

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Гетманцев Г. Г., Пасека А. М. и Токарев Ю. В. О влиянии движения космической среды на поляризацию космического радиоизлучения	599
Алексеев В. А., Алешина Т. Н., Кротиков В. Д. Поляризационные характеристики радиоизлучения шероховатостей Луны при учете усредняющего действия диаграммы направленности антенны	603
Брук Ю. М., Гончаров Н. Ю., Мень А. В., Содин Л. Г., Шарыкин Н. К. Т-образный радиотелескоп диапазона $10 \div 25$ Мгц с электрическим управлением лучом	608
Алимов В. А., Ерухимов Л. М. О влиянии приемного устройства на величину частотной корреляции флуктуаций принимаемого радиоизлучения	620
Эйдман В. Я. Об одной особенности затухания продольной волны в слабо-неоднородной плазме	629
Якименко И. П. К теории некогерентного рассеяния электромагнитных волн на цилиндрически-симметричных плазменных структурах	637
Сергеева Г. Г. Об утроении частоты электромагнитной волны в газе горячих электронов в полупроводниках	649
Аблязов В. С., Попов Е. И. К вопросу о чувствительности радиометра субмиллиметрового диапазона	654
Караваев В. В. Тепловое излучение хорошо проводящих шероховатых поверхностей	658
Рыжова Л. К. и Якименко И. П. Наклонное падение плоской электромагнитной волны на сжимаемый плазменный цилиндр	665
Гольдберг В. Н., Таланов В. И., Эрм Р. Э. Самофокусировка аксиально-симметричных волновых пучков	674
Куликов Э. Л., Ильин В. К. Применение метода Д. Г. Вайнштейна для решения краевых задач электродинамики СВЧ	686
Иванов Е. А., Гельфонд Б. С. О дифракции поля продольного электрического излучателя на двух параллельных круговых цилиндрах	693
Булдырев В. С. Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения	699
Наймушин М. П. Излучение продольной щели и провода на цилиндре с выступом	712
Демченко В. В., Курилко В. И. Черенковские потери модулированного тока в пеллнейном диэлектрике	718
Кочина Т. Г., Цимринг Ш. Е. Об устранении боковой расфокусировки электронного пучка в лучевых приборах магнетронного типа	722
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Авербах В. С., Власов С. Н. Разрежение спектра открытого резонатора по продольным и поперечным индексам	731
Белевитин С. А., Трофименко И. Т. ЛБВ-генератор — квантователь частоты	732
Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч., Коровин Ю. А., Любимов В. Н., Павленко Ю. Г. Индуцированное излучение в неоднородном магнитном поле	734
Голубенцев А. Ф., Минкин Л. М. О влиянии непрерывного токооседания вдоль замедляющей системы на усиление лампы бегущей волны	736

УДК 621.371.18 : 621.371.11

О ВЛИЯНИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА ПОЛЯРИЗАЦИЮ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Г. Г. Гетманцев, А. М. Пасека и Ю. В. Токарев

Получены выражения для разности показателей преломления нормальных волн, распространяющихся в двухкомпонентной среде, состоящей из плазменного потока, движущегося в покоящейся плазме. Оценивается влияние движения космических плазменных потоков на характер поляризации радиоизлучения различных космических объектов.

Радиоизлучение различных космических объектов, как известно, имеет линейно поляризованную компоненту. При распространении радиоизлучения в магнитоактивной космической плазме характер поляризации, вообще говоря, изменяется: меняется положение плоскости поляризации и происходит частичная деполяризация излучения. На характер поляризации радиоизлучения может влиять отличие поглощения различных нормальных волн, распространяющихся в межзвездной среде, различие в условиях генерации нормальных волн, а также и некоторые другие факторы.

В работе [1] Лузиньян утверждает, что характер радиоизлучения космических объектов должен радикально зависеть от движения межпланетной плазмы на пути распространения радиоволн. Согласно приведенным в [1] оценкам, при скорости потока межпланетной плазмы $\sim 2,5 \cdot 10^4$ км·сек⁻¹ и при концентрации плазмы в потоке $\sim 10^{-2}$ см⁻³ разность фаз двух нормальных линейно поляризованных волн частоты 10 Мгц, распространяющихся перпендикулярно потоку, должна быть порядка 10° после прохождения пути, равного радиусу земной орбиты. Согласно [1], при приеме радиоизлучения достаточно удаленных (дискретных) космических источников влияние движения межпланетной плазмы на характер поляризации, если бы оно действительно имело место, было бы значительно сильнее, чем влияние межпланетного магнитного поля. Однако выводы работы [1] являются ошибочными.

Лузиньян, рассматривая распространение волн в движущейся плазме, исходит из уравнений Лоренца для поля и релятивистских уравнений механики для частиц. При этом он непоследовательно учитывает влияние среды. Решая задачу на основе микроскопических уравнений поля и движения частиц, автор [1] нигде не производит пространственно-временного усреднения микрополей, и в результате наличие среды учитывается неполностью. Именно вследствие отмеченного здесь обстоятельства, согласно [1], в движущемся в пустоте моноскоростном потоке плазмы существуют две нормальные волны с разными скоростями распространения, причем величина эффекта пропорциональна $(v/c)^2$, где v — скорость потока относительно лабораторной системы отсчета. В действительности же, если использовать в [1] уравнения Максвелла, а лоренцову силу считать зависящей от E и B , можно показать, что в движущемся моноскоростном потоке плазмы фазовые скорости различных нормальных волн совпадают и двойное лучепреломление отсутствует.

Последнее обстоятельство особенно наглядно следует из результатов работ [2, 3], в которых феноменологически рассматривалось распространение электромагнитных волн в движущихся друг относительно друга взаимопроникающих средах. В частности, если положить в дисперсионных уравнениях в [2], определяющих показатели преломления нормальных волн, диэлектрическую постоянную покоящейся среды равной единице, т. е. перейти к случаю движения в пустоте, то дисперсионные уравнения двух нормальных волн полностью совпадают. Если же среда (например, плазма) движется не в пустоте, а в какой-либо другой среде (например, в покоящейся плазме), то, как это следует из [2, 3], существуют две нормальные волны с различными скоростями распространения. Вектор E у одной из этих волн лежит в плоскости, проходящей через направление распространения и вектор скорости движения потока, а в другой волне перпендикулярен этой плоскости.

Разность показателей преломления этих волн (без учета влияния внешнего магнитного поля) может быть без труда определена из [2] или [3] для случая достаточно разреженного моноскоростного потока плазмы, движущегося в разреженной покоящейся плазме:

$$\delta n = \frac{\beta^2 \sqrt{1 - \beta^2} \sin^2 \theta}{2(1 - \beta \cos \theta)^2} \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (1)$$

Здесь $\beta = v/c$, v — скорость плазменного потока, θ — угол между направлением распространения волн и скоростью потока, а ω_{0s} и ω_0 — ленгмюровские частоты в потоке и неподвижной плазме*.

В дальнейшем для оценок мы будем полагать множитель $\frac{1}{2} \beta^2 \sin^2 \theta (1 - \beta \cos \theta)^{-2} \sim 1$ и считать, что $\delta n \sim \omega_{0s}^2 \omega_0^2 \omega^{-4} \sqrt{1 - \beta^2}^{**}$. Раз-

личие показателей преломления, определяемое формулой (1), применительно к условиям большинства космических объектов, вообще говоря, мало и не должно влиять на поляризацию космического радиоизлучения. Так, например, если мы примем для Галактики $\omega_0^2 = 3 \cdot 10^7$ (концентрация неподвижной плазмы $\sim 10^{-2}$), $\omega_{0s}^2 = 10^2$ (соответствует потоку космических лучей с $\beta = v/c \sim 1$), то на частоте $\omega = 2\pi \cdot 10^8$ ($\lambda = 3$ м) $\delta n \simeq 3 \cdot 10^{-26} mc^2/E$, m — масса покоя электрона, E — энергия релятивистского электрона.

Таким образом, на размерах Галактики $L \sim 3 \cdot 10^{22}$ см сдвиг фаз между различными нормальными волнами не должен превышать

$\Delta\Phi = \frac{\omega}{c} \delta n L = 2 \cdot 10^{-5} mc^2/E$, т. е. должен быть еще значительно меньше единицы.

Аналогично можно показать, что эффект оказывается малым также и для радиоволн, распространяющихся в метagalacticкой среде и межпланетной плазме.

Положение может быть несколько иным для квазизвездных источников радиоизлучения. Несмотря на то, что параметры среды в квазарах в настоящее время сколько-нибудь твердо не определены, для объяснения их радиоизлучения приходится считать, что концентрация плазмы в них может достигать очень больших значений. Принимая, не-

* В выражении (1) в знаменателе должно стоять, вообще говоря, выражение $(1 - n\beta \cos \theta)$, где n — показатель преломления распространяющихся волн. В (1) и далее мы будем, однако, всюду полагать $n \simeq 1$, тем более, что при $(1 - n\beta \cos \theta) \rightarrow 0$ выражение (1) уже несправедливо.

** В то время как в работе [1] получено $\delta n \sim \omega_{0s}^2/\omega^2$.

сколько условно, в соответствии с [4] для источника СТА-102 $L = 10^{20}$ см, $N_s = 1$, $N = 10^8$, находим, что на частоте $\omega = 6 \cdot 10^8$ гц разность фаз $\Delta\Phi = 2 \cdot 10^{10}$ mc^2/E .

В этом случае с ростом фазового пути, проходимогo излучением, линейно поляризованное радиоизлучение превращается в эллиптически поляризованное, затем поляризация становится круговой, затем эллиптической, снова линейной и так далее. Таким образом, казалось бы, можно было ожидать эллиптически поляризованное излучение от источников, механизм излучения которых дает линейно поляризованную компоненту. Положение, однако, усложняется тем, что реальные источники радиоизлучения обладают магнитным полем, которое при выводе формулы (1) не учитывалось. Подобный учет может быть произведен для случая распространения волн в двухкомпонентной плазме, когда одна из компонент движется вдоль силовых линий внешнего магнитного поля*.

Необходимое выражение для δn можно получить из релятивистских уравнений движения частиц и уравнений Максвелла с использованием соответствующей функции распределения по скоростям частиц в потоке. К аналогичным выводам можно придти, используя дисперсионное уравнение для показателей преломления нормальных волн, выведенное в [4], где проводится феноменологическое рассмотрение этого вопроса.

Разность показателей преломления нормальных волн для случая $\omega_H/\omega \ll 1$, $\omega_{0s}^2/\omega^2 \ll 1$, $\omega_0^2/\omega^2 \ll 1$ получается равной

$$\delta n = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right]^2 + 4 \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \theta + (\cos \theta - \beta) \frac{\omega_{0s}^2 (1 - \beta^2)}{\omega^2 (1 - \beta \cos \theta)} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где ω_H — гирочастота электронов, а остальные обозначения совпадают с введенными выше. Нормальные волны в этом случае будут эллиптически поляризованы, причем, если выбрать систему координат, в которой ось $z \parallel \mathbf{k}$, а $\mathbf{v} \parallel \mathbf{H}$ лежит в плоскости прямоугольной системы координат uz , то

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^{(1), (2)} &\simeq i \left\{ \left(-\frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right) \pm \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2} \times \right. \right. \\ &\times \left. \frac{\beta^2 \sin^2 \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right]^2 + 4 \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \theta + (\cos \theta - \beta) \frac{\omega_{0s}^2}{\omega^2} \times \right. \\ &\left. \left. \times \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos \theta)} \right]^2 \right\}^{1/2} \left\{ 2 \frac{\omega_H}{\omega} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \theta + (\cos \theta - \beta) \frac{\omega_{0s}^2 (1 - \beta^2)}{\omega^2 (1 - \beta \cos \theta)} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{k} — волновой вектор волны, \mathbf{v} — вектор скорости потока, \mathbf{H} — внешнее магнитное поле.

Главные оси эллипсов, описываемых концом проекции вектора \mathbf{E} на плоскость xy , параллельны осям x и y . Кроме того, легко видеть, что $(E_x/E_y)^{(1)} (E_x/E_y)^{(2)} = 1$. В предельном случае $\omega_{0s}^2/\omega^2 \gg \omega_H/\omega$, как и следовало ожидать, получим две линейно поляризованные волны с раз-

* Наличие температурного разброса по скоростям в потоке не приводит к изменению результатов.

ностью фазовых скоростей, определяемой выражением (1). В другом предельном случае $\omega_H/\omega \gg \omega_{0s}^2/\omega^2$ нормальные волны поляризованы по кругу с противоположными направлениями вращения вектора E . Этот случай так называемого «продольного распространения» обычно и реализуется в межзвездной и межгалактической среде.

В промежуточном случае с ростом фазового пути, проходимогo излучением, линейно поляризованное излучение превращается в эллиптически поляризованное. Разность полуосей уменьшается при этом до величины, характеризуемой $(E_x/E_y)^{(1)}$, причем, чем сильнее $(E_x/E_y)^{(1)}$ отличается от единицы, тем поляризация радиоизлучения ближе к круговой. При этом полуоси эллипса поляризации поворачиваются со скоростью, определяемой разностью фазовых скоростей нормальных волн.

Современные данные об условиях в квазизвездных источниках скорее всего отвечают, по-видимому, неравенству $\omega_H/\omega \gg \omega_{0s}^2/\omega^2$, однако принципиальная возможность наблюдать радиоизлучение от источников с относительно слабым магнитным полем, обладающее вследствие указанного эффекта заметной эллиптической поляризацией, представляется нам небезнадёжной.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Lusinguan, J. Geophys. Res., **68**, 5617 (1963).
2. Г. Г. Гетманцев, ЖЭТФ, **37**, 843 (1959).
3. Г. Г. Гетманцев, В. О. Рапопорт, ЖЭТФ, **38**, 1205 (1960).
4. В. В. Железняков, Астрон. ж. (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 июля 1966 г.

THE INFLUENCE OF COSMIC MEDIUM MOTION ON POLARIZATION OF COSMIC RADIATION

G. G. Getmantsev, A. M. Paseka, Yu. V. Tokarev

The paper deals with the expressions for the difference of the refractive indices of normal waves propagating in a two-component medium which consists of plasma flow moving in a quiescent plasma. The influence is estimated of cosmic plasma flows on the character of the radiation polarization of different cosmic objects.

УДК 523.164.34

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ШЕРОХОВАТОЙ ЛУНЫ ПРИ УЧЕТЕ УСРЕДНЯЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ

В. А. Алексеев, Т. Н. Алешина, В. Д. Кротиков

Рассмотрены поляризационные характеристики радиоизлучения Луны при учете усредняющего действия диаграммы направленности антенны для двух случаев: 1 — Луна является гладкой для радиоволн, 2 — Луна имеет гладкие неровности, много большие длины волны, статистика углов наклона которых подчиняется нормальному закону. Показано, что в пределах части лунного диска, ограниченной окружностью радиуса $0,6 R_L$ (где R_L — радиус Луны), усредняющее действие диаграммы направленности можно не учитывать. В этой же области поляризационные характеристики практически не зависят от дисперсии углов наклона неровностей и могут быть использованы для определения диэлектрической постоянной. Вблизи лимба Луны поляризационные характеристики ее радиоизлучения сильно зависят от дисперсии углов наклона неровностей и при известной ширине диаграммы направленности позволяют определить величину шероховатости верхнего покрова Луны.

Для определения диэлектрической постоянной и геометрии верхнего покрова Луны по поляризационным характеристикам ее радиоизлучения, принимаемого на антенны с различными диаграммами направленности, необходимо установить связь указанных параметров с наблюдаемыми характеристиками радиоизлучения.

В настоящее время соответствующие количественные соотношения установлены для гладкой и шероховатой Луны лишь в случае бесконечно узкой диаграммы направленности антенны [1-4].

Этот случай дает лишь распределение поляризации по диску Луны и не учитывает усредняющего действия диаграммы направленности антенны, которое, как следует ожидать, должно достаточно сильно сказываться на результатах измерений поляризации вблизи лимба Луны, где излучательная способность меняется наиболее резко.

Использование существующей теории радиоизлучения Луны [1] и результатов расчета излучательной способности при наличии шероховатости ее верхнего покрова [3,4] позволило провести учет влияния усредняющего действия диаграммы направленности антенны на поляризационные характеристики радиоизлучения Луны.

Как известно [1], при измерениях радиоизлучения Луны определяется усредненная по диаграмме направленности эффективная температура

$$T_{эфф} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)] T_{эфф0}(\varphi, \psi, t) F(\varphi, \psi) \times \\ \times \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi / \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi, \quad (1)$$

где $1 - R(\varphi, \psi)$ — излучательная способность участка лунной поверхности с селенографическими координатами φ, ψ ; $T_{эфф0}(\varphi, \psi, t)$ — эффек-

тивная температура того же участка для случая абсолютно черной Луны (излучательная способность равна единице); зависимость эффективной температуры от координат может быть представлена в виде гармонического ряда (см., например, [5]); $F(\varphi, \psi)$ — диаграмма направленности антенной системы, выраженная в лунных координатах.

Будем предполагать, что диаграмма направленности, характеризуемая шириной θ на половинном уровне по мощности, представляет собой тело вращения, а боковые лепестки отсутствуют. В этом случае диаграмму направленности удобно представить в виде кривой Гаусса. Записанная в лунных координатах часть диаграммы направленности, ограниченная угловыми размерами Луны, может быть представлена в виде

$$F(\varphi, \psi) = \exp \left\{ - \ln 2 \frac{d^2}{\theta^2} \left[\left(\cos \psi \sin \varphi \cos \beta + \sin \psi \sin \beta - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 + \left(\sin \psi \cos \beta - \cos \psi \sin \varphi \sin \beta - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2)$$

где θ — ширина диаграммы на половинном уровне по мощности, d — средний угловой диаметр Луны, r/R — расстояние оси диаграммы от центра видимого диска Луны, β — угол между плоскостью экватора и направлением сканирования. Предполагается, что сканирование осуществляется через центр лунного диска.

1. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ГЛАДКОЙ ЛУНЫ ПРИ УЧЕТЕ УСРЕДНЯЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ

Рассмотрим вначале влияние усредняющего действия диаграммы направленности антенной системы на поляризационные характеристики радиоизлучения в предположении, что Луна является гладкой для радиоволн.

Известно [1], что абсолютная величина коэффициента поляризации равна отношению разности усредненных по диаграмме эффективных температур, определенных для взаимноперпендикулярных ориентаций электрического вектора антенны, к их сумме:

$$W = \frac{\bar{T}_{эфф1}^{\theta} - \bar{T}_{эфф2}^{\theta}}{\bar{T}_{эфф1}^{\theta} + \bar{T}_{эфф2}^{\theta}}. \quad (3)$$

Если ось диаграммы ориентирована в точку φ, ψ , усредненная по диаграмме эффективная температура равна

$$\bar{T}_{эфф1}^{\theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)]_1 F(\varphi, \psi) T_{эфф0}(\varphi, \psi, t) \times \\ \times \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi / \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi. \quad (4)$$

Для взаимно перпендикулярной ориентации электрического вектора антенны

$$\bar{T}_{эфф2}^{\theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)]_2 F(\varphi, \psi) T_{эфф0}(\varphi, \psi, t) \times \\ \times \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi / \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi, \quad (5)$$

В выражениях (4) и (5)

$$[1-R(\varphi, \psi)]_1 = [1-R_v(\varphi, \psi)] \sin^2(\gamma-\Delta) + [1-R_h(\varphi, \psi)] \cos^2(\gamma-\Delta),$$

$$[1-R(\varphi, \psi)]_2 = [1-R_v(\varphi, \psi)] \cos^2(\gamma-\Delta) + [1-R_h(\varphi, \psi)] \sin^2(\gamma-\Delta). \quad (6)$$

Здесь $R_v(\varphi, \psi)$ и $R_h(\varphi, \psi)$ — коэффициенты отражения Френеля по мощности для вертикальной и горизонтальной поляризации излучения; γ — угол между плоскостью главного меридиана и проекцией на картинную плоскость радиуса вектора, направленного из центра Луны в точку φ, ψ ; Δ — угол между плоскостью, в которой лежит электрический вектор антенны, и плоскостью главного меридиана.

Для определения коэффициента поляризации (3) необходимо найти значения эффективных температур, даваемых соотношениями (4) и (5). Подставляя в эти соотношения выражение диаграммы направленности в лунных координатах (2), излучательные способности $[1-R(\varphi, \psi)]_1$ и $[1-R(\varphi, \psi)]_2$ и учитывая, что $T_{эфф0}(\varphi, \psi, t)$ дается в виде гармонического ряда [5], получим общие выражения для определения эффективных температур $\bar{T}_{эфф1}^{\theta}$ и $\bar{T}_{эфф2}^{\theta}$ и, следовательно, для определения коэффициента поляризации (3).

Аналитическое решение соотношений (4), (5) не представляется возможным, и поэтому оно было выполнено на электронно-вычислительной машине для различных значений диэлектрической постоянной ϵ и ширины диаграммы направленности (на половинном уровне по мощности) θ .

Результаты расчета коэффициента поляризации для различных значений ϵ и θ приведены на рис. 1 как функции расстояния от центра диска.

Коэффициент поляризации, как следует из рис. 1, практически не зависит от ширины диаграммы (для $0 \leq \theta \leq 7'$) в центральной области лунного диска, ограниченной окружностью радиуса $0,6 R_L$. Внутри этой области усредняющее действие диаграммы можно не учитывать и при интерпретации экспериментальных результатов использовать известные соотношения для точечной диаграммы направленности [2].

Вблизи лимба Луны коэффициент поляризации существенным образом зависит от ширины диаграммы направленности, поэтому при интерпретации экспериментальных данных необходимо учитывать ее усредняющее действие. Заметим, что наличие усредняющего действия диаграммы направленности приводит к тому, что коэффициент поляризации

не достигает максимума на лимбе Луны. Однако измерение коэффициента поляризации на крыльях диаграммы (для $r/R_L > 1$) становится неточным ввиду существенного уменьшения температуры антенны,

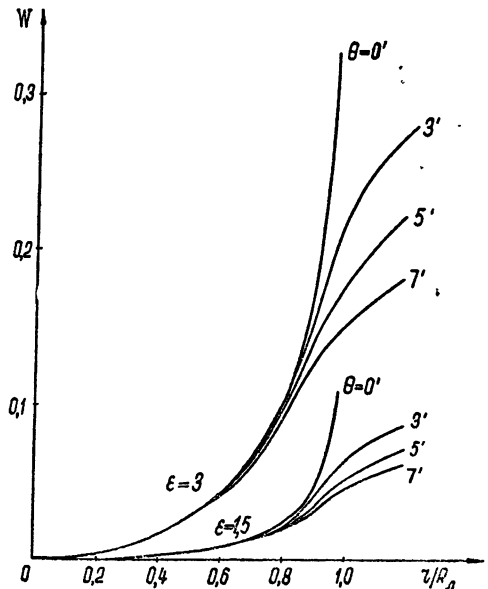


Рис. 1. Изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса диска Луны для различных значений ширины диаграммы направленности на половинном уровне по мощности. Предполагается, что поверхность Луны является идеально гладкой.

2. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ШЕРОХОВАТОЙ ЛУНЫ ПРИ УЧЕТЕ УСРЕДНЯЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ

Учет влияния шероховатости на поляризационные характеристики радиоизлучения Луны можно провести путем введения среднестатистической излучательной способности [1]

$$\overline{1-R(\varphi, \psi)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1-R(\varphi+\alpha, \psi+\beta)] P(\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

где $P(\alpha, \beta)$ — закон отклонения углов наклона нормали к элементарной площадке на шероховатой поверхности от нормали к гладкой поверхности.

В [3] для гауссова закона распределения неровностей были вычислены изменения излучательной способности в зависимости от координат φ, ψ для различных значений диэлектрической постоянной и различной дисперсии σ углов отклонения нормали.

Это позволяет, заменяя в соотношениях для гладкой Луны (4) и (5) излучательные способности $[1-R(\varphi, \psi)]_1$ и $[1-R(\varphi, \psi)]_2$ на среднестатистические излучательные способности $[\overline{1-R(\varphi, \psi)}]_1$ и $[\overline{1-R(\varphi, \psi)}]_2$ (возможность такой замены обоснована в [3]), рассчитать усредненные по диаграмме направленности эффективные температуры $\overline{T}_{эф\phi}^{вс}$ и $\overline{T}_{эф\phi}^{вс}$ 2 и, следовательно, определить коэффициент поляризации радиоизлучения с учетом шероховатости верхнего покрова Луны и усредняющего действия диаграммы направленности антенны. На рис. 2 представлены результаты расчета коэффициента поляризации как функции относительного расстояния оси диаграммы от центра диска Луны для $\epsilon = 1,5; 3$ и $\sigma = 0$ (идеализированный случай бесконечно узкой диаграммы направленности). На рис. 3, 4 приведены аналогичные результаты для диаграмм

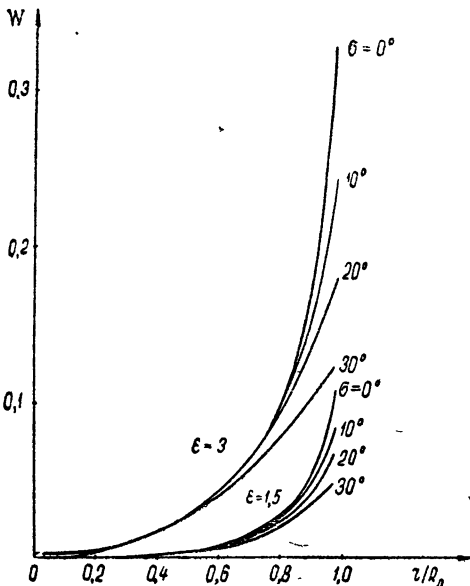


Рис. 2. Изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса диска Луны для бесконечно узкой диаграммы направленности и различной степени шероховатости верхнего покрова.

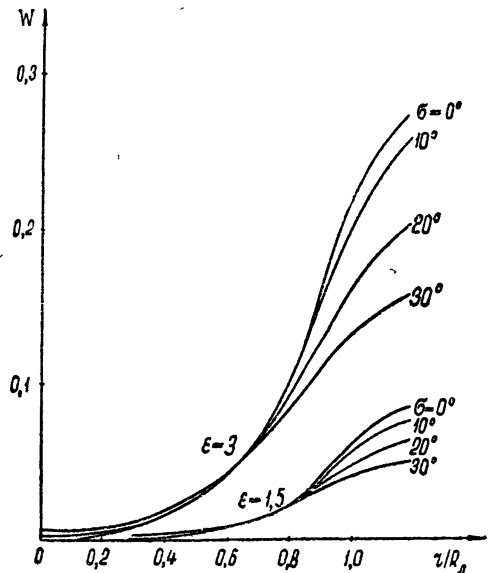


Рис. 3. Изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса диска Луны для различной степени шероховатости верхнего покрова. Ширина диаграммы на половинном уровне по мощности равна 3°.

мы направленности с шириной на половинном уровне по мощности, соответственно равной $\theta=3'$ и $\theta=7'$.

Из рисунков следует, что для $r/R_L \leq 0,6$ коэффициент поляризации радиоизлучения Луны весьма слабо зависит от геометрии поверхности (как и в случае гладкой поверхности), не зависит от ширины диаграммы и определяется в основном только диэлектрической постоянной. Следовательно, измерения коэффициента поляризации в этой области позволяют определить диэлектрическую постоянную верхнего покрова Луны.

Влияние шероховатости в значительной мере проявляется лишь вблизи лимба Луны, поэтому при известной величине диэлектрической постоянной коэффициент поляризации в этой области позволяет оценить величину шероховатости.

Проведенные нами расчеты показывают, что для $0 \leq \theta \leq 7'$ изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса не зависит от фазы Луны, направления сканирования и, как и следовало ожидать, определяется только диэлектрической постоянной, геометрией поверхности и усредняющим действием диаграммы направленности антенны.

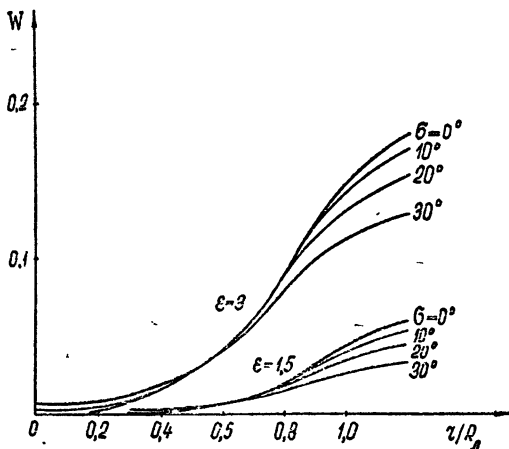


Рис. 4. Изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса диска Луны для различной степени шероховатости верхнего покрова. Ширина диаграммы на половинном уровне по мощности равна $7'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 79 (1954).
2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 1127 (1960).
3. В. А. Алексеев, Т. Н. Алешина, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).
4. T. Hagfors, J. Moriello, Radio Science, 64D, 1614 (1965).
5. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 81, 589 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 июля 1966 г.

POLARIZATION PARAMETERS OF LUNAR ROUGH SURFACE RADIATION WITH AVERAGING EFFECT OF ANTENNA PATTERN

V. A. Alekseev, T. N. Alyoshina, V. D. Krotikov

The authors consider the polarization parameters of the lunar radiation when taking into account an averaging effect of the antenna pattern for two cases: 1) when the Moon is smooth for radio waves, 2) when the Moon has smooth irregularities being much greater than the wavelength and the statistics of the tilt angle of which is subjected to the normal law. It is shown that within the area of the lunar disc confined by the circle with the radius $0.6 R_M$ (where R_M is the radius of the Moon), the averaging effect of the antenna pattern may be neglected. In the same region the polarization parameters do not practically depend on the dispersion of the tilt angles and are usable in determination of the dielectric constant. Near the lunar limb, the polarization parameters of radiation depend considerably on the dispersion of the tilt angle of irregularities and for the given antenna beamwidth, one may estimate the value of roughness of the upper layer of the Moon.

УДК 523.164

**Т-ОБРАЗНЫЙ РАДИОТЕЛЕСКОП ДИАПАЗОНА 10 ÷ 25 Мгц
С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ЛУЧОМ****Ю. М. Брук, Н. Ю. Гончаров, А. В. Мень, Л. Г. Содин, Н. К. Шарькин*

Приводится описание декаметрового радиотелескопа УТР-1 Института радиофизики и электроники АН УССР. Отличительными особенностями радиотелескопа являются широкополосность и дистанционное немеханическое управление лучом по двум координатам.

Для решения основных радиоастрономических задач в диапазоне декаметровых волн необходимы радиотелескопы, обладающие значительной эффективной площадью и разрешающей способностью. Создание таких инструментов, размеры которых при достигнутом уровне радиоастрономических исследований должны составлять сотни метров и даже километры, возможно только при использовании неподвижных антенн с электрическим качанием луча. В описываемом в настоящей работе радиотелескопе УТР-1 обеспечена достаточная широкополосность**, позволяющая вести одновременно исследования на любой частоте в диапазоне 10 ÷ 25 Мгц. Луч радиотелескопа управляется дистанционно, электрически, причем перевод луча из одного положения в любое другое может быть проведен в течение долей секунды. Для обеспечения широкополосности в радиотелескопе используется временная система фазирования [1-3] с дискретными двоичными фазовращателями. Для упрощения и удешевления фазировочных устройств применена этапная несинхронная система качания луча [2].

Разработка, сооружение и наладка радиотелескопа проводились в 1963—1964 гг. В 1965 г. были исследованы теоретически и экспериментально его основные параметры (КПД, эффективная площадь, диаграммы направленности), и в 1966 г. радиотелескоп введен в регулярную эксплуатацию.

1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ АНТЕННЫХ СИСТЕМ

Радиотелескоп УТР-1 состоит из двух антенн. Первая — север — юг (С—Ю) — однорядная, вытянута вдоль меридиана и содержит 80 горизонтальных широкополосных вибраторов***. Оси вибраторов размещены перпендикулярно оси антенны. Для улучшения согласования с системой фазирования в каждом вибраторе установлен специальный реактивный четырехполюсник, подобранный таким образом, чтобы обеспечить минимум коэффициента отражения в заданном диапазоне частот и секторе качания луча [4]. Из-за сложной зависимости входного импеданса виб-

* Работа докладывалась на V Всесоюзной конференции по радиоастрономии в 1965 г.

** Под широкополосностью понимается независимость ориентации луча от частоты и слабая зависимость параметров радиотелескопа от частоты.

*** Используются вибраторы того же типа, что и описанные в [2], но с размерами, увеличенными в 1,6 раза. Полная длина вибратора 8 м, диаметр 1,8 м, высота над землей 3,5 м.

ратора от частоты и положения луча полностью снять отражения от излучателей невозможно, однако в среднем коэффициент отражения удалось снизить с 0,5 до 0,2, что дает увеличение КПД с 0,75 до 0,96. Вторая антенна — запад — восток (З—В) — состоит из 128 вибраторов, размещенных в двух рядах. Схема размещения антенны приведена на рис. 1, фотография антенн — на рис. 2 и 3. Т-образная схема размещения антенн выбрана как обеспечивающая при заданных размерах (заданном числе излучателей) максимальную разрешающую способность [5].

При работе радиотелескопа с перемножением сигналов двух антенн результирующая диаграмма направленности

$$F(u, v) = f_{\text{С-Ю}}(u, v) f_{\text{З-В}}(u, v) \cos \varphi_{12}(u, v) \quad (1)$$

при равноамплитудном распределении эквивалентна диаграмме направленности антенны, показанной на рис. 1 пунктиром. Здесь $u = \cos \varepsilon \sin A = \cos \delta \sin t$, $v = \cos \varepsilon \cos A = -\cos \beta \sin \delta + \sin \beta \cos \delta \cos t$, ε — угол места, A — азимут, δ — склонение, t — часовой угол, β — широта центра радиотелескопа, $f(u, v)$ — диаграмма по полю, φ_{12} — сдвиг фаз между сигналами антенн.

Управление лучом радиотелескопа проводится по двум координатам u и v , причем сектор управления по v составляет $-1 \leq v \leq 1$, а по u имеется 7 дискретных положений луча: $-0,33$; $-0,22$; $-0,11$; 0 ; $0,11$; $0,22$ и $0,33$, что охватывает примерно $\pm 1,5$ часа по t . Для устранения в указанных секторах по u и v дифракционных лепестков для частот $f \leq 20$ Мгц расстояния между излучателями выбраны равными 7,5 м вдоль меридиана и 9 м вдоль параллели. При этом полная длина антенны С—Ю равна 600 м, З—В—576 м.

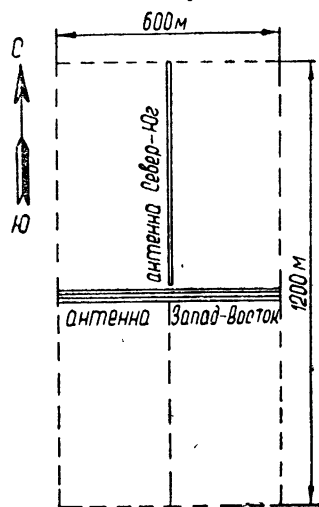


Рис. 1.

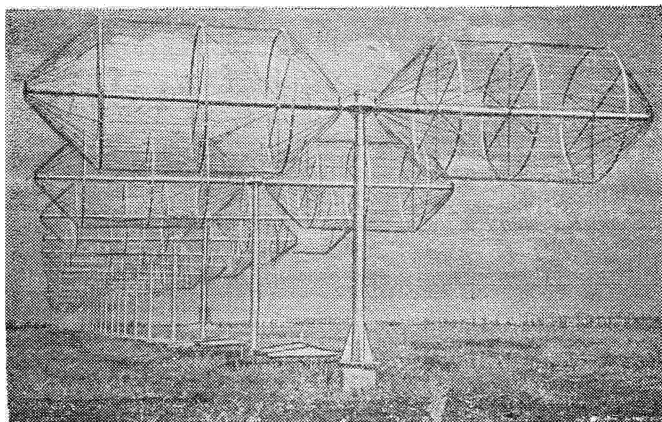


Рис. 2.

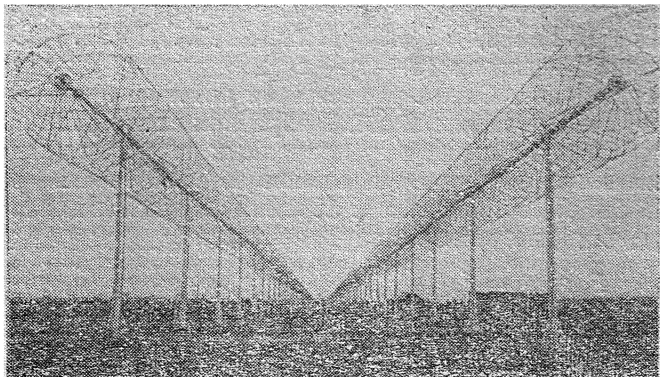


Рис. 3.

2. СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ЛУЧОМ

Как видно из (1), для управления лучом радиотелескопа необходимы три системы фазирования: для антенны С—Ю, антенны З—В и для интерференционного множителя (система взаимного фазирования антенн).

Система фазирования антенны С—Ю. Управление лучом однорядной антенны С—Ю должно осуществляться только по координате ν . Соответствующая система фазирования выполнена по схеме рис. 4. Вся антенна разбита на три секции: две крайние по 32 вибратора и среднюю из 16 вибраторов. Фазирование и суммирование сигналов проводится по двоично-этажной схеме, кроме последнего 6-го этажа, где вначале суммируются и фазироваться крайние секции, а затем к ним подсоединяется центральная секция. В связи с тем, что фазовращатели более низких этажей фазировать как бы антенны малых размеров с относительно слабонаправленными диаграммами направленности, число положений луча в этих фазовращателях может быть уменьшено по сравнению с числом положений луча всей антенны [2]. Поскольку количество фазовращателей

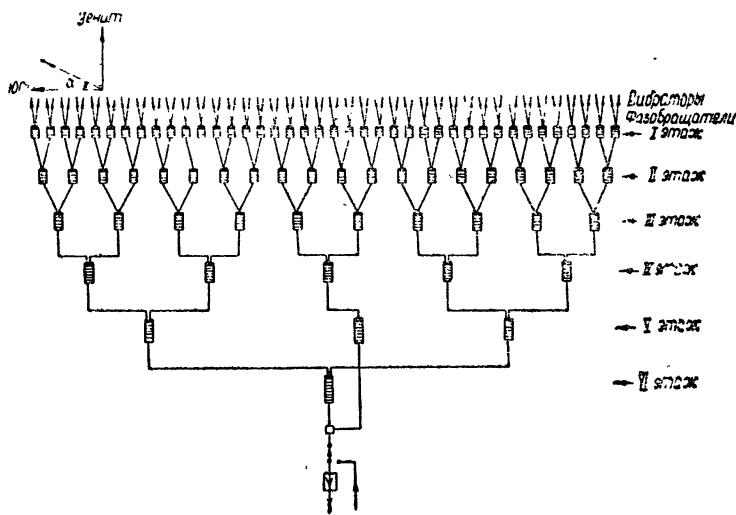


Рис. 4.

ляционном режиме. В связи с этим антенна разбита на две независимые половины (западную и восточную), фазирование которых проводится отдельными системами. Схема системы фазирования приведена на рис. 6. Так как сектор управления по u невелик ($|u| \leq 0,33$), оказалось возможным без заметного ухудшения параметров антенны соединить пары вибраторов параллельно, поместив таким образом по 32 сложных излучателя в каждом ряду. Дальнейшее фазирование проводится двоиным методом в пять этажей. Число положений луча в каждом этаже равно семи. Фазовращатели антенны З—В в принципе такие же, как и в антенне С—Ю. Конструктивно два фазовращателя однотипных вибраторов двух рядов объединены в одном корпусе.

Система взаимного фазирования антенн. Задача системы взаимного фазирования состоит в том, чтобы обеспечить правильную ориен-

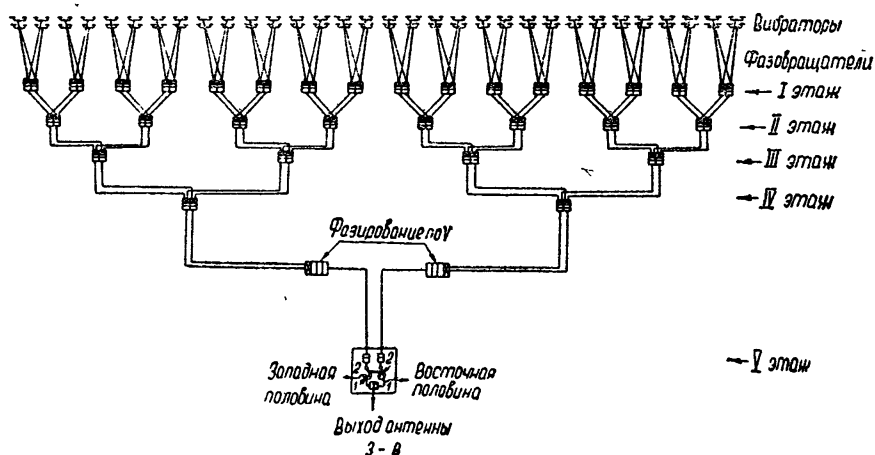


Рис. 6.

тировку интерференционного множителя: $\varphi_{12} = 0$ при $u = u_0$, $v = v_0$. Сдвиг фаз φ_{12} определяется тремя независимыми факторами: различием в коммуникационных длинах антенных кабелей и систем фазирования, различием систем согласования, связанным с несовпадением входных импедансов излучателей обеих антенн, и, наконец, пространственным разносом антенн. Первый фактор устраняется достаточно просто, путем введения дополнительных уравнивающих кабелей. Два других фактора требуют более детального анализа.

Для определенности рассмотрим линейную эквидистантную антенну-решетку, вытянутую вдоль линии меридиана. Сигнал на выходе такой антенны равен

$$E_a = \sum_{k=1}^N A_k \exp(-i\varphi_k) \exp\left(i \frac{2\pi d_k}{\lambda} v\right), \quad (2)$$

где $A_k \exp(-i\varphi_k)$ — ток k -го излучателя, d_k — расстояние k -го излучателя от произвольно выбранной точки отсчета. Заменим индекс суммирования $x = k - \frac{N+1}{2}$. Тогда

$$E_a = \exp\left(i \frac{2\pi d_{cp}}{\lambda} v\right) \sum_{x=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_x \exp(-i\varphi_x) \exp\left(i \frac{2\pi d}{\lambda} xv\right), \quad (3)$$

где $d_{\text{ср}}$ — расстояние от начала отсчета до геометрического центра антенны, d — расстояние между соседними излучателями. Если токи вибраторов таковы, что $A(x)$ — четная функция, а $\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x)$ — нечетная функция, φ_0 — фаза центра антенны*, то

$$E_a = \exp\left(i \frac{2\pi d_{\text{ср}}}{\lambda} v\right) \exp(-i\varphi_0) \sum_{x=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A x \exp(-i\varphi_1(x)) \times \quad (4)$$

$$\times \exp\left(i \frac{2\pi d}{\lambda} xv\right),$$

причем сумма в (4) чисто вещественна и совпадает с амплитудной диаграммой антенны. Зависящая от направления прихода сигналов часть фазового сдвига такая же, как если бы заменить всю антенну единственным излучателем, расположенным в ее геометрическом центре.

Таким образом, взаимное фазирование двух многоэлементных электрически фазированных антенн может быть сведено к фазированию гипотетического интерферометра, состоящего из двух излучателей, установленных в геометрических центрах антенн, если предварительно в каждой из них скомпенсировать фазовые задержки φ_0 . Задержки φ_0 при сделанных предположениях определяются только системой фазирования по v или u и равны половине максимального фазового сдвига в системе фазирования. Для каждой из антенн такая компенсация практически проводится путем подключения к выходу другой антенны фазовращателя, дающего фазовую задержку φ_0^{**} , после чего взаимное фазирование антенн радиотелескопа обеспечивается дополнительным фазовращателем с фазовым сдвигом $2\pi Dv_0/\lambda$, где D — расстояние между геометрическими центрами антенн.

На рис. 7 приведена блок-схема взаимного фазирования. На этой схеме фазовращатель Φ_1 , включенный в антенну З—В, компенсирует средний набег фаз φ_0 в системе фазирования антенны С—Ю и средний набег в системе фазирования по v антенны З—В. Это осуществляется путем вычитания соответствующих величин задержек антенны З—В из задержек, требуемых для компенсации средней фазы антенны С—Ю. Аналогично Φ_2 компенсирует средний набег фаз в системе фазирования антенны З—В по u . После включения фазовращателей можно считать, что интерференционный множитель формируется двумя излучателями в точках O_1 и O_2 . Для фазирования этих излучателей применен фазовращатель Φ_3^{***} , обеспечивающий фазирование только по v . Ввиду того, что ось антенны С—Ю проходит точно через центр антенны З—В, интерференционный множитель от u не зависит.

Помимо фазовращателей системы взаимного фазирования антенн, на рис. 7 указана система высокочастотной калибровки Φ_4, Φ_5 . Через эту систему эталонный сигнал вводится в первый вибратор антенны С—Ю и в два центральных вибратора антенны З—В. Фазовращатели системы калибровки выполнены таким образом, что на выходе обеих антенн калибрационные сигналы синфазны при любом положении луча.

* В нашем случае эти условия выполняются приближенно: из-за амплитудно-фазовых ошибок и экспоненциального распределения токов имеют место незначительные отклонения от этих условий.

** Можно полагать, что благодаря указанной компенсации осуществляется фиксация фазовых центров антенн в их геометрических центрах.

*** Фазовращатель Φ_3 состоит из двух фазовращателей Φ'_3 и Φ''_3 . Первый работает при приеме сигналов с юга, второй — с севера.

При этом сигналы калибровки проходят, по существу, тот же путь, что и сигналы, принятые из эфира, что позволяет проводить проверку амплитудно-фазовых характеристик антенн.

Следует отметить, что в принципе можно обойтись без системы взаимного фазирования антенн, если одновременно вести прием двумя каналами, причем в одном из каналов до перемножения сигнал какой-либо антенны следует сдвинуть на 90° . При этом сумма квадратов сиг-

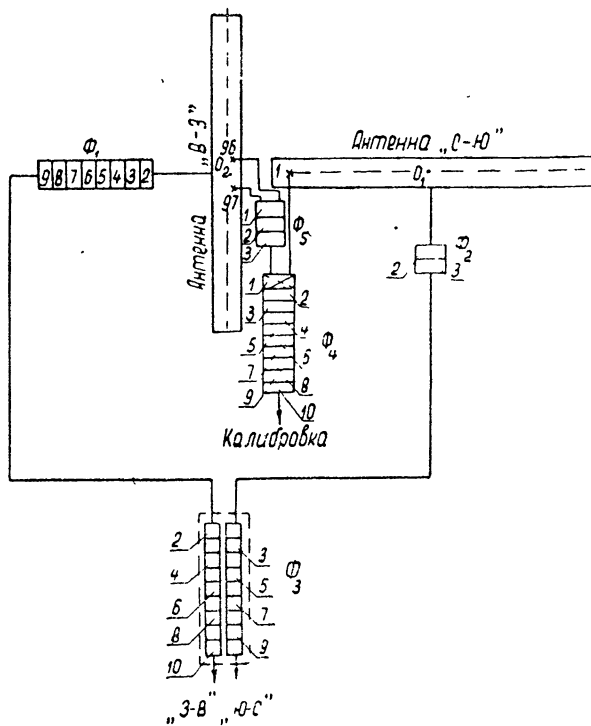


Рис. 7.

налов на выходах двух каналов нечувствительна к взаимной дефазировке антенн. Однако в этом случае теряется дополнительная пространственная селекция за счет интерференционного множителя и удваивается объем приемной аппаратуры.

3. ПАРАМЕТРЫ РАДИОТЕЛЕСКОПА

Диаграммы направленности. При совместной работе двух антенн радиотелескопа в режиме перемножения их диаграмм, как следует из (1), диаграмма направленности по u (по часовому углу) определяется антенной З—В, а по v (по склонению или по углу места)— антенной С—Ю. Соответствующие диаграммы направленности приведены на рис. 8 и 9. Как видно из рисунка 8, ширина диаграммы по склонению составляет примерно 1° на средней частоте на уровне 0,5 по мощности. Длительность записи точечного источника на средней частоте, как видно из рис. 9, составляет около 10 минут.

При использовании одной антенны З—В в режиме перемножения сигналов ее половин диаграмма направленности по u имеет вид, показанный на рис. 9 пунктиром. При этом ширина диаграммы по склонению равна приблизительно 40° .

Из-за несинхронного качания диаграмм этажей возникают дополнительные боковые лепестки, число которых примерно вдвое превышает число этажей фазирования [2]. Величина этих боковых лепестков не превышает 7% по полю.

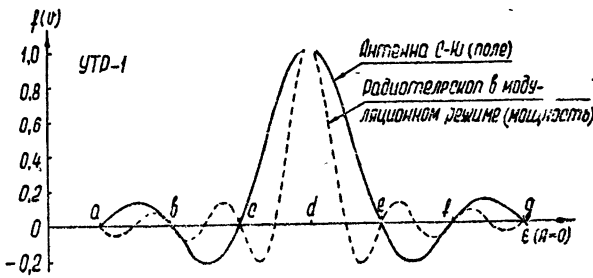


Рис. 8.

абсцисса		a	b	c	d	e	f	g
$\lambda=12,5 \text{ м}$	$V_0 = 0$	86°25'	87°37'	88°48'	90°	91°12'	92°23'	93°35'
	$V_0 = 0,3907$	63°03'	64°23'	65°42'	67°	68°18'	69°37'	70°57'
	$V_0 = 0,7660$	33°19'	35°25'	38°06'	40°	41°54'	44°35'	46°41'
$\lambda=18 \text{ м}$	$V_0 = 0$	84°50'	86°34'	88°17'	90°	91°43'	93°26'	95°10'
	$V_0 = 0,3907$	61°16'	63°13'	65°07'	67°	68°51'	70°41'	72°30'
	$V_0 = 0,7660$	31°07'	34°18'	37°15'	40°	42°36'	45°05'	47°28'
$\lambda=25 \text{ м}$	$V_0 = 0$	82°49'	85°13'	87°37'	90°	92°23'	94°47'	97°11'
	$V_0 = 0,3907$	58°57'	61°42'	64°23'	67°	69°34'	72°06'	74°35'
	$V_0 = 0,7660$	27°00'	31°52'	36°08'	40°	43°35'	46°57'	50°08'

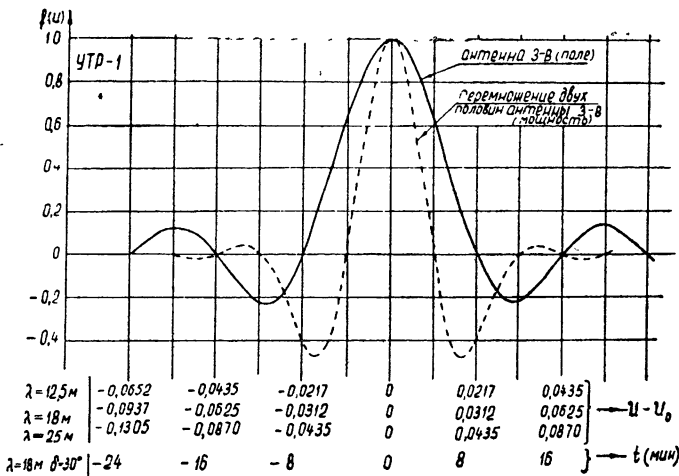


Рис. 9.

Эффективная площадь. Эффективная площадь каждой из антенн радиотелескопа равна

$$A_{эфф} = \frac{D\lambda^2}{4\pi} \eta_1 \eta_2 x_1 x_2 x_3, \quad (5)$$

где D — коэффициент направленного действия антенны, η_1 — коэффициент полезного действия системы антенных коммуникаций и фазирования, η_2 — коэффициент полезного действия, связанный с потерями в земле, κ_1 — коэффициент снижения КНД за счет неравномерной запитки вибраторов, κ_2 — коэффициент снижения КНД за счет несинхронного качания множителей этажей, κ_3 — коэффициент изменения КНД из-за неидеальности отражения от земли.

Коэффициент направленного действия рассчитывался на ЭВЦМ в предположении, что токи всех излучателей одинаковы. Соответствующие значения электрической площади антенн $A = D\lambda^2/4\pi$ приведены на рис. 10.

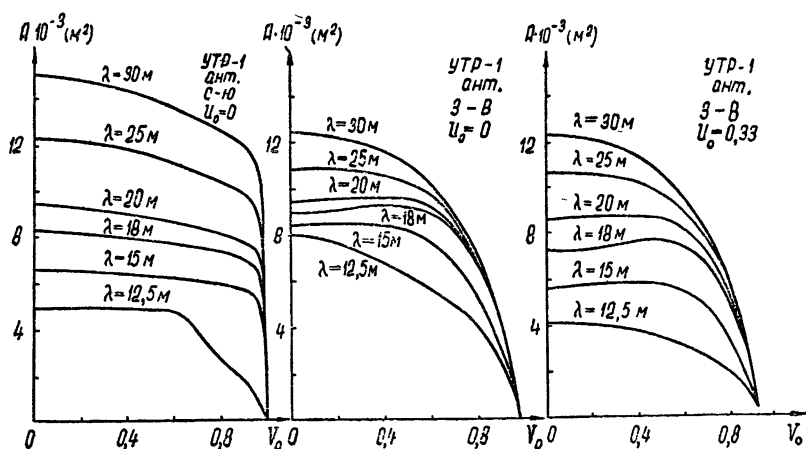


Рис. 10.

КПД η_1 определялся экспериментально путём измерения потерь в действующих антеннах*. На рис. 11 и 12 приведены значения η_1 в зависимости от частоты и угла наклона луча по v .

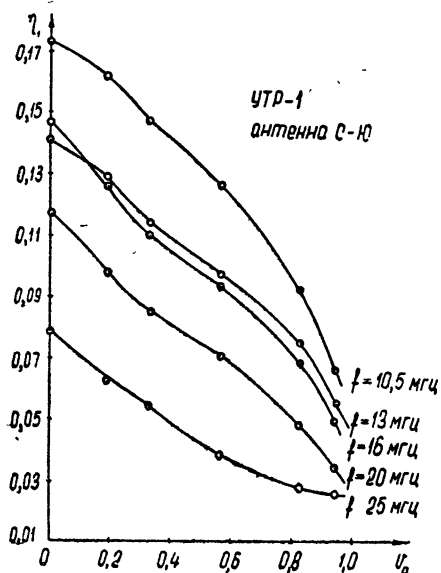


Рис. 11.

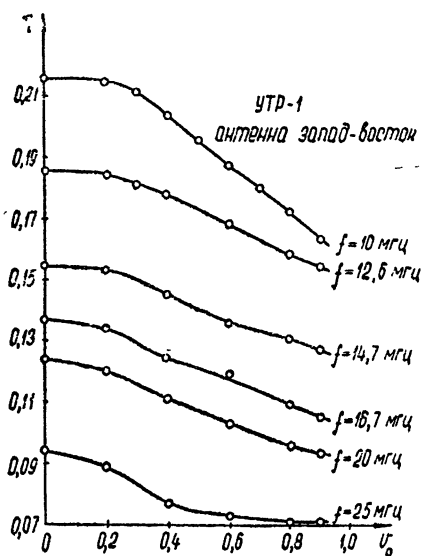


Рис. 12.

* Падающие и отраженные волны в точке запитки всех вибраторов выделялись направленным ответвителем и их ослабление сравнительно со входным сигналом антенны определялось с помощью калиброванных аттенуаторов.

Потери в земле, определяемые как разность между полной мощностью, подведенной к антенне, и мощностью, излученной в верхнюю полусферу, находились расчетным путем [7] для двух значений комплексной диэлектрической проницаемости земли: $\epsilon' = 4 - i2$ (сухая земля) и $\epsilon' = 10 - i10$ (влажная земля). Оказалось, что разброс при изменении ϵ' не превышает $\pm 8\%$, поэтому приводятся средние значения для двух видов почвы. Значения η_2 для антенны С—Ю приведены на рис. 13, для антенны З—В — в таблице 2 (η_2 для антенны З—В практически не зависит ни от u_0 , ни от v_0).

Таблица 2

Частота (МГц)	8,57	12,85	17,14	21,42	25,72
η_2	0,59	0,69	0,74	0,77	0,78

Из приведенных данных видно, что КПД антенны С—Ю на высшей частоте диапазона составляет всего около 2%. Однако, благодаря большому уровню фона космического излучения (яркостная температура $30000 \div 100000^\circ\text{K}$), при установке непосредственно на выходах антенн высокочастотных усилителей с шумфактором около трех не наблюдается значительного ухудшения чувствительности радиотелескопа.

Снижение коэффициента направленного действия за счет неравномерного амплитудного распределения на вибраторах имеет место в антенне С—Ю; оно связано с прогрессирующим ростом потерь в фазовращателях от одного края антенны к другому. Величина κ_1 определялась расчетным способом по измеренным относительным значениям токов вибраторов и оказалась равной в худшей точке ($f=20 \text{ МГц}$, $v_0=0,94$) $\kappa_1 = 0,88$.

Изменение КНД из-за неидеальности отражения от земли определялось расчетным путем для $\epsilon' = 4 - i2$ и $\epsilon' = 10 - i10$. Оказалось, что величина κ_3 лежит в пределах $0,83 \leq \kappa_3 \leq 1,3$. Снижение КНД за счет несинхронного качания диаграмм этажей может быть точно рассчитано по методике, развитой в [2]. Величина этого снижения не превышает 13%.

Таким образом, сочетание экспериментальных исследований с теоретически-расчетными методами позволило определить реальные эффективные площади антенн с учетом всех факторов. Измерение амплитуд и фаз токов всех вибраторов показало, что разброс их относительно средних значений невелик и вызываемое этим разбросом дополнительное снижение КНД не превышает 5%.

Анализ погрешности всех величин, входящих в (5), показал, что вероятная погрешность $A_{\text{эфф}}$ равна 14% при максимальной ошибке 30%, что позволяет проводить с помощью радиотелескопа УТР-1 абсолютные измерения интенсивности дискретных источников и фона космического радиоизлучения. Это подтвердилось при измерениях потоков дискретных источников. Так, для источника «Дева-А» расхождение с данными, приведенными в [8] и полученными при калибровке

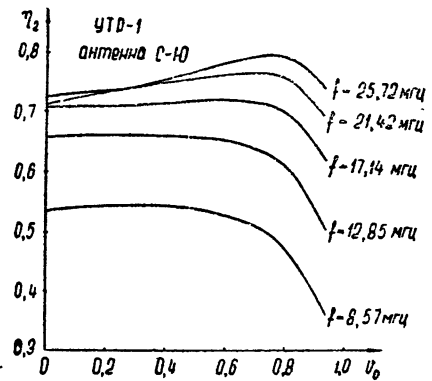


Рис. 13.

антенн эталонными полуволновыми вибраторами, не превышает $10 \div 15\%$. При проведении относительных измерений требуется знание лишь угловой зависимости эффективных площадей антенн $A_{эфф}(v_{01})/A_{эфф}(v_{02})$. Анализ показал, что погрешность этой величины не превышает 10% .

4. БЛОК-СХЕМА И РЕЖИМЫ РАБОТЫ РАДИОТЕЛЕСКОПА

Блок-схема радиотелескопа приведена на рис. 14. Выходные сигналы антенн усиливаются антенными усилителями с низким уровнем шума и через магистральные кабели подаются в аппаратную. Основной режим работы телескопа — режим перемножения сигналов двух антенн — осуществляется по методу Райла. Коммутация фазы сигнала одной из антенн на 180° производится широкополосным диодным переключателем; фазоперевертывающим устройством является ферритовый трансформатор. После суммирования сигналов обеих антенн гибридным сумматором результирующий сигнал разветвляется на пять независимых приемных каналов, представляющих собой радиоприемники типа Р-250 м с приставками, квадратирующими сигнал и выделяющими частоту коммутации.

Для калибровки чувствительности приемной аппаратуры ко входам обеих антенных усилителей синфазно подводятся эталонные шумовые сигналы. При этом для обеспечения синфазности сигналов на входе приемного устройства все фазовращатели системы взаимного фазирования устанавливаются в нулевое положение.

Калибровку чувствительности приемной аппаратуры можно производить также через систему высокочастотной калибровки, показанную на рис. 7. При этом автоматически учитываются изменения потерь в антенно-фидерной системе, связанные с изменением температуры окружающей среды.

Второй режим работы, используемый в тех случаях, когда не требуется высокого разрешения по склонению, заключается в перемножении сигналов двух половин антенны З—В. Антенна С—Ю может при этом использоваться независимо.

Как видно из рис. 14, предусмотрены также отдельные выходы антенн, предназначенные для работы в компенсационном режиме.

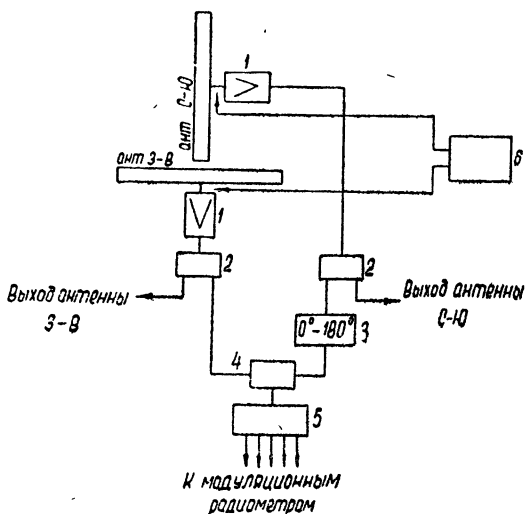


Рис. 14.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность С. Я. Брауде за неизменный интерес и помощь в работе, Г. А. Инютину, оказавшему помощь в монтаже и наладке радиотелескопа, и И. Н. Жуку, принимавшему участие в обработке результатов измерения параметров антенны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Л. Базелян, Ю. М. Брук, И. Н. Жук, А. В. Мень, Л. Г. Содин, Н. К. Шарыкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 215 (1964).
2. Ю. М. Брук, Л. Г. Содин, Радиотехника, 21, № 7, 16 (1966).
3. Л. Л. Базелян, Ю. М. Брук, И. Н. Жук, А. В. Мень, Н. К. Шарыкин, Электросвязь, № 5, 14 (1964).
4. А. Л. Драбжин, В. Л. Зузенко, Антенно-фидерные устройства, изд. Сов. радио, М, 1961.
5. R. N. Bracewell, IRE Trans., AP-9, № 1, 59 (1961).
6. C. L. Ruthroff, Proc. IRE, 47, № 8, 1337 (1959).
7. Л. Г. Содин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
8. Л. Л. Базелян, С. Я. Брауде, Ю. М. Брук, И. Н. Жук, А. В. Мень, Б. П. Рябов, Л. Г. Содин, Н. К. Шарыкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 4, 897 (1963).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
29 июля 1966 г.

T-FORM RADIO TELESCOPE WITH ELECTRICAL BEAM SCANNING
IN $10 \div 25$ Mc/s RANGE

Yu. M. Brook, N. Yu. Goncharov, A. V. Men', L. G. Sodin, N. K. Sharykin

The description of the decameter UTR-1 telescope of the Radiophysics and Electronics Institute of UkSSR Academy of Science is presented. The distinctive features of the radio telescope are a wide frequency band and distance nonmechanical control of the beam position by two coordinates.

УДК 621.396.671.3 : 621.391.173

О ВЛИЯНИИ ПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА НА ВЕЛИЧИНУ ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ПРИНИМАЕМОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов

Рассмотрена задача о влиянии на величину корреляции между флуктуациями радиоволн разной частоты направленного антенного устройства, расположенного на произвольном расстоянии от слоя с неоднородностями, для произвольных флуктуаций фазы и с учетом рефракции волн в слое. Получены общие формулы, связывающие функции частотно-пространственной корреляции флуктуирующего поля на входе и выходе приемных антенн. Для нормального распределения компонент комплексного поля на выходе приемного устройства вычислена корреляция между квадратами ошибающих флуктуаций радиоволн разной частоты. Проведен расчет частотной корреляции флуктуаций принимаемого излучения при использовании антенны с гауссовой формой диаграммы направленности.

В работе [1] была рассмотрена задача о влиянии на частотную корреляцию флуктуаций амплитуд и фаз волны приемной антенны, расположенной на выходе слоя со случайными неоднородностями. Решение в [1] получено в приближении метода плавных возмущений. В ряде случаев, однако, (например, при распространении радиоволн в ионосфере), когда слой с неоднородностями и плоскость наблюдения разделены частью свободного пространства, это решение не совсем корректно [2,3] и при больших возмущениях фазы волны в слое приводит к неверному результату.

В настоящей работе проведен расчет влияния приемного устройства на частотную корреляцию флуктуаций излучения, принимаемого на произвольном расстоянии от слоя с неоднородностями. Для нахождения поля на выходе приемного устройства используются формулы работ [2,3], позволяющие получить решение задачи в более общем случае.

1. ЧАСТОТНО-ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПОЛЯ

Обозначим поле волны частоты ω на входе приемного устройства через

$$E_{0\omega}(r, t) = A_{0\omega}(r, t) \exp[iS_{0\omega}(r, t)].$$

Для определенности будем считать, что случайные изменения амплитуды $A_{0\omega}$ и фазы $S_{0\omega}$ волны на входе приемного устройства вызваны неоднородностями показателя преломления, расположенными на расстоянии L от точки наблюдения. Запишем поле волны на выходе приемного устройства в следующем виде [2]:

$$E_{\omega} = \int_{S_{\omega}} E_{0\omega} d\sigma, \quad \bar{E}_{\omega} = \bar{E}_{0\omega} \Sigma_{\omega}, \quad (1)$$

где Σ_{ω} и \bar{E}_{ω} — эффективная площадь антенны и среднее поле на выходе антенного устройства для волны частоты ω .

Флуктуации поля волны на частоте ω на выходе приемного устройства будем характеризовать функцией

$$f_{\omega} = f_{1\omega} + if_{2\omega} = \frac{E_{\omega} - \bar{E}_{\omega}}{E'_{\omega}} = \frac{\int (E_{0\omega} - \bar{E}_{0\omega}) d\sigma}{\int E'_{0\omega} d\sigma} = \frac{1}{\Sigma_{\omega}} \int f_{0\omega} d\sigma, \quad (2)$$

где $E'_{0\omega}$ — поле падающей на слой волны.

Компоненты $f_{1\omega}$ и $f_{2\omega}$ определяют флуктуации амплитуды и фазы поля на выходе приемной антенны. Легко показать, что при малых флуктуациях

$$f_{\omega} = i(\Delta S)_{\omega} + \left[\ln \frac{A}{A_0} \right]_{\omega}, \quad (3)$$

где A_0 — амплитуда падающей на слой волны, $(\Delta S)_{\omega}$ и $\left[\ln \frac{A}{A_0} \right]_{\omega}$ — случайный набег фазы и случайный уровень волны на выходе приемного устройства.

Найдем выражения для функций частотно-пространственной корреляции флуктуаций комплексного поля f_{ω} при наличии в точках приема антенн конечных размеров. Для решения этой задачи, следуя [2], введем корреляционные функции комплексного поля частоты ω_1 и ω_2 на выходе антенных устройств, разнесенных на расстояние d :

$$\left. \begin{aligned} R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}^*}(d, \tau) &= \overline{f_{\omega_1}(t) f_{\omega_2}^*(t + \tau, d)} \\ R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}(d, \tau) &= \overline{f_{\omega_1}(t) f_{\omega_2}(t + \tau, d)} \end{aligned} \right\} = R_{f_{1\omega_1}, f_{1\omega_2}}(d, \tau) \pm \pm R_{f_{2\omega_1}, f_{2\omega_2}}(d, \tau) + i [R_{f_{2\omega_1}, f_{1\omega_2}}(d, \tau) \mp R_{f_{1\omega_1}, f_{2\omega_2}}(d, \tau)]. \quad (4)$$

Из (4) легко получить

$$\left. \begin{aligned} R_{f_{1\omega_1}, f_{1\omega_2}}(d, \tau) \\ R_{f_{2\omega_1}, f_{2\omega_2}}(d, \tau) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}^*}(d, \tau) \pm R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}(d, \tau)], \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{f_{2\omega_1}, f_{1\omega_2}}(d, \tau) \\ R_{f_{1\omega_1}, f_{2\omega_2}}(d, \tau) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}(d, \tau) \pm R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}^*}(d, \tau)].$$

При малых флуктуациях амплитуды и фазы поля на выходе приемного устройства, согласно (3), $f_{1\omega} = (\Delta A/A_0)_{\omega}$ и $f_{2\omega} = (\Delta S)_{\omega}$, и формулы (5) характеризуют корреляционные свойства флуктуаций амплитуды и фазы поля.

Запишем (2) в следующем виде:

$$f_{\omega}(t) = \frac{1}{\Sigma_{\omega}} \int_{\Sigma_{\omega}} f_{0\omega}(x, y, t) dx dy = \frac{1}{\Sigma_{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{0\omega}(x, y, t) \times \times K_{\omega}(x, y) dx dy, \quad (6)$$

где функция $K_{\omega}(x, y)$ определяет распределение регулярных токов частоты ω в раскрыве антенны:

$$K_{\omega}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{на апертуре } \Sigma_{\omega} \text{ антенны} \\ 0 & \text{вне апертуры} \end{cases}$$

Используя (6), легко получить следующие выражения для искоемых частотно-пространственных функций корреляции флуктуаций поля:

$$\left. \begin{aligned} R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}^*}(d, \tau) \\ R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}(d, \tau) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\Sigma_{\omega_1} \Sigma_{\omega_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int \left\{ \begin{aligned} R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}^*}(\xi, \eta, \tau) \\ R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}}(\xi, \eta, \tau) \end{aligned} \right\} \times \\ \times R_{k_{\omega_1, \omega_2}}(\xi - d, \eta) d\xi d\eta, \quad (7)$$

где

$$R_{k_{\omega_1, \omega_2}}(\xi - d, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int K_{\omega_1}(x, y) K_{\omega_2}(x - (\xi - d), y - \eta) dx dy$$

— корреляционная функция распределения токов разной частоты в раскрытых двух антенн, смещенных относительно друг друга на расстояние d вдоль оси x ; $R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}^*}$ и $R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}}$ — частотно-пространственные функции корреляции флуктуаций комплексного поля на входе антенных устройств.

В случае совмещенных антенн ($d = 0$)* соотношения (7) определяют общую связь между функциями корреляции радиоволн разной частоты на входе и выходе приемного устройства. Из этих соотношений, в частности, следует, что при использовании всенаправленного приемного устройства (размер антенны много меньше размера неоднородностей поля) $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}^*}(\tau)$ и $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}(\tau)$ определяются соответственно функциями $R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}^*}(0, 0, \tau)$ и $R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}}(0, 0, \tau)$, т. е. в этом случае приемное устройство не оказывает влияния на величину частотной корреляции флуктуаций принимаемого излучения.

2. КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ КВАДРАТАМИ ОГИБАЮЩИХ СИГНАЛОВ РАЗНЫХ ЧАСТОТ В ЗОНЕ ФРАУНГФЕРА

Рассмотрим корреляцию между квадратами огибающих сигналов разных частот для произвольных возмущений поля волны на выходе приемного устройства. С этой целью вычислим коэффициент корреляции:

$$\rho_{A^2, \omega} = \frac{\overline{v_{\omega_1}^2 v_{\omega_2}^2} - \overline{v_{\omega_1}^2} \overline{v_{\omega_2}^2}}{\left[\overline{v_{\omega_1}^4} - (\overline{v_{\omega_1}^2})^2 \right]^{1/2} \left[\overline{v_{\omega_2}^4} - (\overline{v_{\omega_2}^2})^2 \right]^{1/2}}, \quad (8)$$

где v_{ω_1} и v_{ω_2} — напряжения сигналов частоты ω_1 и ω_2 на выходе приемного устройства.

Как известно, в зоне Фраунгофера компоненты поля $f_{01\omega}$ и $f_{02\omega}$ статистически независимы и распределены по нормальному закону. При этих условиях, как следует из (2), такое же распределение имеют и компоненты поля $f_{1\omega}$ и $f_{2\omega}$ на выходе приемного устройства**. Учитывая это обстоятельство и проводя вычисления, аналогичные [3], получаем для коэффициента корреляции (8) следующее выражение:

* В дальнейшем этот случай и будет рассматриваться

** Компоненты комплексного поля f_{ω} на выходе остронаправленного приемного устройства (размер антенны много больше размера неоднородностей поля) имеют нормальное распределение. Поэтому в случае остронаправленного устройства общее выражение для коэффициента корреляции $\rho_{A^2, \omega}$ (см. (12)) справедливо не только во фраунгоферовой зоне, но и на произвольном расстоянии L от слоя с неоднородностями.

$$\rho_{A^2, \omega} = \left(\frac{P_{s1} P_{s2}}{P_1 P_2} \right)^{1/2} R^2 + 4 \left(\frac{P_1 P_2 P_{01} P_{02}}{P_{s1}^2 P_{s2}^2} \right)^{1/2} R_{f_{1\omega_1} f_{1\omega_2}} \times \\ \times \left[\left(2 + \frac{P_{s1}}{P_1} \right) \left(2 + \frac{P_{s2}}{P_2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (9)$$

где P_{sk} и P_k — мощности флуктуирующего и среднего полей на частотах ω_k ($k=1,2$); R^2 — коэффициент корреляции между квадратами амплитуд флуктуирующего поля f_ω на частотах ω_1 и ω_2 на выходе приемного устройства:

$$R^2 = \frac{P_{01} P_{02}}{P_{s1} P_{s2}} |R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}^*|^2. \quad (10)$$

Здесь P_{0k} — мощность регулярного сигнала частоты ω_k ($k=1,2$) на выходе антенного устройства $P_{0\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\omega}^2 A_0^2$ (см. (3)). Входящие в формулы (9), (10) отношения мощностей $(P_s/P_0)_\omega$ и $(P_s/P)_\omega$, как легко показать, равны

$$\left(\frac{P_s}{P_0} \right)_\omega = R_{f_\omega f_\omega}^*, \quad \left(\frac{P_s}{P} \right)_\omega = \frac{R_{f_\omega f_\omega}^*}{1 - R_{f_{0\omega} f_{0\omega}}}. \quad (11)$$

Заметим, что выражение (9) для коэффициента корреляции справедливо в частном случае, когда $R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}^* \gg R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}}$. Если при вычислении $\rho_{A^2, \omega}$ учесть, что для нормального распределения компонент комплексного поля f_ω (2) справедливо равенство [4]

$$\overline{f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{2\omega_1} f_{2\omega_2}} = \overline{f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{2\omega_1} f_{2\omega_2}} + \overline{f_{1\omega_1} f_{2\omega_1} f_{1\omega_2} f_{2\omega_2}} + \overline{f_{1\omega_1} f_{2\omega_2} f_{1\omega_2} f_{2\omega_1}},$$

то можно получить общее выражение для коэффициента корреляции $\rho_{A^2, \omega}$:

$$\rho_{A^2, \omega} = \left[4P_{01} P_{02} \sum_{i, k=1}^2 R_{f_{i\omega_1} f_{k\omega_2}}^2 + 8\sqrt{P_{01} P_{02} P_1 P_2} R_{f_{1\omega_1} f_{1\omega_2}} \right] \times \\ \times \left\{ \left[4P_{01}^2 (R_{f_{1\omega_1} f_{1\omega_1}}^2 + R_{f_{2\omega_1} f_{2\omega_1}}^2) + 8P_{01} P_1 R_{f_{1\omega_1} f_{1\omega_1}} \right]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[4P_{02}^2 (R_{f_{1\omega_2} f_{1\omega_2}}^2 + R_{f_{2\omega_2} f_{2\omega_2}}^2) + 8P_{02} P_2 R_{f_{1\omega_2} f_{1\omega_2}} \right]^{1/2} \right\}^{-1}, \quad (12)$$

где величины $R_{f_{i\omega_1} f_{k\omega_2}}$ ($i, k=1,2$) определяются из формул (5), (7).

3. ЧАСТОТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИИ ПРИНИМАЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АНТЕНН С ГАУССОВОЙ ФОРМОЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Пусть корреляционная функция распределения токов в раскрыве антенны $R_{k\omega_1 \omega_2}(\xi, \eta)$ (см. (7)) имеет вид*:

$$R_k(r) = \frac{\Sigma^2}{4\pi h^2} \exp \left[- \left(\frac{r}{2h} \right)^2 \right], \quad (13)$$

где $r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$ — расстояние между приемными точками, h — средний размер антенны.

* Функция $F_k(x) = \exp(-x^2 h^2)$, овязанная фурье-преобразованием с $R_k(r)$, определяет диаграмму направленности антенны [5]. Здесь и в дальнейшем мы будем пренебрегать различием эффективных площадей антенны для разных частот. Это, очевидно, можно сделать при малых значениях параметра $\delta = (\omega_2 - \omega_1)(\omega_1 + \omega_2)^{-1}$.

Подставляя (13) в (7) и используя выражения для $R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}^*}$ и $R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}}$, полученные в [3] (формулы (11), (12)), после интегрирования имеем

$$R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}^*} = e^{-\beta} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[\frac{4nk^2 + 1}{(4nk^2 + 1)^2 + (n\delta D_1)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{n\delta D_1}{(4nk^2 + 1)^2 + (n\delta D_1)^2} \right] \right\}; \quad (14)$$

$$R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}} = e^{-\beta} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{n!} \left[\frac{4nk^2 + 1}{(4nk^2 + 1)^2 + (nD_1)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{nD_1}{(4nk^2 + 1)^2 + (nD_1)^2} \right] \right\}, \quad (15)$$

где $k = h/l$ — относительный размер антенны (l — размер неоднородности показателя преломления в слое)*, $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, $D_1 = D/(1 - \delta^2)$, $D = 4cL/\bar{\omega}l^2$ — волновой параметр (c — скорость света), $\alpha = [(\overline{\Delta S})_{\omega_1}^2 (\overline{\Delta S})_{\omega_2}^2]^{1/2}$, $\beta = \frac{1}{2} [(\overline{\Delta S})_{\omega_1}^2 + (\overline{\Delta S})_{\omega_2}^2]$, $(\overline{\Delta S})_{\omega}^2$ — средний квадрат флуктуаций фазы волны в слое с неоднородностями.

Когда возмущения фазы волны малы ($\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$), в выражениях (14), (15) можно ограничиться первыми членами разложений. Тогда, используя (5), (14) и (15), для нормированного коэффициента корреляции амплитуды получаем следующее выражение:

$$\rho_{A, \omega} = \left(\frac{\Delta A}{A_0} \right)_{\omega_1} \left(\frac{\Delta A}{A_0} \right)_{\omega_2} \left\{ \left[\left(\frac{\Delta A}{A_0} \right)_{\omega_1}^2 \left(\frac{\Delta A}{A_0} \right)_{\omega_2}^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1} \simeq \\ \simeq \frac{(1+4k^2)^2 \{ [(1+4k^2)^2 + (1+\delta)^2 D_1^2] [(1+4k^2)^2 + (1-\delta)^2 D_1^2] \}^{1/2}}{[(1+4k^2)^2 + (\delta D_1)^2] [(1+4k^2)^2 + D_1^2]}. \quad (16)$$

Из выражения (16), в частности, следует, что для остронаправленного приемного устройства ($h/l \gg 1$) флуктуации амплитуды полностью коррелированы ($\rho_A \simeq 1$).

Выражение для коэффициента корреляции между квадратами амплитуд разных частот $\rho_{A^2, \omega}$ в случае произвольных возмущений фазы волны в слое может быть получено с помощью соотношения (12). Входящие в это соотношение неизвестные параметры определяются по формулам (10), (11) и (14), (15). Общее выражение для коэффициента корреляции $\rho_{A^2, \omega}$ довольно громоздко. Здесь мы приведем результаты только для наиболее интересных частных случаев.

* Предполагается, что функция корреляции флуктуаций фазы волны в слое имеет гауссову форму: $R_S(r) = (\overline{\Delta S})^2 \exp[-(r/l)^2]$.

При сильных возмущениях фазы ($\overline{(\Delta S)_\omega^2} \gg 1$) и направленном приемном устройстве имеем в зоне Фраунгофера*

$$\rho_{A^2, \omega} \simeq \begin{cases} \rho_{A^2, \omega}^0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_1}^2}} - \sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_2}^2}} \right)^2 \right] & \text{при } \left(\frac{P_s}{P} \right)_\omega \gg 1; \\ \rho_{A^2, \omega}^0 & \text{при } \left(\frac{P_s}{P} \right)_\omega \ll 1, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\rho_{A^2, \omega}^0 = \frac{(4k_1^2 + 1)^2}{(4k_1^2 + 1)^2 + (\delta D_2)^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_1}^2}} - \sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_2}^2}} \right)^2 \right], \quad (18)$$

$(P_s/P)_\omega = \exp(\overline{(\Delta S)_\omega^2}) / (4k_1^2 + 1)$ (см. соотношения (11), (16а) и [3]). В случае остронаправленной антенны ($k = h/l \gg 1$), учитывая, что $P_s/P \ll 1$, получаем (см. (17а))

$$\rho_{A^2, \omega} \simeq \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_1}^2}} - \sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_2}^2}} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Таким образом, коэффициент корреляции между квадратами амплитуд волн разных частот на выходе остронаправленного приемного устройства определяется только величинами фазовых набегов в слое и, следовательно, содержит сведения о параметрах неоднородностей слоя.

На рис. 1 приведены графики зависимостей коэффициентов частотной корреляции флуктуаций амплитуд ρ_A (сплошные кривые) и квадратов амплитуд $\rho_{A^2}^0$ (пунктир) от относительного размера приемной антенны ($k = h/l$), построенные по формулам (16) и (18) для разных значений волнового параметра D ($\delta = 0,1$; $\overline{(\Delta S)_\omega^2} = 50$). Из кривых рис. 1 следует, что с увеличением размера антенны корреляция флуктуаций амплитуд (при $\overline{(\Delta S)_\omega^2} \ll 1$) и квадратов амплитуд (в зоне Фраунгофера, для случая $\overline{(\Delta S)_\omega^2} \gg 1$) растет. При $\overline{(\Delta S)_\omega^2} \ll 1$ полученный результат согласуется с результатом работы [1], в которой вычислена величина корреляции амплитуд флуктуаций излучения, принимаемого антенной, расположенной на выходе рассеивающего слоя.

На рис. 2 изображена зависимость корреляции флуктуаций квадратов амплитуд ρ_{A^2} от относительного разнесения частот δ (см. (16), (17), (19)) в случае малых и больших возмущений фазы волны в слое при волновом параметре $D = 10$. Кривые 1, 2 соответствуют случаю остронаправленной приемной антенны, кривые 3, 4 — ненаправленной (кривые 1, 3 построены для $\overline{(\Delta S)_\omega^2} = 50$; 2, 4 — для $\overline{(\Delta S)_\omega^2} \ll 1$). Как видно из

* Поскольку при $\overline{(\Delta S)_\omega^2} \gg 1$ выполняется соотношение $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^* \gg R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}$ (см. (14) и (15)), для определения $\rho_{A^2, \omega}$ можно воспользоваться формулой (9). При этом, как легко показать после несложных вычислений, функция $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^*$ имеет вид

$$R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^* = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_1}^2}} - \sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_2}^2}} \right)^2 \right\} \left[\frac{4k_1^2 + 1}{(4k_1^2 + 1)^2 + (\delta D_2)^2} + \right. \\ \left. + i \frac{\delta D_2}{(4k_1^2 + 1)^2 + (\delta D_2)^2} \right], \quad (16a)$$

где $k_1 = k \sqrt{a}$, $D_2 = D_1 a$.

рис. 2, при использовании остронаправленных антенн частотная корреляция флуктуаций принимаемого излучения значительно увеличивается.

Обычно при расчете частотной корреляции радиоволн в слое с неоднородностями не учитывается наличие в нем вертикальных и горизонтальных градиентов ионизации [1, 3]. Вместе с тем, градиенты ионизации вызывают появление рефракции, величина которой ввиду дисперсионных свойств среды (в частности, ионосферы) будет различной на разных частотах. При использовании ненаправленного приемного устройства это может привести к значительному изменению величины корреляции между флуктуациями радиоволн различной частоты [6, 7].

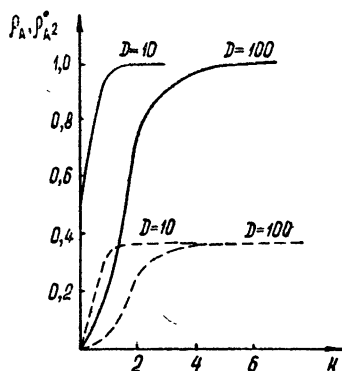


Рис. 1.

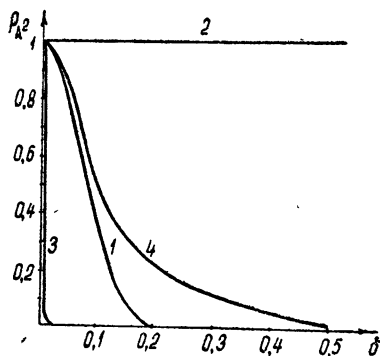


Рис. 2.

Рассмотрим влияние градиентов ионизации в слое с неоднородностями на величину частотной корреляции флуктуаций радиоволн при приеме излучения антенной с гауссовой формой диаграммы направленности. При наличии в слое рефракции корреляционные функции разной частоты $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^*(\xi, \eta, L)$ и $R_{f_{0\omega_1}, f_{0\omega_2}}(\xi, \eta, L)$ будут сдвинуты относительно нулевого разнесения $\xi = \eta = 0$ на величину $L\Delta\theta_x$, $L\Delta\theta_y$ * [6]. Учитывая это, из (7) и (13) можно получить общие выражения для функции корреляции $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^*$ и $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}$. Ввиду громоздкости этих выражений мы их здесь не приводим. В частном случае, когда лучи с разными длинами волн лежат в плоскости x, z и возмущения фазы волны в слое малы ($\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$), выражения для функций $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^*$ и $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}$ (при условии $\delta D_1 \ll 1$) имеют вид**

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^* \\ R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}} \end{array} \right\} = \pm \alpha \frac{l^2}{4h^2 + l^2} \exp \left[-\frac{(\Delta x)^2}{4h^2 + l^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} [1 + i\delta D_1] \\ [1 + iD_1] \end{array} \right\}. \quad (20)$$

Используя соотношения (5) и (20), для нормированного коэффициента корреляции амплитуды в этом случае получаем следующее выражение:

$$* \Delta\theta_x, y = \theta_x, y(\omega_1) - \theta_x, y(\omega_2), \quad \theta_x = -\frac{c}{\omega} \frac{\partial S}{\partial x}(0, y), \quad \theta_y = -\frac{c}{\omega} \frac{\partial S}{\partial y}(x, 0),$$

где θ_x, θ_y — углы рефракции в плоскостях x, z и y, z .

** Величина Δx есть пространственное расхождение лучей с различными длинами волн из-за вертикальной рефракции в слое с неоднородностями. Выражение для Δx легко получить из рассмотрения методом геометрической оптики распространения волн в плоскослойной среде. Например, для слоя с диэлектрической проницаемостью

$\epsilon_\omega(z) = 1 - \alpha_\omega N(z)$ величина Δx равна $\Delta x = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\cos \varphi_0} \frac{1}{2} (\alpha_{\omega_1} - \alpha_{\omega_2}) \int_{z_1}^{z_2} N(z) dz$, где φ_0 — угол

падения волны на слой; $z_1 - z_2$ — толщина слоя.

$$\rho_{A, \omega} = \exp \left[-\frac{(\Delta x)^2}{4h^2 + l^2} \right]. \quad (21)$$

При сильных возмущениях фазы волны и учете вертикальной рефракции в слое с неоднородностями (для случая $\delta D_2 \ll 1$) имеем $R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}} \approx 0$ и

$$R_{f_{\omega_1}, f_{\omega_2}}^* = \exp(-\beta + \alpha) \frac{l^2}{4h^2\alpha + l^2} \exp \left[-\frac{\alpha(\Delta x)^2}{4h^2\alpha + l^2} \right]. \quad (22)$$

Из соотношений (9)–(11) и (22) следует, что при использовании направленного приемного устройства выражение для коэффициента корреляции $\rho_{A^2, \omega}$ имеет вид

$$\rho_{A^2, \omega} \approx \begin{cases} [\rho_{A^2, \omega}^0]^2 & \text{при } (P_s/P)_\omega \gg 1 \\ \rho_{A^2, \omega}^0 & \text{при } (P_s/P)_\omega \ll 1 \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\rho_{A^2, \omega}^0 = \exp \left\{ -\left[\beta - \alpha + \left(\frac{\Delta x}{2h} \right)^2 \right] \right\}.$$

На рис. 3 приведены графики зависимости коэффициентов частотной корреляции флуктуаций амплитуд ρ_A (сплошные кривые) и квадратов амплитуд $\rho_{A^2}^0$ (пунктир) от относительного размера приемной антенны h/l , построенные по формулам (21), (23) для разных значений параметра $\Delta x/l$ ($\delta=0, \mathbf{l}; (\overline{\Delta S})_\omega^2=50$). Как видно из рис. 3, с увеличением размера антенны корреляция флуктуаций амплитуд (случай $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$) и квадратов амплитуд (случай $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$, зона Фраунгофера) принимаемого излучения растет. Это объясняется тем, что при увеличении размера антенны растет радиус корреляции флуктуаций поля на выходе приемного устройства.

Таким образом, с увеличением размера антенны влияние градиентов ионизации на величину частотной корреляции флуктуаций принимаемого радиоизлучения уменьшается. При использовании остронаправленной антенны ($h/l \gg 1$), как это следует из выражений (21) и (23) (при условии $\Delta x/2h \ll 1$), наличие в слое с неоднородностями градиентов ионизации совершенно не влияет на величину корреляции флуктуаций принимаемого излучения на разных частотах (ср. (16) и (19)).

Выше везде говорилось о частотной корреляции флуктуаций излучения на выходе одной приемной антенны. Вместе с тем, соотношения (7), (12) позволяют получить выражения для функций частотно-поперечной корреляции, т. е. обобщить на случай двух частот результаты работы [8]. Мы не приводим эти выражения здесь ввиду их громоздкости.

В заключение заметим, что приведенные в настоящей работе вычисления частотной корреляции для нормального падения плоской волны на неоднородный слой легко обобщаются на случай наклонного падения или падения на слой сферической волны [9]. В частности, при приеме излучения под углом φ_0 (в плоскости x, z) от источника, расположенно-

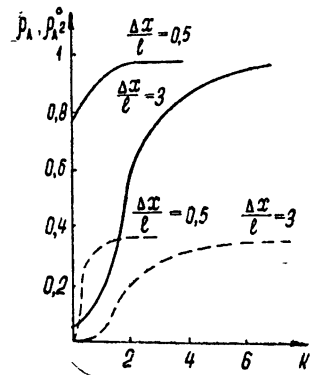


Рис. 3.

го на расстоянии z_1 от слоя с неоднородностями, найденные выше выражения остаются справедливыми, если в них произвести следующие замены:

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \cos \varphi_0; \quad \xi \rightarrow \frac{z_1}{z_1 + z_2} \cos \varphi_0 \xi; \quad \eta \rightarrow \frac{z_1}{z_1 + z_2} \eta$$

(z_2 — расстояние от плоскости наблюдения до неоднородного слоя). Это, в частности, приведет к тому, что в параметр k (см. (14)) вместо размера неоднородностей l будет входить величина $l_1 = l \frac{z_1}{z_1 + z_2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, 6, 1636 (1961).
2. Н. Г. Денисов, Изв. вышш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 6, 1045 (1961).
3. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 4, 75 (1964).
4. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 1, изд. Сов. радио, М., 1961.
5. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
6. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, 400 (1966).
7. В. И. Татарский, Л. Н. Жукова, ДАН СССР, 124, 567 (1959).
8. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, 6, 9 (1961).
9. Л. М. Ерухимов, Диссертация, НИРФИ, Горький, 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 июня 1966 г.

THE EFFECT OF A RECEIVER ON THE FREQUENCY CORRELATION OF RADIATION FLUCTUATIONS

V. A. Alimov, L. M. Eroukhimov

There is considered the effect of a directional antenna, located at an arbitrary distance from the layer with irregularities, on the value of correlation between fluctuations of radio waves with different frequencies for arbitrary phase fluctuations taking into account wave refraction in the layer. General formulae are obtained, relating the functions of frequency-spatial correlation of fluctuating field at the input and output of receiving antennae. For a normal distribution of components of a complex field at the output of the receiver, the correlation between the quadratures of envelope of radio wave fluctuations at different frequencies is calculated. The frequency correlations of radiation fluctuations is calculated by using the antenna radiation pattern with Gaussian form.

УДК 533.951

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ЗАТУХАНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ
В СЛАБНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Я. Эйдман

Показывается, что коэффициент затухания продольной волны в слабонеоднородной плазме ведет себя более сложным образом, чем это следует из приближения геометрической оптики. Получено выражение для декремента затухания колебаний.

В статье [1] обращено внимание на то обстоятельство, что формула для коэффициента поглощения продольной волны в слабонеоднородной плазме может вести себя более сложным образом, чем выражение, получаемое из приближения геометрической оптики (см., например, [2, 3]). Однако в [1] расчет произведен лишь для случая, когда квадрат волнового числа $k^2 = \epsilon\omega^4/3v_T^2\omega_0^2$ изменяется с расстоянием по линейному закону ($\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, $\omega_0^2(z)$ — ленгмюровская частота, v_T — средняя тепловая скорость электронов плазмы).

В настоящей статье этот вопрос рассматривается для случая, когда электронная концентрация слабонеоднородной плазмы $N(z)$ изменяется с расстоянием по произвольному закону.

В слабонеоднородной плазме для неравновесной добавки к функции распределения φ и продольного поля E в одномерном случае имеем уравнения

$$-i\omega\varphi_\omega + u \frac{d\varphi_\omega}{dz} + \frac{eE_\omega}{m} \frac{df_0}{d\omega} = 0; \tag{1}$$

$$-i\omega E_\omega + 4\pi [j_\omega(z) + j_{cr\omega}(z)] = 0, \quad j_\omega(z) = e \int_{-\infty}^{\infty} u\varphi_\omega(u, z) du, \tag{2}$$

где

$$f_0 = \frac{N(z)}{\sqrt{2\pi}v_T} \exp(-u^2/2v_T^2), \quad \varphi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega(z) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega(z) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

u — скорость электронов плазмы, параллельная электрическому полю E , направленному вдоль координатной оси Oz , j_{cr} — сторонний ток.

Вводя малое затухание из-за соударений $\nu \rightarrow 0$, получаем из (1)

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega_1}(z) = & \delta \exp(i\omega z/u - u^2/2v_T^2) \int_{-\infty}^z E_{\omega_1}(z') N(z') \times \\ & \times \exp(-i\omega z'/u) dz', \quad \omega = \omega_1 + i\nu, \quad \omega_1 > 0, \quad \nu > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), имеем

$$E_{\omega}(z) = -\frac{4\pi}{\omega_1} j_{\text{ст}} - \frac{4\pi e \delta i}{\omega_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega z/u - u^2/2v_T^2) u \times \quad (4)$$

$$\times \int_{-\infty}^z E_{\omega_1}(z') N(z') \exp(-i\omega z'/u) dz' du,$$

где $\delta = e/\sqrt{2\pi} m v_T^3$, $v \rightarrow 0$, ω_1 — действительная величина. Заметим, что это уравнение можно записать в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$E_{\omega_1}(z) = -\frac{4\pi i}{\omega_1} j_{\text{ст}} + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} K(z', z, \omega) E_{\omega_1}(z') dz', \quad (5)$$

где ядро $K(z', z, \omega) = -\Pi(z' - z) K_1(z', z, \omega) + \Pi(z - z') K_2(z', z, \omega)$, причем $\Pi(\xi) = 1$ при $\xi > 0$, $\Pi(\xi) = 0$ при $\xi < 0$,

$$K_1(z', z, \omega) = N(z') \int_{-\infty}^0 \exp\left[i \frac{\omega}{u} (z - z') - u^2/2v_T^2\right] u du,$$

$$K_2(z', z, \omega) = N(z') \int_0^{\infty} \exp\left[i \frac{\omega}{u} (z - z') - u^2/2v_T^2\right] u du,$$

$$\alpha = -\frac{4\pi e^2 i}{\sqrt{2\pi} m v_T^3 \omega_1}, \quad \omega > 0.$$

Уравнения (4), (5) приближенные и справедливы только для слабонеоднородной плазмы, так как они получены из приближенного кинетического уравнения (1), в котором не учитывается внешнее поле, вызывающее неоднородность плазмы (см. также [1, 4]).

Прежде всего определим приближенные собственные функции однородного уравнения (4) (т. е. при $j_{\text{ст}} = 0$) в области слабой пространственной дисперсии, учитывая, что $\omega = \omega_1 + i\nu$, $\nu \rightarrow 0$, ω_1 — действительная величина. Будем искать решение однородного уравнения (4) в указанной области в виде

$$E_{\omega_1}(z) = E_1(z) \exp\left(i \int_{z_0}^z k(z') dz'\right), \quad \frac{\omega}{k v_T} \gg 1, \quad (6)$$

где z_0 — произвольная постоянная. Такая форма решения позволит легко получить собственное поле в геометрико-оптическом приближении. Если подставить (6) в однородное уравнение (4), то входящее туда выражение

$$I(z) = \exp\left[i(\omega z/u - \psi(z))\right] \int_{-\infty}^z E_1(z') N(z') \exp\left[i(\psi(z') - \right. \quad (7)$$

$$\left. - \omega z'/u)\right] dz', \quad \psi(z) = \int_{z_0}^z k(z') dz', \quad \omega_1 > 0,$$

может быть записано в виде

$$I(z) = \int_0^{\zeta + (\omega_1 + i\nu)\infty} \frac{E_1[z'(\zeta - t)] N[z'(\zeta - t)] \exp(it) dt}{\omega/u - k[z'(\zeta - t)]}, \quad \nu > 0, \quad (8)$$

где введена новая переменная $t = \zeta(z) - \zeta(z')$,

$$\zeta(z) = \frac{\omega z}{u} - \psi_1(z), \quad \psi_1(z) = \int_{-\infty \operatorname{sgn} u}^z k(z') dz',$$

$$\zeta' = \zeta(z'), \quad \zeta = \zeta(z).$$

Интеграл в (8) берется по некоторой кривой в комплексной плоскости $t = t_1 + it_2$ (например, при $u > 0$), определяемой уравнением

$$t = \zeta - \frac{\omega z'}{u} + \int_{-\infty}^{z'} k(z'') dz'', \quad -\infty < z' < z.$$

Предполагая функции $E_1(z)$, $N(z)$, $k(z)$ аналитическими ($k(z)$ не имеет точек поворота и $k(\infty) = k_0$, $k(-\infty) = k_{00}$, k_0 , k_{00} — постоянные величины), сместим путь интегрирования в (8) на мнимую ось. Тогда, используя формулы

$$f(\zeta - it_2) = \sum_0^{\infty} \frac{d^n f(\zeta)}{d\zeta^n} \frac{(-it_2)^n}{n!}, \quad \int_0^{\infty} e^{-t_2} t_2^n dt_2 = n!,$$

получаем аналогично [5]

$$I(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{d^n f(\zeta)}{d\zeta^n}, \quad f(\zeta) = \frac{E_1[z(\zeta)] N[z(\zeta)]}{\omega/u - k[z(\zeta)]}, \quad (9)$$

где, например,

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = \frac{E_1' N + E_1 N'}{\Delta^2} + \frac{E_1 N k'}{\Delta^3}, \quad \Delta = \frac{\omega}{u} - k[z(\zeta)],$$

$$k' = dk/dz, \quad E_1' = dE_1/dz, \quad N' = dN/dz.$$

Используя (9), можно записать однородное уравнение для поля следующим образом:

$$E_{\omega_1}(z) = \frac{4\pi e\delta}{\omega_1} e^{i\psi} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp(-u^2/2v_T^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \times$$

$$\times \frac{d^n f(\zeta)}{d\zeta^n} du, \quad \omega_1 > 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) в приближении геометрической оптики может быть найдено без труда. Интеграл в (10) может быть представлен в виде суммы главного значения интеграла W_1 и вычета:

$$W_2 = \pi i \operatorname{выч.} \left\{ u \exp(-u^2/2v_T^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{d^n f(\zeta)}{d\zeta^n} \right\} \Big|_{u=\omega/k} =$$

$$= \sum_{n \neq 0}^{\infty} W_{2n}. \quad (11)$$

Определим сначала главное значение интеграла W_1 (W_2 экспоненциально мало по сравнению с W_1). Поскольку свойства плазмы медленно изменяются с расстоянием ($\dot{x} = dk/k^2 dz \ll 1$), то в приближении геометрической оптики можно ограничиться лишь первыми двумя слагаемыми в W_1 с $n=0;1$. Далее знаменатели этих выражений (см. (9)) могут быть разложены в ряд по малому параметру $k v_T / \omega$, характеризующему приближение слабой пространственной дисперсии. Тогда в нулевом приближении по параметру геометрической оптики, т. е. при $n=0$, получаем

$$k_1^2 = \frac{\epsilon \omega_1^4}{3v_T^2 \omega_0^2}, \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N(z)}{m},$$

$$\omega_1 - \omega_0 \ll \omega_1, \quad \epsilon \ll 1.$$

Члены первого порядка малости по x отвечают слагаемым в W_1 с $n=1$ и дают амплитуду нормальной волны $E_1(z) = 1/N(z) \sqrt{k(z)}$. (В рассматриваемом приближении надо считать $E_1(z) = 1/\sqrt{k(z)}$ (см. более подробно [4]).) Так же, как и в случае однородной среды, мнимую часть k можно определить, используя выражение для W_2 .

Нетрудно убедиться, что в сумме (11) наряду с малыми членами присутствуют члены порядка $\eta^n = [(k v_T / \omega)^2 k' k^{-2}]^n$ и $[(k v_T / \omega)^4 k' k^{-2}]^n$, которые, вообще говоря, могут быть не малыми. Поэтому вычислить точно сумму, входящую в (11), затруднительно. Однако в одном случае можно получить для W_2 простое приближенное выражение. Для этого необходимо, чтобы $\eta \ll 1$, т. е. чтобы число резонансных частиц мало изменялось на длине волны, а также $d^n k / k^{n+1} dz \simeq (k' / k^2)^n$. Если указанные условия соблюдаются, то благодаря экспоненциальному множителю $\exp(-u^2/2v_T^2)$ и условию $\omega/k v_T \gg 1$ в $d^n f / d\xi^n$ можно ограничиться лишь членом, дающим наибольший вклад в выражение для W_{2n} , т. е. членом с наивысшей степенью знаменателя при данном n . Тогда

$$\frac{d^n f}{d\xi^n} = \frac{(2n-1)!! (k')^n E_1(z) N(z)}{\Delta^{2n+1}}, \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots$$

Если учесть также, что

$$\text{выч.} \left\{ \frac{u \exp(-u^2/2v_T^2)}{(\omega/u - k)^{2n+1}} \right\} \Big|_{u=\omega/k} = \frac{u^{2n+1}}{(2n)! v_T^{4n}} e^{-u^2/2v_T^2} \Big|_{u=\omega/k},$$

то ряд в (11) может быть легко суммирован. Поэтому окончательно получаем

$$\text{Im } W_2 \simeq \frac{\omega^4 \sqrt{\pi} E_1}{\sqrt{2} v_T^3 k_1^3} \exp(-\omega^2/2v_T^2 k_1^2) \cos \xi, \quad (12)$$

$$\xi = \omega^4 k_1' / 2k_1^3 v_T^4, \quad \eta \ll 1$$

и соответственно для мнимой части k имеем

$$k_2 \simeq \frac{\omega^5 \sqrt{\pi}}{3 \sqrt{8} v_T^5 k_1^4} \exp(-\omega^2/2v_T^2 k_1^2) \cos \xi, \quad \omega \simeq \omega_0, \quad (13)$$

$$k_1(\infty) = k_0, \quad k_1(-\infty) = k_{00}, \quad \epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1,$$

Как уже отмечалось, формула (13) приближенная и совершенно не годится для значений ξ , при которых $\cos \xi = 0$. Если в качестве приближенных выражений для собственных функций уравнения (10) использовать полученные выше формулы для E_1 , $k = k_1 + ik_2$, то уравнение (10) можно заменить следующим приближенным интегральным уравнением:

$$\frac{\varepsilon(z)}{N(z)} F_\omega(z) = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{\text{ст}\omega} + \int_{-\infty}^{\infty} G(z, z', \omega) F_\omega(z') dz', \quad (14)$$

где $F_\omega(z) = N(z) E_\omega(z)$,

$$G(z, z', \omega) = -\frac{12\pi e^2 v_T^2}{m\omega^4} \delta''(z - z') - i \frac{4\pi e^2 \omega \sqrt{\pi}}{m\sqrt{2} v_T^3 k_1^3} \times \\ \times \exp(-\omega^2/2v_T^2 k_1^2) \cos \xi \delta(z - z'), \quad (15) \\ \varepsilon \ll 1, \quad k'/k^2 \ll 1, \quad \eta = \frac{\omega^2 k'}{k^4 v_T^2} \ll 1.$$

Заметим, что интеграл, входящий в (14), разумеется, следует понимать в смысле $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b G(z') F_\omega(z') dz'$.

С помощью уравнения (15) легко решить интересующие нас конкретные задачи.

1. КОЛЕБАНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Если электроны плазмы испытывают на границе зеркальное отражение, то, как известно, можно рассматривать безграничную плазму, в которой течет сторонний ток $j_{\text{ст}} = i \frac{\omega}{4\pi} E_0 \operatorname{sgn} z \exp(-i\omega t)$ (в плоскости $z = 0$ на границе плазмы задано поле $E_0 \exp(-i\omega t)$). Ищем решение уравнения (14) в виде

$$E(z) = \frac{E_0 \operatorname{sgn} z}{\varepsilon(z)} + E_x(z). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем в нужном приближении

$$\varepsilon(z) E_x(z) = -A \delta'(z) + \int_{-\infty}^{\infty} G(z, z') N(z') E_x(z') dz', \quad (17) \\ A = -6\omega_0^2 v_T^2 E_0 / \omega^4 \varepsilon.$$

Поскольку поле E_x удовлетворяет всюду, кроме плоскости $z = 0$, однородному уравнению, решения которого были найдены выше, то легко написать и решение уравнения (17):

$$E \simeq E_0 \left\{ \frac{1}{\varepsilon(z)} - \frac{\sqrt{k_1(0)}}{\varepsilon(0) \sqrt{k_1(z)}} \exp \left[i \int_0^z (k_1 + ik_2) dz \right] \right\} \text{ при } z > 0, \\ E \simeq -E_0 \left\{ \frac{1}{\varepsilon(z)} - \frac{\sqrt{k_1(0)}}{\varepsilon(0) \sqrt{k_1(z)}} \exp \left[-i \int_0^z (k_1 + ik_2) dz \right] \right\} \text{ при } z < 0, \quad (18) \\ E_x(\pm \infty) = 0, \quad \eta \ll 1, \quad \varepsilon \ll 1,$$

где k_1, k_2 определяются приведенными выше формулами. Для случая однородной среды, когда $\epsilon(z) = \text{const}$, выражения (19) переходят в хорошо известные формулы, полученные впервые Ландау [7].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕКРЕМЕНТА ЗАТУХАНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАЗМЫ

Для того, чтобы определить декремент затухания собственных колебаний, обычным образом полагаем в (14) $j_{\text{ст}} = -\frac{1}{4\pi} \delta(t) E_0(z)$, что

отвечает заданию в начальный момент времени $t = 0$ поля $E_0(z)$. Чтобы найти асимптотическое решение уравнения (14) при $t \rightarrow \infty$, необходимо знать особые точки уравнения (14), расположенные в нижней полуплоскости комплексного переменного ω . В частности, указанными особыми точками, как легко видеть, будут собственные значения соответствующего однородного уравнения ($\omega = \omega_1 + i\omega_2$, $\omega_2 \rightarrow 0$, $\omega_2 < 0$). Поэтому задача сводится к отысканию собственных значений однородного уравнения (14), расположенных в нижней полуплоскости комплексного переменного ω . Аналогично предыдущему рассмотрению здесь ядро интегрального уравнения (14) может быть записано в виде

$$G(z, z', \omega) = G_0 + G_1 i, \quad (19)$$

где

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2, \quad \omega_2 < 0, \quad |\omega_2|/\omega_1 \ll 1, \quad \eta \ll 1,$$

$$G_0 = -\frac{12\pi e^2 v_T^2}{m\omega_1^4} \delta''(z - z'),$$

$$G_1 = -\left\{ \frac{2}{\omega_1^3} \omega_2 + \frac{\omega_1 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} v_T^3 k_1^3} \exp(-\omega^2/2k_1^2 v_T^2) \cos \xi \right\} \frac{4\pi e^2}{m} \delta(z - z').$$

Поскольку в рассматриваемом приближении $G_1 \ll G_0$, то применим метод возмущений.

Будем искать собственные функции однородного уравнения (14) в виде $E = E_0 + E_2$, где E_0 удовлетворяет уравнению

$$\epsilon E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(z, z', \omega) F_0(z') dz', \quad F_0 = E_0 N, \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}. \quad (20)$$

Оставляя лишь члены первого порядка малости, получаем для E_2 следующее интегральное уравнение:

$$\epsilon E_2 = f(z) + \int_{-\infty}^{\infty} G_0(z', z) F_2(z') dz', \quad F_2 = E_2 N, \quad (21)$$

$$f(z) = i \int_{-\infty}^{\infty} G_1(z, z') F_0(z') dz'.$$

Чтобы уравнение (20) определяло малую добавку к E_0 , необходимо выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(z, z') F_0^*(z) F_0(z') dz' dz = 0, \quad (22)$$

которое означает ортогональность собственной функции уравнения (20) к $f(z)$.

Условие (22) легко получить умножением (21) на $F_0^*(z)$ и последующим интегрированием обеих частей полученного уравнения по dz (ядро $G_0(z, z')$ действительно и симметрично: $G_0(z, z') = G_0(z', z)$). Равенство (22) и определяет мнимую часть собственного значения ω , т. е. декремент затухания собственных колебаний в диапазоне частот ω_1 , удовлетворяющих условию слабости пространственной дисперсии ($\epsilon \ll 1$) в слабонеоднородной плазме ($k'/k^2 \ll 1$).

Подставляя (19) в (22) и учитывая, что интегралы в (22) берутся в симметричных пределах (см. выше), имеем

$$\omega_2 = -\frac{\omega_1^4 \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{2} v_T^3} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\int_{-b}^b \exp(-\gamma) \cos \xi dz/k_1^4}{\int_{-b}^b dz/k_1}, \quad \begin{array}{l} |\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0, \\ \gamma(z) \gg 1, \\ k_1'/k^2 \ll 1, \end{array} \quad (23)$$

где $\gamma = \omega_1^2/2v_T^2 k_1^2(z)$.

Следует заметить, что интегралы, стоящие в числителе и знаменателе дроби (23), вообще говоря, расходятся. Сама же дробь сходится. Поскольку неоднородность плазмы существует лишь в конечной области пространства, т. е. $k_1(z) \rightarrow k_0$ при $z \rightarrow \infty$, $k_1(z) \rightarrow k_{00}$ при $z \rightarrow -\infty$, где k_0 и k_{00} — постоянные величины, то, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\omega_2 = -\frac{\omega_1^4 \sqrt{\pi} (k_{00}^4 e^{-\gamma_1} + k_0^4 e^{-\gamma_2})}{2 \sqrt{2} v_T^3 k_0^3 k_{00}^3 (k_0 + k_{00})}, \quad (24)$$

причем

$$\gamma_1 = \omega_1^2/2v_T^2 k_0^2, \quad \gamma_2 = \omega_1^2/2v_T^2 k_{00}^2.$$

Формула (24) для указанного случая получается и в тех условиях, когда параметр η не мал и вместо $\cos \xi$ в (14), (15) входит более сложное выражение.

В случае однородной среды формулы (23), (24) переходят в хорошо известное выражение для декремента затухания Ландау [7].

Автор признателен А. А. Андронову и В. В. Железнякову за дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 49, 529 (1965).
2. В. П. Силин, ЖТФ, 34, 236 (1964).
3. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН, 82, 499 (1964).
4. В. Я. Эйдман, ЖТФ, 35, 1730 (1965).
5. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 11 (1966).
6. В. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.
7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).

A PECULIARITY OF ATTENUATION OF LONGITUDINAL WAVE IN A
WEAKLY-INHOMOGENEOUS PLASMA*V. Ya. Eidman*

The attenuation factor of a longitudinal wave in a weakly-inhomogeneous plasma behaves in a more complex manner than it follows from the geometrical optics approximation. The expression for the oscillation decrement has been derived.

УДК 621.371.165 : 533.9.082.7

К ТЕОРИИ НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИ- СИММЕТРИЧНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СТРУКТУРАХ

И. П. Якименко

Осуществлена постановка и рассмотрен метод решения задачи рассеяния плоских электромагнитных волн на флуктуациях плотности заряда в плазме, ограниченной цилиндрической поверхностью. Сравнение результатов с решением, полученным на основании борновского приближения, позволяет выявить характерные черты и необходимость постановки граничной электродинамической задачи.

Общая теория рассеяния электромагнитных волн в изотропных средах изложена в книге [1]. Детальное исследование процессов рассеяния и трансформации волн на флуктуациях в плазме можно найти в работах [2-8]. Интерес к этим работам особенно возрос с тех пор, как была указана принципиально [9], а затем и подтверждена экспериментально [10] возможность эффективного использования некогерентного рассеяния радиоволн для зондирования верхних слоев ионосферы. В этом направлении выполнены, в частности, работы [11, 12]:

Во всех перечисленных исследованиях плазменная среда предполагалась безграничной. Между тем очевидный прикладной интерес представляет некогерентное рассеяние электромагнитных волн на ограниченных плазменных образованиях. Такие плазменные структуры с размерами порядка длины волны падающего излучения встречаются в естественных условиях (например, метеорные следы) и неизбежны в лабораторных экспериментах с плазмой. Возникает вопрос, в какой мере результаты теории для безграничной плазмы приложимы к таким ограниченным телам. При макроскопическом подходе сразу ясно, что теория рассеяния в безграничной среде вполне достаточна для описания некогерентного рассеяния на ограниченном объеме, если показатель преломления рассеивающей среды близок к показателю преломления свободного пространства. С микроскопической точки зрения это означает, что рассеяние происходит на наборе осцилляторов с флуктуирующей плотностью, причем рассматривается движение осциллятора только под воздействием падающей плоской волны, а влияние полей, созданных всеми остальными осцилляторами, не учитывается совершенно. В квантовой механике такой метод получил, как известно, наименование приближения Борна [13], а в электродинамике его называют также приближением Рэлея—Ганса. Борновское приближение широко применяется для анализа как обычного когерентного (с частотой ω , равной частоте падающей волны) рассеяния неоднородной плазмой [14, 15], так и некогерентного рассеяния [11].

Из сказанного выше видно, что сама природа борновского приближения такова, что специфические резонансы, связанные с наличием границ, не могут быть выявлены при таком решении. Действительно, уже первые попытки исследования некогерентного отражения волн от полупространства [16] или рассеяния волн на флуктуациях в плазменном вол-

новоде [17] показали, что наличие границ может оказаться решающим для самого существования некоторых эффектов. Для исследования этих явлений необходим, однако, отказ от приближения Рэлея—Ганса—Борна. Это неизбежно ведет к формулировке строгой граничной электродинамической задачи.

В настоящей работе предпринята попытка осуществить постановку и рассмотреть метод решения задачи некогерентного рассеяния для случая цилиндрически-симметричной плазмы. Методом функции Грина поля в свободном пространстве представляются в виде линейных функционалов от флуктуаций плотности, а затем производится усреднение сечения рассеяния по движению заряженных частиц с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы [1, 2]. Одновременно на основании общей теории рассеяния электромагнитных волн [1] строится решение в борновском приближении. В заключение показывается, при каких условиях строгое решение сводится к полученному в приближении Борна.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Явление рассеяния электромагнитных волн на тепловых флуктуациях плазмы обычно описывают [3—8], учитывая нелинейность материальных уравнений (или нелинейные члены в кинетическом уравнении в физической кинетике плазмы). Этот учет приводит к возникновению дополнительного тока в уравнениях Максвелла, который и является источником рассеянных (или трансформированных) волн. При решении задачи в гидродинамическом приближении, правомерность которого доказана в [7], ток, вызывающий рассеяние, полностью определен, если известны скорость, приобретаемая электроном под действием поля падающей волны, и флуктуации плотности заряда. Здесь при постановке граничной задачи и возникают две характерные трудности.

Прежде всего, необходимо дать определение падающего поля в некотором всесторонне ограниченном плазменном теле. При исследовании рассеяния волн в безграничной среде было очевидно, что падающая волна—это обычная плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с определенной фазовой скоростью. Когерентное рассеяние осцилляторов в направлении прямо вперед автоматически учитывалось введением показателя преломления для данной среды, а в боковых направлениях в безграничной среде оно вообще компенсируется рассеянием от соседних элементов. Если, переходя к описанию некогерентного рассеяния плоской волны, падающей из пустоты на плазменный объект, по-прежнему ограничиться воздействием на осциллятор только поля плоской волны в пустоте, то мы получим решение задачи в борновском приближении. В общем случае следует учесть действие на выбранный осциллятор не только поля падающей плоской волны в пустом пространстве, но и вторичных полей, возникающих в результате томсоновского рассеяния на всех остальных осцилляторах, находящихся в данном теле. Из этой микроскопической картины вытекает естественное предложение называть падающим полем, вызывающим ускорение электрона, то внутреннее поле, которое является результатом решения задачи дифракции плоской волны на данном теле. При таком подходе, разумеется, не учитывается изменение энергии падающих волн, связанное с существованием рассеяния, но это вполне оправдано, если принять во внимание сравнительную слабость явления некогерентного рассеяния.

Второй принципиальный вопрос состоит в определении функции корреляции для ограниченной плазмы. Такой вопрос уже рассматривался в работах [16, 17]. В общем случае функция корреляции должна, конечно, вычисляться с учетом границы, что, само по себе, является чрез-

вычайно трудной задачей. Но при описании довольно широкого класса явлений достаточно ограничиться только функцией корреляции для безграничной среды. Очевидно, это строго справедливо для случая диэлектрической среды без учета пространственной дисперсии или холдной плазмы, когда радиус корреляции флуктуаций плотности при макроскопическом подходе равен нулю. Кроме того, это приближенно верно также и при учете пространственной дисперсии, если только дебаевский радиус мал по сравнению с длиной волны [7, 16].

Итак, решение задачи некогерентного рассеяния волн на ограниченном теле должно проводиться в два этапа. Сначала в результате решения обычной дифракционной задачи определяется внутреннее поле в среде, возникающее под воздействием падающей плоской волны. Совместно с нелинейными материальными уравнениями это позволяет установить ток, вызывающий рассеяние. На втором этапе путем решения граничной задачи с заданным током в рассеивающем объеме определяется некогерентно рассеянное поле во всем пространстве. Таким образом, поле в пустом пространстве (за вычетом поля падающей волны) состоит из суммы волн, полученных в результате решения обычной задачи дифракции (частота этих волн равна частоте падающей волны), и волн, рассеянных на флуктуациях (частоты и волновые числа этих волн отличаются от падающей волны). Поток энергии этих волн, (которые принято называть некогерентно рассеянными) определяется путем усреднения с помощью функции корреляции для безграничного пространства. Ход решения типичной задачи мы рассмотрим на примере цилиндрической симметрии.

2. НЕОДНОРОДНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Уравнения рассеянного электромагнитного поля в среде есть обычные уравнения макроскопической электродинамики (подвергнутые усреднению только по физически бесконечно малому объему [1]) со сторонним током, обуславливающим рассеяние:

$$\operatorname{rot} E = ikH, \operatorname{rot} H = -ik\epsilon E + \frac{4\pi}{c} I, k = \frac{\omega}{c}, \epsilon = \epsilon(\omega). \quad (1)$$

В (1) фигурируют фурье-компоненты рассеянного поля и тока по времени, ω имеет смысл частоты рассеянных волн. Из (1) вытекают неоднородные волновые уравнения для векторов поля рассеянной волны:

$$\Delta E + k^2 \epsilon E = -4\pi \rho_E, \quad \Delta H + k^2 \epsilon H = -4\pi \rho_H, \quad (2)$$

где правые части—функции источника

$$\rho_E = \frac{i\omega}{c^2} \left(I + \frac{1}{k^2 \epsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} I \right), \quad \rho_H = \frac{1}{c} \operatorname{rot} I. \quad (3)$$

Как видно из (2), продольные составляющие полей удовлетворяют уравнениям типа

$$\Delta f + k^2 \epsilon f = -4\pi \rho(r). \quad (4)$$

Решение (4) состоит из суммы сингулярной f_1 и несингулярной f_0 частей. Физический смысл этих частей заключается в том, что сингулярная часть описывает первичное поле, связанное с источником, а несингулярная часть — вторичное электромагнитное поле, отраженное от границ. Естественно, в области вне тела, где источников нет; все решение исчерпывается только несингулярной частью, которая представляет поле,

прошедшее во вторую среду. Записывая f_1 с учетом цилиндрической симметрии задачи в виде

$$f_1(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp [i(\beta z + n\varphi)] \int_0^{\infty} f_{n\beta}(x) J_n(xr) x dx \quad (5)$$

и определяя $f_{n\beta}(x)$ из (4):

$$f_{n\beta}(x) = -\frac{1}{\pi} \int \rho(r) \frac{J_n(xr)}{\lambda^2 - x^2} \exp [-i(\beta z + n\varphi)] dr, \quad \lambda^2 = k^2 \epsilon - \beta^2,$$

получим сингулярную часть

$$f_1(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp [i(\beta z + n\varphi)] \int \rho(r') G_n(r - r') \times \\ \times \exp [-i(\beta z' + n\varphi')] dr'. \quad (6)$$

Здесь $G_n(r - r')$ является одномерной функцией Грина для оператора Штурма—Лиувилля $\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + r \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right)$ [18]:

$$G_n(r - r') = 2\pi^2 i \begin{cases} J_n(\lambda r') H_n^{(1)}(\lambda r) & (r' \leq r) \\ J_n(\lambda r) H_n^{(1)}(\lambda r') & (r' \geq r) \end{cases}, \quad (7)$$

а интегрирование производится по всему объему, занятому источниками. Несингулярная часть f_0 , как обычно, равна

$$f_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta a_{n\beta} \exp [i(\beta z + n\varphi)] Z_n(\lambda r), \quad (8)$$

где константы $a_{n\beta}$ в результате применения граничных условий представляются в виде линейных функционалов от ρ , а соответствующая функция $Z_n(\lambda r)$ выбирается в зависимости от типа рассматриваемой области.

Применим полученные общие результаты для определения из (2) продольных составляющих рассеянного электромагнитного поля. В силу (6) и (8) для области, заполненной флуктуирующими осцилляторами, имеем

$$E_z(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp [i(\beta z + n\varphi)] (a_{n\beta} Z_n(\lambda r) + \Phi_{n\beta}(r)); \quad (9)$$

$$H_z(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp [i(\beta z + n\varphi)] (\tilde{a}_{n\beta} Z_n(\lambda r) + \tilde{\Phi}_{n\beta}(r)), \quad (10)$$

где

$$\Phi_{n\beta}(r) = \int \rho_{Ezn\beta}(r') G_n(r - r') r' dr'; \quad (11)$$

$$\tilde{\Phi}_{n\beta}(r) = \int \rho_{Hzn\beta}(r') G_n(r - r') r' dr', \quad (12)$$

причем величины $\rho_{n\beta}$ представляют собой фурье-компоненты функций источника (3).

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАССЕЯННЫХ ВОЛН. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

Прежде чем приступить к вычислению энергетических характеристик, уточним смысл тока, вызывающего рассеянные волны. Полагая, что полная скорость V и плотность заряда N равны

$$V = v_0 + v + \delta v, \quad N = N_0 + n_0 + n + \delta n \quad (13)$$

(N_0 — равновесная плотность электронов, n_0 и v_0 — величины, связанные с падающей волной, n и v — плотность и ток, возникающий под воздействием рассеянной волны, δn и δv — флуктуации заряда и скорости), и используя уравнение движения в гидродинамическом приближении без учета газокINETического давления:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \nabla \right) \dot{V} = \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [VH] \right), \quad (14)$$

получим для рассеивающего тока [7]

$$I = e (n_0 \delta v + v_0 \delta n + N_0 v),$$

причем v определяется из уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{e}{mc} [\delta v H_0] + \frac{e}{mc} [v_0 \delta H] - (v_0 \nabla) \delta v - (\delta v \nabla) v_0. \quad (15)$$

Пользуясь уравнениями для векторов E_0 и H_0 падающей волны и уравнениями флуктуационного поля, а также связью $v_0 = \frac{ie}{m\omega_0} E_0$, преобразуем (15) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla(v_0 \delta v). \quad (16)$$

Из условия «поперечности» падающей волны ($\text{div } E_0 = 0$) и уравнения непрерывности следует $n_0 = 0$ и рассеивающий ток представляется в виде суммы двух частей:

$$I = I_1 + I_2,$$

причем

$$I_1 = \frac{ie^2}{m\omega_0} E_0 \delta n, \quad I_2 = \frac{e^2 N_0}{m\omega_0} \nabla (E_0 \delta v). \quad (17)$$

Как видно из (17), ток I_2 совершенно не влияет на магнитное поле рассеянной волны ($\text{rot grad} = 0$), и после интегрирования по частям с учетом того, что вне объема плазмы флуктуации отсутствуют, получим

$$\tilde{\Phi}_{n\beta} = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{in}{r'} I_{1r} G_n(r-r') + I_{1\varphi} G'_n(r-r') \right] r' dr' \quad (18)$$

(штрих означает дифференцирование по r'). После подстановки тока I_2 в (11) и интегрирования по частям, $\Phi_{2n\beta}$ можно преобразовать к виду

$$\Phi_{2n\beta} = \frac{i}{\omega_0} \int I_{2z}(r') (\Delta_{\perp} + \lambda^2) G_n(r-r') r' dr'. \quad (19)$$

Но по определению

$$(\Delta_{\perp} + \lambda^2) G_n(r-r') = -4\pi \frac{\delta(r-r')}{r'}. \quad (20)$$

Тогда

$$\Phi_{2n\beta} = \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega_0\omega^2\varepsilon} (E_0\delta v). \quad (21)$$

Та часть $\Phi_{n\beta}$, которая связана с током I_1 , может быть записана в виде

$$\Phi_{1n\beta} = \frac{i}{\omega\varepsilon} \int \left[\left(\lambda^2 I_{1z} - \frac{n\beta}{r'} I_{1\varphi} \right) G_n(r-r') - i\beta I_{1r} G'_n(r-r') \right] r' dr'. \quad (22)$$

Если на цилиндрическое тело падает волна фиксированной частоты ω_0 и под фиксированным углом (β_0 задано), то из (17) легко найти фурье-компоненты тока I_1 :

$$I_{1n\beta}(r) = \frac{ie^2}{m\omega_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{0m} \delta n_{\Delta n, \Delta\omega, \Delta\beta}(r), \quad (23)$$

где

$$\Delta n = n - m, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \Delta\beta = \beta - \beta_0. \quad (24)$$

При выводе (23) предполагалось, что падающее поле представлено в виде ряда

$$E_0(r) = \exp[-i(\omega_0 t - \beta_0 z)] \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{0m}(r) \exp(im\varphi). \quad (25)$$

Ограничимся далее рассмотрением случая, когда плазма занимает объем $r < a$. Тогда при $r > a$ некогерентное рассеянное поле равно

$$\begin{aligned} E_z(r) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp[i(\beta z + n\varphi)] b_{1n\beta} H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a), \\ H_z(r) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \exp[i(\beta z + n\varphi)] b_{2n\beta} H_n^{(1)}(\tilde{\lambda}a), \\ \tilde{\lambda}^2 &= k^2 - \beta^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения интересующего нас сечения рассеяния достаточно знать внутренние поля (9), (10) только на границе ($r = a$). Естественно считать (по крайней мере, при первой попытке решения поставленной задачи), что $\Phi_{2n\beta}(a) = 0$, и в соответствии с формулами (18), (22) и (23)

$$\Phi_{n\beta}(a) = -\frac{i\pi}{\varepsilon} H_n^{(1)}(\lambda a) \varphi_1, \quad \tilde{\Phi}_{n\beta}(a) = -i\pi H_n^{(1)}(\lambda a) \varphi_2, \quad (27)$$

где

$$\varphi_i = \int_0^a \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{im}(r) \delta n_{\Delta\beta, \Delta\omega, \Delta n}(r) r dr, \quad (28)$$

причем

$$f_{1m} = \frac{2\pi r_e}{k k_0} \left[\left(\lambda^2 E_{0zm} - \frac{n\beta}{r} E_{0\varphi m} \right) J_n(\lambda r) - i\beta E_{0rm} J'_n(\lambda r) \right]; \quad (29)$$

$$f_{2m} = \frac{2\pi i r_e}{k_0} \left[\frac{in}{r} E_{0rm} J_n(\lambda r) + E_{0\varphi m} J'_n(\lambda r) \right] \quad (30)$$

(здесь $r_e = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона).

Из условий равенства тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля на границе неизвестные константы b_l представляются в виде линейных функционалов от δn :

$$b_l = \frac{2\tilde{\lambda}^2 \delta_{lk} \varphi_k}{a\lambda^2 \Delta}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= H'_n(\tilde{\lambda}a)J_n(\lambda a) - \frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} H_n(\tilde{\lambda}a)J'_n(\lambda a), \\ \delta_{12} &= -\delta_{21} = \frac{in\beta}{ka} \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} - 1 \right) H_n(\tilde{\lambda}a)J_n(\lambda a), \\ \delta_{22} &= H'_n(\tilde{\lambda}a)J_n(\lambda a) - \frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} H_n(\tilde{\lambda}a)J'_n(\lambda a), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}.$$

Теперь легко определяется полный поток мощности волн, рассеянных на флуктуациях (через цилиндрическую поверхность единичной длины):

$$P_\omega = \frac{2ck}{\pi a^2} \int_{-k}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^2 \delta_{ln} \delta_{lk}^* \langle \varphi_l \varphi_k^* \rangle}{|\lambda^2 \Delta|^2}. \quad (33)$$

Физический смысл входящего сюда интеграла по β состоит в том, что полный поток энергии в каждой удаленной точке пространства состоит из суммы потоков мощности плоских волн, приходящих в данную точку от бесконечно длинного плазменного цилиндра со всех направлений, даваемых углом α , изменяющимся от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ (при этом $\beta = k \sin \alpha$). Поэтому для получения полного сечения рассеяния в (33) необходимо выполнить интегрирование. Если же интерес представляет энергия рассеянных плоских волн в интервале углов $d\beta$, то достаточно ограничиться вычислением подинтегрального выражения (33).

Полное сечение рассеяния получается из (33) в результате деления P_ω на плотность потока энергии падающей волны $c|E_0|^2/8\pi$. Усреднение произведений $\varphi_l \varphi_k^*$ производится, как это видно из (28), с помощью функции корреляции для δn :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_l \varphi_k^* \rangle &= \int_0^a \int_0^a \sum_m \sum_{m'=-\infty}^{\infty} f_{lm}(r') f_{km}^*(r'') \langle \delta n_{\Delta\omega, \Delta\beta, \Delta n}(r') \times \\ &\quad \times \delta n_{\Delta\omega, \Delta\beta, \Delta n'}(r'') \rangle r' r'' dr' dr''. \end{aligned} \quad (34)$$

Подстановка в (34) функции корреляции величин δn для безграничной среды (с учетом пространственной дисперсии или без него), в принципе, решает поставленную задачу.

Мы не будем, однако, рассматривать здесь различные частные виды функции корреляции, более или менее точно описывающие флуктуации в плазме в различных условиях (это привело бы к необходимости решения многих частных прикладных задач, которые будут исследованы в дальнейшем), а в целях сравнения полученного решения с борновским

приближением остановимся только на одном простейшем случае, в котором величины δn сразу могут быть связаны со «сторонними» индукциями \mathbf{k} [1, 2].

Известно, что в диэлектрической среде (холодной плазме) материальное уравнение, определяющее связь между индукцией и напряженностью флуктуационного электрического поля, дается формулой

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{K}. \quad (35)$$

Если определить флуктуации плотности в виде

$$\delta n = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (36)$$

то из (36) следует

$$\delta n = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{K}}{4\pi\varepsilon}. \quad (37)$$

Так как функция корреляции для величин \mathbf{K} известна [1, 2], то усреднение в (34) выполняется сразу и дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i \varphi_k^* \rangle = & \frac{\varepsilon''(\Delta\omega) T}{(2\pi)^4 e^2 \Delta\omega |\varepsilon(\Delta\omega)|^2} \int_0^a \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ f'_{im}(r) f_{km}^*(r) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{(\Delta n)^2}{r^2} + (\Delta\beta)^2 \right] f_{im}(r) f_{km}^*(r) \right\} r dr, \end{aligned} \quad (38)$$

где T — температура в энергетических единицах.

4. НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ НА ПЛАЗМЕННЫЙ ЦИЛИНДР

Полученные выше формулы позволяют определить сечение рассеяния при произвольном наклонном падении плоской волны на цилиндрическую плазменную структуру. Рассмотрим здесь простейший случай нормального падения ($\beta_0 = 0$) плоской волны, поляризованной так, что $E_{0z} \neq 0$, $H_{0z} = 0$. Разложив поле падающей волны в ряд по цилиндрическим волнам, получим

$$E_{0z}^{\text{пад}} = E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_0 r) \exp(im\varphi). \quad (39)$$

Но в соответствии с предложением в разделе 1 нас интересует поле падающей волны в среде, которое получается в результате решения обычной дифракционной задачи и для рассматриваемого случая равно

$$E_{0z} = E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \alpha_m J_m(\lambda_0 r) \exp(im\varphi), \quad (40)$$

$$\lambda_0^2 = k_0^2 \varepsilon(\omega_0), \quad E_{0\varphi} = E_{0r} = 0,$$

где

$$\alpha_m = \frac{2i}{\pi a} \{ J_m(\lambda_0 a) H_m^{(1)'}(k_0 a) - J_m'(\lambda_0 a) H_m^{(1)}(k_0 a) \}^{-1}. \quad (41)$$

Из (40) и (30) следует, что $f_{2m} = 0$, и после упрощения по индексам

i и k получим из (33) с учетом (38) полное сечение некогерентного рассеяния для рассматриваемого случая:

$$\sigma_{\omega} = \frac{4r_e f(\Delta\omega, T)}{k(\pi k_0 a)^2} \int_{-k}^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^2 (|\delta_{11}|^2 + |\delta_{21}|^2)}{|\Delta|^2} \times \quad (42)$$

$$\times \int_0^a \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ |(J_m J_n)'|^2 + \left[\frac{(n-m)^2}{r^2} + \beta^2 \right] |J_m(\lambda_0 r) J_n(\lambda r)|^2 \right\} |\alpha_m|^2 r dr d\beta,$$

где

$$f(\Delta\omega, T) = \frac{T}{mc^2} \frac{\varepsilon''(\Delta\omega)}{|\varepsilon(\Delta\omega)|^2 \Delta\omega}. \quad (43)$$

Сравнительно сложная аналитическая формула (42) получена здесь для цилиндра произвольного радиуса. Чрезвычайно простые результаты следуют из (42), если радиус цилиндра мал по сравнению как с длиной падающей волны (и в вакууме, и в среде), так и с измененной длиной волны, рассеянной на флуктуациях плотности заряда. Сохраняя в рядах для функций Бесселя только первые члены, можно показать, что основной вклад в сечение σ_{ω} дают нулевые и первые члены рядов, входящих в (42), а именно

$$\sigma_{0,0} = \frac{2}{15} r_e \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 (ka)^2 f(\Delta\omega, T); \quad (44)$$

$$\sigma_{1,0} = \sigma_{-1,0} = \frac{2}{15} r_e \frac{5|\varepsilon|^2 + 3}{|\varepsilon + 1|^2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 (ka)^2 f(\Delta\omega, T); \quad (45)$$

$$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,-1} = \frac{1}{3} r_e (ka)^2 f(\Delta\omega, T). \quad (46)$$

Индексы внизу обозначают nm -член ряда из (42). Характерной особенностью этих формул является дополнительный резонанс колебаний $\sigma_{1,0}$ и $\sigma_{-1,0}$ при условии $\text{Re} \varepsilon = -1$ (такое условие реализуется в плазме), который никоим образом не может быть получен из борновского приближения.

Отметим, что формулы типа (45), как и во всех дифракционных задачах, позволяют установить условие резонанса, но, вообще говоря, недостаточны для определения его добротности. При вычислении сечения рассеяния в резонансных условиях следует учесть основные диссипативные процессы. Если эти процессы таковы (например, столкновения), что для их описания достаточно ввести мнимую часть ε'' , то можно пользоваться (45) с учетом ε'' . Если же при $\varepsilon = -1$ основную роль играет радиационное затухание, то соответствующая формула получается из (42) при сохранении членов, связанных с радиационным затуханием, и имеет вид

$$\sigma_{1,0} = \sigma_{-1,0} = \frac{8(1 - \pi/4)}{\pi^2 (k_0 a)^2} r_e f(\Delta\omega, T),$$

что представляет, по существу, верхний предел для сечения некогерентного рассеяния тонким цилиндром.

К снижению добротности резонанса приводят также размытость плазменных границ [19], пространственная дисперсия [20] и нелинейные

эффекты [21]. Поэтому точный вид сечения рассеяния при резонансе требует специального исследования в каждом конкретном случае.

Необходимо подчеркнуть, однако, что из (45) следует важный качественный результат: существует такое соотношение частот падающей и рассеянной волн, при которых геометрический ($\epsilon = -1$) и плазменный ($f(\Delta\omega, T) = \max$) резонансы совмещены, что приводит к резкому возрастанию сечения некогерентного рассеяния. В случае холодной однородной плазмы это происходит, если одновременно

$$\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}, \quad \Delta\omega = \pm \Omega,$$

где Ω — ленгмюровская частота плазмы.

5. БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Сечение некогерентного рассеяния в борновском приближении можно легко получить, воспользовавшись результатами общей теории рассеяния [1]. В соответствии с общим формализмом [1] при наличии рассеяния должно быть

$$D_i = \epsilon(\omega)E_i + \alpha_{ik}E_{0k}. \quad (47)$$

Сравнивая (47) с уравнениями (1), можно заключить, что для нашего случая

$$\alpha_{ik} = -\frac{4\pi r_e \delta n}{kk_0} \delta_{ik}. \quad (48)$$

Мы учли снова только ток I_1 , поскольку ток I_2 при рассеянии плоских поперечных волн вообще несущественен [7, 8]. Тогда, согласно [1], рассеянное поле в удаленной точке пространства определяется сразу:

$$E = -\frac{\exp(ikR_0)}{4\pi R_0} [k[kG]], \quad (49)$$

где

$$G = \int \alpha E_0 \exp(-iqr) dV,$$

причем $q = k - k_0$ — изменение волнового вектора при рассеянии, интегрирование производится по объему рассеивающего тока, а вектор k имеет направление R_0 .

Вычисляя с помощью (49) полный поток энергии рассеянных волн через поверхность сферы радиуса R_0 и деля его на плотность потока мощности падающей волны, получим сечение рассеяния

$$\sigma_\omega = \frac{k^4}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle gg^* \rangle \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (50)$$

где

$$g = -\frac{4\pi r_e}{kk_0} \int \delta n(r) \exp(-iqr) dV. \quad (51)$$

Но из (37) после применения флуктуационно-диссипативной теоремы имеем

$$\langle \delta n^{(1)} \delta n^{(2)*} \rangle = \frac{f(\Delta\omega, T)}{(2\pi)^2 r_e} \Delta\delta(r_2 - r_1). \quad (52)$$

Усреднение (51) легко осуществляется на основании (52):

$$\langle gg^* \rangle = \frac{4r_e f(\Delta\omega, T)}{(kk_0)^2} q^2 V, \quad (53)$$

где V — полный объем рассеивающего тела. Подставляя (53) в (50) и интегрируя по углам, получим следующий окончательный результат:

$$\sigma_\omega = \frac{2}{3} r_e \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 (k^2 + k_0^2) \frac{f(\Delta\omega, T)}{\pi} V. \quad (54)$$

Этот результат пригоден, разумеется, не только для цилиндрического тела, но и вообще для любых тел. В этом одно из преимуществ борновского приближения. В частности, для цилиндра единичной длины из (54) имеем

$$\sigma_\omega = \frac{2}{3} r_e \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 (k^2 + k_0^2) a^2 f(\Delta\omega, T). \quad (55)$$

Как и следовало ожидать, никаких резонансных эффектов, связанных с наличием границы, формула (55) не отражает. В этом — слабость борновского приближения применительно к рассматриваемым задачам некогерентного рассеяния.

Ясно, что строгое решение граничной электродинамической задачи (42) должно совпадать с полученным в борновском приближении (55), если $\varepsilon \simeq 1$ (в нулевом приближении $\varepsilon = 1$). Докажем это.

Полагая $\varepsilon = 1$, определим из (32)

$$\delta_{12} = -\delta_{21} = 0, \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \frac{2i}{\pi a}. \quad (56)$$

Кроме того, из (41)

$$\alpha_m = 1 \quad (57)$$

— результат, физически очевидный и сам по себе, поскольку он просто означает, если учесть (39) — (40), что при $\varepsilon = 1$ все падающее поле проникает во вторую среду.

Подставляя (56) и (57) в общую формулу (42) и используя соотношения

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'^2(\lambda r) = \frac{\lambda^2}{2}, \quad (58)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(n-m)^2}{r^2} J_m^2(\lambda_0 r) J_n^2(\lambda r) = \frac{1}{2} (\lambda_0^2 + \lambda^2),$$

из (42) получаем результат (55). Это же можно доказать и изящнее, заметив, что в случае очень тонкого цилиндра первые члены в рядах, даваемые формулами (44) — (46), заведомо исчерпывают весь эффект. Полагая в (45) $\varepsilon = 1$ и вычисляя сумму $\sigma_{0,0} + 2\sigma_{1,0} + 2\sigma_{0,1}$, снова приходим к (55). Сечение (55), полученное в борновском приближении, не зависит, конечно, от направления падающей волны. Решив соответствующую дифракционную задачу о рассеянии наклонно падающей волны диэлектрическим цилиндром, для предельного случая $\varepsilon = 1$ мы снова придем к (55).

В заключение пользуюсь случаем глубоко поблагодарить А. Г. Ситенко, возбуждившего интерес автора к задачам, затронутым в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
2. М. А. Леонтович, С. М. Рытов, ЖЭТФ, 23, 246 (1952); С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
3. А. И. Ахиезер, И. Г. Прохода, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 33, 790 (1957).
4. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон ж, 35, 694 (1958)
5. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 41, 644 (1961).
6. Ф. Г. Басс, А. Я. Бланк, ЖЭТФ, 43, 1479 (1962).
7. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
8. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, Харьков, 1965.
9. W. E. Gordon, Proc. IRE, 46, 1824 (1958).
10. K. L. Bowles, J. Res. Nat. Bur. Stand., 65D, 1 (1961).
11. J. R. Dougherty, D. T. Farley, Proc. Roy. Soc., A259, 79 (1960).
12. E. E. Salpeter, J. Geophys. Res., 65, 1851 (1960); Phys. Rev., 120, 1528 (1960).
13. Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, М., 1957
14. Y. Midzuno, J. Phys. Soc. Japan, 16, 971, 1403 (1961).
15. F. A. Albin, E. R. Nagelberg, J Appl. Phys., 33, 1706 (1962).
16. И. А. Ахиезер, ЖТФ, 33, 935 (1963)
17. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 375 (1964).
18. Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958.
19. T. R. Kaiser, R. L. Closs, Philos. Mag., 43, 1 (1952).
20. К. Н. Степанов, ЖТФ, 35, 1002 (1965).
21. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 46, 2156 (1964).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
6 августа 1966 г.

ON THE THEORY OF NONCOHERENT ELECTROMAGNETIC WAVE
SCATTERING ON CYLINDRICAL-SYMMETRIC PLASMA STRUCTURES

I. P. Yakimenko

The method is formulated and considered to solve the problem of plane electromagnetic wave scattering on density fluctuations of a charge in plasma confined by a cylindrical surface. The results are compared with the solution derived on the basis of Born's approximation that permits to find out the characteristic features and the necessity of formulating the boundary problem of electrodynamics.

УДК 621.374.4 : 539.293

ОБ УТРОЕНИИ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ ГОРЯЧИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Г. Г. Сергеева

В рамках элементарной теории рассматривается задача о генерации третьей гармоники при прохождении сильной волны частоты ω через газ горячих электронов в полупроводниках. Получены формулы для амплитуды волны утроенной частоты в случае спиральных волн.

Изучению вопроса о влиянии нелинейности на распространение электромагнитных волн в плазме и полупроводниках посвящено большое число работ [1, 2, 3]. Интерес представляет возникновение в нелинейных средах обертонов с частотами, кратными частоте ω падающей электромагнитной волны, и взаимодействие их с падающей волной. В настоящей заметке определяется амплитуда электромагнитной волны с частотой 3ω , возникающей при прохождении сильной волны с частотой ω через газ горячих электронов в полупроводниках. Рассматривается случай спиральных волн.

Поле в некоторой точке полупространства (полупроводник считаем полубесконечной средой, ось z направлена вертикально вверх, начало отсчета выбираем на границе полупроводника) можно разложить в ряд Фурье:

$$E = E_1 \exp(i\omega t) + E_2 \exp(2i\omega t) + E_3 \exp(3i\omega t) + \text{к. с.} \quad (1)$$

В рассматриваемом случае можно ограничиться элементарной теорией, так как применение кинетической теории тоже приводит только к качественным результатам [1, 3, 6]*.

Запишем систему исходных уравнений:

$$m \frac{du}{dt} = eE - m \nu_{\text{эфф}} u + \frac{e}{c} [uH], \quad (2)$$

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{2e}{3k} uE - A(T_e)(T_e - T), \quad (3)$$

$$A(T_e) = A_0(T_e/T)^r.$$

Здесь u — скорость электрона, m — эффективная масса, $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная частота столкновений, H — напряженность постоянного магнитного поля, параллельного оси z , T — температура решетки, T_e — температура электронного газа с учетом разогрева его сильной электромагнитной волной, A_0 — значение величины $A(T_e)$ при $T_e = T$, величина r зависит от типа рассеяния волны [2].

Для того, чтобы удержать в уравнениях (2), (3) все члены по-

* Без магнитного поля уравнения кинетической теории [6] приводят к тем же результатам (например, уравнения (14)).

рядка амплитуды волны E_3 третьей гармоники, нужно представить величины $\nu_{эфф}$, u и T_e в следующем виде:

$$\nu_{эфф} = \sum_{k=0}^3 \nu_{ke} \exp(ki\omega t) + \text{к. с.}; \quad (4)$$

$$u = \sum_{n=1}^3 u_n \exp(in\omega t) + \text{к. с.}; \quad (5)$$

$$T_e = T + T_{0e} + T(t), \quad T(t) = \sum_{n=1}^3 T_{ne} \exp(ni\omega t) + \text{к. с.}, \quad (6)$$

где T_{0e} — не зависящая от времени добавка к начальной температуре T . Записывая уравнение (2) для всех компонент u_n с учетом (4) и пренебрегая всеми членами высшего порядка малости по сравнению с u_3 , получим

$$\begin{aligned} i\omega m u_1 &= eE_1 + m(\nu_{0e}u_1 + \nu_{2e}u_1^*) + \frac{e}{c} [u_1 H], \\ 2i\omega m u_2 &= eE_2 + m(\nu_{0e}u_2 + \nu_{1e}u_1) + \frac{e}{c} [u_2 H], \\ 3i\omega m u_3 &= eE_3 + m(\nu_{0e}u_3 + \nu_{2e}u_1) + \frac{e}{c} [u_3 H] \end{aligned} \quad (7)$$

и аналогичные уравнения для комплексно сопряженных величин. Компоненты интересующих нас скоростей u_1 и u_3 равны

$$\begin{aligned} u_{1x} \pm iu_{1y} &= \frac{e}{m[\nu_{0e} + i(\omega \mp \omega_H)]} \left[E_{1x} \pm iE_{1y} - \nu_{2e} \frac{E_{1x}^* \pm iE_{1y}^*}{\nu_{0e} - i(\omega \pm \omega_H)} \right], \\ u_{1z} &= \frac{e}{m(\nu_{0e} + i\omega)} \left(E_{1z} - \frac{\nu_{2e}E_{1z}^*}{\nu_{0e} - i\omega} \right), \\ u_{3x} \pm iu_{3y} &= \frac{e}{m[\nu_{0e} + i(3\omega \mp \omega_H)]} \left[E_{3x} \pm iE_{3y} - \nu_{2e} \frac{E_{1x} \pm iE_{1y}}{\nu_{0e} + i(\omega \mp \omega_H)} \right], \\ u_{3z} &= \frac{e}{m(\nu_{0e} + 3i\omega)} \left(E_{3z} - \nu_{2e} \frac{E_{1z}}{\nu_{0e} + i\omega} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\omega_H = e|H|/mc$.

В полупроводниках сильная электромагнитная волна приводит к значительному разогреву электронного газа $T_{0e} \gg T$ [5], поэтому величина $A(T_e)(T_e - T)$ из уравнения (3) может быть записана в следующем виде:

$$A(T_e)(T_e - T) \simeq \frac{A_0 T_{0e}^r}{T^r} [T_{0e} + rT + (r+1)T(t)]. \quad (9)$$

При этом для спиральных волн $\frac{T(t)}{T + T_{0e}} \sim \nu_0/\omega \ll 1$. Переписывая уравнение (3) с учетом (6), (9), получим уравнения для определения T_{0e} , T_{2e} :

$$\frac{A_0 T_{0e}^r}{T^r} (T_{0e} + rT) = \frac{2e}{3k} (u_1^* E_1 + u_1 E_1^*),$$

$$i\omega T_{1e} = -\frac{A_0 T_{0e}^r}{T^r} (r+1) T_{1e} + \frac{2e}{3k} u_1^* E_2, \quad (10)$$

$$2i\omega T_{2e} = -\frac{A_0 T_{0e}^r}{T^r} (r+1) T_{2e} + \frac{2e}{3k} (u_1 E_1 + u_1^* E_3 + u_3 E_1^*).$$

Из уравнения для T_{1e} видно, что этот член мал по сравнению с T_{2e} . Решая первое из уравнений (10) с помощью формул (8), после простых вычислений получим, пренебрегая членами, содержащими ν_{2e} :

$$T_{0e}^{r+1} = \frac{2e^2 T^r}{3k A_0 m} \left\{ \nu_{0e} \frac{(E_{1x} + iE_{1y})(E_{1x}^* - iE_{1y}^*)}{\nu_{0e}^2 + (\omega - \omega_H)^2} + \right.$$

$$\left. + \nu_{0e}^* \frac{(E_{1x} - iE_{1y})(E_{1x}^* + iE_{1y}^*)}{\nu_{0e}^2 + (\omega + \omega_H)^2} + \frac{2\nu_{0e} E_{1z}^2}{\omega^2 + \nu_{0e}^2} \right\}.$$

Так как $\nu_{\text{эфф}} = \nu_0 (T/T_e)^l$ [l — эффективная частота столкновений при $T_e = T$, l зависит от типа рассеяния волны [2)], легко найти связь между величинами $\nu_{\text{эфф}}$ и $T(t)$:

$$\nu_{\text{эфф}} = \nu_0 \frac{T^l}{T_{0e}^l} - \nu_0 \frac{l T^l}{T_{0e}^{l+1}} T(t), \quad (11)$$

$$\nu_{0e} = \nu_0 \frac{T^l}{T_{0e}^l}, \quad \nu_{2e} = -\nu_0 \frac{l T^l}{T_{0e}^{l+1}} T_{2e}.$$

Таким образом, величина T_{0e} , характеризующая степень «разогрева» электронного газа сильной волной, равна

$$T_{0e} = T^{1-1/r+l+1} \left\{ \frac{2e^2 \nu_0}{3k A_0 m} \left[\frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\nu_0^2 + (\omega - \omega_H)^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\nu_0^2 + (\omega + \omega_H)^2} + \frac{2E_{1z}^2}{\nu_0^2 + \omega^2} \right] \right\}^{1/r+l+1}. \quad (12)$$

Величина T_{2e} определяется из уравнения (10). В нулевом приближении, пренебрегая величиной $A_0 T_{0e}^r (r+1)/T^r$ по сравнению с 2ω , получим

$$T_{2e} = \frac{2e}{3k} u_1 E_1 \frac{1}{2i\omega + A_0 T_{0e}^r (r+1)/T^r} \approx \frac{2e^2}{6km} \left(\frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\omega_H^2 - \omega^2} - \frac{E_{1z}^2}{\omega^2} \right). \quad (13)$$

Здесь и всюду в дальнейшем нас интересует случай спиральных волн, $\nu_0 \ll \omega$, $\omega_H \gg \nu_0$, $\nu_0 < |\omega - \omega_H|$. Из уравнений (11), (12) и (13) с учетом (4а) найдем ν_{2e} :

$$\nu_{2e} = -\frac{\nu_0 l}{T} \left(\frac{T}{T_{0e}} \right)^{l+1} = -\frac{2e^2 \nu_0 l}{12km} T^{-r/r+l+1} \left(\frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\omega_H^2 - \omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{E_{1z}^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{4e^2 \nu_0 E_1^2}{3k A_0 m} \right)^{-(l+1)/(r+l+1)}, \quad (14)$$

$$E_1^2 = \frac{(E_{1x}^2 + E_{1y}^2)(\omega^2 + \omega_H^2)}{(\omega^2 - \omega_H^2)^2} + \frac{E_{1z}^2}{\omega^2}.$$

Компоненту j_3 тока можем определить, зная величину v_{2e} из (14):

$$j_3 = eNu_3. \quad (15)$$

Уравнение для напряженности волны E_3 имеет вид

$$\frac{d^2 E_3}{dz^2} + \frac{9\omega^2}{c^2} E_3 + i \frac{4\pi}{c^2} 3\omega j_3 = 0. \quad (16)$$

Введем тензор комплексной диэлектрической проницаемости на частоте 3ω :

$$\epsilon'_{3, ik} = \epsilon_{3, ik} + i \frac{4\pi\sigma_{3, ik}}{3\omega},$$

где величины $\epsilon_{3, ik}$ и $\sigma_{3, ik}$ определяются обычными формулами с подстановкой вместо ω утроенной частоты 3ω [1]. Перепишывая уравнение (16) с учетом (6) и (14), получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{3x}}{dz^2} + \frac{9\omega^2}{c^2} [E_{3x}\epsilon'_{3, xx} + E_{3y}\epsilon'_{3, xy}] &= \frac{9\omega^2}{c^2} \exp\left(i \frac{3\omega}{c} n_1 z\right) a_{3x}, \\ \frac{d^2 E_{3y}}{dz^2} + \frac{9\omega^2}{c^2} [-E_{3x}\epsilon'_{3, xy} + E_{3y}\epsilon'_{3, yy}] &= \frac{9\omega^2}{c^2} \exp\left(i \frac{3\omega}{c} n_1 z\right) a_{3y}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь n_1 — показатель преломления волны $E_1 = E \exp\left[i \frac{\omega}{c} (n_1 - i\kappa_1)z\right]$.

В (17) пренебрегаем затуханием E_1 , так как длина образца значительно больше глубины затухания волны; неоднородностью температуры электронного газа также пренебрегаем. Величины a_{3x} и a_{3y} , поэтому не зависят от z и соответственно равны

$$\begin{aligned} a_{3x} &= \frac{i4\pi}{3\omega} \frac{e^2 N v_{2e}}{m} \frac{E_{1x}(-3\omega^2 - \omega_H^2) - E_{1y}4i\omega\omega_H}{(\omega_H^2 - 9\omega^2)(\omega_H^2 - \omega^2)}, \\ a_{3y} &= \frac{i4\pi}{3\omega} \frac{e^2 N v_{2e}}{m} \frac{E_{1x}4i\omega\omega_H + E_{1y}(-3\omega^2 - \omega_H^2)}{(\omega_H^2 - 9\omega^2)(\omega_H^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Общее решение уравнений (17) можно представить как сумму решений однородного уравнения и частного решения:

$$\begin{aligned} E_{3x} &= c_{3x} \exp\left[i \frac{3\omega}{c} (n_3 - i\kappa_3)z\right] + b_{3x} \exp\left(i \frac{3\omega}{c} n_1 z\right), \\ E_{3y} &= c_{3y} \exp\left[i \frac{3\omega}{c} (n_3 - i\kappa_3)z\right] + b_{3y} \exp\left(i \frac{3\omega}{c} n_1 z\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Показатели преломления n_3 и поглощения κ_3 волны E_3 определяются обычным образом [1]. Коэффициенты b_{3x} и b_{3y} найдем, решив систему (17):

$$\begin{aligned} b_{3x} &= \frac{a_{3x}(-n_1^2 + \epsilon'_{3, xx}) - \epsilon'_{3, xy} a_{3y}}{(-n_1^2 + \epsilon'_{3, xx})^2 + \epsilon_{3, xy}^2} = \frac{e^2 v_0 l \omega_H E_1^2 E_{1y} T^{-r/r+l+1}}{6km(\omega_H^2 - \omega^2)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{4e^2 v_0 E_1^2}{3kA_0 m} \right]^{-(l+1)/(r+l+1)}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$b_{3y} = \frac{a_{3y}(-n_1^2 + \epsilon'_{3,xx}) + \epsilon'_{3,xy} a_{3x}}{(-n_1^2 + \epsilon'_{3,xx})^2 + \epsilon'^2_{3,xy}} = \frac{e^2 v_0 l \omega_H E_1^2 E_{1x} T^{-r/r+l+1}}{6km(\omega_H^2 - \omega^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{4e^2 v_0 E_1^2}{3kA_0 m} \right]^{-(l+1)/(r+l+1)}$$

Из начальных условий $z=0$, $E_{3x} = 0$, $E_{3y} = 0$ находим, что $c_{3x} = -b_{3x}$, $c_{3y} = -b_{3y}$, т. е. амплитуды равны $E_{3x} = b_{3x}$, $E_{3y} = -b_{3y}$. В предельном случае, когда $\omega_H \gg \omega$, v_0 , формулы для T_{2e} и v_{2e} (14) упрощаются и имеют вид

$$T_{2e} = \frac{e^2}{6km} \left(\frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\omega_H^2} - \frac{E_{1z}^2}{\omega^2} \right),$$

$$v_{2e} = -\frac{e^2 v_0 l}{6km} T^{-r/r+l+1} \left(\frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\omega_H^2} - \frac{E_{1z}^2}{\omega^2} \right) \left[\frac{4e^2 v_0 E_1^2}{3kA_0 m} \right]^{-(l+1)/(r+l+1)}$$

и соответственно

$$b_{3x} = -\frac{e^2 l v_0 E_{1y}}{12km \omega_H} T^{-r/r+l+1} \left(\frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\omega_H^2} - \frac{E_{1z}^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{4e^2 v_0 E_1^2}{3kA_0 m} \right)^{-(l+1)/(r+l+1)},$$

$$b_{3y} = -\frac{e^2 l v_0 E_{1x}}{12km \omega_H} T^{-r/r+l+1} \left(\frac{E_{1x}^2 + E_{1y}^2}{\omega_H^2} - \frac{E_{1z}^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{4e^2 v_0 E_1^2}{3kA_0 m} \right)^{-(l+1)/(r+l+1)}.$$

Если, например, ограничиться рассеянием электронов только на акустических фононах, то $r=3/2$, $l=1/2$, т. е. амплитуда волны с утроенной частотой пропорциональна кубу амплитуды падающей волны и зависит от температуры решетки, как $T^{-3/4}$. Вопрос об условиях перехода энергии из первой гармоники в третью (условия синхронизации, определенные в [7]) в полупроводниках является очень сложным из-за того, что значительная часть энергии волны уходит с током проводимости.

Автор искренне благодарен Ф. Г. Бассу за внимание к работе и ценные советы, а также В. Яковенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург и А. В. Гуревич, УФН, 70, 393 (1960).
2. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ, 47, 1321 (1964).
3. И. М. Виленский, ДАН СССР, 92, 525 (1953).
4. Ф. Г. Басс, ФММ, 6, 61 (1958).
5. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1195 (1964).
6. В. R. Nag and S. Guha, British. J. Appl. Phys., 16, 1461 (1965).
7. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Вопросы нелинейной оптики, ИНИ АН СССР, М., 1964.

Институт радиотехники и электроники АН УССР

Поступила в редакцию
29 марта 1966 г.,
после доработки
4 октября 1966 г.

FREQUENCY TRIPLING OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE IN HOT ELECTRON GAS IN SEMICONDUCTORS

G. G. Sergeeva

The problem on the third harmonic generation is considered in the frames of the elementary theory when a strong frequency wave is passed through the gas of hot electrons in semiconductors. The formulæ are derived for the wave amplitude of the tripled frequency for spiral waves.

УДК 621.387.3.029.66

К ВОПРОСУ О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РАДИОМЕТРА СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

В. С. Аблязов, Е. И. Попов

Рассмотрена флуктуационная чувствительность радиометра с много-модовым детектором. Получено выражение для эквивалентной шумовой температуры детекторного приемника и выражение для флуктуационной чувствительности радиометра с многомодовым детектором.

В настоящее время для радиометров субмиллиметрового диапазона широкое применение нашли детекторные приемники на $n - \text{InSb}$ [1], германиевые болометры [2] и элементы Голея [3]. Чувствительность таких радиометров, как правило, ограничивается шумами детектора и усилительной схемы, а не высокочастотными шумами фона. Спектральную плотность мощности низкочастотного шума (G_n), приведенную к выходу детектора (или входу низкочастотного усилителя), можно представить в виде

$$G_n = kT_n/2\pi. \quad (1)$$

Здесь T_n — шумовая температура детектора совместно с усилителем [4], а k — постоянная Больцмана.

С другой стороны, если на вход точечного квадратичного детектора подать шумовой сигнал с дисперсией σ_T^2 , то спектральную плотность мощности низкочастотного шума (G'_n) на выходе детектора можно выразить в виде [5]

$$G'_n = \frac{2\beta^2\sigma_T^4}{2\pi R_{\text{вх}}\Delta f}, \quad (2)$$

где $R_{\text{вх}}$ — входное сопротивление усилителя низкой частоты, β — чувствительность детектора в $\text{в} \cdot \text{вт}^{-1}$ при нагрузке на $R_{\text{вх}}$, Δf — полоса радиометра по высокой частоте.

Считается, что коэффициент пропускания фильтра перед детектором

$$K(f) = 1 \quad \text{при} \quad f_0 - \frac{\Delta f}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{\Delta f}{2},$$

$$K(f) = 0 \quad \text{при} \quad f < f_0 - \frac{\Delta f}{2} \quad \text{и} \quad f > f_0 + \frac{\Delta f}{2}$$

и частотная характеристика детектора равномерна в полосе относительно средней частоты f_0 .

Многомодовый детектор в отличие от точечного детектирует все типы колебаний, поступающие на его вход. Поэтому для случая многомодового детектора суммирование низкочастотных флуктуаций от каждого типа волн после детектора происходит независимо [6], т. е. формула (2) для многомодового детектора примет вид

$$G'_H = \frac{\beta^2}{\pi R_{\text{вх}} \Delta f} \sum_{i=1}^N \sigma_i^4. \quad (3)$$

Считая дисперсии каждого типа колебаний одинаковыми ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_N^2$), а сумму дисперсий всех N типов колебаний равной σ_0^2 ($\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = N\sigma_1^2$), получим

$$G'_H = \frac{\beta^2 \sigma_0^4}{\pi N R_{\text{вх}} \Delta f}. \quad (4)$$

Введем понятие эквивалентной дисперсии шумов $\sigma_{0 \text{ экв}}$, определив ее как дисперсию шумового источника, помещенного на входе радиометра, спектральная плотность мощности низкочастотного шума от которого на выходе детектора равняется спектральной плотности низкочастотного шума реальной схемы. Тогда, приравняв (1) и (4), получим следующее выражение для эквивалентной дисперсии шумов:

$$\sigma_{0 \text{ экв}}^2 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{kNT_H R_{\text{вх}} \Delta f}{2} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

В сантиметровом и миллиметровом диапазонах широко используется понятие температуры шумов приемника. Для радиометров субмиллиметрового диапазона с многомодовыми приемниками также полезно ввести понятие эквивалентной шумовой температуры приемника $T_{\text{ш}}$, определив ее как температуру эквивалентного источника, помещенного на входе радиометра, шумы от которого на выходе радиометра равны собственным шумам радиометра. Как будет показано ниже, для реального случая $T_{\text{ш}} \gg 100^\circ\text{K}$, поэтому, используя приближение Релея—Джинса, получим следующую связь между дисперсией ($\delta\sigma^2$) в узкой полосе (δf) и температурой шумов [7]:

$$\delta\sigma^2 = \frac{2kT_{\text{ш}}As}{\lambda^2 F^2} \delta f. \quad (6)$$

Предполагается, что антенна идеальная с площадью A и фокусным расстоянием F , приемный элемент с площадью s помещен в фокусе антенны; $T_{\text{ш}}$ — эквивалентная температура шумового источника, излучение которого принимается антенной, а λ — длина волны. Так как $\delta\sigma^2$ является функцией частоты, имеет смысл говорить о средней дисперсии шума. Для $\bar{\sigma}_{\text{эКВ}}^2$ на входе детектора имеем

$$\bar{\sigma}_{\text{эКВ}}^2 = 2kT_{\text{ш}}AsF^{-2} \int_0^\infty K(f)\lambda^{-2}df. \quad (7)$$

Для фильтра с прямоугольной полосой из (7) получаем

$$\bar{\sigma}_{\text{эКВ}}^2 = \frac{2kT_{\text{ш}}As\Delta f}{\lambda_0^2 F^2} \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 \right] = MkT_{\text{ш}}\Delta f. \quad (8)$$

Здесь $\lambda_0 = c/f_0$.

Подставив (8) в (5), получим выражение для эквивалентной шумовой температуры, приведенной ко входу:

$$T_{ш} = \frac{1}{\beta M} \left(\frac{NT_n R_{вх}}{2k\Delta f} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где

$$M = \frac{2As}{\lambda_0^2 F^2} \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

При рассмотрении флуктуационной чувствительности радиометров с многомодовым детектором можно пользоваться формулами для точечного детектора с учетом того, что среднеквадратичное отклонение за счет флуктуаций на выходе приемника дополнительно будет пропорционально $N^{1/2}$, а приращение сигнала будет дополнительно пропорционально M . Тогда

$$\delta T_0 = \gamma T_{ш} \left(\frac{N\Delta F}{M^2\Delta f} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

где δT_0 — флуктуационная чувствительность радиометра с многомодовым детектором, γ — коэффициент, учитывающий тип радиометра, ΔF — полоса на выходе радиометра.

Подставляя (9) в (11) и считая $N \approx M$ при $M \gg 1$, получим выражение для флуктуационной чувствительности радиометра с многомодовым детектором на входе:

$$\delta T_0 = \frac{\gamma}{\beta M \Delta f} \left(\frac{T_n R_{вх} \Delta F}{2k} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Характерным в (12) является то что чувствительность радиометра зависит от параметра M , который много больше единицы.

Для кристаллического детектора

$$\bar{\sigma}_{эКВ}^2 = kT_{ш}\Delta f, \quad (13)$$

откуда следует, что $M = 1$.

При $M = N = 1$ формула (9) совпадает с формулой для эффективной шумовой температуры обычного детекторного радиометра при выполнении условий правильного перехода от коэффициента передачи β к добротности кристаллического детектора [8].

Зависимость $\delta T_0 \sim \Delta f^{-1}$ характерна для всех радиометров прямого детектирования. Она объясняется тем, что при расширении полосы на входе радиометра мощность сигнала увеличивается пропорционально Δf , а шумы не зависят от входной полосы, поскольку они определяются шумами по низкой частоте.

В случае, когда чувствительность будет определяться и высокочастотными шумами, например, температурой фона (T_ϕ), в выражение для δT_0 следует ввести T_ϕ с учетом того, что напряжения приведенных ко входу шумов приемника и высокочастотных шумов фона (T_ϕ) некоррелированы:

$$\delta T_0 = \gamma \left[(T_{ш}^2 + T_\phi^2) \frac{N\Delta F}{M^2\Delta f} \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Для случая модуляционного радиометра ($\gamma = \pi$) при $T_n = 300^\circ$, $R_{вх} = 100 \text{ ом}$, $\Delta F = 1 \text{ гц}$, $\beta = 100 \text{ в. см}^{-1}$, $\Delta f = 60 \text{ Ггц}$, $A/F^2 = 1$, $s = 25 \text{ мм}^2$, $\lambda_0 = 0,5 \text{ мм}$ имеем $M = 2As/\lambda_0^2 F^2 = 200$, $T_{ш} \approx 10^{5^\circ}$, $\delta T_0 \approx 0,1^\circ$.

Не следует смешивать термины «объемный» и «многомодовый» приемник. Термин «объемный» характеризует тот факт, что излучение поглощается в объеме полупроводника. Объемный приемник, если его раз-

меры сравнимы с длиной волны, может быть и одномодовым, как это имело место в [9].

В заключение следует отметить, что чувствительность радиометра субмиллиметрового диапазона с многомодовым детектором (при условии, что угловые размеры источника шире диаграммы направленности антенной системы), примерно, в M раз больше чувствительности радиометра с кристаллическим детектором при прочих равных условиях, что подтверждается экспериментом.

Увеличение чувствительности в M раз по сравнению с точечным детектором объясняется тем, что при многомодовом детекторе диаграмма направленности при тех же параметрах антенны примерно в M раз шире, что и приводит к увеличению мощности сигнала, поступающего на детектор от протяженного источника.

Авторы чрезвычайно признательны В. В. Мигулину и А. Н. Выставкину за полезное обсуждение результатов работы, а также благодарны Л. С. Павловой за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Попов, Изв высш уч зав—Радиофизика, 8, 862 (1965).
2. F. J. Low, Proc. IEEE, 53, 516 (1965).
3. J. A. Bastin, A. E. Gear, G. O. Jones, N. J. T. Smith, P. J. Wright, Proc. Roy. Soc, 278, 543 (1964).
4. Joseph M. Diamond, IEEE Trans., IM-12, 26 (1963).
5. В. И. Бунимович, -Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
6. Н. В. Карлов, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, 9, № 12, 2088 (1964).
7. Д. Л. Позы, Р. Н. Брейсуэлл, Радиоастрономия, ИЛ, М., 1958.
8. А. Г. Николаев, С. В. Перцов, Радиотеплолокация, изд. Сов. радио, М., 1964.
9. Е. К. Карлова, Н. В. Карлов, ПТЭ, № 2, 191 (1966).

Институт радиофизики и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
17 января 1966 г.

ON RADIOMETER SENSITIVITY IN SUBMILLIMETER RANGE

V. S. Ablyasov, E. I. Popov

Considers the fluctuation sensitivity of radiometer with a multi-mode detector. The expression is derived for an equivalent noise temperature of the detector receiver and the expression for the fluctuation sensitivity of radiometer with the multi-mode detector.

УДК 535.211 : 536.3

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ХОРОШО ПРОВОДЯЩИХ ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. В. Караваяев

Выяснено влияние крупно- и мелкомасштабных неровностей поверхности на тепловое излучение хорошо проводящих тел. Для крупномасштабных неровностей использовано приближение геометрической оптики без учета затенений. Для поверхностей с мелкомасштабными неровностями использован метод граничных условий для среднего и флуктуационного полей. В последнем случае поправка к мощности теплового излучения определяется заменой истинного импеданса на некоторый эффективный импеданс, зависящий от дисперсии наклонов поверхности. Для крупномасштабных неровностей эта поправка определяется как дисперсией наклонов, так и формой излучающего тела.

Тепловое излучение хорошо проводящих тел различной формы было рассмотрено в работах [1, 2], но лишь в том случае, когда излучающее тело ограничено гладкой поверхностью. Представляет интерес вопрос о том, как влияет на тепловое излучение шероховатость, во многих случаях свойственная поверхностям реальных тел. Выяснению этого вопроса и посвящена данная работа.

Как известно, задача о тепловом излучении тела может быть сведена при помощи теоремы взаимности к вычислению джоулевых потерь в этом теле при облучении его полем специально выбранных вспомогательных диполей, находящихся в точке наблюдения. Поэтому задача, по существу, сводится к вычислению этих потерь для статистически неровных поверхностей.

Известные в настоящее время методы нахождения дифракционного поля на статистически неровной поверхности позволяют рассматривать только достаточно пологие неровности. Если форма поверхности задана в виде $\zeta = \zeta(x, y)$, где x и y — координаты в плоскости, касательной к средней поверхности тела, то основное ограничение состоит в том, что

$$\zeta'_x \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial x} \ll 1, \quad \zeta'_y \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial y} \ll 1.$$

При этом ограничении и при условии $\zeta \ll \lambda$ решение задачи о рассеянии на неровной поверхности может быть сведено к нахождению граничных условий для среднего поля [3]. Этот метод позволяет рассматривать поверхности с произвольным отношением длины волн к радиусу корреляции неровностей ρ_k . Однако, как будет видно ниже, вычисление джоулева тепла требует большей точности этих граничных условий, чем обычно принимаемая в задачах о рассеянии волн. В связи с этим нам пришлось ограничиться только двумя предельными случаями: коротковолновым, когда радиус корреляции гораздо больше длины волны, и противоположным — длинноволновым. При рассмотрении первого из них использовано приближение геометрической оптики (отражательные формулы), а во втором — граничные условия для среднего поля.

Кроме влияния неровностей на среднюю излучаемую мощность, представляет известный интерес и разброс мощности около этого среднего значения. Как показал специально проведенный расчет, в длинноволновом случае величина относительной флуктуации мощности всегда пренебрежимо мала. В коротковолновом же случае эта величина может быть даже больше единицы, но только для очень пологих и в то же время очень высоких неровностей, что практически мало интересно. Поэтому мы ограничиваемся вычислением только средней поправки к излучаемой мощности и не рассматриваем ее возможные флуктуации.

В последующих вычислениях мы считаем, что все размеры тел значительно превышают интересующую нас длину волны. Кроме того, вычисляя только мощность волнового поля, мы всюду предполагаем, что и расстояние от тела до точки наблюдения тоже гораздо больше длины волны.

1. КОРОТКОВОЛНОВЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим сначала излучение в дальней зоне. Если ввести оси 1 и 2, перпендикулярные радиусу-вектору точки наблюдения R , то для спектральной плотности потока тепловой мощности на i поляризации имеем [2]

$$P_i = \mu \sigma G_i / \alpha, \quad (1)$$

$$G_i = \frac{4\alpha}{\sigma} \int_S \overline{|[nh_i]|^2} dS,$$

где dS — элемент неровной поверхности тела, h_i — орт магнитного поля (в свободном пространстве) электрического диполя, расположенного в точке наблюдения и ориентированного вдоль оси i , σ — площадь освещенной части средней поверхности, α — отношение освещенной части средней поверхности к ее полной площади, μ — коэффициент пропорциональности, не зависящий от геометрии задачи, черта обозначает усреднение по ансамблю случайных поверхностей, а n — вектор нормали к неровной поверхности:

$$n = (-\zeta'_x, -\zeta'_y, 1) / (1 + \zeta_x'^2 + \zeta_y'^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Масштаб изменения величины $|[nh_i]|^2$ вдоль нормали к средней поверхности определяется множителем $1/R^2$. Поскольку $\zeta \ll R$, а $\zeta' \ll 1$, мы пренебрегаем степенями ζ и ζ' выше второй. Имея далее в виду, что для статистически однородной неровной поверхности

$$\overline{\zeta \zeta'_x} = \overline{\zeta \zeta'_y} = 0,$$

находим

$$\overline{|[nh_i]|^2} dS \simeq \overline{|[nh_i]_0|^2} dS + \frac{\overline{\zeta^2}}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \overline{|[nh_i]_0|^2} d\sigma, \quad (3)$$

где v и $d\sigma$ — соответственно нормаль и элемент площади средней поверхности тела, а индекс 0 указывает на то, что соответствующие величины берутся на этой средней поверхности.

Подставляя в первый член справа в (3) величину $dS = d\sigma(\zeta_x'^2 + \zeta_y'^2 + 1)^{1/2} \simeq \left[1 + \frac{1}{2}(\zeta_x'^2 + \zeta_y'^2)\right] d\sigma$ и разлагая n в ряд по $\zeta_x'^2$ и $\zeta_y'^2$, находим

$$\begin{aligned} |\overline{[nh_i]_0^2}| dS \simeq & [(1 + \overline{\zeta_x^2}) |h_i|_0^2 - (1 - \overline{\zeta_x^2}) \times \\ & \times |-\zeta'_x h_{ix} - \zeta'_y h_{iy} + h_{iz}|_0^2] d\sigma. \end{aligned} \quad (4)$$

Если принять во внимание, что $\overline{\zeta'_x \zeta'_y} = 0$, $\overline{\zeta_x^2} = \overline{\zeta_y^2}$, то из (4) нетрудно получить

$$|\overline{[nh_i]_0^2}| dS = |[\mathbf{v}h_i]_0^2| d\sigma + 2\overline{\zeta_x^2} [|h_i|^2 - |[vh_i]^2]_0 d\sigma. \quad (5)$$

Легко видеть, что при наблюдении в дальней зоне поправка к излучаемой мощности исчерпывается первым членом справа в (3). Действительно, последний член справа в (3) по порядку величины равен $(\zeta/R)^2$. Если a — линейный размер тела, то при $a \gg R$ $(\zeta/R)^2 \sim \overline{\zeta_x^2} (\rho_k/a)^2 \times (a/R)^2 \ll \overline{\zeta_x^2}$.

Таким образом, относительная поправка пропорциональна $\overline{\zeta_x^2}$ и равна

$$\frac{\Delta P'_i}{P_{i0}} = \frac{G_i - G_{i0}}{G_{i0}} = 2\overline{\zeta_x^2} \left[\frac{4\alpha}{G_{i0}} - 1 \right], \quad (6)$$

где P_{i0} — мощность излучения с гладкой поверхности,

$$P_{i0} = \mu\sigma G_{i0}/\alpha, \quad G_{i0} = \frac{4\alpha}{\sigma} \int |[\mathbf{v}, h_i]^2| d\sigma. \quad (7)$$

Значения величин G_{i0} для тел различной формы найдены в работе [2]. Например, для тонкой плоской пластинки $G_{10} = 2$, $G_{20} = 2 \cos^2 \vartheta$, $\alpha = 1/2$ (ϑ — угол падения). Согласно (6), для такой пластинки

$$\frac{\Delta P'_1}{P_{10}} = 0, \quad \frac{\Delta P'_2}{P_{20}} = 2\overline{\zeta_x^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta. \quad (8)$$

Для шара $G_{10} = G_{20} = 4/3$, $\alpha = 1/2$, так что

$$\frac{\Delta P'}{P_0} = \overline{\zeta_x^2}. \quad (9)$$

Если рассматривается излучение выпуклого тела, то не составляет труда получить относительную поправку для полной излучаемой мощности I . В работе [2] было показано, что для выпуклого тела $\int (G_{10} + G_{20}) d\Omega = 32\pi/3$. Далее, как нетрудно видеть, для такого тела $\int \alpha d\Omega = 2\pi$, так что относительная поправка (с учетом обеих поляризаций) равна

$$\frac{\Delta I'}{I_0} = 2\overline{\zeta_x^2} \left[8 \int \alpha d\Omega / \int (G_{10} + G_{20}) d\Omega - 1 \right] = \overline{\zeta_x^2}. \quad (10)$$

Обращаясь теперь к случаю, когда размеры тела сравнимы с расстоянием до него, мы ограничимся только излучением вдоль оси круглого диска. Единственная отличная от нуля компонента вектора Пойнтинга направлена перпендикулярно диску. Ее величина пропорциональна [2] интегралу

$$\int_S \overline{[nH_1] [nH_2^*]} dS, \quad (11)$$

где поле H_1 создается электрическим, а H_2 — магнитным диполями. Оси 1 и 2 параллельны плоскости диска.

Вместо выражения (3) находим

$$\overline{[nH_1][nH_2^*]} dS = \overline{[nH_1]_0[nH_2^*]_0} dS + \frac{\bar{\zeta}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} ([\nu H_1]_0 [\nu H_2^*]_0 d\sigma). \quad (12)$$

В отличие от предыдущего случая теперь может быть существенной и поправка ΔS к излучаемой мощности, пропорциональная $\bar{\zeta}^2$. Вынося дифференцирование из-под интеграла, получаем

$$\Delta S = \frac{\bar{\zeta}^2}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial v^2}, \quad (13)$$

где S_0 — мощность излучения с гладкого диска [2]:

$$S_0 = \frac{k^2 \theta}{\pi^2} \operatorname{Re} \eta \left[1 - \cos \varphi + \frac{1}{3} (1 - \cos^3 \varphi) \right]. \quad (14)$$

В последнем выражении φ — угол, под которым радиус диска виден из точки наблюдения, z — расстояние этой точки от центра диска, η — импеданс.

Из (13) и (14) находим

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \frac{2\bar{\zeta}^2}{z^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\cos^3 \varphi (1 + 5 \cos^2 \varphi)}{4 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}. \quad (15)$$

Отметим, что при $\varphi = \pi/2$ (излучение бесконечной плоскости) поправка (15) обращается в нуль.

Действуя так же, как и при выводе (5), находим для относительной поправки, пропорциональной $\bar{\zeta}_x'^2$, выражение

$$\frac{\Delta S'}{S_0} = 2\bar{\zeta}_x'^2 \left[\frac{\int_{\sigma} (H_1 H_2^*)_0 d\sigma}{\int_{\sigma} [\nu H_1]_0 [\nu H_2^*]_0 d\sigma} - 1 \right]. \quad (16)$$

Воспользовавшись выражениями для H_1 и H_2 в волновой зоне

$$H_1 = \frac{ik}{cR^2} [f_1 R] \exp(ikR), \quad (17)$$

$$H_2 = \frac{ik}{cR^2} [R [f_2 R]] \exp(ikR)$$

(орт f_1 направлен по оси 1, а f_2 — по оси 2), находим

$$\int_{\sigma} (H_1 H_2^*)_0 d\sigma = \frac{2\pi k^2}{c^2} (1 - \cos \varphi). \quad (18)$$

Используя далее (14) и (18), имеем из (16)

$$\frac{\Delta S'}{S_0} = 2\bar{\zeta}_x'^2 \frac{2 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{4 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}. \quad (19)$$

Для бесконечной плоскости поправка исчерпывается величиной (19) и равна $\overline{\zeta}_x^2$. Заметим, однако, что применение формул (15) и (19) к бесконечной плоскости является условным, так как при малых углах падения необходимо учитывать как возможные взаимные затенения неровностей, так и то, что при таких углах не применимы отражательные формулы для касательного магнитного поля, с помощью которых получено выражение (1). Максимальный радиус диска, при котором верны полученные результаты, ограничен именно этими условиями.

2. ДЛИННОВОЛНОВЫЙ СЛУЧАЙ

В длинноволновом случае средние джоулевы потери вспомогательного поля удобно вычислять по формуле

$$Q = \int q d\sigma, \quad (20)$$

где $q = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}([\overline{EH}^*] \cdot \nu)$ — средняя плотность потерь (если вычисляются смешанные потери, H^* относится к магнитному диполю), а интегрирование производится по поверхности, достаточно близко прилегающей к средней поверхности тела, т. е. проходящей от нее на расстоянии $z \ll \lambda$. Так как рассматриваются только малые неровности ($\zeta \ll \lambda$), такую поверхность всегда можно провести.

Как и в разделе 1, будем искать решение задачи в виде разложения решения по малым параметрам, учитывающим местные отклонения поверхности от плоскости, а также ее конечную проводимость. Описывая поле на неровной поверхности, ограничимся вторым порядком метода возмущений. В соответствии с этим окончательный результат характеризуется только корреляционной функцией поверхности $\zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})$, зависящей из-за статистической изотропности только от величины ρ . Условием применимости метода возмущений является малость величин ζ/λ и $\zeta' \sim \zeta/\rho_k$, где ρ_k — радиус корреляции. Кроме того, полагая неровности коротко коррелированными, мы тем самым вводим еще один малый параметр — отношение ρ_k/λ . В дальнейшем, решая задачу, ограничимся только следующими степенями этих малых параметров: $\zeta\zeta'/\lambda \sim \rho_k\zeta'^2/\lambda$ и $\eta\zeta'^2$.

В цитированной выше работе [3] при выводе граничных условий для среднего поля отбрасывались члены порядка $\eta\zeta'^2$. Но, как будет видно далее, только учет величин такого порядка приводит к отличной от нуля поправке к поглощаемой мощности. Поэтому при решении задачи пришлось уточнить упомянутые выше граничные условия. Такое уточнение можно получить, следуя, в основном, методу, изложенному в [3], с последовательным учетом малых параметров задачи. Не приводя соответствующих выкладок, мы выпишем получающиеся граничные условия для случая, когда падающее поле можно считать волновым.

Для среднего поля уточненные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{E}_x - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \overline{E}_x}{\partial z} + \frac{\partial \overline{E}_z}{\partial x} \right) &= -\eta(1 + \overline{\zeta}_x^2) \overline{H}_y, \\ \overline{E}_y - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \overline{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \overline{E}_z}{\partial y} \right) &= \eta(1 + \overline{\zeta}_x^2) \overline{H}_x, \end{aligned} \quad (21)$$

где \bar{E} , \bar{H} — среднее поле, $\gamma = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} [\zeta(0) \zeta(\rho)] \frac{d\rho}{\rho} *$ и $\overline{\zeta_x^2} = \overline{\zeta_y^2}$. Для флуктуационных же компонент e , h граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} e_x + \eta h_y &= -\zeta'_x \bar{E}_z - \zeta \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z}, \\ e_y - \eta h_x &= -\zeta'_y \bar{E}_z - \zeta \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z}. \end{aligned} \quad (22)$$

В соответствии с разделением поля на регулярную и флуктуационную части имеем

$$q^{\sim} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ [\bar{E} \bar{H}^*] \nu + [eh^*] \nu \}. \quad (23)$$

Покажем, что учет мощности флуктуационного поля (второй член справа в (23)) лежит за пределами выбранной степени точности. Прежде всего заметим, что, поскольку активная мощность переносится только волновым полем, в выражении для q можно положить

$$e_x \sim e_y \sim h_x \sim h_y = e.$$

Далее, правую часть граничных условий (22) можно рассматривать как стороннее электрическое поле, распределенное по импедансной поверхности, совпадающей со средней поверхностью тела. При этом, как известно [1], в возбуждении волнового поля участвуют лишь те пространственные гармоники стороннего поля, период которых больше λ . Поэтому, оценивая активную мощность флуктуационного поля, будем принимать во внимание только низкочастотную часть пространственного спектра флуктуаций случайной величины

$$\zeta'_{x,y} \bar{E}_z + \zeta \frac{\partial \bar{E}_{x,y}}{\partial z}. \quad (24)$$

Так как для низкочастотных флуктуаций $\zeta' \sim k\zeta$, $\frac{\partial \bar{E}_{x,y}}{\partial z} \sim k\bar{E}$ и $\bar{E}_z \sim E$, для (24) получаем следующую оценку:

$$\zeta'_{x,y} \bar{E}_z + \zeta \frac{\partial \bar{E}_{x,y}}{\partial z} \sim \frac{\zeta}{\lambda} \bar{E}.$$

Поскольку мы считаем, что неровности коротко коррелированы, пространственный спектр флуктуаций величины ζ отличен от нуля в круге радиуса $1/\rho_k$. Принимая в расчет только ту часть этого спектра, которая лежит в круге радиуса k , мы находим, что средний квадрат низкочастотных флуктуаций величины (24) имеет порядок $\zeta^2 \rho_k^2 k^4 \bar{E}^2 \sim (\zeta/\lambda)^2 (\rho_k/\lambda)^2 \bar{E}^2$. В результате мощность флуктуационного поля по порядку величины равна $\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} ([eh^*] \nu) \sim c\bar{e}^2 \sim \zeta'^2 (\rho_k/\lambda)^4 \bar{E}^2$ и не должна

учитываться в рассматриваемом приближении, так что плотность потерь в длинноволновом случае надо вычислять по формуле

$$q = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} ([\bar{E} \bar{H}^*] \nu). \quad (25)$$

* По порядку величины $\gamma \sim \zeta'^2 \rho_k / \lambda \sim \zeta \zeta' / \lambda$.

Подставив в это выражение граничное условие (21), переписанное в векторных обозначениях

$$[\mathbf{v}\bar{E}] = \left[\frac{ik\gamma}{2} - \eta(1 + \bar{\zeta}_x'^2) \right] [\mathbf{v}[\mathbf{v}\bar{H}]] + \gamma \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{v}\bar{E}],$$

получаем

$$q = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[\eta(1 + \bar{\zeta}_x'^2) |\mathbf{v}\bar{H}|^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial z} [\bar{E}\bar{H}^*] \mathbf{v} - \gamma [\mathbf{v}\bar{E}] \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial z} \right]. \quad (26)$$

В правой части (26) уже можно считать, что поля \bar{E} , \bar{H} относятся к идеально отражающей гладкой поверхности*. Но для такой поверхности

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} [EH] \mathbf{v} = 0, \quad [\mathbf{v}E] = 0,$$

так что

$$q = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta(1 + \bar{\zeta}_x'^2) |\mathbf{v}\bar{H}|^2. \quad (27)$$

Таким образом, учет влияния неровностей сводится к замене импеданса η в выражениях для мощности излучения с гладкой поверхности на эффективный импеданс

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta(1 + \bar{\zeta}_x'^2). \quad (28)$$

Тем самым поправка $\Delta P'$ к мощности теплового излучения, возникающая из-за присутствия на поверхности коротко коррелированных неровностей, выражается формулой

$$\Delta P' = \bar{\zeta}_x'^2 P_0, \quad (29)$$

где P_0 — мощность излучения с гладкой поверхности.

Сравнивая выражения для $\Delta P'$ в коротковолновом случае (см. (5), (16)) и в длинноволновом (29), мы видим, что относительная поправка к излучаемой мощности, пропорциональная $\bar{\zeta}_x'^2$, в обоих этих случаях имеет вид

$$\frac{\Delta P'}{P_0} = \beta \bar{\zeta}_x'^2, \quad (30)$$

где $\beta=1$ для длинноволнового и $\beta \sim 1$ для коротковолнового излучения. Если рассматривается излучение бесконечной шероховатой плоскости, то в обоих случаях $\beta=1$.

Если поверхность описывается суперпозицией независимых неровностей $\zeta + \tilde{\zeta}$, обладающих двумя радиусами корреляции, из которых один гораздо больше, а другой гораздо меньше длины волны, то остаются, очевидно, в силе выражения для коротковолнового случая, но импеданс должен быть заменен в них на $\eta_{\text{эфф}} = \eta(1 + \bar{\zeta}_x'^2)$. Для излучения бесконечной плоскости получаем при этом поправку

$$\Delta P' = [\bar{\zeta}_x'^2 + \tilde{\zeta}_x'^2] P_0. \quad (31)$$

* Согласно (21), отличие \bar{E} , \bar{H} от полей E , H на идеально отражающей гладкой поверхности пропорционально $\eta \bar{\zeta}_x'^2$ и $\gamma \sim \bar{\zeta}_x'^2$ (ρ_k/λ).

В заключение мне хочется поблагодарить С. М. Рытова за постановку рассматриваемой задачи и многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
2. М. Л. Левин, ЖЭТФ, 31, 302 (1956).
3. Ф. Г. Басс, Изв. выш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 72 (1960).

Радиотехнический институт АН СССР

Поступила в редакцию
14 мая 1966 г.

THERMAL RADIATION FROM PERFECTLY CONDUCTING ROUGH SURFACES

V. V. Karavaev

The influence of large and small scale surface irregularities on thermal radiation from perfectly conducting bodies is clarified. The geometrical optics approximation is used for large-scale irregularities without allowance for shadings. For the surfaces with small-scale irregularities the method of boundary conditions is used for the mean and fluctuation fields. In the last case the correction of the thermal radiation is determined by replacing the real impedance by a certain effective impedance depending on dispersion of the surface slopes. For large-scale irregularities this correction is defined both by the dispersion of slopes and the form of the emitting body.

УДК 621.371.18 : 621.371.167

НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СЖИМАЕМЫЙ ПЛАЗМЕННЫЙ ЦИЛИНДР

Л. К. Рыжова и И. П. Якименко

Рассмотрена дифракция плоской волны на бесконечно длинном плазменном цилиндре с учетом пространственной дисперсии (в гидродинамическом приближении). Получены сечения рассеяния для случая произвольного наклонного падения плоских волн E - и H -поляризации. Исследованы частные случаи и переходы к выполненным ранее работам по рассеянию волн на горячем плазменном цилиндре при нормальном падении [1, 4] и дифракции на холодном цилиндре в случае произвольного падения [11].

1. Решение задачи о дифракции плоских электромагнитных волн при произвольном падении на плазменный цилиндр с учетом газокINETического давления имеет самостоятельное значение для исследования сечений рассеяния волн на цилиндрических плазменных телах с целью их диагностики. При учете пространственной дисперсии в гидродинамическом приближении появляется возможность, как известно [1-4], определить спектр не только обычных электромагнитных, но и так называемых электроакустических резонансов, которые служат источником дополнительной информации о состоянии плазмы.

Решение рассматриваемой задачи может оказаться полезным еще, по крайней мере, в двух отношениях. Во-первых, если известно решение дифракционной задачи, то с помощью квадратурных формул Левина [5] можно установить спектральное распределение интенсивности теплового излучения данного тела. При исследовании теплового излучения плазменного цилиндра без учета пространственной дисперсии удалось описать только электромагнитные резонансы этого излучения. Опираясь на результаты задачи рассеяния плоских волн на сжимаемом плазменном цилиндре и методику [5], можно надеяться вычислить характеристики теплового излучения такого цилиндра при учете пространственной дисперсии. Во-вторых, формальное решение задачи дифракции плоских волн необходимо при исследовании более сложного вопроса о несимметричном возбуждении плазменного цилиндра источником, расположенным вне объема плазмы, когда приходится производить интегрирование по всем направлениям падающих плоских волн.

Вопрос о дифракции электромагнитных волн на плазме, ограниченной цилиндрической поверхностью, исследовался ранее для случая, когда соотношение между радиусом плазменного цилиндра и длиной волны произвольно, а направление волнового вектора падающей волны нормально по отношению к оси цилиндра [1, 4, 7]. Однако для решения всех указанных выше задач (диагностика, тепловое излучение, возбуждение) существенно рассмотрение общего случая наклонного падения. Такое рассмотрение и проводится в настоящей работе.

2. Ограничиваясь случаем достаточно высоких частот, когда можно не учитывать движение ионов, и пренебрегая наличием соударений элект-

тронов с другими частицами, запишем уравнение движения для электронов в свободной (внешнее магнитное поле равно нулю) плазме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E - \frac{1}{n_0 m} \text{grad } p, \quad (1)$$

где \mathbf{v} — скорость электронов в плазме, p — газокINETическое давление, n_0 — равновесная плотность электронов.

Используя (1), условие адиабатичности процесса и уравнения Максвелла, можно получить следующие уравнения для продольных составляющих электрического и магнитного полей и переменной части плотности частиц n , предполагая зависимость от z вида $\exp(ik_{\parallel}z)$:

$$\Delta H_z + \lambda_1^2 H_z = 0; \quad (2)$$

$$\Delta^2 E_z + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Delta E_z + \lambda_1^2 \lambda_2^2 E_z = 0; \quad (3)$$

$$\Delta n + \lambda_2^2 n = 0, \quad (4)$$

где

$$\lambda_1^2 = k^2 \varepsilon - k_{\parallel}^2, \quad \lambda_2^2 = \frac{k^2 c^2}{v_T^2} \varepsilon - k_{\parallel}^2, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (5)$$

v_T — тепловая скорость электронов, ω_0 — ленгмюровская частота, а Δ — оператор Лапласа в поперечной плоскости.

Пользуясь (1)–(4) и уравнениями Максвелла, представим электромагнитное поле в объеме плазмы ($r < a$) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n (a_n J_n(\lambda_1 r) + b_n J_n(\lambda_2 r)) \exp[i(n\varphi + k_{\parallel}z - \omega t)], \\ E_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} \left[ik_{\parallel} a_n J'_n(\lambda_1 r) - \frac{nk}{r} \tilde{a}_n J_n(\lambda_1 r) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{k_{\parallel}} b_n J'_n(\lambda_2 r) \right\} \exp[i(n\varphi + k_{\parallel}z - \omega t)], \\ E_{\varphi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ -\frac{1}{\lambda_1^2} \left[ik \tilde{a}_n J'_n(\lambda_1 r) + \frac{nk_{\parallel}}{r} a_n J_n(\lambda_1 r) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{k_{\parallel} r} b_n J_n(\lambda_2 r) \right\} \exp[i(n\varphi + k_{\parallel}z - \omega t)], \\ H_z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \tilde{a}_n J_n(\lambda_1 r) \exp[i(n\varphi + k_{\parallel}z - \omega t)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$H_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i^n}{\lambda_1^2} \left\{ \frac{nk_{\parallel}}{r} a_n J_n(\lambda_1 r) + ik_{\parallel} \tilde{a}_n J'_n(\lambda_1 r) \right\} \exp[i(n\varphi + k_{\parallel}z - \omega t)],$$

$$H_{\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i^n}{\lambda_1^2} \left\{ ik_{\parallel} a_n J'_n(\lambda_1 r) - \frac{nk_{\parallel}}{r} \tilde{a}_n J_n(\lambda_1 r) \right\} \exp[i(n\varphi + k_{\parallel}z - \omega t)].$$

Штрих означает дифференцирование функций Бесселя по радиусу. Это

поле, как всегда при учете пространственной дисперсии в гидродинамическом приближении [8], представляет собой сумму обычного электромагнитного и безмагнитного плазменного полей.

Для дальнейшего потребуется еще радиальная скорость электронов

$$v_r = \frac{e}{m\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} \left[\frac{ink}{r} \tilde{a}_n J_n(\lambda_1 r) + k_{\perp} a_n J_n(\lambda_1 r) \right] - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 k_{\perp}} b_n J_n'(\lambda_2 r) \right\} \exp[i(n\varphi + k_{\perp} z - \omega t)]. \quad (7)$$

3. Пусть под углом α к оси на плазменный цилиндр падает плоская волна, поляризованная так, что вектор электрического поля перпендикулярен оси Oz . Тогда, разлагая поле падающей плоской волны в ряд по цилиндрическим волнам, представим его в цилиндрических координатах

$$E_z = 0, \\ H_z = \cos \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\perp} z - \omega t)], \\ E_{\varphi} = -\frac{i}{k_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n'(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\perp} z - \omega t)], \\ H_{\varphi} = \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}^2 r} \cos \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} n i^n J_n(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\perp} z - \omega t)]. \quad (8)$$

Здесь k_{\perp} и k_{\parallel} — поперечная и продольная составляющие волнового вектора падающей волны $k = \omega n/c$:

$$k_{\perp} = k \cos \alpha, \quad k_{\parallel} = k \sin \alpha. \quad (9)$$

При нормальном падении $k_{\parallel} = 0$, и все результаты настоящей работы должны переходить в полученные ранее [1, 4].

Отраженное поле выражается из уравнений Максвелла через продольные составляющие, которые мы из условий на бесконечности запишем в виде

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n A_n H_n^{(1)}(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\perp} z - \omega t)], \\ H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \tilde{A}_n H_n^{(1)}(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\perp} z - \omega t)]. \quad (10)$$

Вычислив с помощью (10) и уравнений Максвелла поток вектора Умова—Пойнтинга в радиальном направлении, разделив его на поток энергии падающей волны и проинтегрировав по всем углам φ , установим полное сечение рассеяния, отнесенное к единице длины цилиндра:

$$\sigma = \frac{4}{k_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|A_n|^2 + |\tilde{A}_n|^2). \quad (11)$$

4. Формальное решение задачи сводится, таким образом, к определению коэффициентов A_n и \tilde{A}_n , а также, при необходимости знать

внутреннее дифрагированное поле, и коэффициентов $a_n, \widetilde{a}_n, b_n$. Это можно осуществить, применив граничные условия на поверхности раздела $r=a$. Четыре из них вытекают из требования равенства тангенциальных составляющих в плазме и вакууме, а дополнительное граничное условие, которое необходимо при приближенном учете пространственной дисперсии [9], примем в виде $v_r=0$ [10]. Решив линейную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов, получим следующий результат для рассеянного поля:

$$A_n = \frac{(\overline{\Gamma}' + \overline{\gamma}') (\widetilde{\Gamma} + \widetilde{\gamma}) + (\Gamma' + \gamma') (\overline{\Gamma} + \overline{\gamma})}{(\widetilde{\Gamma} + \widetilde{\gamma}) (\Gamma + \gamma) + (\Gamma' + \gamma')^2} \cos \alpha, \quad (12)$$

$$\widetilde{A}_n = \frac{(\overline{\Gamma}' + \overline{\gamma}') (\Gamma' + \gamma') - (\Gamma + \gamma) (\overline{\Gamma} + \overline{\gamma})}{(\widetilde{\Gamma} + \widetilde{\gamma}) (\Gamma + \gamma) + (\Gamma' + \gamma')^2} \cos \alpha,$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{k_{\perp}^2} J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(k_{\perp} a) - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} H_n^{(1)}(k_{\perp} a) J_n'(\lambda_1 a),$$

$$\overline{\Gamma} = - \left(\frac{1}{k_{\perp}^2} J_n(\lambda_1 a) J_n'(k_{\perp} a) - \frac{\varepsilon}{\lambda_1^2} J_n(k_{\perp} a) J_n'(\lambda_1 a) \right),$$

$$\overline{\Gamma}' = \frac{1}{k_{\perp}^2} J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(k_{\perp} a) - \frac{1}{\lambda_1^2} H_n^{(1)}(k_{\perp} a) J_n'(\lambda_1 a),$$

$$\widetilde{\Gamma} = \frac{1}{k_{\perp}^2} J_n(\lambda_1 a) J_n'(k_{\perp} a) - \frac{1}{\lambda_1^2} J_n(k_{\perp} a) J_n'(\lambda_1 a),$$

$$\Gamma' = \frac{ink_{\parallel}}{ka} \left(\frac{1}{k_{\perp}^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) H_n^{(1)}(k_{\perp} a) J_n(\lambda_1 a),$$

$$\overline{\Gamma}' = - \frac{ink_{\parallel}}{ka} \left(\frac{1}{k_{\perp}^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) J_n(k_{\perp} a) J_n(\lambda_1 a),$$

(13)

$$\widetilde{\gamma} = \frac{n^2 k^2 \varepsilon \omega_0^2}{\lambda_1^4 a^2 \omega^2} \eta_2 J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(k_{\perp} a),$$

$$\overline{\gamma} = \frac{n^2 k^2 \varepsilon \omega_0^2}{\lambda_1^4 a^2 \omega^2} \eta_2 J_n(\lambda_1 a) J_n(k_{\perp} a),$$

$$\gamma = \frac{k_{\parallel}^2 \varepsilon \omega_0^2}{\lambda_1^4 \omega^2} \frac{\eta_2}{\eta_1} H_n^{(1)}(k_{\perp} a) J_n'(\lambda_1 a),$$

$$\overline{\gamma} = - \frac{k_{\perp}^2 \varepsilon \omega_0^2}{\lambda_1^4 \omega^2} \frac{\eta_2}{\eta_1} J_n(k_{\perp} a) J_n'(\lambda_1 a),$$

$$\gamma' = \frac{ink_{\parallel} \varepsilon \omega_0^2}{\lambda_1^4 a \omega^2} \eta_2 J_n'(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(k_{\perp} a),$$

$$\overline{\gamma}' = - \frac{ink_{\parallel} \varepsilon \omega_0^2}{\lambda_1^4 a \omega^2} \eta_2 J_n'(\lambda_1 a) J_n(k_{\perp} a),$$

$$\kappa = 1 + \frac{\omega_0^2 k_1^2 \eta_2}{\omega^2 \lambda_1^2 \eta_1}, \quad \eta_2 = \frac{J_n(\lambda_2 a)}{J'_n(\lambda_2 a)}, \quad \eta_1 = \frac{J_n(\lambda_1 a)}{J'_n(\lambda_1 a)}.$$

Коэффициенты, определяющие внутреннее дифрагированное поле, равны

$$\tilde{a}_n = \frac{2i \cos \alpha(\Gamma + \delta\gamma)}{\pi k_{\perp}^2 a \Delta}, \quad a_n = \frac{-2i \cos \alpha(\Gamma' + \delta\gamma')}{\pi k_{\perp}^2 a \Delta}, \quad (14)$$

$$b_n = \frac{k_1 \omega_0^2}{\lambda_1^2 a \omega^2} \left[i n k_{\perp} \tilde{a}_n \frac{J_n(\lambda_1 a)}{J'_n(\lambda_2 a)} + k_1 a a_n \frac{J'_n(\lambda_1 a)}{J'_n(\lambda_2 a)} \right],$$

где

$$\Delta = \left(\Gamma' + \frac{\kappa \lambda_1^2}{k_{\perp}^2 \varepsilon} \gamma' \right) (\Gamma' + \delta\gamma') + \left(\tilde{\Gamma} + \frac{\kappa \lambda_1^2}{k_{\perp}^2 \varepsilon} \tilde{\gamma} \right) (\Gamma + \delta\gamma), \quad (15)$$

$$\delta = \frac{\kappa \lambda_1^2 \eta_1}{k_{\perp}^2 \varepsilon} \frac{H_n^{(1)'}(k_{\perp} a)}{H_n^{(1)}(k_{\perp} a)}.$$

5. Соотношения (12)–(14) дают формальное решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на горячем плазменном цилиндре в общем случае наклонного падения. При нормальном падении $k_{\parallel} = 0$, и эти соотношения сильно упрощаются.

Действительно, в этом случае

$$\kappa = 1, \quad \gamma = \gamma' = \tilde{\gamma}' = \Gamma' = \tilde{\Gamma}' = 0. \quad (16)$$

С учетом (16) коэффициенты рассеянного поля A_n и \tilde{A}_n приобретают вид

$$A_n = 0, \quad \tilde{A}_n = -\frac{\tilde{\Gamma} + \tilde{\gamma}}{\tilde{\Gamma} + \tilde{\gamma}}, \quad (17)$$

что после некоторых преобразований может быть сведено к результату, полученному ранее в [4]:

$$A_n = 0, \quad \tilde{A}_n = \frac{a J'_n(k_{\perp} a) - P_n J_n(k_{\perp} a)}{\Gamma_n H_n^{(1)}(k_{\perp} a) - a H_n^{(1)'}(k_{\perp} a)}, \quad (18)$$

где

$$P_n = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ a \frac{J'_n(k \sqrt{\varepsilon} a)}{J_n(k \sqrt{\varepsilon} a)} - \frac{n^2 \omega_0^2}{\varepsilon \omega^2 a} \frac{J_n(kc \sqrt{\varepsilon} a / v_T)}{J'_n(kc \sqrt{\varepsilon} a / v_T)} \right\}. \quad (19)$$

Равенство нулю коэффициента A_n отражает тот естественный факт, что при нормальном падении волны H -поляризации ($H_z \neq 0$, $E_z = 0$) возникает рассеянная волна той же поляризации, тогда как при наклонном падении рассеянная волна представляет собой суперпозицию E - и H -волн. Из (18), как показано в [1, 4], может быть определен спектр электроакустических резонансов.

Из (12)–(14) легко получается и другой предельный случай, когда пространственная дисперсия не учитывается, и мы имеем дело, таким образом, с задачей дифракции волн, наклонно падающих на холодный плазменный цилиндр [11]. Если $v_T \rightarrow 0$ (это как раз и означает пренебрежение тепловым движением электронов), то $\kappa \rightarrow 1$, $\eta_2 \rightarrow 0$ и все коэф-

коэффициенты в (12), обозначенные малыми буквами γ , обращаются в нуль, откуда следует, что

$$A_n = \frac{\bar{\Gamma}' \tilde{\Gamma} + \Gamma' \bar{\Gamma}}{\tilde{\Gamma} + \Gamma'^2} \cos \alpha, \quad \tilde{A}_n = \frac{\bar{\Gamma}' \Gamma' - \Gamma \bar{\Gamma}}{\tilde{\Gamma} + \Gamma'^2} \cos \alpha. \quad (20)$$

Если использовать обозначения, принятые в работе [12] для многослойной цилиндрической структуры, то (20) совпадает с результатом [12] для одного цилиндрического слоя плазмы в отсутствие пространственной дисперсии.

6. Если падающая волна поляризована таким образом, что вектор магнитного поля перпендикулярен оси Oz , то ее поле записывается в виде

$$H_z = 0, \\ E_z = \cos \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\parallel} z - \omega t)], \\ E_{\varphi} = -\frac{k_{\parallel} \cos \alpha}{r k_{\perp}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n n J_n(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\parallel} z - \omega t)], \quad (21) \\ H_{\varphi} = \frac{ik \cos \alpha}{k_{\perp}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J'_n(k_{\perp} r) \exp[i(n\varphi + k_{\parallel} z - \omega t)].$$

Применив граничные условия, приходим в этом случае к следующему решению дифракционной задачи:

$$A_n = \frac{(\bar{\Gamma} + \bar{\gamma})(\tilde{\Gamma} + \tilde{\gamma}) + (\bar{\Gamma}' + \bar{\gamma}')(\Gamma' + \gamma')}{(\tilde{\Gamma} + \tilde{\gamma})(\Gamma + \gamma) + (\Gamma' + \gamma')^2} \cos \alpha, \quad (22) \\ \tilde{A}_n = \frac{(\bar{\Gamma} + \bar{\gamma})(\Gamma' + \gamma') - (\bar{\Gamma}' + \bar{\gamma}')(\Gamma + \gamma)}{(\tilde{\Gamma} + \tilde{\gamma})(\Gamma + \gamma) + (\Gamma' + \gamma')^2} \cos \alpha.$$

Осуществляя переход к холодной плазме (все $\gamma \rightarrow 0$), получим

$$A_n = \frac{\tilde{\Gamma} \tilde{\Gamma} + \bar{\Gamma}' \Gamma'}{\tilde{\Gamma} + \Gamma'^2} \cos \alpha, \quad \tilde{A}_n = \frac{\bar{\Gamma}' \Gamma' - \bar{\Gamma} \Gamma}{\tilde{\Gamma} + \Gamma'^2} \cos \alpha. \quad (23)$$

Нетрудно показать, что (23) совпадает с соответствующими формулами [11] для рассматриваемой поляризации. Действительно, преобразуя знаменатель к виду

$$\tilde{\Gamma} + \Gamma'^2 = [aH_n^{(1)}(k_{\perp} a) J_n(\lambda_1 a)]^2 D_n, \quad (24)$$

где D_n — коэффициент, введенный в [11]:

$$D_n = \left\{ \frac{H_n^{(1)'}(v)}{vH_n^{(1)}(v)} - \frac{J_n'(u)}{uJ_n(u)} \right\} \left\{ \frac{H_n^{(1)'}(v)}{vH_n^{(1)}(v)} - \frac{N^2 J_n'(u)}{uJ_n(u)} \right\} - n^2 \sin^2 \alpha (u^2 - v^2)^2, \quad (25) \\ v = k_{\perp} a, \quad u = \lambda_1 a, \quad N^2 = \epsilon,$$

можно записать, например, A_n следующим образом:

$$A_n = \left\{ -\frac{J_n(v)}{H_n^{(1)}(v)} - \frac{2i}{\pi v^2 D_n [H_n^{(1)}(v)]^2} \left(\frac{H_n^{(1)'}(v)}{v H_n^{(1)}(v)} - \frac{J_n'(u)}{u J_n(u)} \right) \right\} \cos \alpha. \quad (26)$$

Формула (26) совпадает с результатом, полученным Уэйтом [11].

Если продолжать учитывать тепловое движение в гидродинамическом приближении, но перейти в (23) к случаю нормального падения ($k_{\perp} = 0$), учитывая, что при этом все штрихованные коэффициенты равны нулю, то

$$A_n = \frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma} \cos \alpha, \quad \tilde{A}_n = 0. \quad (27)$$

Равенство \tilde{A}_n нулю означает возникновение только E -волн при нормальном падении волны E -поляризации, а отсутствие в A_n членов, содержащих v_T , соответствует неоднократно отмечавшемуся [1, 4] факту независимости дифракционных характеристик от учета пространственной дисперсии (в гидродинамическом приближении) при падении волны, у которой вектор электрического поля параллелен оси цилиндра. Однако в общем случае наклонного падения, как видно из (23), учет пространственной дисперсии оказывается существенным для обеих поляризаций падающей волны.

7. Остановимся в заключение на случае тонкого цилиндра, когда уравнение, определяющее спектр электромагнитных и электроакустических резонансов, сильно упрощается. Если длина волны значительно превосходит радиус цилиндра и в разложениях функций Бесселя в ряд можно ограничиться только первыми членами, условие резонанса приобретает вид ($|n| \geq 1$)

$$n\varepsilon(1-\varepsilon)(k_{\perp}^2 + k^2) J_n(\lambda_2 a) = \lambda_1^2 \varepsilon a (\varepsilon + 1) J_n'(\lambda_2 a). \quad (28)$$

При $k_{\perp} = 0$ (нормальное падение) отсюда следует результат [1]

$$n(1-\varepsilon) J_n \left(\frac{kc}{v_T} \sqrt{\varepsilon} a \right) = a(\varepsilon + 1) J_n' \left(\frac{kc}{v_T} \sqrt{\varepsilon} a \right). \quad (29)$$

Если в (28) положить $T = 0$ (холодная плазма), то из него следует хорошо известное условие квазистатического резонанса $\varepsilon = -1$. Такое условие, однако, не может быть получено из формул для коэффициентов рассеяния тонкого диэлектрического цилиндра, приведенных в [13]. Это указывает на то, что коэффициенты рассеяния для тонкого диэлектрического (и магнитного) цилиндра записаны в [13] некорректно*.

Приведем здесь правильные результаты, следующие из (23):

$$A_n = i\pi \left(\frac{k_{\perp} a}{2} \right)^{2n} \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 n!(n-1)!} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \cos \alpha, \\ \tilde{A}_n = \pi \left(\frac{k_{\perp} a}{2} \right)^{2n} \frac{kk_{\parallel}}{k_{\perp}^2 n!(n-1)!} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \cos \alpha. \quad (30)$$

Эти формулы, как и в [13], записаны без учета радиационного затухания.

* Авторы признательны В. Б. Гильденбургу, обратившему их внимание на это обстоятельство.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Гильденбург и И. Г. Кондратьев, Радиотехника и электроника, **10**, 658 (1965).
2. P. E. M. Vandenplas, R. W. Gould, Physica, **28**, 357 (1962); J. Nucl. Energy, C-6, 449 (1964).
3. J. C. Nickel, J. V. Parker, R. W. Gould, Phys. Rev. Letters, **11**, 183 (1963).
4. P. Weissglass, J. Nucl. Energy, C-6, 251 (1964).
5. М. Л. Левин, ДАН СССР, **102**, 53 (1955).
6. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 476 (1965).
7. Ю. Н. Диестровский и Д. П. Костомаров, Радиотехника и электроника, **8**, 408 (1963).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
9. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965.
10. G. V. Field, Astrophys J., **124**, 555 (1956).
11. J. R. Wait, Canadian J. Physics, **33**, 189 (1955).
12. И. П. Якименко, ЖТФ (в печати)
13. Д. Уэйт, Электромагнитное излучение из цилиндрических систем, изд. Сов. радио, М., 1963.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
4 июля 1966 г.OBLIQUE INCIDENCE OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE
ON COMPRESSIBLE PLASMA CYLINDER*L. K. Ryzhova, I. P. Yakimenko*

Plane wave diffraction on an infinitely long plasma cylinder is considered with allowance for a spatial dispersion (in a hydrodynamic approximation). The scattering cross-sections are obtained for the case of an arbitrary oblique incidence of E - and H -polarization plane waves. There is investigated the particular cases and connecting procedures to the early written papers on the wave scattering on a hot plasma cylinder at a normal incidence [1, 4] and the diffraction on a cold one for an arbitrary incidence [1].

УДК 538.3

САМОФОКУСИРОВКА АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ*В. Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм*

Проведен численный расчет самофокусировки аксиально-симметричных параксиальных электромагнитных пучков в непоглощающих кубичных изотропных средах, средах с линейным и нелинейным поглощением и средах с насыщением нелинейности. В основу расчета положено параболическое уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды поля пучка. Показано, что в поглощающей среде возможно образование квазигоднородных слабо расходящихся каналов. Дана общая картина самофокусировки стационарных волновых пучков.

Явление самофокусировки волн [1-3] в настоящее время привлекает все большее внимание. Особенно заметно интерес к нему возрос, когда выяснилось, что оно косвенно влияет на нелинейные эффекты, такие как вынужденное рассеяние, пробой, разрушение структуры вещества, многофотонное поглощение и т. п., сопровождающие прохождение интенсивных пучков света через прозрачные жидкости и твердые тела [4-6]. Впервые самофокусировка света была продемонстрирована Пилипецким и Рустамовым [7]. Эксперименты, проведенные Таунсом и сотрудниками [8], а также измерения, описанные в [9, 21, 22], позволили получить некоторые количественные характеристики этого явления.

Теоретический анализ самофокусировки электромагнитных волн сталкивается с трудностями решения уравнений Максвелла для нелинейной среды. Сравнительно просто удается рассчитать структуры однородных волновых пучков, амплитуды которых не зависят от аксиальной координаты, в изотропных непоглощающих средах [2, 3, 10], а также простейшие конфигурации однородных пучков в нелинейной гиротропной плазме [11]. Более сложной является задача о структуре неоднородных пучков. Первые результаты ее рассмотрения для кубичной среды на основе параболического уравнения изложены в [12, 13], этому же вопросу посвящена работа [14]. В [15] доказана возможность существования в кубичной среде волновых пучков, структуры которых подобны друг другу в разных сечениях («автомодельные» пучки). Теория начального распада интенсивного пучка на отдельные светящиеся нити [1] изложена в [16].

Результаты указанных теоретических работ позволили объяснить характер пучков в начале самофокусировки, когда при мощности, превышающей некоторую критическую величину [3], происходит их «схлопывание», а также дать количественные оценки для установившихся однородных пучков. Однако структура пучка на переходном участке до сих пор не получила объяснения. На этом участке заметно изменяется поперечный профиль пучка, в результате чего к нему оказываются неприменимы приближенные методы рассмотрения, развитые в работах [12-14], базирующиеся на представлении о неизменности этого профиля. В общем случае расчет неоднородных пучков требует численного интегрирования уравнений. В данной работе такой расчет проведен для аксиально-симметричных пучков с линейной поляризацией поля в непо-

глощающих кубических изотропных средах, средах с поглощением (линейным и нелинейным) и средах с насыщением нелинейности*. Показано, что учет поглощения и насыщения нелинейности дает, в принципе, возможность объяснить структуру самофокусирующихся пучков. Все расчеты выполнены на ЭВЦМ БЭСМ-2.

1. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Для описания аксиально симметричных волновых пучков в слабо-нелинейной поглощающей среде с проницаемостью $\epsilon = \bar{\epsilon} [1 + f_1(|E|^2) - if_2(|E|^2)]$ возьмем параболическое уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды линейно поляризованного поля $E = \frac{1}{2} \{E_0 \exp [i(\omega t - kz')] + \text{к. с.}\} [12]$:

$$\Delta_{\perp} E_0 - 2ikE_0' + k^2 f_1(|E_0|^2) - ik^2 f_2(|E_0|^2) E_0 = 0. \quad (1)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\bar{\epsilon}}$, z' — координата вдоль оси пучка; в первом слагаемом дифференцирование осуществляется по поперечным координатам. Переходя к безразмерным переменным $r = kr'$ и используя амплитудно-фазовое представление функции $E_0 = \mathcal{E}(r, z) \exp[-i\varphi(r, z)]$, вместо (1) получим систему уравнений:

$$\varphi_z' = -\frac{1}{2} (\varphi_r')^2 + \frac{1}{2} f_1(\mathcal{E}^2) + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_{rr}' + \mathcal{E}_r'/r}{\mathcal{E}}; \quad (2a)$$

$$\mathcal{E}_z' = -\frac{1}{2} \mathcal{E} \left(\varphi_{rr}'' + \frac{1}{r} \varphi_r' \right) - \mathcal{E}_r' \varphi_r' - \frac{1}{2} (f_2(\mathcal{E}^2) \mathcal{E}). \quad (2b)$$

От системы, рассмотренной в [12], уравнения (2) отличаются более общей формой записи нелинейности в уравнении (2a) и слагаемым $-\frac{1}{2} f_2(\mathcal{E}^2) \mathcal{E}$ в (2b), учитывающим поглощение (линейное при $f(\mathcal{E}^2) = \text{const}$ и нелинейное**, если $f(\mathcal{E}^2) \neq \text{const}$). Уравнения (1) или (2) применимы к рассмотрению широких ($k\Lambda_{\perp} \gg 1$) параксиальных пучков; при этом поглощение в среде и нелинейность считаются достаточно слабыми ($f_1(\mathcal{E}^2) \ll 1$, $f_2(\mathcal{E}^2) \ll 1$)***.

Задавая амплитуду и фазу пучка на входе в нелинейную среду $\mathcal{E}(r, 0)$, $\varphi(r, 0)$, можно, интегрируя (2), найти его структуру $\mathcal{E}(r, z)$, $\varphi(r, z)$ в любом сечении $z > 0$. При этом следует учитывать, что система (2) инвариантна относительно замены:

$$r \rightarrow br; z \rightarrow b^2 z; f_{1,2}(\mathcal{E}^2) \rightarrow f_{1,2}(\mathcal{E}^2)/b^2. \quad (3)$$

Такая инвариантность позволяет выбирать численные значения амплитуды и масштабного коэффициента в начальных условиях $\mathcal{E}(r, 0)$, $\varphi(r, 0)$

* На необходимость отказа от учета только кубической нелинейности в непоглощающей среде при рассмотрении трехмерных самофокусирующихся волновых пучков указывалось в работах [12, 14].

** Нелинейное поглощение может быть вызвано, в частности, вынужденным рассеянием.

*** Уравнение типа (1) описывает также пространственно ограниченные волновые пакеты в слабонелинейной диспергирующей среде [17], поэтому приведенные ниже результаты имеют отношение и к этой задаче.

с известной степенью произвола; при необходимости от этих значений всегда можно перейти, используя (3), к физически приемлемым величинам.

Система (2) решалась на ЭВЦМ БЭСМ-2 методом прямых в некоторой полосе $\theta \leq r \leq r^*$. Решение задачи Коши для получающейся при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $e(r_i, z)$, $\varphi(r_i, z)$ ($i=0, 1, \dots, N$) осуществлялось методом Рунге—Кутты в модификации Мерсона [18] с автоматическим выбором шага Δz_k , обеспечивающим задаваемую точность вычисления функций $e(r_i, z_k)$, $\varphi(r_i, z_k)$ на каждом шаге. Счет прекращался либо при достижении наперед заданного значения z , либо при появлении в решении участков с быстрым изменением по r искомых функций $e(r, z)$ или $\varphi(r, z)$. Появление таких участков указывало на то, что в процессе счета практически достигнуто сечение наибольшего самосжатия пучка.

В качестве граничных условий при $r=0$ были взяты соотношения $e'_r = 0$, $\varphi'_r = 0$, вытекающие из симметрии пучка. Замкнутость системы дифференциальных уравнений при $r=r^*$ достигалась заменой производных по r в последних уравнениях ($r_N = r^*$) несимметричными разностями, в то время как всюду внутри интервала $0 < r < r^*$ брались симметричные разности*. Само значение r^* выбиралось равным $(2,5 \div 3)r$, где r — радиус характерного изменения входного пучка. Начальные распределения (при $z=0$) были во всех случаях таковы, что либо основная часть пучка локализовалась в области $r < r$, либо в этой области было локализовано возмущение на фронте плоской однородной волны, развивавшееся затем в процессе самофокусировки в светящийся канал. Контрольный расчет по приведенной схеме гауссовых пучков в линейной непоглощающей среде показал, что она обеспечивает хорошую точность численных результатов в соответствующей области изменения переменных r и z . Для нелинейной среды точность расчета контролировалась дополнительно по величине интеграла $\int_0^{r^*} e^2 r dr$, который вычислялся через заданные интервалы Δz .

Ниже приводятся результаты вычислений.

2. СТРУКТУРА ПУЧКОВ В НЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ КУБИЧНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим сначала волновые пучки в непоглощающей кубичной среде: $f_1(\xi^2) = \epsilon' \xi^2 \equiv e^2(\epsilon' > 0)$; $f_2(e^2) = 0$. Будем различать два случая: 1) развитие локализованного возмущения, возникшего на фронте неограниченной плоской волны: $e(r, 0) = e_0 + \tilde{e}(r)$, $e_0 = \text{const}$, $\tilde{e}(r) \rightarrow 0$ при $r \gg a$, где a — радиус возмущения; 2) прохождение через нелинейную среду ограниченного пучка: $e(r, 0) \rightarrow 0$, $r \gg b$, b — радиус пучка.

Возьмем $e(r, 0) = 1 + 0,1 \exp(-r^2/a^2)$; $\varphi(r, 0) = 0$. Такое распределение поля соответствует первоначально нефокусированному пучку. На рис. 1 показано изменение амплитуды поля в максимуме ($r=0$) развивающегося возмущения. На начальном участке в зависимости от a может происходить как фокусировка** (кривые 1—4), так и (при уменьшении a) расфокусировка возмущения (кривая 5). Такой ход кривых на рис. 1 полностью согласуется с результатами работы [16], в которой было

* Заметим, что подобная процедура в применении к плоской границе обеспечивает ее согласование с примыкающим к ней полупространством для любой плоской волны независимо от угла падения ее на эту границу.

** Кривые 3 и 4 на рис. 1 с графической точностью совпадают друг с другом.

показано, что начальный инкремент развития возмущения в пучке зависит при данной амплитуде от ширины области возмущения.

На рис. 2 приведены амплитудно-фазовые характеристики указанного выше пучка $e(r, z)$, $\varphi(r, z)$ в некоторых сечениях z для $a = 3,0$. Кривые для $a = 10$; 5 и 2 аналогичны. При $a = 1$ вначале происходит дифракционная расфокусировка, уширяющая область возмущения, которое затем начинает фокусироваться под влиянием нелинейности среды. Рисунок 2 наглядно иллюстрирует образование области высокой интенсивности за счет перераспределения энергии в поперечном сечении пучка.

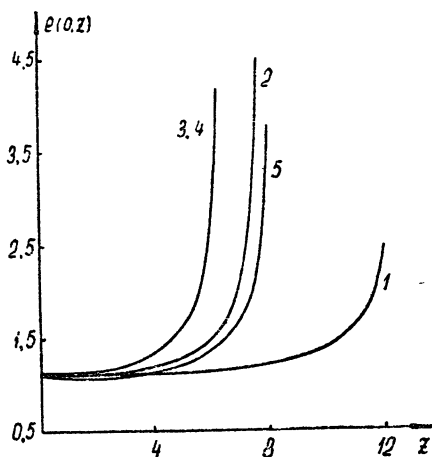


Рис. 1. Изменение амплитуды поля в максимуме локализованного возмущения при $e(r, 0) = 1 + 0,1 \exp(-r^2/a^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$:
1— $a=10$; 2— $a=5$; 3— $a=3$; 4— $a=2$; 5— $a=1$.

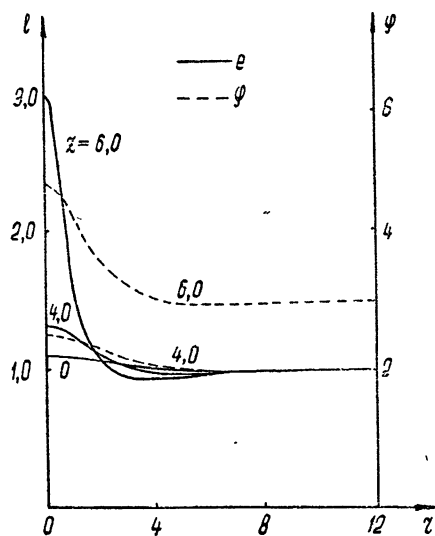


Рис. 2. Амплитудно-фазовая структура локализованного возмущения при $a=3$.

Чтобы рассмотреть прохождение через нелинейную среду ограниченного пучка, возьмем в качестве начального распределения функции $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$; $\varphi(r, 0) = 0$ (коллимированный гауссов пучок). Соответствующие результаты приведены на рис. 3, 4, 5.

Изменение амплитуды поля на оси пучка при разных значениях b иллюстрируется рис. 3. Согласно лучевому уравнению (4) работы [12], рассматриваемые пучки должны начинать самосжиматься на начальном участке нелинейной среды при $b > \sqrt{2}$, что и подтверждается приведенными графиками. В [12] было показано, что при мощности пучка, превышающей некоторую критическую величину, он фокусируется в точку на оси z («схлопывается»). Численные расчеты это подтверждают: при $b \geq b_{кр} = 2,73$ интенсивность пучков на оси достигает больших значений. При меньших начальных радиусах b поле на оси пучка, пройдя через максимум, начинает убывать (рис. 3б). На рис. 4 приведены два типичных примера хода лучей при самофокусировке гауссовых пучков: для $b = 2,7 < b_{кр}$ и $b = 4 > b_{кр}$. Для сравнения на тех же рисунках пунктиром отмечен ход лучей в линейной среде. Цифры около лучей дают долю полной мощности в соответствующей лучевой трубке.

По рис. 3 можно построить результирующий график зависимости величины be_0^{-3} (e_0 — начальная амплитуда гауссова пучка на оси $r = 0$), от параметра $b^2/z_{ф}$, где $z_{ф}$ — длина самофокусировки (расстояние по оси

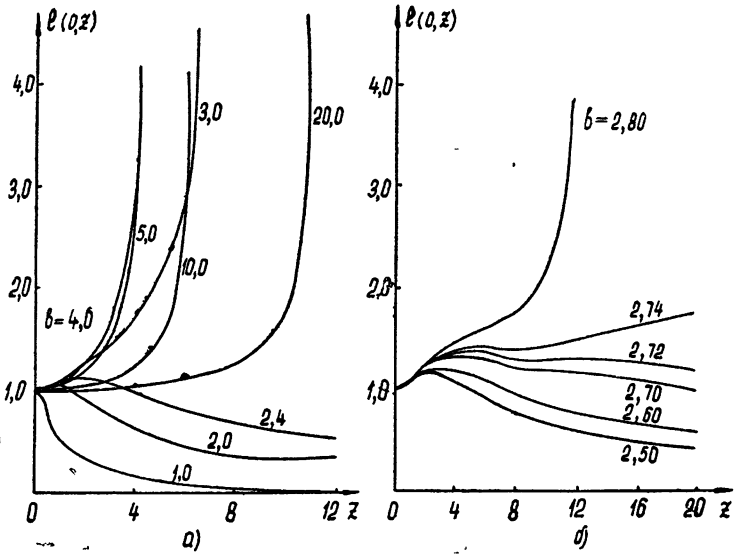


Рис. 3. Изменение амплитуды поля на оси ограниченного пучка при $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$; $\varphi(r, 0) = 0$.

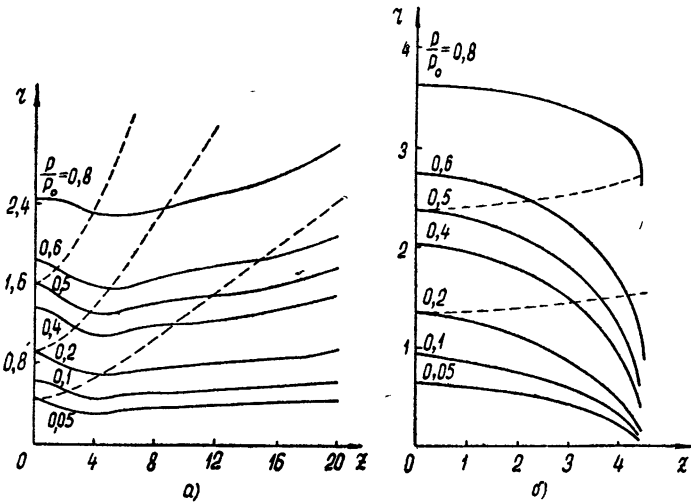


Рис. 4. Ход лучей при $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$:
а) $b = 2,7$; б) $b = 4$.

z до точки «схлопывания»). Эта зависимость с достаточной для практики точностью аппроксимируется гиперболой

$$(be_0 - 2,25)^2 - \frac{1}{4} (b^2/z_\phi)^2 = 0,23. \quad (4)$$

Величина мощности пучка, соответствующей критическому значению $(be_0)_{кр} = 2,73$, равна

$$P_{кр}^r = 0,466 \frac{cn}{\epsilon' k^2}, \quad (5)$$

что лишь на 1,5% больше значения критической мощности

$$P_{кр} = 0,46 \frac{cn}{\epsilon' k^2}, \quad (6)$$

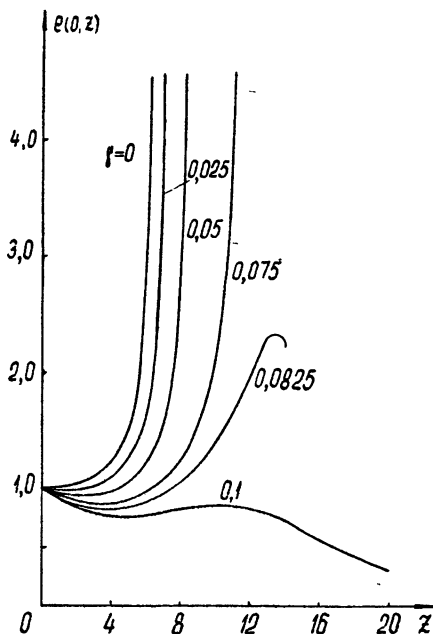


Рис. 5. Изменение амплитуды поля на оси пучка при учете линейного поглощения.

спределенной в работе [3]*. В (5) и (6) c — скорость света, n — коэффициент преломления.

Выражая be_0 через мощность пучка P : $be_0 = 2,73 \sqrt{P/P_{кр}^r}$, формулу (4) можно переписать в виде

$$\frac{A}{z_\phi} = \{ [P^{1/2} - (0,68 P_{кр}^r)^{1/2}]^2 - 0,03 P_{кр}^r \}^{1/2}, \quad (7)$$

где $A = 0,183 b^2 \sqrt{P_{кр}^r}$.

Формула (7) уточняет для гауссовых пучков результат Келли [13]

$$\frac{A}{z_\phi} = P^{1/2} - (P_{кр}^k)^{1/2}, \quad (8)$$

согласно которому между \sqrt{P} и z_ϕ^{-1} должна быть прямопропорциональная зависимость. Как следует из (7), такая зависимость имеет место лишь при $P^{1/2} \gtrsim 1,2 (P_{кр}^r)^{1/2}$. В имеющихся экспериментальных работах [9,21] связь между $P^{1/2}$ и z_ϕ^{-1} определялась практически уже на прямолинейном участке, так что почерпнуть какие-либо сведения о наличии начального параболического участка при $P \gtrsim P_{кр}$ из этих работ не удается.

* В работе [3] допущена неточность в определении $P_{кр}$, мы приводим уточненное выражение [8].

При интерпретации экспериментальных данных в соответствии с формулой Келли принято считать [9,21], что точка пересечения $(P')^{1/2}$ прямой (8) с осью $(P)^{1/2}$ позволяет определить величину критической мощности самофокусировки (6). Однако уже сопоставление величины $P_{кр}^k$ из [13] с (6) показывает, что $P_{кр}^k = 0,5 P_{кр}$. Формула (7) уточняет этот результат: экстраполируя прямолинейный участок зависимости (7) к $z_{\phi}^{-1} = 0$, найдем, что точка пересечения $(P')^{1/2} = (0,68 P_{кр}^r)^{1/2}$ или $P' = 0,69 P_{кр}$. Очевидно, при других формах начального пучка численный коэффициент в последней формуле может быть иным. Указанное обстоятельство следует иметь в виду при попытках определить величину $P_{кр}$ по пороговым характеристикам вынужденного комбинационного рассеяния, как это было сделано в работах [9,21].

3. СТРУКТУРА ПУЧКОВ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Учтем теперь в уравнении (26) последнее слагаемое. Роль его сводится к уменьшению полной мощности пучка с ростом z . Это, в свою очередь, должно сказаться на структуре пучка*.

Будем рассматривать отдельно два случая: 1) $\frac{1}{2} f_2(e^2) = \gamma = \text{const}$ (линейное поглощение), 2) $\frac{1}{2} f_2(e^2) = \chi e^2$ (нелинейное двухквантовое поглощение). Результаты рассмотрения первого случая имеют известное отношение к слабосфокусированным, второго — к сильносфокусированным пучкам высокой интенсивности.

На рис. 5 показано изменение амплитуды поля на оси пучка с начальным распределением $e(r, 0) = e_0 \exp(-r^2/b^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$ при $e_0 = 1$, $b = 10$ и разных значениях γ . Видно, что вначале во всех случаях поглощение преобладает над фокусировкой, однако при больших z и значениях γ , меньших некоторой критической величины $0,075 < \gamma_{кр} < 0,0825$, фокусировка приводит, в конце концов, к «схлопыванию» пучка. С увеличением γ до значений, больших $\gamma_{кр}$, процесс фокусировки идет лишь на некотором интервале z , сменяясь вновь расфокусировкой из-за уменьшения мощности пучка. Амплитудно-фазовые кривые, соответствующие $\gamma = 0,025, 0,05$ и $0,075$, качественно похожи на кривые при $\gamma = 0$, разница заключается лишь в том, что в поглощающей нелинейной среде амплитуда пучка около оси сначала несколько уменьшается с ростом z . Амплитудно-фазовая структура пучка при $\gamma = 0,1$ показана на рис. 6. Интересно, что, хотя она и не является однородной по z , но за точкой наибольшей фокусировки похожа на слаборасходящуюся светящуюся нить с постепенно спадающей интенсивностью. Возможно, в некоторых случаях в опытах по самофокусировке такие нити (а при малом поглощении — структуры типа изображенной на рис. 4а) могут быть приняты за стационарные (однородные) самосфокусированные каналы.

Описанная структура пучка в поглощающей среде качественно и количественно хорошо согласуется с результатами экспериментальных работ [21, 22]. Поскольку работы [21, 22] стали нам известны уже после завершения намеченной программы вычислений, были предприняты некоторые дополнительные расчеты структуры пучков в средах с линейным поглощением. Так была рассчитана зависимость be_0 от

* Мы отбрасываем здесь от изменения диэлектрической проницаемости из-за нагревания.

b^2/z_ϕ при $\gamma b^2 = 15,5$. Сопоставление этой зависимости, а также аналогичной кривой при $\gamma b^2 = 0$ (см. (7)) с соответствующими эксперимен-

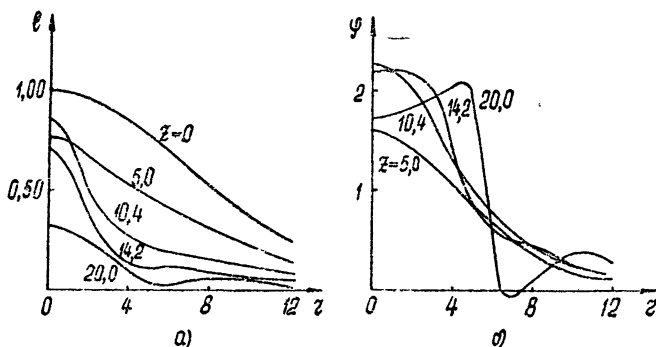


Рис. 6 Амплитудно-фазовая структура пучка в среде с линейным поглощением ($b = 10, \gamma = 0,1$).

тальными кривыми, приведенными на рис. 1 работы [21], показало хорошее их совпадение*.

На рис. 7 отражен процесс самофокусировки пучка $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$; $\varphi(r, 0) = 0$ в среде с нелинейным поглощением $\frac{1}{2} f_2(e^2) = \chi e^2$. Качественно

приведенные кривые напоминают соответствующие зависимости для пучков с линейным поглощением, но можно заметить и некоторые отличия. Сравним, к примеру, кривую $b = 10; \chi = 0,1$ на рис. 7 с кривой $b = 10; \chi = 0,1$ на рис. 5. В обоих случаях начальный коэффициент поглощения в максимуме пучка одинаков ($\gamma = 0,1$). Однако уменьшение поглощения на спадах пучка при нелинейном поглощении приводит к большому росту амплитуды поля (до $e_{\max} = 2,78$) в точке наибольшей фокусировки, чем в среде с линейным поглощением ($e_{\max} = 0,93$). В то же время вблизи этой точки интенсивность в среде с нелинейным поглощением меняется вдоль z быстрее, чем при линейном поглощении. На

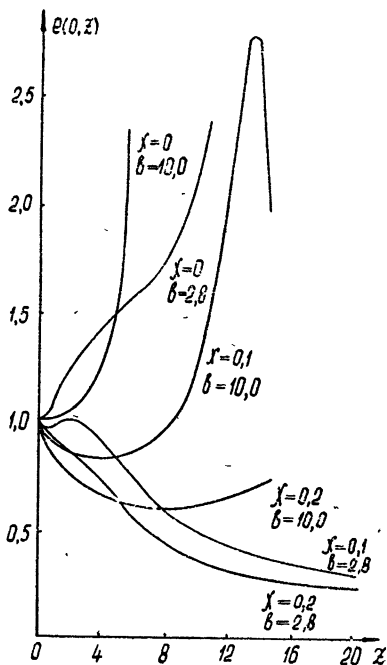


Рис. 7. Изменение амплитуды поля на оси пучка при учете нелинейного поглощения.

* В работах [21, 22] приводятся аналитические формулы, достаточно хорошо описывающие соответствующие экспериментальные зависимости. Эти формулы были получены с помощью правила, предложенного Келли [13]. В связи с этим может возникнуть сомнение в необходимости численного решения системы (2). Однако следует иметь в виду, что правило Келли само было получено в результате обработки численного счета для непоглощающей среды и должно рассматриваться как эмпирическое (авторы [22] к нему так и подходят). Мы уже говорили о необходимости уточнения результата Келли при $\gamma = 0$, тем более заранее не очевидны границы, в которых оно приводит к формулам, хорошо аппроксимирующим точные решения в случае поглощающих сред.

рис. 8 для сравнения показано изменение ширины пучка на уровне половинной амплитуды при $b=10$ в случаях 1) $\gamma = \chi = 0$; 2) $\gamma = 0, \chi = 0,1$; 3) $\gamma = 0,1, \chi = 0$; 4) $\gamma = 0,0825, \chi = 0$. Характерным при наличии поглощения является образование волноводного канала, интенсивность поля в котором за точкой максимальной фокусировки постепенно затухает, в то время как сам канал начинает медленно расширяться. Экспериментально наблюдаемые продольные профили самосфокусирующихся пучков [8] качественно близки к изображенным на рис. 8 (кривые 2—4).

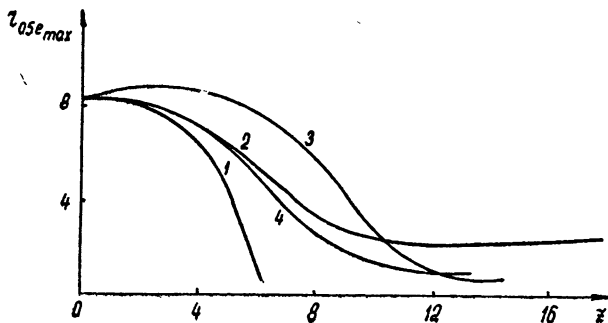


Рис. 8. Изменение ширины пучка по уровню половинной амплитуды в непоглощающей и поглощающей средах при $b=10$:

1 — $\gamma=0, \chi=0$; 2 — $\gamma=0,1, \chi=0$; 3 — $\gamma=0, \chi=0,1$; 4 — $\gamma=0,0825, \chi=0$.

Наконец, приведем еще данные, относящиеся к процессу самофокусировки в среде с нелинейным поглощением $\frac{1}{2} f_2(e^2) = \chi e^2$ возмуще-

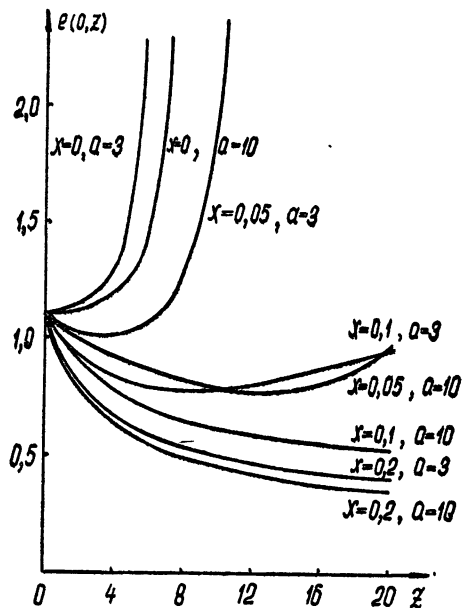


Рис. 9. Изменение амплитуды поля в максимуме локализованного возмущения в среде с нелинейным поглощением.

ния, возникшего на фронте интенсивной плоской волны: $e(r, 0) = 1 + 0,1 \exp(-r^2/a^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$. На рис. 9 показано изменение поля в максимуме возмущения. Наличие нелинейного поглощения существенно замедляет или даже совсем прекращает процесс развития возмущения*. При не слишком большом поглощении светящийся канал образуется.

Таким образом, численные расчеты аксиально-симметричных волновых пучков в нелинейной поглощающей среде показывают отсутствие перехода их при самофокусировке в совершенно однородные (не зависящие от z) структуры. Могут образовываться лишь квазиоднородные, т. е. слабо зависящие от z , и в конечном итоге все-таки расходящиеся волноводные каналы (нити). Необходимым условием их образования является близость мощно-

* К такому же выводу можно прийти и из рассмотрения линеаризованных уравнений для возмущения, подобно тому, как это было сделано в [16].

сти ограниченного пучка к мощности однородного пучка. Это достигается либо начальным подбором полной мощности пучка, либо автоматически за счет поперечной локализации наиболее быстро развивающихся неоднородностей структуры входного пучка [16] с последующим уменьшением мощности в образующем канале как в результате поглощения в среде, так и в результате некоторого переизлучения энергии в окружающее пространство с периферии канала.

Анализируя все выполненные расчеты (в том числе и не приведенные здесь), можно установить приближенную связь между максимальным значением амплитуды пучка и его шириной (на уровне 0,7 от максимума амплитуды) вблизи области ($z \sim z_{\phi}$) наибольшей фокусировки: $e(0, z \sim z_{\phi}) r_{0,7}(z \sim z_{\phi}) = 1,5 \pm 0,4$, что для квазигауссова пучка соответствует значению $be_0 \simeq 2,6 \pm 0,7$, близкому к $(be_0)_{кр}$. Это указывает на то, что мощность самообжатого пучка есть величина практически постоянная (в данной среде), слабо зависящая как от структуры входного пучка, так и от поглощения в среде (если, конечно, поглощение невелико). Примерно она равна критической мощности самофокусировки.

Приведенные выше результаты были получены для широких ($k\Lambda_{\perp} \gg 1$) параксиальных волновых пучков в кубичной среде. В тех случаях, когда пучок «схлопывается» на ось, принятые приближения нарушаются. В окрестности фокальных точек самофокусирующегося пучка следует отказаться от параболического приближения, но это сильно усложняет задачу. Другой путь состоит в отказе от кубического приближения [12, 14].

Приведем для иллюстрации примеры решения системы (2) с насыщающейся нелинейностью типа [19] $f_1(\mathcal{E}^2) = e^2/(1 + e^2/e_n^2)$, ($e^2 = \epsilon' \mathcal{E}^2$). На рис. 10 показано изменение поля на оси пучка при $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$.

Как и следовало ожидать, насыщение нелинейности ограничивает рост интенсивности на оси пучка. Пример амплитудно-фазового распределения поля в сечении максимальной фокусировки дан на рис. 11. В этом сечении в центральной части пучка образуется пло-

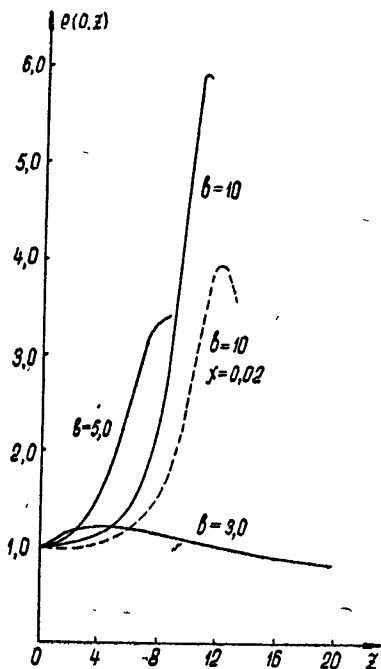


Рис. 10. Изменение поля на оси пучка с учетом насыщения нелинейности при $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$, $e_n = 2$.

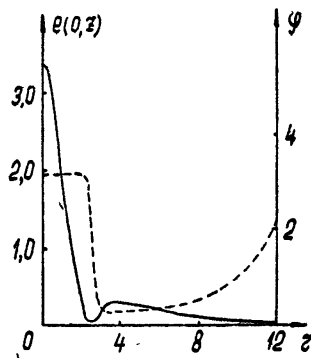


Рис. 11. Амплитудно-фазовая структура пучка в сечении максимальной фокусировки с учетом насыщения нелинейности ($b = 5$).

ский фазовый фронт. Применявшаяся программа не позволяла провести вычисления структуры пучка за точкой максимального самосжатия. Из

общего характера уравнений (2) можно ожидать, в принципе, в дальнейшем колебаний ширины сфокусированной части пучка*. Однако вполне вероятно, что из-за несинфазности поля на «крыльях» пучка (рис. 11), эти колебания будут незначительными с быстро уменьшающимся размахом.

Проведенные исследования позволяют представить общую картину самофокусировки первоначально несфокусированных волновых пучков и определить роль влияющих на нее факторов.

На начальном участке нелинейной среды происходит дробление пучка на отдельные постепенно самофокусирующиеся неоднородности. Число неоднородностей, захваченных процессом самофокусировки, зависит от мощности и амплитудно-фазовой структуры пучка, а также от степени однородности самой нелинейной среды [16]. Скорость нарастания отдельных первоначальных возмущений определяется при данной амплитуде пучка их масштабом, коэффициентом нелинейности и коэффициентом поглощения среды. Крупномасштабные неоднородности развиваются медленно из-за слабой рефракции лучей в область сильного поля, мелкомасштабные либо развиваются слабо, либо даже совсем не развиваются из-за дифракции лучей. Имеется характерный поперечный масштаб $\Delta_{\perp} \sim \lambda/2 [\Delta\epsilon^{NL}(\mathcal{E}^2)]^{1/2}$ наиболее быстро самофокусирующейся неоднородности. Мощность, приходящаяся на такую неоднородность, определяется только параметрами среды и длиной волны и не зависит от первоначальной полной мощности падающего пучка. Величина ее порядка критической мощности аксиально-симметричного пучка $P_{кр}$ (при $\epsilon' \sim 10^{-11} - 10^{-12}$ ед. CGSE, $P_{кр} \sim 10 - 100$ кэвт). В тех случаях, когда структура падающего пучка довольно однородна (например, гауссовы пучки), самофокусировка начинается в области максимума, при этом, если мощность пучка заметно превышает $P_{кр}$, в процесс локализации вовлекается лишь часть пучка.

Дальнейшее развитие локализующейся неоднородности может происходить по-разному в зависимости от величины мощности пучка, захваченного первоначально процессом самофокусировки. Если начальная мощность пучка превышает известную критическую величину, зависящую от поглощения в среде, то он «схлопывается» в чрезвычайно малую окрестность некоторой точки на его оси. Если мощность меньше этой величины, в некотором сечении процесс схлопывания прекращается и образуется квазиоднородный светящийся канал, постепенно расширяющийся из-за поглощения мощности (ср. рис. 8). Насыщение нелинейности также прекращает процесс схлопывания даже в средах с пренебрежимым малым поглощением. Однако только под влиянием поглощения (а также отчасти излучения мощности с периферией пучка) затухают колебания ширины пучка, которые могут при этом иметь место. Вполне вероятно, что учет продольной диффузии лучевой амплитуды тоже приведет к ограничению интенсивности в окрестности фокальной точки, однако этот случай выходит за рамки квазиоптического приближения, принятого в данной работе, и нуждается в специальном рассмотрении. Подчеркнем, что даже в рамках квазиоптического приближения оказывается возможным объяснить переход первоначально несфокусированного пучка в светящуюся квазиоднородную нить, вместе с тем полная теория самофокусировки, объясняющая образование очень тонких нитей

* Приближенно этот процесс можно рассмотреть с помощью уравнения (8) работы [12], взяв там соответствующую зависимость $g(\alpha)$ (см. также [14]).

(диаметром в несколько длин волн) при больших начальных мощностях пучка должна строиться с привлечением строгих волновых уравнений.

Описанная выше картина самофокусировки пучков относится к стационарному случаю и не учитывает переходных процессов в нелинейной среде [19, 20]. Все приведенные здесь расчеты применимы к таким интервалам времени после начала светового импульса, которые превышают характерное время установления нелинейной поляризации в среде, но еще малы по сравнению с временем, необходимым для проявления температурных и стрикционных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962)
- 2 В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 564 (1964).
- 3 R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
- 4 P. Lallemand, N. Bloembergen, Phys. Rev. Lett., 15, 1013 (1965); 16, 81 (1966)
- 5 Y. R. Shen, Y. J. Shaham, Phys. Rev. Lett., 15, 1008 (1965).
- 6 С. В. Кривохижа, Д. И. Маш, В. В. Морозов, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Письма ЖЭТФ, 3, 378 (1966).
- 7 Н. Ф. Пилипецкий, А. Р. Рустамов, Письма ЖЭТФ, 2, 88 (1965).
- 8 E. Garmire, R. Y. Chiao, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 16, 347 (1966).
- 9 C. C. Wang, Phys. Rev. Lett., 16, 344 (1966).
- 10 З. К. Янкаускас, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 412 (1966).
- 11 А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1148 (1965); 9, 900 (1966).
- 12 В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ, 2, 222 (1965).
- 13 P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett., 15, 1005 (1965).
- 14 С. А. Ахманов, А. Н. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 50, 1537 (1966).
- 15 В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 410 (1966).
- 16 В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ, 3, 47 (1966).
- 17 А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, 539 (1967).
- 18 Дж. М. Ланс, Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, М., 78, 1962
- 19 Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Письма ЖЭТФ, 3, 137 (1965).
- 20 С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 51, 296 (1966).
- 21 C. C. Wang, G. W. Racette, Appl. Phys. Lett., 8, 256 (1966).
- 22 W. Kaiser, A. Laubereau, M. Maier, J. A. Giordmain, Phys. Lett., 22, 60 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 августа 1966 г.

SELF-FOCUSING OF AXIAL-SYMMETRIC WAVE BEAMS

V. N. Goldberg, V. I. Talanov, R. E. Erm

There is given a numerical calculation of self-focusing of axial-symmetric paraxial electromagnetic beams in a nonabsorbing cubic isotropic, with a linear and nonlinear absorption and with nonlinearity saturation media. The parabolic equation for a slowly-varying complex amplitude of the beam field is taken as the basis for calculation. Arising of quasi-uniform weakly-diverging channels is shown to be possible in the absorbing medium. A common picture of the phenomena of nontemporary wave beam self-focusing is given.

УДК 538.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА Д. Г. ВАЙНШТЕЙНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СВЧ

Э. Л. Куликов, В. К. Ильин

Рассматривается один из методов, позволяющих оценить точность расчетных данных, получаемых при решении краевых задач электродинамики вариационным методом. Проводится сопоставление метода Вайнштейна с другими методами, используемыми для решения задач электродинамики СВЧ. Общие теоретические положения иллюстрируются на конкретных примерах.

Несмотря на то, что в последнее время появились сравнительно мощные методы расчета полых систем СВЧ, по-прежнему недостаточно разработанным является вопрос о получении оценок точности расчетных данных. Создание методов, позволяющих оценить точность расчетных данных для краевых задач математической физики, непосредственно связано с построением методов двусторонних оценок собственных чисел электромагнитных резонаторов. Действительно, пусть требуется найти решение операторного уравнения

$$Lu = F$$

внутри рассматриваемого объема V с граничным условием вида $u|_S = f$ на внешней поверхности S , ограничивающей объем V .

Приближенное решение такой задачи, как известно, можно искать, исходя из стационарных свойств функционала [1]

$$J(u) = (u, Lu) - 2(u, F) \quad (1)$$

(здесь и в дальнейшем предполагается, что внутри рассматриваемого объема отсутствуют потери).

Если в функционал (1) подставить пробную функцию u , удовлетворяющую необходимым граничным условиям, то его можно переписать в следующем виде:

$$J(u) = J(u_0 + \delta u) = J(u_0) + J(\delta u),$$

где u_0 — точное решение рассматриваемой краевой задачи, а $\delta u = u - u_0$.

Знак функционала $J(\delta u)$ определяет, найдено ли приближенное значение $J(u)$ с избытком или с недостатком по сравнению с точным значением $J(u_0)$. Но так как на поверхности S граничные условия для функции δu имеют вид

$$\delta u|_S = 0, \quad (2)$$

первоначальная задача о получении оценок точности расчетных данных сводится к определению знака функционала вида $J(v, v)$ для допустимой функции v , равной нулю на внешней поверхности S . Последнюю задачу можно условно назвать «резонаторной» задачей, соответствующей исходной проблеме. В свою очередь, определение знака функционала $J(v, v)$ связано с построением двусторонних оценок для собственных чисел резонаторов.

В настоящее время существует ряд методов для получения двухсторонних оценок собственных частот СВЧ резонаторов: метод Свирского [1], метод Като [3], вариационно-итерационный метод [4]. Однако они обладают следующими недостатками. Для применения метода Като требуется при вычислении m -го собственного значения λ_m предварительное знание значений λ_{m-1} и λ_{m+1} соответственно с избытком и с недостатком. Причем точность определения λ_{m-1} и λ_{m+1} определяет в конечном итоге точность расчетных данных.

Вариационно-итерационный метод развит, в основном, для одномерных краевых задач. Оценки точности строятся лишь для низшего собственного числа резонатора λ_0 , и при этом требуется предварительное знание собственного значения λ_1 с недостатком.

Метод Свирского, развитый в работе [2] применительно к задачам электродинамики, дает результаты лишь для задач, связанных с возмущением заранее изученной полой системы с анизотропными телами. Кроме того, при его построении (а также и в других методах) не учтена возможность наличия потенциальных функций внутри объема V .

При построении оценок точности расчетных данных весьма перспективным и простым является метод Вайнштейна [5]. Этот метод не обладает перечисленными выше недостатками, присущими методу Като (подробней об этом будет сказано ниже) и вариационно-итерационному методу, но дает более грубую оценку по сравнению с методом Като при использовании одной и той же пробной функции. Однако этот недостаток снимается с помощью электронно-вычислительных машин при нахождении достаточного числа приближений или при использовании его совместно с методом Като.

1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА ВАЙНШТЕЙНА

Рассматривается задача о нахождении собственных значений уравнения вида

$$Lu = \lambda Mu, \quad (3)$$

где L и M — линейные дифференциальные операторы. Метод Вайнштейна, развитый в работе [5], так же, как и метод Като, позволяет находить m -ое собственное значение λ_m уравнения (3) как с избытком, так и с недостатком. Однако достоинством его по сравнению с методом Като является то, что он не требует предварительного знания с достаточной степенью точности значений с недостатком для собственного числа λ_{m+1} и с избытком для λ_{m-1} .

Дело в том, что, согласно формуле Вайнштейна [5], между величинами $J_1 + (J_2 - J_1^2)^{1/2}$ и $J_1 - (J_2 - J_1^2)^{1/2}$, где $J_1 = (u, Lu)$, $J_2 = (Lu, Lu)$, при дополнительном условии $(u, Mu) = 1$ всегда находится одно собственное значение λ_i исследуемого дифференциального оператора. Весьма грубое знание λ_{m-1} и λ_{m+1} необходимо лишь для того, чтобы установить, действительно ли λ_i является m -ым собственным значением или нет. При этом следует заметить, что обычно удается, используя какие-либо предварительные сведения о задаче, давать пробную функцию в таком виде, чтобы сразу же с достаточной степенью точности определить величину λ_m . Таким образом, согласно методу Вайнштейна для m -го собственного значения справедливо неравенство

$$J_1 - \sqrt{J_2 - J_1^2} \leq \lambda_m \leq J_1 + \sqrt{J_2 - J_1^2} \quad (4)$$

при условии, что для любого собственного значения исходного дифференциального уравнения справедливо соотношение

$$(\lambda_m - J_1)^2 \leq (\lambda_i - J_1)^2. \quad (5)$$

Действительно, рассмотрим функционал

$$\alpha = \int_V (Lu - J_1)^* (Lu - J_1) dv \quad (6)$$

при дополнительном условии

$$\int_V u^* M u dv = 1.$$

Тогда, очевидно,

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 (\lambda_i - J_1)^2 \geq 0 \quad (7)$$

при условии, что пробную функцию u мы представляем в виде разложения по собственным функциям исходного оператора (3).

Перепишем (7), учитывая вытекающее из (6) равенство $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 = 1$, в виде

$$\alpha = (\lambda_m - J_1)^2 + \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 [(\lambda_i - J_1)^2 - (\lambda_m - J_1)^2]. \quad (8)$$

Из (8) и (5) получим, что

$$\alpha \geq (\lambda_m - J_1)^2 \geq 0. \quad (9)$$

Предположим, что $\lambda_m - J_1 \leq 0$. Тогда очевидно, что $\sqrt{\alpha} \geq J_1 - \lambda_m$, поэтому

$$J_1 \geq \lambda_m \geq J_1 - \sqrt{\alpha}. \quad (10)$$

Пусть теперь $\lambda_m - J_1 \geq 0$. Тогда, как это следует из (9), $\sqrt{\alpha} \geq \lambda_m - J_1$ или

$$J_1 + \sqrt{\alpha} \geq \lambda_m \geq J_1. \quad (11)$$

Совокупность (10) и (11) приводит к тому, что всегда

$$J_1 - \sqrt{\alpha} \leq \lambda_m \leq J_1 + \sqrt{\alpha}. \quad (12)$$

Но, как в этом легко убедиться, $\alpha = J_2 - J_1^2$. Поэтому (12) совпадает с (4), и справедливость формулы Вайнштейна становится очевидной.

При нахождении низшего собственного значения с помощью метода Ритца формулу (4) можно уточнить. Действительно, легко видеть, что для λ_0 справедливо неравенство

$$J_1 - \sqrt{J_2 - J_1^2} \leq \lambda_0 \leq J_1. \quad (13)$$

При решении конкретных задач электродинамики в качестве исходных уравнений типа (3) обычно используются волновые уравнения для векторных функций u , а не скалярных, как было изложено выше. Например, в ряде случаев используются волновые уравнения вида $\text{rot}(\mu^{-1} \text{rot } E) - k^2 \epsilon E = 0$ и т. п. Чисто формально все приведенные выше рассуждения переносятся и на «векторный» случай с учетом некоторых замечаний, которые излагаются в следующем разделе.

2. ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Распространение обычных вычислительных методов математической физики на задачи электродинамики связано со следующим затруднением. В электродинамике искомые поля удовлетворяют не только волновым уравнениям, но и еще дополнительному условию вида $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ или $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$. Последнее приводит к тому, что искомая функция в общем случае должна содержать вихревую и потенциальную части [4]. Наличие же потенциальной части приводит к тому, что все построения, связанные с обоснованием того или иного метода двусторонних оценок собственных чисел электромагнитных резонаторов, становятся неверными [2]. Поэтому в качестве функции \mathbf{u} , подставляемой в (12), необходимо брать поле, заведомо не содержащее потенциальной части. В работе [6] показано, что такими функциями всегда являются электрическая индукция \mathbf{D} и магнитная индукция \mathbf{B} . Однако в некоторых случаях не содержат потенциальных частей поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Достаточным условием при этом является непрерывность нормальной составляющей поля на всех поверхностях внутри рассматриваемого объема V .

Таким образом, для задач электродинамики функционалы J_1 и J_2 в неравенстве (13) имеют следующий вид:

$$J_1 = \int_V \mathbf{D}^* \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} dv, \quad (14)$$

$$J_2 = \int_V \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}^* \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} dv$$

при дополнительном условии $\int_V \mathbf{D}^* \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} dv = 1$, где ε и μ — соответственно

эрмитовы тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды, заполняющей объем V .

Формулы, аналогичные (14), но записанные относительно индукции \mathbf{B} , получаются из (14) формальной заменой $\varepsilon \rightleftharpoons \mu$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$.

Если же потенциальные части у полей \mathbf{E} и \mathbf{H} отсутствуют, то в качестве стационарных функционалов J_1 и J_2 могут быть использованы выражения

$$J_1 = \int_V \mathbf{E}^* \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} dv, \quad (15)$$

$$J_2 = \int_V \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}^* \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} dv$$

при дополнительном условии $\int_V \mathbf{E}^* \varepsilon \mathbf{E} dv = 1$. Аналогичные соотношения

для \mathbf{H} поля получаются из (15) заменой $\varepsilon \rightleftharpoons \mu$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$.

Граничные условия для задач (14), (15) одни и те же, а именно: необходимо, чтобы касательные составляющие электрических и магнитных полей, соответствующих вводимой пробной функции, были непрерывны на всех поверхностях внутри V . На внешней поверхности S должна обращаться в нуль касательная составляющая электрического поля, соответствующего пробной функции. Например, если используются соотношения (14), то внутри V непрерывны касательные составляющие

щие векторы $\frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}$, $\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}$, а на внешней поверхности S касательная составляющая вектора $\frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}$ тождественно равна нулю.

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПОЛЫХ СИСТЕМ СВЧ

а) *Волновод с диэлектрической пластинкой.* Найдем критические частоты волновода с диэлектрической пластинкой в зависимости от заполнения диэлектриком волновода. Конфигурация и размеры всего устройства показаны на рис. 1. В волноводе распространяется волна типа H_{10} .

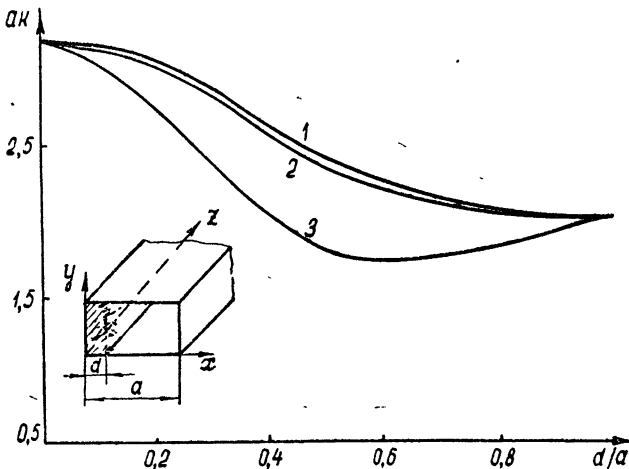


Рис. 1. Волновод с диэлектрической пластинкой:
1—по Ритцу, 2—точное решение, 3—по Вайнштейну.

Воспользуемся соотношениями (15). Пробные функции зададим в виде невозмущенной волны прямоугольного волновода:

$$E = E_y = e_y^0 \sin \frac{\pi x}{a} \exp(j\gamma z).$$

Подставляя пробные поля в (15), с учетом того, что для критической частоты $\gamma = 0$, получим

$$J_1 = \frac{(\pi/a)^2}{1 + (\epsilon - 1) (d/a - \sin(2\pi d/a)/2\pi)},$$

$$J_2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{1 + (1/\epsilon - 1) (d/a - \sin(2\pi d/a)/2\pi)}{1 + (\epsilon - 1) (d/a - \sin(2\pi d/a)/2\pi)}.$$

В качестве конкретного примера рассматривался случай, когда диэлектрическая проницаемость пластинки $\epsilon = 2,45$. Данные расчета представлены графически на рис. 1 в виде зависимости функции ak от величины d/a . На этом же рисунке приведены точные значения ak для рассматриваемой задачи [7].

б) *Резонатор с диэлектрическим стержнем.* В качестве второго примера рассмотрим прямоугольный резонатор с диэлектрическим стержнем. Расположение стержня в резонаторе и его размеры ясны из рис. 2. В резонаторе возбуждаются колебания H_{101} .

Используя соотношения (15) и пробную функцию в виде

$$E = e_y^0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{b},$$

получим

$$J_1 = \frac{(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2}{1 + (\varepsilon - 1)(a'/a + \sin(\pi a'/a)/\pi)^2},$$

$$J_2 = \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{1 + (1/\varepsilon - 1)(a'/a + \sin(\pi a'/a)/\pi)^2}{1 + (\varepsilon - 1)(a'/a + \sin(\pi a'/a)/\pi)^2}.$$

Расчетные данные изображены на рис. 2 в виде графиков функции k/k_0 от a'/a , где $k_0^2 = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2$. На этом же рисунке представлена кривая, построенная по методу Като, и приведены достаточно точные значения функции k/k_0 , полученные методом Галеркина при использовании электронно-вычислительных машин [6]. Из рисунка видно, что для a'/a от 0,1 до 0,6 нижние оценки не получаются, так как данная пробная функция слишком груба. Однако в этом случае можно использовать совокупность методов Вайнштейна и Като при той же пробной функции. По методу Вайнштейна находится следующее собственное число резонатора с недостатком, которое затем используется при решении задачи методом Като. Такая процедура была проделана и результат представлен на рис. 2 в виде кривой 5. В этом случае нижняя оценка получилась более точной.

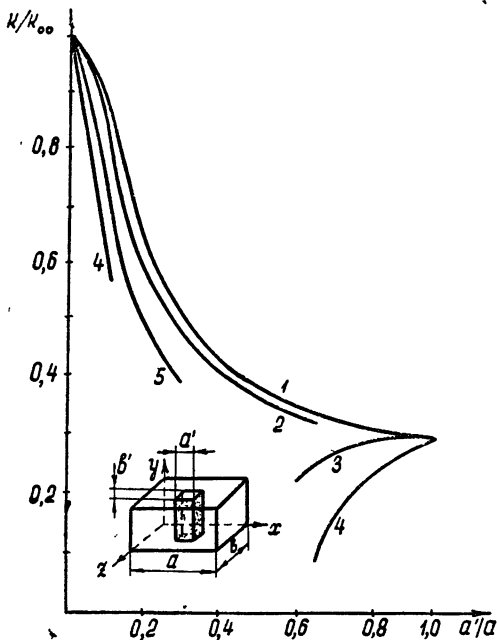


Рис. 2. Резонатор с диэлектрическим стержнем $\varepsilon=10$, $a'/a=b'/b$, $a/b=7/5$:
1—по Ритцу, 2—точное решение, 3—по Като, 4—по Вайнштейну, 5—совокупность методов Като и Вайнштейна,

Таким образом, из приведенных выше примеров видно удовлетворительное соответствие между «точным» решением и решением задачи, полученным на основе метода Вайнштейна. Как уже отмечалось, метод Вайнштейна приводит к более грубым результатам, чем метод Като, хотя порядок точности обоих методов примерно одинаков. Поэтому можно предложить следующую методику вычислений, позволяющую получить достаточно точные расчетные данные. Как видно из вышеизложенного, достоинством метода Вайнштейна является то, что он позволяет достаточно просто находить значения высших собственных чисел полых резонаторов с избытком и с недостатком. Высшие собственные значения, полученные методом Вайнштейна, могут быть

использованы при решении электродинамической задачи методом Като, так что совокупность этих методов даже при достаточно грубом приближении позволит получить сравнительно точные данные.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.
2. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 7, 4 (1962).
3. J. Kato, Phys. Soc. Japan, 4 (1949).
4. Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1960.
5. D. H. Wainstein, Proc. Nat. Acad. Sci., 20, 529 (1934).
6. В. В. Никольский, Докторская диссертация, МГУ, 1962.
7. А. Г. Гуревич, Ферриты на СВЧ, Физматгиз, М., 1960.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
27 мая 1966 г.,
после доработки
12 декабря 1966 г.

THE USE OF D. G. VAINSTEIN'S METHOD FOR SOLVING THE BOUNDARY PROBLEMS OF UHF ELECTRODYNAMICS

E. L. Koulikov, V. K. Il'in

There is considered one of the methods, permitting to evaluate the accuracy of calculated data obtained in the solution of the boundary problems of electrodynamics by the variation method. Vainstein's method is compared with others using to solve UHF electrodynamics problems. General theoretical considerations are illustrated by the concrete examples.

УДК 621.371.167

О ДИФРАКЦИИ ПОЛЯ ПРОДОЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ НА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ

Е. А. Иванов, Б. С. Гельфонд

Продолжение работы [1]. Приводятся результаты численного решения задачи о дифракции поля бесконечно длинной нити с электрическим током на двух параллельных бесконечно длинных круговых цилиндрах для различных значений параметров, определяющих поле в волновой зоне. Уточняется критерий применимости приближенных формул, полученных в [1] при $kl \gg 1$.

Как было показано в [1], строгое решение задачи о дифракции поля бесконечно длинной нити с заданным электрическим током I на двух параллельных бесконечно длинных идеально проводящих круговых цилиндрах (нить параллельна образующим цилиндров) сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений (1.61)* (или системы (1.12), если положить там $h = k \cos \theta$, $\theta = \pi/2$) для неизвестных величин $X_n^{(s)}$, входящих через (1.60) в разложение искомой функции Герца Π_2 вторичного поля в ряд (1.33). При помощи функции Π_2 составляющие результирующего электромагнитного поля в волновой зоне записываются в полярных координатах ρ , φ с началом в точке O (см. рис. 1) в виде

$$E_z = -H_\varphi = k^2 \Pi, \quad (1)$$

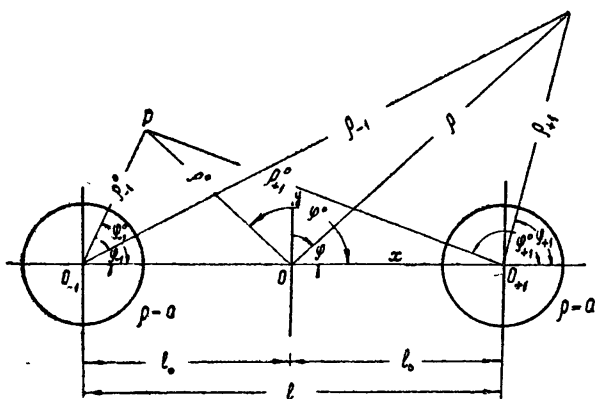


Рис. 1. Геометрия задачи в плоскости Oxy .

где $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, Π_1 — потенциал Герца первичного поля:

$$\Pi_1 = -\frac{I\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp [i(k\rho - \pi/4) - ik\rho^0 \cos(\varphi - \varphi^0)],$$

* Через (1.61) обозначается формула (61) из [1], и т. д.

$$\Pi_2 = \frac{I\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp[i(k\rho - \pi/4)] \sum_{s=\pm 1} \exp[-iskl_0 \cos \varphi] \times \quad (2)$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n (-i)^n X_n^{(s)} J_n(ka) \exp[in(\varphi - \varphi_s^0)]$$

($\beta_0 = 1$, $\beta_n = n$, $n \geq 0$; ρ^0 , φ^0 — полярные координаты источника, находящегося в точке P).

Бесконечная система уравнений (1.61) для $X_n^{(s)}$ однозначно разрешима методом усечения при условии, что цилиндры не касаются друг друга (см., например, [1, 2]). Поэтому приближенные значения $X_n^{(s)}$ могут быть, в общем случае, найдены из сравнения решений конечных систем

$$X_n^{(s)} + \sum_{m=-N}^N \alpha_{nm}^{(-s, s)} X_m^{(-s)} = F_n^{(s)} \quad (3)$$

($n = 0; \pm 1; \dots; \pm N$; $s = \pm 1$; $\alpha_{nm}^{(-s, s)}$ и $F_n^{(s)}$ те же, что и в (1.61)), получаемых из (1.61) усечением для различных возрастающих значений порядка усечения N (практически можно ограничиться $N \simeq [2ka]$, где a — радиус цилиндра). Система (3) содержит $4N + 2$ уравнений с $4N + 2$ неизвестными $X_n^{\pm 1}$ и с комплексными значениями коэффициентов $\alpha_{nm}^{(-s, s)}$ и свободных членов $F_n^{(s)}$. Если же $kl \gg 1$ (l — расстояние между осями цилиндров), то вычисление приближенных значений неизвестных $X_n^{(s)}$ может быть сведено к суммированию геометрической прогрессии, получающейся из системы (1.61) при помощи асимптотических формул для функций Ханкеля (см., (1.23), а также работу [3]).

В результате для составляющей E_z из (1) получается выражение

$$E_z = k^2 \Pi = \frac{k^2 I \pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp(ik\rho - i\pi/4) (\Phi_0(\varphi) - \Phi(\varphi)), \quad (4)$$

в котором $\Phi(\varphi) = \Phi_1(\varphi) + \Phi_2(\varphi)$,

$$\Phi_1(\varphi) = \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{H_n^{(1)}(k\rho_s^0)}{H_n^{(1)}(ka)} J_n(ka) \exp[in(\varphi - \varphi_s^0) - iskl_0 \cos \varphi]; \quad (5)$$

$$\Phi_2(\varphi) = L \sum_{s=\pm 1} \frac{LQ^{(-s)}F^{(s)} - F^{(-s)}}{1 - [L^2 Q^{(-s)}Q^{(s)}]} \exp(-iskl_0 \cos \varphi) \times \quad (6)$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \exp(in\varphi + in\varphi_{-s, +s}),$$

где

$$F^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho_s^0) \exp[-in(\varphi_s^0 + \varphi_{s, -s})], \quad (7)$$

$$Q^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} (-1)^n,$$

а $L = \sqrt{2/\pi k l} \exp(ikl - i\pi/4)$. Здесь функция $\Phi_1(\varphi)$ описывает вторичную волну первого порядка рассеяния, а функцией $\Phi_2(\varphi)$ приближенно суммируются вторичные волны всех последующих порядков рассеяния.

В [1] возник вопрос о критериях применимости приближенной фор-

мулы (1.23), приводящей к (4) — (7), и было высказано предположение, что таким критерием может служить неравенство

$$l \gg 4a. \quad (8)$$

Целью выполнения данной работы была проверка и уточнение (8) на основе численного решения задачи для нити с током, а также установление величины погрешности, возникающей при применении формулы (1.23), для ряда конкретных значений параметров ka , kl и $k\rho_{-1}^0 = k\rho_{+1}^0$ (источник расположен посередине между цилиндрами). Вычислялись результирующие поля в волновой зоне по формулам (1), (2), (3) (эти формулы в дальнейшем называются формулами строгой теории) и по формулам (4) — (7) (приближенные формулы), выведенным в предположении, что $kl \gg 1$. Выбор значений ka и kl не связывался с каким-либо, реальным физическим устройством. Авторы исходили лишь из того, что взятые значения $ka = 2$ и $ka = 4$ отвечают необходимому условию возникновения явления дифракции — условию сравнимости поперечных размеров цилиндров с длиной волны возбуждения.

Задача была запрограммирована для реализации счета на ЭВМ «Минск-22»*. Результаты счета представлены диаграммами направленности, изображенными на рис. 2, и графиками абсолютных погрешностей, изображенными на рис. 3. Диаграммы направленности построены для

$$\begin{aligned} \text{функций } u_1 &= |E_z| / \left(\frac{k^2 I \pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \right) = |\Pi_1 + \Pi_2| / \left(\frac{I \pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \right), \quad u_3 = \\ &= |E_z| / \left(\frac{k^2 I \pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \right) = |\Phi_0 - \Phi| \quad \text{и} \quad u_2 = |\Phi_0 - \Phi_1| \quad \text{в зависимости от угла } \varphi. \end{aligned}$$

Значения параметров ka и kl указаны на рисунках. Так как $k\rho_{-1}^0 = k\rho_{+1}^0$ и радиусы цилиндров равны, то в силу симметрии графиков диаграммы представлены лишь для φ из промежутка $[0, \pi/2]$. В качестве абсолютных погрешностей брались максимальные по модулю отклонения функции u_3 от u_1 на промежутке $[0, \pi/2]$ для различных значений отношения l/a .

Исходя из физического смысла функций Φ_1 и Φ_2 , под u_2 следует понимать функцию, описывающую результирующее поле в волновой зоне и учитывающую лишь вторичные волны первого порядка рассеяния (сумма первичного и вторичного полей без учета взаимодействия цилиндров). Ее график на всех чертежах изображен пунктирной линией.

Анализ результатов приводит к следующим выводам.

1. При вычислении u_3 по приближенным формулам (4) — (7) с сохранением там в каждой из сумм $2N + 1$ слагаемых с индексами суммирования $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, где $N = [2ka]$, и при вычислении u_1 по формулам строгой теории (1) — (3) с тем же значением N , для взятых значений ka получается хорошее графическое совпадение результатов фактически уже при $l/a \geq 10$. Так как сходимость вычислительного процесса улучшается с уменьшением значений параметра ka , очевидно, что хорошее совпадение результатов, даваемых формулами (4) — (7) и (1) — (3), будет сохраняться и для всех $ka < 4$ и $l/a \geq 10$.

2. При $l/a \geq 15$ абсолютная величина максимального на $[0, \pi/2]$ отклонения результатов вычислений по формулам (4) — (7) и (1) — (3) не превышает 1%. В связи с этим во взятом масштабе графики функций u_1 , u_3 сливаются. При $ka = 2$ и $l/a = 40$ максимальное отклонение по модулю равно приблизительно 0,04%, а для $ka = 4$ и $l/a = 40$ оно равно приблизительно 0,11%.

* Эта часть работы была выполнена Б. С. Гельфондом.

Таким образом, применение для численного решения задачи приближенных формул (4)—(7), более простых и удобных по сравнению с (1)—(3), допустимо, по крайней мере, для $ka \leq 4$ при более слабом, чем (8), требовании

$$l > 10 a, \quad (9)$$

выполнение которого, как это видно из рис. 3, приводит к максимальному отклонению результатов, не превышающему 5%.

3. Пренебрежение в результирующем дифракционном поле вторичными волнами всех порядков рассеяния, за исключением лишь волн первого порядка, как и следовало ожидать, приводит к значительному искажению дифракционного эффекта при сравнительно небольших значениях отношения l/a . Однако уже при $l/a \geq 30$, как это видно из рис. 2, достигается удовлетворительное графическое совпадение результатов. Это означает, что при $l/a \geq 30$ ($ka \leq 4$) взаимодействие между цилиндрами мало, и вторичное поле доста-

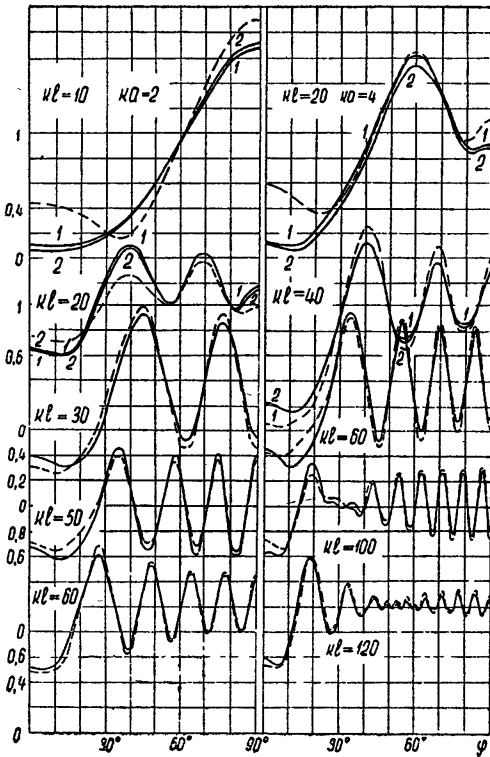


Рис. 2. Диаграммы направленности: — — — — — u_2 ,
— — — — — u_1 , — — — — — u_0 .

точно хорошо описывается волнами первого порядка рассеяния.

4. В качестве известного факта отметим, что все результаты, полученные здесь для бесконечно длинной нити с электрическим током, относятся в равной мере и к полю электрического диполя в присутствии двух круговых цилиндров при $\theta = \pi/2$.

В заключение отметим следующее.

Как видно из (4)—(7), вычисление функций Φ_1 и Φ_2 (а через них и искомого поля) связано в первую очередь с вычислением рядов вида

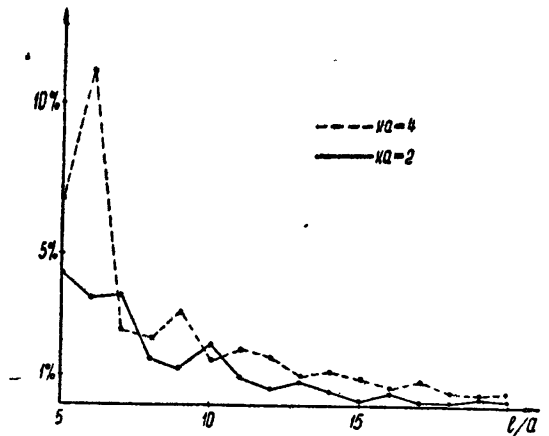


Рис. 3. Абсолютные значения максимальных на $[0, \pi/2]$ отклонений значений функции u_3 от u_1 в %.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} e^{in\varphi} \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho^0) e^{in\varphi},$$

которые медленно сходятся при больших ka и становятся практически непригодными для численного счета при $ka \gg 1$. Однако при $kl \geq 1$ ($kl \gg 2ka$) к ним можно применить уже известные асимптотические методы суммирования (см., например, [4-6]), на основании которых представляется возможность вычислить Φ_1 и Φ_2 по той же схеме, что и в [3].

Система (1.61) может быть сведена к другим системам, эквивалентным ей и более удобным для вычисления неизвестных $X_n^{(s)}$. Для этого сделаем в системе (1.61) замену $Y_n^{(s)} = X_n^{(s)} \exp(-in\varphi_s^0)$. Тогда (1.61) примет вид

$$Y_n^{(s)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{nm}^{(-s, s)} Y_m^{(-s)} = f_n^{(s)}, \tag{10}$$

где

$$\beta_{nm}^{(-s, s)} = \frac{\beta_m J_m(ka)}{\beta_n H_n^{(1)}(ka)} H_{m-n}^{(1)}(kl) \exp[-i(m-n)\varphi_{-s, s}],$$

$$f_n^{(s)} = \frac{H_n^{(1)}(k\rho_s^0)}{\beta_n H_n^{(1)}(ka)} \exp(-in\varphi_s^0).$$

Так как $\alpha_{-1, 1} = 0$, $\alpha_{+1, -1} = \pi$, то $\alpha_{nm}^{(-s, s)} = (-1)^{n+m} \alpha_{nm}^{(s, -s)}$, $s = \pm 1$, и система (10) может быть записана в виде

$$Y_n^{(+1)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_{nm}^{(-1, +1)} Y_m^{(-1)} = f_n^{(+1)},$$

$$Y_n^{(-1)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^n \beta_{nm}^{(-1, 1)} (-1)^m Y_m^{(+1)} = f_n^{(-1)},$$

откуда после деления второго из неравенств на $(-1)^n$ и последующего почленного сложения и вычитания равенств получим две независимые системы

$$z_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \beta_{nm}^{(-1, 1)} z_m = f_n,$$

$$u_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \beta_{nm}^{(-1, 1)} u_m = \varphi_n.$$

Здесь

$$z_n = Y_n^{(+1)} + (-1)^n Y_n^{(-1)}, \quad f_n = f_n^{(+1)} + (-1)^n f_n^{(-1)},$$

$$u_n = Y_n^{(+1)} - (-1)^n Y_n^{(-1)}, \quad \varphi_n = f_n^{(+1)} - (-1)^n f_n^{(-1)}.$$

Их усечение до $n, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N$ приводит к решению конечных систем (для определения z_n и u_n), имеющих вдвое более низкий порядок, чем (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Иванов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 561 (1966).
 2. Е. А. Иванов, А. М. Родов, Изв. АН БССР, сер. физ.-тех., № 4, 5 (1964).

3. Е. А. Иванов, Радиотехника и электроника, 11, № 5, 931 (1966).
4. А. С. Горяинов, Радиотехника и электроника, 3, № 5, 603 (1958).
5. Д. Уэйг, Электромагнитное излучение из цилиндрических систем, изд. Сов. радио, М., 1963.
6. Х. Хенл, А. Мауэ, К Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.

Институт математики АН БССР

Поступила в редакцию
10 мая 1966 г.

DIFFRACTION OF FIELD OF A LONGITUDINAL ELECTRIC IRRADIATOR ON TWO PARALLEL CIRCULAR CYLINDERS

E. A. Ivanov, B. S. Gelfond

(Continuation of the paper [1].) The authors give the numerical solution of the problem of the field diffraction of an infinitely long filament with an electric current on two parallel infinitely-long circular cylinders for the different values of the parameters determining the field in a wave zone. The applicability criteria of the approximate formulae obtained in [1] are refined.

УДК 621.371 167

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ КОРОТКИХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В. С. Булдырев

Исследуется высокочастотная асимптотика волнового поля в плоской задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения. Предполагается, что скорость распространения волн в цилиндре превосходит скорость распространения волн в окружающей однородной среде. Получены асимптотические формулы, описывающие с относительной погрешностью $O(\omega^{-2/3})$ волны, распространяющиеся в пограничном слое в неоднородной среде и уходящие в однородной среде на бесконечность. При помощи этих формул конструируется решение, представляющее собой головную волну интерференционной природы, которая возникает во внешней среде за счет многократных отражений внутри цилиндра.

Целью настоящей работы является исследование (при больших частотах ω) стационарного плоского волнового поля $U(x, y) \exp(-i\omega t)$ в следующей системе: однородная среда со скоростью распространения волн c_1 находится в соприкосновении с цилиндром произвольного сечения, заполненным неоднородной средой со скоростью распространения волн $c_2(x, y)$; источник (светящаяся нить, параллельная образующим цилиндра) и точка наблюдения расположены в однородной среде.

Пусть однородная среда заполняет плоскую область Ω_1 , а неоднородная среда — область Ω_2 . Обозначим далее через S общую достаточно гладкую границу областей Ω_1 и Ω_2 (рис. 1), а через $U_j(x, y)$ ($j=1, 2$) — значения функции $U(x, y)$ в областях Ω_j . Функции U_j должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} U_1 = -\delta(x-x_0, y-y_0) \quad (x, y; x_0, y_0 \in \Omega_1); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2(x, y)} U_2 = 0 \quad (x, y \in \Omega_2) \quad (2)$$

и условиям сопряжения

$$U_1|_S = U_2|_S, \quad \frac{1}{x_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_S = \frac{1}{x_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} \Big|_S, \quad (3)$$

где x_0, y_0 — координаты источника; δ — дельта-функция Дирака; x_1, x_2 — некоторые постоянные*, n — нормаль к кривой S , причем $n > 0$ для точек области Ω_1 . Кроме того, функции $U_j(x, y)$ должны удовлетворять принципу предельного поглощения.

* Для однородных электрических сред в случае E -поляризации $U = E_z$ (ось Oz параллельна образующим цилиндра), $x_1 = \mu_1, x_2 = \mu_2$. Для H -поляризации $U = H_z, x_1 = \epsilon_1, x_2 = \epsilon_2, (\epsilon_j, \mu_j (j = 1, 2) — диэлектрические постоянные и магнитные проницаемости сред).$

Обозначим через s длину дуги кривой S , отсчитываемую от некоторой точки, и через $\rho(s)$ — переменный радиус кривизны кривой S , который будет считаться положительным, если центр круга кривизны лежит в области Ω_2 . Будем считать, что вдоль кривой S выполняются неравенства

$$c_2 > c_1, \quad \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{c_2} \frac{dc_2}{dn} > 0. \quad (4)$$

Величина $P(s)$ играет роль эффективного радиуса кривизны кривой S .

Опишем физическую картину распространения волн при выполнении условий (4). Для достаточно больших значений частоты ($\omega \rightarrow \infty$) волновое поле может быть представлено в виде суммы волн, испытавших различное число взаимодействий (отражений и преломлений) с границей сред. Пусть среди лучей, падающих из источника на границу сред, существует по крайней мере один луч, встречающий границу сред под углом полного отражения $\psi_0 = \arcsin(c_1/c_{20})$, где c_{20} — значение

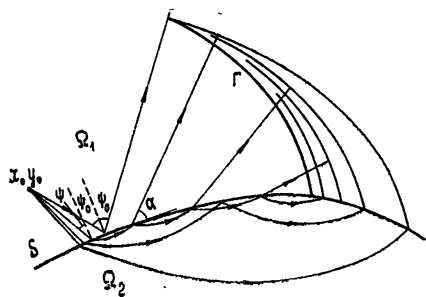


Рис. 1.

скорости c_2 на границе S (рис. 1). Лучи, падающие на границу сред под углами $\psi < \psi_0$, порождают в неоднородной среде преломленные криволинейные лучи, многократно отражающиеся при условии (4) от границы сред (эффект шепчущей галлерен). При каждом отражении такого криволинейного луча в однородной среде возникает вторично преломленный луч. Если $\psi \rightarrow \psi_0$, длины криволинейных лучей между последовательными отражениями будут стремиться к нулю, а углы скольжения α вторично преломленных лучей — к значениям $\alpha = \arccos(c_1/c_{20})$. Это приводит к тому, что в неоднородной среде вдоль границы распространяется бесконечный шлейф преломленных волн со сколь угодно близкими фазами. При этом в первой среде будут распространяться волны, линии равных фаз которых имеют некоторую предельную кривую Γ .

Мы будем считать, что волны, приходящие в точку наблюдения с разностью фаз Δ порядка длины волны ($\Delta = 2\pi c_1 q/\omega$, $q \sim 1 \div 2$) могут наблюдаться порознь друг от друга. Интенсивность таких волн может быть найдена при помощи формул геометрической оптики (лучевого метода) [1, 2]. В окрестности предельной кривой Γ разность фаз соседних волн уже не будет удовлетворять сформулированному выше условию. Такие волны будут интерферировать друг с другом. В результате в окрестности кривой Γ возникает сложное волновое поле, которое мы будем называть полем головной волны интерференционного типа. Можно показать [3], что криволинейные лучи, соответствующие интерферирующим волнам, распространяются в неоднородной среде в приграничном слое, толщина которого порядка $\omega^{-2/3}$. Очевидно, поле головной волны интерференционного типа не может быть рассчитано методами геометрической оптики.

Основная цель настоящей статьи — получить формулу (2.8), описывающую поле головной волны интерференционного типа. Эта формула будет являться обобщением результата, который был получен в [4] для частного случая, когда вторая среда представляет собой однородный круговой цилиндр.

В первом разделе статьи строится удовлетворяющая условиям сопряжения (3) асимптотика решений однородных уравнений (1) и (2).

Эта асимптотика в первой среде описывает волны, отходящие от границы сред под углами скольжения $\alpha = \arccos(c_1/c_{20})$, а во второй среде — волны, распространяющиеся вдоль границы. Во втором разделе из полученных решений конструируется поле головной волны интерференционного типа в виде некоторого контурного интеграла. Этот интеграл обладает тем свойством, что при увеличении частоты колебаний (или при увеличении расстояния от точки наблюдения до луча, отраженного под углом ψ_0) из него выделяются более простые интегралы. Вычисление последних по методу перевала приводит к формулам лучевого метода для волн, испытавших в неоднородной среде различное число отражений от границы сред и вышедших из процесса интерференции в окрестности головной волны.

1. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Положение точки M в области Ω_1 будем характеризовать координатами l, ξ (рис. 2). Координата l равна длине дуги кривой S , которая отсчитывается от некоторой начальной точки O до основания луча LM , образующего с касательной к кривой S в точке L угол $\alpha(l)$, где $\alpha(l)$ — заданная функция длины дуги (в дальнейшем из граничных условий (3) будет следовать, что $\alpha(l) = \arccos(c_1/c_{20})$). Координату ξ положим равной

$$\xi = t + \int_0^l \cos \alpha(\tau) d\tau,$$

где t — длина отрезка LM . При $\alpha = \pi/2$ координаты l, ξ переходят в координаты s, n , где s — длина дуги кривой S , отсчитываемая от точки O до основания нормали MP (проведенной из точки M к кривой S), и n — величина самой нормали MP . Если $\alpha \equiv 0$, координаты l, ξ переходят в так называемые эвольвентные координаты точки [5].

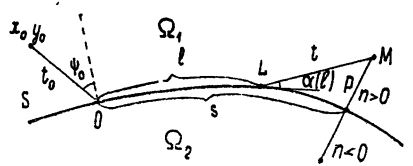


Рис. 2.

В координатах l, ξ для квадрата элемента длины $d\sigma$ получаем формулу

$$d\sigma^2 = \left[\sin \alpha + \frac{t}{\rho} (1 - \rho\alpha') \right]^2 dl^2 + dt^2, \tag{1.1}$$

$$t = \xi - \int_0^l \cos \alpha(\tau) d\tau,$$

где $\rho = \rho(l)$ — значение радиуса кривизны кривой S в точке L . Из формулы (1.1) следует, что система координат l, ξ является ортогональной и коэффициенты Ламэ h_1 и h_2 равны

$$h_1 = h_1(l, \xi) = \sin \alpha + \frac{t}{\rho} (1 - \rho\alpha'), \quad h_2 = 1. \tag{1.2}$$

Будем в дальнейшем считать функции $\rho(l)$ и $\alpha(l)$ такими, что в некоторой конечной окрестности кривой S система координат l, ξ регулярна ($0 < h_1 < \infty$).

Для точек области Ω_2 введем координаты s, n , причем величину нормали n будем считать отрицательной (рис. 2). Коэффициенты Ламэ определяются тогда формулами (1.2), в которых следует положить $\alpha = \pi/2; t = n$.

Построим в области Ω_2 частное решение $u_2(s, n)$ уравнения (2). Запишем уравнение (2) в координатах s, n :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\left(1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[\left(1 + \frac{n}{\rho} \right) \frac{\partial u_2}{\partial n} \right] + \frac{\omega^2}{c_2^2(s, n)} \left(1 + \frac{n}{\rho} \right) u_2 = 0. \quad (1.3)$$

Во введении отмечалось, что лучи, формирующие головную волну интерференционного типа, заполняют в области Ω_2 пограничный слой, толщина которого имеет порядок $\omega^{-2/3}$. В связи с этим будем строить приближенное решение уравнения (1.3), в слое толщиной $|n| < \text{const} \times \omega^{-2/3}$. В уравнении (1.3) перейдем к новой переменной $\nu = n\omega^{2/3}$ и будем считать, что $|\nu|$ остается ограниченным при $\omega \rightarrow \infty$. Представим функцию $c_2(s, n) = c_2(s, \omega^{-2/3} \nu)$ рядом Тейлора с достаточно большим числом членов:

$$c_2(s, n) = c_{20}(s) + c_{21}(s) \nu \omega^{-2/3} + \dots + c_{2N} \nu^N \omega^{-\frac{2}{3}N} + O(\omega^{-\frac{2}{3}(N+1)}),$$

после чего левую часть уравнения (1.3) расположим по степеням $\omega^{-2/3}$.

Решение уравнения, возникающего в результате этой процедуры, будем искать в виде*

$$u_2(s, n) = A \exp \left\{ i\omega \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s, \nu) \omega^{-k/3} \right\} \omega \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s, \nu) \omega^{-k/3} \right\}, \quad (1.4)$$

где A — постоянная; $\omega(z)$ — одно из решений уравнения Эйри $\omega'' - z\omega = 0$; $\alpha_k(s, \nu)$ и $\beta_k(s, \nu)$ — полиномы по переменной ν , подлежащие определению.

Подставляя (1.4) в уравнение и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях $\omega^{-1/3}$, получаем для полиномов $\alpha_k(s, \nu)$ и $\beta_k(s, \nu)$ рекуррентную систему уравнений. Кроме того, полиномы $\alpha_k(s, \nu)$, $\beta_k(s, \nu)$ должны подчиняться некоторым дополнительным условиям, заключающимся для полиномов α_k в равенстве нулю фазы волны в начальной точке:

$$\alpha_k(0, 0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.5)$$

Условия для полиномов $\beta_k(s, \nu)$ при $\nu=0$ следуют из граничных условий (3) и будут определены нами позднее. Выполняя необходимые вычисления и принимая во внимание (1.5), получаем

$$\alpha_0(s, \nu) \equiv \alpha_{00}(s) = \int_0^s \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)}, \quad \alpha_1(s, \nu) \equiv 0,$$

$$\beta_0(s, \nu) \equiv \beta_{00}(s) + \beta_{01}(s) \nu = \beta_{00}(s) - \frac{2^{1/3}}{c_{20}^{2/3}(s)} \frac{1}{P^{1/3}(s)} \nu,$$

$$\beta_1(s, \nu) \equiv \beta_{10}(s), \quad \alpha_2(s, \nu) \equiv \alpha_{20}(s) = \frac{1}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{\beta_{00}(\tau)}{c_{20}^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} d\tau,$$

$$\alpha_3(s, \nu) \equiv \alpha_{30}(s) = \frac{i}{2} \ln \frac{c_{20}^{1/3}(0) P^{1/3}(s)}{c_{20}^{1/3}(s) P^{1/3}(0)} + \frac{1}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{\beta_{10}(\tau)}{c_{20}^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} d\tau, \quad (1.6)$$

* Решение уравнения (1.3) мы ищем в виде (1.4), опираясь на аналогию между рассматриваемой задачей и задачей дифракции на прозрачном круговом цилиндре, допускающей разделение переменных.

$$\begin{aligned} \beta_2(s, v) &\equiv \beta_{20}(s) + \beta_{21}(s) v + \beta_{22}(s) v^2 = \\ &= \beta_{20}(s) + \frac{\beta_{00}(s)}{15} \left(2P(s) Q(s) - \frac{10}{\rho(s)} \right) v + \frac{Q(s)}{5} \frac{P^2(s)}{2^{2/3} c_{20}^{2/3}(s)} v^2, \\ \alpha_4(s, v) &\equiv \alpha_{40}(s) + \alpha_{41}(s) v + \alpha_{42}(s) v^2 = \\ &= \frac{1}{2^{1/3}} \int_0^s \left\{ \frac{\beta_{20}(\tau)}{c_{20}^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)} - \frac{\beta_{00}^2(\tau)}{2^{4/3} P^{4/3}(\tau)} c_{20}^{1/3}(\tau) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left(\frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right) \right] \right\} d\tau + \\ &+ \frac{P^{1/3}(s)}{2^{1/3} c_{20}^{1/3}(s)} \frac{d}{ds} \beta_{00}(s) v + \frac{1}{6c_{20}(s)} \frac{d}{ds} \ln(c_{20}^2(s) P(s)) v^2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

В этих формулах $1/P(s) = 1/\rho(s) - c_{21}(s)/c_{20}(s)$ — эффективный радиус кривизны,

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{1}{\rho^2(s)} + \frac{2}{\rho(s) P(s)} + \frac{1}{9} \left[\frac{d}{ds} \ln(c_{20}^2(s) P(s)) \right]^2 + \\ &+ \frac{c_{20}(s)}{3} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{c_{20}(s)} \frac{d}{ds} (c_{20}^2(s) P(s)) \right] + \frac{2c_{21}(s)}{c_{20}(s) \rho(s)} - \\ &\quad - \frac{3c_{21}(s) - 2c_{22}(s) c_{20}(s)}{c_{20}^2(s)}. \end{aligned}$$

Функции $\beta_{00}(s), \beta_{10}(s), \beta_{20}(s), \dots$ должны быть определены из дополнительных условий при $v=0$. Для функции $\alpha_0(s, v)$ можно было бы получить также решение $\left[- \int_0^s c_{20}^{-1}(\tau) d\tau \right]$, представляющее волну, распространяющуюся в противоположном направлении. Заметим, что полиномы $\alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1$ для однородной среды или прямой границы находились последовательно при уточнении метода параболического уравнения в работах различных авторов [6-9].

Перейдем теперь к построению решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} u_1 = 0, \tag{1.7}$$

однородного по отношению к уравнению (1). В координатах l, ξ уравнение (1.7) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[h_1^{-1}(l, \xi) \frac{\partial u_1}{\partial l} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h_1(l, \xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right] + \frac{\omega^2}{c_1^2} h_1(l, \xi) u_1 = 0, \tag{1.8}$$

где коэффициент Ламэ $h_1(l, \xi)$ определяется формулой (1.2). Будем искать решения уравнения (1.8) в виде волн, уходящих на бесконечность вдоль координатных линий $l = \text{const}$. Положим

$$u_1 = [A_0(l, \xi) + A_1(l, \xi) \omega^{-1/3} + \dots] \exp \left\{ i \frac{\omega}{c_1} \xi + i\varphi(l) \omega^{1/3} \right\}. \tag{1.9}$$

Разложение амплитудной функции по степеням $\omega^{-1/3}$ и наличие в показателе экспоненты слагаемого $i\varphi(l)\omega^{1/3}$ обусловлены связью через граничные условия (3) решения $u_1(l, \xi)$ с уже построенным в пограничном слое области Ω_2 решением $u_2(s, n)$. Подставляя (1.9) в (1.6) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях $\omega^{1/3}$, получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial A_0}{\partial \xi} h_1(l, \xi) + A_0 \frac{\partial}{\partial \xi} h_1(l, \xi) &= 0, \\ 2 \frac{\partial A_1}{\partial \xi} h_1(l, \xi) + A_1 \frac{\partial}{\partial \xi} h_1(l, \xi) &= -ic_1 \frac{A_0(l, \xi)}{h_1(l, \xi)} \left(\frac{d\varphi}{dl} \right)^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

решая которую, находим

$$\begin{aligned} A_0(l, \xi) &= f_0(l) [h_1(l, \xi)]^{-1/2}, \\ A_1(l, \xi) &= -ic_1 f_0(l) [h_1(l, \xi)]^{-1/2} \left[\left(\frac{d\varphi}{dl} \right)^2 \frac{1}{2} \int_{\xi_0(l)}^{\xi} \frac{d\eta}{h_1^2(l, \eta)} + f_1(l) \right], \\ &\dots \end{aligned} \tag{1.10}$$

Произвольные функции $\varphi(l)$, $f_0(l)$, $f_1(l)$ в дальнейшем определяют из граничных условий (3).

Полагая в формуле (1.10) нижний предел интегрирования $\xi_0(l)$ равным $\int_0^l \cos \alpha(\tau) d\tau$, получаем в области Ω_1 частные решения вида

$$\begin{aligned} u_1(l, \xi) &= f_0(l) [h_1(l, \xi)]^{-1/2} \{ 1 + i[\psi(l, \xi) + \\ &+ f_1(l)] \omega^{-1/3} + O(\omega^{-2/3}) \} \exp \left\{ i \frac{\omega}{c_1} \xi + i\varphi(l) \omega^{1/3} \right\}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(l, \xi) &= -\frac{c_1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dl} \right)^2 \frac{\rho}{1-\rho\alpha'} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha + t(1-\rho\alpha')/\rho} \right), \\ t &= \xi - \int_0^l \cos \alpha(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к соотношениям (3), которые должны выполняться на границе сред. Запишем эти соотношения в переменных l , ξ и s , v :

$$\begin{aligned} u_1 \Big|_{\xi - \int_0^l \cos \alpha d\tau} &= u_2 \Big|_{v=0}, \\ \frac{1}{x_1} \left(\sin \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\partial u_1}{\partial l} \right) \Big|_{\xi - \int_0^l \cos \alpha d\tau} &= \frac{1}{x_2} \omega^{2/3} \frac{\partial u_2}{\partial v} \Big|_{v=0}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

После подстановки в (1.12) выражений (1.4) и (1.11) получаем

$$\begin{aligned}
 f_0(l) (\sin \alpha)^{-1/2} \{1 + i f_1(l) \omega^{-1/3} + O(\omega^{-2/3})\} \exp \left\{ i \frac{\omega}{c_1} \int_0^l \cos \alpha d\tau + i \varphi(l) \omega^{1/3} \right\} = \\
 = A \exp \left\{ i \left[\omega \int_0^l c_{20}^{-1}(\tau) d\tau + \omega^{1/3} \alpha_{20}(l) + \alpha_{30}(l) + \omega^{-1/3} \alpha_{40}(l) + \right. \right. \\
 \left. \left. + O(\omega^{-2/3}) \right] \right\} \omega [\beta_{00}(l) + \beta_{10}(l) \omega^{-1/3} + \beta_{20}(l) \omega^{-2/3} + O(\omega^{-1})], \\
 \frac{1}{x_1} i \frac{\omega}{c_1} f_0(l) \sqrt{\sin \alpha} \{1 + i f_1(l) \omega^{-1/3} + O(\omega^{-2/3})\} \times \\
 \times \exp \left\{ i \frac{\omega}{c_1} \int_0^l \cos \alpha d\tau + i \varphi(l) \omega^{1/3} \right\} = \frac{1}{x_2} \omega^{2/3} A \times \quad (1.13) \\
 \times \exp \left\{ i \left[\omega \int_0^l c_{20}^{-1}(\tau) d\tau + \omega^{1/3} \alpha_{20}(l) + \alpha_{30}(l) + \omega^{-1/3} \alpha_{40}(l) + \right. \right. \\
 \left. \left. + O(\omega^{-2/3}) \right] \right\} \{ [\beta_{01}(l) + O(\omega^{-2/3})] \omega' [\beta_{00}(l) + \beta_{10}(l) \omega^{-1/3} + \\
 + \beta_{20}(l) \omega^{-2/3} + O(\omega^{-1})] + O(\omega^{-1/3}) \omega [\beta_{00}(l) + \beta_{10}(l) \omega^{-1/3} + \\
 + \beta_{20}(l) \omega^{-2/3} + O(\omega^{-1})] \}.
 \end{aligned}$$

Равенство нулю определителя системы (1.13) приводит после разложения функций Эйри в ряды по степеням $\omega^{-1/3}$ к уравнению

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{x_1} \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{c_1} \omega(\beta_{00}) + \omega^{-1/3} \left[\frac{i}{x_1} \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{c_1} \beta_{10} - \frac{1}{x_2} \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \beta_{01} \right] \times \\
 \times \omega'(\beta_{00}) + \omega^{-2/3} [\beta_{20} \omega'(\beta_{00}) + O(1) \omega(\beta_{00})] + O(\omega^{-1}) = 0.
 \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $\omega^{-1/3}$, получаем

$$\beta_{00}(l) = \zeta_p \quad (p = 1, 2, \dots); \quad (1.14)$$

$$\beta_{10}(l) = -i \frac{x_1 c_1}{x_2 \sin \alpha} \beta_{01}(l) = i 2^{1/3} \frac{x_1 c_1}{x_2 \sin \alpha} \frac{1}{c_{20}^{2/3}(l) P^{1/3}(l)}; \quad (1.15)$$

$$\beta_{20}(l) = 0; \quad (1.16)$$

где ζ_p — нули функции Эйри: $\omega(\zeta_p) = 0$. При равенстве нулю определителя уравнения системы (1.13) являются линейно зависимыми, и поэтому второе уравнение может быть отброшено.

Из первого уравнения и соотношений (1.6), (1.14) — (1.16) следует, что

$$\cos \alpha(l) = \frac{c_1}{c_{20}(l)},$$

$$\varphi(l) = \alpha_{20}(l) = \frac{\zeta_p}{2^{1/3}} \int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)},$$

$$f_0(l) = \frac{A}{\omega^{1/3}} \beta_{10}(l) \sqrt{\sin \alpha} \varpi'(\beta_{00}) \exp [i\alpha_{30}(l)] =$$

$$= i \left(\frac{2}{\omega} \right)^{1/3} \frac{A \varpi'(\zeta_p) x_1}{\sqrt{\sin \alpha} x_2} \frac{c_1}{c_{20}^{1/2}(l) P^{1/2}(l)} \frac{P^{1/6}(0)}{c_{20}^{1/6}(0)} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{c_1 x_1}{x_2} \int_0^l \frac{d\tau}{\sin \alpha(\tau) c_{20}(\tau) P(\tau)} \right\},$$

$$f_1(l) = \alpha_{40}(l) = - \frac{\zeta_p^2}{2^{5/3}} \int_0^l \frac{c_{20}^{1/3}(\tau)}{P^{4/3}(\tau)} \left\{ 1 + \frac{4}{3} P(\tau) \left[\frac{2}{5} P(\tau) Q(\tau) - \frac{2}{\rho(\tau)} \right] \right\} d\tau.$$

Подставляя найденные значения $\cos \alpha(l)$, $\varphi(l)$, $f_0(l)$, $f_1(l)$ в формулу (1.11), для поля u_1 в области Ω_1 окончательно получаем

$$u_1 = \left(\frac{2}{\omega} \right)^{1/3} B_p F_0(l, t) \left[1 + i F_1(l, t) \frac{\zeta_p^2}{\omega^{1/3}} + O \left(\frac{\zeta_p^{5/2}}{\omega^{2/3}} \right) \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ i \omega \left[\int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)} + \frac{t}{c_1} \right] + i \gamma(l) \zeta_p \right\}, \quad (1.17)$$

где B_p — постоянная величина,

$$F_0(l, t) = \frac{x_1 c_1 \{ \sin \alpha(l) + t [1 - \rho(l) \alpha'(l)] / \rho(l) \}^{-1/2}}{x_2 \sqrt{\sin \alpha(l)} c_{20}^{1/2}(l) P^{1/2}(l)} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \int_0^l \frac{x_1 c_1}{x_2 c_{20}(\tau)} \frac{d\tau}{\sin \alpha(\tau) P(\tau)} \right\},$$

$$\gamma(l) = \left(\frac{\omega}{2} \right)^{1/3} \int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}^{1/3}(\tau) P^{2/3}(\tau)}$$

($\gamma(l)$ — приведенная длина дуги границы S) и

$$F_1(l, t) = - \frac{1}{4} \left(\frac{2c_1}{\omega} \right)^{1/3} \left\{ \frac{\cos^{2/3} \alpha(l)}{P^{4/3}(l)} \frac{\rho(l)}{1 - \rho(l) \alpha'(l)} \left[\frac{1}{\sin \alpha(l)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\sin \alpha(l) + t [1 - \rho(l) \alpha'(l)] / \rho(l)} \right] + \int_0^l \frac{1 + 4P(2PQ/5 - 2/\rho)/3}{\cos^{1/3} \alpha P^{4/3}} d\tau \right\}^*.$$

Если погрешность порядка $(2c_1/\omega\rho)^{1/3}$ является удовлетворительной, то формула (1,17) значительно упрощается:

* При $\rho = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$

$$F_1(l, t) = - \left(\frac{2c_2}{\omega\rho} \right)^{1/3} \left\{ \frac{1}{4} \frac{c_1}{c_2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha + t/\rho} \right) - \frac{1}{60} \frac{l}{\rho} \right\} > 0.$$

Точно такое же значение для $F_1(l, t)$ в этом случае можно получить, исходя из точного решения задачи и применяя асимптотику цилиндрических функций.

$$u_1 = \left(\frac{2}{\omega}\right)^{1/3} B_p \left[F_0(l, t) + O\left(\frac{\zeta_p^2}{\omega^{1/3}}\right) \right] \times \\ \times \exp \left\{ i\omega \left[\int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)} + \frac{t}{c_1} \right] + i\gamma(l) \zeta_p \right\}.$$

Для того, чтобы получить поле u_1 (которое соответствует полю u_2 , экспоненциально малому в области Ω_2) вдалеке от границы S , следует взять в качестве ζ_p нули функции Эйри

$$v(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\zeta z - \frac{z^3}{3}\right) dz,$$

поскольку $v(\zeta) \sim \frac{1}{2} \zeta^{1/4} \exp(-2\zeta^{3/2}/3)$ при $\zeta \gg 1$. В этом случае $\zeta_1 = -2,33811\dots$, $\zeta_2 = -4,08795\dots$, $\zeta_3 = -5,52056\dots$

2. ПОЛЕ ИСТОЧНИКА. ГОЛОВНАЯ ВОЛНА

В этом разделе мы должны будем из решений вида (1.17) сконструировать волновое поле, соответствующее сосредоточенному источнику. Будем считать, что луч, падающий из источника на границу сред S под углом полного отражения $\psi_0 = \arcsin(c_1/c_{20})$, имеет длину t_0 и встречает границу в точке O , от которой ведется отсчет длины l дуги S (рис. 2). Угол, образованный продолжением луча и касательной, проведенной в точке O в положительном направлении (угол скольжения падающего луча), очевидно равен $\alpha(0) = \arccos[c_1/c_{20}(0)]$. При таком выборе точки O положение источника будет характеризоваться только величиной t_0 .

Составим суперпозицию решений (1.17) в виде контурного интеграла

$$U_1(l, t; 0, t_0) = \left(\frac{2}{\omega}\right)^{1/3} F_0(l, t) \exp \left\{ i\omega \left[\int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)} + \frac{t}{c_1} \right] \right\} \\ + \int_L B(\zeta) \left\{ 1 + iF_1(l, t) \frac{\zeta^2}{\omega^{1/3}} + O\left(\frac{\zeta^{5/2}}{\omega^{2/3}}\right) \right\} \exp \{ i\gamma(l) \zeta \} d\zeta. \quad (2.1)$$

Контур интегрирования L расположен в комплексной плоскости ζ и не зависит от координат источника, точки наблюдения и параметров задачи. Функция $B(\zeta)$ зависит только от t_0 , характеристик границы S и сред в точке $l = 0$: $B(\zeta) = B(\zeta; 0, t_0)$. Так как поле сосредоточенного источника $U_1(l, t; 0, t_0)$ должно удовлетворять принципу взаимности $U_1(l, t; 0, t_0) = U_1(0, t_0; l, t)$, то следует положить

$$B(\zeta; 0, t_0) = p(\zeta) F_0(0, t_0) \left[1 + iF_1(0, t_0) \frac{\zeta^2}{\omega^{1/3}} + O\left(\frac{\zeta^{5/2}}{\omega^{2/3}}\right) \right] \exp \left[i \frac{\omega}{c_1} t_0 \right],$$

где весовая функция $p(\zeta)$ уже не зависит от положения источника.

Выберем контур интегрирования L и функцию $p(\zeta)$ так, чтобы волновое поле $U_1(l, t; 0, t_0)$ при $\rho = \text{const}$ и $c_2 = \text{const}$ переходило в известное решение задачи для двух однородных сред, разделенных круговой границей [4]. Для этого будем считать

$$p(\zeta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\omega} \right)^{2/3} \frac{x_2}{x_1} \frac{1}{v(\zeta) \omega_2(\zeta)},$$

где $v(\zeta)$, $\omega_2(\zeta)$ — функции Эйри, определяемые равенством (1.18) и интегралом

$$\omega_2(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty \exp(2\pi i/3)}^{\infty} \exp\left(\zeta z - \frac{z^3}{3}\right) dz.$$

Контур интегрирования L выберем в виде прямой ($\infty e^{4\pi i/3}$, $\infty e^{\pi i/3}$), проходящей через точку $\zeta=0$.

Исследуем сходимость интеграла

$$I = \int_L \left\{ 1 + i[F_1(l, t) + F_1(0, t_0)] \frac{\zeta^2}{\omega^{1/3}} + O\left(\frac{\zeta^{5/2}}{\omega^{2/3}}\right) \right\} \frac{\exp[i\gamma(l)\zeta]}{v(\zeta) \omega_2(\zeta)} d\zeta, \quad (2.2)$$

который получается после подстановки $B(\zeta; 0, t_0)$ в формулу (2.1). При больших $|\zeta|$ на контуре L имеет место неравенство

$$\left| \frac{\exp[i\gamma(l)\zeta]}{v(\zeta) \omega_2(\zeta)} \right| < \text{const } |\zeta|^{1/2} \times$$

$$\times \begin{cases} \exp\left[-\gamma \frac{\sqrt{3}}{2} |\zeta|\right] & \left(\arg \zeta = \frac{\pi}{3}\right) \\ \exp\left[-\frac{4}{3} |\zeta|^{3/2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma |\zeta|\right] & \left(\arg \zeta = \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

и, следовательно, интеграл (2.1) сходится при любых значениях $\gamma > 0$. Однако для больших значений γ подынтегральная функция на нижнем участке контура интегрирования начинает убывать лишь при достаточно больших $|\zeta|$, так что вклад слагаемого $O(\zeta^{5/2}/\omega^{2/3})$ в величину интеграла уже не будет малым.

Для того, чтобы основной участок интегрирования не увеличивался с ростом γ , представим функцию $\exp(i\gamma\zeta) v^{-1}(\zeta) \omega_2^{-1}(\zeta)$ в виде геометрической прогрессии:

$$\frac{\exp(i\gamma\zeta)}{v(\zeta) \omega_2(\zeta)} = -2i \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{\omega_1(\zeta)}{\omega_2(\zeta)} \right]^m \frac{\exp(i\gamma\zeta)}{\omega_2^2(\zeta)} + \left[\frac{\omega_1(\zeta)}{\omega_2(\zeta)} \right]^M \frac{\exp(i\gamma\zeta)}{v(\zeta) \omega_2(\zeta)}, \quad (2.3)$$

где

$$\omega_1(\zeta) = 2iv(\zeta) + \omega_2(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty \exp(-2\pi i/3)}^{\infty} \exp\left(\zeta z - \frac{z^3}{3}\right) dz.$$

Остаточный член разложения (2.3) при $|\zeta| \gg 1$ допускает оценку

$$\text{const } |\zeta|^{1/2} \begin{cases} \exp\left[-\gamma \frac{\sqrt{3}}{2} |\zeta|\right] & \left(\arg \zeta = \frac{\pi}{3}\right) \\ \exp\left[-\frac{4}{3}(M+1) |\zeta|^{3/2} + \gamma \frac{\sqrt{3}}{2} |\zeta|\right] & \left(\arg \zeta = \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Если с ростом γ увеличивать M , то остаточный член разложения (2.3)

будет мал при $|\zeta| > |\zeta_0|$, где ζ_0 не зависит от γ . Если, например, $M+1 > \gamma/2\sqrt{3}$, то $\exp\left[-\frac{4}{3}(M+1)|\zeta|^{3/2} + \gamma\frac{\sqrt{3}}{2}|\zeta|\right] < 1$ при $|\zeta| > 5,1$.

Используя тождество (2.3), представим волновое поле $U_1(l, t; 0, t_0)$ в виде суммы

$$U_1(l, t; 0, t_0) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(l, t; 0, t_0) + S_M(l, t; 0, t_0),$$

где

$$s_m(l, t; 0, t_0) = \frac{1}{2\pi\omega} \frac{x_2}{x_1} F_0(l, t) F_0(0, t_0) \exp\left\{i\omega\left[\frac{t_0}{c_1} + \int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)} + \frac{t}{c_1}\right]\right\} (-2i) \int_L \left\{1 + i[F_1(l, t) + F_1(0, t_0)] \frac{\zeta^2}{\omega^{1/3}} + O\left(\frac{\zeta^{5/2}}{\omega^{2/3}}\right)\right\} \left[\frac{\omega_1(\zeta)}{\omega_2(\zeta)}\right]^m \frac{\exp(i\gamma\zeta)}{\omega_2^2(\zeta)} d\zeta; \quad (2.4)$$

$$S_M(l, t; 0, t_0) = \frac{1}{2\pi\omega} \frac{x_2}{x_1} F_0(l, t) F_0(0, t_0) \exp\left\{i\omega\left[\frac{t_0}{c_1} + \int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)} + \frac{t}{c_1}\right]\right\} \int_L \left\{1 + i[F_1(l, t) + F_1(0, t_0)] \frac{\zeta^2}{\omega^{1/3}} + O\left(\frac{\zeta^{5/2}}{\omega^{2/3}}\right)\right\} \left[\frac{\omega_1(\zeta)}{\omega_2(\zeta)}\right]^M \frac{\exp(i\gamma\zeta)}{\omega_2(\zeta) v(\zeta)} d\zeta. \quad (2.5)$$

Выберем число M так, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$\frac{\gamma}{2\sqrt{3}} - 1 < M \leq \frac{\gamma}{2\sqrt{3}}. \quad (2.6)$$

Тогда для интеграла в формуле (2.5) основным участком интегрирования будет небольшой отрезок контура L , для которого $|\zeta| \leq 6$. При выполнении неравенства (2.6) интегралы в формуле (2.4) могут быть оценены методом перевала. Обычные для метода перевала вычисления приводят к следующему приближенному равенству:

$$s_m(l, t; 0, t_0) \approx \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega} \frac{x_2}{x_1} F_0(l, t) \times \\ \times F_0(0, t_0) \frac{\gamma^{3/2}(l)}{(m+1)^2} \exp(i\pi m/2) \exp\left\{i\omega\left[\frac{t_0}{c_1} + \int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)} + \frac{t}{c_1}\right] - \frac{\gamma^3}{12(m+1)}\right\}. \quad (2.7)$$

Если вычислить с помощью обычных формул геометрической оптики интенсивность волны, которая приходит в точку наблюдения после достаточно большого числа отражений m от границы в неоднородной среде, то получится выражение, полностью совпадающее с (2.7) (см. [3]).

Это совпадение означает, что функции s_m описывают волны, которые вышли из процесса интерференции в окрестности головной волны, и может рассматриваться как дополнительное обоснование правильности выбора контура L и функции $B(\zeta)$ в формуле (2.1).

Отметим, что функции s_m при больших γ и малых m не дают правильного описания не интерферирующих друг с другом волн геометрической оптики. Это происходит потому, что при больших γ и малых m седловые точки $\zeta_m = \gamma^2/4(m+1)^2$ интегралов, входящих в функции s_m , велики по модулю и отношение $\zeta_m^2/\omega^{1/3}$ не является малой величиной.

Можно показать, что при $m \geq M$ (число M удовлетворяет неравенству (2.6)) оптическая разность хода двух волн, испытавших m и $m+1$ отражение на границе сред, не превосходит по порядку величины длины волны $2\pi c_1/\omega$. Такие волны будут интерферировать между собой, образуя достаточно сложную головную волну интерференционного типа. Функцию S_M формально можно считать суммой бесконечного числа

слагаемых s_m : $S_M = \sum_{m=M}^{\infty} s_m$. Отсюда следует, что функция S_M описывает

интерференцию волн, для которых число отражений m на границе сред больше или равно M . Другими словами, S_M описывает поде головной волны интерференционного типа.

Введем функцию

$$G_M(\gamma) = \int_L \left[\frac{w_1(\zeta)}{w_2(\zeta)} \right]^M \frac{\exp(i\gamma\zeta)}{v(\zeta) w_2(\zeta)} d\zeta \quad \left(\frac{\gamma}{2\sqrt{3}} - 1 < M \leq \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \right),$$

при помощи которой головная волна интерференционного типа $S_M(l, t; 0, t_0)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} S_M(l, t; 0, t_0) = & \frac{1}{2\pi\omega} \frac{x_2}{x_1} F_0(l, t) F_0(0, t_0) \exp \left\{ i\omega \left[\frac{t_0}{c_1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^l \frac{d\tau}{c_{20}(\tau)} + \frac{t}{c_1} \right] \right\} \left\{ G_M(\gamma) - \frac{i}{\omega^{1/3}} [F_1(l, t) + \right. \\ & \left. + F_1(0, t_0)] \frac{d^2}{d\gamma^2} G_M(\gamma) + O(\omega^{-2/3}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В настоящее время функция $G_M(\gamma)$ протабулирована [10].

С увеличением γ при тех значениях γ , для которых отношение $\gamma/2\sqrt{3}$ становится целым, функция S_M претерпевает скачок. Прежнее выражение для поля головной волны становится равным сумме полей новой головной волны и волны, испытавшей $\gamma/2\sqrt{3} - 1$ отражений на границе сред. Таким образом, при целых значениях $\gamma/2\sqrt{3}$ от головной волны отщепляется волна геометрической оптики, которая описывается функцией s_m ($m = \gamma/2\sqrt{3} - 1$). С увеличением γ путь этой отщепленной волны в неоднородной среде все более удаляется от границы сред. Это приводит к тому, что волна перестает описываться функцией s_m и для ее описания становится применима обычная формула геометрической оптики.

Из формулы (2.8) следует, что головная волна интерференционного типа при распространении вдоль падающего и отходящего от границы луча в первом приближении подчиняется обычным законам геометрической оптики. Фаза головной волны (с точностью до $G_M(\gamma)$) соответству-

ет распространению вдоль падающего и отходящего луча со скоростью c_1 и вдоль границы сред с переменной скоростью $c_{20}(l)$. Если неоднородная среда обладает слабым поглощением, то величина γ будет иметь небольшую мнимую часть. Формула (2.8) остается при этом справедливой, но только в неравенстве (2.6) величину γ следует заменить на $\operatorname{Re} \gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабиц, А. С. Алексеев, Изв. АН СССР, сер геофиз, № 1, 17 (1958).
2. А. С. Алексеев, Б. Я. Гельчинский, сб Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, III, изд. ЛГУ, 1959
3. В. С. Булдырев, сб. Проблемы математической физики, II, изд. ЛГУ, 1967
4. В. С. Булдырев, А. И. Ланин, Ж выч мат и мат физ, 6, № 1, 90 (1966)
5. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 8, № 3, 363 (1963).
6. В. И. Иванов, Научные доклады высш. школы, физ-мат науки, 1, № 6, 192 (1958).
7. В. С. Буслаев, Вестник ЛГУ, № 13, 5 (1962).
8. В. С. Булдырев, Доклады АН СССР, 163, № 4, 853 (1965).
9. И. А. Молотков, сб Проблемы математической физики, II, изд. ЛГУ, 1967.
10. А. И. Ланин, Кандидатская диссертация, ЛГУ, 1966.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
26 июля 1966 г

SHORT WAVE INTERFERENCE IN THE PROBLEM OF DIFFRACTION ON INHOMOGENEOUS ARBITRARY-SECTION CYLINDER

V. S. Bouldyrev

The paper studies the high-frequency asymptotics of wave field in a plane problem of diffraction on an inhomogeneous arbitrary-section cylinder. The wave propagation velocity in the cylinder is assumed to exceed the one in an external uniform medium. The asymptotic formulae have been obtained which describe, with a relative error of $O(\omega^{-2/3})$, the waves propagating in the boundary layer in the nonuniform medium and traveling further in the uniform one into the infinity. Using these formulae, the solution is derived which represents the head wave of the interference nature that occurs in the external medium due to multiple reflections inside the cylinder.

УДК 621.396.677.7

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛИ И ПРОВОДА НА ЦИЛИНДРЕ С ВЫСТУПОМ

М. П. Наймушин

Двумерная задача о возбуждении кругового цилиндра с радиальным выступом с помощью продольной щели или провода решается методом интегральных уравнений. Приводятся диаграммы излучения источников, рассчитанные по найденным из решения электрическим поверхностным токам. Обсуждается зависимость формы диаграммы направленности от параметров выступа и взаимного положения выступа и источника.

Излучение электромагнитных источников вблизи тел сложной геометрической формы представляет большой интерес для различных областей антенной техники. При произвольной форме тела расчет излучения может быть произведен методом интегральных уравнений [1]. Этот метод целесообразно применять, когда размеры тела соизмеримы с длиной волны, так как в этом случае можно получить решение с высокой точностью при умеренном объеме вычислительных работ. В данной работе рассматривается возбуждение кругового цилиндра с радиальным выступом продольной щелью и проводом. Для простоты задача полагается двумерной, т. е. цилиндр считается бесконечным, а распределение источников — однородным вдоль его оси. Результаты решения такой задачи могут быть использованы для оценки свойств реальных цилиндрических систем в азимутальной плоскости.

В двумерном случае продольная щель возбуждает поле, соответствующее H -волнам относительно оси цилиндра, а продольный провод — поле, соответствующее E -волнам. При этом щель может задаваться в виде узкой полоски или нити магнитного тока, а провод — в виде нити электрического тока. Чтобы определить поле излучения источников, необходимо сначала найти поле на поверхности цилиндра, т. е. найти поверхностную плотность тока. Если считать цилиндр идеально проводящим, то на нем наводится только электрический ток, причем для случая щели он является поперечным, а для случая провода — продольным.

Обозначим поверхностную плотность поперечного электрического тока через J_v° (v — координата вдоль поперечного сечения цилиндра), а плотность продольного электрического тока — через J_z° . Для них имеют место следующие интегральные уравнения:

$$J_v^{\circ}(v) - 2 \int_l J_v^{\circ}(v') \frac{\partial \psi}{\partial n'} dv' = 2J_v^{\circ \text{перв}}(v), \quad (1)$$

$$J_z^{\circ}(v) + 2 \int_l J_z^{\circ}(v') \frac{\partial \psi}{\partial n} dv' = 2J_z^{\circ \text{перв}}(v). \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) интеграл берется по контуру поперечного сечения цилиндра; ψ — двумерная функция Грина для свободного прост-

ранства. ($\psi = (4i)^{-1} H_0^{(2)}(kR)$), где $H_0^{(2)}(kR)$ — функция Ханкеля, k — волновое число, R — расстояние между точками интегрирования и наблюдения); n — внешняя нормаль к поверхности цилиндра; первичный ток $J^{\text{э перв}}$ численно равен тангенциальной составляющей падающего магнитного поля источника на поверхности цилиндра.

После решения интегрального уравнения и определения поверхностных токов легко найти поле в дальней зоне и, следовательно, диаграмму направленности источника с учетом влияния цилиндра. Формулы для расчета диаграмм направленности имеют следующий вид:

$$F(\varphi) = \frac{I_0^M}{W} \exp [ikr_0 \cos (\varphi - \varphi_0)] + \int_l J_z^{\text{э}}(v') \times \quad (3)$$

$$\times (ni_r) \exp [ikr' \cos (\varphi - \varphi')] dv'$$

— для источника в виде щели и

$$F(\varphi) = I_0^{\text{э}} \exp [ikr_0 \cos (\varphi - \varphi_0)] + \int_l J_z^{\text{э}}(v') \times \quad (4)$$

$$\times \exp [ikr' \cos (\varphi - \varphi')] dv'$$

— для источника в виде провода.

Здесь I_0^M и $I_0^{\text{э}}$ — магнитный и электрический токи источника; r_0, φ_0 — полярные координаты источника; r', φ' — полярные координаты точек контура поперечного сечения цилиндра; i_r — единичный вектор координаты r точки наблюдения.

Поперечное сечение рассматриваемого цилиндра с выступом и связанные с ним системы координат показаны на рис. 1. Параметрами цилиндра являются: радиус цилиндра a , высота выступа h , угловая ширина выступа $\Delta\Phi$, угловое расстояние между источником и выступом Φ . Параметром источника служит его высота H над поверхностью цилиндра. Если источником является продольная щель, то она эквивалентна полоске магнитного тока, расположенной непосредственно на поверхности цилиндра или выступа. При расчетах варьировались параметры $h, \Delta\Phi, \Phi, H$, а радиус цилиндра оставался постоянным, соответствующим $ka=3$.

Поскольку поперечный ток на острой кромке не имеет особенностей [1], то в случае возбуждения цилиндра щелью можно не задавать на выступе радиусов скругления. Для случая возбуждения цилиндра проводом на кромках выступа задавались радиусы скругления величиной около $0,05\lambda$.

Интегральные уравнения (1) и (2) решались численно методом Крылова—Боголюбова [2] на электронной цифровой вычислительной машине. После определения плотности поверхности тока на вычислительной машине проводился расчет диаграмм направленности по формулам (3) и (4).

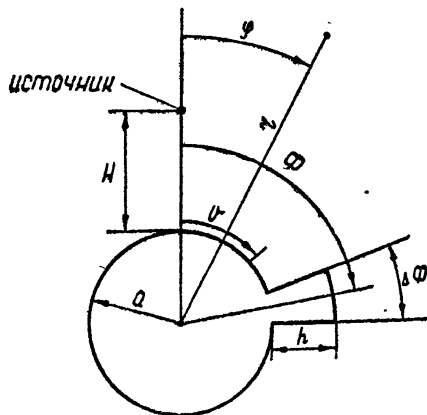


Рис. 1. Поперечное сечение цилиндра с выступом.

При возбуждении цилиндра щелью расчет был произведен для следующих значений исходных параметров: $h/\lambda = 0,079; 0,168; 0,268; 0,38$; $\Delta\Phi \approx 7^\circ; 21^\circ; 35^\circ$; угол Φ варьировался от 0° до 180° . Ниже приводятся некоторые результаты расчета диаграмм направленности.

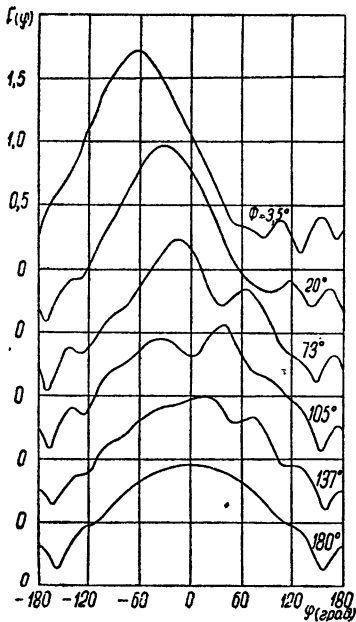


Рис 2. Зависимость формы диаграммы направленности от углового расстояния между выступом и щелью ($ka=3; h/\lambda=0,268; \Delta\Phi=7^\circ$).

Щелью и выступом является типичной для всех рассмотренных значений параметров выступа, поэтому подобные графики для других параметров выступа не приводятся.

На рис. 3 и 4 сравниваются диаграммы направленности щели, расположенной у основания выступа, при различной ширине и высоте выступа. Как видно из этих рисунков, диаграмма направленности почти не меняется при изменении параметра выступа в рассмотренных пределах. Заметно отличается от других только диаграмма направленности при $h/\lambda = 0,079$ (рис. 4), поскольку в этом случае отражение от передней грани выступа еще не велико. Ширина диаграммы направленности щели по уровню $0,707$ под влиянием выступа уменьшается во всех случаях до $\sim 100^\circ$ (кроме случая $h/\lambda = 0,079$), по сравнению с величиной порядка 180° для щели на гладком цилиндре, а смещение максимума излучения составляет около 60° .

Интересным является случай, когда щель находится на вершине выступа. На рис. 5 показана зависимость диаграммы направленности от высоты выступа для случая, когда выступ является тонким ($\Delta\Phi \approx 7^\circ$). При этом ширина щели бралась равной ширине выступа и при варьировании высоты в пределах $h/\lambda = 0 \div 0,38$ она составляла около $0,1 \lambda$. Поскольку выступ является тонким, то отражение от него мало и основную роль в формировании диаграммы направленности играет интерференция первичного поля щели и поля, отраженного от поверхности цилиндра. Вследствие этого: диаграмма направленности в направлении

На рис. 2 представлена серия диаграмм направленности, иллюстрирующая зависимость формы диаграммы направленности от взаимного положения щели и выступа для $h/\lambda = 0,268; \Delta\Phi = 7^\circ$. При $\Phi = 180^\circ$ щель и выступ диаметрально противоположны; при $\Phi = \Delta\Phi/2 = 3,5^\circ$ щель находится у основания выступа. Графики для различных Φ смещены по оси ординат для удобства сравнения. При $\Phi = 180^\circ$ диаграмма направленности симметрична и для тонкого выступа практически не отличается от диаграммы щели на цилиндре без выступа [4]. Как видно из рис. 2, при сближении щели и выступа, т. е. при уменьшении угла Φ , в диаграмме направленности появляется небольшая изрезанность, обусловленная интерференцией поля щели и поля, отраженного от выступа. По мере сближения щели и выступа отраженное от выступа поле увеличивается, что приводит к сужению диаграммы направленности и смещению максимума излучения в сторону, противоположную выступу. Такая деформация диаграммы направленности при изменении углового расстояния между

0° (по радиусу от щели) может иметь максимум или минимум в зависимости от высоты выступа и при увеличении высоты выступа будет постепенно приближаться к изотропной в экваториальной плоскости.

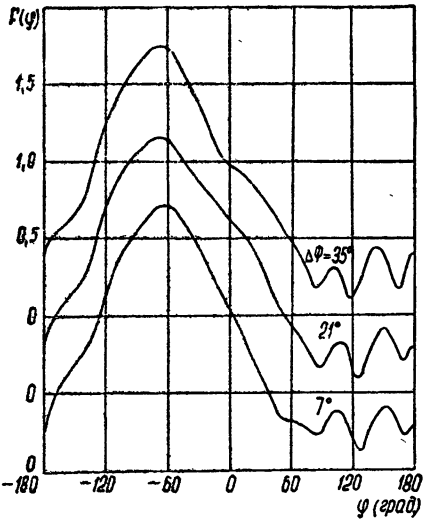


Рис. 3. Зависимость формы диаграммы направленности от ширины выступа; щель расположена у основания выступа ($ka=3$, $h/\lambda=0,27$).

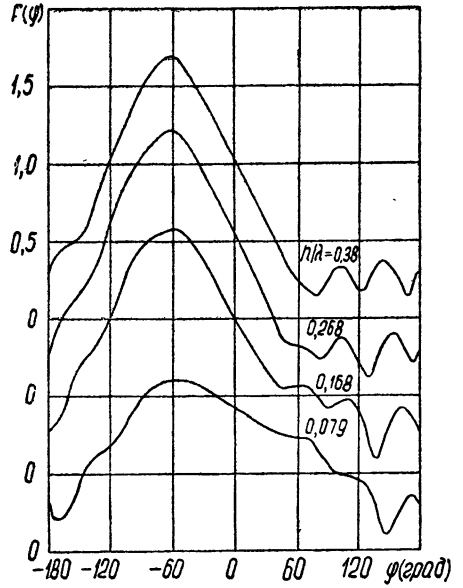


Рис. 4. Зависимость формы диаграммы направленности от высоты выступа; щель расположена у основания выступа ($ka=3$, $\Delta\Phi=7^\circ$).

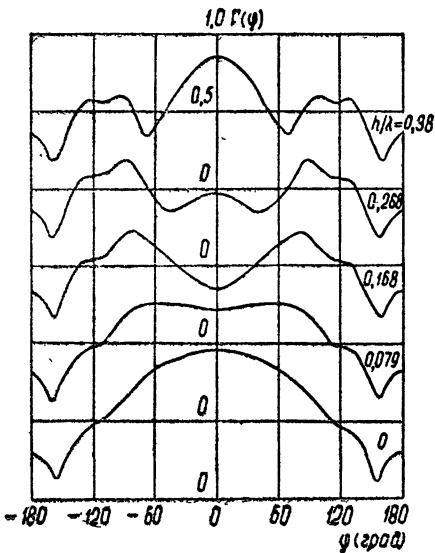


Рис. 5. Зависимость формы диаграммы направленности от высоты выступа; щель расположена на вершине тонкого выступа ($ka=3$, $\Delta\Phi=7^\circ$).

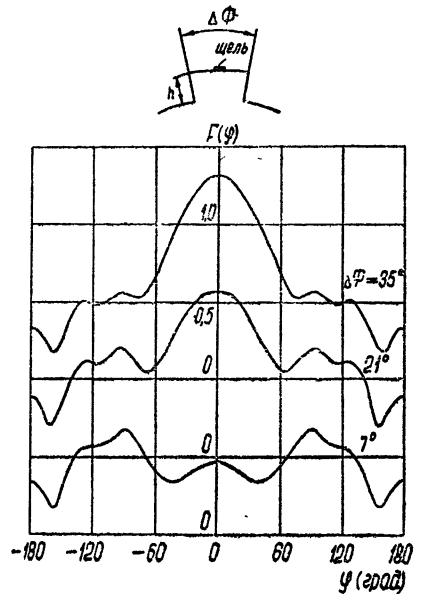


Рис. 6. Зависимость формы диаграммы направленности от ширины выступа; щель расположена на вершине выступа ($ka=3$, $h/\lambda=0,27$).

В том случае, когда выступ имеет значительную ширину, существенное влияние на диаграмму направленности будет оказывать отражение от вершины выступа. Это иллюстрируется графиками на рис. 6, где показана зависимость диаграммы направленности от ширины выступа при неизменной его высоте. Ширина щели здесь по-прежнему составляет около $0,1 \lambda$, а ширина выступа — $\sim 0,1 \lambda$ ($\Delta\Phi = 7^\circ$); $\sim 0,3 \lambda$ ($\Delta\Phi = 21^\circ$); $\sim 0,5 \lambda$ ($\Delta\Phi = 35^\circ$). Как видно из рис. 6, помещая щель на вершину выступа, можно при сравнительно небольшой ширине выступа (около $0,5 \lambda$) получить диаграмму направленности, имеющую явно выраженный максимум в радиальном направлении от щели и равномерную засветку широкого сектора углов с меньшим в 2—3 раза уровнем излучения. При дальнейшем увеличении ширины выступа максимум будет расширяться, так как диаграмма направленности будет стремиться к диаграмме направленности щели на гладком цилиндре с радиусом $a' = a + h$.

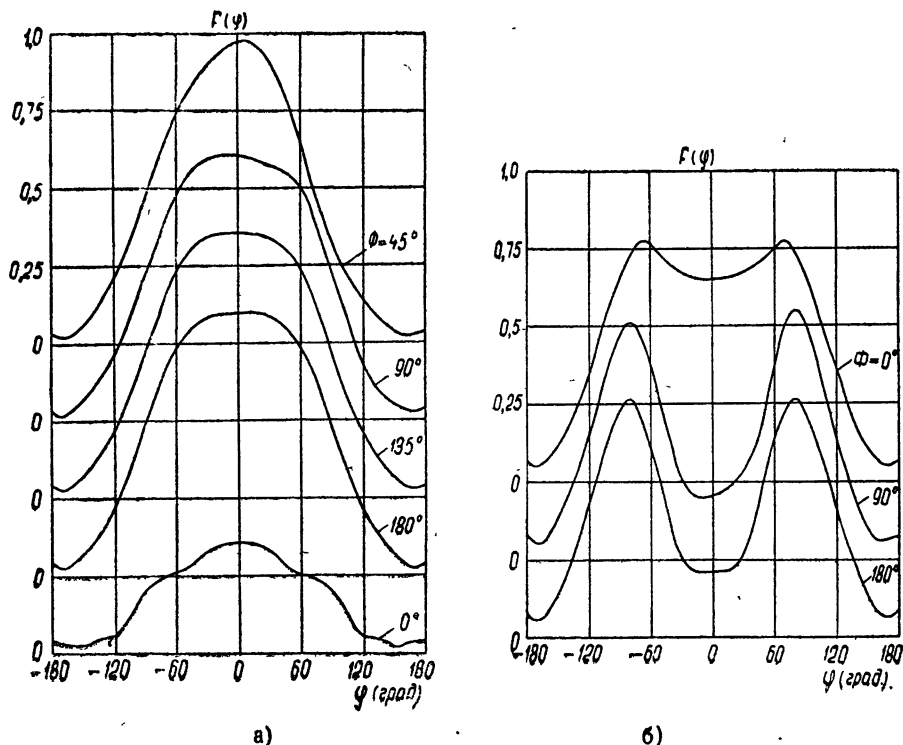


Рис. 7. Зависимость формы диаграммы направленности от углового расстояния между проводом и выступом ($ka=3$, $\Delta\Phi=18^\circ$). Высота подвеса провода составляет а) $H=0,25 \lambda$, б) $H=0,5 \lambda$.

Возбуждение цилиндра проводом (нитью электрического тока) рассматривалось при следующих значениях параметров: $h/\lambda=0,2$; $\Delta\Phi=18^\circ$; $H/\lambda = 0,25$; $0,5$. Поскольку известно [1], что поверхностный ток, наведенный на цилиндре продольным проводом, затухает вдоль контура сечения значительно быстрее, чем ток, наведенный щелью, то в случае провода следовало ожидать меньшего влияния выступа на диаграмму направленности, чем в случае щели. Это подтверждается при рассмотрении расчетных графиков на рис. 7а и 7б, где показана зависимость диаграммы направленности от взаимного расположения выступа и провода. Как видно из этих рисунков, при угловом расстоянии $\Phi > 90^\circ$ влияние выступа на диаграмму направленности пренебрежимо мало. Наиболее существенно оно проявляется при $\Phi=0^\circ$, т. е. когда выступ находится непосредственно под проводом.

Приведенные расчетные графики позволяют проследить общий характер изменения диаграммы направленности источников в виде щели и провода при наличии радиального выступа на цилиндре, а также использовать в ряде случаев влияние выступа для формирования диаграмм направленности специальной формы.

Автор приносит глубокую благодарность Г. Т. Маркову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИФМЛ, М.—Л., 1962.

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
8 июля 1966 г.

RADIATION OF LONGITUDINAL SLOT AND WIRE ON CYLINDER WITH FLANGE

M. P. Naymoushin

The two-dimensional problem on the excitation of a circular cylinder with a radial flange by a longitudinal slot or wire is solved by means of the integral equation method. The patterns of source radiation are given, calculated on the basis of the surface electrical currents derived from the solution. There is discussed the dependence of the radiation pattern on the flange parameters and the relative position of the source and the flange.

УДК 537.226.8 : 621.376.9

ЧЕРЕНКОВСКИЕ ПОТЕРИ МОДУЛИРОВАННОГО ТОКА В НЕЛИНЕЙНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

В. В. Демченко, В. И. Курилко

Рассматривается задача о возбуждении двухуровневой системы модулированным током конечной амплитуды. Получена зависимость тормозящего поля от амплитуды тока в предельных случаях сильных и слабых токов при условии, что частота модуляции близка к резонансной частоте системы.

Изучение черенковского возбуждения диэлектрика модулированным током представляет значительный интерес для развития новых методов ускорения и детектирования заряженных частиц, генерирования и усиления электромагнитных волн.

Однако известные в настоящее время результаты линейной теории этого эффекта справедливы только при малых величинах возбуждающего среду тока. При больших токах необходимо учитывать обратное влияние возбуждаемых колебаний на свойства среды и движение заряженных частиц, образующих ток. В настоящей работе рассматривается задача о возбуждении нелинейного диэлектрика внешним модулированным током конечной величины. Поскольку нелинейные свойства среды наиболее сильно проявляются при условии, что частота модуляции близка к одной из резонансных частот среды, мы будем предполагать это условие выполненным. В этом случае нелинейные свойства среды могут быть описаны в двухуровневом приближении [1-4] с помощью следующего уравнения для вектора поляризации среды:

$$\ddot{P} + P = -q(1 - P^2 - \dot{P}^2)^{1/2}E, \quad q = \frac{2Nd^2}{\hbar\omega_{21}}, \quad (1)$$

где вектор поляризации P и электрическое поле E измеряются в единицах Nd (N — плотность резонансных молекул, ω_{21} — резонансная частота и d — дипольный момент молекулы; время измеряется в единицах $1/\omega_{21}$).

Уравнение состояния среды (1) должно быть решено совместно с уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial H}{\partial \tau}, \\ \operatorname{rot} H &= \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial \tau} + 4\pi \frac{\partial P}{\partial \tau} + 4\pi j, \\ j(r) &= j_0 \delta(\eta) \cos(\omega_0 \tau - k_0 \xi), \\ \eta &\equiv \frac{\omega_2 1 x}{c}, \quad \xi \equiv \frac{\omega_2 1 z}{c}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ось ξ направлена по току j_0 , ω_0 — частота модуляции (в единицах

ω_{21}), $\Delta \equiv |\omega_0 - 1| \ll 1$, $k \equiv \omega_0 c / \omega_{21} v_0$, ϵ_0 — диэлектрическая постоянная пассивной (нерезонансной) среды, v_0 — скорость частиц, образующих ток.

В линейном приближении из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} E_z &= E_{z0} \cos(\omega_0 \tau - k_0 \xi - k_{\perp} |\eta|), \\ E_x &= E_{x0} \operatorname{sgn} \eta \cos(\omega_0 \tau - k_0 \xi - k_{\perp} |\eta|), \\ H_y &= H_{y0} \operatorname{sgn} \eta \cos(\omega_0 \tau - k_0 \xi - k_{\perp} |\eta|), \end{aligned} \quad (3)$$

при этом амплитуды полей следующим образом выражаются через амплитуду возбуждающего тока:

$$\begin{aligned} H_{y0} &= \frac{\omega_0}{k_0} \epsilon E_{x0}, \\ E_{x0} &= -\frac{k_0}{k_{\perp}} E_{z0}, \\ E_{z0} &= -\frac{2\pi k_{\perp}}{\omega_0 \epsilon} j_0, \end{aligned}$$

а условие возбуждения имеет вид

$$k_{\perp}^2 \equiv -k_0^2 + \omega_0^2 \epsilon > 0,$$

где

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 - \frac{4\pi q^2 W}{1 - \omega_0^2}.$$

В нелинейном приближении можно искать решение уравнений (1) и (2) в том же виде, что и (3); отличие состоит в том, что поперечное волновое число k_{\perp} в нелинейной теории определяется нелинейным дисперсионным уравнением

$$\begin{aligned} k_{\perp n}^2 &\equiv -k_0^2 + \omega_0^2 \epsilon_n, \\ \epsilon_n &\equiv \epsilon_0 + \frac{4\pi \chi \operatorname{sgn} \Delta}{(1 + \chi^2 E_0^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

где $\chi = 2Nd^2 / \hbar \omega_{21} |\Delta|$ — линейная поляризуемость среды, E_0 — амплитуда возбуждаемой током волны $E_0^2 = E_{x0}^2 + E_{z0}^2$. Тогда уравнения, определяющие зависимость амплитуд возбуждаемых током полей от величины возбуждающего тока, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{E_{z0}}{E_{x0}} &= -\frac{k_{\perp n}}{k_0}, \\ \beta_0 E_{x0} &= 2\pi j_0 \left[\epsilon_0 + \frac{4\pi \chi \operatorname{sgn} \Delta}{(1 + \chi^2 E_0^2)^{1/2}} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где $k_{\perp n}(E_0)$ определяется уравнением (4).

Если плотность резонансных молекул не слишком велика, линейная поляризуемость резонансных частиц мала. В этом случае $4\pi \chi / \epsilon_0 \ll 1$ и условие излучения имеет вид $k_{\perp n}^2 > 0$, а амплитуды возбуждаемых

током полей наиболее существенно зависят от величины возбуждающего тока. Поскольку в этом случае $E_{z0}/E_{x0} = -k_{\perp n}/k_0 \ll 1$, в нелинейной диэлектрической постоянной можно пренебречь продольной компонентой поля по сравнению с поперечной. Выражения для тормозящего поля существенно упрощаются в следующих предельных случаях.

1. $\chi^2 E_{x0}^2 \ll 1$ (слабая нелинейность),

$$E_{z0} = -\frac{k_{\perp n}}{k_0} E_{x0},$$

$$E_{x0} = \frac{2\pi j_0}{\beta_0(\epsilon_0 + 4\pi\chi \operatorname{sgn} \Delta)} \left[1 + \frac{2\pi\chi^3 \operatorname{sgn} \Delta E_{x0}^2}{\beta_0(\epsilon_0 + 4\pi\chi \operatorname{sgn} \Delta)} \right],$$

$$k_{\perp n}^2 = -k_0^2 + \omega_0^2 \epsilon_0 + \omega_0^2 \left[4\pi\chi \operatorname{sgn} \Delta - \frac{16\pi^3 \chi^3 \operatorname{sgn} \Delta j_0^2}{\beta_0^2(\epsilon_0 + 4\pi\chi \operatorname{sgn} \Delta)^2} \right].$$

Из этих соотношений видно, что линейное приближение справедливо при выполнении условия

$$-k_0^2 + \omega_0^2 \epsilon_0 + \omega_0^2 4\pi\chi \operatorname{sgn} \Delta \gg \frac{16\pi^3 \chi^3 \operatorname{sgn} \Delta j_0^2}{\beta_0^2(\epsilon_0 + 4\pi\chi \operatorname{sgn} \Delta)^2},$$

которое наиболее легко нарушается вблизи порога излучения.

2. $\chi^2 E_{x0}^2 \gg 1$ (сильная нелинейность). В этом случае

$$E_{z0} = -\frac{k_{\perp}}{k_0} E_{x0},$$

$$E_{x0} = \frac{2\pi j_0}{\beta_0 \epsilon_0},$$

$$k_{\perp}^2 = -k_0^2 + \omega_0^2 \left(\epsilon_0 + \frac{2\beta_0^2 \epsilon_0 \operatorname{sgn} \Delta}{j_0} \right).$$

Из приведенных выражений видно, что для $k_0^2 > \omega_0^2 \epsilon_0$ (но $k_{\perp}^2(0) > 0$) при достаточно большой амплитуде тока условие излучения может оказаться нарушенным, вследствие чего потери обращаются в нуль, если частота модуляции меньше резонансной. Наоборот, при частоте модуляции, большей резонансной, потери отсутствуют при малых токах и могут появиться при достаточно большом токе. Необходимо также отметить, что в рассматриваемых условиях тормозящее поле в области, где условия излучения выполнены, уменьшается с ростом величины тока.

Если условия черенковского излучения не выполнены, то, как легко показать, решение системы (1) — (2) вблизи токового слоя имеет вид

$$E_z = E_{z0}(\eta) \sin(\omega_0 \tau - k_0 \xi),$$

$$E_x = E_{x0}(\eta) \cos(\omega_0 \tau - k_0 \xi),$$

$$H_y = H_{y0}(\eta) \cos(\omega_0 \tau - k_0 \xi),$$

так что в линейном случае поле будет экспоненциально убывать с удалением от токового слоя по закону

$$x > 0 \quad E_{z0}(\eta) = E_{z0} \exp[-(|\lambda|)^{1/2} x],$$

$$x < 0 \quad E_{z0}(\eta) = E_{z0} \exp[+(|\lambda|)^{1/2} x],$$

где $\lambda = \omega_0^2 \varepsilon - k_0^2$. Амплитуда возбужденного электрического поля будет зависеть от амплитуды возбуждающего тока следующим образом:

$$E_{z0} = - \frac{2\pi k_0 | -k_0 + \omega_0^2 \varepsilon / k_0 |^{1/2}}{\omega_0 \varepsilon} j_0.$$

В нелинейном случае, предполагая, что амплитуды полей не слишком велики, а скорости частиц, образующих ток, близки к фазовой скорости волны в среде, после ряда преобразований получим

$$E_{z0}^{3/2} = - \frac{k_0 (k_0^2 - \varepsilon_0)}{(\pi \chi^3)^{5/6} (\varepsilon_0)^{1/6}} j_0.$$

Таким образом, и в этом случае с увеличением амплитуды возбуждающего тока происходит уменьшение амплитуды возбуждаемого поля.

Авторы благодарны Я. Б. Файнбергу за предложенную тему и ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, вып. 4, 945 (1957).
2. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 4, вып. 4, 718 (1959).
3. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, 49, № 9, 895 (1965).
4. В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко, ЖЭТФ, 48, № 1, 353 (1965); ЖТФ, 36, № 3, 401 (1966).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
11 июня 1966 г.

V CERENKOV LOSSES OF MODULATED CURRENT IN A NONLINEAR DIELECTRIC

V. V. Demchenko, V. I. Kourilko

The problem of excitation of two-level system by a finite-amplitude modulated current is considered. The dependence of the retarding field on the current amplitude is derived in the limit cases of strong and weak currents if the modulation frequency is close to the resonance frequency of the system.

УДК 621.385.544.9

ОБ УСТРАНЕНИИ БОКОВОЙ РАСФОКУСИРОВКИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ЛУЧЕВЫХ ПРИБОРАХ МАГНЕТРОННОГО ТИПА

Т. Г. Кочина, Ш. Е. Цимринг

Приведены результаты расчета геометрии боковых электродов плоских магнетронных приборов лучевого типа для нескольких режимов. С помощью электролитической ванны показана возможность упрощения формы электродов и коррекции электронного пучка.

Боковая расфокусировка электронного пучка, обусловленная расталкивающим действием пространственного заряда, имеет место во всех приборах М-типа, в которых поток ограничен поверхностями, перпендикулярными магнитным силовым линиям.

Настоящая статья касается вычисления формы боковых электродов для магнетронных приборов, в которых электронное облако заполняет часть пространства взаимодействия (рис. 1). К числу устройств, для

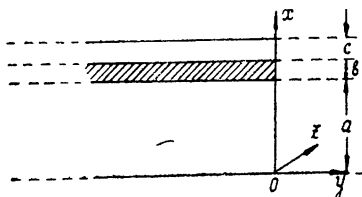


Рис. 1. Расположение электродов и пучка в плоской системе. Магнитное поле направлено по оси y .

которых может оказаться полезным применение результатов расчета, относятся генераторы и усилители с трохоидальным пучком [1] (где вследствие малой продольной скорости электронов плотность пространственного заряда в пучке может быть достаточно большой), мощные ЛБВ и ЛОВ М-типа и др.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ БОКОВЫХ ЭЛЕКТРОДОВ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Нахождение формы боковых электродов легко свести к решению задачи Коши для уравнения Лапласа. В плоской системе неограниченной ширины (рис. 1) компонента E_y электрического поля равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Удаляя по методу Пирса часть системы правее плоскости $y=0$, приходим к задаче Коши.

Действительно, электронный пучок правее плоскости $y=0$ останется в равновесии, если при $y > 0$ потенциал будет удовлетворять уравнению Лапласа с граничными условиями в плоскости $y = 0$:

$$U(x, y)|_{y=0} = \Phi(x); \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Если выполнено условие (2), то потенциал в области $y > 0$ является аналитическим продолжением (1) и определяется соотношением

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(x + iy). \quad (3)$$

Будем далее полагать плотность пространственного заряда ρ в пучке постоянной, а пучок—ленточным, расположенным параллельно плоскостям анода и катода с потенциалами соответственно V и 0. В этом случае распределение нормированного потенциала в системе неограниченной ширины имеет вид

$$\overline{\Phi(x)} = \begin{cases} k_1 \bar{x} & (0 \leq \bar{x} \leq \bar{a}) \\ k_2 \bar{x}^2 + k_3 \bar{x} + k_4 & (\bar{a} \leq \bar{x} \leq \bar{a} + \bar{b}) \\ k_5 \bar{x} + k_6 & (\bar{a} + \bar{b} \leq \bar{x} \leq \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_1 &= \bar{V} - \frac{\bar{b}}{2} - \bar{c}, & k_2 &= \frac{1}{2\bar{b}}, & k_3 &= \bar{V} - \frac{\bar{b}}{2} - \bar{c} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}}, \\ k_4 &= \frac{\bar{a}^2}{2\bar{b}}, & k_5 &= \bar{V} + \bar{a} + \frac{\bar{b}}{2}, & k_6 &= -\bar{a} - \frac{\bar{b}}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Черта сверху означает, что соответствующие величины безразмерны. В частности, все линейные величины нормированы к расстоянию между пластинами $(a + b + c)$, т. е. $\bar{x} = x/(a + b + c)$, $\bar{a} = a/(a + b + c)$ и т. д. (см. рис. 1), все потенциалы нормированы к величине $\rho b(a + b + c)/\epsilon_0$, т. е.

$$\overline{\Phi(x)} = \frac{\Phi(x) \epsilon_0}{\rho b(a + b + c)}, \quad \bar{V} = \frac{V \epsilon_0}{\rho b(a + b + c)}. \quad (6)$$

Согласно (4), $\overline{\Phi(x)}$ не является аналитической функцией, что не позволяет непосредственно использовать метод аналитического продолжения и вытекающую из него формулу (3). Эта трудность может быть, однако, обойдена путем аппроксимации (4) подходящей аналитической функцией. Хотя, вследствие известного свойства неустойчивости задачи Кوشي для эллиптических уравнений, две близкие друг другу функции, заданные при $y=0$, могут приводить к существенно различным распределениям потенциала в области $y > 0$, электроды, полученные на основе этих распределений с помощью (3), обеспечат достаточно хорошее выполнение (1) и (2), что и является конечной целью расчета.

В качестве аппроксимирующих функций на отрезке $0 \leq \bar{x} \leq 1$ были взяты полиномы 5-ой степени, являющиеся линейной комбинацией полиномов Лежандра первых пяти порядков:

$$Q_5(\bar{x}) = \sum_{i=0}^5 c_i P_i(\bar{x}) = \sum_{m=0}^5 A_m \bar{x}^m. \quad (7)$$

Полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке (0,1), имеют вид

$$\begin{aligned} P_0(\bar{x}) &= 1, & P_1(\bar{x}) &= 2\bar{x} - 1, & P_2(\bar{x}) &= 6\bar{x}^2 - 6\bar{x} + 1, \\ P_3(\bar{x}) &= 20\bar{x}^3 - 30\bar{x}^2 + 12\bar{x} - 1, & P_4(\bar{x}) &= 70\bar{x}^4 - 140\bar{x}^3 + \\ & & & + 90\bar{x}^2 - 20\bar{x} - 1, \\ P_5(\bar{x}) &= 252\bar{x}^5 - 630\bar{x}^4 + 560\bar{x}^3 - 210\bar{x}^2 + 30\bar{x} - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты c_i определяются формулой (см., например, [2])

$$c_i = (2i+1) \int_0^1 \Phi(\bar{x}) P_i(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (9)$$

Использование в качестве $P_i(\bar{x})$ ортогональных полиномов, какими являются полиномы Лежандра, существенно облегчает нахождение коэффициентов c_i . В частности, увеличение m в (7) путем добавления следующих полиномов оставляет все ранее вычисленные c_i без изменения.

С помощью (3)—(9) нетрудно получить уравнения эквипотенциальных поверхностей в декартовой системе координат (рис. 1).

Для аппроксимирующих полиномов 5-ой степени уравнения являются биквадратными относительно y . Табулирование эквипотенциальных поверхностей (ввиду громоздкости мы не выписываем окончательное выражение для уравнения поверхности $y=y(x)$ [3]) производилось на электронной вычислительной машине. Определялась форма четырех эквипотенциальных поверхностей с потенциалами, соответствующими нижней пластине, нижнему и верхнему краям электронного пучка и верхней пластине.

Параметры пучка, для которых производился расчет, приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ варианта	\bar{l}	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	α
I	4,4	0,8	0,1	0,1	0,33
II	4,4	0,9	0,1	0	0,78
III	1,3	0,8	0,1	0,1	0,80
IV	0,3	0,8	0,1	0,1	0,96
V	0,15	0,8	0,1	0,1	0,98
VI	0,06	0,8	0,1	0,1	0,991
VII	0,03	0,8	0,1	0,1	0,996

В первом столбце таблицы приведены нормированные значения тока пучка \bar{l} . Нормировка производилась следующим образом. Согласно (6),

$$\bar{V} = \frac{V\varepsilon_0}{\rho b(a+b+c)} = \frac{V\sqrt{2\eta V_d} \bar{l} \varepsilon_0}{I} = \frac{1}{\bar{l}}, \quad (10)$$

где V_d — напряжение, соответствующее энергии дрейфа электронов в скрещенных полях в направлении оси z , \bar{l} — нормированная к $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ ширина пучка (размер пучка в направлении оси y). Величина

$$\bar{I} = \frac{I}{V\sqrt{2\eta V_d \bar{l}\epsilon_0}} \quad (11)$$

является нормированным током.

В последнем столбце таблицы 1 указано ослабление напряженности электрического поля на нижней границе пучка относительно соответствующей величины в системе без пучка. Нетрудно найти, что

$$\alpha = 1 - \frac{\bar{b} + 2\bar{c}}{2\bar{V}} = 1 - \frac{\bar{I}}{2} (b + 2c). \quad (12)$$

Введенный коэффициент α характеризует изменения, вносимые электронным пучком в поле системы. Поскольку значения \bar{I} , относящиеся к близким величинам α , не приводят к существенным отличиям в форме электродов, выбор расчетных величин \bar{I} определялся стремлением охватить возможно больший диапазон значений α . Исключения составляют лишь вариант II (пучок проходит непосредственно у анода, т. е. при $c = 0$), для которого расчет выполнен лишь при $\alpha = 78\%$, и варианты V, VI, рассматриваемые для получения плавного перехода от системы с пучком к системе без пучка ($\alpha = 1$).

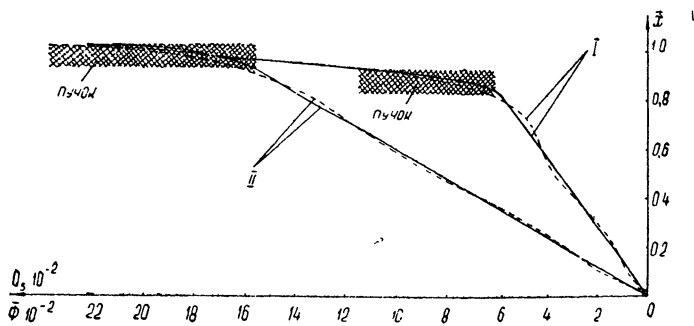


Рис. 2. Сравнение распределений потенциала вдоль края пучка (варианты I и II, табл. 1):

сплошная линия—точные значения, соответствующие $\bar{\Phi}(x)$ (4); пунктирная линия—аппроксимация полиномами Лежандра $Q_5(x)$ (7).

На рис. 2 приведены кривые точных распределений потенциала и аппроксимирующих их полиномов. Наибольшее отклонение $Q_5(x)$ от $\bar{\Phi}(x)$ имеет место в I варианте и составляет в области пучка 9% от значения $\bar{\Phi}(x)$. Это вполне естественно, так как плотность пространственного заряда наибольшая*. В остальных вариантах по мере уменьшения тока отклонение уменьшается до долей процента.

На рис. 3а и 3б приведены профили электродов, построенные по результатам вычислений. Здесь ось x совпадает с боковой (левой) границей пучка, положение которого обозначено заштрихованной полоской. На рисунках римские цифры относятся к вариантам таблицы 1. Арабские цифры соответствуют номеру ветви потенциала (число ветвей на одну превышает степень аппроксимирующего полинома).

Из рассмотрения рисунков легко заметить, во-первых, что с увеличением тока пучка электроды стягиваются к краю пучка и кривизна

* Напомним, что для варианта I ослабление поля α достигает 0,33. Столь интенсивные пучки едва ли практически реализуемы.

их в области, близкой к пучку, возрастает. Во-вторых, по мере уменьшения тока картина распределения эквипотенциалей меняется. Например,

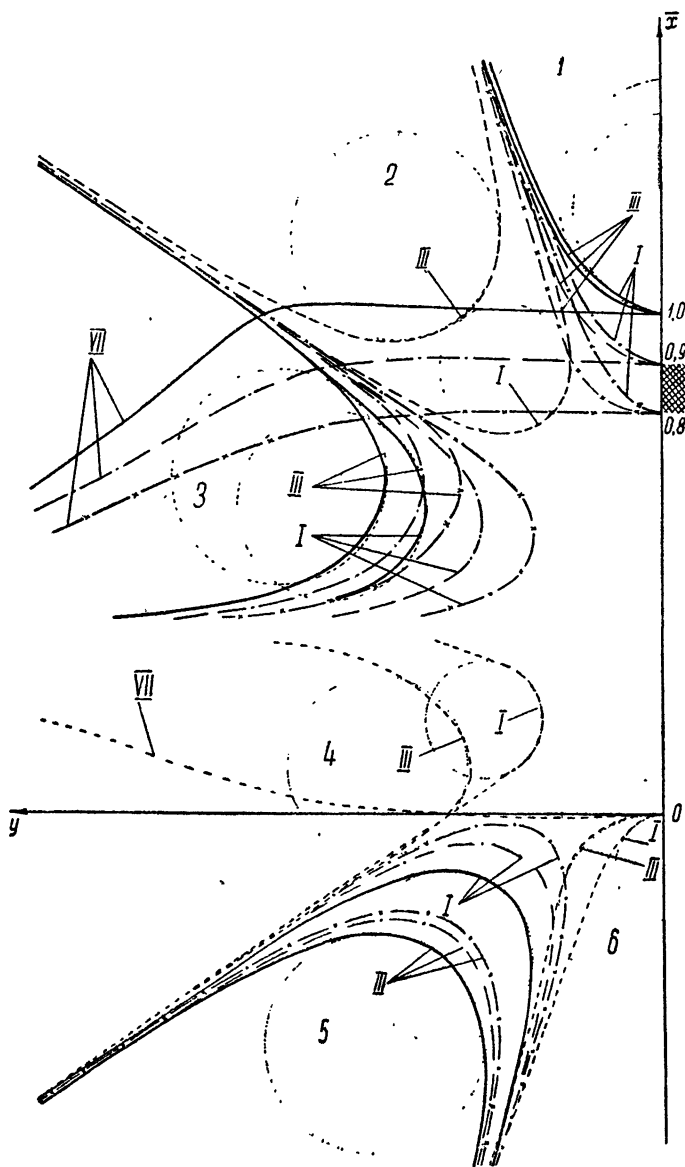


Рис. 3а. Форма эквипотенциальных поверхностей, вычисленная с помощью полиномов $Q_6(x)$ (окружности относятся к упрощенной форме электродов):

сплошная линия—эквипотенциали с потенциалом анода; штрих-пунктирная линия—эквипотенциали с потенциалом верхнего края пучка; пунктирная линия—эквипотенциали с потенциалом нижней пластины; х-х-х—эквипотенциали с потенциалом нижнего края пучка; варианты I, III, VII.

ветви 4 и 6 «вытесняют» ветвь 5, образуя при некотором токе седловую точку. При дальнейшем уменьшении тока пучка нижние части ветвей 4 и 6 смыкаются и отходят вслед за ветвью 5. Верхние части ветвей 4 и 6 также соединяются в один электрод, приближаясь к горизонтальной линии в области, прилегающей к краю пучка (вариант VII). То же

относится и к ветвям 1—3. Заметим, что для малых токов пучка (варианты IV—VII) форма электрода, имеющего потенциал нижней пластины,

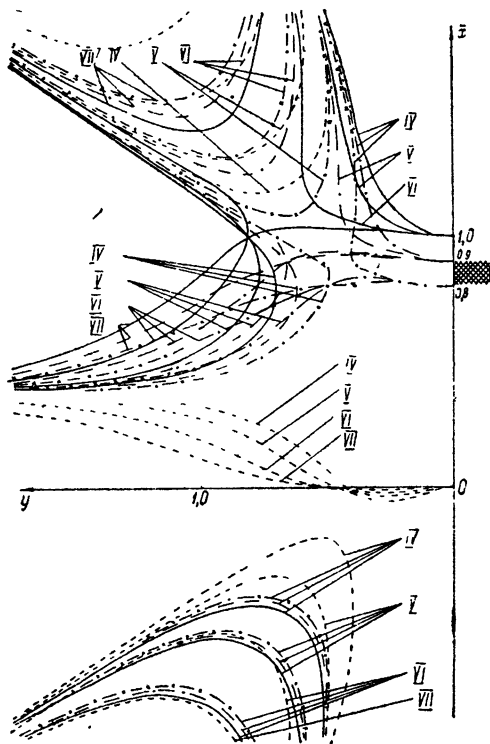


Рис. 36. Форма эквипотенциальных поверхностей, вычисленная с помощью полиномов $Q_5(\bar{x})$ (окружности относятся к упрощенной форме электродов):

сплошная линия—эквипотенциалы с потенциалом анода; штрих-пунктирная линия—эквипотенциалы с потенциалами верхнего края пучка; пунктирная линия—эквипотенциалы с потенциалом нижней пластины; х—х—х—эквипотенциалы с потенциалом нижнего края пучка; варианты IV—VII.

приближается к формам боковых экранов, использующихся в практических конструкциях (ср., например, с рис. 6а [1]). При увеличении тока (варианты I—III) отмеченное сходство утрачивается.

Для вариантов I и III результаты расчета были проверены на элект-

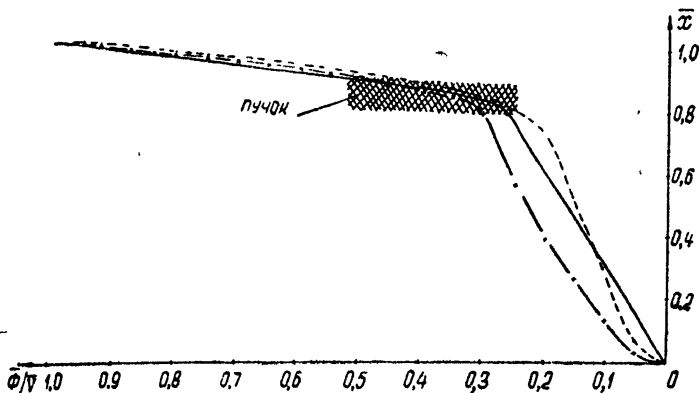


Рис. 4а. Сравнение различных распределений потенциала вдоль края пучка — вариант I:

сплошная линия—точные значения потенциала (4) в относительных единицах $\bar{\Phi}(\bar{x})/\bar{V}$; пунктирная линия—значения потенциала, снятые в электролитической ванне с электродами рассчитанной формы; х—х—х—значения потенциала при цилиндрических электродах (окружности на рис. 3а).

тролитической ванне (рис. 4а и 4б). Измерения проводились на моделях с электродами, соответствующими рис. 3, обычным способом, основан-

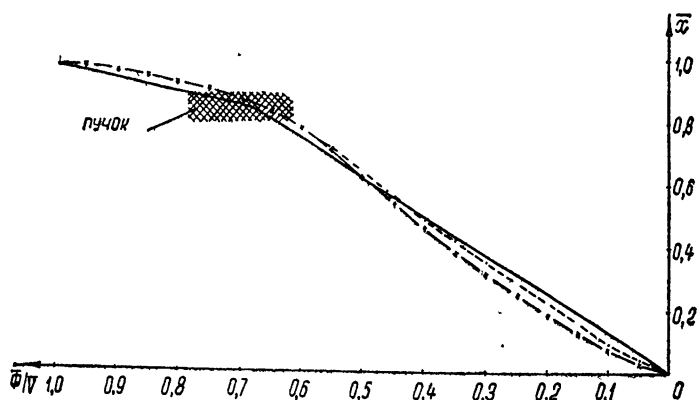


Рис. 4б. Сравнение различных распределений потенциала вдоль края пучка—вариант III:

сплошная линия — точные значения потенциала (4) в относительных единицах $\Phi(\bar{x})/\bar{V}$; пунктирная линия — значения потенциала, снятые в электролитической ванне с электродами рассчитанной формы; х—х—значения потенциала при цилиндрических электродах (окружности на рис. 3а).

ным на использовании диэлектрической пластинки, совмещенной с краем предполагаемого электронного пучка [4]. Сравнение рис. 4а и 2 показывает удовлетворительное совпадение между распределением потенциала, аппроксимированным полиномами Лежандра (пунктирная кривая на рис. 2), и распределением потенциала на краю диэлектрика (пунктир на рис. 4а). Во всех случаях лучше передается распределение потенциала над пучком. Это, по-видимому, объясняется близким расположением электродов, создающих в указанной области относительно большое поле (ветви I и II на рис. 3а), вследствие чего влияние остальных электродов незначительно.

2. УПРОЩЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ БОКОВЫХ ЭКРАНОВ

Согласно рис. 3а и 3б, электроды имеют довольно сложную конфигурацию. Однако в силу свойства неустойчивости задачи Коши для уравнения Лапласа, небольшие изменения формы электродов не должны существенно сказаться на распределении потенциала вдоль края пучка. Можно, например, электроды, соответствующие I и III вариантам (рис. 3а), заменить вписанными в них цилиндрами (см. пунктирные линии). Для реальных конструкций в качестве таких электродов можно использовать штыри с прямолинейной или криволинейной осью. Снятые при этом распределения потенциала вдоль края пучка приведены на рис. 4а и 4б. Наибольшие отклонения их в области пучка от распределений, полученных с рассчитанными в разделе I электродами, составляют для вариантов I и III соответственно 20% и 0,3%. Отклонения от точного хода потенциала составляют 16% и 6% соответственно. Таким образом, когда электроды удалены от края пучка (см. рис. 3а, 3б), указанная замена вполне возможна даже для достаточно больших величин тока пучка.

3. КОРРЕКЦИЯ БОКОВОЙ ФОКУСИРОВКИ ПУЧКА

Каждому из режимов, согласно рис. 3а, 3б, соответствует определенная конфигурация электродов. Однако, варьируя потенциалы электродов, рассчитанных на определенный ток пучка, можно получать распределения потенциала вдоль края пучка, отвечающие набору значений тока. Указанная возможность проиллюстрирована на рис. 5. На этом

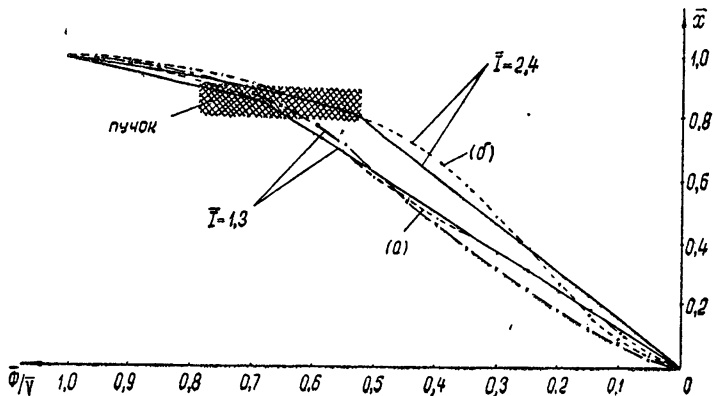


Рис. 5. Сравнение различных распределений потенциала:

сплошная линия — точное распределение потенциала (4); х-х-х — распределение потенциала, снятое в электролитической ванне с цилиндрическими электродами и потенциалами, соответствующими рис. 3а; пунктирная линия — распределение потенциала, снятое в электролитической ванне с теми же электродами, но измененными потенциалами; а) $\bar{V}_3=1,1\bar{V}$; $\bar{V}_4=-0,1\bar{V}$; б) $\bar{V}_3=0,4\bar{V}$; $\bar{V}_4=0$.

рисунке сопоставлено точное распределение потенциала, вычисленного для двух токов ($\bar{I} = 1,3$ и $2,4$) и расположения пучка, соответствующего варианту III таблицы 1, с распределением, снятым в электролитической ванне при цилиндрических электродах, имеющих различный потенциал.

Сравнение кривых на рис. 5 показывает, что путем подбора потенциалов электродов V_3 и V_4 (индексы соответствуют нумерации ветвей рис. 3а), рассчитанных для варианта III ($I = 1,3$), удастся значительно приблизить распределение потенциала к тому, которое соответствует току $\bar{I} = 2,4$ (положение пучка неизменно). Таким образом, если рабочий ток несколько отличается от расчетного, для которого найдена конфигурация электродов, то путем изменения потенциалов боковых электродов представляется возможным в определенных пределах скорректировать боковые границы пучка.

Отметим, что путем корректировки потенциалов боковых электродов удастся исправлять расхождение хода потенциалов, обусловленное заменой расчетных электродов цилиндрическими (рис. 5, кривая а).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Антаков, В. М. Божов, Р. П. Васильев, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 6, 1033 (1960).
2. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалов, Численные методы анализа, Физматгиз, М., 1962.
3. Т. Г. Кочина, Дипломная работа, ГГУ, 1965.
4. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.

ELIMINATING SLIDE DEFOCUSING OF ELECTRON BEAM IN RAY
DEVICES OF MAGNETRON TYPE*T. G. Kochina, Sh. E. Tsimring*

The results of calculating the side electrode geometry of plane magnetron devices of a beam type for several regimes are given. Using an electrolytic bath, the possibility is shown to simplify the shape of electrodes and the electron beam correction.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.372.4

РАЗРЕЖЕНИЕ СПЕКТРА ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА ПО ПРОДОЛЬНЫМ И ПОПЕРЕЧНЫМ ИНДЕКСАМ

В. С. Авербах, С. Н. Власов

В данном сообщении изложены результаты исследования открытого резонатора, состоящего из эшелетта* и зеркала со сложным профилем (рис. 1). Эшелетт со ступеньками высотой λ_0 [1] позволяет во всем диапазоне длин волн $2\lambda_0/3 < \lambda < 2\lambda_0$ выделить колебание с одним продольным индексом q_0 , соответствующим $\lambda = \lambda_0^{**}$. Зеркало со сложным профилем, аналогичное описанному в работе [2], обеспечивало подавление неаксиальных типов колебаний. Дело в том, что углочастотной чувствительности эшелетта не хватает для подавления высших типов колебаний из-за близости их к основной моде***. С другой стороны, применение в резонаторе с эшелеттом сферических зеркал, имеющих существенный разнос по частотам между основным и неаксиальными типами колебаний, ухудшает селекцию по продольному индексу по причинам, которые будут разъяснены ниже.

Эшелетт резонатора был нарезан на круглом диске (диаметр диска 200 мм, ширина ступеньки 15 мм при высоте 8,25 мм) и работал на -1 порядке дифракционного спектра. Второе зеркало (диаметром 200 мм) имело центральную вогнутую (сферическую) часть диаметром 70 мм с радиусом кривизны 100 см, затем плоский пояс шириной 35 мм и конический отгиб 1° , 4. Величина плоской части и угол отгиба подбирались экспериментально на основе соображений, изложенных в [2]. Измерения были произведены в 8 мм диапазоне длин волн по методике, описанной в [3]. Для лучшего возбуждения несимметричной моды отверстия связи в обоих зеркалах были смещены от центра на 30 мм, расстояние от второго зеркала до ближайшей ступеньки эшелетта равнялось 94 мм. На рис. 2 приведена зависимость коэффициента потерь основного типа колебаний от длины волны ($q_0 = 23$) при фиксированном положении эшелетта. На рабочей длине волны $\lambda_0 = 8,25$ мм добротность Q основного типа колебаний была $9 \cdot 10^3$, а добротность следующего за ним $TE_{10} - 7 \cdot 10^2$. Коэффициент передачи последнего ниже более чем на 10 дБ, а другие типы колебаний не просматриваются. Таким образом, наряду с селекцией по продольному числу мы получили хорошую селекцию и по поперечным индексам.

Степень подавления основного типа колебаний при $q \neq q_0$ в резонаторе с эшелеттом определяется чувствительностью резонатора к перекоосу зеркал. В самом деле,

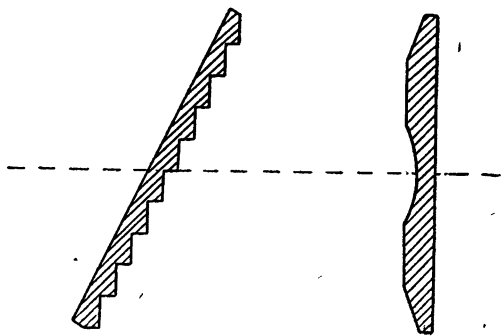


Рис. 1. Общий вид резонатора.

* Впервые обратил внимание на возможность использования эшелеттов в открытых резонаторах С. И. Аверков.

** Заметим, что, поскольку различие частот соседних продольных типов колебаний равно $c/2L$ (L — длина резонатора), то условие выделения одного продольного индекса накладывает при выбранном эшелетте ограничение на длину резонатора сверху.

*** Второе зеркало резонатора, описанного в работе [1], было плоским.

на рабочей частоте луч отражается от эшелетта по тому же направлению, что и падает (перпендикулярно к ступенькам) Для других частот падающий и отраженный лучи образуют угол, определяемый относительным сдвигом частот и углочастотной чувствительностью эшелетта*. Если пренебречь изменениями фазового фронта луча при распространении вдоль эшелетта, то последний эквивалентен плоскому перекошенному зеркалу. Таким образом, эффективное

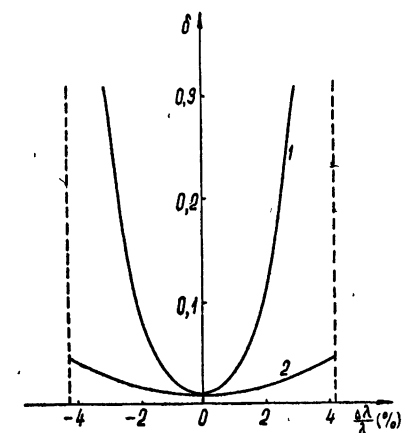


Рис. 2. Зависимость коэффициента потерь $\delta = kL/Q$ основного типа колебаний от расстройки:

1 — резонатор образован эшелеттом и зеркалом со сложным профилем, 2 — резонатор образован эшелеттом и сферическим зеркалом. (Пунктирными прямыми отмечены абсциссы, соответствующие соседним продольным индексам.)

выделение колебания с одним продольным индексом возможно только в резонаторе, в котором потери сильно возрастают при перекосе зеркала Для резонатора, образованного эшелеттом и сферическим зеркалом диаметром 115 мм и радиусом кривизны 70 см, возрастание потерь при отходе от рабочей частоты (рис 2) происходит медленно, и колебания с соседними продольными индексами дискриминируются недостаточно сильно. Проведенные измерения показали, что кривые возрастания потерь при перекосе плоского зеркала в 2-x описанных выше резонаторах качественно совпадают с зависимостями, приведенными на рис 2, если сопоставить углы перекоса зеркала и углы между падающим и отраженным от эшелетта лучами на различных частотах по его углочастотной чувствительности.

Отметим в заключение, что в подобном резонаторе для увеличения рабочего диапазона, в котором выделяется одна частота, может быть использован эшелетт с высотой ступенек, изменяющейся по определенному закону. Подобный отражатель, аналогичный по свойствам неэквидистантной антенной решетке [4], может в простейшем случае состоять из двух половин, отличающихся глубиной канавок.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Е. Л. Косарев, Письма ЖЭТФ, 3, 7, 295 (1966).
- 2 В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 11, 5, 958 (1966)
- 3 В. С. Авербах, Радиотехника и электроника, 11, 4, 757 (1966)
- 4 Ю. М. Жидко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 6, 1144 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 сентября 1966 г.

УДК 621.385.632

ЛВБ-ГЕНЕРАТОР — КВАНТОВАТЕЛЬ ЧАСТОТЫ

С. А. Белевитин, И. Т. Трофименко

Принцип квантования при приеме и обработке слабых радиосигналов за последнее время получает все более широкое распространение. Переход от непрерывно изменяющихся величин к дискретным позволяет использовать цифровую обработку входных сигналов, тем самым устранив некоторые недостатки, присущие системам с непрерывным накоплением, и в сочетании с помехоустойчивыми кодами позволяет реально улучшить чувствительность приемных систем. В качестве примера можно указать на использование бинарного амплитудного квантования при радиолокации астрономических объектов [1], на квантование фазы при фазовых измерениях [2].

* Углочастотная чувствительность есть $\partial\theta/\partial f$, где θ — угол между падающим и отраженным лучами; для нашего эшелетта она равна 40 угловым минутам на 1% изменения частоты.

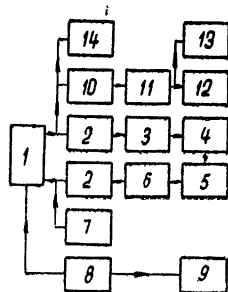
При квантовании на n уровней по одному из параметров принимаемого сигнала (например, по амплитуде, фазе или частоте) приемное устройство необходимо должно включать элемент (квантователь), обладающий n устойчивыми состояниями по соответствующему параметру. Такими элементами могут быть как автоколебательные системы (например, триггеры [3], генераторы с жестким возбуждением, многочастотные (многомодовые) генераторы [4], параметрические генераторы субгармоник [5, 6]), так и неавтоколебательные системы (например, параметрические усилители бегущей волны [7], регенеративные делители частоты и др.)

Определенный интерес в этом смысле представляет экспериментальное изучение ЛБВ-генератора как квантователя частоты при приеме слабых сигналов. Возможность использования такого генератора в качестве элемента частотной памяти исследовалась в работе [4].

Блок-схема установки изображена на рис. 1. Генератор состоит из широкополосного ЛБВ-усилителя 3-см диапазона, волноводной линии задержки длиной ~ 10 м с проходным резонатором и настроечных и развязывающих элементов. Ввод и вывод сигналов осуществляется с помощью направленных ответвителей, а их индикация — на спектроанализаторе. Генератор может самовозбудиться на частотах, на которых выполняются условия $K\beta > 1$, $\Phi = 2\pi m$, где K — коэффициент усиления ЛБВ, β — затухание в тракте обратной связи, Φ — полный набег фазы в кольце обратной связи, включая ЛБВ, m — целое число, номер моды колебаний. При значительной длине линии задержки для больших m частотный интервал между модами можно принять равным $\Delta f \approx 1/\tau$, где τ — время задержки. В зависимости от полосы пропускания селективного элемента генерация может возникать на одной или нескольких модах.

Рис. 1. Блок-схема установки:

1—ЛБВ, 2—ферритовый вентиль, 3—фазовращатель, 4—аттенюатор, 5—селективный элемент, 6—линия задержки, 7—ГСС, 8—модулятор, 9, 12—счетчики импульсов, 10—резонатор, 11—детектор, 13—осциллограф, 14—спектр-анализатор.



Обнаружение сигналов при квантовании с помощью автоколебательной системы осуществляется путем многократного запуска ее и подсчета вероятностей возбуждения разных устойчивых состояний по квантуемому параметру при отсутствии и при наличии сигнала. При этом существенно, чтобы выбор устойчивых состояний определялся в основном начальными условиями в момент запуска генератора, а параметры, определяющие эти устойчивые состояния, были достаточно стабильны. Для генератора-квантователя частоты следует учитывать возможность существования стационарного многочастотного режима [8, 9], крайне нежелательного при подобном способе приема сигналов. В наших экспериментах при специальной, очень критичной настройке удавалось на короткое время получать режим стационарной трехчастотной генерации. Стационарный четырех- (и более) частотный, а также двухчастотный режим не наблюдался никогда при любой форме резонансной кривой селективного элемента.

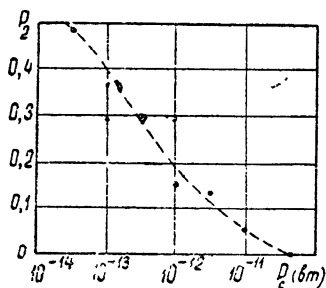


Рис. 2. Вероятность возбуждения моды 12 на частоте f_2 от амплитуды внешнего сигнала на частоте f_1 , близкой к моде 1.

В качестве селективного элемента использовалась система из двух связанных резонаторов, что позволяло получать примерно постоянный коэффициент передачи в кольце обратной связи для нескольких (3—8) мод колебаний; $\Delta f \sim 15$ МГц. Периодический срыв колебаний осуществлялся путем подачи отрицательных импульсов на фокусирующий электрод ЛБВ. Для разделения мод в тракте индикации использовался резонатор с добротностью ~ 2000 . При обработке данных применялась методика, описанная в [10].

* В точной формуле, учитывающей дисперсию в линии задержки, величина Δf зависит от номера моды m [4].

При определенной настройке фазовращателя и аттенюатора в цепи обратной связи и напряжении спирали ЛБВ вероятность возбуждения двух соседних мод устанавливалась равной $1/2$ при отсутствии внешнего синхронизирующего сигнала. При подаче внешнего сигнала в окрестностях этих мод вероятности возбуждения мод изменялись в зависимости от частоты и мощности сигнала (рис 2 и 3). Наиболее сильный эффект наблюдался при совпадении частоты сигнала с одной из мод. Между

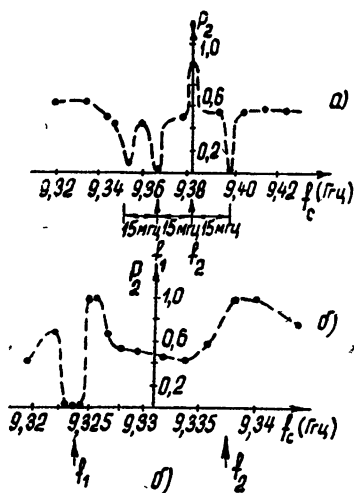


Рис. 3. Вероятность возбуждения моды 2 от частоты внешнего сигнала:

- а) мощность сигнала $P_c \approx 3 \cdot 10^{-14}$ Вт,
 б) $P_c \approx 2 \cdot 10^{-13}$ Вт.

в цепи обратной связи в данном случае невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Бунимович, В. А. Морозов, Радиотехника и электроника, 8, 1873 (1962).
2. В. П. Комолов, Вестник МГУ, сер. 3, № 5 (1966).
3. Л. Н. Лошаков, С. Э. Хайкин, ЖЭТФ, 6, 859 (1936).
4. W. A. Edson, IRE Trans., CT-2, 58 (1955).
5. «Параметроны», сб. переводов, М, ИЛ, 1962.
6. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 770 (1961).
7. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 742 (1962).
8. И. С. Гоноровский, Радиотехника, 13, № 5, 19 (1958).
9. В. В. Анисимов, Дипломная работа, Физич. ф-т МГУ, 1954.
10. С. А. Ахманов, В. П. Комолов, Вестник МГУ, сер. 3 (1962).
11. W. R. Veam, D. J. Blattner, RCA Rev., 17, № 1, 56 (1956).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
4 августа 1966 г.

УДК 621.378.1

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д. В. Гальцов, В. Ч. Жуковский, Ю. А. Коровин, В. Н. Любимов,
Ю. Г. Павленко

В ряде работ [1-3] было показано, что электроны, движущиеся в однородном магнитном поле, могут усиливать внешнее электромагнитное излучение. Этот эффект появляется в ультрарелятивистском случае на гармониках циклотронной частоты ω_c [2]

и в слабoreлятивистском случае на частотах, близких к ним [1]. В нерелятивистском случае имеет место поглощение.

В этой заметке мы покажем, что в неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле, используемом в циклических ускорителях, становится возможным резонансное индуцированное излучение на одной из собственных частот как для релятивистских, так и нерелятивистских энергий электрона.

Компоненты вектор-потенциала магнитного поля в цилиндрических координатах имеют вид

$$A_{\varphi} = \frac{B}{r^{q-1}} \left(\frac{1}{2-q} + \frac{q}{2} \frac{z^2}{r^2} \right), \quad A_r = A_z = 0, \quad 0 < q < 1. \quad (1)$$

Решения уравнения Клейна—Гордона в этом поле хорошо известны (см., например, [4]). При этом собственные значения энергии в предположении малости радиальных и аксиальных колебаний равны

$$E_{lsk} = \left\{ \frac{e_0 c \hbar B}{a^q} \left[\frac{2-q}{1-q} l + (2s+1) \sqrt{1-q} + (2k+1) \sqrt{q} \right] + m^2 c^4 \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где $a = [\hbar c(2-q)/e_0 B(1-q)]^{\frac{1}{2-q}}$ — радиус равновесной орбиты, l, s, k — соответственно орбитальное, радиальное и аксиальное квантовые числа, а частоты переходов ($l, s, k \rightarrow l', s', k'$) в нулевом приближении по \hbar определяются выражением

$$\omega_{if} = \omega_c(l-l') + \omega_s(s-s') + \omega_z(k-k') \quad (3)$$

$$(\omega_c = c\beta/a, \quad \omega_s = \omega_c \sqrt{1-q}, \quad \omega_z = \omega_c \sqrt{q}).$$

Рассмотрим далее дипольные переходы. В этом случае правила отбора и соответствующие частоты переходов имеют вид

$$\begin{aligned} \text{а) } l-l' &= \pm 1, & s-s' &= k-k' = 0, & \omega_{if} &= \pm \omega_c, \\ \text{б) } l-l' &= \pm 1, & s-s' &= \mp 1, & k-k' &= 0, & \omega_{if} &= \pm \omega_q = \pm (\omega_c - \omega_s), \\ \text{в) } l-l' &= \pm 1, & s-s' &= \pm 1, & k-k' &= 0, & \omega_{if} &= \pm (\omega_c + \omega_s), \\ \text{г) } l-l' &= s-s' = 0, & k-k' &= \pm 1, & \omega_{if} &= \pm \omega_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Случай 4а при $q = 0$ исследовался в работах [1-3, 8, 9], а для неоднородного поля ($q \neq 0$) в [5], и была показана возможность усиления внешнего излучения на частоте ω_c и ее гармониках. В случаях в и г возможно только поглощение. Рассмотрим случай б. При взаимодействии электрона с внешней электромагнитной волной частоты $\omega \simeq \omega_q$ электрон может поглотить квант и перейти в состояние с квантовыми числами $l'' = l + 1, s'' = s - 1, k'' = k$ или испустить квант и перейти в состояние $l' = l - 1, s' = s + 1, k' = k$. Реально наблюдаемой величиной является разность поглощенной и излученной мощностей, которая в случае линейно поляризованной волны (вектор напряженности электрического поля E_0 лежит в плоскости орбиты) равна

$$P(\omega) = - \frac{e_0^2 c^2}{8E} \frac{\omega_c E_0^2}{\omega} \sqrt{1-q} \left(\frac{q}{1-q} \right)^2 \frac{\Delta\omega_L}{(\omega - \omega_q)^2 + \Delta\omega_L^2}, \quad (5)$$

где $\Delta\omega_L$ — эффективная ширина линии.

Таким образом, излучение на частоте $\omega_q = \omega_c - \omega_s$ преобладает над поглощением ($P < 0$), что указывает на существование в рассматриваемой системе мазерного эффекта. Отметим, что максимальное значение мощности (5) достигается при резонансе. Существенно, что эффект сохраняется как при нерелятивистских, так и при релятивистских энергиях электрона, причем в последнем случае возможно также излучение и гармоник основной частоты ω_q . Формула (5) не содержит \hbar и, следовательно, может быть получена, исходя из классической теории. Действительно, классические уравнения движения в параболическом приближении (в котором, собственно, была получена формула (2)) аналогичны уравнениям движения электронов в аксиально-симметричных полях (см. [6]), и в случае, когда частота внешней волны $E_0 = (E_0 \cos(\omega t + \delta), 0, 0)$ близка к ω_q , решение этих уравнений для вынужденных колебаний в цилиндрических координатах имеет вид

$$r = a + \rho_0 \sin(\omega_s t + \delta) + \rho^{(1)}; \quad (6)$$

$$i\varphi = \omega_c t + \frac{\rho_0 \omega_c}{a \omega_s} \cos(\omega_s t + \delta) + \varphi^{(1)}, \quad (7)$$

где

$$\rho^{(1)} = \frac{e_0(\omega_s - \omega/2)}{m[\omega_s^2 - (\omega - \omega_c)^2]} \{ \cos(\omega_s t - \delta) - \cos[(\omega_c - \omega)t - \delta] \},$$

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\omega_c}{a} \rho^{(1)}.$$

Мощность поглощения вычисляется по формуле

$$P(\omega, t) = -e_0(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) E_0 \cos(\omega t + \delta). \quad (8)$$

Усредняя последнее выражение, согласно [7], по фазам и времени, получим формулу (5). Таким образом, используя неоднородное поле с показателем спадания $q \sim 3/4$ можно, по-видимому, построить интенсивный источник, излучающий в сантиметровом диапазоне, что представляет значительный интерес, поскольку первые эксперименты по созданию лазера в однородном магнитном поле уже проведены [8, 9].

Авторы благодарят А. А. Соколова и И. М. Тернова за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schneider, Phys. Rev. Lett., **2**, 504 (1959)
2. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН СССР, **166**, 1332 (1966).
3. А. В. Гапонов, В. К. Юлпатов, Радиотехника и электроника, **7**, № 4, 631 (1962).
4. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ЖЭТФ, **25**, 698 (1953).
5. А. А. Соколов, В. Ч. Жуковский, Ю. А. Коровин, ЖЭТФ, **51**, 1829 (1966).
6. В. М. Боков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 831 (1959).
7. Ю. Г. Павленко, Д. В. Гальцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 1232 (1966).
8. J. L. Hirshfield, J. M. Wachtel, Phys. Rev. Lett., **12**, 533 (1964).
9. А. В. Гапонов, А. А. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма ЖЭТФ, **2**, № 9, 430 (1965).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
20 июля 1966 г.

УДК 621.385.632

О ВЛИЯНИИ НЕПРЕРЫВНОГО ТОКОСЕДАНИЯ ВДОЛЬ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ НА УСИЛЕНИЕ ЛАМПЫ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

А. Ф. Голубенцев, Л. М. Минкин

Изучению влияния токооседания на усиление лампы бегущей волны (ЛБВ) посвящены работы [1, 2]. В этих работах исследуется усиление ЛБВ в режиме так называемого «равномерного и непрерывного токоперехвата» [2], что соответствует экспоненциальному закону изменения тока луча, хотя, по-видимому, характер токопротождения существенно зависит от типа замедляющей системы, а также способа формирования и сопровождения электронного потока. Ниже развивается метод расчета усиления ЛБВ, позволяющий решить задачу о влиянии токооседания в случае произвольного изменения тока луча вдоль замедляющей системы. Метод основывается на сведениях нормальной системы дифференциальных уравнений, описывающей работу ЛБВ в режиме непрерывного токооседания, к системе интегральных уравнений типа Вольтерра с последующим применением метода последовательных приближений. В качестве нулевого приближения используется решение задачи о ЛБВ без токооседания, что позволяет наиболее полным образом применить всю предварительную информацию о задаче. Это кажется тем более естественным, что практический интерес представляют как раз режимы с малым токооседанием.

В работе [2] используется сведения системы дифференциальных уравнений, описывающих работу ЛБВ с учетом токооседания, к одному нелинейному интегральному уравнению относительно неизвестной функции $I(z)$, называемому в работе «дисперсионным». Для решения уравнений этого типа, вообще говоря, не существует регулярных методов, и решение, предложенное автором, в значительной мере основывается

на интуиции. При законах токооседания, отличных от экспоненциального, использование метода работы [2] приводит к почти непреодолимым математическим трудностям. В связи с изложенным представляется интерес применение для этой цели развиваемого в настоящем сообщении метода последовательных приближений, одна из возможных модификаций которого использована в [1] для учета влияния токооседания на работу ЛБВ при экспоненциальном изменении постоянной слагающей тока луча.

В линейном режиме при отсутствии токооседания можно представить преобразование входных значений комплексных амплитуд напряжения $u(0)$, кинетического потенциала $v(0)$ и тока $i(0)$ в матричной форме:

$$x(N) = K(N) x(0), \quad (1)$$

где N — электрическая длина лампы, $K(N)$ — матрица передачи ЛБВ, $x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ i \end{pmatrix}$ — матрица-столбец, а $x(0)$ и $x(N)$ определяют матрицу x на входе и выходе ЛБВ.

Рассмотрим преобразование матрицы-столбца x на отрезке лампы малой длины ΔN . Тогда изменением постоянной слагающей тока вследствие токооседания можно пренебречь, что позволяет записать (1) в виде

$$x(N + \Delta N) = K(\Delta N) x(N). \quad (2)$$

Матрица $K(\Delta N)$ при равных нулю параметрах Пирса b, d, QC имеет вид

$$K(\Delta N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -j\pi R_{св} \Delta N \\ 2j\pi \Delta N & 1 & 0 \\ 0 & j\pi \frac{\Delta N I(N)}{V_0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь V_0 — напряжение луча, $R_{св}$ — сопротивление связи замедляющей системы, $I(N)$ — постоянная слагающая тока в сечении, имеющем электрическую длину N , j — мнимая единица.

Переходя в соотношении (2) к пределу при $\Delta N \rightarrow 0$, получим нормальную систему дифференциальных уравнений, описывающую работу ЛБВ:

$$\frac{dx}{dN} = A(N) x, \quad (3)$$

где

$$A(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j\pi R_{св} \\ 2j\pi & 0 & 0 \\ 0 & j\pi \frac{I(N)}{V_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем (3) в виде $dx/dN = A(0)x + [A(N) - A(0)]x$ и сведем это уравнение к матричному уравнению типа Вольтерра:

$$x(N) = \exp[A(0)N] x(0) + \int_0^N \exp[A(0)(N-t)] \{A(t) - A(0)\} x(t) dt. \quad (4)$$

Беря в качестве нулевого приближения $\varphi_0 = \exp[A(0)N]x(0)$ (нулевое приближение описывает работу ЛБВ без токооседания), получим для первого приближения простое выражение

$$x(N) = \left\{ \exp[A(0)N] + \int_0^N \exp[A(0)(N-t)] [A(t) - A(0)] \exp[A(0)t] dt \right\} x(0). \quad (5)$$

Из матричного соотношения (5) легко находится первый элемент матрицы $x(N)$, представляющий напряжение на выходе ЛБВ, что дает возможность определить коэффициент усиления ЛБВ с учетом токооседания:

$$G = 20 \lg \left| \left\{ k_{11}(N) + \int_0^N k_{13}(N-t) k_{21}(t) z(t) dt \right\} \right|,$$

где $z(t) = j \frac{\tilde{z}}{V_0} [I(t) - I(0)]$, k_{11} , k_{13} , k_{21} — элементы матрицы передачи ЛБВ. Подстав-

ля значения k_{11} , k_{15} , k_{21} , взятые в асимптотическом приближении при $b = d = QC = 0$, получим

$$G = -9,54 + 47,26 C_0 N + 10 \lg \left\{ \left[1 - 1,81 C_0 \int_0^N (1 - I(t)/I(0)) dt \right]^2 + 1,1 C_0^2 \left[\int_0^N (1 - I(t)/I(0)) dt \right]^2 \right\}. \quad (6)$$

Полагая, что постоянная составляющая тока меняется по какому-либо из трех законов: а) $I(N) = I(0) \exp(-\alpha N)$, б) $I(N) = I(0) (1 - pN)$, в) $I(N) = I(0) (1 - qN^2)$, и подставляя в каждом заданном случае выражение для $I(N)$ в (6), найдем коэффициент усиления ЛБВ соответственно для экспоненциального, линейного и параболического законов изменения тока луча:

$$G = -9,54 + 47,26 C_0 N + 10 \lg \left\{ \left[1 - 1,81 C_0 \left(N - \frac{1 - \exp(-\alpha N)}{\alpha} \right) \right]^2 + 1,1 C_0^2 \left(N - \frac{1 - \exp(-\alpha N)}{\alpha} \right)^2 \right\}; \quad (7)$$

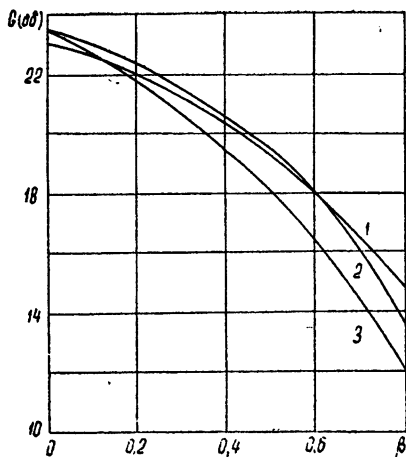
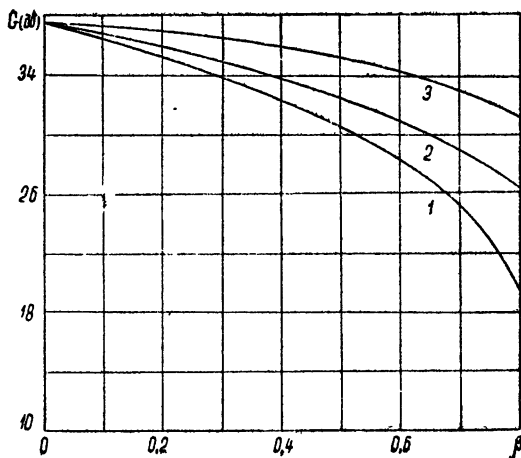


Рис. 1. Зависимость коэффициента усиления от интегрального коэффициента токооседания при экспоненциальном законе изменения постоянной слагающей тока луча вдоль замедляющей системы ($C_0 = 0,02$, $N = 35$, $b = d = QC = 0$):

1—по результатам работы [1], 2—по результатам работы [2], 3—по формуле (7).

Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления ЛБВ от интегрального коэффициента токооседания ($C_0 = 0,02$, $N = 50$, $b = d = QC = 0$) при различных законах изменения постоянной слагающей тока луча вдоль замедляющей системы:

- 1— $I(N) = I(0) \exp(-\alpha N)$,
2— $I(N) = I(0) (1 - pN)$,
3— $I(N) = I(0) (1 - qN^2)$.



$$G = -9,54 + 47,26 C_0 N + 10 \lg \{ [1 - 0,9 C_0 p N^3]^2 + 0,27 C_0^2 p^2 N^4 \}; \quad (8)$$

$$G = -9,54 + 47,26 C_0 N + 10 \lg \{ [1 - 0,6 C_0 q N^3]^2 + 0,12 C_0^2 q^2 N^6 \}. \quad (9)$$

На рис. 1 представлена зависимость коэффициента усиления ЛБВ от интегрального коэффициента токооседания $\beta = 1 - I(N)/I(0)$ для экспоненциального закона изменения тока луча в области пространства взаимодействия при $C_0 = (I(0) R_{св}/4 V_0)^{1/3} = 0,02$ и $N = 35$. На рис. 2 изображена зависимость коэффициента усиления ЛБВ от интегрального коэффициента токооседания для различных законов изменения постоянной слагающей тока луча (вычисления проведены по формулам (7), (8), (9) при $C_0 = 0,02$ и $N = 50$).

Представленный линейный анализ расчета усиления ЛБВ в режиме распределенного токооседания позволяет найти коэффициент усиления для произвольного закона изменения тока луча в области пространства взаимодействия.

Полученные результаты удовлетворительно согласуются с известными литературными данными, относящимися к случаю экспоненциального уменьшения тока луча.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Будникова, Н. И. Сеницын, В. Н. Шевчик, Изв. высш. уч. зав.—Раднотехника, 7, № 2, 131 (1964).
2. А. И. Штыров, Радиотехника и электроника, 9, № 7, 1223 (1964).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
15 июля 1966 г.