

## СОДЕРЖАНИЕ

Неймарк Ю. И. О существовании и грубости инвариантных многообразий точечных отображений . . . . .	311
Неймарк Ю. И. Интегральные многообразия дифференциальных уравнений . . . . .	321
Гаврилов Н. К. О дифференциальной системе с малым параметром при производной, вырождающейся в консервативную . . . . .	335
Григоренко В. П. Об одном случае счетного числа периодических движений у релейной системы . . . . .	340
Цой К. М., Шиманов С. Н. О периодических колебаниях квазилинейных автономных систем с запаздыванием . . . . .	345
Гудзенко Л. И., Чертопруд В. Е. Число степеней свободы в обратной задаче теории колебаний I . . . . .	353
Гудзенко Л. И., Чертопруд В. Е. Число степеней свободы в обратной задаче теории колебаний. II . . . . .	363
Алексеев А. С., Минчук Ф. Ф. Применение метода точечных преобразований к решению задач оптимального управления в кусочно-линейных динамических системах . . . . .	372
Черепанов А. И. Об одном методе анализа устойчивости релейно-импульсных систем регулирования . . . . .	383
Фейгин М. И. О несимметричных периодических режимах в симметричной системе с ударными взаимодействиями . . . . .	389
Леонов Н. Н. К теории простейших экстремальных систем автоколебательного типа . . . . .	393
Леонов Н. Н. О простейших экстремальных системах релейного (автоколебательного) типа . . . . .	405
Баталова З. С. К численному исследованию динамических систем с помощью ЭВМ . . . . .	414
Корнейчук В. И., Романкевич А. М., Ситников Л. С., Утяков Л. Л. О реализации функций $K$ -значной логики . . . . .	423
Долотов В. Г. Частота отсчетов при равномерной дискретизации . . . . .	429
Стрелков С. П., Харламов А. А. Электромеханическая модель колебаний крыла с элероном в потоке воздуха . . . . .	433
Бебихов В. А. Об одном способе моделирования постоянного запаздывания на типовом аналоговом устройстве . . . . .	441
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Быков В. В. Устойчивость системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром и запаздыванием . . . . .	447
Шалфеев В. Д. Об астатической системе частотно-фазовой автоподстройки . . . . .	449

УДК 517.9

## О СУЩЕСТВОВАНИИ И ГРУБОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ю. И. Неймарк

В работе доказываются теоремы о существовании и продолжаемости по параметру инвариантной поверхности, зависящего от параметра точечного отображения.

Множество  $J$  называется инвариантным по отношению к точечному отображению  $T$ , если образ и прообраз каждой точки множества  $J$  принадлежит множеству  $J$ . Инвариантное множество, состоящее из одной точки, — это неподвижная точка преобразования. Давно известно, что через седловую неподвижную точку проходит две поверхности  $S^+$  и  $S^-$ , одна из которых  $S^+$  состоит из точек, асимптотически приближающихся к неподвижной точке  $J$  при неоднократном применении преобразования  $T$ , а другая  $S^-$  — из точек, асимптотически приближающихся к неподвижной точке  $J$  при последовательных применениях преобразования  $T^{-1}$ . Случай, когда все корни характеристического уравнения неподвижной точки  $J$  по модулю меньше или больше единицы, можно рассматривать как совпадение  $S^+$  или соответственно  $S^-$  со всей окрестностью точки  $J$ . В аналитическом случае инвариантные поверхности\*\*  $S^+$  и  $S^-$  рассматривались во многих работах, среди которых в первую очередь следует указать работу Латесса [1]. Еще в 1901 г. Адамар [2] для преобразования плоскости в себя доказал, что в неалгебраическом случае существуют инвариантные кривые  $S^+$  и  $S^-$ , проходящие через неподвижную точку. Обобщение теоремы Адамара на  $n$ -мерный случай и доказательство гладкости инвариантных поверхностей  $S^+$  и  $S^-$  было получено сравнительно недавно Д. В. Аносовым [3].

В настоящей работе устанавливается ряд общих теорем (теоремы 1, 2, 3) о существовании, единственности, зависимости от параметра и гладкости инвариантных поверхностей точечного преобразования. Затем эти теоремы используются для доказательства утверждения (теоремы 4 и 5), которые можно рассматривать как обобщение описанного выше факта.

\* Настоящая работа и примыкающая к ней следующая представляют собою полное изложение доклада автора на международном математическом конгрессе, М., 1966.

\*\* Следует отметить, что если рассматривать поверхности  $S^+$  и  $S^-$  только в окрестности неподвижной точки  $J$ , то они не являются инвариантными в смысле данного выше определения. Поверхность  $S^+$  содержит лишь образ, а поверхность  $S^-$  — прообраз любой своей точки. Все же в дальнейшем такие поверхности будут называться инвариантными, отмечаясь знаками + и соответственно —.

# 1. О СУЩЕСТВОВАНИИ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И ПРОДОЛЖЕНИИ ПО ПАРАМЕТРУ ИНВАРИАНТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть в области  $G = G_u \times G_v$ , прямого произведения линейных нормированных пространств\*  $U$  и  $V$  определено отображение  $T$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = T(u, v), \quad (1)$$

такое, что для любых точек  $(u_1, v_1)$  и  $(u_2, v_2)$  области  $G$ , для которых  $\|u_1 - u_2\| < \delta$  с некоторым  $\delta > 0$ , выполняются условия

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\| &\leq q \|v_1 - v_2\| + \alpha \|u_1 - u_2\|, \\ \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| &\geq p \|u_1 - u_2\| - \beta \|v_1 - v_2\|, \\ \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| &\leq \gamma \|v_1 - v_2\| \quad \text{при } u_1 = u_2 \\ &(q, \alpha, \beta, p, \gamma \geq 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть  $\Sigma$  — множество поверхностей вида

$$v = \varphi(u) \quad (u \in G_u, v \in G_v), \quad (3)$$

лежащих в  $G$  и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\| \leq K \|u_1 - u_2\| \quad (4)$$

при любых  $u_1$  и  $u_2$  из области  $G_u$ , для которых  $\|u_1 - u_2\| < \delta$ . Точечное отображение  $T$  порождает некоторое отображение поверхностей множества  $\Sigma$ . Допустим, что поверхности множества  $\Sigma$  после преобразования  $T$  также представимы в виде (3), но вообще говоря, не удовлетворяют условию (4), где соответствующие функции  $\varphi$  определены в  $G_u$ , тогда имеет место следующая лемма.

*Лемма 1.* Отображение  $T$  при выполнении условий

$$q + \frac{\alpha}{K} + \beta K < p, \quad q + \gamma K < 1 \quad (5)$$

преобразует множество поверхностей  $\Sigma$  в себя и в метрике

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{u \in G_u} \|\varphi_1(u) - \varphi_2(u)\| \quad (6)$$

является сжимающим.

*Доказательство.* Пусть отображение  $T$  поверхность  $\sigma(v = \varphi(u))$  из  $\Sigma$  преобразует в поверхность  $\bar{\sigma}(v = \varphi(u))$  и пусть точке  $(u, v)$  поверхности  $\sigma$  соответствует точка  $(\bar{u}, \bar{v}) = T(u, v)$  поверхности  $\bar{\sigma}$ . Согласно (2) и (5), для поверхности  $\bar{\sigma}$  выполняется условие (4)

$$\frac{\|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\|}{\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|} \leq \frac{q \|v_1 - v_2\| + \alpha \|u_1 - u_2\|}{p \|u_1 - u_2\| - \beta \|v_1 - v_2\|} \leq \frac{qK + \alpha}{p - \beta K} < K, \quad (7)$$

и поэтому поверхность  $\sigma \subset \Sigma$  преобразуется в поверхность  $\bar{\sigma} \subset \Sigma$ .

Докажем сжимаемость рассматриваемого отображения поверхностей  $\Sigma$  в себя. Пусть поверхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  преобразуются в поверхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , так что точкам  $(u_1, v_1)$  и  $(u_2 = u_1, v_2)$  поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответствуют точки  $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$  и  $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$  поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. В силу последнего неравенства (2)

$$\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| \leq \gamma \|v_1 - v_2\|. \quad (8)$$

\* Здесь и в дальнейшем знаком  $\times$  будем обозначать топологическое произведение.

Пусть значению  $u = \bar{u}_1$  на поверхности  $\bar{\sigma}_1$  отвечает точка  $(\bar{u}_1, \bar{v}_2)$ . В силу неравенств (7) и (8)

$$\|\bar{v}'_2 - \bar{v}_2\| < K \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| \leq K\gamma \|v_1 - v_2\|. \quad (9)$$

Согласно определению (6) расстояния между поверхностями  $\varphi \in \Sigma$

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \text{Sup} \|\bar{v}_1 - \bar{v}'_2\|$$

и из неравенств (2) и (9), имея в виду, что  $u_1 = u_2$ , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_1 - \bar{v}'_2\| &\leq \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\| + \|\bar{v}'_2 - \bar{v}_2\| < q \|v_1 - v_2\| + \\ &+ \gamma K \|v_1 - v_2\| \leq (q + \gamma K) \rho(\sigma_1, \sigma_2), \end{aligned}$$

из которого следует сжимаемость, с коэффициентом сжатия, не превосходящим  $q + \gamma K$ , рассматриваемого преобразования поверхностей  $\Sigma$  в себя.

Пусть область  $G_v$  замкнутая и пространство  $V$  полное, тогда в силу сжимаемости отображения  $T$  в множестве поверхностей  $\Sigma$  имеется единственная инвариантная по отношению к преобразованию  $T$  поверхность  $\varphi^*$ . Таким образом, приходим к теореме.

*Теорема 1.* При выполнении условий леммы 1 и при полноте пространства  $V$  в  $\Sigma$  имеется единственная инвариантная по отношению к отображению  $T$  поверхность  $v = \varphi^*(u)$ .

Теорема 1 может быть обобщена на случай, когда по части переменных  $v$  имеет место сжатие, а по остальным — растяжение. Именно, пусть в пространстве, являющемся прямым произведением трех линейных нормированных пространств  $U$ ,  $V$  и  $W$ , в области  $G = G_u \times G_v \times G_w$  определено взаимнооднозначное отображение  $T$ , такое, что для любых двух точек  $G(u_1, v_1, w_1)$  и  $(u_2, v_2, w_2)$  выполняются следующие условия (10) и (11)\*:

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\| &\leq q \|v_1 - v_2\| + \alpha (\|u_1 - u_2\| + \|w_1 - w_2\|), \\ \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| + \|\bar{w}_1 - \bar{w}_2\| &\geq p (\|u_1 - u_2\| + \|w_1 - w_2\|) - \beta \|v_1 - v_2\|, \\ \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| + \|\bar{w}_1 - \bar{w}_2\| &\leq \gamma \|v_1 - v_2\| \quad (u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2) \end{aligned} \quad (10)$$

и условия

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\| &\leq q \|\bar{w}_1 - \bar{w}_2\| + \alpha (\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| + \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\|), \\ \|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\| &\geq p (\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| + \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\|) - \beta \|\bar{w}_1 - \bar{w}_2\|, \\ \|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\| &\leq \gamma \|\bar{w}_1 - \bar{w}_2\| \quad (\bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим теперь множество поверхностей  $\Sigma'$ , лежащих в  $G$

$$v = f(u, w), \quad (12)$$

для которых имеет место неравенство

$$\|f(u_2, w_2) - f(u_1, w_1)\| \leq K_1 (\|u_2 - u_1\| + \|w_2 - w_1\|), \quad (13)$$

и допустим, как и ранее, что отображение  $T$  каждую такую поверхность преобразует в поверхность, представимую в виде (12). Пусть постоянные  $q$ ,  $p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $K_1$  удовлетворяют условиям (5), тогда, согласно лемме 1

\* Заметим, что достаточно выполнения этих условий в случае (10) при  $\|u_1 - u_2\| + \|w_1 - w_2\| < \delta$  и в случае (11) при  $\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| + \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\| < \delta$ , где  $\delta$  — любое положительное число.

и теореме 1, если только совокупность переменных  $u$  и  $w$  рассматривать как переменную  $u$ , следует существование в области  $G$  единственной инвариантной поверхности вида (12).

Аналогичным образом из условий (11), в которых постоянные  $q$ ,  $p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и некоторая постоянная  $K_2$  удовлетворяют неравенствам (5), следует существование единственной инвариантной по отношению к отображению  $T^{-1}$  поверхности

$$w = g(u, v), \quad (14)$$

для которой

$$\|g(u_2, v_2) - g(u_1, v_1)\| \leq K_2(\|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\|). \quad (15)$$

Пересечение инвариантных поверхностей  $v = f(u, w)$  и  $w = g(u, v)$  является инвариантным множеством. Если допустить, что произведение величин  $K_1$  и  $K_2$ , входящих в формулы (13) и (15), меньше единицы, то пересечение инвариантных поверхностей можно представить в виде

$$v = \varphi(u), \quad w = \psi(u), \quad (16)$$

где функции  $\varphi$  и соответственно  $\psi$  удовлетворяют условию Липшица с константами  $\frac{K_1(1+K_2)}{1-K_1K_2}$  и  $\frac{K_2(1+K_1)}{1-K_1K_2}$ .

Действительно, из соотношений

$$v = f(u, w), \quad w = g(u, v)$$

следуют соотношения

$$v = f(u, g(u, v)), \quad w = g(u, f(u, w)),$$

которые в силу сделанного предположения  $K_1K_2 < 1$  можно разрешить относительно  $v$  и  $w$  и представить в виде (16). Выполнение условия Липшица следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\| &\leq K_1(\|u_1 - u_2\| + \|g(u_1, v_1) - g(u_2, v_2)\|) \leq \\ &\leq K_1(1 + K_2)\|u_1 - u_2\| + K_1K_2\|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, можно сформулировать теорему.

*Теорема 1а.* Если точечное отображение в окрестности подпространства  $v = w = 0$  допускает оценки вида (10) и (11) с выполнением неравенств (5) для входящих в них постоянных при некоторых  $K > 0$ , то отображение  $T$  имеет две инвариантные поверхности  $S^-$  и  $S^+$  видов (12) и (14) соответственно, пересекающиеся по инвариантной поверхности  $J$  вида (16).

Допустим теперь, что точечное отображение  $T$  зависит от параметра  $\mu$ . Имеет место следующее утверждение, непосредственно следующее из леммы 1 и последующей леммы 2.

*Теорема 2.* Пусть точечное отображение  $T(\mu)$ , зависящее от параметра  $\mu$ , при  $0 < \mu \leq \bar{\mu}$  удовлетворяет условиям леммы 1;

при  $\mu=0$  поверхность  $v=0$  является инвариантной и в ее  $\omega$ -окрестности, принадлежащей  $G$ , для любых  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , принадлежащих интервалу  $[0, \bar{\mu}]$ , имеет место оценка

$$\|T(\mu_2)(u, v) - T(\mu_1)(u, v)\| < \varepsilon |\mu_2 - \mu_1|, \quad (17)$$

тогда для значений  $\mu$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 < \mu < \min \left\{ \frac{\omega}{\varepsilon} (1 - q - \gamma K), \bar{\mu} \right\}, \quad (18)$$

в  $\omega$ -окрестности поверхности  $v = 0$  существует единственная инвариантная по отношению к отображению  $T(\mu)$  поверхность

$$v = \varphi(u, \mu), \quad (19)$$

которая непрерывно зависит от параметра\*  $\mu$  и совпадает с поверхностью  $v = 0$  при  $\mu = 0$ .

*Лемма 2.* Пусть точечные отображения  $T$  и  $\tilde{T}$ , определенные в  $\omega$ -окрестности точки  $x^*$  полного линейного нормированного пространства  $G'$  для любых точек  $x$  и  $y$ , принадлежащих  $\omega$ -окрестности точки  $x^*$ , удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &< q \|x - y\|, \quad \|\tilde{T}x - \tilde{T}y\| < q \|x - y\|, \\ \|\tilde{T}x - Tx\| &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $q < 1$ , и пусть  $x^*$  является неподвижной точкой отображения  $T$ ; тогда при

$$\varepsilon < \omega(1 - q)$$

отображение  $\tilde{T}$  преобразует  $\omega$ -окрестность точки  $x^*$  в себя и имеет в ней единственную неподвижную точку, отстоящую от  $x^*$  не более, чем на  $\varepsilon(1 - q)^{-1}$ .

Действительно, из

$$\|y - x^*\| < \omega$$

в силу (20) следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}y - x^*\| &= \|\tilde{T}y - Tx^*\| < \varepsilon + q \|y - x^*\| < \varepsilon + \omega q < \\ &< \omega(1 - q) + q\omega = \omega. \end{aligned}$$

Поэтому отображение  $\tilde{T}$  преобразует  $\omega$ -окрестность точки  $x^*$  в себя и согласно принципу сжатых отображений имеет в  $\omega$ -окрестности  $x^*$  неподвижную точку  $y^*$ . Из неравенства

$$\|x^* - y^*\| = \|Tx^* - \tilde{T}y^*\| < \varepsilon + q \|x^* - y^*\|$$

вытекает, что

$$\|x^* - y^*\| < \varepsilon(1 - q)^{-1},$$

и лемма 2 полностью доказана.

Непосредственно ясно, что теорема 2, вытекающая из сжимаемости отображения поверхностей множества  $\Sigma$  и леммы 2, непосредственно обобщается на случай, рассматриваемый в теореме 1а, поскольку инвариантные поверхности  $S^+$  и  $S^-$ , согласно теореме 2, будут зависеть от  $\mu$  непрерывно.

*Теорема 2а.* Пусть зависящее от параметра  $\mu$  отображение  $T(\mu)$  удовлетворяет при  $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$  условиям теоремы 1а и условию (17), где вместо точки  $(u, v)$  имеется в виду точка  $(u, v, w)$ , тогда при достаточно малых  $\mu$  инвариантные поверхности  $S^+$  и  $S^-$  и их пересечение  $J$  зависят от  $\mu$  непрерывно.

\* Точнее имеет место

$\|\varphi(u, \mu_1) - \varphi(u, \mu_2)\| < \varepsilon |\mu_1 - \mu_2| (1 - q - \gamma K).$

## 2. О ГЛАДКОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

При соответствующих условиях теоремы 1 и 2 гарантируют существование инвариантных поверхностей, представимых в виде (3) и (19), где функция  $\varphi$  удовлетворяет условию Липшица по аргументу  $u$ . Естественно возникает вопрос, будет ли эта поверхность гладкой при достаточной гладкости отображения  $T$ . Ответ на этот вопрос дает нижеследующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть отображение  $T$  удовлетворяет условиям теоремы 1 и в окрестности любой внутренней точки  $(u, v)$  области  $G$  отображение  $T$  таково, что

$$\begin{aligned}\Delta\bar{v} &= A(u, v)\Delta u + B(u, v)\Delta v + \alpha(u, v, \Delta u, \Delta v), \\ \Delta\bar{u} &= C(u, v)\Delta u + D(u, v)\Delta v + \beta(u, v, \Delta u, \Delta v),\end{aligned}\quad (21)$$

где  $A, B, C$  и  $D$  — линейные ограниченные операторы с нормой, не большей  $L$ , и при некотором  $M > 0$

$$\|\alpha\| + \|\beta\| < M(\|\Delta u\|^2 + \|\Delta v\|^2); \quad (22)$$

тогда при удовлетворении условий теоремы 1 с достаточно малым  $K$  и  $q < p^2$  инвариантная поверхность  $v = \varphi(u)$  точечного отображения  $T$  гладкая, т. е. в окрестности любой точки  $u \in G_u$

$$\Delta v = \Delta\varphi(u) = K(u)\Delta u + \omega(u, \Delta u), \quad (23)$$

где  $K(u)$  — линейный оператор с нормой, не превосходящей  $K$ , и

$$\|\omega(u, \Delta u)\| \leq N\|\Delta u\|^2. \quad (24)$$

Доказательство опирается на следующую лемму.

**Лемма 3.** Пусть  $v = \varphi_n(u)$  — сходящаяся последовательность отображений области  $G_u$  пространства  $U$  в область  $G_v$  полного пространства  $V$  и пусть каждое отображение  $v = \varphi_n(u)$  этой последовательности таково, что для любых двух точек  $u_1$  и  $u_2$  области  $G_u$  с  $\|u_1 - u_2\| < \delta$

$$\varphi(u_2) - \varphi(u_1) = L(u_1)(u_2 - u_1) + \Omega(u_1, u_2), \quad (25)$$

где  $L(u_1)$  — линейный оператор с нормой, не превосходящей  $K$ , и

$$\|\Omega(u_1, u_2)\| < N\|u_1 - u_2\|^2;$$

тогда предельное отображение  $v = \varphi(u)$  последовательности отображений  $v = \varphi_n(u)$  также представимо в виде (25).

Прежде, чем перейти к доказательству леммы 3, заметим, что представление в виде (25) единственно и что линейный оператор зависит от  $u$  непрерывно. Действительно, при наличии двух различных представлений имело бы место неравенство

$$\|(L(u_1) - \bar{L}(u_1))(u_2 - u_1)\| < 2N\|u_1 - u_2\|^2,$$

из которого в силу произвольности  $u_1$  и  $u_2$  следует совпадение линейных операторов  $L$  и  $\bar{L}$ . Непрерывная зависимость линейного оператора  $L(u)$  от  $u$  следует из приводимых ниже очевидных вычислений. Согласно (25),

$$v_2 - v_1 = \bar{L}(u_1)(u_2 - u_1) + \Omega(u_1, u_2),$$

$$v_1 - v_2 = L(u_2)(u_1 - u_2) + \Omega(u_2, u_1),$$

сткуда

$$(L(u_1) - L(u_2))(u_2 - u_1) + \Omega(u_1, u_2) + \Omega(u_2, u_1) = 0$$

и, следовательно,

$$\| L(u_1) - L(u_2) \| < 2N \| u_1 - u_2 \|.$$

Перейдем к доказательству леммы 3. Пусть

$$\sup_{u \in G_u} \| \varphi_n(u) - \varphi_m(u) \| < \epsilon,$$

тогда

$$2\epsilon > \| \Delta\varphi_n - \Delta\varphi_m \| > \| (L_n(u) - L_m(u)) \Delta u \| - 2N \| \Delta u \|^2.$$

Последнее неравенство справедливо при всех  $\Delta u$ , по норме меньших  $\delta$ . Пусть  $\| \Delta u \| < (\epsilon/2N)^{1/3}$  и  $\epsilon$  настолько мало, что  $(\epsilon/2N)^{1/3} < \delta$ ; тогда из этого неравенства следует, что

$$\| L_n(u) - L_m(u) \| < \frac{2\epsilon}{(\epsilon/2N)^{1/3}} + 2N \left( \frac{\epsilon}{2N} \right)^{2/3}.$$

Таким образом, из сходимости отображений  $v = \varphi_n(u)$  следует сходимость соответствующих им в представлении (25) линейных операторов  $L_n(u)$ . В силу полноты пространства  $V$  существует предельный для последовательности операторов  $L_n(u)$  линейный ограниченный оператор  $L(u)$ . Для завершения доказательства осталось убедиться, что предельное отображение  $v = \varphi(u)$  представимо в виде

$$\Delta\varphi(u) = L(u) \Delta u + \Omega(u, \Delta u),$$

где

$$\| \Omega(u, \Delta u) \| \leq N \| \Delta u \|^2$$

при  $\| \Delta u \| < \delta$ . Из неравенств

$$\begin{aligned} \| \Delta\varphi - \Delta\varphi_n \| &< \alpha_n, & \| \Delta\varphi_n - L_n \Delta u \| &\leq N \| \Delta u \|^2, \\ \| (L_n - L) \Delta u \| &< \beta_n, \end{aligned}$$

где  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  неограниченно убывают при  $n \rightarrow \infty$ , следует, что

$$\| \Delta\varphi - L \Delta u \| < \alpha_n + \beta_n + N \| \Delta u \|^2$$

или в силу произвольной малости  $\alpha_n + \beta_n$

$$\| \Delta\varphi - L \Delta u \| \leq N \| \Delta u \|^2,$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь множество  $S$  поверхностей  $v = \varphi(u)$ , расположенных в  $G$ , для которых в каждой точке  $u \in G_u$  имеет место равенство (23), в котором линейный оператор  $K(u)$  имеет норму, не большую  $K$ . Пусть отображение  $T$  поверхность  $v = \varphi(u)$  из этого множества преобразует в поверхность  $\bar{v} = \bar{\varphi}(\bar{u})$ . Согласно (21) и (23),

$$\begin{aligned} \Delta \bar{v} &= A(u, v) \Delta u + B(u, v) \Delta v + \alpha(u, v, \Delta u, \Delta v) = \\ &= [A(u, v) + B(u, v) K(u)] \Delta u + \bar{\alpha}(u, v, \Delta u, \Delta v), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\Delta \bar{u} = [C(u, v) + D(u, v) K(u)] \Delta u + \bar{\beta}(u, v, \Delta u, \Delta v),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(u, v, \Delta u, \Delta v) &= B(u, v) \omega(u, \Delta u) + \\ &+ \alpha(u, v, \Delta u, K(u) \Delta u + \omega(u, \Delta u)), \\ \bar{\beta}(u, v, \Delta u, \Delta v) &= D(u, v) \omega(u, \Delta u) + \\ &+ \beta(u, v, \Delta u, K(u) \Delta u + \omega(u, \Delta u)). \end{aligned}$$

При  $\|\Delta u\| < \delta$ , учитывая, что, согласно первому условию (2),  $\|B(u, v)\| < q$ , находим, что

$$\begin{aligned}\|\bar{\alpha}\| &< [qN + M(1 + K^2 + 2KN\delta + N^2\delta^2)] \|\Delta u\|^2 \equiv F \|\Delta u\|^2, \\ \|\bar{\beta}\| &< [LN + M(1 + K^2 + 2KN\delta + N^2\delta^2)] \|\Delta u\|^2 \equiv G \|\Delta u\|^2.\end{aligned}\quad (27)$$

Линейный оператор  $C$ , согласно второму из условий (2), обратим и  $\|C^{-1}(u, v)\| < 1/p$ , поэтому второе из соотношений (26) можно записать в виде

$$\Delta \bar{u} = C(E + C^{-1}DK) \Delta u + \bar{\beta}. \quad (28)$$

При  $KL/p < 1$  оператор  $E + C^{-1}DK$  обратим и из (28) следует, что

$$\Delta u = (E + C^{-1}DK)^{-1}C^{-1}\Delta \bar{u} - (E + C^{-1}DK)^{-1}C^{-1}\bar{\beta}(u, v, \Delta u), \quad (29)$$

где

$$\|(E + C^{-1}DK)^{-1}\| < \frac{KL}{p - KL} + 1 \equiv 1 + \lambda. \quad (30)$$

Из соотношения (29) с учетом (27) и (30) непосредственно находим следующую оценку:

$$\|\Delta u\| < \frac{1 + \lambda}{p} \|\Delta \bar{u}\| + \frac{1 + \lambda}{p} G \|\Delta u\|^2$$

или при  $\delta < p(1 + \lambda)^{-1}G^{-1}$

$$\|\Delta u\| < \frac{1 + \lambda}{p} \left(1 - \frac{1 + \lambda}{p} G \delta\right)^{-1} \|\Delta \bar{u}\| = \frac{\nu}{p} \|\Delta \bar{u}\|. \quad (31)$$

Подставляя теперь выражение  $\Delta u$ , даваемое формулой (29), в первое соотношение (26), найдем, что

$$\begin{aligned}\Delta \bar{v} &= (A + BK) [(E + C^{-1}DK)^{-1}C^{-1}\Delta u - \\ &- (E + C^{-1}DK)C^{-1}\bar{\beta}(u, v, \Delta u)] + \bar{\alpha}(u, v, \Delta u).\end{aligned}$$

Из этого последнего соотношения и оценок (30), (31) и того, что в силу (2)  $\|B(u, v)\| < q$  и  $\|A(u, v)\| < \alpha$ , находим, что

$$\begin{aligned}\|(A + BK)(E + C^{-1}DK)^{-1}C^{-1}\| &< (\alpha + qK) \frac{1 + \lambda}{p}, \\ \|(A + BK)(E + C^{-1}DK)^{-1}C^{-1}\bar{\beta} + \bar{\alpha}\| &< \\ &< \left[ \frac{\alpha + qK}{p} (1 + \lambda) G + F \right] \frac{\nu^2}{p^2} \|\Delta \bar{u}\|^2.\end{aligned}\quad (32)$$

Согласно полученным выше оценкам (32), преобразованная поверхность  $v = \varphi(u)$  будет принадлежать, как и исходная поверхность  $v = \varphi(u)$ , множеству  $S$ , если выполнены условия

$$\begin{aligned}(\alpha + qK) \frac{1 + \lambda}{p} &< K, \\ \left[ (\alpha + qK) \frac{1 + \lambda}{p} G + F \right] \frac{\nu^2}{p^2} &< N,\end{aligned}$$

которые, в силу того, что  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\nu \rightarrow 1$  при  $K \rightarrow 0$  и  $\delta \rightarrow 0$ , можно удовлетворить за счет выбора достаточно малыми  $K$ ,  $\alpha$  и  $\delta$  и достаточно

большим  $N$ . Если соотношения (2) выполняются при так выбранных значениях  $K$  и  $\alpha$ , то, согласно лемме 1, последовательные преобразования поверхности  $v = \varphi(u)$  из  $S$  сходятся и все принадлежат  $S$ . Согласно лемме 3, предельная поверхность также принадлежит множеству  $S$ , что и доказывает теорему 3.

### 3. ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ОДНОГО ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь взаимнооднозначное непрерывно зависящее от параметра  $\mu$  точечное отображение  $T(\mu)$  пространства  $U \times V \times W$  вида

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \Theta(u) + f(u, v, w, \mu), \\ \bar{v} &= A(u)v + g(u, v, w, \mu), \\ \bar{w} &= B(u)w + h(u, v, w, \mu),\end{aligned}\tag{33}$$

где линейные операторы  $A(u)$  и  $B(u)$  и функция  $\Theta(u)$  удовлетворяют условиям

$$1 > \sup_{u \in U} \|A(u)\| < \underline{p} < \frac{\|\Delta\Theta(u)\|}{\|\Delta u\|} < \bar{p} < \inf_{u \in U} \|B(u)\| > 1,\tag{34}$$

а функции  $f(u, v, w, \mu)$ ,  $g(u, v, w, \mu)$  и  $h(u, v, w, \mu)$  обращаются в ноль при  $\mu = 0$  на многообразии  $J(v = w = 0)$  и в некоторой окрестности  $J$  удовлетворяют условиям вида

$$\begin{aligned}\|\Delta f(u, v, w, \mu)\| &< M(|\mu| + \|v\| + \|w\|) (\|\Delta u\| + \|\Delta v\| + \\ &\quad + \|\Delta w\| + |\Delta\mu|), \\ \|\Delta g\| + \|\Delta h\| &< M(|\mu| + \|v\| + \|w\|) (\|\Delta u\| + \|\Delta v\| + \\ &\quad + \|\Delta w\| + |\Delta\mu|).\end{aligned}\tag{35}$$

Линейные нормированные пространства  $V$  и  $W$  предполагаются полными. Имея в виду приложения, многообразие  $J$  может быть точкой, прямой, окружностью, цилиндром, тором и т. д.

При  $f = g = h = 0$  отображение (33) имеет инвариантные поверхности  $S^+(w = 0)$  и  $S^-(v = 0)$ , пересекающиеся по инвариантному многообразию  $J(v = w = 0)$ . В общем случае имеет место следующая теорема.

*Теорема 4.* Существуют  $\delta > 0$  и  $\underline{\mu} > 0$  такие, что в  $\delta$ -окрестности многообразия  $J(v = w = 0)$  при  $|\mu| < \underline{\mu}$  точечное отображение (33) имеет единственное инвариантное многообразие  $J(\mu)$ , непрерывно зависящее от параметра  $\mu$  и представимое в виде

$$v = \varphi(u, \mu), \quad w = \psi(u, \mu),$$

через которое проходят две непрерывно зависящие от параметра  $\mu$  инвариантные поверхности  $S^+(w = \chi(u, v, \mu))$  и  $S^-(v = \nu(u, w, \mu))$ . Многообразие  $J(\mu)$  и поверхности  $S^+(\mu)$  и  $S^-(\mu)$  являются гладкими, если точечное отображение (33) удовлетворяет условиям теоремы 3. Инвариантная поверхность  $S^+(\mu)$  ( $S^-(\mu)$ ) состоит из точек, асимптотически приближающихся к  $J(\mu)$  при неограниченном последовательном применении отображения  $T(\mu)$  ( $T^{-1}(\mu)$ ). Любая точка  $(u, v, w)$  из  $\delta$ -окрестности  $J(\mu)$ , не принадлежащая  $S^+(\mu)$  ( $S^-(\mu)$ ), при неограниченном применении отображения  $T(\mu)$  ( $T^{-1}(\mu)$ ) покидает  $\delta$ -окрестность  $J(\mu)$ .

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теорем 1, 2 и 3, так как для точечного отображения (33) возможны оценки (10) и (11), причем входящие в них постоянные  $q, p, \alpha, \beta, \gamma$  для любого достаточно малого  $K$  при достаточно малых  $\delta$  и  $\mu$  удовлетворяют условиям (5) и, кроме того, имеет место (17). При этом в оценках (10) вместо  $\|\Delta u\| + \|\Delta \bar{w}\|$  следует оценивать  $\|\Delta u\| + R \|\Delta \bar{w}\|$  и аналогично в (11) вместо  $\|\delta u\| + \|\delta v\| - \|\Delta u\| + R \|\Delta v\|$ , где  $R$  — некоторое достаточно большое положительное число.

Рассмотрим теперь частный вид отображения (33):

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \Theta(u) + f(u, v, \mu), \\ \bar{v} &= A(u)v + g(u, v, \mu), \end{aligned} \quad (36)$$

для которого выполняется левая половина условий (34) и функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют условиям (35) лишь в некоторой окрестности области  $G_u$  пространства  $U$ . Ранее предполагалось, что  $G_u$  совпадает со всем пространством  $U$ , и поэтому любой точке  $(u, v, w)$  соответствовали образ  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  и прообраз  $(u, v, w)$ , которые принадлежали окрестности  $J$ , если только  $\bar{v}, \bar{w}$  и соответственно  $v, w$  достаточно малы по норме.

Для применения теоремы 1 к рассматриваемому отображению (36) достаточно потребовать, чтобы компонента  $\bar{u}$  прообраза  $(u, v)$  любой точки  $(u, v)$  достаточно малой окрестности  $G_u \{V_\delta(\|v\| < \delta) \times G_u\}$  принадлежала  $G_u$ . Это последнее требование заведомо будет иметь место, если при  $\mu = 0$  всякая точка  $(u, 0)$ , где  $u \in G_u$ , имеет прообраз  $(u, v)$ , лежащий в области  $G_u$ , которая вместе с некоторой окрестностью принадлежит  $G_u$ .

**Теорема 5.** При сформулированных выше предположениях отображение (36) имеет при достаточно малых  $\mu$  в достаточно малой окрестности  $(V_\delta(\|v\| < \delta) \times G_u)$  единственную инвариантную поверхность  $S^-(\mu)$  вида  $v = \varphi(u, \mu)$ . Эта поверхность непрерывно зависит от  $\mu$  и при  $\mu = 0$  совпадает с поверхностью  $v = 0$ . Если отображение (36) гладкое (удовлетворяет условию (21) теоремы 3), то инвариантная поверхность  $S^-$  тоже гладкая.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Lattes, Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariantes par une transformation, Annali di Mathematica pura ed applicata, 13, ser. 3, Milano, 1907.
2. J. Hadamard, Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles, Bulletin de la Société Mathématique de France, Comptes—Rendus de séances, 1901.
3. Д. В. Аносов, Научн. докл. высш. шк.—Физико-математические науки, № 1. 3 (1959).

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
15 октября 1966 г.

#### ON THE EXISTANCE AND STRUCTURAL STABILITY OF THE INVARIANT MANIFOLDS FOR THE POINT-TO-POINT MAPPINGS

Yoo. I. Nyemark

The point-to-point mapping depending on the parameter is considered in this paper. The theorems about the existence of the invariant surface and about the possibility to extrapolate it are proved.

УДК 517.9

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. И. Неймарк

На основании результатов предыдущей работы автора устанавливаются условия существования и грубости интегральных многообразий дифференциальных уравнений.

В предшествующей работе [1] были установлены теоремы о существовании, единственности, зависимости от параметра и гладкости инвариантных поверхностей точечного преобразования.

В настоящей работе эти теоремы используются для изучения аналогичного круга вопросов для интегральных многообразий дифференциальных уравнений\*. После общих теоремы 1 и леммы 1 устанавливаются условия существования и грубости тороидальной интегральной поверхности (теоремы 2 и 3), доказывается сохраняемость интегральных многообразий автономных систем при произвольных малых неавтономных добавках (теорема 4). Доказывается существование поверхности медленных движений в фазовом пространстве системы, описываемой дифференциальными уравнениями с малым параметром при производных или квазилинейных уравнениях (теоремы 5 и 6). Рассматривается вопрос о рождении интегральной тороидальной поверхности от периодического движения (теорема 7).

### 1. ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральным многообразиям дифференциальных уравнений отвечают инвариантные многообразия у соответствующим образом построенных точечных отображений. Отметим два случая; первый, когда соответствующее точечное отображение  $T$  есть отображение секущей поверхности в себя, и второй, когда точечное отображение соответствует сдвигу фазовых точек вдоль фазовых траекторий на время  $\tau$ . В первом случае пересечение интегрального многообразия с секущей поверхностью представляет собою инвариантное многообразие точечного отображения  $T$ , а совокупность фазовых траекторий, выходящих из точек инвариантного многообразия, образует интегральное многообразие. В случае отображения  $T_\tau$ , соответствующего сдвигу на время  $\tau$ , инвариантное многообразие  $J$  точечного отображения может и не быть интегральным многообразием. Однако если  $J$  инвариантно по отношению к  $T_\tau$  при всех значениях  $-\tau^* < \tau < \tau^*$ , то  $J$  — интегральное многообразие, так как вместе со своей точкой  $x$  содержит и фазовую кривую, описываемую точкой  $T_\tau x$  при изменении  $\tau$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Аналогично, если  $J$  инва-

\* Обзор полученных ранее результатов, касающихся интегральных многообразий дифференциальных уравнений, содержится в работе Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [2].

риантно по отношению к  $T_\tau$  при  $0 \leq \tau < \tau^*$  ( $-\tau^* < \tau \leq 0$ ), то  $J$  содержит вместе с точкой  $x$  и выходящую из  $x$  положительную (отрицательную) фазовую полураекторию.

После этих предварительных замечаний рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \Theta(u) + f(u, v, w, \mu), \\ \dot{v} &= A(u) v + g(u, v, w, \mu), \\ \dot{w} &= B(u) w + h(u, v, w, \mu).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Предполагается, что  $\Theta(u)$ ,  $A(u)$ ,  $B(u)$ ,  $f$ ,  $g$  и  $h$  дважды непрерывно дифференцируемы и ограничены в окрестности многообразия  $J(v=w=0)$  и при  $\mu=0$  и  $v=w=0$

$$f = \frac{\partial f}{\partial u} = g = \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial w} = h = \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial w} = 0. \quad (1.2)$$

При малых  $\tau$  в силу сделанных предположений точечное отображение  $T_\tau$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u + \dot{u} \tau + \frac{\ddot{u}}{2} \tau^2 = u + [\Theta(u) + f] \tau + \dots, \\ \bar{v} &= v + [A(u) v + g] \tau + \dots, \\ \bar{w} &= w + [B(u) w + h] \tau + \dots,\end{aligned}\quad (1.3)$$

где многоточия означают члены, нормы которых не превосходят  $M\tau^2$ . Аналогично вариации связываются соотношениями

$$\begin{aligned}\delta \bar{u} &= \delta u + \delta \dot{u} \tau + \frac{\ddot{\delta u}}{2} \tau^2 = [E + \Theta_u(u) \tau] \delta u + \dots, \\ \delta \bar{v} &= [E + \tau A(u)] \delta v + \dots, \\ \delta \bar{w} &= [E + \tau B(u)] \delta w + \dots,\end{aligned}\quad (1.4)$$

в которых многоточиям соответствуют члены в первом соотношении, по норме не превосходящие

$$N|\tau| \{(|\tau| + |\mu| + \|v\| + \|w\|) (\|\delta u\| + \|\delta v\| + \|\delta w\|)\}$$

и в остальных не превосходящие

$$N|\tau| (|\tau| + |\mu| + \|v\| + \|w\|) (\|\delta u\| + \|\delta v\| + \|\delta w\|).$$

Если теперь допустить, что при достаточно малых  $\tau > 0$  и всех  $u \in U$

$$\begin{aligned}\|E + \tau A(u)\| &< 1 - a\tau, & \|E - \tau A(u)\| &> 1 + a\tau, \\ \|E + \tau B(u)\| &> 1 + a\tau, & \|E - \tau B(u)\| &< 1 - a\tau\end{aligned}\quad (1.5)$$

и при всех малых  $\tau > 0$  и  $u \in U$

$$\|E + \Theta_u(u) \tau\| > 1 - b\tau, \quad \|E - \Theta_u(u) \tau\| > 1 - b\tau, \quad (1.6)$$

где  $0 < b < a$ , то для отображения  $T_\tau$  при достаточно малых  $\tau > 0$  имеют место утверждения теоремы 4 работы [1]. Таким образом, имеет место теорема.

*Теорема 1.* Пусть правые части дифференциальных уравнений (1.1) дважды непрерывно-дифференцируемы и ограничены вместе с про-

изводными второго порядка в окрестности многообразия  $J(v=w=0)$ . Пусть еще они непрерывно зависят от параметра  $\mu$  и удовлетворяют условиям (1.2), (1.5), (1.6). Тогда при достаточно малых  $\mu$  в некоторой окрестности многообразия  $J(v=w=0)$  имеется два непрерывно зависящих от  $\mu$  интегральных многообразия  $S^+(\mu)$  и  $S^-(\mu)$ , пересекающихся по инвариантному многообразию  $J(\mu)$ . При  $\mu=0$   $J(\mu)$  переходит в  $J(v=w=0)$ . При  $2b < a$  поверхности  $S^+$  и  $S^-$  гладкие.

Действительно, из соотношений (1.4), (1.5) и (1.6) непосредственно следует оценка вида (10) работы [1] с соблюдением неравенств (5) для входящих в них постоянных. Для проверки выполнимости условий (11) следует лишь заметить, что  $T_\tau^{-1} = T_{-\tau}$ .

Теорема 1 устанавливает условия существования у системы дифференциальных уравнений, заданной в прямом произведении пространств  $U$ ,  $V$  и  $W$ , интегрального многообразия  $J(v=\varphi(u, \mu), w=\psi(u, \mu))$ , близкого к подпространству  $U$ . На интегральном многообразии  $J$  изменение  $u$  подчиняется следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{u} = \Theta(u) + f(u, \varphi(u, \mu), \psi(u, \mu), \mu), \quad (1.7)$$

которое в свою очередь может иметь некоторое интегральное многообразие  $J_u$ . Интегральное многообразие  $J_u$  уравнений (1.7) является одновременно и интегральным многообразием исходной системы (1.1). Пусть интегральное многообразие  $J_u$  в  $J$  является пересечением двух интегральных поверхностей  $S_u^+$  и  $S_u^-$ , а через интегральное многообразие  $J$  в пространстве  $U \times V \times W^*$  проходят интегральные поверхности  $S^+$  и  $S^-$ . Тогда в пространстве  $U \times V \times W$  интегральное многообразие  $J_u$  есть пересечение двух интегральных многообразий  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ , где  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  обозначают интегральные многообразия, составленные из фазовых траекторий  $S^+$  и соответственно  $S^-$ , проходящих через  $S_u^+$  и соответственно  $S_u^-$ .

Для изучения интегральных многообразий дифференциального уравнения (1.7) полезна следующая лемма.

*Лемма 1.* Пусть  $v = f(u, w)$  и  $w = g(u, v)$  — интегральные поверхности  $S^-$  и  $S^+$  уравнений (1.1), проходящих через  $J(v=\varphi(u), w=\psi(u))$ , и пусть они удовлетворяют условиям

$$\|\delta f\| < K(\|\delta u\| + \|\delta w\|), \quad \|\delta g\| < K(\|\delta u\| + \|\delta v\|); \quad (1.8)$$

тогда при  $K < 1$ , согласно работе [1], интегральная поверхность  $J(v=\varphi(u), w=\psi(u))$  удовлетворяет условиям

$$\|\delta \varphi\| < \frac{K}{1-K} \|\delta u\|, \quad \|\delta \psi\| < \frac{K}{1-K} \|\delta u\|. \quad (1.9)$$

Пусть кроме того точечное отображение  $T_\tau$  допускает оценки вида

$$\begin{aligned} \|\delta \bar{v}\| &< q \|\delta v\| + \nu \|\delta u\| + \alpha \|\delta w\|, \\ \|\delta \bar{w}\| &< q \|\delta \bar{w}\| + \nu \|\delta \bar{u}\| + \alpha \|\delta \bar{w}\|, \\ \|\delta \bar{u}\| &> p \|\delta u\| - \beta (\|\delta v\| + \|\delta w\|), \\ \|\delta u\| &> p \|\delta \bar{u}\| - \beta (\|\delta \bar{v}\| + \|\delta \bar{w}\|), \end{aligned} \quad (1.10)$$

\* Здесь и в дальнейшем знаком  $\times$  будем обозначать топологическое произведение.

где

$$p - q - \alpha - 2\beta \frac{K}{1 - K} > 0;$$

тогда имеет место оценка

$$L = \text{Sup} \left( \frac{\|\delta\phi\|}{\|\delta u\|}, \frac{\|\delta\psi\|}{\|\delta u\|} \right) < \frac{\nu}{p - q - \alpha - 2\beta \frac{K}{1 - K}}. \quad (1.11)$$

Для любой точки  $(u, v, w) \in J$  ее образ  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  и прообраз  $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$  также принадлежит  $J$ . Согласно (1.10) и (1.11), для вариаций на поверхности  $J$

$$\begin{aligned} \|\delta v\| &< [(q + \alpha)L + \nu] \|\delta \underline{u}\| < \frac{(q + \alpha)L + \nu}{p - 2\beta L} \|\delta u\|, \\ \|\delta w\| &< [(q + \alpha)L + \nu] \|\delta \bar{u}\| < \frac{(q + \alpha)L + \nu}{p - 2\beta L} \|\delta u\|. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для произвольно малого  $\epsilon > 0$  можно найти точку  $(u, v, w) \in J$ , для которой либо  $\frac{\|\delta v\|}{\|\delta u\|} > L - \epsilon$ , либо  $\frac{\|\delta w\|}{\|\delta u\|} > L - \epsilon$ . В любом из этих случаев из (1.12) следует, что

$$L - \epsilon < \frac{(q + \alpha)L + \nu}{p - 2\beta L}$$

или в силу произвольной малости  $\epsilon$

$$L < \frac{(q + \alpha)L + \nu}{p - 2\beta L}. \quad (1.13)$$

Из этой оценки (1.13), если учесть, что, согласно (1.9),  $L < \frac{K}{1 - K}$ , следует требуемая оценка (1.11).

Заметим, что лемма 1, сформулированная и доказанная применительно к системе дифференциальных уравнений (1.1), имеет место для точечного отображения вида (33) работы [1]. Доказательство при этом не претерпевает изменений. Сохраняются и общие соображения о связи инвариантных поверхностей в  $J$  с инвариантными поверхностями в исходном пространстве  $U \times V \times W$ .

В качестве конкретных приложений только что установленных общих фактов рассмотрим вопросы о грубости и устойчивости двумерной тороидальной поверхности в трехмерном пространстве, грубости многомерного седлового тора, грубости инвариантных многообразий автономных систем по отношению к произвольным малым неавтономным добавкам, выясним условия существования поверхностей медленных движений и найдем условия рождения тора от периодического движения.

## 2. О ГРУБОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОРОИДАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ\*

Допустим, что система автономных уравнений третьего порядка, зависящая от параметра  $\mu$ , при  $\mu = 0$  допускает гладкую тороидальную инвариантную поверхность. Если взять интегральный тор за координат-

\* Вопрос о сохранности интегрального тороидального многообразия в разных аспектах рассматривался, в частности, в работах [3-6].

ную поверхность  $\rho=0$ , а две другие координаты  $\varphi$  и  $\psi$  выбрать так, чтобы на поверхности тора они совпадали с общепринятыми координатами на торе, то в окрестности тора  $J$  уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= a(\varphi, \psi) + f(\varphi, \psi, \rho, \mu), \\ \dot{\psi} &= b(\varphi, \psi) + g(\varphi, \psi, \rho, \mu), \\ \dot{\rho} &= c(\varphi, \psi) v + h(\varphi, \psi, \rho, \mu).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Допустим, что при  $\mu=0$  на торе имеет место квазипериодическая обмотка и существует замена переменных  $\varphi$  и  $\psi$ , приводящая уравнения (2.1) к виду (для новых переменных сохранены старые обозначения)

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \alpha + f(\varphi, \psi, \rho, \mu), \\ \dot{\psi} &= \beta + g(\varphi, \psi, \rho, \mu), \\ \dot{v} &= \gamma(\varphi, \psi) v + h(\varphi, \psi, \rho, \mu).\end{aligned}\quad (2.2)$$

При этом при  $\mu=0$  на поверхности тора  $f=g=h=\frac{\partial h}{\partial v}=0$ , функции  $f, g, h, \gamma$  — периодические (можно принять периода  $2\pi$ ) по аргументам  $\varphi$  и  $\psi$ .

Заменим в уравнениях (2.2) переменное  $\rho$  на  $v$ , положив

$$\rho = e^{Z(\varphi, \psi)} v,$$

где  $Z(\varphi, \psi)$  — подлежащая определению периодическая функция переменных  $\varphi$  и  $\psi$  периода  $2\pi$ . После этой замены уравнения (2.1) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \alpha + f(\varphi, \psi, v, \mu), \\ \dot{\psi} &= \beta + g(\varphi, \psi, v, \mu), \\ \dot{v} &= \left[ \gamma(\varphi, \psi) - \alpha \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial Z}{\partial \psi} \right] v + h(\varphi, \psi, v, \mu).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Допустим, что в разложении в двойной ряд Фурье

$$\gamma(\varphi, \psi) = \sigma + \sum_{s, l=-m}^{s, l=m} a_{sl} e^{i(s\varphi+l\psi)} + \varepsilon_m(\varphi, \psi),$$

$\sigma \neq 0$  и  $m$  выбрано настолько большим, что  $|\varepsilon_m(\varphi, \psi)| < \left| \frac{\sigma}{2} \right|$ . Найдем теперь  $Z(\varphi, \psi)$  из уравнения

$$\sum_{s, l=-m}^{s, l=m} a_{sl} e^{i(s\varphi+l\psi)} - \alpha \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial Z}{\partial \psi} = 0, \quad (2.4)$$

которое заведомо будет иметь решение

$$Z = -i \sum_{s, l=-m}^{s, l=m} \frac{a_{sl}}{\alpha s + \beta l} e^{i(s\varphi+l\psi)}, \quad (2.5)$$

если только ни при каких целых числах  $s$  и  $l$ , по модулю не превосходящих  $m$ , не имеет места равенство

$$\alpha s + \beta l = 0.$$

Это последнее требование имеет место в силу сделанного предположения о квазипериодичности обмотки тора при  $\mu = 0$ .

Уравнения (2.3) после подстановки значения  $Z(\varphi, \psi)$ , определяемого формулой (2.5), удовлетворяют, очевидно, условиям теоремы 1. (За переменные  $u$  берутся  $\varphi$  и  $\psi$ , переменные  $w$  отсутствуют.) В силу этого можно сформулировать теорему.

*Теорема 2.* Тороидальная интегральная поверхность с квазипериодической обмоткой груба по отношению к произвольным малым вместе с первыми производными возмущениями, если

$$\sigma = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi, \psi) d\varphi d\psi \neq 0. \quad (2.6)$$

При  $\sigma < 0$  интегральное тороидальное многообразие асимптотически устойчиво, при  $\sigma > 0$  — неустойчиво.

Заметим, что знак величины  $\sigma$  может быть найден из уравнения (2.1) следующим образом. Пусть  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\varphi, \psi)$ ,  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\varphi, \psi)$  — замена переменных, преобразующая уравнение (2.1) в (2.2), тогда ( $\mu = 0$ ,  $v = 0$ )

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varphi} a(\varphi, \psi) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \psi} b(\varphi, \psi) = \alpha,$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varphi} a(\varphi, \psi) + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi} b(\varphi, \psi) = \beta.$$

Из этих соотношений находим, что

$$\Delta a(\varphi, \psi) = \alpha \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi} - \beta \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \psi}, \quad \Delta b(\varphi, \psi) = -\alpha \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varphi} + \beta \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varphi},$$

где  $\Delta$  — якобиан преобразования переменных, равный

$$\Delta = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \psi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varphi}.$$

Из последних же соотношений следует уравнение

$$\frac{\partial a \Delta}{\partial \varphi} + \frac{\partial b \Delta}{\partial \psi} = 0, \quad (2.7)$$

означающее, что якобиан  $\Delta$  является интегрирующим множителем дифференциальных уравнений на торе. Если этот интегрирующий множитель  $\Delta$  известен, то знак величины  $\sigma$ , от которого зависит устойчивость или неустойчивость интегрального тора, совпадает со знаком интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} c(\varphi, \psi) |\Delta| d\varphi d\psi. \quad (2.8)$$

Полученное выше утверждение о грубоости двумерного тора легко обобщить, опираясь на теорему 1, на  $m$ -мерный тор в  $n$ -мерном пространстве, если только предположить, что при соответствующем выборе переменных  $u_1, u_2, \dots, u_m$  на торе и  $v_{m+1}, \dots, v_{m+p}; w_{m+p+1}, \dots, w_n$ , дополняющих их, уравнения в окрестности тора могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \omega + \nu f(u, v, w, \mu), \\ \dot{v} &= Av + \nu g(u, v, w, \mu), \\ \dot{w} &= Bw + \nu h(u, v, w, \mu),\end{aligned}\tag{2.9}$$

где функции  $f, g, h$  удовлетворяют условиям (1.2),  $\omega$  — постоянный вектор,  $A$  и  $B$  — постоянные матрицы, собственные значения которых лежат соответственно слева и справа от мнимой оси.

**Теорема 3.** При  $\nu = 0$  система уравнений (2.9) имеет интегральный тор  $J(v = w = 0)$ , по которому пересекаются две интегральные поверхности  $S^+(w = 0)$  и  $S^-(v = 0)$ . При  $\nu \neq 0$ ,  $\mu = 0$  интегральный тор сохраняется и, согласно теореме 1, является пересечением некоторых интегральных поверхностей  $S^+$  и  $S^-$ , непрерывно зависящих от параметра  $\nu$  и обращающихся в поверхности  $w = 0$  и  $v = 0$  при  $\nu = 0$ . При  $\nu = 1$  и достаточно малых  $\mu$  и в окрестности тора  $J(v = w = 0)$  интегральные поверхности  $S^+$  и  $S^-$  сохраняются и пересекаются по интегральному тору, близкому к тору  $J(v = w = 0)$ . При  $p = n - m$  тор устойчив, при  $p = 0$  тор устойчив после замены времени  $t$  на  $-t$ , в промежуточных случаях тор седлового типа. Через тор седлового типа ( $0 < p < n - m$ ) проходит две инвариантные поверхности  $S^+$  и  $S^-$  размерностей  $m + p$  и  $n - p$  соответственно.

### 3. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К АВТОНОМНЫМ

Допустим, что автономная система имеет интегральное многообразие  $v = w = 0$ , в окрестности которого уравнения движения могут быть записаны в виде (1.1) с выполнением условий (1.2).

Перейдем от системы (1.1) к близкой к ней неавтономной системе ( $\mu$  — малый параметр), которую запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{t} &= 1, \\ \dot{u} &= \Theta(u) + f(u, v, w) + \mu f_1(u, v, w, t), \\ \dot{v} &= A(u)v + g(u, v, w) + \mu g_1(u, v, w, t), \\ \dot{w} &= B(u)w + h(u, v, w) + \mu h_1(u, v, w, t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где функции  $f_1, g_1$  и  $h_1$  равномерно ограничены вместе с первыми двумя производными в окрестности многообразия  $v = w = 0$  при всех временах  $t$ . Если рассматривать вектор  $u$  и время как новую переменную  $u$ , то система (3.1) приобретет вид системы (1.1), причем будет удовлетворять условиям, наложенным на ее правые части. Следовательно, согласно теореме 1, имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** При достаточно малых  $\mu$  неавтономная система (3.1) будет иметь интегральные многообразия  $S^+$  и  $S^-$ , пересекающиеся по интегральному многообразию  $J$ , лежащему при всех  $t$  в окрестности многообразия  $v = w = 0$ .

В частности, если исходная автономная система имеет простое состояние равновесия  $v = w = 0$ , то у близкой к ней неавтономной системы имеется одномерное интегральное многообразие  $v = v^*(t, \mu)$ ,  $w = w^*(t, \mu)$ , где  $\|v^*(t)\| + \|w^*(t)\| < K_\mu$  при всех  $t$ , через которое проходит две интегральных поверхности  $S^+(w=w^*(v, t, \mu))$  и  $S^-(v=v^*(w, t, \mu))$ . Если исходная автономная система имеет простое периодическое движение  $u = u^*(t)$ ,  $v = v^*(t)$ ,  $w = w^*(t)$  периода  $2\pi$ , то

соответствующая ей неавтономная система имеет «цилиндрическое» инвариантное многообразие  $u = u^*(t + \tau) + \mu\tilde{u}(t, \tau)$ ,  $v = v^*(t + \tau) + \mu\tilde{v}(t, \tau)$ ,  $w = w^*(t + \tau) + \mu\tilde{w}(t, \tau)$ , где периодические функции  $\tau$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  равномерно ограничены\* при  $0 \leq \tau \leq 2\pi$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . Аналогичное утверждение очевидным образом можно сформулировать и в случае, когда у исходной автономной системы имеется инвариантная интегральная поверхность. В частности, при наличии у невозмущенной трехмерной автономной системы устойчивого двумерного тора при периодических добавках у близкой четырехмерной неавтономной системы будет существовать устойчивая трехмерная интегральная тороидальная поверхность.

#### 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ «МЕДЛЕННЫХ» ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с малым параметром  $\mu$  при производных вида\*\*

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \mu\dot{y} = G(x, y). \quad (4.1)$$

Допустим, что уравнение

$$G(x, y) = 0$$

в рассматриваемой области  $G_x$  изменения переменной  $x$  разрешимо относительно  $y$ , так что  $y = y^*(x)$ . После замены переменных  $y = y^*(x) + v$  второе из уравнений (4.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \mu\dot{v} = & \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{y=y^*} v - \mu F(x, y^* + v) \frac{dy^*}{dx} + \left[ G(x, y^* + v) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{y=y^*} v \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Допустим еще, что линейный оператор

$$A(x) = \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{y=y^*}$$

при любом фиксированном  $x$  ограничен и имеет спектр слева от прямой  $\operatorname{Re} z = -\sigma$ . Как известно [13], в этом случае

$$\| e^{A(x)\tau} \| < C(x) e^{-\sigma\tau}. \quad (4.3)$$

Примем\*\*\*, что  $C(x) < C$ .

При изложенных предположениях уравнения (4.1) в переменных  $u = x$  и  $v = y - y^*(x)$  после замены времени  $t$  на  $\mu t$  можно записать в виде

$$\dot{u} = \mu f(u, v), \quad \dot{v} = A(u) v + g(u, v, \mu) \quad (4.4)$$

\* При периодических добавках в двумерном случае аналогичные утверждения были установлены в работе Беллюстиной [7] и при произвольном  $n$  — в работах Боголюбова, Митропольского и Лыковой [2, 8].

\*\* Конечномерные дифференциальные уравнения с малым параметром при производных в разных аспектах рассматривались в работах [9, 10, 11, 12] и др.

\*\*\* Это условие заведомо выполняется, если область  $G_x$  компактна.

или в эквивалентной интегральной форме

$$\begin{aligned} u(t+\tau) &= u(t) + \mu \int_0^\tau f(u(t+s), v(t+s)) ds, \\ v(t+\tau) &= e^{A(u(t))\tau} v(t) + \int_0^\tau e^{A(u(t))(\tau-s)} \{ [A(u(t+s)) - \\ &\quad - A(u(t))] v(t+s) + g(u(t+s), v(t+s), \mu) \} ds. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из интегральных уравнений (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \delta u(t+\tau) &= \delta u(t) + \mu \int_0^\tau \delta f ds, \\ \delta v(t+\tau) &= e^{A(u(t))\tau} \delta v(t) + \delta \{ e^{A(u(t))\tau} \} v(t) + \\ &+ \int_0^\tau \delta \{ e^{A(u(t))(\tau-s)} \} \{ [A(u(t+s)) - A(u(t))] v(t+s) + \\ &+ g(u(t+s), v(t+s), \mu) \} ds + \int_0^\tau e^{A(u(t))(\tau-s)} \delta \{ [A(u(t+s)) - \\ &- A(u(t))] v(t+s) + g(u(t+s), v(t+s), \mu) \} ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В соответствии с (4.2) примем, что в области  $G_u \times V_\varepsilon$  ( $\|v\| < \varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \|g\| &< M(|\mu| + \|v\|^2), \quad \|\delta f\| < M(\|\delta u\| + \|\delta v\|), \\ \|f\| &< M, \quad \|\delta g\| < M(|\mu| + \|v\|) (\|\delta u\| + \|\delta v\|), \end{aligned} \quad (4.7)$$

и поэтому для преобразования  $T_\tau$  будут иметь место при некоторых постоянных  $D$  и  $\Sigma$  оценки вида

$$\begin{aligned} \|\bar{\delta v}\| &< C e^{-\alpha\tau} \|\delta v\| + \tau D (|\mu| + \|v\|) (\|\delta u\| + \|\delta v\|), \\ \|\bar{\delta u}\| &> \|\delta u\| - \tau M |\mu| (\|\delta u\| + \|\delta v\|), \\ \|\bar{\delta u}\| &< \tau M |\mu| \|\delta v\| \quad (\delta u = 0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В силу этих оценок отображение  $T_\tau$  удовлетворяет условиям теоремы 4 работы [1], если только\* в пространстве  $U$  фазовые траектории уравнения

$$\dot{u} = \mu f(u, 0) \quad (4.9)$$

на границе области  $G_u$  выходят из  $G_u$ , так что через время  $\tau$  их наименьшее расстояние от границы области  $G_u$  превосходит  $\alpha |\mu|$  ( $\alpha > 0$ ), или если область  $G_u$  совпадает со всем пространством  $U$ . Таким образом, можно сформулировать теорему.

**Теорема 5.** При сформулированных выше условиях уравнения (4.1) с малым параметром при производных имеют единственную устойчивую интегральную поверхность, близкую к поверхности  $y = y^*(x)$ .

\* То, что область  $G_u \times (\|v\| < \varepsilon)$  преобразуется в область  $\|v\| < \varepsilon$  при некоторых достаточно малых  $\varepsilon$  и  $\mu$  и  $\tau$ , выбранном так, чтобы  $C e^{-\alpha\tau} < 1$ , непосредственно следует из уравнений (4.5). Действительно, при фиксированном  $\tau$  согласно второму уравнению (4.5) и (4.7)

$$\|\bar{v}\| < C e^{-\alpha\tau} \|v\| + K (|\mu| + \|v\|^2).$$

Заметим, что при не выполнении требования, сформулированного непосредственно перед теоремой 5, но выполнении всех остальных условий, также будет существовать устойчивая интегральная поверхность. Доказательство непосредственно следует из возможности продолжения уравнений (4.4) с соблюдением сделанных предположений на все пространство  $U$ .

Теорема 5 может быть обобщена на систему уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \mu f(u, v, w), \\ \dot{v} &= A(u) v + g(u, v, w), \\ \dot{w} &= B(u) w + h(u, v, w),\end{aligned}\tag{4.10}$$

если спектры линейных ограниченных операторов  $A(u)$  и  $B(u)$  лежат соответственно левее прямой  $\operatorname{Re} z = -\sigma$  и правее прямой  $\operatorname{Re} z = \sigma$  и при этом при всех  $u$   $\|e^{A(u)t}\| < Ce^{-\sigma t}$ ,  $\|e^{-B(u)t}\| < Ce^{-\sigma t}$  и если в окрестности пространства  $v = w = 0$  выполняются условия вида (4.7). При этом поверхность «медленных» движений, близкая к  $v = w = 0$ , будет представляться как пересечение двух поверхностей  $S^+$  и  $S^-$ .

При наличии множителя  $\mu$  не только перед функцией  $f$ , но и функциями  $g$  и  $h$ , т. е. в случае квазилинейной системы уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \mu f(u, v, w, \mu), \\ \dot{v} &= A(u) v + \mu g(u, v, w, \mu), \\ \dot{w} &= B(u) w + \mu h(u, v, w, \mu),\end{aligned}\tag{4.11}$$

при выполнении изложенных только что предположений относительно линейных операторов  $A(u)$  и  $B(u)$  и условий

$$\begin{aligned}\|f\| + \|g\| + \|h\| &< K_1, \\ \|\delta f\| + \|\delta g\| + \|\delta h\| &< K_2(\|\delta\mu\| + \|\delta u\| + \|\delta v\| + \|\delta w\|)\end{aligned}\tag{4.12}$$

будет существовать при достаточно малых  $\mu$  единственная интегральная поверхность, близкая к подпространству  $v = w = 0$ . Эта интегральная поверхность является пересечением двух гладких\* и непрерывно зависящих от  $\mu$  интегральных поверхностей  $S^+(\mu)$  и  $S^-(\mu)$ , близких соответственно к подпространствам  $w = 0$  и  $v = 0$ . Так что имеет место теорема.

**Теорема 6.** Система квазилинейных уравнений (4.11) при сформулированных выше условиях на линейные операторы  $A(u)$  и  $B(u)$  и функции  $f$ ,  $g$  и  $h$  при достаточно малых  $\mu$  имеет единственное ограниченное по  $v$  и  $w$  интегральное многообразие  $J(\mu)$ , представляющее собою пересечение двух интегральных многообразий  $S^+(\mu)$  и  $S^-(\mu)$ , ограниченных соответственно по  $w$  и  $v$ . Эти интегральные поверхности непрерывно зависят от параметра  $\mu$  и будут гладкими при гладкости отображения  $T_\tau$ .

## 5. О РОЖДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Как известно [14, 15, 16], при потере периодическим движением устойчивости от него может отродиться устойчивая интегральная торoidalная поверхность. В качестве следующего примера рассмотрим этот вопрос в более общем случае седлового периодического движения. Ни-

\* Если отображение  $T_\tau$  гладкое.

же будет показано, что при изменении параметров, соответствующих смещению чисто мнимых характеристических показателей на правую полуплоскость, и выполнении некоторых условий, происходит рождение от периодического движения интегральной тороидальной поверхности, являющейся пересечением двух других интегральных поверхностей  $S^+$  и  $S^-$ .

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений произвольного порядка, зависящая от параметра  $\mu$  и имеющая при  $\mu = 0$  периодическое движение  $\Gamma$  с одним несущественным нулевым характеристическим показателем, двумя чисто мнимыми сопряженными,  $p$  — на левой полуплоскости и  $q$  — на правой. Пересечем замкнутую фазовую кривую  $\Gamma$  в некоторой ее точке  $O$  секущей поверхностью и рассмотрим в окрестности неподвижной точки  $O$  порождаемое фазовыми траекториями точечное отображение  $T(\mu)$  этой секущей поверхности в себя. Для упрощения приведем точечное отображение  $T(\mu)$  в окрестности точки  $O$  за счет подходящего выбора комплексной переменной  $x$  и  $p + q$ -мерной векторной переменной  $y$  к виду

$$\begin{aligned} \bar{x} &= z(\mu) (1 + a(\mu) |x|^2)x + F, \\ \bar{y} &= C(\mu) y + G, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $z(0) = e^{i\varphi}$  ( $\varphi \neq 0, \pi, 2\pi/3$  и  $\pi/2$ ),  $C(\mu)$  — матрица,  $p$  собственных значений которой лежат внутри единичного круга и  $q$  — вне,  $F$  и  $G$  — непрерывно дифференцируемые функции  $x$ , сопряженной ей переменной  $x'$ ,  $y$  и параметра  $\mu$ , такие, что в окрестности неподвижной точки  $O$

$$\|F\| + \|G\| < M(|x|^4 + \|y\||x| + \|y\|^2),$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| < M(|x|^3 + \|y\|), \quad (5.2)$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial y} \right\| + \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\| < M(|x| + \|y\|).$$

Привести преобразование  $T(\mu)$  к виду (5.2) можно следующим образом. В силу сделанных предположений можно исходить из записи преобразования  $T(\mu)$  в виде

$$\bar{x} = z(\mu) x + a_{20}x^2 + a_{11}xx' + a_{02}x'^2 + a_{30}x^3 + \dots + a_{03}x'^3 + \dots, \quad (5.3)$$

$$\bar{y} = C(\mu) y + c_{20}x^2 + c_{11}xx' + c_{02}x'^2 + c_{30}x^3 + \dots + c_{03}x'^3 + \dots,$$

где многоточия означают члены не ниже второго порядка относительно  $x$ ,  $x'$  и  $y$ , причем члены без  $y$  не ниже, чем четвертого порядка. С помощью замены  $y$  на

$$y + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} [C(\mu) - E]^{-1} c_{kl} x^k x'^l,$$

не изменяя общего вида преобразования (5.3), обращаем в нем в нуль векторные коэффициенты  $c_{20}, c_{11}, c_{02}, c_{30}, \dots, c_{03}$ . Затем путем замены  $x$  на

$$x - \sum_{k+l=2} \frac{a_{kl}}{z(\mu) - z^k(\mu) z'^l(\mu)} x^k x'^l,$$

опять не меняя общего вида преобразования (5.3), обращаем в нуль коэффициенты  $a_{20}, a_{11}$  и  $a_{02}$ . Наконец, заменяя  $x$  на

$$x - \sum'_{k+l=3} \frac{a_{kl}}{z(\mu) - z^k(\mu) z'^l(\mu)} x^k x'^l,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие члена с  $k = 2$  и  $l = 1$ , обращаем в нуль коэффициенты  $a_{30}, \dots, a_{03}$ , кроме  $a_{21}$ , после чего преобразование приобретает требуемый вид (5.1).

Матрица  $C(\mu)$  имеет  $p$  собственных значений внутри единичного круга и  $q$  — вне. Путем линейной замены переменных  $u$  и замены  $x$  на  $u$  отображение (5.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\bar{u} &= z(\mu) (1 + a(\mu) |u|^2) u + F, \\ \bar{v} &= Av + G, \\ \bar{w} &= Bw + H,\end{aligned}\tag{5.4}$$

где функции  $F, G$  и  $H$  удовлетворяют таким же условиям (5.2), что и функции  $F$  и  $G$  в отображении (5.1);  $A$  и  $B$  — постоянные матрицы порядков  $p$  и  $q$ , собственные значения которых лежат соответственно внутри и вне единичного круга. К отображению (5.4) можно применить теорему 4 работы [1] для доказательства существования в окрестности состояния равновесия инвариантной поверхности  $J$ , близкой к  $v = w = 0$ , и лемму 1 этой работы для выяснения вида точечного отображения на инвариантной поверхности  $J$ . Для избежания при этом применения формальной трудности, вызванной наличием края у области  $G_u$ , запишем уравнение (5.4) точечного отображения  $T(\mu)$  в виде

$$\begin{aligned}\bar{u} &= z(\mu) (1 + \omega(|u|) a(\mu) |u|^2) u + \omega(|u|) F, \\ \bar{v} &= Av + \omega(|u|) G, \\ \bar{w} &= Bw + \omega(|u|) H,\end{aligned}\tag{5.5}$$

где  $\omega(\rho)$  — функция вида

$$\omega(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho \leq r \\ 0 & \text{при } \rho \geq 2r \end{cases},$$

имеющая производную по  $\rho$ , по величине не превосходящую  $Mr^{-1}$ , где  $M$  — некоторая постоянная. При  $|u| \leq r$  уравнения (5.5) совпадают с (5.4) и при фиксированном достаточно малом  $r$  и всех  $|\mu| < \mu_*$ , где  $\mu_*$  — некоторое положительное число, удовлетворяют в достаточно малой окрестности подпространства  $v = w = 0$  условиям теоремы 4 работы [1] и леммы 1. Отсюда следует, что существует две инвариантных поверхности  $S^+(\mu)$  ( $w = f(u, v, \mu)$ ) и  $S^-(\mu)$  ( $v = g(u, w, \mu)$ ), пересекающиеся по инвариантной поверхности  $J(\mu)$  ( $v = \varphi(u, \mu)$ ,  $w = \psi(u, \mu)$ ). Согласно лемме 1, при  $|u| < r$

$$\|\delta\varphi\| + \|\delta\psi\| < N (|u|^3 + \|\varphi\| + \|\psi\|) |\delta u| \tag{5.6}$$

и поэтому

$$\|\varphi\| + \|\psi\| < R |u|^4. \tag{5.7}$$

Преобразование  $T(\mu)$  на инвариантной поверхности  $J(\mu)$ , согласно (5.4), можно записать в виде

$$\bar{u} = z(\mu) (1 + a(\mu) |u|^2) u + F(u, \varphi(u, \mu), \psi(u, \mu), \mu), \tag{5.8}$$

где для функции  $F$  как функции  $u$  из (5.2), (5.6) и (5.7) следуют оценки

$$\|F\| < P |u|^4, \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| < Q |u|^3. \tag{5.9}$$

Рассмотрим отображение (5.8). В полярных координатах  $\rho = |u|$ ,  $\Theta = \arg u$  оно запишется в виде

$$\begin{aligned}\bar{\Theta} &= \Theta + \arg z(\mu) + \operatorname{Im} a(\mu) \rho^2 + R(\rho, \Theta), \\ \bar{\rho}^2 &= |z(\mu)|^2 (1 + 2 \operatorname{Re} a(\mu) \rho^2) \rho^2 + S(\rho, \Theta),\end{aligned}\quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial R}{\partial \rho} \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial \Theta} \right| &< N\rho^2, \\ \left| \frac{\partial S}{\partial \rho} \right| + \left| \frac{\partial S}{\partial \Theta} \right| &< K\rho^4.\end{aligned}\quad (5.11)$$

При  $S = 0$  отображение (5.10) при достаточно малых  $\mu$  имеет инвариантную окружность  $J_u(|u| = \rho^*)$ , если

$$g_{0\mu} = - \left( \frac{d}{d\mu} |z(\mu)| (\operatorname{Re} a(\mu))^{-1} \right)_{\mu=0} \mu > 0 \quad (5.12)$$

и при этом

$$\rho^{*2} = + g_{0\mu} + \mu^2 (\dots). \quad (5.13)$$

Если построить диаграмму Кенигса—Ламеря для преобразования  $\rho^2$ , определяемого вторым из соотношений (5.10), то непосредственно видно, что при выполнении условия (5.12) отображение по  $\rho$  в окрестности  $\rho = \rho^*$  сжимающее, если  $\left( \frac{d}{d\mu} |z(\mu)| \right)_{\mu=0} \mu > 0$ , и растягивающее в противном случае. То же самое следует из непосредственного подсчета

$$\begin{aligned}\left( \frac{d\bar{\rho}}{d\rho} \right)_{\rho=\rho^*} &= \left( \frac{d\rho^2}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho^*} = |z(\mu)|^2 (1 + 4 \operatorname{Re} a(\mu) \rho^{*2}) = \\ &= 1 - 4 \left( \frac{d}{d\mu} |z(\mu)| \right)_{\mu=0} \mu + \dots.\end{aligned}$$

Пусть  $\left( \frac{d}{d\mu} |z(\mu)| \right)_{\mu=0} \mu > 0$ , тогда у отображения (5.10) в силу оценок

(5.11) согласно теореме 4 работы [1] имеется при достаточно малых  $\mu$  устойчивая инвариантная кривая  $J_u(\rho = \rho(\Theta, \mu))$ , близкая к окружности  $\rho = \rho^*$ . Таким образом, имеет место теорема.

**Теорема 7.** При сформулированных выше условиях при изменении  $\mu$  от нуля от периодического движения  $\Gamma$  рождается инвариантная двумерная тороидальная поверхность, через которую проходит две инвариантные поверхности  $S^+(\mu)$  и  $S^-(\mu)$  размерностей  $p+3$  и  $q+2$  соответственно. При этом инвариантная поверхность  $S^+(\mu)$  проходит через периодическое движение  $\Gamma$ , пересекаясь с поверхностью  $S^-(\mu)$  этого периодического движения по трехмерной поверхности.

Заметим, что проведенное изучение бифуркаций точечного отображения (5.4) позволяет исследовать вопрос о рождении периодического движения от состояния равновесия, так как в окрестности состояния равновесия точечное отображение  $T_\varepsilon$  приводится к виду (5.4). Получаемые при этом результаты обобщают утверждения работ [14, 15] на случай седлового состояния равновесия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Изв высш уч зав.—Радиофизика, 10, № 3, (1967).
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Тр. международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 1, Киев, 1963
3. M. D. Marcus, Ann Math. Studies, № 36, 1956.
4. S. P. Diliberto, G. Hufford, Ann Math. Studies, № 36 1956.
5. P. Koosis, Ann. Math. Studies, № 36, 1956
6. В. А. Плесс, Нелокальные проблемы теории колебаний, изд. Наука, М—Л.. 1964
7. Л. Н. Беллюстина, ДАН СССР, 148, № 2, 251 (1963).
8. О. Б. Лыкова, Тр международного симпозиума по нелинейным колебаниям. 1, Киев, 1963
9. А. А. Андронов, А А Витт, С Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М, 1959.
10. А. Н. Тихонов, А Б. Васильева, В М. Волосов, Тр международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Аналитические методы, Киев, 1963.
11. К. В. Задирака, Тр международного симпозиума по нелинейным колебаниям 1, Киев, 1963.
12. Ю. И. Неймарк, Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып 2, изд. Наука, М., 1965
13. М. Г. Крейн, Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Киев, 1964.
14. Ю. И. Неймарк, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41, № 2, 95, № 5—6, 146 (1958); ДАН СССР, 129, № 4, 736 (1959)
15. Ю. И. Неймарк, Тр международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Качественные методы, Киев, 1963
16. R. I. Sacker, On Invariant Surfaces and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations, Courant Institute of Mathematical Sciences, October, 1964.
17. A. A. Vitt, Compt Rendus Acad. sci, 195 (1932).

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
17 октября 1966 г.

## THE INTEGRAL MANIFOLDS FOR THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Yoo. I. Nyemark*

The conditions of the existense and structural stability of the integral manifolds for the differential equations are stated in this paper on the basis of the results obtained in the previous paper by author.

УДК 517.9

## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ, ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В КОНСЕРВАТИВНУЮ

*H. K. Гаврилов*

Рассматривается система с малым параметром при производной, которая при  $\mu = 0$  имеет целое семейство периодических движений. Устанавливаются условия, при которых исходная система имеет периодическое решение, близкое к порождающему. В качестве примера рассмотрена математическая модель «лазера», предложенная в [4]. Показано, что при малых  $\mu$  эти уравнения не имеют периодических решений.

Рассмотрим систему с малым параметром при производной

$$\mu \dot{z} = A(x, y, z, \mu) z + \mu F(x, y, \mu),$$

$$\dot{x} = P_0(x, y) + \mu P_1(x, y, \mu) + P_2(x, y, z, \mu) z,$$

$$\dot{y} = Q_0(x, y) + \mu Q_1(x, y, \mu) + Q_2(x, y, z, \mu) z$$

и соответствующую ей «вырожденную» систему при  $\mu = 0$

$$z = 0,$$

$$\dot{x} = P_0(x, y),$$

$$\dot{y} = Q_0(x, y).$$

Одним из вопросов, стоящих при изучении таких систем, является следующий: если «вырожденная» система имеет периодическое решение, то при каких условиях исходная система также имеет периодическое решение. В работе [1] установлено, что если периодическое движение «вырожденной» системы «грубое», а матрица  $A(x, y, 0, 0)$  «грубая» для всех  $x$  и  $y$ , принадлежащих некоторой окрестности периодического движения «вырожденной» системы, то и исходная система при малых  $\mu$  имеет периодическое решение, стремящееся к периодическому решению «вырожденной» системы при  $\mu \rightarrow 0$ .

В настоящей заметке мы рассмотрим случай, когда «вырожденная» система при  $\mu = 0$  является консервативной и имеет целое семейство периодических решений:

$$\begin{aligned} \mu \dot{z} &= A(x, y, z, \mu) z + \mu F(x, y, \mu), \\ \dot{x} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \mu P_1(x, y, \mu) + P_2(x, y, z, \mu) z, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + Q_1(x, y, \mu) + Q_2(x, y, z, \mu) z. \end{aligned} \quad (1)$$

Относительно системы (1) будем предполагать следующее:  
а)  $A(x, y, 0, 0) < -\delta < 0$  для всех  $x, y \in G$ ,

б) правые части дважды непрерывно дифференцируемы и ограничены по всем переменным в области  $x, y \in G, |z| < \sigma, 0 \leq \mu \leq \mu^*$ . От системы (1) с помощью замены

$$z = \mu [\eta - A^{-1}(x, y, 0, 0) F(x, y, 0)]$$

перейдем к системе

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A(x, y, 0, 0) \eta + \tilde{F}(x, y, \eta, \mu), \\ \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu [P_1(x, y, 0) - A^{-1}(x, y, 0, 0) F(x, y, 0) P_2(x, y, 0, 0)] + \\ &\quad + p(x, y, \eta, \mu), \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} + \mu [Q_1(x, y, 0) - A^{-1}(x, y, 0, 0) F(x, y, 0) Q_2(x, y, 0, 0)] + \\ &\quad + q(x, y, \eta, \mu), \end{aligned} \quad (2)$$

где функция  $\tilde{F}$  ограничена в рассматриваемой области, а функции  $p$  и  $q$  удовлетворяют условию

$$|p| + |q| \leq M\mu^2 + N\mu |\eta|.$$

Утверждается, что если система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \mu [P_1(x, y, 0) - A^{-1}(x, y, 0) F(x, y, 0) P_2(x, y, 0, 0)], \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} + \mu [Q_1(x, y, 0) - A^{-1}(x, y, 0, 0) F(x, y, 0) Q_2(x, y, 0, 0)] \end{aligned}$$

имеет периодическое решение  $x = \Phi(t, \mu), y = \Psi(t, \mu)$  периода  $T(\mu)$  для всех  $0 \leq \mu \leq \mu^*$ , лежащее в области  $G$  вместе с окрестностью, характеристический показатель которого  $\lambda < -\varepsilon\mu < 0$  (один, равный нулю, всегда имеется в силу автономности), тогда для всех  $0 \leq \mu \leq \mu \leq \mu^*$  система (2) имеет периодическое решение  $x = \Phi(t, \mu) + \varphi(t, \mu), y = \Psi(t, \mu) + \psi(t, \mu); \eta = \chi(t, \mu)$  периода  $T(\mu) + \tau(\mu)$  такое, что  $|\varphi(t, \mu)| + |\psi(t, \mu)| + |\chi(t, \mu)| \rightarrow 0, \tau(\mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Введем в окрестности этого периодического решения новую криволинейную систему координат  $u, v$ , полагая

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u, \mu) - v\Psi'_u(u, \mu), \\ y &= \Psi(u, \mu) + v\Phi'_u(u, \mu). \end{aligned}$$

Якобиан рассматриваемого преобразования координат при всех  $u$  и достаточно малых  $v$  больше нуля. Переходя в уравнениях (2) к новым переменным  $u$  и  $v$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\eta}{du} &= C(u) \eta + R(v, \eta, u, \mu), \\ \frac{dv}{du} &= \mu [B(u) v + S(v, \eta, u, \mu)], \end{aligned} \quad (3a)$$

где функции  $C, R$  и  $B, S$  периодичны по  $u$  с периодом  $T$  и удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} |R(v_1, \eta_1, u, \mu) - R(v_2, \eta_2, u, \mu)| &\leq \omega_1(\sigma, \mu) \{ |v_1 - v_2| + |\eta_1 - \eta_2| \}, \\ \omega_1(0, 0) &= 0, \quad R(0, 0, u, 0) \equiv 0, \\ |S(v_1, \eta_1, u, \mu) - S(v_2, \eta_2, u, \mu)| &\leq K_1 |\eta_1 - \eta_2| + \omega_2(\sigma, \mu) |v_1 - v_2|, \\ \omega_2(0, 0) &= 0, \quad S(0, 0, u, 0) \equiv 0 \end{aligned} \quad (36)$$

для всех  $-\infty < u < \infty$ ,  $|v_1| < \sigma$ ,  $|v_2| < \sigma$ ,  $|\eta_1| < \sigma$ ,  $|\eta_2| < \sigma$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu^*$ .

Пусть  $Y(u, \mu)$  — решение линейной системы

$$\frac{d\eta}{du} = C(u) \frac{\eta}{\mu}, \quad Y(0, \mu) = 1.$$

Так как  $C(u) < -\delta < 0$ , то

$$|Y(u, s, \mu)| \leq \exp \left[ -\frac{\delta}{\mu} (u - s) \right]. \quad (3B)$$

Пусть  $X(u, \mu)$  — решение линейной системы

$$\frac{dv}{du} = \mu B(u) v, \quad X(0, \mu) = 1.$$

Тогда

$$|X(u, s, \mu)| \leq K_2 \exp [-\varepsilon \mu (u - s)], \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu [1 - X(T, 0, \mu)]^{-1} \leq \frac{1}{\varepsilon T}. \quad (3G)$$

Рассмотрим оператор\*  $F(u, \mu)$ , переводящий функции  $\eta(u)$ ,  $v(u)$  в  $\bar{\eta}(u)$ ,  $\bar{v}(u)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(u) &= Y(u, 0, \mu) [1 - Y(T, 0, \mu)]^{-1} \frac{1}{\mu} \int_u^{u+T} Y(T, s, \mu) R(v(s), \eta(s), s, \mu) ds, \\ \bar{v}(u) &= X(u, 0, \mu) [1 - X(T, 0, \mu)]^{-1} \mu \int_u^{u+T} X(T, s, \mu) S(v(s), \bar{\eta}(s), s, \mu) ds. \end{aligned}$$

Этот оператор переводит периодические функции периода  $T$  в периодические функции того же периода. Нетрудно видеть, что периодическим решениям системы (За) будут соответствовать неподвижные точки оператора  $F(u, \mu)$  и наоборот.

Возьмем множество пар функций  $W_\sigma(u) = \{\eta(u), v(u)\}$ , периодических с периодом  $T$  и удовлетворяющих условию  $\|W(u)\| \leq \sigma$ . За норму  $W(u)$  возьмем

$$\|W(u)\| = \sup_{0 \leq u \leq T} (|\eta(u)| + |v(u)|).$$

Покажем, что оператор  $F(u, \mu)$  отображает множество  $W_\sigma$  на себя и сжимает на нем.

Из условий (3б), (3в), (3г) следует, что для всех  $0 \leq \mu \leq \mu^*$

$$|\bar{\eta}(u)| + |\bar{v}(u)| \leq \frac{\tilde{K}}{\varepsilon \delta} \{ \omega(\sigma, \mu) (|v(u)| + |\eta(u)|) + \tilde{\omega}_1(\mu) \},$$

\* Этот при приеме перехода от системы дифференциальных уравнений к интегральному оператору использовался для доказательства существования периодических решений многими авторами, см., например, [2,3].

$$|\bar{\eta}_1(u) - \bar{\eta}_2(u)| + |\bar{v}_1(u) - \bar{v}_2(u)| \leq \frac{\bar{K}}{\varepsilon\delta} (\tilde{\omega}_2(\sigma, \mu) (|\eta_1(u) - \eta_2(u)| + |v_1(u) - v_2(u)|))$$

или

$$\|\bar{W}(u)\| \leq \frac{\bar{K}}{\varepsilon\delta} (\tilde{\omega}(\sigma, \mu) \|W(u)\| + \tilde{\omega}_1(\mu)),$$

$$\|\bar{W}_1 - \bar{W}_2\| \leq \frac{\bar{K}}{\varepsilon\delta} \tilde{\omega}_2(\sigma, \mu) \|W_1(u) - W_2(u)\|,$$

где  $\tilde{K}$ ,  $\bar{K}$  есть суперпозиция констант  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $T$ . Выберем  $0 \leq \mu < \mu^*$ ,  $\sigma$  такими малыми, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{\bar{K}}{\varepsilon\delta} \{\tilde{\omega}(\sigma, \mu) \sigma + \tilde{\omega}_1(\mu)\} &\leq \sigma, \\ \frac{\bar{K}}{\varepsilon\delta} \tilde{\omega}_2(\sigma, \mu) &< 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда ясно, что  $FW_\sigma \subset W_\sigma$  для всех  $0 \leq \mu \leq \bar{\mu} < \mu^*$  и сжимаем на  $W_\sigma$ , т. е. для всех  $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$  существует единственное периодическое решение  $\eta^*(u)$ ,  $v^*(u)$  системы (3а).

Нетрудно видеть, что для всех  $\sigma$  и  $\mu$ , удовлетворяющих условию (4),  $\inf \sigma \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Таким образом, утверждение доказано.

Заметим, что утверждение остается справедливым и в том случае, если  $z$  —  $n$ -мерный вектор.

В качестве примера рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{x} + x(x^2 - 1) = -\mu \left[ \ddot{x} - \frac{\dot{x}\dot{x}}{x} + \frac{\mu_1}{x}\dot{x} + \dot{x}x^2 \right]. \quad (5)$$

К этому уравнению при некоторых предположениях была сведена задача о колебаниях мощности излучения «лазера» [4]. В этой работе утверждается, что с точностью до первого порядка по  $\mu$  это уравнение имеет предельный цикл. Покажем, что это не так.

Сделаем замену переменного, положив

$$\dot{x} = ux, \quad \dot{u} = 1 - x^2 + v_1, \quad \beta = \mu_1/\mu.$$

Тогда система (5) запишется в виде

$$\dot{x} = ux,$$

$$\dot{u} = 1 - x^2 + v_1, \quad (6a)$$

$$\mu \dot{v}_1 = -v_1 - \mu u [2 + \beta - 3x^2 + 2v_1].$$

При  $\mu = 0$  «вырожденная» система будет

$$v_1 = 0,$$

$$\dot{x} = ux,$$

$$\dot{u} = 1 - x^2.$$

(6b)

Она интегрируется и имеет целое семейство замкнутых траекторий

$$v_1^2 + x^2 - \ln x^2 = C.$$

Сделаем еще одну замену:  $v_1 = -\mu u [2 + \beta - 3x^2] + \mu v_2$ . Будем иметь:

$$\dot{x} = ux,$$

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 1 - x^2 - \mu u [2 + \beta - 3x^2] + \mu v_2, \\ \mu \dot{v}_2 &= -v_2 + \mu \Phi(u, x, v_2, \mu).\end{aligned}\quad (7)$$

Теперь, если система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ux, \\ \dot{u} &= 1 - x^2 - \mu u [2 + \beta - 3x^2]\end{aligned}\quad (8a)$$

будет иметь предельный цикл, то и система (7), в силу вышесказанного утверждения, будет иметь предельный цикл. Но система (8а) не может иметь предельных циклов. При  $\beta = 1$  она переходит в систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ux, \\ \dot{u} &= (1 - x^2)(1 - 3\mu u),\end{aligned}\quad (8b)$$

которая интегрируется и имеет семейство замкнутых кривых  $F(x, u, \mu) = C$ , близких к кривым системы (6б). В силу (8а)  $\frac{dC}{dt}$  равно:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\mu u^2(1 - \beta)}{1 - 3\mu u}.$$

Ясно, что при малых  $\mu$  в конечной части плоскости система (8а) не может иметь предельных циклов, так как при  $\beta < 1$   $\frac{dC}{dt} > 0$ , а при  $\beta < 1$   
 $\frac{dC}{dt} < 0\dots$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Аносов, Мат. сб., 50, № 3, 233 (1960).
2. Jack K. Hale, Oscillations in nonlinear systems (русский перевод в печати).
3. М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, изд. Наука, М., 1966.
4. В. В. Коробкин, А. В. Успенский, ЖЭТФ, 45, № 4, 1003 (1963).

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
1 июня 1966 г.

#### ON THE DIFFERENTIAL SYSTEM WITH A SMALL DERIVATIVE MULTIPLIER TENDING TO THE CONSERVATIVE SYSTEM

N. K. Gavrilov

This paper presents the consideration of a system with a derivative multiplied by a small parameter, which has a family of periodical modes when  $\mu = 0$ . The conditions when the original system has a periodical solution similar to the one with  $\mu = 0$ , are stated. The mathematical model for the physical suggested in [4] is considered an example. It is shown this equations have no periodical solutions when  $\mu$  is small.

УДК 62 — 504.3

## ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СЧЕТНОГО ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ У РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ\*

B. P. Григоренко

Показывается, что у релейной системы  $n$ -го порядка в окрестности замкнутого контура, состоящего из двух состояний равновесия типа седло—фокус и соединяющих их фазовых траекторий, имеются счетные множества периодических движений всевозможных кратностей

Как известно [1], из сепаратрисы, идущей из седла в седло, при изменении параметров системы возможно рождение периодического движения. В многомерном случае в работах [2—5] было показано, что в окрестности фазовой кривой  $\Gamma$ , идущей из седлового состояния равновесия в него же, может находиться бесчисленное множество однократных периодических движений. Ниже на примере релейной системы, показывается, что наряду с простейшими периодическими движениями в окрестности  $\Gamma$  имеются бесчисленные множества периодических движений любой кратности.

Согласно [6], фазовое пространство релейной системы с коэффициентом передачи линейного звена

$$K(p) = \frac{A_m(p)}{B_n(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{c_j(\mu)}{p - \lambda_j(\mu)}$$

и характеристикой реле

$$x = \Omega(y) = \begin{cases} +1 & \text{при } y > 0 \\ \text{любое число между } -1 \text{ и } +1 & \text{при } y = 0 \\ -1 & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

разбивается поверхностью переключения реле  $\Pi = \sum y_j = 0$  на два полупространства  $G_+(y > 0)$  и  $G_-(y < 0)$ , в каждом из которых дифференциальные уравнения системы можно записать в виде

$$\dot{y}_j = \lambda_j(\mu) y_j + c_j(\mu) x, \quad x = \Omega(y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (1)$$

При  $\mu = 0$  в фазовом пространстве рассматриваемой системы предполагается существование замкнутого контура  $\Gamma$ , составленного из состояний равновесия  $O_1$ ,  $O_2$  и фазовых траекторий, выходящих из этих состояний (рис. 1). Для существования этого контура необходимо и достаточно выполнение условия [2]

$$\sum_{j=1}^n \frac{c_j(0)}{\lambda_j(0)} \operatorname{sgn} [\operatorname{Re} \lambda_j(0)] = 0. \quad (2)$$

\* Настоящая статья содержит изложение основных результатов дипломной работы В. П. Григоренко, выполненной под руководством Ю. И. Неймарка в 1965 г.

Полупериод простейшего периодического режима релейной системы удовлетворяет следующему уравнению [7]:

$$\sum_{j=1}^n \frac{c_j(\mu)}{\lambda_j(\mu)} \operatorname{th} \frac{\lambda_j(\mu) T}{2} = 0. \quad (3)$$

При  $\mu = 0$  условие (2) означает существование бесконечного корня у уравнения (3).

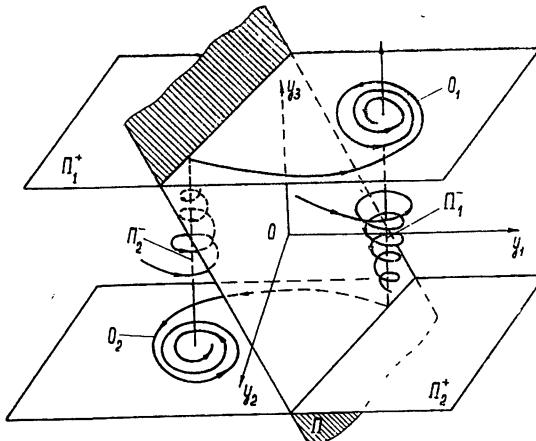


Рис. 1.

Пусть среди характеристических корней  $\lambda_j(\mu)$  состояния равновесия имеется одна пара комплексно-сопряженных  $\lambda_{1,2} = -\lambda \pm i\omega$  с  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  и остальные корни действительные. В этом случае имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Если  $\sigma = \min_{j \geq 3} (|\lambda_j|) > \lambda$ , то в достаточно малой окрестности рассматриваемого контура  $\Gamma$  содержится счетное множество неустойчивых периодических движений любой кратности.

**Доказательство.** Для отыскания простейших периодических движений ( $m = 1$ ) исследуем уравнение периодов (3) в окрестности корня  $T = \infty$ . В окрестности этого корня уравнение (3) можно привести к виду

$$-\sum' \frac{c_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j T} + \sum'' \frac{c_j}{\lambda_j} e^{\lambda_j T} + O(e^{-2\lambda T}) = 0. \quad (4)$$

Здесь в  $\sum'$  и  $\sum''$  сгруппированы члены соответственно с  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$  и  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ . Выделим слагаемые, соответствующие комплексно-сопряженным корням  $\lambda_{1,2} = -\lambda \pm i\omega$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\omega \neq 0$ :

$$a \cos(\omega T) + b \sin(\omega T) = \sum' \frac{c_j}{\lambda_j} e^{(\lambda - \lambda_j)T} + \\ + \sum'' \frac{c_j}{\lambda_j} e^{(\lambda + \lambda_j)T} + O(e^{-\lambda T}) = \delta(T),$$

где  $\delta(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$  в силу условий теоремы, т. е. уравнение (4) имеет счетное множество корней.

Рассмотрим случай сложного  $m$ -кратного периодического режима с периодом  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ . Как известно [8], интервалы времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  должны удовлетворять следующей системе  $m$  уравнений периодического движения:

Аналогичной процедурой приведем систему (5) к виду

$$\begin{aligned} a \cos(\omega\tau_1) + b \sin(\omega\tau_1) &= \delta_1(\tau_1, \dots, \tau_m) + O(e^{(\lambda-\sigma)\tau_1}), \\ a \cos(\omega\tau_2) + b \sin(\omega\tau_2) &= \delta_2(\tau_1, \dots, \tau_m) + O(e^{(\lambda-\sigma)\tau_2}), \\ \vdots &\quad \vdots \\ a \cos(\omega\tau_m) + b \sin(\omega\tau_m) &= \delta_m(\tau_1, \dots, \tau_m) + O(e^{(\lambda-\sigma)\tau_m}). \end{aligned} \quad (6)$$

где

Система (6) может иметь решение только в том случае, если все величины  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$  стремятся к нулю при  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ , стремящихся к бесконечности. Для этого достаточно выполнения следующей системы неравенств:

$$\begin{aligned} -\sigma\tau_2 + \lambda\tau_1 &< -\Theta_1, \\ -\sigma\tau_3 + \lambda\tau_2 &< -\Theta_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots, \\ -\sigma\tau_1 + \lambda\tau_m &< -\Theta_m, \\ (\sigma = \min_{i \geq 3} (|\lambda_j|)), \end{aligned} \tag{7}$$

причем все величины  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$  положительны и стремятся к бесконечности при неограниченном возрастании времен  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ .

Таким образом, вопрос о существовании решения у системы (6) свелся к вопросу о совместности системы неравенств (7) для любых сколь угодно больших времен  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ . То есть для существования решения у системы (6) достаточно, чтобы в  $m$ -мерном пространстве  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$  существовала область  $G_\Theta \{ -\Theta_j < -\Theta \}$  для всех  $1 \leq j \leq m$ , причем  $\Theta \rightarrow \infty$  при  $\tau_1 \rightarrow \infty, \tau_2 \rightarrow \infty, \dots, \tau_m \rightarrow \infty$ .

Для доказательства существования области  $G_\theta$  рассмотрим сечение пространства  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$  координатной плоскостью  $(\tau_k, 0, \tau_l)$ , где  $k \neq l$  любые числа между 1 и  $m$ . Покажем, что в любом сечении существует область

$$G_{\Theta}^{(k, l)} \begin{cases} -\Theta_k < -\Theta \\ -\Theta_l < -\Theta \end{cases}, \quad (8)$$

которая является проекцией  $G_{\Theta}$  на координатную плоскость  $(\tau_k, 0, \tau_l)$ . Пусть для определенности  $l > k$ , тогда, как следует из (7), область  $G_{\Theta}^{(k, l)}$  можно записать в виде системы двух неравенств:

$$G_{\Theta}^{(k, l)} \begin{cases} \tau_l > \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{l-k} \tau_k + \tilde{\Theta}_k \\ \tau_l < \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^{m-l+k} \tau_k - \tilde{\Theta}_l \end{cases} \quad (\tilde{\Theta}_k, \tilde{\Theta}_l > 0).$$

Получили, что при  $\sigma > \lambda$  область  $G_{\Theta}^{(k, l)}$  находится в положительном квадранте  $\tau_k > 0, \tau_l > 0$  и существует для любых сколь угодно больших  $\tilde{\Theta}_k$  и  $\tilde{\Theta}_l$ .

Рассмотрим решение системы (6) в предельном случае, когда

$$\delta_1(\tau_1, \dots, \tau_m) = 0, \quad \delta_2(\tau_1, \dots, \tau_m) = 0, \dots, \delta_m(\tau_1, \dots, \tau_m) = 0,$$

$$\tau_1^* = \frac{k_1 \pi - \varphi}{\omega}, \quad \tau_2^* = \frac{k_2 \pi - \varphi}{\omega}, \dots, \quad \tau_m^* = \frac{k_m \pi - \varphi}{\omega}.$$

Здесь  $k_1, k_2, \dots, k_m$  — любые, сколь угодно большие целые числа, причем всегда существуют такие  $k_j > N$  ( $1 \leq j \leq m$ ), что точка  $(\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_m^*)$  принадлежит открытой области  $\tilde{G}_{\Theta} = G_{\Theta} - \delta G_{\Theta}$ ; здесь  $\delta G_{\Theta}$  — малая окрестность границы области  $G_{\Theta}$ . Отсюда следует, что при фиксированном достаточно большом  $\Theta$  в  $\varepsilon(\Theta)$  окрестности точки  $(\tau_1^*, \dots, \tau_m^*)$  существует единственное решение системы (6), причем  $\varepsilon(\Theta) \rightarrow 0$  при  $\Theta \rightarrow \infty$ . Из того, что существует счетное множество различных выборов целых чисел  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , удовлетворяющих вышеуказанному свойству, следует, что система (6) при любом достаточно большом  $\Theta$  в области  $\tilde{G}_{\Theta}$  имеет счетное множество решений.

Чтобы завершить доказательство, покажем существование счетного множества периодических движений, соответствующих найденным корням уравнения периодов; для этого найденные корни должны удовлетворять условию надлежащего направления переключения реле. В случае простейшего симметричного колебания ( $m = 1$ ) это условие имеет вид

$$\sum_i c_j e^{\lambda_j T} \left( 1 - \operatorname{th} \frac{\lambda_j T}{2} \right) < 0. \quad (9)$$

Неравенство (9) имеет место для всех достаточно больших корней уравнения периодов, если

$$\sum' c_j < 0, \quad c_j = \frac{A_m(\lambda_j)}{B_n(\lambda_j)}, \quad (10)$$

причем здесь  $\lambda_j$  взято только с  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ .

Можно показать, что (10) является достаточным условием надлежащего направления переключения реле и в случае  $m$ -кратного периодического режима,

Устойчивость периодических движений релейной системы [7] определяется расположением корней характеристического уравнения  $X(z) = 0$  относительно единичного круга:

$$X(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j(\mu)}{(1 + e^{\lambda_j T})(e^{-\lambda_j T} + z)} = 0. \quad (11)$$

Движение устойчиво, если корни уравнения (11) лежат вне единичного круга. Для достаточно больших  $T$  характеристическое уравнение (11) можно привести к виду

$$z \left( \sum_{j=1}^2 \frac{c_j e^{i \operatorname{Im} \lambda_j T}}{1 + z e^{i \operatorname{Im} \lambda_j T}} + \sum_{j=3}^n \frac{c_j e^{(\lambda_j + \lambda)T}}{1 + z e^{\lambda_j T}} \right) - \sum_i' \frac{c_j e^{-(\lambda_j - \lambda)T}}{1 + e^{-\lambda_j T}} + O(e^{-\sigma T}) = 0.$$

Нетрудно видеть, что при  $\sigma = \min_{j \geq 3} (|\lambda_j|) > \lambda$  все периодические движения с достаточно большими периодами неустойчивы, так как в этом случае один из корней лежит внутри единичного круга.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андronov, Е. А. Леонович, Уч. зап. ГГУ, вып. 6, 3 (1937).
2. Л. П. Шильников, Матем. сб., 61 (103), № 4, 443 (1963).
3. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, ДАН СССР, 160, № 6, 1038 (1965).
4. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, 330 (1965).
5. Л. П. Шильников, ДАН СССР, 160, № 3, 558 (1965).
6. Ю. И. Неймарк, Уч. зап. ГГУ, сер. физ., 30, 159 (1956).
7. Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 14, № 5, 491 (1953).
8. Сборник памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955.

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 июня 1966 г.

#### ON THE COUNTABLE SET OF PERIODICAL MODES IN THE RELAY SYSTEM

*V. P. Grigorenko*

It is proved in this paper that the relay system of the  $n$ -th order has a countable set of different periodical solutions in the neighbourhood of a closed contour composed of two saddle-focus type stationary states which are connected by the phase trajectory.

УДК 62 — 503.53

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ҚВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*K. M. Цой, С. Н. Шиманов*

Получены условия существования периодических решений квазилинейных автономных систем с  $n$  степенями свободы и постоянным во времени запаздыванием в случае кратных корней разрешающих уравнений. При получении указанных условий использован метод вспомогательных систем, развитый ранее для квазилинейных систем без учета запаздывания. В качестве примера рассмотрено поведение простейшей следящей системы с запаздыванием.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим квазилинейную автономную систему, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \mu F(x, y, \mu), \quad (1.1)$$

где  $x$  — искомый  $n$ -вектор координат системы,  $y = x(t - \tau)$  —  $n$ -вектор,  $\tau$  — постоянное запаздывание по времени,  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица с вещественными коэффициентами,  $F$  —  $n$ -вектор-функция, аналитическая по совокупности  $(x, y, \mu)$  в некоторой области  $G$  и при  $|\mu| \leq \mu^*$ , где  $\mu$  — малый параметр. Допустим, что порождающая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1.2)$$

допускает  $m$ -независимых частных периодических решений  $\varphi_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) периода  $2\pi/\omega$ , где  $\varphi_j$  —  $n$ -вектор.

Тогда порождающее решение периода  $2\pi/\omega$  имеет вид

$$x^{(0)} = M_1^0 \varphi_1 + \dots + M_m^0 \varphi_m. \quad (1.3)$$

Выясним условия, при которых система (1.1) допускает периодические решения периода  $T = (2\pi/\omega)(1 + \mu\alpha)$ , обращающиеся в порождающее при  $\mu = 0$ ;  $\alpha = \alpha(\mu)$  — неизвестная функция  $\mu$ , обращающаяся в нуль при  $\mu = 0$  и подлежащая дальнейшему определению. Заменой переменной

$$t_1 = \frac{t}{1 + \mu\alpha}$$

приходим к задаче об отыскании периодических решений периода  $2\pi/\omega$  для системы (1.4):

$$\frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{1}{1 + \mu\alpha} = Ax + \mu F(x, y^*, \mu), \quad (1.4)$$

$$y^* = x(t_1 - \tau'), \quad \tau' = \tau/(1 + \mu\alpha).$$

Для построения периодических решений периода  $2\pi/\omega$  системы (1.4), а также для получения необходимого и достаточного условий существования периодических решений воспользуемся методом вспомогательных систем [3, 4, 5].

Заметим, что 1) порождающая система (1.2) может допускать периодические решения с частотами, несоизмеримыми с  $\omega$ ;

2) простым смещением начального момента времени можно сделать  $M_m = 0$ ; тогда, предполагая с самого начала  $M_m = 0$ , не рискуем потерять периодических решений системы (1.1).

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА И ЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Для системы (1.4) строим вспомогательную систему (2.1):

$$\frac{dx}{dt_1} (1 - \mu\alpha + \mu^2\alpha^2 + \dots) = Ax + \mu F(x, y^*, \mu) + \sum_{j=1}^m \varphi_j W_j. \quad (2.1)$$

Вспомогательная система (2.1) всегда имеет периодическое решение, аналитическое относительно  $\mu$  во всей области  $|\mu| \leq \mu^*$  с наперед заданными начальными условиями  $x(0) = M^0 + \beta$ , при соответствующем подборе не зависящего от времени  $W$ , где  $W$  —  $m$ -вектор, однозначно определяемый из условий существования периодического решения уравнения (2.1) и оказывающийся аналитическим относительно  $\mu$ ,  $M^0 + \beta$ ,  $\alpha$ , где  $M^0$  —  $(m-1)$ -вектор,  $\beta = \beta(\mu)$  —  $(m-1)$ -вектор, обращающийся в нуль при  $\mu = 0$ .

Ищем периодическое решение периода  $2\pi/\omega$  уравнения (2.1) в виде

$$x = x^0 + \mu x^{(1)} + \mu^2 x^{(2)} + \dots, \\ W = W^{(0)} + \mu W^{(1)} + \mu^2 W^{(2)} + \dots \quad (2.2)$$

Подставим (2.2) в (2.1) и, применяя метод неопределенных коэффициентов, определим  $x^{(l)}$  (причем процесс может быть продолжен сколь угодно далеко). Из условий существования периодического решения уравнений для соответствующих приближений  $x^{(l)}$  находим

$$W_i^{(0)} = 0,$$

$$W_i^{(1)} = -\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left( \left\{ F[x^0, x^0(t_1 - \tau), 0] - \alpha_0 \frac{dx_0}{dt_1} \right\}, \psi_i \right) dt_1 = \\ = -P_i(\alpha_0, M_1^0, \dots, M_{m-1}^0), \\ W_i^{(2)} = -\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left( \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{dF}{dx_k} \right)_0 x_k^{(1)} + \left( \frac{\partial F}{\partial x_k(t_1 - \tau)} \right)_0 \left[ x_k^{(1)}(t_1 - \tau) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + \tau \alpha_0 \frac{dx^{(0)}(t_1 - \tau)}{dt_1} \right] \right] + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_0 + \alpha_0 \frac{dx^{(1)}}{dt_1} - \alpha_0^2 \frac{dx^{(0)}}{dt_1} \right\}, \psi_i \right) dt_1 \\ (i = 1, \dots, m). \quad (2.3)$$

В выражениях (2.3) круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов, круглые скобки с индексом нуль обозначают, что произ-

водные вычисляются для порождающего решения,  $\psi_t$  — периодические решения системы, сопряженной с системой (1.2).

Аналогичным образом можно вычислить и дальнейшие приближения. Мы получаем  $m$ -параметрическое семейство периодических решений вспомогательной системы и соответствующие  $W$ , зависящие от  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ :

$$W(\alpha, M^0 + \beta, \mu). \quad (2.4)$$

### 3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1.1)

1) Для того, чтобы система (1.1) допускала периодическое решение периода

$$T = (2\pi/\omega)(1 + \mu\alpha), \quad (3.1)$$

обращающееся в порождающее (1.2) при  $\mu = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$W(\alpha, M^0 + \beta, \mu) = 0 \quad (3.2)$$

допускала решение  $\alpha(\mu)$ ,  $\beta(\mu)$ , где  $\alpha(0) = \alpha_0$ ,  $\beta(0) = 0$ ,  $\alpha_0$  — некоторая фиксированная постоянная. Распишем подробнее уравнение (3.2):

$$\begin{aligned} P(M_1^0 + \beta_1, \dots, M_{m-1}^0 + \beta_{m-1}, \alpha_0 + \delta) + \\ + \mu R(M_1^0, \dots, M_{m-1}^0, \alpha_0) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заменим  $\alpha$  на  $\delta$  по формуле  $\alpha = \alpha_0 + \delta$ .

Для того, чтобы система уравнений (3.3) допускала решение  $\beta(\mu)$ ,  $\delta(\mu)$ , удовлетворяющее свойству  $\beta(0) = \delta(0) = 0$ , а система (1.1) допускала периодическое решение, обращающееся при  $\mu = 0$  в порождающее, необходимо, чтобы были выполнены условия

$$P(M_1^0, \dots, M_{m-1}^0, \alpha) = 0. \quad (3.4)$$

Если при этом выполняется условие

$$\Delta = \frac{\partial(P_1, \dots, P_m)}{\partial(M_1^0, \dots, M_{m-1}^0, \alpha)} \neq 0, \quad (3.5)$$

то указанное периодическое решение действительно существует и оно единственno. Это решение является аналитическим относительно цели  $\mu$ .

Получено непосредственное обобщение результатов Андронова, Витта, Малкина о существовании периодических решений автономных систем без запаздывания в случае аналитических правых частей уравнений (1.2).

2) Допустим теперь, что  $\Delta = 0$ , но не все его миноры  $(m-1)$ -порядка равны нулю. Для определенности предположим, что минор  $m-1$ -порядка, получаемый зачеркиванием первого столбца и  $m$ -строки, отличен от нуля. Обозначим его через  $\Delta_1$ . В этом случае можно получить решения уравнения (3.4) относительно, например,  $\beta_2, \dots, \beta_{m-1}, \delta$  в виде рядов, расположенных по степеням  $\beta_1, \mu$ :

$$\begin{aligned} \beta_i &= a_1^{(k)} \beta_2 + a_2^{(k)} \beta_1^2 + \dots + b_1^{(k)} \mu + \beta_1 \mu (\dots) + \dots \\ (i &= 2, \dots, m-1; k = 1, \dots, m-2), \\ \delta &= c_1 \beta_1 + c_2 \beta_1^2 + \dots + d_1 \mu + \beta_1 \mu (\dots) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Постоянные коэффициенты  $a_j^{(k)}, b_j^{(k)}, c_j, d_j$  определяются методом неопределенных коэффициентов. Если найденные таким путем ряды (3.6) подставить в  $m$ -уравнение (3.3), то последнее, если только оно не обращается в тождество, станет уравнением относительно  $\beta_1$ ,  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\Delta}{\Delta_1} + \frac{1}{2!} \beta_1^2 \left[ \sum_{i=2}^{m-1} \frac{\partial \Delta}{\partial M_i} \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_1} + (-1)^{(l+i)} \frac{\partial \Delta}{\partial M_1} + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \frac{\Delta_{1m}}{\Delta_1} \right] + \\ + \frac{1}{3!} \beta_1^3 S^{(3)} + \dots + \mu R_m(M_1^0, \dots, M_{m-1}^0, \alpha_0) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $S^{(k)}$  — коэффициент при  $\beta_1^k$ ,  $l$  и  $j$  — соответственно номера строк и столбца в определителе  $\Delta$ ,  $\Delta_{1i}$  — минор  $(m-1)$ -порядка, получаемый из  $\Delta_1$  при подстановке вместо  $i$ -столбца  $(m-1)$ -строк первого столбца;  $S^{(k)}$  — известные функции от частных производных определителя  $\Delta$  по переменным  $M_1, \dots, M_{m-1}, \alpha$  и выражений типа  $\frac{\Delta_{1i}}{\Delta_1}$ .

Допустим, что коэффициент при первой степени  $\mu$  отличен от нуля. На основании правила многоугольника Ньютона (стр. 380, [6]) можно сделать следующее заключение: если  $S^{(k-1)} = 0$ ,  $S^{(k)} \neq 0$ , то уравнение (3.7) допускает  $k$  аналитических решений относительно дробных степеней  $\mu^{1/k}$ . При  $k$  нечетном все  $k$  решений будут действительными, а при  $k$  четном действительные решения возможны лишь тогда, когда выполнено условие  $S^{(k)} R_m < 0$  [7,8]. Тогда можно сформулировать следующую теорему.

*3) Теорема.* Для того, чтобы система (1.1) при достаточно малом  $\mu$  допускала периодическое решение периода  $T = (2\pi/\omega)(1 + \mu\alpha)$ , обращающееся при  $\mu = 0$  в порождающее (1.3), необходимо, чтобы параметры  $M_1^0, \dots, M_{m-1}^0, \alpha_0$  удовлетворяли уравнениям (3.4). Если при этом выполняются условия

$$S^{(k-1)} = 0, \quad S^{(k)} \neq 0 \quad (3.8)$$

и кроме того для четных  $k$  имеет место

$$S^{(k)} R_m < 0 \quad (k = 2n), \quad (3.9)$$

то периодические решения действительно существуют и они разлагаются в ряд по степеням  $\mu^{1/k}$ . Полученный результат является обобщением результатов [7,8].

#### 4. ЧАСТНЫЙ ПРИМЕР И ЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим простейшую следующую систему

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_3 x = -\mu [lx(t-\tau) + \gamma x^3(t-\tau) + \\ + mx^5(t-\tau) + nx^7(t-\tau)], \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$a_1 = \frac{AL}{a}, \quad a_2 = \frac{RA + Lk}{a}, \quad a_3 = E(\psi_0) = \frac{Rk + Ca}{a}.$$

В работе [8] эта система рассматривалась без запаздывания. Составим характеристическое уравнение для системы  $\alpha_1 \ddot{x} + \alpha_2 \dot{x} + \alpha_3 x = 0$  и выпишем условия, при которых характеристическое уравнение имеет пару мнимых корней

$$\alpha_1 \alpha_3 > 0, \quad \alpha_2 = 0. \quad (4.2)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение имеет один нулевой корень. Уравнение (4.1) с учетом (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 \ddot{x} + \alpha_3 \dot{x} = -\mu [lx(t-\tau) + \gamma x^3(t-\tau) + \\ + mx^5(t-\tau) + nx^7(t-\tau)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Порождающее решение имеет вид

$$x^{(0)} = M_0 \cos(\omega t) + L_0. \quad (4.4)$$

Сделав замену переменной  $t = t_1(1 + \mu h)$ , найдем, прежде всего, периодическое решение вспомогательной системы

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{d^3x}{dt_1^3} (1 - 3\mu h + 6\mu^2 h^2 + \dots) + \alpha_3 \frac{dx}{dt_1} (1 - \mu h + \mu^2 h^2 + \dots) = \\ = -\mu [lx(t_1 - \tau') + \gamma x^3(t_1 - \tau') + mx^5(t_1 - \tau') + \\ + nx^7(t_1 - \tau')] + W_1 \cos(\omega t_1) + W_2 \sin(\omega t_1) + W_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

и  $W_1, W_2, W_3$  в виде (2.2). Начальные условия для искомых периодических функций зададим так:

$$\begin{aligned} x^{(0)}(0) = x_0^{(1)} + x_0^{(2)}, \quad x_0^{(1)} = M_0 + \beta_1, \quad x_0^{(2)} = L_0 + \beta_2, \\ x_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \dot{x}_i(0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \\ \ddot{x}_i(0) = c_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Чтобы уравнение (4.1) имело периодическое решение периода  $T = (2\pi/\omega)(1 + \mu h)$ , необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$\begin{aligned} W_i(M_0 + \beta_1, L_0 + \beta_2, h_0 + \delta) = 0 \\ (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

допускала решение  $\beta_1(\mu), \beta_2(\mu), \delta(\mu)$ . Полагая в (4.7)  $\mu = \beta_1 = \beta_2 = \delta = 0$ , получим систему уравнений для определения  $M_0, L_0, h_0$ :

$$\begin{aligned} P_1(M_0, L_0) = 0, \\ P_2(M_0, L_0) - 2\alpha_3 \omega h_0 M_0 = 0, \\ P_3(M_0, L_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Допустим, что функциональный определитель системы (4.8)  $\Delta = 0$ , но не все его первые миноры равны нулю:

$$\Delta = 2\alpha_3 M_0 \omega \Delta = 2\alpha_3 M_0 \omega \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} & \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \\ \frac{\partial P_3}{\partial M_0} & \frac{\partial P_3}{\partial L_0} \end{array} \right| = 0, \quad \Delta = 0. \quad (4.9)$$

Допустим для определенности, что  $\partial P_1 / \partial L_0 \neq 0$ .

Тогда, повторяя рассуждения пункта 2 раздела 3, получим уравнение (3.7) в виде

$$\begin{aligned}
 & \beta_1 \frac{\Delta_1}{\partial P_1 / \partial L_0} + \frac{1}{2!} \beta_1^2 \frac{\frac{\partial \Delta_1}{\partial L_0} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} - \frac{\partial \Delta_1}{\partial M_0}}{\frac{\partial P_1}{\partial L_0}} + \\
 & + \frac{1}{3!} \beta_1^3 \frac{-\frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial L_0^2} \left[ \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} \right]^2 + 2 \frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial M_0 \partial L_0} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} - \frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial M_0^2}}{\frac{\partial P_1}{\partial L_0}} + \\
 & + \frac{1}{4!} \beta_1^4 \left\{ \frac{\frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial L_0^3} \left[ \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} \right]^3 - 3 \frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial M_0 \partial L_0^2} \left[ \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} \right]^2}{\frac{\partial P_1}{\partial L_0}} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3 \frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial M_0^2 \partial L_0} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} - \frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial M_0^3}}{\frac{\partial P_1}{\partial L_0}} \right\} + \dots + \\
 & + \mu \left\{ M_1 \frac{\partial P_3}{\partial M_0} + L_1 \frac{\partial P_3}{\partial L_0} - 3\alpha_3 \omega \left[ \frac{4A_1}{\sin(3\omega\tau)} \frac{\partial A_1}{\partial L_0} + \frac{20A_2}{\sin(5\omega\tau)} \frac{\partial A_2}{\partial L_0} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{A_4}{\sin(2\omega\tau)} \frac{\partial A_4}{\partial L_0} + \frac{10A_5}{\sin(4\omega\tau)} \frac{\partial A_5}{\partial L_0} + \frac{35A_6}{\sin(6\omega\tau)} \frac{\partial A_6}{\partial L_0} \right] \right\} + \dots = 0. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Следует заметить, что коэффициенты при  $\beta_1^k$  выписываются в указанной закономерности при условии, что коэффициенты при  $\beta_1$  в степени, меньшей  $k$ , все равны нулю.

Обозначим коэффициенты при первой степени  $\mu$  через  $R$ . Допустим, что  $R$  и коэффициент при  $\beta_1^2$  отличны от нуля и выполняется условие

$$\left[ \frac{\partial \Delta_1}{\partial L_0} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} - \frac{\partial \Delta_1}{\partial M_0} \right] \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^{-1} R < 0.$$

Тогда периодические решения уравнения (4.1) существуют и разлагаются в ряд по степеням  $\beta_1^{1/2}$ . Предполагая эти условия выполненными, ищем периодическое решение уравнения (4.1) и поправку к периоду в виде  $x = x_0 + \mu^{1/2} x_1 + \mu x_2 + \dots$ ;  $h = h_0 + \mu^{1/2} h_1 + \mu h_2 + \dots$ . Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, получаем

$$x_0 = M_0 \cos(\omega t_1) + L_0, \quad x_1 = M_1 \cos(\omega t_1) + L_1.$$

Для определения  $M_1$ ,  $L_1$ ,  $h_1$  получаем систему уравнений

$$-M_1 \frac{\partial P_1}{\partial M_0} - L_1 \frac{\partial P_1}{\partial L_0} = 0,$$

$$\begin{aligned} -M_1 \left( \frac{\partial P_2}{\partial M_0} - 2\alpha_3 \omega h_0 \right) - L_1 \frac{\partial P_2}{\partial L_0} + 2\alpha_3 \omega h_1 M_0 &= 0, \\ -M_1 \frac{\partial P_3}{\partial M_0} - L_1 \frac{\partial P_3}{\partial L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Определитель этой системы равен нулю. Допустим, что хотя бы один из миноров второго порядка определителя  $\Delta$  отличен от нуля. Например,

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} & \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \\ \frac{\partial P_2}{\partial M_0} - 2\alpha_3 \omega h_0 & \frac{\partial P_2}{\partial L_0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда можно определить  $M_1$  и  $L_1$  в зависимости от  $h_1$ :

$$M_1 = -\frac{2\alpha_3 \omega M_0 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial L_0}}{\delta}, \quad L_1 = \frac{2\alpha_3 \omega M_0 h_1 \frac{\partial P_1}{\partial M_0}}{\delta}.$$

Для определения  $h_1$  воспользуемся условием совместности системы (4.11) трех линейных неоднородных уравнений с определителем, равным нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} &= k \frac{\partial P_3}{\partial M_0}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial L_0} = k \frac{\partial P_3}{\partial L_0}. \\ h_1^2 &= \left\{ -2\omega h_0^2 \tau M_0 + 6 \cos(\omega\tau) \left( \frac{4A_1}{\sin(3\omega\tau)} \frac{\partial A_1}{\partial M_0} + \frac{20A_2}{\sin(5\omega\tau)} \frac{\partial A_2}{\partial M_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{56A_3}{\sin(7\omega\tau)} \frac{\partial A_3}{\partial M_0} + \frac{A_4}{\sin(2\omega\tau)} \frac{\partial A_4}{\partial M_0} + \frac{10A_5}{\sin(4\omega\tau)} \frac{\partial A_5}{\partial M_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{35A_6}{\sin(6\omega\tau)} \frac{\partial A_6}{\partial M_0} \right) + \frac{12 \sin(\omega\tau)}{M_0} \left( \frac{6B_1^2}{\cos(3\omega\tau)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{50B_2^2}{\cos(5\omega\tau)} + \frac{196B_3^2}{\cos(7\omega\tau)} + \frac{B_4^2}{\cos(2\omega\tau)} + \frac{20B_5^2}{\cos(4\omega\tau)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{105B_6^2}{\cos(6\omega\tau)} \right) - 3k \left( \frac{4A_1}{\sin(3\omega\tau)} \frac{\partial A_1}{\partial L_0} + \frac{20A_2}{\sin(5\omega\tau)} \frac{\partial A_2}{\partial L_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{A_4}{\sin(2\omega\tau)} \frac{\partial A_4}{\partial L_0} + \frac{10A_5}{\sin(4\omega\tau)} \frac{\partial A_5}{\partial L_0} + \frac{35A_6}{\sin(6\omega\tau)} \frac{\partial A_6}{\partial L_0} \right) \right\} \frac{2\alpha_3 \omega M_0^2}{\delta^2} \times \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial M_0^2} - k \frac{\partial^2 P_3}{\partial M_0^2} \right) + \left( \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial L_0^2} - k \frac{\partial^2 P_3}{\partial L_0^2} \right) \right] + \\ &\quad + 2 \frac{\partial P_1}{\partial L_0} \frac{\partial P_1}{\partial M_0} \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial M_0 \partial L_0} - k \frac{\partial^2 P_3}{\partial M_0 \partial L_0} \right) \left\}^{-1}. \end{aligned}$$

Продолжая расчет указанным образом, можно определить периодическое решение уравнения и поправку к периоду с любой степенью точности.

Заметим, что доказанная теорема для случая кратных корней разрешающего уравнения имеет место и в случае запаздывания  $\tau$ , равного нулю.

Подобные результаты для автономных систем без запаздывания были получены Проскуряковым [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Айдронов, А. А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934).
2. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
3. С. Н. Шиманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 456 (1960).
4. С. Н. Шиманов, ПММ, 21, 244 (1957).
5. В. Д. Мак-Миллан, Динамика твердого тела, ИЛ, М., 1951.
6. К. М. Цой, Математические записки Ур. ун-та, 4, тетрадь 4, 91 (1964).
7. К. М. Цой, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1170 (1964).
8. Н. Н. Бутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
9. А. П. Проскуряков, ПММ, 25, 954 (1961).

Уральский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 марта 1966 года.

#### ON PERIODICAL OSCILLATIONS OF QUASI-LINEAR SELF-CONTAINED SYSTEMS WITH DELAY

*K. M. Tsoy, S. N. Shimanov*

Conditions are obtained of the existence of periodic solutions of the quasi-linear self-contained systems with  $n$ -degrees of freedom and the constant delay in time in the case of multiple roots of the resolution levels. The above conditions were found by the method of the additional systems, being developed earlier for the quasi-linear systems without taking the delay into account. As an example the behaviour of the zeroth-order servomechanism with delay is considered.

УДК 531.391 + 62 — 501.7

## ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ. I

*Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд*

Вводится определение и анализируется смысл числа степеней свободы, проявляющихся при наблюдении установившегося сигнала нерегулируемого объекта. Обсуждается методика оценки этого числа в случае движения автономного объекта вблизи точки покоя.

Когда числом степеней свободы называют половину минимального числа параметров, полностью определяющих движение системы, речь идет об идеализированной схеме. Если даже ограничиться (что делается и в данной работе) рассмотрением объектов, поведение которых с любой точностью описывается соответствующими обыкновенными дифференциальными уравнениями, то рост требований к аппроксимации движения приведет к увеличению порядка уравнения. Исходя формально из приведенного определения, пришлось бы сказать лишь, что число степеней свободы каждого реального объекта бесконечно. Поскольку в эксперименте проявляется только конечная, как правило небольшая, совокупность параметров объекта, определение числа существенных степеней свободы уточняют, связав с условиями наблюдений; при этом внимание обращается на зависимость от начальных условий [1]. Анализ же нерегулируемого объекта чаще всего приходится вести по установившемуся движению, когда роль начальных условий исчезает. Обсуждение понятия «числа степеней свободы» в такого рода задачах и составляет основную цель данной статьи.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СУЩЕСТВЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Исследуя процессы различной природы, теория колебаний рассматривает с единой точки зрения системы, движение которых получило одинаковое математическое описание. Последнее возникает при схематизации поведения реального объекта и часто сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с начальными условиями; числом степеней свободы такой идеализированной схемы называют половину порядка этого уравнения. Таким определением пользуются в традиционной (прямой) задаче теории колебаний, когда изучение объекта ведется в последовательности: эксперимент → схематическое описание модели объекта → анализ уравнения модели → сравнение движения схематической модели с поведением объекта. Исследование нерегулируемого объекта приходится вести, исходя из иной последовательности операций [2], а именно: запись сигнала → уравнение для изменений во времени параметров объекта → схематическая модель. Подобное рассмотрение, основа которого заключается в отыскании уравнений по движению, характерно для таких обратных задач анализа [3], где экспериментатор никак не возмущает поведение изучаемого объекта, наблюдая лишь зависи-

мость сигнала от времени\*. Остановимся на одномерном случае, когда удается регистрировать только один параметр объекта  $\chi(t)$ .

В прямой задаче теории колебаний возможны как динамический, так и статистический варианты рассмотрения. Во втором варианте уравнение модели обычно пишется в виде

$$\frac{d^q \chi}{dt^q} - h^{(q)}\left(\chi, \frac{d\chi}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1}\chi}{dt^{q-1}}; t\right) = \psi_1(t), \quad \langle \psi_1(t) \rangle = 0, \quad (1a)$$

где  $h^{(q)}[\chi; t]$  — регулярная функция,  $\psi_1(t)$  — как правило, стационарный случайный процесс с равномерным спектром («белый шум»); в динамическом варианте  $\psi_1(t) \equiv 0$ . В обратной задаче динамический вариант невозможен; пояснить это легче всего на примере установившегося движения автономного объекта. Почти во всех рассматриваемых в физике, химии, биологии и т. д. примерах установившаяся траектория  $\chi = \chi_0(t)$  динамической модели в ее фазовом пространстве  $\left(\chi, \frac{d\chi}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1}\chi}{dt^{q-1}}\right)$

— это точка покоя или предельный цикл. Очевидно, и самые подробные сведения об этой нульмерной или одномерной траектории не восстанавливают фазовый портрет  $q$ -мерной динамической модели, т. е. без учета отклонений объекта от динамического установившегося движения нельзя провести анализ модели. Под действием же возмущения  $\psi(t)$  изображающая точка сходит с кривой  $\chi = \chi_0(t)$ , «затеряя» ее  $q$ -мерную окрестность, — так внутренние флуктуации, играя роль эффективного воздействия на динамическую модель, дают возможность исследовать proximity кривой  $\chi = \chi_0(t)$  структуру функции  $h^{(q)}[\chi]$ .

Существенное, хоть и менее принципиальное, значение статистики проявляется также в необходимости учета искажений сигнала, возникающих как из-за помех на его пути от объекта до наблюдателя, так и вследствие различного рода ошибок при записи. Для принятого наблюдателем сигнала  $\tilde{x}(t)$  следует писать поэтому

$$\tilde{x}(t) = U[\chi(t), \eta_1(t)], \quad \langle \eta_1(t) \rangle \equiv 0. \quad (2a)$$

Считая в дальнейшем внешний шум  $\eta_1(t)$  достаточно слабым и проводя замену

$$x(t) = U[\chi(t), 0], \quad \eta(t) = \frac{\partial U}{\partial \eta_1} [\chi(t), 0] \eta_1(t),$$

будем обсуждать более простую систему, в которую внешний шум  $\eta(t)$  входит аддитивно:

$$\frac{d^q x}{dt^q} - H^{(q)}\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}}; t\right) = \psi(t), \quad \langle \psi(t) \rangle \equiv 0, \quad (1b)$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \eta(t), \quad \langle \eta(t) \rangle \equiv 0. \quad (2b)$$

Задача исследования нерегулируемого объекта, состоящая прежде всего в восстановлении динамической характеристики  $H^q[x(t); t]$  по сигналу  $\tilde{x}(t)$ , очевидно, неразрешима без априорных предположений о свойствах функций  $H^{(q)}$ ,  $\psi$ ,  $\eta$ .

\* Вместо слов «обратная задача теории колебаний» здесь можно употребить и другое название — «метод чёрного ящика без входа», поскольку обычная кибернетическая схема «чёрного ящика» заключается в сопоставлении откликов «на выходе ящика» с воздействиями экспериментатора на объект, осуществлямыми через «вход ящика» [4].

Такие предположения, приводящие к однозначности решения обратной задачи, должны исходить из опыта, накопленного в близких разделах естествознания, из всего комплекса предварительной информации о природе исследуемого объекта и, наконец, из соображений максимальной простоты. Использование названных тут принципов для выделения класса  $H = \{H_a^{(q)}[x; t]\}$  дифференциальных операторов мы постараемся пояснить ниже на примере простейших типов сигнала объекта. Пока лишь заметим, что по смыслу задачи каждый такой класс  $H$  должен содержать операторы различного порядка. Сколько-нибудь подробные сведения о флюктуациях  $\psi_1(t)$  и  $\eta_1(t)$  оказываются при анализе динамической структуры объекта несущественными.

Проводимые ниже рассуждения исходят практически из единственного важного и обычно оправданного допущения о малости интервалов корреляции этих случайных процессов. Отметим, что переход от (1a), (2a) к уравнениям (1б), (2б), вообще говоря, приводит к некоторому увеличению интервалов корреляции внутренних и внешних флюктуаций. Сформулируем теперь определение числа степеней свободы.

Обозначим буквой  $A$  статистический критерий согласия сигнала  $\tilde{x}(t)$  с гипотезой

$$\frac{d^q}{dt^q} [\tilde{x}(t) - \eta(t)] - H_a^{(q)}[\tilde{x}(t) - \eta(t); t] = \psi(t) \quad (t \in B), \quad (3)$$

где  $H_a^{(q)}[x; t] \equiv H_a^{(q)}\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}}; t\right)$  — коротко-коррелированные флюктуации:  $\langle \psi(t) \rangle \equiv 0$ ,  $\langle \eta(t) \rangle \equiv 0$ ,  $\langle \psi(t + \tau) \psi(t) \rangle = 0$  при  $|\tau| > \tau_1$ ,  $\langle \eta(t + \tau) \eta(t) \rangle = 0$  при  $|\tau| > \tau_2$ ;  $B$  — множество значений времени, в которые проведена запись  $\tilde{x}(t)$ . Под коротко-коррелированностью случайных процессов  $\psi$  и  $\eta$  мы будем понимать здесь следующее соотношение между  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $B$ : если  $\tau_m = \max(\tau_1, \tau_2)$ , то имеется последовательность  $t_1, t_2, \dots, t_N$  точек регистрации сигнала ( $t_i \in B$ ), такая, что  $\sqrt{N} \gg 1$ ,  $|t_i - t_j| > \tau_m$  при  $i \neq j$ . Половину наименьшего порядка среди операторов  $H_a^{(q)}$  из класса  $H$ , для которых выполнено условие (3), будем называть числом степеней свободы анализируемого объекта в смысле  $(\tilde{x}, H, A, B)$ :

$$p(\tilde{x}, H, A, B) = \frac{1}{2} \min \left\{ q \left| \frac{d^q}{dt^q} [\tilde{x}(t) - \eta(t)] - H_a^{(q)}[\tilde{x}(t) - \eta(t); t] \right|_{(A, B)} = \psi(t), H_a^{(q)} \in H \right\}. \quad (4)$$

Критерий  $A$  для проверки справедливости формулы (3) полагается строить в соответствии с ожидаемыми свойствами случайных процессов. Вопрос о выборе статистического критерия при анализе структуры объекта по его сигналу требует специального обсуждения. Оставаясь в рамках вводной статьи, ограничимся здесь лишь краткими пояснениями. Пусть интенсивность внешнего шума пренебрежимо мала, тогда вопрос о числе степеней свободы в принципе можно решать испытанием поочередно операторов  $H_a^{(q)}$  класса  $H$ , а именно, проверкой по записи сигнала

$\tilde{x}(t) \simeq x(t)$  статистических свойств функций  $\psi_a^{(q)}(t) \equiv \frac{d^q x}{dt^q}(t) - H_a^{(q)}[x(t); t]$ .

Условие  $\langle \psi_a^{(q)}(t) \rangle \equiv 0$  в простейших примерах обеспечивается пра-

вильным выбором отсчета сигнала. Полагая, что эта часть задачи уже решена, остановимся лишь на оценке интервала корреляции пробных функций  $\psi_a^{(q)}(t)$ , т. е. сдвига  $\tau$ , начиная с которого практически обращается в нуль коррелограмм  $\rho_a^{(q)}(t, \tau) \equiv \langle \psi_a^{(q)}(t+\tau) \psi_a^{(q)}(t) \rangle \{ \langle [\psi_a^{(q)}(t+\tau)]^2 \rangle \times \langle [\psi_a^{(q)}(t)]^2 \rangle \}^{-1/2}$ .

Проведение такой оценки в конкретных примерах требует учета разнообразных условий наблюдения, в частности, структуры множества  $B$ . Во многих задачах, связанных с лабораторными измерениями,  $B$  представляет из себя интервал времени  $t_1 < t < t_2$ . При изучении астрофизических объектов регистрация сигнала обычно ведется на совокупности большого числа неперекрывающихся интервалов; в ряде экспериментов записывается последовательность значений сигнала в дискретные моменты времени и т. д. Для пояснения характера рассуждений, проводимых при расчете числа степеней свободы, проще всего предположить, что сигнал  $x(t)$  вместе с некоторыми его производными  $\frac{dx}{dt^q}(t)$  ( $q = 1, 2, \dots, q_0$ ) (или короче  $q = \overrightarrow{1, q_0}$ ) регистрируется в дискретные моменты времени, равнотстоящие между собой внутри ряда неперекрывающихся интервалов  $[t_k^{(l)}, t_k^{(L)}]$  одинаковой длины:

$$B_1 = \{t_k^{(l)}; k = \overrightarrow{1, K}, l = \overrightarrow{1, L}\}, \quad t_k^{(l+1)} = t_k^{(l)} + \Delta, \quad t_{k+1}^{(l)} \geq t_k^{(L)}, \quad (5)$$

причем  $K \gg 1$ ,  $L \gg 1$ . При заданной так структуре множества  $B'$  задача отыскания числа степеней свободы\* сводится в принципе к проверке для различных  $H_a^{(q)} \in H$  условия

$$\langle \psi_a^{(q)}(t_k^{(l)} + s\Delta) \psi_a^{(q)}(t_k^{(l)}) \rangle = 0 \quad (k = \overrightarrow{1, K}).$$

Такая проверка связана со статистическим усреднением по единственной имеющейся у экспериментатора реализации случайного процесса  $x(t)$ , для чего необходимо воспользоваться подходящим статистическим критерием. Выбрав оператор  $H_a^{(q)}$ , обозначим  $\psi_{k,l} \equiv \psi_a^{(q)}(t_k^{(l)})$ . Естественно допустить, что при всех  $s > m$  случайные величины  $\psi_a^{(q)}(t)$  и  $\psi_a^{(q)}(t + s\Delta)$  независимы (т. е. временной ряд  $\psi_{k,l+s}$   $m$ -зависим [5, 6]), что при фиксированных  $l$  и  $s$  обеспечивает независимость  $K$  двумерных величин  $\{(\psi_{k,l}, \psi_{k,l+s}), k = \overrightarrow{1, K}\}$ . Можно сделать и более сильное допущение, считая, что  $\{(\psi_{k,l}, \psi_{k,l+s})\}$  является выборкой двумерного гауссова процесса. Тогда при операторах  $H_a^{(q)}$ , обеспечивающих выполнение условия (4), выборочная нормированная корреляционная функция (выборочный коррелограмм)

$$z_{l,s} \equiv \sum_{k=1}^K \psi_{k,l} \psi_{k,l+s} \left[ \sum_{m=1}^K (\psi_{m,l})^2 \sum_{n=1}^K (\psi_{n,l+s})^2 \right]^{-1/2} \quad (6)$$

имеет нормальное асимптотическое распределение (при  $K \rightarrow \infty$ ) со средним значением, равным нулю, и квадратичным отклонением, равным  $(K-1)^{-1/2}$  [7]. Обозначим буквой  $M$  число независимых оценок

\* Запись  $x(t)$  в дискретных точках, очевидно, неэквивалентна записи в тех же точках как сигнала, так и нескольких его производных ( $B_1 \neq B$ ). При фиксированной точности регистрации  $x(t)$  множество  $B$ , соответствующее (5), можно считать состоящим из небольших интервалов, каждый из которых имеет центром одну из точек  $t_k^{(l)} \in B_1$ . При записи же только  $x(t)$  в дискретных точках целесообразно от дифференциальных операторов  $H_a^{(q)}$  перейти к разностным (см. раздел 2).

$r_{l_p, s_p}$  коррелограмма ( $M \sim L$ ). Распределения составленных из них сумм

$$b' = \left( \frac{K-1}{M} \right)^{1/2} \sum_{p=1}^M r_{l_p, s_p}, \quad (7a)$$

$$b'' = (K-1) \sum_{p=1}^M (r_{l_p, s_p})^2 \quad (7b)$$

хорошо аппроксимируются соответственно нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией и распределением  $\chi_M^2$ . Используя свойства последних, нетрудно для любого числа  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , найти такие значения  $x'_\beta$ ,  $x''_\beta$ , что вероятность выполнения соответствующего неравенства

$$|b'| < x'_\beta \quad (8a)$$

или

$$|M - b''| < x''_\beta \quad (8b)$$

равна  $1 - \beta$ . Фиксируя с самого начала уровень значимости  $\beta$ , будем считать критерий  $A'_\beta$  (или  $A''_\beta$ ) выполненным, если удовлетворено соответствующее условие (8а). Можно построить и другие критерии, например, основанные на центральной предельной теореме Диананда [6] для зависимых величин, когда на слагаемые сумм вида (6) наложены более слабые условия, чем независимость. Оцененное на основании одного из таких статистических критериев  $A_\beta$  (или совокупности этих критериев) число  $p$  и будет, по определению, числом степеней свободы в смысле  $(x, H, A_\beta, B)$ .

## 2. ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПОКОЯ

Перейдем теперь от общих рассуждений к простым примерам, конкретизируя в какой-то мере свойства изучаемого объекта, чтобы иметь возможность несколько подробнее обсудить смысл числа степеней свободы, проявляющихся при его установившемся движении. Это следует сделать, поскольку сформулированное выше определение числа  $p(x, H, A, B)$  нужно сомкнуть с привычным, принятым в теории колебаний понятием. Начнем с движения автономного объекта под действием внутренних флюктуаций вблизи положения устойчивого равновесия  $x = x_0$  его динамической модели, уравнения которой  $\frac{dx}{dt} = H(\bar{\vartheta})[x]$ . Если

интенсивность флюктуационного воздействия невелика и вероятность больших уходов изображающей точки из состояния покоя иренебрежимо мала, то рассмотрения можно вести, линеаризуя динамическую характеристику  $H(\bar{\vartheta})[x]$  по отклонениям от равновесия. Таким образом, в обратной задаче, вычисляя в первом приближении динамическую структуру такого объекта, можно формировать класс  $H$  из одних лишь

линейных дифференциальных операторов, для которых  $(x = x_0, \frac{dx}{dt} = 0,$

$\dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}} = 0)$  — устойчивая точка покоя. Пренебрегая пока аддитивным шумом  $\eta(t)$ , будем, перенося начало отсчета сигнала в точку  $x = x_0$ , писать уравнение сигнала в виде

$$\frac{d^{\bar{q}}x}{dt^{\bar{q}}} (t) - \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \zeta_l \frac{d^l x}{dt^l} (t) = \psi(t). \quad (9)$$

Непосредственно вытекающий из определения (4) метод расчета числа степеней свободы опробованием по очереди операторов  $H_a^{(q)}$  класса  $\mathbf{H}$ , очевидно, практически невыполним даже в простейшем случае (9), поэтому следует предложить более реальные пути вычисления  $\bar{p} = \bar{q}/2$ . Соответствующий уравнению (9) коррелограмм сигнала  $x(t)$  при малости времени  $\tau_1$  корреляции стационарных флюктуаций  $\psi(t)$  по сравнению с характерными временами динамической модели имеет довольно простой вид.

Например, при отсутствии кратных корней характеристического уравнения ( $\lambda_l \neq \lambda_m$  при  $l \neq m$ ) имеем

$$\rho_r(\tau) \equiv \langle x(t) x(t + \tau) \rangle \langle x^2 \rangle^{-1} = \sum_{k=1}^{\bar{q}} D_k \exp(\lambda_k \tau), \quad \sum_{k=1}^{\bar{q}} D_k = 1. \quad (10)$$

Проведя усреднение по достаточно длительной записи  $\tilde{x}(t)$ , можно получить выборочный коррелограмм  $r_x^{(B)}(\tau) \simeq \rho_x(\tau)$ . Но определить в разложении (10) по графику функции  $r_x^{(B)}(\tau)$  число слагаемых экспонент (в общем случае с комплексными  $\lambda_k$ ) непросто. Нам неизвестен пока надежный метод непосредственного решения этой задачи вычислительной математики даже в случае (10) априорного отсутствия кратных характеристических корней, и трудно поэтому сказать, насколько такой метод окажется устойчивым по отношению к случайным отклонениям  $r_x^{(B)}(\tau)$  от  $\rho_x(\tau)$ . Сказанное вынуждает нас остановиться на другом способе оценки числа степеней свободы — надежном, но трудоемком.

Допустим вначале, что число  $\bar{p} = \bar{q}/2$  известно, тогда анализ динамической структуры объекта вблизи состояния покоя можно вести следующим образом. Будем умножать уравнения (7а) — (7б) по очереди на

$x(t - \tau)$ ,  $\frac{d}{dt} x(t - \tau), \dots, \frac{d^{\bar{q}-1}}{dt^{\bar{q}-1}} x(t - \tau)$  и усреднять при  $|\tau| > \tau_1$ . Учтя, что

$\langle \psi(t) \psi(t + \tau) \rangle = 0$  при  $|\tau| > \tau_1$  и  $x(t) = \int_{-\infty}^t \xi_{\bar{q}}(\theta) \psi(\theta) d\theta$ , где  $\xi_{\bar{q}}(\theta)$  — отклик динамической модели, соответствующей (9), на  $\delta$ -импульс, и обозначив  $\omega_{k,l}(\tau) = \left\langle \frac{d^k}{dt^k} x(t) \frac{d^l}{dt^l} x(t - \tau) \right\rangle$ , получим при этом

$$\omega_{\bar{q},m}(\tau) = \sum_{l=0}^{\bar{q}-1} \zeta_l \omega_{l,m}(\tau), \quad m = \overline{0, q-1}, \quad |\tau| > \tau_1. \quad (11a)$$

Система линейных алгебраических уравнений (9) позволяет по корреляционной матрице  $\|\omega_{k,l}(\tau)\|$  ( $k = 0, \bar{q}$ ,  $l = 0, \bar{q}-1$ ) вычислить  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{\bar{q}-1}$  — характеристики динамической модели объекта вблизи ее точек покоя. Поскольку в обсуждаемой здесь задаче число  $\bar{p}$  неизвестно, приходится проводить эти вычисления последовательно при  $q = 1, 2, 3, \dots$ , каждый раз проверяя полученный оператор  $H_a^{(1)}, H_a^{(2)}, H_a^{(3)}, \dots$  по схеме, обрисованной в конце первого раздела. Отметим одно свойство выборочной корреляционной матрицы, в какой-то мере облегчающее намеченную тут методику оценки числа  $\bar{p}$ .

Выпишем компоненты соответствующей выборочной корреляционной матрицы  $\|w_{k,l}(\tau)\|$ :

$$w_{k,l}(\tau) = (\text{mes } B)^{-1} \int_B \frac{d^k x}{dt^k}(t) \frac{d^l x}{dt^l}(t - \tau) dt \quad (k = \overrightarrow{0, q}, l = \overrightarrow{0, q-1})$$

и вычислим функцию

$$Z(\tau) = \sum_{l=0}^{q-1} \left| \frac{a}{d\tau} \ln z_l(\tau) \right|, \quad (116)$$

где  $z_l(\tau) = [W(\tau)]^{-1} \sum_{m=0}^{q-1} w_{n,m} W_{l,m}(\tau)$ ,  $l = \overrightarrow{0, q-1}$ ,  $W_{l,m}(\tau)$  — адъюнкта

квадратной матрицы  $\|w_{l,m}(\tau)\|$ ,  $l = \overrightarrow{0, q-1}$ ,  $m = \overrightarrow{0, q-1}$ ;  $W(\tau) = \det \|w_{l,m}(\tau)\|$ . Функция  $Z(\tau)$  оценивает степень зависимости вычисленных характеристик  $z_l(\tau)$  от абсолютной величины сдвига  $|\tau|$ ; при  $q \geq 2p$  она, в соответствии с формулами (11a) — (11b), обращается в нуль внутри интервала  $\tau_1 < |\tau| < \tau_B$ , при этом  $z_l \simeq \zeta_l$ . Существенное отличие  $Z(\tau)$  от нуля при  $|\tau| < \tau_1$  связано с корреляциями внутреннего шума объекта  $\psi(t)$ , при  $|\tau| > \tau_B$  зависимость функций  $z_l(\tau)$  от  $|\tau|$  вызвана ограниченностью множества  $B$  точек регистрации сигнала  $x(t)$ . Оценка значения  $\tau_B$ , которую мы тут проводить не будем, должна учитывать затухание при больших значениях компонент корреляционной матрицы  $\|w_{k,l}(\tau)\|$ , а значит и, соответственно, рост дисперсии ошибок для значений параметров  $z_s$ , вычисленных на основе выборочной матрицы  $\|w_{k,l}(\tau)\|$ .

Более подробно остановимся на анализе сигнала  $x_m = x(t_m)$ , записанного в  $N$ -равноотстоящих моментов времени

$$B = \{t_m; t_{m+1} = t_m + \Delta, m = \overrightarrow{0, N-1}\}.$$

Такие условия наблюдений обозначим символом  $(\Delta, T)$ , где  $T = (N-1)\Delta$  — длительность наблюдений. Переходя от производных к конечным разностям (например, по правилам [8, 9])

$$\frac{d^v x}{dt^v}(t_m) \rightarrow P_v(x_m) \equiv \sum_{j=-l'}^{l'} \Pi_j x_{m+j}, \quad l' + l'' \equiv c(v) \simeq v + 1, \quad (12a)$$

напишем в этом случае вместо (9) уравнение регрессии

$$P_q(x_m) - \sum_{j=0}^{q-1} \bar{\zeta}_j P_j(x_m) = \psi_m \quad (\bar{\zeta}_j \simeq \zeta_j, j = \overrightarrow{0, q-1}). \quad (12b)$$

Для построения статистического критерия  $A$  здесь вместо (7a) — (7b) лучше использовать статистику

$$r_j = \sum_{\mu=1}^{N-j} \psi_{\mu+j} \psi_{\mu} \left[ \sum_{v=1}^{N-j} (\psi_v)^2 \sum_{\lambda=1}^{N-j} (\psi_{\lambda+i})^2 \right]^{-1/2}.$$

\* В этой формуле усреднение, дающее компоненты выборочной матрицы, написано условно. В случае  $B$ , состоящего из нескольких интервалов времени общей длительностью  $T$ , выражение (10) можно понимать буквально, при этом  $(\text{mes } B = T)$ . В случае же регистрации вида (5) интегрирование следует заменить суммированием, а выражение  $\text{mes } B$  — числом точек регистрации.

Пусть для динамического оператора  $(\zeta_j, j = \overline{0, q-1})$  типа (12б) критерий  $A$  выполнен. Тогда значения  $\{\zeta'_j\}$ , вычисленные по сигналу  $\{x_m\}$  из уравнений

$$P_{v, q+1} = \sum_{j=1}^q \zeta'_{j-1} P_{v, j} \quad (v = \overline{1, q}), \quad (12в)$$

где

$$P_{v, i} = \sum_{s=s+1}^N P_{v-1}(x_{i-s}) P_{i-1}(x_i) \quad (s > c(q)),$$

при разных  $s$  являются различными реализациями случайного вектора, для которого  $\langle \zeta'_j \rangle = \zeta_j$  ( $j = \overline{0, q-1}$ ).

В соответствии с линейностью обсуждаемой системы и в той мере, в какой несущественен внешний шум, стандарты сигнала объекта  $\sigma_x$  и внутренних флюктуаций  $\sigma_\psi$  пропорциональны, при этом точность оценки коэффициентов  $\zeta_j$  не зависит от уровня внутренних шумов. Анализ точности, с которой целесообразно вести рассмотрение, должен учитывать отразившуюся в сигнале  $\tilde{x}(t) \simeq x(t)$  динамическую структуру объекта и условия наблюдения. При условиях же наблюдения  $(\Delta, T)$ , вычисления выборочного коррелограмма  $r_x(\tau)$  сигнала имеет смысл проводить только в интервале сдвигов  $\Delta_0 \leq \tau \leq T_0$ , где  $\Delta_0 = \Delta c(q)$ ,  $T_0 = \Omega(N-1) \Delta = \Omega T$ ,  $\Omega \sim 0,1$  — фактор урезания коррелограмма [5]. Дисперсия выборочного коррелограмма оценивается формулой

$$[\sigma_r(\tau)]^2 = \{1 - [\rho_x(\tau)]^2\}^2 N^{-1},$$

где  $\rho_x(\tau)$  — истинный коррелограмм сигнала. Будем считать каждое из слагаемых  $D_k \exp(\lambda_k \tau)$  в разложении (10) или изменение с  $\tau$  этого слагаемого неразличимым, если соответствующая относительная величина окажется меньшей, чем  $G(\tau) = z \sigma_x(\tau)$ , где, в зависимости от выбранного уровня значимости  $\beta$ ,  $z \simeq 1 \div 3$ . Стандарт выборочной оценки  $k$ -го слагаемого (10) пропорционален парциальной спектральной плоскости  $|\operatorname{Re}(D_k)|$ , поэтому характеристические числа  $\lambda_k$  неотличимы от  $\lambda = 0$ , если

$$|\operatorname{Re}[D_k - D_k \exp(\lambda_k \tau)]| \leq G(\tau) |\operatorname{Re}(D_k)|, \quad \Delta_0 \leq \tau \leq T_0. \quad (13)$$

Полагая  $\tau = \tau_{\max} = \Omega T$ , придем к первому необходимому условию существенности степени свободы, соответствующей характеристическому числу  $\lambda$ ,

$$|\lambda| > G(\Omega T)/\Omega T. \quad (14)$$

Если же

$$|\operatorname{Re}[D_k \exp(\lambda_k \tau)]| \leq G(\tau) |\operatorname{Re}(D_k)|, \quad \Delta_0 \leq \tau \leq T_0,$$

то вклад соответствующих степеней свободы в выборочный коррелограмм при условиях наблюдений  $(\Delta, T)$  останется незамеченным. Поэтому, подставив сюда  $\tau = \tau_{\min} = \Delta_0$ , напишем второе необходимое условие существенности степени свободы в виде

$$-\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{\Delta_0} |\ln[G(\Delta_0)]|. \quad (15)$$

Еще один критерий различимости

$$|\operatorname{Im}(\lambda)| < 2\pi/\Delta_0 \quad (16)$$

связан с совпадением при условиях наблюдений ( $\Delta, N$ ) корреляционных свойств, соответствующих всем характеристическим числам  $\lambda + s \frac{2\pi}{\Delta_0} i$ , где

$i = \sqrt{-1}$ ,  $s$  — любое целое число

Пусть  $G_q(\Delta; T)$  обозначает область значений комплексных характеристических чисел  $\lambda$ , вне которой проведение корреляционного анализа сигнала в силу высказанных тут соображений нецелесообразно. Соотношения (14) — (16) вместе с условием

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \quad (17)$$

устойчивости исследуемой точки покоя представляют оценки «сверху» для этой области (см. рис. 1). Исходные соотношения, используемые для определения границ, несколько условны, и надежность выявления степени свободы, связанной с характеристическим числом  $\lambda_k \in G_q(\Delta; T)$ , падает с приближением к границе лишь постепенно, но для упрощения рассуждений мы будем считать, что возможность анализа одинакова во всей области  $G_q(\Delta; T)$  и полностью исчезает вне ее. Более детальный расчет положения границ этой области позволил бы сузить  $G_q(\Delta; T)$ . Он проводиться здесь не будет, так как для уточнения оценок требуются априорные сведения о динамической структуре объекта.

Зависимость положения определенных выше формулами (14) — (17) границ  $G_q(\Delta; T)$  от условий наблюдения допускает наглядное обсуждение. Соотношение (14) можно переписать в виде оценки

$$|\lambda| > \frac{\chi}{\Omega TN^{1/2}} \simeq \frac{\chi}{\Omega \Delta N^{3/2}} \simeq \frac{\chi \Delta^{1/2}}{\Omega T^{3/2}}, \quad (18)$$

показывающей, как окружающий  $\lambda = 0$  вырез границы области стягивается к этой точке с ростом длительности  $T$  наблюдений. В то же время входящая в (18) величина  $\Delta$  не может быть взята как угодно малой, так как если бы наблюдения даже и позволили неограниченно сближать последовательные моменты регистрации сигнала, величина  $\Delta$  останется конечной — она определится в этом случае интервалом корреляции внутренних флуктуаций объекта. Оценка (15) показывает, что ограничение грешественной части характеристических чисел, соответствующих существенным степеням свободы, определяется прежде всего промежутком времени  $\Delta$  и порядком  $q$  динамического оператора; существенно слабее — через  $|\ln(T)|$  — это ограничение связано с длительностью наблюдений. Наконец, условие (16), ограничивающее мнимую часть характеристических чисел, определяется только величиной  $\Delta_0 \simeq (q+1)\Delta$ .

Пусть теперь истинное уравнение сигнала анализируемого объекта имеет вид

$$\frac{d^Q x}{dt^Q} = H^{(Q)}[x] + \psi, \quad (19)$$

где  $H^{(Q)}$  — линейный оператор с постоянными параметрами, для которого  $x = x_0$  — устойчивая точка покоя,  $\psi$  — стационарные коротко-кор-

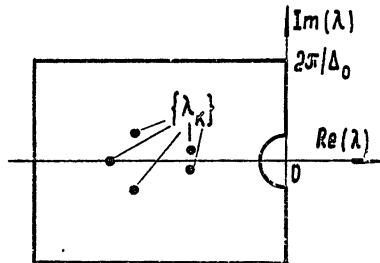


Рис. 1.

релированные флюктуации. Обозначим  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_Q\}$  характеристические числа динамической системы ( $\psi \equiv 0$ ) этого объекта. Для них по условию

$$0 > \operatorname{Re}(\lambda_k) > -\frac{1}{\delta} |\ln [G(\delta)]|, \quad |\operatorname{Im}(\lambda_k)| < 2\pi/\delta, \quad \delta = (Q+1)\tau_1, \quad k = \overline{1, Q},$$

где  $\tau_1$  — интервал корреляции флюктуаций  $\psi$ . Пусть далее  $q$  из этих чисел  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$  оказались внутри области  $G_q(\Delta; T)$ , остальные — вне ее. При условиях наблюдений ( $\Delta, T$ ) корреляционный анализ сигнала, установившегося вблизи  $x = x_0$ , приведет к восстановлению лишь части информации о динамической структуре объекта, содержащейся в сигнале при его идеальной записи ( $\Delta_Q, T_Q$ ):

$$\Delta_Q < \frac{\tau_1}{Q+1}, \quad T_Q > \left( \frac{\pi}{\Omega \lambda_m} \right)^{2/3} \left( \frac{\tau_1}{Q} \right)^{1/3}, \quad \lambda_m = \min \{ \lambda_k, k = \overline{1, Q} \};$$

именно, вместо уравнения (19) будет найдено уравнение более низкого порядка

$$\frac{d^q x}{dt^q} = H_1^{(q)}[x] + \psi',$$

динамическая часть которого ( $\psi' \equiv 0$ ) определяется характеристическими числами  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$ . Числам же  $\lambda_{q+s}$ , для которых нарушено хотя бы одно из условий (15), (16), соответствует дополнительное возмущение динамического движения, приводящее к росту интенсивности  $\psi'$ . Наконец, с малыми по модулю характеристическими числами  $|\lambda_{q+s}| <$

$< \frac{G(\Omega T)}{\Omega T}$  связаны столь медленные изменения сигнала, что их динамическую закономерность не удается вскрыть за время  $T$  регистрации сигнала — эти движения воспринимаются как медленная нестационарность флюктуационной силы  $\psi'$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959
- 2 Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, № 3, 572 (1962)
- 3 Р. Беллман, Процессы регулирования с адаптацией, изд. Наука, М., 1964
4. Ross У. Эшби, Введение в кибернетику, ИЛ, М., 1959
5. Э. Хенман, Анализ временных рядов, изд. Наука, М., 1964
6. P. H. Diananda, Proc. Camb. Phil. Soc., 49, 239 (1953)
7. Б. Л. Ван дер Варден, Математическая статистика, ИЛ, М., 1960
8. А. С. Хаусольдер. Основы численного анализа, М., ИЛ, 1956
9. К. С. Кунц, Численный анализ. «Техника», Киев, 1934

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
14 марта 1966 г.

#### THE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM FOR THE DUAL PROBLEM IN THE THEORY OF OSCILLATIONS I

I. I. Goodzenko, V. Ye. Chertoprod

The paper introduced the concept of degrees of freedom for the case when the observation of a stationary signal in a non controlled plant is carried out. The method for estimation of this number for the non-interacting plant moving in the neighbourhood of stationary point is discussed.

УДК 531.391 + 62 — 501.7

## ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ. II\*

*Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд*

Рассматривается метод оценки числа степеней свободы по установившемуся одномерному сигналу автоколебательного объекта. Обсуждается влияние аддитивного внешнего шума на число степеней свободы, проявляющихся при данных условиях наблюдения.

### 3. ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

После обсуждения оценки числа степеней свободы объекта, движущегося вблизи точки покоя, естественно перейти к аналогичной задаче, возникающей при анализе движения автономного объекта в окрестности устойчивого предельного цикла. Предполагая, как и ранее, отсутствие внешнего шума, обозначим теперь  $x(t)$  установившийся одномерный сигнал автогенератора с малыми внутренними флюктуациями. Метод, позволяющий исследовать динамическую структуру такого объекта по его сигналу без предварительной конкретизации модели автогенератора, изложен в статье [2]. Этот метод обоснован для анализа находящейся под действием коротко-коррелированных флюктуаций  $\psi(x, t)$  динамической системы

$$\frac{d^q x}{dt^q} = f^{(q)}[x] + \psi(x; t) \quad (20)$$

с небольшим числом  $\bar{p} = \bar{q}/2$  степеней свободы в случае пренебрежимо малых внешних шумов ( $x \approx \tilde{x}$ ). Схема расчета, обсуждаемая в [2], такова, что до непосредственного вычисления функции  $f^{(q)}[x]$  — динамической характеристики автогенератора — должна быть решена задача отыскания  $\bar{p}$ . В отличие от движения около точки покоя, в случае автоколебаний установившаяся траектория невозмущенного движения объекта — предельный цикл — является существенной частью динамической характеристики. При достаточно общих предположениях, цикл — гладкая кривая без особых точек в  $q$ -мерном фазовом пространстве, чего нельзя сказать об ее проекциях в различных подпространствах. В первом приближении, линеаризованном относительно малых внутренних флюктуаций, саму кривую предельного цикла и ее проекции можно построить по сигналу как среднестатистическую траекторию объекта [2].

\* В работе [10] введено определение числа  $p$  существенных степеней свободы нерегулируемого объекта при данных условиях наблюдения его установившегося сигнала  $x(t)$ . При отсутствии внешнего шума ( $x = \tilde{x}$ ) на примере анализа одномерного сигнала объекта, совершающего установившиеся флюктуации вблизи устойчивого положения равновесия, была проиллюстрирована возможность практического вычисления  $p$ . Данная статья непосредственно продолжает эту работу, что и отражено нами в соответствующей нумерации разделов, формул, рисунков и литературных ссылок.

Наличие точек самопересечения на этой кривой в  $q$ -мерном пространстве указывает, что  $\bar{p} > q/2$ . С интересующей нас точки зрения, оценки числа  $p$  не дают более богатой информации в рассмотрении формы и положения предельного цикла, поэтому перейдем к обсуждению движения в окрестности предельного цикла.

Можно предложить два способа оценки числа существенных степеней свободы автоколебательного объекта по установившемуся сигналу. Первый способ состоит в проведении серии оценок аппроксимирующих динамических характеристик  $f^{(q)}[x]$  объекта, описываемых последовательностью дифференциальных уравнений (20), порядок которых равен соответственно  $q = 1, 2, 3, \dots$ . Вычисляя затем соответствующую динамической аппроксимации флюктуационную силу

$$\psi^{(q)}(t) \equiv \frac{d^q x}{dt^q}(t) - f^{(q)}[x(t)]$$

и проверяя каждый раз удовлетворительность этой аппроксимации с помощью статистического критерия  $A_3$ , отыщем наименьшее допустимое число  $\tilde{q} = 2\tilde{p}$ . Случайная величина  $\tilde{p}$  и будет при этом искомой оценкой числа  $p$  существенных степеней свободы автогенератора при данных условиях наблюдений. Такой способ получения  $\tilde{p}$  при логической простоте связан, однако, с нецелесообразно большим объемом вычислений. Другой способ, который обсудим подробнее, заключается в численной обработке сигнала  $x(t)$  при фиксированном значении  $q = q_0$  для того, чтобы получить оценки истинного числа  $\bar{p}$ , вообще говоря, не равного  $2q_0$ . Пуще всего взять минимальное значение  $q_0 = 2$ , при этом стохастическая траектория изображающей точки сигнала объекта  $x_1 = x(t)$ ,  $x_2 = \frac{dx}{dt}(t)$  рассматривается как бы на фазовой плоскости, и соответствующую среднестатистическую траекторию, оценивающую предельный цикл, можно находить графически, что существенно облегчает расчет. Выбрав  $q_0 = 2$ , мы тем самым хотим оценить число степеней свободы по проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$  стохастической траектории в  $q$ -мерном фазовом пространстве динамической системы объекта.

Если анализируемый автогенератор действительно обладает одной степенью свободы, то при малой интенсивности его внутренних флюктуаций, линеаризируя (20) по малым отклонениям от предельного цикла, перепишем уравнение в виде [2]

$$\frac{dn}{d\theta} + N(\theta)n = F^{(n)}, \quad \frac{d\gamma}{d\theta} \Theta(\theta)n + F^{(\gamma)}, \quad (21)$$

где  $\theta$  — фаза цикла,  $\gamma = \theta - t(\theta)$  — тангенциальные флюктуации, жесткость  $N(\theta) = N(\theta + T')$  и неизохронность  $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + T')$  — динамические характеристики объекта в окрестности цикла,  $F^{(n)}(\theta)$  и  $F^{(\gamma)}(\theta)$  — коротко-коррелированные флюктуации,  $T'$  — период динамических колебаний. При  $\tau > \tau_i^{(n)}$  ( $\tau_i^{(n)}$  — интервал корреляции флюктуаций  $F^{(n)}$ ) из первого уравнения (21) следует

$$N(\theta) = - \left\langle \frac{dn}{d\theta} (\theta) n(\theta - \tau) \right\rangle / \langle n(\theta) n(\theta - \tau) \rangle. \quad (22)$$

Предполагая, что анализируемый объект описывается уравнениями (21), будем исходить из условий наблюдений  $(\Delta; T)$ , причем  $T = KT'$ ,  $K \gg 1$ . Для простоты допустим, что как число  $K$  наблюдаемых периодов, так и число интервалов длительности  $\Delta$  между моментами регистрации сиг-

нала в одном периоде  $T'$  являются целыми. Случайная функция двух переменных

$$N(\theta, \tau) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{dn}{d\theta} (\theta + kT') n(\theta + kT' - \tau) \left[ \sum_{m=0}^{K-1} n(\theta + kT') n(\theta + kT' - \tau) \right]^{-1}$$

$$(0 < \theta < T')$$

является выборочной оценкой жесткости  $N(\theta)$  и при  $\tau > \tau_1^{(n)}$  не должна значимо зависеть от сдвига  $\tau$ . Наличие же такой зависимости указывает на несовместимость статистических свойств записанного сигнала автогенератора с описанием (21) в виде динамической автоколебательной системы второго порядка, возмущенной коротко-коррелированными флуктуациями.

Если существенное число степеней свободы генератора  $\bar{p} > 1$ , то, разложив флуктуационные отклонения от предельного цикла траектории изображающей точки сигнала по плоскости  $(x_1, x_2)$  на две составляющие — ортогональную циклу  $n(\theta)$  и тангенциальную  $\gamma(\theta)$ , напишем вместо (21) уравнение

$$\frac{d\bar{n}}{d\theta^{\bar{g}}} + \sum_{k=0}^{\bar{g}-1} N_k(\theta) \frac{d^k n}{d\theta^k} = F^{(n)},$$
(23)

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \sum_{k=0}^{\bar{g}-1} \Theta_k(\theta) \frac{d^k n}{d\theta^k} + F^{(\gamma)}.$$

Для сценки числа  $\bar{p} = (\bar{g} + 1)/2$  существенных степеней свободы можно воспользоваться выборочной средней, построенной аналогично (11) по  $n(\theta)$ . В отличие от уравнений движения вблизи точки покоя, параметры уравнения (23) для проекций на  $(x_1, x_2)$  ортогонального отклонения от предельного цикла периодически зависят от фазы  $\theta$ . Таким образом, теперь задача определения числа существенных степеней свободы сводится к отысканию по ортогональной составляющей порядка описывающего эту составляющую линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. Предполагая, как и раньше, что анализируемому объекту соответствует грубая динамическая система, напишем для коррелограмма

$$\rho_n(\theta, \tau) = \langle n(\theta) n(\theta + \tau) \rangle \langle [n(\theta)]^2 \rangle^{-1/2} \langle [n(\theta + \tau)]^2 \rangle^{-1/2}$$

следующее выражение:

$$\rho_n(\theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\bar{g}} V_k(\theta) \exp(\lambda_k \tau) \quad (\tau > \tau_1^{(n)}),$$
(24)

где  $V_k(\theta + T') = V_k(\theta)$ ,  $\sum_{k=1}^{\bar{g}} V_k(\theta) = 1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\bar{g}}$  — характеристические показатели, соответствующие уравнению (23) при  $F^{(n)} = 0$ .

Область  $G_g(\Delta; T)$  на комплексной плоскости  $\{\lambda\}$ , вне которой корреляционный анализ ортогональных отклонений  $n(\theta)$  сигнала генератора необоснован, подобна введенной при анализе движения точки покоя области  $G_q(\Delta; T)$ , граници  $G_g(\Delta; T)$  определяются теми же неравенствами (14) — (17). Для иллюстраций высказанных соображений обсудим с точки зрения обоснованности корреляционного анализа числа

степеней свободы два примера, в которых по схеме обратной задачи теории колебаний было ранее проведено исследование динамической структуры нерегулируемых автоколебательных объектов.

1) В статье [11] рассматривались изменения блеска в видимой части спектра квазара ЗС-273. Условия наблюдений характеризуются здесь следующими числами:  $T = 76$  лет,  $K = 8$  и, поскольку при расчетах использовались сглаженные с постоянной времени 2 года значения интенсивности блеска,  $\Delta_0 \approx 2$  года. Кроме того, вычисления дают  $\rho_n(\Delta_0) \approx 0,6$ . Вследствие малости длительности наблюдений, в уравнении для  $n$  оценивалась лишь постоянная составляющая  $\tilde{N}(\theta) = N$ . В результате расчета принята модель автоколебаний с одной степенью свободы. Обсудим надежность этой оценки. Для единственного (а значит вещественного) характеристического показателя  $\lambda$  напишем

$$-\frac{1}{\Delta_0} \left| \ln(N - 1)^{1/2} / (1 - [\rho_n(\Delta_0)]^2) \right| < \lambda < -\kappa/\Omega T(N - 1)^{1/2}.$$

Взяв  $\kappa = 1$ ,  $\Omega = 0,1$ , получаем  $0,17 < N < 1,3$  (год $^{-1}$ ). Полученная в [11] оценка,  $N \approx 1$  (год $^{-1}$ ) удовлетворяет этому условию.

2) В ряде статей анализировалась (по обсуждаемой в этой работе схеме) динамическая структура автоколебаний, определяющих циклические изменения активности Солнца. Условия наблюдения, позволяющие вести обработку ортогональных отклонений, таковы.  $T \approx 200$  лет,  $K = 19$ . При детальном расчете [12], где использована обратимость годичного сглаживания ежемесячных записей чисел Вольфа, следует считать  $\Delta \lesssim 0,2$  года; при этом оказывается  $\rho_n(\Delta_0) \approx 0,8$ . Оценка числа степеней свободы и в этой задаче дала  $p = 1$ . Область  $G_g(\Delta; T)$  при  $\kappa = 2$ ,  $\Omega = 0,05$  определяется неравенствами  $-25 < \lambda < -0,004$  (год $^{-1}$ ), соответственно  $0,004 < N < 25$ . Вычисления жесткости  $N(\theta)$  дают для ее среднего значения  $N \approx 0,7$  (год $^{-1}$ ), что заведомо лежит в области  $G_1(0,2; 200)$ . В более ранней статье [13] использованы меньшие возможности — сдвиги брались лишь в интервале  $1 \leq \tau \leq 1,6$ ; при этом  $\rho(\Delta_0) \approx 0,5$ , а границы  $G_g(\Delta; T)$  теперь  $-4 < \lambda < -0,035$ . И здесь оценка  $N \approx 0,7$  (год $^{-1}$ ) лежит глубоко внутри области  $G_1(1; 200)$ . Таким образом, вывод, формулируемый в статьях [12] и [13], о наличии у автогенератора солнечной активности лишь одной существенной степени свободы представляется как будто вполне обоснованным.

Однако рассмотрение в работе [14] флюктуаций фазы сигнала показало, что автоколебания активности синхронизованы периодической силой. В [14], кроме подробной записи чисел Вольфа на интервале 200 лет, удалось использовать также довольно разрозненные (с многочисленными пропусками) даты максимумов и минимумов активности на гораздо большем интервале  $T = 2000$  лет, к сожалению, совершенно не-пригодные для корреляционного анализа ортогональных отклонений  $n(\theta)$ . Эти данные не позволяют отличить синхронизацию автоколебаний сигналом стабильного генератора от их стабилизации высокодобротной пассивной системы. Нельзя также утверждать, что влияние этого стабилизирующего элемента не было обнаружено в работе [13] из-за ухода соответствующего ему характеристического показателя за пределы области  $G_1(1; 200)$ . Дело в том, что при оценках границ области обоснованного корреляционного анализа не учитывался внешний шум, который в записях чисел Вольфа представлен весьма существенно.

#### 4. АДДИТИВНЫЙ ВНЕШНИЙ ШУМ

До сих пор методика корреляционного анализа установившегося сигнала обсуждалась в предположении отсутствия внешнего шума. Но уже для решения вопроса о правомерности такого рассмотрения и воз-

можности пренебрежения внешним шумом в той или иной конкретной задаче нужно прежде всего выяснить, как отражается на результатах, полученных при расчетах согласно предположенной схеме, наличие достаточно слабого внешнего шума, и затем надо уметь оценивать относительный вклад внешнего шума во флуктуации сигнала. Остановимся, следуя общему характеру этой статьи, лишь на анализе установившегося движения объекта в окрестности точки покоя, когда внешний шум  $\eta^{(t)}$  достаточно слаб и входит в записанный сигнал аддитивно. Тогда уравнения

$$\hat{L}_q[x] = \psi, \quad \tilde{x} = x + \eta, \quad (25a)$$

где  $\hat{L}_q = \frac{d^q}{dt^q} - \sum_{k=0}^{g-1} H_k \frac{d^k}{dt^k}$  — линейный оператор (точнее, линеаризованный вблизи точки покоя относительно флуктуационного отклика на малый внутренний шум  $\psi(t)$ ), можно переписать в виде

$$\hat{L}_q[\tilde{x}] = \tilde{\psi}, \quad \tilde{\psi} = \psi + \tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta} = \hat{L}_q[\eta]. \quad (25b)$$

Будем, как и прежде, предполагать, что запись сигнала соответствует условиям наблюдений ( $\Delta, T$ ), а случайные процессы  $\psi(t)$  и  $\eta(t)$  — стационарные в широком смысле флуктуации с временами корреляции  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , меньшими  $\Delta$ . Приступая к исследованию и не зная специфических свойств, присущих сигналу объекта основных источников внешнего и внутреннего шума, естественно считать, что корреляционные характеристики самих процессов  $\eta$  и  $\psi$ ,  $\tilde{\eta}$  и  $\tilde{\psi}$  неразличимы; в то же время эти процессы по-разному отражаются на флуктуациях принятого сигнала  $\tilde{x}(t)$ . Ясно, что аддитивный шум, не неся никакой информации о структуре исследуемого объекта, только уменьшает возможности исследования динамической структуры по установившемуся сигналу.

Корреляционную функцию стационарного случайного процесса  $y(t)$  обозначим  $U_y(\tau) = \langle yy_\tau \rangle$ . На рис. 2 нанесены функции  $U_x(\tau)$  и  $U_{\tilde{x}}(\tau)$ , они совпадают при  $|\tau| > \tau_2$  и отличаются одна от другой на интервале  $-\tau_2 < \tau < \tau_2$ ; в частности,  $\langle \tilde{x}^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle \eta^2 \rangle$ . Поэтому для соответствующих коррелограммов имеем

$$\rho_{\tilde{x}}(\tau) = \rho_x(\tau)(1+\varepsilon)^{-1}, \quad \varepsilon = \langle \eta^2 \rangle / \langle x^2 \rangle, \quad \tau > \Delta.$$

Математические ожидания выборочных оценок коррелограммов  $r(\tau) = \overline{xx_\tau}/x^2$  и  $\tilde{r}(\tau) = \overline{\tilde{x}\tilde{x}_\tau}/\tilde{x}^2$ , где обозначено  $\overline{y(t)} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} y(t + k\Delta_0)$ , связаны соотношением

$$\langle \tilde{r}(\tau) \rangle = \langle r(\tau) \rangle / (1 + \varepsilon), \quad |\tau| > \Delta, \quad (26)$$

дисперсии же этих оценок можно оценить формулами

$$D[r(\tau)] = [1 - \rho_x(\tau)]^2 N^{-1}, \quad D[\tilde{r}(\tau)] = [1 - \rho_x(\tau)]^2 (1 + \varepsilon)^{-2} N^{-1}.$$

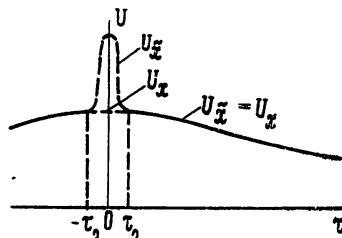


Рис. 2.

Наличие внешнего шума нарушает пропорциональность интенсивности возмущающего динамическую систему внутреннего шума объекта  $\psi(t)$

и дисперсии флуктуаций принимаемого сигнала  $\tilde{x}(t)$ . Основываясь на корреляционной методике анализа динамической структуры объекта, оценим, как сужается при наличии аддитивного внешнего шума область

$\tilde{G}_q(\Delta; T; \epsilon)$  обоснованного анализа на плоскости  $\{\lambda\}$  характеристических чисел. Исходя из принятого ранее критерия различимости, введем теперь поправку, учитывающую рост с увеличением аддитивного шума стандарта флуктуаций в выборочных оценках корреляционных функций. Для дисперсий этих оценок напишем

$$D[\bar{xx}_\tau] = \langle x^2 \rangle^2 D[r(\tau)], \quad D[\tilde{xx}_\tau] = (\langle x^2 \rangle + \langle \eta^2 \rangle)^2 D[\tilde{r}(\tau)]. \quad (27)$$

В соответствии со сказанным, предельные значения различимых корреляционных компонент и их изменений со сдвигом  $\tau$ , а значит и границы области  $\tilde{G}_q(\Delta; T; \epsilon)$ , определяются теперь величиной

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\tau) &= G(\tau) \{D[\tilde{xx}_\tau]/D[\bar{xx}_\tau]\}^{1/2} = G(\tau)(1+\epsilon) \times \\ &\times \{1 - [\rho_x(\tau)]^2(1+\epsilon)^{-2}\} \{1 - [\rho_x(\tau)]^2\}^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

При больших значениях  $\tau$ , когда  $\rho_x(\tau) \approx 0$ , имеем  $\tilde{G}(\tau) \approx (1+\epsilon)G(\tau)$ , поэтому можно сказать, что граничное значение минимальных по модулю характеристических чисел возрастает с увеличением интенсивности внешнего шума пропорционально  $(1+\epsilon)$ . При минимальных сдвигах  $\tau = \Delta_0$ , когда, как правило,  $\rho_x(\Delta_0) = 1 - \delta$ ,  $0 < \delta \ll 1$ , соотношение (15) для максимальных значений вещественной части характеристических чисел  $-\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{\Delta_0} |\ln[\tilde{G}(\Delta_0)]|$ , согласно (28) вместо  $G(\Delta_0) \approx 2\delta \propto N^{-1/2}$  должно стоять теперь

$$\tilde{G}(\Delta_0) = \frac{\epsilon^2 + 2(\epsilon + \delta)}{2\delta(1+\epsilon)} \quad G(\Delta_0) \approx \propto N^{-1/2} \frac{\epsilon^2 + 2(\epsilon + \delta)}{1 + \epsilon}.$$

При фактических оценках существенных степеней свободы приходится исходить не из истинного коррелограмма  $\rho_x(\tau)$  сигнала, неискаженного внешним шумом, а из выборочного коррелограмма  $\tilde{r}(\tau)$ , вычисленного по записанному сигналу. При этом все прежние формулы (14)–(17) для оценки границ области  $\tilde{G}_q(\Delta; T; \epsilon)$  сохраняют свое написание с заменой  $\propto$  на  $\propto(1+\epsilon)$ .

Чтобы пояснить, как в случае достаточно простой структуры дина-

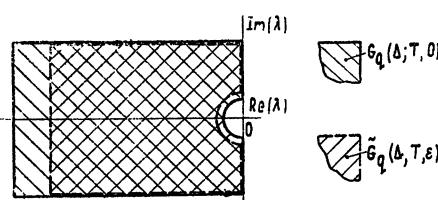


Рис. 3.

мического оператора  $\hat{L}(x)$  оценить относительный вклад внешнего шума во флуктуации записанного сигнала  $\epsilon = \langle \eta^2 \rangle / \langle x^2 \rangle$ , будем определять характеристические числа  $\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \dots, \lambda_{q_s}^{(s)}$ , уменьшая последовательно величину интервала  $\Delta^{(s)}$ , например, по закону  $\Delta^{(s)} = \Delta^{(0)} 2^{-s}$  (рис. 3). Если при ряде значений  $s$  до предельно малого  $\Delta_{\min}^{(s)} \approx \tau_2$  не

только число  $q_s$ , но с приемлемой точностью и положение всех характеристических чисел  $\{\lambda_k, k = \overline{1, q_s}\}$  перестает зависеть от  $s$ , то, экстраполи-

руя построенный по этим числам коррелограмм  $\rho_x(\tau)$  на значение  $\tau = 0$ , найдем  $\langle x^2 \rangle$ . В качестве же величины дисперсии записанного сигнала воспользуемся выборочной оценкой  $(\tilde{x})^2$ . Наконец, с помощью этих двух чисел и очевидной формулы  $\langle \tilde{x}^2 \rangle = \langle x^2 \rangle (1 + \epsilon)$  оцениваем  $\epsilon$ .

### 5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Целью данной работы, вслед за [10], является пояснение понятия «числа существенных степеней свободы при наблюдениях установившегося сигнала объекта» и обсуждение на простейших примерах методики оценки этого числа. В этих примерах, допускающих линеаризацию динамической характеристики по флуктуациям, задача отыскания  $p$  сводилась к оценке характеристических чисел (или показателей), проявляющихся на интервале наблюдений при данной точности регистрации одномерного сигнала; так введенное здесь определение  $p$  сомкнулось с традиционным его определением по свободному движению установления из различных начальных состояний. В ходе изложения ради простоты и наглядности рассуждений приносились в жертву как некоторые детали, так и математическая строгость. Приведем поэтому в заключение анализа одномерного сигнала краткий перечень уточняющих соображений.

Не всякий установившийся сигнал можно проанализировать по обсуждаемой здесь схеме. Если даже  $x(t)$  с хорошей точностью удовлетворяет обыкновенному линейному дифференциальному уравнению порядка  $Q$ , для непосредственного применения этой методики необходимо, чтобы среди всех  $q$  характеристических чисел, попавших в область  $G_q(\Delta; T; \epsilon)$ , не было совпадающих или близких между собой, и чтобы все они лежали далеко от границы этой области. Впрочем, границы  $G_q(\Delta; T; \epsilon)$  в какой-то мере сменяются при изменении условий наблюдений\*, а для анализа негрубых систем может быть развита схема, отличающаяся от изложенной лишь усложнением расчетных формул. Более принципиальным для обоснования предложений методики анализа объекта является требование достаточной малости числа  $q$  по сравнению с  $V\bar{Q}N$ ; рост  $N$  при уменьшении  $\Delta$  или увеличении  $T$  для широкого класса операторов приведет к росту и числа  $q$ .

Пусть теперь  $x(t)$  — сигнал идеализированной системы, для которой

$$\frac{d^q x}{dt^q} - H^{(q)}[x] = \psi,$$

где  $\psi(t)$  — белый шум,  $H^{(q)} \in \mathbf{H}$ ,  $\tilde{x}(t) = x(t)$ . Пусть далее  $H$  — простейший класс, в котором каждому порядку  $q$  соответствует единственный, причем линейный оператор. Будет ли тогда достаточно мала вероятность  $P_r(q \neq \bar{q})$  неправильной оценки числа степеней свободы при достаточно малом  $\Delta$  и большом  $T$ ? Для ответа на этот вопрос знания уровня значимости  $\beta$  недостаточно. В обсуждаемой схеме проводится две операции: 1) отбираются числа  $\{q_m\}$ , для которых оказывается выполненным соответствующее условие, например, (8а) или (8б); 2) из этих чисел выбирается наименьшее. При первой операции с вероятностью  $\beta$  числа  $\bar{q}$  может не оказаться среди чисел  $\{q_m\}$ , оцениваемых по записи сигнала. При второй операции, если  $\bar{q} \notin \{q_m\}$ , то еще существует ко-

\* Здесь следует еще раз отметить, что величина интервала не может быть сделана сколь угодно малой:  $\Delta > \max(\tau_1, \tau_2)$ .

нечная вероятность  $\alpha(\beta, M)$  того, что окажется число  $q_{m_0} < \bar{q}$ ,  $q_{m_0} \in \{q_m\}$ . Для малых  $\beta$  можно написать

$$Pr(\tilde{q} \neq \bar{q}) \simeq \beta + \sigma(\beta, M),$$

где  $M$ , как и раньше, — число независимых оценок коррелограмма пробной функции  $\psi^{(q)}(t) \equiv \frac{d^q x}{dt^q}(t) - H^{(q)}[x(t)]$  при данных условиях наблюдения.

В случае  $q \neq \bar{q}$  выборочные коррелограммы функций  $\psi^{(q)}(t)$  при каком-либо фиксированном сдвиге  $\tau = s\Delta$  имеют математическое ожидание  $\langle r_{\psi^{(q)}}(s\Delta) \rangle = \rho^{(q)}$ , отличное от нуля. При малых значениях  $\rho^{(q)}$  распределение случайной величины  $b'$ , определяемой формулой (7а), имеет асимптотически нормальное распределение с дисперсией  $\approx 1$  и математическим ожиданием  $[(K-1)M]^{1/2}\rho^{(q)}$ . Учитывая это, получаем

$$\alpha(\beta, M) = \sum_{l=1}^{\bar{q}-1} \sum_{v=1}^2 (-1)^{v+1} \Phi \left[ \rho^{(l)} \sqrt{M(K-1)} + (-1)^{v+1} \Phi_{-1} \left( \frac{1-\beta}{2} \right) \right],$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^z \exp(-\lambda^2/2) d\lambda$ ,  $\Phi_{-1}$  — функция, обратная  $\Phi$ . Для любого

сколь угодно малого  $\beta$  при фиксированном  $\bar{q}$  и  $M \rightarrow \infty$  получаем  $\alpha(\beta, M) \rightarrow 0$ . Таким образом, с ростом точности регистрации сигнала  $Pr(\tilde{q} \neq \bar{q})$  неограниченно убывают.

При фиксированных же условиях наблюдений уровень значимости  $\beta$  нецелесообразно брать слишком малым, при уменьшении  $\beta$  ниже некоторого значения начинает быстро возрастать  $\alpha(\beta, M)$ , а значит и  $Pr(\tilde{q} \neq \bar{q})$ . Найти оптимальное значение  $\beta = \beta_0$ , которому соответствует минимум вероятности  $Pr(\tilde{q} \neq \bar{q})$ , представляется весьма трудной задачей даже в самых простых примерах. В случае линейности оператора  $H^{(\bar{q})}$  можно лишь рекомендовать последовательность операций, обеспечивающую близость  $\beta$  к  $\beta_0$ . При данном достаточно малом уровне значимости  $\beta$  по методике (12в) с помощью (4) оцениваем  $q$ . Затем прове-

ряем, все ли найденные характеристические числа  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \bar{q}$ , лежат в области  $G_q\{\Delta; T; \epsilon\}$ . Если хотя бы одно из  $\lambda_k$  окажется вблизи границы или выйдет за пределы этой области, значение  $\beta$  приходится увеличить; в противном случае можно попытаться уменьшать  $\beta$ , пока какое-нибудь из чисел  $\lambda_k$  не станет приближаться к границам  $G_q\{\Delta; T; \epsilon\}$ , однако следует помнить сделанные выше оговорки об известном произволе в оценке этих границ.

Переходя от общего определения числа  $p$  к конкретным схемам его оценок, каждый раз приходилось оговаривать допущения о малости флуктуационного возмущения динамической системы объекта. Это связано с приспособленностью корреляционного метода лишь для анализа линейных систем. Проверку справедливости допущения о хорошей линеаризации исследуемой динамической системы по имеющемуся флуктуационному возмущению можно провести, последовательно уменьшая область рассматриваемых флуктуационных изменений сигнала. Например, при движении вблизи точки покоя  $x(t) = \langle x \rangle + \xi(t)$  в интервал наблюдений  $T^{(s)}$  включим только те  $t$ , для которых  $|\xi(t)| < \Xi_s$ . В случае справедливости допущения уменьшение  $\Xi_s$  должно отразиться на окончательных результатах анализа только согласованно с сокраще-

нием области  $G_{q_s}(\Delta; T^{(s)}; \epsilon)$ . Подобный прием разбиения на малые участки рассматриваемых флюктуаций можно использовать и для линеаризации системы и, соответственно, для сохранения корреляционной методики анализа простейших заведомо нелинейных систем.

### ЛИТЕРАТУРА

2. Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, № 3, 572 (1962).
10. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3, 363 (1967).
11. Л. М. Озерной, В. Е. Чертопруд, Астрон. ж., 43, № 1, 20 (1966).
12. Л. И. Гудзенко, В. А. Котов, В. Е. Чертопруд, Астрон. циркуляр № 333 (1965).
13. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Астрон. ж., 41, № 4, 697 (1964).
14. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Астрон. ж., 43, № 11, 113 (1966).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
28 мая 1966 г.

### THE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM FOR THE DUAL PROBLEM IN THE THEORY OF OSCILLATIONS. II.

*L. I. Goodzenko, V. Ye. Chertoproud*

The paper presents the consideration of a method for estimation of a number of degrees of freedom using one-dimensional stationary signal in a autooscillating plant. The discussion of an influence of an additive external noise on the number of degrees of freedom is provided.

УДК 531.391

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*A. С. Алексеев, Ф. Ф. Минчук*

Рассмотрены элементы общей теории применения метода точечных преобразований и неопределенных множителей Лагранжа для решения задач об оптимальном управлении кусочно-линейными динамическими системами

Для решения актуальных и важных в настоящее время задач об оптимальном управлении в нелинейных динамических системах, наряду с классическими методами вариационного исчисления, с успехом используются «принцип максимума» Понтрягина [1, 2, 3], «принцип оптимальности» Беллмана [4, 5, 6], а также некоторые другие, более частные, подходы исследования [7, 8, 9]. Достаточно полная библиография по этому вопросу имеется в [10].

В литературе очень скромно освещено оптимальное управление кусочно-линейными динамическими системами. Исключение, быть может, составляют релейные системы. Принцип максимума не может непосредственно применяться к решению таких задач, так как в этом случае отсутствует непрерывность правых частей дифференциальных уравнений по координатам фазового пространства системы. Принцип оптимальности является настолько общим, что применение его едва ли приводит к уравнениям, удобным для аналитического исследования.

Вместе с тем в [11] уже указывалось на возможность применения метода точечных преобразований в соединении с классическими методами вариационного исчисления для решения задачи об оптимальном управлении кусочно-линейных систем.

Настоящая статья посвящена более подробному исследованию этой возможности для случая нахождения оптимального кусочно-постоянного управления в динамической системе, дифференциальные уравнения которой содержат лишь кусочно-постоянные коэффициенты и границы областей линейности в фазовом пространстве которой также линейны.

### 1. ИЗОХРОННЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть поведение некоторой кусочно-линейной динамической системы в  $k$ -ой из областей линейности описывается соответствующей системой уравнений:

$$\dot{x}^k = A^k x^k + a^k, \quad (1.1)$$

где  $A^k$  — квадратная матрица ( $N \times N$ ) постоянных коэффициентов  $a_{ij}^k$ ,  $x^k$  и  $a^k$  — матрицы столбцы длины  $N$  координат системы  $x_i^k$  и постоянных  $a_i^k$ .

Следуя [11], введем в рассмотрение вспомогательное фазовое пространство  $\Pi$ , представляющее собой наложенные друг на друга в определенном порядке  $n$  неограниченных  $N$ -мерных пространств с координатами  $x_i^k$ . При этом каждая линейная подсистема и отдельный «лист» пространства  $\Pi$  для нее может встречаться в этом порядке столько, сколько это необходимо, и каждый раз нумеруется своим порядковым номером. Переход с одного «листа» фазового пространства  $\Pi$  на другой производится без ограничения общности при неизменных  $x_i^k$  по определенному выше порядку через некоторые, в зависимости от постановки задачи искомые или заданные, промежутки времени. В каждом «листе» пространства  $\Pi$  общее решение уравнений (1.1)

$$x^k = \psi^k(t) x_0^k + \varphi^k(t), \quad (1.2)$$

где

$$\psi^k(t) = L^{-1}((pE - A^k)^{-1}), \quad (1.3)$$

$$\varphi^k(t) = L^{-1}\left((pE - A^k)^{-1} \frac{a^k}{p}\right) \quad (1.4)$$

( $L^{-1}$  — символ обратного преобразования Лапласа), при любом  $t = t_j$  может рассматриваться, как линейное точечное отображение этого «листа» на себя, которое и называется «изохронным». Оно уже рассматривалось в [12–14] для некоторых доказательств, а также фактически в [11, 15, 16]. Считая, что на  $j$ -ом «листе» пространства  $\Pi$  движение изображающей точки продолжается в течение времени  $t_j$ , затем она переходит на следующий по установленному порядку «лист» так, что

$$x^j(t_j) = x_0^{j+1}, \quad (1.5)$$

получим выражение для изохронного отображения произвольного  $m$ -го слоя пространства  $\Pi$  на некоторый  $l$ -ый его слой в виде

$$x^l(t_l) = P_l^m x_0^m + Q^m, \quad (1.6)$$

где

$$P_l^m = \prod_{j \in \bar{n}_l^m} \psi_j, \quad (1.7)$$

$$Q_l^m = \varphi_l + \sum_{i \in \bar{n}_{l-1}^m} \prod_{j \in \bar{n}_l^{i+1}} \psi_j \varphi_i, \quad (1.8)$$

$n$  — последовательность номеров  $1, 2, 3, \dots, n$ ,  $\psi_j = \psi^j(t_j)$ ,  $\varphi_i = \varphi^i(t_i)$ , а выражение  $j \in n_l^k$  ( $j \in \bar{n}_l^k$ ) понимаются в том смысле, что в групповой операции индекс  $j$  пробегает в установленном прямом (обратном) порядке циклическую последовательность  $n$  от номера  $l$  до номера  $k$ .

В различных задачах могут быть заданы все или некоторые из величин  $t_k$ ,  $a_i^k$ ,  $a_{ij}^k$ , все или некоторые «листы» пространства  $\Pi$  могут иметь кусочно-линейную границу, достижение которой для осуществления перехода на следующий «лист» может быть обязательным или нет. Очевидно, из всего множества границ можно принять во внимание только их выходные участки, т. е. те, через которые изображающая точка выходит из рассматриваемой области, которые могут быть заданы уравнениями

$$b^{Tm} x^m = d^m, \quad (1.9)$$

где  $b^{Tm}$  — транспонированная матрица столбца  $\| b_j^m \|$  ( $j \in N, m \in n$ ), а  $d^m$  — константа. Введенное преобразование (1.6) будет существовать и будет непрерывным в областях значений  $x_0^k, a^k, t_k$ , границы которых определяются из условий в точках контакта траекторий, в узловых точках границ при обеспечении того, что выходная граница каждого предыдущего «листа» принадлежит заданной области на последующем «листе», и т. п. Все эти условия, очевидно, без труда могут быть записаны [11], тем самым будут определены области непрерывной зависимости преобразований (1.6) от координат начального многообразия.

## 2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Пусть требуется перевести изображающую точку в фазовом пространстве  $\Pi$  системы (1.1) из некоторой точки  $x_0^m$ , принадлежащей некоторому линейному многообразию  $g_0^m$  на начальном «листе»  $m$

$$\begin{aligned} C^m x_0^m &= d^m, \\ C^m = \| C_{ji}^m \|, \quad x_0^m &= \| x_{0i}^m \|, \quad d^m = \| d_j^m \| \\ (j \in N_{N_0}^{N_m}, \quad i \in N) \end{aligned} \tag{2.1}$$

на некоторое также линейное многообразие  $g_1^l$  на «листе»  $l$

$$\begin{aligned} C^l x^l &= d^l, \\ C^l = \| C_{ji}^l \|, \quad x^l &= \| x_i^l \|, \quad d^l = \| d_j^l \| \quad (j \in N_{N_1}^{N_l}, \quad i \in N) \end{aligned} \tag{2.2}$$

с помощью точечного преобразования (1.6) при условии, что все или некоторые его точки переключения (перехода на следующий «лист»)  $x^k(t_k)$  подчинены условиям, т. е. заданы все или некоторые границы переключений  $g^k$  на «листах» фазового пространства  $\Pi$ ,

$$b^{Tk} x^k = d^k, \quad b^k = \| b_i^k \| \quad (k \in n_{n_1}^{n_k}), \tag{2.3}$$

а остальные «свободные» в нем параметры  $t_p, x^p(t_p), a^p$  должны быть выбраны так, чтобы заданный функционал от этих параметров

$$J(t_p, x^p(t_p), a^p) \tag{2.4}$$

принимал минимальное (или максимальное) значение.

Поскольку выражения вида (1.6) сразу могут быть составлены и представляют собой непрерывные функции варьируемых переменных в областях, которые также всегда могут быть определены, то эта задача при совместном рассмотрении преобразований вида (1.6), написанных для каждой необходимой группы «листов» условий (2.1) — (2.4), может решаться [11] известными классическими вариационными методами.

В качестве последнего выберем метод неопределенных множителей Лагранжа [17, 18], сущность которого заключается в отыскании относительного экстремума функционала  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) (n+m)$  переменных в предположении, что они подчинены еще  $m$  уравнениям связи

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{2.5}$$

Этот метод обеспечивает нахождение по крайней мере одной экстремальной для  $f$  точки  $M$ , если функции  $f$  и  $\Phi_i$  имеют в окрестности этой точки непрерывные частные производные по всем аргументам, а матрица  $\left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right\|$  имеет в этой точке ранг не менее  $m$  [18].

Тогда при

$$F = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi_i \quad (2.6)$$

система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n+m), \\ \Phi_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.7)$$

определяет искомую точку  $M(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$  и неопределенные множители  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , что составляет необходимые условия экстремума. Достаточным условием [18] будет знакоопределенность квадратичной формы (второго дифференциала) функции  $F$  в точке  $M$ , в которую следует подставить выражения зависимых дифференциалов через независимые из условий (2.5). Подставляя  $x_0^m$ , подчиненные условиям (2.1), в (1.6), написанное для каждого значения  $k$ , для которых имеются условия (2.2) и (2.3), получим из этих условий

$$\begin{aligned} \Phi(t_m, \dots, t_l, a^m, \dots, a^l, x) &= C^l(P_l^m x_0^m + Q_l^m) - d^l = 0, \\ \Phi &= \|\Phi_j\|, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\Phi_k(t_m, \dots, t_l, a^m, \dots, a^l, x) = b^{T_k}(P_k^m x_0^m + Q_k^m) - d^k = 0. \quad (2.9)$$

Выражения (2.1) содержат  $(N_m - N_0)$ , выражения (2.2) —  $(N_l - N_1)$  и выражения (2.3) —  $(n_k - n_1)$  условий. Всего получится  $(N_l - N_1 + n_k - n_1)$  условий на не более чем  $Nn + n$  величин  $a_i^p$  и  $t_p$ ,  $N - N_m + N_0$  свободных координат начальной точки и  $N - N_l + N_1$  координат конечной точки, от которых может зависеть функционал (2.4). (Свободные координаты начальной точки  $x_{0l}^m$  определяются из (2.1), (2.8), (2.9).) Экстремум функционала (2.4) дается решениями системы уравнений (2.8), (2.9) и уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial t_p} = \frac{\partial J}{\partial t_p} + \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial t_p} + \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial t_p} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i^p} = \frac{\partial J}{\partial a_i^p} + \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial a_i^p} + \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial a_i^p} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^p} = \frac{\partial J}{\partial x_i^p} + \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i^p} + \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i^p} = 0, \quad (2.12)$$

получаемых дифференцированием функции

$$F = J + \lambda_j \Phi_j + \lambda_k \Phi_k, \quad (2.13)$$

в которую подставлены условия (2.1) (т. е. оставлены только варьируемые координаты начальной точки), по всем варьируемым переменным.

Система уравнений (2.8) — (2.12) линейна относительно переменных  $\lambda$  и некоторых переменных  $a_i^p, x_i^p$ , которые входят в функционал линейно. После разрешения относительно таких переменных остается система не менее  $l - m$  нелинейных уравнений:

$$f_q(t_m, \dots, t_l, a^p, x^p) = 0, \quad (2.14)$$

где  $q = 1, 2, \dots$  (по числу искомых величин), подлежащих исследованию и определяющих оптимальные времена переключений, управления и остальные параметры, а также в конечном счете и саму оптимальную траекторию. Если система (2.14) имеет по крайней мере одно решение и  $\frac{(\partial f_1, f_2, \dots, f_q)}{\partial(t_m, t_{m+1}, \dots, t_l, a^p, x^p)} \neq 0$  во всей области изменения переменных, это решение единственno. Достаточное условие и определение характера экстремума проводятся по общим правилам [18], кратко указанным выше.

*Замечание 1.* Если среди времен переключений или других параметров окажутся заданные величины, то это упрощает задачу, так как не будет в системе соответствующих уравнений.

*Замечание 2.* Пусть заданы замкнутые области всех или некоторых варьируемых параметров

$$u_i^0 \leq u_i \leq u_i^1 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (2.15)$$

тогда, решая задачу без ограничений, можно встретить следующие случаи:

а) система (2.8) — (2.12) имеет единственное решение внутри заданной области; это будет единственное решение, если оно удовлетворяет условиями достаточности;

б) система имеет несколько решений внутри заданной области; тогда те из них, которые удовлетворяют условиям достаточности, сравниваются между собой и из них выбирается то, которое дает наименьшее (наибольшее) значение функционала;

в) система имеет одно или несколько решений, каждое из которых лежит вне заданной области; в этом случае, добавляя к условиям (2.8) и (2.9) всевозможные комбинации уравнений границы (2.15) по одной, по две и т. д. и решая каждый раз вновь соответствующую систему с дополнительными условиями из (2.15), следует сравнить полученные решения и выбрать то, которое дает наименьшее (наибольшее) значение функционала.

Аналогичная процедура получится, если пользоваться в этом, (а также в случае нежестких условий на функции (2.2), (2.3)) случае решением обобщенной задачи Лагранжа, рассматриваемой в методах нелинейного программирования [19—22].

*Замечание 3.* Аналогично можно подойти к решению задачи об оптимальном выборе незаданных параметров матрицы  $A^k$ .

### 3. ПРОСТОЙ ПРИМЕР. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ИЗ ОДНОЙ СРЕДЫ В ДРУГУЮ

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки массы  $m$  в вертикальной плоскости  $(x, y)$  в кусочно-однородной среде.

Если принять силу сопротивления среды пропорциональной скорости, то уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} m\dot{y} + H^k\dot{y} &= P^k, \\ m\ddot{z} + H^k\dot{z} &= Q^k \quad (k = 1, 2, \dots, K), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $Q = |G| \sin \chi - mg$ ,  $P = |G| \cos \chi$ ,  $G$  — вектор тяги,  $\chi$  — угол, образованный  $G$  и осью  $y$ , и  $g$  — ускорение силы тяжести. Ограничиваюсь

рассмотрением двух слоев, имеющих границу  $z = Z$ , запишем систему (3.1) в виде (1.1).

$$\dot{x}^k = A^k x^k + a^k \quad (k = 1, 2), \quad (3.2)$$

где

$$A^k = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -h_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -h_k \end{vmatrix}, \quad x^k = \begin{vmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{vmatrix}, \quad a^k = \begin{vmatrix} 0 \\ a_2^k \\ 0 \\ a_4^k \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

и введены следующие обозначения:

$$h_k = H^k/m, \quad x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \dot{z},$$

$$a_2^k = P^k/m \equiv p_k, \quad a_4^k = Q^k/m \equiv q_k.$$

Сформулируем задачу для системы уравнений (3.2). Необходимо найти такие управлении  $p_k, q_k$  ( $k = 1, 2$ ), постоянные в каждом слое, переводящие изображающую точку из начала координат в заданное конечное положение с координатами  $x_1^2 = \bar{y}, x_3^2 = \bar{z}$  за время  $t_1 + t_2$  и дающие минимум функционалу

$$J = \sum_{k=1}^2 (\alpha t_k + \beta^2 p_k^2 + \gamma^2 q_k^2) \quad (3.4)$$

при положительных  $t_1$  и  $t_2$ , в котором  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — весовые множители (с учетом размерности).

В дальнейшем рассмотрим случай  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , так как к нему всегда можно прийти заменой переменных в системе (3.1), которая для краткости здесь не приводится.

Заметим, что систему (3.1) можно было бы привести к безразмерному виду, как обычно делается, но в данном случае это не упрощает задачу, так как соответствующие множители появляются в функционале и его производных.

Согласно (1.2)–(1.4), находим

$$\varphi^k(t_k) \equiv \varphi_k = \begin{vmatrix} p_k k_k \\ p_k l_k \\ q_k k_k \\ q_k l_k \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\psi^k(t_k) \equiv \psi_k = \begin{vmatrix} 1(t_k) & l_k & 0 & 0 \\ 0 & e^{-h_k t_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1(t_k) & l_k \\ 0 & 0 & 0 & e^{-h_k t_k} \end{vmatrix}, \quad (3.6)$$

где

$$l_k = \frac{1}{h_k} (1 - e^{-h_k t_k}), \quad k_k = \frac{1}{h_k} (t_k - l_k). \quad (3.7)$$

Из формул (1.5) — (1.8), (3.5) — (3.7) получаем

$$x^1(t_1) = \begin{vmatrix} p_1 k_1 \\ p_1 l_1 \\ q_1 k_1 \\ q_1 l_1 \end{vmatrix}, \quad (3.8)$$

$$x^2(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} p_1 k_1 + p_1 l_1 l_2 & + p_2 k_2 \\ p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} & + p_2 l_2 \\ q_1 k_1 + q_1 l_1 l_2 & + q_2 k_2 \\ q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} & + q_2 l_2 \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Учитывая заданную границу между областями линейности  $x_3^1 = z = Z$  и координаты конечной точки  $x_1^2 = \bar{y}$ ,  $x_3^2 = \bar{z}$ , приходим к задаче отыскания относительного экстремума функции (3.4) при следующих дополнительных условиях (см. (2.1) — (2.9)):

$$\Phi_1 = q_1 k_1 - Z = 0, \quad (3.10)$$

$$\Phi_2 = p_1(k_1 + l_1 l_2) + p_2 k_2 - \bar{y} = 0, \quad (3.11)$$

$$\Phi_3 = q_1 l_1 l_2 + q_2 k_2 - (\bar{z} - Z) = 0, \quad (3.12)$$

которые получаем из (3.8) и (3.9).

Вводя множители Лагранжа, составляем вспомогательную функцию

$$F = J + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 \quad (3.13)$$

и, дифференцируя ее по всем варьируемым переменным, получаем уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = 1 + \lambda_1 q_1 l_1 + \lambda_2 p_1(l_1 + l_2 e^{-h_2 t_1}) + \lambda_3 q_1 l_2 e^{-h_2 t_1} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = 1 + \lambda_2(p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + p_2 l_2) + \lambda_3(q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + q_2 l_2) = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = 2p_1 + \lambda_2(k_1 + l_1 l_2) = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 2q_1 + \lambda_1 k_1 + \lambda_3 l_1 l_2 = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_2} = 2p_2 + \lambda_2 k_2 = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_2} = 2q_2 + \lambda_3 k_2 = 0. \quad (3.19)$$

Из системы уравнений (3.10) — (3.12), (3.16) — (3.19) находим, что

$$\lambda_1 = 2 \frac{q_2 l_1 l_2 - q_1 k_2}{k_1 k_2}, \quad \lambda_2 = -2 \frac{p_2}{k_2}, \quad \lambda_3 = -2 \frac{q_2}{k_2},$$

$$p_1 = \frac{\bar{y}(k_1 + l_1 l_2)}{(k_1 + l_1 l_2)^2 + k_2^2}, \quad p_2 = \frac{\bar{y} k_2}{(k_1 + l_1 l_2)^2 + k_2^2}, \quad (3.20)$$

$$q_1 = \frac{Z}{k_1}, \quad q_2 = \frac{\bar{z} - Z - q_1 l_1 l_2}{k_2}.$$

Используя выражения для  $\lambda_i$  из (3.20), представляем (3.14) и (3.15) в виде;

$$f_1(t_1, t_2) = \frac{q_2}{k_2} (q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + q_2 l_2) + \frac{p_2}{k_2} (p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + p_2 l_2) = \frac{1}{2}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} f_2(t_1, t_2) = p_1 \frac{p_2}{k_2} (l_1 + l_2 e^{-h_2 t_2}) + \frac{q_1}{k_1 k_2} [q_1 l_1 k_2 - \\ - q_2 l_2 (l_1^2 - k_1 e^{-h_1 t_1})] = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $p_1, p_2, q_1, q_2$  удовлетворяют соотношениям (3.20).

Выражения (3.21) и (3.22) представляют собой неявные функции переменных  $t_1$  и  $t_2$ , совместное решение которых позволяет определить оптимальные времена «переключений»  $\bar{t}_1$  и  $\bar{t}_2$ , по которым, в свою очередь, определяются оптимальные управлении  $p_k$  и  $q_k$  (3.20).

Перейдя к пределу выражений (3.21) и (3.22) при  $t_1 \rightarrow \infty$  и  $t_2 \rightarrow \infty$ , получаем следующие асимптоты ( $t_1, t_2 \geq 0$ ):

для функции  $f_1(t_1, t_2)$ :  $t_2 = t_2^*$  при  $t_1 \rightarrow \infty$  и  $t_1 = 0$  при  $t_2 \rightarrow \infty$ ;

для функции  $f_2(t_1, t_2)$ :  $t_1 = t_1^*$  при  $t_2 \rightarrow \infty$ .

При этом значения  $t_2^*$  и  $t_1^*$  находятся соответственно из выражений

$$k_2^3 = 2l_2(\bar{z} - Z)^2, \quad (3.23)$$

$$k_1^3 = 2l_1 Z^2. \quad (3.24)$$

Дальнейший анализ затруднителен из-за сложности выражений (3.21) и (3.22), поэтому ограничимся здесь численным построением этих функций для следующих конкретных значений параметров:  $Z = 50$ ;  $\bar{y} = 200$ ;  $\bar{z} = 100$ ;  $h_1 = 0,5$ ;  $h_2 = 0,2$ .

Результаты расчета, приведенные на рис. 1, показывают, что существует единственная точка пересечения ( $\bar{t}_1 = 13,3$ ,  $\bar{t}_2 = 17,7$ ) кривых (3.21) и (3.22), дающая минимум функционалу (3.4), так как при этом  $d^2F > 0$  (см. Приложение). Пользуясь выражениями (3.20), найдем оптимальные управление  $\bar{a}_1^1 = \bar{p}_1 = 1,25$ ;  $\bar{a}_2^1 = \bar{p}_2 = 2,49$ ;  $\bar{a}_4^1 = \bar{q}_1 = 2,21$ ;  $\bar{a}_4^2 = \bar{q}_2 = 0,445$ .

Для проверки полученного решения (3.2) было произведено моделирование системы на машине МН-8. Кусочно-постоянные зависимости  $h(z)$ ,  $p(z)$  и  $q(z)$  были набраны с помощью блоков сигнатур. На рис. 2 показаны зарегистрированные самописцем осциллограммы фазовых координат системы. Для подтверждения минимальности функционала (3.4) в найденной точке были взяты близкие к оптимальной траектории, удовлетворяющие уравнениям (3.10) — (3.12). В таблице 1 приведены

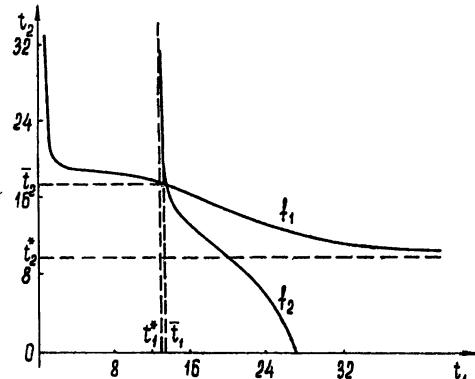


Рис. 1.

некоторые результаты такого эксперимента, которые показывают, что функционал  $J$  принимает минимальное значение при  $t_1 + t_2 = \bar{t}_1 + \bar{t}_2 = 31,0$ .

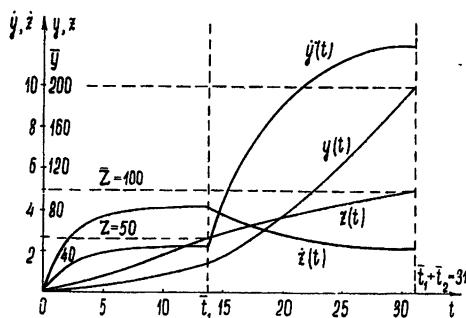


Рис. 2.

Таблица 1

	$q_1$	$q_2$	$p_1$	$p_2$	$t_1 + t_2$	$J$
1	2,21	0,445	1,25	2,49	31,0	44,07
2	2,85	0,445	1,25	3,5	25,0	47,16
3	1,6	0,445	1,25	2,1	37,0	45,73

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Подставляя во вспомогательную функцию (3.13) найденные  $\bar{\lambda}_i = \lambda_i(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ , приходим к новой функции

$$F = J + \bar{\lambda}_1 \Phi_1 + \bar{\lambda}_2 \Phi_2 + \bar{\lambda}_3 \Phi_3 \quad (1)$$

переменных  $t_1, t_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ .

Выражая зависимые дифференциалы  $dq_1, dp_2, dq_2$  через независимые  $dt_1, dt_2, dp_1$  из условий (3.10)–(3.12) и подставляя их выражения во второй дифференциал функции (1), получим

$$d^2F = B_{1,1} dt_1^2 + B_{2,2} dt_2^2 + B_{3,3} dp_1^2 + B_{1,2} dt_1 dt_2 + B_{2,1} dt_2 dt_1 + B_{1,3} dt_1 dp_1 + \\ + B_{3,1} dp_1 dt_1 + B_{2,3} dt_2 dp_1 + B_{3,2} dp_1 dt_2, \quad (2)$$

где

$$B_{1,1} = 2 \left[ \frac{q_1^2 l_1^2}{k_1^2} + \frac{q_1^2}{k_2^2} l_2^2 \left( \frac{l_1^2}{k_1} - e^{-h_1 t_1} \right)^2 + \frac{p_1^2}{k_2^2} (l_1 + e^{-h_1 t_1} l_2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{q_2 l_1 l_2 - k_2 q_1}{k_1 k_2} q_1 \left( e^{-h_1 t_1} - 2 \frac{l_1^2}{k_1} \right) - \frac{p_2}{k_2} p_1 e^{-h_1 t_1} (1 - h_1 l_2) + \right. \\ \left. + \frac{q_2}{k_2} q_1 l_2 \left( h_1 + 2 \frac{l_1}{k_1} \right) e^{-h_1 t_1} \right],$$

$$B_{1,2} = B_{2,1} = \frac{4}{k_2} \left[ \frac{p_1}{k_3} (l_1 + e^{-h_1 t_1} l_2) (p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + p_3 l_2) + \right. \\ \left. + \frac{p_1 p_2}{k_2} l_2 (l_1 + e^{-h_1 t_1} l_2) - e^{-h_1 t_1} e^{-h_2 t_2} (p_1 p_3 + q_1 q_2) - \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - q_2 \frac{q_1 l_1^2}{k_1} e^{-h_2 t_2} - \frac{q_1 q_2}{k_2} l_2^2 \left( \frac{l_1^2}{k_1} - e^{-h_1 t_1} \right) - \frac{q_1}{k_2} l_2 \left( h_1 + 2 \frac{l_1}{k_1} \right) e^{-h_1 t_1} \Big]; \\
 B_{2,2} &= \frac{4}{k_2} \left[ \frac{1}{k_2} (q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + q_2 l_2)^2 + 2 \frac{q_2}{k_2} l_2 (q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + q_2 l_2) + \right. \\
 & + \frac{1}{k_2} (p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + p_2 l_2)^2 + 2 \frac{p_2 l_2}{k_2} (p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + p_2 l_2) - \\
 & \left. - q_2 e^{-h_2 t_2} (q_2 - h_2 l_1 q_1) - p_2 e^{-h_2 t_2} (p_2 - h_2 l_1 p_1) \right], \\
 B_{1,3} = B_{3,1} &= \frac{4}{k_2} (l_1 + e^{-h_1 t_1} l_2) \left[ \frac{p_1}{k_2} (\kappa_1 + l_1 l_2) - p_2 \right], \\
 B_{2,3} = B_{3,2} &= \frac{4}{k_2} \left[ (k_1 + l_1 l_2) (p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + 2 p_2 l_2) \frac{1}{k_1 k_2} - p_2 l_1 e^{-h_2 t_2} \right], \\
 B_{3,3} &= 2 \left[ 1 + \frac{1}{k_2^2} (k_1 + l_1 l_2)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Если второй дифференциал (2) будет положительным, то в исследуемой точке  $M$  будет относительный минимум функционала (3.4) при условиях (3.10)–(3.12) [18].

Значения определителей в точке  $t_1 = \bar{t}_1 = 13,3$  и  $t_2 = \bar{t}_2 = 17,7$  следующие:

$$B_{1,1} = 0,228 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{vmatrix} = 0,0502 - 0,0025 = 0,0476 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{vmatrix} = 0,1075 > 0.$$

Последние неравенства показывают выполнение необходимых и достаточных условий положительности второго дифференциала [18]. Таким образом, действительно в найденной точке достигается минимум функционала (3.4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понtryгин, ДАН СССР, **110**, № 1, 7 (1956).
2. Л. С. Понtryгин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мышленко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
3. Л. И. Розоновэр, ДАН СССР, **127**, № 3, 520 (1959); Автоматика и телемеханика, **20**, № 10, 1320; № 11, 1441; № 12, 1561 (1959).
4. R. Bellman, Bull. Amer. Math. Soc., **60**, 503 (1954).
5. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.
6. Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, М., 1962.
7. А. А. Фельдбаум, Автоматика и телемеханика, **14**, № 6, 712 (1953); **16**, № 2, 129 (1955).
8. Н. Н. Красовский, Автоматика и телемеханика, **18**, № 11, 970 (1957); ПММ, **21**, вып. 5, 670 (1957); **23**, вып. 3, 592 (1959); **24**, вып. 2, 271 (1960); **26**, вып. 2, 218 (1962); Мат. сборник, **53**, № 2, 195 (1961).
9. В. А. Троцкий, ПММ, **25**, вып. 4, 668 (1961), **26**, вып. 1, 29, вып. 2, 233; вып. 3, 431; вып. 6, 1003 (1962).
10. Ю. П. Петров, Вариационные методы теории оптимального управления, изд. Энергия, М.—Л., 1965.
11. А. С. Алексеев, Труды по вопросам применения электронных вычислительных машин в народном хозяйстве, Горький, 1964, стр. 23.
12. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **1**, № 1, 41, № 2, 195; № 5—6, 146 (1958).
13. Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, ОГИЗ, М.—Л., 1941.

14. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1947, стр. 245.
15. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, ПММ, 20, вып. 5, 679 (1956); 22, вып. 6, 750 (1958); Автоматика и телемеханика, 18, № 2, 193; № 3, 297; № 11, 1017 (1957); 19, № 6, 606 (1958).
16. К. К. Беля, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 2, 167 (1962); Нелинейные колебания в системах автоматического регулирования и управления, Машгиз, М., 1962.
17. Ж. Л. Лагранж, Аналитическая механика, 1, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
18. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1, Физматгиз, М.—Л., 1947.
19. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Nonlinear programming, Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951, p. 481.
20. Дж. Б. Денис, Математическое программирование и электрические цепи, ИЛ, М., 1961.
21. К. Дж. Эрроу, Г. Гурвиц, Х. Удзаза, Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, М., 1962.
22. Ю. М. Ермольев, Кибернетика, изд. АН УССР, № 4, 1 (1966).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
1 июля 1966 г.

THE APPLICATION OF A POINT-TO-POINT MAPPING TECHNIQUE  
FOR SOLVING AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM IN PIECE-WISE  
DYNAMIC SYSTEMS

*A. S. Alekseyev, F. F. Minchook*

Some elements of a general theory for solving the optimal control problems for the piece-wise dynamic systems using a point-to-point mapping technique and Lagrangian multipliers technique are considered in this paper.

УДК 62 — 504

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЕЙНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

A. И. Черепанов

Предлагается метод анализа одного класса релейно-импульсных систем регулирования с использованием первых разностей в законе управления. Метод основан на сведении релейно-импульсной системы к эквивалентной непрерывной релейной системе. Приводится пример.

Релейно-импульсные системы, близкие к рассматриваемым, исследовались в [1, 2]. Однако в этих работах изучались системы лишь второго порядка и без коррекции по первым разностям от регулируемой координаты. В настоящей статье излагается метод анализа релейно-импульсных систем любого порядка с вычислительным устройством, осуществляющим коррекцию по первым разностям от регулируемых координат. Структурная схема рассматриваемой системы изображена на рис. 1. Такие структуры имеют системы регулирования с периодическим отбором проб, системы многоканального регулирования и т. п.

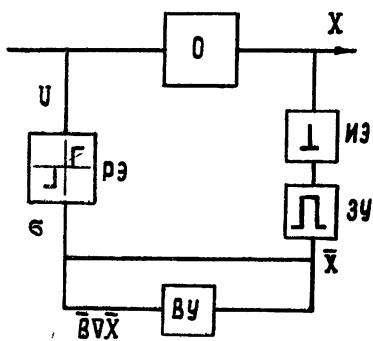


Рис. 1. Блок-схема релейно-импульсной системы:  
 $O$ —объект регулирования, ИЭ—импульсный элемент, ЗУ—запоминающее устройство—формирователь нулевого порядка, ВУ—вычислительное устройство, РЭ—релейный элемент,  $X$ —регулируемая координата,  $\bar{X}$ —она же, квантованная по времени,  $\bar{G}X$ —ее первая разность,  $\sigma$ —управляющая функция,  $U$ —управление объектом

Уравнение рассматриваемой системы можно записать в следующем виде:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + b_i U \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

$$\bar{X}_i = X_i(vT) \quad (vT \leq t < (v+1)T); \quad (v=1, 2, \dots),$$

$$U = -\Phi(\sigma), \quad \sigma = \sum_{i=1}^m B_i \bar{X}_i + \sum_{i=1}^m \bar{B}_i \nabla \bar{X}_i \quad (m = n/2),$$

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma > \epsilon) \\ 0 & (-\epsilon \leq \sigma \leq +\epsilon), \\ -1 & (\sigma < -\epsilon) \end{cases}$$

где  $X_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) — непрерывные регулируемые координаты,  $X_i$  ( $i=m+1, \dots, n$ ) — их первые производные,  $\bar{X}_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) — регулируемые координаты, квантованные по времени,  $\nabla X_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) — их первые разности,  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $B_i$ ,  $\bar{B}_i$  — постоянные,  $T$  — интервал квантования по времени.

Как видно из (1), для удобства, мы полагаем, что в системе  $m$  регулируемых координат являются регулируемыми величинами, а  $m$  других координат — их первыми производными по времени, т. е. матрица коэффициентов  $a_{ij}$  имеет нули. Предлагаемый метод не ограничивается только этим случаем.

Поскольку интересующие нас регулируемые координаты объекта являются непрерывными функциями времени, естественно рассматривать движения системы (1) в обычном  $n$ -мерном фазовом пространстве. Задача состоит в том, чтобы в этом пространстве найти уравнения областей переключения.

Решение непрерывной системы (1) при  $T = 0$  можно записать в виде

$$X_i = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n C_{kj}^{(i)} X_j^0 + C_k^{(i)} U \right) e^{-r_k t} + d_i U \quad (i=1, \dots, n), \quad (2)$$

где  $C_{kj}^{(i)}$ ,  $C_k^{(i)}$ ,  $r_k$ ,  $d_i$  — постоянные,  $X_j^0$  — начальные значения.

Найдем выражения для определения первых разностей регулируемых координат в любой момент времени

$$\nabla X_i(t) = X_i(t) - X_i(t-T) \quad (i=1, \dots, m) \quad (3)$$

или с учетом (2)

$$\nabla X_i = X_i - \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n C_{kj}^{(i)} X_j + C_k^{(i)} U \right) e^{-r_k T} - d_i U \quad (i=1, \dots, m). \quad (4)$$

Подставляя (4) в выражение для  $\sigma$  (1), получаем новое значение

$$\sigma = \sum_{i=1}^m B_i X_i + \sum_{i=1}^m \bar{B}_i \left[ X_i - \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n C_{kj}^{(i)} X_j + C_k^{(i)} U \right) e^{-r_k T} - d_i U \right]. \quad (5)$$

После упрощения имеем

$$\sigma = \sum_{i=1}^m A_i X_i + D U. \quad (6)$$

Поскольку уравнение  $U$  принимает различные значения (+1, 0, -1) в трех областях фазового пространства, то на основании (6) можно представить систему состоящей из некоторой новой функции  $\Phi(\sigma)$ , изображенной на рис. 2б, и новой функции, управляющей реле, —

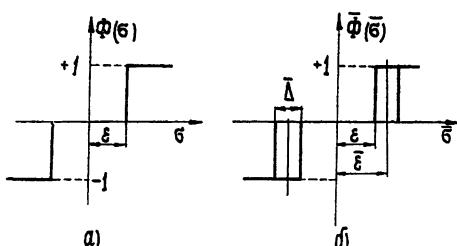


Рис. 2. Характеристика релейного элемента:

а) — исходной системы, б) — эквивалентной системы  
— новая управляющая функция,  $\epsilon$  и  $\bar{\epsilon}$  — новые зоны нечувствительности и гистерезис.

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n A_i X_i, \quad (7)$$

зависящей от непрерывных координат. Как видно из (6), новая релейная функция  $\bar{\Phi}(\bar{\sigma})$  имеет новую зону нечувствительности

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + D/2 \quad (8)$$

и дополнительно обладает гистерезисом

$$\bar{\Delta} = D. \quad (9)$$

Из уравнений (6) легко получить уравнения для четырех гиперплоскостей переключения управления:

$$\sum_{i=1}^n A_i X_i = \mp \varepsilon \mp D. \quad (10)$$

Верхние знаки в (10) соответствуют гиперплоскости  $L'_2$ , когда происходит переключение  $U$  с  $+1$  на  $0$ . Нижние знаки соответствуют гиперплоскости  $L'_1$ , когда происходит переключение  $U$  с  $-1$  на  $0$ :

$$\sum_{i=1}^n A_i X_i = \pm \varepsilon. \quad (11)$$

Верхний знак в (11) соответствует гиперплоскости  $L''_1$ , когда происходит переключение  $U$  с  $0$  на  $-1$ , нижний — гиперплоскости  $L''_2$  при переключении  $U$  с  $0$  на  $+1$ .

Таким образом, учет влияния корректирующего воздействия по первым разностям сводится к замене релейной функции  $\Phi(\sigma)$  новой релейной функцией  $\bar{\Phi}(\bar{\sigma})$ .

Легко далее показать, что для учета влияния квантования по времени можно в нашем случае воспользоваться идеей о случайному времени запаздывания [1]. В соответствии с этой идеей в фазовом пространстве системы выделим не плоскости, а области переключения, которые заключены между гиперплоскостями  $L'_1$ ,  $L''_1$ ,  $L'_2$ ,  $L''_2$  и гиперплоскостями  $\bar{L}'_1$ ,  $\bar{L}''_1$ ,  $\bar{L}'_2$ ,  $\bar{L}''_2$ , сдвинутыми относительно первых на время квантования  $T$  по соответствующим фазовым траекториям. Уравнения сдвинутых гиперплоскостей легко найти на основании (10), (11). Здесь из-за недостатка места их приводить не будем. Итак, влияние квантования по времени учитывается введением в систему запаздывания  $\tau$ , изменяющееся случайно в пределах  $0 < \tau < T$ . Общеизвестно, что введение запаздывания во многих случаях понижает устойчивость системы регулирования. Если бы закон случайного изменения запаздывания был известен, то для оценки устойчивости системы, видимо, можно было бы дополнительное запаздывание  $\tau$  в системе положить равным его математическому ожиданию. Такой путь представляет интерес и заслуживает специального рассмотрения. Практически, однако, вероятностный закон изменения  $\tau$  установить трудно. Поэтому будем предполагать, что каждый раз при переключении релейного элемента добавляется максимальное возможное запаздывание  $\tau = T$ . Это имеет место в случае, если каждый раз момент переключения реле совпадает с моментом тактового импульса, а управляющая функция  $\sigma$  (7) в этот момент имеет значение, несколько недостаточное для переключения реле, т. е. переключение реле всегда происходит на гиперплоскостях  $\bar{L}'_1$ ,  $\bar{L}''_1$ ,  $\bar{L}'_2$ ,  $\bar{L}''_2$ . Такой режим работы системы назовем наихудшим режимом. Очевидно, если система

будет устойчива в наихудшем режиме, то она будет устойчива в любых других режимах работы. Идея о наихудшем режиме работы применялась автором в [3].

Таким образом, анализ релейно-импульсной системы (1) сводится к анализу эквивалентной непрерывной системы с новой управляющей функцией  $\bar{\sigma}$ , определяемой через параметры импульсной системы, с новым релейным элементом  $\Phi(\bar{\sigma})$ , обладающим новой зоной нечувствительности и дополнительно гистерезисом, и с запаздыванием  $\tau$ , равным интервалу квантования по времени.

Уравнение этой эквивалентной системы имеет вид

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ij}X_j + b_i U, \\ U = -\bar{\Phi}[\bar{\sigma}(t - T)], \quad \bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n A_i X_i, \\ \bar{\Phi}(\bar{\sigma}) = \begin{cases} +1 & (\bar{\sigma} > \bar{\varepsilon} - \bar{\Delta}/2, \quad \bar{\Phi}(\bar{\sigma}_0) = 1) \\ 0 & (|\bar{\sigma}| \leq \bar{\varepsilon} + \bar{\Delta}/2, \quad \bar{\Phi}(\bar{\sigma}_0) = 0), \\ -1 & (\bar{\sigma} < \bar{\varepsilon} - \bar{\Delta}/2, \quad \bar{\Phi}(\bar{\sigma}_0) = -1) \end{cases}, \quad (12) \\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon + D/2 \quad \bar{\Delta} = |D|,$$

где  $A_i$  и  $D$  определяются из выражения (5),  $\bar{\sigma}_0$  — начальное значение  $\bar{\sigma}$  в момент смены уравнений движения [4].

Исследование системы (12) может быть сделано известными методами [4–8]. Если порядок системы высокий, то целесообразно пользоваться частотным методом [6] или методом гармонического баланса [7], или же методом точечных преобразований [8]. Если порядок системы не выше второго, удобно использовать метод фазовой плоскости [4, 5].

Изложенный метод применим для анализа систем вида (1) и при наличии нулевых корней.

В заключение приведем простой пример. Пусть система описывается уравнением второго порядка

$$\dot{X}_1 = X_2 \quad (X = X_1), \\ \dot{X}_2 = -X_1 + U, \\ U = -\Phi(\sigma), \quad \sigma = \bar{X} + \bar{B}\nabla\bar{X}, \\ \bar{X} = X(vT) \quad (vT \leq t < (v+1)T), \quad (13) \\ \Phi(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma > \varepsilon) \\ 0 & (-\varepsilon \leq \sigma \leq +\varepsilon) \\ -1 & (\sigma < -\varepsilon) \end{cases}.$$

Эта система соответствует (1) при  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = 1$ ,  $a_{21} = -1$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ ,  $B_1 = 0$ ,  $\bar{B}_1 = \bar{B}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ . Решение непрерывной системы (13) имеет вид

$$X = X_0 + Ut + (\dot{X}_0 - U)(1 - e^{-t}), \\ \dot{X} = U + (\dot{X}_0 - U)e^{-t}. \quad (14)$$

Первая разность равна

$$\nabla X = UT - (\dot{X} - U)(1 - e^T). \quad (15)$$

На основании (6) имеем

$$\sigma = X - \bar{B}(1 - e^{-T})\dot{X} - \bar{B}(e^T - T - 1)U. \quad (16)$$

Параметры эквивалентной системы будут

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -\bar{B}(1 - e^{-T}), \quad D = -\bar{B}(e^T - T - 1), \quad (17)$$

$$\bar{\Delta} = \bar{B}(e^T - T - 1), \quad \bar{\epsilon} = \epsilon - (\bar{B}/2)(e^T - T - 1), \quad \tau = T.$$

Поскольку уравнение (13) второго порядка, воспользуемся для анализа методом фазовой плоскости [4, 5]. На рис. 3 изображена фазовая плоскость эквивалентной системы. Аналогичные непрерывные системы исследовались в [4], где получено их условие устойчивости ([4], стр. 175), которое в нашем случае запишется в виде

$$\left[ 1 + \frac{\tau - 2\bar{\epsilon}}{1 - A_2} \right] e^{-2\bar{\epsilon} - \tau + \bar{\Delta}} < 1. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (18), получаем условие устойчивости релейно-импульсной системы

$$\left[ 1 + \frac{T - 2\bar{\epsilon} + \bar{B}(e^T - T - 1)}{1 - \bar{B}(e^T - 1)} \right] e^{2\bar{\epsilon} - T} < 1, \quad (19)$$

которое справедливо при

$$2\bar{\epsilon} - \bar{B}(e^T - T - 1) > T - \quad (20)$$

$$-[1 - \bar{B}(e^T - 1)](e^T - 1).$$

Интересно отметить, что если в системе (1) использовать не восходящую разность, а нисходящую [9], то в эквивалентной системе новый релейный элемент будет обладать не гистерезисом, а зоной опережения.

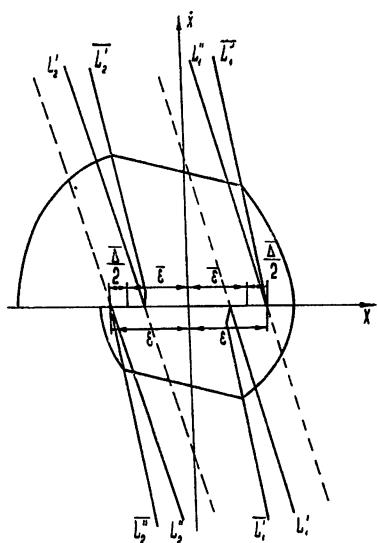


Рис. 3. Фазовая плоскость эквивалентной системы второго порядка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Идзава, Труды ИФАК, 2, 147 (1961).
2. F. J. Millip, E. J. Jury, Applications and Industry, 40, 517 (1959).
3. А. И. Черепанов, Автоматика и телемеханика, 23, № 9, 1247 (1962).
4. Н. С. Горская, И. Н. Крутова, В. Ю. Рутковский, Динамика нелинейных сервомеханизмов, изд АН СССР, М., 1959.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
6. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955.
7. Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, 16, 225 (1955).
8. Ю. И. Неймарк, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 2, изд. АН СССР, М., 1963.
9. Я. З. Цыпкин, Теория импульсных систем, Физматгиз, М., 1958.

ABOUT ONE METHOD OF STABILITY ANALYSIS FOR THE IMPULSE-RELAY  
CONTROL SYSTEMS*A. I. Cherepanov*

The paper presents the method for the analysis of a particular class of impulse-relay control systems in the case when first differences are used in the control law. The method is based on the transformation of an impulse-relay system to an equivalent continuous relay system. The example is provided

---

УДК 531.391

## О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ В СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

*М. И. Фейгин*

Для двухмассовой симметричной системы с ударными взаимодействиями доказывается методом точечных преобразований существование и устойчивость четного числа несимметричных режимов с двумя ударами за период.

Из обширного класса динамических систем с ударными взаимодействиями [1,2] выделяют обычно так называемые симметричные системы, при исследовании которых ограничиваются изучением симметричных периодических движений. Полный период таких движений состоит из совершенно идентичных интервалов — полупериодов.

В настоящей работе для двухмассовой симметричной системы доказывается существование и устойчивость четного числа несимметричных двухударных режимов, период которых больше периода внешнего гармонического воздействия в нечетное число раз. Часть соответствующих этим режимам областей пространства параметров не имеет общих границ с областью симметричного режима. Приводятся осцилограммы несимметричных режимов, полученные на аналоговой машине.

Рассматриваемая симметричная колебательная система состоит из массы, подверженной гармоническому воздействию, в полости которой расположена вторая масса. Свободное перемещение последней в направлении действия внешней силы ограничено двумя преградами, при соприкосновении с которыми происходит мгновенное ударное взаимодействие. В качестве координаты выбрано относительное смещение масс, а за начало отсчета  $x = 0$  принято положение, соответствующее симметричному взаиморасположению масс.

Предполагая, что массы взаимодействуют только при ударе, и исключая из рассмотрения случаи «слипшегося» движения масс, имеем при обычных упрощениях следующие безразмерные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \sin \tau &= 0 && (\text{если } |x| < d), \\ \dot{x}_+ &= -R\dot{x}_- && (\text{если } |x| = d). \end{aligned} \quad (1)$$

Поведение системы зависит от двух параметров: коэффициента восстановления скорости при ударе  $R$  и величины  $d$ , характеризующей расстояние между преградами\*.

Для изучения двухударных периодических движений рассмотрим точечное отображение одной из поверхностей ударного взаимодействия масс  $x = +d$  в самое себя, определяемое уравнениями (1).

\* Существование устойчивых симметричных и несимметричных режимов сложной формы для случая  $R = 0$  рассматриваемой модели было показано в работе [3].

Пусть исходная точка преобразования  $M_0 \{x_0 = d; \dot{x}_0; \tau_0\}$  соответствует моменту времени непосредственно перед ударом, точка  $M_1 \{x_1 = -d; \dot{x}_1; \tau_1\}$  — моменту времени непосредственно перед следующим ударом на поверхности  $x = -d$ , а точка  $M_2 \{x_2 = +d; \dot{x}_2; \tau_2\}$  — моменту времени перед следующим ударным взаимодействием на исходной поверхности  $x = +d$ . Связь между координатами начальной и конечной точек отображения получается посредством решения уравнений (1) и записывается в следующем виде:

$$\sin \tau_1 - \sin \tau_0 - (R \dot{x}_0 + \cos \tau_0) (\tau_1 - \tau_0) + 2d = 0,$$

$$\sin \tau_2 - \sin \tau_1 - [R(\cos \tau_1 - R \dot{x}_0 - \cos \tau_0) + \cos \tau_1] (\tau_2 - \tau_1) - 2d = 0, \quad (2)$$

$$\dot{x}_2 = \cos \tau_2 + R^2 \dot{x}_0 + R \cos \tau_0 - (1 + R) \cos \tau_1.$$

Первые два из приведенных уравнений определяют моменты взаимодействия масс  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , которые являются наименьшими положительными корнями, удовлетворяющими соответственно условиям  $\tau_1 \geq \tau_0$  и  $\tau_2 \geq \tau_1$ .

Координаты неподвижной точки отображения, соответствующей двухударному периодическому движению изучаемой формы, найдем из уравнений (2), дополнив их условиями

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_0, \quad \tau_2 = \tau_0 + 2\pi n \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (3)$$

После несложных преобразований искомые зависимости принимают вид:

$$2\pi n (R \cos \tau_0 - \cos \tau_1) - (\tau_1 - \tau_0) (1 + R) (\cos \tau_0 - \cos \tau_1) = 0,$$

$$\sin \tau_1 - \sin \tau_0 - \frac{\tau_1 - \tau_0}{1 - R} (\cos \tau_0 - R \cos \tau_1) + 2d = 0, \quad (4)$$

$$\dot{x}_0 (1 - R) = \cos \tau_0 - \cos \tau_1.$$

Отметим, что дополнение уравнений (4) необходимым условием симметричности режима  $\tau_2 - \tau_1 = \tau_1 - \tau_0 = \pi n$  приводит к зависимости между параметрами  $R$  и  $d$ , совпадающей с уравнением бифуркационной границы  $N_-$  симметричного режима [3], что согласуется с известными положениями теории бифуркаций [4].

Для исследования устойчивости найденных неподвижных точек отображения варьируем в окрестности этих точек уравнения (2). Полагая затем  $\delta \dot{x}_2 = z \delta \dot{x}_0$  и  $\delta \tau_2 = z \delta \tau_0$ , получаем после ряда преобразований характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{(z - R^2)^2}{1 - R^2} (\cos \tau_0 - \cos \tau_1)^2 + 2z\pi n R (\cos \tau_0 - \cos \tau_1) \times \\ & \times (\sin \tau_1 - \sin \tau_0) + z(1 - R^2)(2\pi n - \tau_1 + \tau_0)(\tau_1 - \tau_0) \times \\ & \times \sin \tau_1 \sin \tau_0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Исследуемый режим устойчив при значениях  $R$  и  $d$ , которым соответствуют корни уравнения (5), расположенные внутри единичного круга.

Покажем далее, что в рассматриваемой симметричной модели может быть только четное число несимметричных периодических режимов исследуемого типа. Введем величину

$$\varepsilon = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\pi n} - 1, \quad (6)$$

характеризующую «несимметричность» режима, и произведем соответствующие преобразования уравнений (4) и (5). В результате получаем уравнение, связывающее величину  $\varepsilon$  с параметрами  $R$  и  $d$ :

$$d^2 \left[ \varepsilon^2 + \left( \frac{1-R}{1+R} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) \right] = \left[ \varepsilon \cos \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) - \frac{\pi n}{2} (1-\varepsilon^2) \sin \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) \right]^2 \quad (7)$$

и характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} & \left( \frac{z-R^2}{1+R} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) + z \left\{ 2\varepsilon\pi n R \operatorname{tg} \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) - (1-\varepsilon^2) \left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 \times \right. \\ & \left. \times \left[ \varepsilon^2 (1+R)^2 - (1-R)^2 \operatorname{tg}^4 \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) не изменяются при смене знака показателя «несимметричности»  $\varepsilon$ . Следовательно, если при некоторых значениях  $R$ ,  $d$  и  $n$  существует устойчивый режим, характеризуемый величиной  $\varepsilon$ , то существует также устойчивый режим с показателем «несимметричности»  $-\varepsilon$ . Остается показать, что такие режимы действительно существуют и устойчивы.

Существование непосредственно следует из уравнения (7). При изменении  $\varepsilon$  от  $\pm 1$  до 0 значение  $d$  изменяется от 0 до величины

$$d_- = \left[ \left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 - 1 \right] \left[ \left( \frac{\pi n}{2} \frac{1-R}{1+R} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2}, \quad (9)$$

соответствующей нижней бифуркационной границе симметричного режима [3]. Иными словами, при  $d > d_-$  и тех же значениях  $R$  имеет место устойчивый симметричный режим.

Необходимо отметить, что вблизи границы (9) существования симметричного и несимметричных режимов последние являются устойчивыми. Это следует из уравнения (8), которое при  $\varepsilon \ll 1$  переходит в уравнение

$$z^2 - z [1 + R^4 - \alpha\varepsilon^2] + R^4 = 0; \quad \alpha > 0, \quad (10)$$

оба корня которого находятся внутри единичного круга. Таким образом, при  $\varepsilon = 0$  происходит слияние двух устойчивых неподвижных точек отображения (2).

Перейдем к доказательству существования в плоскости параметров областей устойчивости изучаемых режимов, не имеющих общих границ с областью симметричного режима. Введем в рассмотрение функцию

$$f(\varepsilon, R, n) = \frac{(1+R)^2}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon\pi n/2)} \left\{ 2\varepsilon\pi n R \operatorname{tg} \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) - (1-\varepsilon^2) \left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 \left[ \varepsilon^2 (1+R)^2 - (1-R)^2 \operatorname{tg}^4 \left( \frac{\varepsilon\pi n}{2} \right) \right] \right\} \quad (11)$$

и перепишем характеристическое уравнение (8) в виде

$$(z - R^2)^2 + zf(\varepsilon, R, n) = 0. \quad (12)$$

Тогда границы области устойчивости  $N_+$ ,  $N_-$  и  $N_\varphi$ , получаемые из уравнения (12) подстановкой соответственно  $z = +1$ ,  $z = -1$  и  $z = e^{i\varphi}$  [4], выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} f &= -(1-R^2)^2, \\ f &= +(1+R^2)^2, \\ R &= 1, \quad 0 < f < 4, \end{aligned} \quad (13)$$

Значения параметров, соответствующих области устойчивости, должны удовлетворять условиям

$$R < 1, \quad -(1 - R^2)^2 < f < (1 + R^2)^2. \quad (14)$$

Отсюда следует, что область устойчивых режимов расположена в окрестности значений  $\varepsilon$  и  $R$ , обращающих в нуль функцию  $f$ . (Значения параметра  $d$  находятся при этом из формулы (7).)

Оценим число нулей функции  $f$  при фиксированных значениях  $R$ ,  $n$  и изменении  $\varepsilon$  от 0 до 1. Запишем условие  $f = 0$  в следующем виде:

$$\frac{\pi n}{4} (1 + R)^2 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) = 2\varepsilon R \operatorname{tg} \left( \frac{\varepsilon \pi n}{2} \right) + (1 - \varepsilon^2) \frac{\pi n}{4} (1 - R^2) \operatorname{tg}^4 \left( \frac{\varepsilon \pi n}{2} \right). \quad (15)$$

Правая часть выражения (15)  $n$  раз неограниченно возрастает и не менее  $n$  раз обращается в нуль. Левая же часть—ограничена, обращается в нуль лишь на концах интервала изменения  $\varepsilon$ , а при  $\varepsilon \ll 1$  и  $R < 1$  больше правой части.

Таким образом, для каждого значения  $n$  имеется не менее  $n$  областей пространства параметров, в каждой из которых существуют два устойчивых несимметричных режима с двумя ударами за период.

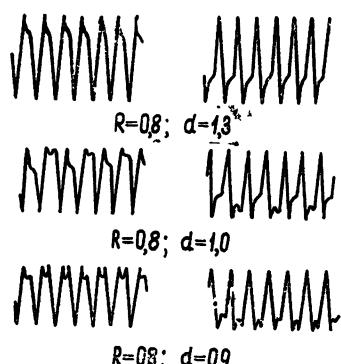


Рис. 1

Решения уравнений движения (1) про-  
сматривались на аналоговой машине. (Схема моделирования подобных систем описана в работе [5].) На рис. 1 приведены осцилло-  
грамммы несимметричных режимов, как изу-  
ченных в настоящей работе ( $R = 0,8$ ;  $d = 1,3$ ),  
так и более сложных. Во всех случаях при  
смене знаков начальных условий устанавли-  
вался другой несимметричный режим, соот-  
ветствующий обратному знаку  $\varepsilon$ .

Проведенное исследование еще раз под-  
твердило, что динамическим системам с  
ударными взаимодействиями свойственно  
исключительное многообразие различных  
типов периодических движений [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Кобринский, Механизмы с упругими связями, изд. Наука, М., 1964
2. Л. В. Беспалова, Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин, Инженерный ж., МТТ, № 1, 151 (1966).
3. М. И. Фейгин, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 122 (1960).
4. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 95 (1958).
5. М. И. Фейгин, Тр. Горьковского ин-та инженеров водного тр-та, в 83, 41 (1967).

Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию  
16 июня 1966 года.

#### ON THE NON SYMMETRICAL PERIODICAL SOLUTIONS IN THE SYMMETRICAL SYSTEM WITH THE IMPACT INTERACTIONS

M. I. Feigin

The symmetrical system with two masses and impact interactions is considered. The existence and stability of the even number of periodical nonsymmetrical modes with two impacts during the period are proved with the aid of a point-to-point mapping technique.

УДК 62 — 506

## К ТЕОРИИ ПРОСТЕЙШИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА

*Н. Н. Леонов*

Исследуется динамика одноканальных экстремальных систем с объектами, представимыми в виде последовательно соединенных линейного инерционного звена и нелинейного безынерционного звена с квадратичной зависимостью выхода от входа. Управляющим устройством является оптимизатор автоколебательного типа. Рассматриваются пути повышения качества работы системы.

1. Простейшая экстремальная система представляет собой систему, состоящую из объекта с одним входом и одним выходом, связанными нелинейной и дифференциальными зависимостями, и оптимизатора, управляющего работой объекта таким образом, чтобы выход объекта постоянно поддерживался на экстремальном уровне. Достаточно общей моделью объекта является модель, представимая в виде последовательно соединенных линейного инерционного звена, нелинейного безынерционного звена и вновь линейного инерционного звена. Из множества таких объектов можно выделить два класса объектов, содержащих по одному инерционному звену [1]. К первому классу относятся объекты с инерционным звеном, следующим за безынерционным нелинейным звеном, а ко второму — объекты с инерционным звеном, предшествующим безынерционному звену.

Простейшие экстремальные системы с объектами из первого класса, управляемыми оптимизатором автоколебательного типа, работающим на основе анализа знаков первых производных от входа и выхода объекта, рассматривались в ряде работ, например, [2,3], а также в работах [4,5] автора.

В настоящей работе рассматриваются простейшие экстремальные системы автоколебательного типа с объектами из второго класса. В результате проведенных исследований установлено, что в фазовых пространствах этих систем, управляемых оптимизатором автоколебательного типа, имеются области той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненные траекториями режимов скольжения. Это приводит к существенному увеличению ошибки слежения за экстремумом выхода объекта, если объект обладает инерционностью порядка выше первого, а также вызывает появление возможности неустойчивого поиска.

В работе рассматриваются пути устранения указанных недостатков в экстремальных системах.

2. Рассмотрим экстремальную систему с объектом, представимым в виде последовательно соединенных линейного инерционного звена первого порядка и нелинейного безынерционного звена, управляемую оптимизатором автоколебательного типа. Структурная схема такой системы изображена на рис. 1. Работа ее описывается уравнениями

$$\varphi = -u^2, \dot{u} + u = z, \dot{z}(t) = \eta(t - \theta), \eta = \Phi[z, \dot{z}],$$

$$\Phi[z, \dot{\varphi}] = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } z < 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } z > 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \end{cases}, \quad (1)$$

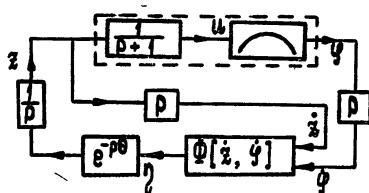


Рис. 1

где  $\Delta$  — положительный параметр, а  $\theta$  — параметр, характеризующий временное запаздывание в оптимизаторе. Наличие в рассматриваемой системе лишь одного параметра не уменьшает ее общности, так как она получается из системы с большим числом параметров простой заменой переменных и параметров. Изучение рассматриваемой системы проводится при исчезающем малом  $\theta$  [2]. В этом случае система (1) имеет плоское фазовое пространство  $\Phi(u, v)$ , где  $v = \dot{u}$ , двулистное, образованное двумя листами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ , такими, что на них величина  $\eta$  равна соответственно  $+1$  и  $-1$ . На листе  $\Phi_{\eta}$  (т. е.  $\Phi_{+1}$  или  $\Phi_{-1}$ ) движение фазовой точки описывается уравнениями

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = \eta. \quad (2)$$

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$v = \eta + A \exp\left(-\frac{u+v}{\eta}\right), \quad v = \eta + Be^{-t}. \quad (3)$$

Фазовые траектории листа  $\Phi_{+1}$  изображены на рис. 2 а. Фазовая точка

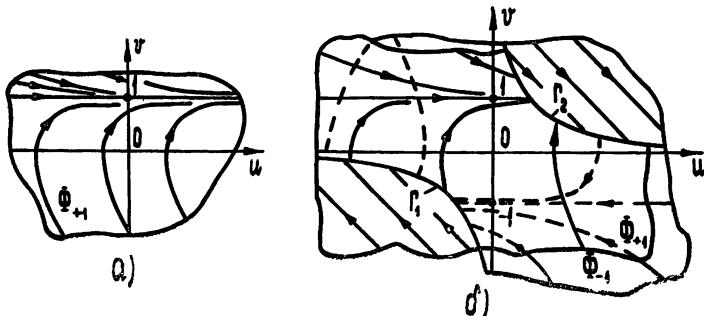


Рис. 2

движется по ним до тех пор, пока не нарушится условие  $\dot{\varphi} > -\Delta$ , т. е.  $2uv < \Delta$ . Если фазовая точка попадает в область  $2uv > \Delta$  листа  $\Phi_{+1}$ , то она переходит на лист  $\Phi_{-1}$ , так как в этой области  $\dot{\varphi} \leq -\Delta$ . Попав в область  $2uv < \Delta$  листа  $\Phi_{-1}$ , фазовая точка движется по траектории этой плоскости до тех пор, пока не покинет область  $2uv < \Delta$ . Попав же в область  $2uv > \Delta$  листа  $\Phi_{-1}$ , фазовая точка переходит на лист  $\Phi_{+1}$ . Таким образом, фазовая точка движется в области  $2uv > \Delta$  фазового пространства в режиме бесконечно частых перемен знака величины  $\eta$ , т. е. в режиме скольжения. Уравнения движения фазовой точки в режиме скольжения имеют следующий вид [2]:

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = 0 \quad (4)$$

или

$$\mu + v = C, \quad v = v_0 e^{-t}.$$

Фазовое пространство рассматриваемой системы изображено на рис. 2 б.

Обозначим левую ветвь линии  $2uv = \Delta$ , для которой  $u < 0$ , через  $\Gamma_1$ , а правую, для которой  $u > 0$ , — через  $\Gamma_2$ . Можно показать, что фазовая точка из любого начального положения приходит через некоторый промежуток времени либо на  $\Gamma_1$ , либо на  $\Gamma_2$ . Кроме того, можно показать, что, начав движение на  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_2$ , фазовая точка приходит затем на  $\Gamma_2$  или  $\Gamma_1$  соответственно. Поэтому изучение движений системы (1) может быть сведено к изучению точечного отображения линии  $\Gamma_1$  в себя.

Из уравнений (1) следует, что фазовое пространство системы симметрично относительно начала координат, т. е. траектории листа  $\Phi_{+1}$  симметричны траекториям листа  $\Phi_{-1}$  относительно точки  $(0,0)$  и  $\Gamma_1$  симметрична  $\Gamma_2$  относительно этой же точки. Поэтому для изучения движений системы достаточно рассмотреть отображение  $T$  линии  $\Gamma_1$  в себя следующего вида:  $T = S\Pi$ , где  $\Pi$  — отображение, ставящее в соответствие точке линии  $\Gamma_1$  точку линии  $\Gamma_2$ , расположенную на той же траектории, что и исходная точка;  $S$  — отображение симметрии, ставящее в соответствие точке линии  $\Gamma_2$  симметричную ей относительно точки  $(0,0)$  точку линии  $\Gamma_1$ .

Обозначим координату  $u$  в точке контакта  $\Gamma_1$  с фазовой траекторией листа  $\Phi_{+1}$  через  $\alpha$ , а в точке контакта линии  $\Gamma_1$  с фазовой траекторией режима скольжения — через  $\beta$ . Из уравнения линии  $\Gamma_1$   $2uv = \Delta$  и равенств (3) и (4) следует, что  $\alpha$  является отрицательным корнем уравнения  $4u^3 - 2\Delta u^2 + \Delta^2 = 0$ , а  $\beta = -\sqrt{\Delta/2}$ . Нетрудно проверить, что  $\alpha$  является единственным отрицательным корнем указанного уравнения существующим при любом  $\Delta > 0$ , и что  $\beta < \alpha$  при  $\Delta > 0$ .

Область определения отображения  $T$  разбивается на два участка  $(-\infty, \beta)$  и  $(\beta, 0)$ . Точке  $M_0$  линии  $\Gamma_1$  с  $u \in (-\infty, \beta)$  отображение  $T$  ставит в соответствие точку  $TM_0$  линии  $\Gamma_2$ , расположенную на той же фазовой траектории листа  $\Phi_{+1}$ , что и точка  $M_0$ . Для того, чтобы найти образ  $TM_0$  точки  $M_0$  линии  $\Gamma_1$  с  $u \in (\beta, 0)$ , необходимо сначала найти точку  $M_1$  линии  $\Gamma_1$  с  $u \in (-\infty, \beta)$ , расположенную на той же траектории режима скольжения, что и исходная точка  $M_0$ , а затем уже найти точку  $TM_1$  линии  $\Gamma_2$ , расположенную на той же траектории листа  $\Phi_{+1}$ , что и точка  $M_1$ . Действительно, фазовая точка с линии  $\Gamma_2$  может попасть на  $\Gamma_1$  лишь по траектории листа  $\Phi_{-1}$ . Поэтому отыскание отображения  $T$  необходимо проводить, исходя из предположения, что фазовая точка приходит на  $\Gamma_1$  по траектории листа  $\Phi_{-1}$ . Очевидно, что, попав на ту часть  $\Gamma_1$ , для которой  $u \in (-\infty, \beta)$ , она дальше движется по траектории листа  $\Phi_{+1}$ . Если она попадает на  $\Gamma_1$  на участке, для которого  $u \in (\alpha, \infty)$ , то также очевидно, что далее она движется по траектории режима скольжения до попадания опять на  $\Gamma_1$  на участке  $u \in (-\infty, \beta)$  и затем переходит на траекторию листа  $\Phi_{+1}$ . Если же она попадает на  $\Gamma_1$  на участке  $u \in (\beta, \alpha)$ , то, казалось бы, она может двигаться либо по траектории листа  $\Phi_{+1}$ , либо по траектории режима скольжения, и ни один из этих вариантов сразу не кажется предпочтительнее. Однако если предположить, что запаздывание  $\theta$  отлично от нуля, то становится очевидно, что после прихода фазовой точки на  $\Gamma_1$  по траектории листа  $\Phi_{-1}$  фазовая точка движется далее в области  $2uv > \Delta$  по траектории, которая при  $0 \rightarrow 0$  переходит в траекторию режима скольжения. В самом деле, попав на  $\Gamma_1$  в точке  $(u_0, v_0)$ , фазовая точка движется далее по траектории листа  $\Phi_{-1}$  еще  $\theta$  единиц времени. Из (2) следует, что  $u(t) + v(t) = u_0 + v_0 + \gamma_t t$ . Следовательно,  $u(0) + v(\theta) = u_0 + v_0 - \theta$ . Затем фазовая точка переходит на лист  $\Phi_{+1}$  и  $\theta$  единиц времени движется по нему, а затем вновь переходит на лист  $\Phi_{-1}$  и так далее. При этом  $u(2\theta) + v(2\theta) = u_0 + v_0, \dots, u(2n\theta) + v(2n\theta) = u_0 + v_0, u(2n\theta + \theta) + v(2n\theta + \theta) = u_0 + v_0 - \theta, \dots$ . Таким образом, в области

$2uv > \Delta$  фазовая точка при  $\theta > 0$  движется по траектории, расположенной между линиями  $u + v = u_0 + v_0$  и  $u + v = u_0 + v_0 - \theta$ . При  $\theta \rightarrow 0$  эта траектория переходит в траекторию  $u + v = u_0 + v_0$  режима скольжения.

Пусть отображение  $T$  ставит в соответствие точке  $(u_0, v_0)$  линии  $\Gamma_1$  точку  $(u_1, v_1)$  линии  $\Gamma_1$ . Тогда после соответствующих выкладок можно получить следующее выражение, описывающее отображение  $T$ :

$$\left(1 + \frac{\Delta}{2u_1}\right) \exp\left(-u_1 - \frac{\Delta}{2u_1}\right) = \left(1 - \frac{\Delta}{2u_0}\right) \exp\left(u_0 + \frac{\Delta}{2u_0}\right) \quad (5)$$

для  $u_0 \in (-\infty, \beta)$ ,

$$\left(1 + \frac{\Delta}{2u_1}\right) \exp\left(-u_1 - \frac{\Delta}{2u_1}\right) = (1 - u_0) \exp\left(u_0 + \frac{\Delta}{2u_0}\right) \text{ для } u_0 \in (\beta, 0). \quad (6)$$

Выше было сказано, что отыскание отображения  $T$  необходимо проводить в предположении, что фазовая точка приходит на  $\Gamma_1$  по траектории листа  $\Phi_{-1}$ . Но на  $\Gamma_1$  она может приходить с  $\Gamma_2$  лишь по тем траекториям листа  $\Phi_{-1}$ , которые расположены выше линии  $v = -1$ . Эта линия пересекает линию  $\Gamma_1$  в точке  $(-\Delta/2, -1)$ . Поэтому будем изучать отображение  $T$  лишь в интервале  $(-\infty, -\Delta/2)$ . При этом

$u_0 < -\Delta/2$  и  $u_1 < -\Delta/2$ . Можно показать, что  $-1 < \frac{du_1}{du_0} < 0$  в интервале

$(-\infty, \beta)$  и  $0 < \frac{du_1}{du_0} < 1$  в интервале  $(\beta, -\Delta/2)$ . Необходимо заметить, что область определения отображения  $T$  разбивается на два участка лишь при  $\Delta < 2$ . Если же  $\Delta > 2$ , то  $\beta > -\Delta/2$  и во всем интервале  $(-\infty, -\Delta/2)$  отображение  $T$  описывается выражением (5).

Диаграмма отображения  $T$  при  $\Delta < 2$  изображена на рис. 3. В силу изложенного выше отображение  $T$  является сжимающим. Поэтому при

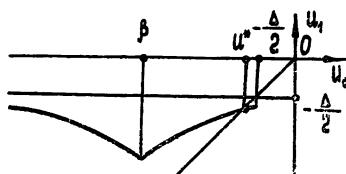


Рис. 3

любом  $\Delta > 0$  оно имеет единственную неподвижную точку  $u^*$ , устойчивую в большом. Величина  $u^*$  определяется из (5) и (6) подстановкой в эти выражения  $u_0 = u_1 = u^*$ . Если  $u^* \in (-\infty, \beta)$ , то этой неподвижной точке соответствует периодическое движение, составленное из участков траекторий листов  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ . Если же  $u^* \in (\beta, -\Delta/2)$ , то неподвижной точке отображения  $T$  соответствует периодическое движение, составленное из участков траекторий листов  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$  и траекторий режимов скольжения. Бифуркационное значение параметра  $\Delta$ , разделяющее области существования двух указанных типов периодических движений, равно 1,84. Если  $\Delta > 1,84$ , то имеет место периодический режим первого типа, составленный лишь из траекторий листов  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ . Если же  $\Delta < 1,84$ , то имеет место периодический режим второго типа. Бифуркационное значение параметра  $\Delta$  находится из условия  $u^* = \beta$ .

3. Наличие в фазовом пространстве областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями режимов скольжения, может привести в реальной системе к неустойчивости процесса поиска. Для реальной системы характерно то, что нелинейная характеристика безынерционного звена объекта изменяется во времени, перемещаясь в общем случае как вдоль оси  $u$ , так и вдоль оси  $\varphi$  [3]. Кроме того, в реальной системе скорость изменения входа объекта в сторону увеличения отлична от скорости изменения входа объекта в сторону уменьшения. Для рассматриваемого типа оптимизатора эти явления эквивалентны действию помехи, изменяющейся с постоянной скоростью, приложенной к входу объекта управления. Если скорость изменения такой помехи характеризуется некоторой величиной  $v$ , то изучение явления потери устойчивости поиска может быть сведено к исследованию следующей системы:

$$\dot{\varphi} = -u^2, \dot{u} + u = z, \dot{z}(t) = \eta(t - \theta), \quad (7)$$

$$\eta = \begin{cases} 1 + 2v, & \text{если } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \end{cases}$$

при исчезающем малом  $\theta$ . Фазовое пространство  $\Phi(u, v)$  системы (7) образовано двумя листами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ . Предположим, что  $v > 0$ . В области  $2uv < \Delta$  фазовые траектории системы (7) имеют тот же вид, что и фазовые траектории системы (1). Отсутствует лишь симметрия траекторий листа  $\Phi_{+1}$  относительно точки  $(0,0)$ , траекториям листа  $\Phi_{-1}$ .

В области  $2uv > \Delta$  фазовые траектории системы (7) уже не являются параллельными прямыми, так как в этой области движение системы описывается уравнениями  $\dot{u} = v$ ,  $\dot{v} + v = v$ , решение которых имеет следующий вид:

$$v = v + A \exp\left(-\frac{u+v}{v}\right), \quad v = v + Be^{-t}. \quad (8)$$

Качественное поведение траекторий режимов скольжения то же, что и качественное поведение траекторий листа  $\Phi_{+1}$ . Разница заключается в том, что траектория, параллельная оси  $u$ , проходит на листе  $\Phi_{+1}$  через точку  $v = 1 + 2v$  оси  $v$ , а в области  $2uv > \Delta$  ее уравнение  $v = v$ .

Общий вид фазового пространства в этом случае изображен на рис. 4. Искажение траекторий режимов скольжения в области  $O_1$  ( $2uv > \Delta$ ,  $u < 0$ ) в результате учета величины  $v$  не влияет на устойчивость процессов поиска и слежения. В области же  $O_2$  ( $2uv > \Delta$ ,  $u > 0$ ) это искажение может сильно изменить характер устойчивости как процесса поиска, так и процесса слежения. Эти изменения заключаются в том, что в  $O_2$  появляется при  $v > 0$  область  $\Omega$  неустойчивого поиска, заполненная траекториями скользящих режимов, при движении по которым фазовая

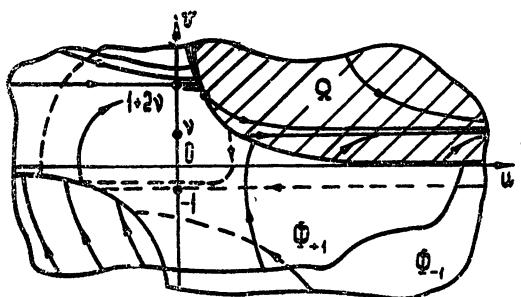


Рис. 4

точка уходит сколь угодно далеко от точки  $(0, 0)$  (при этом  $\varphi(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ). Область  $\Omega$  может быть частью области  $O_2$ , но может и совпадать с ней целиком. Это зависит от соотношения параметров  $v$  и  $\Delta$ .

Для того, чтобы выяснить, какой из этих случаев имеет место, необходимо выяснить, имеются ли в фазовом пространстве рассматриваемой системы траектории режимов скольжения, касающиеся линии  $\Gamma_2$ . Координаты  $u$  и точек контакта этих линий определяются уравнением  $4vu^3 - 2\Delta u^2 + \Delta^2 = 0$ . Анализ его показывает, что оно имеет два положительных корня, если  $\Delta > 13,5v^2$ , и не имеет положительных корней при  $\Delta < 13,5v^2$ . В первом случае имеет место ситуация, изображенная на рис. 4, когда  $\Omega$  является частью  $O_2$ . Во втором случае  $\Omega = O_2$ , так

как  $\frac{dv}{du}$  для траекторий режима скольжения больше, чем  $\frac{dv}{du}$  для линии

$\Gamma_2$  в любой точке линии  $\Gamma_2$ .

Таким образом, на основании изложенного выше можно сделать вывод, что при фиксированном  $v$  уменьшение  $\Delta$ , т. е. увеличение чувствительности оптимизатора по сигналу  $\varphi$ , приводит к увеличению области неустойчивости поиска в системе (7). Однако в рассматриваемой системе недостатки, возникающие в результате появления  $v > 0$ , не исчерпываются лишь наличием области неустойчивого поиска, т. е. ухудшением качества поиска. Происходит одновременно и ухудшение качества процесса слежения. Это особенно хорошо видно в случае  $\Delta < 13,5v^2$ . В этом случае вся область  $O_2$  является областью неустойчивого поиска. Можно показать, что при  $\Delta < 13,5v^2$  в фазовом пространстве системы (7) либо существует единственный предельный цикл, либо предельных циклов у системы нет и система абсолютно неустойчива. Но даже в том случае, когда у системы существует единственный предельный цикл, то одна из точек этого цикла принадлежит линии  $\Gamma_2$ . Любая окрестность этой точки содержит точки области  $\Omega$  неустойчивого поиска. Следовательно, и предельный цикл является неустойчивым.

В том случае, когда  $\Delta > 13,5v^2$ , в системе может существовать единственный предельный цикл. Он будет устойчив, если найдется какая-либо его окрестность, не пересекающаяся с областью  $\Omega$ . Однако если соотношение между уровнем помех в реальной системе и размерами наибольшей из указанных окрестностей предельного цикла (пусть это окрестность  $\rho$ ) таково, что возмущения, действующие на систему, могут вывести фазовую точку из окрестности  $\rho$ , то помехоустойчивость этой системы чрезвычайно низка, так как в результате периодическое движение оказывается неустойчивым.

4. Если линейное звено объекта является инерционным звеном порядка выше первого, то наличие в фазовом пространстве системы областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями режимов скольжения, является причиной резкого ухудшения качества процесса слежения [5]. Выражается это в увеличении ошибки слежения и понижении помехоустойчивости системы. Рассмотрим простейший случай такой системы, когда линейное звено объекта имеет второй порядок. Работа соответствующей экстремальной системы будет описываться следующими уравнениями:

$$\varphi = -u^2, \dot{u} + 2hu + u = z, \dot{z}(t) = \eta(t - \theta), \eta = \Phi[z, \dot{z}], \quad (9)$$

вид функции  $\Phi[z, \dot{z}]$  приведен в (1). Запаздывание  $\theta$  будем считать исчезающее малым.

Система (9) имеет трехмерное фазовое пространство  $\Phi(u, v, w)$ , где  $v = \dot{u}$ ,  $w = \dot{z}$ , образованное двумя пространствами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ , таки-

ми, что для них величина  $\eta$  равна соответственно  $+1$  и  $-1$ ; пространство  $\Phi$  является трехмерным аналогом двулистного плоского пространства.

Фазовая точка, начав движение в пространстве  $\Phi_+$  (т. е.  $\Phi_{+1}$ , или  $\Phi_{-1}$ ), продолжает движение в этом пространстве, если  $\varphi > -\Delta$ , т. е. если  $2uv < \Delta$ . Равенство  $\varphi = -\Delta$  имеет место на поверхностях  $F_1$  и  $F_2$ , для которых  $2uv = \Delta$ ; поверхность  $F_1$  расположена в области  $u < 0$ , а  $F_2$  — в области  $u > 0$ . Движение фазовой точки в области  $2uv < \Delta$  пространства  $\Phi_\tau$  описывается уравнениями  $\dot{u} = v$ ,  $\dot{v} = w$ ,  $\dot{w} = \eta - 2hw - v$ .

Та часть фазового пространства, для которой  $2uv > \Delta$ , заполнена траекториями режимов скольжения. Действительно, в этой части фазового пространства  $\varphi < -\Delta$  и, согласно уравнениям движения системы (9), фазовая точка движется в указанной области, непрестанно переходя из  $\Phi_{+1}$  в  $\Phi_{-1}$  и обратно. Уравнения движения фазовой точки в режиме скольжения имеют следующий вид:

$$\dot{u} = v, \dot{v} = w, \dot{w} = -v - 2hw. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться в том, что фазовые траектории этой системы являются плоскими кривыми, расположенными на плоскостях  $w + 2hv + u = C$ . На каждой из этих плоскостей система (10) имеет единственное состояние равновесия — устойчивый фокус при  $h < 1$  и устойчивый узел при  $h > 1$  в точке  $(C, 0, 0)$ . В проекции на плоскость  $vw$  получаются картины, изображенные на рис. 5. Ось  $u$  является геометрическим местом указанных состояний равновесия. Ось  $u$  целиком расположена в области  $2uv < \Delta$ . А так как все траектории области  $2uv > \Delta$  плоские и состояния равновесия системы (10) расположены на оси  $u$ , то совершенно очевидно, что фазовая точка из любого начального состояния в области  $2uv > \Delta$  приходит через соответствующий конечный промежуток времени на поверхность  $2uv = \Delta$  и выходит затем в область  $2uv < \Delta$ .

Из приведенных выше уравнений движения фазовой точки следует, что фазовые траектории пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и траектории режимов скольжения касаются поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  вдоль линий  $2uv = \Delta$ ,  $4u^3w = -\Delta^2$ . Так как точки контакта траекторий пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и траекторий режимов скольжения с поверхностями  $F_1$  и  $F_2$  расположены на одних и тех же линиях, то фазовая точка в процессе движения не может перемещаться по поверхностям  $F_1$  и  $F_2$ , а может их лишь пересекать.

Из уравнений движения системы (9) следует, что фазовое пространство этой системы симметрично относительно точки  $(0, 0)$ . Поэтому для изучения поведения траекторий системы достаточно рассмотреть лишь ту часть фазового пространства, где  $u > 0$ .

Обозначим через  $F_2^+$  ту часть поверхности  $F_2$ , для которой  $4u^3w > -\Delta^2$ , а через  $F_2^-$  — ту ее часть, где  $4u^3w < -\Delta^2$ . Из уравнений (9) следует, что фазовая точка при движении по траекториям системы переходит из области  $2uv < \Delta$  в область  $2uv > \Delta$  через  $F_2^+$  и возвращается из области  $2uv > \Delta$  в область  $2uv < \Delta$  через  $F_2^-$ . Однако если при пересечении фазовой точкой области  $F_2^+$  дальнейшее ее движение определяется одно-

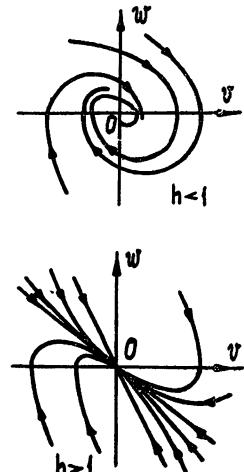


Рис. 5

значно, то после пересечения ею области  $F_2^-$  такого однозначного продолжения не существует. В этом случае мы приходим к той же ситуации, что и в системе, рассмотренной в работе [5]. То обстоятельство, что фазовая точка на  $F_2^-$  приходит по траектории режима скольжения, для которого характерны непрестанные перемены знака величины  $\eta$ , приводит к неопределенности продолжения движения фазовой точки после пересечения ею  $F_2^-$ . Эта неопределенность заключается в том, что после пересечения  $F_2^-$  фазовая точка в области  $2uv < \Delta$  может продолжать движение либо вдоль траектории пространства  $\Phi_{+1}$ , либо вдоль траектории пространства  $\Phi_{-1}$ .

Полностью аналогичная картина имеет место и в той части фазового пространства, где  $u < 0$ .

Таким образом, наличие в фазовом пространстве системы (9) областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями режимов скольжения, приводит к наличию в системе всех тех недостатков, которые отмечены в работе [5] для объекта с инерционным звеном, расположенным после нелинейного безинерционного звена. Эти недостатки относятся как к процессу слежения, так и к процессу поиска. Качество процесса слежения, прежде всего, страдает от увеличения ошибки слежения. Вызывается это наличием сложных режимов работы системы и низкой ее помехоустойчивостью. Качество процесса поиска ухудшается не только по причине существования возможности неустойчивого поиска, но также в связи с увеличением времени поиска. Увеличение времени поиска вызывается тем же обстоятельством, что и увеличение ошибки слежения, а именно, отсутствием полной определенности движения фазовой точки после выхода ее из режима скольжения.

Возможность неустойчивого поиска появляется в рассматриваемой системе в том случае, когда нелинейная характеристика безинерционного звена объекта перемещается со временем с постоянной скоростью в плоскости  $u\varphi$ , или в том случае, когда скорость изменения входа объекта в сторону увеличения отлична от скорости изменения входа объекта в сторону уменьшения. В возможности неустойчивости поиска в этих случаях можно убедиться, рассмотрев систему

$$\varphi = -u^2, \ddot{u} + 2\dot{u} + u = z, \dot{z}(t) = \eta(t - 0), \quad (11)$$

$$\eta = \begin{cases} 1 + 2v, & \text{если } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \end{cases}$$

при исчезающем малом  $\theta$ . В этом случае уравнения движения фазовой точки в режиме скольжения имеют следующий вид:

$$\dot{u} = v, \dot{v} = w, \dot{w} = v - u - 2hw. \quad (12)$$

Система (12) состояний равновесия не имеет. Ее фазовое пространство расслаивается на континуальное множество цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны оси  $u$ , а направляющие являются кривыми, изображенными на рис. 5, смешенными вдоль оси  $v$  на величину  $w$ . Проекции на плоскость  $vw$  всех фазовых траекторий, расположенных на некоторой цилиндрической поверхности, совпадают между собой и представляют собой направляющую этой поверхности.

Фазовая траектория  $v = v_0, w = 0$  является единственной прямолинейной траекторией системы (12). Все остальные траектории системы

(12) криволинейны. Фазовая точка по траектории системы (12) приближается с течением времени к линии  $L(v = v, w = 0)$ . Очевидно, при  $v \neq 0$  линия  $L$  пересекается либо с поверхностью  $F_1$ , либо с поверхностью  $F_2$ . Поэтому часть линии  $L$  при  $v \neq 0$  принадлежит области  $2uv > \Delta$  (точнее, половина линии  $L$ ). А так как все остальные траектории режимов скольжения навиваются на  $L$  или просто к ней неограниченно приближаются при  $u \operatorname{sgn} v \rightarrow \infty$ , то в области  $2uv > \Delta$  при  $v \neq 0$  существует такая область  $\Omega$ , что фазовая точка, попав в  $\Omega$ , из нее в процессе движения не выходит, удаляясь сколь угодно далеко от точки  $(0, 0, 0)$ ; при этом  $\varphi(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Для устранения обнаруженных недостатков можно указать два пути, как и в случае экстремальной системы с объектом, в котором нелинейное безынерционное звено предшествует инерционному [5].

5. Первый путь предусматривает использование информации о динамических характеристиках объекта. Рассмотрим сначала экстремальную систему с инерционностью первого порядка в объекте. Будем предполагать, что на вход оптимизатора, в отличие от системы (1), подается не  $\varphi$ , а  $\sigma = \dot{\varphi} + \varphi$ . Тогда уравнения движения системы примут следующий вид:

$$\dot{\varphi} = -u^2, \dot{u} + u = z, \dot{z}(t) = \eta(t - \theta), \eta = \Phi[z, \sigma], \sigma = \dot{\varphi} + \ddot{\varphi}, \quad (13)$$

$$\Phi[z, \sigma] = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{z} > 0 \text{ и } \sigma > -\Delta \text{ или } \dot{z} < 0 \text{ и } \sigma \leq -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{z} < 0 \text{ и } \sigma > -\Delta \text{ или } \dot{z} > 0 \text{ и } \sigma \leq -\Delta \end{cases}$$

где  $\Delta$  — положительный параметр, а  $\theta$  — параметр, характеризующий временное запаздывание в оптимизаторе. Рассмотрим эту систему при исчезающем малом  $\theta$ . Фазовое пространство этой системы, как и системы (1), плоское, образованное двумя листами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ . На листе  $\Phi_1$  движение фазовой точки описывается уравнениями (2). Из системы (13) следует, что  $\sigma = -2v^2 - 2\eta u$ . Поэтому фазовая точка, начав движение по листу  $\Phi_1$  в области  $\eta u < 0,5\Delta - v^2$ , продолжает движение по этому листу, пока указанное неравенство сохраняется. Если же фазовая точка попадает в область  $\eta u > 0,5\Delta - v^2$  листа  $\Phi_1$ , то она тотчас же переходит на лист  $\Phi_{-1}$ . Та часть фазового пространства системы (13), для которой  $\Delta/2 - v^2 < u < -\Delta/2 + v^2$ , является областью режимов скольжения. Уравнения движения фазовой точки в режиме скольжения записываются в виде системы (4). Фазовое пространство системы (13) изображено на рис. 6.

Можно показать, что система (13) устойчива в большом и имеет единственный предельный цикл, устойчивый в большом, составленный из двух отрезков траекторий листов  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ . Точки склейки этих отрезков расположены на кривых  $u = 0,5\Delta - v^2$  и  $u = -0,5\Delta + v^2$ . При этом точка склейки, принадлежащая линии  $u = -0,5\Delta + v^2$ , имеет координату  $v$ , определяемую из уравнения  $v = \operatorname{th}(v^2 + v - 0,5\Delta)$ .

Изучение системы (13) при различных скоростях изменения входа объекта в разные стороны позволяет установить отсутствие возможности неустойчивого поиска в этой системе. Различие скоростей изменения входа объекта в разные стороны вызывает искажение траекторий режимов скольжения, но в рассматриваемом случае это искажение не при-

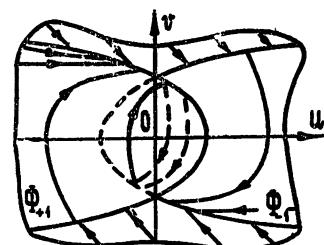


Рис. 6

водит к появлению областей неустойчивого поиска, как было обнаружено выше в других системах. В этом случае фазовая точка из любого начального состояния приходит в некоторую окрестность точки  $(0, 0)$ , содержащую устойчивый предельный цикл.

Если рассмотреть экстремальную систему автоколебательного типа с объектом, имеющим инерционность второго порядка перед нелинейным звеном, управляемую оптимизатором, на вход которого вместо  $\dot{\varphi}$  подается величина  $\sigma = \varphi + 2\dot{h}\varphi + \ddot{\varphi}$  (т. е. оптимизатором, использующим информацию о динамических характеристиках объекта), то нетрудно обнаружить, что в фазовом пространстве этой системы, так же как и в фазовом пространстве системы (13), существуют целые области, заполненные траекториями режимов скольжения. Однако в системе с оптимизатором, использующим информацию о динамических характеристиках объекта, наличие режимов скольжения не приводит к существованию в работе системы таких недостатков, как возможность неустойчивости поиска, низкая помехоустойчивость и наличие сложных режимов работы системы в процессе слежения с большой ошибкой слежения за экстремумом выхода объекта.

6. Второй, более простой путь улучшения качества процессов поиска и слежения заключается в построении оптимизатора таким образом, чтобы устранить режимы скольжения в системе. Это достигается в том случае, если в области  $2uv > \Delta$  величина  $\eta = 0$ . Кроме того необходимо, чтобы оптимизатор следил за порядком движения фазовой точки по подпространствам фазового пространства соответствующей экстремальной системы. Именно, если фазовая точка попадает из области  $2uv < \Delta$  в область  $2uv > \Delta$  по траектории пространства  $\Phi_\tau$ , то из области  $2uv > \Delta$  в область  $2uv < \Delta$  она должна выходить по траектории пространства  $\Phi_{-\tau}$ .

Уравнения движения экстремальной системы с объектом, имеющим инерционное звено второго порядка, и оптимизатором, осуществляющим указанный выше порядок управления системой, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -u^2, \quad \dot{u} + 2\dot{h}\dot{u} + u = z, \quad \dot{z} = \eta, \\ \eta(t, t_{2s+1} < t < t_{2s+2}) &= 0, \\ \eta(t, t_{2s+2} < t < t_{2s+3}) &= -\eta(t, t_{2s} < t < t_{2s+1}) \\ (s &= \dots, -1, 0, 1, \dots), \end{aligned} \tag{14}$$

где  $t_i$  ( $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) таково, что  $\dot{\varphi}(t_i) = -\Delta$ ;  $\dot{\varphi} > -\Delta$  при  $t \in (t_{2s}, t_{2s+1})$ ;  $\eta(t)$  постоянно на интервале  $(t_{2s}, t_{2s+1})$  и равно либо  $+1$ , либо  $-1$ .

Оптимизатор, реализующий описанный порядок управления системой, может быть выполнен по схеме, предложенной в [5].

Фазовое пространство системы (14) образовано тремя подпространствами  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и  $\Phi_0$ , такими, что в них величина  $\eta$  равна  $+1$ ,  $-1$  и  $0$  соответственно. По траекториям пространств  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$  фазовая точка движется в области  $2uv < \Delta$ , а по траекториям пространства  $\Phi_0$  — в области  $2uv > \Delta$ .

Фазовые пространства систем (9) и (14) во многом совпадают. Фазовые траектории в областях  $2uv > \Delta$  и  $2uv < \Delta$  при  $\theta = 0$  для обеих систем описываются одними и теми же уравнениями и законами движения по ним фазовой точки также одинаковы. Совпадают и законы перехода фазовой точки через поверхность  $2uv = \Delta$  из области  $2uv < \Delta$  в область  $2uv > \Delta$ . Различие, приводящее к существенному отличию в

качестве работы этих систем, заключается в отсутствии в системе (14) режимов скольжения и в несовпадении законов перехода фазовой точки через поверхность  $2uv = \Delta$  из области  $2uv > \Delta$  в область  $2uv < \Delta$ . В системе (9) это был вероятностный закон, когда фазовая точка после выхода из области  $2uv > \Delta$  могла продолжать движение либо по траектории пространства  $\Phi_{+1}$ , либо по траектории пространства  $\Phi_{-1}$  с соответствующими вероятностями попадания на траекторию одного из этих пространств. В системе (14) этот закон перехода упорядочен, а именно, переход через поверхность  $2uv = \Delta$  из области  $2uv > \Delta$  в область  $2uv < \Delta$  поставлен в зависимость от перехода фазовой точки из области  $2uv < \Delta$  в область  $2uv > \Delta$ .

Введение такой упорядоченности позволяет повысить качество процессов поиска и слежения. Действительно, в результате введения указанной упорядоченности повышается помехоустойчивость системы и уменьшается ошибка слежения за экстремумом выхода объекта, а также уменьшается, вообще говоря, время поиска.

Устранение режимов скольжения в системе исключает появление возможности неустойчивого поиска, имеющего место при наличии различных скоростей изменения входа объекта в разные стороны.

Возможность неустойчивого поиска в экстремальной системе со старым оптимизатором, связанная с этой причиной, отсутствует, если эти скорости одинаковы. Однако тот факт, что область  $2uv > \Delta$  является для экстремальной системы со старым оптимизатором областью режимов скольжения, приводит к возникновению возможности неустойчивого поиска при появлении  $v \neq 0$ , что было показано при изучении системы (11). В системе (14) режимы скольжения в области  $2uv > \Delta$  отсутствуют и фазовая точка в этой области движется по траекториям, для которых  $\eta = 0$ . Если предположить, что для этой системы скорости изменения входа объекта в разные стороны различны (т. е.  $v \neq 0$ ), то искажения траекторий в области  $2uv > \Delta$ , приводящего к появлению области неустойчивого поиска, не происходит.

7. Выше рассмотрены два пути устранения недостатков в работе экстремальных систем автоколебательного типа. Первый из них заключается в применении оптимизатора, использующего информацию о динамических характеристиках объекта. Так как он должен содержать звено с оператором, обратным оператору линейной части объекта управления, то на пути его реализации возникают большие трудности, ограничивающие сферу применения таких оптимизаторов, особенно для объектов высокого порядка.

Второй путь, предложенный в [5], заключается в выключении оптимизатора при убывании выхода объекта (для случая поиска максимума). Качество работы системы с таким оптимизатором, вероятно, ниже, чем качество работы системы с оптимизатором, использующим информацию о динамических характеристиках объекта управления. Однако оптимизатор этого типа требует сведений только о первой производной от выхода объекта по времени, независимо от порядка объекта. Поэтому он с равным успехом может быть применен для управления объектом произвольного порядка, так как изменение порядка объекта не требует изменения конструкции оптимизатора.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Приборостроение, 7, 46 (1964).
2. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 566 (1961).
3. Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1249 (1963).

- 4 Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, 26, 1720 (1965).  
5 Н. Н. Леонов, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 9, 799 (1966).

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 июня 1966 г.

TO THE AUTOOSCILLATING EXTREMAL SYSTEMS THEORY

*N. N. Lyeonov*

This paper presents the exploration of the one-channel extremal systems with the control plants which could be considered as a consequent junction of a relaxation circuit with a nonlinear link without relaxation having a quadratic response function. The control unit is an optimizer of the autooscillating type. Some ways to improve the estimations of quality for the system are considered.

---

УДК 62 — 506

## О ПРОСТЕЙШИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РЕЛЕЙНОГО (АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО) ТИПА

*Н. Н. Леонов*

Исследуется динамика одноканальной экстремальной системы с инерционным объектом и с оптимизатором автоколебательного типа. Показано, что система с обычным оптимизатором, осуществляющим управление на основе анализа знаков скоростей изменения входа и выхода объекта, имеет ряд недостатков, таких, как возможность неустойчивости поиска при наличии помех и большая ошибка слежения

1. Простейшие экстремальные системы релейного (автоколебательного) типа (с объектом, имеющим один вход и один выход) изучались в ряде работ [<sup>1—5</sup>]. Настоящая работа продолжает работы автора [<sup>3—5</sup>], посвященные изучению различных вопросов динамики этих систем. В работах [<sup>3, 4</sup>] рассматривались экстремальные системы с объектом, представленным в виде последовательного соединения нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена. В работе [<sup>5</sup>] рассмотрены экстремальные системы с объектами, представленными в виде последовательного соединения инерционного звена и нелинейного безынерционного звена. В этих работах были вскрыты причины низкого качества работы рассмотренных экстремальных систем с оптимизаторами, формирующими управляющий сигнал на основе анализа знаков первых производных от входа и выхода объекта [<sup>6</sup>]. В работах [<sup>3—5</sup>] были рассмотрены два пути устранения обнаруженных недостатков применительно к указанным объектам.

В настоящей работе рассматриваются экстремальные системы релейного типа с объектом, имеющим линейные инерционные звенья как до нелинейного безынерционного звена, так и после него. Установлено, что такие системы, управляемые оптимизатором релейного типа, формирующим управляющий сигнал на основе анализа знаков первых производных от входа и выхода объекта (назовем его оптимизатором типа A), имеют низкое качество процессов поиска и слежения. Это выражается, как и в системах, рассмотренных в [<sup>4, 5</sup>], в возможности неустойчивого поиска, в большой ошибке слежения за экстремумом выхода объекта и в низкой помехоустойчивости системы. Одна из основных причин этого, как и в [<sup>4, 5</sup>], проявляется в существовании в фазовом пространстве системы областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями режимов скольжения. Показано, что пути устранения подобных недостатков, указанные в [<sup>4, 5</sup>], достигают своей цели и в рассматриваемых системах.

2. Рассмотрим экстремальную систему с объектом, имеющим два линейных инерционных звена первого порядка и нелинейное безынерционное звено, у характеристики которого есть один максимум (рис. 1). Управление осуществляется релейным оптимизатором типа A. Уравнения движения такой системы могут быть записаны следующим образом:

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} + u = z, \quad \dot{z}(t) = \eta(t - \theta), \quad \eta = \Phi[\dot{z}, \dot{\varphi}],$$

$$\Phi[\dot{z}, \dot{\varphi}] = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \end{cases} \quad (1)$$

где  $T$  и  $\Delta$  — положительные параметры системы, а  $\theta$  — параметр, характеризующий временное запаздывание в оптимизаторе.

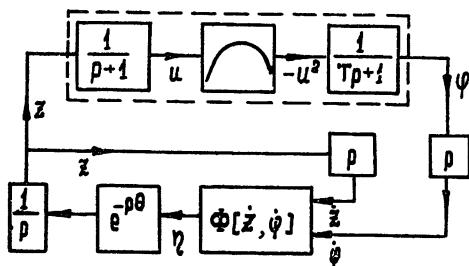


Рис. 1.

Изучение рассматриваемой системы проводится при исчезающе малом  $\theta$  [1]. В этом случае система (1) имеет трехмерное фазовое пространство  $\Phi(u, v = u, \varphi)$ , образованное двумя пространствами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ , такими, что в них величина  $\eta$  равна  $+1$  и  $-1$  соответственно. В пространстве  $\Phi_{\eta}$  (т. е.  $\Phi_{+1}$  или  $\Phi_{-1}$ ) движение фазовой точки описывается уравнениями

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = \eta. \quad (2)$$

Начав движение в пространстве  $\Phi_{\eta}$ , фазовая точка остается в этом пространстве до тех пор, пока не нарушается условие  $\varphi > -\Delta$ , т. е.  $\varphi < T\Delta - u^2$ . Если фазовая точка попадает в область  $\varphi > T\Delta - u^2$  пространства  $\Phi_{\eta}$ , то она сразу же переходит в пространство  $\Phi_{-\eta}$ , согласно (1). Следовательно, область  $\varphi > T\Delta - u^2$  фазового пространства является областью режимов скольжения. Нетрудно проверить [1], что уравнения движения фазовой точки в режиме скольжения имеют следующий вид:

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = 0. \quad (3)$$

Из вида системы (2) следует, что эта система состояний равновесия не имеет. Пространство  $\Phi_{\eta}$  расслаивается на континуальное множество непересекающихся цилиндрических поверхностей, заполненных непересекающимися фазовыми траекториями. Образующие этих цилиндрических поверхностей параллельны оси  $\varphi$ , а направляющие описываются следующим уравнением:

$$v = \eta + A \exp\left(-\frac{u + v}{\eta}\right). \quad (4)$$

Обозначим эти поверхности через  $G_A^{\pm 1}$ . Проекции поверхностей  $G_A^{\pm 1}$  в пространстве  $\Phi_{+1}$  на плоскость  $uv$  изображены на рис. 2. Стрелками указано направление движения фазовой точки по этим поверхностям.

Система (3) имеет континуальное множество состояний равновесия, образующее параболу  $v = 0, \varphi = -u^2$ . Пространство режимов скольжения расслаивается на континуальное множество параллельных плоскостей  $u + v = B$ , которые обозначим через  $H_B$ , параллельных оси  $\varphi$ . Система (3) имеет единственное устойчивое состояние равновесия на каждой из этих плоскостей. Фазовые траектории системы (3), принадлежащие плоскости  $u + v = B$ , изображены в проекции на плоскость  $uv$  на рис. 3.

Выше было отмечено, что пространство режимов скольжения отделено от пространств «нормальных» движений системы (1) поверх-

ностью  $\varphi = T\Delta - u^2$ . Обозначим эту поверхность через  $\Pi$ . Из (2) и (3) следует, что фазовые траектории пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и режимов скольжения касаются поверхности  $\Pi$  вдоль линии  $L$ :  $2uv = \Delta$ ,  $\varphi = T\Delta - u^2$ .

Если обозначим ту часть поверхности  $\Pi$ , для которой  $2uv < \Delta$ , через  $\Pi_0$ , ту часть, для которой  $2uv > \Delta$  и  $u > 0$ , — через  $\Pi_1$  и остальную

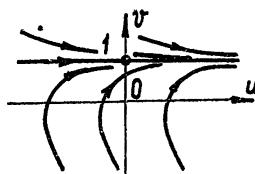


Рис. 2.

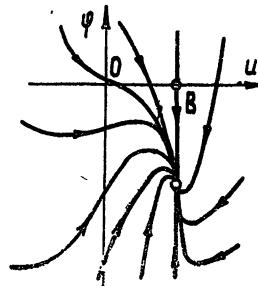


Рис. 3.

часть ( $2uv > \Delta$  и  $u < 0$ ) — через  $\Pi_2$ , то можно показать, что фазовая точка из любого начального состояния в области  $\varphi < T\Delta - u^2$  приходит по траекториям пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  в области  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  поверхности  $\Pi$ , а из любого начального состояния в области  $\varphi > T\Delta - u^2$  (по траекториям режимов скольжения) — в область  $\Pi_0$ .

Состояния равновесия системы (3) не принадлежат области существования режимов скольжения. Поэтому система (1) состояний равновесия не имеет, и каждая ее фазовая траектория образована счетным множеством отрезков траекторий пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и режимов скольжения, склеенных в точках, лежащих на поверхности  $\Pi$ . Если при этом склейка траекторий пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  с траекториями режимов скольжения в областях  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  поверхности  $\Pi$  определяется однозначно, то в области  $\Pi_0$  эта однозначность отсутствует. Именно, если фазовая точка попадает в процессе движения из области  $\varphi < T\Delta - u^2$  в область  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$ , то далее она движется по траектории режима скольжения; если же она пересекает область  $\Pi_0$  при движении из области  $\varphi > T\Delta - u^2$  в область  $\varphi < T\Delta - u^2$ , то после пересечения области  $\Pi_0$  она может двигаться либо по траектории пространства  $\Phi_{+1}$ , либо по траектории пространства  $\Phi_{-1}$  с некоторыми вероятностями.

Подобные явления были обнаружены в работах [4, 5]. В этих работах было отмечено, что наличие таких явлений приводит к низкому качеству работы экстремальной системы. Во-первых, увеличивается время поиска экстремального значения выхода объекта. Во-вторых, резко ухудшается качество процесса слежения за экстремальным значением выхода объекта. Наличие обнаруженной неопределенности перехода фазовой точки с траектории режима скольжения на траектории пространств  $\Phi_{+1}$  или  $\Phi_{-1}$  вызывает существование сложных режимов работы системы в процессе слежения и низкую ее помехоустойчивость, в результате чего ошибка слежения за экстремальным значением выхода объекта резко возрастает.

Указанные недостатки имеют место и в рассматриваемой системе. Кроме того, в рассматриваемой системе так же, как и в системах, рассмотренных в [4, 5], возможна неустойчивость процесса поиска и неустойчивость работы всей системы в целом, порождаемая несовпадением величин скоростей изменения входа объекта в сторону увеличения и в сторону уменьшения. Если учесть это различие скоростей изменения

входа объекта в разные стороны, то динамика экстремальной системы с сбычным оптимизатором автоколебательного типа будет описываться следующими уравнениями:

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -u^2 \quad \dot{u} + u = z, \quad \dot{z}(t) = \eta(t - 0), \\ \eta = \begin{cases} 1 + 2\nu, & \text{если } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \\ -1 & \text{если } \dot{z} < 0 \text{ и } \dot{\varphi} > -\Delta \text{ или } \dot{z} > 0 \text{ и } \dot{\varphi} \leq -\Delta \end{cases} \quad (5)$$

Покажем, что при  $\theta = 0$  в фазовом пространстве системы (5) существует область неустойчивого поиска  $\Omega$  такая, что для любого начального состояния из этой области фазовая точка движется таким образом, что  $\varphi(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Фазовое пространство системы (5)  $\Phi(u, v, \varphi)$  так же, как и фазовое пространство системы (1), образовано двумя пространствами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ , такими, что в них величина  $\eta$  равна соответственно  $1 + 2\nu$  и  $-1$ . При этом область  $\varphi < T\Delta - u^2$  является областью «нормальных» движений системы (5), а именно, если фазовая точка попадает в область  $\varphi < T\Delta - u^2$  пространства  $\Phi_\eta$ , то она остается в этом пространстве до тех пор, пока не выйдет из области  $\varphi < T\Delta - u^2$ . Уравнения движения фазовой точки в пространстве  $\Phi_\eta$  записываются в виде (2), но величина  $\eta$  при этом может быть равна либо  $1 + 2\nu$ , либо  $-1$ .

Область  $\varphi > T\Delta - u^2$  является, как и в системе (1), областью режимов скольжения. Уравнения движения фазовой точки в этой области записываются следующим образом [3]:

$$T\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = \nu. \quad (6)$$

Без ограничения общности можно считать  $\nu > 0$ . Очевидно, система (6) состояний равновесия не имеет. Пространство режимов скольжения расслаивается на континуальное множество непересекающихся цилиндрических поверхностей, заполненных непересекающимися фазовыми траекториями. Образующие этих поверхностей параллельны оси  $\varphi$ , а направляющие описываются уравнением  $v = \nu + A \exp\left(-\frac{u+v}{\nu}\right)$  и имеют вид, изображенный на рис. 2, с той лишь поправкой, что прямая линия, параллельная оси  $u$ , пересекает ось  $v$  не в точке с координатой  $v = 1$ , а в точке с координатой  $v = \nu$ . Будем обозначать эти цилиндрические поверхности через  $F_A$ . Если обозначить ту ветвь линии  $L$ , для которой  $u > 0$ , через  $L_1$ , то координаты  $u$  и точек контакта линии  $L_1$  с цилиндрическими поверхностями  $F_A$  определяются равенством

$$4\nu u^3 - 2\Delta u^2 + \Delta^2 = 0. \quad (4)$$

Можно показать, что уравнение (7) при  $\Delta < 13,5 \nu^2$  положительных решений не имеет, а при  $\Delta > 13,5 \nu^2$  имеет два положительных корня. В первом случае все поверхности  $F_A$  имеют по одной общей точке с линией  $L_1$ , а во втором часть поверхностей  $F_A$  имеет с  $L_1$  по одной общей точке, две поверхности  $F_A$  имеют две общие точки с  $L_1$ , а остальные поверхности, расположенные между последними двумя, имеют с  $L_1$  по три общих точки (рис. 4).

Нетрудно убедиться в том, что при  $\Delta < 13,5 \nu^2$  вся область  $\Pi_1$  поверхности  $\Pi$  принадлежит области  $\Omega$  неустойчивого поиска. Действительно, в этом случае во всех точках области  $\Pi_1$  производная  $\frac{d\varphi}{du}$  для траекторий больше соответствующей производной для поверхности  $\Pi$  (равной  $-2u$ ), и для любого начального состояния из области  $\Pi_1$  фазо-

вая точка в процессе движения не выходит из области  $2uv > \Delta$ . Следовательно, начав движение из точки области  $\Pi_1$ , фазовая точка продолжает движение лишь вдоль траектории режима скольжения. А так как для каждой из этих траекторий  $u(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , что легко проверить, то движение фазовой точки в этом случае происходит так, что  $\varphi(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Теперь, зная, что вся область  $\Pi_1$  принадлежит области  $\Omega$  неустойчивого поиска при  $\Delta < 13,5 v^2$ , можно показать, что в этом случае область  $\Omega$  совпадает со всем фазовым пространством системы (5) при  $b = 0$ , т. е. что система (5) при  $\theta = 0$  абсолютно неустойчива.

Если  $\Delta > 13,5 v^2$ , то и в этом случае в фазовом пространстве системы (5) при  $\theta = 0$  существует область  $\Omega$  неустойчивого поиска. Однако здесь возможно существование устойчивых стационарных движений системы.

При  $\Delta > 13,5 v^2$  существуют две поверхности  $F_{A_1}$  и  $F_{A_2}$ , имеющие по две общие точки с линией  $L_1$ , одна из которых есть точка контакта. Все поверхности, расположенные между  $F_{A_1}$  и  $F_{A_2}$ , имеют с  $L_1$  по три общие точки, остальные же — по одной. Обозначим часть области  $\Pi_1$ , ограниченную отрезками линии  $L_1$  и линии пересечения поверхности  $\Pi$  с  $F_{A_1}$ , через  $O_1$  (рис. 4), а остальную часть области  $\Pi_1$  — через  $O_2$ . Нетрудно убедиться в том, что область  $O_2$  принадлежит области  $\Omega$  неустойчивого поиска. Можно также показать, что и часть области  $O_1$  принадлежит  $\Omega$ . На определении всей области  $\Omega$  в этом случае останавливаться не будем. Достаточно факта существования этой области, чтобы убедиться в низком качестве процесса поиска в рассматриваемой системе.

Рассмотрим два пути устранения описанных выше недостатков в работе экстремальной системы.

3. Первый из них заключается в использовании информации о динамических характеристиках объекта. Рассмотрим экстремальную систему с тем же объектом, что и в системе (1), и с тем же оптимизатором, но вместо  $\dot{\varphi}$  на вход оптимизатора будем подавать величину  $\sigma = \sigma_1 + \dot{\sigma}_1$ , где  $\sigma_1 = \dot{\varphi} + T\ddot{\varphi}$ . Уравнения движения этой системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} &= -u^2, \quad \dot{u} + u = z, \quad \dot{z}(t) = \eta(t - \theta), \\ \eta &= \Phi[z, \sigma], \quad \sigma = \sigma_1 + \dot{\sigma}_1, \quad \dot{\sigma}_1 = \ddot{\varphi} + T\ddot{\varphi}. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим эту систему при  $\theta = 0$ . Фазовое пространство  $\Phi(u, v, \varphi)$  этой системы, как и фазовое пространство системы (1), образовано двумя пространствами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ . Поведение фазовой точки в этих пространствах описано выше.

Из (8) следует, что  $\sigma = -2\eta u - 2v^2$ . Следовательно, фазовая точка, попав в пространство  $\Phi_{+1}$  при  $\sigma > -\Delta$ , остается в этом пространстве до тех пор, пока не нарушится неравенство  $\sigma > -\Delta$ , т. е. неравенство  $\eta u < 0,5\Delta - v^2$ . Если же фазовая точка попадает в область  $\eta u > 0,5\Delta - v^2$  пространства  $\Phi_{+1}$ , то она тотчас же переходит в пространство  $\Phi_{-1}$ . Поэтому та часть фазового пространства системы (8), для которой  $0,5\Delta -$

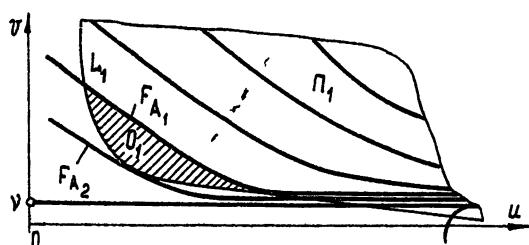


Рис. 4.

$-v^2 < u < -0,5\Delta + v^2$ , является областью режимов скольжения. Движение фазовой точки в этой области описывается системой (3).

В разделе 2 отмечено, что пространство  $\Phi_1$  расслаивается на континуальное множество непересекающихся цилиндрических поверхностей  $G_A^1$ , заполненных непересекающимися фазовыми траекториями. Там же было отмечено, что и пространство режимов скольжения расслаивается на континуальное множество параллельных плоскостей  $H_B$ , заполненных траекториями режимов скольжения, причем на каждой из плоскостей  $H_B$  существует единственное устойчивое состояние равновесия типа узел. В фазовом пространстве системы (8) эти состояния равновесия не принадлежат области существования режимов скольжения. Следовательно, те части плоскостей  $H_B$ , которые принадлежат области  $0,5\Delta - v^2 < u < -0,5\Delta + v^2$ , заполнены непересекающимися траекториями режимов скольжения.

Изучение стационарных режимов работы системы (8) можно было бы проводить обычным образом [3-5], а именно, свести к исследованию точечного отображения поверхности  $u = 0,5\Delta - v^2$  (или поверхности  $u = -0,5\Delta + v^2$ ) в себя. Но здесь мы поступим иначе. Рассмотрим сначала множество точек линии  $u = u_0, v = v_0$  и исследуем движение этого множества точек при перемещении каждой его точки вдоль соответствующей фазовой траектории.

Так как поверхности  $G_A^1$  и плоскости  $H_B$  параллельны оси  $\varphi$ , то любая прямая, параллельная оси  $\varphi$ , принадлежит целиком либо одной из поверхностей  $G_A^1$ , либо одной из плоскостей  $H_B$ . Далее, из уравнений (8) и (3) следует, что если в некоторый момент времени  $t_0$  точки поверхности  $G_A^1$  или плоскости  $H_B$  образуют прямую, параллельную оси  $\varphi$ , то при  $t > t_0$  соответствующие точки, получающиеся перемещением вдоль соответствующих траекторий, образуют прямую, параллельную оси  $\varphi$ . Фазовые траектории системы (8) образованы кусками траекторий пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и траекторий режимов скольжения, склеенных друг с другом в точках поверхностей  $u = 0,5\Delta - v^2$  и  $u = -0,5\Delta + v^2$ . Это — цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси  $\varphi$ . Поэтому если некоторое множество точек фазового пространства образует в момент  $t_0$  прямую, параллельную оси  $\varphi$ , то в любой момент  $t > t_0$  соответствующее множество точек, полученное перемещением точек исходного множества по фазовым траекториям за время  $t - t_0$ , образует также прямую, параллельную оси  $\varphi$ .

Теперь нетрудно убедиться в том, что задача изучения движения множества точек прямой, параллельной оси  $\varphi$ , при движении каждой точки этого множества вдоль соответствующей траектории системы (8) эквивалентна задаче изучения движений системы (13) работы [5]. Последняя система устойчива в большом и имеет единственный предельный цикл, устойчивый в большом. В рассматриваемой системе (8) ему соответствует цилиндр  $P$ , образованный двумя полосами поверхностей  $G_{A_1}^{+1}$  и  $G_{-A_1}^{-1}$ , содержащих прямые  $u = u^*, v = v^*$  и  $u = -u^*, v = v^*$ . Поверхности  $G_{A_1}^{+1}$  и  $G_{-A_1}^{-1}$  симметричны друг другу относительно оси  $\varphi$ , а полосы этих поверхностей, образующие указанный цилиндр, ограничены прямыми  $u = u^*, v = v^*$  и  $u = -u^*, v = -v^*$ . Согласно [5],  $u^* = -0,5\Delta + (v^*)^2$ , а  $v^*$  определяется из уравнения  $v^* = \operatorname{th}[(v^*)^2 + v^* - \Delta/2]$ .

Изучение поведения фазовых траекторий системы (8) на цилиндре  $P$  сводится к изучению точечного отображения прямой  $u = u^*, v = v^*$  в себя следующего вида:

$$\varphi_1 = e^{-v^*/T} \varphi_0 + \gamma, \quad (9)$$

где  $\varphi_0$  — исходная точка указанной прямой, а  $\varphi_1$  — отображенная. В выражении (9) величина  $\tau = -2(u^* + v^*)$ ,  $\gamma = -\tau^2 - 2(\beta - T)\tau - (\beta^2 - 2\beta T - 2T^2)(1 - e^{-\tau/T}) - \alpha^2(2T - 1)(1 - e^{-2\tau}) - 2\alpha(1 - T)^{-1} \{ [\beta - T] \times [1 - T]^{-1} \} (1 - e^{-\tau}) - \tau e^{-\tau}$ ,  $\alpha = v^* - 1$ ,  $\beta = u^* + v^* - 1$ . Следует заметить, что это отображение (обозначим его через  $Q$ ) описывается выражением (9) при  $\tau \neq T$  и  $\tau \neq 2T$ . Выражение для  $Q$  при  $\tau = T$  и при  $\tau = 2T$  мы здесь приводить не будем. Очевидно, отображение  $Q$  имеет единственную неподвижную точку  $\varphi^* = \gamma(1 - e^{-\tau/T})^{-1}$ , устойчивую в большом. Ей соответствует единственный на цилиндре  $P$  устойчивый предельный цикл  $\Gamma$ .

Выше было отмечено, что все фазовое пространство системы (8) разбивается поверхностью  $\Pi$  на две части. Над этой поверхностью имеет место неравенство  $\varphi < -\Delta$ , а под ней  $\varphi > -\Delta$ . Поэтому  $\Gamma$  является единственным предельным циклом системы (8), устойчивым в большом.

На основании вышеизложенного можно утверждать, что экстремальная система с оптимизатором, использующим информацию о динамических характеристиках объекта, лишена тех недостатков, имеющих отношение к процессу слежения, которые имеют место в экстремальной системе с релейным оптимизатором типа  $A$ . Можно показать, что экстремальная система с оптимизатором, использующим информацию о динамических характеристиках объекта, лишена и недостатков, имеющих отношение к процессу поиска, которые присущи экстремальной системе с релейным оптимизатором типа  $A$ . Для этого нужно рассмотреть систему (8) в предположении, что величина скорости изменения входа объекта в сторону увеличения отлична от величины скорости изменения входа объекта в сторону уменьшения на постоянную величину  $2v$ . Используя результаты исследования соответствующей системы из работы [5] (аналогично тому, как это было сделано при изучении системы (8) настоящей работы), можно показать, что подправленная указанным выше образом система (8) устойчива в большом при  $v > -0,5$ , т. е. что возможность неустойчивого поиска в этой системе отсутствует, несмотря на наличие в ее фазовом пространстве области режимов скольжения. Подробнее останавливаться на этом вопросе в данной работе не имеем возможности.

Таким образом, экстремальная система с оптимизатором, использующим информацию о динамических свойствах объекта, имеет хорошее качество процессов поиска и слежения за экстремумом выхода объекта. Однако это требует непрерывного измерения в процессе работы системы производных высших порядков от выхода объекта и, кроме того, вообще говоря, периодического уточнения динамических характеристик объекта.

4. Более простым способом можно добиться улучшения качества работы экстремальной системы, если пойти по пути, предложенному в [4]. Этот путь предусматривает построение оптимизатора таким образом, чтобы исключить возможность работы экстремальной системы на каком-либо отрезке времени в режиме скольжения. Оптимизатор, предложенный в [4], с успехом решает задачу и для тех объектов, которые рассматриваются в настоящей работе. Уравнения движения рассматриваемой экстремальной системы с таким оптимизатором имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T\dot{\varphi} + \varphi &= -u^2, \quad \dot{u} + u = z, \quad \dot{z} = \eta, \\ \eta(t, t_{2s+1} < t < t_{2s+2}) &= 0, \quad \eta(t, t_{2s+2} < t < t_{2s+3}) = \\ &= -\eta(t, t_{2s} < t < t_{2s+1}) \quad (s = \dots - 1, 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $t_i$  ( $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) таково, что  $\dot{\varphi}(t_i) = -\Delta$ ;  $\dot{\varphi} > -\Delta$  при  $t \in (t_{2s}, t_{2s+1})$ ;  $\eta(t)$  постоянно на интервале  $(t_{2s}, t_{2s+1})$  и равно либо  $+1$ , либо  $-1$ .

Фазовое пространство системы (10) образовано тремя пространствами  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_0$  и  $\Phi_{-1}$ , такими, что в них величина  $\eta$  принимает значения  $+1$ ,  $0$  и  $-1$  соответственно. Фазовые траектории пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и  $\Phi_0$  системы (10) совпадают с фазовыми траекториями пространств  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$  и траекториями режимов скольжения системы (1) при  $\theta = 0$  соответственно. Однако закон перехода фазовой точки из пространства  $\Phi_0$  в пространство  $\Phi_{+1}$  или  $\Phi_{-1}$  в системе (10) отличен от закона перехода фазовой точки из области режимов скольжения в область «нормальных» движений в системе (1).

Нетрудно убедиться в том, что фазовое пространство системы (10) расслаивается на континуальное множество непересекающихся цилиндрических поверхностей, заполненных непересекающимися фазовыми траекториями этой системы. Образующие этих поверхностей параллельны оси  $\varphi$ .

Если спроектировать фазовые траектории системы (10) на плоскость  $uv$ , то задача о поведении этих проекций полностью аналогична задаче изучения движений системы (1) работы [5]. В [5] установлено существование в системе (1) единственного устойчивого в большом периодическом движении. В системе (10) настоящей работы ему соответствует цилиндр  $P$ , заполненный непересекающимися фазовыми траекториями.

Согласно [5], цилиндр  $P$  при  $\Delta > 1,84$  образован двумя полосами поверхностей  $G_{A_1}^{+1}$  и  $G_{-A_1}^{-1}$ , ограниченными прямыми  $u = u_1^*$ ,  $v = v_1^*$  и  $u = -u_1^*$ ,  $v = -v_1^*$ , где  $v_1^*$  является отрицательным корнем уравнения  $v_1^* = \text{th}(v_1^* + \Delta/2v_1^*)$ , а  $u_1^* = \Delta/2v_1^*$ . Если же  $\Delta < 1,84$ , то цилиндр  $P$  образован двумя полосами поверхностей  $G_{A_2}^{+1}$  и  $G_{-A_2}^{-1}$ , и двумя полосами плоскостей  $H_{B_1}$  и  $H_{-B_1}$ ; полоса поверхности  $G_{A_2}^{+1}$  при этом ограничена прямыми  $u = u_2^*$ ,  $v = v_2^*$  и  $u = u^0$ ,  $v = v^0$ , полоса плоскости  $H_{B_1}$  — прямыми  $u = u^0$ ,  $v = v^0$  и  $u = -u_2^*$ ,  $v = -v_2^*$ , а полосы поверхностей  $G_{-A_2}^{-1}$  и  $H_{-B_1}$  симметричны относительно оси  $\varphi$  соответствующим полосам поверхностей  $G_{A_2}^{+1}$  и  $H_{B_1}$ . Здесь  $u_2^*$  является отрицательным корнем уравнения

$$(1 - u_2^*) \exp\left(2u_2^* + \frac{\Delta}{u_2^*}\right) = 1 + \frac{\Delta}{2u_2^*}, \quad v_2^* = \frac{\Delta}{2u_2^*},$$

$$v^0 = \frac{B_1}{2} - \left(\frac{B_1^2}{4} - \frac{\Delta}{2}\right)^{1/2}, \quad u^0 = \frac{\Delta}{2v^0}, \quad B_1 = -u_2^* - v_2^*.$$

Изучение поведения фазовых траекторий на цилиндре  $P$  сводится к исследованию точечного отображения  $Q$  прямой в себя. Если  $\Delta > 1,84$ , то  $Q$  — отображение прямой  $u = u_1^*$ ,  $v = v_1^*$  в себя, описываемое выражением (9), в котором  $u^*$  и  $v^*$  следует заменить на  $u_1^*$  и  $v_1^*$  соответственно. Если же  $\Delta < 1,84$ , то  $Q$  — отображение линии  $u = u_2^*$ ,  $v = v_2^*$  в себя следующего вида:

$$\varphi_1 = \varphi_0 \exp\left(-\frac{\tau_1 + \tau_2}{T}\right) + \gamma_1, \quad (11)$$

где

$$\tau_1 = -2(u_2^* + v_2^*), \quad \tau_2 = -\ln(-v_2^*/v^0),$$

$$\gamma_1 = e^{-\tau_2/T} \{2\beta_1 T - \tau_1^2 - 2(\beta_1 - T)\tau_1 - \beta_1^2 + \alpha_1^2(2T-1)^{-1}e^{-2\tau_1} + \\ + \{2\alpha_1[\beta_1 - T(1-T)^{-1}]\}(1-T)^{-1} + 2\alpha_1(1-T)^{-1}\tau_1\} e^{-\tau_1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \{ \beta_1^2 - 2\beta_1 T + 2T^2 - \alpha_1^2(2T-1)^{-1} - 2\alpha_1[\beta_1 - T(1-T)^{-1}] \times \\
 & \times (1-T)^{-1} \} e^{-\tau_1/T} + \beta_2^2 - 2\alpha_2\beta_2(1-T)^{-1} - \alpha_2^2(2T-1)^{-1} \} - \tau_2^2 + \\
 & + 2T\tau_2 - \beta_2^2 - 2T^2 + 2\alpha_2\beta_2(1-T)^{-1} e^{-\tau_2} + \alpha_2^2(2T-1)^{-1} e^{-2\tau_2}, \\
 \alpha_1 & = v_2^* - 1, \quad \beta_1 = u_2^* + v_2^* - 1, \quad \alpha_2 = v^0, \quad \beta_2 = u^0 + v^0.
 \end{aligned}$$

Очевидно, отображение  $Q$  в каждом из приведенных двух случаев имеет единственную неподвижную точку, устойчивую в большом. Ей соответствует единственный на цилиндре  $P$  устойчивый предельный цикл  $\Gamma$ . Так как всюду над поверхностью  $\Pi$  в фазовом пространстве системы (10) имеет место неравенство  $\varphi < -\Delta$ , а под этой поверхностью  $\varphi > -\Delta$ , то  $\Gamma$  является единственным предельным циклом системы (10), устойчивым в большом.

Если предположить, что в рассматриваемой экстремальной системе величина скорости изменения входа объекта в сторону увеличения отличается от скорости изменения входа в сторону уменьшения на постоянную величину, то можно показать, что и в этом случае система имеет единственный периодический режим работы, устойчивый в большом. Следует лишь отметить, что в этом случае соответствующий предельный цикл не будет симметричным относительно оси  $\varphi$ , как это было для системы (10).

Таким образом, рассматриваемая экстремальная система с новым оптимизатором имеет более высокое качество работы, нежели с оптимизатором типа  $A$ . По сравнению с системой, управляемой оптимизатором, использующим информацию о динамических характеристиках объекта, у этой системы качество работы несколько ниже. Правда, этот проигрыш в качестве работы может быть частично компенсирован тем, что оптимизатор имеет одинаковую конструкцию для экстремальной системы любого порядка, в то время как оптимизатор, использующий информацию о динамических характеристиках объекта управления, должен содержать звено с оператором, обратным оператору линейной части объекта, и трудности реализации такого звена возрастают с увеличением порядка объекта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 566 (1961).
2. Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1249 (1963).
3. Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, 26, 1720 (1965).
4. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 799 (1966).
5. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2 (1967).
6. А. Г. Ивахненко, Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования, изд. АН УССР, Киев, 1957

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 июля 1966 г.

## ON THE SIMPLEST EXTREMAL SYSTEM OF THE RELAY (AUTOOSCILLATING) TYPE

N. N. Lyeonov

The dynamics of one-channel extremal system with an autooscillating optimizer and with a controlled plant of the relaxation type is studied. It is shown that the system with an ordinary optimizer, which performs the control analysing the signs of the rates of change in the input and output of the controlled plant, has a number of deficiencies such as the possibility of non stable search in the case of a random noise and a fairly large error in the servocontrol.

## К ЧИСЛЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

УДК 518.61 + 517.9

3. С. Баталова

В статье приводится алгоритм численного исследования кусочно-гладкого точечного преобразования прямой в прямую с помощью электронной вычислительной машины.

В настоящей работе излагается алгоритм численного исследования динамических систем, изучение которых сводится к исследованию кусочно-гладкого точечного преобразования прямой в прямую. Алгоритм основан на результатах работы [1], где сформулированы условия, при выполнении которых возможно изучение точечного преобразования, исходя из его приближенного задания. Применение этого алгоритма к исследованию динамических систем позволяет с помощью цифровой машины с определенной точностью найти периодические движения различной кратности и движения, «устойчивые по Пуассону», определить области притяжения устойчивых движений и дает возможность установить поверхности в пространстве параметров системы, близкие к бифуркационным [2–7].

Предлагаемый алгоритм исследования точечного преобразования прямой в прямую использовался для изучения неавтономных динамических систем, описывающих вибрационный процесс погружения шпунтов, свай в упругий грунт [8, 9].

Алгоритм исследования точечного преобразования  $T$  прямой в прямую состоит из трех частей.

Первая часть содержит алгоритм исследования с заданной точностью приближенного преобразования  $\tilde{T}$  при определенных значениях параметров. С помощью этого алгоритма производится отыскание неподвижных точек различной кратности точечного преобразования  $\tilde{T}$  и определение характера их устойчивости, находятся области притяжения устойчивых неподвижных точек и области, заполненные точками, «устойчивыми по Пуассону». В основе алгоритма исследования преобразования  $\tilde{T}$  лежит ряд определений, приведенных в разделе 1.

Во второй части алгоритма среди полученных неподвижных точек преобразования  $\tilde{T}$  находятся те неподвижные точки, в окрестности которых лежат неподвижные точки точного точечного преобразования  $T$ , вычисляется ошибка в определении координат этих точек и величина различия в определении областей притяжения устойчивых неподвижных точек. Эта часть алгоритма основывается на теореме [1], которая излагается в разделе 2.

В третьей части алгоритма определяется характер (бифуркационный или обыкновенный) значения параметра, при котором проводилось исследование преобразования  $T$ , и с заданной точностью производится отыскание областей, содержащих бифуркационные значения параметров,

Описание каждой части алгоритма дано в разделе 3, соответственно в пп. I—III.

1. Пусть  $\bar{x} = g(x)$  — функция последования для приближенного точечного преобразования  $\tilde{T}$ ,  $x \in [a, b]$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1)  $g(x)$  — кусочно-ломаная функция, достигающая своего минимума и максимума в конечном числе точек;

2) в каждом интервале непрерывности функции  $g(x)$  выполняется условие Липшица;

3) для любого  $x \in [a, b]$  последовательность итераций

$$g_1(x) = g(x), \quad g_{m+1}(x) = g[g_m(x)] \quad (m = 1, 2, \dots)$$

принадлежат отрезку  $[a, b]$ .

Точки  $x_1, x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ ) будем считать лежащими в одном интервале линейности функции  $g_m(x)$ , если при  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  удовлетворяются неравенства

$$K < K^*, \quad N < N^*, \quad (1)$$

где  $\delta$ ,  $K^*$  и  $N^*$  — заданные положительные величины, определяющие точность исследования точечного преобразования, а постоянные  $K$  и  $N$  определяются равенствами

$$K = |g_m(x_1) - g_m(x_2)| |x_1 - x_2|^{-1}, \quad (2)$$

$$N = \left| \frac{g_m(x_1) - g_m(x')}{x_1 - x'} - \frac{g_m(x') - g_m(x_2)}{x' - x_2} \right| |x_1 - x_2|^{-1}, \quad (3)$$

$x' \in (x_1, x_2)$ . Если выполнено только одно неравенство  $K < K^*$ , то точки  $x_1, x_2$  будем считать расположенными в одном интервале непрерывности функции  $g_m(x)$ .

Введем ряд определений, опирающихся на известные понятия теории точечных отображений [2–7]. Пусть точки  $\xi_{mk}, \eta_{mk}$  лежат в одном интервале линейности функции  $g_m(x)$ . Интервал  $\Delta_{mk} = (\xi_{mk}, \eta_{mk})$  назовем правильным, если имеют место неравенства

$$\varphi_m(\xi_{mk})\varphi_m(\eta_{mk}) < 0^*, \quad |\varphi_m(\xi_{mk})| \geq \varepsilon, \quad |\varphi_m(\eta_{mk})| \geq \varepsilon, \quad (4)$$

где  $\varphi_m(x) = g_m(x) - x$ ,  $0^*$  — машинный нуль,  $\varepsilon$  — наименьшее положительное число, записанное в ячейке электронной вычислительной машины. Любую точку правильного интервала  $\Delta_{mk}$  будем называть  $m$ -кратной

неподвижной точкой преобразования  $\tilde{T}$  и обозначать через  $\alpha_{mk}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Будем говорить, что последовательность  $\{\alpha_{mk}\}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ )  $m$ -кратных неподвижных точек образует  $m$ -членный устойчивый цикл преобразования  $\tilde{T}$ , если  $\prod_{k=1}^m \Delta_{mk} = 0^*$ ,  $g_m(\xi_{mk}) \in \Delta_{mk}$ ,

$g_m(\eta_{mk}) \in \Delta_{mk}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Если  $\prod_{k=1}^m \Delta_{mk} = 0^*$ ,  $g_m(\xi_{mk}) \in \Delta_{mk}$ ,  $g_m(\xi_{mk}) \in \Delta_{mk}$  при всех  $k = 1, 2, \dots, m$ , то  $m$ -членный цикл  $\{\alpha_{mk}\}$  назовем неустойчивым.

Допустим, что некоторая область  $D$  точками  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, s$ ) разделяна на  $s$  интервалов величины  $\rho \leq \delta$ . Область  $D$  будем называть областью притяжения устойчивого  $m$ -членного цикла  $\{\alpha_{mk}\}$  ( $\alpha_{mk} \in \Delta_{mk}$ ) ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), если последовательные итерации всех точек  $x_i$  попадают в область  $\Delta_m = \bigcup_{k=1}^m \Delta_{mk}$ . Если последовательные итерации  $g_k(x_i)$ , начинающиеся в точке  $x_i$ , с увеличением  $k$  произвольным образом про-

бегают все  $s$  ( $s > 1$ ) интервалов, то точку  $x_i$  назовем устойчивой типа  $(s, \delta)$ , а область  $D$  — областью заполнения устойчивых точек типа  $(s, \delta)$ . Область  $D$  может состоять из нескольких промежутков, величина которых превышает значение  $\delta$ . Устойчивые точки типа  $(s, \delta)$  соответствуют точкам, устойчивым по Пуассону, либо устойчивым сложным неподвижным точкам преобразования  $T$  кратности  $m_0 > s$ .

2. Пусть  $f(x)$  — функция последования для точного точечного преобразования  $T$ ,  $x \in [a, b]$  и пусть ошибки вычисления значений функции  $f(x)$  и ее производной для любых  $x$ , лежащих вне  $\rho$  — окрестностей точек разрыва непрерывности функции  $f(x)$ , не превосходят соответственно величины  $L$  и  $S$  [1].

Допустим, что приближенное точечное преобразование  $\tilde{T}$  имеет  $M$  неподвижных точек  $a_{m_j k}$  кратности  $m_j$  ( $k = 1, 2, \dots, m_j$ ,  $\sum m_j = M$ ), причем каждая неподвижная точка  $a_{m_j k}$  лежит в интервале  $\Delta_{m_j k} = (\xi_{m_j k}, \eta_{m_j k})$  гладкости функции  $g_{m_j}(x)$ , для которого выполняются неравенства (4) при  $\varepsilon = \delta_{m_j}$ ,

$$\delta_{m_j} = L(K_1^{m_j} - 1)(K_1 - 1)^{-1}. \quad (5)$$

Для любых  $x$  и  $x'$ , принадлежащих интервалу  $\Delta_{m_j k}$ , имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |f_{m_j}(x) - g_{m_j}(x')| &\leq \delta_{m_j} + K_1^{m_j} |x - x'|, \\ |f'_{m_j}(x) - g'_{m_j}(x')| &\leq S + N_1 \delta_{m_j - 1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $K_1$  и  $N_1$  — постоянные Липшица для функции  $g(x)$  и ее производной, и удовлетворяется одно из неравенств

$$|g_{m_j}(x) - g_{m_j}(x')| \leq q_{m_j} |x - x'|, \quad |g_{m_j}(x) - g_{m_j}(x')| \geq q'_{m_j} |x - x'|. \quad (7)$$

Здесь  $q_{m_j}$ ,  $q'_{m_j}$  — постоянные, причем

$$0 \leq q_{m_j} < 1 - S - N_1 \delta_{m_j - 1}, \quad q'_{m_j} > 1 + S + N_1 \delta_{m_j - 1}. \quad (8)$$

Для любых  $x$ , лежащих вне области  $\bigcup_{j, k} \Delta_{m_j k}$ , имеет место неравенство

$$|g_{m_j}(x) - x| > \delta_{m_j}. \quad (9)$$

Тогда точечное преобразование  $T$  имеет также  $M$  неподвижных точек. Каждая устойчивая неподвижная точка преобразования  $T$  лежит в  $\tau$ -окрестности устойчивой точки преобразования  $\tilde{T}$ , а каждая неустойчивая точка — в  $\tau'$ -окрестности неустойчивой точки, причем соответствующие точки имеют одинаковую кратность, а величины  $\tau$  и  $\tau'$  определяются неравенствами

$$\tau \leq \delta_{m_j} (1 - q_{m_j})^{-1}, \quad \tau' \leq \delta_{m_j} (q'_{m_j} - 1)^{-1}.$$

Каждая граница области притяжения устойчивого  $m_j$ -членного цикла преобразования  $T$  отличается от соответствующей границы области притяжения  $m_j$ -членного цикла преобразования  $\tilde{T}$  не более, чем на величину  $\tau'$ , если граница совпадает с неустойчивой неподвижной точкой, либо на величину  $\tau_0$ , если она совпадает с точкой разрыва непре-

рывности функции  $g_{m_j}(x)$ ; здесь  $\tau_0$  — окрестность точки разрыва, в которой не выполняются неравенства (6).

3. I. Пусть задан оператор  $Q$  вычисления значения функции  $g(x)$  для любого  $x \in [a, b]$ . Требуется найти неподвижные точки приближенного точечного преобразования  $\tilde{T}$  и определить области притяжения устойчивых неподвижных точек или области заполнения устойчивых точек типа  $(s, \delta)^*$ .

Для решения этой задачи выбирается некоторая точка  $x_0 \in [a, b]$  и строится итерационная последовательность  $\{x_i\}$ ,  $x_i = g_i(x_0)$ , до тех пор, пока выполнится приведенное выше определение устойчивого  $m$ -членного цикла, либо устойчивой точки типа  $(s, \delta)$ , т. е. пока станет ясным характер элемента притяжения, к которому сходится итерационная последовательность. Значение  $i^*$ , при котором итерационный процесс прекращается, определяется следующим образом. С помощью итерационной последовательности  $\{x_i\}$  составляются промежутки  $[u_v, v_v]$  ( $v=1, 2, \dots, v_1$ ), которые образуют часть области притяжения элемента, к которому она сходится. При этом граничное значение  $u_v$  или  $v_v$  полагается равным  $x_i$ , если выполняется неравенство  $-\delta < x_i - u_v < 0$  или неравенство  $0 < x_i - v_v < \delta$ , причем если расстояние между точками  $u_v$  и  $v_{v-1}$  либо между  $v_v$  и  $u_{v+1}$  не превышает величину  $\delta$ , то  $v-1$  и  $v$  или  $v$  и  $v+1$  промежутки объединяются. При  $x_i \in (u_v, v_v)$  ( $v=1, 2, \dots, v_1$ ) границы отрезков не изменяются. Если  $x_i - u_v < -\delta$  или  $x_i - v_v > \delta$ , то составляется новый отрезок с граничными значениями  $u_v = v_v = x_i$ . Кроме того, для каждой точки  $x_i$  находится такое значение  $m$ , при котором выполняется неравенство

$$|x_{i-m} - x_i| \leq \delta \quad (m = 1, 2, \dots, i), \quad (10)$$

т. е. отыскивается отрезок величины  $\rho \leq \delta$ , в который попадают две точки итерационной последовательности. Если такого  $m$  не существует, то с помощью оператора  $Q$  находится новая итерационная точка, при этом число  $i$  увеличивается на единицу.

Допустим, что при некотором  $i = i_1$  неравенство (10) удовлетворяется, тогда могут возникнуть следующие случаи.

1)  $m = i_1$  и  $x_{k+m} - x_k = 0^*$  при всех  $k = 0, 1, \dots, m-1$  (рис. 1a,  $m=2$ ). При этом  $i^* = i_1$ , и мы имеем  $m$ -членный цикл  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$  преобразования  $\tilde{T}$ , каждая точка которого является  $m$ -кратной неподвижной точкой. Допустим, что при  $\xi_{mk} = x_k - \delta/2$ ,  $\eta_{mk} = x_k + \delta/2$  выполняются условия (4). Тогда цикл  $\{x_k\}$  будет устойчив, если  $g(\xi_{mk}) \in$

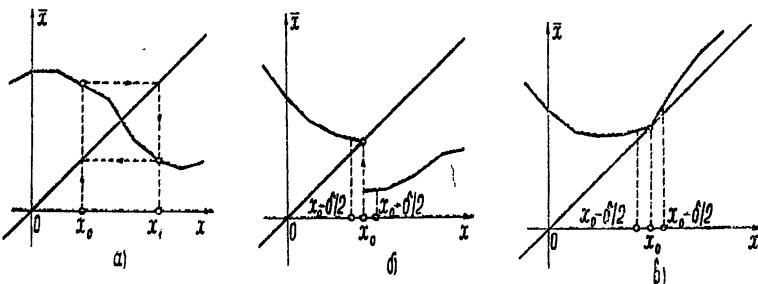


Рис. 1.

\* Алгоритм исследования точечного преобразования  $\tilde{T}$  реализован в виде специальной программы для электронной вычислительной машины М-20. Для ее использования задаются граничные значения  $a, b$ , оператор вычисления функции  $g(x)$  и величины  $K^*, N^*$  и  $\delta$ , определяющие точность исследования точечного преобразования.

$[\xi_{mk}, \eta_{mk}]$ ,  $g_k(\eta_{mk}) \in [\xi_{mk}, \eta_{mk}]$ ; в противном случае цикл  $\{x_k\}$  является неустойчивым.

Если условия (4) не удовлетворяются, то по крайней мере одна точка последовательности  $\{x_k\}$  совпадает с точкой разрыва непрерывности функции  $g_m(x)$  (рис. 1б,  $m = 1$ ), либо является общей точкой кривой  $\bar{x} = g_m(x)$  и биссектрисы  $\bar{x} = x$  (рис. 1в). В этом случае параметр, при котором проводится исследование точечного преобразования, является бифуркационным, и дальнейшая работа алгоритма связана с изменением параметра, о чем будет сказано ниже.

2)  $m < i_1$  и  $x_{i_1-m} - x_{i_1} \neq 0^*$ . При этом возможны такие случаи:

- точка  $x_{i_1}$  лежит в некоторой окрестности устойчивой  $m$ -кратной не-подвижной точки (рис. 2а,  $m = 3$ );
- точка  $x_{i_1}$  является устойчивой типа  $(s, \delta)$  (рис. 2б);
- точка  $x_{i_1}$  принадлежит окрестности точки минимума функции  $|\varphi_m(x)|$ , либо лежит в окрестности точки разрыва функции  $g_m(x)$  (рис. 2в).

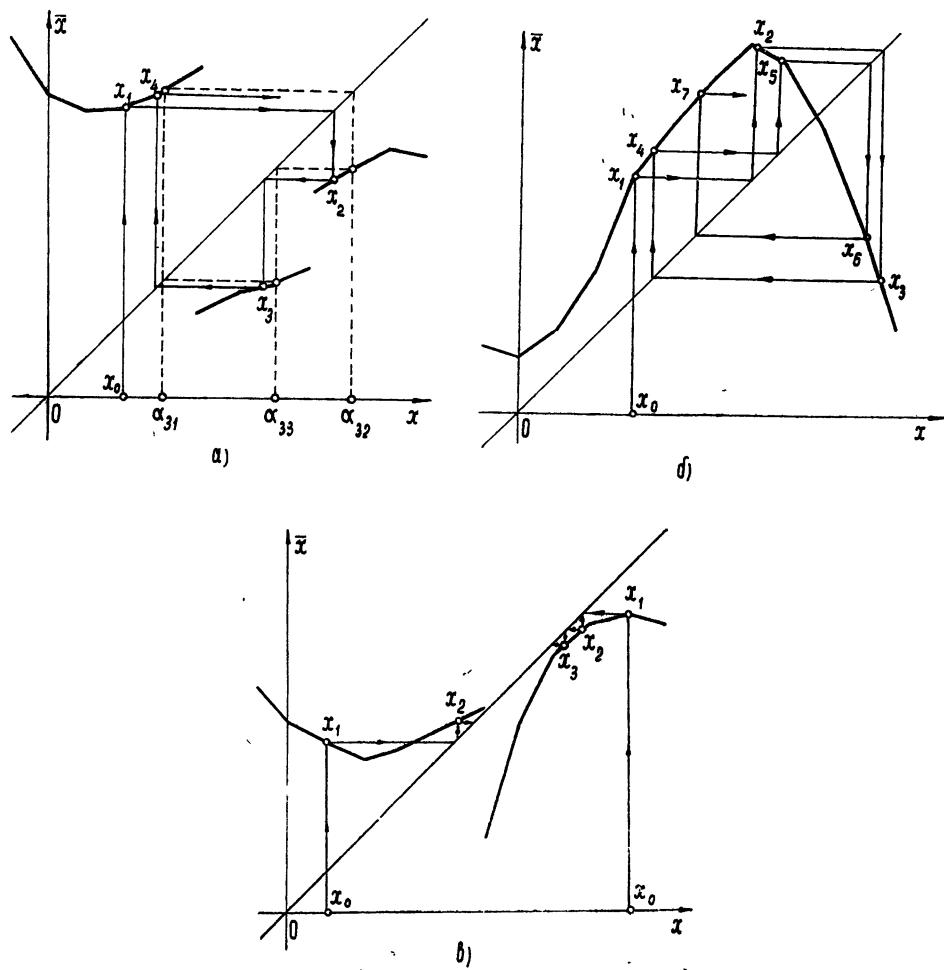


Рис. 2.

Для различения этих случаев строится дополнительно итерационная последовательность  $\{x_{l_1+l}\}$  ( $l = 1, 2, \dots, pm-1; p = 1, 2, \dots$ ). Если неравенства (4) выполняются при  $\xi_{mk} = x_{i_1-m+k}$ ,  $\eta_{mk} = x_{i_1+k}$ ,  $g_m(\xi_{mk}) = x_{i_1+k}$ ,  $g_m(\eta_{mk}) = x_{i_1+m+k}$  ( $k = 0, 1, \dots, m-1$ ), либо при  $\xi_{mk} = x_{i_1+k}$ ,  $\eta_{mk} = x_k =$

$= x_{i_1+k} + \delta \operatorname{sgn}(x_{i_1+k} - x_{i_1+k-m})$ ,  $g_m(\xi_{mk}) = x_{i_1+k+m}$ ,  $g_m(\eta_{mk}) = g_m(x'_k)$  и, кроме того, имеют место условия

$$g_m(\xi_{mk}) \in [\xi_{mk}, \eta_{mk}], \quad g_m(\eta_{mk}) \in [\xi_{mk}, \eta_{mk}], \quad (11)$$

то интервал  $\Delta_{mk} = (\xi_{mk}, \eta_{mk})$  содержит устойчивую  $m$ -кратную неподвижную точку  $\alpha_{mk}$  (неподвижной точкой можно считать, например, точку пересечения биссектрисы  $\bar{x} = x$  с прямой, проходящей через точки  $(\xi_{mk}, g_m(\xi_{mk})), (\eta_{mk}, g_m(\eta_{mk}))$ ). Если неравенства (4) с увеличением  $l$  не удовлетворяются, то это означает, что точка  $x_i$  попала в окрестность точки минимума функции  $|\varphi_m(x)|$ . Тогда итерационный процесс продолжается, пока снова удовлетворится неравенство (10). При этом определяется новое число  $m$ , для которого все рассуждения повторяются. Случай, когда справедливы неравенства (4), а условие (11) не выполняется, считается особым. Для некоторого значения  $m$  он может иметь место, если точка  $x_0$  является устойчивой типа  $(s, \delta)$  или если она принадлежит некоторой окрестности точки разрыва непрерывности функции  $g_m(x)$ .

При появлении особого случая процесс построения итерационной последовательности  $\{x_i\}$  продолжается до тех пор, пока найдется новое значение  $m$ , для которого будут справедливы все предыдущие рассуждения, либо пока точка  $x_i$  попадет внутрь отрезка  $[u_v, v_v]$  ( $v=1, 2, \dots, v_1$ ). В последнем случае все точки полученной итерационной последовательности будут устойчивыми типа  $(s, \delta)$ . Последнее значение  $i$ , при котором выяснен характер устойчивой точки, определяет значение  $i^*$ .

В качестве начальных значений итерационной последовательности выбираются точки  $x_{n0} = a + n\delta$  ( $n=0, 1, \dots, E\left[\frac{b-a}{\delta}\right]$ ), лежащие в области  $G = [a, b] \setminus \bigcup_{j,v} (u_{m_j,v}, v_{m_j,v})$ . Если точка  $x_i = g_i(x_{n0})$  при некотором значении  $i = i'$  попадает в область ранее найденного устойчивого элемента, то итерационный процесс прекращается, а границы области притяжения этого элемента описанным выше способом уточняются с помощью последовательности  $\{x_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, i'$ ). В результате перебора всех точек  $x_{n0}$  отрезок окажется разделенным на конечное число областей притяжения (заполнения) устойчивых точек, образованных из отрезков

$$[u_{m_j,v}, v_{m_j,v}] \quad (v=1, 2, \dots, v_1; j=1, 2, \dots, J),$$

причем,  $|u_{m_j,v} - u_{m_{j'},v+1}| \leq \delta$  ( $j \neq j'$ ) (для областей заполнения число  $m_j$  не определяется).

Как известно [7], границы области притяжения  $m$ -членного цикла совпадают с неустойчивыми неподвижными точками, либо с точками разрыва непрерывности функции  $g_m(x)$ . Поэтому для отыскания неустойчивых неподвижных точек преобразования  $\tilde{T}$  рассматриваются интервалы  $(v_{m_j,v}, u_{m_{j'},v+1})$  ( $j \neq j'; v=1, 2, \dots, v_1-1$ ), содержащие границы областей притяжения устойчивых элементов. Путем проверки выполнения неравенств (1) и (4) при  $x_1 = \xi_{mk} = v_{m_j,v}$ ,  $x_2 = \eta_{mk} = u_{m_{j'},v+1}$ ,  $m = \min\{m_j, m_{j'}\}$  среди указанных интервалов находятся правильные интервалы для функции  $g_m(x)$ , содержащие неустойчивые  $m$ -кратные неподвижные точки.

II. Пусть величины  $L$  и  $S$  определяют ошибки вычисления функции  $f(x)$  и ее производной для любого  $x$ , лежащего вне  $\rho$ -окрестностей точек разрыва непрерывности функции  $g(x)$ .

Требуется на основании результатов исследования приближенного точечного преобразования  $\tilde{T}$  установить те неподвижные точки преобра-

зования  $\tilde{T}$ , в окрестности которых лежат неподвижные точки точного тачечного преобразований  $T$ , и найти величину ошибки в определении координат неподвижных точек и величину расхождения в определении областей притяжения устойчивых циклов.

Для решения этой задачи находится окрестность каждой неподвижной точки преобразования  $\tilde{T}$ , в которой выполняются условия теоремы [1]. Отыскание таких окрестностей для устойчивого  $m_j$ -членного цикла  $\{\alpha_{m_j k}\}$  ( $k=1, 2, \dots, m_j$ ) с областью притяжения  $\tilde{D}_{m_j}$  производится следующим образом. Для каждого интервала линейности функции  $g(x)$ , принадлежащего области  $\tilde{D}_{m_j}$ , находятся постоянные  $K, N$  согласно (2), (3), выбираются их наибольшие значения  $K_{m_j}$  и  $N_{m_j}$  и по формуле (5) при  $K_1 = K_{m_j}$  определяется величина  $\delta_{n_j}$ . Затем около точки  $\alpha_{m_j k}$  ( $k=1, 2, \dots, m_j$ ) строится последовательность включающих друг друга промежутков  $(\beta_{l_k}, \gamma_{s_k})$ , где  $\beta_{l_k} = \alpha_{m_j k} - l_k \frac{\delta'}{2}$ ,  $\gamma_{s_k} = \alpha_{m_j k} + s_k \frac{\delta'}{2}$  ( $l_k, s_k = 1, 2, \dots$ ),  $0 < \delta' \leq \delta$ , так чтобы каждый промежуток принадлежал области  $\tilde{D}_{m_j}$  и состоял из интервалов линейности функции  $g_{m_j}$ . Построение продолжается до тех пор, пока при некотором значении  $l_k$  и  $s_k$  выполняются условия (4) при  $\epsilon = \delta_{m_j}$ ,  $\xi_{mk} = \beta_{l_k}$ ,  $\eta_{mk} = \gamma_{s_k}$ .

Допустим, что полученные интервалы  $(\beta_{l_1}, \gamma_{s_1}), (\beta_{l_2}, \gamma_{s_2}), \dots, (\beta_{l_{m_j}}, \gamma_{s_{m_j}})$  не пересекаются. Тогда для каждого интервала линейности функции  $g_{m_j}(x)$ , принадлежащего области  $\omega_{m_j} = \bigcup_k^{m_j} (\beta_{l_k}, \gamma_{s_k})$ , определяются постоянные  $N$  согласно (3) при  $m=m_j$  и из них выбирается наибольшее значение  $q_{m_j}$ . При  $N_1=N_{m_j}$  осуществляется проверка неравенства (8).

Если соотношение (8) выполнено, то производится проверка условий (6). С этой целью находится область, в которой содержатся точки нарушения гладкости функции  $f_{m_j}(x)$  и точки нарушения линейности функции  $g_{m_j}(x)$ , т. е. область, для точек которой не удовлетворяется неравенство (6). Для отыскания этой области применяется следующий способ. Допустим, что в результате проверки неравенства (1) установлено, что линейность функции  $g_{m_j}(x)$  нарушается в интервале  $(x_1, x_2)$ , причем  $|x_1 - x_2| \leq \delta$ . При этом могут возникнуть два случая: 1) в интервале  $(x_1, x_2)$  нарушается линейность функции  $g(x)$ , тогда неравенство (6) не удовлетворяется в области  $(c_1, d_1)$ , где  $c_1 = x_1 - \rho$ ,  $d_1 = x_2 + \rho$ ; 2)  $(x_1, x_2)$  есть интервал линейности функций  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$  ( $1 \leq k \leq m_j$ ), а линейность функции  $g_{k+1}(x)$  в нем нарушается. В этом случае сначала находится интервал  $(c_1, d_1)$ , содержащий точку нарушения гладкости функции  $f(x)$  и соответствующую ей точку нарушения линейности функции  $g(x)$ , каждая из которых порождает соответствующие точки нарушения гладкости и линейности функций  $f_{m_j}(x)$  и  $g_{m_j}(x)$ . Для этого в промежутке, ограниченном точками  $x_{1k} = g_k(x_1)$ ,  $x_{2k} = g_k(x_2)$ , выбирается интервал  $(c_0, d_0)$  длины  $\delta' \leq \delta$ , содержащий точку нарушения линейности функции  $g(x)$ , тогда  $c_1 = c_0 - \rho$ ,  $d_1 = d_0 + \rho$ . Затем последовательно находятся интервалы  $(c_l, d_l)$  ( $l=2, 3, \dots, k+1$ ), граници  $c_l, d_l$  которых определяются абсциссами точек пересечения прямых  $\bar{x} = c_{l-1} \pm L$ ,  $\bar{x} = d_{l-1} \pm L$  с кривой  $\bar{x} = g(x)$  (верхние знаки соответствуют убывающей функции  $g(x)$ , нижние — возрастающей) (рис. 3).

$k = 1$ ). Тогда интервал  $(c_{k+1}, d_{k+1})$  представляет собой область, в которой нарушаются условия (6).

Если промежуток  $(c_{k+1}, d_{k+1})$  не пересекается с областью  $\omega_{m_j}$ , то в области  $\omega_{m_j}$  содержится  $m_j$ -членный устойчивый цикл точечного преобразования  $T$ . Величина ошибки в определении координат каждой неподвижной точки  $\alpha_{m_j k}$  определяется размером интервала  $(\beta_{l_k}, \gamma_{s_k})$ .

Допустим, что имеет место хотя бы один из случаев: 1) при  $x_1 = \beta_{l_k}$ ,  $x_2 = \beta_{l_k-1}$  или при  $x_1 = \gamma_{s_k-1}$ ,  $x_2 = \gamma_{s_k}$  не удовлетворяется условие (1); 2) с увеличением  $l_k$  или  $s_k$  точка  $\beta_{l_k}$  или точка  $\gamma_{s_k}$  оказывается вне области  $\tilde{D}_{m_j}$ ; 3) существуют по крайней мере два пересекающихся интервала  $(\beta_{l_k}, \gamma_{s_k})$ ,  $(\beta_{l_k'}, \gamma_{s_k'})$ , ( $k \neq k'$ ); 4) область  $\omega_{m_j}$  пересекается с интервалом, содержащим точки нарушения гладкости функции  $f_{m_j}(x)$  и точки нарушения линейности функции  $g_{m_j}(x)$ ; 5) не удовлетворяется условие (8). Тогда значение параметра, при котором проводилось исследование точечного преобразования  $T$ , близко к бифуркационному (см. п. III).

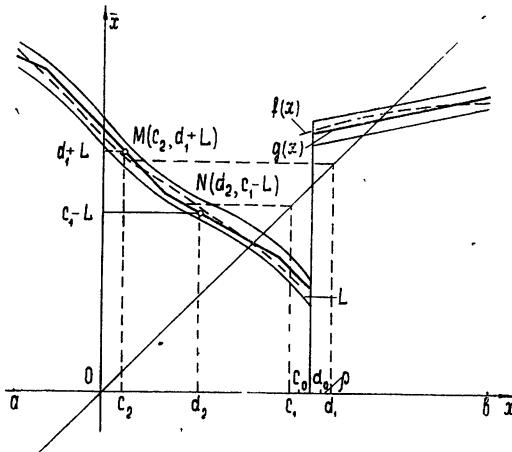


Рис. 3.

Для неустойчивого  $m_j$ -членного цикла  $\{\alpha'_{m_j, k}\}$  ( $k=1, 2, \dots, m_j$ ) отыскание области  $\omega'_{m_j}$  производится аналогично при значении  $\delta_{m_j'}$ , вычисленном по формуле (5) при  $K_1 = \max\{K_{m_j}\}$ . Условие (8) проверяется при  $N_1 = N_{m_j'} = \max\{N_{m_j}\}$  и значении  $q_{m_j'}$ , равном наименьшему значению среди постоянных  $N$ , найденных по формуле (3) при  $m=m_j$  на интервалах линейности функции  $g_{m_j'}(x)$ , при этом постоянные  $K_{m_j}$  и  $N_{m_j}$  соответствуют тем областям притяжения, которые ограничены неустойчивыми точками  $\alpha_{m_j, 1}, \alpha_{m_j, 2}, \dots, \alpha_{m_j, m_j'}$ .

Величина различия областей притяжения  $\tilde{D}_{m_j}$  и  $D_{m_j}$  устойчивых  $m_j$ -членных циклов преобразований  $\tilde{T}$  и  $T$  определяется суммой величин, характеризующих расхождение каждой границы области  $\tilde{D}_{m_j}$  с соответствующей границей области  $D_{m_j}$ . Допустим, что при исследовании преобразования  $\tilde{T}$  установлено, что граница областей  $\tilde{D}_{m_j}$  и  $D_{m_j}$  лежит

в интервале  $(v_{m_j}, u_{m_j+1})$  ( $v = 1, 2, \dots, v_1 - 1$ ). Если в этом интервале находится неустойчивая неподвижная точка преобразования  $\tilde{T}$ , то величина различия границ определяется величиной ошибки в определении координат этой точки. В случае, когда граница совпадает с точкой разрыва непрерывности функции  $g(x)$ , величина  $\tau = 2\rho + |u_{m_j+1} - v_{m_j}|$ . Если  $(v_{m_j}, u_{m_j+1})$  есть интервал непрерывности функций  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$  ( $1 \leq k < m_j$ ), а функция  $g_{k+1}(x)$  имеет в нем разрыв непрерывности, то величина  $\tau$  определяется размером промежутка между соответствующими точками разрыва непрерывности функций  $f_{k+1}(x)$  и  $g_{k+1}(x)$ . Для его отыскания применяется описанный выше способ поиска интервала  $(c_{k+1}, d_{k+1})$  при  $x_1 = v_{m_j}$ ,  $x_2 = u_{m_j+1}$ .

III. Пусть точечное преобразование  $\tilde{T}$  зависит от параметра  $\mu$ , изменяющегося в промежутке  $[\mu', \mu'']$ , и  $\delta_0$  — заданная точность отыскания бифуркационных значений параметра  $\mu$ . Кроме отмеченных в пп. I, II раздела З случаев, значение параметра  $\mu$  считается близким к бифуркационному, если не удовлетворяется неравенство (9) или если при

$|\mu_1 - \mu_2| \leq \delta_0$  точечные преобразования  $\tilde{T}(\mu_1)$  и  $\tilde{T}(\mu_2)$  имеют различное число неподвижных точек. Проверка неравенства (9) осуществляется непосредственно для точек  $x_{n0} = a + n\delta$  ( $n = 0, 1, \dots, E\left[\frac{b-a}{\delta}\right]$ ), лежащих вне области  $W = \bigcup_j \omega_{m_j}$ . Исследование точечного преобразования  $\tilde{T}$  проводится для значений  $\mu_p = \mu' + \delta_0 p$  ( $p = 0, 1, \dots, P$ ;

$P = E\left[\frac{\mu'' - \mu'}{\delta_0}\right]$ ). Если при этом окажется, что значения  $\mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_{p+k}$  близки к бифуркационным, то бифуркационное значение параметра  $\mu$  для точечного преобразования  $\tilde{T}$  лежит в интервале  $(\mu_p, \mu_{p+k+1})$ . При  $k > 1$  заданная точность нахождения бифуркационных значений параметра не может быть достигнута.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. И. Неймарку за руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Баталова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 1002 (1965).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. А. А. Андронов, Е. А. Леонович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, Физматгиз, М., 1966.
4. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41, № 2, 95; №№ 5—6, 146 (1958).
5. В. В. Немецкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. А. Г. Майер, Ученые записки ГГУ, вып 12, 215 (1939).
7. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 6, 942 (1959).
8. З. С. Баталова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 1, 166 (1963).
9. З. С. Баталова, Инж. ж. АН СССР, Механика твердого тела, № 2, 165 (1966).

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию

6 июля 1966 г.

## ON THE COMPUTER-AIDED NUMERICAL ANALYSIS OF THE DYNAMIC SYSTEMS

Z. S. Batalova

This paper presents the algorithm for the computer-aided numerical exploration of a line-into-line mapping.

УДК 517.11

## О РЕАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ $K$ -ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

*В. И. Корнейчук, А. М. Романевич, Й. С. Ситников, Л. Л. Утяков*

Показана возможность достаточно простой реализации  $K$ -значных логических функций при использовании фазо-импульсного и частотно-гармонического признаков представления информации.

В связи с разработкой  $K$ -значных элементов памяти, сравнимых по простоте с двоичными, становится актуальной задача реализации функций  $K$ -значной логики.

До настоящего времени эта задача рассматривалась обычно в сугубо теоретическом плане, без учета специфики признака представления информации и физических особенностей используемых элементов.

В данной работе показана возможность достаточно простой реализации  $K$ -значных логических функций при использовании фазо-импульсного и частотно-гармонического признаков представления информации. Существенной особенностью указанных признаков является возможность одновременного присутствия множества различных значений информационного сигнала в одной точке схемы (в случае фазо-импульсного признака «одновременность» следует понимать как «в одном такте»).

Использование указанной особенности, с одной стороны, требует привлечения теоретико-множественного аппарата для синтеза логических функций, а с другой, как будет показано, позволяет технически просто реализовать логические элементы.

### 1. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА

Как известно [1, 2], функции  $K$ -значной логики и ее аргументы принимают значения из множества

$$E^K = \{0, 1, \dots, k - 1\}.$$

Пусть множеством всех таких функций будет  $P_K$ . Образуем множество  $M^K$  всех подмножеств множества  $E^K$ . Переменные, принимающие значения из  $M^K$ , будем обозначать большими буквами ( $X, Y, \dots$ ), а переменные, определенные на  $E^K$  — малыми ( $x, y, \dots$ ). Так как из  $x \in E^K$  следует  $x \in M^K$ , то все соотношения, справедливые для  $X, Y, \dots, \in M^K$ , будут справедливы и для  $x, y, \dots, \in E^K$ .

Рассмотрим операции объединения  $X \vee Y$  и пересечения  $X \cdot Y$ , известные в теории множества. Эти операции ассоциативны, коммутативны и связаны между собой законами дистрибутивности. Кроме того, имеюг место соотношения

$$X \cdot \theta = \theta, \quad (1)$$

$$X \vee \theta = X, \quad (2)$$

где  $\theta \in M^K$  — пустое подмножество множества  $E^K$ .

Введем теперь характеристические функции, определенные на множестве  $M^K$ :

$$\varphi_i(X) = X^i = \begin{cases} i & \text{при } X \neq 0, \\ 0 & \text{при } X = 0 (i \in E^K). \end{cases} \quad (3)$$

Покажем, что любую функцию из  $P_K$  можно представить с помощью операций объединения, пересечения, характеристических функций и функций констант.

Пусть функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_K$  на наборе

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (\alpha_j \in E^K, j = 0, 1, \dots, n)$$

принимает значение  $i_\alpha \in E^K$ .

Рассмотрим выражение

$$(\alpha_1 \cdot x_1)^{i_\alpha} \cdot (\alpha_2 \cdot x_2)^{i_\alpha} \cdot \dots \cdot (\alpha_n \cdot x_n)^{i_\alpha}.$$

Легко видеть, что

$$\alpha_j \cdot x_j = \begin{cases} \alpha_j & \text{при } x_j = \alpha_j, \\ 0 & \text{при } x_j \neq \alpha_j, \end{cases}$$

$$(\alpha_j \cdot x_j)^{i_\alpha} = \begin{cases} i_\alpha & \text{при } x_j = \alpha_j, \\ 0 & \text{при } x_j \neq \alpha_j \end{cases}$$

и, следовательно,

$$(\alpha_1 \cdot x_1)^{i_\alpha} \cdot \dots \cdot (\alpha_n \cdot x_n)^{i_\alpha} = \begin{cases} i_\alpha & \text{при } x = \alpha, \\ 0 & \text{при } x \neq \alpha, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

С помощью (2) и (4) получаем окончательно

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\text{по всем } \alpha} (\alpha_1 \cdot x_1)^{i_\alpha} \cdot (\alpha_2 \cdot x_2)^{i_\alpha} \cdot \dots \cdot (\alpha_n \cdot x_n)^{i_\alpha}. \quad (5)$$

Следует отметить, что для получения канонической формы (5) представления функций  $K$ -значной логики вместо операции пересечения  $X \cdot Y$  вполне достаточно операции совпадения

$$x \cdot y = \begin{cases} x & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{при } x \neq y, \end{cases}$$

которая является ее частным случаем.

## 2. ВОЗМОЖНОСТИ УПРОЩЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Одной из основных задач синтеза является отыскание наиболее экономной реализации логических функций. Приведенные ниже соотношения позволяют в некоторых случаях достигнуть ощутимых результатов в этом направлении.

Непосредственно из определения характеристической функции (3) получаем

$$\begin{aligned} X^i \vee Y^i &= (X \vee Y)^i, \\ (i \cdot X)^i &= i \cdot X, \\ x^i &= i, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $i \in E^K$

Легко также доказать, что

$$\begin{aligned} (X \cdot Y)^i \vee (X \cdot W)^i &= [X(Y \vee W)]^i, \\ (i \cdot X)^i \cdot (j \cdot Y)^i &= X \cdot (j \cdot Y)^i, \\ (i \cdot X)^j \cdot (i \cdot Y)^j &= (i \cdot X \cdot Y)^j, \\ (0 \cdot X)^i \vee (1 \cdot X)^i \vee \dots \vee [(k-1) \cdot X]^i &= X^i, \\ (0 \cdot X)^0 \vee (1 \cdot X)^1 \vee \dots \vee [(k-1) \cdot X]^{k-1} &= X, \end{aligned}$$

где  $i, j \in E^K$ .

Кроме того, имеет место соотношение

$$(A \cdot x)^i \cdot (B \cdot y)^i \vee (B \cdot x)^i \cdot (A \cdot y)^i = [A \cdot (x \vee y)]^i [B \cdot (x \vee y)]^i,$$

где  $A \cdot B = \theta$  и  $A, B \in M^K$ .

Действительно, раскрывая правую часть, получаем

$$\begin{aligned} (A \cdot x \vee A \cdot y)^i \cdot (B \cdot x \vee B \cdot y)^i &= [(A \cdot x)^i \vee (A \cdot y)^i] [(B \cdot x)^i \vee (B \cdot y)^i] = \\ &= (A \cdot x)^i \cdot (B \cdot x)^i \vee (A \cdot x)^i \cdot (B \cdot y)^i \vee (A \cdot y)^i \cdot (B \cdot x)^i \vee (A \cdot y)^i \cdot (B \cdot y)^i = \\ &= (A \cdot B \cdot x)^i \vee (A \cdot x)^i \cdot (B \cdot y)^i \vee (A \cdot y)^i \cdot (B \cdot x)^i \vee (A \cdot B \cdot y)^i = \\ &= (A \cdot x)^i \cdot (B \cdot y)^i \vee (B \cdot x)^i \cdot (A \cdot y)^i. \end{aligned}$$

Для иллюстрации возможностей изложенного метода реализуем функцию  $f(x, y)$ , заданную таблицей 1.

Таблица 1

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	2	2	3
1	0	1	1	3
2	0	1	2	3
3	0	2	2	3

Применяя приведенные выше соотношения, получим упрощенное представление этой функции:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (0 \vee 3 \vee x) \cdot y \vee [2 \cdot (x \vee y)]^1 \cdot (x \vee y) \vee [(1 \cdot y)^2 \vee y] \cdot \\ &\quad \cdot [(0 \vee 3) \cdot x]^2. \end{aligned}$$

Соответствующая схема показана на рис. 1.

Отметим, что в отличие от обычных функционально полных систем при синтезе в приведенной системе операций необходимо специально реализовать нулевые значения функции.

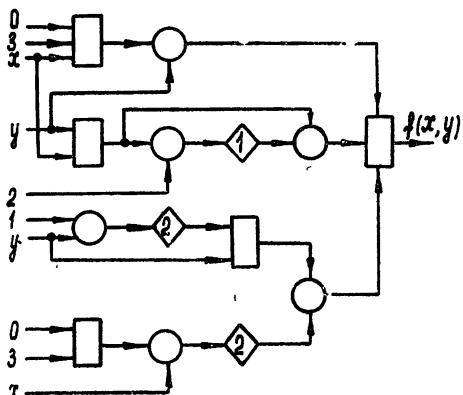


Рис. 1.  $\square$  — объединение,  $\circ$  — пересечение, ромб со значком  $i$  означает характеристическую функцию  $\varphi_i(X)$ .

### 3. ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

При частотно-гармоническом представлении информации, когда каждому элементу множества  $E^K$  соответствует определенная частота колебаний [3], техническая реализация операции объединения может быть осуществлена с помощью суммирующей цепочки  $C$  (линейного смесителя) резисторного или емкостного типа (рис. 2).

Любая из характеристических функций реализуется с помощью схемы (рис. 3), содержащей детектор  $D$  со сглаживающим фильтром и ключ  $K$ .

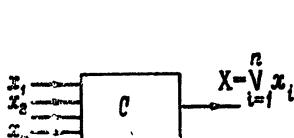


Рис. 2.

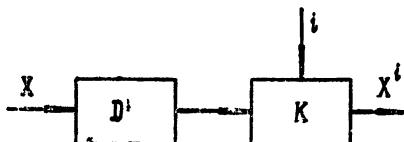


Рис. 3.

Если  $X \neq \emptyset$  (пустое множество означает отсутствие сигнала), то напряжение с детектора открывает диодный или транзисторный ключ. В результате на выходе схемы появится сигнал с частотой  $f_i$ , который соответствует значению  $i \in E^K$ . При  $X = \emptyset$  сигнал на выходе схемы отсутствует.

Реализация операции пересечения при представлении информации частотой гармонических колебаний несколько затруднена. Поэтому ограничимся рассмотрением элемента совпадения, один из вариантов

Рис. 4.



которого (рис. 4) содержит преобразователь частоты в напряжение (ПЧН) и управляемый резонансный контур (УК). В качестве ПЧН может быть использован любой частотный детектор [4]. Питающий вход контура подсоединен к шине  $X$ , а вход ПЧН к шине  $Y$ . Сигнал с выхода ПЧН, являющийся функцией частоты на его входе, управляет

резонансной частотой УК. Характеристика контура выбирается так, чтобы его резонансная частота всегда оказывалась равной частоте сигнала на входе ПЧН. При этом полоса пропускания контура во всем диапазоне его перестройки должна быть меньше, чем расстояние по оси частот между любыми двумя гармоническими составляющими сигнала  $X$ . В этом случае колебания на контуре, а следовательно, и на выходе элемента совпадения будут иметь место только тогда, когда среди гармонических составляющих множества  $X$  будет присутствовать составляющая с частотой, равной частоте гармоники на входе  $u$ .

Отметим, что выражения вида  $i \cdot X$  можно реализовать с помощью фильтра, настроенного на частоту  $f_i$ .

При фазо-импульсном представлении информации каждому элементу множества  $E^K$  соответствует определенный фазовый сдвиг периодического импульсного сигнала относительно опорных импульсов [3]. Интервал между двумя соседними опорными импульсами называется тактом.

Операции объединения и пересечения моделируются ключевыми схемами (диодными или транзисторными), используемыми обычно для реализации функций дизъюнкции и конъюнкции двоичной логики.

Любая характеристическая функция (3) реализуется на ферритовом кольце с прямоугольной петлей гистерезиса (рис. 5). Если сигнал  $i$  приходит раньше всех сигналов, представляющих  $X$ , то результат обеспечивается, начиная со второго такта.

Заметим, что схема, изображенная на рис. 5, работает при выполнении следующего условия:

$$i \cdot X = 0. \quad (7)$$

При синтезе по канонической форме (5) выполнение этого условия, ввиду соотношения (6), не сопряжено с трудностями. Применение же

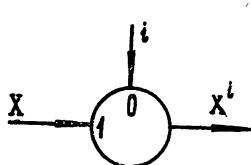


Рис. 5.

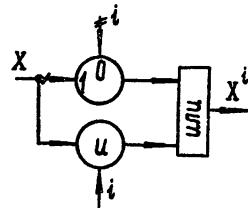


Рис. 6.

указанных в разделе 2 упрощающих соотношений не может привести к нарушению условия (7). Однако если по какой-либо причине и возникнет необходимость в реализации характеристической функции (3) без дополнительного условия (7), то можно воспользоваться схемой, приведенной на рис. 6.

#### ЛИТЕРАТУРА

- С. В. Яблонский, Тр. математ. ин-та им. В. А. Стеклова, 51, 5 (1958).
- Д. А. Поспелов, В. Н. Фальк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 4, 791 (1962).
- В. П. Сигорский, Л. С. Ситников, Л. Л. Утяков, Радиотехника, 19, № 12, 3 (1964).
- В. И. Сифонов, Радиоприемные устройства, Военное издательство Министерства обороны СССР, М., 1954.

---

ON THE FUNCTION REPRESENTATION IN A *K*-VALUED  
MATHEMATICAL LOGIC

*V. I. Cornyeychook, A. M. Romankovich, L. S. Sitnikov, L. L. Watyakov*

The paper demonstrates the possibility for a fairly simple representation of a *K*-valued logical functions using phase-impulse and frequency-harmonics indications for the information representation.

---

УДК 681.142.621

## ЧАСТОТА ОТСЧЕТОВ ПРИ РАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

В. Г. Долотов

На основе теории равномерного приближения функций показана возможность уменьшения частоты отсчетов при дискретизации непрерывных сигналов.

Вопросы определения частоты отсчетов при дискретизации непрерывных сигналов с оценкой погрешности критерием равномерного приближения рассматривались в [1,2]. Анализ работ показывает, что полученные в этих работах результаты можно улучшить.

Пусть  $y = f(x)$  — действительная непрерывная функция, имеющая на рассматриваемом диапазоне существования  $D_x$  ограниченные производные до  $(n+1)$ -го порядка включительно.

Учитывая взаимозаменяемость осей трехмерного комплекса информации с обобщенными координатами  $X, T, N$  (параметр, время, пространство) [3], в качестве аргумента  $x$  функции  $y = f(x)$  можно принять любую из величин  $X, T, N$  и отнести полученные результаты к системе обобщенных координат  $XT, XN, NT$ .

Равномерная дискретизация функции  $y = f(x)$  по параметру  $x$  сводится к разбиению диапазона  $D_x$  на равные интервалы  $\Delta x$ , в граничных точках которых производятся отсчеты значений функции. Интервал между отсчетами  $\Delta x$  выбирается так, чтобы по значениям функции в точках отсчета можно было бы восстановить исходную функцию  $y = f(x)$  с помощью приближающих полиномов  $P(x)$  с погрешностью  $\epsilon$ , не превышающей максимально допустимую погрешность  $\epsilon_0$ .

Рассмотрим случай, когда приближающие полиномы имеют вид

$$P(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m, \quad (1)$$

где  $c_m$  — действительные коэффициенты,  $n$  — целое неотрицательное число.

Погрешность приближения оценивается разностью

$$f(x) - P(x) = \epsilon. \quad (2)$$

На любом из интервалов  $\Delta x$  должно выполняться соотношение

$$|\epsilon| \leq \epsilon_0. \quad (3)$$

Оценка погрешности дискретизации выражением (3) позволяет избежать при автоматическом контроле незарегистрированных выбросов.

Обозначим через  $\lambda$  показатель качества равномерного приближения функции  $y = f(x)$  полиномом  $P(x)$ , указывающий, сколько раз разность  $f(x) - P(x)$  достигает своего максимума  $\epsilon_0$  с последовательной переменой знака на интервале  $\Delta x$ .

В соответствии с теоремой Чебышева [4] для наилучшего равномерного приближения

$$\lambda = n + 2. \quad (4)$$

Величина интервала  $\Delta x$  зависит от вида приближающей функции (в нашем случае — от степени полинома  $n$ ), максимальных величин, определяющих поведение функции (модуль-максимума  $(n+1)$ -ой производной  $M_{n+1}$ ), допустимой погрешности  $\epsilon_0$ , качества приближения  $\lambda$ :

$$\Delta x = \varphi(n, M_{n+1}, \lambda, \epsilon_0). \quad (5)$$

Анализ формул, определяющих интервал между отсчетами и частоту отсчетов, которые приведены в [1,2], показывает, что они получены не для наилучшего приближения. Качество приближения для этих формул оценивается величиной  $\lambda = 1$ . Формулы приведены в таблице 1.

При определении интервала между отсчетами  $\Delta x$  для приближения с  $\lambda > 1$  будем пользоваться разложением функции  $y = f(x)$  в ряд Тейлора [4] и оценкой остаточного члена  $R$  на интервале  $x - x_i$ :

$$R \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (x - x_i)^{n+1}. \quad (6)$$

Рассмотрим наиболее простой и часто встречающийся в практике случай дискретизации функции  $y = f(x)$  по параметру  $x$  при приближении полиномом (1) нулевой степени.

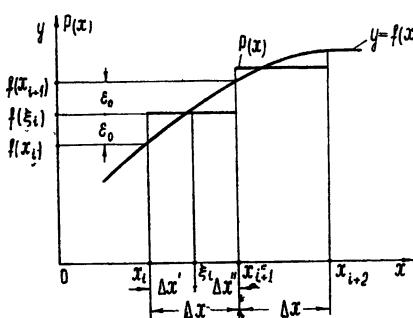


Рис. 1. Равномерная дискретизация функции  $y = f(x)$  для приближающих полиномов  $P(x)$  нулевой степени.

На рис. 1 показан случай, когда на интервале  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $y = f(x)$ , первая производная которой сохраняет максимальное значение без перемены знака  $M_1$ , наилучшим образом ( $\lambda = 2$ ) приближена полиномом  $P(x)$  нулевой степени при максимально допустимой погрешности  $\epsilon_0$ .

Разложим функцию  $y = f(x)$  в начальной точке  $x_i$  в ряд Тейлора нулевого порядка. Тогда интервал  $\Delta x' = \xi_i - x_i$  легко определить, приравнивая остаточный член (6) допустимой погрешности  $\epsilon_0$  и решая равенство относительно  $\Delta x'$ :

$$\Delta x' = \epsilon_0 / M_1. \quad (7)$$

В точке  $x = \xi_i$  вновь разложим функцию  $y = f(x)$  в ряд Тейлора и аналогично найдем интервал  $\Delta x''$ :

$$\Delta x'' = \epsilon_0 / M_1. \quad (8)$$

Интервал между отсчетами  $\Delta x$  равен сумме (7) и (8):

$$\Delta x = 2\epsilon_0 / M_1. \quad (9)$$

Приближающий полином  $P(x)$  определяется значением функции  $y = f(\xi_i)$ .

Полученный результат (9) является наилучшим для приближения полиномами нулевой степени. Частота отсчетов в этом случае

$$F = M_1 / 2\epsilon_0. \quad (10)$$

Найдем интервал между отсчетами  $\Delta x$  для приближающих полиномов  $P(x)$  первой степени,

На рис. 2 показан случай наилучшего приближения ( $\lambda = 3$ ) функции  $y = f(x)$  полиномом  $P(x)$  первой степени при максимальной допустимой погрешности  $\varepsilon_0$ . Разложим функцию  $y = f(x)$  в начальной точке интервала  $x_i$  в ряд Тейлора первого порядка. Считая, что вторая производная функции  $y = f(x)$  принимает на интервале  $\Delta x$  максимальное значение  $M_2$ , найдем с учетом (6) интервал  $\Delta x' = \xi_i - x_i$ , на котором остаточный член  $R$  равен  $2\varepsilon_0$ :

$$\Delta x' = 2\sqrt{\varepsilon_0/M_2}. \quad (11)$$

Аналогично, разлагая функцию  $y = f(x)$  в ряд Тейлора в точке  $x = \xi_i$ , найдем интервал  $\Delta x'' = x_{i+1} - \xi_i$ , на котором функция  $y = f(x)$  отклоняется от своего прогнозируемого значения на величину  $2\varepsilon_0$ :

$$\Delta x'' = 2\sqrt{\varepsilon_0/M_2}. \quad (12)$$

Интервал между отсчетами  $\Delta x$  получим, суммируя (11) и (12):

$$\Delta x = 4\sqrt{\varepsilon_0/M_2}. \quad (13)$$

Частота отсчетов в этом случае равна

$$F = (1/4)\sqrt{M_2/\varepsilon_0}. \quad (14)$$

Для худшего приближения ( $\lambda = 1$  и  $\lambda = 2$ ) интервалы между отсчетами меньше (см. таблицу 1)\*.

Таблица 1

Степень полинома	Качество приближения		
	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$
$n = 0$	$\Delta x = \varepsilon_0/M_1$	$\Delta x = 2\varepsilon_0/M_1$	
$n = 1$	$\Delta x = \sqrt{8\varepsilon_0/M_2}$	$\Delta x = 3,41\sqrt{\varepsilon_0/M_2}$	$\Delta x = 4\sqrt{\varepsilon_0/M_2}$

Число отсчетов на интервале  $D_x$  при равномерной дискретизации функции  $y = f(x)$  для приближающих полиномов  $P(x)$  нулевой степени с показателем  $\lambda = 2$  уменьшается в два раза по сравнению с тем случаем, когда качество приближения оценивается величиной  $\lambda = 1$ .

Аналогично можно определить интервал между отсчетами и частоту отсчетов для полиномов более высоких степеней при различном качестве приближения, но при этом следует учитывать, что восстановление первоначальной функции по ее отсчетным значениям вызывает определенные трудности для полиномов степени  $n \geq 1$  с увеличением  $\lambda$  [5].

При равномерной дискретизации на основе приближающих полиномов  $P(x)$  нулевой степени восстановление первоначальной функции  $y = f(x)$  производится на каждом из интервалов  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x$  (где  $i = 0, 1, 2, \dots$ ) следующим образом:

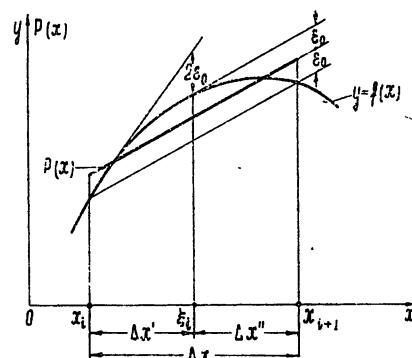


Рис. 2. Интервал между отсчетами  $\Delta x$  при равномерной дискретизации функции  $y = f(x)$  для приближающего полинома  $P(x)$  первой степени.

\* Данные для  $\Delta x$  в столбце  $\lambda = 1$  приведены соответственно из работ [1] и [2].

$$P(x) = f(x_i) + \left[ \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{2} \right] (x_i \leq x \leq x_{i+1}). \quad (15)$$

Таким образом, показана возможность уменьшения избыточности отсчетов при равномерной дискретизации непрерывных сигналов за счет повышения качества приближения, что весьма существенно при автоматической обработке и передаче информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Е. Темников, Автоматические регистрирующие приборы, Машгиз, М., 1960.
2. В. Н. Хлистунов, Приборостроение, № 5, 3 (1960).
3. Ф. Е. Темников, Теория развертывающих систем, ГЭИ, М.—Л., 1963.
4. В. Л. Гончаров, Теория интерполяции и приближения функций, Гостехиздат, М., 1954.
5. З. Фридрих, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 2, 316 (1960).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
19 декабря 1965 г.

#### THE FREQUENCY OF READINGS IN THE CASE OF UNIFORMAL DISCRET TRANSFORMATION

V. G. Dolotov

The possibility for frequency of readings reduction in the case, when continuous signals are transformed into the discret form, is shown on the basis of the theory for unformal functions apporoximation

УДК 533.6 + 62 — 501.72

## ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ КРЫЛА С ЭЛЕРОНОМ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

*С. П. Стрелков, А. А. Харламов*

В работе описана простая электромеханическая модель колебаний крыла с элероном в полете. Колебания элерона и аэродинамические воздействия моделируются электрически, а изгибно-крутильные колебания крыла — механически. Получена зависимость границ областей колебательной устойчивости крыла с элероном (флаттера) от балансировки масс, а также траектории комплексных корней (собственных частот и коэффициентов затухания) в докритической области полета для трех характерных значений соотношений между парциальными частотами системы.

1. Анализ различных упругих колебаний летящего самолета в ряде случаев можно провести с помощью электромеханической модели [1]. Этот метод в основе своей предполагает сочетание физической модели (или самой натуры) упругой конструкции самолета с электронной моделью аэродинамических сил. Ряд моделей такого сорта, приспособленных для исследования флаттера консольного крыла, были описаны в [1].

Структура электромеханической модели позволяет моделировать электрическим путем не только аэродинамические силы, но и механическое взаимодействие (инерционное и упругое) между отдельными элементами внутри самой упругой конструкции.

В этом случае, во-первых, можно удобным образом расчленять сложную упругую конструкцию и каждый элемент конструкции моделировать в подходящем масштабе. Соответствие масштабов в различных частях модели достигается за счет подбора коэффициентов усиления (передачи) в соответствующих электрических каналах.

Во-вторых, при электрической связи отдельные элементы расчлененной конструкции могут моделироваться не только механически (физически), но и электрически (математически), так же как аэродинамические силы. Введение электронных элементов в структуру модели упругой конструкции в ряде случаев значительно облегчает задачу построения сложной динамически подобной модели и позволяет наиболее полно использовать преимущества и удобства электронной модели.

В-третьих, электрический характер связи между элементами позволяет сравнительно просто вводить в состав модели и анализировать различные системы автоматического управления, слежения, автопилота и всякого рода компенсаторы.

В данной работе описана электромеханическая модель консольного крыла с элероном, на которой практически проверена возможность такого комплексного моделирования, а также приведены некоторые новые результаты исследования колебательной устойчивости крыла с элероном в полете, полученные с помощью этой модели.

2. Элерон при колебаниях на крыле рассматривается как твердое тело, упруго закрепленное на оси. Поэтому элерон сам по себе представляет простую колебательную систему. Однако изготовить при-

годную для исследования механическую модель крыла с элероном, в которой элерон был бы связан с крылом, как и в натуре, при помощи шарниров, оказывается практически трудной задачей. Главная причина этого заключается в непропорционально большом трении в шарнирах модели, которое не поддается контролю. Поэтому рационально крыло и элерон моделировать раздельно, а необходимое механическое взаимодействие (связь этих колебательных систем) моделировать электрически вместе с аэродинамическими силами.

Колебания крыла с элероном при флаттере приближенно (по методу Бубнова—Галеркина) [5] представлялись колебаниями в эквивалентной системе, с тремя степенями свободы — некоторой полужесткой модели [2,4,6]. Известные уравнения движения такой полужесткой модели [3], записанные в форме, удобной для дальнейшего электромеханического моделирования, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{z} - \sigma M\ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2)z &= F_z + \sigma_3 M_3 \ddot{\beta}, \\ J_3 \ddot{\vartheta} - \sigma M\ddot{z} + (k_1 a^2 + k_2 b^2)\vartheta &= M_\vartheta - \gamma \dot{\beta}, \\ J_\beta \ddot{\beta} + k_\beta \beta &= M_\beta + \sigma_3 M_3 \ddot{z} - \gamma \dot{\vartheta}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z(t)$  — вертикальное смещение оси жесткости модели крыла (изгиб),  $\vartheta(t)$  — угол поворота модели крыла (кручение) см. рис. 1 вверху,  $\beta(t)$  — угол поворота элерона относительно крыла,  $M$  — масса

крыла с элероном,  $M_3$  — масса элерона,  $J_3$  — момент инерции крыла с элероном относительно оси жесткости,  $J_\beta$  — момент инерции элерона относительно оси шарниров,  $\sigma$  — расстояние центра масс модели крыла от оси жесткости,  $\sigma_3$  — расстояние центра масс элерона от его оси,  $\rho_w$  — расстояние оси шарниров элерона до оси жесткости крыла,

$\gamma = \rho_w \sigma_3 M_3 + J_\beta$ ,  $F_z$  — подъемная сила и  $M_\vartheta$  — момент аэродинамических сил относительно оси жесткости крыла,  $M_\beta$  — момент аэродинамических сил относительно оси элерона,  $a$  и  $b$  — расстояния точек крепления пружин от оси жесткости (см. рис. 1, а также последующее описание),  $k_1$ ,  $k_2$  — жесткости пружин подвески бруска,  $k_\beta$  — крутильная жесткость подвески элерона.

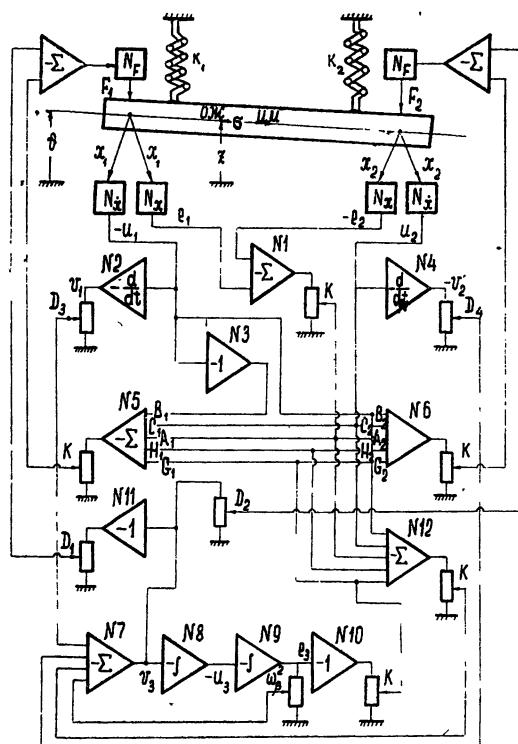


Рис. 1

Собственные изгибно-крутильные колебания крыла, которые описываются левыми частями первых двух уравнений системы (1), моделировались вертикальными колебаниями жесткого бруска на пружинах  $k_1$  и  $k_2$  (см. рис. 1) так же, как и в работе [1].

Колебания элерона, описываемые левой частью третьего уравнения системы (1), в данном случае моделировались на электронной модели.

Силовое воздействие на крыло, соответствующее правым частям первых двух уравнений системы (1), моделировалось, как и в работе [1], двумя вертикальными силами  $F_1$  и  $F_2$ , которые прикладывались к брускам в двух точках на расстоянии  $a_1$  и  $b_1$  от оси жесткости ( $a_1 + b_1 = d_1$ ) (см. рис. 1). В данном случае эти силы включали, кроме аэродинамических сил, еще и силы реакции со стороны движущегося элерона.

Пользуясь плоской стационарной аэродинамической теорией [5], для вертикальных сил и движения элерона можно записать следующие выражения:

$$F_1 = D_1 \ddot{\beta} + V^2 \frac{A_1}{d_1 d_2} (x_1 - x_2) + V \frac{B_1}{d_1 d_2} \dot{x}_1 - V \frac{C_1}{d_1 d_2} \dot{x}_2 + \\ + V^2 \frac{G_1}{d_1} \beta + V \frac{H_1}{d_1} \dot{\beta},$$

$$F_2 = D_2 \ddot{\beta} + V^2 \frac{A_2}{d_1 d_2} (x_1 - x_2) + V \frac{B_2}{d_1 d_2} \dot{x}_1 - V \frac{C_2}{d_1 d_2} \dot{x}_2 + V^2 \frac{G_2}{d_1} \beta + V \frac{H_2}{d_1} \dot{\beta}, \quad (2)$$

$$\ddot{\beta} = -\omega_p^2 \beta + \frac{D_3}{J_\beta} \ddot{x}_1 + \frac{D_4}{J_\beta} \ddot{x}_2 - V^2 \frac{A_3}{d_2 J_\beta} (x_1 - x_2) - V \frac{B_3}{d_2 J_\beta} \dot{x}_1 + \\ + V \frac{C_3}{d_2 J_\beta} \dot{x}_2 - V^2 \frac{G_3}{J_\beta} \beta - V \frac{H_3}{J_\beta} \dot{\beta}.$$

Координаты  $x_1$ ,  $x_2$ , которые введены вместо координат  $z$  и  $\vartheta$ , представляют вертикальное смещение двух точек бруска (крыла), расположенных на расстоянии  $a_2$  и  $b_2$  от оси жесткости ( $a_2 + b_2 = d_2$ ) (см. рис. 1),  $V$  — скорость полета.

Связь новых коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $G$ ,  $H$  в выражениях (2) с коэффициентами исходной системы (1) и аэродинамическими коэффициентами [5] может быть получена, если в системе (1) сделать преобразование координат

$$z = \frac{b_2 x_1 + a_2 x_2}{d_2}, \quad \vartheta = \frac{x_1 - x_2}{d_2}$$

и пересчитать силовое воздействие на брускок (крыло) к двум вертикальным силам  $F_1$  и  $F_2$  по соотношениям

$$F_1 + F_2 = F_z + \sigma_z M_z \ddot{\beta},$$

$$a_1 F_1 + b_1 F_2 = M_\vartheta - \gamma \dot{\beta}.$$

Электрическими аналогами координат  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\beta$  в электронной модели были напряжения  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ; скоростей  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{\beta}$  — напряжения  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ; ускорений  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$ ,  $\ddot{\beta}$  — напряжения  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ . Параметр  $K$  — аналог скорости полета  $V$ .

Полная структурная схема электромеханической модели крыла с элероном показана на рис. 1. Вверху рисунка показана механическая часть модели — брускок, подвешенный на пружинах  $k_1$  и  $k_2$ , и электромеханические преобразователи [ $N_F$ ] — силы, [ $N_x$ ] — скорости и [ $N_z$ ] — смещения, размещенные на бруске (см. дальше). Электронная модель колебаний элерона изображена внизу рисунка (операционные блоки

№ 7, № 8, № 9). Остальные электронные блоки рис. 1 моделируют аэродинамическое воздействие на крыло — элерон и инерционную связь между ними, согласно выражениям (2).

3. Важнейшей частью электромеханической модели являются электромеханические преобразователи или датчики. Конструкция датчиков силы и смещения, использованных в модели, описана в работе [1]. Датчики скорости электродинамического типа конструктивно не отличались от датчиков силы.

Датчики электродинамической конструкции за счет индукционных токов в цепях подвижных катушек могут вносить в систему заметное затухание, что нежелательно. В датчиках силы такое затухание практически устранилось включением подвижных катушек в анодную цепь выходной лампы операционного усилителя между анодом и точкой включения обратной связи. Такое включение позволяет совместить в одном усилителе функции датчика силы и любые операционные функции в электронной модели\*.

Элементарный расчет показывает, что при крутизне по входному сигналу

$$S = \frac{R_{\text{об}}}{R_{\text{вх}} R_a} \sim 1 \div 2 \text{ ма} \cdot \text{в}^{-1}$$

сопротивление для индукционных токов в цепи катушек датчиков при таком включении получается равным

$$R_{\text{инд}} = K_o (R_a + R_l) \left( 1 + \frac{R_{\text{об}}}{R_{\text{вх}}} \right)^{-1} \sim 10^8 \text{ ом.}$$

В датчиках скорости демпфирующие токи ограничивались за счет того, что подвижные катушки включались в соответствующие цепи электронной модели через разделительные усилители с достаточно большим входным сопротивлением  $\sim 10^6 \text{ ом}$ .

Тарировка всех датчиков проводилась в принципе так же, как это описано в работе [1].

Для моделирования инерционной связи крыла с элероном напряжения  $v_1$  и  $v_2$ , пропорциональные ускорениям координатных точек бруска  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ , получались путем дифференцирования электрических сигналов  $u_1$  и  $u_2$ , снимаемых с датчиков скорости:

$$v_{1,2} = \tau \frac{dU_{1,2}}{dt} = \frac{\tau}{N_x} \dot{x}_{1,2},$$

где  $\tau$  — постоянная времени дифференцирующего операционного усилителя.

Операция дифференцирования не вызвала обычных затруднений вследствие того, что частота рабочего сигнала была достаточно низкой, а катушки датчиков скорости представляли собой пассивные низкочастотные цепи, не содержащие источников высокочастотных помех.

4. В работе с моделью исследовалось влияние массовой балансировки крыла (параметр  $\sigma$ ) на критическую скорость флаттера  $K_{\text{кр}}$  крыла с элероном [3]. Результаты показаны на рис. 2. По вертикальной оси отложены значения скорости полета  $K$ , по горизонтальной — расст-

\* Операционный усилитель на УПТ-4 с лампой 6П3 на выходе и сопротивлением  $R_a \sim 10 \text{ ком}$  в аноде позволял без искажений получать в катушках датчика амплитуду тока до 25—30 ма, что обеспечивало 20—25 Г силы..

ройка  $\omega_\beta/\omega_z$ , отношение частоты элерона  $\omega_\beta$  к постоянной частоте изгиба  $\omega_z$ , пропорциональное квадратному корню из жесткости подвески элерона  $k_\beta$ . На рисунке показаны границы областей флаттера при фиксированном значении параметра  $\sigma_0$  (массовой балансировки элерона) для трех значений  $\sigma$  (массовой балансировки крыла).

При  $\sigma = 5,58$  см получается типичная для крыла с элероном картина расположения областей неустойчивости [3]: замкнутая в виде языка область изгибо-элеронного флаттера и открытая сверху область изгибо-крутильно-элеронного флаттера, переходящая при частоте элерона, много большей частоты кручения, в область изгибо-крутильного флаттера (на рис. 2 эти кривые показаны сплошной линией). Для данной модели крыла частоты колебаний первых тонов изгиба и кручения были близки ( $\omega_\beta/\omega_z = 1,6$ ), и поэтому наблюдалось сильное влияние балансировки крыла  $\sigma$  на область изгибо-элеронного флаттера. С ростом  $\sigma$  эта область росла и сливалась с открытой областью, как это показано на рис. 2 пунктиром при  $\sigma = 7,45$ . При уменьшении  $\sigma$  область изгибо-элеронного флаттера сокращалась и исчезала вблизи участка минимума границы языка, как это показано для  $\sigma = 3,72$  см на рис. 2 тоже пунктиром.

Обычные методы исследования устойчивости крыла с элероном в потоке [2,6] давали для каждой совокупности значений определяющих параметров величину критической скорости полета  $V_{kp}$  и частоту  $\omega_{kp}$  флаттера. Эти значения  $V_{kp}$  и  $\omega_{kp}$  определяли условия, при которых какое-либо из нормальных колебаний упругой системы в потоке становилось незатухающим, и не давали никаких сведений о том, как ведут себя другие нормальные колебания, какие у них частоты и как быстро они затухают. На электромеханической модели было проведено исследование характера нормальных колебаний упругой системы в зависимости от скорости полета, которое дает более исчерпывающие сведения об устойчивости [1,2].

Для различных значений  $K$ , начиная от нуля, экспериментально (приближенно) определялись комплексные собственные частоты всех (трех) нормальных колебаний модели:  $\lambda_j = -\delta_j \pm i\omega_j$  (корни характеристического уравнения). Результаты этого исследования представлены на рис. 3, 4, 5. Границы областей флаттера, показанные на рис. 2, имеют явно выраженные минимумы при сближении частоты элерона  $\omega_\beta$  с частотой изгиба  $\omega_{\beta 1} \approx \omega_z$  и кручения  $\omega_{\beta 2} \approx \omega_\theta$ . Этими значениями вся область частот элерона  $0 < \omega_\beta < \infty$  делится на три части. Каждый из рисунков 3, 4, 5 относится к одной из этих областей и показывает специфику колебаний системы в каждой области. Так, особенность колебаний в первой области  $0 < \omega_\beta < \omega_z$  (см. рис. 3) состоит в том, что нормальное колебание, соответствующее частоте изгиба ( $\omega_z$ ), с увеличением скоро-

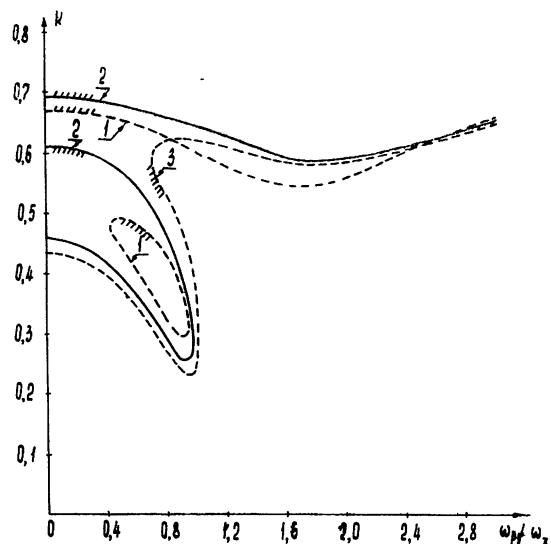


Рис. 2.  $\sigma_0 = 0,035 h$ , где  $h$  — хорда. Индекс 1 соответствует  $\sigma = 3,72$  см, индекс 2 —  $\sigma = 5,58$  см, индекс 3 —  $\sigma = 7,45$  см.

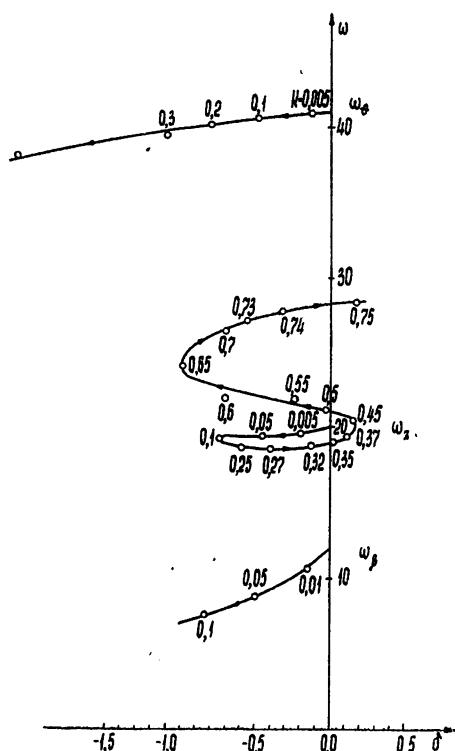


Рис. 3.

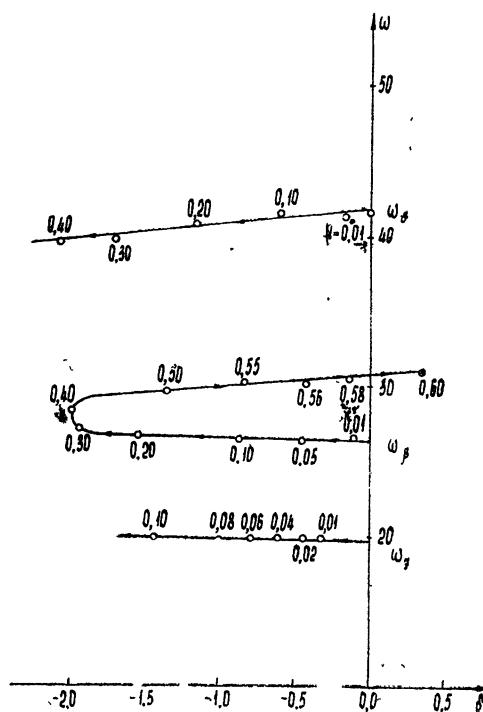


Рис. 4.

сти приходит к флаттеру дважды: при  $K \approx 0,35$  (изгибно-элеронный флаттер) и при  $K \approx 0,75$  (изгибно-крутильно-элеронный флаттер). Остальные два нормальных колебания ( $\omega_3$  и  $\omega_9$ ) в этой области довольно сильно затухают с увеличением  $K$ .

Во второй области  $\omega_z < \omega_3 < \omega_9$  (см. рис. 4) неустойчивым становится нормальное колебание, соответствующее частоте элерона ( $\omega_9$ ), а другие два ( $\omega_z$  и  $\omega_3$ ) устойчивы.

И, наконец, в третьей области изгибно-крутильного флаттера (рис. 5)  $\omega_9 > \omega_3$  неустойчивым становится нормальное колебание, соответствующее кручению крыла ( $\omega_3$ ). Таким образом, каждой из выделенных областей характерна определенная картина изменения собственных частот с увеличением скорости, в каждой из них свое собственное колебание становится неустойчивым.

5. На конкретном примере электромеханической модели крыла с элероном показано, что простые по существу, но сложные в изготовлении, важные детали механической части модели с успехом могут быть заменены соответствующими элементами электронной модели.

Опыты с данной моделью, позволяют утверждать, что и более сложные детали, такие, как управляющие и регулирующие полет устройства (например, автопилот и т. п.), могут быть посредством такого электромеханического моделирования включены в общее исследование упругих колебаний крыла с элероном (или самолета).

Кроме того, результаты исследования колебаний крыла с элероном на электромеханической модели представляют самостоятельный интерес, так как они впервые показывают изменение комплексных собственных частот крыла со скоростью полета в трех характерных областях соотношения между парциальными частотами (см. рис. 3, 4, 5).

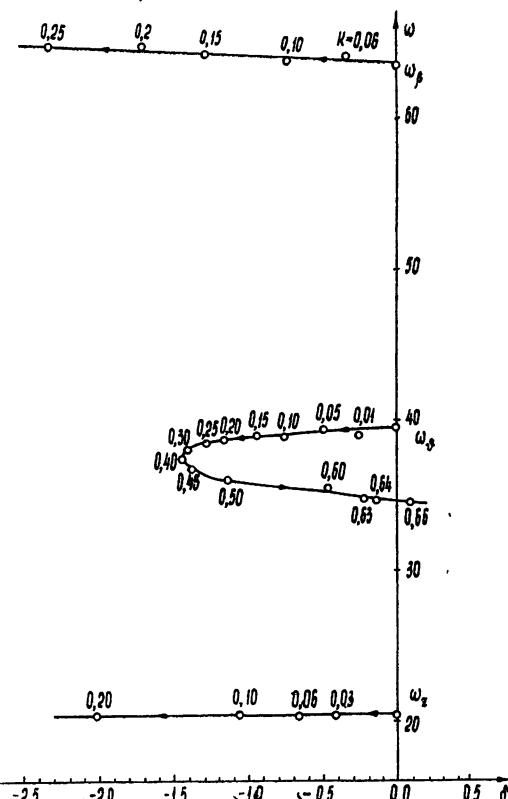


Рис. 5

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. А. Харламов, Научн. докл. Высш. Школы, физ.-мат. науки, № 1, 149 (1958).
- 2 Я. Ц. Фын, Введение в теорию аэроупругости, Физматгиз. М., 1959.
- 3 С. П. Стрелков, А. А. Харламов, Научн. докл. Высш. Школы, физ.-мат. науки, № 3, 116 (1959).
- 4 R. H. Scanlan, R. Rosenbaum, Introduction to the Study of aircraft Vibration and Flutter, The Macmillan Company, New York.

5. Е. П. Гроссман, Курс вибраций частей самолета, Оборонгиз, М., 1940.  
6. Г. Л. Бисплингхофф, Х Эшли, Р. П Хальфмен, Аэроупругость, ИЛ, М.,  
1958

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 мая 1966 г.

ELECTROMECHANICAL MODEL FOR OSCILLATIONS OF A WING  
WITH AN AILERON IN THE AIR STREAM

*S. P. Strelkov, A. A. Charlamov*

The paper presents a simple electromechanical model for the oscillations of a wing with an aileron in the flight. The aileron oscillations and aerodynamic influences are modelled electrically and all other phenomena—mechanically. The results of the investigation of the system are described.

---

УДК 62 — 501.72

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОСТОЯННОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА ТИПОВОМ АНАЛОГОВОМ УСТРОЙСТВЕ

B. A. Бебихов

Предлагается новый способ приближенного аналитического представления постоянного запаздывания. Приводится схема реализации запаздывания на типовом аналоговом устройстве, которую рационально использовать при приближенном моделировании передаточных функций

$$\text{вида } \sum_0^m \frac{b_k}{p^k} e^{(-\tau p)}.$$

При реализации постоянного запаздывания на аналоговых устройствах часто используют системы, передаточные функции которых представляют собой дробно-рациональные приближения к передаточной функции  $e^{-\tau p}$  идеального звена, воспроизводящего запаздывание (см., например, [1–2]).

В настоящей работе показано, что рациональную дробь  $K_n(p)$  вида

$$K_n(p) = \frac{\sum_{k=0}^n P_n^{(k)}(0) (p/\tau)^{n-k}}{\sum_{k=0}^n P_n^{(k)}(1) (p/\tau)^{n-k}}, \quad (1)$$

где  $P_n^{(k)}(t)$  —  $k$ -ая производная полинома  $P_n(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  ( $P_n(1) \neq 0$ ,  $a_i = \text{const}$ ), можно рассматривать как аппроксимирующее выражение для функции  $e^{-\tau p}$  (при определенных значениях коэффициентов  $a_i$ ).

В работе приведена схема набора системы (1) на типовом аналоговом устройстве, которую рационально использовать при приближенном моделировании передаточных функций  $R_m(p)$  вида

$$R_m(p) = \sum_{k=0}^m \frac{b_k k!}{(\tau p)^k} e^{-\tau p}. \quad (2)$$

1. Введем систему  $n$ -го порядка ( $n = 2, 3, \dots$ ), в которой зависимость выходной функции  $y$  от входной функции  $x(t)$  ( $t$  — время) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= x(t) - y, \\ \dot{y}_i &= i(y_{i-1} - y) \quad (i = 2, 3, \dots, n), \end{aligned} \quad (3)$$

$$y = \sum_{i=1}^n a_i y_i + a_0 x(t),$$

где  $a_i$  — постоянные. Нетрудно установить, что передаточная функция системы совпадает с функцией  $K_n(p)$ ,

Очевидно, что умножение полинома на постоянную не изменяет передаточной функции системы. Для определенности будем считать, что всегда выполняется условие  $P_n(1) = 1$ .

Пусть коэффициенты  $a_i$  такие, что на интервале  $(0,1)$  полином мало отклоняется от нуля. С помощью системы (3) легко выяснить, что в этом случае переходная функция (3) (если система устойчива\*) при всех значениях времени, кроме, может быть, некоторой окрестности точки  $t = \tau$ , близка к функции  $1(t - \tau)$ . В самом деле, при малых значениях времени переходная функция системы мало отклонится от полинома  $P_n(t/\tau)$ , а при  $t \rightarrow \infty$  переходная функция стремится к своему конечному значению, равному единице.

Рассмотрим несколько частных случаев системы (3).

Сначала обратимся к системам А и Б, получаемым из системы (3) соответственно при  $P_n(t) = Q_n(t)$  и при  $P_n(t) = (1/2) [Q_n(t) + Q_{n-1}(t)]$ , где  $Q_n(t)$  — смещенный полином Лежандра\*\*:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{(n+i)! t^i}{(n-i)! i!^2}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), получим, что передаточные функции систем А и Б совпадают с интерполяционными дробями Паде для функции  $e^{-\varphi}$ , у которых соответственно степень числителя равна или на единицу меньше степени знаменателя. Как известно, системы с такими передаточными функциями часто употребляются при воспроизведении запаздывания на аналоговых устройствах [1].

Учитывая сказанное о системах А и Б, легко установить, что и систему, получаемую из системы (3) при  $P_n(t) = (1/2) [1 + a] Q_n(t) + (1-a) Q_{n-1}(t)$  ( $|a| \leq 1$ ), можно характеризовать как звено, приближенно реализующее запаздывание.

Перейдем к системе В, получаемой из системы (3) при  $P_n(t) = T_n[x(2t-1)]/T_n(x)$ , где  $T_n(t)$  — полином Чебышева.

Из (1) следует, что система В, как и система А, реализует точно амплитудно-частотную характеристику идеального звена, воспроизводящего запаздывание, и приближенно фазо-частотную характеристику. Поэтому указанные системы будем сравнивать по величинам их так называемых «основных показателей звена запаздывания». Здесь, как обычно, под «основным показателем» понимаем максимальную частоту  $\omega_{max}$ , при которой фазовая погрешность еще не превосходит по модулю заданного значения.

В практике воспроизведения запаздывания на аналоговых устройствах редко пользуются системами, порядок которых превышает пятый. В соответствии с этим на рис. 1 показана зависимость «основного показателя»  $\omega_{max}$  системы В от заданной относительной фазовой погрешности  $\Delta\varphi/\varphi$  и степени полинома  $P_n(t)$  (где  $n \leq 5$ ) при значениях параметра  $x$ , обеспечивающих для каждого значения погрешности максимально возможное в системе В значение «основного показателя». На этом же рис. 1 изображена зависимость «основного показателя»  $\omega_A$  системы А от заданной относительной фазовой погрешности и степени полинома  $P_n(t)$ .

\* Конечно, в системе (3) устойчивость сохраняется не при любых значениях коэффициентов  $a_i$ . Например, система неустойчива, если  $P_n(t) = (t-0,5)^m S_{n-m}(t)$  или если  $P_n(t) = t^m S_{n-m}(t)$  и  $n \geq m \geq 4$ , где  $S_{n-m}(t)$  — полином  $n-m$ -ой степени.

\*\* Выражение (4) для смещенного полинома Лежандра получено из общепринятой записи полинома [3] путем использования связи полиномов Лежандра с гиперболическим рядом.

На рис. 1 изображены следующие функции параметра  $x^*$ :

$$\begin{aligned}\alpha_2(x) &= 8x^2/(2x^2 - 1), \\ \alpha_3(x) &= 24x^2/(4x^2 - 3), \\ \alpha_4(x) &= 8x^2, \quad \alpha_5(x) = 16x^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Кривые для разных порядков от 2 до 5 систем А и В обозначены соответствующими численными индексами.

Из рисунка видно, что при соответствующем подборе параметра  $x$  фазовая погрешность системы В ниже фазовой погрешности системы А.

Таким образом, из приведенных примеров (число которых легко увеличить) можно заключить, что система (3) при определенных значениях коэффициентов  $a_i$ , аппроксимирует запаздывание.

2. Приступим к составлению схемы набора системы (3) на типовом аналоговом устройстве. Предварительно запишем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\tau \dot{q}_i &= \sum_{k=1}^{i-1} r_k^i q_k + r_0^i x(t) - \sum_{k=1}^{i-1} r_k^i M_k(1) y, \\ y &= \sum_{k=1}^n c_k q_k + c_0 x(t) \quad (i=1, 2, \dots, n),\end{aligned}\quad (6)$$

где  $M_k(t)$  — некоторые полиномы  $k$ -ой степени без свободного члена.

Нетрудно убедиться в том, что для эквивалентности уравнений (6) уравнениям (3) достаточно, чтобы коэффициенты  $r_k^i$ ,  $c_k$  определялись равенствами

$$\begin{aligned}\dot{M}_i(t) &= \sum_{k=1}^{i-1} r_k^i M_k(t) + r_0^i, \\ P_n(t) &= \sum_{k=0}^n c_k M_k(t) + c_0.\end{aligned}\quad (7)$$

Теперь при составлении схемы набора можно использовать произвол выбора полиномов  $M_k(t)^*$ .

\* Рис. 1 получен графически из вспомогательных рисунков, на каждом из которых нанесена сеть фазо-частотных характеристик системы В соответствующего порядка.

Введение функций  $\alpha(x)$  объясняется тем, что вычисление фазо-частотных характеристик системы В  $i$ -го порядка ( $i = 2 \div 5$ ) значительно упрощается, если в качестве параметра рассматривать не величину  $x$ , а величину  $\alpha(x)$ . С этой целью, например, полином  $P_2(t)$  можно представить в виде  $P_2(t) = \alpha_2(x)(t^2 - t) + 1$ .

\*\* Заметим, что применение здесь смешанных полиномов Чебышева интересно с точки зрения уменьшения погрешности решения системы (3) на аналоговом устройстве.

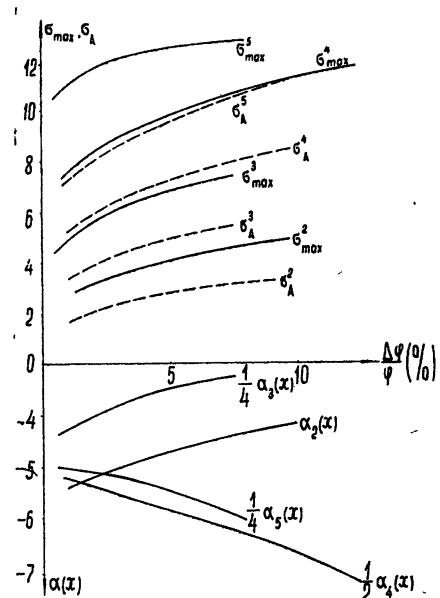


Рис. 1

В частности, если взять полиномы  $M_k(t)$  равными полиномам  $P_k(t)$  без свободного члена, это обеспечит включение без изменений всех элементов схемы набора системы (3) меньшего порядка в схему набора системы (3) более высокого порядка.

В качестве примера приведем схему набора системы А. Из (6) и (7) следует, что схема набора системы А должна соответствовать уравнениям

$$\begin{aligned} \tau \dot{q}_k &= \sum_{i=0}^{[k/2-1]} [4(k-2i)-2] q_{k-1-2i} + k(k+1) [(-1)^{k+1} x(t) - y] \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ y &= q_n + (-1)^n x(t). \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 2 (при  $\tau=1$ ) нанесена схема набора системы А четвертого

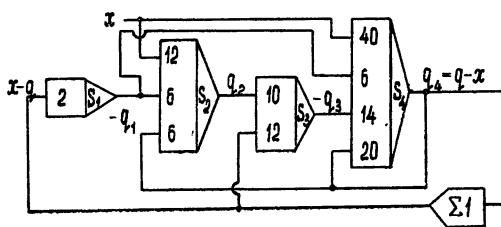


Рис. 2

порядка. Как видно из рисунка и уравнений (8), полученная схема набора компактна и обладает довольно выравненными коэффициентами.

3. Схему набора системы (1), составленную по уравнениям (6), можно использовать для приближенного моделирования системы с передаточной функцией  $R_m(p)$  вида

$$R_m(p) = \sum_{k=0}^m \frac{b_k k!}{(\tau p)^k} e^{-\tau p} \quad (m \leq n), \quad (2a)$$

где  $b_k$  — постоянные.

Для этого достаточно к схеме добавить сумматор с инверторами, реализующий величину  $z$  по формуле

$$z = \sum_{k=1}^m d_k q_k + d_0 y, \quad (9)$$

где коэффициенты  $d_k$  определяются из равенства

$$\sum_{k=0}^m b_k t^k = \sum_{k=1}^m d_k M_k(t) + d_0. \quad (10)$$

Переходная функция системы (6), (9) будет, очевидно, аппроксимировать функцию  $N_m(t)$  вида

$$N_m(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^m b_k (t/\tau)^k & (0 \leq t \leq \tau), \\ \sum_{k=0}^m b_k & (t > \tau). \end{cases} \quad (11)$$

На рис. 3 приведены функции  $N_m(t)$  ( $m = 1 \div 4$ ), образованные, согласно (11), (при  $\tau = 1$ ) полиномами Чебышева без свободного члена,

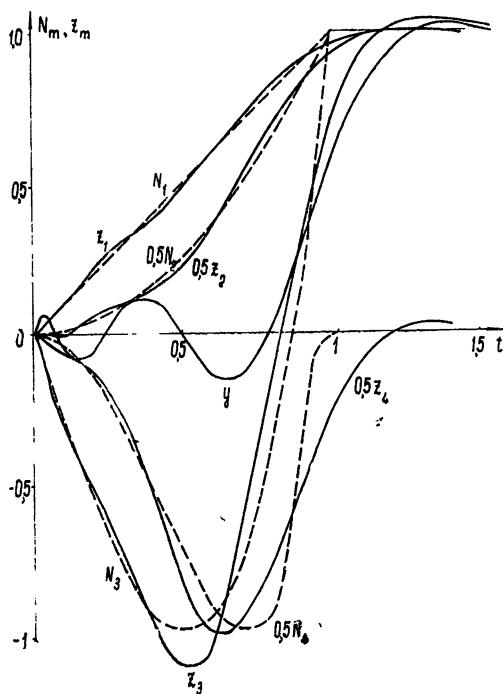


Рис. 3

и переходные функции  $z_m(t)$  системы (6), (9) в случае, когда система (6) — система Б пятого порядка\*.

Из рисунка ясно, что если система (6) есть система Б пятого порядка, то переходная функция (6), (9) аппроксимирует функцию  $N_m(t)$  вида (11) для  $m \leq 3$  с точностью, достаточной в обычной практике применения аналоговых устройств.

В заключение выражаю благодарность Е. Ф. Сабаеву и Н. А. Железцову за ценные советы при обсуждении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Коган, М. К. Чернышев, Автоматика и телемеханика, 26, № 3, 164 (1965).
2. G. H. Tomlinson, Proc. IEE, 112, 1806 (1965).
3. Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Пето, Т. Фогель, Функции математической физики, Физматгиз, М., 1963.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 июня 1965 г.

\* Решение системы (6), (9), когда система (6) есть система Б пятого порядка, было получено на установке ИПТ-5.

**ABOUT ONE METHOD FOR MODELLING OF THE CONSTANT  
DELAY ON THE STANDARD ANALOG COMPUTER***V. A. Bebichov*

The new method for the approximate representation of constant delay is proposed. The appropriate circuit, which could be used in the standard analog computer for approximate modelling of functions of the following type  $\sum_0^m \frac{b_k}{p^k} e^{-\tau p}$  is provided.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 531.319.5

**УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ФАП С ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРИРУЮЩИМ ФИЛЬТРОМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

B. B. Быков

Дифференциальное уравнение системы фазовой автоподстройки частоты при учете инерционности, обусловленной избирательными цепями кольца системы ФАП в виде временного запаздывания, как известно [1], может быть представлено в виде

$$p\varphi + \Omega K(p) \exp(-T_3 p) F(\varphi) = \delta\omega_0. \quad (1)$$

При синусоидальной характеристике  $F(\varphi) = \sin \varphi$  и пропорционально-интегрирующем фильтре  $K(p) = (1 + T_1 p)/(1 + T p)$ , где  $T$  и  $T_1$  — постоянные времени фильтра ( $T_1 < T$ ), уравнение (1) с учетом соотношения  $\exp(-T_3 p) \sin \varphi(t) = \sin [\varphi(t - T_3)]$  приводится к нелинейной системе двух уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma - \lambda y - \delta \cos [\varphi(t - T_3)] y(t - T_3) - \sin [\varphi(t - T_3)], \quad (2)$$

где

$$\lambda = 1/\sqrt{\Omega T}, \quad \delta = T_1 \sqrt{\Omega/T}, \quad T_3' = T_3 \sqrt{\Omega/T}, \quad \gamma = \delta\omega_0/\Omega.$$

После введения новой переменной  $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$ , где  $\varphi_0 = \arcsin \gamma$  ( $0 < \varphi_0 < \pi/2$ ), и линеаризации (2), аналогично [1-2], получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\dot{x}^2 + \lambda x + \sqrt{1 - \gamma^2} (\delta x + 1) \exp(-T_3' x) = 0. \quad (3)$$

Вводя замену  $x T_3' = z$ , имеем

$$z^2 + \Delta \tau z + (k \tau z + \tau^2) e^{-z} = 0, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \lambda(1 - \gamma^2)^{-1/4}, \quad \tau = T_3'(1 - \gamma^2)^{1/4}, \quad k = \delta(1 - \gamma^2)^{1/4}.$$

Безразмерные параметры  $\tau$  и  $k$  пропорциональны соответственно запаздыванию  $T_3$  и постоянной времени фильтра  $T_1$ .

Поскольку  $T_1 < T$ , выполняется неравенство  $k < 1/\lambda$ . Следуя [3], находим параметрическое уравнение кривой  $D$  — разбиения плоскости параметров  $\tau$ ,  $k$  с якобианом  $J = \omega\tau(2\tau - \Delta\omega \sin \omega)$ :

$$\tau = \omega B(\omega), \quad k = [B(\omega) \sin \omega - \Delta]/\cos \omega, \quad (5)$$

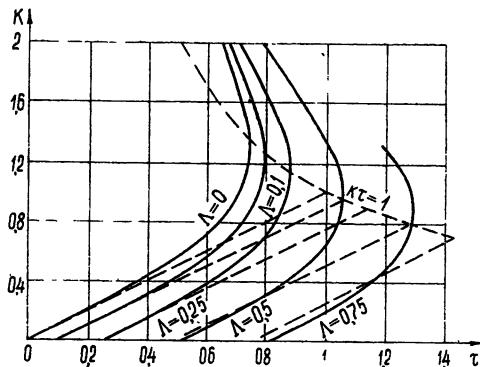
где

$$B(\omega) = \frac{1}{2} [\Delta \sin \omega \pm (\Delta^2 \sin^2 \omega + 4 \cos \omega)^{1/2}].$$

Кривая (5) распадается на бесконечное множество ветвей, каждая из которых соответствует некоторому интервалу изменения  $\omega$ . Ближайшая к оси  $k$  ветвь  $E$  кривой (5) при значениях  $\Delta = 0; 0.1; 0.25; 0.5; 0.75$  представлена на рис. 1. При пересечении кривой  $E(\tau = \tau_E)$  от  $\tau < \tau_E$  к  $\tau > \tau_E$  действительные части двух комплексно-сопряженных корней меняют знаки, становясь положительными. Область устойчивости в малом уравнении (2) определяется неравенством  $0 < \tau < \tau_E$ .

Величина  $\tau = \tau_E$  представляет допустимое время запаздывания в системе ФАП. Из рис. 1 видно, что применение пропорционально-интегрирующего фильтра увеличи-

вает допустимое время запаздывания по сравнению с его значением в системе с интегрирующим фильтром, что аналогично результатам, полученным частотным методом в [4].



При приближенном учете запаздывания можно ограничиться первыми двумя членами разложения экспоненциальной функции  $\exp(-T_3 \tau)$ . Тогда вместо (2) получим систему

Рис. 1.

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\gamma - \sin \varphi - \lambda(1 - d \cos \varphi)y - \alpha \sin \varphi y^2}{1 - \alpha \cos \varphi}, \quad (6)$$

где  $d$  и  $\alpha$  связаны с параметрами  $\lambda$ ,  $\delta$  и  $T_3'$  соотношениями

$$d = (T_3' - \delta)/\lambda, \quad \alpha = T_3'^2.$$

Координаты состояний равновесия определяются формулами

$$\varphi_{10} = \arcsin \gamma, \quad y_{10} = 0,$$

$$\varphi_{20} = \pi - \arcsin \gamma, \quad y_{20} = 0.$$

Исследование корней соответствующих характеристических уравнений показывает, что состояние равновесия  $(\varphi_{20}, 0)$  всегда является седлом, а состояние равновесия  $(\varphi_{10}, 0)$  меняет устойчивость при значениях параметров, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} (\tau - k)/\Lambda &= 1 & (\tau k < 1), \\ \tau k &= 1 & ((\tau - k)/\Lambda > \tau k). \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 1 пунктиром представлены соответствующие сечения поверхности (7). Для значений параметров, удовлетворяющих условиям

$$(\tau - k)/\Lambda = 1, \quad \tau k < 1,$$

состояние равновесия  $\varphi_{10}, 0$  становится сложным фокусом. Чтобы выяснить возможность появления предельного цикла от сложного фокуса [5-6] и установить его устойчивость, определим знак первой ляпуновской величины. Следуя [7], находим, что первая ляпуновская величина при  $(\tau - k)/\Lambda = 1, \tau k < 1$  имеет отрицательный знак

$$\begin{aligned} L((\tau - k)/\Lambda = 1, \tau k < 1) &= -\frac{1}{8} \pi \Lambda [1 - \tau k(1 - \gamma^2)] \times \\ &\times (1 - \gamma^2)^{-1/4} (1 - \tau k)^{-3/2} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, указанная часть границы области устойчивости является безопасной.

Поверхность  $(\tau - k)/\Lambda = 1, \tau k < 1$  в пространстве параметров  $\tau, k, \Lambda$  будем обозначать через  $S$ . При пересечении поверхности  $S$  от значений  $(\tau - k)/\Lambda < 1$  к значениям  $(\tau - k)/\Lambda > 1$  устойчивый фокус (через сложный фокус) становится неустойчивым, а из сложного фокуса возникает единственный устойчивый предельный цикл 1-го рода.

Принимая это во внимание и учитывая расположение границ областей устойчивости (5), (7) (рис. 1), приходим к выводу о том, что при условии  $k\tau < 1$  для значения параметров, близких к кривой  $E$ , в системе (2) следует ожидать возбуждения автоколебаний в мягком режиме.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Беллюстина. Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 909 (1960).
2. А. А. Андронов и А. Г. Майер, Собрание трудов А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 346.
3. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, Л., 1949.
4. Л. А. Биргер, Радиотехника, 16, 40 (1961).
5. А. А. Андронов и Е А Леонович, Уч. зап Горьковского унта, вып. 6, 3 (1937).
6. А. А. Андронов и Е А Леонович, Математ. сб., 40, 179 (1956).
7. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
26 января 1966 г.  
после переработки  
7 октября 1966 г.

УДК 531.391, 3/4

## ОБ АСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ

В. Д. Шалфеев

Для стабилизации частоты генераторов в настоящее время широко используются системы автоматической подстройки частоты, исследование которых посвящена обширная литература. В работах [1—3] изучаются свойства астатической системы фазовой автоподстройки частоты.

В настоящем сообщении рассматривается динамика астатической системы частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАП). Изучается случай активных пропорционально-интегрирующих фильтров

$$K_1(p) = (1 + T_{10}p)/T_1p, \quad K_2(p) = (1 + T_{20}p)/T_2p$$

(оператор  $p \equiv d/dt$ ) в фазовом и частотном кольцах, синусоидальной аппроксимации характеристики фазового детектора (ФД)  $F(\varphi) = \sin \varphi$  и линейной аппроксимации характеристики частотного детектора (ЧД)  $\Phi(p\varphi) = \beta_1 p\varphi$ . При  $T_{10} = T_1 = T_{20} = T_2 = T$  динамика данной системы рассмотрена в [4].

Дифференциальное уравнение простейшей системы ЧФАП при некоторых упрощающих предположениях [5] может быть записано в виде [4]

$$\ddot{\varphi} + \Omega K_1(p) F(\varphi) + \Omega_1 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — разность фаз подстраиваемого (ПГ) и эталонного (ЭГ) генераторов,  $F(\varphi)$  и  $\Phi(p\varphi)$  — характеристики ФД и ЧД, нормированные так, что их максимальные значения равны единице,  $\Omega$ ,  $\Omega_1$  и  $\delta\omega$  — параметры системы ( $\Omega$  и  $\Omega_1$  — максимальные расстройки, вырабатываемые в фазовом и частотном кольцах,  $\delta\omega$  — расстройка частоты ПГ относительно ЭГ).

После введения безразмерного времени  $\tau$  и параметров  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  уравнение (1) в рассматриваемом случае может быть преобразовано к системе

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{1 + \alpha a_2} \left[ -\sin \varphi - \left( \alpha \lambda + \frac{a_1}{\lambda} \cos \varphi \right) y \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\tau = t \sqrt{\frac{\Omega}{T_1}}, \quad \alpha = \beta_1 \Omega_1, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{T_1 \Omega}}, \quad a = \frac{\gamma_1}{T_2}, \quad a_1 = \frac{T_{10}}{T_1}, \quad a_2 = \frac{T_{20}}{T_2}.$$

Фазовым пространством рассматриваемой системы является фазовый цилиндр с образующей, параллельной оси  $y$ . Будем рассматривать развертку цилиндра на плоскость.

Координаты состояний равновесия системы (2) определяются уравнениями

$$\varphi_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi, \quad y_2 = 0. \quad (3)$$

Характер состояний равновесия определяется корнями  $S_{1,2}$ ,  $S_{1,2}^*$  соответствующих характеристических уравнений [6]. Для состояния равновесия  $(\varphi_1, y_1)$

$$S_{1,2} = -\frac{a_1 \lambda^{-1} + a\alpha\lambda}{2(1+\alpha a_2)} \pm \left[ \frac{(a_1 \lambda^{-1} + a\alpha\lambda)^2}{4(1+\alpha a_2)^2} - \frac{1}{1+\alpha a_2} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

для состояния равновесия  $(\varphi_2, y_2)$

$$S_{1,2}^* = -\frac{-a_1 \lambda^{-1} + a\alpha\lambda}{2(1+\alpha a_2)} \pm \left[ \frac{(-a_1 \lambda^{-1} + a\alpha\lambda)^2}{4(1+\alpha a_2)^2} + \frac{1}{1+\alpha a_2} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Состояние равновесия  $(\varphi_1, y_1)$  — всегда устойчивый узел или фокус (при  $\delta \equiv (a_1 \lambda^{-1} + a\alpha\lambda)^2 - 4(1+\alpha a_2) > 0$  — узел, при  $\delta < 0$  — фокус). Состояние равновесия  $(\varphi_2, y_2)$  — всегда седло.

Система (2) астатическая относительно  $\varphi$  и  $y$ . Состояние равновесия  $(\varphi_1, y_1)$  соответствует стационарному режиму работы системы при нулевой разности фаз и частот (режиму синхронизма).

Область в пространстве параметров, для точек которой состояние равновесия  $(\varphi_1, y_1)$  системы (2) асимптотически устойчиво в целом на фазовом цилиндре\*, определяет полосу начальных расстроек по частоте, в которой система синхронизуется.

Для определения области асимптотической устойчивости в целом нулевого решения  $(\varphi_1, y_1)$  системы (2) вводим в рассмотрение, аналогично [1], периодическую  $V$ -функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} \left[ (1 + \alpha a_2) y + \frac{a_1}{\lambda} \sin \varphi \right]^2 + [1 + \alpha(a_2 + a a_1)] (1 - \cos \varphi). \quad (6)$$

Уравнения  $V = C = \text{const}$  определяют при разных  $C$  семейство замкнутых кривых на фазовом цилиндре.

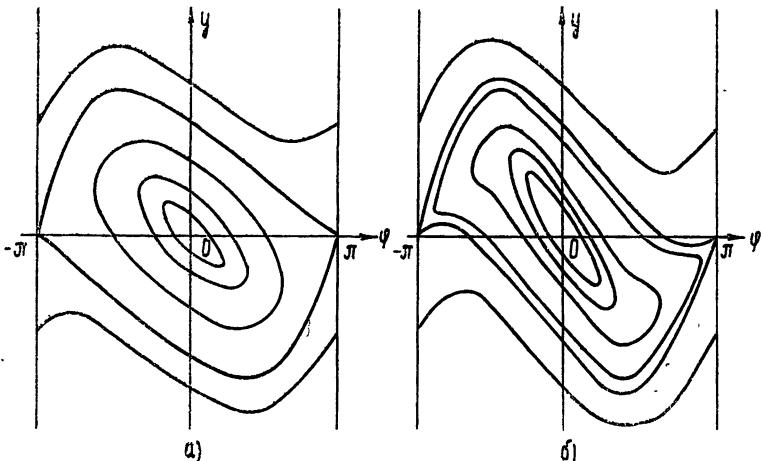


Рис. 1.

\* Здесь, аналогично [7], достаточно потребовать, чтобы областью притяжения начала координат являлась вся поверхность фазового цилиндра за исключением неустойчивой особой точки — седла и точек, принадлежащих входящим в седло сепаратрисам. В данной задаче роль сепаратрис седла, как разделяющих траектории с различным предельным поведением, утрачивается, поскольку все траектории, кроме входящих в седло сепаратрис, идут в одно и то же состояние равновесия.

На рис. 1а и 1б это семейство представлено для

$$\Delta = \lambda^2 - a_1^2/[1 + \alpha(a_2 + aa_1)] > 0$$

и для  $\Delta < 0$  соответственно.

Производная  $dV/d\tau$  при учете (2) определяется выражением

$$\frac{dV}{d\tau} = - \left[ \frac{a_1}{\lambda} \sin^2 \varphi + (1 + \alpha a_2) \alpha \lambda y^2 \right]. \quad (7)$$

При положительных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  функция  $V$  положительна, а ее производная отрицательна. В состоянии равновесия  $(\varphi_1, y_1)$  функции  $V$  и  $\frac{dV}{d\tau}$  обращаются в нуль. Следовательно, решение  $(\varphi_1, y_1)$  системы (2) при любых положительных параметрах асимптотически устойчиво в целом на фазовом цилиндре.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю. Н. Бакаев, Радиотехника и электроника, 8, № 3, 513 (1963).
2. A. J. Viterbi, Phase-lock loop systems, New-York—San-Francisco—Toronto—London, Mc. Graw-Hill Book Co, 1963, p. 123.
3. D. L. Shilling, Proc. IEEE, 51, № 10, 1293 (1963).
4. В. Д. Шалфейев, Тематический сб. Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике, тр. семинара-симпозиума, ч. 1, Сиб. отд. изд. Наука, Новосибирск, 1966.
5. М. В. Капранов, Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, 2, 162 (1958).
6. А. А. Андronov, A. A. Witt, C. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
7. Ю. Н. Бакаев, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 2, 132 (1960).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 июля 1966 г.