

СОДЕРЖАНИЕ

Маханьков В. Г. О колебаниях ограниченной (цилиндрической) плазмы с горячим электронным током	455
Яковенко В. М. О спектре потенциальных колебаний в неоднородной плазме	461
Григорьев Г. И. Расплывание перемещающихся возмущений и их влияние на высотно-частотные характеристики ионосферы	466
Басов Н. Г., Ораевский А. Н., Страховский Г. М. Возможность наблюдения двухфотонного резонанса	473
Шахов В. О. Экспериментальные исследования воздействия постоянных электрических полей, вводимых в резонатор, на работу молекулярного генератора	477
Зачепицкая Л. П., Клибанова И. М. Влияние фликкерных флуктуаций емкости на случайный набег фазы автогенераторов	482
Белянцев А. М., Долин Л. С., Савельев В. А. О распространении световых импульсов малой длительности в мутной среде	489
Комиссаров В. М. Поле точечного излучателя в плоскослоистой среде со случайной неоднородностью	498
Барсуков К. А., Нарышкина Л. Г. Об излучении заряда, движущегося над плоской границей диэлектрика с анизотропной проводимостью	509
Казанцев Ю. Н. Расчет характеристик открытых резонаторов	518
Васильев Е. Н., Малушкин Г. Д. Распределение тока на цилиндре средней толщины	530
Литвак А. Г., Таланов В. И. Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах	539
Брусин И. Я., Емелин В. В., Зверев В. А., Любина А. Г., Маркус Ф. А., Черемухин А. М. Некоторые особенности дифракции волн на структуре с линейной частотной модуляцией	553
Белов В. Е., Родыгин Л. В. К статической теории цилиндрического магнетрона I. Бидромические состояния	562
Савельев В. С. Взаимодействие цилиндрической волны с радиально расходящимся электронным потоком	575
 Краткие сообщения и письма в редакцию	
Иванова Г. К., Леонов А. М. Измерение интенсивности второй гармоники света при отражении от серебра	582
Миловский Н. Д. Об учете поглощения в стационарном режиме регенеративного ОКУ бегущей волны	583
Шахов В. О. Об одном способе изменения добротности линий в молекулярном генераторе	584
Генкин В. Н., Меднис П. М. О собственных электродипольном и квазиорбитальном магнитном моментах электрона проводимости	585
Спангёнберг Е. Е., Эткин В. С. Экспериментальное наблюдение функции распределения флуктуаций в вырожденной параметрической системе	587
Бахрах Л. Д., Соболев Г. А., Фридман Г. Х. Получение голограмм трехмерных объектов	589

Информация

Аннотации статей, помещенных в ж «Геомагнетизм и аэрономия», т. VI, № 6, 1966 г.

591

УДК 533.951

О КОЛЕБАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ (ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ) ПЛАЗМЫ С ГОРЯЧИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ТОКОМ

B. Г. Маханьков

Рассмотрены колебания ограниченной цилиндрической плазмы с горячим электронным током. Дисперсионное уравнение получено для случая, когда дебаевский радиус электронов значительно больше поперечного размера системы. В предположении зеркального отражения получены условия возбуждения и инкременты для различных типов колебаний. Ионы предполагаются холодными.

1. В работах [1,2] в линейном приближении исследуется устойчивость ограниченной холодной плазмы с пучком как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля. Однако, несмотря на указание в [1]*, до последнего времени вопрос о правильных граничных условиях оставался открытым. В недавних работах Михайловского и Пашицкого [3] и автора [4] были получены правильные граничные условия для различных типов колебаний, справедливые, однако, для холодной плазмы. Представляет интерес исследовать спектр колебаний цилиндрической плазмы с пучком в случае больших температур, когда дебаевский радиус экранирования много больше поперечного размера системы. Будем решать задачу на основе кинетического уравнения Власова, хотя нужно отметить, что вопрос о применимости уравнения Власова к системам с размерами, меньшими дебаевской длины, детально не исследован.

Решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f^a}{\partial t} + v \frac{\partial f^a}{\partial r} - \frac{e_a}{m_a} \left(E + \frac{1}{c} [vH] \right) \frac{\partial f^a}{\partial v} = 0 \quad (1.1)$$

для возмущений вида $\exp[-i(\omega t - k_z z - n\vartheta)]$ в линейном приближении с учетом граничных условий

$$\begin{aligned} \delta f_{(-)}^a &= p \delta f_{(+)}^a |_{\rho=a} \quad (0 < p \leq 1), \\ \delta f_{(-)}^a &= \delta f_{(+)}^a |_{\rho=0}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\delta f_{(-)}^a(-v_p, v_\theta, v_z)$ и $\delta f_{(+)}^a(v_p, v_\theta, v_z)$ — возмущения функции распределения, a — радиус системы, имеет вид

$$\begin{aligned} \delta f_{(+)}^a &= \frac{1}{v_p \Delta} \left\{ \int_0^a A^+ \exp \left[-i \frac{\omega'}{v_p} (\rho_1 - \rho + a) \right] d\rho_1 + \right. \\ &+ p \int_p^a A^+ \exp \left[-i \frac{\omega'}{v_p} (\rho_1 - \rho - a) \right] d\rho_1 + \left. \int_0^a A^- \exp \left[i \frac{\omega'}{v_p} (\rho_1 + \rho - a) \right] d\rho_1 \right\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

* В [1] правильные граничные условия для холодной цилиндрической плазмы с пучком получены в случае аксиально симметричных возмущений.

$$\delta f_{(-)}^{\alpha} = -\frac{1}{v_p \Delta} \left\{ \int_0^a A^- \exp \left[i \frac{\omega'}{v_p} (\rho_1 - \rho - a) \right] d\rho_1 + p \int_0^a A^- \exp \left[i \frac{\omega'}{v_p} (\rho_1 - \rho + a) \right] d\rho_1 + p \int_0^a A^+ \exp \left[-i \frac{\omega'}{v_p} (\rho_1 + \rho - a) \right] d\rho_1 \right\}.$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} A^{\pm} = & \frac{e_a}{m_a} \left[\mp E_p \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_p} - E_{\vartheta} \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_{\vartheta}} - E_z \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_z} \pm \frac{1}{c} (v_z H_{\vartheta} - \right. \\ & \left. - v_{\vartheta} H_z) \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_p} \pm \frac{1}{c} \left(v_p H_z \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_{\vartheta}} - v_z H_p \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_{\vartheta}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + v_{\vartheta} H_p \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_z} - v_p H_{\vartheta} \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_z} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\omega' = \omega - k_z v_z - \frac{n}{\rho} v_{\vartheta}, \quad \Delta = p \exp \left(i \frac{\omega'}{v_p} a \right) - \exp \left(-i \frac{\omega'}{v_p} a \right).$$

Возьмем функцию распределения стационарного состояния в виде

$$f_0^{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2} v_{\parallel \alpha} v_{\perp \alpha}^2} \exp \left[-\frac{v_p^2 + v_{\vartheta}^2}{2v_{\perp \alpha}} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_z - u_{\alpha}}{v_{\parallel \alpha}} \right)^2 \right] \quad (1.5)$$

$$(v_{\perp \alpha} = \sqrt{T_{\perp \alpha}/m_{\alpha}}, \quad v_{\parallel \alpha} = \sqrt{T_{\parallel \alpha}/m_{\alpha}}).$$

Учитывая, что $r_{De} \gg a$ или $v_{Te}/\omega_{0e} \gg a$ (где $\omega_{0e}^2 = 4\pi N_e e^2/m_e$), получим

$$\frac{\omega'}{v_p} (\rho_1 - \rho - a) \ll 1. \quad (1.6)$$

Здесь нужно различать два случая: 1) $n \neq 0$, тогда $\omega' = -(k_z v_z + v_{\vartheta} n / \rho)$ и в этом приближении неустойчивых решений появиться не может, так как из дисперсионного уравнения выпадают члены $\sim \omega$ (неустойчивые решения появляются в следующем порядке разложения по $(\omega a / nv_{\vartheta})$); 2) $n = 0$, $k_z \neq 0$. Этот случай дает нетривиальный результат даже в нулевом порядке разложения по $(\omega a / v_T)$. Поэтому в дальнейшем мы им и ограничимся.

Учитывая первые неисчезающие члены по этому малому параметру, получим вместо (1.3) (полагая $p = 1$, зеркальное отражение)

$$\delta f_{(+)}^{\alpha} = \delta f_{(-)}^{\alpha} = -\frac{i}{2\omega' a} \int_0^a (A^+ + A^-) d\rho_1 = \frac{ie}{m\omega' a} \frac{\partial f_0^{\alpha}}{\partial v_z} \int_0^a E_z d\rho_1. \quad (1.7)$$

При этом система уравнений Максвелла может быть приведена к виду (см. [1,2,4])

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dE_z}{d\rho} \right) + \left(\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_z = \frac{\epsilon - k_z^2 c^2 / \omega^2}{\epsilon} \frac{4\pi e^2 \omega}{mac^2} \int_0^a \epsilon_{33} E_z d\rho_1, \quad (1.8)$$

$$\sigma'_{33} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v \partial f_0^1 / \partial v}{\omega - k_z v} dv,$$

где $\epsilon = 1 - \omega_0^2 / \omega^2$ (плазма холодная, пучок горячий).

Ищем решение (1.8) в виде

$$E_z = A I_0(\alpha\rho) + B, \quad \alpha^2 = k_z^2 - \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Тогда

$$E_z^I = A_1 \left\{ I_0(\alpha\rho) + \frac{\sigma_{33}}{\epsilon - \sigma_{33}} \frac{1}{a} \int_0^a I_0(\alpha\rho) d\rho \right\} \quad (\rho < a),$$

$$E_z^{II} = A_2 K_0(\mu\rho) \quad (\rho > a),$$

$$\mu^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\omega_0^2}{\omega} \sigma'_{33}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (в данном случае сводящимся к непрерывности тангенциальных составляющих полей E и H), получим дисперсионное уравнение

$$\alpha K_1(\mu a) \left[I_0(\alpha a) + \frac{\sigma_{33}/a}{\epsilon - \sigma_{33}} \int_0^a I_0(\alpha\rho) d\rho \right] + \mu \epsilon I_1(\alpha a) K_0(\mu a) = 0. \quad (1.9)$$

2. Будем рассматривать систему, состоящую из покоящихся холодных ионов и потока горячих электронов.

Уравнение (1.9) легко исследовать в двух предельных случаях $\alpha a \gg 1$ и $\alpha a \ll 1$. В первом случае, используя асимптотику функций Бесселя, получим

$$\alpha a + \frac{\sigma_{33}}{\epsilon - \sigma_{33}} + \epsilon \mu a = 0, \quad (2.1)$$

что с точностью до членов порядка $1/\alpha a$ совпадает с дисперсионным уравнением продольных колебаний в неограниченной плазме, у которых

$$\begin{aligned} k_{\perp} &= 0, \quad 0 = [kz], \\ \epsilon - \sigma_{33}(\omega, k_z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это уравнение подробно исследовано (см., например, [5]). Нужно отметить только, что условие возбуждения ленгмюровских волн в пределе $\alpha a \gg 1$ сводится к неравенству $\omega_0 a \gg \mu$ или $v \gg \beta^2$ (v — «погонный электрон»). Кроме того, с учетом членов порядка $1/\alpha a$ (2.1) дает поверхность ионную волну

$$\epsilon + \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{33} - \epsilon} \frac{1}{\mu a} \quad (2.3)$$

с частотой $\omega \sim \omega_0(1 + \alpha/k_z a)/\sqrt{2}$ и $\propto \sim 1$.

Во втором предельном случае $\alpha a \ll 1$ приходим к уравнению

$$1 + \frac{\sigma_{33}}{\epsilon - \sigma_{33}} + \frac{\epsilon}{2} (\mu a)^2 \ln \frac{2}{\epsilon \mu a} = 0, \quad (2.4)$$

где κ — несущественный коэффициент порядка единицы. Обозначая $\mu a = x$ и $x^2 \ln \sqrt{1/x} x = y \ll 1$, получим

$$1 + y(\epsilon - \sigma_{33}) = 0. \quad (2.5)$$

Из (2.5) легко найти для $k_z r_D \ll 1$

$$\omega^2 = \omega_{0e}^2 y (1 - \omega_{0e}^2 y / k_z^2 u^2)^{-1/2}. \quad (2.6)$$

Используя условие возбуждения $k_z u < \sqrt{y} \omega_{0e}$, получим

$$k_z < \frac{\kappa}{a} \exp\left(-2 \frac{u^2}{\omega_{0e}^2 a^2}\right) \quad (2.6a)$$

и

$$\operatorname{Im} \omega|_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m}{M} \frac{N_i}{N_e} \right)^{1/3} \frac{\omega_0 \kappa}{a} \exp(-2u^2/\omega_{0e}^2 a^2).$$

Из условия $k_z a \ll 1$ далее получим $\omega_{0e}^2 a^2 / 2u^2 < 1$ или

$$v < 2\beta^2. \quad (2.7)$$

Таким образом, нетрудно видеть, что аксиально-симметричные возмущения задавлены для не слишком плотной плазмы, удовлетворяющей условию (2.7). Об азимутальных возмущениях можно сказать только, что инкременты должны быть пропорциональны $\omega_{0e} a / v_{\perp e}$.

3. Следует отметить, что незатухающие решения уравнения (2.2), соответствующие распространению ленгмюровских волн, имеют место только в случае сильной анизотропии электронных температур, когда

$$T_{\perp}^{(e)} \gg T_{\parallel}^{(e)} + \frac{mu^2}{2}. \quad (3.1)$$

Действительно, условие малости поперечного размера по сравнению с дебаевским радиусом есть

$$\frac{\omega_{0e} a}{v_{\perp e}} \ll 1, \quad (3.2)$$

дисперсионное уравнение (2.2) получено в предположении $\alpha a \simeq k_z a \gg 1$, а распространение ленгмюровских волн возможно при

$$\left| \frac{\omega - k_z u}{k_z v_{\parallel e}} \right| \gg 1 \text{ или } T_{\parallel}^{(e)} \ll \frac{mu^2}{2}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что инкремент возбуждения максимальен, когда $k_z u \simeq \omega_{0e}$, получим

$$\frac{\omega_{0e}}{k_z v_{\parallel e}} \gg \frac{\omega_{0e} a}{v_{\parallel e}} \gg 1. \quad (3.4)$$

Используя далее соотношения $k_z \leq \omega_{0e}/u$ и $k_z a \gg 1$, легко прийти к неравенствам

$$\frac{\omega_{0e} a}{u} \gg k_z a \gg 1. \quad (3.5)$$

Из неравенств (3.2), (3.4) и (3.5) следует условие (3.1).

Мы исследовали уравнение (1.9) в двух предельных случаях, соответствующих электронному потоку большой (уравнение (2.2)) и малой (уравнение (2.7)) плотностей. В промежуточной области, в которой $k_z a \sim 1$, уравнение (1.9) можно привести к виду (в предположении $mu^2/2 \gg T_{\parallel}^e$)

$$a_1 - \frac{\omega_{0e}^4}{\omega^4} - a_2 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} + a_3 = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{I_1(k_z a) K_0(k_z a)}{I_0(k_z a) K_1(k_z a) + I_1(k_z a) K_0(k_z a)}, \\ a_2 &= 2a_1 - a_1 \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2} + \frac{I_0(k_z a) K_1(k_z a)}{I_0(k_z a) K_1(k_z a) + I_1(k_z a) K_0(k_z a)}, \\ a_3 &= 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2} \left(a_1 + \frac{I_0(k_z a) K_1(k_z a) - \frac{1}{a} \int_0^a I_0(k_z \rho) K_1(k_z a) d\rho}{I_0(k_z a) K_1(k_z a) + I_1(k_z a) K_0(k_z a)} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что (3.6) имеет неустойчивые решения при

$$\frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2} > \min \left\{ 2 + \frac{A}{A_2}, \frac{A + A_2}{A - A_1 + A_2} \right\} \quad (3.7)$$

и

$$\frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2} \left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{1}{2} - \frac{\omega_{0e}^2}{k_z^2 u^2} \right) > \frac{1}{4} \frac{A^2}{A_2^2}, \quad (3.8)$$

где

$$A = a K_1(k_z a) I_0(k_z a),$$

$$A_1 = \int_0^a K_1(k_z a) I_0(k_z \rho) d\rho,$$

$$A_2 = a I_1(k_z a) K_0(k_z a).$$

Условия (3.7) и (3.8) получены из решения биквадратного уравнения (3.6), которое есть

$$\frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} = \frac{1}{2a_1} \left[a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3} \right].$$

В первом предельном случае $k_z a \gg 1$ имеем $A = A_2$, $(A_1/A) \sim (k_z a)^{-1}$ и (3.6) переходит в уравнение (2.2), полученное в высокочастотном пределе $|\omega - k_z u| \gg k_z v_{\parallel e}$. Аналогично получается второй предельный случай $k_z a \ll 1$ из общих соотношений (3.7) и (3.8). Условие возбуждения (3.6) перейдет в (2.6а). Из этих же общих соотношений при $k_z a \sim 1$ легко получить по порядку величины

$$\frac{\omega_{0e} a}{u} \gtrless 1, \quad (3.9)$$

поэтому даже в промежуточной области $k_z a \sim 1$ условие (3.1) сохраняется. Совершенно так же может быть исследовано уравнение (1.9) в предположении $mu^2 \ll T_{\parallel}^e$.

Автор признателен В. И. Курилко и товарищам по работе за плодотворные дискуссии, а также А. Г. Бонч-Осмоловскому, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Горбатенко, сб. Физика плазмы, 1, изд. АН УССР, Киев, 1962.
2. В. Г. Маханьков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 5, 941 (1963).
3. А. Б. Михайловский, Э. А. Пашинский, ЖЭТФ, 48, 1787 (1965).
4. В. Г. Маханьков, ЖТФ, 36, № 10, 1752 (1966).
5. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М., 1961.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
20 июня 1966 г.

ON OSCILLATIONS OF CONFINED (CYLINDRIC) PLASMA WITH HOT ELECTRON CURRENT

V. G. Makhan'kov

Oscillations of a confined cylindric plasma with hot electron current have been considered. The dispersion equation has been obtained for the case when Debye radius is far more than the transverse size of the system. The excitation conditions and increments for different types of oscillations are obtained under the assumption of mirror reflection. The ions are assumed to be cold.

УДК 533.951

О СПЕКТРЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

B. M. Яковенко

В работе найден спектр и исследовано затухание электромагнитных колебаний, возникающих на резкой границе двух сред с различными электрическими свойствами. Показано, что при наличии дрейфа заряженных частиц через границу возможно усиление колебаний.

При взаимодействии волн с квазинейтральным потоком заряженных частиц, проходящим через границу раздела двух сред с различными диэлектрическими свойствами, возможно усиление этих волн. Физика явления заключается в том, что частицы при пересечении границы излучают электромагнитные волны в очень широкой области частот со строго определенной поляризацией (переходное излучение). Если на границу падает электромагнитная волна той же поляризации, то, в принципе, возможно ее усиление. В работах [1] найден коэффициент усиления при таком взаимодействии.

С точки зрения генерации и усиления волн представляет определенный интерес вопрос о спектре собственных электромагнитных колебаний, возникающих на границе двух сред при наличии дрейфа заряженных частиц. Настоящая работа посвящена изучению этого вопроса.

Пусть перпендикулярно границе раздела двух плазменных сред (например, полупроводников), различающихся электронными концентрациями n_0 и температурами (или средними тепловыми скоростями электронов s), приложено внешнее постоянное электрическое поле. Выберем плоскость $z = 0$ в качестве границы раздела и будем считать, что скорость дрейфа электронов v_0 , возникающего под действием поля, направлена вдоль положительного направления оси z . В стационарном состоянии при переходе через границу сохраняются потоки массы ($\{n_0 v_0\} = 0$), импульса и энергии электронов (см. [2]).

Следует отметить, что такая модель неоднородной плазмы в какой-то мере соответствует, по-видимому, состоянию полупроводника в сильном электрическом поле, когда в нем существуют домены [3] (движение последних не учитывается, а размеры переходной области предполагаются малыми по сравнению с длиной волны и размерами доменов).

Вводя малые отклонения плотности n и скорости v от их стационарных значений, получим следующую систему линеаризованных уравнений Максвелла и гидродинамики:

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{rot } H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \\ j &= e(n_0 v + n v_0), \quad \text{div } E = 4\pi e n, \quad e \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } j = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial z} + v \dot{v} &= \frac{e}{m} E - \frac{s^2 \nabla n}{n_0} + \frac{e}{mc} [v_0 H], \end{aligned} \quad (1)$$

$$n_0 = \begin{cases} n_{01}, & z > 0 \\ n_{02}, & z < 0 \end{cases}$$

Здесь e — заряд, m — масса, s — средняя тепловая скорость (или скорость Ферми для полуметаллов), ν — частота соударений электронов.

Разлагая далее все переменные величины $A(r, t)$ в пространственно-временной интеграл Фурье вида $A(r, t) = \int A(z, \omega, \mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \times d\omega d\mathbf{x}$ (где \mathbf{r} — координата в направлении, перпендикулярном оси z) и решая систему уравнений (1) относительно z с граничными условиями при $z = 0, \pm \infty$, получим дисперсионное уравнение $\omega = \omega(\mathbf{x})$. Действительная часть частоты ω' определяет спектр собственных колебаний с заданной пространственной формой, мнимая часть ω'' в зависимости от знака определяет скорость затухания или нарастания колебаний во времени. Решение уравнений (1) в общем виде довольно громоздко, и мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь квазипотенциальных колебаний ($x^2 \gg \omega^2/c^2$). Приведем выражение для одной из компонент поля, например, E_z (все остальные переменные величины имеют аналогичный вид):

$$E_{z1,2} = B_{1,2} \exp(-\kappa z) - \frac{4\pi e i k_{z1,2} A_{1,2}}{k_{z1,2}^2 + \kappa^2} \exp(i k_{z1,2} z), \quad (2)$$

где

$$k_{z1,2} = -\frac{\nu_{01,2}\omega}{s_{1,2}^2} \pm \frac{1}{s_{1,2}} (\omega^2 - \omega_{01,2}^2 - x^2 s_{1,2}^2)^{1/2},$$

$$\omega_{01,2}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{01,2}}{m}, \quad x > 0, \quad \operatorname{Re} k_{z1,2} > 0, \quad \operatorname{Im} k_{z1,2} > 0,$$

$\omega \gg \nu_1, \nu_2$; $\nu_0 \ll s$; $A_{1,2}, B_{1,2}$ — произвольные константы. Первое слагаемое в выражении (2) определяет амплитуду известных поверхностных волн, второе слагаемое обусловлено учетом температуры электронов.

На границе $z = 0$ воспользуемся условиями непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля и скорости, а также непрерывностью нормальных составляющих индукции $\{E_z + 4\pi i j_z/\omega\} = 0$ и потока импульса электронов* $\{s^2 n + n_0 v_0 v_z\} = 0$.

В результате, предполагая выполненные неравенства $\omega \gg \kappa s, \kappa \nu_0$; $x^2 s_{1,2}^2 \gg \omega_{01,2}^2 v_{01,2}^2 / s_{1,2}^2$; $|\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2| \gg \omega_{01,2}^2 v_{01,2}^2 / s_{1,2}^2$, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \omega(2\omega^2 - \omega_{01}^2 - \omega_{02}^2) & \left[\omega_{01}^2 (\omega^2 - \omega_{01}^2) \left(\omega^2 - \omega_{02}^2 - \omega \frac{v_{02}}{s_2} (\omega^2 - \omega_{02}^2 - x^2 s_2^2)^{1/2} \right) - \right. \\ & \left. - \omega_{02}^2 (\omega^2 - \omega_{02}^2) \left(\omega^2 - \omega_{01}^2 - \omega \frac{v_{01}}{s_1} (\omega^2 - \omega_{01}^2 - x^2 s_1^2)^{1/2} \right) \right] = \\ & = i x v_{01} \omega_{01}^2 (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 (3\omega^2 - \omega_{01}^2 - \omega_{02}^2). \end{aligned} \quad (3)$$

* Заметим, что электродинамические граничные условия $\{E_r\} = 0, \{E_n + 4\pi i j_n/\omega\} = 0$ непосредственно следуют из уравнений Максвелла и уравнения непрерывности; для получения гидродинамических граничных условий необходимо выписать точные уравнения движения электронов и ионов, затем воспользоваться законом равенства сил, с которыми на поверхность раздела действуют две соприкасающиеся среды. Линеаризация этого равенства приведет к непрерывности тангенциальных составляющих скорости и потока импульса электронов.

Из (3) в приближении малых v_0 находим собственные частоты колебаний и соответствующие инкременты:

$$\omega_1 \approx \omega_{01} + ixv_{01}; \quad (4)$$

$$\omega_2 \approx \omega_{02} - ixv_{02}; \quad (5)$$

$$\omega_{12} = \left[\frac{1}{2} (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \right]^{1/2} + \frac{ixv_{01}\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}. \quad (6)$$

Как видно из приведенных формул, колебания с частотой ω_1 нарастают во времени, колебания с частотой ω_2 затухают, а колебания с частотой ω_{12} либо затухают, либо нарастают в зависимости от соотношения между плазменными частотами ω_{01} и ω_{02} . Причина их нарастания или затухания определяется условием распространения плазменных волн (или распределением электрического поля) в областях 1 ($z > 0$) и 2 ($z < 0$). Действительно, плазмоны ω_1 фактически локализованы, как это следует из граничных условий, в области 1 (в области 2 поле мало). Амплитуда поля резко убывает при удалении от границы, поскольку $k_{z1} \approx s_1^{-1}(\omega^2 - \omega_{01}^2 - x^2 s_1^2)^{1/2}|_{\omega=\omega_{01}} = ix$. Можно показать, что электроны, влетая в область 1, на расстоянии $\sim 1/x$ в среднем будут испытывать торможение со стороны поля, благодаря чему поле усиливается. Напротив, плазмоны ω_2 локализованы в области 2, и электроны при подлете к границе ускоряются, что приводит к затуханию колебаний (поглощению плазмонов).

Характер взаимодействия колебаний ω_{12} с электронами несколько иной. Как видно из выражения (2), при учете слабой пространственной дисперсии ($|\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2| \gg x^2 s_{1,2}^2$) для них $\operatorname{Re} k_z$ отлична от нуля либо в области 1, либо в области 2. Ясно, что вследствие такой асимметрии электроны при пролете через границу испытывают со стороны излучаемых ими плазмонов ускоряющую или замедляющую силу в зависимости от того, в сторону положительных или отрицательных значений z направлен поток излучаемой энергии. Торможение или ускорение электронов приводит, естественно, к генерации или поглощению плазмонов ω_{12} .

Разумеется, говорить об усилении или генерации плазмонов можно только в том случае, если $xv_0 \gg v$. Поскольку $x_{\max} \sim \omega_0/s$, то должно выполняться условие $\omega_0 v_0/s \gg v$. Для хороших полупроводников типа In Sb или полуметаллов такие условия, по-видимому, вполне реализуемы.

Рассмотрим теперь случай, когда плазменные частоты ω_{01} и ω_{02} близки друг к другу, т. е. $\omega_{01} \sim \omega_{02}$ и $|\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2| \ll x^2 s_{1,2}^2$. При этом закон дисперсии колебаний (4) и (5) останется без изменения. Для получения закона дисперсии $\omega_{12} = \omega_{12}(x)$ в уравнениях (1) можно считать $n \approx 0$, так как $k_{z1}^2 \approx k_{z2}^2 = x^2$, $\operatorname{div} E \approx 0$. Тогда получим

$$\omega_{12} \approx \omega_0 + \frac{ix^3 v_0^2 (v_{02} - v_{01})}{2\omega_0^2}, \quad (7)$$

где $\omega_{01} \approx \omega_{02} \approx \omega_0$, $v_{01} \approx v_{02} \approx v_0$. Если $v_{02} > v_{01}$, то колебания ω_1 нарастают. Это нарастание обусловлено характером взаимодействия электронов с переменным полем в областях 1 и 2. В области 2 электрон ускоряется полем, в области 1 — тормозится. Однако время пролета области 2, равное $1/xv_{02}$, меньше времени пролета области 1 ($1/xv_{01}$). Это означает, что электроны в конечном счете тормозятся и генерируют плазмоны ω_{12} . При $v_{01} < v_{02}$ плазмоны ω_{12} поглощаются.

Если через границу проходит квазинейтральный поток частиц (электронов) с плотностью n_0 и скоростью v_0 , значительно большей средней тепловой скорости частиц потока и частиц среды, то тепловые

скорости можно не учитывать. Дисперсионное уравнение при этом запишется в виде*

$$\begin{aligned} [2\omega_0^2 = \omega^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)] (\omega \sqrt{\epsilon_1} - \omega_0) (\omega \sqrt{\epsilon_2} + \omega_0) = \\ = i\kappa v_0 \omega \omega (\epsilon_2 - \epsilon_1) [2\omega_0 + \omega (\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1})], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\epsilon_{1,2} = 1 - \omega_{01,2}^2/\omega^2$, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0/m$ — ленгмюровская частота электронов пучка, $x > 0$, $\omega \gg \kappa v_0$; знаки перед радикалами выбраны таким образом, чтобы $\operatorname{Re} \sqrt{\epsilon_{1,2}} > 0$, $\operatorname{Im} \sqrt{\epsilon_{1,2}} > 0$. Они определяются законом дисперсии плазменных (пучковых) волн в средах 1 и 2 $k_{z1,2} = (\omega/v_0) \mp \mp (\omega_0/v_0 \sqrt{\epsilon_{1,2}})$.

Из (8) в приближении малых v_0 получим

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\omega_{01}^2 + \omega_0^2} + i\kappa v_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2 + \omega_0^2}; \quad (9)$$

$$\omega_2 \simeq \sqrt{\omega_{02}^2 + \omega_0^2} - i\kappa v_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_{02}^2 + \omega_0^2}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \omega_{12} = \left(\omega_0^2 + \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} \right)^{1/2} + \frac{i\omega_0 \kappa v_0 (\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2)}{2 (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + 2\omega_0^2)} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega_0 + \sqrt{2\omega_0^2 + \omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2 + \omega_{02}^2 - \omega_{01}^2} - \omega_0} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Причина нарастания или затухания колебаний (9), (10) та же, что и колебаний (4), (5). Однако колебания (11) всегда затухают даже при условии $\omega_{02} > \omega_{01}$. Это связано с тем, что при конечном v_0 в среде 1 возбуждаются плазмоны $k_{z1} = (\omega_{12}/v_0) - (\omega_0/v_0 \sqrt{\epsilon_{12}(\omega_{12})})$, которые, увлекаясь движущимся потоком частиц ($\omega/v_0 > \omega_0/v_0 \sqrt{\epsilon_1}$), уносятся от границы, что и приводит к затуханию колебаний ω_{12} . Напомним, что в случае $v_0 \ll s$ (см. формулу (2)) плазмоны «отрываются» от движущихся частиц.

Обратимся, наконец, к случаю, когда поток электронов (дрейф) через границу раздела отсутствует ($v_{01} = v_{02} = 0$).

Электродинамические граничные условия остаются при этом без изменения, однако изменяются гидродинамические условия. Поскольку поток вещества через границу равен нулю, то непрерывными оказываются нормальная составляющая скорости и давление, $\{s^2 n\} = 0$ [2]. Заметим, что в работе [5] рассматривалось преобразование электромагнитных волн в плазменные и наоборот на такой границе.

В этом случае дисперсионное уравнение запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} \right) [(\omega^2 - \omega_{01}^2) s_2 (\omega^2 - \omega_{02}^2 - \kappa^2 s_2^2)^{1/2} + \\ + s_1 (\omega^2 - \omega_{02}^2) (\omega^2 - \omega_{01}^2 - \kappa^2 s_1^2)^{1/2}] = \frac{i\kappa s_2^2 \omega_{02}^2}{2\omega^2} (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

* Это дисперсионное уравнение получено в работе [4], однако полного его исследования там не проведено.

(Знаки перед радикалами выбраны так, что их реальная и мнимая части положительны.)

Из уравнения (12) в приближении малых κs ($\kappa s/\omega \ll 1$) найдем спектр и затухание поверхностной волны:

$$\omega = \left(\frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} \right)^{1/2} + 2 \frac{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2} \Delta\omega, \quad (13)$$

где

$$\Delta\omega = \left(\frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2} \right)^{1/2} z(s_1 - is_2) \quad (\omega_{01} > \omega_{02}); \quad (14)$$

$$\Delta\omega = \left(\frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2} \right)^{1/2} z(s_2 - is_1) \quad (\omega_{02} > \omega_{01}). \quad (15)$$

Затухание поверхностных колебаний обусловлено их преобразованием в объемные плазменные волны с законом дисперсии $k_{z1,2} = \pm s_{1,2}^{-1} (\omega^2 - \omega_{01,2}^2 - k^2 s_{1,2}^2)^{1/2}$. Иными словами, поверхностная волна, распространяясь вдоль границы раздела, как бы «втягивается» либо средой 1 (15), либо средой 2 (14), что и приводит к ее затуханию.

Колебания с частотами $\omega_{1,2} = \omega_{01,2}$ в этом случае не затухают. Учет столкновений, разумеется, приведет к их затуханию.

Автор благодарен Э. А. Канеру и Ф. Г. Бассу за обсуждение результатов и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Файнштейн, Изв. выш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 19 (1965); 9, 403 (1966).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954, § 81.
3. R. K. Ridley, Proc. Phys. Soc., 82, 954 (1963).
4. В. М. Яковенко, УФЖ, 11, 679 (1966).
5. A. H. Kratz, D. Mintzer, Phys. Rev., 117, 382 (1960).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
29 июня 1966 г.

ON SPECTRUM OF POTENTIAL OSCILLATIONS IN NON-HOMOGENEOUS PLASMA

V. M. Yakovenko

There has been found the spectrum and investigated the damping of electromagnetic oscillations originated at a sharp interface of two media with different electrical properties. It is shown that in the presence of charged particles drift through the interface the amplification of oscillations is possible.

УДК 551.510 535.1 : 621.371.177

РАСПЛЫВАНИЕ ПЕРЕМЕЩАЮЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ВЫСОТНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИОНОСФЕРЫ

Г. И. Григорьев

Оценена « дальность » неискаженного распространения перемещающихся возмущений. Найден вид высотно-частотных характеристик ионосферы с параболическим профилем равновесной электронной концентрации при наличии горизонтально распространяющихся волнобразных неоднородностей плазмы. Получены некоторые соотношения, характеризующие пространственное расплывание импульсов.

1. ДИСПЕРСИОННОЕ РАСПЛЫВАНИЕ ПАКЕТА ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Среди ионосферных неоднородностей регистрируются так называемые перемещающиеся возмущения. Этот тип неоднородностей имеет волнобразную структуру с характерным горизонтальным масштабом $\lambda_r \sim 150-300$ км и квазипериодом $T_0 \sim 30$ мин. Скорость распространения меньше звуковой и имеет величину порядка $8-10$ км · мин⁻¹ [1].

Один из возможных механизмов перемещающихся возмущений — внутренние гравитационные волны [2-4]. Необходимыми условиями существования внутренних волн в газах и жидкостях являются неоднородность плотности и наличие силы тяжести. Для изотермической модели атмосферы* дисперсионное уравнение гравитационных волн в системе координат с осью Oz, ориентированной вдоль силы тяжести, имеет вид [2,5]

$$2\omega^2 = C_0^2(k^2 + 1/4H^2) - [C_0^4(k^2 + 1/4H^2)^2 - 4(\gamma - 1)g^2k_r^2]^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь ω — частота, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, γ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме, g — ускорение силы тяжести, k_r — горизонтальная компонента волнового вектора.

Будем считать в дальнейшем, что вертикальный масштаб перемещающихся возмущений $\lambda_z = 2\pi/k_z$ мал по сравнению с горизонтальным λ_r и величиной $2\pi H (k_z \gg k_r, k_z H \gg 1)$. При этом из (1) получим

$$\omega = (\gamma - 1)^{1/2} g k_r / C_0 k_z. \quad (2)$$

Приведем теперь критерий неискаженной передачи сигнала. Расплывание квазимохроматического импульса при наличии дисперсии определяется второй и высшими производными фазы $\varphi = (kr)$ по частоте ω через временной параметр τ [6]**:

$$\tau^2 = \pi \varphi''_{\omega=\omega_0} = \pi \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} r \right)_{\omega=\omega_0}. \quad (3)$$

* При этом скорость звука $C_0 = \sqrt{\gamma g H}$ и высота однородной атмосферы H не зависят от координат, а давление и плотность распределены по барометрическому закону $p_0, p_0 \sim \exp(-z/H)$.

** Наряду с временным можно ввести пространственные параметры расплывания (см. Приложение). Искажение импульса во времени определяется пространственным расплыванием по различным направлениям,

В связи с тем, что дисперсионные соотношения в анизотропной среде задаются обычно в форме $\omega = \omega(k_x, k_y, k_z)$, преобразуем (3) к более удобному для оценок виду:

$$\tau^2 = -\pi \sum_{i=x, y, z} f_i \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right)^{-3} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right)^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_j} \right)^{-1} \right]_{k=k_0}. \quad (4)$$

Искажение формы сигнала с несущей частотой $\omega_0 (\omega_0 = 2\pi/T_0)$ и длительностью $T = mT_0$ является незначительным, если $\tau \ll T$ [7]. Предельную « дальность » D распространения импульса можно найти из условия

$$\tau = T. \quad (5)$$

Для пакета внутренних волн из (2) — (5) имеем

$$D = 2m^2 \lambda_r, \quad (6)$$

где $\lambda_r = 2\pi/k_r$.

Таким образом, наибольшую « дальность » распространения имеют те из перемещающихся возмущений, которые обладают значительной протяженностью и длительностью. Например, при $\lambda_r = 150$ км и $m \sim 2-3$ $D \sim 1200-2700$ км*. В то же время для коротких импульсов $m \sim 1$ неискаженная передача на большие расстояния невозможна. В реальных условиях имеют место, по-видимому, оба предельных случая [8, 9]. Однако детальный анализ зависимости « дальности » распространения перемещающихся возмущений от их параметров в настоящее время невозможен ввиду отсутствия необходимых экспериментальных данных.

2. ВЫСОТНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИОНОСФЕРЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЛНООБРАЗНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Предположим, что на равновесное распределение электронов в ионосфере $N_0(z)$ накладывается возмущение ΔN в виде горизонтально распространяющегося со скоростью v импульса:

$$\Delta N(r, t) = A(r - vt) \cos(\Omega t - k_r r). \quad (7)$$

Примем далее, что N_0 меняется с высотой z по параболическому закону:

$$N_0(z) = N_m(1 - z^2/z_m^2). \quad (8)$$

Максимальное значение концентрации $N = N_m$ достигается при $z = 0$ и минимальное $N = 0$ при $z = -z_m$ (области отражения соответствует интервал высот $-z_m \leq z \leq 0$). Полное количество электронов N в единице объема запишется в виде

$$N(z) = N_m(1 - z^2/z_m^2) + A(r - vt) \cos(\Omega t - k_r r). \quad (9)$$

Ниже рассматриваются два случая: $A_1(r - vt) = z^2 B(r - vt)/z_m^2$ и $A_2(r - vt) = B(r - vt)$, причем $B(r - vt) = \text{const}(z)$. Обозначая $\delta = \pm B(r - vt) \cos(\Omega t - k_r r)/N_m$ и $p = 1 + \delta$, из (9) определим соответствующие значения $N_{1,2}(z)$:

$$N_1(z) = N_m(1 - pz^2/z_m^2); \quad (10)$$

$$N_2(z) = N_m(p - z^2/z_m^2). \quad (11)$$

* Такого же порядка значения « дальности » распространения перемещающихся возмущений получаются из оценки гидромагнитного поглощения внутренних гравитационных волн [4].

Как известно, действующая высота отражения z_d сигнала на частоте ω равна [10]

$$z_d = -z_0 - \int_{z(n=1)}^{z(n=0)} dz/n, \quad (12)$$

где z_0 — расстояние до начала ионосферы. В простейшем случае без учета магнитного поля Земли показатель преломления n равен

$$n = \left[1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \right]^{1/2}, \quad (13)$$

где e и m — заряд и масса электрона. Из формул (10) — (13) находим соответственно z_{d1} и z_{d2} :

$$z_{d1} = -z_0 - \frac{z_m \omega}{2\omega_{kp} \sqrt{1+\delta}} \ln \frac{\omega_{kp} + \omega}{\omega_{kp} - \omega}; \quad (14)$$

$$z_{d2} = -z_0 - \frac{z_m \omega}{\omega_{kp}} \ln \frac{(1 - \omega^2/\omega_{kp}^2 + \delta)^{1/2}}{(\omega^2/\omega_{kp}^2 - \delta)^{1/2} - 1}, \quad (15)$$

где $\omega_{kp}^2 = 4\pi e^2 N_m/m$.

Легко проверить, что при отсутствии неоднородностей $\delta = 0$ ($p = 1$) получается известное выражение высотно-частотной характеристики ионосферы ($z_d = z_d[\omega]$) с параболическим профилем концентрации [6, 10]:

$$z_d^0 = z_{d1} = z_{d2} = -z_0 - \frac{z_m \omega}{2\omega_{kp}} \ln \frac{\omega_{kp} + \omega}{\omega_{kp} - \omega}. \quad (16)$$

Если возмущения электронной концентрации малы $|\delta| \ll 1$, то формулы (14), (15) для действующих высот z_{d1} , z_{d2} можно преобразовать к виду

$$z_{d1} = z_d^0 - (z_d^0 + z_0) \frac{B(r - vt)}{2N_m} \cos(\Omega t - k_r r); \quad (17)$$

$$z_{d2} = z_d^0 + \frac{z_m B(r - vt) \cos(\Omega t - k_r r)}{4(1 - \omega^2/\omega_{kp}^2) N_m}. \quad (18)$$

При выводе (18) считалось выполненным неравенство $\delta\omega_{kp}^3/\omega (\omega_{kp}^2 - \omega^2) \ll 1$, поэтому соотношение (18) справедливо для частот ω вблизи $\omega_1 \sim \omega_{kp}/\sqrt{3}$.

Зависимость высоты отражения z_d от времени на фиксированной частоте ω , определяемая уравнением (17), схематически изображена на рис. 1*. Момент возникновения ритмических изменений высоты отражения с периодом $T = 2\pi/\Omega$ определяется приходом неоднородности в область, существенную для отражения. Интервал $t_2 - t_1$ совпадает с длительностью проходящего возмущения. Амплитуда колебаний $\Delta z_d/z_d$, как легко видеть из (17), (18), того же порядка, что и $\Delta N/N$. Зависимость $z_d(t)$, типа изображенной на рис. 1, характерна для всех частот $\omega < \omega_{kp}$. Если длительность возмущения достаточно велика, то ход $z_d(t)$, определяемый (17) или (18), искажается вследствие суточных изменений $N_0(t)$.

* Предполагается, что длина волны возмущения превышает размеры области, существенной для отражения в ионосфере радиоимпульса частоты ω .

На рис. 2, заимствованном из [8], приведены записи действующих высот на различных частотах (обозначенных цифрами у кривых), сде-

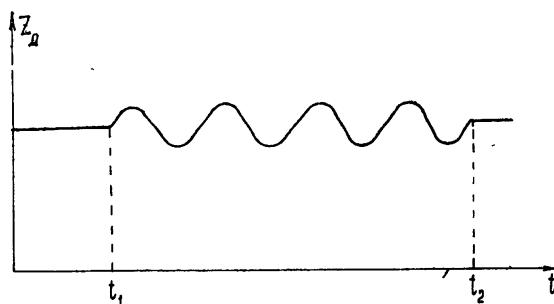


Рис. 1.

ланные на станциях Боулдер (а) и Уайт Сэндс (б). На этих записях отчетливо видны отмеченные выше особенности.

В проведенных оценках считалось, что возмущение электронной концентрации происходит одновременно во всем отражающем слое. В связи с этим по высотно-частотным характеристикам трудно определить сам факт наличия неоднородности. Однако, если возмущение локализовано в небольшой части ионосферы Δh , то на высотно-частотных характеристиках искажения будут также сосредоточены, в основном, в интервале Δz_d , соответствующем Δh , и распознавание неоднородностей облегчается. С подобными «перегибами» на высотно-частотных характеристиках отождествляются ионосферные перемещающиеся возмущения.

Автор приносит благодарность Б. Н. Гершману за полезные советы и указания.

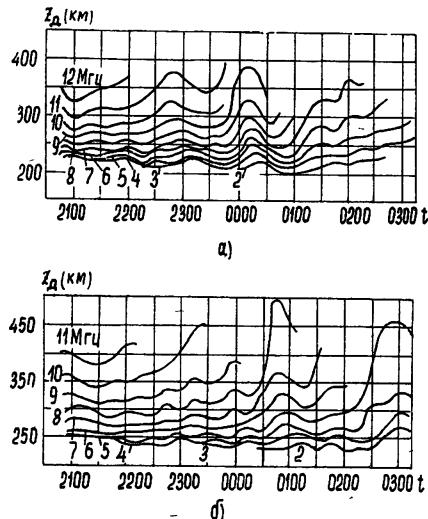


Рис. 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пространственное расплывание сигналов в анизотропной однородной диспергирующей среде

Представим начальную форму импульсов в виде

$$u(r, 0) = A(r) \exp(-ik_0 r). \quad (19)$$

Амплитуда $A(r)$ определяет максимальное значение скорости или напряженности электромагнитного поля в зависимости от характера исследуемого процесса. По прохождении некоторого группового пути (в момент времени t) структура сигнала дается соотношениями [5]

$$u(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \exp\{i\omega(k)t - i(kr)\} dk; \quad (20)$$

$$g(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{+\infty} q_0(r) \exp(i\mathbf{k}r) dr = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{+\infty} A(r) \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, r)) dr. \quad (21)$$

Считая импульс достаточно протяженным ($g(\mathbf{k})$ — «острый» функция \mathbf{k} в окрестности $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$), разложим частоту $\omega(\mathbf{k})$ в ряд вблизи $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, ограничиваясь вторым членом:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= \omega(\mathbf{k}_0) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right)_{k=k_0} \Delta k_i + \frac{2 - \delta_{ij}}{2} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right)_{k=k_0} \Delta k_i \Delta k_j. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь и ниже $\Delta k_i = k_i - k_{0i}$, δ_{ij} — символ Кронекера, индексы i, j в (22) принимают значения x, y, z . Объединяя (20) — (22), получим

$$\begin{aligned} u(r, t) &= (2\pi)^{-3} \exp\{i\omega(\mathbf{k}_0)t - i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})\} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(r_1) \exp\left\{i\left[t\left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i}\right)_{k=k_0} \Delta k_i + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{2 - \delta_{ij}}{2} t\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j}\right)_{k=k_0} \Delta k_i \Delta k_j + (\Delta k r_1 - r)\right]\right\} dr_1 d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение (23) определяет пространственную структуру импульса в любой момент времени. В нем можно выполнить интегрирование по \mathbf{k} . Однако при произвольной зависимости $A(r_1)$ получающиеся при этом выражения очень громоздки. Поэтому приводить их мы не будем, а рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Пусть все $\partial^2 \omega / \partial k_i \partial k_j = 0$. Интегрируя (23) по \mathbf{k} и r_1 , приходим к следующему результату:

$$u(r, t) = A \left(r - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} t \right) \exp\{i\omega(\mathbf{k}_0)t - i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})\}. \quad (24)$$

Из (24) следует, что импульс распространяется без искажения как единое целое с групповой скоростью $v_{gp} = \partial \omega / \partial \mathbf{k}$.

2) В разложении $\omega(\mathbf{k})$ в ряд нет смешанных производных $\partial^2 \omega (2 - \delta_{ij}) / \partial k_i \partial k_j = 0$. Этот случай соответствует изотропной дисперсии вида $\omega = Ck^2$. Форма импульса может быть найдена из уравнения

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \frac{1}{8} (1 + i)^3 \exp\{i\omega(\mathbf{k}_0)t - i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})\} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} A(r - v_{gp}t + \mathbf{Q}) \exp\left(-i \frac{\pi}{2} q^2\right) dq, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$Q_i^2 = \pi t \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^2} \right)_{k=k_0} q_i^2.$$

Введем пространственные параметры расплывания по направлениям:

$$\Delta l_i = \left[\pi t \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^2} \right)_{k=k_0} \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Если сопоставить каждому из Δl_i характерное время $\tau_i = \Delta l_i (\partial\omega/\partial k_i)^{-1}$, то легко установить связь временного параметра расплывания τ (см. (3)) и величин τ_i . Эта зависимость определяется равенством

$$\tau^2 = \sum_{i=x, y, z} \tau_i^2. \quad (27)$$

3) Спектр импульса в пространстве волновых векторов имеет вид δ -функции по направлению.

а) Одномерный пакет $g(\mathbf{k}) = f(k_x) \delta(k_y) \delta(k_z)$. Для произвольного момента времени из (23) получаем

$$u(x, t) = \frac{1+i}{2} \exp\{i\omega(k_0)t - i(k_0 r)\} \times \quad (28)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(x - v_{rpv} t + u \sqrt{\pi t (\partial^2 \omega / \partial k_x^2)_{k=k_0}} \right) \times \exp\left(-i \frac{\pi}{2} u^2\right) du.$$

Эквивалентным (28) соотношением описывается временное расплывание импульсов из-за дисперсии [6].

б) Двумерный пакет $g(\mathbf{k}) = f(k_x, k_y) \delta(k_z)$. Изменение его структуры определяется уравнением (23), которое после интегрирования по k и z_1 может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} u(r, t) = & \frac{i}{2} \exp\{i\omega(k_0)t - i(k_0 r)\} \int_{-\infty}^{+\infty} A \left[x - v_{rpv} t + \right. \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2} t (\alpha + \alpha_{12})} Q_x - \sqrt{\frac{\pi}{2} t (\alpha - \alpha_{12})} Q_y, y - v_{rpy} t + \\ & \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2} t (\alpha + \alpha_{12})} Q_x + \sqrt{\frac{\pi}{2} t (\alpha - \alpha_{12})} Q_y \right] \times \\ & \times \exp\left\{-i \frac{\pi}{2} (Q_x^2 + Q_y^2)\right\} dQ_x dQ_y, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\alpha_{12} = (\partial^2 \omega / \partial k_x \partial k_y)_{k=k_0}$ и для простоты принято

$$\alpha = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2} \right)_{k=k_0} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2} \right)_{k=k_0}.$$

Расплывание импульса по разным направлениям в анизотропной среде, как это следует из (29), (23), является взаимосвязанным. Заметим, что подобная ситуация имеет место при амбиполярной диффузии плазмы в магнитном поле [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. L. H. Heisler, J. Atm. Terr. Phys., 25, № 2, 71 (1963).
2. C. O. Hines, Canad. J. Phys., 38, № 11, 1441 (1960).
3. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 2, 246 (1966).
4. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 5, 843. (1965).
5. Г. С. Голицын, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 2, 136 (1965).
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.

- 7 В. М. Агра́нович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965.
8. K. L. Chan, O. G. Villard, J. Geophys. Res., 67, № 3, 973 (1962).
9. D. F. Magtyn, Proc. Roy. Soc., A 201, 216 (1950).
10. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
11. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 44, № 4, 1302 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 июня 1966 г.

SPREAD OF TRAVELLING DISTURBANCES AND THEIR INFLUENCE ON ALTITUDE-FREQUENCY CHARACTERISTICS OF IONOSPHERE

G. I. Grigor'ev

The distance of non-distorted propagation of travelling disturbances has been estimated. There has been determined the form of altitude-frequency characteristics of ionosphere with a parabolic profile of equilibrium electron concentration in the presence of horizontally propagating wave-like inhomogeneities of plasma. Some relationships have been derived, characterizing spatial distortion of impulses.

УДК 539.282 539.198

ВОЗМОЖНОСТЬ НАБЛЮДЕНИЯ ДВУХФОТОННОГО РЕЗОНАНСА

Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский

Показана возможность наблюдения двухфотонного резонанса в молекулярных пучках в СВЧ диапазоне. Проведена оценка необходимой для этого мощности излучения.

Известен ряд работ по исследованию двухфотонных переходов [1-3]. В настоящей заметке предлагаются эксперименты с двухфотонным излучением и поглощением в молекулярных пучках.

Рассмотрим возможные эксперименты с классическим объективом радиоспектроскопии — аммиаком. Вероятность двухфотонных переходов за время τ под влиянием монохроматического излучения определяется соотношением

$$W_{2\omega} = \frac{1}{4} \frac{|K_{21}|^2 \tau^2}{\hbar^2} \Sigma_{\omega}^4, \quad (1)$$

где Σ_{ω} — амплитуда внешнего высокочастотного поля,

$$K_{21} = \sum_{j=1,2} \frac{\mu_{1j} \mu_{2j}}{\hbar (\omega_{j2} + \omega)}, \quad (2)$$

ω_{ij} — собственные частоты молекулы, ω — частота внешнего поля, μ_{ij} — матричные элементы дипольного момента; сумма берется по всем уровням молекулы (электронным, колебательным и вращательным), не совпадающим с уровнями «1» и «2» (рис. 1).

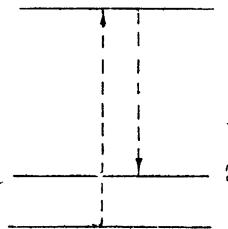


Рис. 1.

Практически при оценке величины K_{21} можно принять во внимание лишь состояния, ближайшие к уровням «1» и «2». Пусть речь идет об инверсионной паре уровней молекулы аммиака с индексами J, K . Ближайшими к ним уровнями будут $J+1, K$ и $J-1, K^*$. В силу правил отбора возможны вращательные дипольные переходы в молекуле аммиака лишь с изменением индекса инверсии. Поэтому для вращательных уровней $K_{21} = 0$, и, казалось бы, использование их в качестве про-

* Индекс K не может изменяться при дипольных переходах в молекулах типа асимметричного волчка.

межуточных состояний при двухквантовых переходах невозможно. Однако запрет можно снять путем наложения достаточно сильного постоянного электрического поля. Запрет по инверсии в обоих случаях снимается в результате перемешивания инверсионных состояний.

Действительно, в случае наложения постоянного электрического поля волновая функция инверсионных состояний имеет вид [4] (рис. 2)

$$\begin{aligned}\Psi_{JKM}^{(+)} &= a_{JKM} \Psi_{JKM}^{(+)} - b_{JKM} \Psi_{JKM}^{(-)}, \\ \Psi_{JKM}^{(-)} &= a_{JKM} \Psi_{JKM}^{(+)} + b_{JKM} \Psi_{JKM}^{(-)},\end{aligned}\quad (3)$$

$\Psi_{JKM}^{(+)}$, $\Psi_{JKM}^{(-)}$ — волновые функции невозмущенных инверсионных состояний,

$$\begin{aligned}a_{JKM} &= \left[\frac{\beta_{JKM} + 1}{2\beta_{JKM}} \right]^{1/2}, \quad b_{JKM} = \left[\frac{\beta_{JKM} - 1}{2\beta_{JKM}} \right]^{1/2}, \\ \beta_{JKM} &= \left[1 + 4 \frac{\mu_0^2}{\hbar^2 \omega_{JK}^2} \frac{K^2 M^2}{J^2 (J+1)^2} E^2 \right]^{1/2}\end{aligned}$$

(E — напряженность постоянного поля, ω_{JK} — инверсионная частота).

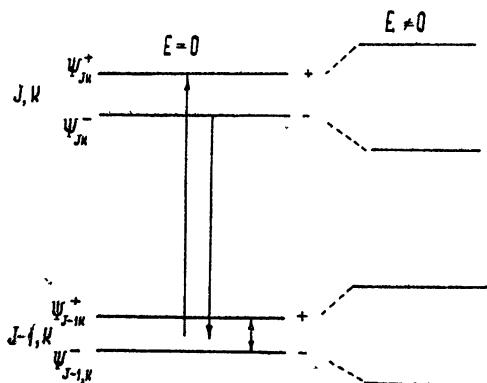


Рис. 2.

Теперь матричные элементы дипольного момента μ_{ij} , входящие в формулу (2), будут вычисляться с помощью волновых функций (3). Поэтому $K_{21} \neq 0$.

Не приводя общей громоздкой формулы для K_{21} , выпишем значение его для двухфотонного перехода между инверсионными состояниями $J = 1$, $K = 1$ под действием переменного поля, параллельного E :

$$K_{21} = \frac{3}{40} \frac{\mu_0^2}{2\pi\hbar B} \left(\frac{1}{\beta_{111}} - \frac{1}{\beta_{211}} \right), \quad (4)$$

где B — вращательная постоянная молекулы.

Максимальное значение множителя, стоящего в скобках (4), достигается при полях, удовлетворяющих соотношению

$$|E| \approx \hbar\omega_{JK}/2\mu_0.$$

При этом

$$K_{21} \approx (1.5 \div 2) \cdot 10^{-2} \frac{\mu_0^2}{2\pi\hbar B}. \quad (5)$$

Условие резонанса при двухфотонном переходе в случае наложения внешнего поля имеет вид

$$2\omega = \omega_{JK} \beta_{JKM}.$$

Для успешного наблюдения двухфотонного резонанса необходимо, чтобы двухфотонные переходы были более вероятны, чем однофотонные нерезонансные переходы. Максимальная величина вероятности последних дается соотношением

$$W_{\omega} = \frac{1}{4} \mu_0^2 \frac{K^2 (2J + 1)}{3J(J + 1)} \frac{\mathcal{E}_{\omega}^2}{\hbar^2 \omega_{\text{инв}}^2}. \quad (6)$$

Из неравенства

$$W_{2\omega} > W_{\omega}$$

вытекает условие, которому должна удовлетворять амплитуда поля в резонаторе. Для $J = K = M = 1$, согласно (1) и (5), это условие имеет вид

$$\mathcal{E}_{\omega}^2 > \frac{\hbar^2}{\tau^2} \frac{1}{\mu_0^2} \left(\frac{2\pi B}{\omega_{JK}} \right)^2. \quad (7)$$

Подставляя в (7) значения величин, типичные для NH_3

$$(\tau = 10^{-4} \text{ сек}, \mu_0 = 1,5 \cdot 10^{-18} \text{ CGS}, \omega_{\text{инв}}^{JK} = 5\pi 10^{10} \text{ Гц}, B = 298 \cdot 10^9 \text{ Гц}),$$

получаем для \mathcal{E}_{ω}^2 условие $\mathcal{E}_{\omega}^2 > 10^{-8} \text{ CGS}$. При добротности резонатора $\sim 10^4$ это значение поля соответствует мощности $10^{-8} - 10^{-9} \text{ вт}$.

Для подавления конкуренции однофотонных переходов желательно, чтобы прямой переход между рассматриваемыми уровнями энергии был запрещен. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения в каждом конкретном случае. Однако можно указать на целый ряд молекул типа асимметричного «волчка», вращательные спектры которых удобны для наблюдения двухфотонных переходов. Если дипольный момент такой молекулы направлен по оси среднего по величине момента инерции, то не разрешены Q -переходы ($\Delta J = 0$) между соседними уровнями энергии [3], что можно использовать для подбора системы уровней, удобной для наблюдения двухфотонного резонанса.

Эффект насыщения по двухфотонным переходам будет достигаться при такой напряженности поля \mathcal{E}_{ω} , когда $W_{2\omega} \approx 1$. Для молекулы аммиака и указанных выше параметров резонатора насыщение на частоте ω наступит при мощности излучения 10^{-2} вт .

Так же, как и в случае однофотонного резонансного поглощения, для индикации двухфотонных переходов может быть использована система последовательных резонаторов [5]. Поляризация молекулы при двухфотонных переходах будет содержать как компоненты, меняющиеся с действующей частотой ω , так и ее высшие гармоники. Если однофотонный переход $1 \rightarrow 2$ не запрещен, как это имеет место для аммиака, то составляющая поляризации на входе во второй резонатор, изменяющаяся с частотой 2ω , будет значительно превосходить по величине компоненту, меняющуюся с частотой ω . Поэтому во втором резонаторе удобнее наблюдать колебания на удвоенной частоте, близкой к частоте молекулярного перехода ω_{21} в электрическом поле.

Компонента поляризации, осциллирующая с двойной частотой, на входе второго резонатора имеет вид

$$P = \mu_{12} \langle \alpha \beta^* \exp(i\Delta T) \rangle_v \exp(-2i\omega t) + \text{к.с.}, \quad (8)$$

где

$$\alpha = \cos(\Omega t) + \frac{i\epsilon}{\Omega} \sin(\Omega t),$$

$$\beta = \frac{i}{4} \frac{K_{12} \varepsilon^2}{\hbar \Omega} \sin(\Omega \tau),$$

$$2\varepsilon = \Delta - \frac{1}{4} (K_{11} - K_{22}) \varepsilon^2, \quad \Delta = 2\omega - \omega_{21},$$

$$\Omega = (\varepsilon^2 + |K_{12}|^2 \varepsilon^4 / 16 \hbar^2)^{1/2},$$

T — время пролета между резонаторами, символ $\langle \rangle_v$ означает усреднение по скоростям,

$$K_{11} = \frac{2}{\hbar} \sum_i \frac{|\mu_{1j}|^2 \omega_{j1}}{\omega_{j1}^2 - \omega^2}, \quad K_{22} = \frac{2}{\hbar} \sum_j \frac{|\mu_{2j}|^2 \omega_{j2}}{\omega_{j2}^2 - \omega^2}.$$

Описанные эксперименты, требующие совмещения высокочастотного и постоянного электрического полей, удобно проводить с плоскопараллельными резонаторами [6].

Запрет на двухфотонный переход может быть снят также путем наложения переменного высокочастотного поля с частотой, равной $\omega_{J+1,K}$. При этом можно наблюдать переход между инверсионными уровнями. По существу, этот случай может быть истолкован как трехфотонный переход $2\omega + \omega_1$, причем излучение с частотой ω_1 находится в резонансе по промежуточному переходу ($J-1, K$ или $J+1, K$). Если $\omega_1 \approx \omega_{J-1,K}$ (или $\omega_{J+1,K}$), то можно показать, что условие двухфотонного резонанса на частоте ω имеет вид

$$2\omega = \omega_{JK} + \omega_{J-1,K} \quad (\text{или } \omega_{JK} + \omega_{J+1,K}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. З. Грасюк, И. Г. Зубарев, В. А. Катулин, ЖЭТФ, Письма в редакцию, 1, № 4, 29 (1965).
2. R. Raupenstein, N. Ockman, Phys Rev., 134, 499 (1964).
3. А. М. Прохоров, А. С. Селиваненко, Авторское свидетельство, № 872303 от 24 декабря 1963 г.; УФН, 85, 599 (1965).
4. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
5. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, ЖЭТФ, 45, № 6 (12), 1768 (1963).
6. А. И. Барчуков, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, 4, 2094 (1959).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1966 г.

ON POSSIBILITY OF OBSERVATION OF TWO-PHOTON RESONANCE

N. G. Basov, A. N. Oraevskii, G. M. Strakhovskii

There is shown the possibility to observe the two-photon resonance in the molecular beams in UHF-range. The necessary radiation power for this effect is estimated.

621.378.33

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОСТОЯННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, ВВОДИМЫХ В РЕЗОНАТОР, НА РАБОТУ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

B. O. Шахов

В статье приведены результаты экспериментальных исследований влияния постоянных электрических полей, вводимых в резонатор, на работу молекулярного генератора на пучке молекул $N^{14}H_3$. Получены зависимости амплитуды и частоты колебаний молекулярного генератора от величины напряжения постоянного электрического поля, создаваемого как во всем объеме резонатора, так и в отдельной его части. Данна возможная качественная интерпретация полученных результатов

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

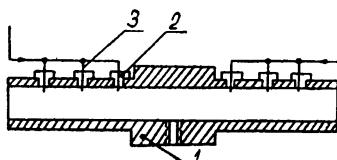
В последнее время в ряде работ (см., например, [1,2]) приводятся результаты исследований воздействия слабых электрических и магнитных полей, создаваемых перед резонатором, на работу молекулярного генератора (МГ).

Задача настоящей работы состояла в выяснении влияния постоянного электрического поля, вводимого непосредственно в резонатор работающего МГ на пучке $N^{14}H_3$, на амплитуду и частоту генерируемых им колебаний. Постоянное электрическое поле создавалось как по всей длине резонатора, так и отдельно в первой или второй его половине.

Для проведения указанных исследований использовался цилиндрический резонатор длиной 90 мм, в котором на расстояниях 9,4 мм, 18,8 мм, 28,2 мм от его концов были введены внутрь на 0,5 мм шесть медных электродов диаметром 0,3 мм. Электроды соединялись вместе по три с каждой стороны и подключались к выводам из вакуумной камеры. Разрез резонатора с электродами представлен на рис. 1.

Рис. 1. Схема резонатора с электродами:

1 — резонатор, 2 — изоляторы из оргстекла,
3 — электроды.



Измерение вариаций частоты исследуемого генератора при воздействии постоянного электрического поля осуществлялось обычным методом сравнения частоты его колебаний с сигналом опорного МГ.

За критерий оценки амплитуды сигнала было принято соотношение сигнал/шум, которое для максимального значения амплитуды колебаний МГ (A_{\max}) при сортирующем напряжении 26 кв равнялось ~ 50 . В процессе эксперимента производился отсчет относительной величины амплитуды A/A_{\max} при неизменном коэффициенте усиления усилительного тракта;

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Влияние электрических полей в основном исследовалось при предварительной настройке резонатора на частоту спектральной линии при различных интенсивностях пучка и различных напряжениях на сортирующей системе.

На рис. 2 представлено семейство графиков, отражающих зависимость изменения частоты колебаний МГ от величины постоянного напряжения, приложенного к электродам резонатора, для трех фиксированных значений интенсивности пучка (трех значений давления в вакуумном объеме). При этом напряжение на кольцевой сортирующей системе поддерживалось постоянным и равнялось 26 кв. На этом рисунке, как и в дальнейшем, приняты следующие обозначения: цифрой I обозначены графики, которые снимались при подаче напряжения на все электроды резонатора; цифрой II—графики, которые снимались при подаче напряжения на электроды первой половины резонатора (по отношению к входу молекулярного пучка); цифрой III—графики, счи-

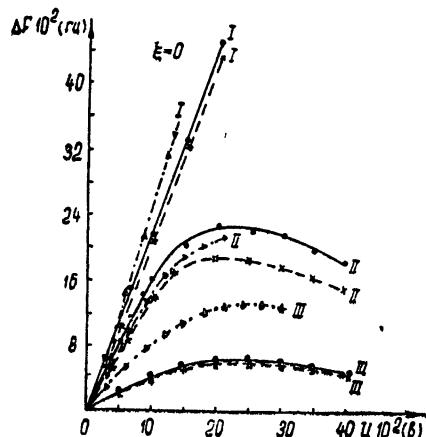


Рис. 2. Зависимость изменения частоты колебаний от величины постоянного напряжения, приложенного к электродам резонатора. Сплошная линия— $P=3 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст., $A=A_{\max}$; пунктирная линия— $P=1,3 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст., $A=0,6 A_{\max}$; штрих-пунктирная линия— $P=1,3 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст., $A=0,6 A_{\max}$.

мавшиеся при подаче напряжения на электроды второй половины резонатора.

Из анализа этих графиков следует, что частота колебаний МГ увеличивается с увеличением прикладываемого напряжения, что и следовало ожидать, исходя из теории эффекта Штарка для молекулы аммиака. Напряжение порядка 2000 в при данной системе электродов приводит к срыву генерации, при этом величина изменения частоты колебаний МГ достигает примерно 4500 гц.

Из сопоставления графиков семейств II и III, соответствующих одинаковым давлениям в вакуумной камере, следует, что их крутизна существенно различна. Так, для интенсивности пучка, обеспечивающей максимум амплитуды генерации ($P = 3 \cdot 10^{-6}$ тор, $A = A_{\max}$, сплошная кривая II), при изменении напряжения на электродах первой половины резонатора крутизна изменения частоты на линейном участке равна $S_2 = \Delta F_2 / \Delta U \approx 1,5$ гц·в⁻¹, а аналогичная крутизна для сплошной кривой III, соответствующей подаче напряжения на электроды второй половины резонатора, равна $S_3 = \Delta F_3 / \Delta U \approx 0,45$ гц·в⁻¹, причем $S_2/S_3 \approx 3,4$. Для интенсивностей пучка, соответствующих давлениям в вакуумном объеме $P = 1,3 \cdot 10^{-6}$ тор и $P = 1,3 \cdot 10^{-5}$ тор (соответственно пунктирные и штрих-пунктирные кривые), при которых обеспечивается одна

и та же амплитуда генерации, равная $\dot{A} = 0,6 A_{\max}$, имеют место следующие соотношения между S_2 и S_3 : $S_2/S_3 \approx 3,6$ при $P=1,3 \cdot 10^{-6}$ мор и $S_2/S_3 \approx 1,9$ при $P=1,3 \cdot 10^{-5}$ мор.

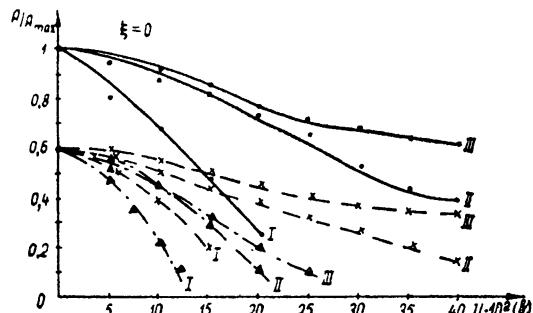
Из приведенных данных видно, что в рассматриваемом случае различие между S_2 и S_3 менее ярко выражено, что говорит о каком-то изменении условий взаимодействия молекул с СВЧ полем резонатора при больших интенсивностях пучка.

Как видно из рис. 2, графики зависимости частоты колебаний МГ от напряжения, прикладываемого к той или иной половине резонатора, имеют экстремальный характер. В этом случае соотношения между максимальными значениями изменения частоты при изменении напряжения на электродах первой или второй половины резонатора для одинаковых интенсивностей пучков аналогичны соответствующим соотношениям между крутизной S_2 и S_3 .

Проведенные в ходе эксперимента исследования также показали, что при амплитуде колебаний $MG \sim 0,2 A_{\max}$, достигаемой либо за счет уменьшения сортирующего напряжения до 18 кв при оптимальном расходе аммиака, либо за счет уменьшения расхода аммиака при сортирующем напряжении 26 кв, постоянное электрическое поле, вводимое в первую или вторую половину резонатора, оказывает практически одинаковое влияние на частоту колебаний МГ.

На рис. 3 приведены графики зависимости амплитуды колебаний МГ от величины вводимого напряжения. Из этих графиков следует, что с увеличением напряжения, прикладываемого к электродам первой или второй половины резонатора, амплитуда колебаний монотонно уменьшается. Для интенсивности пучка, обеспечивающей максимум амплитуды генерации ($P=3 \cdot 10^{-6}$ мор), при $U = 3500$ в она достигает величины $0,7 A_{\max}$ (сплошная кривая III) и $0,5 A_{\max}$ (сплошная кри-

Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний от величины постоянного напряжения, приложенного к электродам резонатора. Сплошная кривая — $P = 3 \cdot 10^{-6}$ мор. рт. ст.; пунктирная кривая — $P = 1,3 \cdot 10^{-6}$ мор. рт. ст.; штрих-пунктирная кривая — $P = 1,3 \cdot 10^{-5}$ мор. рт. ст.



вя II); при дальнейшем увеличении прикладываемого напряжения амплитуда остается практически постоянной.

Расстройка резонатора, соответствующая изменению частоты сигнала МГ на 1000 гц, не изменяет характера зависимости частоты и амплитуды колебаний МГ от величины постоянного электрического поля в резонаторе.

На рис. 4 приведены графики зависимости изменения частоты колебаний МГ с двумя встречными пучками от величины напряжения, прикладываемого к той или иной половине резонатора при различном соотношении интенсивностей пучков. Из этих графиков следует, что если интенсивность первого пучка больше интенсивности второго ($A_{II} = 0,5 A_I$) (пунктирная кривая), то крутизна изменения частоты при изменении напряжения на электродах первой половины резонатора больше соответствующей крутизны при изменении напряжения на

электродах второй половины и их отношение $S_2/S_3 \approx 3$. Если же интенсивность второго пучка больше интенсивности первого ($A_1 = 0,75 A_{II}$) (штрих-пунктирная кривая), то $S_2/S_3 \approx 0,6$. Таким образом, в зависимости от соотношения интенсивностей встречных пучков в резонаторе отношение S_2/S_3 меньше или больше единицы.

В заключение необходимо отметить, что неоднородность вводимого

в резонатор электрического поля приводит к существенному усложнению процессов в МГ. Практически невозможно количественно оценить происходящие при этом явления и дать исчерпывающий анализ результатов эксперимента. Им все же можно дать некоторую качественную интерпретацию, если учесть существование неравномерности излучения молекул (неравномерности распределения поляризации) вдоль оси резонатора при использовании одного пучка, что было теоретически доказано в работах [3,4] и экспериментально подтверждено в работах [5,6] на основании анализа результирующих частотных характеристик МГ. Исходя из этого, существенное различие между крутизной измене-

ния частоты колебаний МГ с одним или двумя несимметричными пучками (рис. 2, 4) при введении постоянного электрического поля в первую или вторую половину резонатора, по-видимому, можно объяснить неравномерностью излучения молекул вдоль оси резонатора с преобладанием излучения в первой его половине при достаточно интенсивном одном пучке (рис. 2). Полученные результаты в известной мере могут служить дополнительным экспериментальным подтверждением существования неравномерности излучения молекул вдоль оси резонатора. Они могут быть также полезны при оценке влияния электрических полей, проникающих в резонатор МГ, на амплитуду и частоту его колебаний.

В заключение приношу большую благодарность Я. Я. Сиробаба за ряд ценных советов и замечаний, высказанных при обсуждении результатов, а также В. П. Панкратову и Г. П. Черепову, оказавшим помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, ЖЭТФ, 45, 1768 (1963).
2. Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, П. С. Шумяцкий, Радиотехника и электроника, 11, 519 (1966).
3. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
4. В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 11, 514 (1966).
5. Г. М. Страховский, И. В. Черемискин, Труды ФИАН, 21, 68 (1963).
6. Г. М. Страховский, Диссертация, ФИАН, 1965.

'EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF MOLECULAR GENERATOR OPERATION
WHEN AFFECTING CONSTANT ELECTRIC FIELDS INTRODUCED
INTO RESONATOR

V. O. Shakhev

The paper deals with the results of the experimental investigations of the influence of the constant electric fields introduced into a resonator upon the operation of $N^{14}H_3$ molecular generator. The dependences have been obtained of the amplitude and frequency oscillations of the molecular generator on the voltage of the constant electric field produced both in the whole volume of resonator and in its separate part. There given possible qualitative interpretation of the results obtained.

УДК 621.373 42.072 9 : 519.25

ВЛИЯНИЕ ФЛИККЕРНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ЕМКОСТИ НА СЛУЧАЙНЫЙ НАБЕГ ФАЗЫ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова

Исследуется влияние фликкерных флуктуаций контурной емкости на случайный набег фазы свободного и синхронизированного генераторов. Оценивается эффективность влияния системы синхронизации на уменьшение флуктуационного набега фазы автогенератора.

Наряду с быстрыми флуктуациями, связанными с естественными шумами, в большинстве радиоэлектронных устройств постоянно присутствуют также медленные флуктуации так называемого фликкерного типа, обвязанные своим происхождением, в частности, естественным процессам старения элементов радиотехнических устройств. Как показывает эксперимент (см., например, [1-3]), эти флуктуации присущи току и междуэлектродным емкостям в электронных лампах, некоторым видам конденсаторов, непроволочным сопротивлениям, различным источникам питания и т. д. Имеется ряд работ, посвященных исследованию природы фликкер-шума и его влияния на стабильность и статистические характеристики различных радиоустройств. Например, в работах [4-8] при некоторых допущениях рассматривалось влияние фликкер-шума лампы на форму и ширину спектра колебаний автогенератора. Для синхронизированного генератора в литературе довольно подробно рассмотрен лишь вопрос о воздействии белого шума.

Представляет интерес оценить, какое влияние оказывают фликкерные флуктуации на генератор, синхронизованный внешним гармоническим сигналом. Если при воздействии белого шума дисперсия фазовых флуктуаций в синхронизованном генераторе остается, в линейном приближении, ограниченной, то, как будет показано ниже, фликкерные флуктуации приводят даже в линейном приближении к неограниченному нарастанию дисперсии фазовых флуктуаций во времени, т. е. качественная картина поведения фазовых флуктуаций оказывается такой же, как и в свободном генераторе. В связи с этим интересно рассмотреть, что же дает в этом случае синхронизация генератора эталонным сигналом.

В настоящей работе рассматривается влияние фликкерных флуктуаций контурной емкости на случайный набег фазы колебаний свободного генератора, а также генератора, синхронизованного внешним гармоническим сигналом, причем фликкер-шум рассматривается как существенно нестационарный процесс. Анализ проводится для генератора с одной степенью свободы. Для синхронизированного генератора рассмотрение ограничивается линейным приближением. Даётся оценка эффективности влияния системы синхронизации на уменьшение случайного набега фазы, вызванного фликкерными флуктуациями емкости.

1. Многочисленные экспериментальные исследования дают для спектральной плотности мощности фликкер-шума закон, пропорциональный $|\omega|^{-1}$, т. е.

$$S(\omega) = A / |\omega|^\gamma \quad (0 < \gamma < 3). \quad (1)$$

Как следует из выражения (1), для фликкерных флуктуаций характерно возрастание спектральной плотности на низких частотах. В эксперименте такая зависимость спектральной плотности фликкерных флуктуаций наблюдалась вплоть до частоты порядка 10^{-5} Гц [9]. Следуя [3], будем считать, что спектр фликкерных флуктуаций описывается законом (1) вплоть до нулевой частоты. В этом случае мощность флуктуаций (интеграл от спектра (1)) является неограниченной величиной, поэтому обычный спектрально-корреляционный анализ шумового процесса становится затруднительным.

Для описания процессов с неинтегрируемым спектром оказывается полезным рассмотрение так называемой статистической структурной функции $d_x[t_1, t_2; \tau]$, которая по определению равна половине функции корреляции приращений случайной величины $x(t)$:

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \langle [x(t_1 + \tau) - x(t_1)] [x(t_2 + \tau) - x(t_2)] \rangle \quad (2)$$

($\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение).

Для процессов со стационарными приращениями структурная функция не зависит от абсолютного значения времени t , а зависит лишь от интервала θ между моментами, в которые берутся приращения случайной величины. Эта функция связана со спектром мощности флуктуаций следующим соотношением [10]:

$$d_x[\theta, \tau] = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\omega\tau)] \cos(\omega\theta) S(\omega) d\omega. \quad (3)$$

Отметим, что при $\theta = 0$ удвоенное значение статистической структурной функции равно дисперсии приращения случайной величины за временной интервал τ .

Поскольку анализ нестационарных процессов в общем случае оказывается довольно сложным, ограничимся случаем, когда процесс, описываемый спектром вида (1), является процессом со стационарными приращениями. В этом случае можно найти его статистическую структурную функцию, подставив в (3) выражение для спектра нестационарных фликкерных флуктуаций (1):

$$d_x[\theta, \tau] = \frac{\pi A}{\sin \left[\frac{\pi}{2} (\gamma - 1) \right] \Gamma(\gamma)} \{ |\tau + \theta|^{\gamma-1} + |\tau - \theta|^{\gamma-1} - 2|\theta|^{\gamma-1} \}, \quad (4)$$

где $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция, $1 < \gamma < 3$.

При $\theta = 0$ из (4) получаем выражение для дисперсии приращений:

$$\langle \Delta x^2(\tau) \rangle = \frac{2\pi A}{\sin \left[\frac{\pi}{2} (\gamma - 1) \right] \Gamma(\gamma)} |\tau|^{\gamma-1}.$$

Отсюда видно, что дисперсия приращений неограниченно возрастает с ростом τ , т. е. действительно фликкерные флуктуации являются процессом, существенно нестационарным при сколь угодно большом времени наблюдения.

2. Укороченное уравнение для фазы колебаний свободного генератора с флуктуирующей емкостью имеет следующий вид [11]:

$$\dot{\phi} = -\frac{\omega_0}{2} \delta C, \quad (5)$$

где δC — относительные флуктуации контурной емкости, ω_0 — собственная частота автоколебаний. Это уравнение получено в предположении, что флуктуации емкости являются медленными в сравнении с автоколебаниями генератора и что $|\delta C| \ll 1$.

Найдем среднеквадратичный набег фазы $\langle \Delta\phi^2(t, \tau) \rangle$ в генераторе, выразив его через статистическую структурную функцию флуктуаций емкости, заданную соотношением (4). Примем, что в начальный момент времени контурные емкости всех генераторов и, следовательно, их начальные частоты одинаковы и равны своему среднему значению, т. е. при $t = 0$ $\delta C = 0$. В дальнейшем при $t > 0$ значения емкостей в каждом из генераторов изменяются в соответствии со статистическими законами фликкерных флуктуаций. Принять определенное начальное условие оказывается необходимым в связи с существенной нестационарностью и неограниченным ростом дисперсии флуктуаций емкости со временем. Если отождествить значения емкостей генераторов с положением броуновской частицы, то это условие означает, что в начальный момент времени все частицы находились в одной точке, откуда со временем они «расползаются».

Как показано в [12], среднеквадратичный набег фазы $\langle \Delta\phi^2(t, \tau) \rangle$ при этом условии нулевой привязки флуктуаций емкости связан со статистической структурной функцией $d_{\delta C}[\theta, \tau]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\phi^2(t, \tau) \rangle / 2 = d_\phi[t, t; \tau] = & \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \tau \int_t^{t+\tau} d_{\delta C}[0, v] dv - \right. \\ & \left. - \int_0^\tau (\tau - v) d_{\delta C}[0, v] dv \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя в это соотношение выражение для $d_{\delta C}[0, \tau]$, из (4) получаем для среднеквадратичного набега фазы свободного генератора

$$\langle \Delta\phi^2(t, \tau) \rangle = \frac{K\tau}{\gamma} \left[(t + \tau)^{\gamma} - t^{\gamma} - \frac{\tau^{\gamma}}{\gamma + 1} \right], \quad (6)$$

где

$$K = \frac{\pi \omega_0^2 A}{2 \sin \frac{\pi}{2} (\gamma - 1) \Gamma(\gamma)}.$$

Таким образом, если флуктуации контурной емкости — процесс со стационарными приращениями, то приращения фазы в генераторе являются нестационарными. Если производить измерения случайного набега фазы непосредственно после привязки частоты, что соответствует значению $t = 0$ в выражении (6), то

$$\langle \Delta\phi^2(\tau) \rangle = \frac{K}{\gamma + 1} |\tau|^{\gamma+1}. \quad (7)$$

Если же измерять случайный набег фазы спустя некоторое время t после привязки частоты, когда генераторы к началу измерений уже

имеют некоторый разброс частот, то набег фазы за тот же интервал τ будет, естественно, больше и существенно зависит от того, сколько времени прошло с момента привязки. Например, при $t \gg \tau$

$$\langle \Delta\varphi^2(t, \tau) \rangle \simeq K\tau^2 t^{\gamma-1}. \quad (8)$$

В этом предельном случае (8) совпадает с выражением для среднеквадратичного набега фазы, полученным в [4], где для спектра фликкер-шума было введено ограничение в области низких частот.

3. Перейдем к рассмотрению фазовой нестабильности генератора, синхронизованного внешним гармоническим сигналом. Флуктуационная разность фаз φ колебаний синхронизированного генератора и эталонного сигнала при наличии в контуре генератора флюктуирующей емкости описывается следующим уравнением [11]:

$$\dot{\varphi} = \Delta(1 - \cos \varphi) - D \sin \varphi - \frac{\omega_{\text{эт}}}{2} \delta C, \quad (9)$$

где Δ — начальная расстройка частот генераторов, $D = (\Delta_0^2 - \Delta^2)^{1/2}$, Δ_0 — полоса синхронизации, $\omega_{\text{эт}}$ — частота колебаний эталонного генератора. Примем, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, т. е. введем нулевую привязку по фазе в начальный момент времени. Тогда на достаточно малом интервале времени $\langle \varphi^2 \rangle$ будет мало и флуктуации фазы будут достаточно хорошо описываться линеаризованным уравнением, полученным из (9):

$$\dot{\varphi} = -D\varphi - \frac{\omega_{\text{эт}}}{2} \delta C. \quad (10)$$

Будем рассматривать фазовые флуктуации в синхронизованном генераторе только по окончании переходных процессов, т. е. при $t \gg 1/D$, тогда для фазы получим

$$\varphi(t) = \frac{\omega_{\text{эт}}}{2} \int_0^\infty e^{-Du} \delta C(t-u) du. \quad (11)$$

Образуя приращения и усредняя произведения приращений, взятых в два различных момента времени t_1 и t_2 , получаем следующую связь статистических структурных функций флуктуаций емкости $d_{\delta C}[t_1, t_2; \tau]$ и фазы $d_\varphi[t_1, t_2; \tau]$:

$$d_\varphi[t_1, t_2; \tau] = \frac{\omega_{\text{эт}}^2}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-D(u+v)) \times \\ \times d_{\delta C}[t_1-u, t_2-v; \tau] du dv. \quad (12)$$

Поскольку, как это было принято выше, флуктуации емкости — процесс со стационарными приращениями, то, как следует из (12), фазовые флуктуации также будут иметь стационарные приращения. Полагая в (12) $t_1 = t_2$ и производя необходимые вычисления, получим выражение для среднеквадратичного набега фазы в синхронизованном генераторе:

$$\langle \Delta\varphi^2(\tau) \rangle = 2d_\varphi[0, \tau] = \frac{K}{4D^{1+\gamma}} \{ e^{D\tau} \Gamma(\gamma, D\tau) - \\ - (-1)^{-\gamma} e^{-D\tau} \Gamma(\gamma, -D\tau) \}, \quad (13)$$

где $\Gamma(\gamma, D\tau)$ — неполная гамма-функция [13].

При $\tau D \gg 1$ для среднеквадратичного набега фазы справедливо асимптотическое выражение

$$\langle \Delta\varphi^2(\tau) \rangle \simeq \frac{K}{D^2} |\tau|^{\gamma-1}. \quad (14)$$

Поскольку формула (13) для $\langle \Delta\varphi^2(\tau) \rangle$ была записана при условии, что в начальный момент времени подстраиваемый генератор имеет фазу, навязанную синхронизующим сигналом (т. е. флюктуационная фаза $\varphi = 0$ при $t = 0$), то зависимость среднеквадратичного набега от τ можно рассматривать как зависимость интенсивности фазовых флюктуаций от времени t . Тогда из (13) следует, что фазовые флюктуации нестационарны и возрастают со временем пропорционально $t^{\gamma-1}$, т. е. фликкерные флюктуации приводят даже в линейном приближении к неограниченному росту дисперсии фазовых флюктуаций синхронизованного генератора. Следовательно, со временем фазовые флюктуации станут настолько большими, что, во-первых, будет неправомерной линеаризация уравнения (9), а во-вторых, как это следует из физических соображений, появится возможность длительного выхода генератора из полосы синхронизации: Если грубо оценить время t_0 , в течение которого $\langle \varphi^2(t_0) \rangle$ становится порядка единицы, то получим $t_0 \simeq [D^2/K]^{1/(\gamma-1)}$.

Составим отношение m среднеквадратичного набега фазы в синхронизированном генераторе к соответствующему набегу в свободном генераторе, взятом непосредственно после привязки частоты ($t = 0$). В этом случае m по порядку величины оказывается равным

$$m \leq (D\tau)^{-2} \quad (D\tau \gg 1). \quad (15)$$

Величина m показывает, насколько эффективно система синхронизации уменьшает флюктуационный набег фазы в генераторе, вызванный фликкерными флюктуациями емкости, по сравнению с набегом фазы в свободном генераторе. (Отметим, что с ростом t величина m в соответствии с вышесказанным будет только уменьшаться.)

Из соотношения (15) видно, что флюктуационный набег фазы за время, превышающее постоянную времени системы синхронизации, оказывается значительно меньше в синхронизированном генераторе, чем в свободном. Физически это связано с тем, что фликкерные флюктуации в основном медленные и потому хорошо подавляются системой синхронизации.

4. В заключение приведем численные оценки флюктуационных набегов фазы в свободном и синхронизированном генераторах для двух значений $S_{\delta C}(\omega)$. Поскольку экспериментальных данных по непосредственному измерению флюктуаций емкости нет, то численные характеристики флюктуаций емкости были выбраны на основе косвенных оценок в соответствии с экспериментальными данными, приведенными в работе [1] для фликкерного тока лампы, и соотношением между флюктуационным током лампы и флюктуациями емкости, принятыми в [7, 14]:

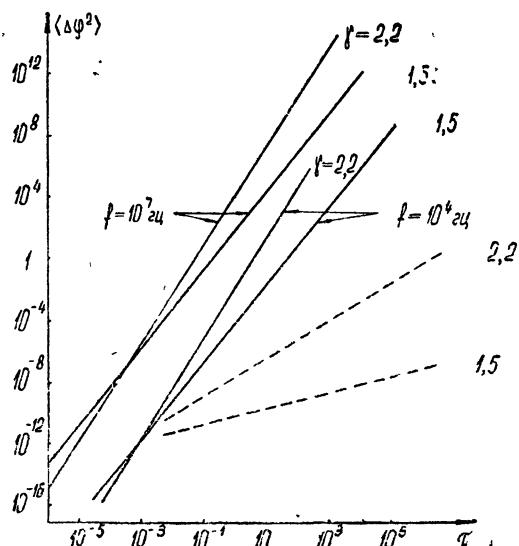
$$(S_{\delta C})_1 = \frac{2 \cdot 10^{-14}}{|\omega|^{1.5}}, \quad (S_{\delta C})_2 = \frac{10^{-11}}{|\omega|^{2.2}}.$$

Для этих значений спектральной плотности на рис. 1 приведены графики зависимости среднеквадратичного набега фазы в свободном гене-

раторе от временного интервала τ , вычисленные по формуле (7) для значений частоты автоколебаний $f_0 = 10^7 \text{ гц}$ и 10^4 гц . Поскольку в уравнение (5) относительные флуктуации емкости входят вместе с множителем $\omega_0/2$, то возмущающее воздействие одних и тех же значений δC на флуктуационный набег фазы будет тем больше, чем выше частота колебаний автогенератора. Из графиков рис. 1 видно, что время, за которое набег фазы в генераторе с частотой $f_0 = 10^7 \text{ гц}$ становится сравнимым с единицей, оказывается порядка сотых и десятых долей секунды, т. е. нестабильность, вносимая фликкерными флуктуациями емкости, в большинстве практических задач может быть весьма существенной.

На рис. 1 построены также графики $\langle \Delta\phi^2(\tau) \rangle$ в синхронизованном

Рис. 1. Зависимость среднеквадратичного набега фазы в генераторах от τ . Сплошная линия — свободный генератор, пунктирная линия — синхронизованный генератор.



генераторе для интервалов времени $\tau \gg 1/D$, для тех же значений спектральной плотности флуктуаций емкости и значений частот эталонного генератора $f_{\text{эт}} = 10^7 \text{ гц}$ и 10^4 гц . При расчете принято, что полоса синхронизации Δ_0 составляет 3% от эталонной частоты, а начальная расстройка $\Delta = 0,5 \Delta_0$, так что $D = 0,87 \Delta_0$. Поскольку время переходных процессов в синхронизованном генераторе $\sim 1/D$, то при $\tau \gg 1/D$ (т. е. для значений $\omega \ll D$) флуктуации емкости можно считать квазистатическими, а ϕ — малым. В этом случае, как видно из (10), величина фазовых флуктуаций определяется значением δC и величиной относительной начальной расстройки частоты подстраиваемого генератора от $\omega_{\text{эт}}$. Соответственно и время τ_0 , за которое флуктуационный набег фазы становится порядка единицы, будет одним и тем же для генераторов с различными несущими при одинаковом значении относительной начальной расстройки частот. Это время по порядку величины составляет 500 часов (для $\gamma = 2,2$ и $\Delta = 0,5 \Delta_0$), т. е. для большинства радиоустройств флуктуационный набег фазы в синхронизованном генераторе, вносимый фликкерными флуктуациями емкости, является пренебрежимо малым и может не приниматься во внимание. В этом случае являются оправдаными ограничение малыми флуктуациями и линеаризация уравнения (9). Исключение составляет апаратурра специального назначения, рассчитанная на длительную когерентную работу. Для такой аппаратуры τ_0 может служить характеристикой времени, по истечении которого

в системе синхронизации необходима дополнительная коррекция частоты, поскольку нарастание фазовых флуктуаций в генераторе неизбежно будет связано с длительным выходом генератора из полосы синхронизации.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за предложенную тему, полезные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 438 (1957).
2. Б. В. Абрамов, В. И. Тихонов, Радиотехника, 12, 44 (1957).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959).
4. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 1, № 1, 20 (1958).
5. Ю. А. Дрягин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 1, № 1, 93 (1959).
6. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 2, № 3, 573 (1959).
7. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 3, № 2, 241 (1960).
8. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
9. T. E. Firl, H. Winston, J. Appl. Phys., 26, 716 (1955).
10. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 9, № 3, 595 (1966).
11. Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 8, № 5, 924 (1965).
12. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1967.
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, 1962.
14. М. Е. Жаботинский, Ю. Л. Свердлов, Радиотехника, 19, № 1, 5 (1964).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию

27 июня 1966 г.

INFLUENCE OF FLICKER FLUCTUATIONS OF CAPACITIES ON RANDOM PHASE DISPLACEMENT OF AUTO-OSCILLATORS

L. P. Zacheptskaya, I. M. Klibanova

The influence of flicker fluctuations of circuit capacity on random phase displacement of free and synchronized oscillators is studied. The effect of the synchronization system upon the decrease of fluctuational phase displacement of auto-oscillator is evaluated.

УДК 535.2.012

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ МАЛОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ В МУТНОЙ СРЕДЕ

A. M. Белянцев, Л. С. Долин, В. А. Савельев

Рассматриваются временные искажения импульсного сигнала, передаваемого узким пучком света через рассеивающую среду. В предположении сферически-изотропного рассеяния исследуется затягивание фронтов импульса и характер ослабления его амплитуды в зависимости от оптической дальности, размеров апертуры и ширины диаграммы направленности приемного устройства и начальной длительности импульса. Найдены огибающая и амплитуда светового сигнала, возникающего в результате обратного рассеяния зондирующего импульса в толще мутной среды.

Как известно, при распространении светового сигнала в мутной среде рассеяние может повлиять не только на пространственную структуру светового поля, но и на огибающую сигнала. При работе с короткими световыми импульсами это проявляется в искажении формы огибающей импульса, увеличении его длительности, затягивании фронтов. Все эти эффекты являются следствием того, что фотоны рассеянного излучения приходят в точку приема по различным путям, в результате чего форма импульса, который создается в точке наблюдения фотонами, излученными в определенный момент времени, повторяет функцию распределения фотонов по длине пройденного ими пути.

Задача о распределении фотонов по пробегам в плоском слое мутной среды частично решена в [1,2]. Результаты этих работ позволяют судить о временных искажениях предельно узкого импульса в случае, когда пучок света имеет бесконечно большую ширину. В настоящей работе рассматриваются временные искажения импульсного сигнала, передаваемого узким пучком, через бесконечную мутную среду. Исследование проводится на основе нестационарного уравнения переноса лучистой энергии в приближении однократного и двукратного рассеяния.

1. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Нестационарное уравнение переноса, записанное в безразмерных переменных, имеет вид

$$\frac{\partial I(\tau, n, \xi)}{\partial \xi} + n \nabla_\tau I = -I + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau, n', \xi) \times \\ \times x(nn') d\omega_{n'} + S_0(\tau, n, \xi). \quad (1)$$

Здесь $I(\tau, n, \xi)$ — интенсивность излучения, $x(nn')$ — индикатриса рассеяния, $d\omega_n$ — элемент телесного угла около направления единичного вектора n , $\lambda = \sigma/\epsilon < 1$ — параметр выживания кванта, σ и ϵ — показатели рассеяния и полного ослабления, $\xi = \epsilon ct$, c — скорость света в среде, $\tau = \epsilon r$, S_0 — источники излучения.

Если искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням параметра λ

$$I(\tau, n, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k(\tau, n, \xi), \quad (2)$$

то для I_k получим систему уравнений

$$\frac{\partial I_k}{\partial \xi} + n \nabla_{\tau} I_k = -I_k + S_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где

$$S_k(\tau, n, \xi) = \begin{cases} S_0(\tau, n, \xi) & (k = 0) \\ \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_{k-1}(\tau, n', \xi) x(nn') d\omega_n, & (k \neq 0) \end{cases} \quad (4)$$

Эта система легко интегрируется и приводит к следующим рекуррентным соотношениям для функции I_k :

$$I_k(\tau, n, \xi) = \int_0^{\infty} \exp(-\xi') S_k(\tau - n\xi', n, \xi - \xi') d\xi'. \quad (5)$$

В дальнейшем мы будем учитывать лишь три первых члена ряда (2), предполагая, что членами, соответствующими кратности рассеяния больше двух, можно пренебречь.

Для простоты зададим объемные источники излучения S_0 в виде

$$S_0(\tau, n, \xi) = \delta(\tau) \delta(n - e_3) f(\xi), \quad (6)$$

через e_i обозначены базисные векторы декартовой системы координат. Тогда из (4) — (6) получим

$$I_0(\tau, n, \xi) = \frac{1}{|n_3|} \delta(n - e_3) \delta(\tau_1 - \frac{n_1}{n_3} \tau_3) \delta(\tau_2 - \frac{n_2}{n_3} \tau_3) \times \times \exp(-\tau_3/n_3) f\left(\xi - \frac{\tau_3}{n_3}\right); \quad (7)$$

$$I_1(\tau, n, \xi) = \frac{x(ne_1)}{4\pi(1-n_3)} \int_0^{\infty} \exp(-\xi') f(\xi - \xi') \Phi_1(\xi') \times \times \delta\left[\tau_1 - \frac{n_1}{1-n_3} (\xi' - \tau_3)\right] \delta\left[\tau_2 - \frac{n_2}{1-n_3} (\xi' - \tau_3)\right] d\xi'; \quad (8)$$

$$I_2(\tau, n, \xi) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d\xi' \exp(-\xi') f(\xi - \xi') \times \times \int_0^{*\xi} \frac{x(n'e_3)x(n'n)d\mu}{(\tau_1 - n_1\mu)^2 + (\tau_2 - n_2\mu)^2 + (\tau_3 - \xi' + \mu - n_3\mu)^2}. \quad (9)$$

В (7)–(9) использованы следующие обозначения:

$$\Phi_1(\xi') = \begin{cases} 1, & \tau_3 < \xi' < \frac{\tau_3}{n_3}, \quad \tau_3 > 0, \quad n_3 > 0; \quad \xi' > \tau_3, \quad \tau_3 > 0, \quad n_3 < 0 \\ & \xi' > \frac{\tau_3}{n_3}, \quad n_3 < 0, \quad \tau_3 < 0 \\ 0, & \xi' < \tau_3, \quad \xi' > \frac{\tau_3}{n_3}, \quad n_3 > 0, \quad \tau_3 > 0; \quad \xi' < \tau_3, \quad \tau_3 > 0, \quad n_3 < 0 \\ & \xi' < \frac{\tau_3}{n_3}, \quad n_3 < 0, \quad \tau_3 < 0 \end{cases}$$

$$n_i = e_i n, \quad \tau_i = e_i \tau, \quad \cos \theta' = n' e_3,$$

$$n' n = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos (\varphi' - \varphi),$$

$$\theta' = 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi' - \mu - \tau_3 + n_3 \mu}{[(\tau_1 - n_1 \mu)^2 + (\tau_2 - n_2 \mu)^2]^{1/2}}, \quad \tau^* = \frac{\xi'^2 - \tau^2}{2(\xi' - n \tau)},$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{\tau_2 - n_2 \mu}{\tau_1 - n_1 \mu},$$

θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора n .

2. ПЕРЕДАЧА СВЕТОВОГО ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ ТОЛЩУ ИЗОТРОПНО РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Используя полученные выше выражения для интенсивности излучения, найдем мощность сигнала P , принимаемого оптической системой (приемником) с входным зрачком Σ и телесным углом поля зрения $\Delta\omega$. Индикаторису рассеяния в дальнейшем будем считать сферической.

Величина P связана с интенсивностью I соотношением

$$P(\tau, m, \xi) = \int_{\Sigma} d\Sigma' \int_{\Delta\omega_m} d\omega_n I(\tau', n, \xi) \quad (10)$$

или, с учетом (2),

$$P(\tau, m, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{\Sigma} d\Sigma' \int_{\Delta\omega_m} d\omega_n I_k(\tau', n, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k, \quad (11)$$

где m — единичный вектор, определяющий направление оптической оси приемного устройства.

Предположим, что приемник расположен на оси пучка, а его угол поля зрения мал ($\Delta\omega \ll 1$). Кроме того, будем считать, что угловой размер апертуры (при наблюдении из начала координат) превышает угол поля зрения приемника. Тогда из (7)–(9) и (11) получим

$$P_0 = e^{-\tau_3} f(\xi - \tau_3); \quad (12)$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{4\pi} \tau_3 e^{-\tau_3} f(\xi - \tau_3) \Delta\omega; \quad (13)$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{8\pi} \tau_3 \Delta\omega \int_{\tau_3}^{\infty} e^{-\mu} f(\xi - \mu) \ln \frac{\mu^2 + \tau_3^2 - 2\mu \tau_3 \cos \theta_0}{(\mu - \tau_3)(\mu - \tau_3 \cos \theta_0)}, \quad (14)$$

где θ_0 — апертурный угол приемника.

Как следует из (12)–(14), искажение прошедшего через толщу рассеивающей среды сигнала в рассматриваемом случае обусловлено двукратным рассеянием (и более высокими порядками рассеяния). Характер этих искажений для импульса прямоугольной формы иллюстрируется рис. 1, где изображено семейство кривых $P_2(\tau_3, \bar{e}_3, u)$ ($u = \xi - \tau_3$) для различных значений радиуса a входного зрачка приемника и на-

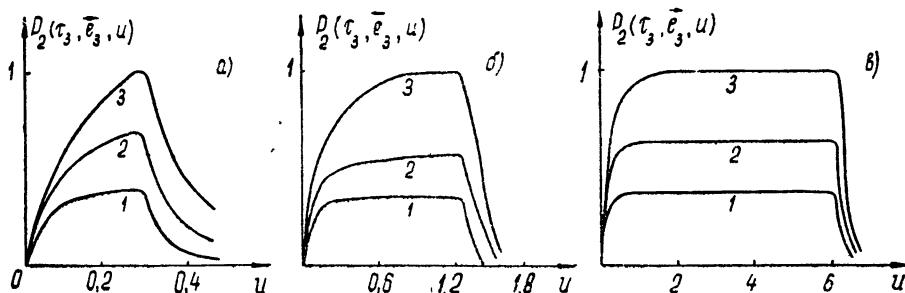


Рис. 1. Зависимость $P_2(\tau_3, e_3, u)$ от $u = \xi - \tau_3$ для $\tau_3 = 2$, $\Delta\omega = 2,4 \cdot 10^{-4}$ ($\sqrt{\Delta\omega/\pi} = 1^\circ$) и различных a и $\Delta\xi_0$:
а) $\Delta\xi_0 = 0,3$, б) $\Delta\xi_0 = 1,2$, в) $\Delta\xi_0 = 6$, 1— $a = 0,1$, 2— $a = 0,2$, 3— $a = 0,4$.

чальной длительности импульса $\Delta\xi_0$. Форма импульса P_2 существенно зависит от соотношения a и $\Delta\xi_0$: при $\Delta\xi_0 \leq a$ огибающая сигнала P_2 резко отличается от прямоугольной, при $\Delta\xi_0 \gg a$ искажение формы сигнала, обусловленное двукратно рассеянным излучением, несущественно. Амплитуда P_2 при постоянном a увеличивается с ростом $\Delta\xi_0$. Рост сигнала при увеличении $\Delta\xi_0$ связан с увеличением рассеивающего объема.

Зависимость амплитуд импульсов P_0 , P_1 и P_2 от τ_3 , рассчитанная по формулам (12)–(14), показана на рис. 2. Из рис. 2 видно, что до

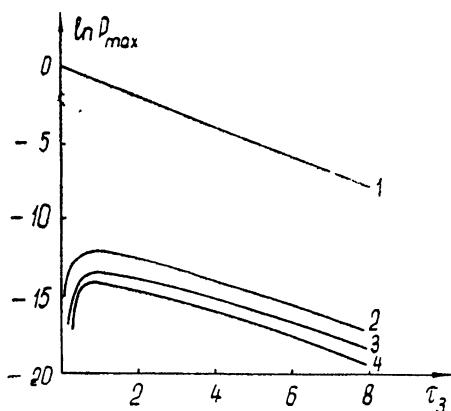


Рис. 2. Зависимость $P_{0\max}$, $P_{1\max}$ и $P_{2\max}$ от τ_3 при $\lambda = 0,8$ и $\Delta\omega = 2,4 \cdot 10^{-4}$:

1—ослабление нерассеянной компоненты импульса $P_{0\max}$; 2—изменение однократно рассеянной компоненты $P_{1\max}$; 3 и 4—изменение двукратно рассеянной компоненты $P_{2\max}$ соответственно при $\Delta\xi_0 = 0,3$, $a = 0,4$ и $\Delta\xi_0 = 0,3$, $a = 0,1$.

$\tau_3 \sim 1$ наблюдается рост однократно и двукратно рассеянного излучения; при дальнейшем увеличении τ_3 $P_{1\max}$ и $P_{2\max}$ убывают по экспоненте. Ослабление рассеянных компонент излучения при больших* τ_3 происходит несколько медленней, чем ослабление нерассеянной компоненты.

* Для рассматриваемого приемника с $\Delta\omega = 2,4 \cdot 10^{-4}$ и $a = 0,1$ соотношения (13), (14) справедливы при $\tau_3 \ll 8$.

Пусть теперь приемник имеет большой угол поля зрения. Для определенности будем считать, что приемник расположен симметрично относительно оси пучка и $\Delta\omega = 2\pi$. Очевидно, что в этом случае приемник будет перехватывать все рассеянное вперед излучение, попадающее на его апертуру. Используя (8), (9) и (11), нетрудно найти принятаемое таким приемником нерассеянное и однократно рассеянное излучение:

$$P_0(\tau_3, e_3, \xi) = e^{-\tau_3} f(\xi - \tau_3); \quad (15)$$

$$P_1(\tau_3, e_3, \xi) = \lambda \int_0^a s ds \int_{\tau}^{s+\tau_3} d\mu f(\xi - \mu) \frac{\exp(-\mu)}{s^2 + (\mu - \tau_3)^2} \\ (\tau^2 = s^2 + \tau_3^2, \quad s^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2). \quad (16)$$

Вклад двукратно рассеянного излучения в принятаемый сигнал можно оценить с помощью соотношения (13), положив в нем $\Delta\omega = 2\pi$.

Из (16) видно, что в случае приемника с большим углом поля зрения искажение сигнала, прошедшего через толщу рассеивающей среды, в значительной мере связано с приемом однократно рассеянного излучения. На рис. 3 показана форма принятаемого сигнала, обусловлен-

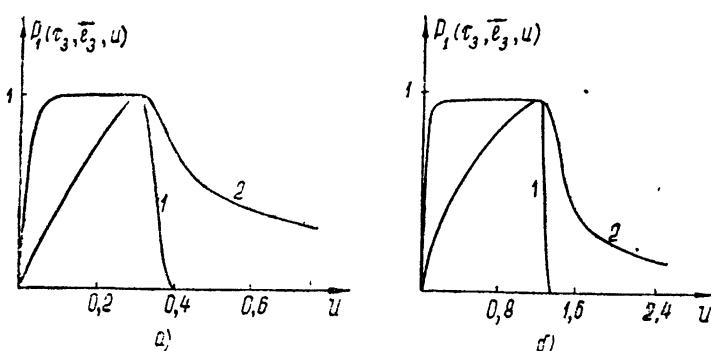


Рис. 3. Форма принятаемого сигнала, обусловленного однократно рассеянным излучением, для приемника с $\Delta\omega=2\pi$:

а) $\Delta\xi_0=0,3$, б) $\Delta\xi_0=1,2$; 1— $a=0,1$, 2— $a=5$.

ногод однократно рассеянным излучением. Огибающие импульсов P_1 построены для двух длительностей исходного прямоугольного импульса излучения и для различных значений радиуса входного зрачка приемника. Форма огибающей сигнала P_1 существенно меняется при изменении $\Delta\xi_0$ и a . Импульс P_1 достигает своего максимального значения за промежуток времени от τ_3 до $\tau_3 + \Delta\xi_0$, если $\Delta\xi_0 < a$, и за время от τ_3 до $\tau_3 + a$, если $\Delta\xi_0 > a$. Длительность спада импульса P_1 определяется размером входного зрачка приемника. Если $\Delta\xi_0 \gg a$, то форма принятого сигнала будет слабо отличаться от исходной.

На рис. 4 показана зависимость амплитуд сигналов, обусловленных нерассеянной и однократно рассеянной компонентами излучения, от τ_3 . Из рис. 4 видно, что в среде с изотропным рассеянием однократно рассеянное излучение в угле $0 < \theta < \pi/2$ быстро растет с увеличением τ_3 и становится сравнимым с нерассеянной компонентой узкого остронаправленного пучка при $\tau_3 \sim 5$. Если приемник имеет малый входной

зрачок (кривая 3), то вклад однократно рассеянного излучения в принимаемый сигнал будет незначителен.

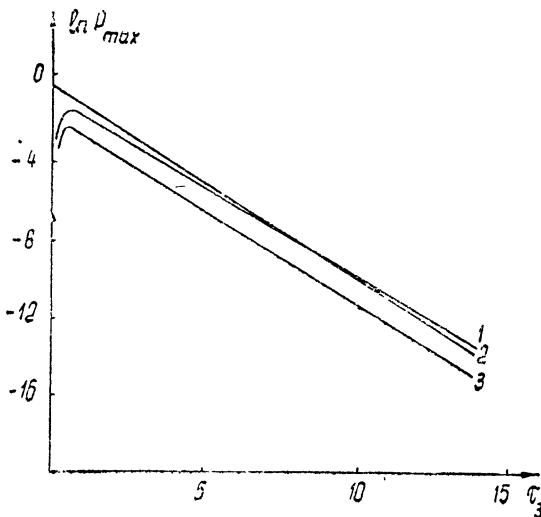


Рис. 4 Зависимость $P_{0\max}$ и $P_{1\max}$ от τ_3 при $\lambda=0,8$ и $\Delta\omega=2\pi$:

1— $-P_{1\max}$ соответственно при $\Delta\xi_0=1,2$, $a=5$ и $\Delta\xi_0=1,2$, $a=0,1$,
2—ослабление $P_{0\max}$

3. ИМПУЛЬС, «ОТРАЖЕННЫЙ» ТОЛЩЕЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ*

При распространении сигнала в мутной среде часть его энергии рассеивается под углами θ к направлению нерассеянного пучка света, большими $\pi/2$. Это рассеянное излучение мы будем называть отраженным от толщи мутной среды.

Если приемник с телесным углом поля зрения $\Delta\omega=2\pi$ помещен в плоскости $\tau_3=0$ симметрично относительно оси светового пучка, то в приближении однократного рассеяния интенсивность отраженного от среды сигнала будет определяться следующим выражением:

$$P_1^-(0, -e_3, \xi) = \lambda \int_0^a s ds \int_s^\infty d\mu f(\xi - \mu) \frac{\exp(-\mu)}{s^2 + \mu^2}. \quad (17)$$

На рис. 5 приведены кривые, изображающие зависимость P_1^- от ξ , для различных значений длительности прямоугольного импульса $\Delta\xi_0$ и радиуса a входного зрачка приемника. Как видно из этого рисунка, длительность фронта и спад импульса растут с увеличением $\Delta\xi_0$ и a . С увеличением радиуса входного зрачка приемника заметно растет и амплитуда импульса, хотя максимальное значение освещенности (см. рис. 6) быстро падает при удалении от оси пучка. Амплитуда импульса при малых a слабо зависит от длительности $\Delta\xi_0$, при больших a она растет с увеличением $\Delta\xi_0$.

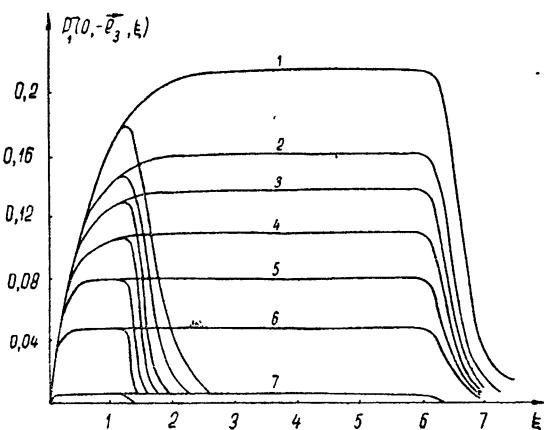
Существенный вклад в отраженный от среды сигнал вносит и двукратно рассеянное излучение. Оно сравнительно изотропно по направле-

* Мутная среда предполагается изотропно рассеивающей. Заметим, что для «хороших» мутных сред индикатриса рассеяния при углу $\theta > \pi/2$ близка к сферической. В подобных мутных средах однократно рассеянное излучение при $\theta > \pi/2$ будет такое же с точностью до постоянного множителя, как и в среде с изотропным рассеянием.

ниям, поэтому для простоты рассмотрим приемником с малым углом поля зрения. Зависимость $P_2^-(\xi)$ для такого приемника при различных $\Delta\xi_0$ показана на рис. 7. Кривые

Рис. 5. Зависимость $P_1^-(0, -e_3, \xi)$ от ξ при $\lambda=0,8$, $\Delta\omega=2\pi$, $\Delta\xi_0=1,2$ и 6 и различных a :

1— $a=1$; 2— $a=0,5$, 3— $a=0,4$; 4— $a=0,3$,
5— $a=0,2$, 6— $a=0,1$, 7— $a=0,01$.



построены для случая приемника, ориентированного в направлении излучения и расположенного в плоскости $\tau_3=0$ на различных расстояниях s от источника излучения. При малых s длительность фронта им-

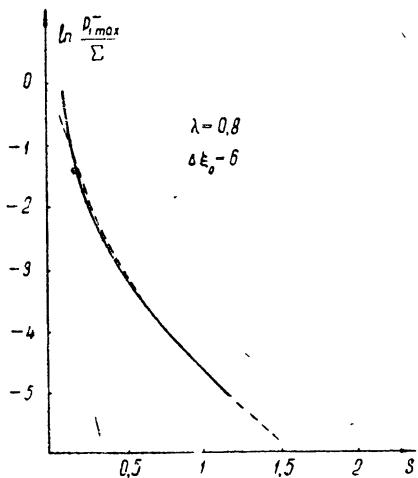


Рис. 6. Изменение максимальной освещенности однократно рассеянным излучением в плоскости $\tau_3=0$ при увеличении расстояния от оси пучка. Пунктиром изображена аналогичная зависимость для двукратно рассеянного излучения.

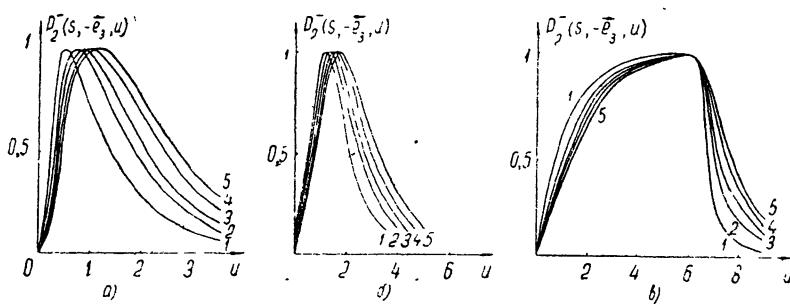


Рис. 7. Зависимость $P_2^-(s, -e_3, u)$ от $u=\xi-s$ при различных s и $\Delta\xi_0$: а) $\Delta\xi_0=0,3$, б) $\Delta\xi_0=1,2$, в) $\Delta\xi_0=6$, 1— $s=0,1$, 2— $s=5,0$, 3— $s=4$, 4— $s=3$, 5— $s=10$.

пульса P_2^- близка к $\Delta\xi_0$. С ростом s длительность фронта импульсов с малой исходной длительностью $\Delta\xi_0$ ($\Delta\xi_0 < 1$) быстро растет и становится порядка единицы ($\Delta\xi_0 \sim 1$), в то время как длительность фронта импульсов при $\Delta\xi_0 \gg 1$ меняется незначительно.

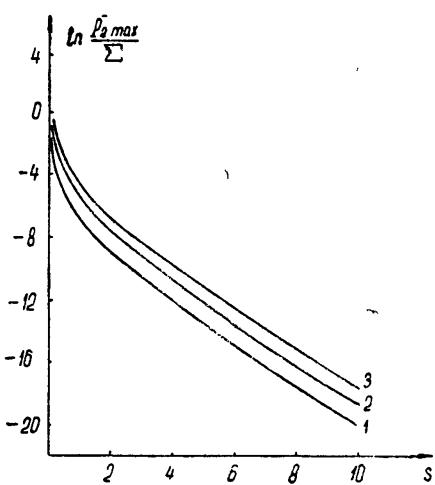
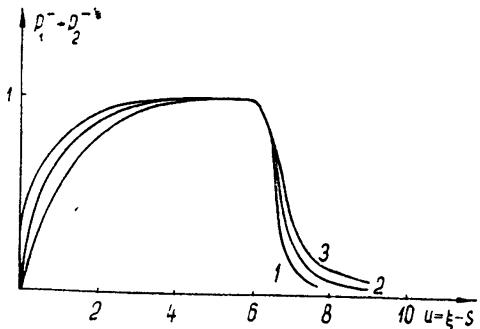


Рис. 8. Изменение максимальной освещенности двукратно рассеянным излучением в плоскости $\tau_3 = 0$ при увеличении расстояния от оси пучка для $\lambda = 0,8$ и различных $\Delta\xi_0$:

$$1 - \Delta\xi_0 = 0,3, 2 - \Delta\xi_0 = 1,2, 3 - \Delta\xi_0 = 6.$$

показаны огибающие импульсов, отраженных от толщи мутной среды, с учетом однократно и двукратно рассеянного излучения. Заметим, что

Рис. 9. Форма огибающей импульса, отраженного от толщи мутной среды, с учетом однократно и двукратно рассеянного излучения:
1— $s=0,1$; 2— $s=0,5$, 3— $s=1$.



для импульсов малой длительности и приемника с большой апертурой амплитуда отраженного сигнала пропорциональна $\Delta\xi_0$.

Очевидно, что все оценки в приближении однократного и двукратного рассеяния справедливы в том случае, когда рассеяния высокого порядка дают незначительный вклад в принимаемый приемником сигнал. В сильно поглощающих средах (λ мало) это условие, как правило, выполняется. Если же вероятность выживания кванта близка к единице ($\lambda \sim 1$) то в общем случае необходимо учитывать рассеяния высших порядков. Некоторое представление о необходимости учета рассеяний

С увеличением s растет и длительность спада импульса. Для очень коротких импульсов (например, δ -импульса) спад импульса P_2^- при $\xi \gg s$ происходит по закону $e^{-\xi}$, в то время как спад импульса, обусловленного однократно рассеянным излучением,—по закону $e^{-\xi/\xi^2}$. На рис. 8 приведена зависимость амплитуды P_2^- от s для импульсов с различной длительностью $\Delta\xi_0$. Указанные кривые характеризуют также распределение освещенности в плоскости $\tau_3 = 0$, обусловленной двукратно рассеянным излучением в бесконечной толще мутной среды. Зависимость от s «средней освещенности» двукратно рассеянным излучением ($P_2^- 2\pi/\Sigma\Delta\omega$) при $\lambda = 0,8$ показана на рис. 6 (пунктирная линия). В области $0,1 \leq s \leq 1$ двукратно и однократно рассеянные излучения дают примерно одинаковый вклад. На рис. 9

высокого порядка может быть получено из сравнения максимальной освещенности, обусловленной однократно и двукратно рассеянным излучением. Так, в среде со сферической индикатрисой при $\lambda = 0,8$ вклад однократно и двукратно рассеянного излучения в освещенность на оси пучка одинаков уже при τ_3 порядка двух, тогда как при $\lambda = 0,1$ это наблюдается при $\tau_3 \sim 10$.

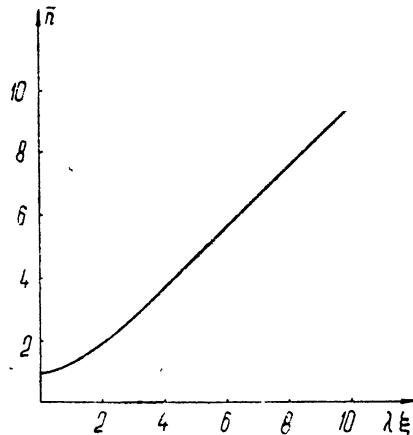
Оценку средней кратности рассеяния \bar{n} выходящего из полубесконечной среды излучения можно сделать, используя решение задачи о рассеянии бесконечно широкого пучка в одномерной мутной среде. Строгое решение этой задачи приводит к следующему выражению для \bar{n} :

$$\bar{n} = \frac{\sum n \lambda^n I_n}{\sum \lambda^n I_n} = \frac{\lambda \xi J_0(\lambda \xi)}{J_1(\lambda \xi)} - 1, \quad (18)$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Зависимость \bar{n} от $\lambda \xi$ показана на рис. 10. Из этого рисунка видно, что в течение времени $\xi \leq 2/\lambda$ после излучения импульса основной вклад в освещенность дает однократно и двукратно рассеянное излучение.

Рис. 10. Зависимость средней кратности рассеяния \bar{n} излучения, выходящего из полубесконечной одномерной среды, от $\lambda \xi$.



Следовательно, фронт отраженного импульса в основном определяется однократно и двукратно рассеянным излучением. При больших ξ (на спаде импульса) необходимо учитывать рассеяния более высокой кратности.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Романова, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1, № 10, 1022 (1965).
- W. M. Irvine, Bull. Astron. Inst. Netherlands, 17, № 4, 266 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 июня 1966 г.

ON PROPAGATION OF LIGHT IMPULSES OF SMALL DURATION IN A TURBID MEDIUM

A. M. Belyantsev, L. S. Dolin, V. A. Savel'ev

Considers the time distortions of the impulse signal transmitted by a narrow light beam through the scattering medium. Under the assumption of a spherically-isotropic scattering there investigated the pulling of impulse fronts and the character of its amplitude attenuation as dependent on the optical path, the aperture sizes, and the pattern beamwidth of the receiver and the initial impulse duration. The envelope has been found as well as the amplitude of the light signal developed as a result of backscattering of the main impulse in the layer of the turbid medium.

УДК 621.371.134 : 519.25

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

B. M. Комиссаров

Методом последовательных приближений вычисляется поле, связанное с каждым из лучей, приходящих в точку наблюдения, для точечного источника, помещенного в плоскослоистую среду со случайной неоднородностью. Рассчитаны средний квадрат флуктуаций фазы и амплитуды поля и функция их взаимной корреляции в случае прихода в точку наблюдения только одного луча. Рассмотрен также случай прихода нескольких лучей. Показано, что флуктуации амплитуды и фазы результирующего поля распределены нормально. Вычислены моменты второго порядка, характеризующие распределение флуктуаций. Теория иллюстрируется численными расчетами для частного вида зависимости $n(z)$.

При исследовании распространения волн методом геометрической оптики сравнительно просто находятся как качественные, так и количественные характеристики поля. Результаты применения метода геометрической оптики к расчету поля в случайных средах с постоянными средними характеристиками изложены в книге Чернова [1]. В обзоре [2], написанном Денисовым и Зверевым, содержатся результаты аналогичных исследований для плоской волны, падающей нормально на слой, в котором среднее значение показателя преломления $n(z)$ зависит от одной координаты z . В этой работе получены следующие условия применимости лучевой теории для расчета статистических характеристик поля при учете регулярной рефракции:

$$\lambda \ll a, \quad \lambda L \ll a^2, \quad (1)$$

где λ — длина волны в однородной среде, a — масштаб случайной неоднородности, $L = \int_0^z dz/n(z)$ — величина, представляющая собой групповой путь луча в плазме. В [2] приводятся также численные оценки расстояний, на которых выполняются эти условия при распространении электромагнитных волн в ионосфере, турбулентной атмосфере и звуковых волн в море в обычно используемых диапазонах частот. Однако приведенные в [1] данные Либермана для масштаба случайных неоднородностей в приповерхностном слое моря ($a \sim 10^2$ см), на которых основываются авторы [2], не являются достаточно полными. Более поздние измерения указывают на наличие масштабов $a \sim 1 - 10$ м в приповерхностном слое и масштабов $a \sim 10 - 100$ м в глубокой воде [3, 4].

Это расширяет возможности применения геометрической теории.

Следует заметить, что помимо ограничений (1), связанных с дифракционными эффектами, существуют ограничения, связанные с наличием областей неприменимости геометрической теории к расчету среднего (регулярного) поля. В настоящей работе точка наблюдения предполагается удаленной на достаточное расстояние от этих областей, так что условия применимости геометрической оптики считаются выполненными,

Целью работы является исследование статистических характеристик поля точечного излучателя, помещенного в плоскослоистую среду со слабой случайной неоднородностью. Относительно характера среды мы предполагаем, что среднее значение показателя преломления n есть функция только координаты z , а случайные отклонения от среднего значения $\alpha\mu(r)$ малы ($\alpha \ll 1$). Вообще говоря, мы должны определить $\mu = \mu(r, \omega)$, где ω — точки некоторого вероятностного пространства Ω , на котором задана вероятностная мера dP , и функция $\mu(r, \omega)$ измерима относительно $dP(\omega)$. На первом этапе решения мы отвлечемся от случайного характера показателя преломления и будем считать, что $\mu(r)$ — какая-либо реализация из множества функций $\mu(r, \omega)$. Вместе с тем мы всюду будем говорить, что наряду с регулярной имеется случайная неоднородность среды. Будем также считать, что функции $n(z)$ и $\mu(r)$ непрерывно дифференцируемы.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФЛУКТУАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как известно, в геометрической оптике рассматриваются нормальные конгруэнции лучей, т. е. двухпараметрические семейства лучей, нормальных к некоторой поверхности, которая называется фронтом волны. Введем в качестве параметров углы выхода ϑ_0 и φ_0 луча из излучателя и свяжем с каждой нормальной конгруэнцией лучей поле

$$U(R) = A(R) \exp[ik\xi(R)], \quad (2)$$

где $A(R)$ — амплитуда поля (она может быть комплексной), $k\xi(R)$ — его фаза. Волновое число k отнесено к началу координат, где помещен источник. Полное поле в точке наблюдения $R(X, Y, Z)$ определяется как сумма полей, связанных со всеми лучами, приходящими в R .

Амплитуда, как известно, определяется выражением

$$A = A_0 \left[\frac{1}{n(\sigma) + \alpha\mu(\sigma)} \frac{dS_0}{dS} \right]^{1/2}, \quad (3)$$

в котором dS_0/dS — якобиан преобразования начального волнового фронта S_0 в S с помощью лучей, A_0 — значение амплитуды на поверхности S_0 . Мы в дальнейшем будем опускать постоянные множители, характеризующие мощность излучателя. Тогда $A_0(R) \rightarrow 1/R$ при $R \rightarrow 0$. Выбирая в качестве криволинейных координат на поверхности углы выхода луча ϑ_0 и φ_0 , получим, что вдоль этого луча

$$A[r(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma)] = \left[\frac{\sin \vartheta_0}{n[z(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma)] + \alpha\mu[r(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma)]} \right]^{1/2} \times \\ \times |(r_\vartheta)_\xi (r_\varphi)_\xi|^{-1/2}. \quad (4)$$

Заметим, что в настоящей статье будут употребляться обозначения $f_\theta = df/d\vartheta_0$ при постоянном значении σ и $(f_\theta)_\xi = df/\partial\vartheta_0$ при постоянном значении какой-либо другой величины ξ . Это связано с тем, что иногда нам будет необходимо задавать текущую точку на луче не посредством параметра σ , а посредством других параметров, например, ξ , z и др. Тогда сам путь σ должен рассматриваться как функция соответствующего параметра и углов выхода луча.

Чтобы найти амплитуду A , нужно решить уравнение

$$R = r(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma). \quad (5)$$

В соответствии с [5] будем искать $r(\sigma)$ в виде ряда по степеням α . Тогда

$$R = r_0(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma) + \alpha r(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma) + O(\alpha^2). \quad (9)$$

Параметры ϑ_0 , φ_0 , σ лучей, приходящих в R , также будем искать в виде

$$\begin{aligned}\vartheta_0 &= \vartheta_{00} + \sigma \vartheta_{0\alpha} + O(\sigma^2), \quad \varphi_0 = \varphi_{00} + \alpha \varphi_{0\alpha} + O(\alpha^2), \\ \sigma &= \sigma_0 + \alpha \sigma_\alpha + O(\alpha^2).\end{aligned}\tag{7}$$

Значения параметров ϑ_{00} , φ_{00} и σ_0 определяются из уравнения

$$R = r_0(\vartheta_{00}, \varphi_{00}, \sigma_0),\tag{8}$$

которое, вообще говоря, имеет не единственное решение.

Теперь, когда мы определили ϑ_{00} , φ_{00} как углы, под которыми должен выйти, а σ_0 — как путь, который должен пройти луч в среде без случайной неоднородности, чтобы попасть в точку наблюдения, будем для краткости обозначать ϑ_{00} , φ_{00} , $\vartheta_{0\alpha}$, $\varphi_{0\alpha}$ соответственно через ϑ_0 , φ_0 , ϑ_α , φ_α . Дифференцируя далее (6) по α и полагая $\alpha = 0$, получим

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha r_{0\vartheta}(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma_0) + \varphi_\alpha r_{0\varphi}(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma_0) + \sigma_\alpha r'_0(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma_0) + \\ + r_\alpha(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma_0) = 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Функция $r_\alpha(\sigma)$ является, согласно [5], решением уравнения

$$(n_0 r'_\alpha)' + \left(r'_0 \frac{dn_0}{dz_0} z_\alpha \right)' = \nabla \mu_0 - (n_0 r'_0)' \equiv f(\sigma)\tag{10}$$

при условии

$$r_\alpha(0) = r'_\alpha(0) = 0.\tag{11}$$

Интегрируя уравнение (10), получим

$$x_\alpha(\sigma) = \int_0^\sigma \left[-\frac{x'_0}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} z_\alpha + \frac{1}{n_0} \int_0^t f_x(t_1) dt_1 \right] dt;\tag{12}$$

$$y_\alpha(\sigma) = \int_0^\sigma \left[-\frac{y'_0}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} z_\alpha + \frac{1}{n_0} \int_0^t f_y(t_1) dt_1 \right] dt;\tag{13}$$

$$z_\alpha(\sigma) = \frac{z'_0}{\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0} \left[(\sigma_\vartheta)_z \int_0^\sigma n_0 z'_0 f_z(t) dt - \int_0^\sigma (\sigma_\vartheta)_z n_0 z'_0 f_z(t) dt \right].\tag{14}$$

Вычислим теперь ϑ_α , φ_α и σ_α . Принимая во внимание, что $r_{0\vartheta} r'_{0\vartheta} = 0$ и $r_{0\varphi} r'_0 = 0$, из уравнения (9) получим

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha &= \frac{x_\alpha \cos \vartheta - z_\alpha \sin \vartheta}{z_{0\vartheta} \sin \vartheta - x_{0\vartheta} \cos \vartheta}, \quad \varphi_\alpha = \frac{y_\alpha}{x_0}, \\ \sigma_\alpha &= \frac{z_\alpha x_{0\vartheta} - x_\alpha z_{0\vartheta}}{z_{0\vartheta} \sin \vartheta - x_{0\vartheta} \cos \vartheta},\end{aligned}\tag{15}$$

где ϑ — угол, определяющий направление касательной к лучу в текущей точке. Здесь и в дальнейшем после проведения промежуточных выкладок будем считать $\varphi_0 = \pi/2$, что не ограничивает общности рассмотрения. Заметим, что имеют место следующие соотношения, которыми нам придется неоднократно пользоваться:

$$\begin{aligned}
 \xi_{0\theta} &= (\xi_{0\theta})_z + \frac{n_0}{\cos \vartheta} z_{0\theta}, \quad z_{0\theta} = (z_{0\theta})_\xi + \frac{\cos \vartheta}{n_0} \xi_{0\theta}, \\
 x_{0\theta} &= (x_{0\theta})_\xi + \frac{\sin \vartheta}{n_0} \xi_{0\theta}, \quad (z_{0\theta})_\xi = \operatorname{tg} \vartheta (x_{0\theta})_\xi, \\
 (\xi_{0\theta})_x &= -\frac{n_0}{\sin \vartheta} (x_{0\theta})_\xi, \quad (\xi_{0\theta})_z = \frac{n_0 \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} (x_{0\theta})_\xi, \\
 (\sigma_{0\theta})_x &= (\sigma_{0\theta})_z + \frac{1}{\cos \vartheta} (z_{0\theta})_x, \quad (\sigma_{0\theta})_z = -\frac{1}{\cos \vartheta} z_{0\theta}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Подставим теперь в формулу (4) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma) + \alpha \mathbf{r}_a(\vartheta_0, \varphi_0, \sigma)$, а также значения параметров ϑ_0 , φ_0 и σ в соответствии с формулами (6)–(15) и проведем в (4) разложение по степеням α с точностью до членов порядка α^2 . Тогда окажется, что в окончательное выражение для A будут входить члены, пропорциональные функции $\mu(R)$, а также члены, содержащие интегралы вдоль луча от функций, которые зависят от μ и от различных первых и вторых производных функции μ по пространственным координатам. Именно эти последние в интересующем нас случае распространения волны на расстояния, существенно превышающие масштаб случайной неоднородности среды, играют определяющую роль. Так, при вычислении среднеквадратичных величин «вторые производные» дают, грубо говоря, члены $\sim (\sigma/a)^3$, в то время как остальные имеют порядок $(\sigma/a)^v$, $v \ll 2$. Поэтому мы оставим только интегралы от вторых производных.

Имея в виду все сказанное выше и опуская громоздкие преобразования, выпишем теперь формулу для амплитуды поля, связанного с лучом, приходящим в R , которой мы будем в дальнейшем пользоваться:

$$\begin{aligned}
 A(R) \simeq A_0(R) \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2 \sin \vartheta_0} \left[\int_0^{\vartheta_0} x_0 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} dt - \frac{1}{x} \int_0^{\vartheta_0} x_0^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} dt + \right. \right. \\
 + \frac{\cos^2 \vartheta}{\cos \vartheta_0 [x_{0\theta}(\sigma_0)]_\xi} \left(X \int_0^{\vartheta_0} (x_{0\theta})_\xi \Phi(t) dt - \int_0^{\vartheta_0} x_0 (x_{0\theta})_\xi \times \right. \\
 \times \Phi(t) dt - [x_{0\theta}(\sigma_0)]_z \int_0^{\vartheta_0} (x_{0\theta})_\xi F(t) dt + \\
 \left. \left. + \int_0^{\vartheta_0} (x_{0\theta})_\xi (x_{0\theta})_z F(t) dt \right] \right\} + O(\alpha^2),
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$A_0(R) = \left(\frac{\sin \vartheta_0}{n(z) X} \right)^{1/2} [x_{0\theta}^2(\sigma_0) + z_{0\theta}^2(\sigma_0)]_\xi^{-1/2}; \tag{18}$$

$$\Phi(t) = \sin^2 \vartheta \cos \vartheta_0 \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{\cos(2\vartheta)}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} \right]; \tag{19}$$

$$F(t) = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \sin \vartheta_0 \left(-\operatorname{tg} \vartheta \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} \right). \tag{20}$$

При $\xi(0) = 0$ фаза $\psi \equiv k\xi(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\psi = k \int_0^{\sigma} n[z(t)] dt + \sigma k \int_0^{\sigma} \mu[\mathbf{r}(t)] dt, \quad (21)$$

в которой интегрирование ведется вдоль случайного луча, проходящего через \mathbf{R} . В соответствии с формулами (6), (7)

$$\begin{aligned} \psi = & k \int_0^{\sigma_0} n_0 dt + k \sigma \int_0^{\sigma_0} \mu_0 dt + k \alpha \sigma_0 n_0 + \\ & + k \alpha \vartheta_\alpha \int_0^{\sigma_0} \frac{dn_0}{dz_0} z_{00} dt + k \alpha \int_0^{\sigma_0} \frac{dn_0}{dz_0} z_\alpha(t) dt + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (22)$$

С помощью формул (14), (15) после некоторых преобразований найдем, что сумма последних трех членов равна нулю. Поэтому*

$$\psi(\mathbf{R}) = \psi_0(\mathbf{R}) + \sigma k \int_0^{\sigma_0} \mu_0 dt + O(\alpha^2). \quad (23)$$

Тот факт, что при интегрировании регулярной части показателя преломления по случайному пути не вошли члены первого порядка малости по α , можно было бы непосредственно получить из принципа Ферма.

Итак, формулы (2), (17) и (23) определяют в искомом приближении поле, связанное с каждым из лучей, приходящих в \mathbf{R} . Производя суммирование по всем таким лучам, получим результирующее поле в точке наблюдения.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ПРИХОДА ОДНОГО ЛУЧА

В этом разделе рассмотрим случай, когда в точку наблюдения приходит только один луч. Для дисперсии фазы полного поля получаем

$$\langle (\psi - \langle \psi \rangle)^2 \rangle = \alpha^2 k^2 \int_0^{\sigma_0} \int \langle \mu^2 \rangle N_{12} dt_1 dt_2 + O(\alpha^4). \quad (24)$$

Будем предполагать, что коэффициент корреляции N_{12} зависит только от расстояния между точками 1 и 2, т. е. $N_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = N(r)$. Учитывая, что функция $\langle \mu^2 \rangle$ мало меняется на расстояниях порядка масштаба случайной неоднородности, найдем

$$\langle (\Delta\psi)^2 \rangle \simeq 2\alpha^2 k^2 \int_0^{\sigma_0} \langle \mu^2 \rangle dt \int_0^\infty N(r) dr. \quad (25)$$

Эта формула отличается от формулы, полученной при нормальном падении на слой [2], тем, что в ней интеграл от $\langle \mu^2 \rangle$ берется не вдоль прямой, а вдоль искривленного луча.

В теоретических исследованиях для простоты часто делается предположение о статистической однородности и изотропности среды, что является некоторой идеализацией. Однако можно довольно легко вычислить дисперсию фазы для следующей модели корреляционной функции случайной неоднородности среды. Будем считать, что

* К регулярной фазе $\psi_0(\mathbf{R})$ будем относить слагаемое $-i\pi N/2$, которое появляется, если луч коснулся N каусик до того, как пришел в \mathbf{R} .

$$N_{12} = N_{12} \left(\frac{|x_2 - x_1|}{a_x(r_1, r_2)}, \frac{|y_2 - y_1|}{a_y(r_1, r_2)}, \frac{|z_2 - z_1|}{a_z(r_1, r_2)} \right). \quad (26)$$

В то же время будем предполагать, что функции a_x , a_y , a_z незначительно изменяются на тех расстояниях, на которых N_{12} изменяется существенно. Поэтому при интегрировании по относительным координатам ($x = x_2 - x_1$ и т. д.) эти функции так же, как $\langle \mu^2 \rangle$, могут считаться постоянными. Такая среда является статистически квазиоднородной и анизотропной. В пользу такой модели свидетельствует сравнение экспериментальных результатов некоторых работ*.

Чтобы вычислить статистические характеристики поля в такой среде, зададим явный вид коэффициента корреляции флуктуаций показателя преломления. В расчетах часто используется гауссовская корреляционная функция

$$N_{12} = \exp \left\{ - \frac{(r_2 - r_1)^2}{a_x^2} - \frac{(z_2 - z_1)^2}{a_z^2} \right\}. \quad (27)$$

В этом случае, учитывая соотношение (24) и применяя методику вычислений, проиллюстрированную в [5], найдем

$$\langle (\Delta\psi)^2 \rangle = a^2 \pi^{1/2} k^2 \int_0^{\sigma_0} \frac{\langle \mu^2 \rangle a_x a_z dt}{(a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}. \quad (28)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль регулярного луча. При нормальном падении на слой ($\theta_0 \equiv \theta \equiv 0$) и постоянных $\langle \mu^2 \rangle$ и a_z эта формула переходит в соответствующую формулу работы [9]. Заметим, что функция $a(z) = a_x a_z (a_z^2 \sin^2 \theta + a_x^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}$ определяет масштаб случайной неоднородности среды в направлении касательной к лучу в текущей точке. Таким образом, искривление регулярного луча может существенно влиять на статистические характеристики поля. Как показывают экспериментальные данные [4, 6, 8], в плоскостной среде обычно горизонтальный масштаб неоднородностей (a_x , a_y) больше вертикального (a_z). Поэтому флуктуации фазы будут больше вдоль тех лучей, которые проходят больший путь в горизонтальном направлении.

Переходя к вычислению среднего квадрата флуктуаций амплитуды поля и функции взаимной корреляции флуктуаций амплитуды и фазы, будем опять для простоты и краткости изложения считать, что $N_{12} = N(r)$. Тогда после нескольких громоздких выкладок для среднего квадрата относительных флуктуаций амплитуды получим

$$V = \frac{a^2 \langle A_x^2 \rangle}{A_0^2} = a^2 C \int_0^{\sigma_0} \langle \mu^2 \rangle \left\{ 3 \frac{L^2(t) [L(\sigma_0) - L(t)]^2}{L^2(\sigma_0)} + \right. \\ \left. + 2 \frac{L(t) [L(\sigma_0) - L(t)]}{L(\sigma_0)} \cos^2 \theta_0 \frac{M(t) [M(\sigma_0) - M(t)]}{M(\sigma_0)} + \right. \\ \left. + 3 \cos^4 \theta_0 \frac{M^2(t) [M(\sigma_0) - M(t)]^2}{M^2(\sigma_0)} \right\} dt, \quad (29)$$

* Кроме уже упомянутых работ [3, 4], относящихся к морским измерениям, см. также работы [6-8] по ионосферным данным.

где

$$L(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{n(z)}, \quad M = \frac{(x_{00})_z}{\cos \vartheta_0}, \quad C = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (r^{-2} N_{rr} - r^{-3} N_r) dr. \quad (30)$$

Полученная формула неприменима, если на пути распространения луча имеется область, где $n(z) \rightarrow 0$, а также в случае, когда в точке наблюдения $M(\sigma_0) \rightarrow 0$ (фактор фокусировки обращается в бесконечность). Однако последний случай не реализуется, если в точку наблюдения приходит один луч. Формула (29) при постоянном $n(z)$ переходит в известную формулу Бергмана [1].

Из общих соображений следует (см., например, [10]), что в рассматриваемом случае прихода одного луча средний квадрат относительных флуктуаций амплитуды и дисперсия фазы в дальней зоне ($\lambda L \gg a^2$) равны между собой и отличаются от выражения для среднего квадрата флуктуаций фазы в ближней зоне множителем $1/2$. Тогда формулы (25) и (29) полностью определяют среднеквадратичные характеристики поля как в дальней, так и в ближней зонах.

Приведем теперь, опуская громоздкие промежуточные вычисления, выражение для корреляционной функции флуктуаций амплитуды и фазы:

$$K = \frac{a^2 \langle A_a \Psi_a \rangle}{A_0} = -k C_1 a^2 \int_0^{\sigma_0} \left\{ \frac{L(t) [L(\sigma_0) - L(t)]}{L(\sigma_0)} + \right. \\ \left. + \cos^2 \vartheta \cos(2\vartheta) \frac{M(t) [M(\sigma_0) - M(t)]}{M(\sigma_0)} \right\} \langle \mu^2 \rangle dt, \quad (31)$$

где $C_1 = 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} r^{-1} N_r dr$. Формулы (25), (29) и (31) позволяют вычислить коэффициент взаимной корреляции $R_{A\Phi}$:

$$R_{A\Phi} = \frac{K}{(\langle \Delta \Phi^2 \rangle V)^{1/2}}. \quad (32)$$

Для точного вычисления коэффициента $R_{A\Phi}$ необходимо знать явный вид зависимости n и $\langle \mu^2 \rangle$ от z , а также уравнение траектории луча. Однако для достаточно плавных траекторий можно, разбивая среду на однородные слои, произвести приближенную оценку значения $R_{A\Phi}$. Оказывается, что в этом случае флуктуации амплитуды и фазы сильно коррелированы ($R_{A\Phi} \sim 2/3$), что находится в согласии с данными, полученными для однородных в среднем сред [11].

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ ПРИХОДА НЕСКОЛЬКИХ ЛУЧЕЙ

В этом разделе рассмотрим случай, часто встречающийся при распространении волн в реальных условиях, когда поле является суперпозицией нескольких полей, связанных с лучами, приходящими в точку наблюдения. Тогда результирующее поле

$$U_p = \sum_j U_j(R) = \sum_j A_j \exp(i\psi_j) = A_p \exp(i\psi_p). \quad (33)$$

В предположении малости флуктуаций фазы поля каждого луча, выполняя разложение по степеням a , найдем

$$A_{p\alpha} \cos \psi_{p0} - \psi_{p\alpha} A_{p0} \sin \psi_{p0} = \sum_j (A_{j\alpha} \cos \psi_{j0} - A_{j0} \psi_{j\alpha} \sin \psi_{j0}) + O(\alpha); \quad (34)$$

$$A_{p\alpha} \sin \psi_{p0} + \psi_{p\alpha} A_{p0} \cos \psi_{p0} = \sum_j (A_{j\alpha} \sin \psi_{j0} + A_{j0} \psi_{j\alpha} \cos \psi_{j0}) + O(\alpha). \quad (35)$$

Отсюда для флюктуаций амплитуды и фазы результирующего поля получим

$$\psi_{p\alpha} = \frac{1}{A_{p0}} \sum_j [A_{j\alpha} \sin (\psi_{j0} - \psi_{p0}) + A_{j0} \psi_{j\alpha} \cos (\psi_{j0} - \psi_{p0})] + O(\alpha); \quad (36)$$

$$A_{p\alpha} = \sum_j [A_{j\alpha} \cos (\psi_{p0} - \psi_{j0}) + A_{j0} \psi_{j\alpha} \sin (\psi_{p0} - \psi_{j0})] + O(\alpha), \quad (37)$$

где

$$A_{p0}^2 = \sum_j A_{j0}^2 + 2 \sum_{j \neq l} A_{j0} A_{l0} \cos (\psi_{j0} - \psi_{l0}); \quad (38)$$

$$\operatorname{tg} \psi_{p0} = \sum_j A_{j0} \sin \psi_{j0} / \sum_j A_{j0} \cos \psi_{j0}. \quad (39)$$

Остальные входящие в (34) — (37) величины определяются соответствующими формулами первого раздела.

Переходя к изучению статистических свойств результирующего поля, предположим, что корреляцией между различными лучами, проходящими через точку R , можно пренебречь. Такое предположение оправдано, если точка наблюдения находится вдали от областей, в которых нарушается приближение геометрической оптики. В этом случае углы выхода отдельных лучей из излучателя отличаются на конечные величины. Поскольку мы считаем, что пути σ_j , а также масштаб регулярной неоднородности среды существенно превышают масштаб случайной неоднородности, то вкладом «коррелированных» областей можно пренебречь по сравнению с вкладом «некоррелированных»*. Это качественное рассмотрение можно было бы подтвердить расчетом. Однако задача о корреляции между отдельными лучами — это часть общей задачи о пространственной корреляции флюктуаций поля. Рассмотрение же последней не является целью настоящей работы.

Поскольку $A_{j\alpha}$ и $\psi_{j\alpha}$ есть линейные функционалы случайной функции μ , то, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей величины $\psi_{p\alpha}$ и $A_{p\alpha}$ распределены нормально, и закон распределения может быть стандартно выражен через следующие моменты второго порядка:

$$V_p = \frac{\langle A_{p\alpha}^2 \rangle}{A_{p0}^2} = \frac{1}{A_{p0}^2} \sum_j A_{j0}^2 \{ V_j \cos^2 (\psi_{p0} - \psi_{j0}) + K_j \sin [2(\psi_{p0} - \psi_{j0})] + \langle \psi_{j\alpha}^2 \rangle \sin^2 (\psi_{p0} - \psi_{j0}) \} + O(\alpha^4); \quad (40)$$

$$K_p = \frac{\langle A_{p\alpha} \psi_{p\alpha} \rangle}{A_{p0}} = \frac{1}{2A_{p0}^2} \sum_j A_{j0}^2 \{ V_j \sin [2(\psi_{j0} - \psi_{p0})] + 2K_j \cos [2(\psi_{j0} - \psi_{p0})] + \langle \psi_{j\alpha}^2 \rangle \sin [2(\psi_{p0} - \psi_{j0})] \} + O(\alpha^4); \quad (41)$$

* Под «коррелированными» областями мы понимаем области, заключенные между двумя пересекающимися лучами, еще не разошедшимися на расстояние, которое превышает масштаб случайной неоднородности среды.

$$\begin{aligned} \langle \psi_{pa}^2 \rangle = & \frac{1}{A_{p0}^2} \sum_j A_{j0}^2 \{ V_j \sin^2(\psi_{p0} - \psi_{j0}) - K_j \sin[2(\psi_{p0} - \psi_{j0})] + \\ & + \langle \psi_{ja}^2 \rangle \cos^2(\psi_{p0} - \psi_{j0}) \} + O(\alpha^4). \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь функции V_j , K_j и $\langle \psi_{ja}^2 \rangle$ определяются формулами (29), (31) и (25).

При теоретических расчетах регулярного поля часто предполагают отдельные лучи некогерентными, т. е. складывают соответствующие им потоки энергии [12]. Применение подобной методики к вычислению средней интенсивности случайного поля приводит в нашем случае к соотношению

$$A_{p0}^2(1 + V_p) = \sum_j A_{j0}^2(1 + V_j) + O(\alpha^4). \quad (43)$$

Величина V_p , определяемая этим соотношением, может существенно отличаться от (40). Таким образом, здесь оказываются важными величины средних набегов фаз вдоль каждого из лучей. Следует заметить, что в рассматриваемой задаче некогерентно суммируются флуктуации комплексного поля. В самом деле, из анализа формул (33), (40) и (42) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha^2 \langle |U_{pa}|^2 \rangle = & \alpha^2 \langle A_{pa}^2 \rangle + A_{p0}^2 \langle \psi_{pa}^2 \rangle = \sum_j A_{j0}^2 [V_j + \\ & + \langle \psi_{ja}^2 \rangle] = \alpha^2 \sum_j \langle |U_{ja}|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Для иллюстрации полученных результатов был рассмотрен частный вид зависимости $n(z)$: $n^2(z) = 1 - z/h$ ($h > 0$). Как известно, в этом случае в точку наблюдения приходят два луча, один из которых является касательным к каустике. На основании формул (40) — (42) были получены выражения для V_p , $\langle \psi_{pa}^2 \rangle$ и коэффициента взаимной корреляции флуктуаций амплитуды и фазы как функции расстояния ρ между источником и приемником в горизонтальной плоскости $z = 0$. Эти выражения, которые для краткости изложения мы здесь не приводим, зависят также от параметров $\delta = kh$ и $P = h/ka^2$. Затем на электронно-вычислительной машине был произведен численный расчет формул при следующих значениях этих параметров: 1) $\delta = 10$, $P = 1$; 2) $\delta = 10^2$, $P = 10^{-1}$; 3) $\delta = 10^4$, $P = 10^{-2}$. Мы приведем здесь некоторые результаты этих расчетов лишь для случая 2, поскольку их качественный характер для всех трех случаев примерно одинаков.

На рис. 1 сплошной кривой изображена зависимость $V_p 10^{-5} / \sqrt{\pi} \alpha^2 \langle \mu^2 \rangle$ от расстояния ρ в интервале $h/2 \leq \rho \leq 7h/6$. Ограничение интервала снизу вызвано требованием $\sigma_j \gg a$. При $\rho > 7h/6$ качественный характер кривых сохраняется, но осцилляции, связанные с интерференционными эффектами, становятся очень частыми. Линии, нанесенные точками и пунктиром, ограничивают не изображенную на рис. 1 величину $\langle |U_{pa}|^2 \rangle 10^{-5} / \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle$. Точки совпадают с максимумами этой величины, а на пунктирной линии лежат ее минимумы. Часть кривой, характеризующей эту величину, показана на рис. 2 (кривая 3).

Кроме этой кривой на рис. 2 в интервале $4h/6 \leq \rho \leq 4h/5$, растянутом в 5 раз по сравнению с соответствующим интервалом рис. 1, изображены: $V_p 10^{-5} / \sqrt{\pi} \alpha^2 \langle \mu^2 \rangle$ — кривая 1, $\langle \psi_{pa}^2 \rangle 10^{-5} / \sqrt{\pi} \alpha^2 \langle \mu^2 \rangle$ — кривая 2 (для удобства изображения средний квадрат флуктуаций фазы взят с отрицательным знаком), $\langle |U_{pa}|^2 \rangle 10^5 / \sqrt{\pi} \langle \mu^2 \rangle$ — кривая 3, коэффициент взаимной корреляции $R_{A\Phi}$ — пунктирная кривая. Из этого рисунка

видно, что в данном случае (в отличие от случая прихода одного луча, когда флуктуации амплитуды и фазы коррелированы) в результате интерференции области полной корреляции чередуются с областями, где флуктуации некоррелированы и антикоррелированы. Перемена знака коэффициента корреляции происходит вблизи точек, где либо флуктуа-

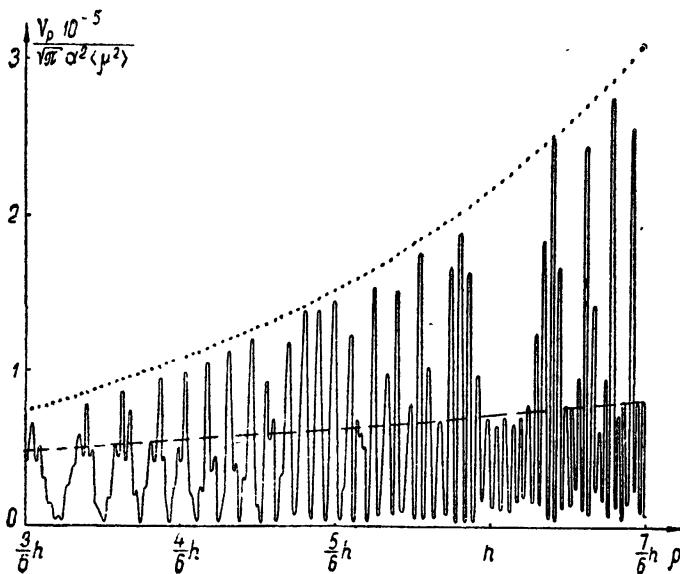


Рис. 1.

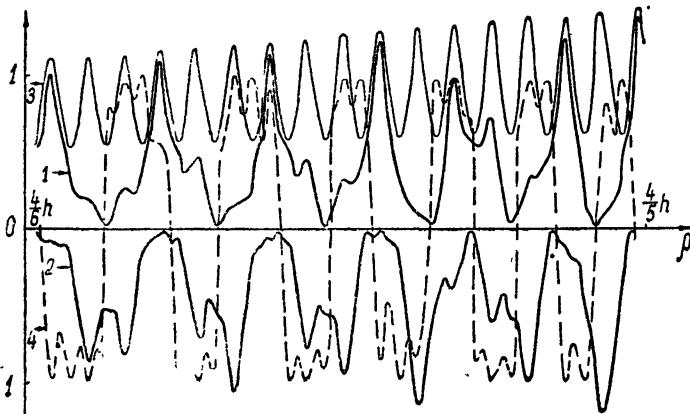


Рис. 2.

ции фазы относительно малы, а флуктуации амплитуды относительно велики, либо наоборот. Кроме того из рис. 1 и 2 видно, что интерференционные эффекты могут оказывать существенное влияние на возрастающие с увеличением расстояния флуктуации. Вид кривых при этом оказывается довольно сложным.

Следует отметить, что при стремлении к каустике флуктуации неограниченно возрастают. Однако теория, основанная на геометрической оптике, здесь неверна, и результаты нуждаются в уточнении.

Автор благодарит Л. А. Чернова за руководство работой и выражает признательность Ю. А. Кравцову, сделавшему ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958
2. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 521 (1959).
3. Г. И. Приймак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 1, 49 (1961).
4. N. W. Lord, Report on the Fourth International congress on acoustic, Kopenhagen, 1962.
5. В. М. Комиссаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 292 (1966).
6. M. Spenser, Proc. Phys. Soc., 68B, 493 (1955).
7. K. Yeh, J. Res. Nat. Bur. Standards, 66D, № 5, 621 (1962).
8. В. Д. Гусев, Л. А. Дрячев, С. Ф. Миркотан, Ю. В. Березин, М. П. Кияновский, М. Б. Виноградова и Т. А. Гайлит, ДАН СССР, 123, № 5, 817 (1958).
9. В. М. Комиссаров, Акуст. ж., 10, № 2, 174 (1964).
10. Ф. Г. Басс, Диссертация, ИРЭ АН СССР, М., 1963.
11. В. Н. Каравайников, Акуст. ж., 3, № 2, 185 (1957).
12. Л. М. Бреховских, Акуст. ж., 11, № 2, 148 (1965).

Акустический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
20 апреля 1966 г.

POINT SOURCE FIELD IN PLANE STRATIFIED MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITY

V. M. Komissarov

For the point source in a plane stratified medium with random inhomogeneity, there has been calculated the field determined by each of the rays coming to the observation point. The calculation is made by the successive approximation method. Mean squares of phase fluctuations and field amplitudes as well as their cross-correlation function have been calculated for the arrival of only one ray at the observation point. The case of several rays is also considered. It is shown that amplitude and phase fluctuations of the resultant field are normally distributed. Second-order moments characterizing the fluctuation distribution have been derived. The theory is illustrated numerically for the particular case of $n(z)$.

УДК 538.3

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ НАД ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ ДИЭЛЕКТРИКА С АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

K. A. Барсуков, Л. Г. Нарышкина

Рассматриваются общие свойства излучения заряда, движущегося над плоской границей диэлектрика, на которой помещается металлическая сетка с периодом, значительно меньшим длины волн излучения. Находятся поле и энергия излучения движущегося заряда. Исследуется возможность генерации поверхностных волн на границе диэлектрика. В качестве частного случая рассмотрено получение длинной заряженной нити и нити с током.

В экспериментах по исследованию эффекта Вавилова—Черенкова излучатель обычно движется в непосредственной близости от границы диэлектрика. Возникающим здесь граничным задачам посвящена довольно обширная литература (см., например, обзор [1]). Для увеличения интенсивности излучения выгодно использовать возможно более мощные модулированные по плотности пучки заряженных частиц. Однако при повышении плотности пучка на поверхности диэлектрика образуется значительный поверхностный заряд, сильно искажающий характер излучения. Поэтому в подобных случаях оказывается выгодным покрывать диэлектрик системой проводящих полос, которые позволяют снимать поверхностный заряд. Теоретическое рассмотрение подобной системы проводилось в работах [2, 3], где, однако, из-за аналитических трудностей удалось провести только машинные расчеты. Вместе с тем, можно указать область частот, в которой возможно аналитическое исследование данного вопроса и выяснение ряда общих закономерностей подобных систем.

1. Пусть плоскость $z = 0$ является границей раздела диэлектрика с постоянной $\epsilon(z < 0)$ и вакуума ($z > 0$). На этой границе расположена периодическая идеально проводящая решетка, образованная системой параллельных проводов. Период этой решетки будем считать малым по сравнению с длиной волны излучения. В этом приближении можно рассматривать решетку как плоскость, проводимость которой в направлении проводов решетки равна бесконечности, а в перпендикулярном направлении — нулю. Для определенности зададим оба эти направления соответственно векторами e_x и e_y , которые образуют систему координат, повернутую относительно осей x и y на угол α . Пусть далее в направлении оси x на расстоянии d от плоскости $z = 0$ со скоростью v движется заряд величины q , создающий в пространстве следующую плотность заряда и тока:

$$\rho = q\delta(x - vt)\delta(y)\delta(z - d), \quad j = \rho v. \quad (1)$$

Поле движущегося заряда будем описывать с помощью векторного потенциала A ($A, 0, 0$). Нетрудно видеть с помощью разложения (1) по плоским волнам, что функция A_ϕ имеет вид

$$A_\omega = \frac{q}{2\pi c} \exp \left(-i \frac{\omega}{v} x \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\gamma y - x_1 |z - d|) d\gamma / x_1, \quad (2)$$

где $x_1 = [\gamma^2 + \omega^2(1 - \beta^2)/v^2]^{1/2}$, а значок ω здесь и ниже обозначает фурье-компоненту соответствующей физической величины. Векторы поля находятся по формулам

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{c}{i\omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{H}_\omega = \operatorname{rot} \mathbf{A}_\omega. \quad (3)$$

Поле, определяемое (2) и (3), не удовлетворяет граничным условиям при $z = 0$. Поэтому дополним (2) решениями однородных уравнений Максвелла, которые будем задавать, как и в [4], с помощью z -компонент электрического и магнитного векторов, представив их в виде

$$\mathbf{E}_{\omega z}^{(j)} = \exp \left(-i \frac{\omega}{v} x \right) \int_{-\infty}^{\infty} E_j(\gamma) \exp[i\gamma y + (-1)^j x_j z - x_1 d] d\gamma, \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_{\omega z}^{(j)} = \exp \left(-i \frac{\omega}{v} x \right) \int_{-\infty}^{\infty} H_j(\gamma) \exp[i\gamma y + (-1)^j x_j z - x_1 d] d\gamma,$$

где $j=1$ для $z > 0$ и $j=2$ для $z < 0$, а $x_2 = [\gamma^2 + \omega^2(1 - \beta^2\varepsilon)/v^2]^{1/2}$. Остальные компоненты поля можно найти по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_2 \mathbf{E}_{\omega t}^{(j)} &= -\nabla \frac{\partial E_{\omega z}^{(j)}}{\partial z} + i \frac{\omega}{c} \operatorname{rot} [\mathbf{e}_z H_{\omega z}^{(j)}], \\ \Delta_2 \mathbf{H}_{\omega t}^{(j)} &= -\nabla \frac{\partial H_{\omega z}^{(j)}}{\partial z} - i \frac{\omega}{c} \varepsilon_j \operatorname{rot} [\mathbf{e}_z E_{\omega z}^{(j)}], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, \mathbf{e}_z — орт оси z , $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, индекс t означает по-перечные по отношению к оси z компоненты поля.

Неизвестные функции в (4) определим из граничных условий при $z = 0$:

$$E_\xi = 0, [H_\xi] = 0, [E_\eta] = 0. \quad (6)$$

Здесь квадратные скобки означают разность соответствующих величин при $z \rightarrow +0$ и $z \rightarrow -0$. Подставляя (2) и (4) в (6), получим систему уравнений для неизвестных функций, решение которой после ряда довольно громоздких выкладок можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E_2(\gamma) &= -\frac{q p \omega x_1 \sin \alpha}{\pi c^2 (x_1 + x_2) (p^2 - x_1 x_2)}, \quad E_1(\gamma) = -\frac{q}{2\pi v} - \frac{x_2}{x_1} E_2(\gamma), \\ H_2(\gamma) &= \frac{i q s x_1 x_2 \sin \alpha}{\pi c (x_1 + x_2) (p^2 - x_1 x_2)}, \quad H_1(\gamma) = \frac{i q \gamma}{2\pi c x_1} + H_2(\gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

где $s = -(\omega \cos \alpha)/v + \gamma \sin \alpha$, $p = (\omega \sin \alpha)/v + \gamma \cos \alpha$. Величины s и p имеют смысл составляющих волнового вектора по осям ξ и η . Формулы (7) и (4) дают решение поставленной задачи.

Энергию излучения заряженной частицы, приходящуюся на единицу пути ее траектории, проще всего подсчитать по тормозящей силе, действующей на частицу со стороны поля излучения:

$$\frac{dW}{dx} = -E_x q \Big|_{\substack{x=vt \\ y=0 \\ z=d}} . \quad (8)$$

Подставляя в (8) соответствующие выражения из (4), (5) и (7), получим после ряда несложных преобразований

$$\frac{dW}{dx} = \frac{2q^2 \sin^2 \alpha}{\pi c^2} \operatorname{Im} \int_0^{\omega_{\max}} \omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 x_2 \exp(-2x_1 d) d\gamma}{(x_1 + x_2)(p^2 - x_1 x_2)}, \quad (9)$$

где интегрирование по частоте производится до значения ω_{\max} , при котором приближение анизотропно проводящей плоскости оказывается еще справедливым. Из (8) видно, что энергия излучения при $\alpha = 0$ обращается в нуль. Иными словами, если заряженная частица движется вдоль направления проводимости решетки, то в этом случае решетка полностью экранирует диэлектрик и излучение отсутствует.

2. Из формулы (9) нетрудно получить выражение энергии излучения бесконечно длинной заряженной нити, которая параллельна оси y и движется вдоль оси x со скоростью v . Это можно сделать с помощью формальной замены $q^2 \rightarrow 2\pi^2 \delta(\gamma)$, где τ — заряд, приходящийся на единицу длины нити. Нетрудно видеть, что в этом случае излучение будет иметь место при выполнении условия $\beta^2 \epsilon > 1$. (Мы здесь не останавливаемся на излучении, связанном с возможностью генерации нитью поверхностной волны, которая определяется нулем знаменателя в (8), так как этот эффект подробно исследован в [5].) Выполняя несложные кадки в (9), получим

$$\frac{dW}{dx} = \frac{4\tau^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \alpha}{v} \int_{\beta^2 \epsilon > 1} \sqrt{\beta^2 \epsilon - 1} (\beta^2 \epsilon - \cos^2 \alpha) \times$$

$$\times \exp \left(-2 \frac{\omega}{v} d \sqrt{1 - \beta^2} \right) (\epsilon - 1)^{-1} [(1 - \beta^2)(\beta^2 \epsilon - 1) + \sin^4 \alpha]^{-1} d\omega, \quad (10)$$

где интегрирование распространяется на область частот, в которой $\beta^2 \epsilon > 1$ и $\omega < \omega_{\max}$.

Будем сравнивать (10) с энергией излучения нити, движущейся вдоль полубесконечного диэлектрика без решетки, соответствующее выражение для которой получено в [6]. Для отношения спектральных плотностей этих величин имеем

$$w_\omega(\alpha) = \frac{(\epsilon + 1 - \beta^2 \epsilon)(\epsilon \beta^2 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha}{\epsilon [(1 - \beta^2)(\beta^2 \epsilon - 1) + \sin^4 \alpha]} . \quad (11)$$

Исследование формулы (11) показывает, что при $\epsilon(1 - \beta^2) > 1$ функция $w_\omega(\alpha)$ монотонно растет от нуля при $\alpha = 0$ до единицы при $\alpha = \pi/2$. Если $\epsilon(1 - \beta^2) < 1$, $w_\omega(\alpha)$ достигает максимального значения при

$$\sin^2 \alpha_{\max} = 1 - \beta^2 + \beta \sqrt{(1 - \beta^2)(\epsilon - 1)} . \quad (12)$$

Заметим, что $w_\omega(\alpha_{\max}) > 1$. График функции $w_\omega(\alpha)$ представлен на рис. 1 для $\epsilon = 3$ и различных значений β . Из графика видно, что при движе-

нии нити перпендикулярно проводам она излучает так же, как и при отсутствии решетки. При условии $\epsilon(1 - \beta^2) < 1$, которое выполняется для релятивистской нити, и при углах, определяемых (12), излучение нити несколько возрастает.

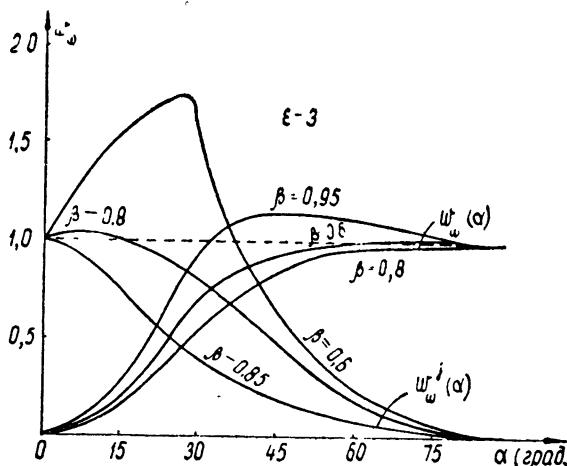


Рис. 1.

Интересно сравнить излучение заряженной нити с излучением движущейся токовой линии в тех же условиях. Не приводя соответствующего расчета, мы ограничимся лишь формулой для энергии излучения, приходящейся на единицу длины нити:

$$\frac{dW^j}{dx} = \frac{4j_0^2 (1 - \beta^2) \cos^2 \alpha}{v^2} \int_{\beta^2 \epsilon > 1} V \sqrt{\epsilon \beta^2 - 1} (\epsilon \beta^2 - \cos^2 \alpha) \times$$

$$(13)$$

$$\times \exp \left(-2 \frac{\omega}{v} dV \sqrt{1 - \beta^2} \right) (\epsilon - 1)^{-1} [(1 - \beta^2) (\beta^2 \epsilon - 1) + \sin^4 \alpha]^{-1} d\omega,$$

где j_0 — ток в движущейся нити. Для отношения энергий, аналогичного (11), получим

$$w_\omega^j(\alpha) = \frac{(1 - \beta^2)(\epsilon \beta^2 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{(1 - \beta^2)(\beta^2 \epsilon - 1) + \sin^4 \alpha}. \quad (14)$$

Исследование функции $w_\omega^j(\alpha)$ показывает, что при $\epsilon \beta^2 > 2$ $w_\omega^j(\alpha)$ монотонно убывает от единицы при $\alpha = 0$ до нуля при $\alpha = \pi/2$. Если $1 < \epsilon \beta^2 < 2$, то $w_\omega^j(\alpha)$ имеет максимум при

$$\cos^2 \alpha_{\max} = \beta^2 \{ \epsilon + 1 - \epsilon \beta^2 - [(\epsilon - 1)(\epsilon \beta^2 - 1)(\epsilon + 1 - \epsilon \beta^2)]^{1/2} \} / (2 - \epsilon \beta^2). \quad (15)$$

Как и в предыдущем случае, $w_\omega^j(\alpha_{\max}) > 1$. График функции $w_\omega^j(\alpha)$ представлен на рис. 1 для $\epsilon = 3$ и различных значений β . Из рис. 1 видно, что при $\alpha = 0$ $w_\omega^j(0) = 1$, т. е. при движении нити вдоль проводов она излучает так же, как в отсутствие решетки. Если $1 < \epsilon \beta^2 < 2$, возможно довольно значительное увеличение энергии излучения, в то время как при $\epsilon \beta^2 > 2$

максимальное излучение приходится на угол $\alpha=0$. При $\alpha=\pi/2$ нить не излучает, и здесь решетка полностью экранирует диэлектрик от движущейся нити.

3. В [4] показано, что вдоль решетки, лежащей на диэлектрике, может распространяться поверхностная электромагнитная волна, дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$z_1 z_2 = p^2, \quad (16)$$

где $z_1 = (p^2 + s^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}$, $z_2 = (p^2 + s^2 - \omega^2\varepsilon/c^2)^{1/2}$, $p(\gamma)$ и $s(\gamma)$ — составляющие «плоского» волнового вектора поверхностной волны. В то же время в выражении для потерь (9) у подынтегрального выражения есть особенность типа простого полюса при значениях γ , удовлетворяющих (16). Эта особенность будет определять интенсивность поверхностной волны, возбуждаемой движущейся частицей. Для простоты записи мы в дальнейшем ограничимся наиболее интересным случаем, когда заряд движется перпендикулярно направлению проводимости решетки, т. е. когда $\alpha=\pi/2$. Составляющие по осям x и y «двумерного» волнового вектора \mathbf{k}_\perp здесь оказываются равными ω/v и γ .

Если через ψ обозначить угол между осью x и вектором \mathbf{k}_\perp , то из (16) получим

$$\cos \psi = \sqrt{2} [\beta^2(\varepsilon + 1) + \sqrt{4 + \beta^4(\varepsilon - 1)^2}]^{-1/2}. \quad (17)$$

Условие (17) определяет «черенковский» угол, под которым волна распространяется по отношению к направлению скорости частицы. Можно показать с помощью [4], что (17) эквивалентно равенству фазовой скорости волны и проекции скорости частицы на волновой вектор, как это сбычно имеет место в эффекте Вавилова—Черенкова. Если $\varepsilon=1$, (17) переходит в соответствующее соотношение для угла из [7]. При малых β угол $\psi \approx \pi/2$ и приближение анизотропной проводящей плоскости оказывается неприменимым.

Энергию излучения поверхностной волны нетрудно найти из (9), если там в интеграле использовать особенность типа простого полюса при значениях γ , удовлетворяющих (16). После соответствующих выкладок

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW_\omega}{dx} \right)_{\text{пов}} &= 8q^2\omega \exp [-2\omega d \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \psi} / v \cos \psi] \times \\ &\times \operatorname{ctg} \psi \cos \psi c^{-2} (\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \psi} + \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon \cos^2 \psi})^{-1} \times \\ &\times (4 + \beta^4(\varepsilon - 1)^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где ψ определяется соотношением (17). При $\varepsilon=1$ (18) переходит в аналогичную формулу [7]. Легко видеть, что спектральная плотность энергии излучения поверхностной волны экспоненциально падает с увеличением расстояния d .

4. Если $\beta^2\varepsilon > 1$, у движущегося заряда возникают дополнительные потери, связанные с эффектом Вавилова—Черенкова. Для простоты спать ограничимся случаем максимальных потерь, когда заряд движется перпендикулярно направлению проводимости решетки. При $\beta^2\varepsilon > 1$ z_2 становится чисто мнимым, а z_1 остается действительным. Выражение для потерь на излучение Вавилова—Черенкова мы получим из (9) с помощью простого вычисления мнимой части у стоящих там интегралов. Для этого в (9) удобно перейти к интегрированию по углу φ между

отрицательным направлением оси z и проекцией волнового вектора на плоскость yz . Учитывая, что $\gamma = \omega v^{-1} (\beta^2 \epsilon - 1)^{1/2} \sin \varphi$, и выполняя замену переменных в (9), получим

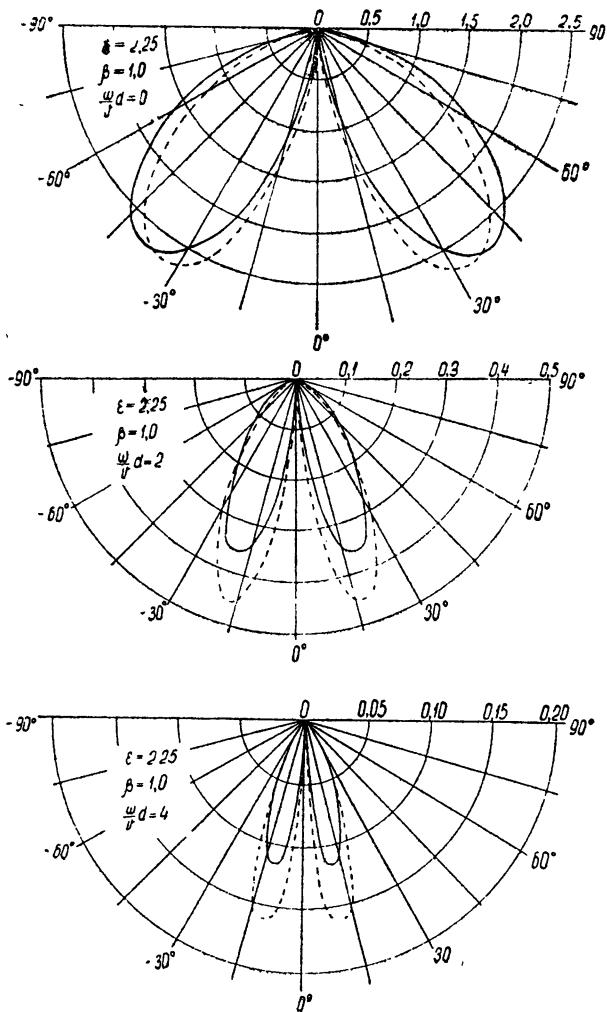


Рис. 2.

$$\left(\frac{dW}{dx} \right)_{\text{черт}} = \frac{2q^2}{\pi v^2} \int \frac{(\beta^2 \epsilon - 1) \omega d \omega}{\epsilon - 1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x_0^2 \cos^2 \varphi (\beta^2 \epsilon \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \exp \left(-2 \frac{\omega}{v} x_0 d \right) [1 + (\beta^2 \epsilon - 1) x_0^2 \cos^2 \varphi]^{-1} d\varphi, \quad (19)$$

где $x_0 = [1 - \beta^2 + (\beta^2 \epsilon - 1) \sin^2 \varphi]^{1/2}$ и область интегрирования по частоте определяется неравенствами $\beta^2 \epsilon(\omega) > 1$, $0 < \omega < \omega_{\max}$.

Как и в случае полубесконечного диэлектрика без решетки [1], излучение движущегося заряда в среду распределено по половине конуса, ось которого параллельна скорости заряда, а угол раствора конуса определяется хорошо известным условием $\cos \theta = 1/\beta \sqrt{\epsilon}$. Излучение является линейно-поляризованным, причем направление электрического

поля волны, как это можно показать с помощью (4), (5) и (7), задается вектором $\tau \{ \sqrt{\beta^2 \epsilon - 1} \sin \varphi, 0, 1 \}$, тогда как в случае безграничной среды электрический вектор лежит в плоскости, образуемой скоростью частицы и волновым вектором. Вектор τ образует с этой плоскостью угол χ , определяемый соотношением

$$\sin \chi = \cos \varphi (\beta^2 \epsilon \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{-1/2}. \quad (20)$$

Электрический вектор поля излучения попадает в указанную выше плоскость только при $\varphi = \pi/2$, а при $\varphi \rightarrow 0$ становится перпендикулярным этой плоскости.

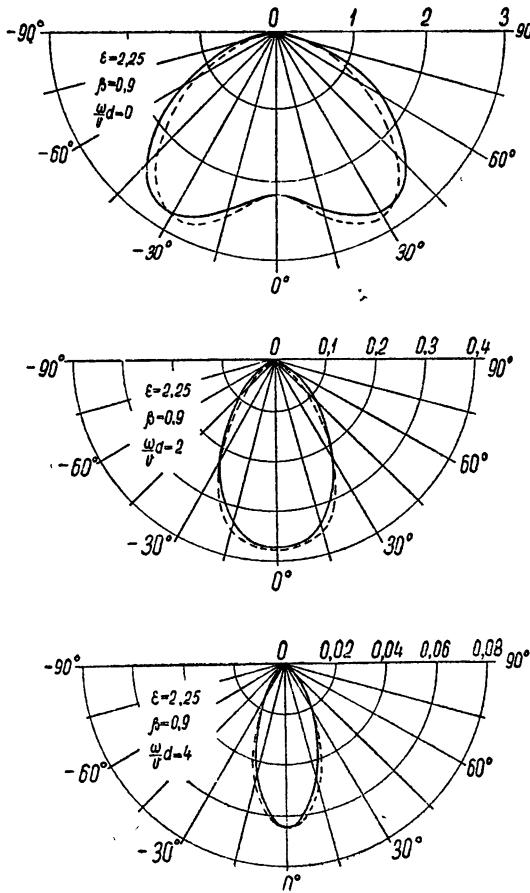


Рис. 3.

Интенсивность излучения по азимуту черенковского конуса, как это видно из (19), распределена неравномерно. Для выяснения более детальной картины распределения интенсивности в излучении Вавилова—Черенкова приведем выражение для спектральной интенсивности излучения в зависимости от азимута φ , которое мы отнесем к соответствующей величине при излучении движущегося заряда в безграничной среде [8]:

$$I(\omega, \varphi) = \frac{4\epsilon \cos^2 \varphi}{\epsilon - 1} \frac{[1 - \beta^2 + (\beta^2 \epsilon - 1) \sin^2 \varphi]}{1 + \cos^2 \varphi (\beta^2 \epsilon - 1)} \frac{(\beta^2 \epsilon \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{[1 - \beta^2 + (\beta^2 \epsilon - 1) \sin^2 \varphi]} \times$$

$$\times \exp \left\{ -2d \frac{\omega}{v} [1 - \beta^2 + (\beta^2 \epsilon - 1) \sin^2 \varphi]^{1/2} \right\}. \quad (21)$$

Вид функции $I(\omega, \varphi)$ изображен на рис. 2 и 4 при различных значениях параметров задачи (сплошная кривая). Для сравнения всюду на рисунках построены угловые диаграммы $I_0(\omega, \varphi)$, которые задают распределение интенсивности по черенковскому конусу при движении заряда вдоль плоской границы диэлектрика без проводящей решетки. Указанная величина [1]

$$I_0(\omega, \varphi) = \frac{4\epsilon \cos^2 \varphi (\epsilon + 1) (\epsilon \beta^2 - 1) \sin^2 \varphi + \epsilon (1 - \beta^2)}{\epsilon - 1 (\epsilon + 1) (\epsilon \beta^2 - 1) \cos^2 \varphi - \epsilon^2 \beta^2} \times \\ \times \exp \left\{ -2d \frac{\omega}{v} [1 - \beta^2 + (\epsilon \beta^2 - 1) \sin^2 \varphi]^{1/2} \right\}. \quad (22)$$

Значения функции $I_0(\omega, \varphi)$ на графиках совпадают с соответствующими значениями для $I(\omega, \varphi)$. Свойства функции $I_0(\omega, \varphi)$ достаточно подробно рассмотрены в [1].

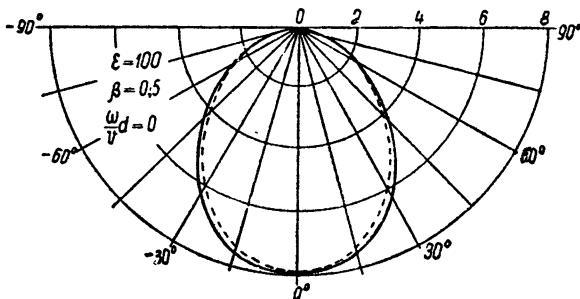


Рис. 4.

Сравнение графиков функций $I(\omega, \varphi)$ и $I_0(\omega, \varphi)$ показывает, что при $\varphi = 0$ значения обеих функций совпадают. Это, впрочем, видно из непосредственного сравнения формул (21) и (22). При релятивистской скорости заряда и сравнительно небольших значениях ϵ максимум функции $I(\omega, \varphi)$ незначительно смещается в сторону больших значений углов по сравнению с $I_0(\omega, \varphi)$. Значения интенсивностей для обеих функций почти совпадают и отличаются заметным образом только у релятивистских частиц при значениях ϵ порядка нескольких единиц. Если же частица нерелятивистская или значения ϵ велики, то угловые диаграммы $I(\omega, \varphi)$ и $I_0(\omega, \varphi)$, как это видно из рис. 3 и 4, практически совпадают. Это свидетельствует о том, что наличие решетки на границе диэлектрика в длинноволновой части спектра почти не оказывается на свойствах излучения Вавилова—Черенкова. Последнее сохраняет все свойства излучения в полубесконечном диэлектрике. В частности, из рис. 4 видно, что при $\varphi = 0$ энергия излучения почти в восемь раз превышает соответствующую величину в сплошном диэлектрике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, УФН, 75, 295 (1961).
- 2 О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 36, 33 (1966).
3. В. А. Барегамян, О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопалов, Изв. АН Арм. ССР, 18, 90 (1965).

4. Л. Г. Нарышкина, М. Е. Герценштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
5. К. А. Барсуков, Л. Г. Нарышкина, Труды III Межвузовской конференции по радиофизике и спектроскопии (в печати).
6. А. И. Морозов, Вестник МГУ, № 1, 72 (1957).
7. К. А. Барсуков, Л. Г. Нарышкина, ЖТФ, 36, 225 (1966).
8. Б. М. Болотовский, УФН, 62, 201 (1957).

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
8 июня 1966 г.

ON RADIATION OF CHARGE MOVING ABOVE PLANE BOUNDARY OF DIELECTRIC WITH ANISOTROPIC CONDUCTIVITY

K. A. Barsukov, L. G. Naryshkina

Authors consider general properties of radiation of a charge moving above the plane dielectric with a metal grid on its surface, the period of which is much less than the radiation wavelength. The field and radiation energy of the moving charge are found. The possibility of surface wave generation at the dielectric boundary is investigated. The radiation of long charged and current threads are considered for the particular case.

УДК 621.372.4

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Ю. Н. Казанцев

Рассмотрен метод расчета основных характеристик открытых резонаторов — ненагруженной и нагруженной добротности, коэффициентов отражения и передачи. Получены общие формулы для вычисления характеристик резонаторов, а также проведен электродинамический расчет коэффициентов связи и коэффициентов рассеяния на элементах связи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Широкое исследование свойств открытых резонаторов началось в связи с появлением квантовых генераторов оптического диапазона волн. Это объясняется тем, что открытые резонаторы обладают в оптическом диапазоне достаточно высокой добротностью при приемлемых размерах.

В настоящее время область применения открытых резонаторов значительно расширилась: они получают распространение в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн, так как в обычных резонаторах этих диапазонов переход к более коротким волнам связан с уменьшением размеров, добротности и электрической прочности. При разработке реальных устройств, в состав которых входят открытые резонаторы, возникает необходимость в расчете таких характеристик как добротность, коэффициент передачи и коэффициент отражения от резонатора. В работе [1] проведен теоретический анализ возбуждения открытых резонаторов внешними источниками. В настоящей работе используется иной метод определения амплитуды возбужденного поля, и ее целью является получение формул, позволяющих провести инженерный расчет основных характеристик открытых резонаторов для ряда реальных способов связи с внешними линиями. При этом предполагается, что резонансные кривые рабочего и паразитных колебаний не перекрываются.

Итак, основными характеристиками резонатора являются ненагруженная добротность Q_0 , нагруженная добротность Q , коэффициент передачи через резонатор $\eta_{\text{пер}}$ и коэффициент отражения от резонатора K (при резонансе). Перечисленные характеристики зависят от тепловых потерь в отражателях (η_{T1} и η_{T2}), потерь на излучение в окружающее пространство ($\eta_{изл}$), от величины связи резонатора с внешними линиями ($\eta_{св}$) и степени рассеяния энергии на элементах связи ($\eta_{рас}$).

Зная эти величины, которые должны быть предварительно вычислены не в режиме многократных пробегов волны между отражателями резонатора, а для условий распространения в бесконечной или полубесконечной линии-аналоге, можно определить Q_0 , Q , $\eta_{\text{пер}}$ и K .

Аналогом резонатора с фазокорректирующими отражателями является бесконечная открытая линия с периодически расположенными фазовыми корректорами. Аналогом резонатора с плоскими отражателями является диафрагменная линия, состоящая из бесконечного ряда поглощающих экранов с отверстиями.

Тепловые потери в отражателе η_{T_1} или η_{T_2} вычисляются как потери на отражение в полубесконечной линии-аналоге.

В связи с тем, что волны, распространяющиеся в указанных линиях, близки к плоским, величины η_{T_1} и η_{T_2} примерно равны потерям плоской волны, падающей нормально на экран:

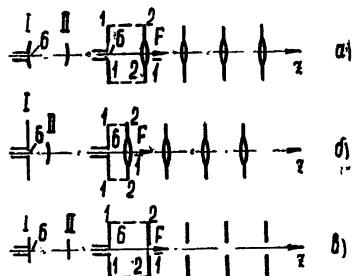
$$\eta_{T_{1,2}} = \sqrt{f/\sigma}, \quad (1)$$

где f — частота, а σ — проводимость материала, из которого изготовлен отражатель.

Потери на излучение $\eta_{\text{изл}}$ при прохождении волны между двумя соседними диафрагмами или фазовыми корректорами либо (что то же самое) потери на излучение при однократном пробеге волны в резонаторе рассчитаны в ряде работ [2—5] и могут быть найдены по формулам и графикам, приведенным в этих работах.

Величина $\eta_{\text{св}}$ определяется как коэффициент связи рабочих волн внешней линии и полубесконечной линии-аналога. На рис. 1а, б, в приведены возможные варианты расположения элемента связи в резонаторе и схемы возбуждения соответствующих линий-аналогов. Расчету $\eta_{\text{св}}$ посвящен раздел 2 настоящей работы.

Рис. 1. Возможные варианты расположения элемента связи (6) в резонаторе и схемы возбуждения соответствующих линий-аналогов. В сечениях 1—1 тонкой линией указан отражатель и жирной линией — поглощающий экран.



Величина $\eta_{\text{рас}}$ обусловлена как рассеянием энергии рабочей волны при падении ее из волновода-аналога на отражатель с элементом связи $\eta_{\text{рас}}$, так и прохождением части мощности этой волны во внешнюю линию $\eta''_{\text{рас}}$:

$$\eta_{\text{рас}} = \eta'_{\text{рас}} + \eta''_{\text{рас}}. \quad (2)$$

Величина $\eta_{\text{рас}}$ для некоторых конкретных видов связи найдена в разделе 3 настоящей работы.

В работе [6] показано, что амплитуду поля в резонаторе можно представить в виде суммы геометрической прогрессии, отдельные члены которой соответствуют волнам, многократно отраженным от торцов. Пользуясь методикой, изложенной в этой работе, легко вывести формулы основных характеристик резонатора. Так, амплитуда поля на поверхности второго отражателя равна

$$U = \frac{C}{1-K} (1 + K_2), \quad (3)$$

где K — коэффициент ослабления волны при двойном пробеге в резонаторе ($K = [1 - (\eta_{T_1} + \eta_{T_2} + 2\eta_{\text{изл}} + \eta_{\text{рас}})]^{1/2}$), K_2 — коэффициент отражения от второго отражателя и C — амплитуда рабочей волны, возбужденной в сечении F линии-аналога (рис. 1).

В условиях, близких к резонансу, поле в резонаторе может быть

представлено в виде суммы двух бегущих навстречу друг другу волн с одинаковыми амплитудами

$$U' = C [\eta^2/4 + (2\pi n \Delta f/f)^2]^{-1/2}, \quad (4)$$

где $\eta = \eta_{T1} + \eta_{T2} + 2\eta_{изл} + \eta_{рас} \ll 1$, n — число полуволн, укладывающихся вдоль оси резонатора, и $\Delta f/f$ — относительная расстройка частоты.

Зная амплитуду поля U' в резонаторе, легко вывести формулы для основных характеристик резонатора [6]:

$$Q_0 = \frac{2\pi n}{2\eta_{изл} + \eta_{T1} + \eta_{T2}}; \quad (5)$$

$$Q = \frac{2\pi n}{2\eta_{изл} + \eta_{T1} + \eta_{T2} + \eta_{рас}}; \quad (6)$$

$$\eta_{пер} = \frac{4\eta_{св\ 1} \eta_{св\ 2}}{(\eta_{T1} + \eta_{T2} + 2\eta_{изл} + \eta_{рас})^2}; \quad (7)$$

$$|K_{отр}| = \left| 1 - \frac{2\eta_{св}}{\eta_{T1} + \eta_{T2} + 2\eta_{изл} + \eta_{рас}} \right| \quad (\Delta f/f = 0), \quad (8)$$

где n — число полуволн, укладывающихся вдоль оси резонатора, $\eta_{св\ 1}$ и $\eta_{св\ 2}$ — коэффициенты связи рабочей волны резонатора с рабочими волнами входной и выходной линий соответственно.

Формула (8) справедлива только для случая, когда величина коэффициента отражения $|K'_{отр}|$ от элемента связи при прохождении волны из внешнего волновода в линию-аналог (рис. 1) близка к единице. Если $|K'_{отр}|$ существенно отличается от единицы, формула (8) усложняется и резонансный провал на отраженном сигнале может иметь аномальную форму.

2. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ СВЯЗИ РАБОЧИХ ВОЛН ВНЕШНЕЙ ЛИНИИ И ЛИНИИ-АНАЛОГА

Расчет коэффициентов связи ограничим распространенным в волноводной технике случаем связи через отверстия в отражателе. Предполагается, что задача о нахождении собственных колебаний линий-аналогов и внешних линий решена и соответствующее этим колебаниям распределение полей известно. Пусть из внешней линии на элемент связи падает волна какого-либо типа (рис. 1). Поле излучения в сечении 2—2 можно представить в виде суммы собственных волн линии-аналога, распространяющихся в положительном направлении оси z :

$$E^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} C^{+j} E^{+j}, \quad H^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} C^{+j} H^{+j}. \quad (9)$$

Введем некоторое вспомогательное поле, представляющее собой сумму двух волн, бегущих навстречу друг другу:

$$E^{(2)} = E^{+i'} + E^{-i'}, \quad H^{(2)} = H^{+i'} + H^{-i'}, \quad (10)$$

причем фазы этих волн выбираются такими, что тангенциальная составляющая электрического поля на отражателе обращается в нуль, а тангенциальная составляющая магнитного поля удваивается.

Применяя далее обычную процедуру расчета возбуждения волно-

вода заданным полем (аналогичную приведенной в [7]) и обозначая через 1_{opt} , направленный по оси z , получим

$$C' = \int_{\sigma} [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}^{+i'}] \bar{1} ds / \int_F [\mathbf{E}^{+i'} \mathbf{H}^{-i'}] \bar{1} ds, \quad (11)$$

где σ и F — апертуры отверстий связи и фазовых корректоров (либо диафрагм) соответственно, E_0 — электрическое поле на отверстиях связи, $j \neq j'$.

Волна с амплитудным коэффициентом C' несет мощность, пропорциональную

$$\begin{aligned} P_2 &= |C'|^2 \int_F \operatorname{Re} [(\mathbf{E}^{+i'}) (\mathbf{H}^{+i'})^*] \bar{1} ds = \\ &= |C'|^2 \frac{1}{w} \int_F |\mathbf{E}_t^{+i'}|^2 ds, \end{aligned} \quad (12)$$

где w — волновое сопротивление сферы и $E_t^{+i'}$ — поперечная составляющая поля $E^{+i'}$. Мощность рабочей волны в подводящем внешнем волноводе пропорциональна $P_1 = kh$ [8] (k — волновое число, h — постоянная распространения во внешнем волноводе). Отсюда получаем коэффициент связи между рабочими модами внешней линии и линии-аналога:

$$\begin{aligned} \eta_{cb} &= \frac{P_2}{P_1} = \left| \int_{\sigma} [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}^{+i'}] \bar{1} ds \right|^2 \frac{1}{w} \int_F |\mathbf{E}_t^{+i'}|^2 ds \times \\ &\times \left| \int_F [\mathbf{E}^{+i'} \mathbf{H}^{-i'}] \bar{1} ds \right|^{-2} k^{-1} h^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

По формуле (13) был произведен расчет η_{cb} для реальных способов связи. Результаты этого расчета приведены в таблице 1.

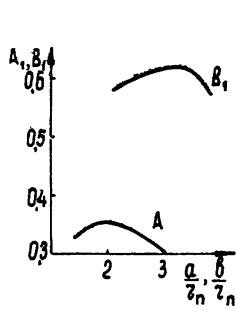


Рис. 3.

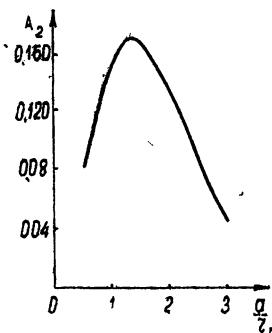


Рис. 4.

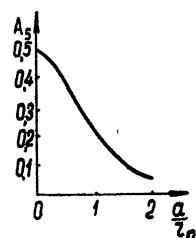


Рис. 5.

3. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕМЕНТАМИ СВЯЗИ (η_{pac})

Как уже отмечалось выше, величина коэффициента η_{pac} обусловлена как прохождением части мощности рабочей волны из линии-аналога во внешний волновод (η'_{pac}), так и рассеянием ее энергии во внешнее пространство элементом связи (η''_{pac}).

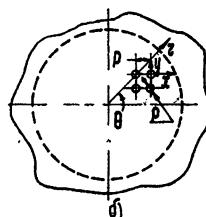
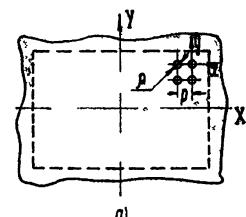


Рис. 2.

Таблица 1

Тип резонатора (форма отражателей)	Вид связи	Электрическое поле на отверстии (отверстиях связи*)	Вспомогательное магнитное поле на отверстии связи**	Коэффициент связи (η_{cb})
I. 1. Отражатели фазокорректирующие (сферические или параболические), одинаковые; фокусное расстояние $-z_0k$; расстояние между отражателями $-2z_0$.	E _{0y} = $\sqrt{\frac{2}{[ab]}} \frac{\pi kha^2}{d [\pi^2 - (ka)^2]} \times \frac{\sin(\pi z/a)}{\ln(kd/4)}, E_{0x} = 0.$	$H_x' = k\gamma_0^2 \left(1 + \frac{z_0^4}{k^2} z_0^2\right)^{-1/2},$ где $\gamma_0^2 = \left(\frac{k^2}{z_0(2z_0k - z_0)}\right)^{1/2}, H_y' = 0.$	Cм. пункт I. 1.	$4k^2ha^5 \left(\frac{2z_0k}{z_0} - 1\right)^{1/2} \times \left\{ \pi bz_0[\pi^2 - (ka)^2]^2 \times \left[\ln\left(\frac{k d}{4}\right) \right]^2 \right\}.$
I. 2. Круглое отверстие диаметром $2\rho \ll \lambda$ в середине отражателя; внешний волновод прямоугольный, однодомовый, с волной H_{10} .	E _{0y} = $\frac{4kh}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{2\rho^2 - x^2 - 2y^2}{(\rho^2 - x^2 - y^2)^{1/2}}, E_{0x} = \frac{4kh}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{xy}{(\rho^2 - x^2 - y^2)^{1/2}}$		Cм. пункт I. 1.	$\frac{64}{9} \frac{kh}{\pi abz_0k} \left(\frac{2z_0k}{z_0} - 1\right)^{1/2} \times \left\{ \pi bz_0[\pi^2 - (ka)^2]^2 \left[\ln\left(\frac{k d}{4}\right) \right]^2 \right\}^{-1}.$
II. 1. Узкая нерезонансная щель (см. пункт I. 1).		$H_x' = k\gamma_0^2,$ $H_y' = 0.$	Cм. пункт I. 1.	$8k^2ha^5 \left[\frac{z_0}{z_0k} \left(2 - \frac{z_0}{z_0k}\right)\right]^{-1/2} \times \left\{ \pi bz_0[\pi^2 - (ka)^2]^2 \left[\ln\left(\frac{k d}{4}\right) \right]^2 \right\}^{-1}.$
II. 2. Круглое отверстие диаметром z_0k ; расстояние между отражателями $-z_0$.			Cм. пункт II. 2.	$\frac{128}{9} \frac{k^2h^6}{\pi abz_0k} \left[\frac{z_0}{z_0k} \left(2 - \frac{z_0}{z_0k}\right) \right]^{-1/2}.$

II. 3. Прямоугольная сетка $a \times b$ с круглыми отверстиями диаметра $2\rho \ll \lambda$; расстояние между центрами отверстий $-p$; внешний волновод — многоходовый с волной H_{10} (рис. 2а).

$$E_{0y(s)} = \frac{4kh}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{ab}} (2\rho^2 - x^2 - 2y^2) \times \\ \times (\rho^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cos(\pi X_s/a);$$

$$E_{0,z(s)} = \frac{4kh}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{ab}} xy \times$$

$$\times (\rho^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} \cos(\pi X_s/a)$$

—поле на s -ом отверстии (рис. 2а)

$$E_{0r(s)} = -B(2\rho^2 - x^2 - 2y^2) \times \\ \times (\rho^2 - x^2 - y^2)^{-1/2} \frac{\mu_{11}}{a} \times$$

$$\times \sin \theta_s;$$

$$E_{0\theta(s)} = B(2\rho^2 - x^2 - 2y^2) \frac{(\rho^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}}{r_s} \frac{1}{J_1\left(\frac{\mu_{11}}{a} r_s\right)} \sin \theta_s;^{***}$$

—поле на s -ом отверстии.

$$B = \frac{4k}{3\pi} \frac{\sqrt{V\bar{2}h}}{\sqrt{\mu_{11}^2 - 1} J_1(\mu_{11})},$$

μ_{11} — первый корень уравнения $J'_1(x) = 0$ (рис. 2б).

II. 3. Прямоугольная сетка $a \times b$ с круглыми отверстиями диаметра $2\rho \ll \lambda$; расстояние между центрами отверстий $-p$; внешний волновод — многоходовый с волной H_{10} (рис. 2а).

$$H_x^{j'} = \gamma_0^2 k^2 \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 (X_s^2 - Y_s^2)}{b^2}\right],$$

$$\begin{aligned} &\times \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt\right\}^2 \frac{a}{r_n}, \\ &r_n = \left[\frac{4z_0(2z_{0k} - z_0)}{k^2} \right]^{1/4}; \\ &\text{зависимости } A_1(a/r_n) \text{ и } B_1(b/r_n) \text{ приведены на рис. 3.} \end{aligned}$$

$$B_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp(-t^2/2) dt \right)^2 \frac{1}{b/r_n},$$

где

$$A_1 = \left[\frac{4z_0(2z_{0k} - z_0)}{k^2} \right]^{1/4};$$

зависимость $A_2(a/r_n)$ и $B_2(b/r_n)$ приведена на рис. 4.

$$\frac{8kha^2}{AB[\pi^2 - (ka)^2] \left[\ln \left(\frac{ka}{4} \right) \right]^2}.$$

$$\begin{cases} H_x' = 1, \\ H_y' = 0. \end{cases}$$

$$\frac{128}{9} \frac{kb}{ABab} \rho^6.$$

См. пункт I. 1.

См. пункт I. 2.

$$\frac{8192\rho^6}{9\pi^4\rho^4} B_8 \left(\frac{b}{B} \right) A_8 \left(\frac{a}{A} \right).$$

где

$$B_8 = \frac{1}{b/B} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} \frac{b}{B} \right),$$

$$H_y' = 0.$$

$$A_8 = \frac{a}{A} \left\{ \frac{\sin \left[\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{a}{A} \right) \right]}{2 - a/A} \right\} +$$

$$+ \frac{\sin \left[\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{a}{A} \right) \right]}{2 + a/A} \right\}.$$

III. 1. Узкая нерезонансная щель (см. пункт I. 1).

III. 2. Круглое отверстие (см. пункт I. 2).

Условия

III. 3. Прямоугольная щель (см. пункт II. 3).

$$\sqrt{\frac{2kA^2}{l}} \gg 1$$

$$\pi \sqrt{\frac{2kB^2}{l}} \gg 1.$$

См. пункт II. 3.

IV. Отражатели

плоские круглой формы диаметра $2A$; расстояние между отражателями $2l$; удовлетворяется условие

$$\sqrt{\frac{2kA^3}{l}} \gg 1.$$

См. пункт I. 1.

на щель (см. пункт I. 1).

где ν_0 — первый корень уравнения

$$J_0(x) = 0.$$

См. пункт I. 2.

IV. 2. Круглое отверстие (см. пункт I. 2).

См. пункт III. 1.

$$\sqrt{\frac{2kA^3}{l}} \gg 1.$$

IV. 3. Круглая сетка (см. пункт II. 4).

См. пункт II. 4.

См. пункт III. 1.

$$\frac{8kh\alpha}{\pi A^2 b [\pi^2 - (ka)^2] J_1^2(\nu_0) \left[\ln \left(\frac{ka}{4} \right) \right]^2},$$

где ν_0 — первый корень уравнения

$$J_0(x) = 0.$$

$$\frac{128}{9} \frac{kh\rho^6}{\pi A^2 b J_1^2(\nu_0)}.$$

$$\frac{128}{9} \frac{kh \nu_{11}^2 \rho^6 A_4(a/A)}{(\nu_{11}^2 - 1) J_1^2(\nu_{11}) J_1^2(\nu_{11}/A) p^4},$$

где

$$A_4 = \left\{ \nu_{11} \frac{a}{A} J_0(\nu_{11}) J_1\left(\nu_{11} \frac{a}{A}\right) - \nu_{11} J_1(\nu_{11}) J_0\left(\nu_{11} \frac{a}{A}\right) \right\} \left(\nu_{11}^2 \frac{a}{A} - \nu_{11}^2 \frac{A}{a} \right)^{-1} \right\},$$

$$A_{4\max} \approx 0,289 \text{ при } \frac{a}{A} \approx 0,86.$$

* Электрическое поле на щели вычислялось с помощью работы [1], а на круглом отверстии — с помощью работы [11]. Нормировка для поля во внешнем волноводе проведена согласно работе [8].

** Выражения для поля H' в линиях-аналогах с фазовыми корректорами и диафрагмами взяты из работ [12] и [13] соответственно (фазовый множитель в этих выражениях для краткости опущен). *** В выражениях для поля на отверстиях для краткости опущены члены, дающие после интегрирования по формуле (13) нуль.

Первое слагаемое $\eta'_{\text{рас}}$ формулы (2) в случае одномодового внешнего волновода (связь через щель либо одиночное отверстие) равно коэффициенту связи $\eta_{\text{рас}} = \eta_{\text{св}}$. В случае многомодового внешнего волновода большого сечения (связь через сетку) для расчета $\eta'_{\text{рас}}$ можно воспользоваться приближенной формулой, согласно которой прошедшая во внешний волновод мощность равна относительной величине потока мощности, падающего на апертуру сетки, умноженной на коэффициент передачи через сетку $\eta_{\text{сет}}$ (вычисленный для плоской волны):

$$\eta'_{\text{рас}} = \eta_{\text{сет}} \int_{\sigma} \operatorname{Re} [EH^*] \bar{1} d\sigma / \int_F \operatorname{Re} [EH^*] \bar{1} ds \quad (14)$$

(E и H — электрическая и магнитная составляющие рабочей волны, падающей из линии-аналога на отражатель с сеткой).

Учитывая, что

$$\eta_{\text{сет}} = \frac{64}{9} \frac{k^2}{p^4} p^6, \quad (15)$$

ненсложно рассчитать величину $\eta'_{\text{рас}}$ для интересующих нас случаев связи. Результаты такого расчета сведены в таблицу 2.

Рассеяние энергии в окружающее пространство элементом связи малого размера (щель, одиночное отверстие) легко приближенно учесть, если пренебречь влиянием второго отражателя и рассмотреть переизлучение энергии щелью или круглым отверстием, прорезанными в плоском бесконечном экране. В связи с этим коэффициент $\eta''_{\text{рас}}$ рассчитывается

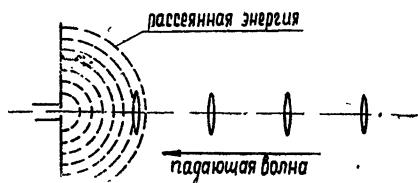


Рис. 6.

для такой схемы: из линии-аналога на плоский бесконечный экран с отверстием связи (рис. 6) падает волна рабочего типа; на отверстии наводится электрическое поле, которое излучает в открытое полупространство. Тип резонатора и форма отражателей при этом расчете учитываются только распределением поля волны, падающей на экран с элементом связи из линии-аналога.

Поле излучения щели или малого круглого отверстия в дальней зоне определяется формулой [9]

$$E = i \frac{k}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \sin \varphi \int_{\sigma} E_0 d\sigma, \quad (16)$$

где E_0 — поле на отверстии.

Вычислив полный поток излученной мощности $P_{\text{изл}}$, получим

$$P_{\text{изл}} = \frac{k^2}{3\pi} \left(\int_{\sigma} E_0 d\sigma \right)^2. \quad (17)$$

Коэффициент $\eta''_{\text{рас}}$ равен отношению мощности $P_{\text{изл}}$ к мощности волны, падающей из линии-аналога ($P_{\text{пад}}$):

$$\eta''_{\text{рас}} = k^2 \left(\int_{\sigma} E_0 d\sigma \right)^2 / 3\pi \int_F [EH^*] \bar{1} ds \quad (18)$$

(E и H в этой формуле — электрическая и магнитная составляющие поля падающей волны),

Таблица 2

Тип резонатора (форма отражателей)	Вид связи	Коэффициенты прохождения рабочей волны из линии-аналога во внешний волновод ($\eta_{\text{рас}}$)
I. Первый отражатель (с элементом связи) —плоский, бесконечный; второй —фазокорректирующий с фокусным расстоянием z_0k ; расстояние между отражателями — z_0 .	I. 1. Прямоугольная сетка размером $a \times b$ с круглыми отверстиями диаметра $2p \ll \lambda$; расстояние между центрами отверстий — p ; внешний волновод сечения $a \times b$ — многомодовый с волной H_{10} .	где $\Phi = \frac{2}{V\sqrt{2}\pi} \int_0^r \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dt$ —интеграл вероятности.
	I. 2. Круглая сетка радиуса „ a “ с круглыми отверстиями диаметра $2p \ll \lambda$; расстояния между центрами отверстий — p ; внешний волновод диаметра $2a$ — многомодовый с волной H_{11} .	где $A_b\left(\frac{a}{r_n}\right) = \int_0^1 \exp\left[-2\left(\frac{a}{r_n}\right)^2 x^2\right] dx$;
II. Отражатели плоские, прямоугольные размером $2A \times 2B$; расстояние между ними — $-2l$; удовлетворяются условия	II. 1. Прямоугольная сетка (см. пункт I. 1).	график зависимости $A_b(a/r_n)$ приведен на рис. 5.
	III. 1. Круглая сетка (см. пункт I. 2).	$\frac{64}{9} \frac{k^2 p^6}{p^4} \left(\frac{a}{2A} + \frac{1}{\pi} \sin \pi \frac{a}{2A}\right) \left(\frac{b}{2B} + \frac{1}{\pi} \sin \pi \frac{b}{2B}\right).$ где ψ_0 — первый корень уравнения $J_0(x) = 0$.
	III. 2. Круглая сетка (см. пункт I. 2).	$\frac{64\pi k^2 p^6}{9p^4} \left(\frac{a}{A}\right)^2 \frac{\psi_1^2 \left(\psi_0 \frac{a}{A}\right)}{\psi_1^2 \left(\psi_0\right)},$ $\sqrt{\frac{2kA^2}{l}} \gg 1.$

Таблица 3

Тип резонатора (форма отражателей)	Вид связи	Коэффициент рассеяния в окружающее пространство $\left(\eta_{\text{рас}}\right)$
I. Отражатели фазокорректирующие, однинаковые; фокусное расстояние $-z_0k$; расстояние между отражателями $-2z_0$.	I. 1. Узкая щель размером $a \times d$ в середине отражателя. II. $2\rho \ll \lambda$. В середине отверстия диаметра d .	$\frac{1}{6} \frac{1}{z_{0k} k \left[\ln \left(\frac{kd}{4} \right) \right]^2} \left[2 \frac{1 - \cos(ka)}{\sin(ka)} - ka \right]^2 \left(\frac{2z_0k}{z_0} - 1 \right)^{1/2}.$
II. Первый отражатель (с элементом связи) — плоский, бесконечный; второй — фазокорректирующий с фокусным расстоянием z_0k ; расстояние между отражателями z_0 .	III. 1. Узкая щель (см. пункт I. 1). III. 2. Круглое отверстие (см. пункт I. 2).	$\frac{1}{3} \frac{1}{z_{0k} k \left[\ln \left(\frac{kd}{4} \right) \right]^2} \left[2 \frac{1 - \cos(ka)}{\sin(ka)} - ka \right]^2 \left[\frac{z_0}{z_{0k}} \times \left(2 - \frac{z_0}{z_{0k}} \right) \right]^{-1/2}.$
III. Отражатели плоские, прямоугольные размером $2A \times 2B$; расстояние между отражателями $2l$; удовлетворяются условия	IV. 1. Узкая щель (см. пункт I. 1). IV. 2. Круглое отверстие (см. пункт I. 2).	$\frac{16}{27} \frac{k^6 p^6}{\pi^2 z_{0k}^2} \left[\frac{z_0}{z_{0k}} \left(2 - \frac{z_0}{z_{0k}} \right) \right]^{-1/2}.$
$\sqrt{\frac{2kA^2}{l}} \gg 1, \sqrt{\frac{2kB^2}{l}} \gg 1.$		$\frac{\pi}{3} \frac{1}{k^2 AB \left[\ln \left(\frac{kd}{4} \right) \right]^2} \left[2 \frac{1 - \cos(ka)}{\sin(ka)} - ka \right]^2.$
IV. Отражатели плоские, круглой формы диаметра $2A$, расстояние между отражателями $2l$; удовлетворяется условие		$\frac{1}{3} \frac{1}{k^2 A^2 j_1^2(\gamma_{01}) \left[\ln \left(\frac{kd}{4} \right) \right]^2} \left[2 \frac{1 - \cos(ka)}{\sin(ka)} - ka \right]^2.$
$\sqrt{\frac{2kA^2}{l}} \gg 1.$		$\frac{64}{27} \frac{k^4 p^6}{\pi^2 A^2 j_1^2(\gamma_{01})}.$

Рассчитанные по формуле (18) коэффициенты $\eta''_{\text{рас}}$ для реальных случаев приведены в таблице 3.

Учет рассеяния энергии в окружающее пространство элементом связи, выполненным в виде сетки с поперечными размерами порядка или большими длины волны, весьма сложен. Строго говоря, для этого нужно вычислить амплитуды всех волн, возбужденных элементом связи при падении на него рабочей волны из линии-аналога, и затем просуммировать мощности, уносимые этими волнами, с учетом влияния второго отражателя. Однако с увеличением размера сетки (диаметра A либо сторон A и B) рассеянная энергия концентрируется в основном в модах низкого порядка, имеющих малые дифракционные потери. Это обстоятельство освобождает нас от необходимости вычислять величину $\eta''_{\text{рас}}$ в интересующем нас случае (когда размеры сетки сравнимы с размерами поперечного сечения «пучка» на отражателе). В этом случае в формуле (2) можно положить $\eta''_{\text{рас}} = 0$.

Формулы и графики, приведенные в настоящей работе, позволяют провести инженерный расчет основных характеристик открытых резонаторов для ряда реальных способов связи с внешними линиями (через нерезонансную щель, малое круглое отверстие или же сетку из малых круглых отверстий). Эти формулы и графики в случае сферических отражателей конечных размеров справедливы при малых потерях на излучение ($\eta_{\text{изл}} \ll 1$). Эксперимент, проведенный для случая щелевой связи, дает удовлетворительное совпадение с результатами расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 34, 1541 (1964).
2. I. P. Christian, G. Goubaï, IRE Trans., AP-9, № 3, 256 (1961).
3. A. G. Fox, Tingue Li, Bell System Technical J., 40, № 2, 453 (1961).
4. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell System Technical J., 40, № 2, 489 (1961).
5. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 44, 1050 (1963).
6. Ю. А. Казанцев, Радиотехника и электроника, 4, 1480 (1959).
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
9. А. А. Пистолькорс, Антенны, Связьиздат, М., 1947.
10. Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, изд. Сов. радио, М., 1948.
11. H. A. Bethe, Phys. Rev., 66, 163 (1944).
12. G. Goubaï, F. Schwering, IRE Trans., AP-9, № 3, 248 (1961).
13. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 34, 193 (1964).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
28 мая 1966 г.

CALCULATION OF THE OPEN RESONATOR CHARACTERISTICS

Yu. N. Kazantsev

A method to calculate the main characteristics of open resonators, namely, the unloaded and loaded quality, the reflection and transmission coefficients is considered. General formulae have been obtained to calculate the resonator characteristics and the electrodynamic consideration of coupling and diffusion coefficients of coupling elements has been made, as well.

УДК 538'3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА НА ЦИЛИНДРЕ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушкин

Приводятся результаты решения задачи о распределении тока на идеально проводящем цилиндре средней толщины ($0,1 < ka < 0,5$). В предположении осесимметричного возбуждения волной ТМ получены 2 типа интегральных уравнений 1-го рода с различными областями изменения точек наблюдения и интегрирования. Доказывается существование и единственность решений этих уравнений. Даются примеры расчета распределения полного тока на цилиндрах различной толщины и длины.

Задача нахождения распределения тока на идеально проводящем тонком вибраторе решалась целым рядом авторов, и различные ее аспекты подробно освещены в литературе (библиографию можно найти, например, в [1]). Распределение тока на весьма толстом цилиндре также рассматривалось [2], хотя и менее подробно. Неисследованным остался вопрос о распределении тока на цилиндрах среднего электрического радиуса $0,1 < ka < 0,5$ ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, a — радиус цилиндра), который и рассматривается в данной работе.

Задача формулируется следующим образом. Требуется найти поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, условию излучения и условию равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности антенны. Для этой задачи будут составлены два интегральных уравнения 1-го рода, одно из которых во многом аналогично известному уравнению тонкой антенны Халлена, а второе — интегральному уравнению 2-го рода, примененному в работе [2]. Использование этих уравнений позволяет снять необходимое в теории тонкой антенны ограничение на радиус $a/\lambda \ll 1$.

При выводе уравнений не будем налагать жестких ограничений на форму антенны, предположим только, что она является телом вращения без острых кромок. Возбуждение будем считать осесимметричным (вольной ТМ). Зависимость от времени зададим в виде $\exp(i\omega t)$.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение поставленной задачи может быть проведено с помощью интегральных уравнений первого рода с разными областями изменения точек наблюдения и интегрирования. В применении к решению задачи о возбуждении тонкого вибратора подобные уравнения рассматривались в работах [3].

Для составления уравнений найдем вначале в произвольной точке p векторный потенциал токов, текущих по поверхности тела:

$$\mathbf{A}(p) = -\frac{1}{4\pi} \int_v \int_{\phi=0}^{2\pi} J(v) \frac{\exp(-ikr)}{r} h_2 h_3 dv d\phi. \quad (1)$$

В (1) использованы координаты вращения u, v, ϕ такие, что одна из

поверхностей $u = \text{const}$ совпадает с поверхностью тела Σ . Через h_1, h_2, h_3 обозначены коэффициенты Ламе этой системы. Кроме координат вращения будут также использоваться цилиндрические координаты R, φ, z .

При осесимметричном возбуждении волной ТМ искомая поверхностная плотность тока $J(v)$ имеет только одну продольную составляющую $J_v(v)$, причем эта составляющая направлена по орту v^0 , взятыму в произвольной точке v . Отнесем вектор $J(v)$ к неподвижным при интегрировании ортам, взятым в точке p . Будем считать, что точка p расположена на некоторой поверхности Σ' внутри тела, которую выберем в виде цилиндра с плоскими торцами. Такой выбор поверхности Σ' , как будет видно из дальнейшего, удобен для задач возбуждения тел, близких по форме к цилиндру. Предполагается, что поверхность Σ' так же, как и поверхность Σ , задается условием $u = \text{const}$, причем обе поверхности могут (но не обязательно) быть подобными.

Перенос вектора $J(v)$ в точку p делается с помощью общих формул, приведенных в [4,5], после чего, учитывая, что ток не зависит от координаты φ , можно провести интегрирование по этой координате. В результате получаем выражения для составляющих векторного потенциала:

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{1}{2} \int_v \cos \Theta J_v(v) S_1 h_2 h_3 dv, \\ A_z &= -\frac{1}{2} \int_v \sin \Theta J_v(v) S_0 h_2 h_3 dv. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Θ — угол между направлением внешней нормали к поверхности в точке интегрирования v и осью вращения; S_0 и S_1 — нулевой и первый коэффициенты разложения в ряд Фурье по азимутальной координате функции Грина $[\exp(-ir)]/r$, где $r = [(z - z')^2 + R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(\varphi - \varphi')]^{1/2}$ [6] (штрихами здесь обозначены цилиндрические координаты точки v' на поверхности Σ' , координаты точки v на поверхности Σ оставлены без штрихов). Все линейные размеры в (2) и последующих формулах предполагаются умноженными на волновое число k .

Для составления уравнения, аналогичного уравнению Халлена, найдем z -составляющую электрического поля

$$\begin{aligned} E_z(p) &= \frac{iW_0}{2} \int_v \left[\sin \Theta \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial z'^2} + S_0 \right) - \frac{\cos \Theta}{R'} \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\partial^2 (R' S_1)}{\partial z' \partial R'} \right] J_v(v) h_2 h_3 dv, \end{aligned} \quad (3)$$

где $W_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ — волновое сопротивление свободного пространства.

Добавим к полю (3) тока, текущего по поверхности тела, поле первичных источников E_z^n и потребуем равенства полного поля $E_z + E_z^n$ нулю на поверхности Σ' . В дальнейшем будет показано, что это условие на вспомогательной поверхности Σ' обеспечивает выполнение поставленного граничного условия на поверхности Σ . Интегральное уравнение, получающееся из указанного требования, имеет вид

$$\int_v \left[\sin \Theta \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} + S_0 \right) - \cos \Theta \frac{\partial^2 S_0}{\partial R \partial z} \right] J_v(v) h_2 h_3 dv = \frac{2i}{W_0} E_z^n. \quad (4)$$

В этом уравнении выражение для ядра преобразовано с помощью формул [6]

$$\frac{\partial(R'S_1)}{R'\partial R'} = -\frac{\partial S_0}{\partial R}, \quad \frac{\partial S_m}{\partial z'} = -\frac{\partial S_m}{\partial z}. \quad (5)$$

Функция S_0 зависит от положения точки истока и точки наблюдения. Первая (с координатой v) находится на поверхности Σ , вторая (с координатой v') — на поверхности Σ' . Таким образом, уравнение (4) отличается от классических интегральных уравнений, имеющих одинаковую область изменения точек интегрирования и наблюдения. Ядро уравнения непрерывно, так как функции S_0 и S_1 и их производные имеют особенность только тогда, когда точки наблюдения и истока совпадают.

Уравнение (4) по форме близко к известному уравнению Халлена (до обращения оператора $\partial^2/\partial z^2 + 1$) с той лишь разницей, что вместо функции $[\exp(-ir)]/r$ в него входит функция S_0 , а также имеется слагаемое, учитывающее влияние торца.

Правая часть интегрального уравнения E_z^n представляет собой первичное электрическое поле, вычисленное на поверхности Σ' . Если в качестве первичного источника взять поперечную щель (азимутальный магнитный ток), то правая часть уравнения (4) будет иметь вид

$$2E_z^n = \int_{\Delta_{\text{щ}}} J_{\varphi}^m \frac{\partial S_0}{\partial R} R dv, \quad (6)$$

где J_{φ}^m — поверхностная плотность магнитного тока, эквивалентного щели. Интеграл берется по щели, имеющей размер $\Delta_{\text{щ}}$.

Для составления второго уравнения найдем φ -составляющую магнитного поля токов, текущих по поверхности тела. Используя (2), а также формулы работы [6], находим

$$H_{\varphi} = -\frac{1}{2} \int_v \left\{ [\cos \Theta(z - z') + R \sin \Theta] S_1^l - R^l \sin \Theta S_0^l \right\} J_{\varphi}(v) h_2 h_3 dv. \quad (7)$$

Здесь

$$S_m^l = (z - z')^{-1} \frac{\partial S_m}{\partial z}.$$

Добавляя первичное поле H_{φ}^n и приравнивая полное поле нулю на поверхности Σ' , получим уравнение

$$\int_v \{ R' \sin \Theta S_0^l - [R \sin \Theta + (z - z') \cos \Theta] S_1^l \} J_{\varphi}(v) h_2 h_3 dv = 2H_{\varphi}^n. \quad (8)$$

Ядро уравнения (8) формально совпадает с ядром уравнения работы [2]. Отличие заключается в том, что в уравнении (8) точки v и v' находятся на разных поверхностях Σ и Σ' , в то время как в уравнении работы [2] те же точки находятся на одной поверхности Σ .

Так же, как и в случае предыдущего уравнения, из равенства нулю поля H_{φ} на Σ' следует равенство нулю тангенциальной составляющей вектора E на поверхности Σ .

Правая часть уравнения (8) в предположении, что первичным источником является щель, записывается в виде

$$2H_{\varphi}^n = \frac{i}{W_0} \int_{\Delta_{\text{щ}}} J_{\varphi}^m S_1 R dv. \quad (9)$$

Отметим, что уравнения (4) и (8) могут быть получены из леммы Лоренца (см., например, [8]) при выборе в качестве вспомогательных источников рамок с электрическим током, направленным по z , и магнитным током, направленным по φ .

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наиболее просто доказывается существование решений интегральных уравнений (4) и (8). Эти уравнения составлялись из условия равенства нулю поля в области V , ограниченной поверхностью Σ . Существование решения внешней электродинамической задачи для идеально проводящего тела доказано в [7]. Однако решение указанной задачи имеет поле, равное нулю в области V (по крайней мере, при отсутствии резонанса в этой области). Следовательно, это решение будет также решением уравнений (4) и (8).

Для доказательства единственности решений необходимо доказать, что из равенства нулю E_z на Σ' и H_φ на Σ' следует выполнение граничного условия на Σ . Для уравнения (8) доказательство проводится так же, как и в работе [9]. К области V' , ограниченной поверхностью Σ' , применяется теорема Пойнтинга. Из равенства нулю H_φ на Σ' при отсутствии резонанса в области V' следует равенство нулю поля в области V' . В силу аналитичности поля в области V из равенства нулю поля в области V' следует равенство нулю поля во всей области V . Тангенциальное к Σ электрическое поле непрерывно на листе электрического тока, поэтому из равенства нулю поля внутри области V следует выполнение граничного условия $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ на Σ .

В случае уравнения (4) непосредственно применить теорему Пойнтинга нельзя, так как на цилиндрической части поверхности Σ' задана равная нулю касательная составляющая вектора E , а на торцовой — нормальная.

Покажем, что из равенства нулю нормальной составляющей вектора E следует равенство нулю тангенциальной составляющей вектора H . Воспользуемся для этого потенциалом Абрагама для осесимметричной ТМ-волны. Поля выражаются через этот потенциал следующим образом [9]:

$$E_u = -\frac{1}{i \omega h_2 h_3} \frac{\partial Q}{\partial v}, \quad E_v = \frac{1}{i \omega h_1 h_3} \frac{\partial Q}{\partial u}, \quad H_\varphi = Q/h_3. \quad (10)$$

Пусть на поверхности Σ' , определяемой уравнением $u = \text{const}$, $E_u = 0$. Тогда на той же поверхности $Q = \text{const}$ и

$$H_\varphi = \text{const}/h_3. \quad (11)$$

На оси вращения $H_\varphi = 0$, что возможно только при условии равенства нулю указанной константы. Применяя приведенные соображения к торцу цилиндрической поверхности Σ' , убеждаемся, что H_φ на торцовой поверхности обращается в нуль, если равна нулю составляющая поля E_z . Далее доказательство проводится точно так же, как и для уравнения (8).

Таким образом, решения уравнений (4) и (8) будут решениями внешней электродинамической задачи. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла, условию излучения в силу соотношений (1), (3), (7) и, как доказано выше, граничному условию.

Теперь можно убедиться, что решения уравнений (4) и (8) единственные. Допустим, что одно из них имеет два решения. Но эти два реше-

ния являются решениями внешней электродинамической задачи и потому должны совпадать друг с другом.

3. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для численного решения интегральных уравнений с разными областями изменения точек наблюдения и интегрирования могут применяться те же методы, что и для решения классических интегральных уравнений. Рассмотрим вначале методику решения уравнения (8). При близком расположении точек наблюдения и интегрирования ядро уравнения (8) меняется очень резко. В этих условиях удобным является метод, заключающийся в замене искомого тока кусочно-постоянной функцией [8]. В соответствии с этим методом уравнение (8) приближенно сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{n=1}^N J_v(v_n) \int_{v_n - \Delta v_n/2}^{v_n + \Delta v_n/2} K(v'_k, v) h_2 h_3 dv = f(v'_k) \quad (k=1,2,\dots,N). \quad (12)$$

График действительной части ядра $\operatorname{Re} K(v'_k, v)$ в случае уравнения (8) имеет ярко выраженный экстремум, вблизи которого ядро меняет знак. (На рис. 1 показан вид ядра $\operatorname{Re} K$ в зависимости от продольной цилиндрической координаты z для цилиндра радиуса $ka = 0,3$ при нескольких положениях вспомогательного источника.

Нормированное расстояние между поверхностями Σ и Σ' в этом случае равно $k(a - R')$. Экстремум соответствует ближайшему расположению точек наблюдения и истока; в системе уравнений (12) интегралы вблизи экстремума соответствуют диагональным элементам. Всегда желательно, чтобы диагональные элементы существенно превышали остальные, так как система алгебраических уравнений (12) при этом получается хорошо обусловленной. Поэтому величину интервала Δv следует выбирать так, чтобы он укладывался между двумя нулями ядра вблизи экстремума.

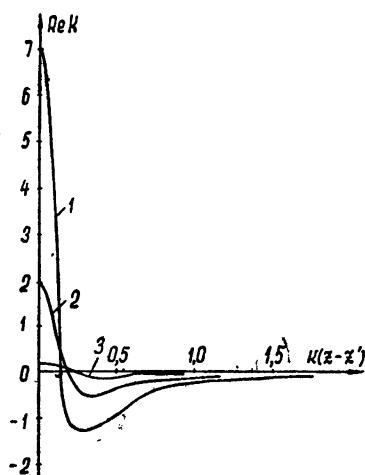
С уменьшением диаметра вибратора расстояние между указанными нулями уменьшается, поэтому уменьшается и оптимальная длина интервала Δv . Это, в свою очередь, приводит (при неизменной длине цилиндра) к росту порядка системы линейных алгебраических уравнений.

Рис. 1. Вид ядра интегрального уравнения (8) в случае $ka=0,3$: $1-kR'=0,2$; $2-kR'=0,1$; $3-kR'=0,01$.

При очень малом радиусе вибратора оптимальная длина интервала Δv настолько мала, что вычисление по приведенной схеме становится нецелесообразным.

Рассмотрим теперь способ решения уравнения (4). Вследствие наличия второй производной функции S_0 действительная часть ядра уравнения (4) меняется еще более резко, чем ядро уравнения (8). Поэтому произведем, как это делается в теории тонкой антенны, обращение оператора $\partial^2/\partial z^2 + 1$. Обозначим

$$y = \int_v S_0 \sin \Theta I_v(v) h_2 dv, \quad (13)$$



где $I_v = 2\pi R J_v$ — полный ток. Тогда (4) с учетом (5) и (13) можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz'^2} + y = \Psi(z'). \quad (14)$$

Здесь

$$\Psi(z') = \frac{4\pi i}{W_0} E_z^n + \int_v^z \frac{\partial^2 S_0}{\partial R \partial z} \cos \Theta I_v(v) h_2 dv.$$

Уравнение (14) имеет решение следующего вида [10]:

$$y = C_1 \cos z' + C_2 \sin z' + \int_{z_0}^{z'} \Psi(t) \sin(z' - t) dt. \quad (15)$$

Нижний предел интегрирования произвольен, поэтому положим его равным нулю. Тогда интегральное уравнение приобретает вид

$$\int_v K_1(v', v) I_v(v) h_2 dv = C_1 \cos z' + C_2 \sin z' + f(v'), \quad (16)$$

где

$$K_1(v', v) = S_0 \sin \Theta + \cos \Theta \int_v^{z'} \cos(z' - t) \left. \frac{\partial S_0}{\partial R} \right|_{z'=t} dt; \quad (17)$$

$$f(v') = \frac{2\pi i}{W_0} \int_{\Delta v}^M R \int_0^{z'} \sin(z' - t) \left. \frac{\partial S_0}{\partial R} \right|_{z'=t} dt dv. \quad (18)$$

Решение уравнения (16) находится примерно так же, как и уравнения (8). Вследствие простоты главной части ядра (функция S_0 [6]) в случае уравнения (16) жестких ограничений на величину интервала Δv нет. Этот интервал должен быть таким, чтобы ток можно было считать мало меняющимся в пределах интервала. Отметим, что при определении коэффициентов матрицы и правых частей системы алгебраических уравнений интегралы по элементарным отрезкам Δv всегда вычислялись по формуле Симпсона с заранее заданной относительной точностью, которая обычно полагалась равной $10^{-3} \div 10^{-4}$.

Основное различие между уравнениями (8) и (16) состоит в наличии двух произвольных постоянных у последнего. Эти постоянные определяются из условия равенства нулю тока в центре торцов тела, т. е. в точках пересечения поверхности Σ с осью вращения. Делается это следующим образом. Матрица A системы алгебраических уравнений, приближенно эквивалентной интегральному уравнению (16), обращается. Затем обращенная матрица умножается на вектор правой части:

$$\begin{aligned} A^{-1} [C_1 \cos z'_k + C_2 \sin z'_k + f(v'_k)] &= \\ = C_1 A^{-1} \cos z'_k + C_2 A^{-1} \sin z'_k + A^{-1} f(v'_k). \end{aligned} \quad (19)$$

В результате с точностью до двух произвольных постоянных получаем распределение тока в точках v_k . Потребуем равенства нулю тока на первом и последнем интервалах. Из этого условия и определяются постоянные C_1 и C_2 . При этом делается небольшая ошибка, поскольку ток приравнивается нулю не на оси, а на первом и последнем интервалах.

Однако эти интервалы могут быть выбраны настолько малыми, что ошибка оказывается практически несущественной.

Уравнение (16) непосредственно переходит в уравнение Халлена, когда радиус вспомогательной поверхности Σ' стремится к нулю.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Рассматриваемый метод решения задачи возбуждения идеально проводящего вибратора средней толщины позволяет определять распределение тока на антenne непосредственно в виде численных результатов. Для решения интегральных уравнений (8) и (16) были составлены программы на электронной вычислительной машине; ниже приводятся некоторые результаты расчета.

Поясним используемые обозначения. На рисунках показано распределение полного тока $I_v = |I_v| \exp(i\psi)$. Амплитуда тока приводится на верхних графиках, а фаза ψ — на нижних, причем для цилиндров различной толщины начало координат смещено по вертикали. Амплитуда тока нормируется к единице, и коэффициент нормировки l указывается. Вертикальные пунктирные линии показывают место перехода от цилиндрической к торцовой части антенны. Короткие вертикальные сплошные линии относятся к центру торцов. Положение щели указывается на оси абсцисс. При симметричном возбуждении распределение тока приводится только для сдной половины вибратора.

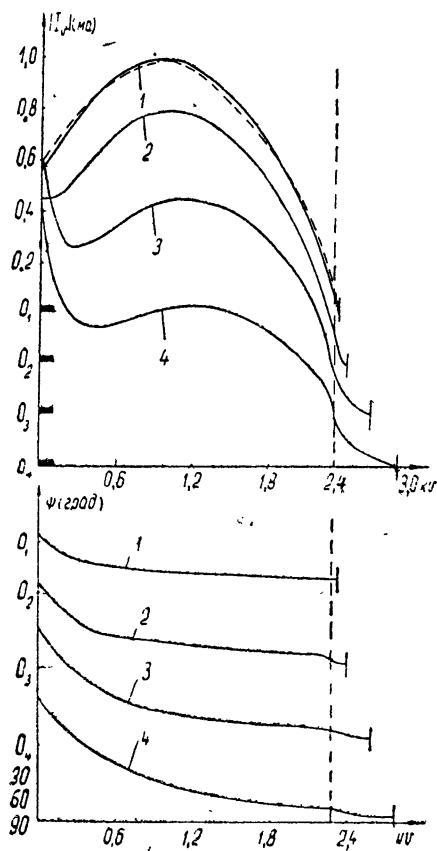


Рис. 2. Распределение нулевой гармоники полного тока на цилиндрах длиной $L=0,75\lambda$ при симметричном расположении щели:

1— $ka=0,032$, $l=1,97$; 2— $ka=0,1$, $l=0,83$;
3— $ka=0,3$, $l=0,47$; 4— $ka=0,5$, $l=0,48$.

На рис. 2 показано распределение тока на вибраторах 4-х различных радиусов, имеющих одинаковую длину цилиндрической части

$L = 0,75 \lambda$ ($kL = 4,7$). Приведенные графики являются решениями интегрального уравнения (8) при симметричном возбуждении цилиндров-щелью, имеющей нормированную ширину $\Delta_{\text{ш}} = 0,151$. Представлены результаты расчета для радиусов цилиндра $ka = 0,032; 0,1; 0,3; 0,5$. Для цилиндра с $ka = 0,032$ значение известного параметра $\Omega = 2l\pi(L/a)$ равно 10. В этом случае распределение тока обычно находится как решение линеаризованного уравнения Халлена. Для сравнения результаты этого решения, имеющиеся в [11], показаны на рис. 2 пунктирной линией.

На следующих рисунках приведено распределение тока на более длинных цилиндрах, имеющих цилиндрическую часть с $L = 1,25\lambda$ ($kL = 7,85$). На рис. 3 указаны результаты расчета для случая симметричного возбуждения, а на рис. 4 — для случая возбуждения щелью, расположенной около торца. Ширина щели в обоих случаях $\Delta_{\text{ш}} = 0,022$. Пунктирной линией на рис. 4 показано распределение тока, полученное как решение интегрального уравнения (16). Следует отметить довольно хорошее совпадение (фаза практически не отличается).

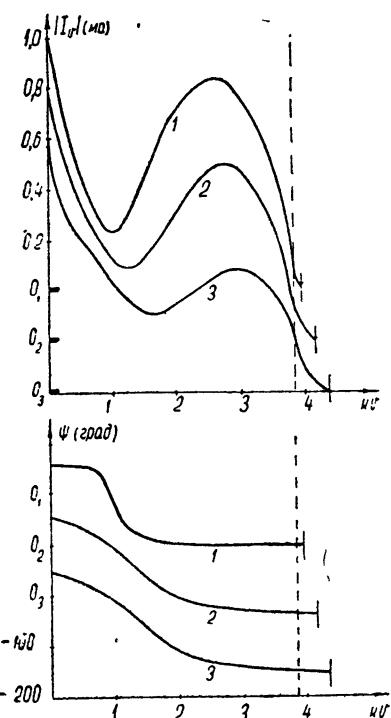


Рис. 3. Распределение нулевой гармоники полного тока на цилиндрах длиной $L=1,25\lambda$ при симметричном расположении щели:

1 — $ka=0,11$, $l=0,174$; 2 — $ka=0,3$, $l=0,29$;
3 — $ka=0,5$, $l=0,4$.

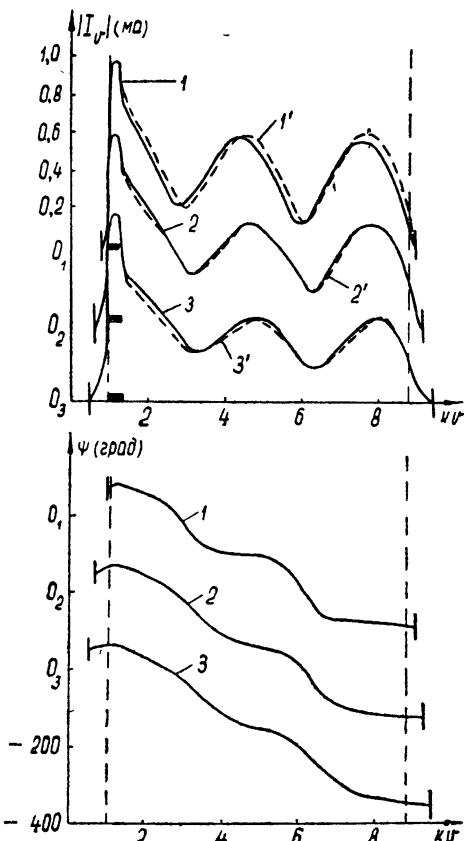


Рис. 4. Распределение нулевой гармоники полного тока на цилиндрах длиной $L=1,25\lambda$ при несимметричном расположении щели:

1 — $ka=0,11$, $l=0,103$ ($l'=0,096$), 2 — $ka=0,3$, $l=0,190$ ($l'=0,216$); 3 — $ka=0,5$, $l=0,312$ ($l'=0,338$).

Из полученных кривых видно, что с увеличением радиуса цилиндра существенно уменьшается коэффициент отражения от торца и распределение тока приобретает вид бегущей волны. Этот факт был отмечен в [2] при анализе распределения тока на цилиндрах большего радиуса.

Отметим, что для нескольких цилиндров рассчитывалось распределение тока при разной ширине возбуждающей щели. Результаты показали, что изменение ширины щели лишь незначительно ($\sim 10\%$) меняет амплитуду тока вблизи щели (на расстояниях $kv < 1,5$). На оставшейся части распределение тока остается неизменным.

Расчеты, проведенные для более толстых цилиндров, дали результаты, совпадающие с результатами работы [2].

Таким образом, в работе составлены интегральные уравнения первого рода для задачи осесимметричного возбуждения тела вращения. Доказаны теоремы существования и единственности решений для этих уравнений. В случае уравнения (8) это сделано для произвольной вспомогательной поверхности Σ' , а в случае уравнения (16) — для поверхности Σ' в виде цилиндра с плоскими торцами.

Численное решение полученных уравнений дает возможность находить распределение тока для тел вращения произвольной формы и, в частности, для цилиндра средней толщины (радиуса $0,1 \div 0,5$). В последнем случае проведены достаточно подробные расчеты.

В заключение авторы выражают благодарность Маркову Г. Т., прочитавшему рукопись статьи и сделавшему ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Говорун, Диссертация, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 1960.
2. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, Радиотехника и электроника, 8, № 12, 1972 (1963).
3. G. E. Albert, J. L. Synge, Quarterly Appl. Math., 6, № 2, 117 (1948).
4. Е. Н. Васильев, Научн. докл. высш. школы.—Радиотехника и электроника, 1, № 1, 188 (1958).
5. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 588 (1959).
6. Е. Н. Васильев, Ж. вычисл. математики и математич. физики, 5, № 5, 843 (1965).
7. C. Müller, Math Zeitschrift, 56, № 3, 261 (1952).
8. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалунин, ЖТФ, 37, № 3, 421 (1967).
9. Дж. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
10. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 2, Гостехиздат, М.—Л., 1956.
11. R. W. P. King, The Theory of Linear Antennas, Cambridge, Mass., 1956.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
31 марта 1966 г.

CURRENT DISTRIBUTION ON A CYLINDER WITH MEDIUM THICKNESS

E. N. Vasil'ev, G. D. Malushkov

The results of the problem solution of the current distribution on a perfectly conducting cylinder having the medium thickness ($0.1 \leq ka \leq 0.5$) are given. Assuming the axis-symmetric excitation by TM-wave, two types of the 1st order integral equations with different regions of the observation and integration points have been derived. The unique existence of the solution of these equations is proved. The examples are presented to calculate the total current distribution on cylinders with different thickness and length.

УДК 621.371.123

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

А. Г. Литвак, В. И. Таланов

Показано, что распространение пространственно ограниченных волновых пакетов в диспергирующих слабонелинейных (кубичных) изотропных средах может описываться с помощью параболического уравнения, аналогичного применяемому в теории волновых пучков уравнению поперечной диффузии для лучевой амплитуды поля. На основе этого уравнения рассмотрены нестационарные задачи самофокусировки неустойчивость плоской волны относительно пространственно-временных возмущений и явление самосжатия импульсов в диспергирующей кубичной среде.

Параболическое уравнение, или уравнение поперечной диффузии для лучевой амплитуды электромагнитного поля, успешно применялось при решении ряда дифракционных задач [1-4]. В частности, с его помощью были рассмотрены задачи о прохождении волновых пучков через линейные и слабонелинейные среды [5-10]. Ниже показано, что распространение пространственно ограниченных волновых пакетов в диспергирующих слабонелинейных (кубичных) изотропных средах также может описываться с помощью параболического уравнения. В качестве примеров применения этого уравнения рассмотрены неустойчивость плоской волны относительно пространственно-временных возмущений и явление автокомпрессии импульсов в диспергирующей кубичной среде.

1. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Получим сначала, преследуя в основном методические цели*, параболическое уравнение для волновых пакетов в линейной диспергирующей среде с параметрами $\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = 1$. Одномерные волновые пакеты в такой среде определяются уравнением

$$E''_{zz} - \frac{1}{c^2} D''_{tt} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$D = \hat{\epsilon} E = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) E(\omega) \exp(i\omega t) d\omega; \quad (1.2)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (1.3)$$

* Параболическое уравнение для волновых пакетов в линейной среде было получено в работе [11] на основе приближенного спектрального представления решений строгого исходного уравнения (1.1). Мы воспользуемся здесь приемом, основанным на преобразовании самого уравнения (1.1), допускающим простое обобщение на нестационарные волновые пучки в слабонелинейной диспергирующей среде, а также волновые пакеты в среде с пространственной дисперсией (см. Приложение).

Предполагая, что спектральная функция $E(\omega)$ отлична от нуля лишь в узком диапазоне $\Delta\omega \ll \omega_0$ вблизи некоторой частоты ω_0 , выделим в выражениях для E и D медленно меняющиеся множители E_0 и D_0 :

$$E = \frac{1}{2} [E_0(t) \exp(i\omega_0 t) + \text{к. с.}], \quad D = \frac{1}{2} [D_0(t) \exp(i\omega_0 t) + \text{к. с.}]. \quad (1.4)$$

Считая дисперсию на интервале $\Delta\omega$ достаточно слабой, в спектральном представлении

$$D_{tt} = -c^2 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 E \exp(i\omega t) d\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \quad (1.5)$$

разложим множитель k^2 в ряд по степеням $\omega - \omega_0$, ограничившись тремя первыми членами:

$$k^2 = k_0^2 + A(\omega - \omega_0) + B(\omega - \omega_0)^2, \quad (1.6)$$

где

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon(\omega_0)}, \quad A = 2k'_\omega k_0, \quad B = k''_{\omega\omega} k_0 + k'^2_\omega.$$

Уравнение (1.1) с учетом (1.5) и (1.6) приводится к виду*

$$E''_{0zz} + k_0^2 E_0 - iAE'_{0t} - BE''_{0tt} = 0.$$

Это уравнение, в свою очередь, с помощью замены функции $E_0 = \epsilon \exp(-ik_0 z)$ и введения новых независимых переменных**

$$z = z, \quad \xi = z - vt$$

может быть записано в форме

$$E''_{zz} + 2\varepsilon''_{z\xi} + k_0 v'_\omega \varepsilon'_{\xi\xi} - 2ik_0 \varepsilon'_z = 0, \quad (1.7)$$

где $v = (k'_\omega)^{-1}$ — групповая скорость волны.

Будем рассматривать только медленно меняющиеся решения уравнения (1.7), описывающие квазимохроматические пакеты, бегущие в $+z$ -направлении. Выясним условия, при которых для таких решений в (1.7) можно отбросить два первых слагаемых. Эти условия аналогичны условиям применимости диффузационного приближения в теории волновых пучков [6].

Второе слагаемое в (1.7) можно не учитывать, если масштаб Λ_ξ неоднородности волнового пакета по ξ велик по сравнению с длиной волны $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \sqrt{\epsilon(\omega_0)}$: $k_0 \Lambda_\xi \gg 1$. Это условие можно записать еще и так: $\omega_0 \tau_n v/v_\Phi \gg 1$, где τ_n — длительность импульса, $v_\Phi = c/\sqrt{\epsilon(\omega_0)}$ —

* Это уравнение можно также получить из (1.1), если вместо интегрального нелокального материального уравнения (1.2) воспользоваться приближенным соотношением для медленно меняющихся амплитуд:

$$D_0(t) = \epsilon(\omega_0) E_0 - i\epsilon'_\omega E'_0 - \frac{1}{2} \epsilon''_{\omega\omega} E''_{0tt}.$$

При этом, конечно, нельзя выходить за пределы приближения, т. е. при дифференцировании величины $D(t)$ следует отбрасывать производные $E_0(t)$ выше второго порядка.

** Вместо координат z, ξ можно было бы ввести z и $\tau = t - z/v$, однако принятые нами координаты удобнее, так как имеют одинаковую размерность.

—фазовая скорость волны на частоте ω_0 . При $v < v_\phi$ требование $k_0 \Lambda_\xi \gg 1$ несколько жестче, чем обычное условие квазимонохроматичности пакета $\omega_0 \tau_i \gg 1$. Первый член в уравнении (1.7) можно отбросить, если форма пакета существенно меняется на масштабах $\Lambda_z \gg k_0^{-1}$. В итоге получим уравнение параболического типа:

$$k_0 v'_\omega \mathcal{E}_{\xi\xi}'' - 2ik_0 \mathcal{E}_z' = 0. \quad (1.8)$$

Из (1.8) видно, что в рассматриваемых волновых пакетах масштабы Λ_z и Λ_ξ связаны соотношениями

$$\Lambda_z \sim \frac{\Lambda_\xi^2}{|v'_\omega|} = \frac{\tau_h v^2}{|v'_\omega|}, \quad \frac{\Lambda_z}{\Lambda_\xi} \gg \frac{1}{k_0 |v'_\omega|}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) описывает изменение формы волнового пакета как диффузию его амплитуды вдоль оси z относительно «центра тяжести» пакета $z_u = vt$. Его решения обладают точно такими же свойствами, что и решения диффузионного уравнения для волновых пучков [6]. Например, импульс гауссовой формы (аналог гауссового пучка в квазиоптике) подвергается при распространении в диспергирующей среде только квадратичным фазовым искажениям, не меняя при этом амплитудного распределения; на расстояниях $z \gg \Lambda_z$ любой волновой пакет принимает форму своего частотного спектра (аналог диаграммы направленности волнового пучка в зоне Фраунгофера); импульс, в котором в некотором сечении ($z = 0$) отсутствует фазовая модуляция, до и после этого сечения описывается комплексно сопряженными функциями $\mathcal{E}(z, u) = \mathcal{E}^*(z, -u)$, и т. п. Все эти следствия, естественно, вытекают из спектрального представления решений уравнения (1.1) с учетом (1.3) [12, 13].

Уравнение (1.8) легко обобщается на случай широкого ($k_0 \Lambda_\perp \gg 1$) нестационарного волнового пучка:

$$\Delta_\perp \mathcal{E} + k_0 v'_\omega \mathcal{E}_{\xi\xi}'' - 2ik_0 \mathcal{E}_z' = 0. \quad (1.10)$$

Первое слагаемое в (1.10) описывает поперечную диффузию лучевой амплитуды пакета [2]. Как уже отмечалось, уравнение (1.10) для стационарных волновых пучков ($\mathcal{E}_{\xi\xi}'' = 0$) исследовалось в ряде работ [5, 6]. Анализ нестационарного уравнения (1.10) проводится аналогично.

Можно также обобщить уравнение (1.8) на случай распространения одномерных волновых пакетов в средах с пространственной дисперсией (см. Приложение).

2. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ СРЕДЫ

Дополним уравнение (1.10) нелинейными членами, описывающими самовоздействие пространственно ограниченного волнового пакета в кубической изотропной среде с нелинейной поляризацией [14]:

$$P^{NL} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{abc} E(\omega_a^*) E(\omega_b^*) E(\omega_c^*) \exp [i(\omega_a^* + \omega_b^* + \omega_c^*) t] d\omega_a^* d\omega_b^* d\omega_c^*. \quad (2.1)$$

Здесь $\chi^{abc} = \chi(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ — параметр нелинейности среды, $E(\omega)$ — спектр рассматриваемого поля $E(t)$.

Учитывая, что $D = \hat{\epsilon}E + 4\pi P^{NL}$, возьмем за исходное уравнение

$$\Delta_{\perp} E + E'_{zz} - \frac{1}{c^2} (\hat{\epsilon}E)'_{tt} - \frac{4\pi}{c^2} (P^{NL})''_{tt} = 0 \quad (2.2)$$

и перейдем в нем к медленно меняющейся амплитуде поля E_0 . Из (1.2) имеем

$$E(\omega) = E_0(\omega - \omega_0) + E_0^*(-\omega - \omega_0); \quad (2.3)$$

$$E_0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) \exp(-i\Omega t) dt. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в $(P^{NL})''_{tt}$, выделим в полученном выражении медленно меняющуюся амплитуду при $\exp(i\omega_0 t)$:

$$(P^{NL})''_{tt} = 3q(t). \quad (2.5)$$

Здесь

$$q(t) = - \iint_{-\infty}^{\infty} (\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3)^2 \chi(\omega_0 + \Omega_1, \omega_0 + \Omega_2, -\omega_0 - \Omega_3) \times \\ \times E_0(\Omega_1) E_0(\Omega_2) E_0^*(\Omega_3) \exp[i(\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3)t] d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3. \quad (2.6)$$

Следует иметь в виду, что функция $\chi(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ симметрична относительно перестановки любой пары частот. Формулы (2.6) для $q(t)$ можно несколько упростить, если учесть, что ширина спектра E_0 мала по сравнению с ω_0 , и пренебречь в первом множителе под интегралом слагаемыми Ω_k . Дальнейшие упрощения этих формул удается провести только при определенных предположениях относительно характера зависимости $\chi(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$.

Если в рассматриваемом спектральном интервале можно полностью пренебречь дисперсией χ , то

$$q = -\omega_0^2 \chi_0 |E_0|^2 E. \quad (2.7)$$

В этом случае уравнение (2.2) приводится к виду

$$\Delta_{\perp} E + k_0 v'_{\omega} \mathcal{E}'_{\xi\xi} - 2ik_0 \mathcal{E}'_{\xi} + k_0^2 \epsilon' Q^{NL} = 0, \quad (2.8)$$

где

$$Q^{NL} = |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}, \quad \epsilon' = \frac{12\pi}{\epsilon(\omega_0)} \chi_0 \quad (\chi_0 = \chi(\omega_0, \omega_0, -\omega_0)). \quad (2.9)$$

Стационарный вариант ($\mathcal{E}'_{\xi} = 0$) уравнения (2.8) исследовался в работах [8, 9]. В § 4 мы приведем его решения для некоторых типов одномерных волновых пакетов ($\Delta_{\perp} E = 0$).

Если дисперсия χ мала, то в интегралах (2.6) можно ограничиться первыми двумя членами разложения χ по Ω_k . В результате в уравнении (2.8) вместо (2.9) будем иметь

$$Q^{NL} = |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} + iv(\tau_1 |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}'_{\xi} + \tau_2 \mathcal{E}^2 \mathcal{E}''), \quad (2.10)$$

где

$$\tau_1 = \chi_0^{-1} (\partial\chi/\partial\omega_a + \partial\chi/\partial\omega_b)_{\omega_0, \omega_0, -\omega_0}, \quad (2.11)$$

$$\tau_2 = \chi_0^{-1} (\partial\chi/\partial\omega_c)_{\omega_0, \omega_0, -\omega_0}$$

— некоторые характерные времена.

В произвольном случае нелинейный член Q^{NL} в (2.8) можно представить в виде

$$Q^{NL} = \frac{1}{\chi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \chi(\omega_0 + vx_1, \omega_0 + vx_2, -\omega_0 - vx_3) \mathcal{E}_x(x_1) \mathcal{E}_x(x_2) \times \\ \times \mathcal{E}_x^*(x_3) \exp[-i(x_1 + x_2 + x_3) \xi] dx_1 dx_2 dx_3, \quad (2.12)$$

причем

$$\mathcal{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_x(x) \exp(-ix\xi) dx. \quad (2.13)$$

В следующих параграфах мы на ряде примеров проиллюстрируем применение полученных уравнений.

3. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В КУБИЧНОЙ СРЕДЕ

В работе [10] было показано, что интенсивная плоская монохроматическая волна в слабонелинейной кубичной среде неустойчива по отношению к малым амплитудно-фазовым возмущениям в некотором диапазоне пространственных частот этих возмущений. Аналогичное рассмотрение временной неустойчивости плоской волны для одной конкретной модели нелинейной среды проведено в [15]. Здесь мы рассмотрим этот вопрос в общем виде, основываясь на уравнении (2.8) и представлении (2.12).

Пусть

$$\mathcal{E} = (\bar{\mathcal{E}} + e(r, \xi)) \exp(-i\gamma z), \quad \gamma = \frac{k_0}{2} \varepsilon' \bar{\mathcal{E}}^2, \quad |e| \ll \bar{\mathcal{E}}. \quad (3.1)$$

Спектр $\mathcal{E}(x)$ этой функции равен

$$\mathcal{E}(x) = (\bar{\mathcal{E}}^{\delta}(x) + f_e) \exp(-i\gamma z), \quad (3.2)$$

где

$$f_e(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e(r, \xi) \exp(ix\xi) d\xi \quad (3.3)$$

-- спектр возмущения $e(r, \xi)$.

Подставляя (3.2) в (2.12) и ограничиваясь членами первой степени по f_e , получим из (2.8) уравнение для возмущения $e(r, \xi)$:

$$\Delta_{\perp} e + sle_{\xi\xi} - 2ie_z - 2\gamma e + \varepsilon' \bar{\mathcal{E}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (2\Gamma_1 f_e \exp(-ix\xi) + \\ + \Gamma_2 f_e^* \exp(ix\xi)) dx = 0. \quad (3.4)$$

Здесь

$$l = k_0 |v'_\omega|, \quad s = \operatorname{sgn} v'_\omega, \quad \Gamma_1 = \frac{\chi(\omega_0 + k_0 vx, \omega_0, -\omega_0)}{\chi_0},$$

$$\Gamma_2 = \frac{\chi(-\omega_0 - k_0 vx, \omega_0, \omega_0)}{\chi_0}.$$

Кроме того, в (3.4) мы перешли к безразмерным переменным $\xi \equiv \xi_{\text{нов}} = k_0 \xi_{\text{ст}}$, $z \equiv z_{\text{нов}} = k_0 z_{\text{ст}}$, сохранив для них прежние обозначения.

Положим в (3.4) $e = e_1 + ie_2$, где $e_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{1,2} \exp(-ix\xi) dx$ — действительные функции. Из (3.3) получим, что $f_e = A_1 + iA_2$. Пренебрегая для простоты поглощением, выделим в (3.4) действительную и мнимую части:

$$\Delta_{\perp} e_1 + sle'_{\xi\xi} + 2e'_{2z} - 2\gamma e_1 = -\frac{\epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(4\bar{\Gamma}_1 + 2\bar{\Gamma}_2) A_1 +$$
 (3.4a)

$$+ i(2\Delta\Gamma_1 + \Delta\Gamma_2) A_2] \exp(-ix\xi) dx;$$

$$\Delta_{\perp} e_2 + sle'_{\xi\xi} - 2e'_{1z} - 2\gamma e_2 = -\frac{\epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [i(2\Delta\Gamma_1 - \Delta\Gamma_2) A_1 +$$
 (3.4b)

$$+ i(4\bar{\Gamma}_1 - 2\bar{\Gamma}_2) A_2] \exp(-ix\xi) dx,$$

где

$$\bar{\Gamma}_{1,2} = \frac{\Gamma_{1,2}(z) + \Gamma_{1,2}(-z)}{2}, \quad \Delta\Gamma_{1,2} = \Gamma_{1,2}(z) - \Gamma_{1,2}(-z).$$

Решение уравнений (3.4) будем искать в виде $A_{1,2} = \bar{A}_{1,2} \times \exp(-ix_{\perp} r_{\perp} - ihz)$. Для амплитуд $\bar{A}_{1,2}$ получим два уравнения:

$$(Q + m) \bar{A}_1 - i(2h - n) \bar{A}_2 = 0, \quad (3.5)$$

$$i(2h - p) \bar{A}_1 + (Q + q) \bar{A}_2 = 0,$$

где

$$Q = -x_{\perp}^2 - sle^2 - 2\gamma, \quad m = \epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2 (2\bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_2),$$

$$n = \frac{\epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2}{2} (2\Delta\Gamma_1 + \Delta\Gamma_2), \quad p = \frac{\epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2}{2} (2\Delta\Gamma_1 - \Delta\Gamma_2),$$

$$q = \epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2 (2\bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}_2).$$

Приравнивая нулю определитель системы (3.5), найдем два значения постоянной распространения h :

$$h = \frac{1}{2} (\epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2 \Delta\Gamma_1 \pm \sqrt{D}), \quad (3.6)$$

где

$$D = [x_{\perp}^2 + sle^2 + \epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2 (1 - 2\bar{\Gamma}_1)]^2 + \epsilon'^2 \bar{\mathcal{E}}^4 [(\Delta\Gamma_2)^2/4 - \bar{\Gamma}_2^2]. \quad (3.7)$$

Область неустойчивости плоской волны по отношению к возмущению определяется условием $D < 0$. Рассмотрим это условие в некоторых частных случаях, отличающихся характером начального возмущения волны.

а) Немодулированная волна ($z = 0$):

$$h = \pm \frac{1}{2} [x_{\perp}^2 (x_{\perp}^2 - 2\epsilon' \bar{\mathcal{E}}^2)]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Этот результат уже был получен в работе [10]. Плоская волна пространственно неустойчива, если $0 < x_{\perp}^2 < x_{rp}^2 = 2\epsilon' \bar{\epsilon}^2$; максимальный инкремент достигается при $x_{\perp}^2 = x_{\perp}^2 = \epsilon' \bar{\epsilon}^2$.

б) Модулированная плоская волна ($x_{\perp} = 0$) в отсутствие дисперсии нелинейности ($\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_2 = 1$, $\Delta\Gamma_{1,2} = 0$):

$$h = \pm \frac{l}{2} \left[x^2 \left(x^2 - 2 \frac{\epsilon' \bar{\epsilon}^2}{sl} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.9)$$

Область неустойчивости имеется лишь при $\epsilon'/s > 0$. Неустойчивость приводит к временной автомодуляции волны. Скорость нарастания автомодуляции максимальна при $x^2 = \bar{x}^2 = \epsilon' \bar{\epsilon}^2 / sl$; границы частот модуляции, попадающих в область неустойчивости, определяются условием $0 < x^2 < x_{rp}^2 = 2\bar{x}^2$. Этот случай для одного частного закона дисперсии $\epsilon(\omega)$ дискутировался в работе [15].

в) Волна с пространственно-временной модуляцией в отсутствие дисперсии нелинейности:

$$h = \pm \frac{1}{2} [(x_{\perp}^2 + slx^2)(x_{\perp}^2 + slx^2 - 2\epsilon' \bar{\epsilon}^2)]^{1/2}. \quad (3.10)$$

Область неустойчивости на плоскости x_{\perp}^2 , x^2 лежит между прямыми $x_{\perp}^2 = -slx^2$; $x_{\perp}^2 = -slx^2 + 2\epsilon' \bar{\epsilon}^2$. Максимальный инкремент $h = \pm \frac{i}{2} \epsilon' \bar{\epsilon}^2$

достигается на прямой $x_{\perp}^2 = -slx^2 + \epsilon' \bar{\epsilon}^2$. Интересно заметить, что при $s < 0$ волна с пространственно-временной синусоидальной модуляцией ($x_{\perp}^2 > 0$; $x^2 > 0$) может быть неустойчива ((когда $x^2 \neq 0$) даже при $\epsilon' < 0$; если же $s > 0$, такая волна неустойчива лишь при $\epsilon' > 0$).

При учете дисперсии нелинейности определить границы области неустойчивости можно, лишь задавшись конкретным видом зависимости $\Gamma_{1,2}(x)$. Поэтому ограничимся здесь некоторыми замечаниями. Будем рассматривать в (3.6) величину $X = x_{\perp}^2 + slx^2$ как новую независимую переменную. Границы области неустойчивости, определяемые условием $D = 0$, отвечают двум значениям этой величины:

$$X = \epsilon' \bar{\epsilon}^2 [2\bar{\Gamma}_1 - 1 \pm (\bar{\Gamma}_2^2 - (\Delta\Gamma_2)^2/4)^{1/2}]. \quad (3.11)$$

Обе границы смыкаются при значении $x = x^*$, являющемся решением уравнения $\bar{\Gamma}_2^2 = (\Delta\Gamma_2)^2/4$, если, конечно, такое решение существует. Значение $x^* = \Omega^*/k_0 v$ дает верхнюю границу частот модуляции $\Omega < \Omega^*$, при которых плоская волна неустойчива. Если $\Delta\Gamma_2 \approx 2\Omega\Gamma_{22}|_{x=0}$, то $\Omega^* = |\Gamma_{22}'|^{-1} = \tau_2^{-1}$ (ср. (2.11)).

4. АВТОКОМПРЕССИЯ ИМПУЛЬСОВ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ КУБИЧНОЙ СРЕДЕ

Проведенное в разделе 3 рассмотрение пространственно-временной неустойчивости плоской волны в нелинейной диспергирующей среде применимо, вообще говоря, лишь к начальной стадии процесса самовоздействия волны. Происходящие при дальнейшем развитии этого процесса явления — поперечная локализация возмущений (самофокусировка [16]) и продольная компрессия волнового пакета (самосжатие [17]) — должны

описываться уже нелинейными уравнениями. Частично эти явления рассматривались в работах [7, 8, 10, 18–22]. Здесь мы приведем некоторые численные результаты, относящиеся к самосжатию одномерных импульсов.

Пренебрегая дисперсией нелинейности, возьмем за основу уравнение (2.8), записав его в безразмерных переменных ($\Delta \perp \mathcal{E} = 0$):

$$sl\mathcal{E}_{\xi\xi}^* - 2i\mathcal{E}_z' + \epsilon' |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (4.1)$$

Учитывая, что неустойчивость плоской волны, приводящая к ее автомодуляции, согласно (3.9), имеется лишь при $\epsilon'/s > 0$, будем предполагать, что $\epsilon' > 0$ и $s > 0$. Уравнение (4.1) при этом можно записать в виде

$$V_{uu}^* - 2iV_z' + |V|^2 V = 0, \quad (4.2)$$

если ввести новые переменные $u = \xi/V\bar{l}$, $V = V\bar{\epsilon}'\mathcal{E}$. Уравнение (4.2) тождественно уравнению, описывающему поперечную самофокусировку двумерного волнового пучка [7]. Поэтому все приведенные ниже результаты, обсуждаемые на примере автокомпрессии импульсов, относятся также и к самофокусировке стационарных (во времени) двумерных пучков.

Уравнение (4.2) имеет частное решение типа стационарного единственного волнового пакета

$$V = 2\sqrt{h} [\operatorname{ch}(\sqrt{2h} u)]^{-1} \exp(-ihz), \quad (4.3)$$

постоянная распространения которого h является функцией максимальной амплитуды $V_m = V(0)$. Ширина пакета ($\sim 1/\sqrt{2h}$) обратно пропорциональна его мощности.

Нестационарные (по z) решения уравнения (4.2) рассмотрим сначала на примере начального (при $z = 0$) распределения вида $V(0, u) = 20 + 2 \cos \kappa u$ (амплитудно модулированный сигнал)*. На рис. 1, взятом из [10], показано изменение амплитуды поля в точке $u = 0$ с ростом z при 1) $x^2 = 3\bar{x}^2$, 2) $x^2 = 2\bar{x}^2 = x_{rp}^2$, 3) $x^2 = \bar{x}^2(1 + \sqrt{3}/2)$, 4) $x^2 = \bar{x}^2$, 5) $x^2 = \bar{x}^2(1 - \sqrt{3}/2)$. Первое значение x лежит в области устойчивости (см. раздел 3), второе на ее границе, третье и пятое отвечают одинаковым начальным инкрементам, четвертое соответствует наибольшему инкременту.

Примеры распределения амплитуды и фазы функции $V(z, u) = |V| \exp(-i\phi)$ в некоторых сечениях $z = \text{const}$ для последних трех значений x приведены на рис. 2, 3, 4. Модуляция функции V при $x^2 = 3\bar{x}^2$ остается практически синусоидальной (от z зависит глубина модуляции), а при $x^2 = 2\bar{x}^2$ начальное распределение лишь незначительно деформируется по мере распространения волны по z .

Характерно, что в точках наибольшего самосжатия импульсов (см., например, амплитудно-фазовые кривые при $z = 0,029$ и $z = 0,016$ соответственно на рис. 2, 3) $\phi(z, u) \approx \text{const}$ (с точностью до π). Это значит, что при дальнейшем распространении волновые пакеты будут расширяться до первоначальной величины, проходя те же промежуточные стадии, что и при сжатии, но в обратном порядке. Это подтверждается и численными расчетами**.

* Поскольку уравнение (4.2) инвариантно относительно преобразования $V \rightarrow V/\gamma$, $u \rightarrow \gamma u$, $z \rightarrow \gamma^2 z$, выбор подходящей величины γ позволяет перейти к реальным значениям численных коэффициентов начального распределения.

** Из уравнения (4.2) видно, что, если функция $V(z, u)$ становится действительной в некотором сечении $z = z_0$, то $V(z_0 + z, u) = V^*(z_0 - z, u)$.

В качестве другого примера рассмотрим прохождение через нелинейную диспергирующую среду волнового пакета гауссовой формы $V(0, u) = 20 \exp(-u^2/a^2)$ (см. сноску на стр. 546). Изменение амплитуды

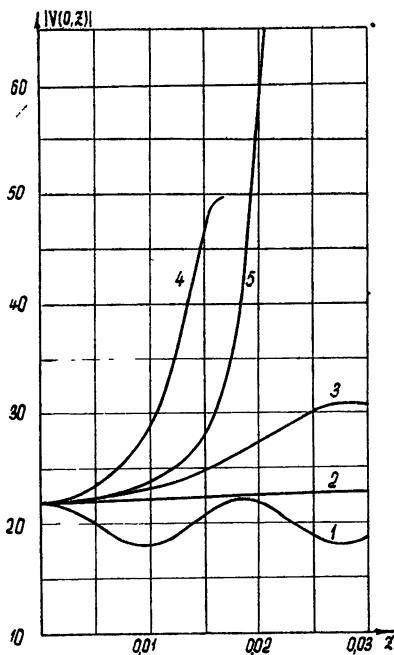


Рис. 1. Изменение амплитуды $V(z, 0)$ синусоидально модулированной волны с ростом z в целинейной диспергирующей среде при $V(0, u) = 20 + 2 \cos(\pi u)$:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= 3x^2, \quad 2 - x^2 = 2\bar{x}^2 = x_{\text{гр}}^2, \\ 3 - x^2 &= \bar{x}^2 (1 + \sqrt{3}/2), \quad 4 - x^2 = \bar{x}^2, \\ 5 - x^2 &= \bar{x}^2 (1 - \sqrt{3}/2). \end{aligned}$$

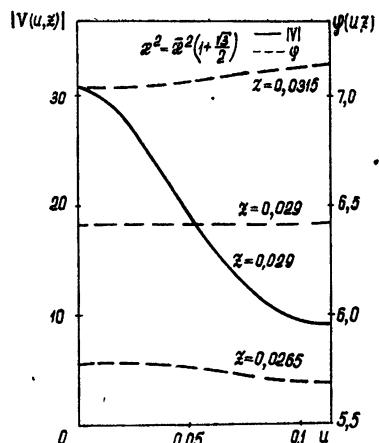


Рис. 2. Амплитудно-фазовая структура волны при $x^2 = z^2 (1 + \sqrt{3}/2)$.

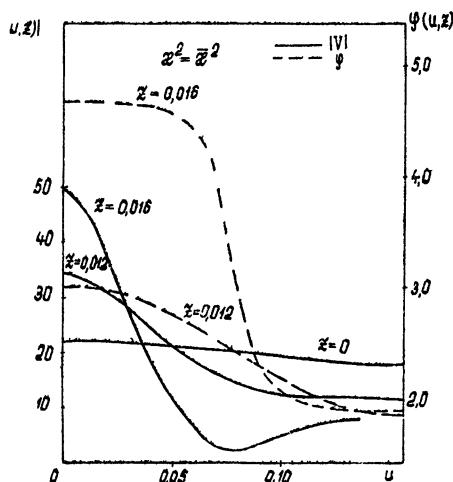


Рис. 3. Амплитудно-фазовая структура волны при $x^2 = z^2$.

такого пакета $|V(z, 0)|$ показано на рис. 5; графики амплитудно-фазовых распределений для некоторых значений z приведены на рис. 6, 7. Как и в предыдущем примере, в точках наибольшего сжатия фаза пакета практически постоянна в пределах его основной части. При дальнейшем распространении в нелинейной среде происходит расплывание пакета с последующими колебаниями его ширины около значения, при-

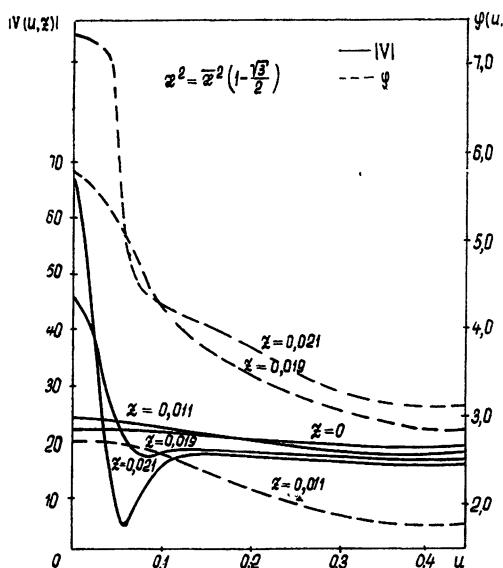


Рис. 4. Амплитудно-фазовая структура волны при $z^2 = \bar{x}^2(1 - \sqrt{3}/2)$.

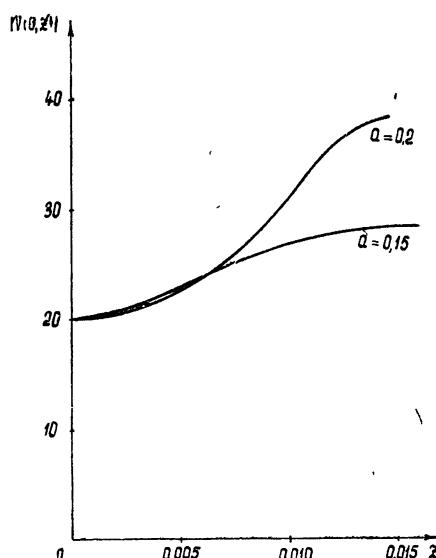


Рис. 5 Изменение амплитуды гауссового волнового пакета $V(0, u) = 20 \exp(-u^2/a^2)$ при прохождении через нелинейную диспергирующую среду.

ближенно соответствующего уединенному импульсу (4.3) данной мощности (см. [7]); однако из-за постепенного расплазания крыльев пакета этот процесс не является строго периодическим*.

В заключение заметим, что для исследования пространственно-временной автолокализации неодномерных волновых пакетов необходимо решать нелинейное уравнение (2.8). В частности, представляет интерес

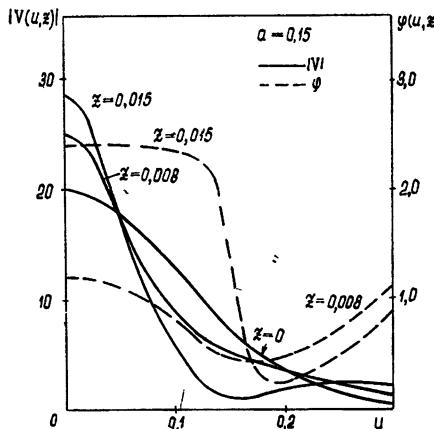


Рис. 6. Амплитудно-фазовая структура волнового пакета в разных сечениях $z=\text{const}$ при $a=0,15$.

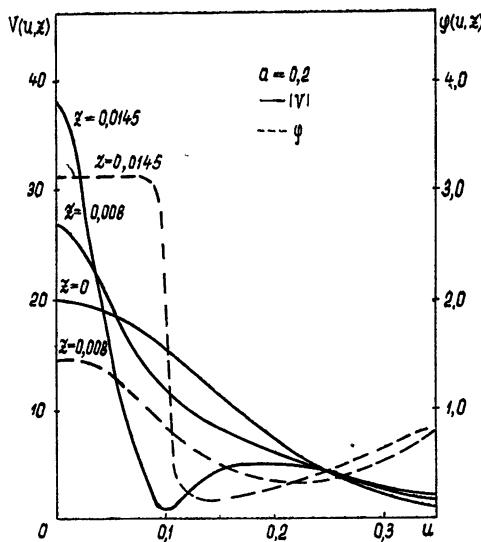


Рис. 7. Амплитудно-фазовая структура волнового пакета в разных сечениях $z=\text{const}$ при $a=0,20$.

отыскание стационарных решений (3.4), соответствующих трехмерным автолокализованным пакетам, движущимся с групповой скоростью v . Двумерные решения такого типа $E = E(x, \xi) \exp(-ihz)$ при $v'_>0$

* Периодичность процесса, вытекающая из уравнения (8) работы [7], связана с пренебрежением искажениями формы пакета (пучка) при выводе этого уравнения.

можно найти, если перейти от переменных x, ξ к цилиндрическим координатам и воспользоваться результатами [19], где рассчитана структура аксиально симметричного волнового пучка. Учет дисперсии нелинейности среды, отраженный в формулах (2.10), (2.12), необходимо проводить, например, при рассмотрении прохождения пространственно ограниченных волновых пакетов через активные среды, когда нелинейные эффекты играют существенную роль лишь в пределах спектральной линии вещества.

Авторы искренне признательны В. И. Беспалову за полезные дискуссии, В. Н. Гольдбергу и Р. Э. Эрм — за проведение вычислений на ЭВМ и Н. М. Шероновой — за помощь в обработке результатов вычислений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Диффузионное уравнение для одномерных волновых пакетов в средах с пространственной дисперсией

В средах с пространственной дисперсией [13, 23], где

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega, k) E(\omega, k) \exp(i\omega t - ikz) d\omega dk; \quad (\text{П.1})$$

$$E(\omega, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) \exp(-i\omega t + ikz) dz dt, \quad (\text{П.2})$$

распространение одномерных волновых пакетов описывается уравнением (1.1), которое в спектральном представлении имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d(\omega, k) E(\omega, k) \exp(i\omega t - ikz) d\omega dk = 0; \quad (\text{П.3})$$

$$d(\omega, k) = c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon(\omega, k). \quad (\text{П.4})$$

Считая, по-прежнему, что спектральная функция отлична от нуля лишь в узком интервале $\Delta\omega \ll \omega_0$; $\Delta k \ll k_0$ вблизи частоты ω_0 и волнового числа k_0 ($d(\omega_0, k_0) = 0$), разложим величину $d(\omega, k)$ в ряд по степеням $\omega - \omega_0$, $k - k_0$, ограничиваясь членами до второго порядка малости. В результате для медленно меняющейся амплитуды

$$E_0(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, k) \exp[i(\omega - \omega_0)t - i(k - k_0)z] dk d\omega \quad (\text{П.5})$$

получим уравнение, которое мы сразу запишем в переменных $z = z$, $\xi = z - vt$, где $v = -d'_k/d'_\omega$ — групповая скорость волн:

$$\begin{aligned} -2id'_k E'_z + E''_{\xi\xi} (v^2 d''_{\omega\omega} + 2vd''_{\omega k} + d''_{kk}) + 2E_{\xi z} (vd''_{\omega k} + d''_{kk}) + \\ + E''_{zz} d''_{kk} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Здесь

$$\begin{aligned} d'_\omega = -2\omega\varepsilon - \omega^2 \epsilon'_\omega, \quad d'_k = 2c^2 k - \omega^2 \epsilon'_k, \quad d''_{kk} = 2c^2 - \omega^2 \epsilon''_{kk}, \\ d''_{\omega\omega} = -4\omega\varepsilon'_\omega - \omega^2 \epsilon''_{\omega\omega} - 2\varepsilon, \quad d''_{\omega k} = -2\omega\varepsilon'_k - \omega^2 \epsilon''_{\omega k}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что в отсутствие пространственной дисперсии ($\epsilon'_k = 0$) уравнение (П.6) переходит в уравнение (1.7).

Соответствующие критерии применимости диффузионного приближения для волновых пакетов имеют довольно сложный вид и упрощаются лишь в случае слабой про-

пространственной дисперсии*. Тогда последними двумя членами в уравнении (П.6) можно, по-прежнему, пренебречь, если выполняются условия $k_0 \Delta_z \gg 1$, $k_0 \Delta_\xi \gg 1$. При этом из (П.6) получим уравнение параболического типа

$$-2ikE'_z + E''_{\xi\xi}(v^2d''_{\omega\omega} + 2vd''_{\omega k} + d''_{kk}) = 0, \quad (\text{П.7})$$

которое в частном случае $\omega \epsilon'_\omega \ll \epsilon$; $k \epsilon'_k \ll \epsilon$ может быть представлено в виде

$$2ikE'_z + \frac{1}{\epsilon} \left(\omega \epsilon'_\omega + k \epsilon'_k + \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon''_{\omega\omega} + \omega k \epsilon''_{\omega k} + \frac{1}{2} k^2 \epsilon''_{kk} \right) E_{\xi\xi} = 0. \quad (\text{П.8})$$

Из (П.8) видно, что в коэффициент диффузии совершенно симметрично входят производные ϵ по ω и k , что и естественно, поскольку исходная задача симметрична по t и z . Следовательно, расплывание пакета может быть обусловлено как временной, так и пространственной дисперсией. Последняя, например, должна учитываться в движущихся средах ($\epsilon = \epsilon(\omega - kv_0)$), если скорость движения v_0 сравнима с фазовой скоростью волны в среде.

Аналогично может быть получено уравнение, описывающее распространение одномерных пакетов продольных волн. Для этого надо в (П.6) произвести замену $d(\omega, k) = \epsilon_t(\omega, k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтьевич, Изв. АН СССР, сер. физ., 8, 16 (1944); М. А. Леонтьевич, В. А. Фок, сб. Исследования по распространению радиоволн, стр. 13, изд. АН СССР, М.—Л., 1948; В. А. Фок, там же, стр. 40.
2. Г. Д. Малюжинец, УФН, 69, 321 (1959).
3. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 6, 1489 (1961); 6, 1247 (1961).
4. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 8, 363 (1963).
5. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 34, 193 (1964).
6. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 313 (1964).
7. В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ, 2, 222 (1965).
8. Р. Л. Келли, Phys. Rev. Lett., 15, 1005 (1965).
9. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 50, 474 (1966).
10. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ, 3, 471 (1966).
11. П. В. Блиох, III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Тбилиси, Рефераты докладов, изд. Наука, М., 1964.
12. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ, 21, 1354 (1951).
13. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
14. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ИНИ, М., 1964.
15. Л. А. Островский, ЖЭТФ (в печати).
16. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
17. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, ДАН СССР, 167, 73 (1966).
18. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 564 (1964).
19. R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
20. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 6, 1148 (1965).
21. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 675 (1966).
22. В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко, ЖТФ, 36, 401 (1966).
23. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 мая 1966 г.

* В случае слабой пространственной дисперсии уравнение типа (П.6) может быть получено из уравнения (1.1) с помощью известного соотношения [13]

$$D = \overset{\wedge}{\epsilon} E + \delta_1 \Delta E + \delta_2 \operatorname{grad} \operatorname{div} E,$$

**APPLICATION OF PARABOLIC EQUATION IN CALCULATION OF FIELDS
IN DISPERSIVE NONLINEAR MEDIA***A. G. Litvak, V. I. Talanov*

It is shown that the space-limited wave packets propagating in dispersive weakly-nonlinear (cubic) isotropic media may be described by means of the parabolic equation analogous to the transverse diffusion one for the ray amplitude of the field, usable in the theory of wave beams. On the basis of the same equation, the nonstationary problems of self-focusing have been considered: the instability of the plane wave with respect to the spatially-time disturbances and the phenomenon of impulse self-compression in a dispersive cubic medium.

УДК 535.4

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА СТРУКТУРЕ С ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

*И. Я. Брусин, В. В. Емелин, В. А. Зверев, А. Г. Любина, Ф. А. Маркус,
А. М. Черемухин*

Показано, что при прохождении параллельного монохроматического пучка через структуру, прозрачность которой изменяется по гармоническому закону с линейной частотной модуляцией, должна наблюдаться фокусировка лучей в точке, координаты которой зависят от несущей частоты и параметров модуляции. Вычислена форма дифракционного максимума в окрестности фокусировки и исследовано влияние объектива, помещенного на пути лучей вблизи структуры. Обсуждается возможность использования рассматриваемого явления для осуществления оптического устройства, эквивалентного согласованному фильтру для гармонического сигнала с линейной частотной модуляцией. Указанная система может быть сделана многоканальной как в смысле выделения сигналов, обладающих различными параметрами, так и в смысле наличия в системе обработки многих входных и выходных координат, связанных друг с другом попарно. Приведены результаты экспериментального определения разрешающей способности макета оптического фильтра.

ВВЕДЕНИЕ

Оптические системы для обработки сигналов за последнее время получают все более широкое распространение, так как интегральные преобразования сигналов выполняются в оптических системах проще, чем в аналогичных электронных устройствах. Оптические системы имеют две независимые переменные (координаты в некоторой плоскости) вместо одной (времени) в электронных системах. Поэтому с помощью оптических систем легко осуществляются двумерные преобразования. Если требуется произвести всего лишь одномерное преобразование, вторую независимую переменную часто используют для параллельного многоканального анализа. С помощью оптических систем производится спектральная или корреляционная обработка [1,2]. Оптические системы используются также как согласованные фильтры для выделения сигналов специального вида [3]. Применяются они и как моделирующие устройства для решения задач анализа и синтеза антенных систем [4].

В настоящей работе рассмотрено явление дифракции света с целью нахождения условий построения согласованного фильтра для гармонического сигнала с частотной модуляцией. Проблема построения такого рода фильтров возникает при решении целого ряда прикладных задач [5].

Задача обработки сигнала в рассматриваемом случае заключается в определении параметров a_k и x_k сигнала, имеющего на некотором ограниченном участке вид

$$f(x, y) = \sum_k a_k \cos [p(y)(x - x_k)^2 + \varphi_k] \quad (1)$$

при заданной функции $p(y)$ и произвольном значении параметра φ_0 .

Для этого исследуемый сигнал может быть записан на фотопленке в виде переменной амплитудной прозрачности*. Так как подобная запись возможна только для униполярных сигналов, а сигнал вида (1) является биполярным, то к нему должна быть добавлена постоянная составляющая A , обеспечивающая униполярность суммарного сигнала, а также линейность режима записи и воспроизведения. Переменные x , y представляют собой в этом случае декартовы координаты пленки, а отдельные слагаемые суммы (1) — сигналы с пилообразной частотной модуляцией.

Описываемый метод обработки сигнала вида (1) сводится к линейной фильтрации. Поэтому для пояснения принципа работы устройства и вывода необходимых соотношений достаточно рассмотреть простейший случай, когда сумма (1) включает только один сигнал с пилообразной частотной модуляцией. В этом случае амплитудная прозрачность пленки может быть записана следующим образом:

$$\tau(x, y) = A + a \cos [p(y)(x - x_0)^2 + \varphi_0]. \quad (2)$$

1. ПРИНЦИП РАБОТЫ ДИФРАКТОМЕТРА

Используемая в настоящей работе когерентная оптическая система, называемая часто дифрактометром, неоднократно применялась для спектрального анализа [6].

Принципиальная схема дифрактометра показана на рис. 1. Обрабатываемый сигнал записывается на пленке Π_1 , которая равномерно протягивается в направлении оси x . Через щель \mathcal{W}_1 и объектив L_1 на пленку падает монохроматический свет. Щель, перпендикулярная оси x , располагается в фокальной плоскости объектива L_1 . Сечение светового пучка ограничивается диафрагмой.

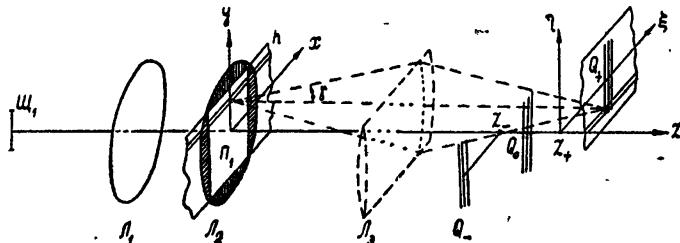


Рис. 1.

Рассмотрим вначале работу одноканального дифрактометра, который производит преобразование сигналов, записанных только вдоль одной строки. В этом случае диафрагма имеет вид узкого прямоугольника размером Lh .

Обозначим через E_* комплексную амплитуду поля в волне, падающей на пленку. По выходе сигнала из пленки поле равно $E_*\tau(x, y)$. Для упрощения вычислений будем считать, что объектив L_2 есть тонкая линза, примыкающая к пленке Π , а цилиндрическая линза L_3 (показанная на рис. 1 пунктиром) отсутствует.

При помощи принципа Гюйгенса—Френеля находим поле в точке (ξ, η, z) :

* Амплитудной прозрачностью называется отношение $\tau = E/E_*$, где E_* и E — комплексные амплитуды поля до и после пленки, τ — комплексная величина, учитывающая изменение амплитуды и фазы поля в пленке.

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{E_* \exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{y-h/2}^{y+h/2} \tau(x, y) \times \\ \times \exp \left\{ ik \left[\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2z} - \frac{x^2 + y^2}{2F} \right] \right\} dx dy. \quad (1.1)$$

Слагаемое $(x^2 + y^2)/2F$ в показателе экспоненты учитывает влияние объектива L_2 . Преобразование вида (1.1) можно рассматривать как двумерный интеграл Дюамеля. При этом поле $E(\xi, \eta, z)$ аналогично отклику линейной системы на воздействие $\tau(x, y)$, а экспонента под знаком интеграла представляет собой функцию отклика фильтра на единичное воздействие. Координаты точки наблюдения ξ и η в данном случае аналогичны времени, а координата z представляет собой некоторый параметр, управляющий характеристикой фильтра. Найдем, пользуясь (1.1), отклик нашей системы (фильтра) на сигнал вида (2).

Заменяя $\tau(x, y)$ через (2), видим, что интеграл (1.1) разлагается на сумму

$$E(\xi, \eta, z) = E_0 + E_+ + E_-,$$

где

$$E_0 = CA \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left\{ ik \left[\frac{(x-\xi)^2}{2z} - \frac{x^2}{2F} \right] \right\} dx; \quad (1.2)$$

$$E_+ = C \frac{a}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left\{ ik \left[\frac{(x-\xi)^2}{2z} - \frac{x^2}{2F} \right] + i [p(x-x_0)^2 + \varphi_0] \right\} dx; \quad (1.3)$$

$$E_- = C \frac{a}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left\{ ik \left[\frac{(x-\xi)^2}{2z} - \frac{x^2}{2F} \right] - i [p(x-x_0)^2 + \varphi_0] \right\} dx; \quad (1.4)$$

$$C = \frac{E_* \exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{y-h/2}^{y+h/2} \exp \left\{ ik \left[\frac{(y-\eta)^2}{2z} - \frac{y^2}{2F} \right] \right\} dy. \quad (1.5)$$

Обозначения E_+ и E_- связаны со знаком перед скобкой, содержащей p и φ_0 в (1.3) и (1.4).

Величина отклика на данный входной сигнал зависит от параметра фильтра — координаты z . При значениях z , обращающих в нуль коэффициенты при x^2 в выражениях (1.2) — (1.4), интегралы достигают своих максимально возможных значений. С точки зрения теории линейных фильтров это означает, что при данном значении параметра z характеристика фильтра становится согласованной с входным сигналом. С этой точки зрения работа дифрактометра будет рассмотрена ниже. Здесь же мы дадим интерпретацию полученных результатов с точки зрения оптики. Например, в плоскости $z = z_+$, удовлетворяющей условию

$$\frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_+} - \frac{1}{F} \right) + p = 0, \quad (1.6)$$

выражение (1.3) имеет вид

$$|E_+| = C \frac{a}{2} L \left| \frac{\sin [(k\xi/2z_+ + px_0)L]}{(k\xi/2z_+ + px_0)L} \right|, \quad (1.7)$$

поэтому в точке $\xi = \xi_+$, определяемой условием

$$\frac{k\xi_+}{2z_+} + px_0 = 0, \quad (1.8)$$

получаем максимальное значение E_+ :

$$|E_{+\max}| = C \frac{a}{2} L. \quad (1.9)$$

В плоскостях $z = F$ и $z = z_-$ (где $k(1/z_- - 1/F)/2 - p = 0$) аналогичные распределения получаются для полей E_0 и E_- . Очевидно поэтому, что в плоскостях $z = F$, $z = z_+$ и $z = z_-$ получаются дифракционные изображения щели Π_1 . Они обозначены на рис. 1 Q_+ , Q_0 и Q_- .

В терминах геометрической оптики можно описать получающуюся картину следующим образом. От строки с записью сигнала исходит три пучка лучей: расходящийся S_+ , параллельный S_0 и сходящийся S_- , причем для параллельного пучка прозрачность пленки равна A , а для двух других— $a/2$. После преломления в объективе эти пучки создают соответственно изображения щели Q_+ , Q_0 и Q_- *

Рассмотрим выделение сигнала в плоскости $z = z_+$. В этой плоскости фильтр согласован с сигналом E_+ , от которого здесь получается максимальный по амплитуде отклик. Так как сигнал вида E_+ всегда содержится в сигнале вида (2), то получаемый в плоскости $z = z_+$ сжатый отклик можно использовать для определения интересующих нас параметров в сумме вида (1). Остальные две составляющие элементарного сигнала вида (2) (E_- и E_0) можно рассматривать как помеху или шум.

Для распределения сигнала и помехи в плоскости $z = z_+$ имеем следующие соотношения. Освещенность от пучка S_+ на основании (1.7) равна

$$I_+(\xi) = |E_+|^2 = C^2 \frac{a^2}{4} L^2 \left\{ \frac{\sin [(k\xi/2z_+ + px_0)L]}{(k\xi/2z_+ + px_0)L} \right\}^2. \quad (1.10)$$

Пучки S_0 и S_- создают в рассматриваемой плоскости дифракционную картину Френеля от щели с освещенностями, которые на основании (1.2) и (1.4) определяются соотношениями

$$I_-(\xi) = |E_-|^2 = C^2 \frac{a^2}{4} \frac{1}{4a} |F(v_2) - F(v_1)|^2; \quad (1.11)$$

$$I_0(\xi) = (E_0)^2 = C^2 A^2 \frac{1}{2a} |F(u_2) - F(u_1)|^2, \quad (1.12)$$

где

$$v_2 = V \sqrt{a} \left(\frac{k\xi}{2pz_+} - x_0 + L \right), \quad v_1 = V \sqrt{a} \left(\frac{k\xi}{2pz_+} - x_0 - L \right);$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{a}{2}} \left(\frac{k\xi}{pz_+} + L \right), \quad u_1 = \sqrt{\frac{a}{2}} \left(\frac{k\xi}{pz_+} - L \right);$$

* Краткое указание на использование этих изображений для выделения сигналов типа (1) содержится в работе [3].

$$F(v) = \int_0^v \exp\left(i \frac{\pi}{2} v^2\right) dv = C(v) + iS(v),$$

$C(v)$ и $S(v)$ — интегралы Френеля, $\alpha = \frac{p}{\pi}$.

На рис. 2 показан график зависимости результирующей освещенности I от ξ в плоскости z_+ . Для построения графика принято $x_0 = -2L$, $a = A$, $\sqrt{\alpha} L = 7$. В интервале $2pz_+(x_0 - L)/k < \xi < 2pz_+(x_0 + L)/k$ среднее значение I_- равно

$$I_{-cp} \simeq C^2 \frac{a^2}{4} \frac{1}{2\alpha}, \quad (1.13)$$

вне этого интервала I_- быстро спадает к нулю.

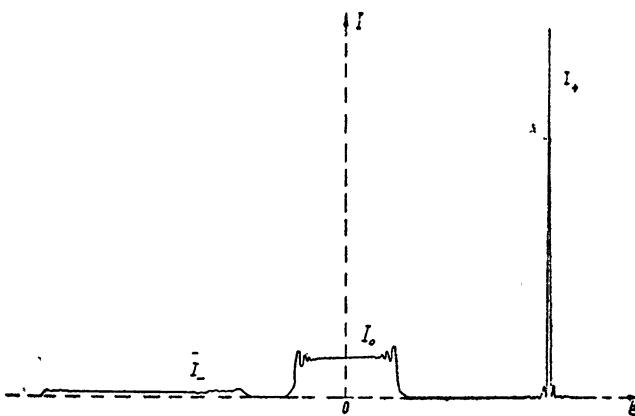


Рис. 2.

Аналогично среднее значение I_0 в интервале

$$-\frac{pz_+}{k} L < \xi < \frac{pz_+}{k} L \quad (1.14)$$

$$I_{0cp} \simeq C^2 A^2 \frac{1}{\alpha}.$$

При движении пленки с записью сигнала кривые для I_+ и I_- будут смещаться в противоположные стороны, кривая же для I_0 останется неподвижной.

Для регистрации сигнала в плоскости z_+ располагается индикаторная фотопленка, двигающаяся в том же направлении, что и максимум от пучка S_+ .

Чтобы изолировать индикаторную пленку от пучка S_0 и сократить время действия на нее пучка S_- , необходимо закрыть эту пленку экраном с узкой щелью.

Если абсцисса этой щели равна $\bar{\xi}$, то максимум пучка S_+ будет совпадать с приемной щелью при $\xi_+ = \bar{\xi}$. В этом случае положение центра записи сигнала x_0 , отсчитываемое относительно оптической оси, будет равно, согласно (1.8),

$$x_0 = \bar{x} = -\frac{k\bar{\xi}}{2pz_+}. \quad (1.15)$$

Центры симметрии x_0 различных сигналов будут принимать значения x в разные моменты времени, и почернения индикаторной пленки от действия разных сигналов будут получаться в разных точках. Как это следует из (1.10), величина почернения зависит от a^2 .

Разрешающая способность. Если для определения разрешающей способности использовать критерий Релея, то из (1.10) следует, что два сигнала пилообразной частотной модуляции будут разделены, когда расстояние между ними в плоскости z_+ равно

$$\Delta\xi = \lambda z_+/L. \quad (1.16)$$

В этом случае для расстояния между центрами записи этих сигналов на основании (1.8) получается

$$\Delta x_0 = 1/\alpha^2 L. \quad (1.17)$$

Помехи. Отношение сигнала в максимуме E_+ к средней освещенности, создаваемой в этой плоскости сигналами E_- и E_0 , рассматриваемыми как помеха, будет

$$\frac{I_{+\max}}{I_{-\text{ср}}} = 2L^2\alpha = \frac{2}{\pi} L^2 p; \quad (1.18)$$

$$\frac{I_{+\max}}{I_0} = \frac{L^2\alpha}{A^2} = \frac{L^2 p}{A^2 \pi}. \quad (1.19)$$

При $L^2 p \gg 1$ можно пренебречь наличием световых пучков S_- и S_0 и считать, что в плоскости $z = z_+$ регистрируется только пучок S_+ .

Многоканальность. Разрешающая способность по строкам. При помощи цилиндрической линзы L_3 (рис. 1) одноканальный дифрактометр превращается в многоканальный, который параллельно производит преобразование сигналов, записанных на разной высоте y (в разных строках). Цилиндрическая линза располагается так, что она формирует в плоскости фокусировки z_+ изображения строк. Образующая ее цилиндрической поверхности при этом параллельна строкам с записью сигнала. В этом случае освещенность вдоль строк опять определяется выражениями (1.10) — (1.12), но с измененным значением C^2 , одинаковым для всех строк.

Чтобы сигналы от соседних строк на выходе многоканального дифрактометра не налагались друг на друга, высота изображения строки должна быть больше, чем высота главного дифракционного максимума, получающегося при изображении бесконечно тонкой строки. Это условие приводит к требованию

$$h \geq \frac{\lambda}{\sin \gamma} = h_{\min}, \quad (1.20)$$

где h — высота строки на пленке П, γ — угол между лучом, идущим от центра строки к верхнему (нижнему) краю цилиндрической линзы L_3 , и оптической осью.

Таким образом, при ширине пленки H дифрактометр позволяет независимо обрабатывать

$$N = H/h_{\min}$$

строк, т. е. он имеет N независимых каналов.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Принцип действия и основные соотношения для многоканального дифрактометра проверялись на макете прибора. Фокусировка сигнала

исследовалась путем обработки записи единичного сигнала пилообразной частотной модуляции с параметром $p = 0,111 \pm 0,002 \text{ mm}^{-2}$.

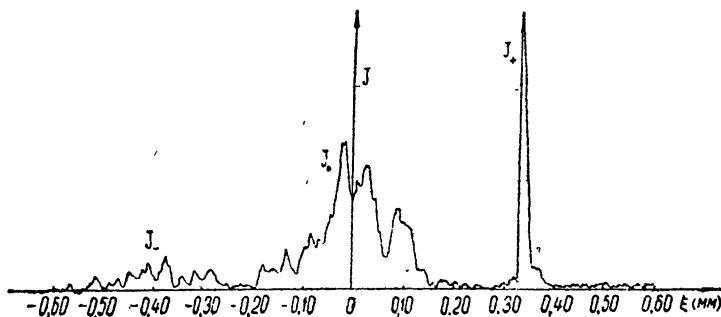


Рис. 3.

На рис. 3 приведен график освещенности в плоскости фокусировки расходящегося пучка S_+ , полученный с помощью фотоэлектронного умножителя и самописца при обработке записи единичного сигнала ПЧМ. Сигнал записан в строке высотой $h = 0,2 \text{ mm}$. Координата ξ точки фокусировки (острый пик справа на рис. 3) и координата z_+ плоскости фокусировки расходящегося пучка S_+ с точностью до ошибок измерения совпадают со значениями

$$z_+ = F(1 + \alpha F), \quad \xi_+ = \lambda \alpha F x_0,$$

которые приближенно следуют из (1.6) и (1.8).

Ширина максимума на основании (1.16) при $z = z_+$ должна быть близка к

$$\Delta \xi = \lambda F / L.$$

На графике рис. 3 она получилась в 1,5 раза больше. Расширение сфокусированного максимума от пучка S_+ так же, как и изрезанность несфокусированных максимумов от пучков S_0 и S_- (J_0 и J_- на рис. 3), обусловлено в основном двумя причинами: неоднородностями пленки, на которой записан сигнал (хотя при обработке пленки применялась иммерсия, но она не полностью устранила неоднородности пленки), и aberrация линз дифрактометра, особенно цилиндрической линзы.

Предел разрешения по строкам и максимальное число каналов N для многоканального дифрактометра определялись следующим способом: вместо исследуемой пленки ставилась параллельно строкам узкая щель, расчетная высота изображения которой в плоскости фокусировки дифрактометра была меньше размеров дифракционного пятна. Высота дифракционного пятна от такой щели измерялась с помощью микроскопа. Измерения подтвердили формулу (1.18) и дали для исследованной установки $h_{\min} = 0,012 \text{ mm}$, что при ширине пленки $H = 24 \text{ mm}$ соответствует числу каналов $N = 2000$.

Практически N будет определяться разрешающей способностью фотопленки. Для пленок, с которыми производился эксперимент, $h_{\min} = 0,07 \text{ mm}$ и $N = 340$.

Для общей оценки дифрактометра рассмотрим его работу с точки зрения теории фильтров.

После идеальной пленки с записью единичного сигнала пилообразной частотной модуляции комплексная амплитуда поля $E'(x) = E_{\ast t}(x)$ может быть записана в виде

$$E'(x) = E_* [\tau_0(x) + \tau_+(x) + \tau_-(x)],$$

где

$$\tau_0(x) = A,$$

$$\tau_+(x) = \frac{a}{2} \exp \{i[p(x - x_0)^2 + \varphi_0]\},$$

$$\tau_-(x) = \frac{a}{2} \exp \{ -i[p(x - x_0)^2 + \varphi_0]\},$$

τ_0 , τ_+ и τ_- — части амплитудной прозрачности, ответственные за образование световых пучков S_0 , S_+ и S_- , рассмотренных во Введении.

В плоскости $z = \text{const}$ дифрактометра поле

$$E(\xi, z) = B(z) \int_{-L/2}^{L/2} E'(x) \exp \left\{ ik \left[\frac{(x - \xi)^2}{2z} - \frac{x^2}{2F} \right] \right\} dx$$

можно представить в виде

$$E(\xi, z) = B(z) E_* \exp [i\varphi(\xi, z)] R(\xi, z),$$

где функцию

$$R(\xi, z) = \int_{-\xi/2}^{\xi/2} \tau(x) \tau_p(x) dx$$

можно рассматривать как функцию корреляции амплитудной прозрачности исследуемой пленки и растра с амплитудной прозрачностью

$$\tau_p = \exp [iP_p(x - x_p)^2],$$

причем

$$P_p = \frac{k(z - F)}{2Fz}, \quad x_p = -\frac{F}{z - F} \xi.$$

Интересно отметить, что растра в дифрактометре формируется самой оптической системой. Так как создание этого растра не связано с записью на пленку, то он не вносит новых шумов пленки. Растра этот чисто фазовый, так как модуль его прозрачности не зависит от x .

Параметр P_p , характеризующий растра, зависит от z . В плоскости фокусировки расходящегося пучка S_+ он принимает значение $P_p = -p$ и, следовательно, $\tau_p = \exp [-ip(x - x_p)^2]$, где

$$x_p = -F\xi/(z_+ - F),$$

т. е. прозрачность растра $\tau_p(x)$ становится комплексно-сопряженной относительно прозрачности $\tau_+(x - x_\xi)$, для которой $x_\xi = x_p - x_0$.

В рассматриваемой плоскости главную часть функции $R(\xi, z)$ составляет автокорреляционная функция R_+ прозрачности τ_+ :

$$R_+(\xi, z_+) = \int_{-L/2}^{L/2} \tau_+(x) \tau_+^*(x - x_\xi) dx,$$

с максимумом в точке ξ_+ . Она и используется для обнаружения сигналов.

Таким образом, дифрактометр с регистрацией в плоскости z_+ является согласованным фильтром для выделения расходящегося пучка S_+ , несущего информацию сигнала пилообразной частотной модуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, ПТЭ, № 1, 50 (1960).
2. L. J. Cutrona, E. N. Leith, C. J. Palermo and L. J. Porcello, IRE Trans., IT-6, 386 (1960).
3. W. G. Hoefer, IRE Trans., MI1-6, 174 (1962).
4. M. I. Skolnik, IEEE Trans., AP-11, 97 (1963); W. H. Huntley, IEEE Trans., AP-11, 591 (1963).
5. Клаудер, Прайс, Дарлингтон, Элберзгайм, Зарубежная радиоэлектроника, № 1, 15 (1961).
6. M. Born and E. Wolf, Principles of optics, Pergamon Press, New York, 1959.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
28 января 1966 г.CERTAIN PECULIARITIES OF WAVE DIFFRACTION ON STRUCTURE
WITH LINEAR FREQUENCY MODULATION*I. Ya. Brusin, V. V. Emelin, V. A. Zverev, A. G. Lyubina, F. A. Markus,
A. M. Cheremukhin*

It is shown that when a parallel monochromatic beam is passed through the structure which transparency varies according to the harmonic law with a linear frequency modulation, the beam focusing is to be observed at the point the coordinates of which depend on the carrier frequency and modulation parameters. The form of diffraction maximum has been determined in the vicinity of focusing and the effect of placing an objective in the beam pathes near the structure has been studied. The applicability of the phenomenon considered is discussed to design an optical instrument equivalent to the matched filter for the harmonic signal with a linear frequency modulation. The above system may be designed as the multichannel one both for discrimination of signals possessing various parameters and for the presence in the system of the processing procedure of many input and output coordinates connected with each other in pairs. The results of experimental investigation of resolution are given for a model of the optical filter.

УДК 621.385.64

К СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНЕТРОНА I. БИДРОМИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

В. Е. Белов, Л. В. Родыгин

Рассмотрена система уравнений, описывающая состояние пространственного заряда в магнетроне при нулевых начальных скоростях электронов. В случае малого катодного тока методом усреднения получено решение системы в первом и первом улучшенном приближениях и найдены приближенные выражения для траектории и скорости электронов, распределения плотности пространственного заряда и потенциала. Сопоставлением с результатами численного интегрирования оценены границы применимости полученных формул.

Известно, что решение задачи об азимутально-симметричных статических состояниях цилиндрического магнетрона при нулевых начальных скоростях ($v_n = 0$) неоднозначно. В работах Бриллюэна [1] было показано, что при магнитном поле, большем критического ($B > B_{kp}$), наряду с двухпоточным или петлеобразным движением электронов возможно и так называемое однопоточное, при котором траекториями электронов являются окружности, концентрические с катодом.

Можно надеяться, что учёт дополнительных факторов, влияющих на состояние электронного облака (разброс начальных скоростей, флуктуационные поля и т. д.), позволит сформулировать задачу, в которой статический режим магнетрона определится единственным образом. В то же время решения такой задачи при стремлении дополнительных факторов к нулю должны в какой-то степени стремиться к решениям задачи с $v_n = 0$. Другими словами, задача с $v_n = 0$ определяет предельные решения более сложных задач и потому заслуживает детального изучения.

Отметим, что даже в такой постановке получить точное решение в аналитическом виде не удается. Это вынуждает искать приближенные аналитические выражения для решения [2], проводить численное интегрирование уравнений [3, 4, 5] либо проводить качественный анализ уравнений движения электрона [6, 7, 8].

Из анализа результатов численного интегрирования следует, что двухпоточные состояния* возможны лишь при значениях критических радиусов $r_{kp} > 2r_k$ (r_k — радиус катода). С этим согласуются выводы, сделанные на основе качественного анализа [6, 7]. При этом зависимость между током и критическим радиусом в интервале $2 < \frac{r_{kp}}{r_k} < 2,9$ оказывается неоднозначной, т. е. одному и тому же r_{kp}/r_k соответствует несколько бидромических состояний разных порядков с различными величинами токов. Нужно отметить, что результаты численного интегрирования, на основе которых сделаны эти выводы, в литературе приведены весьма неполно (особенно для больших токов).

* Двухпоточные состояния в последнее время в литературе называют бидромическими порядка n , где n — число максимумов радиальной скорости электронов на интервале $[r_k, r_{kp}]$.

В области малых токов приближенное решение уравнений задачи было получено Бриллюэном и Блохом [2]. Оно хорошо согласуется с результатами численного интегрирования, однако способ его получения, как отмечено в [9], недостаточно строг.

В первой части настоящей работы та же задача решена с использованием метода усреднения, развитого в [10]. Найдены выражения для траектории, скорости и ускорения электронов, плотности заряда и распределения потенциала в первом и первом улучшенном приближении. Проведено сравнение с результатами численного интегрирования, что позволило определить границы применимости приближенных решений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Установившееся движение электронов в междуэлектродном пространстве цилиндрического магнетрона описывается системой дифференциальных уравнений, которые в полярных координатах (r, θ) имеют вид

$$\begin{aligned} r^2 + r^2\dot{\theta}^2 &= \frac{2|e|}{m}\varphi, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= \frac{|e|}{m}Br\dot{r}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon}, \\ 2\pi r\dot{r}\rho(r) &= I. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $|e|/m$ — удельный заряд электрона, B — магнитная индукция, φ — электрический потенциал, ρ — плотность заряда, I — полный ток. Точкой обозначена производная по t .

Уравнения (1.1) могут быть использованы для описания движения электронов в магнетроне как с внутренним, так и с внешним катодом. Для магнетрона с внутренним катодом на восходящей ветви траектории $I > 0$ и $r \geq r_k$, для магнетрона с внешним катодом $I < 0$ и $r \leq r_k$.

Будем считать, что электроны эмиттируются из катода с нулевыми начальными скоростями. Тогда начальные условия для решения системы (1.1) будут следующие:

$$\dot{r} = \dot{\theta} = \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad r = r_k. \quad (1.1a)$$

Применяя к первому уравнению системы (1.1) операцию $\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$ и заменяя с помощью остальных трех уравнений функции $\dot{\theta}$, φ и ρ их выражениями через r , \dot{r} , I , B , получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\dot{r}^2}{dr} \right) = 2 \frac{|e|}{m} \frac{I}{\dot{r}} - \omega_B^2 \left(r + \frac{r_k^4}{r^3} \right), \quad (1.2)$$

которое решается с начальными условиями

$$\dot{r}^2 = \frac{d\dot{r}^2}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_k. \quad (1.2a)$$

В целях удобства в дальнейшем используются следующие безразмерные величины: координата $x = r/r_k$, текущее время $\tau = \omega_B t$ ($\omega_B = \frac{|e|}{m} B$), радиальная скорость электрона $v = dx/d\tau$, $z = 2x \frac{dv}{d\tau}$, плотность заряда $p = \frac{8\pi |e|}{m\omega_B^2} \rho$, потенциал $\Phi = \frac{2|e|}{m\omega_B^3 r_k^2} \varphi$, безразмерный параметр тока $a = \frac{2|e|}{m\omega_B^3 r_k^2} \frac{I}{\epsilon_0 \pi}$.

Домножим обе части уравнения (1.2) на r и перейдем к безразмерным величинам. Тогда для функций x , v , z получатся три дифференциальных уравнения первого порядка относительно переменной τ . Эти уравнения в отличие от (1.2) не имеют особенности при $v = 0$. Добавим к ним первый интеграл второго уравнения системы (1.1), выражающий зависимость $\theta = \theta(\tau)$ в дифференциальной форме. В результате получим систему

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= v, \\ dv/d\tau &= z/2x, \\ dz/d\tau &= a - v \left(x + \frac{1}{x^3} \right), \\ d\theta/d\tau &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

с начальными условиями

$$x = 1, \quad v = z = \theta = 0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (1.3a)$$

Ее решение в соответствии с физической задачей имеет смысл при $v \geq 0$.

Введением новых функций R и ψ посредством соотношений

$$z = a \left(\frac{1+x^4}{2x^2} \right)^{1/2} R \sin \psi; \quad (1.4a)$$

$$v = a \left(\frac{x^3}{1+x^4} - \frac{1}{2} R \cos \psi \right) \quad (1.4b)$$

преобразуем систему (1.3) к виду

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= a \left(\frac{x^3}{1+x^4} - \frac{1}{2} R \cos \psi \right), \\ dR/d\tau &= a \Omega(x) \sum_{n=0}^3 A_n(x, R) \cos(n\psi), \\ d\theta/d\tau &= \frac{x^2 - 1}{2x^2}, \\ d\psi/d\tau &= \Omega(x) \left[1 - a \sum_{n=1}^3 B_n(x, R) \sin(n\psi) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Omega(x) = \left(\frac{1+x^4}{2x^4} \right)^{1/2}, \quad A_0 = -R \frac{x^2}{(1+x^4)^2 \Omega(x)},$$

$$A_1 = \frac{1}{\Omega(x)} \left[\frac{2x^5(3-x^4)}{(1+x^4)^3} + R^2 \frac{x^4-1}{8x(x^4+1)} \right],$$

$$B_1 = \frac{1}{R\Omega(x)} \left[\frac{2x^5(3-x^4)}{(1+x^4)^3} - R^2 \frac{x^4-1}{8x(x^4+1)} \right],$$

$$A_2 = RB_2 = \frac{R}{\Omega(x)} \frac{x^2(x^4-2)}{(1+x^4)^2}, \quad A_3 = RB_3 = -\frac{R^2}{\Omega(x)} \frac{x^4-1}{8x(x^4+1)}.$$

Начальными условиями для решения этой системы будут

$$R = x = 1, \quad \theta = \psi = 0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (1.5a)$$

Таким образом, задача о движении электронов в цилиндрическом магнетроне сводится к исследованию динамической системы (1.5) в пространстве переменных x , R , θ и угловой переменной ψ .

При малых значениях параметра a система (1.5) является системой с быстро вращающейся фазой ψ . В общем виде такие системы были рассмотрены в [10], § 25. Однако решения, полученные в [10], § 25, неудобны для применения в нашей задаче. Оказалось более удобным привести систему уравнений (1.5) к стандартной форме и затем применить обычный принцип усреднения, изложенный в [10], § 24. Разделим для этого первые три уравнения (1.5) на последнее и разложим полученные выражения в ряд по степеням a . Ограничиваюсь первым членом этого ряда*, получим систему приближенных уравнений относительно новой независимой переменной ψ :

$$\begin{aligned} dx/d\psi &= a \frac{1}{\Omega(x)} \left(\frac{x^3}{1+x^4} - \frac{R}{2} \cos \psi \right), \\ dR/d\psi &= a \left[-\frac{R}{\Omega(x)} \frac{x^2}{(1+x^4)^2} + \sum_{n=1}^3 A_n(x, R) \cos(n\psi) \right], \\ d\tau/d\psi &= 1/\Omega(x), \\ d\theta/d\psi &= \frac{x^2-1}{2x^2 \Omega(x)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

с начальными условиями

$$x = R = 1, \quad \tau = \theta = 0 \quad \text{при } \psi = 0. \quad (1.6a)$$

2. РЕШЕНИЕ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Произведем усреднение уравнений (1.6) по явно содержащейся переменной ψ . Это приводит к системе первого приближения (что отмечено индексом 1):

$$dx_1/d\psi = ax_1^5 \sqrt{2}(1+x_1^4)^{-3/2},$$

* Этого достаточно для нахождения решения в первом и первом улучшенном приближениях. Для вычисления последующих приближений нужно удерживать более высокие члены разложения.

$$\begin{aligned} dR_1/d\psi &= -aR_1x_1^4\sqrt{2}(1+x_1^4)^{-5/2}, \\ d\tau_1/d\psi &= [2x_1^4/(1+x_1^4)]^{1/2}, \\ d\theta_1/d\psi &= (x_1^2-1)[2(1+x_1^4)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ее нужно решать с начальными условиями

$$x_1 = R_1 = 1, \quad \tau_1 = \theta_1 = 0 \quad \text{при } \psi = 0. \quad (2.1a)$$

Система (2.1) допускает решение в квадратурах:

$$\tau_1 = \frac{1}{2a} \left(x_1^2 - \frac{1}{x_1^2} \right); \quad (2.2a)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2a} \left[\frac{(x_1^4 - 1)(2x_1^2 - 1)}{4x_1^4} - \ln x_1 \right]; \quad (2.2b)$$

$$R_1 = [(1+x_1^4)/2x_1^4]^{1/2}; \quad (2.2c)$$

$$\psi = \frac{1}{4a} \left[\left(\frac{x_1^4 + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{2x_1^4 - 1}{x_1^4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \frac{x_1^2(1+\sqrt{2})}{1+(1+x_1^4)^{1/2}} - 1 \right]. \quad (2.2d)$$

Функции $x_1, \theta_1, R_1, \tau_1$ можно трактовать как координаты усредненного движения рассматриваемой динамической системы. При их анализе удобно считать независимой переменной x . Соотношение (2.2б) есть уравнение траектории электрона, (2.2а) — закон движения его в радиальном направлении. Для трех значений параметра a (0,25; 0,12; 0,06) они представлены на рис. 1 и 2 (штриховые линии). Траектория электрона представляет собой раскручивающуюся спираль, у которой

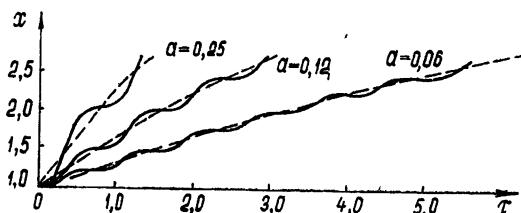


Рис. 1.

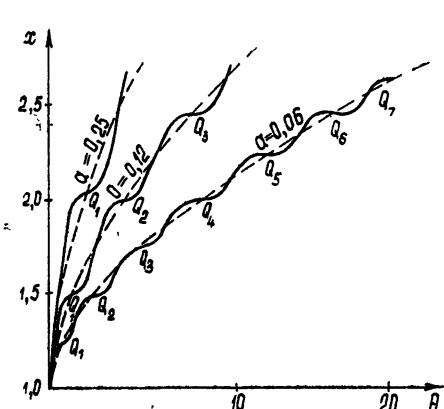


Рис. 2.

1) пролетное время τ_1 и угол поворота θ_1 неограниченно возрастают с увеличением x_1 ; этот рост происходит тем быстрее, чем больше расстояние, на которое удалился электрон от катода;

2) величины τ_1 и θ_1 для одного и того же x_1 обратно пропорциональны параметру a .

Отметим, что решение (2.2) было получено в предположении $a > 0$. Поэтому уравнения (2.2а), (2.2б) описывают в первом приближении усредненное движение электрона по восходящей ветви траектории. Нужно отметить, что,

согласно формулам (2.2а) и (2.2б), оно продолжается неопределенно долго. Фактически эта ветвь должна оборваться или на аноде при $x = x_a$ ($B < B_{kp}$), или на границе электронного облака при $x_{kp} = r_{kp}/r_k$ ($B \geq B_{kp}$). Значение x_{kp} можно найти из условия равенства нулю радиальной скорости электрона. Более подробно мы рассмотрим этот вопрос в разделе 4.

3. РЕШЕНИЕ В ПЕРВОМ УЛУЧШЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим систему (1.6) с учетом колебательных по ψ членов. Решение ее в первом улучшенном приближении (будем отмечать его индексом 1у) на основании [10], § 24 можно записать в виде

$$\tau_{1y} = \tau_1(x_1); \quad (3.1a)$$

$$\theta_{1y} = \theta_1(x_1); \quad (3.1b)$$

$$x_{1y} = x_1 + \Delta_x(x_1, R_1, \psi); \quad (3.1c)$$

$$R_{1y} = R_1 + \Delta_R(x_1, R_1, \psi), \quad (3.1d)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_x(x_1, R_1, \psi) &= -aR_1x_1^2[2(1+x_1^4)]^{-1/2}\sin\psi = \\ &= -ax_1\sin\psi 2^{-3/4}(1+x_1^4)^{-1/4}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Delta_R(x_1, R_1, \psi) = a \sum_{n=1}^3 A_n[x_1, R_1(x_1)] \frac{\sin(n\psi)}{n}. \quad (3.3)$$

Далее, разлагая $\Delta_x(x_1, \psi)$ в ряд в окрестности точки x_{1y} , имеем

$$\Delta_x(x_1, \psi) = \Delta_x(x_{1y}, \psi) \left[1 - \frac{\partial \Delta_x(x_{1y}, \psi)}{\partial x_{1y}} \right] + \dots = \Delta_x(x_{1y}, \psi) + O(a^2),$$

отсюда

$$x_1 = x_{1y} - \Delta_x(x_1, \psi) = x_{1y} + ax_{1y}2^{-3/4}(1+x_{1y}^4)^{-1/4}\sin\psi + O(a^2). \quad (3.4)$$

Это выражение нужно подставить в формулы (3.1), так как при анализе решений первого улучшенного приближения естественно рассматривать в качестве координаты величину x_{1y} , а не x_1 .

Итак, подставляя в (3.1), (2.2) и (3.4) и откидывая члены второго порядка малости, получим решение системы (1.5) в первом улучшенном приближении. Оно имеет вид (индексы опущены)

$$\tau = \frac{1}{2a} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1+x^4}{2} \right)^{3/4} \sin\psi; \quad (3.5a)$$

$$\theta = \frac{1}{2a} \left[\frac{(x^4-1)(2x^2-1)}{4x^4} - \ln x \right] + \frac{x^2-1}{2x^4} \left(\frac{1+x^4}{2} \right)^{3/4} \sin\psi; \quad (3.5b)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4a} \left[\left(\frac{x^4+1}{2} \right)^{1/4} \frac{2x^4-1}{x^4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \frac{x^2(1+\sqrt{2})}{1+(1+x^4)^{1/2}} - 1 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{x^4} \left(\frac{x^4+1}{2} \right)^{5/4} \sin\psi; \end{aligned} \quad (3.5c)$$

$$R = \left(\frac{1+x^4}{2x^4} \right)^{1/4} + a \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n} C_n(x) \sin(n\psi). \quad (3.5d)$$

Здесь обозначено

$$C_1 = \frac{1}{1+x^4} \left[\frac{2\sqrt{2}x^4(3-x^4)}{(1+x^4)^{5/2}} + \frac{x^4-5}{8x} \right], \quad C_2(x) = A_2(x), \quad C_3(x) = A_3(x).$$

Уравнение движения (3.5а) и траектории (3.5б) в первом улучшенном приближении уже содержат вибрационные по ψ члены. Наличие их позволяет раскрыть новые (по сравнению с усредненным движением) характерные особенности движения электронов.

Кривые $x(\tau)$ в первом улучшенном приближении изображены на рис. 1 сплошными линиями. Колебания, которые они испытывают около усредненных кривых (штриховые линии), свидетельствуют о том, что движение электронов в радиальном направлении носит характер последовательно повторяющихся «рывков». Вначале электрон, вылетевший из катода, движется медленно, затем скорость его возрастает, и в короткий промежуток времени он проходит сравнительно большое расстояние. После этого происходит торможение и т. д. до тех пор, пока при очередном замедлении он совсем не прекратит своего движения в радиальном направлении.

Траектории электронов представлены на рис. 2 сплошными линиями. Характер изменения угловой координаты тоже подобен последовательным «рывкам», при которых медленное увеличение $\theta(x)$ чередуется с быстрым. Это приводит в конце концов к тому, что при некотором x производная $\frac{d\theta}{dx} \rightarrow \infty$.

Точки пересечения кривых $\theta(x)$ и $\tau(x)$ первого и первого улучшенного приближений, которые соответствуют значениям $\psi = 2\pi k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), обозначены через $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$. Для одного и того же x количество таких точек с уменьшением a до нуля будет неограниченно увеличиваться.

Очевидно, восходящая ветвь траектории электрона, как и в случае усредненного движения, может быть оборвана либо на аноде, либо на границе облака.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Траектория и закон движения электронов по радиусу были получены нами непосредственно при интегрировании приближенной системы уравнений (1.6). Для получения других величин, характеризующих состояние электронного облака, нужно воспользоваться соотношениями, связывающими их с координатами динамической системы τ, x, θ и ψ . Чтобы при этом степень приближения по a не ухудшилась, соотношения не должны содержать операций дифференцирования приближенных решений. Это не было учтено в работе Бриллюэна и Блоха [2], где скорость находилась посредством дифференцирования приближенных решений.

а) *Радиальная составляющая скорости электрона.* Для нахождения радиальной скорости нужно подставить в (1.4б) значения R и ψ в первом (2.2) либо в первом улучшенном (3.5) приближениях. В первом приближении это приводит к формуле

$$v = a \left[\frac{x^3}{1+x^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^4}{2x^4} \right)^{1/4} \cos \psi \right], \quad (4.1)$$

в первом улучшенном приближении —

$$v = a \left\{ \frac{x^3}{1+x^4} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+x^4}{2x^4} \right)^{1/4} + a \sum_{n=1}^3 C_n(x) \frac{\sin(n\psi)}{n} \right] \cos \psi \right\}. \quad (4.1a)$$

Если не считать членов порядка a^2 (об их влиянии сказано ниже), основное различие формул (4.1) и (4.1а) состоит в том, что в (4.1) используется первое приближение для ψ (2.2г), а в (4.1а) — первое улучшенное (3.5в).

Из (4.1) и (4.1а) следует, что кривая $v(x)$ заключена в полосе

$$\frac{x^3}{1+x^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^4}{2x^4} \right)^{1/4} < \frac{v}{a} < \frac{x^3}{1+x^4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^4}{2x^4} \right)^{1/4}. \quad (4.2)$$

Выражения $x^3/(1+x^4)$ и $\frac{1}{2} [(1+x^4)/2x^4]^{1/4}$ представляют собой медленно изменяющиеся функции x , и форма кривой $v(x)$ определяется главным образом характером зависимости ψ от x . Так как в первом приближении ψ изменяется почти линейно (штриховые линии на рис. 3), со-

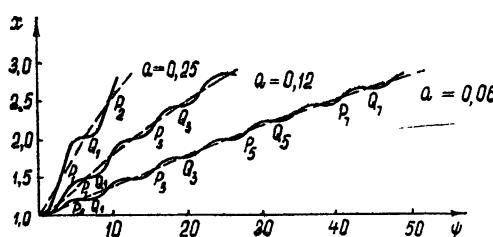


Рис. 3.

ответствующая кривая $v(x)$ представляет собой синусоиду, вписанную в полосу (4.2). Количество периодов этой синусоиды, определяемое соотношением*

$$n = E\left(\frac{0,307}{a}\right) + 1, \quad (4.3)$$

называют показателем бидромического режима.

Нижняя граница полосы (4.2) пересекает ось x при $x = x_0 = r_0/r_k = 2,271\dots$ (корень уравнения $x_0^4 = \left(\frac{1+x_0^4}{2}\right)^{5/4}$). Это значит, что $v(x)$ не может обращаться в нуль в интервале $[1, x_0]$. Для $a = 0,12$ кривая $v(x)$ изображена на рис. 4 штриховой линией.

В первом улучшенном приближении зависимость $v(x)$ носит более сложный характер (штрих-пунктирная линия на рис. 4). В окрестности

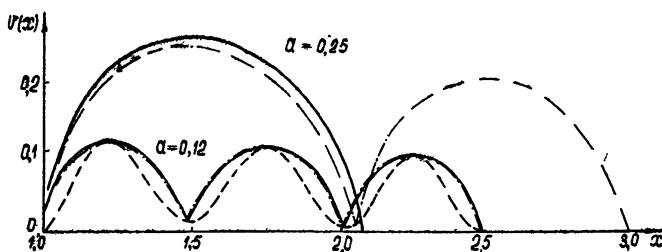


Рис. 4.

* Величина $E(L)$ представляет собой целую часть числа L .

значений $\psi = 2\pi k$ (точки Q_k на рис. 3) $\psi(x)$ изменяется быстрее, а в окрестности значений $\psi = (2k - 1)\pi$ (точки P_k на рис. 3) — медленнее, чем в первом приближении. Положения максимумов и минимумов кривой $v(x)$ при этом сохраняются, но максимумы становятся более плавными, а минимумы — острыми. Легко видеть, что улучшение значений ψ приводит к существенному изменению кривой $v(x)$. В то же время улучшение значений R изменяет величину v не более, чем на 0,007 ($a = 0,25$), 0,0015 ($a = 0,12$), 0,0004 ($a = 0,06$), и потому не отражено на графиках.

б) *Производная по времени от радиальной скорости электрона.* В системе координат, вращающейся вокруг продольной оси магнетрона с угловой скоростью $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} (1 - 1/x^2)$, величина $dv/d\tau$ представляет собой безразмерную равнодействующую всех сил, действующих на электрон: $dv/d\tau = F/m\omega_B^2 r_k$. Подставляя $R(x)$ и $\psi(x)$ из (2.2) или (3.5) в соотношение (1.4a), найдем в первом приближении

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{z}{2x} = \frac{a}{2} \left(\frac{1 + x^4}{2x^4} \right)^{3/4} \sin \psi, \quad (4.4)$$

в первом улучшенном приближении

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{a}{2} \left(\frac{1 + x^4}{2x^4} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{1 + x^4}{2x^4} \right)^{1/4} + a \sum_{n=1}^3 C_n(x) \frac{\sin n\psi}{n} \right] \sin \psi. \quad (4.4a)$$

в) *Виртуальные квазикатоды и катод, критический радиус.* Эти понятия вводятся для более детального описания движения электронов в магнетроне.

Радиусами виртуальных квазикатодов называются такие значения $x = x_{kk}$, в которых $dv/d\tau = dv/dx = 0$, а $v_{min} > 0$. Из (4.4) и (4.4a) следует, что при $x = x_{kk}$ выполняется условие

$$\psi(x_{kk}) = 2\pi k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n-1), \quad (4.5)$$

где k — номер виртуального квазикатода. Связь между величинами x_{kk} и значением параметра a дается соотношением

$$a = \frac{1}{8\pi k} \left[\left(\frac{x_{kk}^4 + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{2x_{kk}^4 - 1}{x_{kk}^4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \frac{x_{kk}^2(1 + \sqrt{2})}{1 + (1 + x_{kk}^4)^{1/2}} - 1 \right]. \quad (4.6)$$

Эта зависимость изображена на рис. 5 наклонными штриховыми линиями, каждая из которых соответствует своему значению k .

Значение $x = x_b$, при котором выполняются равенства $v = 0$, $dv/d\tau = 0$, называют радиусом виртуального катода. В первом и первом улучшенном приближениях $x_b = x_0 = 2,271\dots$ Ему соответствуют значения

$$a_n = \frac{0,307}{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (4.7)$$

Соответствующие точки на рис. 5 отмечены кружками. В них обрываются линии виртуальных квазикатодов. Наконец, минимальное значение x , при котором $v = 0$, $dv/d\tau < 0$, называется критическим радиусом x_{kp} . Из (4.1) следует зависимость между a и x_{kp} (в первом приближении):

$$a = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{x_{kp}^4 + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{2x_{kp}^4 - 1}{x_{kp}^4} + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \frac{x_{kp}^2(1 + \sqrt{2})}{1 + (1 + x_{kp}^4)^{1/2}} - 1 \right] \times \quad (4.8)$$

$$\times \left\{ 2\pi(n-1) + \arccos \left[x_{kp}^4 \left(\frac{2}{1+x_{kp}^4} \right)^{5/4} \right] \right\}^{-1}.$$

Здесь $n-1$ — число виртуальных квазикатодов и катодов. Эта зависимость в первом улучшенном приближении представлена на рис. 5 штрих-пунктирной линией. Задавая значение параметра a и проводя линию, параллельную оси x , на расстоянии a от нее до пересечения с кривой $a(x_{kp})$, находим x_{kp} . Число точек пересечения этой линии с кривыми квазикатодов на единицу меньше порядка бидромического режима.

г) *Распределение плотности пространственного заряда.* Плотность пространственного заряда может быть получена из четвертого уравнения системы (1.1), она равна (в безразмерных обозначениях)

$$p(x) = a/xv(x). \quad (4.9)$$

Подставляя в (4.9) значения $v(x)$ из (4.1) и (4.1a), получим в первом приближении

$$p(x) = \frac{x^4 + 1}{x^4 - [(1+x^4)/2]^{5/4} \cos \psi}, \quad (4.10)$$

в первом улучшенном приближении

$$p(x) = (1+x^{-4}) \left\{ 1 - \left[\frac{1}{x^4} \left(\frac{1+x^4}{2} \right)^{5/4} + a \frac{1+x^4}{2x^3} \sum_{n=1}^3 C_n(x) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sin(n\psi)}{n} \right] \cos \psi \right\}^{-1}. \quad (4.10a)$$

Характерный вид зависимости $p(x)$ представлен кривыми на рис. 6 (штриховой линией в первом приближении и сплошной — в первом улучшенном). Они отличаются наличием ряда узких пиков, вершины которых расположены на огибающей

$$p(x) = \frac{x^4 + 1}{x^4 - [(1+x^4)/2]^{5/4}}. \quad (4.11)$$

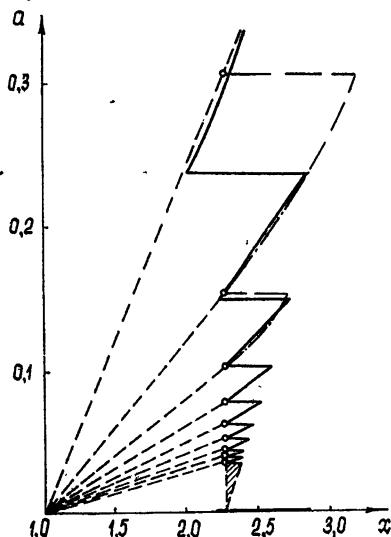


Рис. 5.

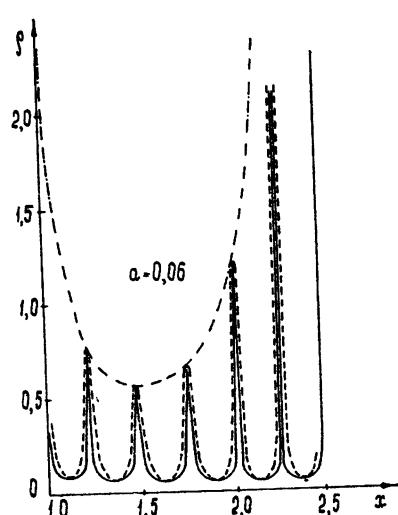


Рис. 6.

Последняя изображена на рис. 6 штрих-пунктирной линией. Эти пики свидетельствуют о том, что в электронном облаке в окрестности катода, квазикатодов и критической точки имеются резко выраженные слои с высокой плотностью пространственного заряда.

д) *Полная скорость электрона w и потенциал Φ .* Полная скорость электрона определяется по формуле $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, где радиальная скорость v находится из (4.1) или (4.1а), а азимутальная скорость u равна

$$u = x \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} (x - x^{-1}). \quad (4.12)$$

Безразмерный потенциал в соответствии с первым уравнением системы (1.1) определяется формулой $\Phi(x) = \frac{1}{2} w^2$, откуда следует в первом приближении

$$\Phi = \frac{1}{4} (x - x^{-1})^2 + a^2 \frac{x^6}{(1+x^4)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{x^4} \left(\frac{1+x^4}{2} \right)^{5/4} \cos \psi \right\}^2 \quad (4.13)$$

и в первом улучшенном приближении

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{4} (x - x^{-1})^2 + a^2 \frac{x^6}{(1+x^4)^2} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{x^4} \left(\frac{1+x^4}{2} \right)^{5/4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + a \frac{1+x^4}{2x^3} \sum_{n=1}^3 C_n(x) \frac{\sin(n\psi)}{n} \right] \cos \psi \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.13a)$$

Относительная величина вклада, вносимого в полную скорость ее составляющими, различна на разных расстояниях от катода. Расчеты по формулам (4.1) и (4.12) показывают, что величина радиальной скорости уже на втором ее максимуме становится в 5—6 раз меньше, чем u . Поэтому учет радиальной скорости электрона необходимо проводить лишь до первого виртуального квазикатода.

В области вне его траектория электрона представляет собой слабо раскручивающуюся спираль, а w отличается от u не более, чем на 2%. Отсюда следует, что потенциал в этой области менее, чем на 4%, отличается от бриллюэновского $\Phi_{bp} = \frac{1}{4} (x - x^{-1})^2$.

5. О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В целях определения границ применимости приближенных решений было проведено численное интегрирование системы (1.3) методом Рунге—Кутта. Полученные кривые изображены на рис. 4 и 5 сплошными линиями. Легко видеть, что форма кривых и их расположение близки к кривым первого улучшенного приближения.

При увеличении a координаты виртуальных катодов и критических точек сдвигаются по отношению к их значениям, полученным в первом приближении; величина сдвига растет вместе с a . При некоторых значениях a в окрестности критических точек x_{kp} , рассчитанных численным интегрированием, кривая $v(x)$ первого улучшенного приближения не доходит до оси абсцисс (или только касается ее) и потому должна быть продолжена дальше до пересечения с осью x (см. рис. 4 для $a = 0,25$). Следовательно, при сравнительно больших a показатели бидромического режима могут не совпадать.

В связи с этим зависимость между a и x_{kp} , полученная в результа-

те численного интегрирования уравнений задачи, выглядит несколько иначе, чем найденная в первом приближении (рис. 5). По отношению к кривой первого улучшенного приближения кривая $a(x_{kp})$ «сдавлена» по вертикали и сдвинута в верхней части. Координаты виртуальных катодов уже не лежат на прямой $x = 2,271$, а располагаются на некоторой изогнутой линии, которая берет начало в точке $a = 0$, $x = 2,271$ и, постепенно отклоняясь от вертикали влево с увеличением a , обрывается в точке с координатами $a = 0,2385$, $x = 2,0212$.

Таким образом, координаты виртуальных катодов, как показывают расчеты, располагаются в интервале

$$2,0212 < x < 2,271,$$

$$0 < a < 0,2385.$$

Значения параметров для соответствующих виртуальных катодов оказываются меньшими, чем они получались из формулы (4.7). Однако эта разность очень быстро убывает с ростом n . В таблице 1 приведены относительные расхождения значений a_n , x_B и x_{kp} для разных n .

Таблица 1

n	$\Delta a_n/a_n (\%)$	$\Delta x_B/x_B (\%)$	$\Delta x_{kp}/x_{kp} (\%)$
2	29	12,3	12,3
3	3,7	0,3	0,9
4	0,32	0,1	0,3
5	< 0,06	< 0,1	< 0,1

Интервал значений x_{kp} , в котором величина a определяется неоднозначно, по результатам численного интегрирования ограничен координатами $2,232 < x_{kp} < 2,867$. Он выделен на рис. 5 жирным отрезком на оси x .

На основании произведенных оценок и сравнений можно утверждать, что выражения, полученные из решения в первом улучшенном приближении, достаточно хорошо согласуются с точным решением задачи. По крайней мере, вплоть до значений $a = 0,15 \div 0,2$ они могут быть использованы не только для качественного, но и количественного описания и анализа процессов, происходящих в статическом магнетроне.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Теория магнетрона (по Бриллюэну), сб. переводов, изд. Сов. радио, М., 1946.
- 2 L. Brillouin, F. Bloch, Adv. in Electronics, 3, 145 (1951).
- 3 I. C. Slater, Microwave Electronics, MIT, 1950, p. 302.
- 4 I. L. Delcroix, Ann. Phys., 19, 269 (1954).
- 5 Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, М.—Л., 1946.
- 6 Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 26, № 1836 (1956).
- 7 В. Е. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1065 (1963).
- 8 Р. П. Поллавский, ЖЭТФ, 25, 169 (1953).
- 9 В. Е. Белов, Ученые записки, ЧИГПИ, серия физ. мат., № 22, 87 (1964).
- 10 Н. Н. Боголюбов, Ю. Л. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

TO STATIC THEORY OF CYLINDRICAL MAGNETRON.

I. BIDROMICAL STATES

V. E. Belov, L. V. Rodygin

A system of equations is considered, describing the state of a space charge in a magnetron at the zero initial velocities of electrons. In case of a weak cathode current, the solution of the system in the first and the first improved approximations is obtained by the averaging method and the approximated expressions are found for the electron trajectory and velocity and the distribution of the space charge density and the potential as well. Comparing the results of numerical integration, the limits of validity of the formulae obtained are estimated.

УДК 621.371.14 : 538.311.001.24

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С РАДИАЛЬНО РАСХОДЯЩИМСЯ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

B. C. Савельев

Из уравнения возбуждения радиального волновода сгруппированным потоком и уравнений электроники в линейном приближении получено дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами для определения напряженности высокочастотного электрического поля. Решение уравнения найдено методом разложения высокочастотного поля по малому параметру. Закон нарастания амплитуды поля и коэффициент усиления определены с учетом пространственного заряда, параметра несинхронности и распределенных потерь.

Анализируемая схема радиального волновода, заполненного плоским радиально расходящимся электронным потоком, приведена на рис. 1. Выбранная система координат (r , φ , z) и обозначения ясны из рисунка.

В волноводе в положительном направлении радиуса r распространяется цилиндрическая электромагнитная волна. Замедление волны можно осуществить диэлектриком или замедляющей системой. В частности, в качестве радиальной линии замедления можно использовать логарифмическую спираль [1]. Задача о взаимодействии радиально расходящегося электронного потока с замедленной в радиальном направлении электромагнитной волной сводится к составлению и решению системы дифференциальных уравнений.

При решении задачи делаются следующие допущения: 1) все электроны в односкоростном приближении движутся только в направлении радиуса r (фокусирующее радиальное магнитное поле), так что конвекционный ток, возбуждающий электромагнитные поля, имеет только составляющую $I_r = I$; 2) замедление достаточно велико, т. е.

$$\gamma_0^2 = \beta^2 + k^2, \quad \beta \gg k, \quad \gamma_0 \simeq \beta,$$

где γ_0 — постоянная распространения волны в «холодной» системе, скорость которой наиболее близка к скорости электронов в радиальном направлении, β — постоянная распространения волны вдоль оси z , k — фазовая постоянная волны в свободном пространстве; 3) распространяются только аксиально-симметричные поля ($\partial/\partial\varphi = 0$).

Расчет проводится в рамках теории малых сигналов, гармонически изменяющихся во времени (временной множитель $\exp(j\omega t)$). Составляю-

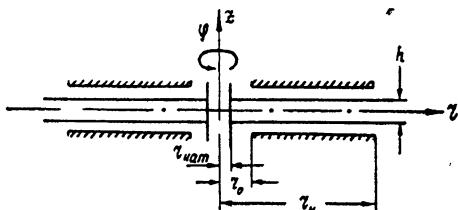


Рис. 1. Схематическое изображение радиального волновода, заполненного электронным потоком ($r_{\text{кат}}$ — радиус катода, r_0 и r_k — начальный и конечный радиусы радиальной линии замедления, h — ширина радиально расходящегося электронного потока).

щие электрического поля в положительном E_+ и отрицательном E_- направлениях радиуса r можно записать в следующем виде [2]:

$$E_+ = E_0 \frac{H_1^{(2)}(\gamma_0 r)}{H_1^{(2)}(\gamma_0 r_0)}, \quad E_- = E_0 \frac{H_1^{(1)}(\gamma_0 r)}{H_1^{(1)}(\gamma_0 r_0)}, \quad (1)$$

где E_0 — амплитуда электрического поля входного сигнала, $H_1^{(1)}$, $H_1^{(2)}$ — функции Ганкеля первого и второго рода первого порядка.

Используя результаты работ [3,4] по теории возбуждения волноводов и полагая, что возбуждается лишь одна из собственных волн волновода, найдем составляющую электрического поля $E_r = E$, возбужденную сгруппированным током $I(r)$ в бесконечно длинном (или конечной длины, но согласованном на концах) радиальном волноводе:

$$E = E_0 \frac{H_1^{(2)}(\gamma_0 r)}{H_1^{(2)}(\gamma_0 r_0)} - \frac{K_0 \beta_0^2}{2} \frac{H_1^{(2)}(\gamma_0 r)}{H_1^{(2)}(\gamma_0 r_0)} \int_{r_0}^r \frac{H_1^{(1)}(\gamma_0 r)}{H_1^{(1)}(\gamma_0 r_0)} I(r) dr - \\ - \frac{K_0 \beta_0^2}{2} \frac{H_1^{(1)}(\gamma_0 r)}{H_1^{(1)}(\gamma_0 r_0)} \int_{r_0}^{r_k} \frac{H_1^{(2)}(\gamma_0 r)}{H_1^{(2)}(\gamma_0 r_0)} I(r) dr, \quad (2)$$

где K_0 — сопротивление связи на входе радиальной линии замедлений (при $r = r_0$), β_0 — фазовая постоянная волны в системе без электронного потока.

В правой части выражения (2) первый член представляет собой поле холодной волны, второй и третий — соответственно поле прямой и обратной волн, возбужденных радиальным переменным током $I(r)$.

Заменяя функции Ганкеля их асимптотическими выражениями (для значений аргумента $\gamma_0 r \geq 3$), получим

$$E = E_0 \sqrt{r_0/r} \exp[-j\gamma_0(r - r_0)] - \frac{K_0 \beta_0^2}{2} \int_{r_0}^r \frac{r_0}{\sqrt{r\xi}} \times \\ \times \exp[-j\gamma_0 |(r - r_0) - \xi|] I(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Из выражения (3), пренебрегая членами, пропорциональными $(1/\gamma_0 r)^2 \ll 1$ находим уравнение возбуждения радиального волновода сгруппированным током:

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \left(\gamma_0^2 - \frac{j\gamma_0}{r} \right) E = j\gamma_0 \beta_0^2 K_0 \frac{r_0}{r} I(r). \quad (4)$$

В дальнейшем будем пренебрегать влиянием обратного излучения электронного потока, т. е. будем учитывать только прямую волну. Прямая волна удовлетворяет уравнению

$$\frac{dE}{dr} + \left(j\gamma_0 + \frac{1}{2r} \right) E = -\frac{1}{2} \beta_0^2 K_0 \frac{r_0}{r} I(r). \quad (5)$$

Из уравнений движения (учитывая, что в него входит поле пространственного заряда), непрерывности и полного тока (считая при этом, что полный ток равен нулю) в рамках линейной теории по аналогии с [5] получим два дифференциальных уравнения;

$$\frac{dV}{dr} + j\beta_e V - j\beta_{q0} W_0 \frac{r_0}{r} I - E = 0; \quad (6)$$

$$\frac{dI}{dr} + j\beta_e I - j\beta_{q0} \frac{1}{W_0} V = 0, \quad (7)$$

где $W_0 = 2\beta_{q0}V_0/\beta_e I_0$ — волновое сопротивление электронного потока при $r = r_0$; $V = v/v_0/\eta$ — кинетический потенциал; V_0 — напряжение, соответствующее средней скорости электронов; I_0 — постоянная составляющая тока; v и v_0 — переменная и постоянная составляющие скорости электронов; $\beta_e = \omega/v_0$ и $\beta_{q0} = \omega_{q0}/v_0$ — фазовые постоянные пучка на частоте сигнала ω и на частоте плазменных колебаний ω_{q0} (при $r = r_0$); η — отношение заряда электрона к его массе.

Следует отметить, что в уравнениях (6) и (7) конечность поперечного сечения электронного потока в направлении оси z учтена путем замены значения плазменной частоты бесконечно широкого потока ω_{p0} на плазменную частоту ограниченного потока $\omega_{q0} = p\omega_{p0}$, где p — коэффициент уменьшения плазменной частоты.

Система уравнений (5) — (7) описывает взаимодействие радиально расходящегося электронного потока с замедленной цилиндрической волной в пренебрежении обратным излучением.

Преобразуем величины E , V и I в систему координат, движущуюся с электронным потоком (т. е. будем полагать, что эти величины изменяются пропорционально множителю $\exp(-j\beta_e r)$), и введем в постоянную распространения γ_0 распределенные в радиальном направлении потери $\sigma(\partial\sigma \cdot M^{-1})$:

$$j\gamma_0 = j\beta_0 + \sigma. \quad (8)$$

Тогда уравнения (5) — (7) принимают вид

$$\frac{dE}{dr} + j(\beta_0 - \beta_e)E + \sigma E + \frac{E}{2r} + \frac{1}{2}\beta_0^2 K_0 \frac{r_0}{r} I = 0; \quad (9)$$

$$\frac{dV}{dr} - j\beta_{q0} W_0 \frac{r_0}{r} I - E = 0; \quad (10)$$

$$\frac{dI}{dr} - j\beta_{q0} \frac{1}{W_0} V = 0. \quad (11)$$

Система уравнений (9) — (11) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными (уравнения (9), (10)) и постоянными (уравнение (11)) коэффициентами. Следует отметить, что в тех случаях, когда взаимодействие электронного потока с бегущей электромагнитной волной описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (например, когда статические параметры пучка или волновода меняются вдоль системы), точное решение задачи на основе метода дисперсионного уравнения часто оказывается невозможным [6].

Последовательным дифференцированием сведем систему уравнений (9) — (11) к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\begin{aligned} &r \frac{d^3E}{dr^3} + \left\{ \frac{5}{2} + [\sigma + j(\beta_0 - \beta_e)]r \right\} \frac{d^2E}{dr^2} + \\ &+ \{2[\sigma + j(\beta_0 - \beta_e)] + \beta_{q0}^2 r_0\} \frac{dE}{dr} + \\ &+ \left\{ \left[\sigma + j(\beta_0 - \beta_e) + \frac{1}{2r} \right] \beta_{q0} + \frac{j}{2} \beta_0^2 \frac{K_0}{W_0} \right\} \beta_{q0} r_0 E = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения (12) при соответствующих граничных условиях дает возможность найти распределение амплитуды поля E вдоль радиуса r и вычислить усиление в предположении, что поле в системе радиальная линия замедления — радиально расходящийся электронный поток представляется одной волной с постоянной фазовой скоростью.

Введем новую переменную $x = C_0 \beta_e r$, где $C_0 = (I_0 K_0 / 4V_0)^{1/3}$ — параметр усиления, отнесенный к начальному радиусу r_0 , и обозначим $b_0 = (\beta_0 - \beta_e)/\beta_e C_0$ — параметр несинхронности, $d = \sigma/\beta_e C_0$ — параметр потерь. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\begin{aligned} x E''' + \left[\frac{5}{2} + (d + jb_0)x \right] E'' + 2(d + jb_0)E' + \\ + x_0 \left\{ q_0 E' + \left[\left(d + jb_0 + \frac{1}{2x} \right) q_0 + j \right] E \right\} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $x_0 = C_0 \beta_e r_0$, $q_0 = (\beta_{q0}/\beta_e C_0)^2$ — параметр пространственного заряда, отнесенный к r_0 , штрих означает дифференцирование по x .

Будем решать уравнение (13) методом последовательных приближений путем разложения в ряд по малому параметру искомого поля E :

$$E = E_0 + x_0 E_1 + x_0^2 E_2 + x_0^3 E_3 + \dots + x_0^n E_n. \quad (14)$$

Подставляя (14) в уравнение (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x_0 , получим уравнения для определения E_0 и E_{n+1} :

$$x E_0'' + \left[\frac{5}{2} + (d + jb_0)x \right] E_0' + 2(d + jb_0)E_0 = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} x E_{n+1}'' + \left[\frac{5}{2} + (d + jb_0)x \right] E_{n+1}' + 2(d + jb_0)E_{n+1} = \\ = -q_0 E_n' - \left[\left(d + jb_0 + \frac{1}{2x} \right) q_0 + j \right] E_n, \end{aligned} \quad (16)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Представим уравнение (15) в виде [7]

$$xy'' + \left(ax + \frac{1}{2} + 2 \right) y' + 2ay = 0, \quad (17)$$

где $y = dE_0/dx$, $a = d + jb_0$. Тогда решение уравнения (15) при $ax < 1$ запишется следующим образом:

$$E_0 = C_{10} x^{-1/2} \left(1 - ax + \frac{1}{2} a^2 x^2 - \dots \right) + \quad (18)$$

$$+ C_{20} \left(1 - \frac{2}{3} ax + \frac{2^2}{3 \cdot 5} a^2 x^2 - \dots \right) + C_{30}.$$

Зная решение (18) однородного уравнения (15) и ограничиваясь членами не выше первой степени ax , найдем решение неоднородного уравнения (16) и определим из граничных условий постоянные интегрирования C_{10} , C_{20} и C_{30} (для решения однородного уравнения) и C_1 , C_2 и C_3 (для решения неоднородного уравнения).

На входе линии замедления при $x = x_0$ ($r = r_0$) имеем поле «холодной» системы, которое с учетом зависимости

$$j\gamma_0 r = j\beta_e r + ax \quad (19)$$

определяется выражением

$$E_0(x_0) = Ax_0^{-1/2} \exp(-ax_0), \quad (20)$$

где A — постоянная, пропорциональная величине входного сигнала.

Подчиняя в выражении (18) E_0 , E'_0 и E''_0 граничным условиям и разлагая $E_0(x_0)$ в выражении (20) в ряд при $ax_0 < 1$, получим

$$C_{10} = A, \quad C_{20} = C_{30} = 0.$$

Вследствие того, что модуляция тока и скорости на входе радиальной линии замедления отсутствует, приближения E_1, E_2, E_3, \dots в выражении (14) при $x = x_0$ ($r = r_0$) равны нулю и, таким образом, поле на входе $E_{n+1}(x_0)$ равно полю $E_n(x_0)$. Подчиняя в решении неоднородного уравнения (16) E_{n+1} , E'_{n+1} и E''_{n+1} граничным условиям, находим

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

После соответствующих преобразований получаем

$$E_0 = Ax^{-1/2} (1 - ax); \quad (21)$$

$$\begin{aligned} E_{n+1} = & - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x x^{-5/2} \left(1 + \frac{1}{3} ax \right) \left[q_0 \int_{x_0}^x E_n' x^{3/2} \left(1 - \frac{1}{3} ax \right) dx + \right. \\ & + (aq_0 + j) \int_{x_0}^x E_n x^{3/2} \left(1 - \frac{1}{3} ax \right) dx + \frac{q_0}{2} \times \\ & \times \left. \int_{x_0}^x E_n x^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3} ax \right) dx \right] dx dx. \end{aligned} \quad (22)$$

По формулам (21) и (22), задаваясь значениями b_0, d и q_0 , можно определить, в соответствии с (14), поле E . Следует отметить, что принципиально можно брать любое число приближений, однако учет приближений выше третьего встречает трудности, связанные с громоздкостью математических выкладок [6].

Для простоты ограничимся расчетом поля E для случая, когда $d = b_0 = q_0 = 0$. В этом случае формулы (21) и (22) принимают вид

$$E_0 = Ax^{-1/2}; \quad (23)$$

$$E_{n+1} = -j \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x x^{-5/2} \int_{x_0}^x E_n x^{3/2} dx dx dx. \quad (24)$$

Из (23), (24) и (14), ограничиваясь для краткости написания двумя приближениями, находим

$$\frac{E}{E_0} = 1 - j \frac{2}{3} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 (C_6 \beta_e r_0)^3 \left[1 - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} + 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] -$$

$$-\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{r}{r_0}\right)^4 (C_0 \beta_e r_0)^6 \left[1 - \frac{10}{3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} + 14 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2} - \right. \\ \left. - \frac{70}{3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \frac{77}{3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{5/2} - \frac{115}{3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{7/2} + \frac{73}{3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \right] + \dots \quad (25)$$

Анализ показывает, что ряд (25) сходится абсолютно для произвольных значений r/r_0 . Коэффициент усиления определяется выражением

$$G = 10 \lg |E/E_0|^2. \quad (26)$$

На рис. 2 показана зависимость коэффициента усиления G от отношения r/r_0 для различных значений $C_0 \beta_e r_0$. (Коэффициент усиления

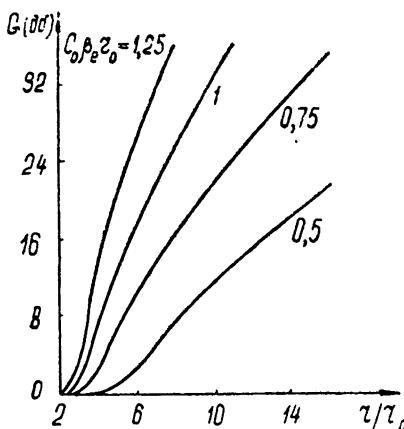


Рис. 2.

вычислен по четырем приближениям.) В случае $ax > 1$ решением уравнения (15) будет

$$E_0 = C_{10} x^{-1/2} \exp(-ax) + C_{20} \left[\frac{1}{ax} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2^n (ax)^{n+1}} \right] + C_{30} \quad (27)$$

и формулы для определения E_0 и E_{n+1} в окончательной форме записутся следующим образом:

$$E_0 = Ax^{-1/2} \exp(-ax); \quad (28)$$

$$E_{n+1} = \frac{2}{a} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x x^{-3} \left[q_0 \int_{x_0}^x E_n' x \left(1 + \frac{3}{2ax} \right) dx + \right. \\ \left. + (aq_0 + j) \int_{x_0}^x E_n x \left(1 + \frac{3}{2ax} \right) dx + \frac{q_0}{2} \int_{x_0}^x E_n \left(1 + \frac{3}{2ax} \right) dx \right] \times$$

$$\times dx dx - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x x^{-1/2} \exp(-ax) \left(1 + \frac{1}{ax} \right) \left[q_0 \int_{x_0}^x E_n' x^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp(ax) \left(1 + \frac{1}{ax} \right) dx + (aq_0 + j) \int_{x_0}^x E_n x^{-1/2} \exp(ax) \left(1 + \frac{1}{ax} \right) dx + \right. \\ \left. + \frac{q_0}{2} \int_{x_0}^x E_n \exp(ax) \left(1 + \frac{1}{ax} \right) dx \right] dx +$$

$$\times \exp(ax) \left(1 + \frac{1}{ax} \right) dx + (aq_0 + j) \int_{x_0}^x E_n x^{-1/2} \exp(ax) \left(1 + \frac{1}{ax} \right) dx +$$

$$+ \frac{q_0}{2} \int_{x_0}^x E_n x^{-3/2} \exp(ax) \left(1 + \frac{1}{ax}\right) dx \, dx.$$

В заключение можно отметить, что при использовании системы радиальная линия замедления — радиально расходящийся электронный поток по сравнению с обычной ЛБВ возможно увеличение тока (при той же плотности тока) за счет большой эмиттирующей поверхности катода и уменьшение напряжения (в результате большого замедления, которым обладает радиальная линия [1]). Это обстоятельство благоприятно скаживается на увеличении параметра C_0 и, следовательно, произведения $C_0 \beta_e r_0$, от которого зависит усиление.

Таким образом, система радиальная линия замедления — радиально расходящийся электронный поток может оказаться более эффективной в усиливании на единицу длины по сравнению с приборами с продольным взаимодействием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. Дж. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.
3. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 23, № 4, 654 (1953).
4. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 26, № 1, 126 (1956).
5. У. Люиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, ИЛ, М., 1963.
6. В. Н. Шевчик, Взаимодействие электронных пучков с электромагнитными волнами, изд. Саратовского университета, 1963.
7. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ГИФМЛ, М., 1961.

Поступила в редакцию
22 марта 1966 г.,
после исправления
4 октября 1966 г.

CYLINDRICAL WAVE INTERACTION WITH RADIALLY DIVERGING ELECTRON BEAM

V. S. Savel'ev

From the equation of the radial waveguide excitation by the bunched current and those of electronics there obtained the differential 3rd order equation with the variable coefficient in a linear approximation in order to determine the strength of the high-frequency electric field. The solution of the equation has been found by the method of high-frequency field expansion over a small parameter. The law of the field amplitude increasing and amplification coefficient have been determined, taking into account a spatial charge, the non-synchronism parameter and distributed losses.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.378.325

**ИЗМЕРЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ СВЕТА
ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ СЕРЕБРА**

Г. К. Иванова, А. М. Леонов

Одним из нелинейных эффектов, возникающих при взаимодействии мощного лазерного излучения с веществом, является генерирование второй гармоники при отражении от металла. Впервые такой эффект получен на серебре [1, 2]. Так как кристаллическая решетка серебра обладает центром инверсии, то нелинейные эффекты 2-го порядка без учета пространственной дисперсии в объеме кристалла отсутствуют (тензор $\chi_{abc} = 0$, [3]). Наблюдаемое удвоение частоты объясняется большим градиентом электрического поля на границе и наличием скрин-слоя. В [4] получено выражение для интенсивности второй гармоники при отражении от металла в предположении, что нелинейный эффект обусловлен только свободными электронами, показано, что нелинейная поляризация $P^{NL}(2\omega)$ на удвоенной частоте определяется выражением

$$P^{NL}(2\omega) = \alpha E \times H + \beta E \nabla E, \quad (1)$$

где E, H — поле основной частоты внутри металла. Первый член (1) дает вклад в интенсивность второй гармоники при ориентации вектора E внешнего поля перпендикулярно плоскости падения, второй — параллельно ей.

Целью настоящей работы является измерение интенсивности второй гармоники (что дает возможность вычислить $(\chi^{NL}(2\omega))^2 \sim E^2(2\omega)/E^4(\omega)$, где $\chi^{NL}(2\omega)$ — нелинейная восприимчивость серебра) и определение отношения $M = E_\perp^2(2\omega)/E_\parallel^2(2\omega)$, где $E_\perp^2(2\omega)$, $E_\parallel^2(2\omega)$ — интенсивности удвоенной частоты при поляризации внешнего поля перпендикулярно и параллельно плоскости падения. Отношение M позволяет определить вклад первого и второго членов равенства (1) в величину эффекта и может быть измерено с требуемой точностью.

Схема экспериментальной установки подобна описанной в [1]. В луче лазера выделялась та часть, в которой распределение энергии по сечению являлось с достаточной точностью равномерным. Для определения абсолютной величины $E^2(2\omega)$ фотумножитель градуировался по светоизмерительной лампе с известной цветовой температурой. Измерения сделаны на серебре с частотой 99,99%

Результаты измерений с учетом потерь в оптической системе установки приведены в таблице 1.

Таблица 1

λ (мкм)	$E_\parallel^2(2\omega)/E^4(\omega)$ (ед. CGSE)	$M_{\text{эксп}}$	$M'_{\text{теор}}$	$M''_{\text{теор}}$
694	$(11 \pm 5) \cdot 10^{-18}$	$0,07 \pm 0,013$	0,054	0,031
1060	$(3 \pm 2) \cdot 10^{-18}$	$0,33 \pm 0,06$	0,033	0,028

Здесь $M'_{\text{теор}}$, $M''_{\text{теор}}$ вычислены по формулам работы [5] для двух значений плазменной частоты: $\omega_p = 0,58 \cdot 10^{16} \text{ сек}^{-1}$ — экспериментального значения [6], $\omega_p' = 1,35 \cdot 10^{16} \text{ сек}^{-1}$ — значения, принятого в [5]. Отличие $M_{\text{эксп}}$ на $\lambda = 694 \text{ мкм}$ от $M''_{\text{теор}}$ и хорошее совпадение с $M'_{\text{теор}}$ свидетельствует о недостаточности учета только свободных электронов при вычислении эффекта удвоения. Большое превышение $M_{\text{эксп}}$ на $\lambda = 1060 \text{ мкм}$

над $M'_{\text{теор}}$ и $M''_{\text{теор}}$ позволяет сделать вывод о существенном вкладе связанных электронов в нелинейный эффект.

Близкие значения $E^2(2\omega)/E^4(\omega)$ и M приведены в недавно опубликованной работе [7] (измерения $E^2(2\omega)/E^4(\omega)$ выполнены в [7] методом сравнения).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Brown, R. E. Parks, A. M. Sleepere, Phys. Rev. Lett., 14, 1029 (1965).
2. F. Brown, R. E. Parks, Phys. Rev. Lett., 16, 507 (1966).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
4. S. S. Jha, Phys. Rev., 140, A 2020 (1965).
5. S. S. Jha, Phys. Rev. Lett., 15, 412 (1965).
6. H. Ehrenreich, H. R. Philipp, Phys. Rev., 128, 1622 (1962).
7. N. Bloembergen, R. K. Chang, C. H. Lee, Phys. Rev. Lett., 16, 986 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 ноября 1966 г.

УДК 621.378.001

ОБ УЧЕТЕ ПОГЛОЩЕНИЯ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ОКУ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ.

Н. Д. Миловский

В работе [1] исследовался стационарный режим регенеративного оптического квантового усилителя бегущей волны. При этом не учитывалось линейное постоянное затухание в среде за счет потерь в основном веществе. Однако существует целый ряд работ [2–8], авторы которых подчеркивают важную роль линейного затухания в процессах распространения электромагнитных волн в активных нелинейных средах. Основной задачей настоящей заметки является обоснование целесообразности предположения, сделанного в [1]. Для этого необходимо обобщить формулы [1] с учетом линейного поглощения.

Подставляя в интегралы уравнений (31) и (31а)* граничные условия (13), можно получить аналог трансцендентного уравнения (17)

$$\frac{1}{1 + r^2 G - 2r \sqrt{G} \cos \varphi} = \frac{m(0)}{\hbar^2 (1-r^2)} = \frac{(R-1) [(\bar{G}_0/G)^{1/R} - 1]}{\hbar^2 (1-r^2) [G(\bar{G}_0/G)^{1/R} - 1]}, \quad (1)$$

где $\bar{G}_0 = G_0 \exp(-2\gamma L) = \exp\{[(Re a) k - 2\gamma]L\}$ — коэффициент усиления слоя для бесконечно слабых входных сигналов. Естественно, что (1) переходит в (17), если параметр линейного затухания γ устремить к нулю. Поведение семейства кривых, отвечающих правому равенству в (1), качественно подобно поведению соответствующих кривых, представленных на рис. 3. В области слабых входных сигналов и количественных различия оказываются ничтожно малыми (при равенстве соответствующих параметров и замене G_0 на \bar{G}_0).

Влияние линейного затухания становится существенным лишь при достаточно сильных полях. Так, например, при

$$m > m_{kp} = R - 1$$

система становится пассивной: $G < 1$ и

$$K_y^2 = 1 + \frac{(G-1)(R-1) [(\bar{G}_0/G)^{1/R} - 1]}{\hbar^2 [G(\bar{G}_0/G)^{1/R} - 1]} < 1.$$

Для рубина при комнатной температуре ($T_2 \approx 10^{-11}$ сек, $T_1 \approx 10^{-3}$ сек, $R \approx 10$, $\mu \approx 10^{-20}$ эрг/ед. CGSE) это соответствует довольно значительным напряженностям полей $E_{kp} \approx 10^3$ в·см⁻¹.

* Все дальнейшие ссылки на формулы и рисунки, пронумерованные арабскими цифрами, относятся к работе [1].

Поскольку рассматриваемые усилители, по-видимому, найдут наиболее широкое применение в дальней (космической) связи, где $E \ll E_{kp}$, то учет линейного затухания в стационарной теории такого усилителя несущественен.

В заключение автор выражает признательность В. И. Таланову за ценные замечания и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 6, 1095 (1964).
2. А. М. Самсон, ЖПС, 1, № 1, 41 (1964).
3. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, ДАН СССР, 165, № 1, 58 (1965).
4. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, Оптика и спектр, 18, № 6, 1042 (1965).
5. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, ЖЭТФ, 50, № 1, 23 (1966).
6. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 5, 899 (1965).
7. J. R. Wittke, P. I. Wörter, J. Appl. Phys., 35, 1668 (1964).
8. F. Aggescchi, R. Bonifacio, IEEE J., QE-1, № 4, 169 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 июня 1966 г.

УДК 621.378.33

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИЗМЕНЕНИЯ ДОБРОТНОСТИ ЛИНИИ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

B. O. Шахов

Известно, что при использовании в молекулярном генераторе (МГ) цилиндрического резонатора с типом колебаний E_{010} добротность спектральной линии в основном определяется средним временем пролета молекул через резонатор, которое, в свою очередь, целиком зависит от длины резонатора и средней скорости молекул в пучке. Так как средняя скорость молекул в пучке определяется температурой источника пучка [1], то, изменяя последнюю, можно осуществлять вариации средней скорости молекул в пучке, а значит и добротности линий*.

Для проверки возможности изменения добротности линии за счет изменения температуры источника пучка было осуществлено экспериментальное исследование, основанное на том обстоятельстве, что частота колебаний МГ в первом приближении связана с добротностью линии следующим соотношением [2].

$$f = f_L \left(1 - \frac{f_L - f_0}{f_L} \frac{Q_0}{Q_L} \right), \quad (1)$$

где f_L , Q_L — частота и добротность спектральной линии, f_0 , Q_0 — собственная частота и добротность резонатора. Из приведенного выражения следует, что при расстройке резонатора относительно частоты спектральной линии об изменении добротности линии можно судить по изменению частоты колебаний МГ при изменении температуры источника пучка.

На рис. 1 приведены графики зависимости изменений частоты колебаний МГ от величины изменения температуры источника пучка, снятые для нескольких настроек резонатора

$$\xi = (f_0 - f_L) \frac{Q_0}{Q_L} G(u, \gamma_0).$$

При этом в МГ использовался резонатор с сетками на торцах, а в качестве формирователя пучка — медная канальная решетка. Аналогичные зависимости получены и при использовании резонатора с предельными волноводами.

Из приведенных графиков следует, что, если температура источника пучка изменяется в пределах $T^{\circ} - T^{\circ} + 20^{\circ}$, то при расстройках резонатора относительно

* Следует отметить, что в работе [2] указывалось на необходимость термостатирования источника пучка.

спектральной линии частота колебаний МГ изменяется по линейному закону. При расстройке МГ от спектральной линии на величину $\sim \pm 1000$ гц по частоте сигнала крутизна наклона прямой составляет $\sim \pm 3,3$ гц·град $^{-1}$. При расстройке ~ -1800 гц крутизна соответственно увеличивается во столько же раз и составляет $\sim -5,8$ гц·град $^{-1}$. При настройке резонатора на частоту спектральной линии (модуляцией интенсивности пучка) изменений частоты колебаний МГ не обнаружено при изменении температуры источника пучка на 15°.

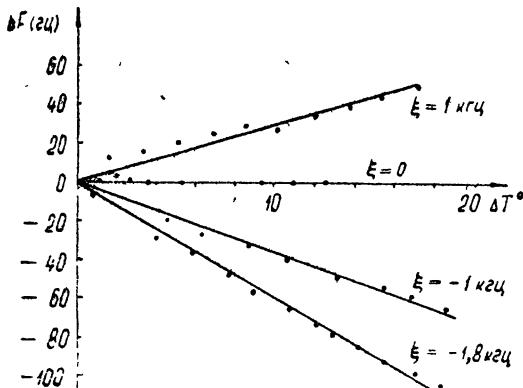


Рис. 1.

Результаты эксперимента соответствуют ожидаемым, следующим из изменения добротности спектральной линии при данных изменениях температуры источника пучка. Проведенные исследования позволяют также предположить, что рассмотренный способ изменения добротности линии, по-видимому, можно использовать для настройки МГ на частоту спектральной линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
2. Н. Г. Басов, Диссертация, ФИАН, 1956.

Поступила в редакцию
30 июня 1966 г.

УДК 530.145 537.12

О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОДИПОЛЬНОМ И КВАЗИОРБИТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ МОМЕНТАХ ЭЛЕКТРОНА ПРОВОДИМОСТИ

B. H. Генкин, P. M. Меднис

В настоящей заметке предлагается учитывать при описании динамики электрона проводимости тот факт, что он может обладать собственными электродипольным и магнитным (помимо спинового) моментами. При феноменологическом подходе зависимость моментов от импульса (далее магнитный момент называется квазиорбитальным) так же, как и закон дисперсии [1] электрона проводимости, следует находить из эксперимента. Целесообразность введения собственных моментов может быть проиллюстрирована на примере расчета проводимости блоховского электрона при учете всех степеней поля. Методика расчета (см [2]) позволяет корректно (с оценкой вклада отбрасываемых членов) перейти к однозонному приближению. При этом оказывается, что выражение для тока действительно определяется не только законом дисперсии электрона, но и зависит также от величин, имеющих смысл при феноменологической трактовке собственного электродипольного $d(p)$ и квазиорбитального $\mu(p)$ магнитного моментов электрона проводимости, имеющих смысл при феноменологической трактовке. Выражение для $d(p)$ имеет вид $d(p) = e\Omega_{nn}(p)$, где $\Omega_{nn}(p)$ — диагональный матричный элемент оператора Ω [1] по блоховским функциям $u_{np}(r) \exp(ikr)$.

$$\Omega_{nn'}(\mathbf{p}) = i\hbar \int u_{np}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} u_{n'p}(\mathbf{r}) dv,$$

ячейка

(1)

а z -ая проекция собственного квазиорбитального магнитного момента (остальные получаются циклической перестановкой x, y, z) есть

$$\mu^z(\mathbf{p}) = \mu_{nn'}^z(\mathbf{p}) = \beta_0 \sum_{n'} [P_{nn'}^y(\mathbf{p}) \Omega_{n'n}^x(\mathbf{p}) - P_{nn'}^x(\mathbf{p}) \Omega_{n'n}^y(\mathbf{p})],$$
(2)

где

$$P_{nn'}(\mathbf{p}) = m \frac{\partial \epsilon_n(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \delta_{nn'} - \frac{m}{\hbar} [\epsilon_n(\mathbf{p}) - \epsilon_{n'}(\mathbf{p})] \Omega_{nn'}(\mathbf{p}).$$

Здесь e, m — заряд и масса электрона, β_0 — магнетон Бора, $\epsilon_n(\mathbf{p})$ — собственные значения невозмущенного гамильтониана. По порядку величины $d(\mathbf{p})$ и $\mu(\mathbf{p})$ соответственно равны одному дебаю и одному магнетону Бора. Если определить гамильтониан для квазиклассического описания динамики электрона в зоне в виде

$$\tilde{H} = \tilde{\epsilon} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \varphi;$$
(3)

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p}) - d(\mathbf{p}) E - \mu(\mathbf{p}) H$$
(4)

(A и φ — векторный и скалярный потенциалы однородного электромагнитного поля, E и H — электрическое и магнитное поля, P — канонический импульс, сопряженный r , $P = eA/c = p$ — кинематический импульс), а ток

$$I = \dot{a} + e\dot{r},$$
(5)

то выражение для тока, следующее из (5) и уравнений Гамильтона с (3) — (4), совпадают с результатом расчета тока в одноэлектронном приближении. Первый член в (5) представляет собой ток поляризации, второй — дрейфовый ток. Последние два слагаемых в (4) имеют смысл энергий собственных моментов в электрическом и магнитном полях.

Отметим ряд особенностей динамики электрона проводимости, связанных с введением собственных моментов. Из уравнений Гамильтона с (3) — (4) получаем

$$\dot{\mathbf{p}} = eE + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \mathbf{p}}.$$
(6)

В случае электрического поля появляется, например, возможность наблюдения эффекта удвоения электромагнитного излучения на электронах проводимости в средах, не имеющих центра инверсии*. Заметим, что возможность удвоения принципиально связана с $d(\mathbf{p})$, поскольку дрейфовый ток в силу четности функции $\epsilon(\mathbf{p})$ не содержит компонент, пропорциональных четной степени поля.

В случае постоянного и однородного магнитного поля из (6) следует, что $\epsilon(\mathbf{p})$ уже не является интегралом движения. Сохраняющимися величинами будут в этом случае $\epsilon(\mathbf{p}) = \mu(\mathbf{p})H = \text{const}$, $P_H = \text{const}$. Это, в свою очередь, приводит к нелинейной зависимости частоты циклотронного резонанса от магнитного поля. Что касается намагниченности образца, то в слабых полях

$$M = \frac{1}{4(\pi\hbar)^3} \int \mu(\mathbf{p}) (\mu(\mathbf{p})H) \frac{dS_F}{|\nabla_p \epsilon(\mathbf{p})|},$$
(7)

где dS_F — элемент площади на поверхности Ферми, т. е. основной вклад в намагниченность дают электроны на поверхности Ферми. Отметим, что в достаточно сильных полях (когда оказывается квантовый характер движения электрона в магнитном поле) $\mu(\mathbf{p})$ дает согласно (6) вклад в магнитную восприимчивость Ландау — Пайерлса. Более подробное обсуждение затронутых здесь, а также некоторых других вопросов будет изложено в другой работе.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить В. М. Файна за внимание к работе и помочь и В. Л. Гинзбурга за обсуждение результатов.

* Нелинейные эффекты на электронах проводимости (утроение) наблюдалась в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН, 69, 419 (1959).
2. В. Н. Генкин, П. М. Меднис, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 192 (1967).
3. W. Schneider, K. Seeger, Appl. Phys. Lett., 8, 133 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
25 ноября 1966 г.

УДК 621.372.061.1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЛУКТУАЦИИ В ВЫРОЖДЕННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

E. E. Спангенберг, B. C. Эткин

Амплитуда вынужденных колебаний в вырожденных параметрических системах зависит не только от амплитуды внешней периодической силы, но и от сдвига фазы между внешней силой и периодической модуляцией параметров (так называемая фазовая чувствительность) [1]. В том случае, когда внешняя сила представляет собой узкополосный гауссовский случайный процесс, этот эффект приводит к изменению функции распределения огибающей (амплитуды) колебаний на выходе системы. Вместо распределения Рэлея для амплитуды у такого процесса

$$P(V) = V e^{-V^2/2\sigma^2} \exp(-V^2/2\sigma^2) \quad (1)$$

получается одностороннее гауссовское распределение

$$P(V) = (\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-V^2/4\sigma^2). \quad (2)$$

Указанное изменение функции распределения мы наблюдали экспериментально, используя несколько измененную методику наблюдения электрических флюктуаций, описанную в [2, 3]. Идея методики заключается в считывании закона распределения с экрана электронно-лучевой трубки, на которой осуществляется временная развертка случайного процесса огибающей $V(t)$. Если $V(t)$ — стационарный случайный процесс, то средняя яркость свечения экрана в каждой точке этой развертки пропорциональна плотности распределения вероятности для величины V (см. (2)).

Автором работы [3] был предложен простой способ, позволяющий считывать закон распределения с экрана электронно-лучевой трубы. Для этого параллельно основной трубке, на которую подается исследуемое случайное напряжение, включается вторая, связанная с первой общим регулятором смещения луча.

На вертикальные отклоняющие пластины 2-ой трубы подается напряжение, пропорциональное току в цепи фотосопротивления ФСК-1, которое с помощью сложной диафрагмы, уменьшающей аппартиру, считывает яркость свечения экрана первой электронно-лучевой трубы. Таким образом, при перемещении развертки случайного процесса по вертикали на экране первой трубы мимо диафрагмы фотосопротивления электронный луч второй трубы вычерчивает на ее экране в известном масштабе искаженный закон распределения плотности вероятностей, который при этом фотографируется. Процесс снятия законов распределения был нами автоматизирован — смещение лучей обеих трубок производилось общим пилообразным напряжением с периодом 0,1—1 мс, запуск которого был синхронизирован с моментом открытия объектива фотоаппарата. Длительность всего процесса определялась при этом инерционностью фотосопротивления.

Получение функций распределения огибающей колебаний на выходе вырожденной и невырожденной параметрических систем производилось на установке, представленной на схеме (см. рис. 1).

На рис. 2а, б, в приведены полученные экспериментальные кривые для функций распределения при последовательно нарастающем коэффициенте усиления в системе (а—5 дБ, б—10 дБ, в—20 дБ), из которых отчетливо вырисовывается монотонное увеличение различия в законах распределения амплитуд для вырожденной и невырожденной параметрических систем. На каждой фотографии верхняя кривая соответствует невырожденному, нижняя — вырожденному случаю.

Так как в эксперименте функции распределения для обоих случаев снимались при одинаковых средних значениях тока на выходе линейного детектора, на рис. 3 приве-

дены для сравнения кривые $(V - \bar{V})$, построенные по формулам (1) и (2) на выходах вырожденной системы + линейный детектор и невырожденной системы + линейный детектор при одинаковых средних значениях в обоих случаях.

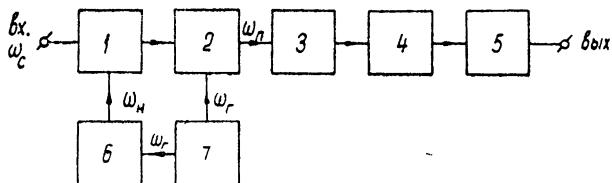


Рис. 1. Блок-схема установки:

1—параметрическая система (ω_c), 2—смеситель, 3—усилитель промежуточной частоты (ω_n), 4—линейный детектор, 5—усилитель низкой частоты, 6—блок формирования накачки (ω_H), 7—гетеродин (ω_r). Частота накачки $\omega_H = 2\omega_c = 2\omega_r - 2\omega_n$.

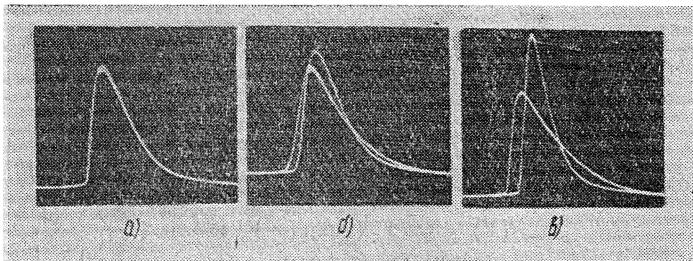


Рис. 2.

Как видно из сравнения экспериментальных и теоретической кривой для функций распределения, между ними имеется хорошее качественное согласие. Некоторые различия (экспериментальные осциллограммы кривых, например, начинаются не из одной точки) видимо связаны с неточной линейностью детектора для всех величин V , определенной нелинейностью передачи и наличия порогов чувствительности при преобразовании «чувствительность осциллографа — ток в цепи фотосопротивления».

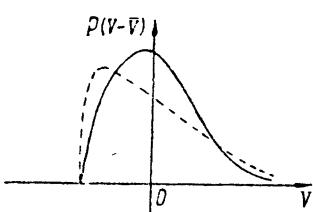


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Эткин, Е М Гершензон, Параметрические системы на полупроводниковых диодах, гл. 20, изд. Сов. радио, М., 1964.
2. В. Н. Иванов, Вестник МГУ, № 6, 47 (1956).
3. И. Г. Акопян, ПТЭ, № 1, 137 (1959)

УДК 621.378.9:77

ПОЛУЧЕНИЕ ГОЛОГРАММ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Л. Д. Бахрах, Г. А. Соболев, Г. Х. Фридман

Как известно [1, 2], голограммы трехмерных объектов могут быть получены при использовании однодомового ОКГ и высокоразрешающих фотоматериалов. Ниже описаны эксперименты, показавшие возможность получения таких голограмм на серийном ОКГ-11 при некоторой его доработке и с помощью отечественных фотоматериалов.

Схема установки для получения голограмм приведена на рис. 1. Излучение от когерентного источника света 1 (ОКГ-11, $\lambda = 6328 \text{ \AA}$) падало на полупрозрачное зеркало 2, пропускавшее на объект около 90% светового потока. В канале объекта и опорного сигнала находились зеркала 4, микрообъективы 5 с точечными отверстиями 6. В канале опорного сигнала находился также регулируемый нейтральный ослабитель 3, с помощью которого устанавливался необходимый уровень опорного сигнала. Свет по каналу объекта падал на объект 7 и, рассеиваясь от него, попадал на фотопластинку 8. По каналу опорного сигнала свет падал непосредственно на фотопластинку. При необходимости оптические пути по каналам объекта и опорного сигнала могли быть уравнены. В некоторых экспериментах после точечного отверстия помещались коллимационные объективы для получения плоского фронта волн.

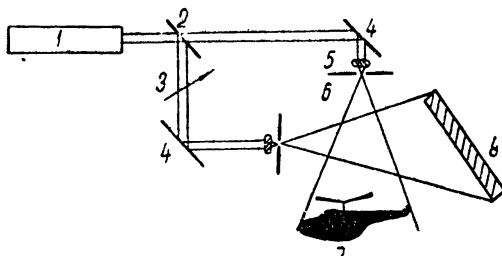


Рис. 1. Схема установки для получения голограмм.

При проведении эксперимента были приняты меры для исключения вибраций.

Однодомовый режим работы ОКГ достигался за счет применения специального резонатора и контролировался по электронному спектроанализатору.

Вследствие малой мощности ОКГ (менее 1 мвт) и использования малочувствительных высокоразрешающих фотоматериалов экспозиции при съемке достаточно больших объектов варьировались от нескольких минут до 1 часа.

Для получения голограмм применялись фотоматериалы (пластинки $9 \times 12 \text{ см}$) с разрешением более $1000 \text{ лин.} \cdot \text{мм}^{-1}$, проявление велось в проявителе УП-2.

При реконструкции изображения использовались генераторы света.

Изготавливались также фазовые голограммы и их металлизированные копии. В некоторых случаях для повышения качества изображения амплитудные голограммы помещались в иммерсионную жидкость.

На рис. 2 приведена фотография мнимого изображения, полученного при помощи голограммы. В качестве объектов использовались пластмассовые модели, протяженность сцены в глубину составляла 30 см, в ширину — 20 см.

Поскольку при съемке фокусировка осуществлялась на предмет (вертолет), находящийся на некотором расстоянии от голограммы, ближние предметы (машина и бульдозер) расфокусированы.

На ряде голограмм яркостные соотношения в изображении сложных объектов, состоящих из элементов, деполяризующих рассеянное излучение в различной степени, отличаются от яркостных соотношений в объектах, освещаемых ОКГ. Это объясняется тем, что



Рис. 2. Фотография мнимого изображения трехмерных объектов.

на голограмме регистрируется только компонента рассеянной волны, имеющая поляризацию опорной волны. Этот эффект позволяет осуществить анализ поляризации рассеянного света.

Была исследована возможность использования части отфильтрованного света от объекта для создания когерентного опорного пучка. Фильтрация осуществлялась путем пропускания света от объекта через объектив, направляющий свет от объекта на тончесное отверстие. Отфильтрованный опорный пучок и свет от объекта падали на фотопластинку под углом. Такая схема имеет некоторые преимущества при голограммировании удаленных объектов, так как позволяет сохранить когерентность без введения оптической линии задержки [3], а также не требует установки зеркала около объекта. Однако при этом иногда требуется ослаблять сигнальный пучок путем введения нейтрального светофильтра. Альтернативой вероятно было бы усиление опорного пучка, без ухудшения его фазовой стабильности.

В заключение считаем своим долгом выразить глубокую благодарность И. Р. Протас за предоставленные фотоматериалы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. W. Stroke, *An introduction to coherent optics and holography*, Academic press, New York and London, 1966.
2. K. S. Pennington, *Microwaves*, **10**, 35 (1965).
3. A. S. Hoffman, J. G. Dodge, D. G. Mooney, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1559 (1965).

Поступила в редакцию
23 мая 1966 г.