 \chi_0 / \gamma a_0$ ;  $\alpha_2 = \gamma a_0 / \omega_1^2 N\sigma$ ;  $N\sigma$  — произведение числа витков на площадь поперечного сечения катушки индуктивности;  $F$  — коэффициент заполнения.

Стационарная амплитуда  $A_0$  и частота  $\omega$  автодина определяются соотношениями

$$(\Delta\Omega/\nu_2)^2 = \left[ \frac{k/q - (1 + \beta) \zeta + \beta \zeta^2}{\zeta} \right] (1 - q\zeta)^2 \equiv f_1 f_2^2; \quad (6)$$

$$(\Delta\omega/\nu_2)^2 = f_1(\zeta, k, q, \beta), \quad (7)$$

где  $\zeta = 1 - A_0^2$  ( $1 > \zeta > 0$ );  $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)/\omega_1$ ;  $q = 1/2\nu_2 Q_r$ ;  $k = \sigma_1 \alpha_2 / 4\nu_2^2$ ;  $\beta = \alpha_2^2 / 4\nu_1 \nu_2$  — параметр, характеризующий степень насыщения спин-системы при  $\zeta = 0$ . Несмотря на то, что уравнения (6), (7) сложнее выражений для амплитудных и частотных кривых системы с двумя степенями свободы [3], элементы симметрии, присущие последним, сохраняются и в рассматриваемом здесь случае: амплитудные кривые  $\zeta = \zeta(\Delta\Omega)$  имеют ось симметрии  $\Delta\Omega = 0$ , а частотные кривые  $\Delta\omega = \Delta\omega(\Delta\Omega)$  — центр симметрии в начале координат. Исследуя двойную точку кривой (6),  $\zeta_{1,2} = 1/q$ ,  $\Delta\Omega = 0$ , легко показать, что при  $k > 1 + \beta(1 - \zeta_{1,2})$  ей соответствуют две различные точки на частотной кривой (7) и только одна точка  $\Delta\omega = 0$ , если  $k \leq 1 + \beta(1 - \zeta_{1,2})$ . Таким образом, выражение для критической связи имеет вид

$$k_{kp} = 1 + \beta(1 - \zeta_{1,2}). \quad (8)$$

Из этого выражения следует, что  $k_{kp}$  зависит от величины параметра  $\beta(1 - \zeta_{1,2}) = \beta A_{00}^2$ , характеризующего степень насыщения спин-системы при  $\Delta\Omega=0$ . Если  $\zeta_{1,2} \approx 1$  ( $q \geq 1$ ), этот параметр может быть малым даже при больших  $\beta$ , так как взаимодействие со спин-системой при прохождении через резонанс приводит к сильному уменьшению амплитуды автодина. При  $q < 1$ ,  $4\beta k > (1+\beta)^2 q$  амплитуда колебаний автодина обращается в нуль при расстройках, определяемых неравенством

$$(\Delta\Omega/\nu_2)^2 \leq (k/q - 1)(1 - q)^2$$

(гашение колебаний). Можно показать, что при выполнении условий

$$\beta q > k, \quad k \frac{1+q}{1-q} - \frac{2q^2}{1-q}$$

амплитудные кривые имеют вертикальные касательные внутри области гашения колебаний. Можно ожидать, что «внутренние» участки амплитудных кривых, заключенные между точками  $A$  и  $B$  (см. рис. 1), будут неустойчивыми, и в этих точках  $\zeta$  будет изменяться скачком. В другом частном случае  $q \gg 1$ ,  $\zeta_{1,2} \ll 1$ , который подробно рассмотрен ниже, амплитуда автодина при синхронизме мало отличается от единицы, и (8) можно записать в виде

$$k_{kp} \approx 1 + \beta. \quad (8a)$$

Если при некоторой определенной амплитуде колебаний  $k > k_{kp}$ , то, увеличивая амплитуду, можно осуществить непрерывный переход к  $k < k_{kp}$ , наблюдая при этом соответствующие изменения формы амплитудных и частотных кривых, в частности,— исчезновение скачков. Заметим, что при  $k \geq 1$  этот переход происходит при небольших значениях  $\beta$ . Это означает, что даже слабое насыщение спин-системы может привести к качественным изменениям формы сигналов ядерного магнитного резонанса. Уравнения (6), (7) дают возможность представить графически зависимость стационарной амплитуды и частоты автодина от расстройки  $\Delta\Omega$  при различных значениях параметров  $q$ ,  $k$  и  $\beta$ . Поскольку в экспериментах с автодинными датчиками в качестве сигналов ядерного магнитного резонанса регистрируется именно эта зависимость, для окончательного определения формы сигналов при амплитудном и частотном детектировании колебаний автодина необходимо найти устойчивые участки кривых  $\zeta = \zeta(\Delta\Omega)$  и  $\Delta\omega = \Delta\omega(\Delta\Omega)$  соответственно.

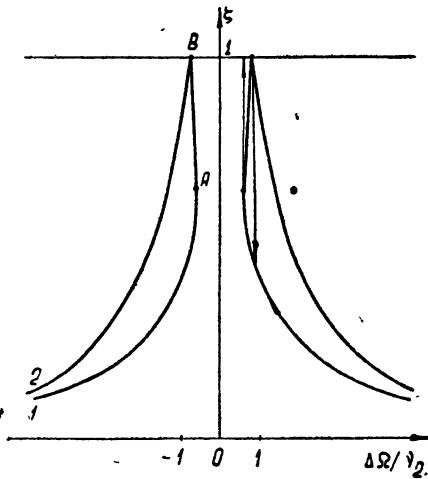


Рис. 1. Амплитудные кривые при гашении ( $k=1,8$ ,  $q=0,5$ ):  
1— $\beta=10$ , 2— $\beta=0$ .

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Система уравнений (1)–(5) имеет тривиальное решение, соответствующее положению равновесия исходной системы [4]. Условия устойчивости для этого решения не отличаются от полученных в работе [7] для системы с двумя степенями свободы и в наших обозначениях имеют вид

$$q < 1, \quad (\Delta\Omega/\nu_2)^2 < (k/q - 1)(1 - q)^2.$$

Для исследования устойчивости периодических режимов исходной системы уравнений нужно составить уравнения в вариациях для системы первого приближения. В результате получается характеристическое уравнение четвертой степени, исследование которого приводит к громоздким выражениям. Поэтому ограничимся рассмотрением частного случая  $q \gg 1$ , который часто встречается на практике, особенно при исследовании веществ с достаточно большими  $T_2$ . В работе [10] показано, что при  $q \gg 1$  систему уравнений (1)–(5) можно упростить, если ввести малый параметр  $\mu = 1/q$  и считать  $\Delta\Omega$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  порядка  $v_2$ . При этом амплитуда  $A$  отличается от единицы на величину порядка  $\mu$  и является медленно меняющейся функцией времени, т. е.  $A = 1 + \mu a(\mu t)$ . Разлагая правые части уравнений (1)–(5) в ряд по степеням  $\mu$  и удерживая лишь члены первого порядка, приходим к упрощенной системе, в которой

$$a = -\frac{\alpha_1 Q_r}{2} v,$$

а остальные уравнения получаются из (2)–(5), если положить в них  $A = 1$ . Выражения (6), (7) для упрощенной системы можно представить в форме

$$a = -\frac{k_1}{2q(1 + \xi^2)}; \quad (6a)$$

$$\Delta\Omega_1 = \xi \left( -1 + \frac{k_1}{1 + \xi^2} \right), \quad (7a)$$

где  $k_1 = \alpha_1 \alpha_2 / 4v_2^{*2}$ ,  $\xi = \Delta\omega/v_2^*$ ,  $\Delta\Omega_1 = \Delta\Omega/v_2^*$ ,  $v_2^* = v_2(1 + \beta)^{1/2}$  — приведенные значения соответствующих коэффициентов. Нетрудно видеть, что в принятых обозначениях выражения (6a), (7a) не отличаются от подобных выражений для системы с двумя степенями свободы [10].

После обычных преобразований приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda^3 + v_2(1 + x - \theta) \lambda^2 + v_2^{*2} [x + 2\xi^2 + \theta(\xi^2 - \eta)] \lambda + \\ + v_1 v_2^{*2} [2\xi^2 + \theta(\xi^2 - 1)] = 0,$$

где  $x = v_1/v_2$ ,  $\eta = (1 + z)/(1 + \beta)$ ,  $\theta = -1 + k_1/(1 + \xi^2) = \Delta\Omega_1/\xi$ . Условия устойчивости имеют вид

а)  $1 + x - \theta > 0$ ,

б)  $(\eta - \xi^2)\theta^2 - [\xi^2 + \eta(1 + x)]\theta + 2\xi^2 + x(1 + z) > 0$ ,

в)  $2\xi^2 + \theta(\xi^2 - 1) > 0$ .

Нетрудно показать, что при  $k_1 \ll 1$  и любых  $\Delta\Omega_1$  существует единственное периодическое решение исходной системы, которое всегда устойчиво. Рассмотрим случай  $k_1 > 1$ . Заметим, что во втором и четвертом квадрантах плоскости  $\Delta\Omega_1 \xi \theta$  меньше нуля, и потому условия а, б, в всегда выполнены. Воспользовавшись этими условиями, а также (7a), определим границы областей устойчивости в первом и третьем квадрантах этой плоскости:

$$\Delta\Omega_1 = (1 + x) \xi; \quad (9)$$

$$(\eta - \xi^2) \Delta\Omega_1^2 - \xi[\xi^2 + \eta(1 + x)] \Delta\Omega_1 + \xi^2 [2\xi^2 + x(1 + z)] = 0; \quad (10)$$

$$\Delta\Omega_1 = \frac{2\xi^3}{1 - \xi^2}. \quad (11)$$

Граница области устойчивости (11) проходит через точки частотных кривых, в которых касательные вертикальны. Она имеет асимпто-ты  $\xi = \pm 1$  и пересекается с прямой (9) в начале координат и в точках

$$\pm \frac{(1+x)^{3/2}}{(3+x)^{1/2}}, \quad \pm \left( \frac{1+x}{3+x} \right)^{1/2}, \quad . \quad (12)$$

Эти точки пересечения являются общими для всех трех границ, причем начало координат есть особая точка кривой (10). Дополнительное исследование показывает, что она будет изолированной при  $4x\beta > (1 - x)^2$  и двойной, если  $4x\beta < (1 - x)^2$ . Отсюда следует, что при  $x = 1$  начало координат всегда будет изолированной точкой кривой (10). Эта кривая имеет асимптоты  $\xi = \pm \eta^{1/2}$  и  $\xi = \Delta\Omega_1$  и проходит через точки с координатами

$$\pm \eta^{-1/2} \frac{2\eta + x(1+x)}{2+x}, \quad \pm \eta^{1/2}.$$

Таким образом, область неустойчивости ограничена осью абсцисс, отрезком кривой (11), заключенным между ближайшими к началу координат точками пересечения кривых (10), (11), и внешними участками кривой (10) (см. рис. 2). Если  $\beta > 1/3$ , то ближайшими к началу координат точками пересечения будут общие точки (12) (точка A на рис. 2). Кроме того, кривые (10) и (11) пересекаются в точках

$$\pm \frac{x^{3/2}}{(\eta - 1)[2(\eta - 1) + x]^{1/2}}, \quad \pm \left( \frac{x}{2(\eta - 1) + x} \right)^{1/2},$$

которые при  $\beta < x^2/(1+2x)$  находятся ближе к началу координат, чем (12) (точка  $B$  на рис. 2). В предельном случае при  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 1+x$  точка  $B$  стремится к точке пересечения асимптоты  $\xi = \Delta\Omega_1$  и кривой (11) (точка  $C$  на рис. 2). При этом границы области устойчивости, а также значение  $k_1$ , при котором происходит смена характера потери устойчивости ( $k_{1c}=8/3$ ), в пределе совпадают с определенными в работах [8, 10]. То же самое имеет место в другом предельном случае при  $x \rightarrow 0$ .

В общем случае смена характера потери устойчивости происходит, вообще говоря, не в точках  $A$  и  $B$ , и при соответствующих этим точкам значениях  $k_{1A}$  и  $k_{1B}$ , а при несколько меньших  $k_1$ . Для определения этих значений нужно совместно решить уравнения (7а) и (10). При этом оказывается, что смена характера потери устойчивости может произойти и в точке  $A$  (если, разумеется,  $\beta > 1/3$ ). Например, при  $x = 1$ ,  $\eta \leq 1,5$  для этого нужно, чтобы параметр  $\eta$  был меньше  $1/2$ . В этом случае  $k_{1A} = 4,5 > k_{1C}$ . Характерно, что при учете насыщения граница области устойчивости (особенно, если  $x \approx 1$ ) в более широком диапазоне значений  $\Delta\Omega_1$  совпадает с геометрическим местом точек, в которых касательные к частотным кривым вертикальны, и, начиная от точки  $C$ , проходит ниже границы, определенной для системы с двумя степенями свободы.

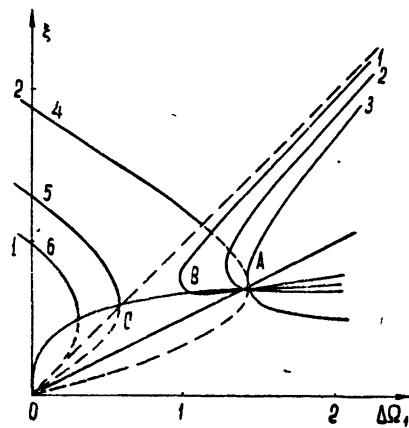


Рис. 2. Границы области неустойчивости в первом квадранте плоскости  $\Delta\Omega_1\xi$  при  $x=1$ :

1- $\eta=1,6$ ; 2- $\eta=1$ ; 3- $\eta=0,36$ ; 4, 5, 6—частотные кривые при  $k_1=4,5, 2,66$  и 2 соответственно.

Смещение границ устойчивости в область меньших  $\xi$  и увеличение значения коэффициента связи  $k_1$ , при котором происходит смена характера потери устойчивости, можно объяснить тем, что часть высокочастотной мощности, поглощаемой спин-системой, причем тем большая, чем больше  $x$ , рассеивается в решетке, не увеличивая амплитуды поперечной компоненты вектора намагниченности  $\rho = (u^2 + v^2)^{1/2}$ , которая в нашем случае эквивалентна амплитуде колебаний «второго контура». (Как известно [8, 9], смена характера потери устойчивости происходит при достаточно больших значениях этой амплитуды.) Ограничивааясь рассмотрением случаев, когда скачки амплитуды и частоты происходят в точках с вертикальными касательными, можно определить значения расстроек  $\Delta\Omega_{1b}$  (соответствующие этим точкам) в зависимости от  $k_1 \gg 1$ :

$$\Delta\Omega_{1b} = \pm \sqrt{2} \frac{[-(2+k_1) + \sqrt{k_1^2 + 8k_1}]^{3/2}}{4+k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_1}}.$$

Таким образом, при связи, превышающей критическую, экстремумы сигналов ядерного магнитного резонанса, наблюдаемых с помощью автодинного датчика, сдвинуты относительно  $\Delta\Omega=0$ . Это обстоятельство нужно учитывать, например, при точных измерениях напряженности постоянного поля  $H_0$ . При связи, меньше критической, максимум  $\zeta$  наблюдается при синхронизме собственных частот автодина и спин-системы; форма сигналов определяется выражением (6) (или (7)), и даже в этом случае может заметно отличаться от формы сигналов поглощения или дисперсии, получаемых из уравнений Блоха.

Автор приносит глубокую благодарность С. Д. Гвоздоверу за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Wangsness, F. Bloch, Phys. Rev., **89**, 728 (1953).
2. N. Bloembergen, R. V. Pound, Phys. Rev., **95**, 8 (1954).
3. C. R. Busse, R. E. Norberg, G. E. Pake, Phys. Rev., **104**, 419 (1956).
4. Н. М. Померанцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 226 (1960).
5. H. Pfeifer, Ann. d. Phys., **15**, 311 (1955).
6. Н. М. Померанцев, Вестник МГУ, № 2, 47 (1955).
7. А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖТФ, **4**, 122 (1934).
8. С. В. Беллюстин, Ученые записки ГГУ, **12**, 197 (1939).
9. Ю. Б. Кобзарев, Радиотехника, **5**, 41 (1950).
10. Е. А. Ирисов, Р. В. Хохлов, Вестник МГУ, № 2, 137 (1958).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
18 июля 1966 г.

#### INTERACTION OF NUCLEAR MAGNETIC MOMENTS WITH AUTO-OSCILLATING SYSTEM WHEN CONSIDERED THE SATURATION

*Yu. S. Konstantinov*

The influence of the saturation effect upon the form of nuclear magnetic resonance signals is considered by means of using the autodyne observation technique. The form of signals is shown to depend considerably on the coupling between autodyne and spin-system. The coupling, in its turn, depends on the degree of spin-system saturation under the other similar conditions. Stable parts of the amplitude and frequency curves of the autodyne are determined in the case when of a small change of its stationary amplitude while passing through resonance and when the coupling exceeds the critical value.

УДК 621.318.1—416

## ШУМЫ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ ТОНКИХ МАГНИТНЫХ ПЛЕНОК

*B. B. Потемкин, Г. П. Жигальский*

Работа посвящена исследованию шумов, возникающих в тонких магнитных пленках при их синусоидальном перемагничивании. Приведены результаты измерения спектральной плотности шума в зависимости от амплитуды и частоты перемагничивающего поля вдоль легкой и трудной осей в диапазоне частот 1—100 кгц. Обнаружено увеличение шума с частотой перемагничивания. Интенсивность шума вдоль трудной оси меньше, чем вдоль легкой, из-за различия механизмов перемагничивания. Данна качественная интерпретация полученных результатов

За последние годы в отечественной и зарубежной литературе опубликовано много работ по исследованию свойств и применению тонких магнитных пленок (ТМП). Практический интерес к этим исследованиям обусловлен перспективностью применения ТМП в быстродействующих вычислительных машинах в качестве элементов памяти и логики. Теоретическое и экспериментальное изучение физических особенностей ТМП привели к развитию ряда новых экспериментальных методов исследования.

Наблюдения за преобразованиями доменной структуры при перемагничивании ТМП показывают, что положение доменных границ детально не повторяется, при различных циклах перемагничивания происходит перестройка доменной структуры, а перемагничивание отдельных областей от цикла к циклу происходит не при строго одинаковых значениях полей. Процесс перемагничивания в слабых полях включает в себя преодоление ряда энергетических барьеров, дающее начало дискретному росту намагниченности скачками Баркгаузена, причем, как показали исследования [1], последовательность скачков Баркгаузена в каждом перемагничивании случайна и не предопределется последовательностью предшествующего перемагничивания.

Все это приводит к тому, что поток магнитной индукции через потокосцепляющую обмотку не является строго периодическим процессом во времени, а испытывает флуктуации. И как следствие этой непериодичности, заключающейся в случайному характере перемагничивания отдельных областей во времени, возникает шумовая ЭДС индукции. Шумы циклического перемагничивания определяют пороговую чувствительность и стабильность различных устройств на основе ТМП. Поэтому исследование шумов ТМП и способов уменьшения их является весьма актуальной задачей. Кроме того, можно надеяться, что дальнейшее изучение характера шума может дать дополнительную информацию о процессах перемагничивания пленок, а также позволит оценить некоторые характеристики последних. Настоящая работа содержит результаты экспериментального исследования шумов синусоидального перемагничивания ТМП.

Для изучения шумов была создана установка, блок-схема которой приведена на рис. 1. Установка позволяла производить измерения

спектральной плотности шума ТМП в диапазоне частот от 1 до 100 кгц в зависимости от амплитуды и частоты перемагничивающего поля вдоль осей легкого и трудного намагничиваний. Исследование проводилось при частотах перемагничивания от 3 до 16 Мгц с амплитудами перемагничивающих полей  $H_p$  до 10 э. Неоднородность поля не превышала 7%.

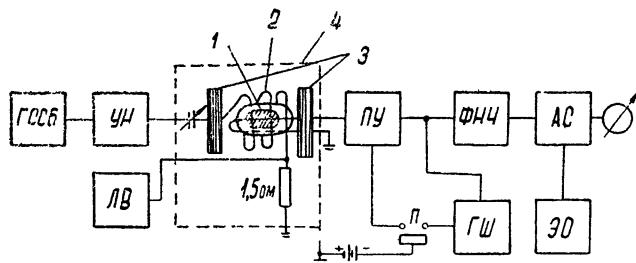


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1—пленка, 2—перемагничивающая катушка, 3—кольца Гельмгольца,  
4—магнитный экран, УН—усилитель накачки, ЛВ—ламповый вольтметр,  
ПУ—предварительный усилитель, ФНЧ—фильтр низких частот, ГШ—  
шумовой генератор, АС—анализатор спектра, ЭО—электронный осцил-  
лограф.

Перемагничивание пленки осуществлялось полем плоского соленоида толщиной 3 мм, шириной 31 мм и длиной 24 мм, имеющего 28 витков. Для получения достаточной величины тока в соленоиде использовался последовательный резонанс на частотах перемагничивания. Высоко-частотный сигнал от ГСС-б предварительно усиливался трехкаскадным усилителем гока с резонансным перестраиваемым выходом.

Шумы синусоидального перемагничивания пленки регистрировались съемным витком, выполненным в виде полосковой линии из посеребренной латунной фольги шириной 15 мм. Виток с помещенной в него пленкой располагался внутри перемагничивающей катушки перпендикулярно ее виткам. Такое расположение диктовалось необходимостью свести к минимуму магнитную связь между съемным витком и перемагничивающей катушкой. Таким образом, в работе исследовалась попечная компонента шума, возникающая при перемагничивании пленки в ортогональном направлении. Исследование этой компоненты представляет интерес для многих устройств на основе ТМП (параметроны, параметрические усилители, модуляторы и др.). Указанная конструкция помещалась в центре колец Гельмгольца, которые ориентировались таким образом, чтобы можно было при необходимости вводить коррекцию на горизонтальную составляющую поля Земли.

Со съемного витка шумы поступали на малошумящий предварительный усилитель и затем подавались на вход спектронализатора. После предварительного усилителя включался фильтр низких частот до 400 кгц. Используемый спектронализатор выполнен по схеме супергетеродинного приемника с двойным преобразованием частоты. Первый гетеродин—с кварцевой стабилизацией, второй—перестраиваемый. Полоса пропускания спектронализатора равна 500 гц.

Для исключения наводок от внешних электрических и магнитных полей применялась магнитная экранировка. Методика измерения шума заключалась в сравнении исследуемого шума с шумом диода 2Д2С, работающего в режиме насыщения.

Собственные шумы спектронализатора с предварительным усилителем измерялись при выключенном перемагничивающем поле (т. е. в отсутствие шумов пленки) и учитывались при обработке результатов.

Исследования проводились на пленках, изготовленных методом термического напыления пермаллоя марки 79НМА при давлении  $10^{-5}$  мм рт. ст на стеклянные оптически отполированные подложки во внешнем магнитном поле 100 э. Напыление проводилось при температуре подложки 200°C. Пленки имели форму дисков диаметром 10 мм.

О характере спектра шумов циклического перемагничивания ТМП ранее сообщалось в [2]. В настоящей работе проведено экспериментальное исследование шумов синусоидального перемагничивания ТМП в зависимости от амплитуды и частоты перемагничивающего поля. Результаты данного исследования приведены на рис. 2—4. На рис. 2 изображены зависимости спектральной плотности шума пленки № 1 (толщина  $d = 1270 \text{ \AA}$ , коэрцитивная сила  $H_c = 1,3 \text{ э}$ , поле анизотропии  $H_k = 4 \text{ э}$ , угловая дисперсия  $\beta = 2,5^\circ$ ) от частоты наблюдения при перемагничивании ее вдоль легкой оси. На рис. 3, 4 приведены зависимости спектральной плотности шума пленки № 2 ( $d = 1500 \text{ \AA}$ ,  $H_c = 1,2 \text{ э}$ ,  $H_k = 3,3 \text{ э}$ ,  $\beta = 0,5^\circ$ ) на фиксированных частотах наблюдения  $F$  от амплитуды перемагничивающего поля  $H_p$  для различных частот перемагничивания  $f_p$  вдоль легкого и трудного направлений.

Как показывают экспериментальные исследования, спектральная плотность шума  $g(F)$  ТМП в диапазоне частот 1—100 гц изменяется пропорционально  $1/F^\alpha$  как при перемагничивании вдоль легкой оси, так и в перпендикулярном направлении. Параметр  $\alpha$  меняется для разных пленок и зависит от режима перемагничивания, в частности, наблюдается тенденция роста параметра  $\alpha$  с частотой перемагничивания (рис. 2). В наших экспериментах  $\alpha \sim 0,5 \div 3$ . Проведенное исследование оставляет открытым вопрос о поведении  $g(F)$  при  $F \rightarrow 0$ . Как известно [3, 4], для шумов циклического перемагничивания ферромагнетика необходимо, чтобы  $g(0) = 0$ . Возможно, что спад спектральной плотности  $g(F)$  при  $F \rightarrow 0$  происходит на более низких частотах. Во всяком случае, выполненные нами измерения шума при  $F = 100 \text{ гц}$  и выше не обнаружили уменьшения шума с понижением частоты.

Интересно при этом отметить, что спектр шума вида  $1/F$ , обусловленный магнитными шумами, наблюдался Мари в диапазоне частот 26 гц—1 кгц при исследовании параметрического усилителя с магнитным ортогональным управлением и с частотой накачки порядка нескольких мегагерц [5].

Возникновение шума вида  $1/F^\alpha$  может быть объяснено существованием корреляции между отдельными импульсами перемагничивания, т. е. корреляции между вращением доменов или смещением доменных границ от цикла к циклу. Учет корреляции приводит, как известно [6], к спадающему характеру спектра и позволяет объяснить многие экспериментальные результаты. С ростом частоты перемагничивания подобный учет становится принципиально необходимым.

Как следует из экспериментальных кривых (рис. 3, 4), шумы при достаточно малых полях невелики. Это имеет место при воздействи-

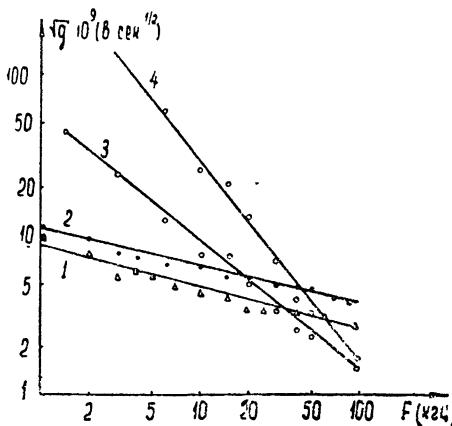


Рис. 2. Спектральная плотность шума пленки № 1 при перемагничивании вдоль легкой оси:

$$1-f_p=4,7 \text{ Гц}, H_p=5,8 \text{ э}, 2-f_p=5 \text{ Гц}, H_p=6,7 \text{ э}, 3-f_p=12 \text{ Гц}, H_p=4,5 \text{ э}, 4-f_p=12 \text{ Гц}, H_p=6 \text{ э}.$$

переменного поля вдоль легкого и трудного направлений пленки и может быть объяснено тем, что в малых полях имеют место в основном обратимые процессы в пленке [7]. Перемагничивание в тонких пленках полем вдоль оси легкого намагничивания начинается с образования зародышей доменов обратной намагнченности в областях неоднородностей или больших полей рассеяния и происходит вращением магнитных моментов локальных участков. Процесс перемагничивания перпендикулярно оси легкого намагничивания в достаточно слабых полях соответствует обратному вращению вектора намагнченности пленки. Вклад необратимых процессов здесь мал, а петля гистерезиса при этом близка к линейной.

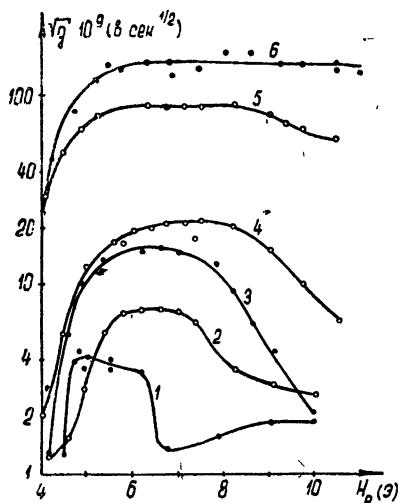


Рис. 3. Зависимость шума пленки № 2 от амплитуды поля при перемагничивании вдоль оси легкого намагничивания:

1- $f_p=5$  Мгц,  $F=2$  кгц; 2- $f_p=10$  Мгц,  $F=10$  кгц;  
3- $f_p=10$  Мгц,  $F=2$  кгц; 4- $f_p=-12$  Мгц,  $F=10$  кгц; 5- $f_p=12$  Мгц,  $F=2$  кгц;  
6- $f_p=16$  Мгц,  $F=10$  кгц.

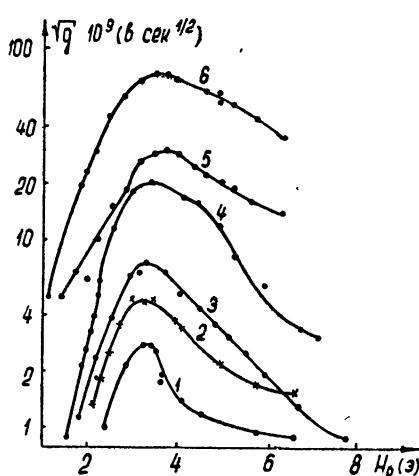


Рис. 4. Зависимость шума пленки № 2 от амплитуды поля при перемагничивании перпендикулярно оси легкого намагничивания:

1- $f_p=10$  Мгц,  $F=10$  кгц; 2- $f_p=10$  Мгц,  $F=2$  кгц; 3- $f_p=12$  Мгц,  $F=10$  кгц; 4- $f_p=-12$  Мгц,  $F=2$  кгц; 5- $f_p=16$  Мгц,  $F=10$  кгц;  
6- $f_p=16$  Мгц,  $F=2$  кгц.

С ростом амплитуды перемагничающего поля шум возрастает до некоторого максимального значения и начинает уменьшаться при достаточно больших значениях  $H_p$ . Возрастание шума при воздействии переменного поля вдоль трудной оси происходит при меньших амплитудах поля, что объясняется различием механизмов перемагничивания пленки.

Известно [8], что наибольшее значение интенсивности шума циклического перемагничивания ферромагнетиков имеет место в полях, соответствующих коэрцитивной силе. Перемагничивание ТМП параллельно легкой оси в полях порядка коэрцитивной силы осуществляется смещением доменных границ, причем число смещающихся границ и скорость их движения определяются величиной приложенного поля [9,10].

С увеличением амплитуды перемагничающего поля число центров перемагничивания увеличивается, а размеры их уменьшаются. Если перемагничающее поле превышает поле анизотропии, происходит постепенный переход от процесса смещения стенок к неоднородному вращению [7]. Относительный вклад процессов смещения по сравнению

с процессами некогерентного вращения уменьшается, и интенсивность шума резко снижается (рис. 3).

Как показывают исследования (рис. 3, 4), с увеличением частоты перемагничивающего поля происходит увеличение спектральной плотности шума при перемагничивании пленки как вдоль легкой оси, так и вдоль трудной, причем наиболее быстрый рост шума имеет место при частотах перемагничивания выше 10—12  $M\text{c}$  и определяется динамическими свойствами пленок. Характер нарастания шума при различных перемагничивающих полях в зависимости от частоты может быть получен из рис. 3, 4.

Как следует из рис. 3, область значений  $H_p$ , при которых шум наиболее интенсивен, расширяется, а среднее значение амплитуды поля, при котором шум максимальен, смещается в сторону больших значений  $H_p$  с ростом частоты перемагничивания. Этому смещению, по-видимому, могут быть поставлены в соответствие экспериментальные результаты [11—13], по которым среднее значение коэрцитивной силы пленки возрастает с частотой перемагничивающего поля. С увеличением коэрцитивной силы пленки для насыщения требуются большие поля. Поэтому при достаточно больших частотах пленка не будет перемагничиваться по предельному циклу. При этом, кроме флуктуаций скорости движения границ и пути, по которому происходит необратимое смещение доменных границ скачками Баркгаузена, будет флуктуировать и величина намагниченности при амплитудных значениях поля из-за флуктуаций числа перемагничивающихся доменов, причем с ростом частоты величина этих флуктуаций увеличивается, что приводит к возрастанию шума с частотой перемагничивающего поля.

С другой стороны, характер изменения кривых (рис. 3) указывает на то, что с увеличением частоты перемагничивания интервалы полей, в которых эффект Баркгаузена наиболее интенсивен, расширяются. При этом происходит возрастание дисперсии критических полей для ансамбля локальных участков пленки. Отдельные области пленки связаны между собой силами обменного взаимодействия и магнитными полями рассеяния на границах областей. Поэтому из-за взаимодействия между доменами увеличение дисперсии критических полей по ансамблю доменов приведет к возрастанию временной дисперсии, а последнее приводит к возрастанию шума даже при перемагничивании по предельному циклу. При перемагничивании пленки вдоль оси трудного намагничивания зависимость шума от  $H_p$  имеет несколько иной характер (рис. 4). Кроме того, величина шума при тех же частотах перемагничивающего поля уменьшается по сравнению со случаем перемагничивания вдоль легкой оси. Это является следствием того, что при перемагничивании перпендикулярно легкой оси относительный вклад обратимых процессов больше из-за различия механизмов скачка и характера доменной структуры. Максимум шума в этом случае имеет место при поле, близком к значению поля анизотропии пленки. При этом площадь петли гистерезиса вдоль трудного направления пленки близка к своему максимальному значению.

С ростом частоты перемагничивающего поля максимум шума незначительно смещается в сторону больших  $H_p$ . Это связано, очевидно, с тем, что значение коэрцитивной силы вдоль трудного направления мало изменяется с частотой. С увеличением амплитуды перемагничивающего поля выше 4—5 э шум снижается.

Проведенные исследования показывают следующее.

1. Шумы синусоидального перемагничивания ТМП в диапазоне частот 1—100  $k\text{c}\mu$  пропорциональны  $1/F^\alpha$  ( $\alpha \sim 0,5 - 3$ ) независимо от направления перемагничивания, что объясняется корреляцией шума при соседних циклах перемагничивания.

2. Шумы синусоидального перемагничивания вдоль трудной оси меньше, чем при перемагничивании вдоль легкого направления.

3. С ростом частоты перемагничающего поля шум увеличивается при перемагничивании в обоих направлениях, причем при перемагничивании в легком направлении возрастание происходит быстрее.

4. В достаточно больших полях интенсивность шума уменьшается при перемагничивании в обоих направлениях, однако в трудном направлении уменьшение шума начинается при меньших значениях  $H_p$ .

В заключение авторы выражают благодарность Р. В. Телесину за предоставленные для работы пленки.

### ЛИТЕРАТУРА

1. N. C. Ford, E. W. Pugh, J. Appl. Phys., **30**, № 4, 270 (1959).
- 2 Г. П. Жигальский, В. В. Потемкин, Вестник МГУ, сер. физ., № 4, 105 (1966).
3. К. А. Горонина, А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **2**, 581 (1959).
4. Ф. В. Бункин, Радиотехника и электроника, **4**, № 11, 1913 (1959).
5. G. Magie, Acta Electronica, **8**, № 1 (1964).
6. P. Mazzetti and G. Montalenti. Proc. Internat. Conf. Magnetism, Nottingham, 1964, London, Inst. Phys. and Phys. Soc., s. a. 701—706.
- 7 Тонкие ферромагнитные пленки, сб. переводов под общей редакцией Р. В. Телесинина, изд. Мир, М., 1964.
- 8 А. А. Грачев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **1**, № 2, 71 (1958).
9. R. L. Conger, F. C. Essig, J. Appl. Phys., **28**, № 8, 855 (1957).
10. F. B. Hagedorn, J. Appl. Phys., **30**, № 4, 254 (1959).
11. W. Hellenthal, Zs. Naturforsch, **14**, 1077 (1959).
12. W. B. Hathfield, J. Appl. Phys., **36**, № 9, 2662 (1965).
- 13 Н. Г. Пак, С. В. Кан, Изв. АН СССР, сер. физ., **30**, № 1, 80 (1966).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
11 июля 1966 г.

### NOISES IN THIN MAGNETIC FILMS ASSOCIATED WITH SINUSOIDAL MAGNETIC POLARITY REVERSAL

V. V. Potyomkin, G. P. Zhigalskii

The paper is devoted to the investigation of noises associated with sinusoidal magnetic polarity reversal in thin magnetic films. There are given the measurement data of spectral noise density as dependent on the amplitude and frequency of a magnetic field along easy and hard directions in 1—100 Kc/s range. The increase of noise with the frequency of magnetic polarity reversal is discussed. The intensity of noise along the hard direction is less than that along the easy one due to the differences in reversal mechanisms. Data qualitative interpretation is given.

УДК 621.372 413 . 533.9

## О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ С МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

И. П. Якименко, Т. Р. Кельнер

Путем решения граничной электродинамической задачи получено дисперсионное уравнение, определяющее спектр собственных колебаний цилиндрического резонатора, частично заполненного магнитоактивной плазмой. Даны формулы для вычисления распределения высокочастотного поля в резонаторе. Произведены численные расчеты резонансных частот, распределения поля и добротности для нескольких важнейших видов колебаний.

1. Среди радиотехнических методов диагностики плазмы важное место занимает метод плазменного резонатора [1, 2]. По сдвигу резонансной частоты и изменению добротности при наличии плазмы можно судить о величине концентрации заряженных частиц и о частоте соударений, а также о распределении этих величин по радиусу и длине плазменного столба. При этом прежде всего нужно теоретически определить собственные частоты и добротность цилиндрических резонаторов с плазмой. Обычно вполне достаточным оказывается метод теории возмущений [1–3]. Однако как для проверки пределов применимости этого метода, так и с целью расширения области параметров резонатора, для которой могут быть произведены теоретические расчеты, представляют интерес более строгие соотношения, полученные в результате решения краевой электродинамической задачи. Кроме того, такой способ решения задачи оказывается необходимым и в ряде других случаев, когда, например, нужно получить максимальное влияние плазмы на параметры резонатора (управление собственной частотой резонатора с плазмой, осуществление эффективного взаимодействия заряженных частиц с плазмой и др.).

В настоящей работе проведено электродинамическое решение задачи о собственных колебаниях цилиндрического резонатора, частично заполненного плазмой, помещенной в продольное постоянное магнитное поле. В ряде предельных случаев (резонатор, полностью заполненный гиротропной плазмой [4], плазменный цилиндр в свободном пространстве [5, 6], резонатор с изотропной плазмой) результаты, полученные нами, совпадают с известными выводами других авторов [4–6]. Для иллюстрации приводятся также некоторые результаты численных расчетов всех представляющих интерес характеристик плазменного резонатора для модели холодной плазмы [7], когда тепловое движение заряженных частиц совершило не учитывается. Заметим, однако, что учет этого движения приводит к появлению целой серии дополнительных резонансов даже в случае изотропной плазмы [8–10]. Естественно, что эти так называемые электроакустические резонансы не могут быть учтены в данной работе, и наше рассмотрение ограничивается обычными электромагнитными резонансами, которые существуют и в отсутствие плазмы. Кроме того, в работе предполагается однородное распределение концентрации плазмы как по сечению, так и по длине плазменного столба, так как строгое

решение задачи для произвольного распределения плотности наталкивается чаще всего на большие математические трудности, которые можно преодолеть только в ряде частных случаев [7].

**2.** Рассмотрим цилиндрический резонатор радиуса  $b$  и длины  $l$  с аксиальным плазменным стержнем радиуса  $a$ , помещенным в продольное магнитное поле  $H_0$ . Представим векторы электромагнитного поля внутри резонатора в виде интегралов Фурье по времени и рядов Фурье по  $\varphi$ :

$$E(r, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega n}(r, z) \exp[-i(\omega t - n\varphi)] d\omega. \quad (1)$$

Тогда из уравнений Максвелла получим следующие составляющие фурье-компонент векторов электромагнитного поля в пустом пространстве ( $a < r < b$ ) (индексы  $\omega$ ,  $n$  далее опускаются):

$$\begin{aligned} E_z &= (AJ_n + \bar{A}N_n) \cos(\beta z), \\ E_\varphi &= -\frac{i}{\gamma^2} \left[ \frac{n\beta}{r} (AJ_n + \bar{A}N_n) + k (\widetilde{A}J'_n + \widetilde{\bar{A}}N'_n) \right] \sin(\beta z), \\ E_r &= -\frac{1}{\gamma^2} \left[ \beta (AJ'_n + \bar{A}N'_n) + \frac{nk}{r} (\widetilde{A}J_n + \widetilde{\bar{A}}N_n) \right] \sin(\beta z), \\ H_z &= (\widetilde{A}J_n + \widetilde{\bar{A}}N_n) \sin(\beta z), \\ H_\varphi &= \frac{i}{\gamma^2} \left[ \frac{n\beta}{r} (\widetilde{A}J_n + \widetilde{\bar{A}}N_n) + k (AJ'_n + \bar{A}N'_n) \right] \cos(\beta z), \\ H_r &= \frac{1}{\gamma^2} \left[ \beta (\widetilde{A}J'_n + \widetilde{\bar{A}}N'_n) + \frac{nk}{r} (AJ_n + \bar{A}N_n) \right] \cos(\beta z), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\gamma^2 = k^2 - \beta^2, \quad J_n = J_n(\gamma r), \quad J'_n = \frac{\partial}{\partial r} J_n(\gamma r), \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Учитывая, что в плазме диэлектрическая проницаемость представляет тензор [7], компоненты поля в области ( $0 \leq r < a$ ) можно записать в виде [11]

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{p\varepsilon_z} (\lambda_1 \gamma_1^2 \psi_1 + \lambda_2 \gamma_2^2 \psi_2) \cos(\beta z), \\ E_\varphi &= ik \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{n}{r} (b_1 \psi_1 + b_2 \psi_2) \right] \sin(\beta z), \\ E_r &= k \left[ b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{n}{r} (\psi_1 + \psi_2) \right] \sin(\beta z), \\ H_z &= -(\gamma_1^2 \psi_1 + \gamma_2^2 \psi_2) \sin(\beta z), \\ H_\varphi &= i\beta \left[ \frac{1}{p^2} \left( \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) - \frac{n}{r} (\psi_1 + \psi_2) \right] \cos(\beta z), \\ H_r &= \beta \left[ -\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{n}{p^2 r} (\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2) \right] \cos(\beta z), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_l &= A_l J_n(\gamma_l r), \quad \gamma_{1,2}^2 = \frac{k^2 \epsilon_z}{\epsilon} \left( \epsilon - p^2 - \frac{\eta \lambda_{2,1}}{\epsilon_z} \right), \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1-p^2}{2\sigma} \pm \left[ \left( \frac{1-p^2}{2\sigma} \right)^2 + p^2 \epsilon_z \right]^{1/2}, \\ p &= \frac{\beta}{k}, \quad b_{1,2} = -\frac{p^2 - \epsilon + \gamma_{1,2}^2/k^2}{\eta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости [7] можно с помощью безразмерных параметров, удобных для численных расчетов, переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\epsilon' &= 1 + \frac{l^2}{1-\sigma^2}, \quad \epsilon'_z = 1 - l^2/\sigma^2, \quad \eta' = -\frac{l^2}{\sigma(1-\sigma^2)}, \\ \epsilon'' &= \frac{(1+\sigma^2)l^2\delta}{(1-\sigma^2)^2\sigma}, \quad \epsilon''_z = \frac{l^2\delta}{\sigma^3}, \quad \eta'' = -\frac{2l^2\delta}{(1-\sigma^2)^2}, \\ \sigma &= \frac{x}{u}, \quad l = \frac{\alpha}{u}, \quad \delta = \frac{v}{\omega_H}, \quad x = \frac{\omega a}{c}, \quad \alpha = \frac{\omega_0 a}{c}, \\ u &= \frac{\omega_H a}{c}, \quad \omega_0 = \left( \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \right)^{1/2}, \quad \omega_H = |\gamma| H_0\end{aligned}\quad (5)$$

( $n_0$  — плотность электронов в плазме,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $v$  — эффективная частота соударений,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение).

Границные условия состоят в равенстве нулю тангенциальных составляющих электромагнитного поля на стенках резонатора (последние предполагаются идеально проводящими), а также в непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля при  $r = a$ . Из условий на торцах резонатора ( $z = 0, l$ ) тогда следует

$$\beta = s\pi/l, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

в результате чего полное поле представляет собой ряд по всем возможным значениям  $s$ . Остальные граничные условия приводят к линейной алгебраической системе уравнений относительно констант задачи, условием нетривиальности решений которой является обращение в нуль ее детерминанта:

$$\Delta = \Delta_2 \Delta_3 - \Delta_1 \Delta_4 = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2} &= \lambda_{1,2} \left[ \frac{f}{y} - \frac{J_{n+1}(y_{2,1})}{y_{2,1} J_n(y_{2,1})} \right] + n \delta_{1,2}, \\ \Delta_{3,4} &= \left[ \frac{g}{y} - \frac{\epsilon_z J_{n+1}(y_{2,1})}{y_{2,1} J_n(y_{2,1})} \right] + n \delta_{1,2}, \\ \delta_{1,2} &= \lambda_{1,2} \left( \frac{1}{y_{2,1}^2} - \frac{1}{y^2} \right) + \frac{\epsilon_z}{y_{2,1}^2} - \frac{1}{y^2}, \quad y_{1,2} = \gamma_{1,2} a, \quad y = \gamma a, \\ f &= \frac{N_{n+1}(\gamma a) J'_n(\gamma b) - N'_n(\gamma b) J_{n+1}(\gamma a)}{N_n(\gamma a) J'_n(\gamma b) - N'_n(\gamma b) J_n(\gamma a)}, \\ g &= \frac{N_{n+1}(\gamma a) J_n(\gamma b) - N_n(\gamma b) J_{n+1}(\gamma a)}{N_n(\gamma a) J'_n(\gamma b) - N'_n(\gamma b) J_n(\gamma a)}.\end{aligned}\quad (8)$$

3. Соотношение (7) представляет дисперсионное уравнение рассматриваемой граничной задачи, определяющее спектр собственных колебаний плазменного резонатора. Если  $a \rightarrow b$ , то  $g \rightarrow \infty$ ,  $f = n/y$  и в предельном случае (цилиндрический резонатор, полностью заполненный плазмой) уравнение (7) приобретает вид

$$\Delta_1 = \Delta_2, \quad (9)$$

что можно записать так:

$$\frac{1}{y_2^2} [\lambda_1 F_n(y_2) + n \varepsilon_z] = \frac{1}{y_1^2} [\lambda_2 F_n(y_1) + n \varepsilon_z], \quad (10)$$

где

$$F_n(x) = \frac{x J'_n(x)}{J_n(x)}. \quad (11)$$

Обозначая  $\lambda_{2,1} \rightarrow -\varepsilon_z \lambda_{1,2}$ ,  $y_{1,2}^2 \rightarrow x^2 \varepsilon_z \chi_{1,2}^2$ , приходим к уравнению [4]

$$\frac{1}{\chi_2^2} [\lambda_2 F_n(\chi_2 a) - n] = \frac{1}{\chi_1^2} [\lambda_1 F_n(\chi_1 a) - n]. \quad (12)$$

В другом предельном случае  $b \rightarrow \infty$  (плазменный волновод в свободном пространстве) можно воспользоваться асимптотическими формулами для функций Бесселя:

$$J_n(\gamma b) = \sqrt{2/\pi \gamma b} \cos \left[ \gamma b - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right], \quad (13)$$

$$N_n(\gamma b) = \sqrt{2/\pi \gamma b} \sin \left[ \gamma b - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right].$$

Тогда дисперсионное уравнение сохраняет вид [7], в котором, однако,

$$f = g = \frac{H_{n+1}^{(1)}(\gamma a)}{H_n^{(1)}(\gamma a)}, \quad (14)$$

что соответствует уравнению для несимметричных колебаний плазменного цилиндра, полученному в [5, 11]. При  $n = 0$  отсюда следует впервые установленное в работе [6] дисперсионное уравнение для аксиально-симметричных волн, распространяющихся в плазменном цилиндре при наличии постоянного магнитного поля. Чтобы осуществить переход к изотропной плазме (что для рассматриваемой модели холодной плазмы означает случай цилиндрического резонатора, заполненного диэлектриком), необходимо потребовать  $\eta \rightarrow 0$  ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Тогда

$$\lambda_{1,2} = \pm p \sqrt{\varepsilon}, \quad y_{1,2}^2 = x^2 (\varepsilon - p^2), \quad y^2 = x^2 (1 - p^2). \quad (15)$$

Отметим, наконец, один важный частный случай, когда  $s = 0$  (вариации поля по  $z$  отсутствуют). При этом

$$p = 0, \quad \lambda_1 = 1/\sigma, \quad \lambda_2 = 0, \quad y = x, \quad y_1^2 = x^2 \varepsilon_z, \quad (16)$$

$$y_2^2 = x^2 (\varepsilon_z - \eta/\sigma \varepsilon),$$

в связи с чем исходное уравнение (7) сильно упрощается. Если, кроме того,  $n = 0$ , то  $\Delta_2 = 0$  и дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\Delta_1 \Delta_4 = 0, \quad (17)$$

откуда следуют две возможности:

$$\Delta_1 = 0, \quad \frac{f}{y} = \frac{J_1(y_2)}{y_2 J_0(y_2)}; \quad (18)$$

$$\Delta_4 = 0, \quad g = \frac{\sqrt{\varepsilon_z} J_1(y_1)}{J_0(y_1)}. \quad (19)$$

Первое из этих уравнений не представляет интереса, так как оно соответствует колебаниям типа  $H_{0m0}$ , которые, как следует из рассмотрения компонент поля, не существуют. Второе уравнение определяет спектр важных для приложений колебаний типа  $E_{0m0}$ . Собственные частоты этих колебаний не зависят от внешнего постоянного магнитного поля. Такой результат является естественным, если учесть поляризацию колебаний типа  $E_{0m0}$  ( $E_z \neq 0$ ,  $E_r = E_\varphi = 0$ ). В связи с этим уравнение (19) обычно получают, исходя из предположения, что резонатор частично заполнен диэлектриком [3]. Если плазма занимает весь объем цилиндрического резонатора, то из (19) следует

$$J_0(x \sqrt{\varepsilon_z}) = 0, \quad (20)$$

откуда

$$x \sqrt{\varepsilon_z} = v_{0m}, \quad (21)$$

где  $v_{0m}$  —  $m$ -ый корень функции Бесселя нулевого порядка.

4. Несмотря на то, что уравнение собственных колебаний (7) является трансцендентным, оно записано в довольно простом виде, что позволяет произвести конкретные вычисления. Однако спектр колебаний, даваемых (7), чрезвычайно обширен, поэтому серьезную трудность представляет вопрос о классификации этих колебаний. Действительно, при наличии магнитоактивной плазмы только при  $s = 0$  можно в чистом виде выделить  $E$ - и  $H$ -моды. Во всех остальных случаях эти моды с необходимостью связаны, т. е. каждый вид колебаний обязательно характеризуется наличием как продольного электрического, так и продольного магнитного полей. Тем не менее, часто условно разбивают колебания на  $E$ - и  $H$ -моды [3, 4], в зависимости от того, во что они превращаются при снятии внешнего магнитного поля, т. е. в зависимости от типа взаимодействия плазмы с полем резонатора. Следуя по этому пути, при графоаналитическом решении (7) естественно исходить из собственных частот для пустого резонатора, а затем из (7) определять сдвиги частот этих колебаний при внесении плазмы. При этом для пустого резонатора в случае  $E_{nms}$ -колебаний

$$x^2 = v_{nm}^2 (a/b)^2 + s^2 (\pi a/l)^2 \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

и в случае  $H_{nms}$ -колебаний

$$x^2 = v'_{nm}^2 (a/b)^2 + s^2 (\pi a/l)^2 \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

где  $v_{nm}$  —  $m$ -ый корень уравнения  $J_n(v) = 0$ ,  $v'_{nm}$  —  $m$ -ый корень уравнения  $J'_n(v) = 0$ . Величины  $a/b$  и  $a/l$  при расчетах должны быть заданы.

На рис. 1 показан типичный пример зависимости сдвига резонансной частоты от плотности электронов для колебаний типа  $E_{010}$ . В качестве параметра принято отношение радиусов резонатора и плазменного столба,  $x_0$  соответствует резонансной частоте  $E_{010}$ -колебаний для пустого резонатора. Из рисунка хорошо видно, как увеличивается сдвиг частоты при увеличении степени заполнения резонатора плазмой. Сдвиг

частоты резко возрастает при увеличении плотности электронов в плазме (при этом должно быть  $a/x < 1$ ; если  $1 < a/x < 2$ , резонансы отсутствуют, а при  $a/x > 2$  наблюдаются так называемые поверхностные резонансы, которые в этой работе не рассматриваются). Наконец, в связи с отмеченной ранее особенностью колебаний типа  $E_{010}$  картина,

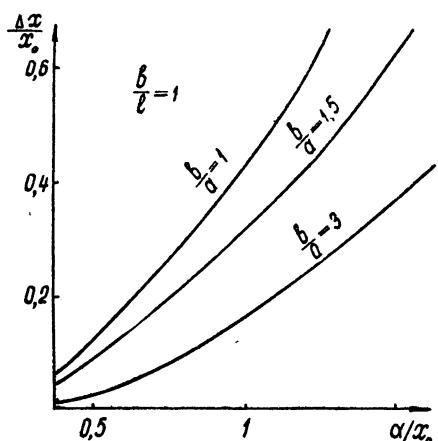


Рис. 1. Сдвиг резонансной частоты для колебаний  $E_{010}$ .

из рис. 3. В отсутствие плазмы двукратное вырождение имеет место и при  $n \neq 0$ . При распространении волн в плазме правополяризованная и левополяризованная волны имеют разные фазовые скорости ( $\sim 1/\sqrt{\epsilon} \pm \eta$ ). Хотя в резонаторе картина сильно усложняется, но принципиально ни-

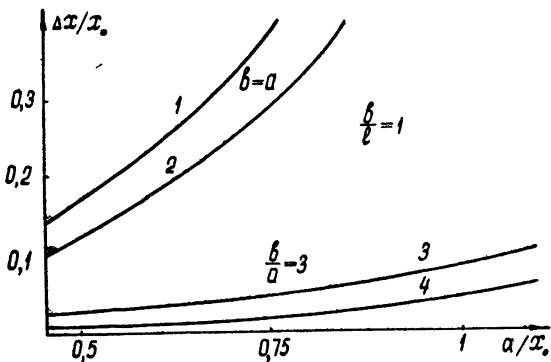


Рис. 2. Сдвиг резонансной частоты для колебаний  $H_{111}$  (1 —  $u/x_0 = 0,55$ ; 2 —  $u/x_0 = 0,2$ ; 3 —  $u/x_0 = 1,65$ ; 4 —  $u/x_0 = 0,58$ ).

чего не меняется: для двух разных поляризаций получаются две разные частоты. Только полагая  $\eta = 0$  (переход к изотропной плазме), мы снова приходим к двукратному вырождению. Таким образом, при наличии замагничённой плазмы для каждого типа колебаний из уравнения (7) можно определить при  $n \neq 0$  две резонансные частоты.

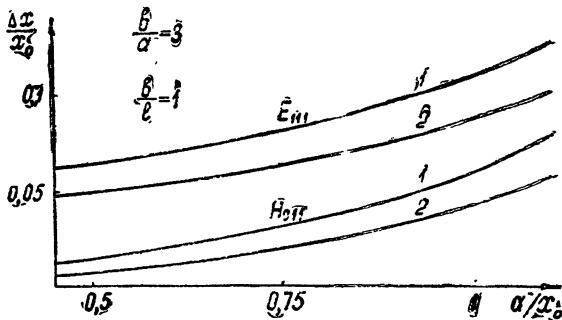


Рис. 3. Зависимость резонансной частоты от плотности электронов для колебаний  $E_{111}$  и  $H_{011}$  ( $1-u/x_0=0,425$ ,  $2-u/x_0=1,21$ ).

5. Пользуясь выражениями (2) и (3) для электромагнитного поля в резонаторе и граничными условиями при  $r=a$  и  $r=b$ , можно установить следующие аналитические формулы для распределения электромагнитного поля в области  $r < a$  (плазма):

$$\frac{E_\varphi}{E_r} = i \frac{y_1 J'_{n1} + \rho y_2 J'_{n2} + nb_1 a \varphi J_{n1}/r + nb_2 a \varphi J_{n2}/r}{b_1 y_1 J'_{n1} + \rho b_2 y_2 J'_{n2} + na J_{n1}/r + \rho na J_{n2}/r},$$

$$\frac{H_\varphi}{H_r} = i \frac{\lambda_1 y_1 J'_{n1} + \rho \lambda_2 y_2 J'_{n2} + np^2 a (J_{n1} + \rho J_{n2})/r}{na (\lambda_1 J_{n1} + \rho \lambda_2 J_{n2})/r - p^2 y_1 J'_{n1} - p^2 y_2 \rho J'_{n2}},$$
(24)

где

$$\rho = -\frac{\lambda_1 y_1^2 \Delta_2 J_n(y_1)}{\lambda_2 y_2^2 \Delta_1 J_n(y_2)}, \quad J_{nl} = J_n \left( y_l \frac{r}{a} \right)$$
(25)

(штрих означает производную по аргументу).

В области  $a < r < b$

$$\frac{E_\varphi}{E_r} = i \frac{np^2 a (N_n - J_n N_{nb}/J_{nb})/r + \rho_1 y (N'_n - J'_n N'_{nb}/J'_{nb})}{p^2 y (N'_n - J'_n N_{nb}/J_{nb}) + na \rho_1 (N_n - J_n N'_{nb}/J'_{nb})/r},$$

$$\frac{H_\varphi}{H_r} = i \frac{y (N'_n - J'_n N_{nb}/J_{nb}) + na \rho_1 (N_n - J_n N'_{nb}/J'_{nb})/r}{\rho_1 y (N'_n - J'_n N'_{nb}/J'_{nb}) + na (N_n - N_{nb} J_n/J_{nb})/r},$$
(26)

где

$$\rho_1 = \frac{(N_{na} - N_{nb} J_{na}/J_{nb}) (\lambda_2 \Delta_1 - \lambda_1 \Delta_2)}{(N_{na} - N'_{nb} J_{na}/J'_{nb}) (\Delta_1 - \Delta_2)},$$
(27)

$$J_n = J_n(yr/a), \quad J_{nb} = J_n(yb/a), \quad J_{na} = J_n(y).$$

Как видно из (26), электрическое и магнитное поля в общем случае эллиптически поляризованы и эксцентрикитеты эллипсов, описываемых соответствующими векторами, могут быть определены по формулам (24) и (26). На рис. 4 приведен один пример расчетов распределения электрического поля в поперечном сечении резонатора для основного вида колебаний  $H_{111}$  при  $b/a = 3$ . Сравнение со случаем пустого резонатора ( $a$ ) показывает, что силовые линии электрического поля вытесняются плазменным цилиндром из центра резонатора.

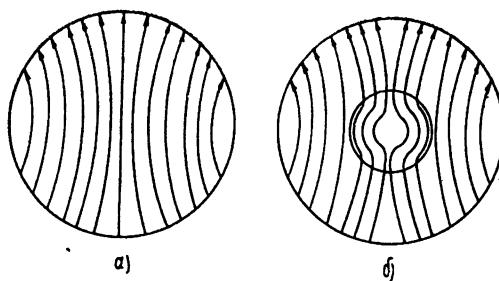


Рис. 4. Распределение электрического поля в пустом (а) и частично заполненном плазмой (б) резонаторах ( $u/x_0 = 1,65$ ,  $a/x_0 = 1$ ).

С точки зрения эффективного взаимодействия заряженных частиц с плазмой в резонаторе представляет интерес также распределение продольных составляющих поля  $E_z$  и  $H_z$  по сечению резонатора. Из (3) и граничных условий следует, что в плазме

$$E_z = \frac{A_1}{p\varepsilon_z} (\lambda_1 y_1^2 J_{n1} + \rho \lambda_2 y_2^2 J_{n2}) \cos(\beta z), \quad (28)$$

$$H_z = -A_1 (y_1^2 J_{n1} + \rho y_2^2 J_{n2}) \sin(\beta z)$$

и в свободном пространстве ( $a < r < b$ )

$$E_z = \bar{A} \left[ N_n(\gamma r) - J_n(\gamma r) \frac{N'_{nb}}{J'_{nb}} \right] \cos(\beta z), \quad (29)$$

$$H_z = \rho_1 \bar{A} \left[ N_n(\gamma r) - J_n(\gamma r) \frac{N'_{nb}}{J'_{nb}} \right] \sin(\beta z).$$

Из рис. 5 хорошо видно, что классификация колебаний по  $E_{nms}$ - и  $H_{nms}$ -модам чисто условна: колебание  $H_{011}$  содержит одновременно и  $H_z$  и  $E_z$ , причем последнее только немногим меньше, чем первое. Особенno усложняется картина при увеличении объема, занятого плазмой.

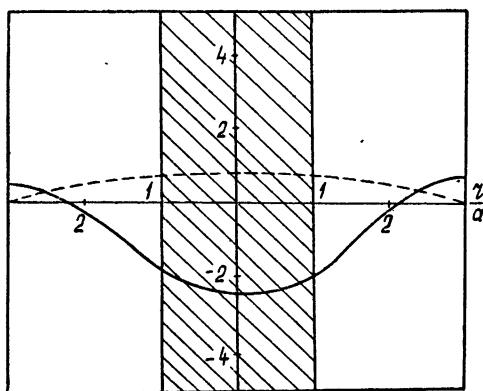


Рис. 5. Распределение продольных составляющих электрического и магнитного полей для  $H_{011}$ -колебания ( $H_z$ —сплошная линия;  $E_z$ —пунктирная линия;  $a/x_0 = 1$ ;  $u/x_0 = 0,425$ ).

6. Большой интерес для приложений представляет определение добротности резонатора, частично заполненного плазмой. Как обычно,

$$Q = \frac{\omega W}{P}, \quad (30)$$

где полная энергия состоит из двух частей — энергии, запасенной в объеме плазмы, и энергии, запасенной в пространстве  $a < r < b$ . Энергия в вакууме вычисляется обычным способом, а энергия в области плазмы равна

$$\begin{aligned} W_{\omega n} = \frac{l}{8} \int_0^a \left[ |\mathbf{H}|^2 + \frac{\partial(\omega \epsilon)}{\partial \omega} (E_r E_r^* + E_\varphi E_\varphi^*) + \right. \\ \left. + \frac{\partial(\omega \epsilon_z)}{\partial \omega} E_z E_z^* + i \frac{\partial(\omega \eta)}{\partial \omega} (E_r E_\varphi^* - E_r^* E_\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Потери энергии происходят как в плазме (из-за соударений электронов с тяжелыми частицами), так и в стенах резонатора. В обычной низкотемпературной плазме потери, связанные с соударениями, значительно превосходят потери в стенах. Поэтому при вычислении добротности достаточно ограничиться определением потерь в плазме, которые даются формулой

$$\begin{aligned} P_{\omega n} = \frac{\omega l}{4} \int_0^a [\epsilon'' (E_r E_r^* + E_\varphi E_\varphi^*) + \epsilon_z'' E_z E_z^* - \\ - i \eta'' (E_r E_\varphi^* - E_r^* E_\varphi)] r dr. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя в (31), (32), а также в выражение для энергии в вакууме вычисленные ранее компоненты поля с учетом граничных условий и производя интегрирование, можно получить аналитическую формулу для добротности (последняя здесь не приводится из-за ее чрезмерной громоздкости). Анализ показывает, что, если частота соударений электронов не слишком высока, то в резонаторе с плазмой может быть получена весьма высокая добротность. Например, в случае колебания  $H_{011}$  при трех вариантах заполнения резонатора плазмой  $b/a = 3; 1,5; 1$  величина  $Q\delta$  соответственно равна 4,8; 3,2; 1,97. Эта же величина для колебания  $H_{111}$  при  $a/x_0 = 1; u/x_0 = 1,65$  равна 0,58, если  $b/a = 1$ , и 3,07, если  $b/a = 3$ .

7. В результате решения краевой электродинамической задачи в настоящей работе получено дисперсионное уравнение и распределение электромагнитного поля в цилиндрическом резонаторе, частично заполненном магнитоактивной плазмой. Главной особенностью приведенных соотношений является их применимость для расчетов при любой степени возмущения резонатора плазмой, в отличие от формул теории возмущений [3], которые верны только при слабых изменениях параметров резонатора при внесении плазмы. Благодаря этому расширяются возможности теоретического расчета цилиндрических резонаторов с разной степенью заполнения плазмой, которые можно использовать для различных радиотехнических приложений, в том числе для диагностики плазмы и для управления резонансной частотой плазменных резонаторов.

Большой интерес представляет обобщение результатов этой работы на случай неоднородной плазмы, а также учет пространственной дис-

персии, который может выявить специфические электроакустические резонансы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Райзер, И. С. Шпигель, УФН, **64**, вып. 4, 641 (1958).
2. В. Е. Голант, ЖТФ, **30**, 11 (1960).
3. S. Buchsbaum, L. Mower, S. C. Brown, Phys. Fluids, **3**, 5 (1960).
4. Г. Сул, Л. Уокер, Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах, ИЛ, М, 1955.
5. В. П. Шестопалов, И. П. Якименко, В. Д. Филь, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 176 (1962).
6. Я. Б. Файнберг, Proc. Symposium CERN, **1**, 84 (1956).
7. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М, 1960.
8. R. W. Gould, Bull. Amer. Phys. Soc., **5**, 322 (1960).
9. P. Weissglas, J. Nucl. Energy, Part C, **6**, 251 (1964).
10. A. M. Messiah, P. E. Vandeplass, J. Nucl. Energy, Part C, **6**, 449 (1964).
11. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 476 (1965).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
13 августа 1966 г.

### SELF-OSCILLATIONS OF CYLINDRICAL RESONATORS WITH MAGNETO-ACTIVE PLASMA

*I. P. Yakimenko, T. R. Kel'ner*

The dispersion equation determining the self-oscillation spectrum of a cylindrical resonator partially filled with magneto-active plasma is obtained by means of the boundary electrodynamic problem solution. The formulae are presented to calculate the high-frequency field distribution in the resonator. There have been made numerical calculations of the resonance frequencies, field distribution and quality factor for several important types of oscillations.

УДК 621.371.123

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*A. С. Горшков, В. Ф. Марченко*

Решена задача о возбуждении второй гармоники при распространении волны основной частоты в нелинейной периодически неоднородной линии передачи, в которой емкость и коэффициент нелинейности зависят от длины линии по гармоническому закону. Показано, что эффективная генерация гармоники может происходить как на прямых, так и на обратных волнах. Особенности нелинейного взаимодействия при встречном направлении распространения основной волны и гармоники проанализированы на фазовой плоскости.

Исследование особенностей нелинейного взаимодействия волн в периодически неоднородных средах в настоящее время представляет не только теоретический, но и практический интерес. Например, при использовании параметрических дискретно распределенных систем на полупроводниковых диодах в радиодиапазоне [1, 2] практически выгодным может оказаться такой режим работы, когда отношение  $\lambda_p/l_0$  ( $\lambda_p$  — длина рабочей волны в системе,  $l_0$  — период структуры) становится соизмеримым с единицей. В этом случае влияние периодической неоднородности среды на протекание нелинейных процессов оказывается существенным. Другой пример может быть приведен из области нелинейной оптики, где использование многослойных сред с периодически чередующимися свойствами является одной из возможностей получения накапливающихся нелинейных эффектов в диспергирующих материалах [3, 4]. Как будет показано ниже, в таких средах возможно эффективное нелинейное взаимодействие волн со встречным направлением распространения. Этот вид взаимодействия в литературе подробно не исследовался [5, 6, 7].

В ряде работ [8, 9] рассматривалось параметрическое усиление и преобразование частоты в линии передачи, в которой погонная емкость  $C$  изменялась по закону бегущей волны, причем коэффициент пространственно-временной модуляции предполагался достаточно большим. Очевидно, что для реализации таких систем необходимы материалы с весьма сильными нелинейными свойствами. В настоящей работе рассмотрена задача о взаимодействии волн в линии передачи, в которой емкость  $C$  стационарно распределена в пространстве по периодическому закону и в то же время является функцией приложенного напряжения (этую зависимость для большинства используемых материалов естественно считать слабой). Хотя последующее рассмотрение проведено для одномерной среды (именно на такой модели проводилось экспериментальное изучение некоторых нелинейных эффектов в диапазоне радиочастот [17]), обобщение полученных результатов на случай двумерной периодически неоднородной слабонелинейной среды не представляет принципиальных трудностей. Для этого достаточно воспользоваться результатами линейной теории, изложенной в работах [10, 11].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линию передачи с распределенными параметрами  $L$  и  $C$ , один из которых  $C$  меняется вдоль линии следующим образом (см. рис. 1а):

$$C(x, V) = \begin{cases} C_1 & (-x_2 < x < -x_1) \\ C_0(1 + \xi_1 V) & (-x_1 \leq x \leq x_1), \\ C_1 & (x_1 < x < x_2) \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_2 = l_0/2$ ,  $l_0$  — период пространственной модуляции;  $V$  — напряжение в линии;  $\xi_1$  — коэффициент нелинейности, который предполагается малым. Подобную неоднородную линию можно рассматривать как периодически чередующуюся последовательность отрезков (слоев) линейной и нелинейной линий передачи, в общем случае отличающихся волновыми сопротивлениями.

Представим емкость  $C$  в виде ряда

$$C(x, V) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos\left(\frac{2\pi m}{l_0} x\right),$$

считая коэффициенты разложения функциями  $V$ :

$$C(x, V) = A_0 + B_0 \xi_1 V + (A_1 + B_1 \xi_1 V) \cos\left(\frac{2\pi}{l_0} x\right) + \dots$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_0 &= C_1 + \frac{2}{l_0} (C_0 - C_1) x_1, & B_0 &= \frac{2C_0}{l_0} x_1, \\ A_m &= \frac{2}{\pi m} [C_0 - C_1] \sin\left(\frac{2\pi m}{l_0} x_1\right), & B_m &= \frac{2C_0}{\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m}{l_0} x_1\right) \quad (m > 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Для получения основных сведений о нелинейном взаимодействии волн в периодически неоднородной линии передачи достаточно учесть лишь первые два члена в разложении (2). В результате имеем\*

$$C(x, V) = C \left[ 1 + M \cos\left(\frac{2\pi}{l_0} x\right) \right] + \xi \left[ 1 + N \cos\left(\frac{2\pi}{l_0} x\right) \right] V, \quad (3)$$

где

$$C = A_0, \quad M = \frac{A_1}{A_0}, \quad \xi = B_0 \xi_1, \quad N = \frac{B_1}{B_0}.$$

При  $C_1 x_2 \ll C_0 x_1$  коэффициенты пространственной модуляции емкости и коэффициента нелинейности одинаковы,  $M = N$  (линия с однородными нелинейными свойствами, но с периодической пространственной неоднородностью емкости, рис. 1б). При  $C_0 = C_1$  имеем  $M = 0$

\* Следует отметить, что для количественного сравнения результатов теории с экспериментальными данными представление функции  $C(x, V)$  лишь первыми двумя членами может оказаться недостаточным. Наиболее сильное расхождение будет наблюдаться при рассмотрении точечных нелинейных источников, когда коэффициент  $M$  может быть больше единицы. (Этот случай, означающий существование физически нереальных участков с отрицательной емкостью (см. (3)), следует исключить.) Естественно коэффициент пространственной модуляции выбирать каждый раз из условия наилучшего приближения усеченного ряда (2) к заданной функции  $C(x, V) \geq 0$  (1). Отсюда следует, что  $M \leq 1$ ; последнее условие далее везде предполагается выполненным.

(линия с однородными линейными свойствами, но с периодической зависимостью коэффициента нелинейности от координаты, рис. 1в).

Для линии, характеризуемой параметрами  $L$  и  $C(x, V)$ , будет решена задача о генерации волны удвоенной частоты, позволяющая сделать заключение о спектре возбуждаемых волн, получить условия синхронизма и т. п. Затем в наиболее интересных случаях будут выяснены особенности нелинейного взаимодействия волн основной и удвоенной частот.

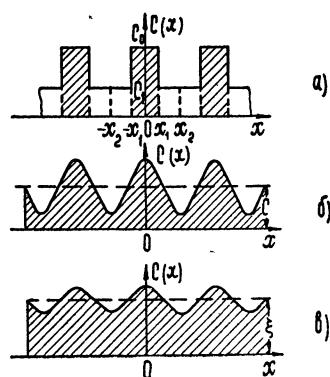


Рис. 1. Пространственное распределение емкости вдоль линии. Участки, в которых емкость зависит от приложенного напряжения, заштрихованы.

## 2. ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛНЫ УДВОЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Пусть на вход линии с параметрами  $L$  и  $C(x, V)$  (3) подается напряжение основной частоты  $\omega$ . Как следует из работ [8, 9], напряжение в линии при  $\xi=0$  будет представлять собой суперпозицию пространственных гармоник вида (предполагается, что обратные волны с частотой  $\omega$ , а также потери в линии отсутствуют)

$$V_1 = a_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(\omega) \exp \{i[\omega t - (\beta_1 + k\beta_0)x]\}, \quad (4)$$

где постоянная распространения  $\beta_1$  определяется дисперсионным уравнением

$$\begin{aligned} D_k(\omega) - \frac{1}{D_{k-1}(\omega) - \frac{1}{D_{k-2} - \frac{1}{\dots}}} - \frac{1}{D_{k+1}(\omega) - \frac{1}{D_{k+2}(\omega) - \frac{1}{\dots}}} &= 0, \\ D_k(\omega) = \frac{2}{M} \left[ 1 - \frac{(\beta_1 + k\beta_0)^2}{\omega^2 LC} \right], \quad \beta_0 = \frac{2\pi}{l_0}, & \end{aligned} \quad (5)$$

а амплитуды соответствующих волн связаны рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d_k(\omega)}{d_{k-1}(\omega)} &= \frac{-1}{D_k(\omega) - \frac{1}{D_{k+1}(\omega) - \frac{1}{\dots}}} \quad (k > 0), \\ \frac{d_k(\omega)}{d_{k+1}(\omega)} &= \frac{-1}{D_k(\omega) - \frac{1}{D_{k-1}(\omega) - \frac{1}{\dots}}} \quad (k < 0), \end{aligned} \quad (6)$$

Напряжение удвоенной частоты  $v_2$  (временной множитель опущен) в приближении заданного поля [12] будет описываться первым приближением (относительно малого параметра  $\xi$ ) волнового уравнения, которое примет вид\*

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + 4\omega^2 LC [1 + M \cos(\beta_0 x)] v_2 = -4\omega^2 LC \xi a_1^2 \times \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \exp[-i(2\beta_1 + k\beta_0)x], \quad (7)$$

$$b_k = \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_s(\omega) \left[ d_{k-s}(\omega) + \frac{N}{2} d_{k+1-s}(\omega) + \frac{N}{2} d_{k-1-s}(\omega) \right].$$

Таким образом, задача свелась к нахождению решения уравнения Маттье с известной функцией в правой части. Поскольку в нелинейной периодически неоднородной среде эффективное взаимодействие волн возможно как в прямом, так и обратном направлениях, решение уравнения (7) в общем случае имеет смысл лишь для отрезка линии конечной длины. Чтобы избежать излишнего усложнения выкладок, связанных с учетом многократных отражений волн внутри слоя (учет этих отражений даже для однородной нелинейной среды приводит к громоздким вычислениям, см., например, [13]), ограничимся анализом процессов в прозрачном нелинейном слое. Под таким слоем будем понимать отрезок линии длиной  $l$ , который отличается от соседних участков лишь тем, что имеет коэффициент  $\xi \neq 0$ .

Построив функцию Грина для уравнения (7) в виде

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{W} \sum_k \sum_r d_k(2\omega) d_r(2\omega) \exp\{-i[(\beta_2 + k\beta_0)x - (\beta_2 + r\beta_0)x_0]\} & (x \geq x_0) \\ \frac{1}{W} \sum_k \sum_r d_k(2\omega) d_r(2\omega) \exp\{i[(\beta_2 + k\beta_0)x - (\beta_2 + r\beta_0)x_0]\} & (x \leq x_0) \end{cases},$$

$$W = -2i \sum_k d_k^2(2\omega) (\beta_2 + k\beta_0)$$

найдем напряжение удвоенной частоты  $v_2$ :

$$v_2 = -4\omega^2 LC \xi a_1^2 \int_0^l G(x, x_0) \sum_{k'} b_{k'} \exp[-i(2\beta_1 + k'\beta_0)x_0] dx_0 = \sum_k d_k(2\omega) f_1(x, \Delta_{k',r}^{\text{pp}}) \exp[-i(\beta_2 + k'\beta_0)x_0] + \sum_k d_k(2\omega) f_2(x, \Delta_{k',r}^{\text{oob}}) \exp[i(\beta_2 + k'\beta_0)x_0]; \quad (8)$$

$$f_1(x, \Delta_{k',r}^{\text{pp}}) = -\frac{4\omega^2 LC \xi a_1^2}{W} \sum_{k'} \sum_r d_r(2\omega) b_{k'} \frac{\sin(\Delta_{k',r}^{\text{pp}} x / 2)}{\Delta_{k',r}^{\text{pp}} / 2} \exp(i \Delta_{k',r}^{\text{pp}} / 2); \quad (8a)$$

\* Для сокращения записи в (4) и (7) опущены комплексно сопряженные члены, поэтому выражение для амплитуды  $v_2$  будет отличаться от истинного множителем, равным 2. Этот факт учитывается при конкретных расчетах.

$$f_2(x, \Delta_{k'r}^{\text{обр}}) = \frac{4\omega^2 LC \xi a_1^2}{W} \sum_{k'} \sum_r d_r(2\omega) b_{k'} \times \\ \times \frac{\sin [\Delta_{k'r}^{\text{обр}} (x-l)/2]}{\Delta_{k'r}^{\text{обр}}/2} \exp [-i \Delta_{k'r}^{\text{обр}} (x+l)/2]; \quad (86)$$

$$\Delta_{k'r}^{\text{пр}} = \beta_2 - 2\beta_1 + (r-k') \beta_0; \quad (8b)$$

$$\Delta_{k'r}^{\text{обр}} = \beta_2 + 2\beta_1 + (k'+r) \beta_0 \quad (8g)$$

(величины  $\beta_2$  и  $d_k(2\omega)$  определяются соотношениями (5), (6), записанными для удвоенной частоты).

Выражение (8) является суперпозицией прямых и обратных волн удвоенной частоты, представляющих собой сумму пространственных гармоник, комплексные амплитуды которых зависят от расстояния  $x$ . Отметим, что вид, аналогичный (8), имеет электромагнитное поле, возбуждаемое в периодической структуре электронным потоком [14]. Важно подчеркнуть, что зависимость амплитуд от  $x$  одинакова для всех пространственных гармоник (функции  $f_1(x, \Delta_{k'r}^{\text{пр}})$  и  $f_2(x, \Delta_{k'r}^{\text{обр}})$  не зависят от номера  $k$ ). Другими словами, соотношение между амплитудами пространственных гармоник сохраняется в любом сечении линии. Экспериментально этот факт для прямых волн был обнаружен в работе [15].

Как следует из (8a) и (8b), максимальное нарастание  $v_2$  будет при  $\Delta_{k'r} \approx 0$ . Выбором дисперсионных характеристик линии можно, в принципе, подобрать условия, когда либо расстройка  $\Delta_{k'r}^{\text{пр}} = 0$ , либо  $\Delta_{k'r}^{\text{обр}} = 0$ ; соответственно этому основное взаимодействие будет осуществляться либо между прямыми волнами с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ , либо между прямыми волнами частоты  $\omega$  и обратными волнами удвоенной частоты. Рассмотрим эти два случая подробнее.

*Взаимодействие прямых волн.* В линии с нормальной дисперсией при соответствующей коррекции дисперсионных характеристик условие  $\Delta_{k'r}^{\text{пр}} = 0$  может быть выполнено, если  $\beta_2 - 2\beta_1 = 0$  и  $k' = r$  (синхронизм между нулевыми пространственными гармониками). Из (8a) получаем

$$f_1(x, \Delta_{k'r}^{\text{пр}}) \approx \frac{4\omega^2 LC \xi a_1^2}{|W|} \left\{ \left[ \sum_{k'} d_{k'}(2\omega) b_{k'} \right] x + \right. \\ \left. + \sum_{k'} \left[ d_{k'+1}(2\omega) b_{k'} \exp \left( i \frac{\pi}{l_0} x \right) + d_{k'-1}(2\omega) b_{k'} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left( -i \frac{\pi}{l_0} x \right) \right] \frac{\sin(\pi x/l_0)}{\pi/l_0} + \dots \right\}. \quad (9)$$

Амплитуды пространственных гармоник удвоенной частоты линейно нарастают вдоль линий. Конкретные оценки нарастания волны  $v_2$  даны в работе [17]. Два последних члена в (9) являются быстро осциллирующими и их учет важен только при рассмотрении граничных эффектов. Зависимость амплитуды  $|v_2|$  от  $x$  при учете лишь двух пространственных гармоник (нулевой и минус первой) проиллюстрирована на рис. 2а (кривая 1).

*Взаимодействие встречных волн.* Условие  $\Delta_{k'r}^{\text{обр}} = 0$  может быть выполнено подбором дисперсионных характеристик таким образом, чтобы имели место соотношения  $\beta_2 + 2\beta_1 - \beta_0 = 0$  и  $k' + r = -1$  (синхронизм между нулевой пространственной гармоникой прямой волны  $\omega$  и минус

первой пространственной гармоникой обратной волны  $2\omega$ ). В этом случае, используя (8б), находим

$$\begin{aligned} f_2(x, \Delta_{k'}^{06p}) \simeq & -\frac{4\omega^2 LC \xi a_1^2}{|W|} \left\{ \left[ \sum_{k'} d_{-(k'+1)}(2\omega) b_{k'} \right] \times \right. \\ & \times (x-l) + \sum_{k'} [d_{-k'}(2\omega) b_{k'} \exp(-i\pi(x-l)/l_0)] + \\ & \left. + d_{-(k'+2)}(2\omega) b_{k'} \exp(i\pi(x+l)/l_0)] \frac{\sin[\pi(x-l)/l_0]}{\pi/l_0} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вид амплитуды  $|v_2|$  показан на рис. 2а (кривая 2). Отметим, что эффективность генерации удвоенной частоты при встречном взаимодействии всегда меньше, чем при прямом, поскольку  $\sum_{k'} d_{k'}(2\omega) b_{k'} \geq \sum_{k'} d_{-(k'+1)}(2\omega) b_{k'}$ . Равенство имеет место, строго говоря, лишь в точке

$2\omega = \omega_{kp}$  ( $\omega_{kp}$  — граничная частота первой полосы пропускания системы), в которой  $d_{k'}(2\omega) = d_{-(k'+1)}(2\omega)$  ( $k' = 0, 1, \dots$ ) [10].

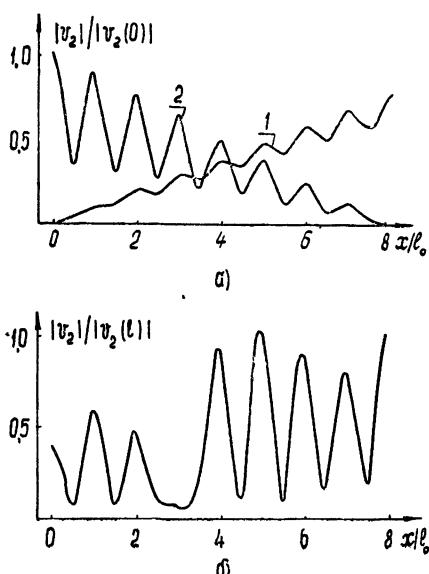


Рис. 2. Распределение амплитуды удвоенной частоты  $|v_2|$  внутри слоя при заданных значениях  $M = 1$ ,  $l = 8l_0$ ,  $a_1\xi = 0,1$ .

а) Кривая 1 соответствует условиям  $\Delta_{np} = 0$ ,  $\beta_1 l_0 = 120^\circ$ ,  $d_{-1}(2\omega) = 0,17$ ; кривая 2 —  $\Delta_{obr} = 0$ ,  $\beta_1 l_0 = -145^\circ$ ,  $d_{-1}(2\omega) = 0,4$ . б) Соответствующая кривая для значений  $\Delta_{np} l_0 = 0,3$ ,  $\Delta_{obr} l_0 = 0,5$ ,  $d_{-1}(2\omega) = 0,7$ ,  $\beta_1 l_0 = 170^\circ$ ,  $a_1\xi = 0,05$ .

Если расстройки  $\Delta_{k',r}^{np}$  и  $\Delta_{k',r}^{obr}$  не равны нулю и соизмеримы друг с другом (например, вблизи  $\omega_{kp}$ , в нелинейном слое напряжение удвоенной частоты имеет сложную форму). Вид  $|v_2|$ , рассчитанный по формуле (8) при некоторых заданных значениях параметров линии, представлен на рис. 2б.

Полученные здесь результаты позволяют объяснить описанный в работе [15] эффект резкого возрастания амплитуды отраженной волны удвоенной частоты  $V_2^{opt}$  от границы нелинейной линии типа фильтра нижних частот при приближении  $2\omega$  к  $\omega_{kp}$ . Действительно, если  $\lambda_p \approx l_0$ , фильтр становится периодически неоднородной средой, качественно описываемой случаем б на рис. 1. Вблизи  $\omega_{kp}$  за счет уменьшения  $\Delta_{k',r}^{obr}$  возбуждение обратной волны с частотой  $2\omega$  становится эффективным, и амплитуда  $V_2^{opt}$  определяется в основном этой волной. Характерно, что  $V_2^{opt}$  зависит теперь от длины линии.

### 3. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

Дальнейший интерес представляет рассмотрение нелинейного режима взаимодействия волн в периодически неоднородной среде. Ограничимся случаем двух волн — основной частоты и удвоенной; учтем дополнительное затухание  $G_0$  в линии ( $G_0 \sim \xi$ ) и начальную фазу про-

странных модуляции емкости  $\psi_0$ , т. е.  $C(x) = C[1 + M \cos(\beta_0 x - \phi_0)]$ . Используя результаты раздела 2, естественно искать решение нелинейного волнового уравнения в виде\*

$$V = V_1 + V_2 = a_1(x) \sum_k d_k(\omega) \sin[\omega t - (\beta_1 + k\beta_0)x + k\psi_0 + \varphi_1(x)] + \\ + a_2(x) \sum_k d_k(2\omega) \sin[2\omega t \pm (\beta_2 + k\beta_0)x \mp k\psi_0 \mp \varphi_2(x)],$$

где  $a(x)$  и  $\varphi(x)$  — медленно меняющиеся функции  $x$ , общие для всех пространственных гармоник. Подставляя решение  $V$  в волновое уравнение и проводя усреднение по времени и периоду системы  $l_0$ , получим следующие укороченные уравнения для случая встречного взаимодействия волн:

$$\frac{da_1}{dx} = \frac{1}{2} q_1 \xi a_1 a_2 \cos \Phi - \frac{1}{2} \delta_1 a_1; \quad (11a)$$

$$\frac{da_2}{dx} \frac{1}{4} = q_2 \xi a_1^2 \cos \Phi + \frac{1}{2} \delta_2 a_2; \quad (11b)$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\Delta_{\text{обр}} - \left\{ \frac{1}{4} q_2 \frac{a_1}{a_2} + q_2 \frac{a_2}{a_1} \right\} \xi a_1 \sin \Phi, \quad (11c)$$

где используются обозначения

$$q_1 = \left\{ \omega^2 LC \sum_k d_k(\omega) \sum_s d_s(2\omega) \left[ d_{-(k+s+1)}(\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{N}{2} d_{-(k+s)}(\omega) + \frac{N}{2} d_{-(k+s+2)}(\omega) \right] \right\} \left\{ \sum_k d_k^2(\omega) (\beta_1 + k\beta_0) \right\}^{-1},$$

$$q_2 = \left\{ 4\omega^2 LC \sum_k d_k(2\omega) \sum_s d_s(\omega) \left[ d_{-(k+s+1)}(\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{N}{2} d_{-(k+s)}(\omega) + \frac{N}{2} d_{-(k+s+2)}(\omega) \right] \right\} \left\{ \sum_k d_k^2(2\omega) (\beta_2 + k\beta_0) \right\}^{-1},$$

$$\delta_1 = \frac{\omega L G_0(\omega) \sum_k d_k^2(\omega)}{\sum_k d_k^2(\omega) (\beta_1 + k\beta_0)}, \quad \delta_2 = \frac{2\omega L G_0(2\omega) \sum_k d_k^2(2\omega)}{\sum_k d_k^2(2\omega) (\beta_2 + k\beta_0)},$$

$$\Phi = (2\beta_1 + \beta_2 - \beta_0)x + \psi_0 - \varphi_2 + 2\varphi_1, \quad \Delta_{\text{обр}} = 2\beta_1 + \beta_2 - \beta_0 \ll \beta_1.$$

Укороченные уравнения для прямого взаимодействия ( $\Delta_{\text{пр}} = \beta_2 - 2\beta_1 \ll \beta_1$ ) сохраняют вид (11), если произвести замену

$$q_1 \rightarrow \left\{ \omega^2 LC \sum_k d_k(\omega) \sum_s d_s(2\omega) \left[ d_{(s-k)}(\omega) + \frac{N}{2} d_{(s-k+1)}(\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{N}{2} d_{(s-k-1)}(\omega) \right] \right\} \left\{ \sum_k d_k^2(\omega) (\beta_1 + k\beta_0) \right\}^{-1},$$

\* Верхние и нижние знаки в выражении  $\sin[2\omega t \pm (\beta_2 + k\beta_0)x \mp k\psi_0 \mp \varphi_2(x)]$  относятся соответственно к случаям взаимодействия волн со встречными направлениями распространения и прямых волн.

$$q_2 \rightarrow \left\{ -4\omega^2 LC \sum_k d_k(2\omega) \sum_s d_s(\omega) \left[ d_{(s-k)}(\omega) + \frac{N}{2} d_{(s-k+1)}(\omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{N}{2} d_{(s-k-1)}(\omega) \right] \right\} \left\{ \sum_k d_k^2(2\omega) (\beta_2 + k\beta_0) \right\}^{-1},$$

$$\Delta_{\text{обр}} \rightarrow \Delta_{\text{пр}}, \quad \delta_2 \rightarrow -\delta_2, \quad \Phi \rightarrow (2\beta_1 - \beta_2)x + \varphi_2 - 2\varphi_1.$$

Решение уравнений (11) для прямого и встречного взаимодействия волн в приближении заданного поля ( $a_1 = \text{const}$ ) приводит к полученным ранее результатам (см. формулы (9) и (10), где функции  $|f_1|$  и  $|f_2|$  совпадают с точностью до быстро осциллирующих членов с огибающей  $a_2(x)$ , имеющей смысл амплитуды нулевой пространственной гармоники). Аналогично может быть найдено выражение для медленно меняющейся амплитуды субгармоники в параметрическом приближении ( $a_2 = \text{const}$ ). Из (11) получаем

$$a_1(x) = a_1(0) \left\{ \cos^2 \frac{\Phi(0)}{2} \exp \left[ \frac{2g}{\delta_2} \left( \exp \left( \frac{1}{2} \delta_2 x \right) - 1 \right) \right] + \right. \\ \left. + \sin^2 \frac{\Phi(0)}{2} \exp \left[ - \frac{2g}{\delta_2} \left( \exp \left( \frac{1}{2} \delta_2 x \right) - 1 \right) \right] \right\}^{1/2} \exp \left( - \frac{\delta_1 x}{2} \right), \\ g = \xi q_1 a_2 \exp \left( - \frac{1}{2} \delta_2 x \right).$$

Оптимальному усилинию субгармоники соответствует входная фаза  $\Phi(0) = 0$ . Отметим, что при встречном направлении взаимодействующих волн начальная фаза  $\Phi(0)$  зависит не только от фаз этих волн на входе линии, но и от начальной фазы  $\varphi_0$  пространственной модуляции емкости.

Прежде чем обратиться к исследованию уравнений (11) в общем случае, заметим, что при прямом взаимодействии укороченные уравнения для периодически неоднородной среды отличаются от уравнений для однородной среды лишь абсолютной величиной коэффициентов в правой части (ср. [16]). Поэтому характер поведения амплитуд и фаз в обоих случаях будет одинаков. Особые черты нелинейного взаимодействия волн проявляются при встречном взаимодействии, поскольку в этом случае правая часть уравнения (11б) имеет знак, противоположный случаю прямого взаимодействия.

Исследуем решение уравнений (11) на фазовой плоскости с помощью методики, описанной в работе [16]. Вводя обозначения

$$a_1^2 = w, \quad z = a_2 \cos \Phi, \quad y = a_2 \sin \Phi, \\ \bar{q}_1 = \frac{1}{2} q_1 \xi, \quad \bar{q}_2 = \frac{1}{4} q_2 \xi \quad (12)$$

и используя первый интеграл уравнений (11) при  $\delta_1 = \delta_2 = 0$

$$z^2 + y^2 - \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1} w = \mp V_0^2, \quad (13)$$

исходные уравнения можно проинтегрировать и результат представить в виде

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\pm V_0^2 + \Delta_{\text{обр}} y/\bar{q}_1 + z^2 + 3y^2}{(\Delta_{\text{обр}}/\bar{q}_1 + 2y) z}, \quad z^2 = \frac{c \mp V_0^2 y}{y + \Delta_{\text{обр}}/2\bar{q}_1} - y^2. \quad (14)$$

Выражение (13) означает, что разность потоков энергии на основной и удвоенной частотах сохраняется постоянной в любом сечении линии. Знак этой разности может быть любым. Например, в режиме генерации удвоенной частоты (волна  $2\omega$  рождается на конце линии, причем  $a_2(l) \ll \ll a_1(l)$ ) разность потоков отрицательна ( $-V_0^2$ ). Если в этом случае длину линии устремить в бесконечность, естественно считать  $V_0^2 = 0$ . В режиме параметрического усиления на входе линии  $a_1(0) \ll a_2(0)$ , т. е. имеет место случай ( $+V_0^2$ ).

Семейство интегральных кривых (14), определяемое параметром  $c$ , представлено на рис. За и 3б для случая  $\Delta_{\text{обр}}=0$ . Движение происходит по кривым, уходящим в бесконечность при асимптотическом приближении к сепаратрисе  $y=0$ . Если разность потоков энергии (13) положительна, фазовая плоскость разделяется на две области окружностью  $z^2+y^2 = V_0^2$ . Точки внутри этой окружности противоречат условию  $z^2+y^2 = V_0^2 + \frac{q_2}{q_1} w > V_0^2$ , поэтому эта область является запрещенной.

Интересно отметить, что при прямом взаимодействии запрещенной оказывается область вне окружности с радиусом  $V_0$ , поскольку инвариант  $V_p^2$  будет означать сумму потоков энергии волн основной и удвоенной частот, и, следовательно, всегда выполняется неравенство  $z^2 + y^2 < V_0^2$  [16].

В отличие от прямого взаимодействия волн при встречном взаимодействии невозможна периодическая перекачка энергии волны  $\omega$  в волну  $2\omega$  и обратно. Это является следствием того факта, что фазовые траектории не образуют замкнутых кривых. В реальном случае используется лишь часть фазовой траектории от начальной точки, характеризуемой значениями  $a_2(l)$  и  $\Phi(l)$ , до точки, соответствующей выходным значениям  $a_2(0)$  и  $\Phi(0)$ . Определение  $a_2(0)$  и  $\Phi(0)$  для различных значений параметра  $c$  удобно проводить с помощью кривых равной длины линий. Такие кривые построены на рис. За для входной фазы  $\Phi(l) = -\pi/2$  (этому значению фазы соответствуют точки на оси  $y$ ).

Пространственное распределение  $a_1$  и  $a_2$  при различных начальных условиях, вычисленное графическим путем по кривым рис. За с использованием (11б) и (13), приведено на рис. 4. Как следует из рис. За, 4а и 4б, при  $a_1(l) > a_2(l)$  независимо от начальной фазы  $\Phi(l)$  с увеличением длины линии фаза  $\Phi$  будет подтягиваться к значению  $\pi$ , и все большая часть энергии основной волны будет заключена в волне с частотой  $2\omega$ . Таким образом, перекачка энергии при встречном взаимодействии волн носит асимптотический характер. При малых входных значениях  $a_1(0)$  ( $a_1(0) < a_2(0)$ ) может иметь место параметрическое усиление или подавление сигнала; оптимальному усилинию соответствует фаза  $\Phi(0) = 0$  (рис. 4в).

Наличие рассстройки фазовых скоростей ( $\Delta_{\text{обр}} \neq 0$ ) приводит к смещению сепаратрисы в сторону от оси  $z$  (рис. 3в). В случае малых расстроек  $|\Delta_{\text{обр}}/2\bar{q}_1| \leq |V\sqrt{3} V_0|$  поведение фазовых кривых несущественно отличается от рассмотренного выше случая  $\Delta_{\text{обр}}=0$ . При больших расстройках  $|\Delta_{\text{обр}}/2\bar{q}_1| > |V\sqrt{3} V_0|$  на оси  $y$  появляются две особые точки типа центра ( $y_1$ ) и типа седла ( $y_2$ ). Теперь для малых входных амплитуд  $a_2(l)$  в линии имеют место интерференционные пространственные биения, аналогичные биениям при прямом взаимодействии (ср.

формулы (9) и (10)). Однако при  $a_2(l) \geq y_2$  (что в силу (13) предполагает большим и значение  $a_1(l)$ ) движение может происходить по незамкнутым интегральным кривым. В этом случае амплитуда  $a_2(x)$  монотонно возрастает.

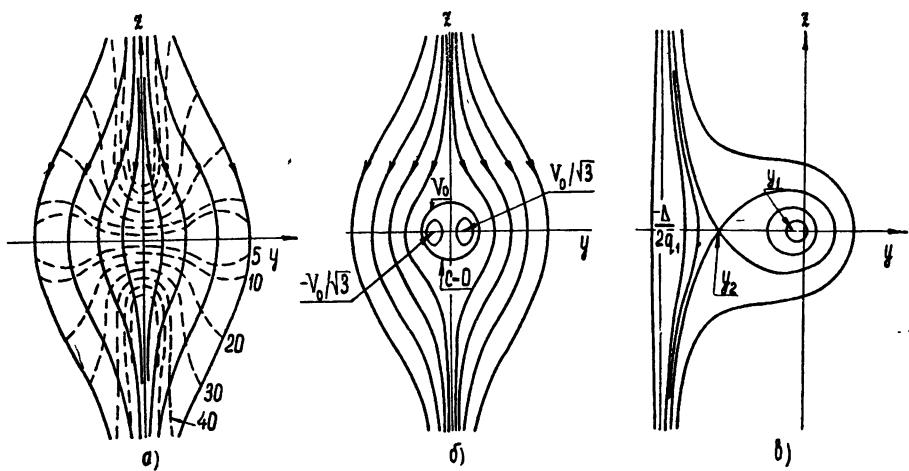


Рис. 3. Интегральные кривые на плоскости  $y, z$ .

а) Кривые построены для интервала значений параметра  $c\xi^3$  от  $0,6 \cdot 10^{-4}$  до  $1,7 \cdot 10^{-3}$ ;  $-V_0^2\xi^3 = -2,5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta_{\text{обр}} = 0$ . Длина линии передачи  $l-x$ , соответствующая пунктирным кривым, отнесена к числу периодов  $l_0$ . б)  $c\xi^3 = 0,7 \cdot 10^{-4} - 10^{-3}$ ;  $V_0^2\xi^3 = 0,9 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta_{\text{обр}} = 0$ . в) Кривые построены для заданной расстройки  $\Delta_{\text{обр}}/q_1 = 0,15$ ;  $-V_0^2\xi^3 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ ;  $c\xi^3 = 0,8 \cdot 10^{-5} - 0,7 \cdot 10^{-3}$ . На всех графиках положительное направление оси  $y$  соответствует углу  $\Phi = \pi/2$ .

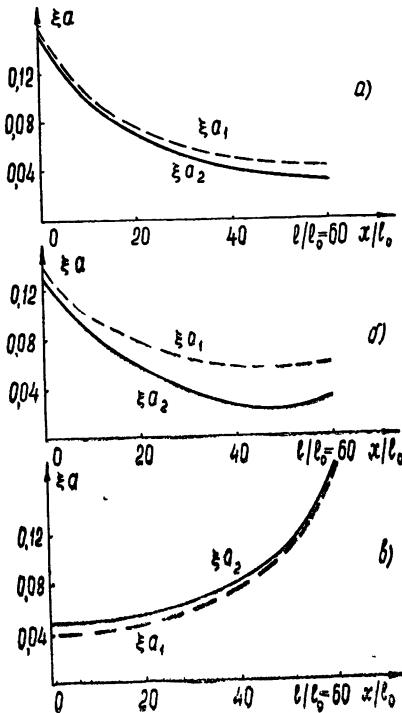


Рис. 4. Пространственное распределение медленно меняющихся амплитуд  $\xi a(x)$  и  $\xi a_2(x)$  волн основной и удвоенной частот при  $\Delta_{\text{обр}} = 0$  (длина линии выражена в числе периодов пространственной модуляции  $l_0$ ). Кривые построены для следующих данных:

- а)  $-V_0^2\xi^3 = -0,9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Phi(l) = \pi/2$ ,  $\xi a_2(l) = 0,03$ ;
  - б)  $-V_0^2\xi^3 = -2,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Phi(l) = 35^\circ$ ,  $\xi a_2(l) = 0,03$ ;
  - в)  $V_0^2\xi^3 = 0,9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Phi(0) = \pi/2$ ,  $\Phi(l) = 0,5^\circ$ ,  $\xi a_2(0) \approx 0,04$ .
- Для всех кривых  $q_1/2 = 0,2$ ,  $q_2/4 = 0,33$  найдены при  $\beta_1 l_0 = 105^\circ$ ,  $\beta_2 l_0 = 150^\circ$ ,  $d_{-1}(2\omega) = 0,4$ ,  $d_{-1}(\omega) = 0,09$ .

#### 4. ЛИНИЯ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ КОЭФФИЦИЕНТА НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрим отдельно случай, когда линейные свойства линии передачи однородны, а коэффициент нелинейности меняется по гармоническому закону от  $x$  (раздел 1). Пусть в такой линии распространяется волна основной частоты  $V_1 = a_1 \exp[i(\omega t - \beta_1 x)]$ . Тогда напряжение удвоенной частоты  $v_2$  (временной множитель опущен) будет описываться уравнением

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \beta_2^2 v_2 = -\xi \beta_2^2 a_1^2 p(x),$$

$$\beta_2 = 2\omega LC, \quad p(x) = [1 + N \cos(\beta_0 x)] \exp(-2i\beta_1 x).$$
(15)

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$v_2 = \frac{\xi \beta_2 a_1^2}{2} \exp(-i\beta_2 x) \sum_{k=-1}^1 \left(\frac{N}{2}\right)^{|k|} \frac{\sin[(\beta_2 - 2\beta_1 + k\beta_0)x/2]}{(\beta_2 - 2\beta_1 + k\beta_0)/2} \times$$

$$\times \exp[i(\beta_2 - 2\beta_1 + k\beta_0)x/2] - \frac{\xi \beta_2 a_1^2}{2} \exp(i\beta_2 x) \times$$

$$\times \sum_{k=-1}^1 \left(\frac{N}{2}\right)^{|k|} \frac{\sin[(\beta_2 + 2\beta_1 + k\beta_0)(x - l)/2]}{(\beta_2 + 2\beta_1 + k\beta_0)/2} \exp\left[-i(\beta_2 + 2\beta_1 + k\beta_0)\left(\frac{x+l}{2}\right)\right].$$
(16)

Таким образом, напряжение  $v_2$  внутри слоя представляет собой сумму трех прямых и трех обратных волн, амплитуды которых зависят от соответствующих расстроек. Рассмотрим возможности обращения этих расстроек в нуль.

*Взаимодействие прямых волн.* 1)  $\beta_2 - 2\beta_1 = \Delta_{\text{пр}} = 0$ . Это обычный случай синхронизма в однородной нелинейной среде, означающий, что дисперсия отсутствует (или каким-либо способом скомпенсирована). 2)  $\beta_2 - 2\beta_1 - \beta_0 = 0$ . Такое условие определяет период пространственной модуляции коэффициента нелинейности, обеспечивающей компенсацию рассогласования фазовых скоростей волн с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ :  $l_0 = 2\pi/(\beta_2 - 2\beta_1) = 2l_{\text{kog}}$  ( $l_{\text{kog}}$  — когерентная длина [12]). Этот случай может представлять интерес для систем оптического диапазона, поскольку у некоторых кристаллов  $l_{\text{kog}}$  составляет величину порядка сотен длин волн [4], что дает возможность изготовить многослойную систему механическим путем. 3)  $\beta_2 - 2\beta_1 + \beta_0 = 0$ . Условие сводится к предыдущему, если рассматривать среду с аномальной дисперсией.

*Взаимодействие встречных волн.* Здесь имеется единственная возможность в среде с нормальной дисперсией выполнить условие синхронизма:  $\beta_2 + 2\beta_1 - \beta_0 = \Delta_{\text{обр}} \approx 0$ . Отсюда находим  $l_0 = 2\pi/(\beta_2 + 2\beta_1) \ll l_{\text{kog}}$ , т. е. период модуляции должен иметь порядок длины волны.

Как следует из формулы (16), при оптимальных условиях эффективность генерации второй гармоники при встречном направлении волн всегда меньше, чем при прямом, поскольку  $\xi M/2 < \xi$ . Однако, если использовать знакопеременную модуляцию коэффициента нелинейности по закону прямоугольной волны, то коэффициент  $\xi M/2$  будет максимальным и равным  $\xi_1$ . Модуляция такого типа интересна еще и тем, что позволяет в реальной линии типа фильтра нижних частот выполнить условие  $\Delta_{\text{обр}} = 0$ . Рассмотрим такую линию, в которой знак коэффициента нелинейности сосредоточенных емкостей периодически чередуется. Введя набег фазы на ячейку линии  $l_n = l_0/2$ , условие синхронизма можно записать в виде  $2\beta, l_n = \pi - \beta_2 l_n$ . Смысл последнего соотношения ясен из рис. 5. Описанный принцип был положен в основу параметри-

ческого усилителя на полупроводниковых диодах, результаты его исследования в дециметровом диапазоне сообщались в [5].

Мы не останавливаемся здесь на анализе укороченных уравнений, которые для данного случая будут отличаться от уравнений (11) лишь абсолютными значениями коэффициентов  $q_1$  и  $q_2$ . Характер нелинейного взаимодействия волн для прямого и встречного распространения принципиально не будет отличаться от разобранного в разделе 3.

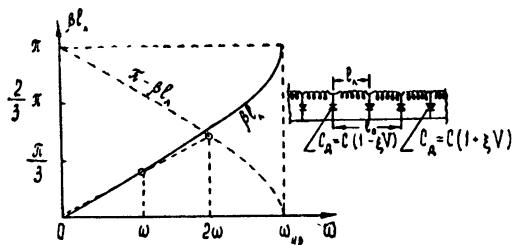


Рис. 5. Графическая иллюстрация выполнения условия  $\pi - \beta_2 l_L - -2\beta_1 l_L = 0$  в линии передачи, в которой коэффициент нелинейности периодически меняет знак. В качестве емкостей такой системы могут быть использованы емкости  $p-n$  перехода полупроводниковых диодов, полярность включения которых чередуется вдоль линии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. Bell, G. Wade, IRE Trans., CT-7, 4 (1960).
2. С. Д. Гвоздовер, А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 1, 126 (1963).
3. J. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, P. Pershan, Phys. Rev., 127, 1918 (1962).
4. P. Franken, J. Ward, Rev. Mod. Phys., 35, 23 (1963).
5. С. А. Ахманов, А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Доклад на IV Всесоюзной конференции по радиоэлектронике, Харьков, 1960.
6. H. Hsu, Nachrichtentechn. Fachber., 22, 342 (1961).
7. D. Bobroff, J. Appl. Phys., 36, 1760 (1965).
8. E. Cassedy, A. Oliner, Proc. IRE, 51, 1330 (1963).
9. A. Hessel, A. Oliner, IRE Trans., MTT-9, 337 (1961).
10. T. Tamir, H. Wang, A. Oliner, IEEE Trans., MTT-12, 323 (1964).
11. Y. Yeh, K. Casey, Z. Kaprielian, IEEE Trans., MTT-13, 297 (1965).
12. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, М., изд. ВИНИТИ, 1964.
13. В. Ф. Марченко, Оптика и спектроскопия, 31, № 5, 590 (1966).
14. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2340 (1957).
15. А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 757 (1966).
16. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 1116 (1961).
17. А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, В. Г. Титов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 6, 837 (1967).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
8 августа 1966 г.

## WAVE INTERACTION IN A NONLINEAR PERIODIC INHOMOGENEOUS MEDIUM

*A. S. Gorshkov, V. F. Marchenko*

The problem on the second harmonic excitation is solved for the basic waves propagating through a nonlinear periodic inhomogeneous transmission line in which the capacitance and nonlinearity coefficient depend on the wavelength according to the harmonic law. The effective generation of the harmonic may occur both on direct and back waves. The peculiarities of nonlinear interaction of the basic wave and its harmonic propagating opposite each other have been analysed on a phase plane.

УДК 621.372.22

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНИЯХ\*

*A. С. Горшков, В. Ф. Марченко, В. Г. Титов*

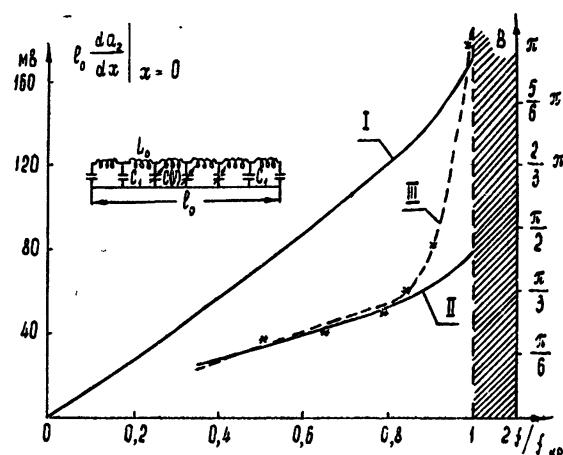
Приводятся результаты экспериментального исследования нелинейного взаимодействия двух волн кратных частот в линии передачи, нелинейная емкость которой меняется в зависимости от длины по периодическому закону. Изучено распределение генерируемого напряжения удвоенной частоты внутри пространственного периода системы. Выяснены особенности нелинейного взаимодействия в длинной периодически неоднородной линии при встречном направлении распространения волн основной и удвоенной частот.

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа содержит результаты экспериментального исследования нелинейного взаимодействия волн в периодически неоднородной среде, теоретический анализ которого дан в работе [1]\*\*. Эксперимент проводился в диапазоне радиочастот ( $0,5$ — $6$  МГц) на моделях линий, в которых погонная индуктивность была распределена равномерно, а погонная емкость представляла собой периодическую последовательность слоев, образованных линейными и нелинейными емкостями (см. рис. 1). В качестве последних использовались емкости  $p$  —  $p$  перехода параметрических диодов [2, 3]. Подобные модели удобны для исследования таких характеристик, как распределение поля внутри каждого периода пространственной модуляции среды, зависимость амплитуд и фаз от координаты при нелинейном взаимодействии в длинных системах и т. д. Экспериментальное изучение указанных моделей в других диапазонах волн с использованием иных материалов встречает пока значительные трудности.

Рис. 1.

Зависимость коэффициентов нарастания амплитуды  $a_2$  от частоты в однородной (кривая II) и периодически неоднородной (кривая III) линиях. Экспериментальная кривая I является дисперсионной характеристикой фильтра с параметрами  $L = 12$  мкгн,  $C_0(-3\delta) = 300$  пФ,  $C_1 \approx 0$  (полоса непропускания заштрихована).



\* Работа доложена на V межвузовской конференции по электронике СВЧ, Саратов, 1966.

\*\* Далее везде используются те же обозначения, что и в работе [1].

Приводимые ниже результаты относятся к случаю взаимодействия двух волн кратных частот—основной и удвоенной.

Экспериментальная установка включала в себя макет линии типа фильтра нижних частот, идентичность параметров ( $L$  и  $C$ ) в которой была выдержанна с точностью до  $\pm 2\%$ . Источником напряжения сигнала основной частоты являлся ГСС. Сигнал удвоенной частоты получался из основного двукратным умножением частоты на нелинейном элементе с последующим усилением. Контактный зонд, механически перемещающийся вдоль линии, обеспечивал возможность наблюдать пространственное распределение напряжения на экране осциллографа. Система индикации позволяла одновременно фиксировать амплитуды взаимодействующих волн и разность фаз между ними в любой ячейке линии.

Фазовые измерения осуществлялись следующим образом. Сигнал основной частоты, снимаемый с зонда, после узкополосного резонансного усилителя подавался на пластины  $x$  и  $y$  осциллографа таким образом, чтобы на экране наблюдалась круговая развертка. Сигнал удвоенной частоты, также снимаемый с зонда, после необходимой фильтрации использовался для формирования коротких (порядка 10 нсек) импульсов подсветки, которые подавались на ось  $z$  осциллографа. В результате на экране осциллографа каждой ячейке линии соответствовала светящаяся точка, положение которой при соответствующем выборе начала отсчета определяло в полярной системе координат сдвиг фазы между напряжениями с частотами  $f$  и  $2f$  ( $\text{угол } \Phi/2 = \frac{1}{2}(-\varphi_2 - 2\varphi_1)$ ; см. также [3]).

## 1. ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛНЫ УДВОЕННОЙ ЧАСТОТЫ В КОРОТКОЙ ЛИНИИ

Как показано в работе [1], форма генерируемого напряжения удвоенной частоты  $|v_2|$  в линии, емкость которой зависит от длины по гармоническому закону, имеет вид осциллирующей кривой. Осцилляции обусловлены появлением пространственных гармоник. Для экспериментального наблюдения этого факта использовалась система, состоященная из периодически чередующихся слоев, представляющих собой фильтры нижних частот с параметрами  $L_0 = 12 \text{ мкГн}$ ,  $C_0(V) = 300 \text{ пФ}$  (при напряжении смещения  $V_{\text{см}} = -3 \text{ в}$ ) и  $L_1 = 12 \text{ мкГн}$ ,  $C_1 \approx 0$  (в другом варианте  $C_1 = 150 \text{ пФ}$ ). Два значения линейной емкости  $C_l$  соответствуют двум значениям коэффициента модуляции емкости  $M \approx 1$  и  $M \approx 0,33$ , см [1]. Каждый слой системы, дисперсионная характеристика которой приведена на рис. 1а, состоял из трех ячеек, что позволяло получить достаточно полную информацию о распределении поля на длине, равной периоду системы. Общая длина линии составляла 12 пространственных периодов.

Типичные распределения амплитуд волн основной и удвоенной частоты вдоль системы при одинаковом направлении распространения показаны на осциллограммах рис. 2а и б. Вид осциллирующей кривой  $|v_2|$  качественно совпадает с расчетным, приведенным на рис. 2а в работе [1]. Усреднение осцилляций дает амплитуду нулевой пространственной гармоники  $a_2(x)$  волны  $2f$ , которая нарастает на первых ячейках по закону, близкому к линейному (расстройка  $\Delta_{\text{пп}} = 0,18$ ).

При сравнении экспериментальных данных с теоретическими, полученными в разделе 2 работы [1], следует иметь в виду, что в первой полосе пропускания системы достаточно ограничиться учетом лишь двух пространственных гармоник—нулевой и минус первой [4]. Этот факт легко подтвердить экспериментально. Из разложения поля в линейной

системе на пространственные гармоники следует, что амплитуды плюс первой и минус второй гармоник даже вблизи критической частоты фильтра  $f_{kp}$  более чем на порядок меньше амплитуды минус первой гармоники.

С учетом сделанного замечания по экспериментальным кривым, приведенным на рис. 2б, находилось отношение  $d_{-1}$  амплитуд минус первой пространственной гармоники к нулевой, которое сравнивалось с таким же отношением для сигнала частоты  $2f$  в линейной линии (соответствующая осциллограмма, снятая при малом входном сигнале частоты  $2f$ , приведена на рис. 2в). Отношение  $d_{-1}$ , характеризующее глубину осцилляции, для обоих случаев представлено на рис. 3 как функция частоты. С хорошей степенью точности можно считать, что это отношение, найденное для генерации гармоники в нелинейной линии, совпадает во всей полосе пропускания с отношением  $d_{-1}$ , найденным для такой же линейной системы. Аналогичный результат получается

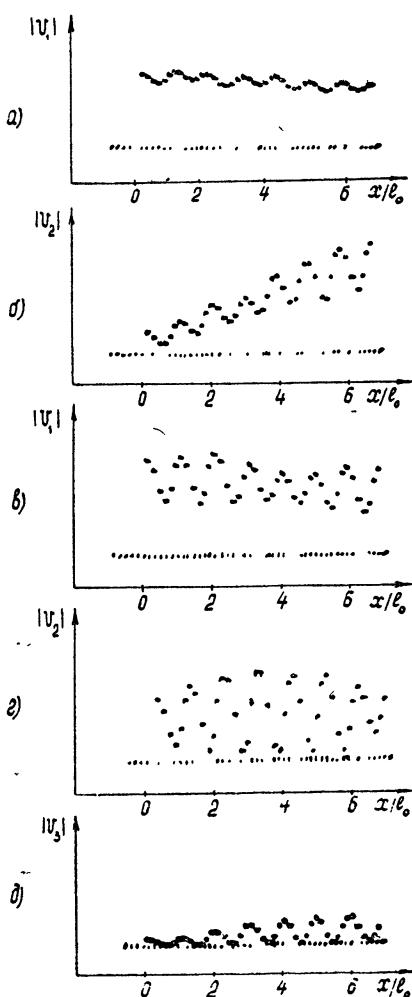


Рис. 2. Пространственное распределение амплитуд напряжений вдоль линии с коэффициентами  $M = 0,33$  и  $\xi \approx 0,1 s^{-1}$ :

а) напряжение основной частоты  $f=0,6$  Мгц; б) напряжение удвоенной частоты  $2f=1,2$  Мгц; в) напряжение малого сигнала на частоте 1,2 Мгц (подаваемого на вход линии); г) напряжение удвоенной частоты  $2f_1=1,5$  Мгц (критическая частота фильтра равна 1,45 Мгц); д) напряжение утроенной частоты  $3f=1,8$  Мгц; е) Амплитуда сигнала основной частоты ( $f=0,6$  Мгц и  $f_1=0,75$  Мгц) на входе линии ( $x = 0$ ) во всех случаях равна 1,1 в.

и для линий с  $M = 0,33$ , а также для линий, в которой нелинейные слои заменены точечными источниками (емкостями  $C_0 = 2000$  пФ при  $V_{cm} = -3\vartheta$ ).

Таким образом, спектр пространственных гармоник напряжения удвоенной частоты в основном определяется лишь величиной постоянной распространения на данной частоте  $2f$  в полосе пропускания и, по-видимому, не зависит от распределения напряжения основной частоты вдоль линии. Этот вывод справедлив и тогда, когда генерируемая удвоенная частота попадает в другие полосы пропускания системы (пространственное распределение амплитуды в этом случае внутри периода системы будет, разумеется, другим). Отметим, что из графиков рис. 3 следует, что для волн, удовлетворяющих условию  $f/f_{kp} \leq 0,6$ , пространственной дисперсией можно пренебречь.

Сравним коэффициент нарастания амплитуды удвоенной частоты в однородной линии с коэффициентом нарастания амплитуды нулевой гармоники в периодически неоднородной среде ( $M = 1$ ) при одинако-

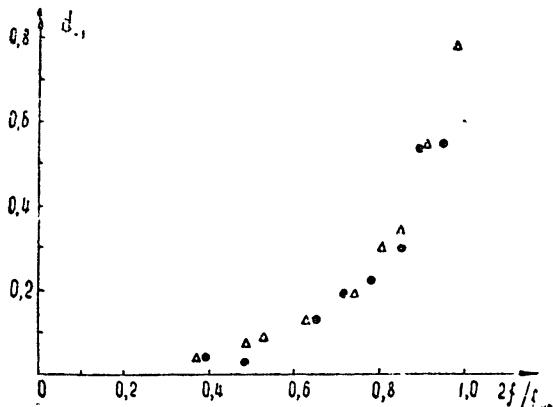


Рис. 3. Отношение  $d_{-1}$  амплитуды минус первой пространственной гармоники к нулевой для различных частот  $2f$ . Значения, относящиеся к напряжению удвоенной частоты отмечены треугольниками, значения  $d_{-1}$  в линейной системе на частоте  $2f$  отмечены кружками.

вых напряжениях входного сигнала  $V_1$  (предполагается, что обе линии обладают одинаковыми дисперсионными свойствами). Для однородной среды [3]

$$l_0 \frac{da_2}{dx} = \frac{1}{2} \xi \frac{V_1^2 B_2^2}{2B_1 + B_2} \cos \left[ \frac{\Delta_{\text{пп}}}{2} \left( \frac{x}{l_0} \right) \right], \quad (1)$$

$$\Delta_{\text{пп}} = B_2 - 2B_1.$$

Здесь  $B_1$  и  $B_2$  — набег фазы для волн  $f$  и  $2f$  соответственно на длине линии  $l_0$ . Используя результаты [1], для второго случая получим \*

$$l_0 \frac{da_2}{dx} = \frac{[2\pi f]^2 LC}{W} \xi V_1^2 \cos \left[ \frac{\Delta_{\text{пп}}}{2} \left( \frac{x}{l_0} \right) \right], \quad (2)$$

$$W = B_2 - [d_{-1}(2f)]^2 (2\pi - B_2).$$

При вычислениях по формулам (1) и (2) значения  $B_2$ ,  $B_1$  и  $d_{-1}(2f)$  определялись опытным путем.

Как следует из кривых рис. 1, вплоть до значений  $2f/f_{kp} \leq 0,8$  коэффициенты нарастания в обеих средах практически совпадают. С приближением к критической частоте величина  $l_0 da_2/dx$  резко возрастает, поскольку  $W \rightarrow 0$ . Физически это связано с тем, что в точке  $2f = f_{kp}$  наступает резонанс ячейки периодической системы. Обработка кривых типа приведенной на рис. 2б дает для  $l_0 da_2/dx$  значения, близкие к расчетным значениям кривой III рис. 1. Однако в коэффициенте нарастания не наблюдается существенного резонансного выигрыша при приближении к  $f_{kp}$ . Это объясняется, по-видимому, тем, что при  $2f \approx f_{kp}$  не корректно учитывать в формуле (2) только одни прямые волны. Действительно, при  $2f \rightarrow f_{kp}$  имеем  $d_{-1} \rightarrow 1$  и  $\Delta_{\text{обр}} \rightarrow \Delta_{\text{пп}}$ , т. е. эффективности возбуждения прямых и обратных волн становятся одинаковыми (ср.

\* Формула (2) получена в предположении гармонического закона пространственной модуляции емкости  $C(x) = C_0[1 + M \cos(2\pi x/l_0)]$ , в то время как в экспериментальной системе имеет место модуляция  $C(x)$  по закону прямоугольной волны. Гармоническое приближение оказывается достаточным для удовлетворительного совпадения результатов эксперимента с теорией. Этот вывод подтверждается всеми данными, полученными в настоящей работе.

формулу (10) работы [1]). В результате суперпозиция этих волн дает поле удвоенной частоты с мало меняющейся вдоль системы огибающей, но большой глубиной осцилляций в пределах одного пространственного периода системы (напряжение в минимумах близко к нулю, см. рис. 2г). Такой характер распределения  $|v_2|$  сохраняется во всей области непропускания системы.

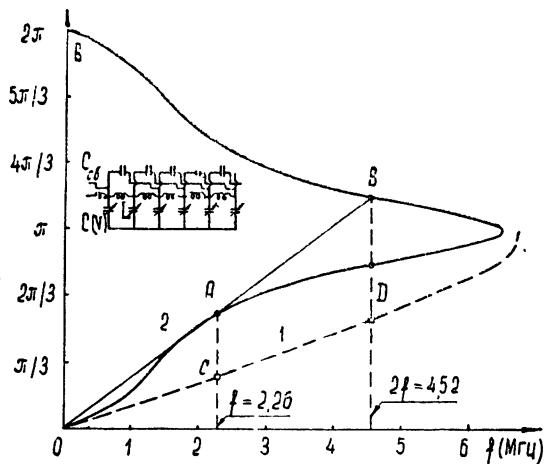
Интересно отметить, что волна утроенной частоты в рассматриваемой линии при  $0,5 < 2f/f_{kp} < 1$  попадает в область непропускания. Однако огибающая ее амплитуды нарастает вдоль системы. Это связано с тем, что амплитуда третьей гармоники появляется на каждом диоде пропорциональной произведению амплитуд волн основной и удвоенной частот, последняя из которых является нарастающей (см. рис. 2д).

В работе [1] было показано, что в нелинейных периодически неоднородных средах возможно эффективное взаимодействие волн основной и удвоенной частот при их распространении навстречу друг другу. Для наблюдения генерации волны удвоенной частоты в этом случае была изготовлена линия типа фильтра нижних частот с индуктивностями  $L = 12 \text{ мкГн}$  и сосредоточенными нелинейными емкостями полупроводниковых диодов  $C(V) = 300 \text{ пФ}$  (при  $V_{cm} = -3\text{в}$ ). Чтобы выполнить условие синхронизма для взаимодействия волн, распространяющихся навстречу друг другу [1],

$$\Delta_{\text{обр}} = 2B_1 + B_2 - 2\pi = 0, \quad (3)$$

которое означает равенство фазовых скоростей нулевой пространственной гармоники на частоте основного сигнала и минус первой пространственной гармоники обратной волны на удвоенной частоте, необходимо изменить вид обычной дисперсионной кривой, характерной для фильтра нижних частот (см. кривую 1 рис. 4). С этой целью была введена дополнительная емкостная связь между ячейками ( $C_{cb} = 300 \text{ пФ}$ , см. рис. 4). Благодаря дополнительной связи у дисперсионной кривой (см. кривую 2 рис. 4) появляется изгиб, который позволяет осуществить синхронизм фазовых скоростей в соответствии с условием (3).

Рис. 4. Дисперсионная кривая и эквивалентная схема линии типа фильтра, в которой выполняется условие синхронизма для встречного взаимодействия  $2B_1 + B_2 - 2\pi = 0$  (в точках A и B кривой 2). Условие синхронизма для прямого взаимодействия выполняется в точках C и D дисперсионной кривой 1, относящейся к фильтру без емкостной связи ( $C_{cb} = 0$ ), но с дополнительной индуктивной связью между ячейками ( $\alpha = L/L_{12} = 0,15$ ).



В случае короткой линии (обратная реакция волны удвоенной частоты на волну основного сигнала практически отсутствует) характер генерации волны  $2f$  при встречном взаимодействии сохраняет основные черты описанного выше случая генерации удвоенной частоты при

прямом взаимодействии. Напряжение удвоенной частоты в этом случае также осциллирует с частотой, соответствующей пространственному периоду системы (измерения проводились на витках индуктивностей  $L$  в промежутках между емкостями  $C_0$ ). Амплитуды нулевой и минус первой пространственных гармоник волны с частотой  $2f$  нарастают по закону, близкому к линейному, в направлении, обратном направлению распространения основной волны. Отношение  $d_{-1}(2f)$  определяется постоянной  $B_2(2f)$  и совпадает по величине с тем, которое имеет место в такой же линейной системе и сохраняется постоянным в любом сечении линии.

## 2. СЛУЧАЙ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

Для проверки результатов теоретического анализа нелинейного взаимодействия волн основной и удвоенной частот в том случае, когда волны распространяются навстречу друг другу [1], использовалась описанная в разделе 1 линия (схема приведена на рис. 4), число ячеек которой было увеличено до 55. Результаты эксперимента представлены на осциллограммах рис. 5. Точки на них соответствуют точкам линии, в которых подключены емкости  $C(V)$ , и отстоят одна от другой на величину пространственного периода линии. В этих точках амплитуды нулевой и минус первой пространственных гармоник складываются между собой так, что осциллограммы дают суммы  $a_1(x) + d_{-1}(f)a_1(x)$  и  $a_2(x) + d_{-1}(2f)a_2(x)$ , пропорциональные амплитудам нулевых пространственных гармоник  $a_1(x)$  и  $a_2(x)$ , для которых записаны укороченные уравнения в [1]. Распределение поля внутри пространственного периода системы имеет такой же вид, как и в ранее рассмотренных случаях (раздел 1), и на осциллограммах рис. 5 не приводится; глубина осцилляций внутри пространственного периода определяется величинами  $d_{-1}(f) = 0,09$  и  $d_{-1}(2f) = 0,4$ , которые были измерены экспериментально.

На осциллограммах 5а и 6 приведена зависимость амплитуд волны основной и удвоенной частот от координаты  $x$  в том случае, когда волна  $2f$  в линию не подается. Волна основной частоты, подводимая ко входу линии, уменьшается по амплитуде, отдавая свою энергию волне удвоенной частоты, амплитуда которой возрастает при движении от выхода линии ко входу. Существенное увеличение длины линии не изменяет характера встречного нелинейного взаимодействия, которое, очевидно, сильно отличается от известного случая взаимодействия волн с одинаковым направлением распространения. В последнем случае (в соответствии с теоретическими выводами [5]) в достаточно длинной линии имеет место периодическое чередование направления обмена энергией между волнами с частотами  $f$  и  $2f$ . В результате амплитуда каждой из волн проходит вдоль линии через максимумы и минимумы, что хорошо видно на осциллограмме рис. 5д, где приведено распределение амплитуды волн  $2f$  и  $f$  вдоль линии, в которой выполнено условие синхронизма прямого взаимодействия  $\Delta_{\text{пр}} = B_2 - 2B_1 = 0$ . (Прямое взаимодействие наблюдалось в описанной выше линии типа фильтра нижних частот, в которой были убраны емкости связи  $C_{\text{св}}$  и дополнительна введена небольшая индуктивная связь между ячейками  $\alpha = L_{12}/L = 0,15$ ; «спрятывающая» дисперсионную кривую; см. кривую 1 рис. 4.)

Столь глубокое различие в характере энергетического обмена в этих двух случаях нелинейного взаимодействия волн является следствием различия в форме закона сохранения потоков энергии. Если при прямом взаимодействии этот закон означает, что сумма потоков энергии

волн основной и удвоенной частот сохраняется в любом сечении линии постоянной, то при встречном взаимодействии сохраняется постоянной разность указанных потоков.

Если на выходной конец линии ( $x = l$ ), предназначенный для исследования встречного взаимодействия волн, подается напряжение удвоенной частоты, то в зависимости от разности фаз  $\Phi(l) = \phi_2(l) - 2\phi_1(l)$  волна удвоенной частоты либо сразу нарастает, либо сначала подавляется (передает энергию основной волне) до некоторого минимума, а затем при дальнейшем распространении от точки  $x = l$  к точке  $x = 0$  монотонно возрастает (рис. 5в). Разность фаз  $\Phi(x)$  при этом плавно изменяется от заданного значения при  $x = l$  до значения, близкого к  $\pi$  ( $x = 0$ ), которое соответствует оптимальному росту удвоенной частоты (рис. 5е). Характерно, что при встречном взаимодействии (в отличие от прямого) фаза меняется лишь в одном направлении и не имеет резких перескоков.

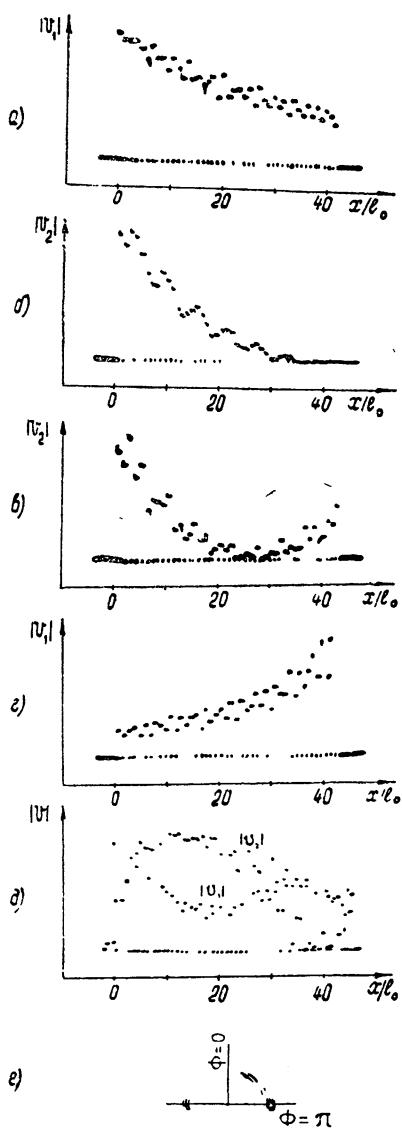


Рис. 5. Пространственное распределение амплитуд и фаз волн основной и удвоенной частоты в нелинейных длинных линиях ( $\xi \approx \pm 0.1 \text{ в}^{-1}$ ). Осциллограммы  $a-d$  получены для периодически неоднородной линии, в которой выполнено условие  $B_2 + 2B_1 - 2\pi = 0$  на частотах  $f = 2,25 \text{ МГц}$  и  $2f = 4,5 \text{ МГц}$ .

Осциллограммы  $a$  и  $b$  соответствуют распределению амплитуд волн основной и удвоенной частот, полученным для случаев  $|v_1(0)| = 2,6 \text{ в}$  и  $|v_2(l)| = 0$ ;  $c$ —распределение амплитуды волны  $2f$  при  $|v_1(0)| = 2,6 \text{ в}$ ,  $|v_2(l)| = 0,5 \text{ в}$ ,  $\Phi(l) = 15^\circ$ ;  $d$ —изменение амплитуды субгармоники при  $|v_1(0)| = 0,5 \text{ в}$ ,  $|v_2(l)| = 2,6 \text{ в}$ , осциллограмма  $d$  изображает распределение волн  $f = 2,4 \text{ МГц}$  и  $2f$  в линии, в которой осуществляется прямое взаимодействие  $B_2 - 2B_1 = 0$  ( $|v_1(0)| = 2,7 \text{ в}$ ,  $|v_2(0)| = 0$ );  $e$ —изменение фазы  $\Phi(x)$ , соответствующее граничным условиям осциллограммы  $b$ .

В том случае, когда амплитуда волны основной частоты мала, а амплитуда встречной волны с частотой  $2f$  достаточно велика, при правильном выборе фазы  $\Phi(l)$  ( $\Phi(l)$  должна быть близка к нулю) имеет место параметрическое усиление волны с частотой  $f$ . Вид этой волны показан на рис. 5г. Для короткой линии, в которой справедливо параметрическое приближение, амплитуда субгармоники (волны  $f$ ) при встречном направлении распространения накачки (волны  $2f$ ) растет по экспоненциальному закону

Приведенные здесь результаты находятся в хорошем соответствии с выводами теории, изложенной в работе [1].

Теоретический анализ, проведенный в работе [1], и экспериментальные результаты настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы.

При распространении волн в одномерной слабонелинейной среде с постоянной распространения, периодически зависящей от координаты, возможны, вообще говоря, два вида синхронного взаимодействия основной волны и волны удвоенной частоты. Обычное взаимодействие имеет место тогда, когда нулевые пространственные гармоники обеих волн имеют одинаково направленные и близкие по величине фазовые скорости распространения. Встречное взаимодействие осуществляется в том случае, если фазовая скорость нулевой пространственной гармоники волны основной частоты близка по величине и направлению к скорости минус первой пространственной гармоники обратной волны удвоенной частоты. В зависимости от дисперсионных свойств среды либо один, либо другой вид синхронного взаимодействия является преобладающим. Только вблизи критической частоты полосы пропускания системы эффективности обоих видов взаимодействия становятся соизмеримыми.

При генерации волны удвоенной частоты в периодически неоднородной среде амплитуда этой волны имеет вид нарастающей осциллирующей кривой, причем период осцилляций совпадает с пространственным периодом системы. Глубина и форма осцилляций определяются соотношением между пространственными гармониками, которое сохраняется постоянным вдоль системы и зависит только от линейных свойств среды на данной частоте.

Такие нелинейные эффекты как генерация удвоенной частоты, усиление субгармоники в коротких системах (в которых справедливо приближение заданного поля) протекают по существу аналогично как при прямом, так и при встречном направлении распространения волн. Отличие заключается лишь в направлениях распространения и в различных абсолютных величинах коэффициентов нарастания.

Однако в достаточно длинных системах характер нелинейного взаимодействия в двух рассматриваемых случаях оказывается совершенно различным. Поведение амплитуд и фаз волн при прямом взаимодействии принципиально не отличается от известных результатов для чисто распределенной модели (укороченные уравнения распределенной и периодически неоднородной среды отличаются в этом случае лишь абсолютными значениями постоянных коэффициентов). При встречном взаимодействии волн, в отличие от прямого, не наблюдается периодической перекачки энергии одной волны в энергию другой и обратно вдоль системы и отсутствуют резкие перескоки фазы. С увеличением длины системы амплитуда удвоенной частоты монотонно нарастает, а фаза асимптотически стремится к устойчивому состоянию, соответствующему оптимальному нарастанию амплитуды этой волны.

Авторы признательны С. Д. Гвоздоверу за внимание к работе и Р. В. Хохлову за ценное обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 6, 825 (1967).
2. F. Benson, D. Eng, Proc. IEEE, **112**, 700 (1965).
3. А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 757 (1966).
4. E. Cassedy, A. Oliver, Proc. IRE, **51**, 1330 (1963).
5. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, **6**, 116 (1961).

**INVESTIGATION OF WAVE INTERACTION IN NONLINEAR PERIODICALLY  
INHOMOGENEOUS LINES***A. S. Gorshkov, V. F. Marchenko, V. G. Titov*

Experimental investigation data are given on nonlinear interaction of two waves of multiple frequencies in transmission lines, which nonlinear capacitance depends on the length according to the periodic law. The distribution of generated voltage of the doubled frequency over the system spatial period is studied. The peculiarities of nonlinear interaction in a long periodically-inhomogeneous line are determined when the waves of the main and doubled frequencies propagate at the opposite direction.

---

УДК 621.385.63 · 538.56

## НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ЭЛЕКТРОМАНИТНОЙ ВОЛНОЙ

*B. K. Юллатов*

Рассматривается нелинейная теория взаимодействия потока нелинейных возбужденных осцилляторов с одной степенью свободы (являющегося моделью непрямoliniйного периодического электронного пучка) с электромагнитной волной. Найдены интегралы укороченных уравнений самосогласованного поля. Показано, что в случае сильно выраженного взаимодействия типа «O» поведение системы приближенно описывается нелинейными уравнениями ЛБВ и ЛОВ.

К настоящему времени опубликовано несколько десятков работ, касающихся линейной теории взаимодействия электромагнитных волн с непрямoliniйными периодическими пучками. В них подробно рассмотрены как механизмы группировки колеблющихся электронов в высокочастотном поле, приводящие к усилению или самовозбуждению электромагнитных колебаний, так и характеристики различных электронных приборов с непрямoliniйными пучками (систем с винтовыми пучками в продольном магнитном поле, систем с трохоидальными пучками, гелистрона, строфотрона с бегущей волной и др.) в режиме малого сигнала.

Нелинейные свойства приборов с непрямoliniйными периодическими пучками изучены в гораздо меньшей степени. Среди работ [1-6], затрагивающих ряд вопросов нелинейной теории некоторых систем с периодическим пучками, по существу, лишь в [2, 4] получены и численно анализируются (в первой из них) нелинейные уравнения самосогласованного поля системы с бегущей волной. В остальных работах рассматривается воздействие электромагнитной волны с заданной амплитудой на периодический электронный пучок, что, строго говоря, делает их результаты применимыми только к системам с высокодобротными резонаторами (например, резонатор с бегущей волной, образованный отрезком волновода, замкнутым на себя), когда структуру поля в пространстве взаимодействия можно считать фиксированной.

В настоящей работе предпринята попытка более детально исследовать нелинейные уравнения самосогласованного поля систем с периодическим электронным пучком, в которых возможна только фазовая группировка [7] неизохронно колеблющихся электронов.

### МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим нелинейную теорию взаимодействия непрямoliniйного периодического электронного пучка с электромагнитным полем волновода, используя в качестве модели пучка поток возбужденных нелинейных осцилляторов с одной степенью свободы, скорость перемещения центра осцилляций которых фиксирована.

Допустим, что предварительно не промодулированный тонкий периодический электронный пучок взаимодействует с электромагнитным полем, периодически меняющимся во времени с частотой  $\omega$ , на участке

волновода, обладающего малыми потерями, ограниченном сечениями  $z = 0$  и  $z = L$  (рис. 1). Предполагая ток пучка достаточно малым, а длину пространства взаимодействия достаточно большой, в первом приближении естественно ограничиться исследованием взаимодействия тех типов электромагнитных волн и тех пространственных гармоник тока пучка, для которых выполнены условия синхронизма, и не учитывать поле пространственного заряда. Будем считать возможным синхронизм лишь одной из электромагнитных волн (для простоты — прямой) и одной из гармоник тока пучка на первой гармонике частоты  $\omega$  (последнее — из-за сильной дисперсии), полагая длину пространства взаимодействия большой по сравнению с длиной синхронной волны.

Электроны пучка при отсутствии переменного поля совершают неизохронные колебания в направлении оси  $x$ ; скорость их поступательного движения ( $v_z = v_{||}$ ,  $v_y = 0$ ) не меняется под действием переменного поля. Скорость электронов мала по сравнению со скоростью света  $c$ , и, кроме того,  $v_{||} \ll v_\phi$ ,  $v_{||} v_\phi \ll c^2$  ( $v_\phi$  — фазовая скорость синхронной волны). Эти условия дают возможность пользоваться нерелятивистским уравнением движения и не учитывать переменного магнитного поля.

Опираясь на предположения, сделанные относительно движения электронов и характера их взаимодействия с полем волновода, систему уравнений самосогласованного поля необходимо записать следующим образом:

$$m\ddot{x}_e + f(x_e) = -eE_x, \quad y_e = \text{const}, \quad z_e = v_{||}(t - t_0); \quad (1a)$$

$$E(r, t) = C(z) E_0(r_{\perp}) \exp[i(\omega t - h_0 z)] + \text{к. с.}; \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dz} &= -\frac{1}{N_0} \int_{S_{\perp}} j_{\omega} E_0^* \exp(ih_0 z) dS_{\perp} = \\ &= -\frac{1}{N_0} \left\{ \int_{S_{\perp}} j E_0^* \exp(ih_0 z) dS_{\perp} \right\}_{\omega}; \end{aligned} \quad (1c)$$

$$j_x = (I_0/v_{||}) \dot{x}_e \delta(r_{\perp} - r_{\perp e}), \quad j_y = 0, \quad j_z = I_0 \delta(r_{\perp} - r_{\perp e}). \quad (1g)$$

В (1a) точки означают полные производные по времени,  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $[-f(x)]$  — нелинейная упругая сила,  $t_0$  — момент появления электрона в волноводе. В выражении для поля волны (1b)  $E_0(r_{\perp})$  — функция распределения электрического поля в поперечном сечении волновода; постоянная распространения волны в волноводе без пучка  $h_0$  — комплексная величина с малой мнимой частью, учитывающей небольшие потери. Интегрирование в правой части уравнения для амплитуды волны  $C(z)$  (1b) [8] проводится по поперечному сечению волновода;  $N_0$  — норма волны, причем в рассматриваемом случае прямых волн  $N_0 \operatorname{Re} h_0 > 0$ ; значок  $\omega$  означает операцию вычисления компоненты Фурье\*. Выражение для плотности тока  $j$  (1g) содержит постоянную составляющую тока пучка  $I_0$  и дельта-функцию  $\delta(r_{\perp}) = \delta(x) \delta(y)$ .

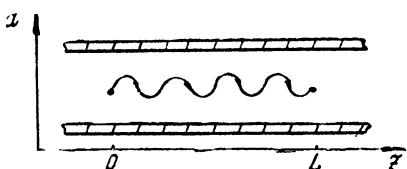


Рис. 1.

\* Вообще говоря, (1b) справедливо лишь в случае  $\operatorname{Im} h_0 = 0$ . Однако при малых потерях в  $E_0$  можно полагать  $h_0 \approx \operatorname{Re} h_0$ .

Запись системы уравнений (1) можно несколько упростить, если ввести обозначения

$$\tau = t - t_0, \quad E = E_{\nu}, \quad E_0 = E_{0\nu}, \quad \Omega = \omega - h_0 v_{\perp}$$

и, подставив (1г) в (1в), использовать неравенства  $v_{\perp} \ll v_{\phi}$ ,  $v_{\perp} v_{\phi} \ll c^2$ :

$$m\ddot{x}_e + f(x_e) = -eE; \quad (2a)$$

$$E(\tau, t_0) = C(\tau) E_0(x_e) \exp[i(\Omega\tau + \omega t_0)] + \text{к. с.}; \quad (2b)$$

$$\frac{dC}{d\tau} = \frac{|I_0|}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{x}_e E_0^*) \exp[-i(\Omega\tau + \omega t_0)] d\omega t. \quad (2b)$$

### УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

Система уравнений самосогласованного поля (2) до некоторой степени непоследовательна. С одной стороны, в ней учтено, что на электронный пучок воздействует лишь синхронная волна, с другой стороны, согласно (2в), в возбуждении этой волны участвуют все гармоники тока пучка (в том числе несинхронные, в среднем неэффективно возбуждающие волну). Эту непоследовательность можно устраниТЬ, оставив в правой части (2в) только члены, медленно меняющиеся в зависимости от  $z$  по сравнению с фазовым множителем  $\exp(-iReh_0z)$  и выделив в (2б) составляющую поля, резонансно (синхронно) воздействующую на движение электронов. Короче говоря, систему (2) необходимо в связи со сделанными ранее предположениями заменить эквивалентной системой укороченных уравнений.

Пусть решение однородного уравнения (2а) ( $E = 0$ ) известно:

$$x_e = x_e(\xi, \varphi), \quad \dot{x}_e = \omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} [x_e(\xi, \varphi)],$$

и описывает ангармонические колебания, так что  $x_e$  — периодическая функция фазы  $\varphi = \omega_0(\xi)\tau + \varphi_0$  ( $\varphi_0$  — фаза колебаний в сечении  $z = 0$ , энергия колебаний  $\xi$  — постоянна). Решение неоднородного уравнения (2а) удобно искать в такой же форме, варьируя  $\xi$  и  $\varphi$ . Путем замены переменных  $x_e = x_e(\xi, \varphi)$ ,  $\dot{x}_e = \dot{x}_e(\xi, \varphi)$  из (2а) получим уравнения для энергии и фазы [9]:

$$\dot{\xi} = -e\omega_0 \frac{\partial x_e}{\partial \varphi} E, \quad \dot{\varphi} - \omega_0 = e\omega_0 \frac{\partial x_e}{\partial \xi} E. \quad (3)$$

В правые части (3) подставим (2б). Введем функцию  $\psi(x)$ , связанную с  $E_0(x)$  соотношением  $E_0(x) = -\partial\psi/\partial x$ . Тогда  $E_0 \partial x_e / \partial \varphi = -\partial\psi/\partial\varphi$  и  $E_0 \partial x_e / \partial \xi = -\partial\psi/\partial\xi$ . Поскольку  $\psi(x_e)$  — периодическая функция  $\varphi$ , представим ее в виде ряда Фурье:

$$\psi(\xi, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k(\xi) \exp(-ik\varphi). \quad (4)$$

В соответствии с методом усреднения [10] при условии слабой зависимости  $C(\tau)$  от времени и выполнении условия синхронизма  $n$ -ой гармоники тока пучка с полем волны ( $n\varphi = \text{Re}(\Omega\tau)$ ) медленно изменяется со временем по сравнению с  $\varphi$  и  $\text{Re}(\Omega\tau)$  в первом приближении будем иметь

$$\dot{\mathcal{E}} = 2e\omega_{00} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\psi_n \exp(-in\varphi)) C(\tau) \exp[i(\Omega\tau + \omega t_0)] \right\},$$

$$\dot{\vartheta} - \omega_0 = -2e\omega_{00} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} (\psi_n \exp(-in\varphi)) C(\tau) \exp[i(\Omega\tau + \omega t_0)] \right\}.$$

Введем медленно меняющуюся фазу  $\vartheta = n\varphi - n\omega_{00}\tau - \omega t_0$ , где  $\omega_{00} = \omega_0(\mathcal{E})$ ,  $\mathcal{E}_0$  — энергия электрона в момент влета в систему; обозначим  $C(\tau) \propto \exp[i(\Omega - n\omega_{00})\tau]$  через  $A(\tau)$ . Тогда укороченные уравнения для энергии и фазы колебаний принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= 2en\omega_{00} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\psi_n \exp(-i\vartheta)) A(\tau) \right\}, \\ \dot{\vartheta} + n(\omega_{00} - \omega_0) &= -2en\omega_{00} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} (\psi_n \exp(-i\vartheta)) A(\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь можно считать, что точки означают дифференцирование по  $\tau$ . Энергия  $\mathcal{E}$  и фаза  $\vartheta$ , найденные из (5), зависят от  $\tau$ ,  $\mathcal{E}$  и  $\vartheta_0$  ( $\vartheta_0 = n\varphi - \omega t_0$  — фаза при  $\tau = 0$ ), поэтому они, медленно изменяясь в зависимости от  $\tau$ , в то же время быстро меняются в зависимости от  $t_0$ , т. е. от переменной  $t - \tau$ .

Укороченное уравнение, соответствующее (2в), если выразить  $(x_e E_0^*)$  через  $\psi$  и воспользоваться (4), выглядит как

$$\frac{dC}{d\tau} = -\frac{|I_0| n\omega_{00}}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\psi_n^* \exp(i\vartheta)) \exp[-i(\Omega - n\omega_{00})\tau] d\omega t.$$

Поскольку в нем подынтегральное выражение зависит от  $t$  лишь через посредство  $\vartheta_0 = n\varphi_0 - \omega t_0 = n\varphi_0 - \omega\tau + \omega t$ , нетрудно перейти от интегрирования по  $t$  к интегрированию по  $\vartheta_0$ . В дальнейшем вместо уравнения для  $C(\tau)$  удобно пользоваться уравнением для величины  $A = C \exp[i(\Omega - n\omega_{00})\tau]$ , которая входит в (5):

$$\dot{A} + i(n\omega_{00} - \Omega) A = -\frac{|I_0| n\omega_{00}}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\psi_n^* \exp(i\vartheta)) d\vartheta_0. \quad (6)$$

Уравнения (5), (6) составляют систему укороченных уравнений самосогласованного поля в волноводе с тонким периодическим пучком, соответствующую уравнениям (2). Заметим, что правая часть (6) не зависит от фазы колебаний электронов при  $\tau = 0$  и, следовательно, (6) не изменит своего вида и для случая потока с произвольным распределением электронов по начальным фазам  $\varphi_0$ , но, конечно,monoэнергетического.

Введем в уравнениях (5), (6) безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} w &= \mathcal{E}/\mathcal{E}_0, \quad H(w) = \psi_n(\mathcal{E})/\psi_n(\mathcal{E}_0), \\ v(w) &= \beta n(\omega_0 - \omega_{00}), \quad F = i\alpha A, \\ \xi &= \xi' + i\xi'' = \beta(\Omega - n\omega_{00}), \quad \zeta = \tau/\beta, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\alpha = \left( \frac{e |N_0|}{\mathcal{E}_0 |I_0|} \right)^{1/2} \frac{\psi_n(\mathcal{E}_0)}{|\psi_n(\mathcal{E}_0)|}, \quad \beta = \frac{\alpha \mathcal{E}_0}{en\omega_{00}\psi_n(\mathcal{E}_0)}.$$

Тогда система уравнений самосогласованного поля принимает вид:

$$\frac{dw}{d\zeta} = -2\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\partial}{\partial \vartheta} [H \exp(-i\vartheta)] F \right\}; \quad (8a)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\zeta} - v(w) = 2\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\partial}{\partial w} [H \exp(-i\vartheta)] F \right\}; \quad (8b)$$

$$\frac{dF}{d\zeta} - i\xi F = \mp i \overline{\frac{\partial}{\partial \vartheta} [H^* \exp(i\vartheta)]}. \quad (8c)$$

Знаки  $\mp$  в правой части (8c) соответствуют  $N_0 > 0$  и  $N_0 < 0$ . Двойная черта над правой частью этого же уравнения означает усреднение по  $\vartheta_0$ ; этим обозначением будем пользоваться везде в дальнейшем.

Уравнения (8) необходимо дополнить граничными условиями. Границные условия для безразмерной энергии  $w$  и фазы  $\vartheta$  записутся как

$$w(0) = 1, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad 0 \leq \vartheta_0 < 2\pi. \quad (9)$$

Надо учесть также, что согласно (7)  $H(w(0)) = H(1) = 1$ ,  $v(w(0)) = v(1) = 0$ . Вид граничного условия для амплитуды волны  $F$  зависит как от свойств волновода, так и от режима работы системы. В дальнейшем будем полагать волновод идеально согласованным по всей длине. В этом случае, если речь идет о взаимодействии пучка с попутной волной (первый знак в (8c)), система может только усиливать электромагнитные колебания и граничное условие для  $F$  следует задать на катодном конце ( $\zeta = 0$ ). При взаимодействии пучка со встречной волной (второй знак в (8c)) система может усиливать и генерировать электромагнитные колебания. Граничное условие для  $F$  необходимо задать, вообще говоря, на коллекторном конце ( $\zeta_L = L/\beta v_1$ ) и, в частности, в автоколебательном режиме  $F(\zeta_L) = 0$ .

Укороченные уравнения самосогласованного поля получены при использовании модели пучка, непосредственно связанной с системами типа строфотрона с бегущей волной. Однако нетрудно показать, что эти уравнения справедливы и для других систем с фазовой группировкой электронов, поскольку укороченные уравнения движения электронов, колеблющихся в любых статических полях (имеются в виду, конечно, одночастотные колебания) и находящихся под воздействием высокочастотного поля, имеют одинаковую структуру, если скорость перемещения центра осцилляций фиксирована.

### ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим поведение исследуемой системы в режиме малого сигнала. Для этого воспользуемся укороченными уравнениями (8), линеаризовав их. Считая величину поля  $F$  малой, будем предполагать, что энергия и фаза электронов мало изменяются по сравнению со своими значениями при  $\zeta = 0$ :

$$w = 1 + w_1, \quad |w_1| \ll 1,$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1, \quad |\vartheta_1| \ll 1.$$

Линеаризуя (8) относительно  $w_1$ ,  $\vartheta_1$  и  $F$ , учтем, что  $H(1) = 1$  и  $v(1) = 0$ :

$$\frac{dw_1}{d\zeta} = -2\operatorname{Re} [F \exp(-i\vartheta_0)],$$

$$\frac{d\vartheta_1}{d\zeta} - \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0 w_1 = -2\text{Im} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial w} \right)_0 F \exp(-i\vartheta_0) \right],$$

$$\frac{dF}{d\zeta} - i\xi F = \pm \overline{\left[ \left( \frac{\partial H}{\partial w} \right)^*_0 w_1 + i\vartheta_1 \right]} \exp(i\vartheta_0).$$

Производные  $v$  и  $H$  по энергии взяты здесь при  $w = 1$ . Дважды дифференцируя третье уравнение, подставляя его в правую часть  $w_1$  и  $\vartheta_1$  из первых двух уравнений и интегрируя по  $\vartheta_0$ , получаем линейное уравнение третьего порядка для  $F$ :

$$\frac{d^3 F}{d\zeta^3} - i\xi \frac{d^2 F}{d\zeta^2} \pm \left[ \left( \frac{\partial |H|^2}{\partial w} \right)_0 \frac{dF}{d\zeta} + i \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0 F \right] = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этому дифференциальному (если  $F \sim \exp(is\zeta)$ ), имеет вид, характерный для дисперсионного уравнения волноводов с непрямолинейными периодическими пучками при учете взаимодействия пучка только с синхронной волной [11]:

$$s^2(s - \xi) \mp \left[ \left( \frac{\partial |H|^2}{\partial w} \right)_0 s + \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0 \right] = 0. \quad (10)$$

Свободный член в (10), пропорциональный производной частоты колебаний электронов по энергии, определяет взаимодействие типа «О», связанное в рассматриваемой нами модели исключительно с неизохронностью колебательного движения электронов. Коэффициент при первой степени  $s$  связан с взаимодействием типа «М». Взаимодействие типа «М» приводит к увеличению усиления в системе (или к уменьшению пускового тока) при наличии также и взаимодействия типа «О» либо к усилению (или возникновению автоколебаний), если взаимодействие типа «О» отсутствует, лишь в случае  $(\partial |H|^2/\partial w)_0 < 0$ . Этот эффект подробно обсуждается в работе [12] в связи с исследованием строфотрона с бегущей волной. Величина  $(\partial |H|^2/\partial w)_0$  может быть отрицательной, лишь когда поперечная структура поля волны — достаточно сложная функция ( $E_0(x)$  — знакопеременная) и амплитуда колебательного движения электрона сравнима с масштабом ее неоднородности. В таком поле увеличение энергии колебаний электронов (а, следовательно, и амplitуды колебаний) может приводить к уменьшению взаимодействия электронов с полем, так что «неправильнофазные» электроны будут забирать у поля меньше энергии, чем отдавая «правильнофазные».

Мы не будем здесь более подробно анализировать линеаризованные уравнения, поскольку это сделано в работах, посвященных линейной теории систем с периодическими пучками. Отметим только, что уравнение (10) позволяет указать случаи, когда механизм взаимодействия того или другого типа можно не учитывать. Для этого, очевидно, необходимо сравнить параметры  $(\partial |H|^2/\partial w)_0$  и  $(\partial v/\partial w)_0^{2/3}$ . Если

$$\left| \left( \frac{\partial |H|^2}{\partial w} \right)_0 \right| \ll \left| \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0 \right|^{2/3}, \quad (11)$$

то группировка электронов в основном связана с неизохронностью их колебаний; в случае обратного неравенства преобладает взаимодействие типа «М», и колебания электронов можно считать изохронными.

### ИНТЕГРАЛЫ УКОРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегрирование уравнений (8) в аналитической форме при произвольных функциях  $v(w)$  и  $H(w)$  и произвольном параметре  $\xi$  не представляется возможным. Однако нетрудно указать три интеграла, которые могут быть полезны при исследовании этих уравнений.

Один из интегралов найдем, умножая (8в) на  $F^*$ , выделяя в нем реальную часть и комбинируя ее с (8а), усредненным по  $\vartheta_0$ . В результате указанных операций получаем уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} + 2\xi''\eta = \mp \frac{d\overline{\overline{w}}}{d\xi},$$

в котором  $\eta = |F|^2$ . Это очевидное соотношение представляет собой закон сохранения и превращения энергии, поскольку  $\eta$  пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля, а  $w$  — плотности колебательной энергии электронов. Если  $\xi'' = 0$ , то, используя граничное условие (9) для  $w$  и полагая, что  $F(0) = F_0$  и  $\eta(0) = |F_0|^2 = \eta_0$ , получаем закон сохранения энергии в исследуемой системе при отсутствии потерь в волноводе:

$$\eta(\zeta) - \eta_0 = \pm (1 - \overline{\overline{w}}(\zeta)). \quad (12)$$

Величина  $1 - \overline{\overline{w}}$ , в силу определения  $w$  посредством (7), является электронным коэффициентом полезного действия, если его определить как соотношение энергии электронов, отдаваемой полю, к их колебательной энергии в момент появления в волноводе.

Для получения следующего интеграла подставим в (8в) комплексную амплитуду поля в виде

$$F = V\overline{\eta} \exp(i\chi) \quad (13)$$

и разделим действительную и мнимую части. В результате несложных преобразований уравнения для  $\eta$  и  $\chi$  могут быть записаны в такой же форме, как (8а) и (8б):

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} + 2\xi''\eta &= \mp 2\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\partial}{\partial\chi} \overline{[H V \overline{\eta} \exp(-i\vartheta + i\chi)]} \right\}, \\ \frac{d\chi}{d\xi} - \xi' &= \pm 2\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\partial}{\partial\eta} \overline{[H V \overline{\eta} \exp(-i\vartheta + i\chi)]} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Домножим уравнения (14) соответственно на  $d\chi/d\xi$  и  $d\eta/d\xi$ , вычтем одно из другого, а (8а) и (8б) после подстановки в них (13) домножим на  $d\vartheta/d\xi$  и  $d\omega/d\xi$ , вычтем одно из другого и результат усредним по  $\vartheta_0$ . Сложение (либо вычитание) получающихся соотношений дает уравнение

$$\begin{aligned} 2\xi''\eta \frac{d\chi}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left[ \overline{\overline{v(w) dw}} \pm \xi'\eta \right] &= -2 \frac{d}{d\xi} \times \\ \times \operatorname{Re} [i H V \overline{\eta} \exp(-i\vartheta + i\chi)] &. \end{aligned}$$

В случае  $\xi'' = 0$  из него с помощью граничных условий при  $\zeta = 0$  нетрудно найти соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{v(w) dw}} \pm \xi'(\eta - \eta_0) = -2\operatorname{Re} [i H V \overline{\eta} \exp(-i\vartheta + i\chi)], \quad (15)$$

которое и является искомым интегралом.

Равенство (15) дает возможность найти фазу поля  $\chi$  при любом  $\zeta$ , если известна функция  $w = w(\zeta, \vartheta_0)$ . Действительно, домножая второе уравнение (14) на  $\eta$ , видим, что его правая часть с точностью до знака совпадает с правой частью (15), следовательно,

$$2\eta \frac{d\chi}{d\zeta} = \xi'(\eta + \eta_0) \mp \int_{\underline{w}}^{\overline{w}} v(w) dw, \quad (16)$$

а  $\eta$  выражается через  $w$  с помощью (12). Последнее соотношение эквивалентно интегралу (32) работы [13], который в теории ЛБВ истолковывается как закон сохранения энергии в системе координат, перемещающейся со скоростью невозмущенного высокочастотным полем движения электронов. В данном случае подобным образом интерпретировать (16) не удается.

Еще один интеграл может быть найден из первых двух уравнений (8). Для этого необходимо (8а) умножить на  $d\vartheta/d\vartheta_0$ , а (8б)— на  $d\omega/d\vartheta_0$ , затем вычесть второе из первого и результат усреднить по  $\vartheta_0$ . Если в получившемся уравнении

$$\overline{\frac{dw}{d\zeta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_0}} = \overline{\frac{d\vartheta}{d\zeta} \frac{\partial w}{\partial \vartheta_0}}$$

преобразовать правую часть, воспользовавшись тождеством

$$\overline{\frac{d\vartheta}{d\zeta} \frac{\partial w}{\partial \vartheta_0}} = \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} \left( \overline{\frac{d\vartheta}{d\zeta} w} \right) - \frac{d}{d\zeta} \left( \overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_0} w} \right) + \overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_0} \frac{dw}{d\zeta}},$$

то после интегрирования и подстановки граничных условий (9) оно принимает вид

$$\overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_0} w} = 1. \quad (17)$$

Этот интеграл эквивалентен интегралу (42) работы [14], который в теории ЛБВ является нелинейным аналогом «кинетической теоремы».

Обратим внимание на вид первых двух интегралов в случае взаимодействия пучка со встречной волной (второй знак в (8в)), когда система работает в автоколебательном режиме. Поскольку при этом поле на коллекторном конце равно нулю, (12) для  $\zeta = \zeta_L$  записывается как

$$\eta_0 = 1 - \overline{\underline{w}(\zeta_L)}, \quad (18)$$

а в (15) при  $\zeta = \zeta_L$  правая часть обращается в нуль. Последнее с использованием (18) позволяет выразить  $\xi'$  и, следовательно, частоту автоколебаний через значения функции  $w(\zeta_L, \vartheta_0)$ :

$$\xi' = [\overline{\underline{w}(\zeta_L)} - 1]^{-1} \left[ \int_{\underline{w}}^{\overline{w}(\zeta_L)} v(w) dw \right]. \quad (19)$$

### СИСТЕМЫ С СИЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ТИПА «О»

Уравнения (8) иногда удобно записать в несколько иной форме, выделив в фазе  $\vartheta$  часть, связанную с изменением частоты колебаний электронов за счет изменения их энергии. Положим

$$\vartheta = \theta + \psi, \quad \frac{d\psi}{d\zeta} = v(w)$$

и вместо двух переменных  $w$  и  $\theta$  введем комплексную переменную

$$G = H^*(w) \exp(i\theta).$$

Путем несложных преобразований (8) с использованием новых переменных получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} &= -2 \frac{\partial v}{\partial w} \operatorname{Re}[G^* F \exp(-i\psi)], \\ \frac{dG}{d\zeta} &= -\frac{\partial |G|^2}{\partial w} F \exp(-i\psi), \\ \frac{dF}{d\zeta} - i\xi F &= \pm \overline{\overline{G \exp(i\psi)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия для  $G$ ,  $\psi$  и  $d\psi/d\zeta$  с учетом (9) выглядят как

$$G(0) = 1, \quad \psi(0) = \vartheta_0, \quad \frac{d\psi}{d\zeta}(0) = 0.$$

Первое и третье уравнения (20) напоминают систему уравнений нелинейной теории ЛБВ (ЛОВ) в случае малого параметра усиления [13, 15], однако в них входит функция  $G$ , определяемая дополнительным уравнением. Это свидетельствует о том, что (20) и, следовательно, (8), по крайней мере, не менее сложны, чем нелинейные уравнения ЛБВ (ЛОВ). Поэтому получение из (8) количественных соотношений для нелинейного режима возможно, видимо, лишь путем численного интегрирования уравнений.

Из (20) нетрудно заметить, что группировка электронов, связанная с неизохронностью их осцилляторного движения и определяемая первым уравнением, преобладает ( $\psi$  быстро меняется по сравнению с  $G$ ), если  $|\partial v/\partial w| \gg |\partial |G|^2/\partial w|$ . Более того, при этом  $G$  не может слишком сильно изменяться по сравнению с первоначальным значением  $G(0) = 1$ , так как в правую часть второго уравнения (20) входит осциллирующий множитель со сравнительно быстро меняющейся фазой. В связи с этим при указанном неравенстве в правых частях всех уравнений (20)  $G$  следует заменить единицей. Тогда систему уравнений самосогласованного поля можно ограничить первым и третьим уравнениями (20):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} &= -2 \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0 \operatorname{Re}[F \exp(-i\psi)], \\ \frac{dF}{d\zeta} - i\xi F &= \pm \overline{\overline{\exp(i\psi)}}, \end{aligned} \quad (21)$$

которые с точностью до постоянных коэффициентов совпадают с нелинейными уравнениями ЛБВ (ЛОВ) в случае малого параметра усиления [13, 15]. Заменами

$$F_1 = 2 \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0^{1/3} F, \quad \zeta_1 = \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0^{1/3} \zeta, \quad \xi_1 = - \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0^{1/3} \xi$$

уравнения (21) сводятся к нелинейным уравнениям ЛБВ (ЛОВ), и для их исследования могут быть использованы как численные результаты [15, 16], так и приближенные методы [14, 17], известные в теории ЛБВ и ЛОВ. Обычно при численных расчетах по уравнениям ЛБВ и ЛОВ вычисляются значения величины  $\frac{1}{2} |F_1|^2$  [15, 16]. По ним нетрудно найти значения  $\eta$ , так как

$$\eta = |F|^2 = \frac{1}{2} |F_1|^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial w} \right)_0^{-2/3} \right], \quad (22)$$

и затем с помощью (12) — электронный КПД, который в рассматриваемом случае, очевидно, мал. Уравнения (21) справедливы, когда в системе как в линейном, так и нелинейном режимах взаимодействие типа «М» мало. Поэтому условие их применимости более точно следует записать в виде (11).

Как и в теории ЛБВ нетрудно найти три интеграла уравнений (21), подобных интегралам (26) и (32) работы [13] и (42) работы [14]. Эти интегралы могут быть получены также непосредственно из интегралов (12), (16) и (17), если в последних в соответствии с предположениями, сделанными при получении (21) из (20), считать  $v(w)$  равной  $(\partial v / \partial w)_0 (w - 1)$  и выразить  $w$  через  $d\psi / d\zeta$ .

Напомним, что подобный результат (возможность использования нелинейной теории ЛОВ для расчета генераторов с непрямолинейными периодическими пучками) был получен другим способом при рассмотрении нелинейной теории гелистрона в работах [5, 6].

Автор признателен А. В. Гапонову за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Гилинский, ДАН СССР, 134, № 5, 1055 (1960).
2. В. К. Юллатов, Доклад на IV Всесоюзной конференции МВССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, октябрь 1960 г.
3. W. L. Dickson, C. C. Johnson, R. W. Grow, Proc. IRE, 49, № 11, 1696 (1961).
4. В. А. Жураховский, Радиотехника и электроника, 9, № 8, 1527 (1964).
5. А. А. Кураев, Ю. Н. Кувшинов, сб. Вопросы электроники сверхвысоких частот, вып. 1, изд. СГУ, 1964, стр. 118.
6. А. А. Кураев, Ю. Н. Кувшинов, Радиотехника и электроника, 10, № 2, 379 (1965).
7. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, № 2, 326 (1960).
8. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, 1957.
9. В. И. Гайдук, Радиотехника и электроника, 4, № 9, 1513 (1959).
10. Н. Н. Богоявленский, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
11. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 3, 450 (1959).
12. В. М. Боков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 5, 826 (1960).
13. Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 2, № 7, 883 (1957).
14. В. Т. Овчаров, В. А. Солнцев, Радиотехника и электроника, 8, № 11, 1931 (1962).
15. Г. Н. Рапопорт, ДАН СССР, 117, № 3, 411 (1957).
16. Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 2, № 8, 1027 (1957).
17. Г. Н. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 1, № 5, 599 (1958).

**THE NONLINEAR THEORY OF INTERACTION OF PERIODIC ELECTRON BEAM WITH AN ELECTROMAGNETIC WAVE***V. K. Yulpatov*

There is considered the nonlinear theory of interaction of a beam of nonlinear excited oscillators with one degree of freedom (a model of a nonrectilinear periodic electron beam) with an electromagnetic wave. The integrals of abbreviate equations of a self-consistent field have been found. It is shown that in the case of pronounced interaction of "O" type, the behaviour of the system is approximately described by TWT or BWT nonlinear equations.

---

УДК 621.385 633

## ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛАМПЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*P. A. Дудник, M. I. Фукс*

В линейном приближении численным методом проведен анализ дисперсионных уравнений лампы с поперечным взаимодействием типа «О» в режиме сильного пространственного заряда и лампы типа «М». Показано, что величина постоянной нарастания волны достигает некоторого предельного значения при определенной длине пространства взаимодействия, зависящей от свойства используемой анизотропной двумерной замедляющей системы. Рассчитан коэффициент усиления плоской модели ЛПВ типа «М», когда в качестве замедляющей системы используется «косая» гребенка.

Теоретическое исследование лампы с поперечным взаимодействием (ЛПВ) во многих случаях базируется на предположении об электродинамической эквивалентности замедляющей системы ЛПВ волноводу, заполненному изотропным диэлектриком [1] (или анизотропным диэлектриком, у которого одна из главных осей тензора диэлектрической проницаемости ориентирована по оси волновода [2]); широкий ленточный электронный пучок предполагается при этом перпендикулярным оси волновода. В такой системе противоположно направленные по волноводу волны имеют одинаковые поперечные волновые числа, что затрудняет развязку входа и выхода в ЛПВ, используемой, например, в качестве усилителя.

Эти трудности в определенной степени снимаются, если в ЛПВ использовать двумерную замедляющую систему, у которой одна из главных осей тензора поверхностной проводимости  $\bar{Y}$  не совпадает с направлением оси волновода [3, 4].

В настоящей работе рассматривается следующая простейшая модель ЛПВ (см. рис. 1): тонкий ленточный электронный пучок движется вдоль оси  $y$  в пространстве взаимодействия прибора, представляющего собой волновод

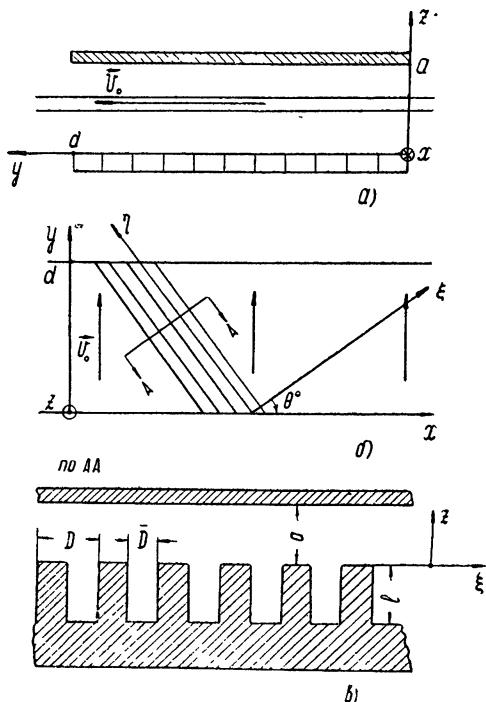


Рис. 1.

с импедансной стенкой, лежащей в плоскости  $z = 0$ . Над импедансной стенкой на расстоянии  $a \ll \lambda_p$ , где  $\lambda_p$  — длина замедленной волны системы, расположена идеально проводящая крышка волновода. Ширина волновода по оси  $y$  равна  $d$  ( $d \gg a$ ). Ниже будем считать, что электронный пучок сфокусирован либо сильным продольным магнитным полем — «О»-тип, либо скрещенными статическими электрическим и магнитным полями — «М»-тип. Тензор поверхностной проводимости  $\hat{Y}$ , главные оси которого связаны с системой координат  $(\xi, \eta)$ , в системе координат  $(x, y)$  имеет вид

$$\hat{Y} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}.$$

Модель ЛПВ с такими анизотропными двумерными замедляющими системами ( $Y_{12} \neq 0$ ) рассматривалась в работах [5-7], анализ проводился для ЛПВ типа «О» и типа «М» в предположении слабого тока пучка при достаточно узких двумерных замедляющих системах. Однако для практического использования представляет определенный интерес проведение анализа работы ЛПВ при произвольной ширине замедляющих систем.

В настоящей работе излагаются некоторые результаты такого анализа моделей ЛПВ типа «О» с сильным пространственным зарядом и типа «М», проведенного численным способом, аналогичным описанному в [2].

### 1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим ЛПВ типа «О» с сильным пространственным зарядом, влияние которого на взаимодействие электронного потока с ВЧ полями двумерной замедляющей системы будем учитывать с помощью понятия об эффективном плазменном волновом числе  $h_p$  [8]. В этом случае дисперсионное уравнение рассматриваемой модели ЛПВ типа «О», согласно [5], можно записать в виде

$$[x^2 + 2\tilde{Y}_{12}hx + \tilde{Y}_{11}h^2 + \tilde{B}] [(h_e - x)^2 - h_p^2] = -\chi h_e x_0 x^2, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{11} &= \frac{Y_{11}}{Y_{22}}, \quad \tilde{Y}_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}}, \quad \tilde{B} = \frac{B}{Y_{22}}, \quad h_e = \frac{\omega}{v_0}, \\ h_p^2 &= \frac{1}{v_0^2} \frac{\eta \rho_0}{\epsilon_0}, \quad \chi = \frac{I_0}{2V_0} \frac{j\psi^2}{-Y_{22}x_0}, \end{aligned}$$

$Y_{ik}$  — компоненты тензора поверхностной проводимости  $\hat{Y}$ ;  $B = j\omega \epsilon_0 / a$  — проводимость зазора между крышкой волновода и замедляющей системой [6];  $\eta = |e|/m$  — удельный заряд электрона;  $v_0$ ,  $\rho_0$ ,  $I_0$  — постоянные составляющие скорости пучка, плотности пространственного заряда и линейной (по оси  $x$ ) плотности конвекционного тока пленочного пучка соответственно;  $V_0$  — потенциал пучка;  $\psi$  — структурный коэффициент, характеризующий изменение амплитуды поля медленной волны над замедляющей системой;  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства;  $\omega$  — круговая частота;  $j = \sqrt{-1}$ . При слабом токе пучка параметр  $\chi \ll 1$ . Если выполнено условие синхронизации

$$h_e + h_p = x_{01}(1+D\varepsilon), \quad (2)$$

решение дисперсионного уравнения (1) будем искать в виде

$$h = h_0(1+D\Delta), \quad x = x_{01}(1+D\delta),$$

где  $h_0$  — продольное и  $x_{01,2}$  — поперечные волновые числа в системе без электронного пучка. Способом, аналогичным описанному в [6, 12], для двух близких корней дисперсионного уравнения (1) получаем следующее уравнение:

$$\tilde{\delta}^2 - g_1 \tilde{\Delta} \tilde{\delta} + 1 = 0; \quad (3)$$

$$D^2 = \chi \frac{N}{2\pi n} \frac{h_e}{2h_p}, \quad (4)$$

где  $N = x_0$ ,  $d$ . Для третьего, удаленного корня, лежащего в окрестности  $x_3 \sim x_{02}$ , поправка  $\tilde{\delta}_3$  к волновому числу  $x_3 = x_{02} + x_{01} D \tilde{\delta}_3$  равна

$$\tilde{\delta}_3 = g_2 \tilde{\Delta} + a + \epsilon \frac{1-q}{q}; \quad (5)$$

$$a = \frac{DN}{2\pi n} r^2 \left( \frac{\pi n}{h_p d} - 1 \right)^{-1}; \quad (6)$$

$$q = \frac{g_1}{g_2}, \quad (7)$$

где  $r = x_{02}/x_{01}$ . Здесь  $\tilde{\delta} = \delta - \epsilon$ ,  $\tilde{\Delta} = \Delta - \epsilon/g_1$ . Коэффициенты  $g_{1,2}$ , согласно соотношениям (10а), (11) работы [6], равны

$$g_{1,2} = \frac{h_0}{x_{01}} \left[ -\tilde{Y}_{12} \mp \frac{h_0 d}{n\pi} (\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2) \right]. \quad (8)$$

При получении выражений (3), (5) мы использовали условия

$$\frac{2\pi n}{N} \gg D |\delta - g_2 \Delta|, \quad 2h_p \gg x_{01} D |\delta - \epsilon|. \quad (9)$$

Первое неравенство означает, что поперечные составляющие фазовых скоростей двух волн, образующих нули поля на боковых стенках волновода, различаются достаточно сильно. Из второго неравенства следует, что фазовые скорости пространственного заряда в электронном пучке при сильном пространственном заряде достаточно далеко разнесены, так что быстрая волна  $h_e - h_p$  слабо возмущается при синхронизации (2). Благодаря этому дисперсионное уравнение сводится к уравнению второго порядка (3), что значительно облегчает дальнейший анализ. Как нетрудно показать, возмущенная быстрая волна пространственного заряда  $h_e - h_p$  является волной с постоянной амплитудой и нами в дальнейшем учитываться не будет.

Корни уравнений (3), (5) должны удовлетворять определенным требованиям, вытекающим из граничных условий задачи (см., например, [6]). Наиболее просто граничные условия можно сформулировать в предположении, что электронный пучок входит в пространство взаимодействия прибора при  $y = 0$  невозмущенным, т. е. переменная составляющая конвекционного тока пучка

$$J_{\text{ел}} = - \frac{h_e \chi \rho_0 \eta \psi V}{[(h_e - \chi)^2 - h_p^2] v_0}$$

равна нулю ( $J_{\text{ел}} = 0$ ). Тогда в случае прямоугольного волновода с идеально проводящими боковыми стенками граничные условия можно записать в виде  $V = 0$ ,  $J_{\text{ел}} = 0$  при  $y = 0$  и  $V = 0$  при  $y = d$ . Здесь

$V$  — высокочастотное напряжение между замедляющей системой и крышкой волновода. Эта система однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, когда определитель ее равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \exp(-jDN\tilde{\delta}_1) & \exp(-jDN\tilde{\delta}_2) & \exp(-jDN\tilde{\delta}_3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/\tilde{\delta}_1 & 1/\tilde{\delta}_2 & \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{DN}{2\pi n} r \left( \frac{\pi n}{h_p d} - 1 \right)^{-1}. \quad (10)$$

Уравнение (9) надо решать совместно с системой уравнений (3), (5).

Отметим, что при исследовании плоской модели ЛПВ типа «М» в случае широких замедляющих систем [12] мы получим аналогичную систему уравнений, в которой параметры  $D$ ,  $a$ ,  $\alpha$  при синхронизации  $h_e = x_{01}(1+D\epsilon)$  описываются следующими выражениями:

$$D^2 = \chi \frac{N}{\pi n} \frac{-\xi}{f}; \quad (11)$$

$$a = - \frac{DN}{2\pi n} \frac{1}{f\xi} \frac{\pi n(r^2 + \theta + \xi^2)/N - rf\xi}{(2\pi n/fN)^2 - 1}, \quad (12)$$

$$\alpha = - \frac{DN}{2\pi n} \frac{1}{f\xi} \frac{2\pi n(r + \theta)/N - f\xi}{(2\pi n/fN)^2 - 1},$$

где  $f = h_H/x_{01}$ ,  $h_H = \omega_H/v_0$ ,  $\omega_H = \eta B$  — циклотронная частота.

## 2. РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ

Преобразуем систему уравнений (3), (5), (9) к виду, удобному для решения численным способом. Следуя [2], введем обозначение

$$\frac{g_1 \tilde{\Delta}}{2} = -j \operatorname{sh} \psi \quad (13)$$

так, что величина  $2 \operatorname{Re}(\operatorname{sh} \psi)$  пропорциональна  $\operatorname{Im} \tilde{\Delta}$  — постоянной нарастания волны в ЛПВ вдоль оси  $x$ , определение которой представляет для нас наибольший интерес. Тогда корни уравнений (3) и соотношение (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{1,2} &= j(-\operatorname{sh} \psi \pm \operatorname{ch} \psi), \\ \tilde{\delta}_3 &= -jk \operatorname{sh} \psi + \varphi b + \sigma, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $k = 2g_2/g_1 = 2/q$ ,  $\varphi = DN$ ,  $\sigma = \epsilon(1-q)/q = \epsilon(k-2)/2$ .

Используя соотношения (14), из (9) нетрудно получить следующее трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{ch} \psi = \exp[j\varphi^2 b + j\varphi \sigma + \varphi(k-1) \operatorname{sh} \psi] [\operatorname{ch}(\psi - \varphi \operatorname{ch} \psi) + j\varphi \Lambda \operatorname{sh}(\varphi \operatorname{ch} \psi)], \quad (15)$$

где  $b = a/\varphi$ ,  $\Lambda = \alpha/\varphi$ .

Здесь параметр  $\varphi = DN$  характеризует усиление эквивалентной лампы в неперах; параметр усиления  $D$  находится из (4) или (11). Па-

параметр  $\sigma = \epsilon(k-2)/2$  позволяет учесть влияние расстройки синхронизации (2) на работу ЛПВ. Величина  $b$  связана с поправкой к постоянной распространения  $x_{02}$  (6), (12);  $\Lambda$  определяется вкладом волны с постоянной распространения  $x_3$  в граничные условия задачи (10), (12). Величина параметра  $k = 2g_2/g_1 = 2/q$ , согласно [12], определяется дисперсионными свойствами анизотропной двумерной замедляющей системы:

$$g_{1,2} = -\frac{v_{y1}}{v_x} \left( \frac{U_x}{U_y} \right)_{1,2}, \quad q = \left( \frac{U_x}{U_y} \right)_1 \left( \frac{U_y}{U_x} \right)_2, \quad (16)$$

где  $U = \text{grad} \Gamma \phi$  [3] — групповая скорость волны ( $\Gamma$  — постоянная распространения), а  $v$  — фазовая скорость. В частности, в наиболее простом случае волновода с изотропной замедляющей системой, когда  $U_{x1} = U_{x2}$  и  $U_{y1} = -U_{y2}$ , параметр  $q = -1$ , т. е.  $k = -2$ .

Отметим, что уравнение (15) при  $k = -2$ ,  $a = 0$  и  $\Lambda = 0$  совпадает с соответствующим уравнением работы [2].

Оценим возможные области изменения параметра  $q$  для волновода с анизотропной двумерной замедляющей системой. Для этого воспользуемся соотношением (8). Рассмотрим два предельных случая. В первом случае изотропной двумерной замедляющей системы, когда  $Y_{12} = 0$ , параметр  $q = -1$ . Во втором предельном случае, при частотах, близких к критической частоте волновода с данной двумерной замедляющей системой ( $h_0 \approx 0$ ),  $q \approx 1$ .

Таким образом, возможные значения параметра  $q$  лежат в интервале

$$-1 \leq q < 1.$$

Решение уравнения (15) было проведено на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2. Определялось значение величины  $2 \operatorname{Re}(\operatorname{sh} \psi)$  в зависимости от  $\varphi$  при фиксированных значениях параметров  $k$ ,  $\sigma$ ,  $b$ ,  $\Lambda$ . Возможные области значений  $k$ ,  $b$ ,  $\Lambda$  и  $\varphi$  определялись с помощью выражений (4), (6), (8), (10)–(12), когда в качестве замедляющей системы ЛПВ используется система типа «косая» гребенка (см. рис. 1). В системе координат  $(\xi, \eta)$  тензор поверхностного импеданса гребенки, согласно [12], имеет вид

$$Z_{\text{пов}} = \begin{vmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Используя формулы преобразования компонент тензора поверхностной проводимости при переходе к системе координат  $(x, y)$ , для компонент  $Y_{ik}$  получаем следующие выражения:

$$\tilde{Y}_{11} = \frac{\sin^2 \theta + \Gamma_{0c}^{-2} \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \Gamma_{0c}^{-2} \sin^2 \theta}, \quad \tilde{Y}_{12} = \frac{(1 - 1/\Gamma_{0c}^2) \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \Gamma_{0c}^{-2} \sin^2 \theta}, \quad (17)$$

$$Y_{22} = \frac{\cos^2 \theta + \Gamma_{0c}^{-2} \sin^2 \theta}{i 120 \pi k a}.$$

Проводимость зазора между гребенкой и крышкой волновода будет равна

$$\tilde{B} = -\frac{k^2}{\cos^2 \theta + \Gamma_{0c}^{-2} \sin^2 \theta}, \quad (18)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число свободного пространства,  $k\Gamma_{0c}$  — постоянная распространения вдоль импедансной оси  $\xi$  в системе без пучка;

$$\Gamma_{0c}^2 = 1 + \frac{D \operatorname{tg} [kl \sqrt{1 - (n\pi \cos \theta / kd)^2}]}{ka \sqrt{1 - (n\pi \cos \theta / kd)^2}}. \quad (19)$$

Эти выражения получены в предположении, что в каждой канавке между зубьями гребенки устанавливается стоячая волна. Как следует из строгого анализа, это предположение справедливо при достаточно большом замедлении гребенки ( $\Gamma_{0c} > 1,5$ ).

Как можно показать, параметр  $q$  для замедляющей системы типа «косая» гребенка может принимать значения  $-1 \leq q < 0$ . Для параметров гребенки

$$0,3 \leq \frac{D}{D} \leq 0,67, \quad 1,8 \leq \frac{l}{D} \leq 2,75, \quad 0,3 \leq \frac{a}{D} \leq 2,3, \quad 0,1 \leq \frac{kd}{\pi} \leq 0,25$$

и для значений линейной плотности пучка  $0,25 \leq I_0 (a \cdot \text{см}^{-1}) \leq 2,5$  было установлено, что параметры  $b$  и  $\Lambda$  могут принимать значения в следующих интервалах. ЛПВ типа «М» (фокусирующее магнитное поле  $B_0 = 4000$  эрстед):

$$-2 \leq b \leq 2, \quad -2 \leq \Lambda \leq 2.$$

ЛПВ типа «О» с сильным пространственным зарядом:

$$|\Lambda, b| < 10^{-2}.$$

Расчеты производились для  $\varphi$  в интервале  $0 \leq \varphi \leq 10$ .

На рис. 2 изображена зависимость  $2\operatorname{Re}(\operatorname{sh} \psi)$  от  $\varphi$  при  $b = \Lambda = 0$  и различных параметрах  $k$ , характеризующих анизотропию замедляющей системы. Значения  $k$  указаны для каждой кривой. Из этого рисунка видно, что, начиная с некоторого  $\varphi$ , величина  $2\operatorname{Re}(\operatorname{sh} \psi)$  изменяется относительно мало, т. е. как бы достигается «насыщение». Учитывая соотношения (8), (13), (16), величину  $2\operatorname{Re}(\operatorname{sh} \psi)$  можно представить в виде

$$2\operatorname{Re}(\operatorname{sh} \psi) = -g_1 \operatorname{Im} \tilde{\Delta} = \frac{h_0 D \operatorname{Im} \Delta}{x_{01} D} \left( \frac{U_x}{U_y} \right)_1 = \\ = \frac{\text{усиление ЛПВ на ед. длины}}{\text{усиление экв. лампы на ед. дл.}} \left( \frac{U_x}{U_y} \right)_1.$$

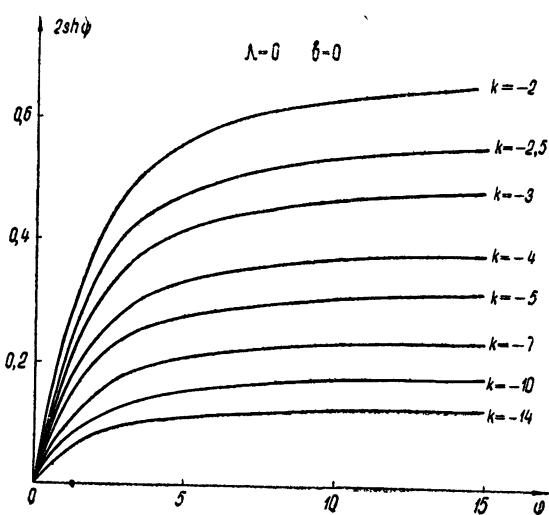


Рис. 2.

Таким образом, отношение постоянной нарастания волн в ЛПВ в направлении оси  $x$  к постоянной нарастания в эквивалентной лампе достигает максимальной величины при вполне определенной длине пространства взаимодействия, характеризуемого параметром  $\varphi = DN$ . Этот максимум имеет место при такой длине  $N$ , когда экспоненциально нарастающая по амплитуде волна вдоль электронного потока, соответствующая корню  $\delta_1$  уравнения (5), становится

преобладающей по величине над остальными волнами, и усиление ЛПВ определяется в основном этой волной [12]. С увеличением анизотропии  $\tilde{Y}_{12}$  замедляющей системы типа «косая» гребенка параметр  $k$  растет по абсолютной величине, и «насыщение» наступает при меньшем  $\varphi$ , т. е. при меньших размерах двумерной замедляющей системы по оси  $y$ . Уменьшение величины  $2\text{Re}(\text{sh } \psi)$  связано с тем, что с ростом  $k$  происходит уменьшение отношения  $(U_x/U_y)_1$ .

Отметим, что над анизотропной замедляющей системой могут распространяться волны в  $+x$  и  $-x$ -направлениях. Однако при выбранных параметрах замедляющей системы электронный пучок находится в синхронизме с волной, распространяющейся только в  $+x$ -направлении (2). Взаимодействие электронного пучка с волной противоположного направления не учитывалось, так как эта волна далека от синхронизма. Поэтому коэффициент усиления ЛПВ определялся без учета влияния встречной волны.

Рис. 3—5 иллюстрирует влияние параметров  $b$  и  $\Lambda$  на величину  $2\text{Re}(\text{sh } \psi)$ . Видно, что при  $b \neq 0$  происходит уменьшение усиления прибора. Подбирая  $\epsilon$  (параметр расстройки), можно добиться оптимального значения величины  $2\text{Re}(\text{sh } \psi)$ . При  $\Lambda \neq 0$  происходит смещение  $\max \text{Re}(\text{sh } \psi)$  в сторону меньших  $\varphi$ . При соответствующих параметрах двумерной замедляющей системы и пучка можно получить  $\max \text{Re}(\text{sh } \psi)$  при сравнительно малой длине пространства взаимодействия прибора в направлении электронного потока (малые  $\varphi$ ). Для обычного магне-

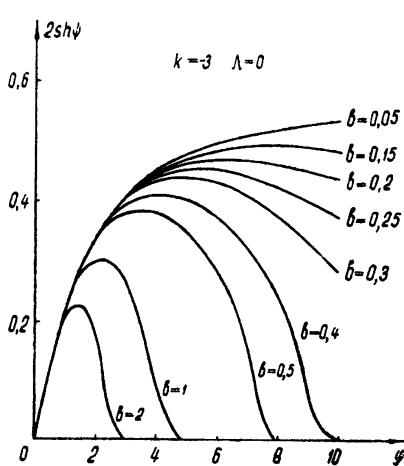


Рис. 3.

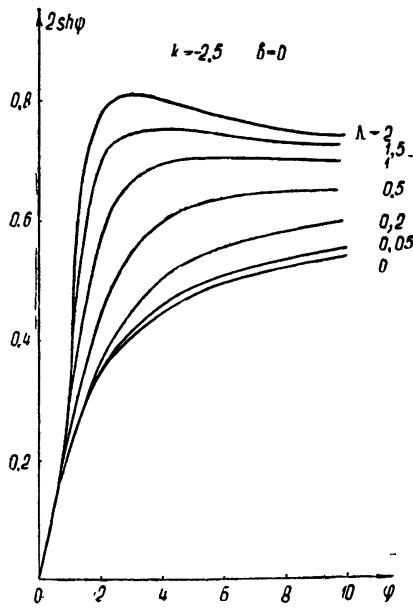


Рис. 4.

тронного усилителя, согласно [10], длина пространства взаимодействия  $DN \approx 5$ . В нашем же случае, согласно приведенным графикам, оптимальное усиление получается при  $\varphi = 1,5 \div 3$ . С увеличением анизотропии системы оптимальные значения  $\varphi$  уменьшаются. По-видимому, это обстоятельство может облегчить построение усилителей СВЧ мощности в коротком миллиметровом диапазоне волн.

Используя данную методику расчета, можно определить величину

усиления  $G$  рассматриваемых моделей ЛПВ. В качестве примера нами был вычислен коэффициент усиления плоской модели ЛПВ типа «М», использующий замедляющую систему типа «косая» гребенка со следующими параметрами:

$$\frac{D}{d} = 0,667, \quad \frac{l}{D} = 1,83, \quad \frac{a}{D} = 2,22, \quad \frac{d}{D} = 26,7, \quad \frac{L}{D} = 66,7,$$

где  $L$  — длина пространства взаимодействия по оси  $x$ . Согласование на концах волновода предполагается идеальным. Считаем, что прибор работает на частоте  $kD/\pi = 0,225$ , взаимодействие пучка осуществляется с « $\pm 1$ -ой» пространственной гармоникой замедляющей системы. При линейной плотности тока  $I_0 = 2,5$  ( $a \cdot \text{см}^{-1}$ ) и фокусирующем магнитном поле  $B_0 = 4000$  эрстед получена зависимость коэффициента усиления по мощности  $G = \exp(2h_0DL \operatorname{Im} \tilde{\Delta})$  от угла наклона  $\theta$  ребер гребенки к оси  $y$ .

На рис. 6 приведена зависимость  $G$  в децибелах от угла  $\theta$ . При расчете коэффициента усиления использовались соотношения (11) — (13), (17) — (19). Видно, что коэффициент усиления ЛПВ зависит от угла  $\theta$  наклона ребер гребенки к оси  $y$ . При  $\theta = 0$ , когда пучок распространяется вдоль канавок гребенки, импеданс взаимодействия равен нулю. С увеличением  $\theta$  величина коэффициента усиления достигает максимума в области значений  $\theta \sim 60^\circ$ . Именно при этих углах величина  $\tilde{Y}_{12}$ , характеризующая анизотропию «косой» гребенки, достигает максимального значения.

При углах, близких к  $90^\circ$ , исходные предположения несправедливы, и для расчета усиления требуется специальное рассмотрение. Предполагается, что система работает на основном типе колебаний ( $n=1$  —

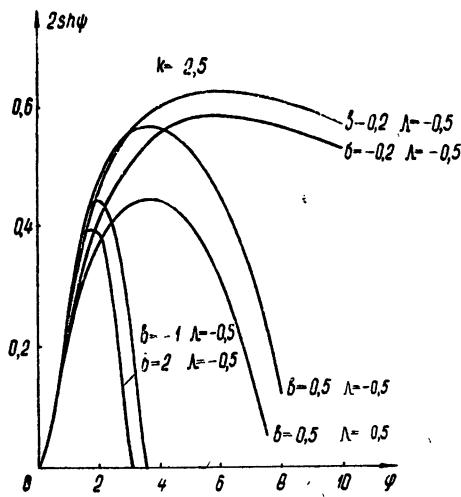


Рис. 5.

ливы, и для расчета усиления требуется специальное рассмотрение. Предполагается, что система работает на основном типе колебаний ( $n=1$  —

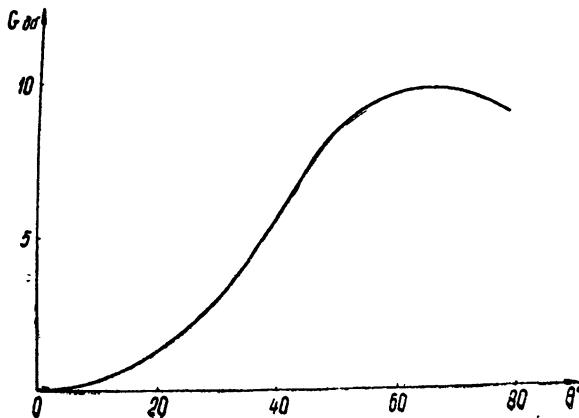


Рис. 6.

число максимумов амплитуды поля стоячей волны по ширине системы). «Косая» гребенка не является оптимальным типом замедляющей системы для ЛПВ. В этом случае, как показывают оценки, коэффициент усиления  $G \sim 10$  дБ. Отметим, что величина коэффициента усиления  $G$  увеличивается с уменьшением отношения  $U_x/U_y$ . В случае волновода с «косой» гребенкой  $U_x/U_y$  достигает величин порядка 5. Желательно выбирать замедляющие системы, обладающие такими дисперсионными свойствами, чтобы  $U_x/U_y < 1$  в рабочем диапазоне частот, т. е. групповая скорость волны вдоль оси  $x$  мала.

Авторы глубоко признательны Е. Ф. Жиженковой за решение трансцендентного уравнения и А. В. Гапонову, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему ряд важных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Лошаков, Радиотехника и электроника, 5, 1448 (1960).
2. O. Doehter, G. Mourig, *Microwellenröhren*, 97 (1960).
3. Р. А. Силин, Вопросы радиоэлектроники, сер. 1, Электроника, № 4, 3 (1959).
4. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 5, 795 (1961).
5. А. В. Гапонов, Доклад на сессии научно-технического общества радиотехники и электроники им А. С. Попова, М., 1961.
6. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 4, 764 (1963).
7. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 1, 135 (1964).
8. H. Neffner, Proc. IRE, 42, № 6, 930 (1954).
9. Д. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
10. В. С. Стальмахов, Основы электроники СВЧ приборов со скрещенными полями, изд. Сов. радио, М., 1963.
11. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
12. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 6, 1250 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
2 июня 1966 г.

## A NUMERICAL METHOD FOR INVESTIGATION OF TRAVERSE-INTERACTION TUBE

R. A. Doudnik, M. I. Fouks

In a linear approximation the dispersion equations of the traverse-interaction tube of „O“-type are numerically analysed in the regime of a strong spatial charge and „M“-type tube. The wave increment is shown to achieve certain limit at the definite length of interaction space depending on the properties of usable anisotropic two-dimensional slow-down system. The amplification factor of a plane model of „M“-type TWT is calculated when a „skew“ comb is used as the slow-down system.

УДК 621.385.632

## К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЛБВО С БОЛЬШИМ УСИЛЕНИЕМ

A. E. Ягупов, B. A. Малышев

На основе электронно-волнового анализа процесса группирования электронов в ЛБВО получены приближенные нелинейные соотношения для выходной мощности, сдвига фазы и КПД, которые позволяют описать как режим насыщения, так и режим «глубокого насыщения», т. е. поведение амплитудных и фазовых характеристик за точкой насыщения.

Строгие и упрощенные нелинейные уравнения ЛБВО [1-6] анализируются обычно численно на ЭВМ, и результаты приводятся в виде графиков для различных значений параметров прибора, причем большинство графиков рассчитано только до точки насыщения. Приближенная теория [7] также дает решение только до точки насыщения, а введение дополнительных членов в [7] приводит к громоздким вычислениям. Поэтому представляет интерес создание приближенной теории ЛБВ, которая позволила бы в достаточно общем виде качественно оценить режим насыщения и «глубокого насыщения» при помощи несложных аналитических выражений. Это важно, например, при описании работы ЛБВ как ограничителя мощности.

Если не учитывать распределенных потерь, а также влияния локального поглотителя, то упомянутое приближение можно получить на основе электронно-волнового анализа следующим образом [8].

Исходные уравнения, описывающие поведение электронного потока в ЛБВ, имеют вид [9]

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} (E_1 + E_q), \quad \frac{\partial E_q}{\partial x} = 4\pi q, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $E_1 = AE_0 \exp [\gamma x + j(\omega t - \beta x)]$  — поле бегущей волны, которую будем считать нарастающей по экспоненте вдоль системы;  $E_q$  — поле пространственного заряда;  $q$  — плотность пространственного заряда;  $\gamma$  — постоянная распространения, найденная из линейной теории для нарастающей волны [10];  $\beta = \omega/v_\phi$  — фазовая постоянная волны в присутствии электронного потока;  $A$  — параметр начальных потерь;  $E_0$  — амплитуда поля на входе ЛБВ.

Вводя обозначения

$$\varphi = \omega(t - \tau), \quad \rho = 1 - \frac{v_0}{v_\phi}, \quad \theta = \frac{\omega\rho}{v_0}, \quad \varphi_0 = \frac{\omega x}{v_0}$$

и пользуясь методами, указанными в [8], из системы (1) можно получить дифференциальное уравнение для переменной составляющей скорости  $v$  в виде

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\varphi^2} + a^2\tilde{v} = v_0\mu\rho^2 \left( j + \frac{\gamma}{\theta} \right) \exp(j\omega\tau) \exp[\rho(j + \gamma/\theta)\varphi], \quad (2)$$

где

$$a^2 = \frac{4e\pi q_0/m}{\omega^2} = \frac{\omega_q^2}{\omega^2}, \quad \mu = \frac{E_0 A}{2U_0 \omega \rho / v_0},$$

$\omega_q$  — круговая плазменная частота,  $q_0$  — постоянная составляющая плотности пространственного заряда,  $\tau$  — время влета электронов в пространство взаимодействия,  $U_0$  — напряжение на замедляющей системе ЛБВ.

Заметим, что параметр  $a$  связан с обычным для ЛБВ параметром пространственного заряда ( $4QC$ ) соотношением  $a^2 = C^2(4QC)$  [10], в котором  $C$  — параметр усиления [10].

Используя граничные условия

$$\varphi_0 = 0, \tilde{v} = 0, \frac{d\tilde{v}}{d\varphi} = v_0 \mu \rho \exp(j\omega\tau) \exp[\rho(j + \gamma/\theta)\varphi], \quad (3)$$

можно записать общее решение уравнения (2):

$$\begin{aligned} \tilde{v} = -j \frac{v_0 \mu \rho}{a} \exp(j\omega\tau) \exp(ja\varphi) + j \frac{v_0 \mu \rho}{a} \exp(j\omega\tau) \exp(-ja\varphi) + \\ + \frac{v_0 \mu \rho^2 (j + \gamma/\theta) \exp(j\omega\tau)}{[\rho(j + \gamma/\theta)]^2 + a^2} \exp[\rho(j + \gamma/\theta)\varphi]. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что полная скорость

$$v = v_0 + \tilde{v}$$

и

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega dx}{d(\omega t)} = \frac{v_0 d(\omega \rho / v_0)}{d(\rho \omega t)} = v_0 \frac{d\Phi_0}{d\Phi},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0}{d\Phi} = 1 + \mu \exp(j\omega\tau) \left\{ j \frac{\rho}{a} \exp(-ja\Phi/\rho) - \right. \\ \left. - j \frac{\rho}{a} \exp(ja\Phi/\rho) + \frac{\rho^2 (j + \gamma/\theta) \exp[(j + \gamma/\theta)\Phi]}{\rho^2 (j + \gamma/\theta)^2 + a^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Phi_0 = \rho \varphi_0$ ,  $\Phi = \rho \varphi$ .

Интегрируя выражение (5) в пределах от 0 до  $\Phi_0$  и от 0 до  $\Phi$  и учитывая, что для большого усиления  $\exp(\gamma\Phi_0/\theta) \gg 1$ , пренебрежем членами, не содержащими  $\exp(\gamma\Phi_0/\theta)$ . Тогда для действительной части  $\Phi_0$  находим

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \Phi + \frac{\mu \rho^2 \exp(\gamma\Phi/\theta)}{[a^2 + \rho^2(\gamma^2/\theta^2 - 1)]^2 + 4\rho^4\gamma^2/\theta^2} \left\{ [a^2 + \rho^2(\gamma^2/\theta^2 - 1)] \times \right. \\ \left. \times \cos(\Phi + \omega\tau) + 2\rho^2 \frac{\gamma}{\theta} \sin(\Phi + \omega\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначая

$$X_1 = \frac{v_0 \mu \rho \exp(\gamma\rho\varphi_0/\theta)}{v_\Phi [(a^2 + \rho^2(\gamma^2/\theta^2 - 1))^2 + 4\rho^4\gamma^2/\theta^2]^{1/2}} = D E_0 \exp(\gamma x), \quad (6a)$$

$$D = \frac{Av_0^2}{2U_0\omega v_\Phi \{[a^2 + \rho^2(\gamma^2/\theta^2 - 1)]^2 + 4\rho^4\gamma^2/\theta^2\}^{1/2}},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a^2 + \rho^2(\gamma^2/\theta^2 - 1)}{2\rho^2\gamma/\theta}$$

и переходя к  $\varphi$  и  $\varphi_0$ , получим уравнение

$$\frac{v_0}{v_\Phi} \varphi = \frac{v_0}{v_\Phi} \varphi_0 - X_1 \sin\left(\omega t - \frac{v_0}{v_\Phi} \varphi + \psi\right). \quad (7)$$

Трансцендентное уравнение (7) имеет решение [1]

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{v_\Phi}{v_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(nX_1) \sin\left[n\left(\omega t - \frac{v_0}{v_\Phi} \varphi_0 + \psi\right)\right], \quad (8)$$

где  $J_n(rX_1)$  — функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка. Из закона сохранения заряда  $I_0 dt = idt$  можно найти выражение для тока:

$$i = I_0 \left\{ 1 + 2 \frac{v_\Phi}{v_0} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(nX_1) \cos[n(\omega t - \beta x + \psi)] \right\}. \quad (9)$$

Параметр  $X_1$ , входящий в (9), является аналогом параметра группировки в кластронах. Из (6а) следует, что, как и в последних, рост плотности тока и  $\omega_g$  приводит к уменьшению  $X_1$ , причем, в отличие от кластронов, в ЛБВ это уменьшение не носит осцилляторного характера.

Если рассматривать первую гармонику тока в (9), то для мощности взаимодействия электронов и поля на всей длине  $l$  системы можно записать [8]

$$P_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \int_0^l i E_1^* dx = \frac{v_\Phi I_0 \exp(j\psi)}{v_0 D \gamma} \int_{X_0}^X J_1(X_1) dX_1 =$$

$$= - \frac{v_\Phi I_0 \exp(j\psi)}{v_0 D \gamma} [J_0(X_0) - J_0(X)], \quad (10)$$

где  $X_0 = X|_{l=0} = E_0 D$ ,  $X = X_0 \exp(\gamma l)$ .

Активная составляющая мощности взаимодействия

$$P = \frac{4I_0 U_0 \rho v_\Phi^2}{v_0^2} F_1(X_0^2), \quad F_1(X_0^2) = J_0(X_0) - J_0(X). \quad (11)$$

Учитывая, что мощность на входе в замедляющую систему  $P_{\text{вх}}$  связана с напряженностью поля на входе соотношением  $P_{\text{вх}} = E_0^2 / 2\beta^2 z$ , где  $z$  — сопротивление связи, можно найти выражение, связывающее параметр  $X$  и  $P_{\text{вх}}$ :

$$X^2 = 2\beta^2 z D^2 \exp(2\gamma l) = k P_{\text{вх}}. \quad (12)$$

Коэффициент усиления ( $G$ ) и КПД ( $\eta$ ) определяются соотношениями

$$G = \frac{P}{P_{\text{вх}}} = -4U_0 I_0 \rho k \frac{v_\Phi^2}{v_0^2} F_2(X_0^2), \quad (13)$$

$$F_2(X_0^2) = \frac{J_0(X_0) - J_0(X)}{X^2};$$

$$\eta = \frac{P}{P_0} = -4\rho \frac{v_\phi^2}{v_0^2} F_1(X_0^2) \quad (\rho < 0 \text{ при } v_0 > v_\phi), \quad (14)$$

где  $P_0 = I_0 U_0$ ,  $I_0$  — ток пучка.

Нелинейные искажения фазы сигнала на выходе ЛБВ  $\Psi$  можно найти, используя выражения, приведенные в [10]. При этом, взяв первые три члена разложения функции  $J_0(X_1)$  в ряд, получим

$$\begin{aligned} \Psi = -0,29 \frac{\omega}{v_0 U_0} \int_0^l \frac{P(x)}{I_0} dx = & \frac{1,16 \omega \rho v_\phi^2}{v_0^3} \times \\ & \times \left\{ l [J_0(X_0) - 1] + \frac{X^2 - X_0^2}{8\gamma} - \frac{X^4 - X_0^4}{256\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для малых входных сигналов  $J_0(X_0) - 1 \approx 0$ ,  $X^2 \gg X_0^2$ ,  $X^4 \gg X_0^4$  и выражение (15) перепишется в виде

$$\Psi = 1,16 \frac{v_\phi^2}{v_0^2} \frac{\theta}{\gamma} F_3(X_0^2), \quad F_3(X_0^2) = \frac{X^2}{8} - \frac{X^4}{256}. \quad (16)$$

Максимум функции  $\Psi$  находится из условия  $\partial\Psi/\partial P_{\text{вх}} = 0$  и равен

$$\Psi_{\max} = 1,16 \frac{v_\phi^2}{v_0^2} \frac{\theta}{\gamma}.$$

Представляет интерес также рассмотрение поведения коэффициента преобразования амплитудной модуляции в фазовую  $K$ :

$$K = \frac{\partial \Psi}{\partial P_{\text{вх}}} = 0,145 \frac{v_\phi^2}{v_0^2} \frac{\theta}{\gamma} k F_4(X_0^2), \quad F_4(X_0^2) = 1 - \frac{X^2}{16}. \quad (17)$$

Зависимости величин  $P$ ,  $G$ ,  $\eta$ ,  $\Psi$ ,  $K$  от входной мощности определяются видом функций  $F_1(X_0^2)$ ,  $F_2(X_0^2)$ ,  $F_3(X_0^2)$ ,  $F_4(X_0^2)$ , которые для различных  $\exp(\gamma l)$  представлены на рис. 1, 2, где специально взяты небольшие значения  $\exp(\gamma l)$  (при которых теория, вообще говоря, будет давать погрешности) с тем, чтобы подчеркнуть влияние входной мощности на ход характеристик.

Для оценки точности рассматриваемой теории были рассчитаны зависимости безразмерной выходной мощности от входной при тех же условиях, что и в работе [1]. Для случая малого пространственного заряда ( $QC \ll 0,1$ ) и  $b = 0$  (где  $b$  — параметр скорости [10]) можно считать, что постоянная распространения  $\gamma \approx \sqrt{3} \omega C / 2v_0$  [10], а параметр  $\rho \approx -C/2$  [8], и тогда из (11) можно получить выражение для безразмерной выходной мощности  $p$  [1]:

$$p = \frac{P}{CI_0 U_0} \approx 2 \left( 1 + \frac{C}{2} \right)^{-2} F_1(X_0^2)$$

или

$$(p \partial \sigma) = 10 \lg p \approx 10 \lg F_1(X_0^2) + 2,7 \quad (C \ll 0,1). \quad (18)$$

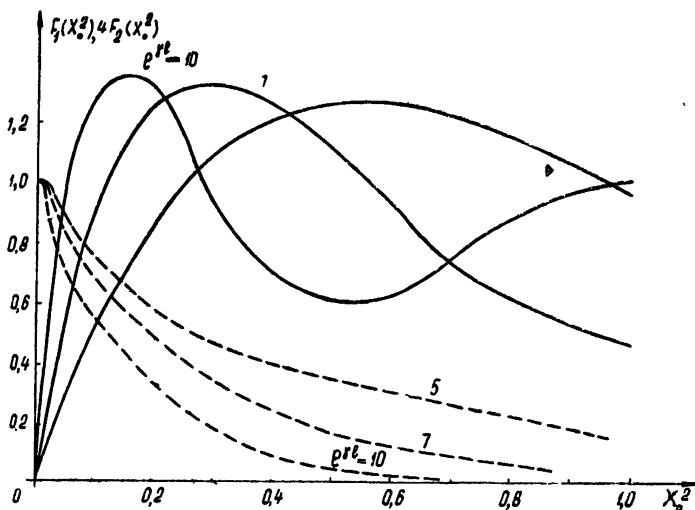


Рис. 1. Зависимость функций  $F_1(X_0^2)$  (сплошная линия) и  $F_2(X_0^2)$  (пунктирная линия) от параметра  $X_0^2$  при различных значениях  $\exp(\gamma l)$ .

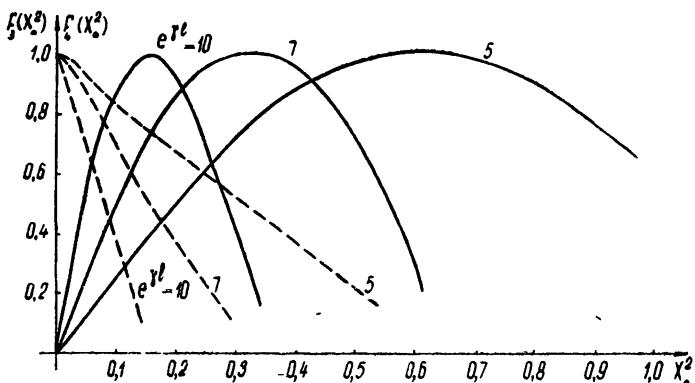


Рис. 2. Зависимость функций  $F_3(X_0^2)$  (сплошная линия) и  $F_4(X_0^2)$  (пунктирная линия) от параметра  $X_0^2$  при различных значениях  $\exp(\gamma l)$ .

Безразмерная входная мощность  $p_0$  связана с параметром  $X_0^2$  следующим соотношением:

$$p_0 = \frac{P_{\text{вх}}}{CI_0 U_0} = \frac{X_0^2 \exp(2\gamma l)}{kCI_0 U_0} \simeq \frac{1}{2} \frac{X_0^2}{A^2(1+C/2)^4}$$

или

$$p_0(\partial\delta) = 10 \lg p_0 \simeq 20 \lg X_0 + 5,7 \quad (19)$$

(последнее справедливо для  $C < 0,1$ ,  $A = 1/3$  [8]). Величина  $\gamma l$  при учете вышеуказанных допущений связана с безразмерной длиной  $\zeta l_1$  (где  $\zeta_1 = C\omega l/v_0$  [1]):

$$\gamma l \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1. \quad (20)$$

На основе выражений (18)–(20) были рассчитаны пунктирные кривые, приведенные на рис. 3. Сплошные кривые на этом рисунке повторяют рис. 22 работы [1]. Сравнение кривых показывает удовлетворительное качественное и количественное совпадение их до точки насыщения. За точкой насыщения эти кривые несколько расходятся. Хотя значения  $\rho_0$  для минимумов кривых несколько отличны, величины минимумов примерно одинаковы. Видно также, что в обсих случаях кривые имеют осциллирующий характер.

Из рис. 1 следует, что максимум мощности и КПД определяются

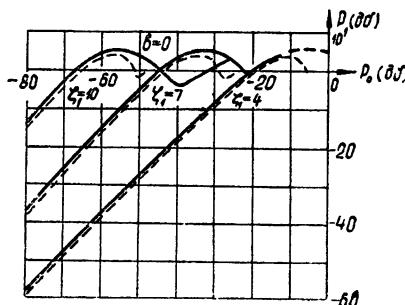


Рис. 3. Зависимость выходной мощности от входной при  $b=0$ .

максимумом функции  $F_1(X_0^2)$ , который для больших  $\exp(\gamma l)$  ( $\exp(\gamma l) \gg 10$ ) равен 1,4. С учетом указанных выше ограничений  $QC \leq 0,1$ , и при  $b \approx 0$  из формулы (14) можно, в частности, найти выражение для максимального КПД:

$$\eta_{\max} \approx 2,8C \frac{v_\phi^2}{v_0^2} = 2,8 \frac{C}{(1+C/2)^2}. \quad (21)$$

На рис. 4 точками показаны взятые из [12] данные эксперименталь-

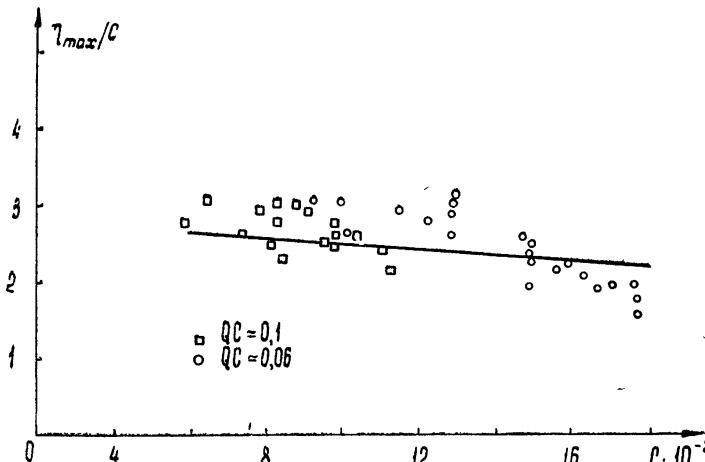


Рис. 4. Зависимость максимального КПД  $\eta_{\max}/C$  от параметра усиления  $C$ :  $\square$ ,  $\circ$  — экспериментальные точки, взятые из [12], — — кривая, рассчитанная по формуле (21).

ного определения  $\eta_{\max}$  в функции от  $C$ , а линией изображены результаты расчетов по формуле (21). Из рис. 4 следует, что соотношение (21) дает величины, хорошо совпадающие с опытными.

Приведенные сравнения с точной теорией (рис. 3) и с экспериментальными данными (рис. 4), по-видимому, позволяют считать, что рассматриваемая теория пригодна для приближенных оценок явлений, имеющих место в режиме насыщения ЛБВ с большим усилением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 2, № 7, 883; № 8, 1027 (1957).
2. Лампа с бегущей волной, под редакцией В. Т. Овчарова, Госэнергоиздат, М., 1959.
3. В. Т. Овчаров, В. А. Солнцев, Радиотехника и электроника, 7, № 11, 1931 (1962).
4. В. И. Гайдук, Е. П. Нестерова, А. М. Остапенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 4, № 3, 254 (1961).
5. М. Б. Цейтлин, А. М. Кац, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1964.
6. Г. Н. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 1, 191 (1962).
7. Б. Г. Цикин, Вопросы электроники СВЧ, вып. 1, 3 (1964).
8. В. Н. Шевчик, Основы электроники СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1959.
9. В. Н. Шевчик, Взаимодействие электронных пучков с электромагнитными волнами, изд. СГУ, 1963.
10. В. Клеен, К. Пешль, Введение в электронику СВЧ, ч. 2, изд. Сов. радио, М., 1963.
11. Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, М., 1949.
12. С. С. Cutler, Bell Sist. Techn. J., 35, № 4, 841 (1955).

Поступила в редакцию  
4 июля 1966 г.

#### THE NONLINEAR THEORY OF „O“ TYPE TWT WITH HIGH AMPLIFICATION

*A. E. Yagupov, V. A. Malyshev*

On the basis of the electron-wave analysis of electron bunching in „O“ type TWT, the approximate nonlinear relations have been derived for the output power, phase shift and efficiency which permit to describe both the saturation regime and that of „deep saturation“, i. e. the behaviour of amplitude and phase characteristics behind the saturation point.

УДК 539.188

## ПОВЕРХНОСТНАЯ ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ ТАЛЛИЯ И НАТРИЯ НА РЕНИИ

*A. M. Амадзиев, B. F. Белянина, L. L. Мясников*

Приводятся данные экспериментальной методики и результаты исследования поверхностной ионизации атомных пучков таллия и натрия на рении. Исследован температурный гистерезис в системе рений—натрий, рений—таллий. Произведена оценка коэффициентов ионизации атомов таллия и натрия на рении при различных температурах. Полученные результаты находятся в соответствии с существующей теорией поверхностной ионизации атомов на накаленных металлах и указывают на преимущества использования рения для поверхностной ионизации таллия.

Возможности применения окисленного вольфрама при детектировании атомных пучков таллия методом поверхностной ионизации существенно ограничены из-за сильно выраженной зависимости работы выхода ионизатора от температуры ионизатора и технологии окисления [1, 2].

В связи с этим были произведены поиски материала, обладающего достаточно высоким значением работы выхода и постоянными термоэмиссионными свойствами; таким материалом, по имеющимся данным, является рений.

Исследование поверхностной ионизации атомов таллия и натрия на рении производилось с помощью разработанной нами ранее [2] экспериментальной установки для изучения атомных пучков (рис. 1).

Для получения атомных пучков таллия был использован источник с камерой из нержавеющей стали, который имел внешний нагреватель и тепловой экран, охлаждаемый проточной водой. Источник атомного пучка, температура которого достигала 1000°К, был удален на расстояние 70 см от регистрирующего устройства. Эмиттер изготавлялся из рениевых ленточек размерами  $20 \times 1 \times 0,5$  мм. Изготовленные рениевые ленточки подвергались тепловой обработке в режиме, указанном в [2].

Нагрев ленточки осуществлялся стабилизированным напряжением постоянного тока. Температура ленточки определялась микропирометром с учетом отклонения от условий черного излучения. Электронные и ионные токи в цепи коллектора измерялись электрометром У1—2 с чувствительностью  $1 \cdot 10^{-13}$  а, погрешность измерений составляла 5%. В течение эксперимента с помощью двух насосов Н-5 и ЦВЛ-100 в системе поддерживалось давление порядка  $5 \cdot 10^{-7}$  мм рт. ст.

При конструировании детектора атомного пучка необходимо было иметь в виду, что при больших плотностях тока и ускоряющих потенциалах возможны значительные напыления материала коллектора на

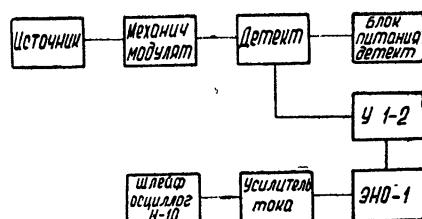


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки для детектирования атомных пучков.

ионизатор, и поэтому следует изготавливать их из одного и того же материала.

Типичный вид зависимости ионного тока поверхностной ионизации атомов натрия и таллия от температуры поверхности приведен на рис. 2. Кривые получены при одних и тех же интенсивностях атомных пучков, регулируемых термостатом. Ионный ток поверхностной ионизации атомов натрия либо не зависит от температуры, либо незначительно уменьшается с ее ростом, начиная от  $T = 1100-1200^{\circ}\text{K}$ . Полученный ход кривой согласуется с теорией поверхностной ионизации атомов, потенциал ионизации которых меньше работы выхода эмиттера [3]. Отличительной особенностью кривой зависимости ионного тока для атомов таллия и натрия является наблюдаемый максимум в широком интервале температур  $1300-1600^{\circ}\text{K}$ . Этот аномальный максимум ионного тока, вероятно, обусловлен наличием следов кислорода на поверхности рения при  $p = 5 \cdot 10^{-7} \text{ мм рт. ст.}$  Наблюдается также смещение пороговых температур в сторону увеличения.

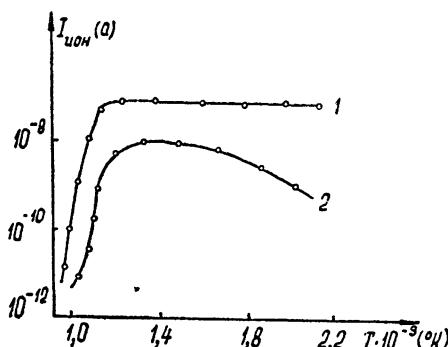


Рис. 2. Зависимость ионного тока от температуры рений-го ионизатора:

1—для атомов натрия, 2—для атомов таллия.

При определенных условиях температурная зависимость тока положительных ионов в пороговой области имеет гистерезис [4]. Нами был обнаружен температурный гистерезис атомов натрия и таллия на текстурированных ленточках рения (рис. 3, 4). Гистерезис обусловлен нелинейностью, вызванной зависимостью ионного тока от степени покрытия ионизатора, и существует при условии

$$\varphi - V > 0, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — работа выхода однородного эмиттера,  $V$  — потенциал ионизации атомов ионизируемого элемента.

Наблюдения показали, что работа выхода поверхности ренийевых ленточек в пороговом интервале температур ( $700-1000^{\circ}\text{K}$ ) больше, чем величина первого потенциала ионизации натрия и таллия. Необходимо отметить, что температурный порог ионизации у атомов натрия ниже температурного порога ионизации атомов таллия ( $200^{\circ}\text{K}$ ) и ширина температурного гистерезиса для атомов таллия меньше ширины температурного гистерезиса атомов натрия при одних и тех же интенсивностях атомного пучка ( $10^{10}-10^{12} \text{ атом} \cdot \text{сек}^{-1}$ ). Это, по-видимому, связано с различной энергией адсорбции атомов таллия и натрия на рении.

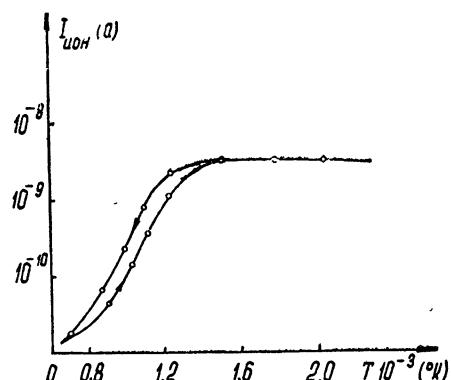


Рис. 3. Температурный гистерезис тока поверхностной ионизации атомов натрия на рении.

Были определены абсолютные коэффициенты ионизации атомного пучка таллия и натрия на поверхности рения (табл. 1). Давление паров таллия и натрия определялось по данным, приведенным Дэшманом [5].

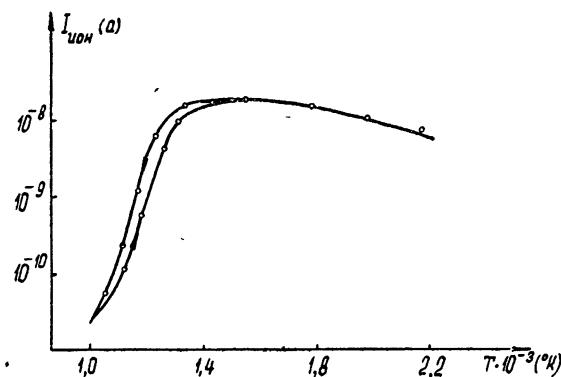


Рис. 4. Температурный гистерезис тока поверхностной ионизации атомов таллия на рении.

Таблица 1

Температура ионизатора в $^{\circ}\text{К}$	Коэффициент ионизации (%)	
	Na	Te
1100	~100	2,5
1200	98	27
1300	97	30
1400	96	30
1500	93	29
1600	90	28

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bonapomi, IRE Trans. Instr., I-II, 212 (1962).
2. А. М. Амадзиеv, В. Ф. Белянина, Л. Л. Мясников, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 9, № 1, 72 (1966).
3. Э. Я Зандберг, Н. И. Ионов, УФН, 67, 581 (1959).
4. Э. Ф. Чайковский, Т. М. Пятигорский, П. В. Птицын, ЖТФ, 35, 1132 (1965).
5. С. Д. Дэшман, Научные основы вакуумной техники, 585, ИЛ, М., 1964.

Поступила в редакцию  
8 августа 1966 г.

#### SURFACE IONIZATION OF THALLIUM AND SODIUM ATOMS ON RHENIUM

A. M. Amadziev, V. F. Belyanina, L. L. Myasnikov

The data on the experimental procedure and the investigation results of the surface ionization of thallium and sodium atom beams on rhenium are given. The temperature hysteresis is investigated in rhenium-sodium and rhenium-thallium systems. The ionization coefficients of thallium and sodium atoms on rhenium are estimated for different temperatures. The results obtained are in a good agreement with the present theory of atom surface ionization on incandescent metals and show the advantages of using rhenium for the thallium surface ionization.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621. 378.5

**О ВЛИЯНИИ СТАТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ  
НА ГЕНЕРАЦИЮ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ**

B. M. Молдавская

При распространении в нелинейном диэлектрике с квадратичной поляризуемостью интенсивной световой волны, наряду с другими нелинейными эффектами, возникает статическая поляризация диэлектрика. Связь между компонентами вектора статической поляризации  $P_0$  и напряженностью приложенного поля частоты  $\omega$  ( $A$ ) имеет вид

$$P_m^0 = \sum_{m'n} \chi_{mnm'}^0 A_n^\omega A_{m'}^\omega. \quad (1)$$

Согласно соотношению

$$\chi_{mnm'}^0 = \chi_{nmm'}^0, \quad (2)$$

наиболее целесообразно использовать для наблюдения эффекта статической поляризации кристаллы, обладающие значительным электрооптическим эффектом, а именно: нелинейные кристаллы КДП, АДП и кристаллы кубической системы ZnS, CuCl и др.

Был проведен анализ, позволяющий найти оптимальные условия наблюдения статической поляризации в этих кристаллах. На рис. 1 дано расположение вектора  $e$ , характеризующего поляризацию падающей на кристалл волны, относительно системы координат, оси которой совпадают с осями симметрии кристалла. Введены следующие обозначения:  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и осью  $z$ ,  $\varphi$  — угол между проекцией направления распространения на плоскость  $xy$  и осью  $x$ ,  $\alpha$  — угол между вектором  $e$  и плоскостью, проходящей через ось  $z$  и направление распространения луча.

Проведенный анализ показал, что статическая поляризация в направлении оси  $z$  (в направлении осей  $x$  и  $y$  результаты аналогичны) будет максимальна для следующих случаев ориентации оптического луча относительно кристалла:

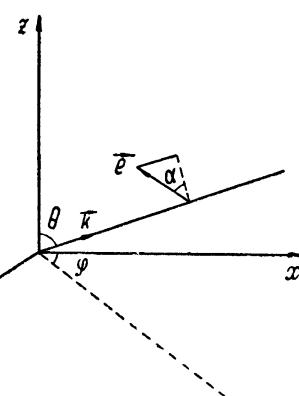


Рис. 1.

$$1. \alpha = 0, \theta = 0, \varphi = \pi/4;$$

$$2. \alpha = \pi/4, \theta = 0, \varphi = 0; \quad (3)$$

$$3. \alpha = \pi/2, \quad \varphi = \pi/4.$$

Для случая  $\alpha = \pi/2, \varphi = \pi/4$  статическая поляризация будет максимальна и одинакова для всех направлений распространения луча, образующих круг, плоскость которого перпендикулярна плоскости  $xy$  и составляет угол  $45^\circ$  с осями  $x$  и  $y$ . В частности, в работе [2] наблюдалась максимальная статическая поляризация для случая

$$\alpha = \pi/2, \varphi = \pi/4, \theta = \pi/2.$$

Кроме того, оказалось, что статическая поляризация максимальна для плоско-поляризованной волны, для волны с круговой поляризацией она обращается в 0.

Статическая поляризация  $P_0$  создает в диэлектрике постоянное поле  $E_0$

$$\operatorname{div} D_0 = -4\pi \operatorname{div} P_0, \quad (4)$$

которое может оказывать влияние на протекание других нелинейных процессов в среде. В настоящей работе сделана попытка оценить величину этого влияния на один из нелинейных процессов, а именно: генерацию второй гармоники. Согласно формуле (1), статическая поляризация среды, вызванная распространяющимися в ней волнами основной частоты и второй гармоники, равна

$$\mathbf{P}_0 = (\overset{\wedge}{\chi^0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) A_1^2 + (\overset{\wedge}{\chi^0} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) A_2^2. \quad (5)$$

В среде без потерь справедливо [1]

$$\frac{C_3}{2} \overset{\wedge}{A}_1^2(z_1) + C_1 A_2^2(z_1) = M_0, \quad M_0 = \text{const}, \quad (6)$$

где

$$C_1 = \frac{2\pi}{c^2} \omega^2 \frac{(\overset{\wedge}{e}_1 \overset{\wedge}{\chi}^{2\omega} \overset{\wedge}{e}_2 \mathbf{e}_1)}{k_1 \cos(k_1 s_1) \cos(s_1 z_0)},$$

$$C_3 = \frac{2\pi}{c^2} (2\omega)^2 \frac{(\overset{\wedge}{e}_2 \overset{\wedge}{\chi}^{2\omega} \overset{\wedge}{e}_1 \mathbf{e}_1)}{k_2 \cos(k_2 s_2) \cos(s_2 z_0)}.$$

Для начальных условий

$$A_1|_{z=0} = A_{10}, \quad A_2|_{z=0} = 0, \quad M_0 = \frac{C_3}{2} A_{10}^2. \quad (7)$$

Для случая полной необратимой перекачки мощности волны основной частоты во вторую гармонику  $A_1$  определяется следующей формулой [1]:

$$A_1(z) = A_{10} \operatorname{sch} \sqrt{\frac{1}{2} C_1 C_3} A_{10} z.$$

В этом случае для достаточно больших  $z$ , когда  $A_1$  уже можно пренебречь по сравнению с  $A_2$ , используя формулы (5), (6), (7), получаем

$$\mathbf{P}_0 = (\overset{\wedge}{\chi^0} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) A_{10}^2 \frac{C_3}{2 C_1}. \quad (8)$$

Подставляя формулу (8) в соотношение (4), оценим величину постоянного поля  $\mathbf{E}_0$ , возникающего в нелинейной среде за счет статической поляризации. Это поле изменяет показатель преломления для волны основной частоты и второй гармоники, что вызывает появление расстройки  $\Delta \neq 0$  и, следовательно, угла  $\delta\theta$  между направлением распространения оптического луча и направлением синхронизма. Дадим численную оценку возникающего рассогласования в зависимости от напряженности поля падающей волны для следующего конкретного примера. Нелинейный кристалл КДП вырезан вдоль направления синхронизма.

Луч основного излучения и второй гармоники распространяется в плоскости, составляющей  $45^\circ$  с кристаллографическими осями. Волна основной частоты возбуждается в кристалле плоскую обыкновенную волну, которая может когерентно взаимодействовать с плоской необыкновенной волной второй гармоники. Интересующее нас изменение показателя преломления для обыкновенной и необыкновенной волн, вызванное полем  $\mathbf{E}_0$ , можно найти по формулам [3]

$$\Delta n_{10} = -\frac{1}{2} n_1^3 r_{63} E_{0z},$$

$$\Delta n_{2e} = \frac{1}{2} (n_2^{-2} \cos^2 \theta + n_2^{-2} \sin^2 \theta)^{-3/2} r_{63} E_{0z} \cos^2 \theta.$$

Используя связь расстройки  $\Delta$  с углом  $\delta\theta$ , найдем для рассматриваемого примера численное значение  $\delta\theta$ :

$$\delta\theta = 0,35 \cdot 10^{-17} A_{10}^2$$

Таблица 1

## Зависимость направления синхронизма от амплитуды падающей волны

$A_{10}$ ( $\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$ )	$10^5$	$10^6$	$3 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$10^7$
$\delta\theta$	0	$1''$	$6''$	$20''$	$1,5'$

Приведенная зависимость справедлива для случая полной необратимой перекачки мощности волны основной частоты во вторую гармонику и для достаточно больших  $z$ . Для других случаев поставленная задача была решена в приближении заданного поля основного излучения, т. е. для краевых условий вида

$$A_1|_{z=0} = A_{10}, \quad A_2|_{z=0} \ll A_1|_{z=0}$$

и для достаточно малых  $z$ , когда во всей нелинейной среде можно учитывать только тот нелинейный процесс, который играет определяющую роль на ее границе. Была получена следующая зависимость расстройки  $\Delta$  от амплитуды падающей волны.

$$\Delta = -C_2 + C_4/2,$$

где

$$C_2 = \frac{2\pi}{c^2} \omega^2 \frac{(e_1 \hat{\chi}^{0+\omega} E_0 e_1)}{k_1 \cos(k_1 s_1) \cos(s_1 z_0)},$$

$$C_4 = \frac{2\pi}{c^2} (2\omega)^2 \frac{(e_2 \hat{\chi}^{0+2\omega} E_0 e_2)}{k_2 \cos(k_2 s_2) \cos(s_2 z_0)}.$$

Результаты оценки численного значения угла  $\delta\theta$  для разобранного выше примера по приведенным формулам обнаруживают хорошее согласие с результатами таблицы 1.

Итак, при удвоении частоты в сильных световых полях (при плотностях светового потока, больших  $10^4 \text{ Mвт} \cdot \text{см}^{-2}$ ) становится существенным влияние статической поляризации, которая вызывает изменение угла синхронизма, что приводит к ухудшению условий генерации второй гармоники (уменьшается мощность второй гармоники, могут появиться пространственные биения амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ ). Представляется возможным считать этот эффект одной из причин насыщения удвоителя при высоком уровне мощности основного излучения ( $P_1 = 1 \text{ Mвт}$ ) [1, 4]. Приведенное в оценках (табл. 1) изменение угла синхронизма для кристалла КДП, возможно, не может быть обнаружено экспериментально из-за разрушения кристаллов при плотностях светового потока, для которых рассматриваемый эффект значителен. Однако при использовании кристаллов с большей нелинейностью, чем КДП (например, ниобата лития), тот же самый эффект может быть получен при плотностях мощности, примерно в 100 раз меньших. Полученные в настоящей работе результаты показывают, что можно увеличить эффективность умножителя частоты оптического диапазона при больших интенсивностях падающей волны, выбирая направление синхронизма с учетом влияния статической поляризации.

В заключение мне хотелось бы выразить искреннюю благодарность П. Н. Занадворову за предложенную тему и постоянную помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, Институт научной информации, М., 1964.
- M. Bass, P. Franken, T. Wager, G. Weingrech. Phys Rev. Lett., **9**, 446 (1962).
- С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, Н. К. Кулакова, ЖЭТФ, **48**, 1545 (1965).
- R. Terhune, R. Maker, C. Savage, Appl. Phys. Lett., **2**, 54 (1963).

УДК 621.378.32

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУЖЕНИЯ СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ ОКГ НА РУБИНЕ

В. В. Анциферов, Г. В. Кривошеков, К. Г. Фолин

Относительно широкая спектральная линия индуцированного излучения обусловлена многомодовым режимом работы ОКГ. Согласно [1], многомодовость твердотельных ОКГ связана с пространственной неоднородностью инверсной населенности, создаваемой полем стоячих волн аксиальных мод резонатора (в предположении однородной накачки). Диффузия инверсной населенности, устраняющая эту неоднородность, при комнатной температуре несущественна [2].

В [3, 4] теоретически и в [5, 6] и [7] экспериментально было доказано, что при движении активных центров относительно стоячих волн вдоль оси резонатора происходит сужение спектральной линии излучения ОКГ. Перемещение кристалла при этом осуществлялось механически.

Нами наблюдался эффект сужения спектральной линии излучения ОКГ на рубине при перемещении картины поля стоячих волн относительно активных центров рубина с помощью электрооптического эффекта.

Устройство использованного в эксперименте ОКГ изображено схематически на рис. 1. Между каждым из торцов рубина (Р) и соответствующим зеркалом ( $M_1$  и  $M_2$ ) помещалась пластинка из кристалла КДР, обладающего электрооптическим эффектом. Использовался срез (110). Пластинки внутри резонатора ориентировались таким образом, чтобы луч распространялся вдоль оси  $X'$ , а вектор  $E$  света был направлен по оси  $Y'$ . Здесь  $X'$  и  $Y'$  — возбужденные оси кристалла. При приложении поля вдоль оси  $Z$  оси  $X'$  и  $Y'$  составляют с кристаллографическими осями угол  $45^\circ$ . При этом центральное сечение оптической индикаторы, перпендикулярное лучу, изменяется, как показано на рис. 2 для двух противоположных полярностей приложенного электрического поля.

Таким образом, если от генератора ( $\Gamma$ ) синусоидальное напряжение приложено к конденсаторам  $K_1$  и  $K_2$ , между обкладками которых находятся кристаллические пластины, в противофазе, то при неизменной оптической длине резонатора картина поля стоячей волны в пространстве между кристаллическими пластинами будет перемещаться на величину

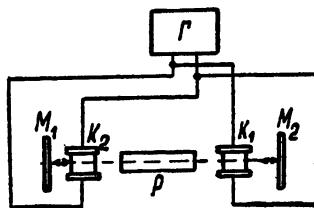


Рис. 1.

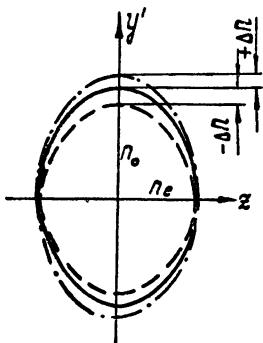


Рис. 2.

$$\Delta L = L \Delta n, \quad (1)$$

где  $L$  — длина кристаллической пластинки, а  $\Delta n$  — амплитуда изменения показателя преломления при наложении поля. Действие электрического поля за половину периода ( $T$ ) колебаний генератора эквивалентно перемещению активного стержня на расстояние, равное  $2L\Delta n$ , со средней скоростью, равной

$$V_{cp} = 4L \Delta n / T. \quad (2)$$

Из теории электрооптического эффекта известно, что

$$\Delta n = \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E, \quad (3)$$

где  $n_0$  — показатель преломления обыкновенного луча,  $r_{63}$  — электрооптический коэффициент,  $E$  — напряженность электрического поля. Из (2) и (3) можем записать

$$V_{cp} = 2L n_0^3 r_{63} U / dT. \quad (4)$$

Здесь  $U$  — амплитуда напряжения генератора ( $\Gamma$ ) и  $d$  — толщина пластинки.

В нашем эксперименте использовались пластины из кристалла КДР с  $L = 2,6 \text{ см}$ ,  $d = 0,9 \text{ см}$ ,  $r_{63} = 7 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{в}^{-1}$ ,  $n_0 = 1,5$ . Генератор ( $\Gamma$ ) вырабатывал синусоидальное напряжение частоты 3  $M\text{гц}$  с амплитудой 3,0  $\text{кв}$ . При указанных значениях соотношение (4) дает величину  $V_{cp} \approx 200 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ .

На рис. 3, б приведены интерферограммы излучения ОКГ при  $U = 0$  и  $U = 3 \text{ кв}$  соответственно. Использовался эталон Фабри—Перо с зазором в 6  $\text{мм}$  и объектив с фокусным расстоянием 300  $\text{мм}$ . В резонаторе ОКГ помещалась диафрагма диаметром 2  $\text{мм}$ . Из сравнения интерферограмм видно, что приложение переменного поля к кри-

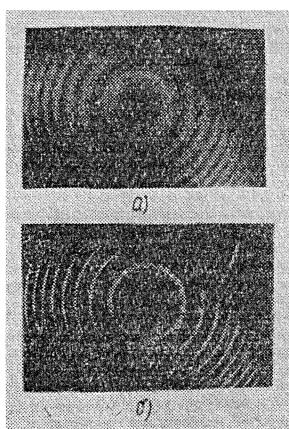


Рис. 3.

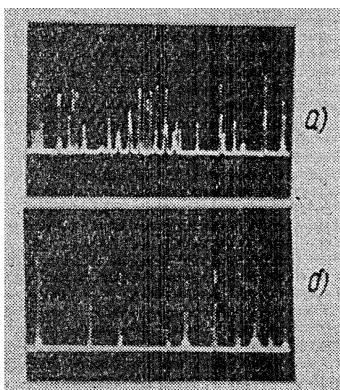


Рис. 4.

сталлам приводит к сужению линии генерации. На интерферограммах, полученных без использования диафрагмы внутри резонатора, сужение линии менее заметно, что, по-видимому, объясняется меньшей эффективностью действия исследуемого механизма в неаксиальных модах. Приведенные на рис. 4а ( $U = 0$ ) и 4б ( $U = 3 \text{ кв}$ ) осциллограммы выходного излучения ОКГ показывают, что в этом случае сужение линии генерации сопровождается заметным упорядочением амплитуды и частоты следования пичков.

Следует отметить, что применение кристаллов с большей величиной коэффициента  $r_{63}$  (например,  $\text{LiNbO}_3$ ), а также более выгодной формы управляющего напряжения, например, пилообразной, когда скорость его изменения постоянна в течение всего времени генерации, может привести к более существенным результатам.

Авторы выражают благодарность В. Д. Угожаеву за помощь в проведении эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tang, H. Statz, G. de Mars, J. Appl. Phys., 34, 2289 (1963).
2. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, ДАН СССР, 162, 314 (1965).
3. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, ДАН СССР, 163, 870 (1965).
4. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, ЖЭТФ, 49, 1843 (1965).
5. J. Free, A. Kogreel, Proc. IEEE, 52, 96 (1964).
6. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, Письма ЖЭТФ, 1, 23 (1965).
7. Б. Л. Лившиц, В. П. Назаров, Л. К. Сидоренко, А. Т. Турсунов, В. Н. Цикунов, Письма ЖЭТФ, 3, 297 (1966).

Институт физики полупроводников  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
21 октября 1966 г.

УДК 621.378.325

#### К ВОПРОСУ О ПРЯМОМ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТОТЫ ЛАЗЕРА

*M. E. Герценштейн*

Задача прямого измерения частоты газового лазера представляет большой интерес как для физики, так и для техники. Высокая когерентность излучения, в принципе, позволяет вести измерения частоты с точностью порядка  $10^{-14}$ . Непосредственное измерение частоты позволило бы уточнить значение скорости света — одной из основных констант физики, и проверить с высокой точностью факт отсутствия дисперсии в вакууме.

кууме — экспериментальный факт, лежащий в основе современной физики. Для техники и метрологии заманчивым был бы переход к единым эталонам длины и времени.

Для непосредственного измерения частоты лазера  $\nu$  необходимо получить нулевые биения с гармоникой генератора микроволнового диапазона частот, частота которого  $\omega$  задается эталоном времени.

$$\nu - m\omega \approx 0, \quad m \sim 10^3 \div 10^4, \quad (1)$$

где  $m$  — целое число. Ввиду большого значения  $m$  создание каскада умножителей (делителей) частоты, обеспечивающего необходимую для получения биений мощность, является очень сложной технической задачей, для решения которой надо иметь новые нелинейные и активные среды.

Поэтому представляет интерес другая схема получения нулевых биений, использующая широкий спектр фазовой (частотной) модуляции при больших индексах.

Пусть фаза оптического колебания с помощью электрооптического кристалла модулирована по закону

$$\varphi = \Delta \sin \omega t. \quad (2)$$

Величина девиации фазы  $\Delta$  зависит от длины кристалла  $l$  и приложенного поля  $E$  [1]:

$$\Delta = \frac{1}{2} r E n l. \quad (3)$$

Здесь  $n$  — показатель преломления,  $r$  — электрооптическая постоянная кристалла,  $l$  — путь света в кристалле. Из известного соотношения теории Бесселевых функций

$$\exp(i\nu t) \exp(i\Delta \sin(\omega t)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\Delta) \exp(iv_s t), \quad (4)$$

$$v_s = \nu - s\omega$$

видно, что спектр состоит из линий частоты  $v_s$ , одна из которых может быть использована для получения нулевых биений с гармоникой номера  $q$  генератора СВЧ. При этом отношение частот  $m$  в (1) равно

$$m = s + q. \quad (5)$$

Из-за отсутствия эффективных умножителей  $q$  сравнительно невелико Мощность спектральной линии, дающей нулевые биения, равна

$$P_s = P_0 J_s^2(\Delta), \quad \eta_s(\Delta) = P_s/P_0 = J_s^2(\Delta), \quad (6)$$

где  $P_0$  — мощность первичного пучка света. Величина  $\eta_s(\Delta)$ , выражаемая обычно в децибеллах, определяет потери преобразования. Считая  $s$  заданным, найдем максимум  $\eta_s$  как функции  $\Delta$ . Для больших значений  $s$  справедлива приближенная формула [2]

$$J_s(s\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2}{s} \right)^{1/3} \Phi \left[ \left( \frac{s}{2} \right)^{2/3} (1 - \varepsilon^2) \right] \quad (7)$$

$$(s \gg 1, \quad \varepsilon = \Delta/s, \quad |1 - \varepsilon| \ll 1),$$

где  $\Phi$  — функция Эйри [3, 4]. При отрицательных значениях аргумента функция Эйри осциллирует, наибольший максимум равен [3]

$$\Phi(-1,02) = 0,95. \quad (8)$$

Используя (7) и (8), получаем, что для идеального фазового модулятора максимальное отношение мощностей равно

$$\eta_s|_{\max} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{s} \right)^{2/3} 0,95^2 = 0,45 s^{-2/3}, \quad (9)$$

$$\eta(\partial\delta) = -3,5 - 6,6 \lg s.$$

Максимум достигается при следующих соотношениях между девиацией и номером гармоники:

$$\left( \frac{s}{2} \right)^{2/3} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta}{s} \right)^2 \right] = -1,02, \quad \Delta_{\text{opt}} - s = 0,8 s^{1/3}. \quad (10)$$

Потери в идеальном модуляторе оказываются очень малыми (например,  $\eta(10^3) = -23,5 \text{ дБ}$ , что значительно меньше, чем в многокаскадной цепочке умножителей или делителей) и очень медленно растут с ростом  $s$ .

Используя свойства функции Эйри, легко показать, что при уменьшении  $\Delta$  ниже оптимального значения и заданном  $s$  мощность падает экспоненциально, при увеличении  $\Delta$  выше оптимального значения падает сравнительно медленно. Из условия  $\Delta \sim s$  получаем для девиации оптического пути  $\delta l$ :

$$\Delta = \frac{\gamma}{c} (\delta l), \quad \delta l = \frac{sc}{\gamma} = \frac{s\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta}{2\pi} (1 - q/m), \quad (11)$$

где  $\lambda$  — длина волны света,  $\Delta$  — длина волны генератора СВЧ. Отметим, что для рассмотренной схемы необходима высокая мощность только у генератора СВЧ, питающего фазовый модулятор.

Формула (3) справедлива для квазистатического случая, когда спектр модулируемого сигнала узок. Нас интересует случай, когда ширина спектра — порядка несущей  $\gamma$ . Нелинейный кристалл является распределенным аналогом нелинейной реактивности, которая принципиально не может быть генератором постоянного тока, поэтому, в силу соображений непрерывности, следует ожидать «подчеркивания» высокочастотной части спектра модулированного по фазе сигнала и уменьшения низкочастотной.

Остановимся также на технических трудностях создания модулятора. При современных кристаллах для получения больших девиаций фазы необходимы большие  $l$  и, следовательно, синхронизм света и модулирующего сигнала [5]. В нашем случае сигнал модулирующей частоты практически монохроматичен, поэтому величину  $l$  ограничивает не дисперсия модулирующего сигнала, а дисперсия света. Количественные соотношения, а также методы преодоления трудностей, обусловленных дисперсией света, будут приведены в отдельной работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Џ. Peters, Proc. IEEE, 51, № 1, 185 (1963).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960, стр. 223.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Дополнение в, ГИТТЛ, М., 1948.
4. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, АН СССР, 1946.
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ВИНИТИ, М., 1964.

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
17 октября 1966 г.

УДК 621.378.1

## ОБ «ИМПЕДАНСНОМ» РЕЖИМЕ ПРИЕМНОЙ ТРЕХУРОВНЕВОЙ СХЕМЫ

*M. E. Герценштейн*

В трехуроневой схеме (рис. 1а) счетчика фотонов [1–4] поглощение кванта сигнала частоты  $\omega$  вызывает появление кванта частоты  $\nu + \omega \gg \omega$ , который в силу большей энергии легче регистрируется. Классическим аналогом этого режима является нерегенеративный преобразователь. Для работы схемы необходимо, чтобы вероятности радиационных переходов превышали бы релаксационные. Для свободного атома один из дипольных переходов, показанных на рис. 1а, запрещен правилами отбора. Для снятия запрета необходимы сильные поля решетки [4]. Другим недостатком схемы является необходимое для нерегенеративного преобразователя требование пространственного синхронизма сигнала, накачки и суммарной частоты, которое трудно осуществить.

Существует другой режим работы схемы (рис. 1б), предложенный впервые в [5], когда регистрируется изменение импеданса по накачке при поглощении сигнального фотона. Частота накачки должна быть в диапазоне, где имеются чувствительные приемники — микроволновом [4, 5] или оптическом. Схема регистрирует число фотонов, т. е. мощность сигнала, и не измеряет фазу. Условие синхронизма не обязательно, приемник принимает все моды.

В настоящем сообщении будет вычислено отношение сигнал/шум для

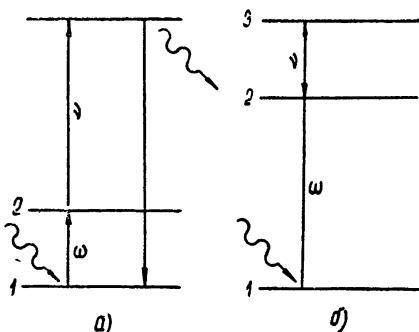


Рис. 1.

«импедансного» режима Активное вещество должно иметь 3 уровня, переход 1—2 соответствует принимаемому сигналу, на переход 2—3 действует напряжение накачки Переход 1—3 может быть запрещен и внутрикристаллическое поле не обязательно. При отсутствии сигнала нижний уровень заселен, средний и верхний уровни пусты При поглощении сигнала меняется населенность уровня 2 и импеданс на частоте перехода 2—3. Так как размеры рабочего тела могут быть сделаны достаточно большими, то можно принять, что вероятность поглощения сигнального фотона равна единице

Пусть  $N$  — поток фотонов в секунду. Тогда для населенности на уровне 2 имеем

$$n_2 = N\tau, \quad h\omega \gg kT, \quad (1)$$

где  $\tau$  — время жизни на уровне 2 Для восприимчивости вещества по накачке имеем [6] в случае магнитодипольного перехода

$$\delta\chi = -\frac{|\mu^2|}{h} \frac{(\omega_{23} - \nu) + iT_2^{-1}}{(\omega_{23} - \nu)^2 + T_2^{-2} + (\mu^2 H^2/h^2)(T_1/T_2)} \Delta, \quad (2)$$

$$\mu = \mu_{23},$$

где  $\Delta$  — разность населенностей уровней 3 и 2, которая равна  $\Delta = (N\tau)\xi$ ;  $h\nu/kT \ll \xi \ll 1$ ;  $H$  — магнитное поле накачки;  $T_1$  и  $T_2$  — продольное и поперечное время релаксации;  $\xi$  — поправочный коэффициент на процессы выравнивания населенностей на уровнях 2 и 3 за счет взаимодействия с решеткой Для оптической накачки  $\xi \approx 1$ . Если вероятность перехода 2—3, обусловленная накачкой, превышает релаксационную, то  $\xi \rightarrow 1$ . Предполагая, что имеет место резонанс по накачке, имеем

$$\delta\chi = -i \frac{\mu^2}{h\Delta\nu} \frac{(N\tau)\xi}{1+(H/H_0)^2}, \quad \frac{\mu H_0}{h} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad (3)$$

где  $\Delta\nu = 1/T_2$  — ширина линии по накачке.

Рассмотрим теперь отражение от резонатора с таким изменением восприимчивости (при работе «на проход» результаты аналогичны). Коэффициент отражения при резонансе равен

$$\Gamma = \frac{g - \bar{g}}{g + \bar{g}} = \frac{\bar{Q} - Q}{\bar{Q} + Q}, \quad Q = \frac{\nu C_0}{g}, \quad \bar{Q} = \frac{\nu C_0}{\bar{g}}, \quad (4)$$

где  $g$  — волновая проводимость линии,  $\bar{g}$  — проводимость потерь в резонаторе,  $Q$  — добротность связи по накачке.

Для изменения коэффициента отражения при изменении потерь имеем

$$\delta\Gamma = \frac{2Q}{(Q+\bar{Q})^2} \delta\bar{Q} = -\frac{2Q}{(1+Q/\bar{Q})^2} \delta \frac{1}{\bar{Q}}. \quad (5)$$

Изменение  $\bar{Q}$  обусловлено веществом; при полном заполнении [6] резонатора

$$\bar{Q}^{-1} = \frac{4\pi\chi''}{V}, \quad \delta\bar{Q}^{-1} = \frac{4\pi\delta\chi''}{V}, \quad (6)$$

где  $V$  — объем резонатора. Окончательно для изменения коэффициента отражения получим

$$\delta\Gamma = -\frac{8\pi\delta\chi''Q}{V(1+Q/\bar{Q})^2} = \frac{8\pi\mu^2 Q}{Vh\Delta\nu(1+Q/\bar{Q})^2} \frac{N\tau\xi}{[1+(H/H_0)^2]}. \quad (7)$$

Для простоты далее мы рассмотрим только режим согласования ( $\bar{Q} = Q$ ). Радиосигналом для приемника, стоящего на выходе циркулятора, является переменная компонента отраженной волны.

Мощность радиосигнала равна

$$P_c \sim P_{\text{пад}} |\delta\Gamma|^2 \sim \frac{P_{\text{пад}}}{1 + (P_{\text{пад}}/P_0)^2}, \quad (8)$$

где учтено, что магнитные поля пропорциональны мощностям. Легко видеть, что мощность сигнала максимальна при  $P_{\text{пад}} = P_0$ . При больших мощностях сигнал ослабляется из-за насыщения. Отношение сигнал/шум в тракте приемника равно

$$S_1 = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \frac{P_{\text{пад}}}{4kT_{\text{ш}}B} \left| \frac{\pi\mu^2 Q}{h\Delta\nu V} \right|^2 (N\tau)^2 \xi^2, \quad P_{\text{пад}} = \frac{vV}{Q} \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (9)$$

где  $T_{\text{ш}}$  — шумовая температура приемника. Формулу (9) можно преобразовать, исключив  $P_{\text{пад}}$ :

$$S_1 = \frac{\pi}{4kT_{\text{ш}}B} \left( \frac{v}{\Delta\nu} \right) Q\mu^2 \frac{(N\tau)^2 \xi^2}{T_1 V} \quad (h\nu \ll kT_{\text{ш}}). \quad (10)$$

Если используется оптическая накачка, то вместо тепловых шумов следует учитывать дробовые шумы фотонов. В этом случае

$$S_2 = \frac{\pi}{4h\nu B} \frac{v}{\Delta\nu} Q\mu^2 \frac{(N\tau)^2}{T_1 V} \quad (h\nu \gg kT) \quad (11)$$

Оптическая накачка оказывается лучше, чем СВЧ накачка, благодаря меньшей относительной ширине линий и большим  $Q$  открытого резонатора. Для оптического приемника, использующего фотоэффект, имеем

$$i_c = e\eta N, \quad P_c = \frac{1}{4} (e\eta N)^2 R_\Phi, \quad R_\Phi c_0 = \tau \sim B^{-1},$$

где  $i_c$  — фототок,  $R_\Phi$  — нагрузочное сопротивление,  $\eta$  — квантовая эффективность,  $c_0$  — емкость фотодиода. Для отношения сигнала к шуму получим

$$S_\Phi = \frac{e^2 \eta^2 N^2 R_\Phi}{4kTB} < \frac{\pi}{B c_0 \ln \sqrt{2}} \frac{e^2 \eta^2 N^2}{4k T_{\text{ш}} c_0}. \quad (12)$$

Знак равенства соответствует оптимальному согласованию по Фано [7]. При этом

$$R_\Phi < \frac{\pi}{B c_0 \ln \sqrt{2}} \sim \frac{9.42}{B c_0} \sim \frac{1}{B} \sim \tau. \quad (13)$$

Если задана емкость  $c_0$ , за характеристику чувствительности видеофотоприемника можно взять отношение  $R/\tau$ . При емкости 1 пФ для приемника, использующего фотоэффект,

$$R/\tau \sim 10^{13} \text{ ом} \cdot \text{сек}^{-1},$$

причем это значение практически не достигается.

Сравним «кимпидансный» режим трехуровневой схемы с приемником, использующим фотоэффект. Сравнение удобно провести в терминах эквивалентного сопротивления  $R$ , при котором  $S_1 = S_\Phi$ . Производя вычисления, получаем

$$(\eta^2 R/\tau)_1 \approx Q \xi^2 \frac{\tau}{T_1} \left( \frac{v}{\Delta\nu} \right) \{ \mu^2 / V e^2 \} \quad (h\nu \ll kT), \quad (14)$$

$$(\eta^2 R/\tau)_2 \approx Q \frac{\tau}{T_1} \left( \frac{v}{\Delta\nu} \right) \{ \mu^2 / V e^2 \} \frac{kT}{h\nu} \quad (h\nu \gg kT).$$

Величина, стоящая в фигурных скобках, имеет размерность сопротивления, остальные множители — безразмерные. Можно показать, что для вещества с электродипольными переходами в формулах (12) нужно заменить  $\mu$  на  $d$ . Так как отношение  $d/\mu \sim 10^2$ , то использование электродипольных по накачке переходов выгоднее (переход по сигналу может быть магнитным).

Для электродипольных переходов при  $d = 10^{-18}$  CGSE [8]

$$\frac{d^2/V e^2}{V \text{ см}^3} = 4 \cdot 10^{-18} \frac{\text{CGSE}}{V \text{ см}^3} = \frac{3,6 \cdot 10^{-6}}{V \text{ см}^3} \text{ ом} \cdot \text{сек}^{-1}. \quad (15)$$

Для СВЧ накачки величина  $\eta^2 R/\tau$  даже для гелиевых температур и  $\xi = 1$  не превосходит  $10^6 \text{ ом} \cdot \text{сек}^{-1}$  и импедансная схема дает лучшую чувствительность по сравнению с фотоэфектом только при  $\eta < 0,1\%$ . Для оптической накачки, не требующей охлаждения,  $\eta^2 R/\tau \sim 10^9 \text{ ом} \cdot \text{сек}^{-1}$  и импедансная схема дает выигрыш по чувствительности только при  $\eta < 3\%$ . Поэтому применение импедансного режима трехчастотной схемы целесообразно только в дальнем инфракрасном и субмиллиметровом диапазонах, где другие приемники отсутствуют [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bloemberger, Phys. Rev. Lett., 2, 84 (1959).
2. A. M. Прохоров, ЖЭТФ, 40, № 5, 1374 (1961).
3. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, УФН, 72, № 2, 161 (1960).
4. C. F. Krumm, G. I. Haddad, Proc. IEEE, 54, № 4, 199 (1966) (русский перевод).
5. Я. И. Ханин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, № 4, 661 (1959).
6. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, 1965.
7. Р. М. Фано, Теоретические ограничения полосы согласования произвольных импедансов, изд. Сов. радио, М., 1965.
8. М. В. Волькенштейн, Молекулярная оптика, Гостехиздат, М—Л, 1951.

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
17 октября 1966 г.

УДК 535.338.3 : 538.56

## ФОРМА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КОЛЕБАНИЯ ПРИ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ

A. N. Малахов

Задача определения спектра колебания, обладающего стохастической модуляцией, возникает во многих вопросах как физики, так и радиофизики. К ним относится, например, вопрос о форме спектральных линий атомных систем и спектральных характеристиках квантовых генераторов [1, 2]. Этой задаче посвящено заметное количество работ. Вместе с тем многие ее аспекты еще не выяснены (часто из-за математической сложности и ненаглядности получаемых выражений).

Настоящее сообщение посвящено случаю малых коррелированных флуктуаций амплитуды и частоты колебания, когда удается получить общее и простое выражение для формы спектральной линии (в общем случае несимметричной), включающее в себя единым образом все ее три компоненты пик, пьедестал и крылья.

1. Рассмотрим колебание, обладающее стационарными коррелированными флуктуациями амплитуды и частоты (фазы):

$$x(t) = R_0[1 + \alpha(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\xi) d\xi.$$

Спектральные плотности амплитудных флуктуаций  $S_\alpha(\Omega)$ , частотных  $S_v(\Omega)$  или фазовых  $S_\varphi(\Omega) = S_v(\Omega)/\Omega^2$  и четную совместную спектральную плотность  $S_{av}^0(\Omega)$  считаем заданными.

Форма спектральной линии колебания  $x(t)$  в общем случае несимметрична и поэтому ее можно представить как

$$W_x(\Omega) = W_x^0(\Omega) + W_x^1(\Omega),$$

где  $W_x^0(\Omega)$ ,  $W_x^1(\Omega)$  — четная и нечетная компоненты спектральной линии. Частота  $\Omega$  отсчитывается от средней частоты колебания  $\omega_0$ .

Ограничимся малыми флюктуациями амплитуды и частоты — такими, что  $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ ,  $S_\nu(0) \ll \Pi_\alpha, \Pi_{\alpha\nu}$ ,  $S_{\alpha\nu}^0(0) \ll 1$ , где  $\Pi_\alpha, \Pi_{\alpha\nu}$  — ширина спектров  $S_\alpha(\Omega)$  и  $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$ . Тогда на основании формул (7), (24), (25) работы [3] можно показать, что

$$\begin{aligned} W_x^0(\Omega) &= W_{x\nu}^0(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega), \\ W_x^1(\Omega) &= 2\pi S_{\alpha\nu}^0(0) W_{x\nu}^1(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} 2 \frac{S_{\alpha\nu}^0(\Omega) - S_{\alpha\nu}^0(0)}{\Omega}, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} W_{x\nu}^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-d_\varphi[0; \tau]) \cos(\Omega\tau) d\tau, \\ W_{x\nu}^1(\Omega) &= \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-d_\varphi[0; \tau]) \operatorname{sgn}\tau \sin(\Omega\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Структурная функция фазовых флюктуаций равна (см. [4])

$$d_\varphi[0; \tau] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta\omega)[1 - \cos(\omega\tau)] S_\varphi(\omega) d\omega. \quad (3)$$

Для подавляющего большинства реальных случаев спектральные плотности флюктуаций частоты  $S_\nu(\Omega)$  и соответствующие им структурные функции фазовых флюктуаций таковы, что точное вычисление компонент  $W_{x\nu}^0$  и  $W_{x\nu}^1$  с помощью (2) встречает большие трудности. В связи с этим представляет интерес отыскание приближенных выражений указанных компонент

2. Пусть существует конечное значение  $S_\nu(0) > 0$ . В этом случае структурную функцию  $d_\varphi[0, \tau]$  можно записать в виде

$$d_\varphi[0, \tau] = \pi S_\nu(0)\tau - \tilde{d}_\varphi[0; \tau]. \quad (4)$$

Предположим далее, что  $|\tilde{d}_\varphi[0; \tau]| \ll 1$  при любых  $\tau$  и что характерное время изменения  $\tilde{d}_\varphi[0; \tau]$  много меньше, чем  $S_\nu^{-1}(0)$  (условия A). Тогда, подставляя (4) в первую формулу (2) и используя условия A, можно найти

$$W_{x\nu}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{S_\nu(0)}{[\pi S_\nu(0)]^2 + \Omega^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{d}_\varphi[0, \tau] \cos(\Omega\tau) d\tau \right\}.$$

Так как структурной функции  $d_\varphi[0; \tau]$  соответствует спектральная плотность  $S_\nu(\Omega)/\Omega^2$  (см. (3)), то можно найти, что структурной функции

$$\tilde{d}_\varphi[0, \tau] = \pi S_\nu(0)\tau - d_\varphi[0; \tau]$$

соответствует  $S_\nu(0)/\Omega^2 - S_\nu(\Omega)/\Omega^2$ , что является (со знаком минус) косинус-фурье сопряженной  $\tilde{d}_\varphi[0; \tau]$  (см. [4]). Следовательно\*,

$$W_{x\nu}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{S_\nu(0)}{[\pi S_\nu(0)]^2 + \Omega^2} + \frac{S_\nu(\Omega) - S_\nu(0)}{\Omega^2} \right\}. \quad (5)$$

Учитывая малость флюктуаций амплитуды и частоты, можно аналогично показать, что

$$2\pi S_{av}^0(0)W_{xy}^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{2S_{av}^0(0)\Omega}{[\pi S_y(0)]^2 + \Omega^2} \right\}.$$

Собирая вместе все слагаемые формулы (1), получаем следующие окончательные выражения для компонент спектральной линии колебания  $x(t)$ :

$$W_x^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{S_y(0)}{[\pi S_y(0)]^2 + \Omega^2} + \frac{S_y(\Omega) - S_y(0)}{\Omega^2} + S_a(\Omega) \right\}; \quad (6)$$

$$W_x^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{2S_{av}^0(0)\Omega}{[\pi S_y(0)]^2 + \Omega^2} + 2 \frac{S_{av}^0(\Omega) - S_{av}^0(0)}{\Omega} \right\}. \quad (7)$$

Первые слагаемые в (6), (7) представляют собой пик спектральной линии шириной  $\pi^2 S_y(0)$ . Остальные слагаемые образуют пьедестал спектральной линии. Существуют также крылья спектральной линии, которые определяются из (6), (7) при  $\Omega \rightarrow \infty$  и уравнение которых имеет вид

$$W_{kp\ x}(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{S_y(\Omega)}{\Omega^2} + S_a(\Omega) + 2 \frac{S_{av}^0(\Omega)}{\Omega} \right\}. \quad (8)$$

Отметим, что существование именно четной корреляции между амплитудными и частотными флюктуациями приводит к несимметрии спектральной линии.

3. Рассмотрим пример. Обозначим через  $D_1$ ,  $D_2$  коэффициенты диффузии приращения фаз двух свободных генераторов, обладающих естественными шумами. Пусть также  $D_1 > D_2$ . Если теперь первый генератор синхронизовать вторым, то спектральная плотность частотных флюктуаций синхронизованного генератора при сильной синхронизации будет равна [5]

$$S_y(\Omega) = \frac{D_1 \Omega^2 + D_2 \Omega_0^2}{\Omega^2 + \Omega_0^2} \frac{1}{2\pi}. \quad (9)$$

Частота  $\Omega_0$  равна полосе синхронизации, причем для сильной синхронизации  $2\Omega_0 \gg (D_1 + D_2)$ .

В отсутствие синхронизации ( $\Omega_0 = 0$ ) спектральная плотность флюктуации частоты первого генератора равна, очевидно,  $S_y(\Omega) = D_1/2\pi$ , а его спектральная линия имеет резонансную форму

$$W_{своб}(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D_1/2}{(D_1/2)^2 + \Omega^2}.$$

Найдем форму спектральной линии синхронизованного генератора. Для спектральной плотности (9) нетрудно найти

$$d_\varphi[0; \tau] = \frac{1}{2\Omega_0} [D_2 \Omega_0 \tau + (D_1 - D_2)(1 - \exp[-\Omega_0 |\tau|])].$$

Следовательно, согласно (4), имеем

$$\tilde{d}_\varphi[0; \tau] = \frac{D_2 - D_1}{2\Omega_0} [1 - \exp(-\Omega_0 |\tau|)].$$

Легко видеть, что условия  $A$  для рассматриваемого случая сильной синхронизации выполняются автоматически. Следовательно, можно использовать формулу (6), в результате чего получим следующее выражение для формы спектральной линии синхронизированного генератора:

\* Чтобы второе слагаемое в (5) не имело особенности при  $\Omega = 0$ , достаточно предположить, что в области малых  $\Omega$  спектральная плотность  $S_y(\Omega) = S_y(0) + \frac{1}{2} S_y''(0)\Omega^2 + \dots$  (Напомним, что  $S_y(\Omega)$  — четная функция.)

$$W_{\text{синхр}}(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \left\{ \frac{D_2/2}{(D_2/2)^2 + \Omega^2} + \frac{(D_1 - D_2)/2}{\Omega^2 + \Omega_0^2} \right\}.$$

На рис. 1 показаны формы спектральных линий свободного и синхронизованного генераторов. Ширина пика спектральной линии уменьшилась с  $D_1/2$  до  $D_2/2$ . У спектральной линии синхронизованного генератора появился также пьедестал шириною  $\Omega_0$ .

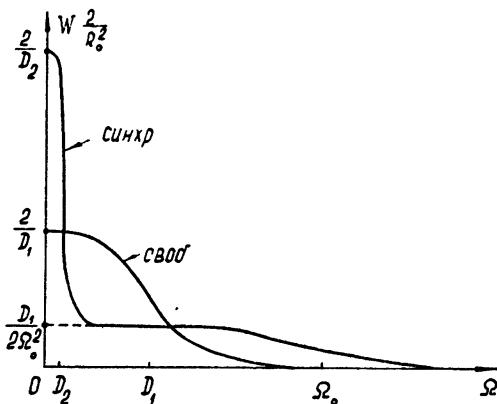


Рис. 1.

Крылья спектральной линии синхронизированного колебания даются выражением

$$W_{\text{синхр кр}}(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D_1}{2\Omega^2},$$

т. е. имеют тот же вид, что и в отсутствие синхронизации. Это связано с тем, что синхронизуются, как это видно из (9), только медленные флуктуации частоты, а быстрые, которые и отвечают за крылья спектральной линии, остаются неизменными.

Автор благодарен М. Е. Герценштейну за критические замечания

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, УФН, 90, 209 (1966).
2. С. Г. Раутиан, ЖЭТФ, 51, 1176 (1966).
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 5, 912 (1961).
4. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 595 (1966).
5. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 6, 1160 (1965).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 октября 1966 г.