

СОДЕРЖАНИЕ

Дмитренко Д. А., Стрежнева К. М. Прецизионные абсолютные измерения потоков радиоизлучения дискретных источников Телец-А и Кассиопея-А и поглощения радиоволн в атмосфере на волне $\lambda = 5,28$ см	165
Гетманцев Г. Г. и Токарев Ю. В. К вопросу о деполаризации и корреляционном методе измерения поляризации космического радиоизлучения	170
Кондратенко А. Н., Онищенко И. Н. Кинетическая теория прохождения электромагнитных волн через магнитоактивный слой плазмы	175
Айнбиндер Н. Е., Гречишкин В. С. Двухчастотное квадрупольное спиновое эхо	186
Генкин В. Н., Меднис П. М. К вопросу об n -уровневом приближении при расчете восприимчивостей	192
Коваленко Е. С. К теории стационарных колебаний в лазере с учетом эффектов диффузии	197
Бутылкин В. С., Хронопуло Ю. Г. О возможности повышения частоты излучения ОКГ с помощью трехфотонного комбинационного процесса	203
Григорьев С. Б., Сазонов А. М., Травин Н. В. Коэффициенты акустического ядерного магнитного резонансного поглощения в кристаллах тригональной симметрии	209
Рабинович М. И. О методе усреднения по стационарным волнам	214
Зачепиская Л. П. Оценка влияния системы фазовой автоподстройки на качество оптимальной обработки сигналов при наличии фазовых искажений	224
Татарский В. И. О траекториях лучей в среде со слабыми случайными неоднородностями показателя преломления	231
Пафомов В. Е. Метод изображений в электродинамике сплошных сред	240
Петров Б. М. Характеристики импедансной полосы на полуплоскости	254
Шевченко В. В. Прохождение поверхностной волны через неоднородный участок однопроводной линии передачи. I Метод исследования	260
Шевченко В. В. Прохождение поверхностной волны через неоднородный участок однопроводной линии передачи. II Решение и результаты для тонкого провода	267
Кинбер Б. Е., Хестанов Р. Х. Дифракционное поле в освещенной области	274
Столяров С. Н. Отражение и прохождение электромагнитных волн, падающих на движущуюся диэлектрическую пластинку	284

Краткие сообщения и письма в редакцию

Ильин С. Д., Лихачев В. М., Петрусев С. С., Чернетский А. В. Сверхвысокочастотная диагностика струи плазмы	289
Хвостова А. И. Измерение диэлектрической проницаемости воды на волне 0,85 мм	292
Беляева Н. Н., Демидов В. А., Новиков М. А. Смещение излучений рубинового и неодимового лазеров	294
Генкин В. Н., Дите А. Ф., Файн В. М. Вклад акустических колебаний в нелинейные свойства кристаллов	296
Таланов В. И. Подавление неаксиальных мод в открытых резонаторах с широкими волновыми пучками методом комбинированной селекции	298
Письмо в редакцию	300

Информация

Аннотации статей, помещенных в ж «Геомagnetизм и аэрoнoмия», т VI, № 4, № 5, 1966 г.	301
--	-----

УДК 523.164.42

ПРЕЦИЗИОННЫЕ АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПОТОКОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕЛЕЦ-А И КАССИОПЕЯ-А И ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ НА ВОЛНЕ $\lambda = 5,28$ см

Д. А. Дмитренко, К. М. Стрежнева

Приведены результаты абсолютных измерений потоков радиоизлучения дискретных источников Телец-А и Кассиопея-А на волне $\lambda = 5,28$ см, выполненных с использованием прецизионного метода измерений, основанного на сравнении принимаемого радиоизлучения с тепловым радиоизлучением «абсолютно черного» диска, помещенного во френгоферовой зоне антенны. Потоки оказались равными $(6,46 \pm 0,3) \cdot 10^{-24}$ вт \cdot м⁻² \cdot зч⁻¹ для Тельца-А и $(7,7 \pm 0,4) \cdot 10^{-24}$ вт \cdot м⁻² \cdot зч⁻¹ для Кассиопеи. Приводятся результаты измерений поглощения радиоволн в атмосфере. В результате измерений величина поглощения в кислороде оказалась равной $\Gamma_0 = 6 \cdot 10^2$ (дб); коэффициент поглощения в водяном паре $a = 4 \cdot 10^{-4}$ (дб \cdot км⁻¹ м³ \cdot зч⁻¹). Точность приводимых результатов 15%.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПОТОКОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Одной из задач радиоастрономии является исследование спектров дискретных источников в широком диапазоне частот. В продолжение работ в этом направлении авторами были предприняты измерения потоков радиоизлучения дискретных источников Телец-А и Кассиопея-А в сантиметровом диапазоне. Измерения проводились на волне $\lambda = 5,28$ см (в июле и октябре 1965 г.) с параболической антенной диаметром 4 м на вертикальной поляризации. Ширина диаграммы направленности, измеренная по Солнцу, равна 60' на уровне половинной мощности. В качестве приемника использовался модуляционный радиометр с флуктуационным порогом чувствительности $\Delta t_{\min} \simeq 0,5^\circ\text{К}$ при постоянной времени выходного прибора $\tau = 1$ сек.

Измерения проводились по методике, аналогичной описанной в [1], путем сравнения принимаемой интенсивности исследуемого излучения с эталонным радиоизлучением «абсолютно черного» диска с диаметром 3,8 м, имеющего угловой размер 49' и наблюдаемого под углом около 18°. При этом измерялось приращение температуры антенны при наличии и отсутствии диска в главном лепестке диаграммы неподвижной антенны, ориентированной в направлении на диск, т. е. проводилась калибровка. Подобная калибровка повторялась через каждые 4—5 записей радиоизлучения источника. Калибровочный эталон был удален от радиотелескопа на расстояние 230 м, что на несколько десятков метров ближе границы френгоферовой зоны. Это обстоятельство приводит к завышению измеряемого потока радиоизлучения источника, поэтому при обработке результатов измерений была учтена поправка, величина которой принималась равной 6% [2]. В процессе измерений проверялся коэффициент отражения поглощающего материала диска. Поправка из-за «нечерноты» диска составляет около 1,5%.

Прием радиоизлучения источников осуществлялся на высотах, близких к кульминации. Для фиксации нулевого уровня при записи радиоизлучения источника антенна отводилась на высоту источника по азимуту на 2° , и выбранная опорная область сопровождалась в течение 5 мин. Регистрация приема радиоизлучения источника при единичном измерении длилась не менее 5 мин, в течение которых источник сопровождался.

Наведение антенны на источник и сопровождение производилось по координатам источника, рассчитанным на каждую минуту времени. Были приняты следующие координаты (эпоха 1965,0): для Кассиопеи-А $\alpha = 23^h 21^m 52^s$, 0 , $\delta = +58^\circ 36,8'$; для Тельца-А $\alpha = 5^h 32^m 24^s,6$, $\delta = +21^\circ 59,9'$.

Антенная система была отъюстирована с точностью $2'$, в процессе измерений юстировка неоднократно проверялась по Солнцу. Температура антенны от радиоизлучения диска составляла $T_{ад} \simeq 64^\circ\text{K}$, от Кассиопеи-А и Тельца-А — порядка 2°K . Выражение для потока неполяризованного излучения дискретного источника записывается аналогично [3]

$$S_n^* = \int_{\Omega_n} I_n F^2 d\Omega = \frac{2kn_n}{\lambda^2 n_d} T_{0д} [1 + \Gamma_0 (\csc h_n - \csc h_d)] \int_{\Omega_d} F^2 d\Omega, \quad (1)$$

где I_n — интенсивность излучения дискретного источника, $T_{0д}$ — температура поглощающего материала «абсолютно черного» диска, n_n , n_d — приращение температуры антенны от источника и диска, Γ_0 — полное поглощение радиоизлучения в атмосфере на рабочей частоте, h_n , h_d — угловая высота источника и диска, F^2 — диаграмма направленности антенны по мощности, Ω — телесный угол.

Поскольку угловые размеры излучающей области источников ($4,4'$ и $3,4'$ для Кассиопеи-А и Тельца-А соответственно) много меньше полуширины диаграммы направленности, можно написать

$$\int_{\Omega_n} I_n F d\Omega = \bar{F} \int_{\Omega_n} I_n d\Omega = \bar{F} S_n. \quad (2)$$

Величина Γ_0 измерялась по методике, приведенной в работе [4], перед началом, в середине и конце каждой серии измерений интенсивности источника. (Результаты измерения поглощения в атмосфере приводятся ниже.) При обработке результатов измерений учитывалось среднее за день значение величины поглощения радиоизлучения в атмосфере.

При измерении интенсивности источника Телец-А учитывалось, что его излучение поляризовано. При обработке результатов измерений степень поляризации и позиционный угол преимущественных колебаний интерполировались согласно данным [5] на рабочую частоту $f = 5,68 \text{ ГГц}$ и принимались равными соответственно $p = 5,9\%$, $\varphi_p = 141^\circ$. Поскольку прием проводился на одной поляризации ($\varphi_E = 0$), то полный поток определялся на основании экспериментальных данных согласно выражению (см., например, [5]).

$$S_n = S_n^* [1 - p - 2p \sin^2(\varphi_p - \varphi_E)]^{-1}, \quad (3)$$

где p — степень поляризации, φ_p — позиционный угол преимущественных колебаний, φ_E — позиционный угол принимаемой поляризации излучения.

В результате 30 измерений поток радиоизлучения источника Телец-А оказался равным $S_T = 6,46 \cdot 10^{-24} (\text{вт} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{м}^{-2})$ со среднеквадратичным разбросом $\sigma = \pm 4\%$, поток источника Кассиопеи-А (100 измерений) — $S_K = 7,7 \cdot 10^{-24} (\text{вт} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{м}^{-2})$ со среднеквадратичным разбросом $\sigma = \pm 3\%$.

Возможные дополнительные погрешности определяются неточностью введения поправки на «нечерноту» диска ($\sim 0,5\%$) и на влияние расположения диска ближе условной границы дальней зоны ($\sim 2\%$), кроме того, возникают ошибки, связанные с неточным измерением углового диаметра эталонного диска ($\sim 0,3\%$) и диаграммы направленности ($\sim 0,5\%$), а также с неточностью учета метеоусловий ($\sim 1\%$). При приеме поляризованного излучения неопределенность в принятом значении поляризации приводит в нашем случае к ошибке, не превышающей 1%. Таким образом, приведенные значения потоков определены со среднеквадратичной погрешностью, не превышающей 5%.

Полученные результаты потоков радиоизлучения дискретных источников Телец-А и Кассиопея-А достаточно хорошо согласуются с измеренными другими авторами [2,6-8] и на других частотах (см. рис. 1).

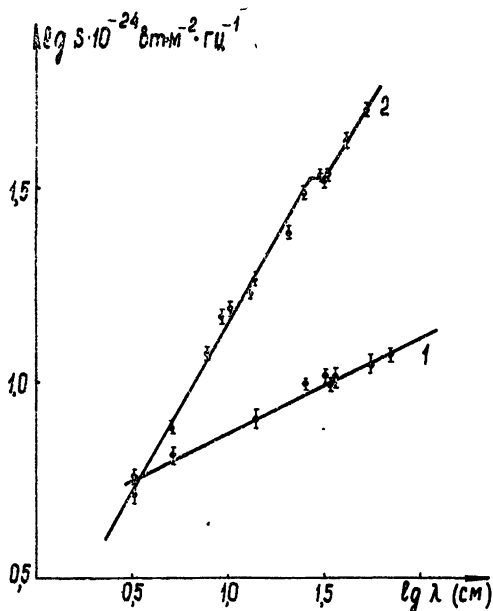


Рис 1. Спектры радиоизлучения дискретных источников:

1 — Кассиопея-А, 2 — Телец-А

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ

Известно [9], что величина полного поглощения радиоизлучения в атмосфере для углов места $\epsilon \geq 5^\circ$ выражается следующим соотношением:

$$\Gamma_{\text{атм}} = \frac{\Delta T_{a \epsilon - \epsilon_0}}{\eta (1 - \beta_{\Omega_1}) (\csc \epsilon - \csc \epsilon_0) T_{\text{ср атм}}}, \quad (4)$$

где $\Delta T_{a \epsilon - \epsilon_0}$ — приращение температуры антенны при изменении угла места от ϵ_0 до ϵ , η — коэффициент полезного действия антенны, β_{Ω_1} — коэффициент рассеяния вне телесного угла Ω_1 , занятого неизотропной частью диаграммы направленности антенной системы, $T_{\text{ср атм}} \approx T_0 - 6,5 H_1$ — средняя температура атмосферы (равная температуре равномерно нагретой атмосферы, дающей то же самое радиоизлучение, что и атмосфера с действительным распределением температуры по высоте).

Для определения величины полного поглощения излучения в атмосфере необходимо знать величину $\eta (1 - \beta_{\Omega_1})$. Определить эту величину непосредственным измерением не представляется возможным, поскольку неизвестна величина телесного угла Ω_1 . Однако, производя калибровку

антенной системы по эталонному излучению «абсолютно черного» диска и излучению горы (см., например, [10]), практически «черной» на вертикальной поляризации при углах наклона $\sim 20^\circ$, можно определить коэффициенты рассеяния $\beta_{г\lambda}$ — вне угловых размеров главного лепестка и $\beta_{гор}$ — вне угловых размеров, занимаемых горой. Поскольку $\Omega_{г\lambda} < \Omega_1 < \Omega_{гор}$, то величину коэффициента рассеяния β_{Ω_1} можно принять равной $\beta_{\Omega_1} = (\beta_{г\lambda} + \beta_{гор})/2$.

Как видно из [9], зависимость $\Delta T_{\epsilon-\epsilon_0}$ от $\text{csc } \epsilon$ является линейной. Измерив эту зависимость, по угловому коэффициенту полученных прямых можно определить величину полного поглощения.

Известно [9], что для величины полного поглощения можно написать

$$\Gamma_{атм} = x_{10} H_1 + x_{20} H_2, \quad (5)$$

где x_{10} и $x_{20} = ar$ — коэффициенты поглощения в кислороде и водяном паре у поверхности земли, H_1 и H_2 — характеристические высоты поглощения в кислороде и водяном паре. Построив зависимость величины полного поглощения от абсолютной влажности ρ , можно отдельно определить поглощение в кислороде $\Gamma_0 = x_{10} H_1$ и поглощение в водяном паре $x_{20} H_2$ [9].

В течение июля и октября 1965 года было получено около 40 значений $\Gamma_{атм}$, соответствующих различным ρ . Зависимость $\Gamma_{атм}$ от ρ представлена на рис. 2. В результате измерений получена величина поглоще-

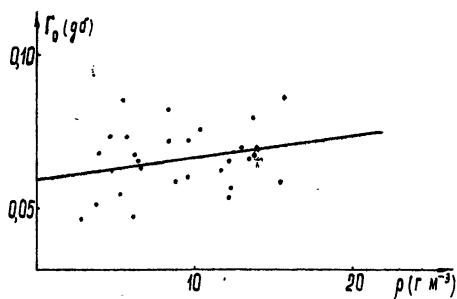


Рис. 2. Зависимость величины полного поглощения в атмосфере от абсолютной влажности.

ния в кислороде на волне $\lambda = 5,28$ см $\Gamma_0 = x_{10} H_1 = 6 \cdot 10^{-4}$ (дб). Коэффициент поглощения в водяном паре равен $a = 4 \cdot 10^{-4}$ (дб · км $^{-1}$ · м 3 · г $^{-1}$). При вычислении поглощения* в водяном паре эффективная высота принималась равной $H_2 = 1,8$ км, средняя эффективная высота поглощения в кислороде для нашего интервала температур $H_1 = 4,7$ км [11].

Точность приведенных результатов 15%.

Имеющиеся теоретические работы пока не дают возможности точно определять величину поглощения, поэтому необходимы экспериментальные исследования поглощения, желательно в непрерывном диапазоне длин волн. К настоящему времени имеются экспериментальные данные о поглощении на волне 3,2 см и в диапазоне волн длиннее 7,5 см (см. [9, 10, 12+15]). Представляют интерес измерения поглощения радиоволн в атмосфере в диапазоне 3,2 ÷ 7,5 см, тем более, что в сантиметровом диапазоне можно ожидать некоторого роста величины коэффициента поглощения [16-18]; об этом же свидетельствует большая, по сравнению

* Величину коэффициента поглощения в водяном паре можно считать несколько завышенной, поскольку большая часть измерений была сделана в облачные и пасмурные дни.

с теоретическим значением [16, 17], величина коэффициента поглощения на волне 3,2 см.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Н. М. Цейтлину за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Ласточкин, В. А. Порфирьев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Н. Н. Холодилов, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 629 (1963).
2. К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, 11, 451 (1966).
3. В. С. Лазаревский, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Астрон ж., 40, 12 (1963)
4. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 19 (1958).
5. J. W. M. Vaage, P. G. Mezger, H. Wenger, Astrophys. J., 142, 1 (1965).
6. В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 398 (1963).
7. В. А. Разин, В. Т. Федоров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1052 (1963).
8. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, В. А. Порфирьев, Астрон. ж., 41, 446 (1964).
9. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 19 (1958)
10. Д. А. Дмитренко, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 817 (1964).
11. В. В. Кузовлев, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 175 (1964)
12. Л. Н. Бондарь, В. Д. Кротиков, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, 10, 755 (1965).
13. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, К. М. Стрешнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 984 (1964).
14. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1098 (1963)
15. К. С. Станкевич, Радиотехника и электроника, 11, 445 (1966).
16. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 9, 1327 (1964).
17. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, 987 (1965).
18. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1100 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 апреля 1966 г.

PRECISION ABSOLUTE MEASUREMENTS OF RADIATION FLUXES OF DISCRETE SOURCES OF TAURUS-A AND CASSIOPEIA-A AND RADIO WAVE ABSORPTION IN ATMOSPHERE AT THE WAVE LENGTH OF $\lambda=5,28$ cm

D. A. Dmitrenko, K. M. Strezhnyova

There are given the results of absolute measurements of radiation fluxes of the discrete sources of Taurus-A and Cassiopeia-A at the wave length of $\lambda=5,28$ cm, made by using the precision measurement method, based upon the comparison of the received radio emission with thermal radio emission of an „absolute black“ disk, being placed in antenna Fraunhofer zone. The fluxes turn to be equal to $(6.46 \pm 0.3) \cdot 10^{-24}$ vt. m^{-2} cps for Taurus-A and to $(7.7 \pm 0.4) \cdot 10^{-24}$ vt. m^{-2} cps for Cassiopeia-A. The measurement results of the radio wave absorption in the atmosphere are given as well. As the result of measurements the absorption value in the oxygen turns to be equal to $\Gamma_0 = 6 \cdot 10^3$ (db); the absorption factor in the water vapour is equal to $a = 4 \cdot 10^{-4}$ (db $\cdot km^{-1} \cdot m^3 \cdot g^{-1}$). The accuracy of the given results is equal to 15%.

УДК 621.396 628 · 621 371 11

К ВОПРОСУ О ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ И КОРРЕЛЯЦИОННОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Г. Г. Гетманцев и Ю. В. Токарев

Рассматриваются некоторые особенности корреляционного метода измерения степени линейной поляризации космического радиоизлучения и возможности определения на его основе параметров космической магнитоактивной среды.

Как известно, при распространении линейно поляризованного космического радиоизлучения в ионизированной межзвездной или метагалактической среде под действием космического магнитного поля происходит деполяризация радиоизлучения. Явление деполяризации космического радиоизлучения было рассмотрено в [1] и в последующих работах Разина [2,3].

Деполяризация радиоизлучения связана, вообще говоря, с двумя различными обстоятельствами. Если космическое радиоизлучение генерируется и распространяется в некоторой протяженной области с однородной удельной излучающей и вращающей способностью, то при приеме радиоизлучения на фиксированной частоте ω оно деполяризуется из-за различия в повороте плоскостей поляризации излучения, идущего от областей, находящихся на различных расстояниях от точки наблюдения. Соответствующий фактор деполяризации равен $|\sin \psi / \psi|$, где ψ — угол поворота (в радианах) плоскости поляризации радиоизлучения, $\psi = 10^6 NHL \cos \alpha / \omega^2$. В этих выражениях N — концентрация ионизированного газа на пути распространения радиоволн, H — напряженность космического магнитного поля, α — угол между лучом зрения и направлением H , а L — протяженность излучающей области по лучу зрения.

Вторая причина деполяризации связана с различием в углах поворота плоскостей поляризации радиоизлучения различных частот в пределах конечной ширины полосы пропускания частот $\Delta\omega$ радиоприемного устройства. Как показал Разин [2], если источник линейно поляризованного излучения находится от наблюдателя на расстоянии L , а излучение распространяется в однородной магнитоактивной среде, то фактор деполяризации равен $e^{-\Delta\psi}$, где $\Delta\psi$ — разность углов поворота спектральных компонент радиоизлучения, отвечающих ширине полосы пропускания приемника*.

Из сказанного выше следует, что в предыдущих работах, посвященных анализу деполяризации радиоизлучения, рассматривался лишь интегральный эффект деполяризации, обусловленный всей областью космической среды, ограниченной диаграммой направленности антенны.

* Выражение $e^{-\Delta\psi}$ получено в предположении, что резонансная кривая приемника совпадает с резонансной кривой одиночного колебательного контура. Соответствующее выражение для полос пропускания другой формы получено в [3], а численные значения степени деполяризации, рассчитанные по разным формулам, по порядку величины совпадают.

В данной статье рассматриваются некоторые принципиальные возможности измерений деполяризации, позволяющие оценивать локальные характеристики космической среды вдоль луча зрения на основе корреляционного метода измерения степени линейной поляризации радиоизлучения¹.

Рассмотрим прежде вопрос о деполяризации радиоизлучения однородной протяженной области космического пространства с одновременным учетом обоих отмеченных выше факторов деполяризации. При этом в отличие от других работ, где рассматриваются вопросы деполяризации радиоизлучения, мы всюду ниже для анализа особенностей распространения радиоволн будем использовать не «спектральный», а «пространственно-временной подход», поскольку, на наш взгляд, он обладает в ряде случаев несколько большей наглядностью и может дать некоторые новые методические возможности для проведения поляризационных измерений.

Как известно, вращение плоскости поляризации радиоизлучения при распространении его в магнитоактивной космической среде связано с различием в показателях преломления нормальных циркулярно поляризованных «обыкновенной» и «необыкновенной» волн, на которые можно разложить исходное линейно поляризованное радиоизлучение. При приеме радиоизлучения на устройство с конечной шириной полосы пропускания $\Delta\omega$ можно считать, что в точку приема приходит хаотически модулированное по амплитуде и фазе «обыкновенное» и «необыкновенное» радиоизлучение, распространяющееся в виде цугов со средней длительностью $\Delta t \sim 1/\Delta\omega$. Различие в групповых скоростях цугов нормальных циркулярно поляризованных волн приводит к сдвигу цугов во времени и пространстве, т. е. к нарушению когерентности между сигналами обоих типов в точке приема. Следствием этого и является уменьшение степени линейной поляризации радиоизлучения при приеме его на устройство с конечной полосой пропускания и антенную систему, непосредственно выделяющую линейно поляризованную компоненту радиоизлучения.

Представим себе теперь, что прием осуществляется на два одинаковых приемных устройства, снабженных антеннами для раздельного приема двух циркулярно поляризованных нормальных волн с противоположными направлениями вращения векторов электромагнитного поля. С помощью подобного устройства измерение степени линейной поляризации сводится, как можно показать, к нахождению функции корреляции между сигналами на выходе обоих радиоприемных устройств. Очевидно, что деполяризация радиоизлучения вследствие конечной ширины пропускания радиоприемников будет при такой методике измерений приводить к снижению корреляции между сигналами, отвечающими «обыкновенной» и «необыкновенной» компонентам радиоизлучения. В частности, приведенные выше формулы, определяющие деполяризацию радиоизлучения из-за конечной ширины полосы пропускания радиоприемников и различной удаленности источников радиоизлучения от наблюдателя, могут быть, как можно показать, получены на основе корреляционного подхода, отвечающего описанной выше методике измерений.

Рассмотрим два случая измерений степени линейной поляризации космического радиоизлучения с помощью предложенной выше методики приема излучения на две антенны, принимающие циркулярно поляризованные нормальные волны. Предположим, что речь идет об измерении степени линейной поляризации радиоизлучения в магнитоактивной среде, вызывающей деполяризацию благодаря конечности ширины

¹ Описание корреляционного метода измерения степени поляризации см., например, в [4].

полосы пропускания радиоприемника. При достаточно большой вращающей способности среды или при достаточно большой ширине полосы пропускания приемника $\Delta\omega$ фактор $\Delta\psi$ становится значительным (деполяризация велика), что на пространственно-временном языке означает существенное уменьшение степени корреляции между нормальными волнами, регистрируемыми приемными антеннами.

Деполяризацию, связанную с конечностью $\Delta\omega$, можно, очевидно, исключить, если в тракт одной из приемных антенн ввести временную задержку сигнала τ^{\max} , равную разности времен группового запаздывания нормальных волн, распространяющихся в магнитоактивной среде между источником и наблюдателем. Если в процессе измерений значение τ^{\max} неизвестно, «задержку» необходимо плавно менять, непрерывно увеличивая τ . При этом, как можно показать, степень поляризации радиоизлучения источников с ростом τ при $\tau < 4\psi_0/\omega$ будет постепенно возрастать, достигая максимума при $\tau = 4\psi_0/\omega$,

$$\rho = \rho_0 \exp \left[-|\tau - 4\psi_0/\omega| \frac{\Delta\omega}{2} \right], \quad (1)$$

где ρ_0 — степень линейной поляризации источника без влияния деполяризации, $\psi_0 = 10^6 N H L \cos\alpha/\omega^2$, L — расстояние от источника до наблюдателя. При дальнейшем увеличении τ ($\tau > 4\psi_0/\omega$) степень поляризации, как это видно из (1), уменьшается, что представляется естественным. Последнее утверждение справедливо, разумеется, лишь в случае, если деполяризация в самом источнике отсутствует, т. е. ρ_0 не зависит от $\Delta\omega/\omega_0$.

Во втором случае будем считать, что измеряется степень поляризации излучения однородной излучающей области космического пространства, простирающейся от наблюдателя на расстояние L . Предполагается также, что удельная вращательная способность области одинакова на всем ее протяжении. В этом случае, как можно показать, при одновременном учете двух указанных выше факторов деполяризации результирующая степень поляризации описывается выражением

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_0 \psi_0^{-1} [\exp(-\tau\Delta\omega) + \exp(-4\psi_0\Delta\omega/\omega + \tau\Delta\omega) - 2 \cos 2\psi_0 \exp(-2\psi_0\Delta\omega/\omega)]^{1/2}, \quad (2)$$

где ρ_0 — степень поляризации излучающей области без учета деполяризующих факторов, ψ_0 имеет тот же смысл, что и в (1), а τ — относительное время задержки сигналов, поступающих на две антенны, регистрирующие нормальные циркулярно поляризованные радиоволны. Формула (2) выведена для случая $\Delta\omega/\omega \ll 1$ и справедлива при условии $\tau \leq \tau_{гр} = 4\psi_0/\omega$, где $\tau_{гр}$ есть разность времен группового запаздывания «обыкновенного» и «необыкновенного» излучения, идущего от границы излучающей области, т. е. от областей, удаленных от наблюдателя на расстояние L . При выполнении обратного неравенства $\tau > \tau_{гр}$, т. е. для достаточно больших задержек, для ρ справедливо выражение

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_0 \psi_0^{-1} \exp(-\tau\Delta\omega/2) [1 + \exp(4\psi_0\Delta\omega/\omega) - 2 \cos 2\psi_0 \exp(2\psi_0\Delta\omega/\omega)]^{1/2}. \quad (3)$$

При $\tau = 0$ из формулы (2) получается значение степени поляризации излучения однородной излучающей области с постоянной вдоль луча зрения вращательной способностью при учете конечной ширины полосы

пропускания приемника. Если к тому же в формуле (2) положить $\Delta\omega = 0$, то получим известную формулу $\rho = \rho_0 |\sin \psi / \psi|$, учитывающую деполаризацию из-за различной удаленности излучающих областей от точки наблюдения.

Применение формул (2) и (3) при $\tau \neq 0$ предполагает, конечно, что измерения ρ проводятся с помощью предложенного выше метода приема сигнала на две антенны, предназначенные для регистрации циркулярно поляризованных нормальных волн, с последующей корреляционной обработкой принятых сигналов. Как видно из (2) и (3), при увеличении величины задержки τ степень поляризации ρ меняется, что соответствует изменению вклада в значение степени поляризации различных вдоль луча зрения областей излучающего радиоволны участка космического пространства*.

Это обстоятельство иллюстрируется кривыми $\rho(\omega\tau)$ (рис. 1), построенными по формуле (2) при $\psi_0 = 20$ (например, для $N = 10^{-2}$, $H = 5 \cdot 10^{-6}$, $L = 600$ пс, что приблизительно соответствует параметрам плоской подсистемы Галактики) на частоте $\omega/2\pi = 300$ МГц для двух значений $\Delta\omega/\omega = 0,1; 0,05$.

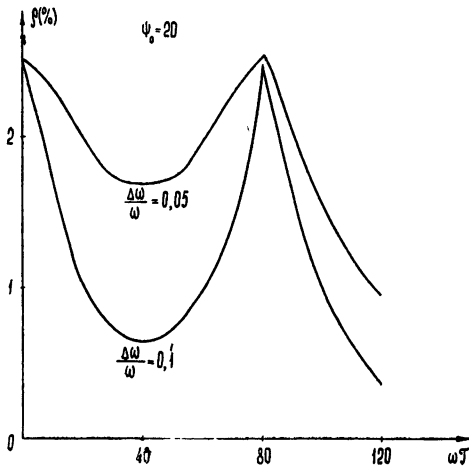


Рис. 1.

Как видно из рис. 1, при относительно малых задержках с ростом τ степень поляризации падает, достигая минимума при $\tau = 2\psi_0/\omega$, а затем возрастает, достигая максимума при $\tau = 4\psi_0/\omega$, причем $\rho(4\psi_0/\omega) = \rho(0)$. При дальнейшем увеличении τ ($\tau > 4\psi_0/\omega$) степень поляризации ρ спадает до нуля в соответствии с выражением (3). Таким образом, находя из наблюдений $\tau^{\max} = 4\psi_0/\omega$ и зная из независимых соображений значение L , можно определить произведение $NH \cos \alpha$, и наоборот. Напомним здесь, что формулы (2), (3) и рис. 1 получены для модели однородной излучающей области с одинаковой всюду вращательной способностью вдоль луча зрения. Очевидно, что соответствующие зависимости $\rho(\omega\tau)$ могут

* В выражении (2) для степени поляризации опущены осцилляторные члены порядка $\Delta\omega/\omega$, зависящие от величины задержки τ . Отметим также, что формулы (2) и (3) выведены для случая резонансной кривой приемника, имеющей вид резонансной кривой одиночного колебательного контура. При других предположениях о форме частотной характеристики приемника получаются отличающиеся от (2) и (3) выражения для степени поляризации ρ . В этом смысле приведенные здесь выражения (2) и (3) носят в значительной мере лишь иллюстративный характер. Авторы признательны В. А. Зиничеву за обсуждение области применимости выражений (2) и (3).

быть выведены и для неоднородных моделей космического пространства, выбор которых может отчасти определиться сравнением результатов расчета с данными поляризационных измерений.

Учет фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения и связанных с ним явлений деполяризации как способ получения информации о космической среде, разумеется, возможен и при обычно используемой методике непосредственного измерения степени линейной поляризации. При этом для получения какой-либо информации об изменении параметров радиоизлучающей области вдоль луча зрения необходимо, очевидно, производить измерения либо на нескольких разных частотах, либо на одной частоте с переменной шириной полосы пропускания приемника. Минимальное значение ширины полосы пропускания приемника должно быть в этом случае таково, чтобы влияние деполяризующего фактора, связанного с конечностью $\Delta\omega$, было пренебрежимо малым, с тем, чтобы вклад в измеряемое значение степени поляризации давала вся излучающая область.

Как нам представляется, метод исследования линейной поляризации космического радиоизлучения, основанный на корреляционной обработке сигналов с двух антенн, принимающих циркулярно поляризованные волны, имеет определенные достоинства и при обычном измерении степени поляризации радиоизлучения без введения временной задержки в один из радиопринимаемых трактов.

Прежде всего, это касается уменьшения различных паразитных эффектов, связанных с влиянием на результаты измерений радиоизлучения Земли и других предметов, попадающего в боковые лепестки приемной диаграммы направленности, влиянием угловых градиентов космического радиоизлучения в связи с отсутствием осевой симметрии приемной диаграммы направленности и т. д. Разумеется, окончательные заключения о сравнительных достоинствах и недостатках корреляционного и обычного методов измерения степени поляризации космического радиоизлучения могут быть сделаны лишь на основе эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Гетманцев, Е. А. Разин, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956
2. В. А. Разин, Радиотехника и электроника, 1, 846 (1956)
3. В. А. Разин, В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 6 (1965).
4. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 мая 1966 г.

ON DEPOLARIZATION AND CORRELATION METHOD OF POLARIZATION MEASUREMENT OF COSMIC RADIATION

G. G. Getmantsev and Yu. V. Tokarev

Some peculiarities of the correlation method of measurement of the degree of linear polarization in cosmic radiation and the possibilities to determine, on its basis, the parameters of an interstellar magneto-active medium are considered.

УДК 621 371.182

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ МАГНИТОАКТИВНЫЙ СЛОЙ ПЛАЗМЫ

А. Н. Кондратенко, И. Н. Онищенко

Рассматривается прохождение электромагнитной волны через слой плазмы, находящийся в постоянном магнитном поле, параллельном границе плазмы. Электрический вектор падающей волны также считается параллельным магнитному полю. Найдены коэффициенты отражения, прохождения и поглощения энергии волны, а также определен вид поля в плазме в различных частных случаях.

1. Прохождение электромагнитных волн через слой плазмы в отсутствие постоянного магнитного поля или с магнитным полем, перпендикулярным к границе плазмы, рассматривалось в работах [1-3]. В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о прохождении волн через слой плазмы, находящийся в постоянном однородном магнитном поле, параллельном границе плазмы. В случае полуограниченной плазмы с такой же геометрией магнитного поля некоторые стороны этой задачи исследовались в работах [4,5].

Выберем такую систему координат, чтобы ось x была перпендикулярна к слою плазмы (так что координаты границ плазмы есть $x=0, a$), а ось z — направлена вдоль постоянного магнитного поля H_0 . Пусть на плазму перпендикулярно ее границе падает электромагнитная волна. Падающую волну с произвольной ориентацией электрического вектора E относительно постоянного магнитного поля можно разложить на две. У одной из них $E \parallel H_0$ (обыкновенная волна), у другой $E \perp H_0$ (необыкновенная волна). Мы рассмотрим прохождение через слой плазмы обыкновенной волны.

Полагая зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, найдем, что поле в плазме определяется из следующей системы уравнений:

$$\frac{dE}{dx} = -ikH; \tag{1.1}$$

$$\frac{dH}{dx} = -ikE + \frac{4\pi}{c}j, \quad i = \sum_{\alpha=i}^e e_{\alpha} \int_{\nu} f_{\alpha} v_z d\nu; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} - i \frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{v_x} f_{\alpha} - \frac{\omega_{\alpha}}{v_x} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \varphi} + e_{\alpha} E \frac{v_z}{v_x} f'_{0\alpha} = 0. \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1) — (1.3) приняты обозначения $E = E_z$, $H = H_y$, $k = \omega/c$, $\omega_{\alpha} = e_{\alpha} H_0 / m_{\alpha} c$, e_{α} — заряд, m_{α} — масса, ν_{α} — частота столкновений, f_{α} — малая добавка к равновесной функции распределения $f_{0\alpha}$ частиц сорта α (индекс $\alpha=i$ относится к ионам, индекс $\alpha=e$ — к элек-

тронам), φ — угол в пространстве скоростей $\mathbf{v} = (v_1 \cos \varphi, v_1 \sin \varphi, v_2)$, $f'_{0\alpha}$ — производная $f_{0\alpha}$ по энергии.

К уравнениям (1.1)—(1.3) необходимо добавить граничные условия для поля:

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E(0), & E_0 - E_1 &= -H(0), \\ E_2 \exp(ika) &= E(a), & E_2 \exp(ika) &= -H(a) \end{aligned} \quad (1.4)$$

(где E_0 , E_1 и E_2 — соответственно амплитуда падающей, отраженной и прошедшей через слой волн) и для функции распределения f_α

$$\begin{aligned} f_\alpha(0, v_x > 0, v_y) &= p f_\alpha(0, v_x < 0, -v_y), \\ f_\alpha(a, v_x < 0, v_y) &= p f_\alpha(a, v_x > 0, -v_y). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если $p = 0$, то отражение частиц от границы плазмы называется диффузным. В этом случае границе плазмы передается энергия от частиц, а направленный поток частиц от границы отсутствует.

В случае $p = 1$ компонента импульса частиц, перпендикулярная магнитному полю, меняет направление, но не меняется по абсолютной величине. Такое отражение мы будем называть зеркальным, хотя оно и не является в полном смысле таковым (для зеркального отражения меняется только x -компонента импульса*).

Систему уравнений (1.1)—(1.3) будем решать методом Фурье. Поле E , заданное в интервале $(0, a)$, продолжаем на интервал $(-a, 0)$ четно (H — нечетно), а вне этого интервала — периодически с периодом $2a$. Решение ищем в виде сумм

$$E(x) = \sum'_{n=0}^{\infty} E(n) \cos(\alpha_n x), \quad H(x) = \sum'_{n=0}^{\infty} H(n) \sin(\alpha_n x), \quad (1.6)$$

где $\alpha_n = n\pi/a$, а штрих у сумм означает, что слагаемое суммы с $n = 0$ умножается на $1/2$.

Решая уравнение (1.3) с граничными условиями (1.5), аналогично работе [6], для коэффициента Фурье тока в случае максвелловской равновесной функции распределения получим следующие значения:

$$j_3(n) = \sigma_{33}(n) E(n) + \delta_{\varphi\varphi} J_3(n), \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = - \sum_{\alpha} \frac{n_0 e_a^2}{\pi \omega_a m_a} \int_0^{\infty} t \exp(-t^2) dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varphi} d\varphi_1 \exp[i\gamma_\alpha(\varphi_1 - \varphi)] \times \\ \times \cos(n, \varphi_1, \varphi); \end{aligned} \quad (1.7a)$$

$$\begin{aligned} J_3 = - \sum_{\alpha} \frac{n_0 e_a^2 v_a}{\pi \omega_a^2 a m_a} \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t^2) dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varphi} d\varphi_1 |\cos \varphi_1| \times \\ \times \cos(n, \varphi_1, \varphi) \int_{f(\varphi_1)}^{\varphi_1} d\varphi_2 \exp[i\gamma_\alpha(\varphi_2 - \varphi)] \sum'_{k=0}^{\infty} [(-1)^{n+k} + 1] \times \\ \times E(k) \cos(k, \varphi_2, \varphi_1). \end{aligned} \quad (1.7b)$$

* Поскольку при рассматриваемом отражении импульс частиц по абсолютной величине не меняется, то по своим физическим свойствам оно должно быть близко к зеркальному.

В выражениях (1.7а) и (1.7б) $\gamma_\alpha = (\omega + i\nu_\alpha)/\omega_\alpha$, $\cos(n, \varphi_1, \varphi) = \cos[\mu_\alpha t(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)]$, $\mu_\alpha = \alpha_n v_\alpha/\omega_\alpha$, $f(\varphi)$ — угол, определяемый условием $\sin[f(\varphi)] = \sin\varphi$, $(\varphi < f(\varphi) < \varphi + 2\pi)$.

Из уравнений Максвелла и выражения (1.7) получим уравнения интегрального типа для коэффициента Фурье электрического поля:

$$E(n) = -\frac{2i}{ka\Delta} [(-1)^n H(a) - H(0)] + \frac{4\pi i}{\omega\Delta} \delta_{0p} J_s, \quad (1.8)$$

где

$$\Delta = \frac{\alpha_n^2}{k^2} - \epsilon_{33}, \quad \epsilon_{33} = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{33}.$$

В случае зеркального отражения ($\delta_{0p}=0$) или слабой пространственной дисперсии ($\mu_\alpha \ll 1$) (1.8) становится простым алгебраическим уравнением.

Пренебрегая в (1.8) слагаемым, пропорциональным δ_{0p} , подставляя полученное таким образом значение $E(n)$ в первую сумму (1.6) и выполняя некоторые преобразования, для поля в плазме получим следующее выражение:

$$E(x) = \frac{\pi}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq k^2 [H(a) \cos(qx) - H(0) \cos[q(a-x)]]}{(q^2 - k^2 \epsilon_-) \sin(qa)} + \frac{\pi}{k} \int_0^{\infty} \frac{dq k^4 (\epsilon_+ - \epsilon_-) [H(a) \cos(qx) - H(0) \cos[q(a-x)]]}{(q^2 - k^2 \epsilon_+) (q^2 - k^2 \epsilon_-) \sin(qa)}, \quad (1.9)$$

где $\epsilon_+ = \epsilon_{33}$ для $\alpha_n = q > 0$, $\epsilon_- = \epsilon_{33}$ для $q < 0$.

Как будет видно из дальнейшего, поле в плазме не является экспоненциально малым в том случае, когда уравнение $q^2 - k^2 \epsilon_{33}(q) = 0$ имеет действительные корни. Оказывается, что это уравнение имеет действительные q (кроме случая $\omega > \omega_p$) для частот $\omega \leq s\omega_\alpha$ ($s = 1, 2, \dots$) [7]. Так как наше рассмотрение справедливо при выполнении неравенства $(\omega_\alpha - \omega)/\omega_\alpha \gg v_\alpha^2/c^2$ (при этом циклотронное затухание колебаний, обусловленное релятивистским эффектом Допплера, экспоненциально мало), то для того, чтобы проявились частоты $\omega \sim s\omega_\alpha$, должно выполняться условие $\Omega_\alpha^2 \gg \omega_\alpha^2$. При этом аналитические формулы можно получить в том случае, когда газокINETическое давление намного меньше магнитного, т. е. $\Omega_\alpha^2 v_\alpha^2 \ll c^2 \omega_\alpha^2$. Указанным случаем мы в дальнейшем и ограничимся. При этом оказывается, что одной частоте $\omega \sim s\omega_\alpha$ соответствуют два разных действительных q , что соответствует возбуждению двух волн. У одной из них длина волны λ_α много больше среднего лармюровского радиуса $r_\alpha = v_\alpha/\omega_\alpha$ (случай слабой пространственной дисперсии), у другой $\lambda_\alpha \ll r_\alpha$ (случай сильной пространственной дисперсии).

Кроме поля в плазме нас будут интересовать коэффициенты отражения $R = E_1/E_0$, прохождения $T = E_2/E_0$ и поглощения $W = 1 - |R|^2 - |T|^2$ энергии волны.

Ниже будут рассмотрены случаи слабой пространственной дисперсии (для зеркального и диффузного отражений), сильной пространственной дисперсии (для зеркального отражения и частот $\omega \sim s\omega_\alpha$), а также тонкие ($r_i \gg a \gg r_e$) слои плазмы произвольной неоднородности в случаях зеркального и диффузного отражений.

2. СЛАБАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ

Так как J_3 пропорционально r_α , в случае слабой пространственной дисперсии при вычислении J_3 достаточно разложить $\cos [\mu_\alpha t (\sin \varphi_1 - \sin \varphi)]$ в ряд по степеням μ_α и ограничиться первым слагаемым. Тогда

$$J_3 = (-1)^n E(a) + E(0) \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2 v_{\alpha}}{4\pi^{3/2} a \omega^2} \left[1 - \frac{1 + \exp(2\pi i \gamma_{\alpha})}{2(1 - 4\gamma_{\alpha}^2)} \right]. \quad (2.1)$$

Это значение J_3 подставим в (1.8), а полученное отсюда выражение для $E(n)$ — в первую сумму (1.6). Беря затем ее значение при $x = 0$, $x = a$ и обозначая

$$\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Delta}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta}, \quad \alpha = \frac{2\sigma_1}{ka},$$

$$\beta = \frac{2\sigma_2}{ka}, \quad \delta = i \frac{x}{a} \sigma_1, \quad \rho = 1 - i \frac{x}{a} \sigma_2, \quad (2.2)$$

$$\kappa = \delta_{0p} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2 v_{\alpha}}{\sqrt{\pi} \omega^3} \left[1 - \frac{1 + \exp(2\pi i \gamma_{\alpha})}{2(1 - 4\gamma_{\alpha}^2)} \right],$$

получим следующие два соотношения:

$$\rho E(0) - \delta E(a) = -i\alpha H(a) + i\beta H(0),$$

$$\rho E(a) - \delta E(0) = -i\beta H(a) + i\alpha H(0). \quad (2.3)$$

Решая их совместно с системой (1.4), найдем

$$R = \frac{1}{Q} (\beta^2 - \alpha^2 + \rho^2 - \delta^2), \quad T = \frac{2i}{Q} (\beta\delta + \alpha\rho) \exp(-ika); \quad (2.4)$$

$$\frac{H(0)}{E_0} = -\frac{2}{Q} (i\beta\rho + i\alpha\delta - \rho^2 + \delta^2), \quad \frac{H(a)}{E_0} = -\frac{2i}{Q} (\beta\delta + \alpha\rho),$$

$$Q = -\alpha^2 + \beta^2 + 2i(\beta\rho + \alpha\delta) - \rho^2 + \delta^2. \quad (2.5)$$

В случае слабой пространственной дисперсии дисперсионные свойства среды определяются малыми n , так что для вычислений действительной части ϵ_{33} достаточно разложить $\cos [\mu_\alpha t (\sin \varphi_1 - \sin \varphi)]$ в ряд. Однако ϵ_{33} содержит в себе и мнимую часть, являющуюся следствием черенковского поглощения коротковолновых компонент фурье-разложения волны медленными частицами плазмы. В мнимую часть ϵ_{33} основной вклад дают большие n . Вычисляя аналогично [6], найдем

$$\epsilon_{33} = \text{Re} \epsilon_{33} + i \text{Im} \epsilon_{33}, \quad (2.6)$$

где для малых n (таких, что $\alpha_n \ll \omega_n^2/v_n^2$)

$$\text{Re} \epsilon_{33} = \epsilon - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{\alpha}^2} \frac{\alpha_n^2 v_{\alpha}^2}{2\omega^2},$$

$$\epsilon = 1 - \sum_{\#} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2}, \quad \Omega_{\alpha}^2 = 4\pi e_{\alpha}^2 n_{\alpha} / m_{\alpha}. \quad (2.6a)$$

Для больших n ($\alpha_n \gg \omega_\alpha^2 / v_\alpha^2$)

$$\text{Im } \varepsilon_{33} = \sum_{\alpha} \frac{\sqrt{\pi} \Omega_{\alpha}^2}{\omega \alpha_n v_{\alpha}} \exp \left(- \frac{\omega^2}{\alpha_n^2 v_{\alpha}^2} \right). \quad (2.66)$$

Принимая во внимание это обстоятельство, σ_2 можно записать в следующем виде:

$$\sigma_2 = \sum'_{n=0} \frac{Q_1}{Q_1^2 + Q_2^2} + i \sum_{n_0} \frac{Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad (2.7)$$

где

$$Q_1 = \frac{\alpha_n^2}{k^2} - \text{Re } \varepsilon_{33}, \quad Q_2 = \text{Im } \varepsilon_{33}.$$

Значение n_0 , от которого ведется суммирование во втором слагаемом выражения (2.7), фактически не определено, но по порядку величины можно принять

$$n_0 \gg \frac{a}{\pi r_{\alpha}} \gg 1.$$

При вычислении первой суммы в выражении (2.7) величиной Q_2 можно пренебречь, а во второй сумме можно перейти к интегрированию.

Учитывая, что мнимой частью величины σ_1 можно пренебречь (она дает экспоненциально малое объемное поглощение энергии волны), получим

$$\sigma_1 = - \frac{aq_1}{2\varepsilon \sin(q_1 a)}, \quad \sigma_2 = - \frac{aq_1 \text{ctg}(q_1 a)}{2\varepsilon} + i(\sigma_e + \sigma_i); \quad (2.8)$$

$$\sigma_e = \frac{ka \Omega_e^2 v_e^2}{\sqrt{\pi} \omega^2 c^2} \int_0^{\omega/\omega_e} \frac{t^3 \exp(-t^2) dt}{[1 + t^3 b_e \text{ctg}(\pi \gamma_e)]^2 + t^6 b_e^2 \exp(-2t^2)}; \quad (2.8a)$$

$$\sigma_i = \frac{ka \Omega_i^2 v_i^2}{\sqrt{\pi} \omega^2 c^2} \int_0^{\omega/\omega_i} \frac{t^3 \exp(-t^2) dt}{[1 - \varepsilon t^2 + t^3 b_i \text{ctg}(\pi \gamma_i)]^2 + t^6 b_i^2 \exp(-2t^2)}, \quad (2.8b)$$

где

$$q_1 = k^2 \varepsilon \left[1 + \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2 v_{\alpha}^2}{(\omega^2 - \omega_{\alpha}^2) c^2} \right]^{-1}, \quad b_{\alpha} = \sqrt{\pi} \Omega_{\alpha}^2 \tau_{\alpha}^2 / \omega^2, \\ \tau_{\alpha} = v_{\alpha} / c,$$

σ_i получено в предположении, что при тех n , которые связаны с поглощением энергии волны ионами, дисперсия электронов слабая.

Если ω не близко к ω_{α} , то слагаемые в (2.8a), (2.8b), пропорциональные b_{α} , можно не учитывать.

Слагаемое в q_1^2 , пропорциональное v_{α}^2 , необходимо учесть только на циклотронных частотах $\omega \simeq \omega_{\alpha}$.

При вычислении коэффициента поглощения рассмотрим отдельно случаи зеркального и диффузного отражений частиц плазмы от границы.

В случае зеркального отражения $\chi = 0$, $\rho = 1$, $\delta = 0$, так что для W получим следующее выражение:

$$W_{p-1} = \frac{4\beta_1 \{\lambda^2 [1 + 2 \text{ctg}^2(q_1 a)] + 1\}}{(\lambda^2 + 1)^2 + 4\lambda^2 \text{ctg}^2(q_1 a)}, \quad (2.9)$$

где $\lambda = q_1/k\varepsilon$, $\beta_1 = 2(\sigma_e + \sigma_i)/ka$, а τ_i следует принимать во внимание только в случае низких частот $\omega \sim \omega_i$. Действительно, если $\omega \gg \omega_e$, то $\sigma_e \simeq ka\Omega_e^2 v_e^2 / 2\sqrt{\pi}\omega^2 c^3 \gg \sigma_i \simeq ka\Omega_i^2 v_i^2 / 2\sqrt{\pi}\omega^2 c^3$. В этом случае коэффициент поглощения совпадает с полученным в работе [1].

Если $\omega \ll \omega_e$, то $\sigma_e \simeq ka\omega^2 \Omega_e^2 v_e^2 / 4\sqrt{\pi}\omega_e^4 c^3$. Таким образом, в этом случае поглощение энергии волны электронами быстро уменьшается с ростом магнитного поля и при достаточно сильных магнитных полях и низких частотах может сравниться с поглощением за счет ионов.

Для диффузного отражения мнимой частью в σ_i можно пренебречь. Тогда

$$W_{p=0} = \beta_2 \frac{\lambda^2[\lambda^2 + 2\operatorname{ctg}^2(q_2 a) + 1]}{(\lambda^2 + 1)^2 + 4\lambda^2 \operatorname{ctg}^2(q_1 a)}, \quad (2.10)$$

где

$$\beta_2 = \sum_{\alpha} \frac{2\Omega_{\alpha}^2 v_{\alpha}}{\sqrt{\pi}\omega^2 c} \left[1 - \frac{\cos^2(\pi\gamma_{\alpha})}{1 - 4\gamma_{\alpha}^2} \right].$$

Таким образом, в случае зеркального отражения частиц плазмы от границы коэффициент поглощения пропорционален $(v_{\alpha}/c)^3$, а в случае диффузного $\sim v_{\alpha}/c$ и осциллирует с изменением магнитного поля. Если $\omega_e \gg \omega \gg \omega_i$, то β_2 принимает следующий вид:

$$\beta_2 = \frac{2\Omega_i^2 v_i}{\sqrt{\pi}\omega^2 c} + \frac{2\Omega_e^2 v_e}{\sqrt{\pi}\omega^2 c} (\pi^2 - 4). \quad (2.11)$$

В этом случае поглощение энергии волны ионами может сравниться с поглощением за счет электронов.

Пренебрегая поглощением энергии волны плазмой, подставляя (2.6а) в выражение (1.9) и вычисляя интеграл, найдем электрическое поле в плазме:

$$E(x) = \frac{iq_1}{k\varepsilon \sin(q_1 a)} \{ H(a) \cos(q_1 x) - H(0) \cos[q_1(a-x)] \}. \quad (2.12)$$

Если $q_1 = q_n = n\pi/a$ ($n = 1, 2, \dots$), то поле в плазме резонансно растет (пространственный резонанс).

Частоты, при которых может наблюдаться пространственный резонанс,

$$\omega = (\Omega_e^2 + q_n^2 c^2)^{1/2}; \quad (2.13)$$

$$\omega = \omega_e \left[1 - \frac{q_n^2 \Omega_e^2 v_e^2}{4\omega_e^2 (\Omega_e^2 + c^2 q_n^2)} \right] \quad (\omega \sim \omega_e); \quad (2.14)$$

$$\omega = \omega_i \left[1 - \frac{q_n^2 \Omega_i^2 v_i^2}{4\omega_i^2 (\Omega_e^2 + c^2 q_n^2)} \right] \quad (\omega \sim \omega_i). \quad (2.15)$$

Рассмотрим коэффициент прохождения в случае циклотронных частот. Если $\omega \lesssim \omega_{\alpha}$, то

$$\lambda^2 = \left[\varepsilon_3 \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2 v_{\alpha}^2}{2c^2 (\omega^2 - \omega_{\alpha}^2)} \right]^{-1} \ll 1.$$

Поэтому в отсутствие пространственного резонанса коэффициент прохождения мал:

$$T = \frac{2i\lambda}{\sin(q_1 a)} \exp(-ika). \quad (2.16)$$

По мере приближения к резонансу $|T|$ растет и при $\sin(q_1 a) \sim 2\lambda$ $|T| \sim 1$.

3. СИЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ

Сильная пространственная дисперсия имеет место при $\omega \sim s\omega_n$ ($s = 1, 2, \dots$) в том случае, когда длина распространяющейся в плазме волны меньше ларморовского радиуса частиц. Математически случай сильной пространственной дисперсии означает, что в определении дисперсионных свойств среды главную роль играют большие n , так что $\alpha_n v_a / \omega_n \gg 1$.

Отражение частиц плазмы от границы будем считать зеркальным, хотя, вообще говоря, в случае сильной пространственной дисперсии результаты слабо зависят от характера отражения. Рассмотрим сначала высокочастотные колебания, $\omega \sim s\omega_e$.

Используя асимптотику ϵ_{33} для $qv_e / \omega_e \gg 1$, методом стационарной фазы найдем, что

$$\epsilon_{\pm}(q) = 1 \mp \frac{V\pi\Omega_e^2}{\omega q v_e} [\text{ctg}(\pi\gamma_e) - i]. \quad (3.1)$$

Полученные значения ϵ_{\pm} (в которых единицей можно пренебречь) подставим в выражение (1.9), после чего найдем поле в плазме:

$$E(x) = H(a) \sum_{j=1}^3 \frac{ik \cos(x_j x)}{3x_j \sin(x_j a)} - H(0) \sum_{j=1}^3 \frac{ik \cos[x_j(a-x)]}{3x_j \sin(x_j a)}, \quad (3.2)$$

где

$$x_1 = -B^{1/3} \left(1 - \frac{i}{3 \text{ctg}(\pi\gamma_e)} \right), \quad x_{2,3} = B^{1/3} \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$B = \frac{V\pi\Omega_e^2 \omega}{v_e c^2} \text{ctg}(\pi\gamma_e).$$

Если $|B^{1/3}| a \gg 1$, то в выражении (3.2) на некотором расстоянии от границ остается только два слагаемых:

$$E(x) = \frac{ik}{3x_1 \sin(x_1 a)} \{H(a) \cos(x_1 x) - H(0) \cos[x_1(a-x)]\}. \quad (3.2a)$$

Для $|B^{1/3}| a \ll 3|\text{ctg}(\pi\gamma_e)|$, $x_1 = n\pi/a = q_n$ будет наблюдаться пространственный резонанс. Резонансные частоты определяются формулой

$$\omega = s\omega_e \left(1 - \frac{\Omega_e^2 \omega_e}{V\pi v_e c^2 q_n^2} \right). \quad (3.3)$$

В том случае, когда $|B^{1/3}| a \gg 1$, коэффициенты отражения, прохождения, а также значения $H(0)$ и $H(a)$ определяются выражениями (2.4), (2.5), в которых надо положить $\delta = 0$, $\rho = 1$,

$$\alpha = \frac{-k}{3x_1 \sin(x_1 a)}, \quad \beta = -\frac{k \operatorname{ctg}(x_1 a)}{3x_1} + \frac{k}{3|x_1|}.$$

Поскольку $x_1 \gg k$, можно сделать вывод, что в отсутствие пространственного резонанса $|\alpha|, |\beta| \ll 1$, вследствие чего $R \simeq 1$, $T \simeq 2\alpha$, т. е. волна почти не проходит через плазму. Коэффициент поглощения энергии волны в этом случае

$$W \simeq \frac{4s\pi a (s\omega_e - \omega)}{9c \sin^2(q_1 a)}. \quad (3.4)$$

По мере приближения к пространственному резонансу коэффициент прохождения растет, а коэффициент поглощения имеет вид

$$W = \frac{4d}{(2d+1)^2}, \quad d = \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\omega_e^2 v_e}{\sqrt{\pi} \Omega_e^2 c} \operatorname{ctg}^2(\pi\gamma_e) \right]^{1/3}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим теперь низкочастотные волны, $\omega \leq s\omega_i$ ($s = 1, 2, \dots$), считая дисперсию сильной для ионов и слабой для электронов. Тогда

$$\epsilon_{\pm} = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \pm \frac{\sqrt{\pi} \Omega_i^2}{\omega q v_i} [\operatorname{ctg}(\pi\gamma_i) - i]. \quad (3.6)$$

Если в выражении (3.6) пренебречь величиной Ω_e^2/ω^2 , то для низкочастотных волн имеют место формулы (3.2)–(3.5) с заменой индексов $e \rightarrow i$. Условие, при котором величиной Ω_e^2/ω^2 можно пренебречь, выражается неравенством

$$\left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{3/2} \gg \frac{\Omega_i v_i}{\omega_i c} \frac{s\omega_i - \omega}{\omega_i}. \quad (3.7)$$

Чтобы для электронов дисперсия была слабой, должно выполняться неравенство

$$\frac{s\omega_i - \omega}{\omega_i} \gg \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \frac{v_e^3 \Omega_e^2}{v_i e^2 \omega_e^2}. \quad (3.8)$$

4. ТОНКИЙ СЛОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь низкочастотные волны, тонкий слой плазмы и высокотемпературные ионы, так что выполняется неравенство $\omega a/v_i \ll 1$. Магнитное поле будем считать сильным для электронов и слабым для ионов ($r_i \gg a \gg r_e$). Так как поглощение энергии волны электронами при этих условиях мало, мы пренебрежем им и будем описывать электроны гидродинамически. Равновесная функция распределения $f_{0\alpha}$ (не обязательно максвелловская) имеет вид

$$f_{0\alpha} = n_0 \psi(x) f_1(v^2/v_\alpha^2), \quad \int f_1(v^2/v_\alpha^2) d\mathbf{v} = 1, \quad (4.1)$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция от x , равная нулю при $x < 0$ и $x > a$; $f_1(v^2)$ не имеет особенностей для всех \mathbf{v} и довольно быстро убывает, если $|\mathbf{v}_i| > v_\alpha$ ($i = x, y, z$); $f_1(0) \sim 1$. При этих условиях ток электронов

$$\mathbf{j}_e(x) = i \frac{e^2 n_0}{m_e \omega} \psi(x) E(x). \quad (4.2)$$

Для инов получим, пренебрегая искривлением их траектории в магнитном поле и решая уравнение (1.3) с граничными условиями (1.5) (при этом p — произвольное),

$$j_i(x) = -\frac{e_i^2}{m_i} \int_0^\infty \frac{dv_x}{v_x} \left\{ \frac{p \exp(i\tau x) + \exp(-i\tau x)}{p^2 \exp(i\tau a) - \exp(-i\tau a)} \times \right. \\ \times \left[p \exp(i\tau a) \int_0^a E_z f_0 \exp(-i\tau t) dt + \exp(-i\tau a) \int_0^a E_z f_0 \times \right. \\ \left. \left. \times \exp(i\tau t) dt \right] - 2i \int_0^x E_z f_0 \sin[\tau(x-t)] dt \right\}, \quad (4.3)$$

где $\tau = \omega/v_x$, а f_0 — одномерная по скорости функция.

Рассмотрим отдельно случаи $1-p > \omega a/v_i$ и $p = 1$. Упрощая j_i аналогично [2] и подставляя полученное значение (4.2) в уравнения Максвелла, найдем, что при $1-p > \omega a/v_i$

$$\frac{dH}{dx} = -ike\varepsilon(x)E + \frac{\sigma}{a^2} \int_0^a E(t)\psi(t)dt, \quad (4.4)$$

где

$$\varepsilon(x) = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \psi(x), \quad \sigma = A \frac{p+1}{p-1} \frac{\Omega_i^2 a^2}{v_i c} \ln \frac{\omega a}{v_i},$$

A — число порядка единицы, а поле в плазме определяется из уравнения (1.1).

Принимая во внимание, что $\omega a/c \ll 1$, найдем поле в плазме:

$$E = C_1, \quad H = C_2 - iC_1 \left[i\sigma \frac{x}{a} J + \frac{\Omega_e^2}{c\omega} \int_0^x \psi(t) dt \right], \quad (4.5)$$

где

$$J = \frac{1}{a} \int_0^a \psi(t) dt \sim 1.$$

Постоянные C_1 и C_2 , а также коэффициенты отражения и прохождения определяются из граничных условий (1.4):

$$R = \left(-\sigma + i \frac{a\Omega_e^2}{\omega c} \right) J \left[2 + \left(\sigma - i \frac{a\Omega_e^2}{\omega c} \right) J \right]^{-1}, \quad (4.6)$$

$$T = 2 \left[2 + \left(\sigma - i \frac{a\Omega_e^2}{\omega c} \right) J \right]^{-1}.$$

Коэффициент поглощения энергии волны

$$W = 4\sigma J \left[4 + \left(\frac{a\Omega_e^2}{\omega c} J \right)^2 \right]^{-1}. \quad (4.7)$$

Вследствие того, что $\sigma \ll \Omega_e^2 a / \omega c$, $W \ll 1$.

В случае зеркального отражения найдем

$$H = C_1 + iC_2 \left[\frac{2\Omega_i^2}{c} I + \frac{\Omega_e^2}{\omega c} \int_0^x \psi(t) dt \right], \quad (4.8)$$

где

$$I = \int_0^\infty \frac{dv_x}{v_x} \frac{\Phi(x, v_x)}{\sin(\tau a)},$$

$$\Phi = \frac{\sin(\tau x)}{\tau} \int_0^a f_0(t, v_x) \cos[\tau(a-t)] dt +$$

$$+ \sin(\tau a) \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f_0(t, v_x) \sin[\tau(x-t)] dt$$

(здесь f_0 нормирована на единицу).

Коэффициенты отражения и прохождения при этом принимают вид

$$R = -i \frac{aJ}{\omega c} (\Omega_e^2 + \Omega_i^2) \left[2 + i \frac{aJ}{\omega c} (\Omega_e^2 + \Omega_i^2) \right]^{-1},$$

$$T = 2 \left[2 + i \frac{aJ}{\omega c} (\Omega_e^2 + \Omega_i^2) \right]^{-1}. \quad (4.9)$$

Таким образом, в рассматриваемых случаях коэффициенты отражения и прохождения определяются в основном движением электронов. Коэффициент поглощения энергии волны сильно зависит от характера отражения частиц от границы слоя: для случая диффузного отражения W определяется формулой (4.7), а в случае зеркального — он равен нулю (более точный расчет [1] для однородного слоя показывает, что $W_{p=0} \gg W_{p=1} \sim \omega a/c$).

В заключение выражаем благодарность Я. Б. Файнбергу за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Кондратенко, В. Н. Мирошниченко, ЖТФ, 35, 2155 (1965); 36, 25, (1966).
2. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, 36, 398 (1966).
3. А. Н. Кондратенко, В. Н. Мирошниченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 272 (1966).
4. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 39, 845 (1960).
5. Э. Л. Канер, Ю. А. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 47 (1962).
6. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, 36, 791 (1966).
7. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, Ядерный синтез, 4, 272 (1964)

Поступила в редакцию

14 мая 1966 г.

THE KINETIC THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION
THROUGH A MAGNETOACTIVE PLASMA LAYER*A. N. Kondratenko, I. N. Onishchenko*

The electromagnetic wave propagation through the layer of a plasma being in a constant magnetic field parallel to plasma boundaries is considered. The electric vector of an incident wave is also assumed to be parallel to the magnetic field. The coefficients of reflection, propagation and absorption of the wave energy have been found. The form of the field in plasma has been determined for various particular cases.

УДК 539 285

ДВУХЧАСТОТНОЕ КВАДРУПОЛЬНОЕ СПИНОВОЕ ЭХО

Н. Е. Айнбиндер, В. С. Гречишкин

Рассмотрено поведение спиновой системы ядер со спином $J = 5/2$ под действием двух пар импульсов частоты ω_0 и $2\omega_0$. Показано, что при определенных условиях должны возникать дополнительные и запрещенные эхо. Проведено вычисление амплитуд сигналов эхо и получены значения длительностей импульсов для оптимального обнаружения сигналов эхо.

При изучении квадрупольного спинового эхо в многоуровневых системах обычно применяются одночастотные возбуждения спиновой системы, т. е. последовательность $90^\circ - 180^\circ$ импульсов возбуждает лишь один из возможных переходов [1]. Если спин ядра $J > 3/2$, то можно наблюдать несколько переходов, например, $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$; $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$ и т. д. Для $J = 5/2$ при нулевом параметре асимметрии η возможно поглощение на частотах $\omega_0 = 3eQq_{zz}/20\hbar$ и $2\omega_0 = 3eQq_{zz}/10\hbar$, где eQq_{zz} — константа квадрупольного взаимодействия.

Впервые эксперимент по двухчастотному воздействию на многоуровневую систему импульсов с частотами заполнения ω_0 и $2\omega_0$ (возбуждение переходов $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ и $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$) осуществлен в работе [2].

Настоящая работа посвящена теоретическому анализу механизма образования двухчастотного квадрупольного спинового эхо, при котором возбуждаются одновременно переходы $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ и $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$.

1. ДВУХЧАСТОТНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА СПИНОВУЮ СИСТЕМУ

Пусть спин ядра $J = 5/2$, а параметр асимметрии $\eta = 0$. Гамильтониан квадрупольного взаимодействия записывается в виде

$$\tilde{H}_Q = \frac{eQq_{zz}}{4J(2J-1)\hbar} [3I_z^2 - I^2], \quad (1)$$

где I — оператор механического момента ядра, I_z — оператор проекции механического момента ядра на ось z .

Если система подвергается воздействию радиочастотного поля $H_x = 2H_1[\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t)]$, то в период действия импульсов

$$\tilde{H} = \tilde{H}_Q + \gamma H_x \hbar I_x = \tilde{H}_Q + \tilde{H}_1, \quad (2)$$

если $\tilde{H}_1 \parallel X$.

В нашем случае радиочастотное поле связывает между собой все три состояния $|\pm 1/2\rangle$, $|\pm 3/2\rangle$ и $|\pm 5/2\rangle$, тогда как в одночастотных методах возбуждения нужно учитывать лишь два связанных состояния, а остальные энергетические уровни системы можно не рассматривать.

Поведение спиновой системы может быть описано с помощью уравнения для матрицы плотности ρ :

$$j\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\tilde{H}, \rho]. \quad (3)$$

В период действия импульсов с частотами заполнения ω_0 и $2\omega_0$ и длительностью t_w

$$\rho(t) = \exp\left[-\frac{j}{\hbar}\tilde{H}t\right]\rho(0)\exp\left[\frac{j}{\hbar}\tilde{H}t\right], \quad (4)$$

где

$$\rho(0) = \frac{N}{2J+1}\exp\left(-\frac{\tilde{H}_Q}{kT}\right),$$

N — число резонирующих ядер в образце.

Воспользуемся для конкретных вычислений процедурой, предложенной в работе [1]. Вычислим матрицу поворота R_1 вектора намагничивания:

$$R_1(t) = \exp\left[-(j/\hbar)\tilde{H}_Q t\right]R_1^*(t),$$

$$R_1^*(t) = \exp\left[-(j/\hbar)\int_0^t \tilde{H}_1^*(t') dt'\right], \quad (5)$$

$$\tilde{H}_1^*(t') = \exp[(j/\hbar)\tilde{H}_Q t']\tilde{H}_1(t')\exp[-(j/\hbar)\tilde{H}_Q t].$$

Отсюда получаем, что в конце импульса R_1 равно

	5/2	3/2	1/2	
5/2	$\left(\frac{5}{13}c + \frac{8}{13}\right)A_1$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}jsA_1$	$\frac{2\sqrt{10}}{13}(c-1)A_1$	
3/2	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}jsA_2$	cA_2	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}jsA_2$	(6)
1/2	$\frac{2\sqrt{10}}{13}(c-1)A_3$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}jsA_3$	$\left(\frac{8}{13}c + \frac{5}{13}\right)A_3$	

где

$$A_1 = \exp(-j\omega_{5/2}t_w), \quad A_2 = \exp(-j\omega_{3/2}t_w), \quad A_3 = \exp(-j\omega_{1/2}t_w),$$

$$c = \cos\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\gamma H_1 t_w\right), \quad s = \sin\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\gamma H_1 t_w\right), \quad \gamma - \text{гиромагнитное отношение ядра.}$$

Здесь выписан лишь один блок матрицы R_1 , поскольку все вычисления с половиной матрицы дают результат, отличающийся от действительного на множитель 2.

Матрица D_1 описывает поведение матрицы плотности в промежутке между импульсами:

$$D_1(t) = \exp\left[-(j/\hbar)\tilde{H}_Q(t-t_w)\right],$$

	5/2	3/2	1/2	
5/2	$\exp[-j\omega_{5/2}(t-t_w)]$	0	0	
$D_1 = 3/2$	0	$\exp[-j\omega_{3/2}(t-t_w)]$	0	(7)
1/2	0	0	$\exp[-j\omega_{1/2}(t-t_w)]$	

Сигнал индукции после первого импульса вычисляется из соотношения

$$\langle I_x \rangle = \frac{N}{3} \text{Sp} \left(-\frac{3P\hbar}{kT} S_1 I_z^2 S_1^{-1} I_x \right), \quad (8)$$

где

$$S_1 = D_1 R_1, \quad \rho(t) = S_1 \rho(0) S_1^{-1}, \quad P = eQq_{zz}/40 \hbar.$$

В дальнейшем мы все результаты представляем в единицах $A^* = -NP\hbar/kT$.

После соответствующих вычислений получим для сигнала индукции

$$T = \frac{16}{13\sqrt{13}} (2 \sin \alpha \cos \alpha - 15 \sin \alpha) \sin(\omega_0 t) + \quad (9)$$

$$+ \frac{20}{13\sqrt{13}} (-\sin \alpha \cos \alpha - 12 \sin \alpha) \sin(2\omega_0 t),$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2} \gamma H_1 t_w$. Из этого соотношения видно, что максимальная

амплитуда индукции на частотах ω_0 и $2\omega_0$ достижима при разных длительностях импульсов, действующих одновременно на спиновую систему. Так, на частоте ω_0 максимум индукции достигается при $\gamma H_1 t_w = 54^\circ 07'$, а на частоте $2\omega_0$ при $\gamma H_1 t_w = 47^\circ 24'$. Причем начальные амплитуды индукции после окончания действия импульсов практически одинаковы.

При двухчастотном возбуждении оптимальная амплитуда индукции наблюдается при совершенно другом угле поворота вектора ядерного намагничивания, чем при одночастотном. Это связано со сложной зависи-

мостью амплитуды от $\frac{\sqrt{13}}{2} \gamma H_1 t_w$. Двухчастотное возбуждение изменя-

ет и угловую скорость поворота вектора намагничивания в период импульса. В одночастотном методе угловая скорость для перехода

$\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2 - \frac{\sqrt{8}}{2} \gamma H_1$, а для перехода $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \gamma H_1$ [1].

В нашем случае для обоих переходов угловая скорость поворота равна $\frac{\sqrt{13}}{2} \gamma H_1$.

Рассмотрим теперь механизм возникновения эхо при двухчастотном возбуждении.

2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ЭХО ПРИ МНОГОЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Пусть теперь после одновременного действия первых двух импульсов длительностью t_w на спиновую систему через время τ действуют также одновременно импульсы длительностью t_w' и с частотами заполнения ω_0 и $2\omega_0$. В этом случае поведение матрицы плотности после действия вторых импульсов будет описываться унитарной матрицей $S_{II} = D_2 R_2 D_1 R_1$, $\rho(t) = S_{II} \rho(0) S_{II}^{-1}$.

Тогда

$$\langle I_x \rangle = A^* \text{Sp} \{ S_{II} I_z^2 S_{II}^{-1} I_x \}. \quad (10)$$

Отсюда получаем сигналы после двух импульсов, включающие как индукцию, так и эхо.

Сигналы индукции записываются в виде

$$\begin{aligned} T(2\omega_0) &= \sqrt{5} j (Aa'b' - Db'd' + Ef'c') \sin [2\omega_0(t - \tau)], \\ T(\omega_0) &= \sqrt{8} j (-Ac'b' + Df'd' - Ee'f') \sin [\omega_0(t - \tau)], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$A = \frac{25}{4} a^2 - \frac{9}{4} b^2 + \frac{1}{4} c^2, \quad D = -\frac{25}{4} b^2 + \frac{9}{4} d^2 - \frac{1}{4} f^2,$$

$$E = \frac{25}{4} c^2 - \frac{9}{4} f^2 + \frac{1}{4} e^2, \quad a = \frac{5}{13} \cos \alpha + \frac{8}{13},$$

$$b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} j \sin \alpha, \quad c = \frac{2\sqrt{10}}{13} (\cos \alpha - 1), \quad d = \cos \alpha,$$

$$f = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}} j \sin \alpha, \quad e = \frac{8}{13} \cos \alpha + \frac{5}{13}, \quad a', b', c'$$

и т. д. получаются из a, b, c, \dots путем замены в $\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2} \gamma H_1 t_w$ величины t_w на t'_w .

Однако основной интерес представляют сигналы эхо:

$$\begin{aligned} E(2\omega_0) &= \sqrt{5} j \left\{ -Bb'^2 \sin [2\omega_0(t - 2\tau)] + Fd'c' \times \right. \\ &\times \sin 2\omega_0 \left[\left(t - \frac{3}{2} \tau \right) \right] + Cc'b' \sin \left[2\omega_0 \left(t - \frac{5}{2} \tau \right) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E(\omega_0) &= \sqrt{8} j \{ -Ff'^2 \sin [\omega_0(t - 2\tau)] + Bc'd' \sin [\omega_0(t - 3\tau)] - \\ &- Cc'f' \sin [\omega_0(t - 4\tau)] \}, \end{aligned}$$

где

$$B = -\frac{25}{4} ab + \frac{9}{4} bd - \frac{1}{4} cf, \quad C = \frac{25}{4} ac - \frac{9}{4} fb + \frac{1}{4} ce.$$

Из выражений (12) видно, что в отличие от случая одночастотного воздействия, кроме сигнала эхо при $t = 2\tau$, возникают еще дополнительные эхо при $t = 3\tau$; $t = 4\tau$ (на частоте ω_0) и $t = 3\tau/2$; $t = 5\tau/2$ (на частоте $2\omega_0$). Сигналы эхо при $t = 4\tau$ и $t = 5\tau/2$ будем называть запрещенными, так как они связаны с переходом спинов из состояний $|\pm 1/2\rangle$ в состояния $|\pm 5/2\rangle$. При возбуждении радиочастотным полем этот переход запрещен.

Максимум сигналов основных эхо для обоих переходов получается при $\gamma H_1 t'_w = 50^\circ$:

$$\begin{aligned} E_{2\tau}(2\omega_0) &= 0,164 (\sin \sigma \cos \alpha + 12 \sin \alpha) \times \\ &\times \sin^3 \alpha' \sin [2\omega_0(t - 2\tau)], \\ E_{2\tau}(\omega_0) &= -0,21 (2 \sin \alpha \cos \alpha - 15 \sin \alpha) \times \\ &\times \sin^2 \alpha' \sin \omega_0(t - 2\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, двухчастотное возбуждение в отличие от одночастотного изменяет механизм образования эхо. В этом случае первый

импульс должен быть $97^{\circ}25'$ ($\sqrt{13} \gamma H_1 t_w / 2 = 97^{\circ}25'$), а второй 90° ($\sqrt{13} \gamma H_1 t_w' / 2 = 90^{\circ}$). В одночастотных же методах длительность второго импульса всегда в 2 раза больше. Такой импульс называют ста-восьмидесятиградусным.

Между тем для дополнительных эхо максимум наблюдается при $\gamma H_1 t_w' = 33^{\circ}20'$:

$$\begin{aligned} E_{3\tau}(\omega_0) &= 0,262 (\sin \alpha \cos \alpha + 12 \sin \alpha) \times \\ &\times (\cos \alpha' - 1) \cos \alpha' \sin [\omega_0(t - 3\tau)], \\ E_{3/2\tau}(2\omega_0) &= -0,131 (2 \sin \alpha \cos \alpha - 15 \sin \alpha) \times \\ &\times (\cos \alpha' - 1) \cos \alpha' \sin [2\omega_0(t - 3\tau/2)], \end{aligned} \quad (14)$$

где $\alpha' = \sqrt{13} \gamma H_1 t_w' / 2^*$. Запрещенные эхо при $t=4\tau$ и $t=5\tau/2$ возникают за счет каскадного перехода спинов через промежуточный уровень $|\pm 3/2\rangle$. Максимум этих эхо получается при $\gamma H_1 t_w' = 60^{\circ}30'$.

Таким образом, для наблюдения основных и дополнительных эхо требуется выбирать различную длительность первых и вторых импульсов. В частности, если $\alpha' = \pi/2$, т. е. наблюдается максимум сигнала эхо при $t = 2\tau$, то эхо при $t = 3\tau$ и $t = 3\tau/2$ вообще не наблюдается. Для наблюдения этих эхо необходимо, чтобы $\alpha' = \pi/3$ или π . Если $\gamma H_1 t_w = 54^{\circ}07'$, а $\alpha' = \pi/2$, то $E_{2\tau}(\omega_0)/E_{2\tau}(2\omega_0) = 1,6$, т. е. фаза основных эхо для обоих переходов одинакова. С другой стороны при $\gamma H_1 t_w = 54^{\circ}07'$ и $\alpha' = \pi/3$ $E_{3\tau}(\omega_0)/E_{2\tau}(\omega_0) = -0,33$. При этих же условиях $E_{3\tau/2}(2\omega_0)/E_{2\tau}(2\omega_0) = -0,33$.

Наблюдение двухчастотного эхо возможно при условии $\sqrt{13} \gamma H_1 t_w / 2 = \pi/2$, $\sqrt{13} \gamma H_1 t_w' / 2 = \pi/3$, т. е. когда второй импульс короче первого для обоих переходов.

Запрещенный переход $|\pm 1/2\rangle \rightarrow |\pm 5/2\rangle$ становится разрешенным, если параметр асимметрии отличен от нуля. Однако вероятность этого перехода обычно незначительна при малых отклонениях от цилиндрической симметрии. При больших же γ будет происходить нарушение комбинаций частот, и дополнительные эхо будут наблюдаться при

$$t = \frac{(3/2 + 37 \gamma^2/108) \tau}{1 - 11 \gamma^2/54} \quad \text{и} \quad t = \frac{(3 + 37 \gamma^2/54) \tau}{1 + 59 \gamma^2/54}.$$

Основное же эхо остается при $t = 2\tau$.

Отметим, что запрещенные эхо имеют отличную от нуля амплитуду и при $\alpha' = \pi/2$.

Изучение дополнительных и запрещенных эхо представляет значительный интерес, в частности, для исследования внутреннего поля кристаллов. Этот метод позволяет фиксировать небольшие отклонения симметрии электрического поля от цилиндрической**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Р. Das, А. К. Saha, Phys. Rev., 98, 516 (1955).
2. В. С. Гречишкин, А. Д. Гордеев, Н. Е. Айнбиндер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 507 (1966).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
28 мая 1966 г.

* При $\sqrt{13} \gamma H_1 t_w / 2 = \pi$ появляется второй максимум дополнительных эхо.

** Посвященное этому сообщение будет опубликовано нами отдельно.

TWO-FREQUENCY QUADRUPOLE SPIN ECHO

N. E. Ainbinder, V. S. Grechishkin

Spin system behaviour with a spin of $J = 5/2$ under the influence of two pairs of the frequency pulses ω_0 and $2\omega_0$ is considered. It is shown that under the definite conditions there appeared the additional and forbidden echos. The calculation of the amplitudes of the echo signals is made and the values of pulse durations for the optimal discovery of the echo signals are obtained.

УДК 530.145

**К ВОПРОСУ ОБ n -УРОВНЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ
ПРИ РАСЧЕТЕ ВОСПРИИМЧИВОСТЕЙ**

В. Н. Генкин, П. М. Меднис

Рассмотрен вопрос о канонических преобразованиях, позволяющих найти линейные и нелинейные восприимчивости системы в приближении n -уровней. На примере поляризации и тока в дипольном приближении оценен вклад в восприимчивости высоко расположенных уровней

Поведение квантовых систем в заданном поле (проводимость, восприимчивость линейная и нелинейная и т. п.) часто описывают, учитывая лишь заселенные и ближайшие к ним уровни или зоны. Основой такого подхода служит представление, что учет верхних незаселенных уровней (зон) приводит к поправкам ω^*/ω_s , где ω^* — характерная частота задачи, а $\hbar\omega_s$ — энергетический интервал между верхним из заселенных и нижним из отброшенных уровней. Легко видеть из рассмотренных ниже примеров, что это, вообще говоря, не так.

В самом деле, для случая атома в электромагнитном поле имеем

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t), \tag{1}$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан атома в отсутствие поля, далее его собственные состояния нумеруются индексом n , $\hat{V}(t)$ — оператор взаимодействия с полем, равный в дипольном приближении $\frac{-e \hat{p} \hat{A}(t)}{mc}$, где, в свою

очередь, \hat{p} — оператор импульса электронов системы, e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света и, наконец, $\hat{A}(t)$ — вектор-потенциал.

Выражение для восприимчивости, связывающей поляризацию в направлении \mathbf{a} с гармоническим полем частоты ω , параллельным \mathbf{b} , имеет вид [1]

$$\chi_{ab}(\omega) = \frac{e^2}{\hbar\omega} \sum_{nn'} (\rho_n - \rho_{n'}) \frac{\omega_{nn'} x_{nn'}^b x_{n'n}^a}{\omega - \omega_{nn'}}. \tag{2}$$

Здесь $\omega_{nn'}$ — частота перехода между состояниями n, n' ; $x_{nn'}^a$ — матричный элемент проекции координаты на направление \mathbf{a} и, наконец, ρ_n — диагональные элементы матрицы плотности*. Очевидно, (2) не содержит малого параметра $\omega_{nn'}^{-1}$ и ограничение несколькими уровнями приводит к неверным результатам. Так, при нуле температур и учете 2-х уровней

$$\chi_{aa}(\omega) = e^2 \omega_{12} |x_{12}|^2 / \hbar (\omega^2 - \omega_{12}^2), \tag{3}$$

* Матрица плотности предполагается диагональной и стационарной.

что, как мы увидим ниже (сравни с (10)), в $|\omega/\omega_{12}|$ раз отличается от точного значения. Неверными в том же порядке оказываются и выражения для нелинейных восприимчивостей.

Аналогичная ситуация имеет место при вычислении проводимости σ блоховского электрона (собственные функции \hat{H}_0 есть $\psi_{nk}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) u_{nk}(\mathbf{r})$, соответствующие собственные значения $\varepsilon_n(\mathbf{k})$, где n — номер зоны, $\hbar\mathbf{k}$ — квазиимпульс). Как известно [2],

$$\sigma_{ab}(\omega) = -\frac{ie^2}{\hbar m^2 \omega V} \sum_{nn'} (\rho_n(\mathbf{k}) - \rho_{n'}(\mathbf{k})) \frac{p_{nn'}^b(\mathbf{k}) p_{n'n}^a(\mathbf{k})}{\omega - \omega_{nn'}(\mathbf{k})} + \frac{ie^2}{m\omega V} \delta_{ab}, \quad (4)$$

где V — нормировочный объем. Сумма в (4) опять не содержит малого параметра, так как [3]

$$p_{nn'}(\mathbf{k}) = \frac{m}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \delta_{nn'} - m\omega_{nn'}(\mathbf{k}) \Omega_n'(\mathbf{k}), \quad (5)$$

а $\Omega_n'(\mathbf{k}) = \int_{\text{по ячейке}} u_{nk}^*(\mathbf{r}) \frac{\partial u_{nk}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{k}} d^3\mathbf{r}$ — величина порядка постоянной решетки a .

Ограничение одной зоной в (4) соответствует результату, справедливому лишь для свободного, но не блоховского (сравни с (8)) электрона.

Однако в выражениях типа (2) и (4) малый параметр может быть выделен путем выбора подходящего канонического преобразования. Действительно, рассмотрим преобразование вида*

$$\hat{U} = \exp[-i\hat{S}/\hbar], \quad (6)$$

где \hat{S} для невырожденных собственных значений определяется матрицей

$$S_{nn'} = \begin{cases} -V_{nn'}/i\omega_{nn'} & \text{при } n \neq n' \\ 0 & \text{при } n = n' \end{cases}. \quad (7)$$

Полагая далее $\hat{V}(t) = \sum_{bl} \hat{V}^b f_l^b \exp[-i\omega_l t]$ и применяя преобразование (6) к гамильтониану (1), найдем, например, выражение для линейной восприимчивости $\chi_{ab}(\omega_l)$, определяющей среднее значение оператора \hat{O}^a под действием силы $f_l^b \exp[-i\omega_l t]$:

$$\chi_{ab}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \sum_{nn'} (\rho_n - \rho_{n'}) \frac{\omega_l O_{nn'}^a V_{n'n}^b}{\omega_{nn'}(\omega_l - \omega_{n'n})} + \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{O}^a, \hat{S}^b] \rangle. \quad (8)$$

Таким образом, восприимчивость после преобразования с помощью оператора (6) удастся представить в виде суммы типа (2), но содержащей дополнительную степень $\omega_{nn'}^{-1}$ по сравнению с исходным представлением и среднее по равновесной матрице плотности от $[\hat{O}^a, \hat{S}^b]$. Повторное преобразование такого типа $S_1 = \omega_l S_{nn'}/\omega_{nn'}$ приводит в выражении (8) к появлению под знаком суммы в первом члене квадрата

* Такое преобразование использовал Фрелих при описании сверхпроводимости [4].

малого параметра и замене \hat{S}^b во втором члене на $\hat{S}^b + \hat{S}_1^b$. Продолжая эту процедуру, можно в сумме типа первого члена (8) получить необходимую степень малого параметра, и в тех случаях, когда при этом второй член соответствующего выражения известен точно, вычисление восприимчивости в n -уровневом приближении оказывается вполне корректным.

Так, для первого из рассмотренных выше примеров провести n -уровневое приближение оказывается возможным уже после однократного преобразования (6), которое, кстати, соответствует выбору энергии взаимодействия в виде $-e \sum_b \hat{x}^b E^b(t)$, где $E^b(t)$ — компоненты электрического поля. Выражение для χ_{ab} в этом случае (2-ое слагаемое (8) тождественно обращается в нуль) принимает вид

$$\chi_{ab}(\omega) = \frac{e^2}{\hbar} \sum_{nn'} (\rho_n - \rho_{n'}) \frac{x_{nn'}^b x_{n'n}^a}{\omega - \omega_{nn'}}. \quad (9)$$

Теперь легко получить, что ошибка (Δ) при учете только n нижних состояний в (9) в случае, когда заселены первые l ($l < n$) уровней*,

$$\Delta \ll \frac{\langle (x^a)^2 \rangle + \langle (x^b)^2 \rangle}{\omega_{n+1, l}} \frac{e^2}{\hbar}. \quad (9a)$$

В двухуровневом приближении, в частности, имеем вместо (3)

$$\chi_{aa}(\omega) = e^2 \omega |x_{12}^a|^2 / \hbar (\omega^2 - \omega_{12}^2), \quad (10)$$

причем относительная ошибка (δ)

$$\delta \ll \frac{\langle (x^a)^2 \rangle}{|x_{12}^a|^2} \left| \frac{\omega_{21} - \omega}{\omega_{31} - \omega} \right| \quad (11)$$

в подходящей ситуации (третий уровень лежит достаточно далеко) оказывается малой.

Уместно отметить, что в резонансной ситуации, когда роль характерной частоты играет ширина уровня, много меньшая всех частот поля и системы, приближение двух уровней оказывается вполне корректным и в исходном представлении. Выражения (3) и (10) в этом случае, естественно, совпадают.

Более существенное значение имеет затронутый вопрос при рассмотрении нелинейных восприимчивостей**, где нерезонансные, хотя бы по одному из полей, ситуации встречаются уже как правило. В рассматриваемом примере после однократного преобразования удается явно

* Для примера выпишем подробно цепочку неравенств, из которой следует оценка (9) отброшенных членов ряда.

$$\begin{aligned} \Delta &\ll 2 \left| \sum_{k=1}^l \rho_k \sum_{k'=n+1}^{\infty} \frac{x_{kk'}^b x_{k'k}^a}{\omega - \omega_{kk'}} \right| \ll 2 \sum_{k=1}^l \rho_k \sum_{k'=n+1}^{\infty} \frac{|x_{kk'}^b x_{k'k}^a|}{|\omega - \omega_{kk'}|} < \\ &< \frac{2}{\omega_{n+1, l}} \sum_{k=1}^l \rho_k \sum_{k'=1}^{\infty} |x_{kk'}^b x_{k'k}^a| \ll \frac{2}{\omega_{n+1, l}} \sum_{k=1}^l \rho_k \times \\ &\times \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{|x_{kk'}^b|^2 + |x_{kk'}^a|^2}{2} = \frac{\langle (x^a)^2 \rangle + \langle (x^b)^2 \rangle}{\omega_{n+1, l}}. \end{aligned}$$

** Идеализация 1 промежуточного уровня при двухквантовом поглощении рассмотрена в [6].

выделить малый параметр. Выписывая выражение для восприимчивости m -го порядка (после однократного преобразования), можно убедиться, что ограничение нижними уровнями приводит к относительной ошибке δ_m порядка

$$\delta_m \sim \sum_l \rho_l \left\{ \sum_{k_1} \frac{|x_{lk_1} x_{k_1 l}|}{x^2} \frac{\omega^*}{\omega_s} C_m^1 + \sum_{k_1, k_2} \frac{|x_{lk_1} x_{k_1 k_2} x_{k_2 l}|}{x^3} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\omega^*}{\omega_s} \right)^2 C_m^2 + \dots + \sum_{k_1 \dots k_m} \frac{|x_{lk_1} x_{k_1 k_2} \dots x_{k_m l}|}{x^m} \left(\frac{\omega^*}{\omega_s} \right)^m C_m^m \right\}. \quad (12)$$

Здесь x — характерное значение матричного элемента координаты в приближенном (при учете n уровней) выражении для χ_m ; C_m^l — число сочетаний. Не останавливаясь подробно на обсуждении (12), отметим, что чем более высокого порядка m восприимчивостью мы интересуемся, тем существеннее оказывается вклад высоко расположенных уровней. Следует еще указать, что точность резонансных по m' частотам слагаемых в восприимчивости при учете n уровней оказывается порядка $\delta_{m-m'}$ ($m > m'$). Так, в частности, если иметь в виду часть χ_{abc} , резонансную по одному из полей, то ошибка при ограничении n уровнями будет порядка (9а).

Таким образом, рассмотренный пример позволяет сделать вывод, что учет только нижних уровней при нахождении поляризации оказывается вполне корректным (в дипольном приближении) после канонического преобразования, приводящего взаимодействие к виду $-e \sum_a \hat{x}^a E^a(t)$.

В случае, когда речь идет о связи между плотностью тока и электрическим полем, т. е. о проводимости, однократное применение преобразования (6) еще не позволяет получить правильные результаты в приближении n уровней. Достаточным, однако, оказывается двукратное преобразование, причем матрица \hat{S}_1 имеет вид

$$S_{1nn'}(\mathbf{k}) = \begin{cases} e\Omega_n'(\mathbf{k}) E(t)/\omega_{nn'}(\mathbf{k}) & \text{при } n \neq n' \\ 0 & \text{при } n = n' \end{cases}. \quad (13)$$

В этом случае вместо (4) получим для $\sigma_{ab}(\omega)$

$$\sigma_{ab}(\omega) = \frac{ie^2}{V\hbar^2\omega} \sum_{nk} \rho_n(\mathbf{k}) \frac{\partial^2 \epsilon_n(\mathbf{k})}{\partial k^a \partial k^b} + \frac{ie^2}{V\hbar} \sum_{nk} \rho_n(\mathbf{k}) \left(\frac{\partial \Omega_n^{an'}(\mathbf{k})}{\partial k^b} - \frac{\partial \Omega_n^{bn'}(\mathbf{k})}{\partial k^a} \right) - \\ - \frac{ie^2\omega}{V\hbar} \sum_{n, n' \neq n, k} \rho_n(\mathbf{k}) \left(\frac{\Omega_n^{an'}(\mathbf{k}) \Omega_n^{bn'}(\mathbf{k})}{\omega_{nn'}(\mathbf{k}) + \omega} - \frac{\Omega_n^{bn'}(\mathbf{k}) \Omega_n^{an'}(\mathbf{k})}{\omega_{n'n}(\mathbf{k}) + \omega} \right), \quad (14)$$

т. е. проводимость оказывается выраженной через характеристики заселенных зон и ряд, содержащий в явном виде малый параметр. Теперь с помощью (14) легко обосновать переход к обычному однозонному приближению. Действительно, если заселена только нижняя зона, то вклад в проводимость верхних зон определяется лишь последней суммой в (14), отбрасывание которой приводит к ошибке порядка

$$\delta \sim \left| \frac{\hbar\omega^2}{\omega_{12}} \frac{\langle |\Omega^a|^2 \rangle + \langle |\Omega^b|^2 \rangle}{\partial^2 \epsilon_1(\mathbf{k}) / \partial k^a \partial k^b} \right| \sim \frac{\omega}{\omega_{12}} \frac{\omega}{\Delta\omega_{\text{зоны}}}, \quad (15)$$

стремящейся к нулю вместе с ω ($\Delta\omega_{\text{зоны}}$ — частота, соответствующая ширине зоны). Таким образом, применение двукратного преобразования (6) позволило учесть вклад всех зон в нулевом порядке по ω_{nn}^{-1} , минуя правило сумм. Заметим, что именно влияние всех зон, учтенное в нулевом порядке, приводит к сложному закону дисперсии блоховского электрона.

В случае учета нескольких зон, ближайших к заселенной, точность получаемого из (14) выражения для проводимости определяется величиной (9а), если заменить в (9а) $\hat{\chi}^a$ на $\hat{\Omega}^a$.

Второе слагаемое (14), отличающее полученное выражение для проводимости от обычно используемого [3], даже если пренебречь всеми зонами, кроме первой, обращается в нуль в важнейшем случае симметричного распределения по k невозмущенной матрицы плотности. Следует сказать, что появление этого слагаемого связано с чисто квантовым эффектом (конечной шириной зоны проводимости) и, если рассматривать состояния с определенным k ($\rho_n(k) \sim \delta(k - k_0)$), то поправка, связанная с этим слагаемым, оказывается по величине порядка $\omega/\Delta\omega_{\text{зоны}}$. Что касается нелинейных проводимостей разных порядков, то и они при указанном двукратном преобразовании выражаются через характеристики заселенной зоны и суммы, содержащие малый параметр. Не выписывая соответствующие выражения из-за их громоздкости, отметим только, что в отличие от [5] нелинейность получается уже в приближении одной зоны. Такой результат связан, прежде всего, с неквадратичным законом дисперсии, приводящим к нелинейным уравнениям движения блоховского электрона (см. [3]). Кроме того, как и в линейном случае, определенный вклад в проводимости связан с чисто квантовыми эффектами в пределах одной зоны (соответствующие слагаемые в выражении для проводимостей содержат производные оператора $\hat{\Omega}_n(k)$ по квазимпульсу). Подробно вопросы, относящиеся к линейным и нелинейным проводимостям металла, будут рассмотрены в другом месте. В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить В. М. Файна за внимание к работе и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, Я. Н. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
2. P. N. Butcher, T. P. McLean, Proc. Phys. Soc., **81**, 219 (1963).
3. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН, **69**, 419 (1959).
4. H. Frölich, Proc. Roy. Soc., A-215, 291 (1952).
5. P. L. Kelley, J. Phys. Chem. Solids, **24**, 1113 (1963).
6. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, **50**, 1685 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 мая 1966 г.

ON THE PROBLEM OF n -LEVEL APPROXIMATION WHEN CALCULATING SUSCEPTIBILITY

V. N. Genkin, P. M. Mednis

Considers canonical transformations permitting to find the linear and nonlinear susceptibilities of a system in the approximation of n -levels. It is estimated by the example of polarization and current in the dipole approximation what portion in susceptibilities is added by high levels.

УДК 621.378.325

К ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЛАЗЕРЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ДИФФУЗИИ

Е. С. Коваленко

Решается система уравнений Максвелла и уравнений для матрицы плотности с учетом эффектов диффузии. Показано, что диффузия не может привести к качественным изменениям в характере распределения поля. Проведены оценки, определяющие пространственный спектр нелинейных мод с учетом диффузии. Известные уравнения одномерной модели лазера получаются как предельные случаи очень большой и очень малой диффузии.

Известно, что разность населенностей рабочих уровней оптических квантовых генераторов содержит осциллирующую составляющую с пространственным периодом $\lambda/2$. В большинстве работ этой составляющей пренебрегается. Однако в [1, 2] показано, что учет подобных членов при расчете стационарных колебаний системы приводит к значительным изменениям в характере распределения поля.

При рассмотрении изменения разности населенностей в пределах столь малого расстояния, как оптическая длина волны λ , могут оказаться существенными эффекты диффузии. Если в данной области пространства имеет место насыщение линии, то вследствие диполь-дипольного взаимодействия оно будет диффундировать в соседние области. Хотя время, в течение которого происходит диффузия на расстояние порядка λ , намного больше времени поперечной релаксации T_2 , оно сравнимо или даже меньше времени продольной релаксации T_1 . В этих условиях пространственные осцилляции населенностей будут уменьшены, либо совсем подавлены.

Влияние диффузии на ширину спектра излучения лазера рассматривалось в [3, 4]. Эти расчеты проведены на основе уравнений баланса для случая малых накачек, в приближении, когда каждому из временных типов колебаний поставлена в соответствие одна из пространственных мод невозмущенного резонатора. Представляет интерес установить характер пространственного распределения поля отдельных составляющих спектра при наличии диффузии и оценить ее влияние на основные характеристики выходного излучения.

1. Общие уравнения, описывающие колебания в лазере, включают систему уравнений Максвелла и уравнения для элементов матрицы плотности. Ограничимся рассмотрением стационарного поля, зависящего от единственной безразмерной координаты $x = kz$, где $k = 2\pi/\lambda$. Введем вместо амплитуды поля H , разности населенностей N и коэффициента диффузии D безразмерные величины

$$F = \beta H, \quad n = N/N_0, \quad \xi = DT_1 k^2,$$

где $\beta^2 = 4T_1 T_2 |\mu|^2 / \hbar^2 (1 + T_2^2 \Delta\omega^2)$, N_0 — стационарная разность населенностей в отсутствие поля, μ — магнитный дипольный момент вещества. Тогда система уравнений, подлежащая решению, примет вид

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + F - igF = -i\alpha F n, \quad (1)$$

$$n(1 + FF^*) = 1 + \xi \frac{d^2 n}{dx^2}. \quad (2)$$

Здесь параметр g пропорционален потерям в кристалле и $\alpha = 4\pi T_2 \mu \times \times N_0 / \hbar (1 + iT_2 \Delta\omega)$.

Последний член в уравнении (2) учитывает диффузию. Рассматривая в качестве примера рубин с концентрацией Cr_2O_3 в 0,05%, можно оценить пределы изменения $\xi = 0,6 \div 60$. Такой широкий интервал обусловлен в основном изменениями ширины линии, которая в зависимости от температуры и качества кристалла колеблется в пределах $0,1 \div 10 \text{ см}^{-1}$. В общем случае диапазон ξ , конечно, шире, но можно ожидать, что для большинства лазеров $10^{-2} < \xi < 10^2$. Очевидно, в этих условиях диффузионный член в (2) может стать существенным.

Решение (1), (2) отыскиваем в виде

$$F = C_1(x) e^{-ix} + C_2(x) e^{ix},$$

$$n = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(x) \cos p(2x + \varphi_2 - \varphi_1), \quad (3)$$

$$C_{1,2} = |C_{1,2}| e^{i\varphi_{1,2}},$$

где $C_{1,2}$, A_p — медленно меняющиеся функции x . Подставляя (3) в (1), (2), для определения $C_{1,2}$ и A_p получим систему уравнений

$$2 \frac{dC_{1,2}}{dx} = \mp g C_{1,2} \pm \alpha C_{1,2} \pm \frac{\alpha}{2} A_1 C_{1,2} |C_{2,1}| / |C_{1,2}|; \quad (4)$$

$$\gamma A_0 + \frac{\delta}{2} A_1 = 1,$$

$$4\xi A_1 + \gamma A_1 + \frac{\delta}{2} [2A_0 + A_2] = 0, \quad (5)$$

$$4p^2 \xi A_p + \gamma A_p + \frac{\delta}{2} [A_{p+1} + A_{p-1}] = 0,$$

$$p = 2, 3, \dots$$

где

$$\gamma = 1 + |C_1|^2 + |C_2|^2, \quad \delta = 2 |C_1| |C_2|.$$

Как видно, расчет $C_{1,2}$ связан с решением бесконечной системы уравнений (5). В общем случае результат записывается с помощью цепной дроби

$$A_0 = 1/(\gamma - 2F_1), \quad (6)$$

$$A'_1 = -F_1/(\gamma - 2F_1) t,$$

где

$$F_1 = t \{4\xi + \gamma - t [4 \cdot 2^2 \xi + \gamma - t(4 \cdot 3^2 \xi + \gamma - \dots)^{-1}]^{-1}\}^{-1} \quad (7)$$

и $t = \delta^2/4$, $A_1 = 2A'_1 |C_1| |C_2|$.

В случае малых и больших ξ решение (5) может быть найдено в виде ряда по ξ и $1/\xi$ соответственно. Пусть $\xi \ll 1$. Тогда

$$A_0 = (\gamma^2 - \delta^2)^{-1/2} - 2\gamma\delta^2\xi(\gamma^2 - \delta^2)^{-5/2} + \dots, \quad (8)$$

$$A_1 = \frac{2}{\delta} [(\gamma^2 - \delta^2)^{1/2} - \gamma] (\gamma^2 - \delta^2)^{-1/2} + 4\gamma^2\delta\xi(\gamma^2 - \delta^2)^{-5/2} + \dots$$

Наоборот, в случае $\xi \gg 1$

$$A_0 = \frac{1}{\gamma} + \delta^2/8\gamma^2\xi + \dots, \quad (9)$$

$$A_1 = \delta/4\gamma\xi + \dots$$

Известные уравнения одномерной модели лазера соответствуют предельным случаям очень большой и очень малой диффузии. Так, соотношения (8) после подстановки в (4) при $\xi = 0$ дают уравнения для $C_{1,2}$, приведенные в [1], а подстановка (9) в (4) при $\xi \rightarrow \infty$ приводит к уравнениям переноса [5].

Удобно от переменных $|C_{1,2}|$ перейти к переменным $m_{1,2} = |C_{1,2}|^2$. Тогда вместо (4) получим

$$\frac{dm_1}{dx} = m_1[-g + \operatorname{Re} \alpha(A_0 + A'_1 m_2)], \quad (10)$$

$$\frac{dm_2}{dx} = m_2[g - \operatorname{Re} \alpha(A_0 + A'_1 m_1)].$$

2. Используя (6), (7), проведем качественный анализ решения (10). Особыми точками системы являются точки $A(m_1 = 0, m_2 = 0)$, $B(m_1 = m_2 = m_0)$, $C\left(m_1 = 0, m_2 = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} - 1\right)$, $D\left(m_1 = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} - 1, m_2 = 0\right)$. Здесь m_0 определяется из уравнения

$$m_0 + \frac{0,5 m_0}{1 - F_1/m_0} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g}.$$

Так как $F_1/m_0 < 1$, то $m_0 < \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g}$.

Перечисленные особые точки те же, что и в отсутствие диффузии. Изменяется лишь положение точки B .

Как следует из (10), если существуют особые точки помимо этих четырех, то они должны определяться системой уравнений

$$g - \operatorname{Re} \alpha A_0 = 0, \quad (11)$$

$$A'_1 = 0.$$

Покажем, что выполнение второго соотношения в (11) невозможно. Для доказательства рассмотрим систему функций F_N , определяемых рекуррентной формулой

$$F_N = t/(4N^2\xi + \gamma - F_{N+1}) \quad (N \geq 1). \quad (12)$$

Очевидно, любая из F_N может быть представлена в виде цепной дроби, причем при $N = 1$ получим дробь, совпадающую с введенной ранее величиной F_1 . Функции F_N связаны с решением системы (5) соотношением

$$F_N = t \left(1 + \frac{A_{N+1}}{A_{N-1}} \right) [(4N^2\xi + \gamma)]^{-1}. \quad (13)$$

Из (13) прежде всего следует, что при $\xi \neq 0$ выбором достаточно большого N величина F_N может быть сделана сколь угодно малой. Если $\xi = 0$, то все F равны и из (12) находим, что F принимает одно из двух значений:

$$F = \frac{1}{2} (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4t}).$$

В любом случае $F \leq \gamma$. Итак, при достаточно большом N имеют место неравенства

$$F_{N+s} \leq \gamma \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Далее, если (14) имеет место, начиная с F_{N+1} , то оно выполняется для всех F_k . Действительно, последовательно используя (14), из (12) находим

$$F_N < [t(\gamma - F_{N+1})^{-1}] = t\{\gamma - t[4(N+1)^2\xi + \gamma - F_{N+2}]^{-1}\}^{-1} < < t[\gamma - t(\gamma - F_{N+2})^{-1}]^{-1}.$$

Продолжая эти оценки дальше, получим

$$F_N < t(\gamma - t/\gamma - \dots)^{-1} = \frac{1}{2} [\gamma \pm (\gamma^2 - 4t)^{1/2}] < \gamma.$$

Отсюда по индукции заключаем, что $F_N < \gamma$ для всех N .

Второе соотношение в (11) эквивалентно уравнению

$$16\xi + \gamma - F_3 = 0.$$

Так как $F_3 < \gamma$, то выполнение (11) невозможно.

Итак, система (10) при наличии диффузии имеет столько же особых точек, как и при $\xi = 0$. Для установления характера особых точек необходимо рассмотреть поведение фазовых траекторий в окрестности этих точек. Полагая

$$m_1 = m_{10} + \eta; \quad m_2 = m_{20} + \zeta,$$

для η и ζ в окрестности точки A получим уравнения

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta[-g + \operatorname{Re} \alpha],$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \zeta[g - \operatorname{Re} \alpha].$$

Отсюда следует, что уравнение фазовых траекторий в окрестности точки A имеет вид

$$\zeta\eta = \text{const}$$

и точка A является седлом.

Рассматривая поведение фазовых траекторий вблизи точки C , для η и ζ получим уравнения

$$\frac{d\eta}{dx} = c\eta + d\zeta,$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = a\eta + b\zeta,$$

где

$$c = -g \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} - 1 \right) / \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} + 4\xi \right); \quad b = \operatorname{Re} \alpha \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} - 1 \right) \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} \right)^{-2};$$

$$a = \operatorname{Re} \alpha \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} - 1 \right) (2 + 4\xi) \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} \right)^{-2} \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} + 4\xi \right)^{-1}; \quad d = 0.$$

Очевидно, $ad - bc > 0$ и, следовательно, точка C является седлом. Аналогичное заключение справедливо для точки D . Точка B является центром, что следует из нижеприведенных численных расчетов.

Таким образом, качественно картина интегральных кривых на фазовой плоскости m_1, m_2 при наличии диффузии совпадает с картиной в ее отсутствии. Учет диффузии не приводит к появлению новых особых точек.

3. Количественные изменения, вносимые диффузией, оценим из рассмотрения положения особой точки B и поведения решения в ее окрестности. Положение B определяется соотношением, приведенным выше. Значения m_1 и m_2 в окрестности B получим, производя линеаризацию уравнений (10). В результате

$$m_1 = m_0 + M_1 \exp(igpx) + M_2 \exp(-igpx), \quad (15)$$

где

$$p = \left\{ \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} - 2m_0 - 1 \right) \left[1 + \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} \left(\frac{\partial A_0}{\partial \gamma} + m_0 \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \right] \right\}^{1/2},$$

M_1, M_2 — постоянные, определяемые значениями коэффициентов отражения на торцах кристалла. Результаты расчета m_0, p как функций $\operatorname{Re} \alpha/g$ и ξ приведены на рис. 1.

Величина m_0 при коэффициентах отражения, близких к единице, пропорциональна выходной мощности лазера. Из рис. 1 следует, что с ростом диффузии выходная мощность лазера возрастает. Однако даже при $\xi \rightarrow \infty$ увеличение мощности составляет всего около 10–15%. Изменение m_0 более быстрое в области малых ξ вплоть до значения $\xi = 1$. При дальнейшем возрастании ξ величина m_0 изменяется мало.

Более существенна зависимость $p(\xi)$. Как следует из (15), p определяет ширину пространственного спектра колебаний. При $p = 0$ пространственный спектр колебаний с какой-то частотой состоит из одной линии, и основные уравнения [3, 4] хорошо выполняются. При $p \neq 0$ в спектре появляются две боковые линии с волновыми числами $k \pm kgr$. Если ширина спектра окажется сравнимой с интервалом Δk_0 между модами невозмущенного резонатора, то описание пространственного распределения поля только одной модой невозмущенного резонатора

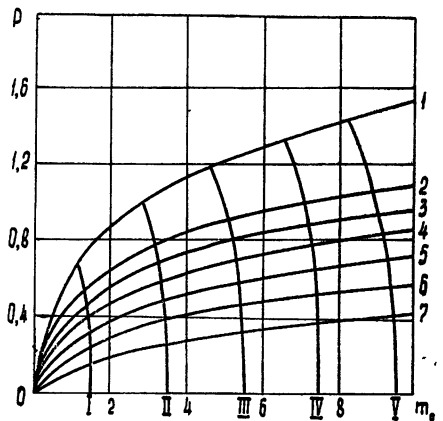


Рис. 1. Кривые 1 ÷ 7 иллюстрируют зависимость $p(m_0)$ при различных ξ :
 1 — $\xi = 0$; 2 — $\xi = 1/4$; 3 — $\xi = 1/2$; 4 — $\xi = 1$; 5 — $\xi = 2$;
 6 — $\xi = 4$; 7 — $\xi = 10$.

Кривые I ÷ V характеризуют зависимость $m_0(\xi)$ при различных значениях $\operatorname{Re} \alpha/g$:
 I — $\operatorname{Re} \alpha/g = 4$; II — $\operatorname{Re} \alpha/g = 8$; III — $\operatorname{Re} \alpha/g = 12$; IV —
 — $\operatorname{Re} \alpha/g = 16$; V — $\operatorname{Re} \alpha/g = 20$.

окажется невозможным. При этом будут эффективно возбуждаться соседние моды и основные уравнения Танга [3, 4] нарушаются.

Таким образом, достаточным условием применимости этих уравнений является неравенство

$$p \ll \frac{L_k}{L} \frac{\operatorname{Re} \alpha / g - 1}{u}, \quad (16)$$

где L_k — длина кристалла, L — длина резонатора, $u = kL_k(\operatorname{Re} \alpha - g)$ — усиление поля на одно прохождение кристалла. Как видно из рис. 1, условие (16) всегда выполняется вблизи порога генерации. Однако оно может быть нарушено при большом усилении и значительном разнесении зеркал. Диффузия способствует выполнению (16), так как она приводит к уменьшению p и тем самым к сужению пространственного спектра колебания. При возрастании ξ от 0 до 1 величина p уменьшается приблизительно вдвое, а при $\xi \rightarrow \infty$ неравномерность населенностей исчезает и $p = 0$. В этом случае строго справедливы уравнения переноса [5].

В заключение приношу благодарность Г. А. Колчиной за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, 46, 962 (1964); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, 81 (1965).
2. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 682 (1964).
3. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, ДАН СССР, 162, 314 (1965).
4. H. Stutz, C. L. Tang, J. M. Lavin, J. Appl. Phys., 35, 2581 (1964).
5. А. П. Иванов, Б. И. Степанов, Б. М. Берковский, И. Л. Кацев, ДАН БССР, 6, 147 (1962).

Томский институт радиоэлектроники
и электронной техники

Поступила в редакцию
30 апреля 1966 г

ON THE THEORY OF STATIONARY OSCILLATIONS IN LASER WITH DIFFUSION EFFECTS

E. S. Kovalenko

The set of Maxwell equations and the equations for the density matrix are solved, taking into account diffusion effects. It is shown that diffusion cannot produce any qualitative changes in the manner of field distribution. The author gives estimations, determining the spatial spectrum of nonlinear modes regarding the diffusion effects. The well-known equations of a uni-dimensional laser model are obtained as the limit cases of a very large and a very small diffusion.

УДК 621.378.325

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ ЧАСТОТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ОКГ С ПОМОЩЬЮ ТРЕХФОТОННОГО КОМБИНАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

В. С. Бутылкин, Ю. Г. Хронопуло

Рассматриваются вынужденные трехфотонные и двухфотонные комбинационные процессы, одновременно протекающие в веществе, помещенном в резонатор. Показано, что, если не принимать специальных мер, трехфотонный процесс подавляется двухфотонным (стоксовым) процессом. Устранить последний можно, внося вещество, поглощающее излучение стоксовой частоты. Найдены пределы, в которых можно изменять отношение концентраций рабочего вещества и примеси. Определена также величина поля задающего ОКГ, при которой возникает индуцированный трехфотонный процесс.

1. Наряду с обычным двухфотонным комбинационным процессом возможно трехфотонное комбинационное рассеяние, при котором возникает поле частоты $\omega_1 \approx 2\omega_0 - \omega_{21}$, где ω_0 — частота падающего на вещество излучения, ω_{21} — собственная частота вещества. О наблюдении такого рассеяния в воде, плавном кварце и ряде других веществ сообщалось в [1]. Представляет интерес обсудить возможность использования индуцированного трехфотонного процесса для создания источника когерентного света, особенно в случае, когда $\omega_{21} < \omega_0$. Частота возникающего при этом излучения выше частоты задающего ОКГ. Использование трехфотонного взаимодействия имеет некоторые преимущества по сравнению с уже описанными способами повышения частоты (нерезонансное параметрическое преобразование и получение высших гармоник в нелинейной среде [2], антистоксов комбинационный процесс [3] и удвоение в лазере [4]). В частности, для осуществления этого процесса нет необходимости в выполнении условий синхронизма* или создании инверсии населенностей рабочих уровней.

Перспективы наблюдения индуцированного трехфотонного комбинационного рассеяния оценивались авторами [5] для случая резонанса между удвоенной частотой задающего лазера и частотой перехода на нижний из рабочих уровней с некоторого уровня k ($\omega_{k1} \approx 2\omega_0$). Мы здесь рассмотрим более распространенный случай, когда подобного рода резонансы не имеют места. При этом будем учитывать потери на частоте ω_1 и влияние поля, возникающего на частоте ω_2 (стоксов комбинационный процесс), а также считать, что рабочее вещество помещено в резонатор.

Пусть в системе присутствуют поля на частотах ω_α , ω_β , ω_γ , ω_δ и ω_μ , удовлетворяющих соотношениям $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_{21} + \delta\omega_{\alpha\beta}$ и $\omega_\gamma + \omega_\delta + \omega_\mu = \omega_{21} + \Delta\omega_{\gamma\mu}$. Обозначим через E_l медленную комплексную амплитуду поля на частоте $\omega_l = -\omega_{-l}$ (в нашем случае $\omega_\alpha = \omega_\delta = \omega_\gamma = \omega_0$, $\omega_\beta = -\omega_2$, $\omega_\mu = -\omega_1$; индекс l пробегает значения 0, 1, 2). В качестве ис-

* В связи с этим индуцированное излучение на частоте ω_1 , как и на частоте $\omega_2 \approx \omega_0 - \omega_{21}$, мы будем называть комбинационным.

ходных можно воспользоваться уравнениями для матрицы плотности (1) из работы [6] и уравнениями (5) для комплексных амплитуд полей из работы [3]. К поляризации вещества на частоте ω_γ надо в рассматриваемом случае добавить член

$$P(\omega_\gamma) = \sum_k p_{2k} \rho_{k2}^{(\gamma)} + \rho_{1k}^{(\gamma)} p_{k1} + \sum_{k,q=1,2} p_{kq} \rho_{qk}^{(\gamma)},$$

где p_{kq} — матричный элемент дипольного момента* частицы рабочего вещества,

$$\begin{aligned} \rho_{k2}^{(\gamma)} &= \frac{\sigma_{12}^c}{\hbar^2} \sum_q \frac{V_{kq}^{(-\mu)} V_{q1}^{(-\delta)} \exp [i(\omega_\gamma - \Delta\omega_{\gamma\delta\mu}) t]}{(\omega_{q1} - \omega_\delta)(\omega_{k1} - \omega_\mu - \omega_\delta)}, \\ \rho_{1k}^{(\gamma)} &= \frac{\sigma_{12}^c}{\hbar^2} \sum_q \frac{V_{2q}^{(-\delta)} V_{qk}^{(-\mu)} \exp [i(\omega_\gamma - \Delta\omega_{\gamma\delta\mu}) t]}{(\omega_{q2} + \omega_\delta)(\omega_{k2} + \omega_\mu + \omega_\delta)}, \\ \rho_{qk}^{(\gamma)} &= \frac{\sigma_{12}^c}{\hbar^2} \frac{V_{q1}^{(-\mu)} V_{2k}^{(-\delta)} \exp [i(\omega_\gamma - \Delta\omega_{\gamma\delta\mu}) t]}{(\omega_{q1} - \omega_\mu)(\omega_{k2} + \omega_\delta)}. \end{aligned} \quad (1)$$

В формулах (1) (а также в формуле (4) для σ_{12}) необходимо произвести суммирование по всем перестановкам индексов (γ, δ, μ), а затем положить $\gamma = \delta = 0, \mu = -1$. Матричный элемент энергии взаимодействия вещества с полем $V_{kq} = \sum_l V_{kq}^{(l)} \exp(i\omega_l t)$, $V_{kq}^{(l)} = -p_{kq} E_l \cos \alpha_{kq}^{(l)}$, угол

$\alpha_{kq}^{(l)} = \alpha_{qk}^{(l)} = \widehat{p_{kq} E_l}$; ω_{kq} — частота перехода между уровнями q и k рабочего вещества.

Входящая в (1) величина σ_{12}^c — матричный элемент матрицы плотности, записанной в представлении взаимодействия, — описывается уравнениями (10) из [6], если добавить к выражению (12) этой работы величину**

$$\hbar^{-1} \sum_{k,q} \frac{V_{1k}^{(\gamma)} V_{kq}^{(\delta)} V_{q2}^{(\mu)} \exp [i\Delta\omega_{\gamma\delta\mu} t]}{(\omega_{2q} + \omega_\mu)(\omega_{k2} + \omega_\delta + \omega_\mu)},$$

в которой также нужно произвести суммирование по всем перестановкам индексов (γ, δ, μ) = (0, 0, -1).

Аналогично можно получить $P(\omega_\delta)$ и $P(\omega_\mu)$, если произвести в (1) циклическую перестановку индексов γ, δ, μ . Поляризация, связанная со стоковым процессом, остается без изменений (см. формулу (20) работы [6]).

Пусть поля на частотах ω_1 и ω_2 достаточно малы, так что поле на частоте ω_0 можно считать заданным, выполняются условия применимости уравнений баланса для комбинационных процессов [3] и, кроме того, размеры материальной системы значительно меньше длины резонатора. Пусть также вблизи каждой из частот ω_l возбуждается много мод, а условия пространственного синхронизма не выполняются (т. е. $k_0 - k_2 \neq 2k_0 - k_1$, где $k_l = \omega_l/c\sqrt{\epsilon_l}$ — волновой вектор). Тогда [7] исследуемую систему можно описывать уравнениями

* Для простоты будет считать взаимодействие вещества с полем электродипольным, а все p_{kq} — действительными.

** В этом можно убедиться, усредняя до третьего порядка исходные уравнения для матрицы плотности при условиях $(\omega_{kq} T_{kq})^{-1} \ll 1$, $(\hbar\omega_{kq})^{-1} V_{kq} \ll 1$.

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 + \tau_1^{-1} m_1 &= b_1 m_0^2 m_1 n, \\ \dot{m}_2 + \tau_2^{-1} m_2 &= b_2 m_0 m_2 n, \\ \dot{n}_1 + (n_1 - n_0) T_1^{-1} &= -(a_1 m_1 m_0^2 + a_2 m_2 m_0) n_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $m_l = |E_l|^2$ ($l = 0, 1, 2$); n_1 и n_{10} — разность населенностей уровней 1 и 2 одной частицы и равновесная разность населенностей этих уровней; T_1 — время жизни частицы на уровне 2; $\tau_l = Q_l/\omega_l$, Q_l — добротность резонатора на частоте ω_l . Кроме того,

$$\begin{aligned} a_1 &= 4\hbar^{-6} [1 + T_{21}^2(\Delta\omega)^2]^{-1} T_{21}\sigma_1^2, \\ a_2 &= 4\hbar^{-4} [1 + T_{21}^2(\delta\omega)^2]^{-1} T_{21}\sigma_2^2, \\ b_l &= \pi\hbar\omega_l \varepsilon_l^{-1} N_1 a_l \quad (l = 1, 2); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left| \sum_{k,q} p_{1k} p_{kq} p_{q2} \cos \alpha_{1k}^{(\gamma)} \cos \alpha_{kq}^{(\delta)} \cos \alpha_{q2}^{(\mu)} (\omega_{q2} + \omega_\mu)^{-1} (\omega_{k1} - \omega_\gamma)^{-1} \right|, \\ \sigma_2 &= \left| \sum_k p_{1k} p_{k2} \cos \alpha_{2k}^{(\alpha)} \cos \alpha_{k1}^{(\beta)} (\omega_{k2} + \omega_\alpha)^{-1} \right|, \end{aligned} \quad (4)$$

где N_1 — плотность частиц, T_{21}^{-1} — ширина линии рабочего перехода, $\Delta\omega = 2\omega_0 - \omega_1 - \omega_{21}$, $\delta\omega = \omega_0 - \omega_2 - \omega_{21}$ ($\Delta\omega, \delta\omega < T_{21}^{-1}$), ε_l — линейная часть диэлектрической проницаемости вещества на частоте ω_l . В формуле (4) для σ_2 нужно произвести суммирование по перестановкам индексов $(\alpha, \beta) = (0, -2)$.

2. Уравнения (2) можно переписать в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{x} + x &= xz, \\ \alpha_2 \dot{y} + y &= Ayz, \\ \dot{z} + z - z_0 &= -(x + y)z, \end{aligned} \quad (5)$$

если ввести

$$\begin{aligned} x &= a_1 m_0^2 T_1 m_1, \quad y = a_2 m_0 T_1 m_2, \quad z = b_1 m_0^2 \tau_1 n_1, \\ \alpha_l &= \tau_l / T_1, \quad A = b_2 \tau_2 / b_1 m_0 \tau_1, \quad \Theta = t / T_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Точка означает дифференцирование по Θ .

Система (5) аналогична уравнениям (7) работы [7]. Применяя результаты [7] к уравнениям (5), получим, что при

$$1 < z_0 < A^{-1} \quad (7)$$

и начальном состоянии системы, в котором $\dot{x} = 0$, $y = 0$, поле E_2 не возбуждается, а генерируется только поле частоты ω_1 . В случае же, когда

$$1 < A^{-1} < z_0, \quad (8)$$

возможна генерация обоих полей. При этом, если $\tau_2 \ll \tau_1$, сначала развивается поле частоты ω_2 , но затем оно затухает, так как система стремится к равновесному состоянию, в котором $E_2 = 0$. Выполнение условия (8) необходимо для того, чтобы генерировалось поле E_1 . С помощью (3) и (6) его можно записать в виде

$$m_0 > m_{0 \text{ порог}} = \left\{ \frac{\varepsilon_1 \hbar^5 [1 + T_{21}^2 (\Delta\omega)^2]}{4\pi N_1 n_{10} T_{21} \omega_1 \tau_1 \sigma_1^2} \right\}^{1/2}; \quad (9a)$$

$$\frac{\varepsilon_2 \omega_1 \tau_1 \sigma_1^2}{\hbar^2 \varepsilon_1 \omega_2 \tau_2 \sigma_2^2} m_0 > 1. \quad (9b)$$

Легко также показать, что условие (7) выполняется, если $m_0 > m_{0 \text{ порог}}$ и, кроме того,

$$\frac{2M\omega_2\tau_2\sigma_2^2}{\varepsilon_2\sigma_1[1+T_{21}^2(\delta\omega)^2]} \left\{ \frac{\pi N_1 n_{10} T_{21} \varepsilon_1 [1+T_{21}(\Delta\omega)^2]}{\hbar\omega_1\tau_1} \right\}^{1/2} < 1, \quad (10)$$

где $M = m_0/m_{0 \text{ порог}}^*$.

Оценим величину порогового поля и добротность резонатора на стоксовой частоте, необходимую для выполнения неравенства (9б). Прежде всего необходимо отметить, что генерацию поля стоксовой частоты нетрудно подавить, если использовать в качестве рабочих уровни, переход между которыми разрешен в электродипольном приближении (уровни 1 и 2 разной четности). При этом легче выполнить условие (9б). В самом деле, при учете одного дополнительного уровня (третьего), переход с которого на один из рабочих уровней разрешен (например, $p_{31} \approx p_{21} \approx 10^{-18}$ CGSE), $\sigma_1 \sim p_{31}^2 p_{21}$, $\sigma_2 \sim p_{31} p_{32}$, где p_{32} соответствует запрещенному в электродипольном приближении переходу 3—2 и не может быть больше 10^{-20} CGSE. Если взять $Nn_{10} = 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $T_{21} \approx \approx 10^{-11} \text{ сек}$, $\omega_1 \sim \omega_{32} \sim \omega_{31} \approx 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $\varepsilon_1 \approx 1$, $\Delta\omega \approx \delta\omega \approx 0$, то $m_{0 \text{ порог}} \approx 10^7 \text{ CGSE}$ ($|E_0| \approx 10^6 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$) и должно выполняться неравенство $\tau_2 < 10^{-16} m_0$ (или при $m_0 = m_{0 \text{ порог}}$, $\tau_2 < 10^{-9} \text{ сек}$). В том случае, когда число дополнительных уровней, вклад которых в σ_1 и σ_2 надо учитывать, велико (≥ 10), τ_2 должно быть меньше $10^{-11} \text{ сек}^{**}$.

3. Таким образом, поле, необходимое для возбуждения трехфотонного комбинационного процесса, достижимо в резонаторах мощных лазеров с импульсной модуляцией добротности (или при фокусировке лазерного излучения). Чтобы реализовать этот процесс, может оказаться необходимым ввести большие потери на частоте ω_2 . Этого можно достичь, смешав рабочее вещество (I) с веществом (II), поглощающим поле E_2 , но прозрачным для полей E_0 и E_1 .

Будем считать, что вещество II состоит из частиц, разность рабочих термов которых $\Omega_{21} = \omega_2 - \Delta$. Пусть матричный элемент дипольного момента рассматриваемого перехода P_{21} , линия перехода однородно уширена, а ее ширина $t_{21}^{-1} > \Delta$. Концентрацию таких частиц и время их жизни на верхнем уровне обозначим соответственно N_2 и T_2 . Тогда уравнения данной системы по сравнению с уравнениями (2) будут иметь следующие изменения: второе уравнение системы (2) примет вид

$$m_2 + m_2 \tau_2^{-1} = (b_3 m_0 n_1 - d n_3) m_2, \quad (11)$$

* Заметим, что при $M > 1,01$ необходимо учитывать обратную реакцию поля E_1 на режим работы задающего ОКГ, однако здесь мы не будем обсуждать этот вопрос.

** Все сказанное справедливо, если у вещества нет пары уровней с частотой перехода, меньшей ω_0 , на которых возможно эффективное комбинационное преобразование поля задающего ОКГ.

и, кроме того, к системе добавится уравнение

$$\dot{n}_2 + (n_2 - n_{20}) T_2^{-1} = -c n_2 n_2. \quad (12)$$

Здесь n_2 — разность населенностей рабочих уровней частиц II,

$$c = \frac{4}{\hbar^2} [1 + t_{21}^2 \Delta^2]^{-1} t_{21} P_{21}^2 \cos^2 \beta_{12}^{(2)},$$

$d = \pi \hbar \omega_2 \varepsilon_2^{-1} N_2 c$, $\beta_{12}^{(2)}$ — угол между направлениями векторов P_{12} и E_2 . Из (11) легко получить условие, при выполнении которого поле частоты ω_2 в системе не возникает. Так будет, если при всех движениях системы $b_2 m_0 n_1 < d n_2$. Это условие можно переписать следующим образом:

$$\frac{N_2 n_2}{N_1 n_1} > \frac{(1 + t_{21}^2 \Delta^2) T_{21} \sigma_2^2 |E_0|_{\max}^2}{[1 + T_{21}^2 (\delta\omega)^2] t_{21} \hbar^2 P_{21}^2 \cos^2 \beta_{12}^{(2)}}, \quad (13)$$

где $E_{0 \max}$ — наибольшее поле, достигнутое при движении по некоторой фазовой траектории.

В системе, состоящей из частиц I, II и рабочего вещества лазера, помещенных в общий резонатор, может возникнуть вынужденное комбинационное рассеяние поля задающего ОКГ на частицах II. Легко видеть, что условием отсутствия такого рассеяния является неравенство, полученное из (13) заменой величин, относящихся к частицам I, величинами, относящимися к частицам II, и наоборот. Если для трехфотонного преобразования частоты ОКГ и подавления Стоксова процесса использовать переходы с малым временем жизни на верхних уровнях, то можно считать n_1 и n_{10} , n_2 и n_{20} величинами одного порядка (насыщение незначительно). При $\hbar \omega_{21}$, $\hbar \Omega_{21} \gg kT$, где k — постоянная Больцмана, T — температура вещества, $n_{10} \simeq n_{20} \simeq 1$ и (13) дает необходимое соотношение между концентрациями рабочего вещества и вещества-поглотителя.

Оценим теперь пределы, в которых может меняться отношение N_2/N_1 , предположив, что $T_{21}^2 (\delta\omega)^2 \ll 1$, $t_{21}^2 \Delta^2 \ll 1$, σ_2 для частиц I и II одного порядка. Тогда $10^6 > N_2/N_1 > 10^{-6}$. Это означает, что при $N_1 = = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ достаточно добавить 10^{17} см^{-3} частиц поглощающего вещества, чтобы индуцированные двухфотонные процессы не возникали.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Terhune, P. D. Maker, C. M. Savage, Phys. Rev. Lett., **14**, 681, (1965).
2. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах), ИНИ АН СССР, М., 1964.
3. Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 493 (1965).
4. В. С. Бутылкин, Г. Л. Гуревич, М. И. Хейфец, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 545 (1966).
5. С. А. Ахманов, Д. Н. Клышко, Письма ЖЭТФ, **2**, № 4, 171 (1965).
6. Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 674 (1964).
7. В. С. Бутылкин, Г. Л. Гуревич, М. И. Хейфец, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 538 (1966).

ON POSSIBILITY OF INCREASING THE FREQUENCY OF LASER RADIATION
BY THREE-PHOTON COMBINATIONAL PROCESS*V. S. Butylkin, Yu. G. Khronopulo*

Considers forced three-photon and two-photon combinational processes, proceeding simultaneously in a substance placed in a resonator. It is shown that without taking any special measures the three-photon process is suppressed by the two-photon (Stokes) one. The latter can be eliminated by adding some foreign matter absorbing Stokes radiation. The limits are found in which it is possible to change the ratio between impurity and working medium concentration. There is also determined the magnitude of laser field when three-photon process arises in the system.

УДК 534.2 — 16

КОЭФФИЦИЕНТЫ АКУСТИЧЕСКОГО ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ ТРИГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

С. Б. Григорьев, А. М. Сазонов, Н. В. Травин

Рассматривается методика вычисления коэффициентов резонансного поглощения звуковых волн системой ядерных спинов. Вычисляется интенсивность и угловая зависимость сигнала акустического ЯМР в ионных кристаллах тригональной симметрии.

До настоящего времени метод акустического ядерного магнитного резонанса применялся главным образом для исследования щелочно-галлоидных кристаллов кубической симметрии [1-5]. Изучение указанного резонанса в кристаллах с симметрией более низкой, чем кубическая, позволяет получить дополнительные сведения о природе и величине динамического взаимодействия ядерной спин-системы с кристаллической решеткой. В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с вычислением коэффициентов резонансного поглощения звуковых волн на системе ядерных спинов в случае тригональной симметрии исследуемого кристалла при наличии квадрупольной спин-решеточной релаксации.

Коэффициент резонансного поглощения звука на ядрах, определяемый как отношение акустической энергии, поглощенной единицей объема парамагнетика, к энергии звуковых волн, проходящих через единичную площадку в единицу времени, может быть записан в виде [6]

$$g_{\mu} = \frac{2\pi}{\hbar^2} N \frac{\hbar\omega}{kT} \frac{V}{v n_{\omega}} g_{\mu}(\omega) |\langle M, n_{\omega} - 1 | \hat{H}_{c-\phi} | M \pm \mu, n_{\omega} \rangle|^2, \quad (1)$$

где N — число ядер в единице объема, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, v — скорость распространения звуковых волн в исследуемом кристалле объемом V , n_{ω} — число фононов резонансной частоты ω , $g_{\mu}(\omega)$ — нормированная функция формы линии акустического поглощения, $\hat{H}_{c-\phi}$ — гамильтониан ядерного спин-фононного взаимодействия, $\hat{H}_{c-\phi}$ в случае квадрупольного механизма взаимодействия звуковых волн с ядерными спинами имеет вид [7]

$$\hat{H}_{c-\phi} = \sum_{\mu=-2}^2 \hat{Q}_{\mu} \nabla \hat{E}^{-\mu}.$$

Тензор ядерного квадрупольного момента \hat{Q}_{μ} и тензор градиента электрического поля $\nabla \hat{E}^{-\mu}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\hat{Q}_0 = C [3 \hat{J}_z^2 - J(J+1)], \quad \nabla \hat{E}^0 = \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{zz},$$

$$\hat{Q}_{\pm 1} = \frac{\sqrt{6}}{2} C (\hat{J}_{\pm} \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_{\pm}), \quad \nabla \hat{E}^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\hat{\Phi}_{xz} \pm i \hat{\Phi}_{yz}),$$

$$\hat{Q}_{\pm 2} = \frac{\sqrt{6}}{2} C \hat{J}_{\pm}^2, \quad \nabla \hat{E}^{\pm 2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} (\hat{\Phi}_0 \pm 2i \hat{\Phi}_{xy}),$$

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y, \quad \hat{\Phi}_0 = \hat{\Phi}_{xx} - \hat{\Phi}_{yy},$$

$$C = \frac{eQ}{2J(2J-1)},$$

где Q — ядерный квадрупольный момент, e — заряд иона, J — спин ядра, $\hat{\Phi}_{jk}$ ($j, k = x, y, z$) — компоненты тензора градиента электрического поля, создаваемого внутрикристаллическим окружением в месте расположения резонирующего ядра.

Выражение (2) записано в координатной системе, связанной с главными осями тензора градиента локального электрического поля кристалла.

Пусть внешнее поле H_0 направлено произвольным образом по отношению к кристаллографической системе координат и задается в системе отсчета x', y', z' ($H_0 \parallel z'$), которую можно назвать лабораторной системой. Так как спиновые компоненты, определяющие тензор \hat{Q}_p , жестко связаны с лабораторной системой, то для однозначного задания $\hat{H}_{c-\phi}$ необходимо преобразовать компоненты оператора спина из кристаллографической системы координат в лабораторную.

Положение одной координатной системы относительно другой в общем случае может быть задано углами Эйлера ϑ, φ и ψ , причем без нарушения общности рассмотрения можно принять $\psi = \pi/2$. При этом очевидно, что компоненты оператора спинового момента преобразуются как компоненты вектора.

Выполняя это преобразование и отбирая из полученного спин-фонного гамильтониана члены, соответствующие переходам с одинаковым изменением магнитного квантового числа M ($\Delta M = 0; \pm 1$ и ± 2), получаем

$$\hat{H}_{c-\phi} = \sum_{\mu=-2}^2 \hat{H}_{Q}^{\mu}; \quad (3)$$

$$\hat{H}_{Q}^0 = \frac{C}{4} [3(\hat{J}_z)^2 - J'(J'+1)] [\hat{\Phi}_{zz} (3 \cos^2 \vartheta - 1) +$$

$$+ (\hat{\Phi}_{yz} \cos \varphi + \hat{\Phi}_{xz} \sin \varphi) \sin (2\vartheta) + (2\hat{\Phi}_{xy} \sin (2\varphi) - \hat{\Phi}_0 \cos (2\vartheta)) \sin^2 \vartheta]; \quad (4)$$

$$\hat{H}_{Q}^{\pm 1} = \frac{C}{2} (\hat{J}_{\pm 1} \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_{\pm 1}) \left\{ \left[\frac{-1}{4} \sin (2\vartheta) (3\hat{\Phi}_{zz} - 2\hat{\Phi}_{xy} \sin (2\varphi) + \right. \right.$$

$$+ \hat{\Phi}_0 \cos (2\varphi)) - \cos (2\vartheta) (\hat{\Phi}_{yz} \cos \varphi + \hat{\Phi}_{xz} \sin \varphi) \left. \right] \mp i \left[\frac{1}{2} \sin \vartheta (\hat{\Phi}_0 \sin (2\varphi) + \right.$$

$$\left. + 2\hat{\Phi}_{xy} \cos (2\varphi)) - \cos \vartheta (\hat{\Phi}_{yz} \sin \varphi - \hat{\Phi}_{xz} \cos \varphi) \right] \left. \right\};$$

$$\hat{H}_{Q}^{\pm 2} = \frac{C}{2} (\hat{J}_{\pm}^2) \left\{ \left[\frac{1}{4} (1 + \cos^2 \vartheta) (2\hat{\Phi}_{xy} \sin (2\varphi) - \hat{\Phi}_0 \cos (2\varphi)) + \right. \right.$$

$$+ \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \hat{\Phi}_{zz} - \frac{1}{2} (\hat{\Phi}_{yz} \cos \varphi + \hat{\Phi}_{xz} \sin \varphi) \sin(2\vartheta) \mp$$

$$\mp i \left[\frac{1}{2} \cos \vartheta (\hat{\Phi}_0 \sin(2\varphi) - 2\hat{\Phi}_{xy} \cos(2\varphi)) - \sin \vartheta (\hat{\Phi}_{yz} \sin \varphi - \hat{\Phi}_{xz} \cos \varphi) \right] \}.$$

Из выражений (3)—(6) следует, что члены $\hat{H}_Q^{\pm 1}$ и $\hat{H}_Q^{\pm 2}$ определяют величину и угловую зависимость коэффициентов акустического поглощения на одинарной и двойной ларморовской частоте соответственно. Член \hat{H}_Q^0 описывает статическое квадрупольное взаимодействие и определяет квадрупольное расщепление сигнала акустического ядерного магнитного резонанса и угловую зависимость расстояния между отдельными сателлитами резонансного поглощения.

Если известен явный вид тензора градиента электрического поля в месте расположения резонирующего ядра, вызванного звуковыми колебаниями, то выражения (4)—(6) полностью определяют коэффициент поглощения акустического поля (1). Однако тензор $\hat{\Phi}_{jk}$ зависит не только от симметрии кристалла, но также от поляризации и направления распространения звука относительно кристаллографической системы координат.

Пусть в кристалле в произвольном направлении распространяется чисто продольная звуковая волна. Это значит, что направление распространения колебаний должно совпадать с одним из особых направлений в кристалле. В том случае, когда данное условие не выполняется, необходимо принимать во внимание только квазипродольную моду (см., например, [8]).

Если направление распространения звуковых колебаний относительно кристаллографической системы координат задается направляющими косинусами l , m , n , то компоненты тензора деформации $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y, z$), вызываемые звуковой волной с амплитудой ϵ_0 , могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= l^2 \epsilon_0, & \epsilon_{yz} &= 2nm \epsilon_0, \\ \epsilon_{yy} &= m^2 \epsilon_0, & \epsilon_{xz} &= 2ln \epsilon_0, \\ \epsilon_{zz} &= n^2 \epsilon_0, & \epsilon_{xy} &= 2lm \epsilon_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Следуя Тейлору и Бломбергену [2], будем считать, что связь между $\hat{\Phi}_{jk}$ и $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$ в линейном по $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$ приближении характеризуется тензором динамического градиента $s_{jka\beta}$, определяемым из соотношения

$$\hat{\Phi}_{jk} = \sum_{\alpha, \beta} s_{jka\beta} \hat{\epsilon}_{\alpha\beta}. \quad (8)$$

Формула (8) дает возможность свести нахождение $\hat{\Phi}_{jk}$ к вычислению $s_{jka\beta}$, что значительно облегчает задачу. Отметим, что явные выражения для тензора $s_{jka\beta}$ в кристаллах различной симметрии были вычислены Добровым [9] для случая электронного акустического резонанса, однако они могут быть использованы также и для акустического ядерного магнитного резонанса.

Вычислим коэффициент резонансного поглощения звука в кристалле тригональной симметрии (классы C_{3v} , D_3 и D_{3d}), к которым относятся, например, NaNO_3 , Al_2O_3 и др. Подставляя выражения (5) и (6)

в (1), получаем общие выражения для коэффициентов акустического поглощения звука на одинарной и двойной частоте перехода в виде

$$\sigma_1 = P_1 \left\{ \left[\frac{3}{4} s_{13} (1 - 3n^2) \sin(2\vartheta) + \frac{1}{2} s_{66} A \sin(2\vartheta) + s_{14} (B \sin(2\vartheta) - D \cos(2\vartheta)) - s_{44} F \cos(2\vartheta) \right]^2 + \left[s_{66} G_+ \sin \vartheta + s_{14} (K_+ \sin \vartheta - L_+ \cos \vartheta) - s_{44} R \cos \vartheta \right]^2 \right\}; \quad (9)$$

$$\sigma_2 = P_2 \left\{ \left[\frac{3}{4} s_{13} (1 - 3n^2) \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) (s_{66} A - 2s_{14} B) - \frac{1}{2} (s_{14} D + s_{44} F) \sin(2\vartheta) \right]^2 + [s_{66} G_- \cos \vartheta - s_{14} R \sin \vartheta + s_{14} (K_- \cos \vartheta - L_- \sin \vartheta)]^2 \right\}; \quad (10)$$

где

$$A = (l^2 - m^2) \cos(2\vartheta) - 2lm \sin(2\vartheta),$$

$$B = mn \cos(2\vartheta) - ln \sin(2\vartheta),$$

$$D = (l^2 - m^2) \cos \vartheta + 2lm \sin \vartheta,$$

$$F = 2n (m \cos \vartheta + l \sin \vartheta),$$

$$G_{\pm} = (l^2 - m^2) \sin(2\vartheta) \pm 2lm \cos(2\vartheta),$$

$$K_{\pm} = 2n (m \sin(2\vartheta) \pm l \cos \vartheta),$$

$$L_{\pm} = (l^2 - m^2) \sin \vartheta \pm 2lm \cos \vartheta,$$

$$R = 2n (m \sin \vartheta - l \cos \vartheta),$$

$$P_1 = \frac{C^2}{2(2J + 1)} \eta(\omega, T) g_1(\omega) (2M + 1)^2 (J + M + 1) (J - M),$$

$$P_2 = \frac{C^2}{8(2J + 1)} \eta(\omega, T) g_2(\omega) (J - M + 2) (J + M - 1) \times \\ \times (J - M + 1) (J + M),$$

$$\eta(\omega, T) = \omega^2 N / 4\rho v^3 kT,$$

$$xx = 1, \quad yy = 2, \quad zz = 3, \quad yz = 4, \quad xz = 5, \quad xy = 6,$$

а ρ — плотность кристалла.

В случае, если направление распространения звуковой волны совпадает с осью симметрии кристалла ($l = m = 0, n = 1$), выражения (9) и (10) имеют очень простой вид:

$$\sigma_1 = \frac{9}{4} P_1 s_{13}^2 \sin^2(2\vartheta), \\ \sigma_2 = \frac{9}{4} P_2 s_{13}^2 \sin^4 \vartheta. \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, (11) совпадают с выражениями для коэффициентов поглощения звука, вычисленных в работе [4] для случая аксиально-симметричного градиента электрического поля при распространении звука вдоль оси симметрии.

Если звуковая волна распространяется вдоль кристаллографической оси x ($l = 1, m = n = 0$), то из (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 = P_1 \left\{ \left[\frac{3}{4} s_{13} \sin(2\vartheta) + \frac{1}{2} s_{66} \sin(2\vartheta) \cos(2\vartheta) - s_{14} \cos(2\vartheta) \cos \varphi \right]^2 + \right. \\ \left. + [s_{66} \sin \vartheta \sin(2\varphi) - s_{14} \cos \vartheta \sin \varphi]^2 \right\}, \\ \sigma_2 = P_2 \left\{ \left[\frac{3}{4} s_{13} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2} s_{66} (1 + \cos^2 \vartheta) \cos(2\vartheta) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} s_{14} \sin(2\vartheta) \cos \varphi \right]^2 + [s_{66} \cos \vartheta \sin(2\varphi) - s_{14} \sin \vartheta \sin \varphi]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что при соответствующем выборе направления распространения звука и ориентации кристалла в постоянном поле H_0 становится принципиально возможным экспериментальное определение всех независимых компонент тензора $s_{jka\beta}$ и, следовательно, величины ядерного спин-фононного взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. G. Proctor, W. A. Robinson, Phys. Rev., **104**, 1344 (1956).
2. E. F. Taylor, N. Bloembergen, Phys. Rev., **113**, 431 (1959).
3. А. Р. Кессель, ЖЭТФ, **36**, 1451 (1959).
4. D. I. Volef, M. Menes, Phys. Rev., **114**, 1441 (1959).
5. M. Menes, D. I. Volef, J. Phys. Chem. Solids, **19**, 79 (1961).
6. С. А. Альтшулер, Б. И. Кочелдаев, А. М. Леушин, УФН, **75**, 459 (1961).
7. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
8. Ф. И. Федоров, Теория упругих волн в кристаллах, изд. Наука, М., 1965.
9. W. I. Dobrov, Phys. Rev., **134**, 734 (1964).

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
25 апреля 1966 года

COEFFICIENTS OF ACOUSTIC NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE ABSORPTION IN CRYSTALS WITH TRIGONAL SYMMETRY

S. B. Grigor'ev, A. M. Sazonov, N. V. Travin

The technique is considered to calculate the coefficients of the resonance absorption of sound waves by the system of nuclear spins. The intensity and angular dependence of the acoustic NMR signal in ion crystals with the trigonal symmetry are calculated.

УДК 621.372.061.5

О МЕТОДЕ УСРЕДНЕНИЯ ПО СТАЦИОНАРНЫМ ВОЛНАМ

М. И. Рабинович

Для получения приближенных уравнений, описывающих стационарные и близкие к ним нестационарные процессы в нелинейных одномерных распределенных системах, предлагается метод усреднения по периодическим функциям, которые являются решением задачи о стационарных бегущих волнах в рассматриваемой системе.

С помощью предлагаемого метода получены усредненные уравнения слабонелинейной активной линии, на основе которых рассмотрены установившиеся процессы в безграничной и ограниченной линиях, а также некоторые нестационарные решения, возможные в безграничной системе

При исследовании волновых процессов в нелинейных активных системах, в частности, лазерах или активных линиях передачи, возникает необходимость решения нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, во многих случаях весьма высокого порядка. Решение таких уравнений вызывает значительные трудности, поэтому в настоящее время удалось рассмотреть лишь некоторые классы нелинейных задач.

Наиболее подробно рассмотрены колебательные и волновые процессы в слабонелинейных системах с сильной дисперсией. Это, в первую очередь, относится к задачам, которые допускают применение в той или иной форме метода усреднения по одной переменной. В частности с помощью усреднения по времени решаются задачи, в которых задана пространственная структура решения (приближение заданного поля). Если же фиксирован закон изменения процессов во времени ($e^{i\omega t}$ - процессы), то для определения пространственной структуры решения используется усреднение по координате z [1, 2]. Заметим, что в распределенных системах даже слабая нелинейность может привести к существенному изменению структуры поля, причем многие из возникающих решений не имеют аналогии в линейной системе. Третьим классом задач, где используется аналогичный метод усреднения, является исследование в диспергирующих системах решений, близких к синусоидальным бегущим волнам. В этом случае, по существу, усреднение проводится по бегущей координате $\xi = vt - z$ [3, 4].

Однако применение метода усреднения по одной переменной в общем случае не позволяет рассмотреть многие нестационарные процессы в распределенных системах. В первую очередь, это относится к ограниченным системам, где с помощью одной волны невозможно удовлетворить краевым условиям. Применению метода усреднения по двум переменным к исследованию нестационарных процессов в распределенных системах посвящена работа [5], в которой с помощью усреднения по встречным квазимонохроматическим волнам (решениям) рассмотрена слабонелинейная активная линия. Существенно, однако, что использование этого метода возможно лишь в тех случаях, когда исследуемая система близка к консервативной и обладает сильной дисперсией, поскольку это условие, как известно [3, 6], является необходимым для существ-

зования квазимонохроматических решений даже в слабонелинейной системе.

В настоящей работе предлагается метод рассмотрения слабонелинейных распределенных систем, который применим к системам с произвольной (но не слишком малой) величиной дисперсии. Этот метод основан на усреднении не по гармоническим функциям (решениям линейной задачи), а по периодическим функциям, являющимся решением задачи о стационарных бегущих волнах в рассматриваемой нелинейной системе*. Характер этих периодических функций может быть произвольным, в том числе — и релаксационным.

С помощью предлагаемого метода получены приближенные уравнения, описывающие стационарные и близкие к ним нестационарные процессы в активной нелинейной линии передачи. На основе полученных уравнений исследованы установившиеся решения в безграничной и ограниченной линиях с сильной и со слабой дисперсией, а также некоторые нестационарные процессы, возможные в безграничной системе. Для отрезка линии найден частотный спектр. Показано, что при диссипативном характере нелинейности в системе возможно фазовое взаимодействие встречных волн.

1. ПОЛУЧЕНИЕ УКОРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим нелинейную активную линию, которая описывается системой уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial z} &= -C_1 \frac{\partial u}{\partial t}, & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{g}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\mu}{C} \Psi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{\Phi}{LC} &= \frac{I}{C}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь I и u — ток и напряжение в линии, Φ — магнитный поток,

$-g \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Psi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$ — зависимость тока нелинейного элемента от напряжения на нем, z — пространственная координата, а μ — безразмерный параметр**. Пусть система (1.1) имеет стационарные решения в виде периодических бегущих волн, распространяющихся со скоростями v_1

в $+z$ - и v_2 в $-z$ -направлениях. Таким стационарным волнам соответствуют решения $u = f_1(v_1 t - z + \varphi_1)$ (для волн, распространяющихся вправо) и $u = f_2(v_2 t + z + \varphi_2)$ (для волн, распространяющихся влево) систем обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных из

(1.1) заменой $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow v_{1,2} \frac{\partial}{\partial \xi_{1,2}}$, $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \mp \frac{\partial}{\partial \xi_{1,2}}$, где $\xi_{1,2} = v_{1,2} \mp z$. Конкрет-

ный вид периодической функции $f(\xi)$ определяется параметрами линии, характером нелинейности и длиной стационарной бегущей волны, т. е. вид f связан с ее периодом. Даже при слабой нелинейности ($\mu \ll 1$, $g = \mu g$) форма бегущих волн может быть существенно несинусоидальной, а достаточно длинные волны могут иметь ярко выраженный релаксационный характер [6].

Будем искать нестационарное решение системы (1.1), представляющее собой результат взаимодействия встречных квазистационарных

* Рассматриваются лишь диспергирующие системы, поскольку в нелинейных системах, не обладающих дисперсией, существование стационарных волн невозможно.

** При $\mu = 0$ система (1.1) становится линейной активной. Предполагается, что диссипация энергии в системе при $\mu \neq 0$ может быть как положительна, так и отрицательна.

волн, распространяющихся в противоположных направлениях в общем случае с различными по величине скоростями.

В распределенной системе эффективность нелинейного взаимодействия различных волн определяется близостью их скоростей распространения и величиной нелинейности. Если нелинейность мала, а скорости распространения существенно различны, то взаимодействие слабое. Учитывая, что относительная разность скоростей волн, распространяющихся в противоположных направлениях, велика ($|\Delta v|/v_{1,2} \sim 1$), и полагая в (1.1) $\mu \ll 1$, представим искомое решение в виде*

$$u = A_1(z, t) f_1[v_1 t - z + \varphi_1(z, t)] + A_2(z, t) f_2[v_2 t + z + \varphi_2(z, t)] + \mu W(z, t), \quad (1.2)$$

где $f_1(v_1 t - z + \varphi_1) = f_1$ и $f_2(v_2 t + z + \varphi_2) = f_2$ — стационарные периодические решения исследуемой системы, $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ — медленно меняющиеся по сравнению с $f_{1,2}(v_{1,2} t \mp z)$ функции координаты и времени, а $W(z, t)$ — быстро меняющаяся периодическая функция z и t порядка 1 (или $A_{1,2}$).

Для получения укороченных уравнений преобразуем систему (1.1) к виду

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{g}{C} \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} - \frac{\mu}{C} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \Psi \left(-\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{C_1}{C} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.3)$$

затем, подставляя в (1.3) решение в виде (1.2) и учитывая, что $f_{1,2}$ являются решениями (1.3), получим уравнение, связывающее величины первого порядка малости по μ . После перехода к бегущим координатам это уравнение можно записать в виде

$$\sum_{1,2} v_{1,2}^2 \left\{ \frac{\partial^4 W}{\partial \xi_{1,2}^4} + \left(1 - 2 \frac{v_1 v_2}{v_{1,2}^2} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - 2 \left(1 - \frac{v_1 v_2}{v_{1,2}^2} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi_{1,2}^3 \partial \xi_{2,1}} - \right. \\ \left. - \frac{g/C}{v_{1,2}} \left[\frac{\partial^3 W}{\partial \xi_{1,2}^3} - \left(2 - \frac{v_{2,1}}{v_{1,2}} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_{2,1}} \right] + \left(\frac{1}{LC v_{1,2}^2} - \frac{C_1}{C} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_{1,2}^2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{LC v_{1,2}^2} + \frac{C_1}{C} \right) \frac{v_1 v_2}{v_{1,2}^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right\} = H(\xi_1, \xi_2). \quad (1.4)$$

Функция H в правой части (1.4) представляет собой сумму нелинейных членов и членов с первыми производными от медленных амплитуд $A_{1,2}$ и фаз $\varphi_{1,2}$.

Поскольку переменные $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ определены лишь с точностью до величин порядка μ , функция $W(\xi_1, \xi_2)$ также определена неоднозначно. Учитывая это, всегда можно выбрать $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ таким образом, чтобы произвольная линейная функция** $\hat{L}_{1,2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{1,2}} \right) W(\xi_1, \xi_2)$ была ортогональна k -ой и $(k+1)$ -ой производным от функций f_1 и f_2 ($k = 1, 2, \dots$).

Действительно, изменив $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ на малые величины ($\sim \mu$), зависящие от значения k , решение (1.2) можно представить в виде

* Поскольку v_1 и v_2 в общем случае различны, периодические функции f_1 и f_2 могут существенно различаться по форме. Заметим также, что решения, представляющие результат взаимодействия волн, распространяющихся в одном направлении ($|v_1 - v_2|/v_{1,2} \gg \mu$), рассматриваются аналогично.

** Здесь $\hat{L}_{1,2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{1,2}} \right)$ — линейный дифференциальный оператор по ξ_1 или по ξ_2 .

$$u = \bar{A}_1 f_1(v_1 t - z + \bar{\varphi}_1) + \bar{A}_2 f_2(v_2 t + z + \bar{\varphi}_2) + \mu \bar{W}. \quad (1.5)$$

Здесь $\bar{A}_{1,2} = A_{1,2} + \mu \frac{\psi_{1,2}}{N_{1,2}}$, $\bar{\varphi}_{1,2} = \varphi_{1,2} + \mu \frac{\chi_{1,2}}{M_{1,2}}$,

$$\bar{W} = W - \sum_{1,2} \left(\frac{\psi_{1,2}}{N_{1,2}} f_{1,2} + \frac{\chi_{1,2}}{M_{1,2}} f'_{1,2} \right), \quad \psi_{1,2} = \int_{\xi_{1,2}}^{\xi_{1,2} + \lambda_{1,2}} \hat{L}_{1,2} W(\xi_1, \xi_2) f_{1,2}^k(\xi_{1,2}) d\xi_{1,2},$$

$$\chi_{1,2} = \int_{\xi_{1,2}}^{\xi_{1,2} + \lambda_{1,2}} \hat{L}_{1,2} W(\xi_1, \xi_2) f_{1,2}^{k+1}(\xi_{1,2}) d\xi_{1,2}, \quad N_{1,2} = \int_{\xi_{1,2}}^{\xi_{1,2} + \lambda_{1,2}} \hat{L}_{1,2} f_{1,2} f_{1,2}^k d\xi_{1,2},$$

$$M_{1,2} = \int_{\xi_{1,2}}^{\xi_{1,2} + \lambda_{1,2}} \hat{L}_{1,2} f'_{1,2} f_{1,2}^k d\xi_{1,2},$$

где $\lambda_{1,2}$ — пространственный период функции $f_{1,2}$. Легко убедиться, что для преобразованного таким образом решения выполняются условия

$$\int_{\xi_{1,2}}^{\xi_{1,2} + \lambda_{1,2}} \hat{L}_{1,2} \bar{W} f_{1,2}^k d\xi_{1,2} = \int_{\xi_{1,2}}^{\xi_{1,2} + \lambda_{1,2}} \hat{L}_{1,2} \bar{W} f_{1,2}^{k+1} d\xi_{1,2} = 0. \quad (1.6)$$

Пользуясь условиями ортогональности (1.6), нетрудно показать справедливость более общих соотношений

$$\int_{\xi_1}^{\lambda_1} \int_{\xi_2}^{\lambda_2} \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) W f_{1,2}^k d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\xi_1}^{\lambda_1} \int_{\xi_2}^{\lambda_2} \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) W f_{1,2}^{k+1} d\xi_1 d\xi_2 = 0, \quad (1.7)$$

где $\hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)$ — линейный дифференциальный оператор в частных

производных по двум переменным ξ_1 и ξ_2 . Пусть теперь $\hat{L}W$ есть левая часть уравнения (1.4), тогда, согласно этому уравнению, условиям (1.7), должна удовлетворять и функция $H(\xi_1, \xi_2)$, т. е.

$$\int_{\xi_1}^{\lambda_1} \int_{\xi_2}^{\lambda_2} H(\xi_1, \xi_2) \frac{f_{1,2}^k}{f_{1,2}^{k+1}} d\xi_1 d\xi_2 = 0. \quad (1.8)$$

Укороченные (усредненные) уравнения относительно медленных переменных $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ получаются после подстановки в (1.8) конкретной функции $H(\xi_1, \xi_2)$; двойной интеграл в (1.8), нормированный на $\lambda_1 \lambda_2$, представляет среднее от подинтегральной функции по явно входящим ξ_1 и ξ_2 . При разных k из (1.8) будут получаться, вообще говоря, различные усредненные уравнения. Однако эти различные уравнения согласно (1.5) должны описывать функции $A_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$, различающиеся лишь на величины $\sim \mu$. Имеющийся произвол в выборе k при получении укороченных уравнений естественно использовать в целях удобства усреднения.

Пусть нелинейность $\Psi\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ имеет вид

$$\Psi\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \alpha g \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3. \quad (1.9)$$

Как показано в [6, 7], система (1.1), (1.9) имеет стационарные решения в виде периодических бегущих волн f_1 и f_2 . Учитывая (1.9), для функции $H(A_{1,2}, A'_{1,2}, \dot{\varphi}_{1,2}, \varphi'_{1,2}, \xi_{1,2}, v_{1,2})$ согласно (1.2), (1.3) получим*

$$\begin{aligned} H = & -2 \sum_{1,2} v_{1,2} \left[\dot{A}_{1,2} \left(f_{1,2}'' - \frac{C_1}{C} f_{1,2}' \right) + A_{1,2} \dot{\varphi}_{1,2} \left(f_{1,2}'''' - \frac{C_1}{C} f_{1,2}'' \right) \mp \right. \\ & \mp v_{1,2} A'_{1,2} \left(f_{1,2}''' + \frac{1}{LCv_{1,2}^2} f_{1,2}' \right) \mp v_{1,2} A_{1,2} \dot{\varphi}'_{1,2} \left(f_{1,2}'''' + \frac{1}{LCv_{1,2}^2} f_{1,2}'' \right) \left. \right] + \\ & - \frac{g}{2Cv_{1,2}} \left(\dot{A}_{1,2} f_{1,2}'' + A_{1,2} \dot{\varphi}_{1,2} f_{1,2}'' \right) \pm \frac{g}{C} \left(A'_{1,2} f_{1,2}' + A_{1,2} \varphi'_{1,2} f_{1,2}'' \right) \left. \right] + \\ & + 3 \frac{\mu \alpha g}{C} \sum_{1,2} v_{1,2} \left[A_{1,2} (A_{1,2}^2 - 1) (2f_{1,2}''^2 f_{1,2}' + f_{1,2}'^2 f_{1,2}'') - \right. \\ & \left. - A_{1,2}^2 A_{2,1} (2f_{1,2}'^2 f_{2,1}' - f_{1,2}'^2 f_{2,1}'' + 2f_{1,2}' f_{2,1}' f_{1,2}'') \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.8) и учитывая медленность $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$, после усреднения получим для амплитуд и фаз укороченные уравнения, описывающие нестационарные процессы в исследуемой системе**. Эти уравнения таковы (считаем $k=2$):

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1,2} \gamma_0^{1,2} \pm m'_{1,2} v_{1,2} \gamma_1^{1,2} = & -\mu \frac{3\alpha g}{C} m_{1,2} \left[\gamma_1^{1,2} (m_{1,2} - 1) + \right. \\ & \left. + \frac{v_{2,1}}{v_{1,2}} \gamma_2^{1,2} m_{2,1} \right] + \frac{g}{Cv_{1,2}} \gamma_4^{1,2} (\dot{\varphi}_{1,2} \mp 2v_{1,2} \varphi'_{1,2}) m_{1,2}; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{1,2} \gamma_0^{1,2} \pm \varphi'_{1,2} v_{1,2} \gamma_1^{1,2} = & \mu \frac{3\alpha g}{C} (m_{1,2} - 1) \gamma_3^{1,2} - \\ & - \frac{g}{2Cv_{1,2} m_{1,2}} \gamma_5^{1,2} (\dot{m}_{1,2} \mp 2v_{1,2} m'_{1,2}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

В (1.11), (1.12) введены обозначения $m_{1,2} = A_{1,2}^2$,

$$\begin{aligned} \gamma_0^{1,2} = & \langle f_{1,2}''^2 \rangle + \frac{C_1}{C} \langle f_{1,2}'^2 \rangle, \quad \gamma_1^{1,2} = \frac{1}{LCv_{1,2}^2} \langle f_{1,2}''^2 \rangle - \langle f_{1,2}'^2 \rangle, \\ \gamma_2^{1,2} = & \langle f_{1,2}'^2 f_{1,2}''^2 \rangle - \frac{2}{3} \langle f_{1,2}'^4 \rangle, \quad \gamma_3^{1,2} = \langle f_{1,2}'^2 \rangle \langle f_{1,2}''^2 \rangle, \\ \gamma_4^{1,2} = & \frac{1}{2} \langle f_{1,2}'^3 f_{1,2}' \rangle, \quad \gamma_5^{1,2} = \langle f_{1,2}''^2 \rangle, \quad \gamma_5^{1,2} = \langle f_{1,2}'^2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.13)$$

* Поскольку $\dot{A}_{1,2}$, $\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{\partial}{\partial t} A_{1,2}$, $\dot{\varphi}_{1,2}$ и $A'_{1,2}$, $\varphi'_{1,2} = \frac{\partial}{\partial z} A_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ — медленные функции, их преобразование к координатам ξ_1 и ξ_2 не является необходимым.

** Использовавшиеся при усреднении свойства периодических функций легко доказываются интегрированием по частям.

Скобки $\langle \rangle$ обозначают среднее от периодической функции по ее аргументу (ξ_1 или ξ_2)*.

Для медленно меняющихся решений параметры $\gamma_i^{1,2}$ однозначно определяются величиной скорости $\bar{v}_{1,2} = v_{1,2} + \varphi_{1,2}$, поэтому укороченные уравнения для $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$, полученные с помощью усреднения по стационарным волнам, в общем случае позволяют исследовать и такие нестационарные процессы, при которых изменяется форма периодических волн, образующих решение. В частности, с помощью укороченных уравнений можно рассмотреть переходные процессы между стационарными решениями, образованными как одинаковыми, так и различными периодическими функциями.

Существенно отметить, что рассмотренный метод получения укороченных уравнений не зависит от конкретного вида исследуемой слабонелинейной системы (в том числе и от того, является система консервативной или неконсервативной). Необходимым условием его применения является лишь существование в системе периодических решений в виде стационарных бегущих волн.

2. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СИСТЕМЕ

Прежде чем перейти к исследованию системы (1.11), (1.12), отметим некоторые особенности ее решений, которые непосредственно следуют из вида уравнений и связаны с усреднением не по гармоническим функциям.

В работе [5] показано, что в слабонелинейных системах с сильной дисперсией, обладающих, как и рассматриваемая система, лишь диссипативной нелинейностью**, отсутствует фазовое взаимодействие встречных волн, а частота колебаний не зависит от характера решения. Этот результат согласуется с полученными уравнениями (1.12) (если усреднение проводится по гармоническим функциям, то $\gamma_3 = 0$), однако в общем случае произвольной дисперсии фазовое взаимодействие между встречными волнами имеет место даже в случае чисто диссипативного характера нелинейности. Такое взаимодействие, в частности, приводит к зависимости частоты колебаний от характера стационарного решения.

Укороченные уравнения относительно медленных переменных $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ существенно проще исходных, тем не менее их полный анализ весьма затруднителен.

Остановимся на некоторых классах решений (1.11), (1.12), предполагая, что встречные волны распространяются с одинаковыми скоростями $v_{1,2} = v$ и, следовательно, имеют одинаковую форму. Поступая аналогично [5], при $\varphi_{1,2} = 0$ *** легко найти решения (1.11) в виде стационарных бегущих волн огибающих:

$$m_{1,2} = m_{1,2} \left[v \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} (1+R)t + (1-R)z \right], \quad (2.1)$$

* Поскольку при выводе (1.10)–(1.12) предполагалось, что $\Psi(A_{1,2}f_{1,2}) \sim A_{1,2}\Psi(f_{1,2})$, полученные уравнения очевидно несправедливы при больших значениях амплитуд ($m_{1,2} \gg 1$).

** В [5] рассматривались квазитгармонические решения. Очевидно, что наличие таких решений в слабонелинейной диспергирующей системе возможно лишь при ее близости к консервативной; поэтому при сравнении с [5] здесь и в дальнейшем следует считать $g = \mu g$.

*** Подобные решения существуют и при $\varphi_{1,2} = 0$.

где $\bar{\gamma} = \gamma + 2(g/Cv)^2 \gamma_4 \gamma_5 / \gamma$, $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0 - (g/Cv)^2 \gamma_4 \gamma_5 / 2\gamma$. Волны амплитуд $m_{1,2}$ распространяются в одну и ту же сторону со скоростью

$$V = v \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} \frac{1 + R}{1 - R}, \quad (2.2)$$

где R — произвольная константа, определяющая характер решения. Связь между переменными m_1 и m_2 в решении вида (2.1) определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dm_1}{dm_2} = R \frac{m_1 [\bar{\gamma}_1(m_1 - 1) + \gamma_2 m_2]}{m_2 [\bar{\gamma}_1(m_2 - 1) + \gamma_2 m_2]} \quad (2.3)$$

(здесь $\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + 2(g/Cv)^2 \gamma_3 \gamma_4 / \gamma$), которое может рассматриваться как уравнение интегральных кривых на плоскости m_1, m_2 .

Рассмотрим стационарные по времени решения в исследуемой системе. Полагая $\dot{m}_{1,2} = \dot{\varphi}_{1,2} = 0$, при $v_{1,2} = v$ вместо (1.11), (1.12) получим

$$m'_{1,2} = \mp \mu \frac{3ag}{Cv\bar{\gamma}} m_{1,2} [\bar{\gamma}_1(m_{1,2} - 1) + \gamma_2 m_{2,1}]; \quad (2.4a)$$

$$\varphi'_{1,2} = \pm \mu \frac{3ag}{Cv\bar{\gamma}} [\bar{\gamma}_3(m_{1,2} - 1) - \bar{\gamma}_2 m_{2,1}], \quad (2.4b)$$

где $\bar{\gamma}_2 = (g/Cv) \gamma_2 \gamma_5 / \gamma$, $\bar{\gamma}_3 = \gamma_3 - (g/Cv) \gamma_1 \gamma_5 / \gamma$. Фазовый портрет системы (2.4a) существенно зависит от соотношения параметров γ_1 и γ_2 . Согласно (1.13) $\gamma_2 > 0$, а знак и величина $\bar{\gamma}_1$ (так же, как и величины всех остальных параметров) зависят от вида периодической функции f . Изменение параметра $\bar{\gamma}$ не влияет на характер интегральных кривых на плоскости m_1, m_2 , существенен лишь знак $\bar{\gamma}$, при смене которого меняется на противоположное направление движения по траекториям. Проинтегрировав (2.4a), находим уравнение интегральных кривых:

$$m_1 m_2 |1 - (m_1 + m_2)|^{\rho-1} = D, \quad (2.5)$$

$$(\rho = \bar{\gamma}_2 / \bar{\gamma}_1; \quad D > 0).$$

Качественное разбиение фазовой плоскости m_1, m_2 на траектории при различных $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ приведено на рис. 1. Фазовые портреты рис. 1а, б и в соответствуют областям I, II и III плоскости параметров $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ (рис. 2). Разбиение фазовой плоскости при $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$, принадлежащих к области IV, качественно совпадает с рис. 1б, если направление движения по траекториям изменить на противоположное. Бифуркационному значению $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$ соответствует фазовый портрет, представленный на рис. 1г, траектории в этом случае имеют вид гипербол. При другом бифуркационном значении — $\bar{\gamma}_1 = 0$ — фазовые траектории — прямые $m_1 = -m_2 + d$.

Таким образом, в слабонелинейной безграничной линии могут существовать несколько различных классов стационарных решений, соответствующих различным областям, на которые разбиваются в пространстве параметров $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ периодические функции $f_{1,2}$, образующие эти решения. Определенный класс решений будем обозначать той же цифрой, что и область на плоскости $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$, которой он соответствует. Реше-

ния, принадлежащие к разным классам, могут быть реализованы при различных начальных условиях в одной и той же системе, но они имеют различные частоты. Заметим, что к классу I принадлежат решения, образованные гармоническими и близкими к ним функциями

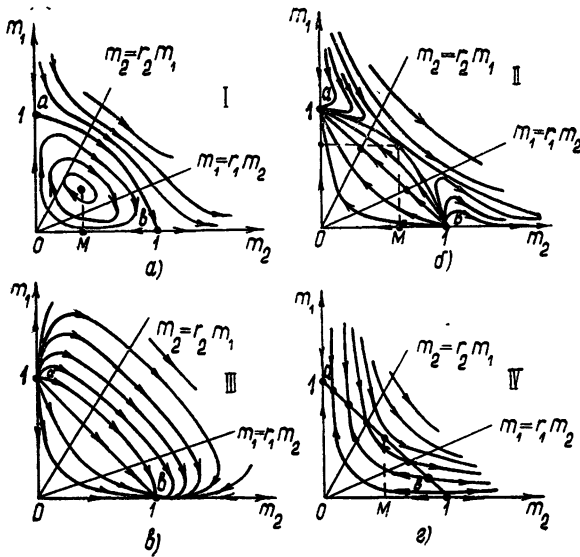


Рис. 1.

(если $f_{1,2} = a \sin(\omega t \mp kz)$, то $\bar{\gamma} = \frac{a^2 k^4}{2} \frac{C_1}{C}$, $\gamma_1 = a^4 \frac{k^8}{8}$, $\gamma_2 = a^4 \frac{k^8}{4}$),

а к остальным классам — решения, образованные большинством релаксационных функций.

Проанализируем качественно характер решений в безграничной линии. Состояния равновесия на плоскости m_1, m_2 соответствуют решениям с постоянной в пространстве амплитудой, точки $a(1,0)$ и $b(0,1)$ — бегущим стационарным волнам $u = f_1$, $u = f_2$,

точка $M \left(m_1 = m_2 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \right)$ — реше-

нию вида $u = M^{1/2}(f_1 + f_2)$. Если f — почти гармоническая функция, то это решение имеет характер стоячих волн.

Если же f существенно несинусоидальна, то это весьма своеобразное решение, для которого форма колебаний во времени зависит от координаты вдоль линии и существенно меняется уже на расстояниях порядка длины волн λ (из-за сдвига быстрой разности фаз между f_1 и f_2) В случае, когда решение носит релаксационный характер, такое изменение может привести к уширению и сужению импульсов, изменению крутизны фронта и т. д. Среди решений класса III (рис. 1а) таких решений не существует. Ограниченным решениям, возможным лишь в безграничной системе, соответствуют сепаратрисы $0a$, $b0$ и ab для решений класса I и бесконечное множество траекторий, соединяющих состояния равновесия для решений других классов.

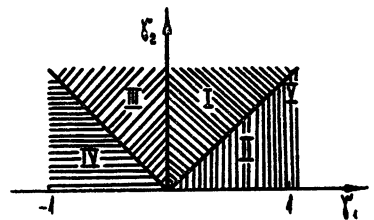


Рис. 2.

Отличительной особенностью решений, принадлежащих к классу I, является то, что среди них возможны решения, периодически изменяющиеся в пространстве. Причем периодически меняется как амплитуда бегущих волн, так и средняя плотность энергии $W = m_1 + m_2$; средний поток энергии периодически меняет направление в зависимости от того, какая из величин m_1, m_2 преобладает.

Решения, аналогичные по характеру распределения амплитуды решениям класса I, были рассмотрены в работе [5], где на основании укороченных уравнений, полученных с помощью усреднения по гармоническим функциям, исследовалась диспергирующая активная линия с кубичной нелинейностью. Здесь следует отметить, что характер стационарных решений определенной частоты ω в слабонелинейной системе с сильной дисперсией определяется лишь видом нелинейности и по существу не зависит от характера дисперсии. Таким образом, решения для амплитуд, полученные с помощью усреднения по стационарным волнам, в случае квазисинусоидальности последних практически совпадают с аналогичными решениями, полученными с помощью усреднения по гармоническим функциям — решениям линейной задачи.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В ОТРЕЗКЕ ЛИНИИ

Применим полученные результаты к исследованию установившихся колебаний в отрезке активной линии длины l . Полагая, что нагрузка на концах чисто активная $u(0, t) = -R_0 I(0, t)$, $u(l, t) = R_l I(l, t)$ и учитывая медленность изменения переменных $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$, находим граничные условия для амплитуд встречных волн ($v_{1,2} = v$)

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{C_1 R_0 v - 1}{C_1 R_0 v + 1} \right)^2 = r_1 \quad \text{при } z = 0,$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{C_1 R_l v - 1}{C_1 R_l v + 1} \right)^2 = r_2 \quad \text{при } z = l \quad (3.1)$$

$$(r_{1,2} \leq 1)$$

и фаз

$$\varphi_1(0) - \varphi_2(0) = k\lambda, \quad \varphi_1(l) - \varphi_2(l) = -2l + n\lambda \quad (3.2)$$

$$(k, n = 1, 2, \dots).$$

Граничные условия (3.1) на плоскости m_1, m_2 изображаются прямыми $m_1 = r_1 m_2$, $m_2 = r_2 m_1$. Фазовые траектории, соответствующие решениям рассматриваемой краевой задачи, должны начинаться на первой из прямых и заканчиваться на второй, причем интервал изменения z на этих траекториях должен быть равен l . Очевидно, первому требованию удовлетворяют лишь траектории, лежащие в области aOb для решений классов I, II и V (рис. 1). Решения классов III и IV могут быть реализованы в отрезке активной линии только в случае, если параметр γ периодических функций, образующих решения этих классов, отрицателен. Здесь учтено, что физический смысл могут иметь лишь те решения укороченных уравнений (1.11), для которых величины $m_{1,2}$ ($A_{1,2}$) остаются величинами ~ 1 .

Для выяснения зависимости формы колебаний от координаты вдоль линии и определения частот автоколебаний в отрезке необходимо рассмотреть фазовые уравнения (2.4б). Пространственный период функций, образующих стационарное решение, определяется из (2.4б) при учете (3.2) в виде

$$\lambda = 2l/p - \mu x/p \left[2l - \int_0^l (m_1 + m_2) dz \right] \quad (3.3)$$

$$(p = 1, 2, \dots),$$

где $x = \text{Зар}(\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1)/C\sigma\bar{\gamma}$. Частота стационарного решения определяется как $\nu = \nu/\lambda$. В частном случае синусоидальных функций $\lambda = 2l/p$ и не зависит от характера установившегося процесса. При этом в отрезке линии с $l > l_{кр}$ возможно конечное число различных нелинейных колебаний, имеющих одинаковую частоту ($\nu = \nu p/2l$); с увеличением длины отрезка число этих колебаний растет. Форма колебаний в этом случае одинакова во всех точках линии. Изменение формы колебаний вдоль линии в случае, когда стационарное решение образовано существенно несинусоидальными функциями, легко найти интегрированием (2.46).

В заключение отметим, что для ответа на вопрос о реализации того или иного стационарного решения необходимо исследовать устойчивость этих решений.

Автор благодарен А. В. Гапонову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов и Г. И. Фрейдману и Е. И. Якубовичу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, 46, № 3, 963 (1964)
2. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 91 (1965).
3. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
4. Л. А. Островский, ЖТФ, 33, № 8, 905 (1963).
5. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 987 (1966)
6. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 173 (1966).
7. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 794 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 мая 1966 года

AN AVERAGING METHOD OVER STATIONARY WAVES

M. I. Rabinovich

The method of averaging over periodical functions, the solutions of the problem on the stationary travelling waves in nonlinear one-dimensional distributed systems is proposed. The method is applied to obtain the approximate equations describing the stationary and close to them non-stationary processes in the same systems.

The steady processes in unbounded and limited lines and some nonstationary ones possible in an unbounded system are examined on the basis of averaged equations of a slightly nonlinear line which can be written with the help of the method proposed.

УДК 621.396.668

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ НА КАЧЕСТВО ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ

Л. П. Зачепицкая

Произведена сравнительная оценка влияния фазовых искажений на уменьшение средней пиковой мощности радиолокационного сигнала на выходе согласованного фильтра приемника для случая, когда источник искажений охвачен кольцом фазовой автоподстройки.

Известно, что для оптимальной обработки радиолокационного сигнала необходимо, чтобы импульсная характеристика согласованного фильтра приемника и зондирующий сигнал передатчика были зеркально симметричны во времени [1]. Подобная жесткая связь зондирующего сигнала и импульсной характеристики приемника может быть обеспечена за счет фазовой автоподстройки (ФАП) возбудителя передатчика под отклик согласованного фильтра приемника. Однако и в этом случае возможно искажение зондирующего сигнала в тракте передачи мощности, что связано с неравномерностью частотной характеристики тракта в пределах спектра сигнала.

Подобные искажения зондирующего сигнала приводят к ухудшению качества оптимальной обработки [2] и, в частности, к уменьшению отношения сигнал/шум. Для уменьшения искажающего действия передающего тракта сигнал на фазовый детектор системы ФАП может быть взят с выхода передающего устройства. При этом источник фазовой нестабильности оказывается включенным в кольцо автоподстройки, за счет чего влияние фазовых искажений может быть ослаблено.

В настоящей работе производится количественная оценка качества оптимальной обработки линейно-частотно-модулированного радиолокационного сигнала при наличии фазовых искажений в случае, когда источник искажений охвачен кольцом ФАП.

Блок-схема рассматриваемой системы изображена на рис. 1, где 1 — подстраиваемый линейно-частотно-модулированный генератор.

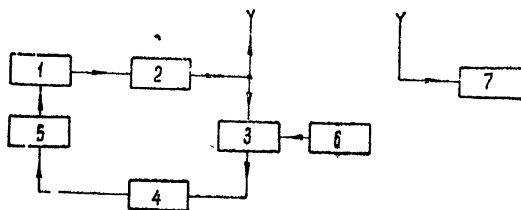


Рис. 1.

2 — искажающее звено со случайной фазочастотной характеристикой $\varphi(\omega)$, 3 — фазовый детектор, 4 — фильтр, 5 — реактивная лампа, 6 — эталонный линейно-частотно-модулированный генератор, сигнал которого

согласован с оптимальным фильтром приемника, 7 — приемник с согласованным фильтром.

В рассматриваемой схеме подстраиваемый генератор при разомкнутой системе ФАП является частотно модулированным по закону, близкому к закону линейной частотной модуляции эталонного генератора, который согласован с фильтром приемника. При прохождении линейно-частотно-модулированного сигнала подстраиваемого генератора через искажающую цепь со случайной фазочастотной характеристикой $\varphi(\omega)$ фазочастотные искажения переходят во временные флуктуации фазы $\hat{\varphi}(t)$ зондирующего сигнала. Сигнал ошибки на выходе фазового детектора определяется как отличием законов частотной модуляции подстраиваемого и эталонного генераторов, так и фазовыми флуктуациями $\hat{\varphi}(t)$.

1. Качество оптимальной обработки радиолокационного сигнала в приемнике будем характеризовать относительным уменьшением средней мощности сигнала в максимуме огибающей на выходе согласованного фильтра, которое можно представить в виде

$$m = 1 - \frac{\overline{F_1^2}}{F_0^2}, \quad (1)$$

где F_0^2 — квадрат пикового значения огибающей сигнала на выходе согласованного фильтра в отсутствие фазовых искажений, $\overline{F_1^2}$ — средний квадрат пикового значения огибающей сигнала на выходе согласованного фильтра при наличии фазовых искажений в высокочастотном тракте.

Учитывая, что коэффициент передачи согласованного фильтра является величиной комплексно-сопряженной со спектром сигнала, можно получить следующее выражение для величины m :

$$m = 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(x)|^2 |S(y)|^2 \overline{\cos[\varphi(x) - \varphi(y)]} dx dy}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |S(x)|^2 dx \right]^2}, \quad (2)$$

где $|S(\omega)|$ — модуль спектра радиолокационного сигнала. Черта сверху везде означает усреднение по ансамблю. Из приведенного выражения видно, что m не зависит от закона частотной модуляции сигнала, а определяется лишь модулем спектра сигнала и характером фазовых искажений.

Пусть случайная функция $\varphi(\omega)$ подчиняется нормальному закону распределения, а корреляционная функция $R(\omega_1, \omega_2) = \overline{\varphi(\omega_1) \varphi(\omega_2)}$ зависит лишь от разности частот $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, т. е. $R(\omega_1, \omega_2) = \sigma^2 r(\Omega)$, где $\sigma^2 = \overline{\varphi^2(\omega)}$, $r(\Omega)$ — коэффициент корреляции искажений; $\varphi(\omega)$ полагаем равным нулю. Принимая во внимание, что при сделанных предположениях $\overline{\cos[\varphi(x) - \varphi(y)]} = \exp\{-\sigma^2 [1 - r(x - y)]\}$, разлагая последнее выражение в ряд и ограничиваясь при $\sigma^2 < 1$ двумя первыми членами разложения, получим

$$m = \sigma^2 \left\{ 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(x)|^2 |S(y)|^2 r(x - y) dx dy}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |S(x)|^2 dx \right]^2} \right\}. \quad (3)$$

Переходя от коэффициента корреляции частотно-фазовых искажений $r(\Omega)$ к соответствующему фурье-представлению $S_{\varphi}(t)$, выражение (3) можно записать в виде

$$m = \sigma^2 \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|M(x)|^2}{|M(0)|^2} S_{\varphi}(x) dx \right], \quad (4)$$

где $S_{\varphi}(t)$ является функцией времени, $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(x)|^2 \exp(jxt) dx$ — фурье-представление квадрата модуля спектра частотно-модулированного сигнала на входе согласованного фильтра.

Выражение (4) становится особенно наглядным в случае прямоугольного линейно-частотно-модулированного сигнала. Если скорость изменения частоты достаточно мала, так что применим квазистатистический метод, то фазочастотные искажения $\varphi(\omega)$ переходят в стационарные временные флуктуации фазы $\hat{\varphi}(t) = \varphi(\omega_0 + at) = \varphi(\omega)$, где ω_0 и a — соответственно средняя частота и скорость изменения частоты линейно-частотно-модулированного сигнала. При этом $r(\Omega)$ переходит в $r(\tau)$ — коэффициент корреляции временных флуктуаций фазы $\hat{\varphi}(t)$ зондирующего сигнала, $S_{\varphi}(t)$ переходит в $S_{\varphi}(\Omega)$ — нормированный спектр мощности флуктуаций фазы, а

$$\frac{|M(t)|^2}{|M(0)|^2} = \frac{\sin^2(\Omega T)}{\Omega^2 T^2} \quad (\Delta f T \gg 1),$$

где Δf — девиация частоты в импульсе, T — длительность импульса.

Таким образом, в случае медленной линейной частотной модуляции при достаточно большой девиации в импульсе

$$m = \sigma^2 \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\Omega T)}{\Omega^2 T^2} S_{\varphi}(\Omega) d\Omega \right]. \quad (5)$$

В этом выражении под интегралом стоит нормированный спектр, для которого $\int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi}(\Omega) d\Omega = 1$, взятый с весовым множителем $\sin^2(\Omega T)/\Omega^2 T^2$.

Поэтому только в случае достаточно узкополосного (по сравнению с $1/T$) спектра флуктуаций $S_{\varphi}(\Omega)$, когда значение весовой функции близко к единице, флуктуации фазы не приводят к уменьшению средней мощности сигнала на выходе согласованного фильтра ($m \approx 0$). Иными словами, как видно из (4) и (5), основные потери сигнала при согласованной обработке, связанные с фазовыми флуктуациями, возникают в этом случае благодаря высокочастотным составляющим спектра флуктуаций с частотами вне полосы спектра квадрата огибающей сигнала. Во временной трактовке основные потери возникают благодаря таким флуктуациям фазы, время корреляции которых меньше длительности сигнала.

Медленные флуктуации фазы, время корреляции которых больше длительности сигнала, не вызывают уменьшения мощности сигнала. Физически это объясняется тем, что при согласованной обработке сигнала в его максимуме векторно складываются отдельные составляющие. При этом медленные флуктуации фазы приводят к почти синфазному повороту всех составляющих, что вызывает лишь сдвиг фазы результирующего сигнала на выходе согласованного фильтра. С другой стороны,

быстрые флуктуации приводят к случайным взаимным фазовым сдвигам отдельных составляющих сигнала и вызывают тем самым уменьшение его пикового значения.

2. Если охватить источник фазовых искажений кольцом фазовой автоподстройки, то система ФАП изменит характер фазовых флуктуаций. Согласно (4) и (5) одновременно изменится и влияние искажающего фазу звена на степень уменьшения средней пиковой мощности сигнала на выходе согласованного фильтра. Чтобы определить, как система ФАП преобразует спектр фазовых флуктуаций в зондирующем сигнале, составим уравнение, описывающее поведение $\eta(t)$ — разности фаз зондирующего сигнала и сигнала эталонного генератора на выходе системы. При этом ограничимся случаем малых η , когда система достаточно хорошо описывается уравнением, линеаризованным относительно равновесной фазы.

В линейном приближении характеристики остаточных флуктуаций фазы в сигнале, вызванных действием искажающего звена, не чувствительны к отличию законов частотной модуляции подстраиваемого и эталонного генераторов (воздействие двух аддитивных источников на линейную систему). Поэтому для простоты примем, что законы модуляции точно совпадают. При этом линеаризованное уравнение для разности фаз η оказывается таким же, как и для генератора без частотной модуляции со средней частотой ω_0 и с четырехполосником в кольце ФАП, вносящим временные фазовые флуктуации $\hat{\varphi}(t)$.

Это уравнение в операторной форме имеет вид

$$j\Omega\eta + \frac{1}{\tau_0} K(j\Omega)\eta = j\Omega\hat{\varphi}, \quad (6)$$

где $K(j\Omega)$ — нормированный коэффициент передачи фильтра, причем $K(0) = 1$; $\tau_0 = 1/\Omega_0 G'(\psi_0)$ — постоянная времени системы ФАП с идеальным прямоугольным фильтром; Ω_0 — полоса синхронизации; $G'(\psi_0)$ — крутизна нормированной характеристики фазового детектора в точке равновесной фазы; ψ_0 — значение равновесной фазы генератора, определяемое расстройкой средних частот генераторов.

Как следует из уравнения (6), выражение для спектра мощности S_η фазовых флуктуаций в зондирующем сигнале имеет следующий вид:

$$S_\eta(\Omega) = W(\Omega) S_\varphi(\Omega), \quad (7)$$

где

$$W(\Omega) = \Omega^2 \left\{ \Omega^2 + \frac{1}{\tau_0} \operatorname{Re} [j\Omega K^*(j\Omega)] + \frac{1}{\tau_0^2} K(j\Omega) K^*(j\Omega) \right\}^{-1}. \quad (8)$$

Для флуктуаций фазы функция $W(\Omega)$ представляет коэффициент передачи системы ФАП по мощности. Из формулы (8) можно заключить, что

$$W(0) = 0, \quad W'_\Omega(0) = 0; \quad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} W(\Omega) = 1,$$

если $|K(j\Omega)|$ ограничено.

Это означает, что система ФАП эффективно подавляет низкочастотные составляющие спектра флуктуаций фазы. Качественно зависимость $W(\Omega)$ при монотонном $|K(j\Omega)|$ изображена на рис. 2. Полоса частот, в которой система ФАП эффективно подавляет фазовые флуктуации, зависит от τ_0 , а также от вида фильтра в цепи обратной связи. Как следует из (8), для увеличения полосы подавления необходимо уменьшать

τ_0 (увеличивать полосу синхронизации) и увеличивать $|K(j\Omega)|$. Заметим, что при фиксированном $|K(j\Omega)|$ лучшее подавление обеспечивает фильтр, у которого $\text{Re}[j\Omega K^*(j\Omega)] > 0$. С этой точки зрения из фильтров типа $K(j\Omega) = (1 + j\Omega T_1)/(1 + j\Omega T_2)$ лучшим является форсирующий фильтр, соответствующий $T_1/T_2 > 1$, поскольку только для форсирующего фильтра $|K(j\Omega)| > 1$ и $\text{Re}[j\Omega K^*(j\Omega)] = \Omega^2(T_1 - T_2)/(1 + T_2^2\Omega^2) > 0$.

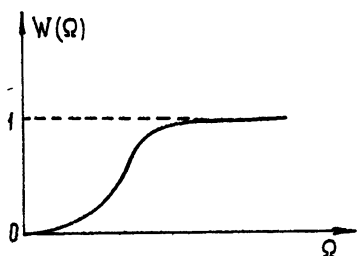


Рис. 2.

С другой стороны, если не учитывать запаздывания в высокочастотном тракте, как это делается в настоящей работе, то при использовании форсирующего звена (как и в случае идеального прямоугольного фильтра) полоса захвата равна после синхронизации [3]. Наличие запаздывания, как известно, приводит к сокращению полосы захвата. В этом случае, используя в качестве $K(j\Omega)$ форсирующее звено, можно, по-видимому, частично скомпенсировать задержку, имеющуюся в высоко-

частотном фильтре, и тем самым приблизить полосу захвата к полосе синхронизации.

Таким образом, если основным источником помехи в цепи ФАП являются фазовые флуктуации, вносимые каскадами, стоящими после подстраиваемого генератора, то лучшим из фильтров типа $K(j\Omega) = (1 + j\Omega T_1)/(1 + j\Omega T_2)$ является форсирующий фильтр.

Вопрос о выборе параметров фильтра $K(j\Omega)$, если в цепи ФАП действуют другие источники помех, рассматривался в [4-6]. В этих работах для фильтрации внешних помех, а также внутренних, действующих до низкочастотного фильтра, рекомендуется использовать пропорционально интегрирующий фильтр. При одновременном действии нескольких источников флуктуаций в цепи ФАП вопрос о выборе фильтра $K(j\Omega)$ должен решаться в зависимости от конкретного характера этих помех, в частности, — от соотношения интенсивностей и распределения мощности флуктуаций по спектру, а также от требований, предъявляемых к полосе захвата.

3. Выяснив, каким образом система ФАП преобразует фазовые флуктуации в сигнале, запишем среднее уменьшение пиковой мощности сигнала на выходе согласованного фильтра для случая, когда источник фазовых искажений охвачен кольцом ФАП:

$$m = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \Omega T}{\Omega^2 T^2} \right) W(\Omega) S_{\varphi}(\Omega) d\Omega, \quad (9)$$

где W дается соотношением (8). В выражении (9) $W(\Omega) S_{\varphi}(\Omega)$ — измененная системой ФАП спектральная плотность фазовых флуктуаций, σ^2

$\int_{-\infty}^{\infty} W(\Omega) S_{\varphi}(\Omega) d\Omega$ — их интенсивность.

Для заданного характера фазовых искажений выражение (9) позволяет в зависимости от вида фильтра в цепи обратной связи определить среднее уменьшение пиковой мощности сигнала на выходе фильтра. Если, например, фазовые искажения таковы, что их коэффициент корреляции по частоте является экспоненциальной функцией, т. е.

$r(\Omega) = \exp(-|\Omega|/2\Delta\omega_{\text{кор}})$, а в цепи обратной связи ФАП стоит идеальный прямоугольный фильтр (что соответствует $W(\Omega) = \Omega^2\tau_0^2/(1 + \Omega^2\tau_0^2)$), то среднее уменьшение пиковой мощности m выражается через характеристики спектров сигнала и флуктуаций следующим образом:

$$m = \frac{\sigma^2}{1+z} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega_{\text{кор}}}{\Delta\omega} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega_{\text{кор}}}{\Delta\omega} \right)^2 \frac{1}{z-1} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{z} \exp\left(-2z \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_{\text{кор}}}\right) - \exp\left(-\frac{2\Delta\omega}{\Delta\omega_{\text{кор}}}\right) \right] \right\}, \quad (10)$$

где $z = \Delta\omega_{\text{кор}}/a\tau_0 = \tau_{\text{кор}}/\tau_0$ — отношение интервала корреляции по частоте $\Delta\omega_{\text{кор}}$ к девиации частоты в сигнале за время, равное постоянной времени системы ФАП τ_0 , или отношение времени корреляции временных флуктуаций фазы $\varphi(t)$ к постоянной времени системы ФАП.

На рис. 3 по формуле (10) построена зависимость m от отношения частотного интервала корреляции фазовых искажений к ширине спектра сигнала при различных значениях параметра z . Верхняя кривая на рис. 3 соответствует $z = 0$, т. е. случаю, когда источник фазовых искажений не охвачен кольцом ФАП. Нетрудно видеть, что среднее уменьшение пиковой мощности сигнала возрастает от нуля при $\Delta\omega/\Delta\omega_{\text{кор}} \ll 1$ до максимального значения, равного σ^2 и соответствующего фазовым флуктуациям со временем корреляции порядка длительности укороченного импульса $\tau_{\text{кор}} \sim 1/\Delta f$.

При $z \neq 0$ источник фазовых искажений охвачен кольцом ФАП, причем большим z соответствует более эффективная система автоподстройки (меньшие τ_0).

Из рис. 3 видно, что использование ФАП для ослабления влияния фазовых искажений на уменьшение пиковой мощности сигнала при оптимальной обработке наиболее эффективно в том случае, если фазовые флуктуации довольно быстрые, т. е. если $\Delta\omega/\Delta\omega_{\text{кор}} \geq 1^*$. Для этого система ФАП должна быть достаточно быстрой ($z > 1$).

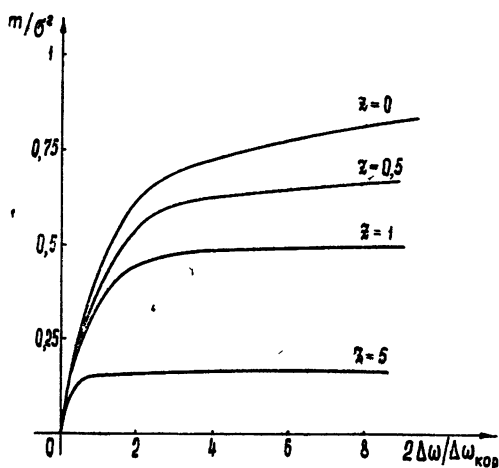


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Ширман и В. Н. Голиков, Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров, АРТА, Харьков, 1962.
2. Браун, Палермо, Зарубежная радиоэлектроника, № 3, 54 (1964).
3. Н. А. Губарь, ПММ, 25, вып. 6, 1011 (1961).

* При этом, если скорость изменения частоты в законе линейной частотной модуляции не слишком велика, т. е. $a \ll \Delta\omega_{\text{кор}}^2$, справедливо квазистатическое рассмотрение. Приведенное неравенство выполняется обычно в большинстве практически интересных случаев.

- 4 М. В. Капранов, Научн. докл. высш. школы—Радиотехника и электроника, № 1, 162 (1958).
- 5 С. В. Первачев, Радиотехника и электроника, 8, № 2, 334 (1963).
- 6 М. В. Капранов, Радиотехника, 11, 12, 37 (1956).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
13 апреля 1966 года.

EVALUATION OF INFLUENCE OF PHASE LOCK SYSTEM ON QUALITY
OF OPTIMAL SIGNAL PRECESSING IN THE PRESENCE OF
PHASE DISTORTIONS

L. P. Zachepitskaya

Gives a comparative evaluation of phase-distortion influence on decreasing the mean peak power of the radar signal at the output of a matched filter of the receiver in the case when the distortion source is embraced by the phase-lock system.

УДК 621.371.163.4

О ТРАЕКТОРИЯХ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ СО СЛАБЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В. И. Татарский

В работе показано, что в случае, когда малы флуктуации направления распространения, явные уравнения лучей, получаемые методом возмущений, применимы в области сильных флуктуаций амплитуды.

В среде со случайными неоднородностями показателя преломления в общем случае невозможно найти явные уравнения лучей. Однако их можно получить методом возмущений. Если исследовать поправки к полученному таким образом уравнению луча, используя следующий член ряда теории возмущений, то в качестве критерия применимости этого решения можно получить условие малости амплитудных флуктуаций [1]. Уравнения луча можно получить также при помощи другого процесса последовательных приближений, предложенного в [2]. При этом исходное приближение для уравнения луча совпадает с уравнением, получаемым методом возмущений. Однако следующее приближение этого метода включает бесконечную подпоследовательность ряда теории возмущений и требует для своего расчета применения более сложного математического аппарата, развитого в [2]. Ниже производится такое вычисление и находится поправка следующего порядка к уравнению луча. Настоящая работа является продолжением работы [2], и в ней используются те же обозначения. Ссылки на формулы работы [2] будут обозначаться как (k, I), где k — номер формулы из первой части работы, т. е. [2].

Если $\rho(x)$ — поперечное смещение луча от невозмущенной траектории $y = z = 0$, то, как показано в [2], уравнение луча с точностью до членов порядка $\langle \alpha^2 \rangle$ (где $\langle \alpha^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуаций направления луча) имеет вид (8, I)

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{2} \int_0^x \nabla_{\perp} \epsilon_1(\xi, \rho(x)) d\xi, \quad (1)$$

где $\epsilon_1(\xi, \rho)$ — отклонение диэлектрической проницаемости от среднего значения. В (1) учтено, что на границе $x = 0$ неоднородной области $x \geq 0$ выполняется условие $d\rho/dx = 0$. Проинтегрируем уравнение (1) по x . Тогда с учетом граничного условия $\rho(L) = 0$ (луч проходит через точку наблюдения $(L, 0, 0)$) получим

$$\rho(x) = -\frac{1}{2} \int_x^L dx' \int_0^{x'} \nabla_{\perp} \epsilon_1(\xi, \rho(x')) d\xi. \quad (2)$$

В качестве первого приближения используем выражение, получающееся из (2) при замене $\rho(x')$ под знаком интеграла нулем;

$$\rho_1(x) = -\frac{1}{2} \int_x^L dx' \int_0^{x'} \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi = -\frac{1}{2} \int_0^L M(L, x, \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi, \quad (3)$$

где

$$M(L, x, \xi) = \vartheta(x-\xi) (L-x) + \vartheta(\xi-x) (L-\xi),$$

а $\vartheta(x)=1$ при $x>0$ и $\vartheta(x)=0$ при $x<0$.

Следующее приближение $\rho_2(x)$ имеет вид

$$\rho_2(x) = -\frac{1}{2} \int_x^L dx' \int_0^{x'} \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho_1(x')) d\xi. \quad (4)$$

Оно получено путем подстановки (3) под знак интеграла в (2). Рассмотрим выражение

$$\delta\rho(x) = \rho_2 - \rho_1 = -\frac{1}{2} \int_x^L dx' \int_0^{x'} [\nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho_1(x')) - \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0)] d\xi, \quad (5)$$

представляющее собой поправку к уравнению луча, задаваемому формулой (3). Нас будет интересовать средний квадрат этой поправки:

$$\langle \delta\rho^2(x) \rangle = \frac{1}{4} \int_x^L dx' \int_x^L dx'' \int_0^{x'} d\xi' \int_0^{x''} d\xi'' A(x', x''; \xi', \xi''), \quad (6)$$

где

$$A(x', x''; \xi', \xi'') = \langle [\nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', \rho_1(x')) - \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', 0)] \times \\ \times [\nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi'', \rho_1(x'')) - \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi'', 0)] \rangle. \quad (7)$$

Рассмотрим более простое выражение

$$B(x', x''; \xi', \xi'') = \langle \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', \rho_1(x')) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi'', \rho_1(x'')) \rangle. \quad (8)$$

Так как $\rho_1(L)=0$, то (7) можно представить в виде

$$A(x', x''; \xi', \xi'') = B(x', x''; \xi', \xi'') - B(x', L; \xi', \xi'') - \\ - B(L, x''; \xi', \xi'') + B(L, L; \xi', \xi''). \quad (9)$$

Используя фурье-представление δ -функции, запишем (8) в виде восьмикратного интеграла:

$$B(x', x''; \xi', \xi'') = (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\alpha_1 \rho' + \alpha_2 \rho'')] \times \\ \times \langle \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', \rho') \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi'', \rho'') \exp\{-i[\alpha_1 \rho_1(x') + \alpha_2 \rho_1(x'')]\} \rangle d^2\alpha_1 d^2\alpha_2 d^2\rho' d^2\rho''. \quad (10)$$

Рассмотрим стоящее под знаком интеграла среднее значение

$$C = C(\alpha_1, \alpha_2; \rho', \rho''; x', x''; \xi', \xi'') = \langle \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', \rho') \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi'', \rho'') \times \\ \times \exp\{-i[\alpha_1 \rho_1(x') + \alpha_2 \rho_1(x'')]\} \rangle. \quad (11)$$

Для того, чтобы найти его, введем характеристический функционал (20,1)

$$\Phi[\mathbf{a}] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^L d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho a_k(\xi, \rho) \frac{\partial \varepsilon_1(\xi, \rho)}{\partial \rho_k} \right\} \right\rangle, \quad (12)$$

где по $k = 2, 3$ производится суммирование и $\mathbf{a}(\xi, \rho) = (a_2, a_3)$ — произвольное плоское векторное поле. Если в качестве \mathbf{a} взять функцию $\mathbf{a}^{(1)}$ вида

$$\mathbf{a}^{(1)} = \frac{1}{2} \delta(\rho) [\kappa_1 M(L, x', \xi) + \kappa_2 M(L, x'', \xi)], \quad (13)$$

то с учетом (3) и (12) получим

$$\Phi[\mathbf{a}^{(1)}] \equiv \varphi_0(\kappa_1, \kappa_2; x', x'') = \left\langle \exp \{-i[\kappa_1 \rho_1(x') + \kappa_2 \rho_1(x'')]\} \right\rangle. \quad (14)$$

С другой стороны, взяв вторую вариационную производную от (12), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{a}]}{\delta a_e(\xi', \rho') \delta a_m(\xi'', \rho'')} &= - \left\langle \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_e} \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_m} \times \right. \\ &\left. \times \exp \left\{ i \int_0^L d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho a(\xi, \rho) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho) \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Полагая в (15) $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(1)}$ и свертывая по индексам e, m , получим, сравнивая с (11),

$$C = - \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{a}]}{\delta a_e(\xi', \rho') \delta a_e(\xi'', \rho'')} \Big|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(1)}}. \quad (16)$$

Согласно (26, I) для функций \mathbf{a} , близких к $\mathbf{a}^{(1)}$, функционал $\Phi[\mathbf{a}]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi[\mathbf{a}] &= \exp \left\{ - \frac{1}{4} \int_0^L d\xi_1 \int_0^L d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 a_n(\xi_1, \rho_1) \times \right. \\ &\left. \times a_m(\xi_2, \rho_2) \frac{\partial^2 D_e(\xi_1 - \xi_2, \rho_1 - \rho_2)}{\partial \rho_{1n} \partial \rho_{1m}} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (17) в правую часть (16) и выполняя операции вариационного дифференцирования, после сравнительно простых выкладок можно получить формулу

$$\begin{aligned} - \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{a}]}{\delta a_e(\xi', \rho') \delta a_e(\xi'', \rho'')} &= \frac{1}{2} \Phi[\mathbf{a}] \Delta_{\perp} D_e(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'') - \\ - \frac{1}{4} \Phi[\mathbf{a}] &\left\{ \int_0^L d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho \frac{\partial^2 D_e(\xi - \xi', \rho - \rho')}{\partial \rho'_n \partial \rho'_e} a_n(\xi, \rho) \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_0^L d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho \frac{\partial^2 D_e(\xi - \xi'', \rho - \rho'')}{\partial \rho''_m \partial \rho''_e} a_m(\xi, \rho) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

В правую часть (18) необходимо подставить теперь функцию (13). При этом возникают выражения типа

$$I_e = \frac{1}{2} \kappa_{1n} \int_0^L M(L, x', \xi) \frac{\partial^2 D_e(\xi - \xi', \rho')}{\partial \rho'_n \partial \rho'_e} d\xi,$$

которые, как легко проверить, пользуясь формулой (3), можно записать следующим образом:

$$I_e = -2\alpha_{1n} \left\langle \rho_{1n}(x') \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_e} \right\rangle = -2 \left\langle (\alpha_1 \rho_1(x')) \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_e} \right\rangle.$$

С учетом приведенного равенства окончательное выражение для C принимает вид

$$C(\alpha_1, \alpha_2; \rho', \rho''; x', x''; \xi', \xi'') = \frac{1}{2} \varphi_0 \Delta_{\perp} D_{\varepsilon}(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'') - \\ - \varphi_0 \left\langle [\alpha_1 \rho_1(x') + \alpha_2 \rho_1(x'')] \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_e} \right\rangle \left\langle [\alpha_1 \rho_1(x') + \alpha_2 \rho_1(x'')] \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_e} \right\rangle. \quad (19)$$

Найденное выражение следует использовать для вычисления функции B согласно формуле (10). Поскольку нас интересует значение A , связанное с B уравнением (9), образуем соответствующую комбинацию функций C :

$$\tilde{C} = C(x', x'') - C(x', L) - C(L, x'') + C(L, L) \quad (20)$$

(остальные аргументы функций C для сокращения записи не указаны). Подставляя (19) в (20), легко получить формулу

$$\tilde{C} = -\varphi_0 \left\{ \left\langle (\alpha_1 \rho_1(x')) \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_e} \right\rangle \left\langle (\alpha_2 \rho_1(x'')) \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_e} \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle (\alpha_1 \rho_1(x')) \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_e} \right\rangle \left\langle (\alpha_2 \rho_1(x'')) \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_e} \right\rangle \right\}. \quad (21)$$

Функция A выражается через \tilde{C} при помощи соотношения

$$A = (2\pi)^{-4} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\alpha_1 \rho' + \alpha_2 \rho'')] \tilde{C} d^2 \rho' d^2 \rho'' d^2 x_1 d^2 x_2. \quad (22)$$

Заметим, что согласно (21) величина $\langle \delta \rho^2 \rangle$ связана с корреляцией между боковым смещением луча и градиентом ε_1 и при пренебрежении этой корреляцией исчезает.

Для дальнейших вычислений необходимо определить величину

$$S_{ij}(x, \xi, \rho) = \left\langle \rho_{1i}(x) \frac{\partial \varepsilon_1(\xi, \rho)}{\partial \rho_j} \right\rangle. \quad (23)$$

Она может быть найдена, если в (23) подставить выражение (3):

$$S_{ij}(x, \xi, \rho) = -\frac{1}{4} \int_0^L M(L, x, \xi') \frac{\partial^2 D_{\varepsilon}(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_i \partial \rho_j} d\xi'. \quad (24)$$

Далее оказывается удобным воспользоваться двумерным спектральным разложением (30, I), после чего можно приближенно выполнить интегрирование по ξ' . В результате получаем

$$S_{ij}(x, \xi, \rho) = \pi M(L, x, \xi) u_{ij}(\rho), \quad (25)$$

$$u_{ij}(\rho) = \iint_{-\infty}^{\infty} \rho_i \rho_j \exp(i\rho \rho) \Phi_{\varepsilon}(\rho) d^2 \rho, \quad (26)$$

где $\Phi_\varepsilon(p)$ — трехмерный спектр флуктуаций ε_1 . Подставляя (25), (26), (21) в (22), можно выполнить интегрирование по ρ', ρ'' , в результате чего появляется δ -функция от $\kappa_{1,2} + p$, а затем и интегрирование по p . В результате

$$A = -\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa_1 d^2\kappa_2 \varphi_0 \{ (L-x') (L-x'') \kappa_1^2 \kappa_2^2 + M(L, x'', \xi') M(L, x', \xi'') (\kappa_1 \kappa_2)^2 \} (\kappa_1 \kappa_2) \Phi_\varepsilon(\kappa_1) \Phi_\varepsilon(\kappa_2). \quad (27)$$

Выражение (27) следует подставить в (6). При этом может быть вычислен интеграл по ξ', ξ'' . Введем обозначение

$$G(x', x'') = \int_0^{x'} d\xi' \int_0^{x''} d\xi'' A(x', x''; \xi', \xi''), \quad (28)$$

так что

$$\langle \delta \rho^2(x) \rangle = \frac{1}{4} \int_x^L dx' \int_x^L dx'' G(x', x''). \quad (29)$$

Тогда для $G(x', x'')$ можно получить формулу

$$G(x', x'') = -\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa_1 d^2\kappa_2 \varphi_0(x', x''; \kappa_1, \kappa_2) \times \times \{ a(x', x'') \kappa_1^2 \kappa_2^2 + z(x', x'') (\kappa_1 \kappa_2)^2 \} (\kappa_1 \kappa_2) \Phi_\varepsilon(\kappa_1) \Phi_\varepsilon(\kappa_2), \quad (30)$$

где введены функции

$$a(x', x'') = x'(L-x') x''(L-x''); \quad (31)$$

$$z(x', x'') = \int_0^{x'} d\xi' \int_0^{x''} d\xi'' M(L, x'', \xi') M(L, x', \xi'') = L^2 x' x'' + \frac{x' x'' (x'^2 + x''^2)}{2} - \delta(x' - x'') \frac{L x''}{2} (x''^2 + 3x'^2) - - \delta(x'' - x') \frac{L x'}{2} (x'^2 + 3x''^2). \quad (32)$$

Для дальнейших вычислений необходимо знать величину $\varphi_0(x', x''; \kappa_1, \kappa_2)$, определяемую формулой (14). Так как $\rho_1(x)$ является гауссовской случайной величиной, легко показать, что

$$\varphi_0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle [\kappa_1 \rho_1(x') + \kappa_2 \rho_1(x'')]^2 \rangle \right\}. \quad (33)$$

В случае статистически изотропных флуктуаций ε_1 тензор $\langle \rho_{1i}(x') \rho_{1j}(x'') \rangle$ имеет вид

$$\langle \rho_{1i}(x') \rho_{1j}(x'') \rangle = \frac{1}{2} \delta_{ij} \gamma(x', x''). \quad (34)$$

Свертывая по $i, j = 2, 3$, получим

$$\gamma(x', x'') = \langle \rho_1(x') \rho_1(x'') \rangle. \quad (35)$$

Подставляя (34), (35) в (33), находим для φ_0 следующую формулу:

$$\varphi_0 = \exp \left\{ -\frac{1}{4} [x_1^2 \gamma(x', x') + 2x_1 x_2 \gamma(x', x'') + x_2^2 \gamma(x'', x'')] \right\}. \quad (36)$$

Функция $\gamma(x', x'')$, определяемая равенством (35), может быть легко вычислена. Для этого следует использовать выражение (3) для $\rho_1(x)$, а появляющуюся при расчете структурную функцию D_e следует заменить двумерным спектральным разложением (30, I), после чего приближенно вычисляются интегралы по ξ' , ξ'' . В результате можно получить

$$\gamma(x', x'') = \frac{1}{2} \pi^2 Q f(x', x''), \quad (37)$$

где

$$Q = \int_0^\infty x^3 \Phi_e(x) dx,$$

$$f(x', x'') = \frac{L^3}{3} - \frac{L}{2} (x'^2 + x''^2) + \frac{1}{6} \vartheta(x' - x'') x'(x'^2 + 3x''^2) + \frac{1}{6} \vartheta(x'' - x') x''(x''^2 + 3x'^2). \quad (38)$$

Формулы (36) — (38) определяют функцию φ_0 , входящую в выражение (30).

Для дальнейших вычислений в (30) удобно ввести полярные координаты

$$x_1 y = x_1 \cos \varphi_1, \quad x_2 y = x_2 \cos \varphi_2.$$

Интегрирование по угловым переменным легко выполняется, после чего

$$G(x', x'') = 4\pi^4 \int_0^\infty x_1^4 \Phi_e(x_1) \exp \left[-\frac{\pi^2 Q}{4} f(x', x') x_1^2 \right] dx_1 \times \\ \times \int_0^\infty x_2^4 \Phi_e(x_2) \exp \left[-\frac{\pi^2 Q}{4} f(x'', x'') x_2^2 \right] dx_2 \left\{ a(x', x'') J_1(v) - \right. \\ \left. - z(x', x'') \left[\frac{J_0(v)}{v} - \left(1 + \frac{2}{v^2} \right) J_1(v) \right] \right\}. \quad (39)$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя от мнимого аргумента и

$$v = \frac{\pi^2 Q}{2} f(x', x'') x_1 x_2. \quad (40)$$

В общем случае (при произвольном виде функции $\Phi_e(x)$) дальнейшие вычисления провести трудно. Рассмотрим поэтому частный случай, когда функция $\Phi_e(x)$ имеет вид (41, I), соответствующий турбулентным флуктуациям ε_1 :

$$\Phi_e(x) = AC_e^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2). \quad (41)$$

Подставим (41) в (39) и произведем замену переменных, приняв за одну из них величину v , определяемую формулой (40), а в качестве другой введем величину

$$t = x_1^2 \left(\frac{1}{x_m^2} + \frac{\pi^2 Q}{4} f(x', x') \right).$$

Интеграл по t совпадает с известным интегральным представлением функции Макдональда K_0 :

$$\int_0^\infty \exp \left[- \left(t + \frac{v^2}{4R^2 t} \right) \right] \frac{dt}{t} = 2K_0 \left(\frac{v}{R} \right),$$

где

$$R = f(x', x'') \{ [f(x', x') + 4/\pi^2 Q x_m^2] [f(x'', x'') + 4/\pi^2 Q x_m^2] \}^{-1/2}. \quad (42)$$

Интеграл по v вычисляется с помощью формулы (см. [3])

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_p(ax) I_q(bx) dx = \{ \Gamma[(1-\lambda+q+p)/2] \Gamma[(1-\lambda+q-p)/2] / 2^{\lambda+1} \times \\ \times \Gamma(q+1) a^{1-q-\lambda} \} F \left(\frac{1-\lambda+q+p}{2}, \frac{1-\lambda+q-p}{2}, q+1, b^2/a^2 \right),$$

и окончательное выражение для $G(x', x'')$ принимает вид

$$G(x', x'') = 2^{8/3} \pi^{4/3} \Gamma^2 \left(\frac{7}{6} \right) A^2 C_e^4 [Qf(x', x'')]^{-4/3} R^{7/3} \times \\ \times \left\{ [a(x', x'') + z(x', x'')] F \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 2, R^2(x', x'') \right) - \right. \quad (43) \\ \left. - \frac{z(x', x'')}{4} F \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 3, R^2(x', x'') \right) \right\}.$$

Подставляя это выражение в формулу (29), можно получить значение $\langle \delta \rho^2 \rangle$. Однако вместо $\langle \delta \rho^2 \rangle$ мы рассмотрим величину

$$\eta = x_m^2 \langle \delta \rho^2(x) \rangle,$$

которая определяет отношение $\langle \delta \rho^2(x) \rangle$ к квадрату внутреннего масштаба турбулентности. В интеграле (29) можно ввести безразмерные переменные $t_1 = x'/L$, $t_2 = x''/L$, $t = x/L$. Используя также формулу

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{24} \pi^2 \Gamma \left(\frac{7}{6} \right) A C_e^2 L^3 x_m^{7/3} \quad (44)$$

для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды в первом приближении теории возмущений, которая получается при подстановке (41) в (39, I), можно получить окончательное выражение

$$\eta(t, \sigma_0^2) = 24 \cdot 6^{-1/3} \sigma_0^{1/3} M(t, \sigma_0^2), \quad (45)$$

где

$$M(t, \sigma_0^2) = \int_t^1 dt_1 \int_t^1 dt_2 R(t_1, t_2, \sigma_0^2) [\tilde{f}(t_1) \tilde{f}(t_2)]^{-2/3} \times \\ \times \left\{ [\tilde{a}(t_1, t_2) + \tilde{z}(t_1, t_2)] F \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 2, R^2 \right) - \right. \quad (46) \\ \left. - \frac{1}{4} \tilde{z}(t_1, t_2) F \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 3, R^2 \right) \right\}$$

и введены безразмерные функции

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad \tilde{f}_{12} = 1 - \frac{3}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \vartheta(t_1 - t_2) t_1(t_1^2 + 3t_2^2) + \frac{1}{2} \vartheta(t_2 - t_1) t_2(t_2^2 + 3t_1^2), \\ R &= \tilde{f}_{12}(t_1, t_2) \{ [\tilde{f}(t_1) + 1/6 \sigma_0^2] [\tilde{f}(t_2) + 1/6 \sigma_0^2] \}^{-1/2}, \\ \tilde{a} &= t_1 t_2 (1 - t_1) (1 - t_2), \\ \tilde{z} &= t_1 t_2 \left(1 + \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \vartheta(t_1 - t_2) t_2 (t_2^2 + 3t_1^2) - \\ &- \frac{1}{2} \vartheta(t_2 - t_1) t_1 (t_1^2 + 3t_2^2). \end{aligned}$$

Наибольшее значение величина $\eta(t, \sigma_0^2)$ принимает при $t = 0$ ($x = 0$). Представляет также интерес исследовать функцию $\eta(t, \sigma_0^2)$ при $\sigma_0^2 \gg 1$. Если $\sigma_0^2 \rightarrow \infty$, величина $M(0, \sigma_0^2)$ стремится к предельному значению

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^1 \int_0^1 dt_1 dt_2 R_0 [\tilde{f}(t_1) \tilde{f}(t_2)]^{-2/3} \left\{ [\tilde{a} + \tilde{z}] \times \right. \\ &\times \left. F\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 2, R_0^2\right) - \frac{1}{4} \tilde{z} F\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 3, R_0^2\right) \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$R_0 = \tilde{f}_{12}(t_1, t_2) [\tilde{f}(t_1) \tilde{f}(t_2)]^{-1/2}$$

— коэффициент корреляции поперечных смещений луча. Интеграл (47) имеет особенность при $t_1 = t_2$, так как в этом случае $R_0 = 1$ и $F\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 2, 1\right) = \infty$, однако легко показать, что эта особенность интегрируемая.

Таким образом, при $\sigma_0^2 \gg 1$ имеет место асимптотическая формула

$$\eta = 24 \cdot 6^{-1/3} M_0 \sigma_0^{1/3}, \quad (48)$$

из которой можно найти критерий применимости выражения (3), определяющего уравнение луча. Используя соотношение [1]

$$x_m l_0 = q \quad (q = [54 \Gamma(4/3)/5 \Gamma(5/3)]^{3/4} \simeq 5,92),$$

связывающее x_m и внутренний масштаб турбулентности l_0 для рассматриваемой модели (41) спектра флуктуаций ε_1 , получим

$$\frac{\langle \delta \rho^2(0) \rangle}{l_0^2} = \frac{24 M_0}{q^2 6^{1/3}} (\sigma_0^2)^{1/6}.$$

Значение M_0 полученное при помощи численного интегрирования, приближенно равно 0,89. В этом случае (48) можно представить в виде

$$\frac{\langle \delta \rho^2(0) \rangle}{l_0^2} \simeq (\sigma_0^2/690)^{1/6}. \quad (48a)$$

Уравнение (3) использовалось в [2] для интегрирования закона сохранения энергии вдоль луча. Для того, чтобы такой интеграл был вычис-

лен достаточно точно, необходимо, чтобы кривая, по которой проводится интегрирование, отклонялась от истинного луча на величину, не превосходящую радиус корреляции подинтегрального выражения, т. е. $\Delta_{\perp} \varepsilon_1$ (см. [2]). Но радиус корреляции последней величины равен l_0 . Таким образом, для того, чтобы уравнение луча (3) можно было использовать для вычисления амплитуды, естественно потребовать выполнения условия $\langle \delta \rho^2(0) \rangle \leq l_0^2$. Используя (48а), получим, что в этом случае σ_0^2 ограничено условием

$$\sigma_0^2 < 700. \quad (49)$$

Таким образом, уравнение луча (3) можно использовать для вычисления амплитуды и в начальной области сильных флуктуаций амплитуды, где $\sigma_0^2 \gg 1$.

Если же уравнение луча (3) используется лишь для вычисления $\langle \rho^2 \rangle$, то условие его применимости будет иметь вид $\langle \delta \rho^2(0) \rangle / \langle \rho^2(0) \rangle \ll 1$ и не приводит к ограничениям на значения σ_0^2 . В этом случае ограничения на применимость уравнения (3) возникнут лишь при нарушении условия $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ или в случае невозможности пользоваться первым приближением для эйконала.

Заметим, что при выполнении условия (49) величина $\langle \rho^2(0) \rangle$ может значительно превосходить l_0^2 , так что априори трудно было утверждать, что уравнение (3) может давать в случае сильных флуктуаций амплитуды правильный результат. Некоторым указанием на справедливость уравнения (3) в случае сильных флуктуаций амплитуды служит, как упоминалось в [2], совпадение результата расчета $\langle \rho^2 \rangle$ (при условии $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$) на основании уравнения (3) с результатом расчета на основании уравнения диффузии луча [4], так как последний метод не ограничен условием малости амплитудных флуктуаций.

Можно дать следующее наглядное объяснение полученного результата. Амплитудные флуктуации определяются величиной $\Delta_{\perp} \varepsilon_1$, в то время как поперечное смещение луча зависит от величины $\nabla_{\perp} \varepsilon_1$. Следовательно, амплитудные флуктуации определяются более мелкомасштабными неоднородностями, чем поперечное смещение луча. Поэтому учет смещения луча при расчете амплитуды оказывается значительно более существенным, чем при расчете величины $\rho(x)$. Этим, по-видимому, и объясняется допустимость использования теории возмущений для расчета траектории луча в той области, где теория возмущений уже не применима к амплитуде.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967 (в печати).
2. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 48 (1967).
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.
4. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
4 мая 1966 года.

ON BEAM TRAJECTORIES IN MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES OF THE REFRACTIVE INDEX

V. I. Tatarsky

The paper shows that in the case of small fluctuations of propagation direction, the explicit ray equations obtained by the perturbation method are applicable to strong amplitude fluctuations.

УДК 538.311.001.24

МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

В. Е. Пафомов

Предлагается метод нахождения электромагнитного поля произвольно движущейся заряженной частицы при наличии плоских границ раздела сред, основанный на возможности представления поля частицы в виде поля совокупности расположенных на траектории неподвижных диполей. Вместо границ раздела можно при этом ввести диполи-изображения и с помощью теоремы взаимности найти параметры указанных диполей, потребовав тождественности полей при наличии движущегося заряда и границ раздела, и при наличии того же заряда и его изображений (эквивалентных совокупности диполей-изображений) в отсутствие границ.

Найдено спектральное разложение поля излучения в случае одной и двух границ раздела изотропных сред с различными диэлектрическими и магнитными проницаемостями, определенное непосредственно по закону движения излучающего заряда.

ВВЕДЕНИЕ

Решение любой электродинамической задачи при наличии границ раздела сред удовлетворяет требованию непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей. Обычно оно находится путем «сшивания» полей на границах. Вместе с этим имеет возможность решения задач без непосредственного «сшивания». Для этого может быть использован тот известный результат, что компонента Фурье поля движущегося заряда эквивалентна полю совокупности неподвижных диполей [1], расположенных вдоль траектории частицы, и применена теорема взаимности. Гинзбург и Франк [2] вычислили таким методом поле излучения заряженной частицы, движущейся равномерно и прямолинейно по нормали к границе раздела двух сред. Для этого в [2] был введен пробный диполь и с помощью теоремы взаимности определено поле излучения на больших расстояниях от границы раздела. Удаленность точки наблюдения, в которую помещался пробный диполь, там была необходима в силу простоты применения теоремы взаимности, поскольку волну излучения пробного диполя на пути от границы до траектории частицы в этом случае с хорошей точностью можно считать плоской.

Это ограничение (требование удаленности точки наблюдения) отпадает, если вместо пробного диполя ввести диполи-изображения, а теорему взаимности применить для нахождения разложения поля по плоским волнам. Поэтому для определения поля произвольно движущейся заряженной частицы при наличии плоских границ раздела сред вместо метода пробного диполя (его обобщения на случай произвольно ориентированного диполя) мы предлагаем реализацию другой возможности: границы раздела заменить диполями-изображениями, параметры которых должны быть определены из требования тождественности полей в двух различных случаях — при наличии движущегося заряда (эквивалентного совокупности неподвижных диполей) и границ раздела и при наличии того же

заряда и его изображений (эквивалентных совокупности диполей-изображений) в отсутствие границ.

При построении метода изображений мы будем использовать тот известный результат, что компонента Фурье поля движущегося заряда эквивалентна полю совокупности неподвижных диполей [1].

Выпишем плотность тока произвольно движущейся заряженной частицы:

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]. \quad (1)$$

В дальнейшем все величины будем разлагать в интегралы Фурье

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega, \quad \mathbf{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega, \dots \quad (2)$$

и оперировать с компонентами Фурье. Компонента Фурье плотности тока равна

$$\mathbf{j}_\omega = \int \mathbf{I}_\omega \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] dt, \quad (3)$$

где \mathbf{I}_ω — компонента Фурье тока, отнесенного к единице времени,

$$\mathbf{I}_\omega = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi} \exp(i\omega t). \quad (4)$$

Аналогичное распределение тока создается и диполями, расположенными на траектории частицы с моментом

$$\mathbf{p}_\omega = \frac{ie\mathbf{v}}{2\pi\omega v} \exp(i\omega t), \quad (5)$$

отнесенным к единице пути. Непосредственно отсюда следует, что поле движущейся заряженной частицы можно рассматривать как результат интерференции полей диполей с распределениями тока и дипольного момента вдоль траектории частицы, даваемыми формулами (4) и (5).

1. ДИПОЛИ-ИЗОБРАЖЕНИЯ

Задача о поле движущейся заряженной частицы при наличии границ раздела сводится к построению диполей-изображений. В качестве изображений могут быть выбраны как электрические, так и магнитные диполи. Пусть для определенности диполи-изображения будут электрические. Найдем их моменты, воспользовавшись теоремой взаимности, которая применительно к электрическим диполям состоит, как известно, в том, что скалярное произведение электрического поля \mathbf{E}_A^B в точке B , излучаемого диполем, расположенным в точке A , на момент другого диполя, расположенного в точке B , равно скалярному произведению электрического поля \mathbf{E}_B^A в точке A , излучаемого таким же диполем, но расположенным в точке B , на момент другого диполя, расположенного в точке A . Так как любое поле может быть разложено по плоским волнам, то из теоремы взаимности вытекает справедливость следующего утверждения: если два диполя одинаково взаимодействуют с плоской волной, распространяющейся в некотором заданном направлении (в любой момент времени скалярные произведения электрического поля волны на моменты этих диполей равны), то и излучение плоских волн в данном направлении одинаково (одинаковы компоненты разложения поля по плоским волнам).

При нахождении моментов диполей-изображений в соответствии с теоремой взаимности мы должны потребовать лишь равенства скалярных произведений электрического поля на моменты реального диполя и искомого диполя-изображения, поэтому ориентировка последнего может

быть выбрана произвольно. В дальнейшем для определенности мы будем предполагать коллинеарность моментов.

Найдем сначала величину момента диполя-изображения, описывающего отраженное поле (обозначим ее через $\beta r_{j,s}$). Пусть диполь с моментом β расположен в полупространстве, заполненном средой j , на некотором расстоянии от плоской границы раздела сред j и s . Если взаимодействие плоской волны с диполем $\beta r_{j,s}$ при отсутствии границы совпадает со взаимодействием отраженной волны с реальным диполем, то диполь $\beta r_{j,s}$ является изображением диполя β и описывает отраженное поле излучения (соответствующую компоненту разложения отраженного поля по плоским волнам). Таким образом, коэффициент диполя-изображения $r_{j,s}$ равен $r_{j,s} = \beta E_j^0 / \beta E_j$, где E_j^0 и E_j — векторы электрического поля отраженной и падающей плоских волн в точках, где находятся соответственно диполь и его изображение. В дальнейшем при определении компоненты разложения поля по плоским волнам координаты изображения выпадают и могут быть выбраны произвольно.

Аналогично найдем изображение, определяющее преломленное поле в среде j . Рассмотрим взаимодействие плоской волны, распространяющейся в области j , с диполем β и его изображением $\beta p_{s,j}$ (индексы в коэффициентах $r_{j,s}$ и $p_{s,j}$ мы пишем в последовательности, соответствующей направлению движения преломляющихся и отражающихся волн, излучаемых реальным диполем). Так как реальный диполь находится за границей раздела (в среде s), то плоская волна на пути к нему преломляется. При рассмотрении изображения предполагается, что все пространство заполнено средой j (отсутствие границы). Взаимодействие волны с диполями в этих двух случаях одинаково, если $p_{s,j} = \beta E_s^n / \beta E_j$, где E_s^n — вектор электрического поля плоской преломленной волны в точке, где находится реальный диполь β . Согласно теореме взаимности, компоненты разложения поля по плоским волнам в этих двух случаях одинаковы.

Коэффициенты отражения и преломления определяются в зависимости от поляризации волн различными формулами. Поэтому и изображения в волнах различных поляризаций также различны. Дальнейшие вычисления связаны с предположением об оптических свойствах сред. В простейшем случае изотропных сред (который мы и будем рассматривать в дальнейшем) волны, поляризованные в плоскости падения (соответствующие им величины будем отмечать символом \parallel), следует отличать от волн, поляризованных в перпендикулярной плоскости (символ \perp). Таким образом,

$$\begin{aligned} r_{j,s,\parallel} &= \beta E_{j,\parallel}^0 / \beta E_{j,\parallel}, & p_{s,j,\parallel} &= \beta E_{s,\parallel}^n / \beta E_{j,\parallel}, \\ r_{j,s,\perp} &= \beta E_{j,\perp}^0 / \beta E_{j,\perp}, & p_{s,j,\perp} &= \beta E_{s,\perp}^n / \beta E_{j,\perp}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Выразим эти коэффициенты через компоненты волнового вектора. В декартовой системе координат x, y, z с плоскостью xy , совпадающей с границей раздела, и осью z , направленной в среду j , электрическое поле плоских волн различных поляризаций имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{j,\parallel} &\sim [(ik_x + jk_y) k_{jz} - kx^2] \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_{jz} z), \\ E_{j,\parallel}^0 &\sim -r'_{j,s,\parallel} [(ik_x + jk_y) k_{jz} + kx^2] \exp(-ik_x x - ik_y y + ik_{jz} z), \\ E_{s,\parallel}^n &\sim \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_s} p'_{j,s,\parallel} [(ik_x + jk_y) k_{sz} - kx^2] \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_{sz} z); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}
 E_{j, \perp} &\sim (ik_y - jk_x) \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_{jz} z), \\
 E_{j, \perp}^o &\sim r'_{j, s, \perp} (ik_y - jk_x) \exp(-ik_x x - ik_y y + ik_{jz} z), \\
 E_{s, \perp}^n &\sim p'_{j, s, \perp} (ik_y - jk_x) \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_{sz} z),
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_x &= k_{jx} = k_{sx}, \quad k_y = k_{jy} = k_{sy}, \quad x^2 = k_x^2 + k_y^2, \\
 k_{jz} &= \sqrt{k_j^2 - x^2}, \quad k_{sz} = \sqrt{k_s^2 - x^2}, \quad k_j = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_j \mu_j}, \\
 k_s &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_s \mu_s},
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

i, j и k — единичные векторы в направлении координатных осей x, y и z ; $r'_{j, s, \parallel}, p'_{j, s, \parallel}, r'_{j, s, \perp}$ и $p'_{j, s, \perp}$ — коэффициенты Френеля:

$$r'_{j, s, \parallel} = \frac{\epsilon_s k_{jz} - \epsilon_j k_{sz}}{\epsilon_s k_{jz} + \epsilon_j k_{sz}}, \quad p'_{j, s, \parallel} = \frac{2\epsilon_s k_{jz}}{\epsilon_s k_{jz} + \epsilon_j k_{sz}}; \tag{1.5}$$

$$r'_{j, s, \perp} = \frac{\mu_s k_{jz} - \mu_j k_{sz}}{\mu_s k_{jz} + \mu_j k_{sz}}, \quad p'_{j, s, \perp} = \frac{2\mu_s k_{jz}}{\mu_s k_{jz} + \mu_j k_{sz}}. \tag{1.6}$$

Значения электрического поля отраженной и преломленной волн в (1.1) должны быть взяты в точке, где находится реальный диполь. Обозначим его координаты в среде s через x_s, y_s, z_s ($z_s < 0$) и в среде j через x_j, y_j, z_j ($z_j > 0$). В дальнейшем (при определении компоненты разложений поля диполей-изображений по плоским волнам) должно быть учтено запаздывание и затухание волны на пути от диполей-изображений до точки наблюдения. При этом зависимость конечного результата от координат диполей-изображений выпадает и в промежуточных вычислениях они могут быть выбраны произвольно. Пусть для определенности они совпадают с координатами точки пересечения прямой, проведенной от реального диполя перпендикулярно к границе раздела, с границей. В предположении непосредственной близости диполя к границе, когда запаздыванием и затуханием волны на пути от границы до диполя можно пренебречь, искомые коэффициенты определяются амплитудами электрического поля на границе раздела, не зависят от координат диполя и равны

$$r_{j, s, \parallel} = \frac{\epsilon_s k_{jz} - \epsilon_j k_{sz}}{\epsilon_s k_{jz} + \epsilon_j k_{sz}} \frac{\beta_z x^2 + (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{jz}}{\beta_z x^2 - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{jz}}, \tag{1.7}$$

$$p_{s, j, \parallel} = \frac{2\epsilon_j k_{jz}}{\epsilon_s k_{jz} + \epsilon_j k_{sz}} \frac{\beta_z x^2 - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{sz}}{\beta_z x^2 - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{jz}};$$

$$r_{j, s, \perp} = \frac{\mu_s k_{jz} - \mu_j k_{sz}}{\mu_s k_{jz} + \mu_j k_{sz}}, \quad p_{s, j, \perp} = \frac{2\mu_s k_{jz}}{\mu_s k_{jz} + \mu_j k_{sz}}. \tag{1.8}$$

При нахождении коэффициентов диполей-изображений, определяющих поле в области s , следует рассматривать взаимодействие диполей с волнами, идущими под острым углом к оси z . Поэтому наряду с перестановкой индексов s и j в (1.7) и (1.8) должны быть изменены

знаки перед проекциями волновых векторов на ось z . В результате получим

$$r_{s, i, \parallel} = \frac{\varepsilon_j k_{sz} - \varepsilon_s k_{jz}}{\varepsilon_j k_{sz} + \varepsilon_s k_{jz}} \frac{\beta_z x^2 - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{sz}}{\beta_z x^2 + (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{sz}}, \quad (1.9)$$

$$p_{i, s, \parallel} = \frac{2\varepsilon_s k_{sz}}{\varepsilon_j k_{sz} + \varepsilon_s k_{jz}} \frac{\beta_z x^2 + (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{jz}}{\beta_z x^2 + (\beta_x k_x + \beta_y k_y) k_{sz}};$$

$$r_{s, i, \perp} = \frac{\mu_j k_{sz} - \mu_s k_{jz}}{\mu_j k_{sz} + \mu_s k_{jz}}, \quad p_{i, s, \perp} = \frac{2\mu_j k_{sz}}{\mu_j k_{sz} + \mu_s k_{jz}}. \quad (1.10)$$

При удалении диполей от границы раздела необходимо учитывать запаздывание и затухание волн. Для диполей, расположенных в среде s и j , учет этих факторов приводит к возникновению экспоненциальных множителей, соответственно равных $\exp(-ik_{sz}z_s)$ и $\exp(ik_{jz}z_j)$.

2. ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

Для нахождения поля произвольно движущейся заряженной частицы при наличии границы раздела сред удобно пользоваться вектором Герца, введенным по формулам

$$E_\omega = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad div } \Pi_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \Pi_\omega, \quad (2.1)$$

$$H_\omega = -i \frac{\omega}{c} \text{rot } \Pi_\omega,$$

откуда для плоских волн имеем

$$E_\omega = \frac{\omega^2}{c^2} \mu [\Pi_\omega - n(n\Pi_\omega)], \quad (2.2)$$

$$H_\omega = \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\varepsilon\mu} [n\Pi_\omega],$$

где n — единичный вектор в направлении волнового вектора.

Из уравнений Максвелла следует, что поле диполя с моментом p_ω удовлетворяет следующему волновому уравнению для Π_ω :

$$\Delta \Pi_\omega + k^2 \Pi_\omega = p_\omega. \quad (2.3)$$

Его решение имеет вид

$$\Pi_\omega = p_\omega \exp(ikR)/R, \quad (2.4)$$

где R — расстояние от диполя до точки наблюдения. Перепишем эту формулу, разложив $\exp(ikR)/R$ в интеграл по плоским волнам:

$$\Pi_\omega = \frac{i}{2\pi} \iint \frac{p_\omega}{k_z} \exp[ik_x(x-x_s) + ik_y(y-y_s) + ik_z(z-z_s)] dk_x dk_y, \quad (2.5)$$

где x_s, y_s, z_s — координаты диполя, а x, y, z — координаты точки наблюдения.

Для использования этой формулы и полученных выше результатов вектор Герца должен быть представлен в виде суммы двух векторов, один из которых соответствует волнам, поляризованным в плоскости падения ($\Pi_{\omega \parallel}$), а другой — волнам, поляризованным в перпендикулярной плоскости ($\Pi_{\omega \perp}$). Из (2.2) следует, что в системе координат x, y, z с осью z , перпендикулярной границе раздела,

$$\Pi_{\omega \parallel} = k \left[\Pi_{\omega z} - (\Pi_{\omega x} k_x + \Pi_{\omega y} k_y) \frac{k_z}{x^2} \right], \quad (2.6)$$

$$\Pi_{\omega \perp} = i\Pi_{\omega x} + j\Pi_{\omega y} + k(\Pi_{\omega x} k_x + \Pi_{\omega y} k_y) \frac{k_z}{x^2}.$$

Поскольку направление вектора Герца совпадает с ориентацией дipoля β , то из (2.6) следует, что

$$\Pi_{\omega \parallel} \sim k \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_z}{x^2} \right], \quad (2.7)$$

$$\Pi_{\omega \perp} \sim i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_z}{x^2}.$$

Воспользовавшись формулами (2.5) — (2.7) и результатами предыдущего параграфа (где были найдены моменты диполей-изображений и выбраны их координаты), найдем поле в области j ($z > 0$) от произвольно ориентированного диполя с моментом (5), расположенного в области s в точке с координатами x_s, y_s, z_s :

$$\Pi_{\omega s \parallel}^c = - \frac{ek \exp(i\omega t)}{4\pi^2 \omega \beta} \iint \frac{p_{s, j, \parallel}}{k_{jz}} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \quad (2.8)$$

$$\times \exp(if) dk_x dk_y;$$

$$\Pi_{\omega s \perp}^c = - \frac{e \exp(i\omega t)}{4\pi^2 \omega \beta} \iint \frac{p_{s, j, \perp}}{k_{jz}} \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \right. \quad (2.9)$$

$$\left. + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \exp(if) dk_x dk_y,$$

где

$$f = k_x(x - x_s) + k_y(y - y_s) + k_{jz}z - k_{sz}z_s. \quad (2.10)$$

Поле в области j диполя, расположенного в точке x_j, y_j, z_j ($z_j > 0$), определяется суммой следующих векторов Герца:

$$\Pi_{\omega j \parallel}^c = - \frac{ek \exp(i\omega t)}{4\pi^2 \omega \beta} \iint \frac{1}{k_{jz}} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \quad (2.11)$$

$$\times \exp(if') dk_x dk_y;$$

$$\Pi_{\omega j \perp}^c = - \frac{e \exp(i\omega t)}{4\pi^2 \omega \beta} \iint \frac{1}{k_{jz}} \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \right. \quad (2.12)$$

$$\left. + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \exp(if') dk_x dk_y;$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\omega j \parallel}^{\zeta} = & - \frac{ek \exp(i\omega t)}{4\pi^2 \omega \beta} \iint \frac{r_{j, s, \parallel}}{k_{jz}} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \right. \\ & \left. + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \exp(if'') dk_x dk_y; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\omega j \perp}^{\zeta} = & - \frac{e \exp(i\omega t)}{4\pi^2 \omega \beta} \iint \frac{r_{j, s, \perp}}{k_{jz}} \left[i\beta_x + j\beta_y + \right. \\ & \left. + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \exp(if'') dk_x dk_y, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$f' = k_x(x - x_j) + k_y(y - y_j) + k_{jz}(z - z_j); \quad (2.15)$$

$$f'' = k_x(x - x_j) + k_y(y - y_j) + k_{jz}(z + z_j). \quad (2.16)$$

Поле в области s описывается формулами, отличающимися от найденных для области j лишь перестановкой индексов s и j и знаками перед компонентами волновых векторов вдоль оси z .

Поле произвольно движущейся заряженной частицы при наличии границы раздела сред определяется контурными интегралами от найденных векторов Герца по траектории частицы.

Заметим, что применение теоремы взаимности для нахождения компонент разложения поля по плоским волнам эквивалентно «сшиванию» соответствующих компонент на границе. Таким образом, требование непрерывности электрического и магнитного полей на границе удовлетворяется, в чем можно убедиться также и непосредственной проверкой.

В волновой зоне при малом изменении переменных интегрирования экспоненциальные множители в подынтегральных выражениях в (2.8), (2.9), (2.11)–(2.14) осциллируют и вклад в интегралы вносят относительно малые области вблизи экстремумов функций f , f' и f'' . Для интегрирования удобно перейти к вспомогательной системе координат, получающейся путем поворота основной системы вокруг оси z против часовой стрелки на угол

$$\varphi_{s, j} = \arctg \frac{y - y_{s, j}}{x - x_{s, j}}. \quad (2.17)$$

Формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi_{s, j} - y' \sin \varphi_{s, j}, & x' &= x \cos \varphi_{s, j} + y \sin \varphi_{s, j}, \\ y &= x' \sin \varphi_{s, j} + y' \cos \varphi_{s, j}, & y' &= -x \sin \varphi_{s, j} + y \cos \varphi_{s, j}, \\ z &= z', & z' &= z. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В новой системе компонента волнового вектора $k_{x'}$ лежит в плоскости, проходящей через нормаль к границе раздела и прямую, соединяющую координаты диполя и точку наблюдения, а компонента $k_{y'}$ перпендикулярна к этой плоскости.

В (2.8) и (2.9) существенная область интегрирования порядка $\Delta k_x \Delta k_y$, причем

$$\Delta k_{y'} = \left(\frac{z}{\sqrt{k_j^2 - x^2}} - \frac{z_s}{\sqrt{k_s^2 - x^2}} \right)^{-1/2}, \quad \Delta k_{x'} = \left[\frac{k_j^2 z}{(k_j^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{k_s^2 z_s}{(k_s^2 - x^2)^{3/2}} \right]^{-1/2}. \quad (2.19)$$

В волновой зоне функции, стоящие перед экспонентами, меняются мало в пределах $\Delta k_{x'}$ и $\Delta k_{y'}$ и результат интегрирования сводится к умножению подынтегральных выражений на

$$-2\pi i \left(\frac{z}{\sqrt{k_j^2 - x^2}} - \frac{z_s}{\sqrt{k_s^2 - x^2}} \right)^{-1/2} \left[\frac{k_j^2 z}{(k_j^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{k_s^2 z_s}{(k_s^2 - x^2)^{3/2}} \right]^{-1/2}, \quad (2.20)$$

и замене k_x и k_y на значения в экстремуме, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{k_x}{k_y} = \frac{x - x_s}{y - y_s}, \quad \frac{x' - x'_s}{x} = \frac{z}{\sqrt{k_j^2 - x^2}} - \frac{z_s}{\sqrt{k_s^2 - x^2}}. \quad (2.21)$$

Интегрируя теперь по траектории частицы, найдем поле излучения, генерируемое в среде s , в виде

$$\Pi_{\omega s \parallel} = \frac{iek}{2\pi\omega} \int \frac{p_{s, i, \parallel}}{\beta R_{s, j}} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \exp [i(\omega t + k_s R_s + k_j R_j)] d\zeta; \quad (2.22)$$

$$\Pi_{\omega s \perp} = \frac{ie}{2\pi\omega} \int \frac{p_{s, i, \perp}}{\beta R_{s, j}} \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \exp [i(\omega t + k_s R_s + k_j R_j)] d\zeta, \quad (2.23)$$

где

$$R_s = -\frac{k_{sz}}{k_s} z_s, \quad R_j = \frac{x}{k_j} (x' - x'_s) + \frac{k_{jz}}{k_j} z, \quad (2.24)$$

$$R_{s, j} = k_{jz} \left[\left(\frac{z}{k_{jz}} - \frac{z_s}{k_{sz}} \right) \left(\frac{z}{k_{jz}^2} - \frac{z_s}{k_{sz}^2} \right) \right]^{1/2}$$

и компоненты волнового вектора k_j удовлетворяют равенствам (2.21).

Аналогично из (2.11) и (2.12) найдем

$$\Pi'_{\omega j \parallel} = \frac{iek}{2\pi\omega} \int \frac{1}{\beta R'_j} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \exp [i(\omega t + k_j R'_j)] d\zeta; \quad (2.25)$$

$$\Pi'_{\omega j \perp} = \frac{ie}{2\pi\omega} \int \frac{1}{\beta R'_j} \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \exp [i(\omega t + k_j R'_j)] d\zeta, \quad (2.26)$$

где

$$R'_j = \frac{k_j}{k_{jz}} (z - z_j), \quad (2.27)$$

а компоненты волнового вектора k_j удовлетворяют равенствам

$$\frac{k_x}{k_y} = \frac{x - x_j}{y - y_j}, \quad \frac{x' - x'_j}{x} = \frac{z - z_j}{\sqrt{k_j^2 - x^2}}. \quad (2.28)$$

Соответствующий волновой вектор (в отличие от вектора, компоненты которого удовлетворяют равенствам (2.21)) мы будем в дальнейшем отмечать одним штрихом.

Наконец, интегрирование в (2.13) и (2.14) в волновой зоне по k_x и k_y и дальнейшее интегрирование по траектории приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \Pi'_{\omega j \parallel} &= \frac{iek}{2\pi\omega} \int \frac{r_{j,s,\parallel}}{\beta R'_{s,j}} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp [i(\omega t + k_j R'_{s,j})] d\zeta; \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \Pi'_{\omega j \perp} &= \frac{ie}{2\pi\omega} \int \frac{r_{j,s,\perp}}{\beta R'_{s,j}} \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp [i(\omega t + k_j R'_{s,j})] d\zeta, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где

$$R''_{s,j} = \frac{k_j}{k_{jz}} (z + z_j); \quad (2.31)$$

$$\frac{k_x}{k_y} = \frac{x - x_j}{y - y_j}, \quad \frac{x' - x'_j}{x} = \frac{z + z_j}{\sqrt{k_j^2 - x^2}}. \quad (2.32)$$

Соответствующий волновой вектор будем отмечать двумя штрихами.

Если частица пересекает границу раздела, то поле излучения в волновой зоне определяется суммой векторов (2.22), (2.23), (2.25), (2.26), (2.29) и (2.30). В них подынтегральные выражения являются функциями координат и компонент скорости частицы. На больших расстояниях от траектории частицы поля излучения формируются в сферические волны и все результаты значительно упрощаются.

3. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

При удалении точки наблюдения углы между волновыми векторами k_j , k'_j и k''_j , уменьшаются. Этот вывод непосредственно следует из систем уравнений (2.21), (2.28) и (2.32), определяющих компоненты волновых векторов. На достаточно больших расстояниях зависимостью этих векторов (а вместе с ними и коэффициентов r и p) от координат частицы можно пренебречь и считать их параллельными. Наряду с этим и функции $R_{s,j}$, R'_j и $R''_{s,j}$ слабее зависят от координат частицы и в знаменателе подынтегральных выражений (2.23), (2.24), (2.26), (2.27), (2.29) и (2.30) их можно заменить на одну и ту же постоянную величину R , равную расстоянию от некоторой фиксированной точки вблизи траектории, находящейся, например, на границе раздела, и вынести R из-под знака интегралов, В эту точку мы поместим начало

координат. Тогда на больших расстояниях выражения, стоящие в показателе экспонент, принимают следующий вид:

$$k_s R_s + k_j R_j = k_j R - k_j^0 r; \quad (3.1)$$

$$k_j R_j' = k_j R - k_j r; \quad (3.2)$$

$$k_j R_{s,j}' = k_j R - k_j^0 r, \quad (3.3)$$

где r — радиус-вектор частицы, а k_j^0 и k_j^0 — волновые векторы преломляющейся и отражающейся волн, идущих в направлении к точке наблюдения, т. е. имеющих после преломления и отражения волновой вектор k_j .

Учитывая все эти обстоятельства и переходя от контурных интегралов к интегралам по времени движения частицы, из (2.23), (2.24), (2.26), (2.27), (2.29) и (2.30) получим сферические волны в виде

$$\Pi_{\omega s \parallel} = \frac{ieck}{2\pi\omega R} \exp(ik_j R) \int p_{s, i, \parallel} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ \times \exp(i\omega t - ik_j^0 r) dt; \quad (3.4)$$

$$\Pi_{\omega s \perp} = \frac{iecp_{s, i, \perp}}{2\pi\omega R} \exp(ik_j R) \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ \times \exp(i\omega t - ik_j^0 r) dt; \quad (3.5)$$

$$\Pi_{\omega i \parallel} = \frac{ieck}{2\pi\omega R} \exp(ik_j R) \int \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ \times \exp(i\omega t - ik_j r) dt; \quad (3.6)$$

$$\Pi_{\omega i \perp} = \frac{iec}{2\pi\omega R} \exp(ik_j R) \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ \times \exp(i\omega t - ik_j r) dt; \quad (3.7)$$

$$\Pi_{\omega j \parallel} = \frac{ieck}{2\pi\omega R} \exp(ik_j R) \int r_{j, s, \parallel} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ \times \exp(i\omega t - ik_j^0 r) dt; \quad (3.8)$$

$$\Pi_{\omega j \perp} = \frac{iecr_{j, s, \perp}}{2\pi\omega R} \exp(ik_j R) \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{jz}}{x^2} \right] \times \\ \times \exp(i\omega t - ik_j^0 r) dt. \quad (3.9)$$

Подставляя в эти формулы значения коэффициентов из (1.7) и (1.8) и выразив компоненты волновых векторов через направляющие косинусы, в частном случае $\epsilon_j = 1$, $\mu_s = \mu_j = 1$, $\epsilon_s = \epsilon$ получим сферические волны излучения в вакууме:

$$\Pi_{\omega s \parallel} = \frac{ieck \exp(i\omega R/c) \cos \vartheta_z}{\pi\omega R (\epsilon \cos \vartheta_z + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \vartheta_z})} \int \left[\beta_z - (\beta_x \cos \vartheta_x + \right. \\ \left. + \beta_y \cos \vartheta_y) \frac{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \vartheta_z}}{\sin^2 \vartheta_z} \right] \exp \left[i\omega t - \right. \\ \left. - i \frac{\omega}{c} (x \cos \vartheta_x + y \cos \vartheta_y + z \sqrt{\epsilon - \sin^2 \vartheta_z}) \right] dt; \quad (3.10)$$

$$\Pi_{\omega s \perp} = \frac{iec \exp(i\omega R/c) \cos \vartheta_z}{\pi\omega R (\cos \vartheta_z + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_z})} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x \cos \vartheta_x + \beta_y \cos \vartheta_y) \frac{\cos \vartheta_z}{\sin^2 \vartheta_z} \right] \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega}{c} (x \cos \vartheta_x + y \cos \vartheta_y + z \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_z}) \right] dt ; \quad (3.11)$$

$$\Pi'_{\omega j \parallel} = \frac{ieck \exp(i\omega R/c)}{2\pi\omega R} \int \left[\beta_z - (\beta_x \cos \vartheta_x + \beta_y \cos \vartheta_y) \frac{\cos \vartheta_z}{\sin^2 \vartheta_z} \right] \times \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega}{c} (x \cos \vartheta_x + y \cos \vartheta_y + z \cos \vartheta_z) \right] dt ; \quad (3.12)$$

$$\Pi'_{\omega j \perp} = \frac{iec \exp(i\omega R/c)}{2\pi\omega R} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x \cos \vartheta_x + \beta_y \cos \vartheta_y) \frac{\cos \vartheta_z}{\sin^2 \vartheta_z} \right] \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega}{c} (x \cos \vartheta_x + y \cos \vartheta_y + z \cos \vartheta_z) \right] dt ; \quad (3.13)$$

$$\Pi''_{\omega j \parallel} = \frac{ieck \exp(i\omega R/c)}{2\pi\omega R} \frac{\varepsilon \cos \vartheta_z - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_z}}{\varepsilon \cos \vartheta_z + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_z}} \int \left[\beta_z + (\beta_x \cos \vartheta_x + \beta_y \cos \vartheta_y) \frac{\cos \vartheta_z}{\sin^2 \vartheta_z} \right] \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega}{c} (x \cos \vartheta_x + y \cos \vartheta_y - z \cos \vartheta_z) \right] dt ; \quad (3.14)$$

$$\Pi''_{\omega j \perp} = \frac{iec \exp(i\omega R/c)}{2\pi\omega R} \frac{\cos \vartheta_z - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_z}}{\cos \vartheta_z + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_z}} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x \cos \vartheta_x + \beta_y \cos \vartheta_y) \frac{\cos \vartheta_z}{\sin^2 \vartheta_z} \right] \times \exp \left[i\omega t - i \frac{\omega}{c} (x \cos \vartheta_x + y \cos \vartheta_y - z \cos \vartheta_z) \right] dt , \quad (3.15)$$

где x, y, z — координаты частицы в момент времени t .

Электрическое и магнитное поля сферических волн различных поляризаций выражаются через компоненты вектора Герца и направляющие косинусы волнового вектора по формулам

$$\begin{aligned} E_{\omega \parallel} &= -\omega^2 \Pi_{\omega \parallel} (i \cos \vartheta_x \cos \vartheta_z + j \cos \vartheta_y \cos \vartheta_z - k \sin^2 \vartheta_z) / c^2 , \\ E_{\omega \perp} &= \omega^2 (\Pi_{\omega \perp x} \cos \vartheta_y - \Pi_{\omega \perp y} \cos \vartheta_x) (i \cos \vartheta_y - j \cos \vartheta_x) / c^2 \sin^2 \vartheta_z , \\ H_{\omega \parallel} &= \omega^2 \Pi_{\omega \parallel} (i \cos \vartheta_y - j \cos \vartheta_x) / c^2 , \\ H_{\omega \perp} &= \omega^2 (\Pi_{\omega \perp x} \cos \vartheta_y - \Pi_{\omega \perp y} \cos \vartheta_x) [i \cos \vartheta_x + j \cos \vartheta_y] \cos \vartheta_x - k \sin^2 \vartheta_z / c^2 \sin^2 \vartheta_z . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Спектральная плотность энергии излучения на единицу телесного угла определяется любой из следующих пяти тождественных формул:

$$W_{n\omega} = \frac{cR^2}{2} (E_\omega H_\omega^* + E_\omega^* H_\omega); \quad (3.17)$$

$$W_{n\omega} = cR^2 |E_\omega|^2; \quad (3.18)$$

$$W_{n\omega} = cR^2 |H_\omega|^2; \quad (3.19)$$

$$W_{n\omega} = \frac{\omega^4 R^2}{c^3} [|\Pi_\omega|^2 - |(n\Pi_\omega)|^2]; \quad (3.20)$$

$$W_{n\omega} = \frac{\omega^4 R^2}{c^3} |[n\Pi_\omega]|^2. \quad (3.21)$$

При вычислении углового распределения интенсивности излучения волн той или иной поляризации в эти формулы следует подставить векторы сферических волн соответствующей поляризации.

Полученные результаты являются исходными для вычисления излучения в различных конкретных предположениях о движении заряженной частицы (например, при осциллирующем движении, при рассеянии и торможении), для вычисления углового распределения и степени поляризации люминесцентного свечения, возникающего в поверхностном слое, при рассмотрении тормозного излучения в металлах в оптическом диапазоне частот, для исследования возбуждаемых поверхностных волн и т. д.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА

Аналогично может быть найдено поле излучения произвольно движущейся заряженной частицы и при наличии нескольких границ раздела. Приведем результаты вычисления сферических волн поля излучения при наличии двух границ раздела.

Пусть имеются три среды, разделенные плоскими параллельными границами. Пронумеруем их индексами 1, 2, 3 и расстояние между границами раздела обозначим через a . Ось z направим перпендикулярно границам в среду 3, а начало координат поместим на границе сред 2 и 3. Выпишем сферические волны в среде 3.

Волны излучения, генерируемые во время движения частицы в области 1, описываются следующими векторами Герца:

$$\Pi_{\omega\parallel} = \frac{ieck}{2\pi\omega R} \int P_{1,2,\parallel} \alpha_{\parallel} P_{2,3,\parallel} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \quad (4.1)$$

$$\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_{1z} z - ik_{1z} a + ik_{2z} a + ik_3 R) dt;$$

$$\Pi_{\omega\perp} = \frac{iec}{2\pi\omega R} P_{1,2,\perp} \alpha_{\perp} P_{2,3,\perp} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \quad (4.2)$$

$$\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_{1z} z - ik_{1z} a + ik_{2z} a + ik_3 R) dt \quad (z < -a),$$

где R — расстояние от начала координат до точки наблюдения, α_{\parallel} и α_{\perp} — множители, суммирующие изображения (учитывающие многократное отражение волн в среде 2).

За время движения частицы в среде 2 излучение вперед (по направлению к границе раздела сред 2 и 3) дает следующий вклад:

$$\begin{aligned} \Pi'_{\omega 2 \parallel} &= \frac{ieck}{2\pi\omega R} \int \alpha_{\parallel} p_{2,3,\parallel} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_{2z} z + ik_3 R) dt; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Pi'_{\omega 2 \perp} &= \frac{iec}{2\pi\omega R} \alpha_{\perp} p_{2,3,\perp} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_{2z} z + ik_3 R) dt \quad (-a < z < 0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Излучение назад отражается от границы раздела сред 1 и 2 и в области 3 дает

$$\begin{aligned} \Pi''_{\omega 2 \parallel} &= \frac{ieck}{2\pi\omega R} \int r_{2,1,\parallel} \alpha_{\parallel} p_{2,3,\parallel} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y + ik_{2z} z + 2ik_{2z} a + ik_3 R) dt; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi''_{\omega 2 \perp} &= \frac{iec}{2\pi\omega R} r_{2,1,\perp} \alpha_{\perp} p_{2,3,\perp} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y + ik_{2z} z + 2ik_{2z} a + ik_3 R) dt \\ &(-a < z < 0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Наконец, поле, генерируемое на пути в среде 3, определяется интерференцией волн, излучаемых вперед:

$$\begin{aligned} \Pi'_{\omega 3 \parallel} &= \frac{ieck}{2\pi\omega R} \int \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_{3z} z + ik_3 R) dt; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Pi'_{\omega 3 \perp} &= \frac{iec}{2\pi\omega R} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_{3z} z + ik_3 R) dt \quad (z > 0), \end{aligned} \quad (4.8)$$

с волнами, излучаемыми назад и отражающимися от границы раздела сред 2 и 3:

$$\begin{aligned} \Pi''_{\omega 3 \parallel} &= \frac{ieck}{2\pi\omega R} \int r_{3,2,\parallel} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y + ik_{3z} z + ik_3 R) dt; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \Pi''_{\omega 3 \perp} &= \frac{iec}{2\pi\omega R} r_{3,2,\perp} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y + ik_{3z} z + ik_3 R) dt \quad (z > 0), \end{aligned} \quad (4.10)$$

и прошедшими в среду 2, испытавшими там многократное отражение и снова вышедшими в среду 3:

$$\begin{aligned} \Pi'''_{\omega 3 \parallel} &= \frac{ieck}{2\pi\omega R} \int p_{3,2,\parallel} r_{2,1,\parallel} \alpha_{\parallel} p_{2,3,\parallel} \left[\beta_z - (\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\ &\times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y + ik_{3z} z + 2ik_{2z} a + ik_3 R) dt; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\omega 3 \perp}'' = & \frac{ie c}{2\pi\omega R} p_{3, 2, \perp} r_{2, 1, \perp} \alpha_{\perp} p_{2, 3, \perp} \int \left[i\beta_x + j\beta_y + k(\beta_x k_x + \beta_y k_y) \frac{k_{3z}}{x^2} \right] \times \\
 & \times \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y + ik_{3z} z + 2ik_{2z} a + \\
 & + ik_3 R) dt \quad (z > 0).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Коэффициенты α_{\parallel} и α_{\perp} равны

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\parallel} &= [1 - r_{2, 3, \parallel} r_{2, 1, \parallel} \exp(2ik_{2z} a)]^{-1}, \\
 \alpha_{\perp} &= [1 - r_{2, 3, \perp} r_{2, 1, \perp} \exp(2ik_{2z} a)]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Эти результаты являются исходными для вычисления поля излучения заряженной частицы при наличии двух границ раздела в любом предположении о ее движении. Для этого необходимо, задав закон движения частицы, провести интегрирование по времени ее движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., 6, 3 (1942).
2. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1946).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
30 мая 1966 года

IMAGE METHOD IN ELECTRODYNAMICS OF CONTINUUM MEDIA

V. E. Pafomov

Proposes the method to find the electromagnetic field of an arbitrarily moving charged particle in the presence of plane interfaces of media. The method is based on the possibility of representation of the particle field as that of a set of fixed dipoles situated on the trajectory of the particle. Instead of interfaces one may introduce the images-dipoles and by means of the reciprocity theorem find the parameters of the above dipoles when requiring the identity of fields in the presence of the moving charge and interfaces and with the same charge and its images (equivalent to the sets of image-dipoles) without interfaces.

According to the principal of radiated charge motion, the spectral expansion of radiation field has been found in the case of one and two interfaces of isotropic media with different permittibilities and permittivities.

УДК 621.396.67

ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПЕДАНСНОЙ ПОЛОСЫ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Б. М. Петров

Изучены направленные свойства импедансной полосы, возбуждаемой щелью в полуплоскости. Для случая антенны с линейно убывающим импедансом с рефлектором приводятся графики зависимости ширины диаграммы направленности, направления максимального излучения и уровня максимального бокового лепестка от положения антенны на полуплоскости, скорости изменения импеданса и длины антенны; приводятся и анализируются графики распределения магнитного тока на антенне с постоянным импедансом.

Антенны поверхностных волн, реализуемые импедансными структурами на металлическом экране, обычно располагаются на заданном расстоянии от края экрана. Конечность величины экрана в направлении максимального излучения существенным образом сказывается на направленных свойствах антенны [1, 2]. Если в направлении максимального излучения размер экрана достаточно велик, приближенно учесть влияние его на диаграмму направленности антенны можно методом, предложенным в [3]; в [1] имеются расчетные и экспериментальные данные, позволяющие рассчитать антенну при постоянном импедансе полосы. Для случая мало выступающего экрана метод, предложенный в [3], не пригоден [1] и должен быть применен строгий метод расчета [2].

В настоящей работе подробно изучена зависимость направленных свойств импедансной полосы от положения на полуплоскости. Импедансная полоса возбуждается щелью в экране.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Импедансная полоса ширины $(b-a)$ на верхней ($\varphi=0$) грани металлической полуплоскости (рис. 1) возбуждается щелью ширины Δr_0 ,

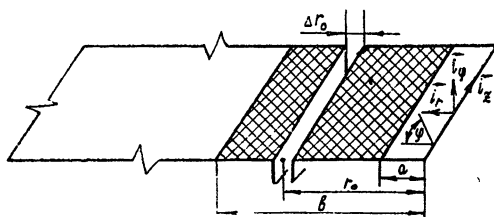


Рис. 1. Импедансная антенна, возбуждаемая щелью на полуплоскости.

расположенной на расстоянии r_0 от кромки полуплоскости. Импеданс полосы и сторонние токи на щели не зависят от координаты z (двумерная задача).

В соответствии с [2] поле излучения импедансной полосы на полуплоскости при возбуждении ее щелью записывается в следующем виде:

$$H_z(\varphi) = \int_{r_0 - \Delta r_0/2}^{r_0 + \Delta r_0/2} J_{0z}^{MCT}(r') G(r', \varphi) dr' + \int_a^b J_z^M(r') G(r', \varphi) dr', \quad (1)$$

где

$$G(r', \varphi) = \exp(ikr' \cos \varphi) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n + 0,5) \varphi J_{n+0,5}(kr') \times \\ \times \exp[i0,5 \pi (n + 0,5)]$$

— асимптотическое значение функции Грина 2-ой граничной задачи для полуплоскости (множители, не зависящие от угла, опущены); $J_{0z}^{MCT}(r)$ — плотность стороннего магнитного тока на щели; $J_{n+0,5}(kr)$ — функция Бесселя; $J_z^M(r)$ — плотность поверхностного магнитного тока, являющаяся решением интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$J_z^M(x)/Z_E^0(x) + \int_{a_3}^{b_3} G(x, 0 | x', 0) J_z^M(x') dx' = \\ = -i \int_{x_0 - \Delta x_0/2}^{x_0 + \Delta x_0/2} G(x, 0 | x', 0) J_z^M(x') dx'. \quad (2)$$

В этом уравнении использованы обозначения $a_3 = ka$, $b_3 = kb$, $x = kr$, $Z_E^0(x) = Z_E(x)/W_0$, $Z_E(x)$ — импеданс полосы для типа волны, возбуждаемого щелью (TM — относительно оси r), W_0 — волновое сопротивление свободного пространства, $G(x, \varphi | x', \varphi')$ — функция Грина:

$$G(x, \varphi | x', \varphi') = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}\{[x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\varphi - \varphi')]^{1/2}\} + \\ + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \cos[(n+0,5)\varphi] \cos[(n+0,5)\varphi'] \times \\ \times \begin{cases} J_{n+0,5}(x) H_{n+0,5}^{(2)}(x'), & x \leq x' \\ J_{n+0,5}(x') H_{n+0,5}^{(2)}(x), & x \geq x' \end{cases}$$

где $H_{n+0,5}^{(2)}(x)$ — функция Ганкеля 2-го рода.

Зависимость от времени характеризуется фактором $\exp(i\omega t)$, использована практическая рационализированная система единиц.

Уравнение (2) решалось методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова на электронной вычислительной машине. Расчеты диаграмм направленности по (1) также проведены на электронной вычислительной машине.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ И НАПРАВЛЕННЫЕ СВОЙСТВА

При приближенном анализе поля излучения импедансных антенн обычно используется распределение тока на полосе по закону бегущей волны [1]. Такое приближение при конечной длине антенны не оправдывается, особенно в случае расположения последней на малом расстоянии от кромки экрана. На рис. 2 приведено распределение магнитного тока на полосах разной длины, импеданс полос постоянный, равный $Z_E(r) = iW_0$.

Распределение амплитуды тока характерно тем, что уровни минимумов и максимумов по длине антенны меняются — в середине полосы отношение минимума к максимуму больше, чем в непосредственной близости от возбуждающего устройства; причем у коротких полос это

отношение по длине антенны меняется мало — всего на 5%, тогда как у длинных это отношение достигает 20%. Такой характер распределе-

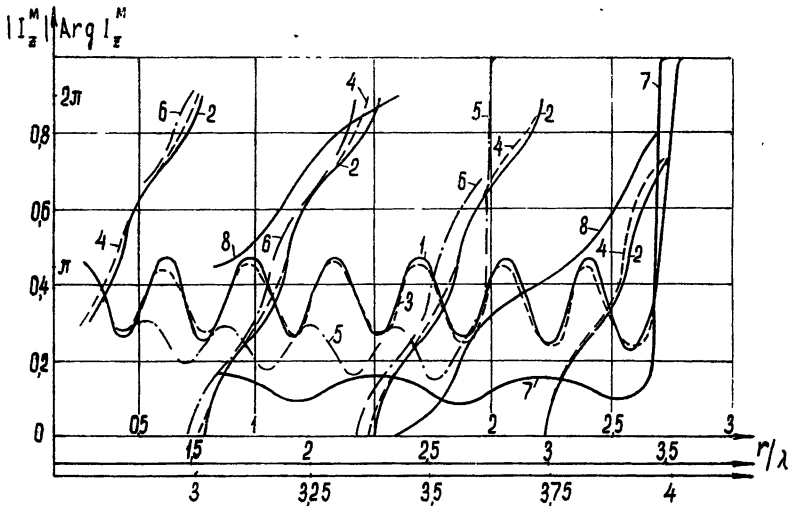


Рис. 2. Распределение амплитуды и фазы магнитного тока по импедансной полосе:

1, 3, 5, 7 — распределение амплитуды тока; 2, 4, 6, 8 — распределение фазы тока; 1, 2 — $b-a=2.5\lambda$, $a=0.25\lambda$; 3, 4 — $b-a=2.5\lambda$, $a=\lambda$; 5, 6 — $b-a=1.5\lambda$, $a=0.5\lambda$; 7, 8 — $b-a=\lambda$, $a=3\lambda$.

ния магнитного тока объясняется влиянием конечного экрана и, в частности, переотражениями электрического тока на участке между кромкой экрана и полосой.

Распределение фазы магнитного тока имеет характерную для смешанного режима модуляцию. Коэффициент модуляции зависит, в основном, от длины полосы и величины импеданса. При $Z_E(r) = iW_0$ этот коэффициент равен $\pi/10$ для полосы длиной λ и около $\pi/14$ для полосы длиной $2,5\lambda$.

Диаграммы направленности импедансных полос, для которых приведено распределение магнитного тока на рис. 2, являются изрезанными и имеют боковые лепестки, по уровню превосходящие «главный» [2].

При линейно убывающем импедансе распределение фазы тока близко к закону бегущей волны, а амплитуда тока медленно убывает [2]. В этом случае использование при расчете диаграмм направленности распределения тока, близкого к закону бегущей волны, дает результаты, более близкие к действительности, чем при постоянном импедансе.

Диаграммы направленности импедансных полос, расположенных на малых расстояниях от кромки полуплоскости и возбуждаемых щелью в экране, как показали расчеты, имеют значительный уровень боковых лепестков и являются сильно изрезанными, если не применять рефлектора, расположенного за щелью. Поэтому ниже приведены графики зависимости параметров диаграммы направленности только антенн с линейно убывающим импедансом с рефлектором:

$$Z_E(r) = iW_0 \begin{cases} Q + \frac{1-Q}{r_0-a} (r-a) & \text{при } r < r_0 \\ -3 & \text{при } r > r_0 \end{cases}$$

В качестве рефлектора используется полоса емкостного импеданса длиной $0,14(b-a)$, расположенная за щелью в направлении, обратном направлению максимального излучения.

На рис. 3 приведены графики зависимости ширины диаграммы направленности импедансной антенны от ее длины и положения относительно кромки экрана. Как видно из графика, при увеличении длины антенны диаграмма направленности ее постепенно сужается, если расстояние до кромки экрана больше, чем $0,25 \lambda$. Ширина диаграммы направленности до вольно резко зависит от положения антенны на полуплоскости. При малом расстоянии до кромки ($a < 0,25 \lambda$), в формировании диаграммы направленности, очевидно, большую роль играют электрические токи на участке между антенной и кромкой, и увеличение длины антенны не приводит к сужению диаграммы направленности.

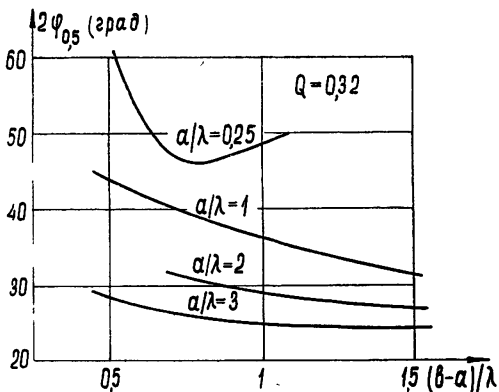


Рис. 3. Зависимость ширины диаграммы направленности от длины антенны.

Зависимость ширины диаграммы направленности от положения антенны и скорости изменения импеданса дана на рис. 4.

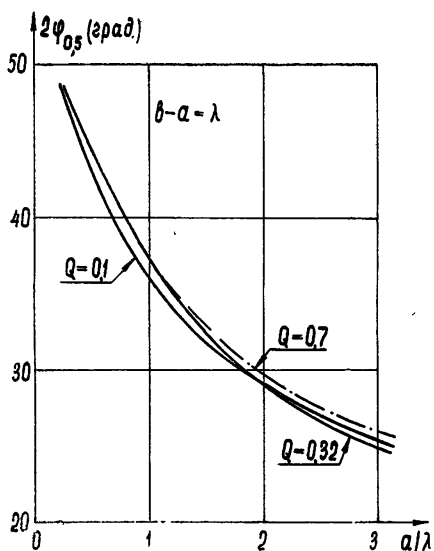


Рис. 4. Зависимость ширины диаграммы направленности от положения антенны на полуплоскости.

Увеличение длины экрана от антенны до кромки приводит к значительному сужению диаграммы направленности. Скорость изменения линейно убывающего импеданса мало влияет на ширину диаграммы направленности при всех рассмотренных положениях антенны.

Но скорость убывания импеданса существенно влияет на направление максимального излучения антенны (рис. 5) и уровень боковых лепестков (рис. 7). С уменьшением этой скорости направление максимального излучения прижимается к оси антенны, так как, по-видимому, при малой длине антенны диаграмма направленности формируется, в основном, за счет токов на полосе. Уровень первого бокового лепестка резко уменьшается с увеличением скорости убывания импеданса, что связано с уменьшением отраженной от конца антенны волны.

На рис. 6 приведена зависимость направления максимального излучения от положения антенны и ее длины. Как видно из графика, направление максимального излучения тем больше отклоняется от экрана,

чем меньше длина антенны и чем ближе антенна расположена к кромке экрана.

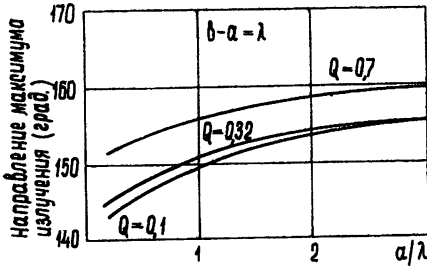


Рис. 5. Зависимость направления максимального излучения от положения антенны на полуплоскости.

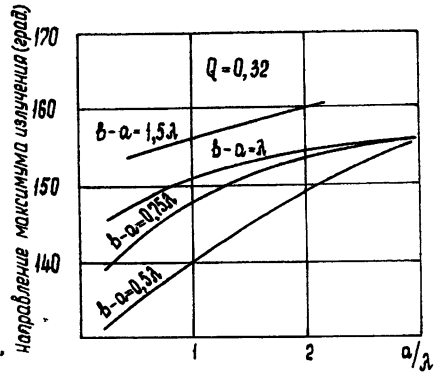


Рис. 6. Зависимость направления максимального излучения антенн разных длин от положения антенн на полуплоскости.

Зависимость уровня максимального бокового лепестка от положения антенны и ее длины изображена на рис. 8. Уровень максимального

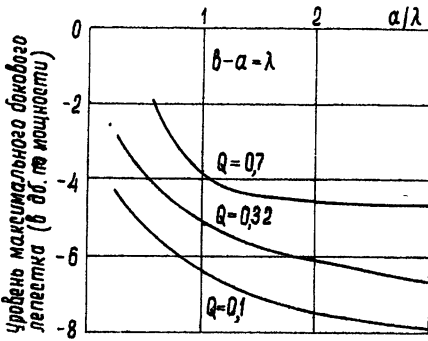


Рис. 7. Зависимость уровня максимального бокового лепестка от положения антенны (при разных скоростях убывания импеданса).

бокового лепестка также в сильной степени определяется положением антенны относительно кромки экрана и длиной антенны. Анализ графика указывает на то, что на формирование бокового излучения оказывает влияние не только длина антенны и закон изменения импеданса, но и размер экрана от антенны до кромки.

Приведенные графики зависимости параметров диаграммы направленности импедансной полосу на экране дают возможность рассчитать антенну для случая линейно убывающего импеданса с рефлектором.

Расчетным путем были исследованы направленные свойства антенн и при других законах изменения импеданса. В частности, если импеданс с рефлектором

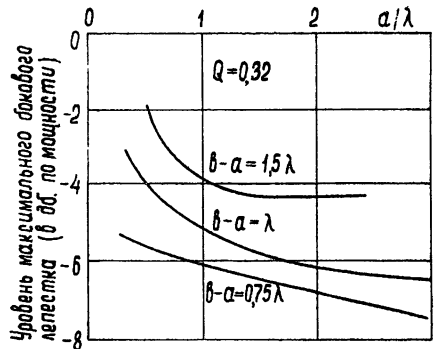


Рис. 8. Зависимость уровня максимального бокового лепестка от положения антенн разных длин.

изменяется по закону, являющемуся комбинацией линейно убывающего и синусоидально-модулированного законов, то можно, как показали расчеты, направление максимального излучения прижать к экрану и снизить боковое излучение даже при малом выступающем экране.

В заключение автор выражает благодарность Г. Т. Маркову за помощь в работе и предоставление возможностей получения приведенных здесь результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд и Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. II, изд. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, М., 1959.
2. Г. Т. Марков, Б. М. Петров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 3, 531 (1965).
3. R. A. Hurd, Canadian J. Phys., 34, № 4, 225 (1956).

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
23 мая 1966 года.

CHARACTERISTICS OF IMPEDANCE STRIP ON HALF-PLANE

B. M. Petrov

The directional properties of an impedance strip excited by a slot on a half-plane are investigated. For an antenna with linear-decreasing impedance with a reflector, the graphs are given of the dependence of an antenna pattern width, the direction of the maximal radiation and the level of a maximal side lobe upon the antenna position on the half-plane, the rate of the impedance change and the antenna length, the graphs of a magnetic current distribution on the antenna with a constant impedance are given and analysed.

УДК 621.372.2—1

ПРОХОЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ УЧАСТОК ОДНОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ. I. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ*

В. В. Шевченко

Теория плоской импедансной поверхности, развитая автором ранее, обобщена на случай импедансного цилиндра круглого сечения. Полная система симметричных собственных волн такого цилиндра состоит, как и в случае импедансной плоскости, из одной поверхностной волны и непрерывного спектра псевдоповерхностных волн. При помощи этих волн в общем виде решена задача о симметричном возбуждении импедансного цилиндра заданным током, т. е. о симметричном возбуждении однопроводной линии передачи заданным источником. Найдена связь между амплитудами псевдоповерхностных волн и диаграммой направленности излученного поля. Вычислены коэффициенты связи волн на участке провода с меняющимся поверхностным импедансом и на участке провода с меняющимся сечением. В качестве промежуточных результатов были получены также коэффициенты связи симметричных собственных волн на участке круглого диэлектрического волновода с меняющейся толщиной.

1. Известны несколько типов однопроводных линий передач: медный провод без покрытия (линия Зоммерфельда [1]), провод, покрытый слоем диэлектрика (линия Губо [2]), провод с гофрированной поверхностью и др. Мы будем считать для простоты, что на поверхности провода удовлетворяются импедансные граничные условия. При этом ограничимся рассмотрением лишь симметричных волн.

При решении поставленной задачи применим математический аппарат, развитый в [3, 4] для плоской импедансной поверхности, обобщив его здесь на случай импедансного цилиндра. При этом, как и в [4], исследование неоднородного участка проведем методом поперечных сечений [5].

Рассмотрим симметричные собственные волны импедансного цилиндра. Введем цилиндрическую систему координат ρ , φ , z (рис. 1). Ра-

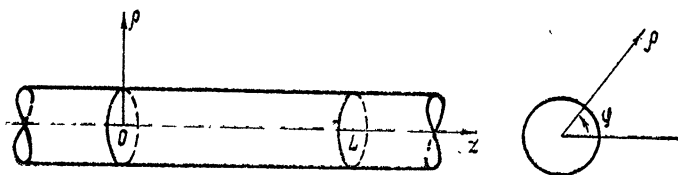


Рис. 1.

диус провода $\rho = a$. Поверхностная волна, направляемая проводом, является волной E -типа. При сохранении симметрии достаточно будет рассмотреть лишь симметричные E -волны. Поле этих волн содержит

* Основные результаты данной работы доложены на Третьем международном коллоквиуме по микроволновой связи, Будапешт, 19—22 апреля 1966 года.

составляющие E_ρ , H_φ , E_z . Обозначим H_φ через $\psi(\rho, z)$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \psi = 0, \quad (1)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, ε_0 , μ_0 — параметры среды, окружающей провод.

Составляющие E_ρ , E_z выражаются через $\psi(\rho, z)$ следующим образом:

$$E_\rho = - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0 \rho} \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial \rho}. \quad (2)$$

Собственные волны импедансного провода имеют вид

$$\psi_0(\rho, z) = \Psi_0(\rho) \exp(\mp i h_0 z), \quad h_0 = \sqrt{k^2 - p^2} \quad (3)$$

— поверхностная волна,

$$\psi(x, \rho, z) = \Psi(x, \rho) \exp(\mp i h(x) z), \quad h(x) = \sqrt{k^2 - x^2} \quad (4)$$

— псевдоповерхностные волны; верхний знак относится к волнам, распространяющимся по направлению оси z (вправо), а нижний — к волнам обратного направления (влево).

Функции поперечного сечения выражаются следующим образом:

$$\Psi_0(\rho) = \frac{1}{M_0} K_1(p\rho), \quad (5)$$

где

$$M_0^2 = \frac{\alpha^2}{2} (K_0(pa) K_2(pa) - [K_1(pa)]^2),$$

а p есть решение уравнения

$$\alpha K_1(pa) = p K_0(pa), \quad (6)$$

$$\Psi(x, \rho) = \frac{1}{M(x)} [v(x) J_1(x\rho) - w(x) N_1(x\rho)],$$

где

$$M^2(x) = \frac{1}{x} [v^2(x) + w^2(x)],$$

$$v(x) = x N_0(xa) + \alpha N_1(xa), \quad w(x) = x J_0(xa) + \alpha J_1(xa),$$

непрерывный спектр x заполняет полуось $(0, \infty)$. Здесь $K_0(pa)$, $J_1(x\rho)$, $N_1(x\rho)$ и т. д. суть цилиндрические функции.

Функции сечения удовлетворяют при $\rho > a$ уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \left(x^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \Psi = 0 \quad (7)$$

и при $\rho = a$ — условию

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial \rho} + \alpha\Psi = 0, \quad (8)$$

где $\alpha = -ikZ/Z_0$, $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$, Z — поверхностный импеданс. Чтобы поверхностная волна существовала, импеданс должен быть индуктивным.

Кроме условия (8), для функций сечения выполняется требование ограниченности величины $\sqrt{\rho} \Psi$ при $\rho \rightarrow \infty$, являющееся обобщением требования ограниченности самих функций сечения, которое накладывалось в плоском случае [3]. Действительно, первое требование перехо-

дит во второе, если воспользоваться асимптотическим представлением функций сечения при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\Psi_0(\rho) \simeq \frac{1}{M_0} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\rho\rho},$$

$$\Psi(x, \rho) \simeq \frac{1}{M(x)} \left[v(x) \sqrt{2/\pi x \rho} \sin \left(x\rho - \frac{\pi}{4} \right) + w(x) \sqrt{2/\pi x \rho} \cos \left(x\rho - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (9)$$

Ортогональность функций сечения с учетом нормировки записывается в виде

$$\int_a^\infty [\Psi_0(\rho)]^2 \rho d\rho = 1, \quad \int_a^\infty \Psi_0(\rho) \Psi(x, \rho) \rho d\rho = 0,$$

$$\int_a^\infty \Psi(x, \rho) \Psi(\tilde{x}, \rho) \rho d\rho = \delta(x - \tilde{x}). \quad (10)$$

Свойство ортогональности функций сечения проще всего показать, если воспользоваться уравнением (7) и асимптотическим представлением этих функций (9). Ход рассуждений такой же, как в случае плазменного волновода [6]. Это свойство можно доказать и непосредственным интегрированием, как это сделано в [3].

Поле в пространстве при наличии в нем импедансного провода может быть представлено в виде

$$\psi(\rho, z) = B_\pm^0 \Psi_0(\rho) \exp(\mp ih_0 z) + \int_0^\infty B_\pm(x) \Psi(x, \rho) \exp(\mp ihz) dx, \quad (11)$$

где, как обычно, верхний знак относится к полю справа от источников, а нижний — к полю слева от источников.

2. Рассмотрим задачу о возбуждении импедансного провода. Пусть провод возбуждается кольцевым магнитным током с произвольной формой сечения кольца. Представляя поле в виде разложения (11) и решая задачу методом теории полых волноводов [7], получим для коэффициентов разложения следующие выражения (ср. [3] и [6]):

$$B_\pm^0 = - \frac{kI^m}{2h_0 Z_0} \iint_S f(\rho, z) \Psi_0(\rho) \exp(\pm ih_0 z) \rho d\rho dz,$$

$$B_\pm(x) = - \frac{kI^m}{2h Z_0} \iint_S f(\rho, z) \Psi(x, \rho) \exp(\pm ihz) \rho d\rho dz, \quad (12)$$

где I^m — амплитуда магнитного тока, а $f(\rho, z)$ — функция распределения плотности тока по сечению кольца. Из (12) легко получить следующие важные частные случаи: 1) $f(\rho, z) = \delta(\rho - \rho_0) \delta(z - z_0)$ — возбуждение узкой кольцевой щелью; 2) $f(\rho, z) = f_1(\rho) \delta(z - z_0)$, где $f_1(\rho)$ не равна нулю лишь в интервале $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ — возбуждение широкой щелью в проводящем вертикальном экране; 3) $f(\rho, z) = \delta(\rho - a) f_2(z)$, где $f_2(z)$ не равна нулю лишь в интервале $z_1 \leq z \leq z_2$ — возбуждение распределенным источником на самом направляющем проводе, например, широкая щель в полом проводнике.

Считая, что источники сосредоточены вблизи начала координат и вдоль оси z не выходят за пределы интервала $(0, L)$, вычислим поле излучения в дальней зоне.

Представим B_{\pm}^0 и $B_{\pm}(x)$ в виде

$$B_{\pm}^0 = D_{\pm}^0 \frac{1}{\sqrt{kh_0}}, \quad B_{\pm}(x, h) = D_{\pm}(x, h) \frac{\sqrt{x}}{kh}. \quad (13)$$

Здесь, кроме того, в $B_{\pm}(x)$ мы выделили еще зависимость от h . Из (12) следует, что

$$D_+(x, h) = D_-(x, -h) = D(x, h).$$

Подставим второе выражение (13) в интеграл (11). Проинтегрируем его методом перевала при $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty$, воспользовавшись при этом асимптотическим представлением $\Psi(x, \rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ (9). В результате получим

$$\Psi(r, \theta) = D(k \sin \theta, k \cos \theta) \exp(iq(\theta)) \exp(-ikr)/kr, \quad (14)$$

где

$$\sin \theta = \rho/r, \quad q(\theta) = \operatorname{arctg} \frac{v(k \sin \theta)}{w(k \sin \theta)}.$$

Формула (14) неверна в интервале углов $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{L}{r}, \frac{\pi}{2}\right)$. При $r \rightarrow \infty$ этот интервал стремится к нулю и диаграмма направленности излученного поля, как обычно, имеет вид

$$F(\theta) = |D(k \sin \theta, k \cos \theta)|. \quad (15)$$

Мощность поверхностной волны равна

$$P_{\text{пов}} = \frac{Z_0}{2k} |D_{\pm}^0|^2, \quad (16)$$

а мощность излучения

$$P_{\text{изл}} = \frac{Z_0}{2k} \int_0^{\pi} F^2(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{Z_0}{2k} \int_0^{\pi} |D(k \sin \theta, k \cos \theta)|^2 \sin \theta d\theta. \quad (17)$$

3. Рассмотрим теперь провод с меняющимися вдоль оси параметрами. Свойства поверхностной волны, направляемой проводом, зависят от двух параметров: от поверхностного импеданса Z и от радиуса провода a . Пусть они оба являются функциями z . Представляя $\psi(\rho, z)$ и производную $d\psi/dz$ в виде

$$\psi = \sum_{\mu}^+ (C_{\mu}^0 \Psi_0 + \int_0^{\infty} C_{\mu} \Psi dx), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \sum_{\mu}^+ (h_{\mu}^0 C_{\mu}^0 \Psi_0 + \int_0^{\infty} h_{\mu} C_{\mu} \Psi dx),$$

где

$$C_{\mu}^0 = D_{\mu}^0 \exp \left\{ -i \int_0^z h_{\mu} dz \right\} (kh_0)^{-1/2}, \quad C_{\mu} = D_{\mu} \sqrt{x} \exp \{ -ihz \} (kh)^{-1},$$

и повторяя операции, проделанные в [4], получим для $C_n^0(z)$, $C_n(x, z)$ систему интегриродифференциальных уравнений

$$C_n^{0'} + ih_0^n C_n^0 = S_0^{n\mu} C_\mu^0 + \int_0^\infty S_0^{n\mu}(\tilde{x}) C_\mu(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad (19)$$

$$C_n'(x) + ih^n C_n(x) = S^{n\mu}(x) C_\mu^0 + \text{V. p.} \int_0^\infty S^{n\mu}(x, \tilde{x}) C_\mu(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

где штрих означает производную по z , $h_0^+ = -h_0^- = h_0$, $h^+ = -h^- = h$, $n, \mu = (+), (-)$ (как и в [4], знак суммы по μ здесь опущен).

Для провода с меняющимся поверхностным импедансом коэффициенты связи волн имеют вид

$$S_0^{nm} = -\frac{h_0^{n'}}

$$S_0^{nm}(\tilde{x}) = \frac{\alpha' a \Psi_0(a) \Psi(\tilde{x}, a)}{2h_0^n [h_0^n - h^m(\tilde{x})]},$$

$$S^{nm}(x) = \frac{\alpha' a \Psi(x, a) \Psi_0(a)}{2h^n(x) [h^n(x) - h_0^n]},$$

$$S^{nm}(x, \tilde{x}) = \frac{\alpha' a \Psi(x, a) \Psi(\tilde{x}, a)}{2h^n(x) [h^n(x) - h^m(\tilde{x})]}.$$
(20)$$

Здесь вместо импеданса фигурирует величина α , пользоваться которой удобнее, чем самим импедансом. Связь между ними дается в пояснении к формуле (8).

Для провода с переменным радиусом $a(z)$ коэффициенты связи получаются в виде

$$S_0^{nm} = -\frac{h_0^{nm'}}{2h_0^n}, \quad h_0^{nm'} = -\frac{\alpha' a (k^2 + a^2 + a/a - h_0^n h_0^m)}{2h_0^n} \Psi_0^2(a),$$

$$S_0^{nm}(\tilde{x}) = -\frac{\alpha' a [k^2 + a^2 + a/a - h^n h^m(\tilde{x})]}{2h_0^n [h_0^n - h^m(\tilde{x})]} \Psi_0(a) \Psi(\tilde{x}, a),$$

$$S^{nm}(x) = -\frac{\alpha' a [k^2 + a^2 + a/a - h^n(x) h_0^n]}{2h^n(x) [h^n(x) - h_0^n]} \Psi(x, a) \Psi_0(a),$$

$$S^{nm}(x, \tilde{x}) = -\frac{\alpha' a [k^2 + a^2 + a/a - h^n(x) h^m(\tilde{x})]}{2h^n(x) [h^n(x) - h^m(\tilde{x})]} \Psi(x, a) \Psi(\tilde{x}, a),$$
(21)

где $h_0^{nn'} = h_0^{n'}$.

Мы не будем приводить здесь громоздкие вычисления этих коэффициентов. Отметим лишь следующее.

Формулы (20) вычисляются так же, как были получены коэффициенты связи волн для плоской импедансной поверхности [4]. Только в выражениях для S^{nm} мы не проводили непосредственного интегрирования функций сечения по поперечному сечению (это сложно сделать), а поступили так, как сделано в нашей работе [8], где исследовался экранированный волновод с неоднородной импедансной стенкой. Мы заменили интегрирование по поперечному сечению через интеграл по контуру сечения, т. е. в данном случае просто через значение функций сечения

на поверхности провода. Разумеется, это можно было бы сделать и для импедансной плоскости, но там оказалось проще непосредственно проинтегрировать.

Коэффициенты связи (21) вычисляются значительно сложнее. Применение метода поперечных сечений непосредственно к проводу с меняющимся сечением невозможно. Причина та же, что и в случае волновода переменного сечения (см. [5], § 9): разложение по функциям сечения не является в этом случае сходящимся во всех точках к функции поля, которую оно представляет, а это означает, что такое разложение нельзя дифференцировать. Поэтому сначала мы рассмотрели провод постоянного сечения из материала с симметрично меняющимися параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\rho, z)$, $\mu_1 = \mu_1(\rho, z)$. Коэффициенты связи волн для такого провода были вычислены так же, как для волновода с неоднородным заполнением в [5], § 8. Затем из этих коэффициентов были получены коэффициенты связи волн для провода из однородного материала ($\varepsilon_1 = \text{const}$, $\mu_1 = \text{const}$), но с меняющимся сечением, аналогично тому, как были получены коэффициенты связи волн для волновода с кусочно-однородным заполнением в [5], § 8. Эти коэффициенты имеют вид

$$S_0^{nm} = -\frac{h_0^{nm'}}{2h_0^n}, \quad h_0^{nm'} = \frac{a'a}{2h^m} \left\{ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 a^2} \left[\frac{\partial(\rho\Psi_0)}{\partial\rho} \right]_{\rho=a}^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} h_0^n h_0^m + \omega^2 \varepsilon_0 (\mu_1 - \mu_0) \right] \Psi_0^2(a) \right\}, \quad h_0^{nn'} = h_0^n, \quad (22)$$

$$S_0^{nm}(\tilde{x}) = \frac{a'a}{h_0^n [h_0^n - h^m(x)]} \left\{ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 a^2} \frac{\partial(\rho\Psi_0)}{\partial\rho} \frac{\partial[\rho\Psi(\tilde{x})]}{\partial\rho} \Big|_{\rho=a} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} h_0^n h^m(\tilde{x}) + \omega^2 \varepsilon_0 (\mu_1 - \mu_0) \right] \Psi_0(a) \Psi(\tilde{x}, a) \right\}$$

и т. д., где значения функций сечения и их производных относятся к полю вне провода (при $\rho = a + 0$).

Формулы (22) дают возможность перейти к проводу переменного сечения с импедансной поверхностью. Для этого достаточно устремить $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, $\mu_1 \rightarrow \infty$, но так, чтобы $\mu_1 = Z^2 \varepsilon_1$, где Z — конечная величина.

Рассмотрим в качестве примера вычисление $h^{nm'}$. При больших значениях ε_1 , μ_1 касательные составляющие поля E_z и H_φ на поверхности провода связаны граничным условием Леонтовича [9]

$$E_z = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} \left(1 - \frac{i}{2\omega a \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \right) H_\varphi,$$

которое с учетом (2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial\rho} \Big|_{\rho=a} = i\omega a \varepsilon_0 \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} \left(1 - \frac{i}{2\omega a \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \right) \Psi(a). \quad (23)$$

Отметим, что в этих формулах вторым членом в круглых скобках учитывается кривизна поверхности провода*.

* В статье М. А. Леонтовича [9] в указанном члене в знаменателе нет двойки. Это, по-видимому, опечатка. Как следует из работы С. М. Рытова [10], на которую дается ссылка в [9], такая двойка имеет место.

Заменим производную $\partial(\rho\Psi_0)/\partial\rho$ в (22) через Ψ_0 согласно (23). После некоторых упрощений получим

$$h_0^{nm'} = \frac{a'a}{2h_0^n} \left(\omega^2 \varepsilon_0^2 \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} + \frac{i\omega\varepsilon_0}{a} \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} - \frac{i\varepsilon_0^2\omega}{\varepsilon_1 a} \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4a^2\varepsilon_1^2} + h_0^n h_0^m \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \Psi_0^2(a). \quad (24)$$

Далее устремим $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, $\mu_1 \rightarrow \infty$ так, чтобы $(\mu_1/\varepsilon_1)^{1/2} = Z$. В результате получим

$$h_0^{nm'} = -\frac{a'a}{2h_0^m} \left(k^2 + a^2 + \frac{a}{a} - h_0^n h_0^m \right) \Psi_0^2(a), \quad (25)$$

где, согласно введенным ранее обозначениям,

$$\alpha = -ikZ/Z_0, \quad Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}, \quad k = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зоммерфельд, Электродинамика, ИЛ, М., 1958
2. G. Goubau, J. Appl. Phys., 21, № 11, 1119 (1950).
3. В. В. Шевченко, Акуст. ж., 9, № 2, 215 (1963).
4. В. В. Шевченко, Акуст. ж., 9, № 3, 351 (1963).
5. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
6. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 110 (1966).
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. В. В. Шевченко, Радиотехника и электроника, 7, № 7, 1100 (1962).
9. М. А. Леонтович, сб. Исследования по распространению волн, ч. 2, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
10. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 10, № 2, 180 (1940).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
19 мая 1966 года

SURFACE WAVE PASSAGE THROUGH NONUNIFORM SECTION OF SINGLE-WIRE TRANSMISSION LINE. I. THE METHOD OF INVESTIGATION

V. V. Shevchenko

The theory of a plane impedance surface, developed earlier by the author, is generalized for the case of an impedance cylinder with circular section. The whole system of the symmetrical eigen waves of such cylinder consists, as in the case of the impedance plane, of one surface wave and an infinite spectrum of the pseudo-surface waves. Using these waves the problem of symmetric excitation of the impedance cylinder by the given current is solved in general form, that is the problem on symmetric excitation of the single-wire transmission line by the given source. A relation between amplitudes of pseudo-surface waves and the radiated field pattern is found.

The wave coupling coefficients are calculated on those parts of a wire which have a varying surface impedance and a varying section. As intermediate results the coupling coefficients have been also obtained for the symmetrical eigen waves on the section with the varying thickness of a circular dielectric waveguide.

УДК 621.372.2 — 1

ПРОХОЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ УЧАСТОК ОДНОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ. II. РЕШЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ТОНКОГО ПРОВОДА*

В. В. Шевченко

Решены задачи о прохождении поверхностной волны через участки тонкого провода с медленно меняющимися поверхностными импедансом и поперечным сечением и через малый скачок толщины провода. Заново решена задача о прохождении поверхностной волны через малый скачок поверхностного импеданса на проводе. Как и в рассмотренных ранее задачах для плоской импедансной поверхности, в случае, когда скорость изменения эффективной протяженности поля поверхностной волны сохраняет порядок величины в пределах неоднородного участка, отражение и излучение происходят только от концов участка. При уменьшении замедления поверхностной волны коэффициент излучения возрастает, а коэффициент отражения падает, при этом общая мощность потерь увеличивается. Показано, что изменение поверхностного импеданса и изменение сечения провода приводят к одинаковому эффекту, как качественному, так и количественному, если эффективная протяженность поля поверхностной волны изменяется в обоих случаях по одному и тому же закону.

1. Рассмотрим сначала прохождение поверхностной волны через участок тонкого провода с меняющимся поверхностным импедансом. Пусть $ka \ll 1$. Кроме того, будем считать, что $|Z/Z_0| \ll 1$ или $|\alpha/k| \ll 1$. Из этих условий следует, что $|pa| \ll 1$, а так как нас будет интересовать значение x в интервале $0 \leq x < k$, то также $xa \ll 1$. Учитывая это, воспользуемся приближенными формулами для цилиндрических функций:

$$\begin{aligned} K_0(pa) &\simeq \ln \frac{2}{cra}, & K_1(pa) &\simeq \frac{1}{pa}, \\ K_2(pa) &\simeq \frac{2}{(pa)^2}, & J_0(xa) &\simeq 1, & J_1(xa) &\simeq \frac{xa}{2}, \\ N_0(xa) &\simeq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{cra}, & N_1(xa) &\simeq -\frac{2}{\pi} \frac{1}{xa}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $c = 1,781\dots$

Для дальнейшего удобно ввести эффективную протяженность поля поверхностной волны в поперечном сечении

$$d = 1/p. \tag{2}$$

Через круг радиуса $\rho_{эфф} = a + d$ проходит более 90% мощности поверхностной волны. В рассматриваемом случае $d \gg a$, поэтому можно считать, что $\rho_{эфф} \simeq d$. В противоположном случае при $a \rightarrow \infty$ p стремится

* Основные результаты данной работы были доложены на Третьем международном коллоквиуме по микроволновой связи, Будапешт, 19—22 апреля 1966 года.

к α и d переходит в эффективную протяженность поля поверхностной волны над плоской импедансной поверхностью, которую мы ввели в [1] и обозначили той же буквой d .

Для тонкого провода p есть решение уравнения

$$\ln \frac{2}{cap} = \frac{\alpha}{p^2 a}. \quad (3)$$

Предполагая, что α зависит от z , продифференцируем (3). Получим следующее приближенное (при $pa \ll 1$) соотношение

$$p'/p = -d'/d \simeq \alpha'/2\alpha, \quad (4)$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Будем считать в дальнейшем, что импеданс изменяется медленно, так что удовлетворяется условие

$$|d'| \ll 1, \quad (5)$$

где согласно (4)

$$|d'| \simeq \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| \frac{1}{2p} = |Z'/Z| \frac{1}{2p}. \quad (6)$$

Система интегродифференциальных уравнений для амплитуд поверхностных и псевдоповерхностных волн имеет вид

$$\begin{aligned} D_n^{o'} &= D_\mu^0 S_0^{n\mu} \exp \{ i(\gamma_0^n - \gamma_0^\mu) \} (1 - \delta^{n\mu}) + \int_0^\infty \frac{1}{h} \sqrt{\frac{xh_0}{k}} \times \\ &\quad \times S_0^{n\mu}(\tilde{x}) D_\mu(\tilde{x}) \exp \{ i(\gamma_0^n - \tilde{h}^\mu z) \} d\tilde{x}, \\ D_n'(x) &= h\sqrt{k/xh_0} S^{n\mu}(x) D_\mu^0 \exp \{ i(hz - \gamma_0^\mu) \} + \\ &+ \text{в.р.} \int_0^\infty \frac{h}{\tilde{h}} \sqrt{\frac{\tilde{x}}{x}} S^{n\mu}(x, \tilde{x}) D_\mu(\tilde{x}) \exp \{ i(h^n - \tilde{h}^\mu) z \} d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\gamma_0^n = \int_0^z h_0^n dz$. Коэффициенты связи волн (см. [2]) получаются для этого случая в виде

$$S_0^{-+} = \frac{h_0'}{2h_0} = \alpha' p^2 / 4h_0^2 \alpha, \quad (8)$$

$$S^{n+}(x) = \frac{\alpha' \sqrt{x}}{2h^n (h^n - h_0) \sqrt{\ln(2/cap)} (\alpha \ln(2/c\alpha) + \alpha/x)}.$$

Здесь выписаны лишь те коэффициенты, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть слева на неоднородный участок $(0, L)$ падает поверхностная волна единичной амплитуды. С учетом конечных условий $D_+(0) = 1$, $D_+(0) = D_-(L) = D_-(L) = 0$ решим систему (7) в первом приближении по малому параметру ϵ , равному некоторому среднему в интервале $(0, L)$ значению $|d'|$. В результате получим

$$D_+^0(L)=1, \quad D_-^0(0) = -\int_0^L S_0^{-+} \exp \{-i2\gamma_0\} dz,$$

$$D_+(x, L) = \int_0^L h \sqrt{k/xh_0} S^{++}(x) \exp \{i(hz-\gamma_0)\} dz, \quad (9)$$

$$D_-(x, 0) = -\int_0^L h \sqrt{k/xh_0} S^{-+}(x) \exp \{-i(hz+\gamma_0)\} dz.$$

Здесь D_+^0 — коэффициент прохождения, который в первом приближении равен единице, а $D_-^0(0)$ — коэффициент отражения.

В частном случае, когда $d'(z)$ имеет один и тот же порядок величины внутри интервала $(0, L)$ и скачком обращается в нуль на концах интервала (рис. 1), интегрируем в (9) по частям. Получим

$$D_-^0(0) = -\frac{i S_0^{-+}}{2h_0} \exp \left\{ -2i \int_0^z h_0 dz \right\} \Big|_0^L,$$

$$D_+(x, h, L) = S^{++}(x) ih \sqrt{k/xh_0} \frac{\exp \left\{ -i \int_0^z (h_0 - h) dz \right\} \Big|_0^L}{h_0 - h}, \quad (10)$$

$$D_-(x, h, 0) = S^{-+}(x) ih \sqrt{k/xh_0} \frac{\exp \left\{ -i \int_0^z (h_0 + h) dz \right\} \Big|_0^L}{h_0 + h}.$$

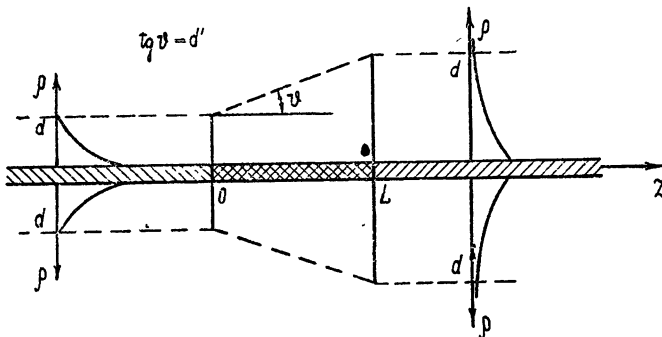


Рис 1.

Диаграмма направленности излученного поля согласно соотношению (15) работы [2] имеет вид

$$F(\theta) = \left| d' \sqrt{\frac{(\beta^2 - 1) Q_0}{\beta}} Q(\theta) \frac{\sin \theta \exp \left\{ -ik \int_0^z (\beta - \cos \theta) dz \right\} \Big|_0^L}{(\beta - \cos \theta)^2} \right|, \quad (11)$$

где

$$Q_0 = 1/\ln \frac{2}{\text{ср}}, \quad Q(\theta) = \frac{\alpha/k}{\alpha/k + ka \sin^2 \theta \ln |2/cka \sin \theta|},$$

$\beta = h_0/k = [1 + (p/k)^2]^{1/2}$ — замедление поверхностной волны. Излучение здесь происходит только с концов неоднородного участка. Диаграмма излучения одного конца имеет вид

$$f(\theta) = |d'| \sqrt{(\beta^2 - 1)} Q_0/\beta Q(\theta) \frac{\sin \theta}{(\beta - \cos \theta)^2}. \quad (12)$$

На графиках рис. 2 построены диаграммы излучения одного конца неоднородного участка в предположении, что $ka = 0,1$; $a/k = |Z/Z_0| = 1; 0,1; 0,01$. Это соответствует замедлению $\beta = 2,96; 1,16; 1,01$. Масштабная

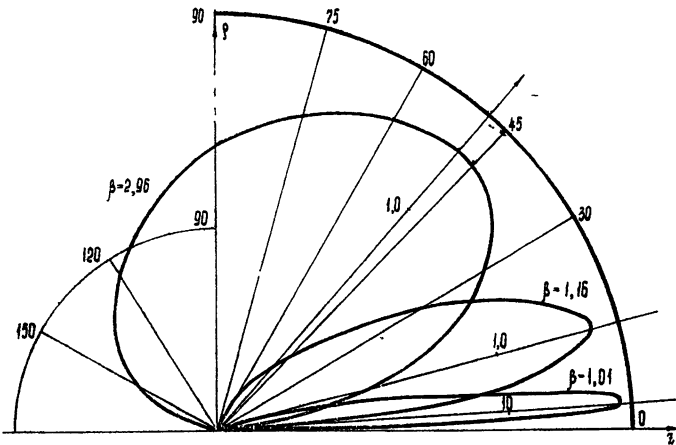


Рис. 2.

единица равна $|d'| \sqrt{\pi}$, причем в случае $\beta = 2,96$ диаграмма увеличена в десять раз, а в случае $\beta = 1,01$ уменьшена во столько же раз. Как и для плоской импедансной поверхности, в случае малого замедления диаграмма имеет сильную направленность и прижата к оси z .

Коэффициент отражения от одного конца неоднородного участка равен

$$D_-^0 = -\frac{ih_0'}{4kh_0^2} = \frac{id'}{4} \left(\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} \right)^{3/2}. \quad (13)$$

Для малого замедления коэффициент отражения очень мал, так что мощность теряется в основном на излучение.

Чтобы оценить мощность излучения, положим в (12) $Q(\theta) = 1$. Этим мы несколько завысим результат, зато можно будет проинтегрировать диаграмму по углу. Считая, что концы участка разнесены так, что они не влияют друг на друга ($kL \gg 1$), проинтегрируем диаграмму (12) согласно формуле (17) работы [2] от 0 до π в предположении $Q(\theta) = 1$. В результате получим, что коэффициент излучения по мощности от одного конца приближенно равен

$$\frac{P_{\text{изл}}}{P_{\text{пад}}} \simeq |d'|^2 \frac{4}{3 \ln(2/cap)} \frac{1}{\beta(\beta^2 - 1)}, \quad (14)$$

где $ap = ak \sqrt{\beta^2 - 1}$.

Из полученной формулы видно, что в случае малого замедления для справедливости найденного решения недостаточно условия малости $|d'|$. Необходимо, чтобы выполнялось условие

$$|d'| (\beta^2 - 1)^{-1/2} |\ln(ka\sqrt{\beta^2 - 1})|^{-1/2} \ll 1. \quad (15)$$

Наше общее решение (9) дает, в частности, возможность получить результаты для малого скачка импеданса на тонком проводе.

Поступим так же, как было сделано в [1] для скачка импеданса на плоскости. Считая, что относительное изменение импеданса, а следовательно, и d , мало, устремим L в формуле (9) к нулю, отказавшись при этом от требования $|d'| \ll 1$. В результате получим

$$D_-^0 = \Delta h_c / 2h_0 = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \frac{p^2}{4h_0^2} = -\frac{\Delta d}{d} \frac{\beta^2 - 1}{2\beta^2}, \quad (16)$$

$$D_{\pm}(x) = -\sqrt{kQ_0/h_0} \frac{\Delta\alpha}{2(h_0 \mp h)(\chi a \ln(2/c\chi a) + \alpha/x)},$$

где согласно (4)

$$\Delta\alpha = -\frac{\Delta d}{d} 2\alpha. \quad (17)$$

Диаграмма излучения от скачка имеет вид

$$F(\theta) = \left| \frac{\Delta d}{d} \right| \sqrt{Q_0/\beta} Q(\theta) \frac{\sin \theta}{\beta - \cos \theta}, \quad (18)$$

где $Q_0, Q(\theta)$ — те же, что и в (11).

Коэффициент излучения по мощности приближенно равен

$$\frac{P_{\text{изл}}}{P_{\text{пад}}} \approx \left| \frac{\Delta d}{d} \right|^2 \frac{2\beta \ln[(\beta^2 + 1)/(\beta^2 - 1)] - 4}{\beta \ln(2/cak\sqrt{\beta^2 - 1})}. \quad (19)$$

Коэффициент отражения по мощности равен

$$\frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{пад}}} = |D_-^0|^2 = \left| \frac{\Delta d}{d} \right|^2 \frac{(\beta^2 - 1)^2}{4\beta^4}. \quad (20)$$

Результаты для скачка импеданса согласуются с полученными в работе [3]. В этой работе задача о скачке решалась с применением метода Винера—Хопфа [4].

2. Рассмотрим теперь прохождение поверхностной волны через участок тонкого провода с меняющимся сечением. В случае тонкого провода с меняющимся сечением вместо соотношения (4) имеем

$$\frac{p'}{p} = -\frac{d'}{d} \approx \frac{-a'}{2a} \quad (21)$$

и соответственно вместо (5), (6)

$$|d'| \approx \frac{|a'|}{2ap} \ll 1. \quad (22)$$

Необходимые для вычислений в первом приближении коэффициенты связи волн имеют вид

$$S_{0^-}^+ = -\frac{a'}{a} \frac{k^2 + \alpha^2 + h_0^2 + \alpha/a}{4h_0^2 \ln(2/cap)}, \quad (23)$$

$$S^{n+}(x) = \frac{-a' \sqrt{x} (k^2 + a^2 - h^n(x) h_0 + a/a)}{2h^n(x) [h^n(x) - h_0] \sqrt{\ln(2/cap)} (xa \ln(2/cxa) + a/x)}.$$

Рассмотрим, как и выше, случай, когда $d'(z)$ имеет один и тот же порядок малости внутри интервала $(0, L)$. Например, $d(z)$ может изменяться линейно: $d = d(0) \pm \varepsilon z$, где $\varepsilon = \text{const} \ll 1$, что соответствует изменению радиуса a по приближенному закону $a = [\sqrt{a(0)} \pm \varepsilon_1 \sqrt{a} z]^2$, где ε_1 имеет тот же порядок величины, что и ε .

В этом случае поле излучается и отражается только от концов неоднородного участка. Диаграмма излучения одного конца имеет вид (ср. (12))

$$f(\theta) = |d'| \sqrt{(\beta^2 - 1) Q_0 / \beta} Q(\theta) \frac{\sin \theta}{(\beta_+ - \cos \theta)^2}, \quad (24)$$

где

$$Q_0 = \left[\ln \frac{2}{cak \sqrt{\beta^2 - 1}} \right]^{-1}, \quad Q(\theta) = \frac{\alpha/k - ak(1 - \beta \cos \theta)}{\alpha/k + ka \sin^2 \theta \ln |2/cak \sin \theta|}.$$

Как и в случае переменного импеданса $Q(\theta)$ является медленно меняющейся функцией угла, так что диаграмма определяется в основном множителем

$$\sin \theta / (\beta - \cos \theta)^2.$$

При численных вычислениях можно положить $Q(\theta) = 1$. Поскольку в остальном формулы (24) и (12) не отличаются друг от друга, то графики диаграмм излучения и выражения для оценки мощности излучения, полученные выше, переносятся на рассматриваемый случай без изменения.

Коэффициент отражения поверхностной волны от одного конца неоднородного участка согласно (10), (23) и (22) равен

$$D_0^- = \frac{id'}{4} \frac{[1 + \beta^2 + (\alpha/k)^2 + \alpha/k^2 a]}{\beta^3 \ln(2/cak \sqrt{\beta^2 - 1})} \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (25)$$

При $\alpha/k \sim 1$ с учетом, что $ka \ll 1$, и (3) имеем

$$D_0^- = \frac{id'}{4} \frac{(\beta^2 - 1)^{3/2}}{\beta^3}. \quad (26)$$

Эта последняя формула совпадает с коэффициентом отражения при изменении поверхностного импеданса (13).

При $\alpha/k \ll ak$ из (25) получается другое выражение:

$$D_0^- = \frac{id'}{4} \frac{(1 + \beta^2) \sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta^3 \ln(2/cak \sqrt{\beta^2 - 1})}. \quad (28)$$

Отсюда видно, что при малых значениях α/k скорость уменьшения коэффициента отражения при уменьшении замедления значительно ниже, чем при $\alpha/k \sim 1$.

Как и в случае изменения поверхностного импеданса, при малом замедлении основные потери приходятся на излучение, которое можно оценить формулой (14).

Аналогичные выражения можно получить для малого скачка сечения провода.

Диаграмма излучения скачка имеет вид (ср. (18))

$$F(\theta) = \frac{\Delta d}{d} \sqrt{Q_0/\beta} Q(\theta) \frac{\sin \theta}{\beta^n - \cos \theta}, \quad (28)$$

где Q_0 и $Q(\theta)$ — те же, что и в (24). Поскольку $Q(\theta)$ мало влияет на характер диаграммы, то диаграмма (28) не отличается от (18). Мощность, потерянная на излучение, может быть оценена выражением (19).

Мощность, потерянную на отражение, можно оценить при $a/k \sim ak$ выражением (20), а при $a/k \ll ak$ выражением

$$\frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{пад}}} = |D_0^0|^2 = \left| \frac{\Delta d}{d} \right|^2 \frac{(1 + \beta^2)^2}{4\beta^4 [\ln(2/ca k \sqrt{\beta^2 - 1})]^2}. \quad (29)$$

Учитывая вышесказанное, можно сделать следующий вывод. Если при изменении поверхностного импеданса и при изменении поперечного сечения тонкого провода эффективная протяженность поля поверхностной волны изменяется по одному и тому же закону (например, по линейному), то это приводит к одинаковому эффекту. Диаграммы и мощности излучения в обоих случаях одинаковы. Правда, коэффициенты отражения совпадают лишь при $a/k \sim 1$ и отличаются при $a/k \sim ak$ и $a/k \ll ak$, где $ak \ll 1$. Однако в последнем случае коэффициент отражения мал по сравнению с коэффициентом излучения, так что это отличие несущественно. К одинаковому эффекту приводят также малые скачкообразные деформации провода и малые скачкообразные изменения поверхностного импеданса.

Данная работа, включая [2], выполнена в 1963 году [5] под руководством Б. З. Каценеленбаума, которому автор выражает глубокую признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Шевченко, Акуст. ж., 9, № 3, 351 (1963).
2. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2 (1967).
3. В. В. Колпаков, Радиотехника и электроника, 6, № 10, 1658 (1961).
4. Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962.
5. В. В. Шевченко, Диссертация, МФТИ, М., 1964.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
19 мая 1966 года,

SURFACE WAVE PASSAGE THROUGH NONUNIFORM SECTION OF SINGLE-WIRE TRANSMISSION LINE. II. SOLUTION AND RESULTS FOR THIN WIRE

V. V. Shevchenko

The problems are solved on a surface wave passage through the sections of a thin wire with slowly varying surface impedance and cross-section and through the small jump of a wire thickness. The problem pertaining to the surface wave passage through the small jump of the surface impedance of the wire is solved new. As in the problems considered the plane impedance surface, in the case when the velocity of change of the effective field extension of the surface wave preserves the order of magnitude in the limits of the nonuniform part, the reflection and radiation take place only from the ends of the nonuniform section. With delay decrease of the surface wave the radiation coefficient increases and the reflection coefficient falls, the total power of losses increases. The change of the surface impedance on the one hand and the wire section on the other are shown to lead to the same effect both qualitative and quantitative, if the effective field extension of the surface wave varies in both cases alike.

УДК 535.4

ДИФРАКЦИОННОЕ ПОЛЕ В ОСВЕЩЕННОЙ ОБЛАСТИ

Б. Е. Кинбер, Р. Х. Хестанов

Исследована коротковолновая асимптотика строгого решения задачи о дифракции плоской волны на параболическом цилиндре в освещенной области. Показано, что в решении помимо членов, отвечающих приближению геометрической оптики, имеются еще экспоненциально малые члены, соответствующие краевой волне, исходящей от вершины цилиндра. Точка «генерации» этой краевой волны расположена в области наибольшей кривизны, а не на границе свет—тьень.

ВВЕДЕНИЕ

В появившихся за последние годы работах [1-4], посвященных коротковолновой асимптотике дифракции на гладких телах, было показано, что поле в освещенной области достаточно хорошо описывается законами геометрической оптики, а в области тени — с помощью лучей Келлера (см. рис. 1а). Характерной особенностью существующей интерпретации является отсутствие дифракционных компонент поля в освещенной области*. Иными словами, поле в освещенной области рассматривается как сумма первичного и отраженного полей. Отлична, однако, конструкция решения для тел с острыми кромками (см. рис. 1б). Для подобной геометрии в теневой области поле по-прежнему формируется за счет лучей Келлера. В освещенной же области помимо лучей первичного и отраженного полей имеется дифракционное поле, описываемое

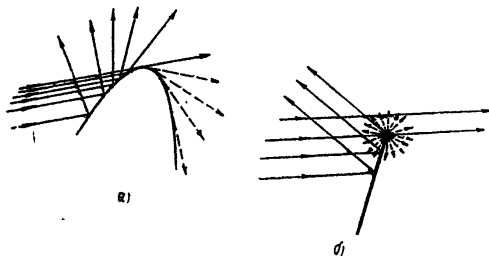


Рис. 1.

с помощью лучей Келлера, исходящих от кромки.

В настоящей работе мы хотим выяснить существование хотя бы очень слабого дифракционного поля в освещенной области у гладких тел, лучи которых, минуя теневую область, попадают непосредственно в область света. Наличие такого поля устранило бы противоречие между описанием поля дифракции у гладких тел и тел с заострениями.

В качестве удобной модели для выяснения указанного вопроса мы рассмотрим задачу о падении плоской волны на параболический цилиндр. Эта задача удобна в том отношении, что для нее известно строгое решение, выражающееся через функции Вебера, и достаточно хорошо исследована асимптотика последних. Дополнительным преимуществом рассматриваемой модели является переменная кривизна тела. Это

* Последнее справедливо, если не учитывать лучей, обогнувших тело. Такие лучи, например, отсутствуют при падении волны на параболический цилиндр.

обстоятельство позволяет установить, что является причиной искомых дифракционных поправок: переменная кривизна поверхности или резкое изменение токов у границы свет—тень.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ

Пусть на параболический цилиндр $\eta = \eta_0 = \sqrt{2h}$ падает (см. рис. 4, б) плоская волна, составляющая угол φ с осью Oy . Как известно [5], плоскую волну $U_0 = \exp[ik(x \sin \varphi - y \cos \varphi)]$ можно записать в виде интеграла:

$$U_0 = (\pi \sin \varphi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{i\mu} \frac{\Gamma(+)\Gamma(-)}{2\pi} [D_+(-\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p}) + D_+(\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p})] d\mu \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2} \right), \quad (1)$$

где ξ, η — параболические координаты, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{\eta^2 - \xi^2}{2}, \quad p = \sqrt{2ik}, \quad \bar{p} = \sqrt{-2ik},$$

а обозначения « \pm » есть сокращенная запись индексов функций Вебера и аргумента Γ -функции $-1/2 \pm i\mu$.

Произведения функций Вебера $D_+(-\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p})$ и $D_+(\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p})$ являются решениями скалярного волнового уравнения. Решение для рассеянной волны U_p , удовлетворяющее совместно с падающей волной граничному условию Дирихле

$$[U_0 + U_p]_{\eta=\eta_0} = 0, \quad (2)$$

будем искать в виде интеграла:

$$U_p = \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(\mu) D_+(-\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p}) + F_2(\mu) D_+(\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p})] d\mu,$$

поскольку подынтегральное выражение (интегранд) функции U_p удовлетворяет волновому уравнению, принципу излучения и имеет ту же зависимость по ξ , что и U_0 .

Удовлетворяя граничному условию (2), получим

$$U_p = -(\pi \sin \varphi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{i\mu} \frac{\Gamma(+)\Gamma(-)}{2} \left[D_+(-\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p}) + D_+(\xi\bar{p}) D_-(\eta\bar{p}) \frac{D_-(\eta_0\bar{p})}{D_-(\eta_0\bar{p})} \right] d\mu. \quad (3)$$

Мы будем исследовать эту формулу в той части освещенной области, которая соответствует $\xi < 0$. Поскольку нам в дальнейшем понадобятся асимптотические выражения функций Вебера, которые известны для значений аргумента $\operatorname{arg} = \pm i\pi/4$ [4], то к функциям $D_+(\xi\bar{p})$, $D_-(\eta_0\bar{p})$ применим формулу обхода [6].

После указанных преобразований рассеянное поле может быть записано в форме

$$U_p = U_1 + U_2 + U_3, \quad (4)$$

где

$$U_1 = - \left(\frac{-i}{\pi \sin \varphi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{i\mu} \frac{\Gamma(-)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\pi\mu}{2}\right) \times \\ \times D_+(-\xi \bar{p}) D_-(\eta \bar{p}) \frac{D_+(\eta_0 p)}{D_-(\eta_0 p)} d\mu; \quad (5)$$

$$U_2 = - \left(\frac{-i}{\pi \sin \varphi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{i\mu} \frac{\Gamma(+)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) D_-(\xi p) D_-(\eta \bar{p}) d\mu; \quad (6)$$

$$U_3 = (-\pi \sin \varphi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{i\mu} D_-(-\xi p) D_-(\eta \bar{p}) \frac{D_+(\eta_0 p)}{D_-(\eta_0 p)} d\mu, \quad (7)$$

содержащей при $\xi < 0$ только аргументы функций Вебера с $\arg = \pm i\pi/4$.

2. АНАЛИЗ ПОДЫНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Качественный характер поведения амплитуды A_j и фазы Φ_j ($j = 1, 2, 3$) в формулах (5)–(7) для U_1, U_2, U_3 при

$$k\eta_0^2 \gg 1; \quad (8)$$

$$k\eta_1^2 \gg 1, \quad (9)$$

а также при

$$k\xi^2 \gg 1 \quad (10)$$

показан на рис. 2, 3. Рис. 2 соответствует положению точки наблюдения P , лежащей в области II выше линии bb , являющейся зеркальным отражением границы свет—тьня gg (см. рис. 6). Рис. 3 соответствует положению точки наблюдения P в области I ниже линии bb (см. рис. 4). В освещенной области $\xi < 0$ поле геометрической оптики соответствует

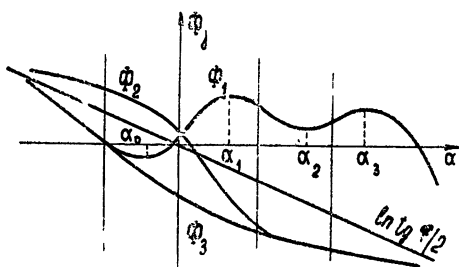
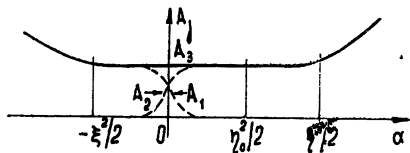


Рис. 2.

[4] вкладу точки стационарной фазы α_0 в интеграле U_1 . Эта точка расположена в интервале $-k\xi^2 + (k\xi^2)^{1/3} \ll 2k\eta_1 = 2\mu < 0$.

Как видно из рис. 2, помимо указанной выше точки α_0 подынтегральное выражение U_1 имеет три другие точки стационарной фазы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в области $\alpha > 0$, из которых α_1 и α_2 при перемещении точки наблюдения P ниже границы bb сливаются друг с другом, образуя точку перегиба α' .

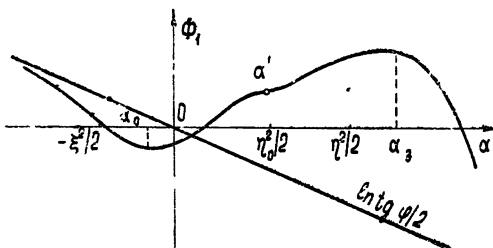


Рис. 3.

Указанные точки стационарной фазы соответствуют весьма малым значениям модуля и ранее не рассматривались. Мы покажем ниже, что точка α_1 (или точка перегиба α') ответственна за искомое дифракционное поле в освещенной области.

Кратко отметим другие особенности поведения подинтегральных функций в U_1 , U_2 и U_3 . Как U_2 , так и U_3 имеют монотонную фазу. Возрастающие модули подинтегральных выражений в U_1 и U_3 в области $2k\alpha \ll -k\xi^2 + (k\xi^2)^{1/3}$ асимптотически совпадают, а разность их фаз стремится к π , т. е. U_1 и U_3 на этом участке компенсируют друг друга. Аналогичная компенсация U_2 и U_3 происходит в области $2k\alpha \gg k\eta_0^2 - (k\eta_0^2)^{1/3}$.

В окрестности точки $\alpha = 0$ резкое изменение амплитуд подинтегральных функций U_1 и U_2 не дает какого-либо существенного вклада. В этом легко убедиться, рассматривая интегральное представление (1) для плоской волны, которое имеет аналогичные особенности амплитуды в окрестности точки $\alpha = 0$. Подчеркнем, что все рассмотренные выше особенности фазы подинтегральной функции в U_1 должны давать локальные вклады в интеграл, т. е. вклады, имеющие различную фазовую структуру. Поэтому они не могут скомпенсировать друг друга.

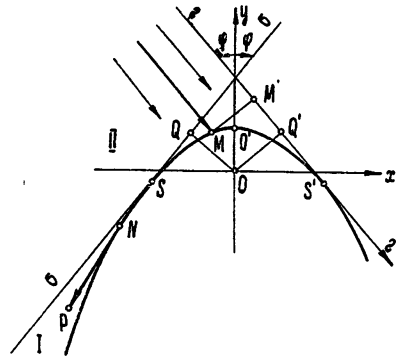


Рис. 4.

Поскольку при $\alpha > 0$

$$A_1 \sim [1 + \exp(2\pi k\alpha)]^{-1/2} \approx \exp(-\pi k\alpha),$$

наибольший вклад в интеграл должна давать точка α_1 , а вкладами α_2 и α_3 можно пренебречь. После сделанных предварительных замечаний перейдем к вычислению вклада от точки α_1 (или вклада от точки α').

3. ДИФРАКЦИОННАЯ ЧАСТЬ ПОЛЯ В ОСВЕЩЕННОЙ ОБЛАСТИ I

Рассмотрим вначале случай, когда точка наблюдения P расположена ниже линии bb , т. е. в области, обозначенной на рис. 4 цифрой I.

Для вычисления соответствующего вклада в интеграл разложим в ряд Тейлора фазовую функцию $\Phi_1(\alpha)$ интегранда U_1 в точке перегиба α' , которая является корнем уравнения

$$\Phi_1''(\alpha) = 0, \tag{11}$$

и ограничимся кубическим членом, т. е.

$$\Phi_1(\alpha) \approx \Phi_1(\alpha') + \Phi_1'(\alpha') \frac{\alpha - \alpha'}{1!} + \Phi_1'''(\alpha') \frac{(\alpha - \alpha')^3}{3!}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), полагая

$$[1 + \exp(2\pi k\alpha)]^{-1/2} \approx \exp(-\pi k\alpha)$$

и вынося медленно меняющиеся множители за знак интеграла, получим

$$U_1(\alpha') \approx \left(\frac{2k}{\sin \varphi} \right)^{1/2} \left[\frac{\Phi_1'''(\alpha')}{2} \right]^{-1/3} \{ [\xi^2 + 2\alpha'] (\eta^2 - 2\alpha') \}^{-1/4} v(\alpha) \exp[i\Phi_1(\alpha') - \pi k\alpha'], \tag{13}$$

где

$$v(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(a\tau + \frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(a\tau + \frac{\tau^3}{3}\right)\right] d\tau,$$

$$a = [\Phi_1'(a') + i\pi k] \left[\frac{1}{2} \Phi_1'''(a') \right]^{-1/3},$$

Теперь необходимо вычислить $a' = a'(\xi, \eta, h, \varphi)$ и подставить его в выражения $\Phi_1(a')$, $\Phi_1'(a')$ и $\Phi_1'''(a')$, которые входят в (13). Прежде всего заметим, что точка перегиба локализована в интервале (см. [4])

$$\left(\frac{k^2}{h}\right)^{1/3} |a - h| \leq 1,$$

так как из дебаевских асимптотик функций Вебера, входящих в (5) ($D_+(-\xi p)$, $D_-(\eta_0 \bar{p})$, $D_+(\eta_0 p)$, $D_-(\eta \bar{p})$), следует, что в интервале $0 < 2k\alpha \ll k\eta_0^2 - (k\eta_0^2)^{1/3}$

$$\Phi_1''(a) = \frac{k}{2\alpha} [(1 - 2\alpha/\eta^2)^{-1/2} - (1 - 2\alpha/\xi^2)^{-1/2} - 2(1 - 2\alpha/\eta_0^2)^{-1/2}] < 0, \quad (14)$$

а в интервале $k\eta_0^2 - (k\eta_0^2)^{1/3} \ll 2k\alpha \ll k\eta^2 - (k\eta^2)^{1/3}$

$$\Phi_1''(a) = \frac{k}{2\alpha} [(1 - 2\alpha/\eta^2)^{-1/2} - (1 - 2\alpha/\xi^2)^{-1/2}] > 0.$$

В окрестности точки перегиба значительно изменяются только функции $D_-(\eta_0 \bar{p})$ и $D_+(\eta_0 p)$, имеющие асимптотику Фока, поэтому удобно представить фазу $\Phi_1(a)$ в виде суммы

$$\Phi_1(a) = \Phi_d(a) + \Phi_f(a),$$

где

$$\Phi_d(a) = \frac{\pi}{4} + k \left[\frac{\eta(\eta^2 - 2\alpha)^{1/2} - \xi(\xi^2 + 2\alpha)^{1/2}}{2} + \alpha \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + 2\alpha} - \xi}{\sqrt{\eta^2 - 2\alpha} + \eta} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right],$$

$$\Phi_f(a) = -2 \operatorname{arctg} \frac{v(t)}{u(t)} = -2 \operatorname{arg} w_1(t),$$

$$t = (k^2/h)^{1/3} (\alpha - h), \quad (15)$$

$v(t)$ и $u(t)$ — функции Эйри [7].

Дифференцируя дважды Φ_d и Φ_f , запишем уравнение (11) в явном виде:

$$\Phi_1''(a) = \left\{ \frac{(kh)^{1/3}}{2k\alpha} [(1 - 2\alpha/\eta^2)^{-1/2} - (1 + 2\alpha/\xi^2)^{-1/2}] - 4 \frac{u'u + v'v}{(u^2 + v^2)^2} \right\} \frac{k^2}{(kh)^{1/3}} = 0.$$

Первый член в этом уравнении мал по сравнению со вторым, так как

$$(kh)^{1/3}/k\alpha \simeq (kh)^{-2/3} \ll 1.$$

Пренебрегая им, получим уравнение только относительно t , не зависящее от координат точки наблюдения. Численное решение этого уравнения дает

$$t = t' = -1,11 + O(kh)^{-2/3}, \quad (16)$$

откуда

$$ka' = kh - 1,11(kh)^{-1/3} \simeq kh, \quad (17)$$

так как $(kh)^{4/3} \gg 1$.

Учитывая (8) — (10) и пренебрегая членами порядка $(kh)^{-1/3}$, запишем

$$\Phi_1(\alpha') = \frac{\pi}{4} + k \left(\frac{\eta \sqrt{\eta^2 - 2h} - \xi \sqrt{\xi^2 + 2h}}{2} + h \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + 2h} - \xi}{\sqrt{\eta^2 - 2h} + \eta} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - 1,19; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1'(\alpha') &= k \left\{ \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + 2h} - \xi}{\sqrt{\eta^2 - 2h} + \eta} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{(kh)^{-1/3}}{[u(t')]^2 + [v(t')]^2} \right\} \simeq \\ &\simeq k \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + 2h} - \xi}{\sqrt{\eta^2 - 2h} + \eta} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1'''(\alpha') &= \frac{k^2}{h} \left[\frac{1}{2kh} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2h}} + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 2h}} \right) - \frac{\xi}{2k(\xi^2 + 2h)^{3/2}} + \right. \\ &\left. + \frac{\eta}{(\eta^2 - 2h)^{3/2}} + \Phi_f'''(t') \right] \simeq \frac{k^2}{h} \Phi_f'''(t') \simeq 4,84 \frac{k^2}{h}. \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, учитывая (13) — (17), (18), (20) и используя формулы, приведенные в [4] (стр. 251), преобразуем $U_1(\alpha')$ к виду

$$\begin{aligned} U_1(\alpha') &\simeq (0,41)^{1/3} \sqrt{\frac{2}{kr_0}} \left[\frac{k\rho(S)}{2} \right]^{1/6} \left[\frac{k\rho(N)}{2} \right]^{1/6} \exp(ikL) \times \\ &\times v(a) \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - 1,19 \right) - \pi kh \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где $\rho(S)$ и $\rho(N)$ — радиусы кривизны параболы в точках $S(-\eta_0 \operatorname{ctg} \varphi, \eta_0)$ и $N(\xi_2, \eta_0)$,

$$L = r_0 + \widehat{SN} + Q'S'. \quad (22)$$

Слагаемые, входящие в L , имеют следующий геометрический смысл (см. рис. 4): r_0 — длина касательной к параболе, проходящей через точку наблюдения $P(\xi, \eta)$; \widehat{SN} — длина дуги параболы между точкой S (симметричной точке горизонта S') и N — точкой отрыва дифракционного луча; $Q'S'$ — расстояние от фронта первичной волны OQ' , проходящего через фокус параболы, до точки горизонта S' .

Будем трактовать L как некоторый оптический путь, в который входят луч PN и дуга параболы \widehat{NM} . Точку $M(\xi_1, \eta_0)$ будем рассматривать как точку, в которой формируется искомое поле. Как и в случае обычных келлеровых лучей, будем предполагать, что фаза поля в точке M определяется первичной волной. В соответствии с (22) положение точки M определяется уравнением

$$L = r_0 + \widehat{SM} - Q'M'$$

(где M' — проекция точки M на границу свет—тень gg), которое можно записать несколько иначе:

$$Q'S' - \widehat{SM} + M'Q' = \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \xi_1 \sin \varphi - \frac{\xi_1^2 - 1}{2} \cos \varphi - \quad (23)$$

$$-\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2} \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \varphi} - \frac{\xi_1}{2} \sqrt{\xi_1^2+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2+1}}{\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \varphi}} = 0 \quad (\eta_0=1).$$

Очевидно, дуга $O'M$ (от вершины параболы O' до точки M) является функцией только угла падения φ (т. е. не зависит от положения точки наблюдения):

$$O'M = 2hf(\varphi).$$

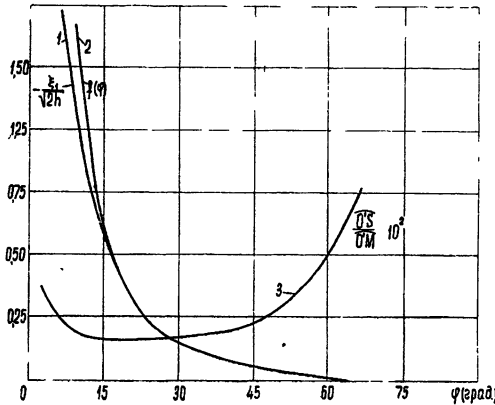


Рис. 5.

Решение уравнения (23) $\xi_1 = \xi_1(\varphi)$ производилось численно и приведено на рис. 5. Там же приведен график $f(\varphi)$. Из графика следует, что точка M расположена в области света вблизи вершины параболы (слева), т. е. вблизи точки наибольшей кривизны. Ее положение слабо зависит от угла падения первичной волны φ для $\varphi > \pi/10$, а с уменьшением угла φ она удаляется от O' . Положение M зависит от φ гораздо слабее, чем положение S (см. рис. 5, где показано отношение длин дуг $\widehat{O'S}$ и $\widehat{O'M}$).

При движении точки наблюдения вдоль r_0 амплитуда дифракционного луча меняется в соответствии с законами геометрической оптики (пропорционально $(kr_0)^{-1/2}$), как и в случае келлеровых лучей. Кроме степенного множителя амплитуда выражения (21) содержит еще группу множителей $(k\rho(S)/2)^{1/6}$, $(k\rho(N)/2)^{1/6}$, $v(a)$ и $\exp(-\pi kh)$, являющихся функциями точек N , S и параметра параболы h . Это следует из того, что аргументом в асимптотическом представлении функции Эйри [7] является только величина D :

$$v(a) \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{kh}{2,42} \right)^{1/12} (D^2 + \pi^2)^{-1/8} \exp \left\{ -\frac{i}{4} \arctg \frac{\pi}{D} - \frac{2}{3} \left(\frac{kh}{2,42} \right)^{1/2} (D^2 + \pi^2)^{3/4} \left[\cos \left(\frac{3}{2} \arctg \frac{\pi}{D} \right) + i \sin \left(\frac{3}{2} \arctg \frac{\pi}{D} \right) \right] \right\}, \quad (24)$$

где интеграл по дуге параболы \widehat{SN}

$$D = D(S, N) = (kh)^{-1/3} \int_S^N \left[\frac{k}{2\rho^2(\tau)} \right]^{1/3} d\tau = \ln \frac{\sqrt{\xi_2^2+2h} - \xi_2}{\sqrt{2h}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Заметим, что написанные выше формулы нужно трактовать как функции точки отрыва N , параметра параболы h и точки M (но не точки S , не имеющей физического смысла для искомых лучей). В самом деле, как было показано выше, $S = S(\varphi)$, $M = M(\varphi)$ и, следовательно, $S = S(M)$. Тогда перечисленная выше группа членов содержит, во-первых, степенные множители, зависящие от $(kh)^{1/3} D(M, N)$ и радиусов кривизны в точках M и N , а во-вторых, — множители, которые дают добавку к фазе и определяют экспоненциальное затухание, причем обе последние величины связаны с интегралом $D(M, N)$ по дуге \widehat{MN} .

4. ДИФРАКЦИОННАЯ ЧАСТЬ ПОЛЯ В ОБЛАСТИ II

Перейдем к случаю, когда точка наблюдения $P(\xi, \eta)$ лежит выше линии bb , т. е. в области II на рис. 2. Вычисление интеграла проводим методом перевала.

Показатель экспоненты подынтегральной функции в формуле для U_1 в интервале $0 < 2k\alpha \ll k\eta_0^2 - (k\eta_0^2)^{1/3}$ асимптотически может быть записан в виде

$$i\Phi_1(\alpha) - \pi k\alpha = ik \left[\frac{\eta \sqrt{\eta^2 - 2\alpha} - \xi \sqrt{\xi^2 + 2\alpha}}{2} - \eta_0 \sqrt{\eta_0^2 - 2\alpha} + \alpha \ln \frac{(\sqrt{\eta_0^2 - 2\alpha} + \eta_0)^2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}{(\sqrt{\xi^2 + 2\alpha} + \xi)(\sqrt{\eta^2 - 2\alpha} + \eta)} \right] - \pi k\alpha. \tag{25}$$

Приравнивая нулю мнимую часть показателя экспоненты:

$$\Phi'_1(\alpha) = k \ln \frac{(\sqrt{\eta_0^2 - 2\alpha} + \eta_0)^2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}{(\sqrt{\xi^2 + 2\alpha} + \xi)(\sqrt{\eta^2 - 2\alpha} + \eta)} = 0, \tag{26}$$

получим уравнение для точки стационарной фазы α_1 , которую мы определим ниже. Разложение мнимой и действительной части показателя экспоненты интегранда $U_1(\alpha)$ в ряд Тейлора относительно точки стационарной фазы α_1 имеет вид

$$i\Phi_1(\alpha) - \pi k\alpha \simeq i\Phi_1(\alpha_1) + i \frac{\Phi''_1(\alpha_1)(\alpha - \alpha_1)^2}{2!} - \pi k\alpha_1 - \pi k(\alpha - \alpha_1).$$

Дополняя до полного квадрата, запишем правую часть в форме

$$i\Phi_1(\alpha_1) - \pi k\alpha_1 + \frac{i\pi^2}{2\Phi''_1(\alpha_1)} + i \left[\sqrt{\frac{\Phi''_1(\alpha_1)}{2}} (\alpha - \alpha_1) + \frac{\pi i}{\sqrt{2\Phi''_1(\alpha_1)}} \right]^2.$$

Отсюда видно, что точка перевала сдвинута относительно точки стационарной фазы α_1 вниз по мнимой оси на величину $\pi/\sqrt{2\Phi''_1(\alpha_1)}$. Интегрируя по методу перевала, искомый вклад можно записать в виде

$$U_1(\alpha_1) \simeq A_1 \exp \left\{ ik \left[\frac{\eta \sqrt{\eta^2 - 2\alpha_1} - \xi \sqrt{\xi^2 + 2\alpha_1}}{2} - \eta_0 \sqrt{\eta_0^2 - 2\alpha_1} + \frac{\pi^2 \alpha_1}{\xi(\xi^2 + 2\alpha_1)^{-1/2} + \eta(\eta^2 - 2\alpha_1)^{-1/2} - 2\eta_0(\eta_0^2 - 2\alpha_1)^{-1/2}} \right] - \pi k\alpha_1 \right\}, \tag{27}$$

где

$$A_1 = i \left[\frac{1}{k} \Phi''_1(\alpha_1) \sin \varphi \right]^{-1/2} [(\xi^2 + 2\alpha_1)(\eta^2 - 2\alpha_1)]^{-1/4}. \tag{28}$$

Для определения α_1 рассмотрим вспомогательную задачу о падении плоской волны на параболический цилиндр под углом $-\varphi$ (т. е. зеркально по отношению к первичному полю в основной задаче). В этом случае в рассматриваемой области II также имеется отраженная волна, а линия bb является границей свет—тень.

Легко видеть, что точка стационарной фазы, определяющая в приближении геометрической оптики отраженное поле вспомогательной задачи, совпадает с α_1 основной задачи. Это следует из совпадения

фазовых функций $\Phi_1(\alpha)$ для обеих задач в интересующем нас интервале $\alpha > 0$. Отсюда вытекает, что вдоль луча отраженного поля вспомогательной задачи $\alpha_1 = \text{const}$ и ее значение достаточно определить в одной точке. Полагая точку наблюдения расположенной непосредственно на поверхности цилиндра (т. е. $\eta = \eta_0$), определим из (26) α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{\eta_0^2 - \xi^2}{2} \sin^2 \varphi - \xi \eta_0 \sin \varphi \cos \varphi = q \sin \varphi, \quad (29)$$

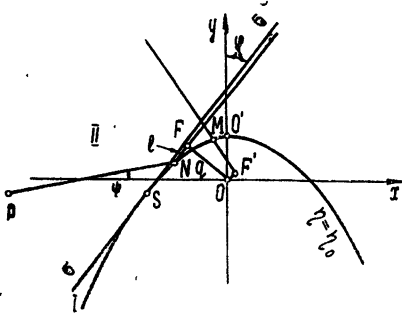


Рис. 6.

где (см. рис. 6) q — прицельное расстояние до луча первичного поля, попадающего в точку (ξ, η_0) (ниже ξ для этой точки на поверхности цилиндра будем помечать индексом 2; $\xi = \xi_2$).

Угол ψ и радиус кривизны волны L в точке отражения, характеризующие отраженный луч, могут быть записаны в форме [3]

$$\cos \psi = 2\alpha_1 \left\{ \left[\xi_2 \eta_0 - \sqrt{(\xi_2^2 + 2\alpha_1)(\eta_0^2 - 2\alpha_1)} \right]^2 + (2\alpha_1)^2 \right\}^{-1/2}; \quad (30)$$

$$L = \frac{\rho(\xi_2) \cos \theta}{2} = \frac{(\xi_2^2 + \eta_0^2)(\eta_0 \cos \varphi + \xi_2 \sin \varphi)}{2\eta_0}; \quad (31)$$

$$\theta = \arccos \frac{\eta_0 \cos \varphi + \xi_2 \sin \varphi}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_0^2}}, \quad (32)$$

где θ — угол между нормалью к поверхности и отраженным лучом, ρ — радиус кривизны поверхности.

Если обозначить через R расстояние вдоль луча вспомогательной задачи от точки (ξ_2, η_0) , то, используя (30) — (32), можно записать (27) в виде

$$U_1(\alpha_1) \simeq - \sqrt{\frac{L}{R+L}} \exp(-\pi k \alpha_1) \exp \left\{ ik \left[R - l - \frac{\pi^2 L \sin \varphi \cos \psi}{1 + L/R} \left(1 + \frac{2 \cos \varphi + l \sin \varphi / q}{R} r \right) \right] \right\}, \quad (33)$$

где l — расстояние от фронта первичной волны вспомогательной задачи (проходящей через точку O) до точки $N(\xi_2, \eta_0)$ (FN на рис. 6), $r = ON$.

При $R \gg L$ и $R \gg r$

$$U_1(\alpha_1) = - \sqrt{\frac{L}{R+L}} \exp(-\pi k \alpha_1) \exp[ik(R - l - \pi^2 L \sin \varphi \cos \psi)]. \quad (34)$$

Отметим прежде всего, что величины α_1 , l , L , ψ , q , r являются функциями точки (ξ_2, η_0) и не меняются при движении по лучу (т. е. при изменении R).

Из (33) и (34) видно, что при соизмеримых значениях R , L и q амплитуда искомого поля меняется вдоль луча в соответствии с законами геометрической оптики, чего нельзя сказать о фазе вблизи цилиндра. Это изменение обусловлено слагаемым

$$\frac{\pi^2 L \sin \varphi \cos \psi}{1 + L/R} \left(1 + \frac{2 \cos \varphi + l \sin \varphi / q}{R} r \right).$$

Вдали от цилиндра (см. (34)) фаза также меняется вдоль луча по законам геометрической оптики. Последний результат нельзя рассматривать как несовпадение лучей основной и вспомогательной задач, так как производная фазы вдоль рассматриваемых лучей не меньше, а больше k .

Как и в области I, амплитуда рассматриваемого поля экспоненциально уменьшается с ростом k .

В заключение отметим, что рассматриваемые дифракционные поля не возникают при дифракции на круговом цилиндре, так как весь эффект связан с экспоненциально малыми членами, возникшими при применении формул обхода к функции $D(\xi)$. В случае же кругового цилиндра аналогичную роль играют функции $\exp(i\nu\varphi)$, для которых слабые, связанные с обходом, точно равны нулю. Иными словами, граница свет—тень не порождает дифракционных волн рассмотренного типа, а их надо рассматривать скорее как следствие переменной кривизны тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. В. Keller, IRE Trans., AP-4, № 3, 312 (1956).
2. W. Franz, Z. Naturforsch., 9a, № 9, 705 (1954).
3. В. И. Иванов, Ж. выч. матем. и матем. физики, 1, 90 (1961).
4. В. И. Иванов, Ж. выч. матем. и матем. физики, 2, 241 (1962).
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интервалов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1962.
6. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, 2, ГИФМЛ, М., 1963, стр. 176.
7. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, изд. Сов. радио, М., 1946.

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
14 мая 1966 года

DIFFRACTION FIELD IN ILLUMINATED REGION

B. E. Kinber, R. Kh. Khestanov

Investigates the short wave asymptotics of a strict solution of the problem on plane-wave diffraction on a parabolic cylinder in an illuminated region. It is shown that besides the geometrical optics approximation terms there are existed in the solution exponentially small terms corresponding to the edge wave traveling from the apex of the cylinder. The point of the edge wave „generation“ is situated in the region of the largest curvature but not at the light-shade boundary.

УДК 621.371.162

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, ПАДАЮЩИХ НА ДВИЖУЩУЮСЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ПЛАСТИНКУ

С. Н. Столяров

В данной работе с помощью преобразований Лоренца получены формулы для интенсивности отраженной и прошедшей волн при падении электромагнитного излучения на движущуюся диэлектрическую пластинку. Результаты работы могут оказаться полезными при исследовании движущихся потоков плазмы, метеоритных следов и т. п.

1. Отражение и преломление электромагнитных волн на движущихся границах раздела рассматривалось в работах* [1, 2]. Во многих случаях имеет место заметное пропускание электромагнитных волн внутрь движущейся среды, что приводит к необходимости учета конечных размеров исследуемой системы. Прежде чем переходить к формулам для движущихся пластинок, приведем известные формулы отражения и пропускания электромагнитной волны для покоящейся пластинки [3] в виде, наиболее удобном для преобразований Лоренца. Рассмотрим в системе покоя** $S^{(0)}$ пластинку с диэлектрической постоянной ϵ_2 и магнитной проницаемостью μ_2 . Пусть на эту пластинку из области $z < 0$ с постоянными ϵ_1, μ_1 (1-я среда) в плоскости (x, z) падает электромагнитная волна, которая, частично отражаясь от границы $z = 0$, проходит сквозь пластинку толщиной $L^{(0)}$ в третью среду с постоянными ϵ_3, μ_3 ($z > L^{(0)}$). Тогда поле в первой среде (при $z < 0$) представляет собой суперпозицию падающей волны $E_0^{(0)} \exp i(\mathbf{k}_0^{(0)} \mathbf{r}^{(0)} - \omega_0^{(0)} t^{(0)})$ и отраженной волны $E_1^{(0)} \exp i(\mathbf{k}_1^{(0)} \mathbf{r}^{(0)} - \omega_1^{(0)} t^{(0)})$. Поле внутри пластинки (при $0 < z < L^{(0)}$) представляется в виде суперпозиции двух волн $E_2^{(0) \pm} \exp i(\mathbf{k}_2^{(0) \pm} \mathbf{r}^{(0)} - \omega_2^{(0) \pm} t^{(0)})$, бегущих в положительном направлении оси z (индекс «+») и в противоположном направлении (индекс «-»). В третьей среде за пластинкой (при $z > L^{(0)}$) существует одна прошедшая волна $E_3^{(0)} \exp i(\mathbf{k}_3^{(0)} \mathbf{r}^{(0)} - \omega_3^{(0)} t^{(0)})$. Здесь всюду $\mathbf{k}_j^{(0)}$ и $\omega_j^{(0)}$ — волновые векторы и частоты соответствующих волн в системе покоя сред.

Рассмотрим случай, когда падающая волна имеет электрический вектор $E_0^{(0)} = E_{0y}^{(0)} e_y$, перпендикулярный плоскости падения (x, z) .

* В работе [1] содержится неверное утверждение, что при движении среды нормально к поверхности раздела на границе раздела $R + T = 1$, где R, T — коэффициенты отражения и пропускания. В действительности же $R + T \neq 1$. В работе [1] при вычислении величины T было предположено, что при $\mu = 1$ в движущейся среде $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Однако нетрудно показать на основе уравнений связи Минковского, что в движущейся среде $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu + (\epsilon\mu - 1)\{\beta, \mathbf{E}\} - \mathbf{B} + \beta(\mathbf{B}, \mathbf{B})/\mu(1 - \beta^2)$ и, следовательно, при $\mu = 1$ и $\mathbf{u} = c\beta \neq 0, \mathbf{H} \neq \mathbf{B}$.

** В дальнейшем везде верхний индекс (0) указывает на то, что данная величина рассматривается в системе покоя среды $S^{(0)}$. Все величины без индекса (0) будут в дальнейшем рассматриваться в лабораторной системе координат S , в которой среда движется с заданной скоростью.

Тогда, используя уравнения Максвелла для плоских монохроматических волн [4] и непрерывность тангенциальных компонент электрических и магнитных полей на границах с пластинкой (т. е. при $z = 0$ и $z = L^{(0)}$), после нетрудных, но громоздких преобразований получим

$$E_{1y}^{(0)} = E_{0y}^{(0)} \Delta_1^{(0)} / \Delta_0^{(0)}, \quad E_{2y}^{(0) \pm} = \mu_2 E_{0y}^{(0)} \Delta_2^{(0) \pm} / \Delta_0^{(0)},$$

$$E_{3y}^{(0)} = \mu_2 \mu_3 E_{0y}^{(0)} \Delta_3^{(0)} / \Delta_0^{(0)}. \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta_0^{(0)} = a_{23}^- a_{21}^+ - a_{32}^+ a_{12}^- \exp(i\Delta\Phi_0^{(0)}); \quad \Delta_1^{(0)} = a_{32}^+ a_{02}^- \exp(i\Delta\Phi_0^{(0)}) -$$

$$- a_{23}^- a_{20}^+; \quad \Delta_2^{(0) +} = -a_{01} a_{32}^-; \quad \Delta_2^{(0) -} = a_{01} a_{32}^+ \exp(i\Delta\Phi_0^{(0)}); \quad (2)$$

$$\Delta_3^{(0)} = a_{01} a_{22} \exp(i\Delta\Phi_3^{(0)});$$

$$a_{01} = k_{0z}^{(0)} - k_{1z}^{(0)}; \quad a_{22} = k_{2z}^{(0)} - k_{2z}^{(0) +}; \quad a_{j\pm}^{\pm} = -a_{j2}^{\pm} = \mu_j k_{2z}^{(0) \pm} -$$

$$- \mu_2 k_{jz}^{(0)}; \quad \Delta\Phi_0^{(0)} = (k_{2z}^{(0) +} - k_{2z}^{(0) -}) L^{(0)}; \quad \Delta\Phi_3^{(0)} = (k_{2z}^{(0) +} - k_{3z}^{(0)}) L^{(0)}; \quad (3)$$

$$j = 0, 1, 3.$$

При этом компоненты $k_{1z}^{(0)}$, $k_{2z}^{(0) \pm}$ и $k_{3z}^{(0)}$ определяются из дисперсионного уравнения $(k_i^{(0)})^2 = \epsilon_j \mu_j (\omega_i^{(0)}/c)^2$ для волны в каждой среде ($j = 1, 2, 3$) при условии равенства частот $\omega_i^{(0)}$ и касательных компонент $k_{ix}^{(0)}$ волновых векторов всех рассматриваемых волн:

$$k_{1z}^{(0)} = -k_{0z}^{(0)}; \quad k_{2z}^{(0) \pm} = \pm [\epsilon_2 \mu_2 (\omega_0^{(0)}/c)^2 - (k_{0x}^{(0)})^2]^{1/2};$$

$$k_{3z}^{(0)} = [\epsilon_3 \mu_3 (\omega_0^{(0)}/c)^2 - (k_{0x}^{(0)})^2]^{1/2}. \quad (4)$$

Если падающая волна имеет магнитный вектор $H_0^{(0)} = H_{0y}^{(0)} e_y$, перпендикулярный плоскости падения (x, z), то выражения для компонент $H_{1y}^{(0)}$, $H_{2y}^{(0)}$ и $H_{3y}^{(0)}$, аналогичные (1), получаются из формул (1)–(3) одновременной заменой в последних μ_j на ϵ_j и обратно ϵ_j на μ_j .

2. Пусть теперь пластинка и среды по обе стороны от нее перемещаются со скоростью $u_z = c\beta_z$ нормально к плоскости раздела (x, y). Тогда, используя уравнение Максвелла $B = [ck/\omega, E]$ и известные преобразования Лоренца для компонент электрического поля [5] $E^{(0)} = \gamma(E + [\beta, B])$, в случае, когда E перпендикулярно плоскости падения (x, z), можно получить

$$E_y^{(0)} = -\gamma I_\omega E_{y0}/\omega, \quad (5)$$

где

$$I_\omega = c\beta k - \omega, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Равенство частот и касательных компонент волновых векторов всех волн в системе покоя сред в силу известных преобразований Лоренца

$$\omega^{(0)} = \gamma(\omega - c\beta k), \quad k_{\parallel}^{(0)} = \gamma(k_{\parallel} - \beta\omega/c), \quad k_{\perp}^{(0)} = k_{\perp}, \quad L^{(0)} = \gamma L \quad (6)$$

означает в нашем случае, что для всех рассматриваемых волн инвариантными в лабораторной системе остаются величины

$$I_\omega = c\beta k_j - \omega_j = c\beta_z k_{0z} - \omega_0 = \omega_0^{(0)} \gamma^{-1},$$

$$I_x = k_{jx} = k_{0x} = k_{0x}^{(0)} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Подставляя (5) и (6) в (1)–(3) и используя (7), получим

$$E_{1y} = E_{0y}[\omega_1 \Delta_1 / \omega_0 \Delta_0], \quad E_{2y}^{\pm} = \mu_2 E_{0y}[\omega_2^{\pm} \Delta_2^{\pm} / \omega_0 \Delta_0], \quad (8)$$

$$E_{3y} = \mu_2 \mu_3 E_{0y}[\omega_3 \Delta_3 / \omega_0 \Delta_0],$$

где Δ_0 , Δ_1 , Δ_2^{\pm} и Δ_3 имеют вид, аналогичный формулам (2), в которых

$$a_{2j}^{\pm} = -a_{j2}^{\pm} = (\mu_j k_{2z}^{\pm} - \mu_2 k_{jz}) + (\mu_j - \mu_2) \beta_z \gamma^2 I_{\omega} c^{-1} \quad (j=0, 1, 3),$$

$$a_{01} = k_{0z} - k_{1z}, \quad a_{22} = k_{2z}^- - k_{2z}^+, \quad \Delta\Phi_0 = (k_{2z}^+ - k_{2z}^-) L, \quad (9)$$

$$\Delta\Phi_3 = (k_{2z}^+ - k_{3z}) L.$$

Выражения для компонент волновых векторов k_{1z} , k_{2z}^{\pm} , k_{3z} и частот ω_1 , ω_2^{\pm} , ω_3 в движущихся средах через соответствующие величины k_{0z} , ω_0 в падающей волне получаются из (4) путем двойного преобразования Лоренца (6) для каждой из волн от лабораторной системы S к системе $S^{(0)}$ и обратно. Это дает

$$k_{1z} = -\gamma^2[k_{0z}(1 + \beta_z^2) - 2\beta_z \omega_0/c], \quad \omega_1 = \gamma^2[\omega_0(1 + \beta_z^2) - 2c\beta_z k_{0z}],$$

$$k_{2z}^{\pm} = \gamma^2 c^{-1}(-\beta_z I_{\omega} \pm D_2^{1/2}), \quad \omega_2^{\pm} = \gamma^2(-I_{\omega} \pm \beta_z D_2^{1/2}), \quad (10)$$

$$k_{3z} = \gamma^2 c^{-1}(-\beta_z I_{\omega} + D_3^{1/2}); \quad \omega_3 = \gamma^2(-I_{\omega} + \beta_z D_3^{1/2}),$$

где $D_j = \epsilon_j \mu_j I_{\omega}^2 - (1 - \beta_z^2) I_x^2$ ($j=2, 3$), а I_{ω} и I_x выражаются через ω_0 и k_{0z} с помощью (7).

Из полученных формул видно, что для движущейся пластинки при $\epsilon_3 \mu_3 = \epsilon_1 \mu_1$ частота ω_3 и компонента волнового вектора k_{3z} совпадают с частотой ω_0 и компонентой k_{0z} падающей волны, т. е. прошедшая волна имеет ту же частоту и распространяется в том же направлении, что и падающая волна.

Если теперь падающая волна имеет магнитный вектор $H_0 = H_{0y} e_y$, перпендикулярный плоскости падения (x, z), то как и в случае покоящейся пластинки формулы для H_{1y} , H_{2y}^{\pm} и H_{3y} , аналогичные (8), (9), получаются из (8), (9) одновременной заменой $\epsilon_j \rightleftharpoons \mu_j$.

Естественно, что при $L \rightarrow 0$ мы получаем известные формулы Френеля на движущейся границе раздела [2].

3. Рассмотрим теперь случай, когда пластинка и диэлектрические среды по обе стороны от нее перемещаются параллельно границе раздела со скоростью $u = c\beta = c\beta_x e_x + c\beta_y e_y$ ($u_z = 0$). Тогда при переходе от системы покоя среды $S^{(0)}$ к лабораторной системе S необходимо использовать общее преобразование Лоренца [6].

Если, однако, падающая на пластинку волна имеет в лабораторной системе S электрический вектор $E_0(r, t) = E_{0y} e_y \exp i(k_0 r - \omega_0 t)$, перпендикулярный плоскости падения (x, z), то для произвольного касательного направления скорости u при преобразовании компонент волновых векторов из лабораторной системы S в систему покоя сред $S^{(0)}$ в последней появятся компоненты волновых векторов $k_y^{(0)}$, не лежащие в плоскости падения. В результате мы приходим к задаче для покоящейся пластинки в общем случае произвольной ориентации волнового вектора $k^{(0)}$ и электрического вектора $E^{(0)}$, что несоизмеримо усложняет задачу.

Так как появление компонент $k_y^{(0)}$ в системе покоя обусловлено наличием компоненты скорости движения сред β_y , не лежащей в плоско-

сти падения, то ниже мы рассмотрим лишь случай, когда пластинка и среды по обе стороны от нее перемещаются в плоскости падения (x, z) , т. е. $\beta_y = 0$. Тогда компоненты волновых векторов и компоненты электрического поля всех волн преобразуются по формулам (6) и (5), в которых скорость $\beta = \beta_x e_x$. Используя двойное преобразование Лоренца (5) с $\beta = \beta_x e_x$ для отраженных и прошедших волн (от системы S к системе $S^{(0)}$ и обратно) и равенство частот и касательных компонент волновых векторов в системе покоя, можно показать с учетом формул (4), что

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2^{\pm} = \omega_3, \quad k_{1z} = -k_{0z}, \quad k_{0z} = +\frac{\omega_0}{c} D_1^{1/2}, \quad (11)$$

$$k_{2z}^{\pm} = \pm \frac{\omega_0}{c} D_2^{1/2}, \quad k_{3z} = +\frac{\omega_0}{c} D_3^{1/2}, \quad I_{\omega} = c\beta_x k_{0x} - \omega_0 = c\beta_x k_{1x} - \omega_j,$$

где

$$D_j = (1 - c^2 k_{0x}^2 / \omega^2) + z_j \gamma^2 I_{\omega}^2 / \omega^2, \quad z_j = \epsilon_j \mu_j - 1 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Соотношения (11) показывают, что в лабораторной системе S при движении сред касательно границ раздела со скоростью u частоты отраженной и прошедшей волн совпадают с частотой падающей волны. Если же, кроме того, $\epsilon_3 \mu_3 = \epsilon_1 \mu_1$, то прошедшая волна распространяется в том же направлении, что и падающая, т. е. в данном случае движение диэлектрической пластинки не сказывается на частотных и угловых характеристиках отраженных и прошедших волн. Это же будет иметь место и при движении диэлектрической пластинки в вакууме.

В силу равенства частот всех волн в лабораторной системе координат и инвариантности выражения $I_{\omega} = c\beta_x k_{1x} - \omega_j$ ясно, что формулы для движущейся диэлектрической пластинки в случае $\beta_z = \beta_y = 0$ имеют точно такой же внешний вид, как и формулы (1)–(3) для покоящейся пластинки с той лишь разницей, что компоненты волновых векторов всех волн связаны соотношениями (11).

4. В качестве примера применения полученных формул рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны на пластинку с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ , перемещающейся в вакууме 1) со скоростью $u_z = c\beta_z$ нормально к своей поверхности и 2) со скоростью $u_x = c\beta_x$ касательно ей.

Запишем выражения для частот, а также коэффициентов отражения R и пропускания T в обоих случаях. В первом случае

$$\omega_1 = \omega_0(1 - \beta_z)/(1 + \beta_z), \quad \omega_3 = \omega_0,$$

$$R = \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 2r_0^2(1 - \cos \Delta\Phi_0)/[(1 - r_0^2)^2 + 2r_0^2(1 - \cos \Delta\Phi_0)],$$

$$T = (1 - r_0^2)^2/[(1 - r_0^2)^2 + 2r_0^2(1 - \cos \Delta\Phi_0)],$$

где

$$r_0 = \frac{\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\mu}}, \quad \Delta\Phi_0 = \frac{2\omega_0 L}{c} \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{1 + \beta_z}.$$

Во втором случае

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_0, \quad R = 2r_{E, H}^2(1 - \cos \Delta\Phi_1)/[(1 - r_{E, H}^2)^2 + 2r_{E, H}^2(1 - \cos \Delta\Phi_1)],$$

$$T = (1 - r_{E, H}^2)^2/[(1 - r_{E, H}^2)^2 + 2r_{E, H}^2(1 - \cos \Delta\Phi_1)],$$

где

$$\Delta\Phi_1 = \frac{2\omega_0 L}{c} (\epsilon\mu - \beta_x^2)^{1/2} / (1 - \beta_x^2)^{1/2}.$$

Величины r_E и r_H относятся к электрическому вектору падающей волны, соответственно перпендикулярному плоскости падения (x, z) и параллельному ей. При этом

$$r_E = [\mu(1 - \beta_x^2)^{1/2} - (\epsilon\mu - \beta_x^2)^{1/2}] / [\mu(1 - \beta_x^2)^{1/2} + (\epsilon\mu - \beta_x^2)^{1/2}],$$

а r_H получается из r_E одновременной заменой $\mu \leftrightarrow \epsilon$.

Заметим, что, если во втором случае $R + T = 1$, то в первом случае $R + T \neq 1$, что означает обмен энергией между движущейся пластинкой и волной.

Для сред, в которых существенна дисперсия, т. е. зависимость ϵ от ω , достаточно в полученных формулах использовать явный вид $\epsilon(\omega^{(0)})$ в системе покоя среды и заменить для движущейся среды $\omega^{(0)}$ доплеровски смещенной частотой $\gamma(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) = -\gamma I_\omega$, где I_ω определяется формулой (7) и ей подобной. Например, в случае холодной электронной плазмы $\mu = 1$, а $\epsilon = 1 - v_p^2(1 + \beta_z)/(1 - \beta_z)$, где $v_p = \omega_p/\omega_0$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$, а e, m, N — соответственно заряд, масса и плотность электронов в системе покоя плазмы.

В заключение отметим, что полученные формулы позволяют определять частоту, положение и интенсивность интерференционных максимумов и минимумов в отраженном и прошедшем свете в зависимости от свойств среды, толщины и скорости пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Yeh, J. Appl. Phys., **36**, 3513 (1965).
2. С. Н. Столяров, Диссертация, ФИАН, М., 1964.
3. А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, М., 1953
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.
5. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
6. Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, Л.—М., 1936

Поступила в редакцию
16 мая 1966 года

REFLECTION AND PASSAGE OF ELECTROMAGNETIC WAVES INCIDENT ON MOVING DIELECTRIC PLATE

S. N. Stolyarov

By means of Lorentz transformations the formulae have been derived for the intensity of the reflected and passed wave at the incidence of electromagnetic radiation on a moving dielectric plate. The results may be useful in the investigation of plasma flows, meteoric trains, etc.

Примечание при корректуре. Недавно появилась статья С. Yeh and К. F. Casey, Phys. Rev. **144**, 665 (1966), в которой для движущейся в вакууме пластинки получены аналогичные результаты.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 533.9.082

СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ДИАГНОСТИКА СТРУИ ПЛАЗМЫ

С. Д. Ильин, В. М. Лихачев, С. С. Петрусев, А. В. Чернетский

В работе [1] авторами описан однодиапазонный радиолокатор, который был применен для определения скорости движущихся сгустков плазмы. Непрерывное получение информации во времени и пространстве и быстроедействие аппаратуры являются важным достоинством прибора.

В данной работе описываются метод совмещенной двухдиапазонной радиолокации и совмещенная «просветная» методика, являющиеся дальнейшим развитием методов СВЧ диагностики. Предложенные методы используются для исследования свойств и законов движения переднего фронта струи плазмы от коаксиального инжектора. Основные элементы коаксиального инжектора плазмы описаны в работе [1].

1. Двухдиапазонная доплеровская локация. На рис. 1 показана блок-схема эксперимента. Основной особенностью диагностической аппаратуры является локализация сигналов от 2-х независимых СВЧ генераторов непрерывного действия ($\lambda_1 = 3 \text{ см}$, $\lambda_2 = 0,8 \text{ см}$) в одном зондирующем луче при совмещенной приемно-передающей антенне. При конструировании аппаратуры авторы использовали СВЧ элемент, состоящий из полосового и заперделного волноводных фильтров [2].

Для сложения прямой и отраженной интерферирующих волн используются направленные ответвители. Это позволяет производить измерение доплеровских частот одновременно на двух волнах, пользуясь одной приемно-передающей антенной.

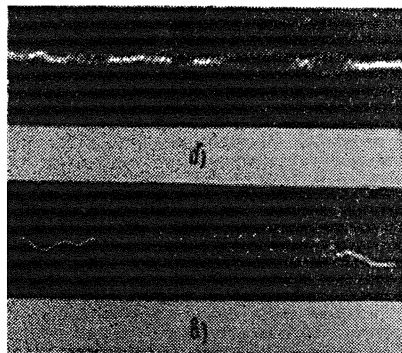
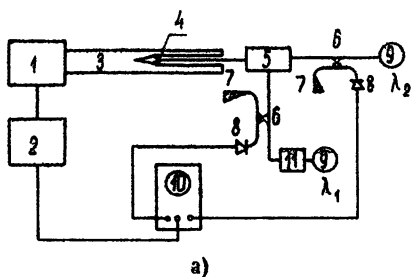


Рис. 1. а) Блок-схема установки для двухдиапазонной доплеровской локации: 1—инжектор плазмы, 2—система питания и синхронизации измерительной аппаратуры, 3—стеклянная вакуумная труба $\varnothing 100 \text{ мм}$, 4—рупорная антенна, 5—СВЧ фильтр, 6—направленный ответвитель, 7—поглощающая нагрузка, 8—СВЧ детектор, 9—СВЧ генератор, 10—двухлучевая осциллограф, 11—ферритный вентиль.

б) Осциллограмма интерференционных биений на волне $\lambda_2 = 0,8 \text{ см}$. в) Осциллограмма интерференционных биений на волне $\lambda_1 = 3 \text{ см}$.

На рис. 1б, в приведены типичные осциллограммы интерференционных сигналов, а на рис. 2 — кривая зависимости скорости струи плазмы от времени (на волне $0,8 \text{ см}$). Результаты локационных измерений на волне $0,8 \text{ см}$ приведены в таблице. В ходе эксперимента были произведены контрольные измерения на волне $0,8 \text{ см}$ по схеме рис. 3а. Особенность этой схемы заключается в использовании одного генератора СВЧ для одновременных измерений по одному радиолокационному и двум просветным каналам зондирования в «проходящей» волне. Типичные осциллограммы приведены на

рис. 36. Радиолокационные измерения скорости и проводившиеся одновременно измерения скорости по отсечке проходящей волны дали хорошо совпадающие результаты.

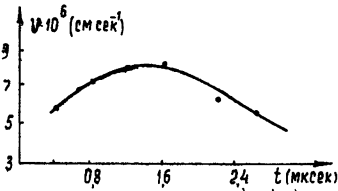
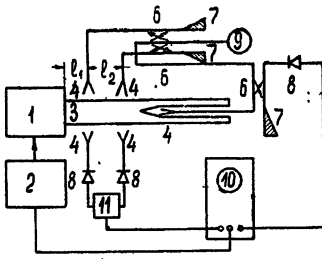
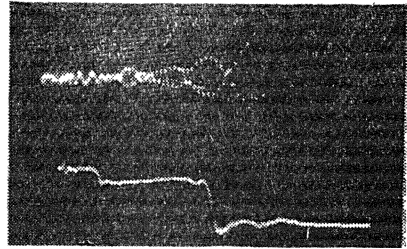


Рис. 2. Изменение скорости струи плазмы во времени ($\lambda_2 = 0,8$ см, $V_6 = 3,2$ кв).



а)



б)

Рис. 3. а) Блок-схема контрольных измерений на волне $\lambda_2 = 0,8$ см: l_1 —расстояние от первого измерительного канала до инжектора плазмы, l_2 —базовое расстояние между просветными каналами, остальные обозначения те же, что и на рис. 1а. б) Осциллограмма доплеровских биений на волне $\lambda_2 = 0,8$ см (верхний рисунок), осциллограмма суммарного сигнала с детекторов просветных каналов (нижний рисунок).

В экспериментах также исследовался начальный участок ускорения сгустка. Результаты измерения скорости сгустка на волне 3 см приведены на рис. 4а. Из опыта следует, что скорость изменяется синхронно с изменением тока разряда (рис. 4б). При малых напряжениях батареи это может быть качественно объяснено предположением, что основная доля тока проходит в тонком поверхностном слое плазмы.

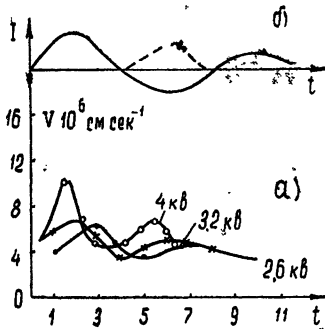
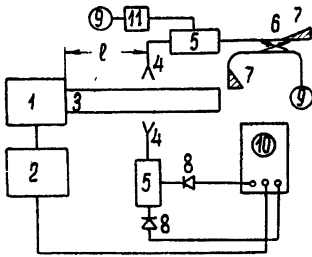
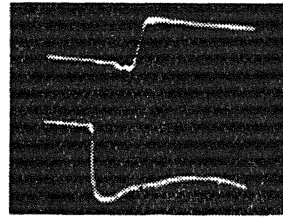


Рис. 4. а) Изменение скорости струи плазмы ($\lambda_1 = 3$ см) в начальный период ускорения плазмы при разных значениях напряжения на конденсаторной батарее. б) Ток в цепи инжектора.

2. Двухдиапазонная совмещенная «просветная» методика. Блок-схема эксперимента приведена на рис. 5а. В рассматриваемом случае зондирование плазмы осуществлялось СВЧ колебаниями в «проходящей» волне («просветная» методика). Как и в предыдущем опыте, примененная аппаратура позволяла локализовать в одном зондирующем луче сигналы от двух СВЧ генераторов непрерывного действия. Типичные осциллограммы, полученные указанным способом, приведены на рис. 5б. Этот метод позволяет определить изменение концентрации движущейся плазмы во времени $\Delta N/\Delta t$ в исследуемой области. Зависимость $\Delta N/\Delta t$ для разных значений напряжения на батарее конденсаторов приведена на рис. 6. Измерения были проведены на разных расстояниях от инжектора. Одновременные измерения доплеровских биений и изменений концентрации во времени в исследуемой области позволяют оценить градиент плотности плазмы $\Delta N/\Delta z = \Delta N/\Delta t v$. Результаты вычислений градиента плотности плазмы приведены в таблице 1.



а)



б)

Рис. 5. а) Блок-схема измерений по двухдиапазонной совмещенной «просветной» методике: l —расстояние от инжектора до места измерения (остальные обозначения см. на рис. 1а).

б) Осциллограмма проходящего сигнала на волне $\lambda_2=0,8$ см (верхний рисунок) и на волне $\lambda_1=3$ см (нижний рисунок).

Рис. 6. Зависимость $\Delta N/\Delta t$ при разных значениях V_6 и на разных расстояниях от инжектора.

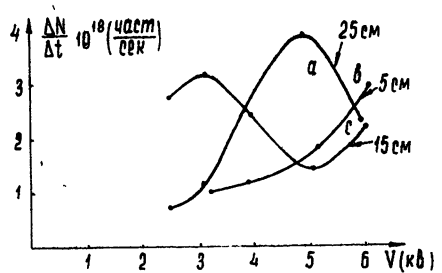


Таблица 1

Зависимость градиента плотности плазмы от напряжения батарей инжектора

Расстояние от конца инжектора	Напряжение на батарее конденсаторов	Скорость	Градиент плотности
l (см)	V_6 (кв)	v (см·сек ⁻¹)	$\Delta N/\Delta z$
5	2,6	$6 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^{12}$ $1,2 \cdot 10^{12}$ $1,5 \cdot 10^{12}$
	3,2	$7 \cdot 10^6$	
	4	$1 \cdot 10^7$	
	5	$1,1 \cdot 10^7$	
15	2,6	$4,8 \cdot 10^6$	$5,8 \cdot 10^{12}$ $6,8 \cdot 10^{12}$ $4,5 \cdot 10^{12}$ $1,7 \cdot 10^{12}$
	3,2	$4,7 \cdot 10^6$	
	4	$5,3 \cdot 10^6$	
	5	$8,2 \cdot 10^6$	
25	2,6	$3,8 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{12}$ $2,7 \cdot 10^{12}$ $5,1 \cdot 10^{12}$ $7,2 \cdot 10^{12}$
	3,2	$4,5 \cdot 10^6$	
	4	$5,5 \cdot 10^6$	
	5	$5,3 \cdot 10^6$	

3. Поперечная интерферометрия в режиме проходящей и отраженной волны. Для исследования формы переднего фронта струи плазмы было проведено поперечное зондирование — радиолокация и «просветное» фазометрирование. На рис. 7 приведена блок-схема эксперимента. В данном эксперименте осуществлялось зондирование на волне $\lambda_1 = 3$ см. Сложение опорного сигнала с отраженным производилось в направленном ответвителе, а с сигналом, прошедшим плазму, — на двойном тройнике. Интерференционные картины проходящего и отраженного сигналов регистрировались одно-

временно. На рис. 8 приведены осциллограммы, полученные с помощью рассматриваемой методики.

В результате измерений было установлено, что передний фронт струи плазмы имеет форму конуса. Это подтверждается осциллограммой интерференционных биений

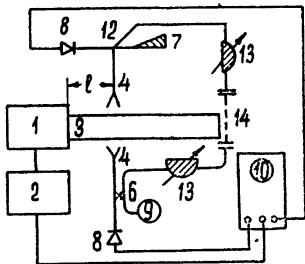


Рис. 7. Блок-схема установки при поперечном зондировании плазмы:

12—двойной тройник, 13—развязывающий аттенуатор, 14—гибкий волновод. Остальные обозначения те же, что и на рис. 5а.

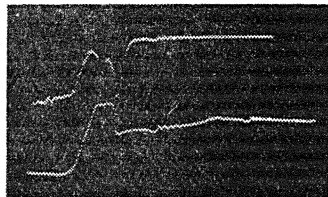


Рис. 8. Осциллограммы отраженного (верхний рисунок) и проходящего (нижний рисунок) СВЧ сигналов при поперечном зондировании струи плазмы.

отраженного сигнала (рис. 8а). Число периодов интерференционных биений n , возникающих вследствие перемещения отражающего фронта, позволяет оценить величину смещения фронта

$$S_{\text{смещ}} = n\lambda/2.$$

Диаметр струи плазмы, измеренный указанным способом, имел величину, весьма близкую к диаметру внешнего проводника инжектора. Конусность переднего фронта струи плазмы можно объяснить, если учесть, что плазма прилипает к стенкам коаксиального инжектора [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Ильин, В. М. Лихачев, С. С. Петрусев, А. В. Чернетский, ЖТФ, 36, № 1, 53 (1966).
2. С. Д. Ильин, С. С. Петрусев, А. В. Чернетский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 287 (1966).
3. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, ЖТФ, 30, № 9, 1104 (1960).

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию
31 мая 1966 г.

УДК 537.226.2

ИЗМЕРЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ВОДЫ НА ВОЛНЕ 0,85 ММ

А. И. Хвостова

Целью настоящей работы являлось экспериментальное определение диэлектрической проницаемости воды на волне 0,85 мм. Исследованию оптических свойств жидкой воды в инфракрасном диапазоне волн посвящены многочисленные работы (список литературы см. в [1]). Однако измерения проводились в области $\lambda < 350$ мк, и только в двух работах содержатся результаты измерений в более длинноволновой области спектра: в работе [2] при $\lambda = 42-2000$ мк (причем только величины коэффициента поглощения) и в работе [3] при $\lambda = 1000$ мк. Между тем, данные о диэлектрической проницаемости воды на более длинных волнах этого диапазона также представляют интерес для проверки применимости теории Дебая [4] и для решения задачи о распространении этих волн в атмосферных осадках [5, 6].

В настоящей работе диэлектрическая проницаемость определялась по коэффициентам отражения электромагнитных волн от водной поверхности. Известно, что вода в субмиллиметровом диапазоне волн обладает свойством поглощающего диэлектрика, т. е. диэлектрическая проницаемость ее является комплексной величиной. Связь диэлектрической проницаемости с коэффициентом отражения для линейно поляризованной волны дается формулами Френеля (см., напр., [7]).

Для выполнения измерений применялась установка, оптическая схема которой показана на рис. 1. В качестве генератора монохроматических колебаний использовалась лампа обратной волны с излучателем в виде пирамидального рупора. Для обеспечения стабильности мощности и длины волны излучения электропитание генера-

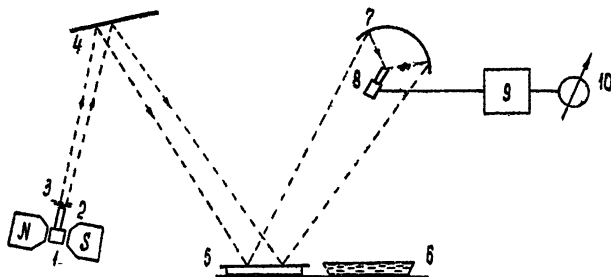


Рис. 1. Оптическая схема установки:

1—генератор; 2—модулятор; 3—дифракционная решетка; 4 и 5—плоские металлические зеркала, 6—кювета с водой, 7—сферическое зеркало; 8—пневматический приемник ИК-излучения, 9—усилитель; 10—самописец.

тора осуществлялось от стабилизированного источника. Прием отраженных сигналов осуществлялся при помощи модуляционного радиометра с неселективным индикатором типа Голея марки ОАП-2, помещенным в фокусе сферического зеркала (диаметр зеркала $D = 300$ мм, фокусное расстояние $F = 160$ мм). Колебания модулировались при помощи резонансного механического прерывателя. Генератор и приемник устанавливались на поворотных устройствах, на которых имелись шкалы для отсчета углов падения и отражения с точностью $\pm 5'$. Для получения волны, поляризованной вертикально или горизонтально, после модулятора ставились решетки из натянутых на рамку тонких вольфрамовых проволок диаметром $0,07$ мм и периодом $d = 0,275$ мм. Поляризующая способность решеток определялась по формуле

$$P = \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel}}, \quad (1)$$

где γ_{\perp} и γ_{\parallel} — коэффициенты пропускания проволочных решеток для компонент излучения с векторами электрического поля, соответственно перпендикулярным и параллельным осям проволок. В нашем эксперименте $\gamma_{\perp} = 0,967$, $\gamma_{\parallel} = 0,005$ и согласно формуле (1) получили $P = 0,988$. Вследствие высокой поляризующей способности решеток систематическая ошибка в коэффициентах отражения не превышала 0,4%.

В эксперименте проводилось сравнение коэффициента отражения от воды с коэффициентом отражения от плоского металлического зеркала, принимаемым за единицу. Кювета с водой и зеркало устанавливались на поворотном столике, позволяющем поочередно помещать под падающее излучение кювету или зеркало. Высота столика менялась в соответствии с углом падения.

Результаты измерений модуля коэффициента отражения в зависимости от угла падения приведены на рис. 2. Статистическая обработка результатов измерений приводит к выводу, что кривые рис. 2 дают значения $|f|^2$ и $|F|^2$ с ошибкой не более $\pm 0,001$. Однако определенные по этим данным значения действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости на волне $\lambda = 0,85$ мм, соответственно равные

$$\epsilon_1 = 6,2 + \Delta,$$

$$\epsilon_2 = 3,6 - \Delta,$$

где Δ заключено в пределах $-0,8 \leq \Delta \leq +0,8$, имеют значительно меньшую точность $\sim \pm 0,8$. Это связано с тем обстоятельством, что при уменьшении (увеличении) ϵ_1 и одновременном увеличении (уменьшении) ϵ_2 в указанных интервалах на одинаковую величину рассчитанные по формулам Френеля коэффициенты отражения меняются лишь на малую величину $< 0,001$. В связи с этим более точное определение ϵ_1 и ϵ_2 по данной методике не представляется возможным.

Указанные значения удовлетворяют формулам Дебая без дополнительного параметра α , эквивалентного существованию нескольких времен релаксации, как это сделано в работе [8]. Вычисленное по формулам работы [8] с использованием параметра $\alpha = 0,02$ на $\lambda = 0,85$ мм значение действительной части диэлектрической проницаемости $\epsilon_1 = 4,83$ расходится с полученным в настоящей работе значением $\epsilon_1 = 6,2 \pm 0,8$, причем расхождение превышает пределы погрешности эксперимента. Это обстоятельство позволяет сделать вывод о существовании лишь одного времени релаксации.

В заключение отметим, что вычисленные на основании наших данных показатели

преломления $n = 2,586 \pm 0,1$ и коэффициент поглощения $\beta = 103 \pm 30$ нп/см близки к значениям соответствующих величин работы [3] ($\lambda = 1$ мм; $n = 2,5$; $\beta \approx 112$ нп/см). Однако величина коэффициента поглощения $\beta \approx 143$ нп/см на нашей длине волны $\lambda = 0,85$ мм, полученная в [2], не согласуется с найденным в настоящей работе значением, причем величина расхождения лежит вне пределов погрешности нашего эксперимента.

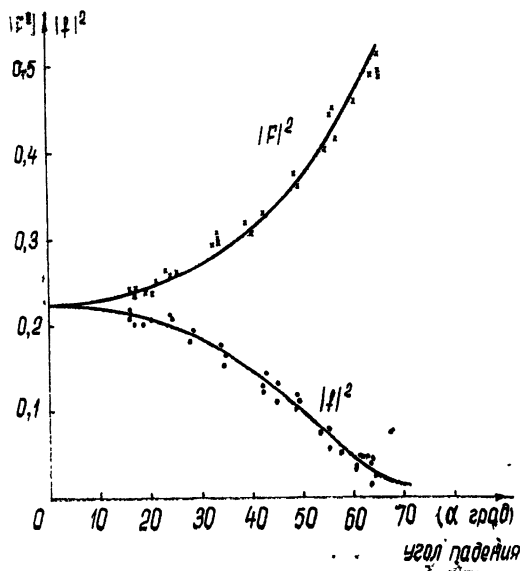


Рис. 2. Экспериментальные значения модуля коэффициента отражения для вертикальной $|f|^2$ и горизонтальной $|F|^2$ поляризации (● — вертикальная, × — горизонтальная). Сплошные кривые — значения модуля коэффициента отражения, рассчитанные по формулам Френеля при $\epsilon_1 = 6,2$, $\epsilon_2 = 3,6$.

Автор выражает благодарность С. А. Жевакину за руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Кисловский, Оптика и спектроскопия, 7, № 3, 311 (1959).
2. А. Е. Станевич, Н. Г. Ярославский, Оптика и спектроскопия, 10, № 4, 538 (1961).
3. J. W. Ryde and D. Ryde, Res. Labs. Gen. Elec. Co., Ltd., Wembley, England, Re p № 8670 (1945).
4. П. Дебай, Полярные молекулы, Гостехиздат, М.—Л., 1931.
5. О. Я. Усиков, В. А. Герман, И. Х. Ваксер, Укр. физ. ж., 6, 618 (1961).
6. Richard G. Medhurst, IEEE Trans. Antennas and Propag., 13, 550 (1965).
7. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Распространение ультракоротких радиоволн, Связьиздат, М., 1938.
8. E. H. Grant, T. J. Buchanan and H. F. Cook, J. Chem. Phys., 26, № 1, 156 (1957).
9. J. E. Chamberlain, G. W. Chantry, H. A. Gebbie, N. W. B. Stone, T. V. Taylor and G. Wyllie, Nature, 210, 5038 (1966).

Научно-исследовательский радиопизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 мая 1966 г.

Примечание при корректуре. Во время нахождения данной статьи в печати появилась работа [9], в которой имеется обзор результатов по измерению показателя преломления и коэффициента поглощения жидкой воды в микроволновом и инфракрасном диапазонах, а также новые результаты измерений на $\lambda = 337$ мк и $\lambda = 118$ мк.

УДК 621.378.32

СМЕШЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЙ РУБИНОВОГО И НЕОДИМОВОГО ЛАЗЕРОВ

Н. Н. Беляева, В. А. Демидов, М. А. Новиков

Для целей исследования нелинейных свойств веществ большой интерес представляет наблюдение различных эффектов нелинейного взаимодействия света с веществом. В работе рассматривается эффект смешения двух световых волн с получением новой волны, частота которой равна сумме начальных смешиваемых частот.

Во всех проведенных к настоящему времени экспериментальных работах по смещению лазерных излучений [1, 2] использовались лазеры, работающие без модуляции добротности резонатора. Мощность таких лазеров невелика. В данной работе для получения более эффективного нелинейного преобразования световых волн использовались лазеры, работающие в режиме «гигантских» импульсов, т. е. с модуляцией добротности резонатора*. Применению таких лазеров для процессов смещения препятствуют трудности, связанные с синхронизацией во времени двух излучений, длительность которых составляет $\sim 10^{-8}$ сек. В работе применен оптико-механический способ синхронизации как наиболее простой и надежный. В качестве вращающегося зеркала использовалась оборотная призма, работающая на полном внутреннем отражении. Эта призма служила общим модулятором для обоих лазерных лучей (скорость вращения призмы 14000 об/мин). В работе проводилось смещение частот рубинового ($\lambda = 0,694 \mu$ и неодимового ($\lambda = 1,06 \mu$) лазеров. Подсветка рабочего вещества в каждом лазере осуществлялась ксеноновой лампой. Питание ламп было независимое, но запускались они одним и тем же высоковольтным импульсом.

Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Для совме-

Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1 — модулятор добротности, 2, 3 — система 90-градусных призм, 4 — стеклянный клин, 5 — рубиновый лазер, 6 — неодимовый лазер, 7, 8 — неподвижные зеркала, 9, 10 — стеклянные пластинки, 11 — 90-градусная призма, 12 — полупрозрачное зеркало, 13 — цилиндрическая линза, 14 — кристалл KN_2PO_4 , Φ_1 — набор светофильтров, 15 — осциллограф ДЭСО-1.

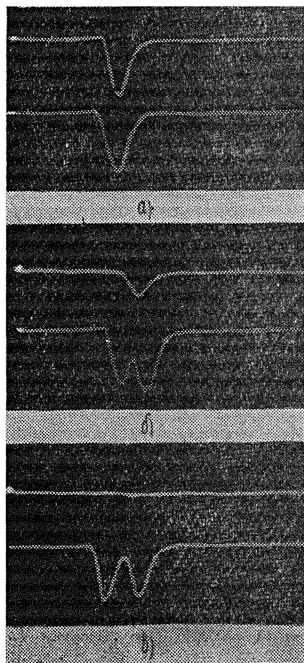
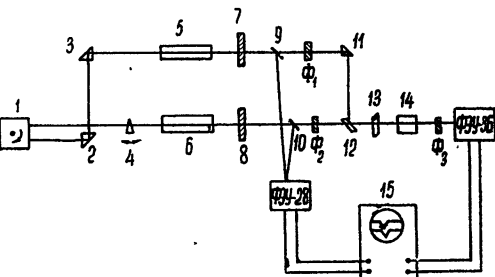


Рис. 2. Осциллограммы излучений:

а) импульсы исходных излучений совпадают; б) импульс рубинового лазера опережает импульс неодимового лазера; в) полное расхождение импульсов.

нения двух синхронизованных во времени лазерных лучей в один луч использовались 90-градусная призма (11) и полупрозрачное зеркало (12). Коэффициент отражения зеркала на частоте рубинового лазера $R_{\lambda=0,694 \mu} = 0,85$. Коэффициент пропускания на частоте неодимового лазера $R_{\lambda=1,06 \mu} = 0,78$. В качестве нелинейного элемента в эксперименте использовался кристалл КДР, вырезанный в направлении синхронизма волн исходных частот и суммарной частоты ($\lambda = 0,42 \mu$). Как показали расчеты, условия синхронизма выполняются при взаимодействии двух типов.

$$1) \quad 0k_{\text{руб}} + 0k_{\text{неод}} = ek_{\text{руб}+\text{неод}}$$

$$2) \quad 0k_{\text{руб}} + ek_{\text{неод}} = ek_{\text{руб}+\text{неод}}$$

В первом случае угол синхронизма $\theta = 43^\circ \pm 1^\circ$, во втором — $\theta = 27^\circ \pm 1^\circ$. В данной работе смещение производилось только под углом $\theta = 43^\circ$.

Излучение суммарной частоты, выходящее из кристалла, регистрировалось ФЭУ-36. Фильтрация излучений рубинового и неодимового лазеров и их вторых гармоник осуществлялась с помощью кюветы с насыщенным раствором CuSO_4 и набора стеклянных фильтров. Для наблюдения смешанной частоты сигнал с ФЭУ-36 подавался на один из каналов осциллографа ДЭСО-1, на другой канал поступал сигнал с ФЭУ-28, являвшегося приемником обоих лазерных излучений. На рис. 2 приведены осциллограммы лазерных излучений (внизу) и излучения суммарной частоты.

Как видно из осциллограммы, при полном совпадении лазерных импульсов наблюдается мощный импульс суммарной частоты. При небольшом рас-

* Об аналогичном эксперименте было сообщено на II Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике в г. Новосибирске [3].

хождении исходных излучений этот импульс уменьшается и совсем отсутствует, когда лазерные излучения расходятся полностью.

В работе измерена мощность лазерных излучений и сделана оценка мощности суммарной частоты. Мощность лазеров определялась путем измерения энергии импульсов с помощью калориметрического прибора и измерения длительности импульсов. При накачках в 1000 и 600 Дж для рубинового и неодимового лазеров соответственно выходная мощность каждого составляла 1,3 Мвт.

Поскольку чувствительность прибора недостаточна для непосредственного измерения сигнала суммарной частоты, была сделана оценка мощности сигнала путем сравнения с помощью второй гармоники неодимового лазера. С этой целью на ФЭУ-36 поочередно подавались сигналы второй гармоники неодимового лазера и сигнал суммарной частоты и производилось сравнение этих импульсов на осциллографе. В результате такого сравнения с учетом равенства мощностей рубинового и неодимового лазеров и с учетом спектральной характеристики ФЭУ-36 оказалось, что мощность суммарной частоты в 1,4 раза меньше мощности излучения второй гармоники неодимового лазера. КПД преобразования излучения неодимового лазера (1,06 м) во вторую гармонику взят из литературных данных.

На основании сделанных приближений можно сделать вывод, что мощность излучения суммарной частоты $P = 40$ квт.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Bass, P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, G. Weinreich, Phys. Rev. Lett., 8, 18 (1962).
2. R. Miller, A. Savage, Phys. Rev., 128, № 5, 2175 (1962).
3. Ю. А. Гольдин, В. Г. Дмитриев, В. К. Тарасов, Н. В. Шкунов, Доклад на II Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Новосибирск, 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 августа 1966 г.

УДК 548.0; 534

ВКЛАД АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

В. Н. Генкин, А. Ф. Дите, В. М. Файн

Нелинейные свойства слабонелинейных сред можно характеризовать кросс-восприимчивостями $\chi_{abc}(k_1\omega; k_r\omega_r)$ и $\chi_{abcd}(k_1\omega; k_r\omega_r; k_s\omega_s)$ (см., например, [1], стр. 156), где k и ω — волновые векторы и частоты приложенных полей. Величины χ_{abc} и χ_{abcd} характеризуют соответственно квадратичную и кубичную связи между поляризацией и электрическим полем $E_a(k, \omega)$. В адиабатическом приближении связь между поляризацией и электрическим полем (при фиксированных положениях ядер) можно записать в виде [2, 3]

$$P_a(r, t) = \sum_{kj} M_a(kj) Q_{kj} \exp ikr + \frac{1}{2} \sum_{kj; k_1j_1} M_a(kj; k_1j_1) \times \\ \times Q_{k_1j_1} Q_{k_2j_2} \exp i(k + k_1) r + \dots + \alpha_{ab} E_b(r, t) + \\ + \sum_{kj} \alpha_{ab}(kj) Q_{kj} E_b(r, t) \exp ikr + \dots, \quad (1)$$

где $M_a(kj)$, $M_a(kj; k_1j_1)$ — коэффициенты, определенные в равновесной конфигурации ядер, Q_{kj} — нормальные координаты колебаний решетки, j означает номер ветви колебаний (далее будем рассматривать вклад акустических ветвей). Решая уравнения для Q_{kj} в присутствии внешнего поля E_a и подставляя эти решения в (1), получаем искомую нелинейную связь между P_a и E_a . Здесь мы не выписываем полностью эту связь (см. [2]). Остановимся только на некоторых эффектах, в которые акустические колебания могут дать существенный вклад.

1. Эффект оптического детектирования. Вклад акустических колебаний (с учетом электрон-фононной связи) дается тензором

$$\chi_{abc}(k_1\omega; k_2-\omega) = \frac{1}{2} \sum_j \frac{M_a(k_1+k_2, j) \alpha_{bc}(-k_1-k_2, j)}{\omega_{2k, j}^2} \quad (2) \\ (\text{при } k_1 + k_2 \rightarrow 0).$$

Для длинноволновых акустических колебаний $M_a(k_1+k_2, j)\alpha_{bc}(-k_1-k_2, j)$ наряду с $\omega_{k_1+k_2, j}^2$ пропорциональны $|k|^2$ и, следовательно, (2) не зависит от модуля $|k|^2$. Однако эта величина может существенно зависеть от направления k .

2. Высокочастотный эффект Керра в поле стоячей волны определяется тензором

$$\chi_{abcd}(k_1\omega_1; k_1-\omega_1; k_2\omega_2) = \frac{1}{6} \sum_j \frac{\alpha_{ab}(k_1+k_2, j)\alpha_{cd}(-k_1-k_2, j)}{\omega_{k_1+k_2, j}^2} \quad (3)$$

(при $k_1+k_2 \rightarrow 0$).

Как и в случае (3), эта величина зависит только от направления k . Заметим, что аналогичный тензор

$$\begin{aligned} & \chi_{abcd}(-k_1\omega_1; k_1-\omega_1; k_2\omega_2) = \\ & = \frac{1}{6} \sum_j \frac{\alpha_{ab}(k_2+k_1, j)\alpha_{cd}(-k_1-k_2, j)}{\omega_{k_2+k_1, j}^2 - (\omega_1-\omega_2)^2 - i(\omega_1-\omega_2)\gamma_{k_2+k_1, j}} \end{aligned} \quad (4)$$

определяет индуцированный эффект Мандельштама—Бриллюэна, где $\gamma_{k_2+k_1, j}$ — величина, характеризующая затухание акустической волны.

3. Оптическое детектирование в присутствии поля удвоенной оптической частоты характеризуется тензором

$$\begin{aligned} \chi_{abcd}(k_1-\omega; k_1-\omega; k_22\omega) &= \frac{1}{3} \sum_j M_a(2k_1+k_2, j) \times \\ & \times \alpha_{bcd}(-2k_1-k_2, j) \omega_{2k_1+k_2, j}^{-2}. \end{aligned} \quad (5)$$

4. Оптическое детектирование в присутствии постоянного электрического поля E_0 определяется тензором $\chi_{abcd}(00; k-\omega; k\omega)$. Мы не выписываем здесь этого тензор. Заметим только, что, как и предыдущие выражения, этот тензор зависит только от направления k .

Изложенная теория (более подробно см. [2]) носит феноменологический характер. При этом предполагается, что константы $M_a(kj)$, $M_a(kj; k_1j_1)$ и т. д. должны определяться из опыта. Знание этих констант, полученное из одних экспериментов, позволяет предсказать эффекты в других экспериментах. В работе [4] эти константы получены из микроскопической теории. Их оценки имеют вид

$$\begin{aligned} M_a(kj) &\sim \omega_{kj}, \quad M_a(kj; k_1j_1) \sim \alpha_{abc}\omega_{k_1}\omega_{k_1j_1}, \\ \alpha_{ab}(kj) &\sim \omega_{kj}^2\alpha_{abc}, \quad \alpha_{abc}(kj) \sim \omega_{kj}^2\alpha_{abcd} \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Оценки кросс-восприимчивостей α_{ab} , α_{abc} и α_{abcd} , связанных с учетом только электронных движений, имеют вид $\alpha_{ab} \sim 1$, $\alpha_{abc} \sim E_{at}^{-1}$, $\alpha_{abcd} \sim E_{at}^{-2}$, $E_{at} \sim e/a^2$, где e — заряд ядра, a — постоянная решетки. Выписанные выше тензоры (2), (3), (5), а также $\chi_{abcd}(00; k-\omega; k\omega)$, как следует из (6), имеют соответственно порядки величин α_{abc} и α_{abcd} . Таким образом, рассмотренные здесь механизмы могут конкурировать (по порядку величины) с чисто электронным механизмом, а также с механизмами, связанными с учетом только оптических колебаний [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, Я. И. Ханнин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, 1965.
2. В. Н. Генкин, А. Ф. Дите, В. М. Файн, Доклад на II Симпозиуме по нелинейной оптике, г. Новосибирск, Труды симпозиума.
3. Г. М. Генкин, В. М. Файн, Э. Г. Яшин, ЖЭТФ (в печати).
4. Г. М. Генкин, В. М. Файн, Доклад на II Симпозиуме по нелинейной оптике, г. Новосибирск, Труды симпозиума.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 июля 1966 г.

* Здесь всюду предполагается, что $|k| \gg 1/L$, где L — характерный размер образца. Все выражения, конечно, будут иметь тот же порядок величины и при $k \sim 1/L$ (но при этом существенно влияние формы образца).

ПОДАВЛЕНИЕ НЕАКСИАЛЬНЫХ МОД В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРАХ С ШИРОКИМИ ВОЛНОВЫМИ ПУЧКАМИ МЕТОДОМ КОМБИНИРОВАННОЙ СЕЛЕКЦИИ

В. И. Таланов

В настоящее время нашли применение два способа дискриминации неаксиальных мод в открытых резонаторах. Первый, наиболее распространенный, основан на ограничении пространственной структуры волнового пучка поглощающими диафрагмами [1, 2], при втором способе ограничивается угловой спектр пучка (например, с помощью прием полного отражения [3]). В данном сообщении наряду со сравнительной характеристикой обоих методов указывается на возможности их комбинированного применения для разрежения спектра оптических резонаторов с широкими пучками.

Для простоты рассмотрим открытый двумерный резонатор длиной L с одинаковыми цилиндрическими зеркалами радиусом $2F$. Все результаты легко обобщаются и на резонатор со сферическими зеркалами.

Уравнение для распределений поля на зеркалах при ограничении их одинаковыми диафрагмами с прозрачностью $t(x)$ имеет вид

$$p\psi(x) = \frac{ik}{2\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp\left(-i \frac{gkx^2}{2L} + i \frac{kxx'}{L} - i \frac{gkx'^2}{2L}\right) t(x') \psi(x') dx', \quad (1)$$

где $g = 1 - L/2F$, $k = 2\pi/\lambda$. При постоянной прозрачности ограничивающих диафрагм параметрами, определяющими собственные функции ψ_n и собственные значения p_n уравнения (1), являются g и $c = c_s = ka^2/L$, где $2a$ — ширина диафрагм.

Если в резонаторе с недиафрагмированными зеркалами находится элемент, ограничивающий угловой спектр волнового пучка (коэффициент преобразования $t^2(k_{\perp})$), k_{\perp} — проекция волнового вектора на плоскость, перпендикулярную оси резонатора), то, используя методы, развитые в работе [4], для углового спектра $A(k_{\perp})$ в «среднем» сечении преобразователя нетрудно получить уравнение, полностью аналогичное (1)*:

$$pA(k_{\perp}) = \frac{iF}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} t(k_{\perp}) \exp\left(-i \frac{gFk_{\perp}^2}{2k} + i \frac{Fk_{\perp}k'_{\perp}}{k} - i \frac{gFk'_{\perp}{}^2}{2k}\right) \times \quad (2)$$

$$\times t(k'_{\perp}) A(k'_{\perp}) dk'_{\perp}.$$

Для преобразователя, равномерно прозрачного ($t = 1$) в полосе $|k_{\perp}| < k_{\perp}^{0**}$, собственные функции и значения уравнения (2) определяются параметрами g и $c = c_a = k_{\perp}^{02}F/k$ точно так же, как и решения уравнения (1) параметрами g и c_s .

Как известно, при фиксированном g селекция колебаний, описываемых уравнениями (1) или (2), ухудшается с ростом параметра c ; для выделения аксиальных мод приходится прибегать к достаточно сильному ограничению пучка или его спектра.

В плоскопараллельном и близких к нему резонаторах ($g \lesssim 1$) заметное подавление неаксиальных мод достигается лишь при таких c , при которых размеры пучков определяются размерами ограничивающих диафрагм. Сравним в этом случае расходимость пучков θ при обоих методах селекции. При пространственном ограничении можно принять $\theta = \theta_s = 2\pi/ka$, при угловом $\theta = \theta_a = 2k_{\perp}^0/k$.

При одинаковых c и g $\theta_s > \theta_a$, если $c\sqrt{2(1-g)} < \pi$. Это условие всегда выполняется при достаточно сильном ограничении пучков, необходимом для селекции; следовательно, метод угловой селекции позволяет получить большую направленность излучения в одномодовом режиме. В квантовых оптических генераторах с широкими пучками ему, ис-видимому, следует отдать предпочтение перед пространственным ограничением.

Максимальная ширина световых пучков в ОКГ часто определяется размером области возбуждения активного вещества. Параметр $c_s = ka^2/L$, соответствующий ширине этой области, как правило, настолько велик, что переход к зеркалам, поддерживающим основную моду, занимающую все сечение области возбуждения, сопровож-

* Для простоты предполагается, что $t(k_{\perp}) = t(-k_{\perp})$.

** Мы отвлекаемся от возможной, но не принципиальной для рассматриваемого вопроса зависимости фазы t от k_{\perp} .

дается генерацией большого числа неаксиальных мод даже при незначительном превышении пороговой накачки. Дискриминацию мод в оптических резонаторах можно заметно улучшить, применив метод комбинированной селекции, заключающийся в одновременном использовании пространственного и углового ограничения пучков.

Проиллюстрируем возможности метода на примере плоскопараллельного резонатора. Для определенности будем считать, что пучок в резонаторе ограничивается диафрагмой шириной $2a$ и угловым селектором с областью прозрачности $2k_{\perp}^0$.

Уравнение для поля может быть составлено аналогично (1) и (2). Пусть для простоты $c_s = ka^2/L \gg 10^*$. При этом условии можно не учитывать расходимость пучка между зеркалами. Уравнение для поля в плоскости диафрагмы, пространственно ограничивающей пучок, запишется в виде

$$T\psi(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin c_{sa}(u-u')}{u-u'} \psi(u') du', \quad (3)$$

где $u = x/a$, $c_{sa} = k_{\perp}^0 a$, T — коэффициент передачи при полном пробеге (туда—обратно) лучка через резонатор. Уравнение (3) того же типа, что и уравнение собственных функций конфокального резонатора [2, 4] и имеет бесконечное множество решений, описываемых угловыми функциями вытянутого сфероида $S_{0m}(c_{sa}, u)$ при собственных значениях $T_m = \frac{2c_{sa}}{\pi} [R_{0m}^{(1)}(c, 1)]^2$, где $R_{0m}^{(1)}$ — радиальные функции вытянутого сфе-

роида. Таким образом, в описываемом резонаторе будут существовать типы колебаний, имеющие разные структуры и разную величину радиационных потерь. Интересно обратить внимание, что эти типы колебаний получены в приближении геометрической оптики ($c_s \gg 1$).

Как было показано в работе [5], при одинаковом уровне потерь основной моды конфокальный резонатор обеспечивает гораздо более высокие радиационные потери высших мод, чем плоскопараллельный. Таким образом, метод комбинированной селекции реализует высокую селективность, свойственную при пространственном ограничении пучка конфокальному резонатору. Однако теперь получение небольших значений $c_{sa} \sim 3$, требуемых для эффективного подавления неаксиальных мод, не связано с необходимостью применения узких пучков.

Рассмотрим типичный пример. Пусть $L = 100$ см, $a = 0,45$ см, $\lambda = 10^{-4}$ см, $c_s = 40\pi$. Для плоских ленточных зеркал в этом случае $1 - T_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$; $1 - T_1 \approx 4,5 \cdot 10^{-3}$. При том же значении T_0 комбинированная селекция дает $1 - T_1 \approx 2,6 \cdot 10^{-2}$, а при диафрагмировании до $c_{sa} = 3$ $1 - T_0 \approx 0,02$, $1 - T_1 \approx 0,25$, что может обеспечить одномодовую работу ОКГ с достаточно большими коэффициентами усиления активного вещества**.

Высокая эффективность применения угловых селекторов мод в оптических генераторах подтверждается и экспериментально [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Fox, T. Li, Bell. Syst. Tech. J., **40**, 453 (1961).
2. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell. Syst. Tech. J., **40**, 489 (1961).
3. J. A. Giordmaine, W. Kaiser, J. Appl. Phys., **35**, 3446 (1964).
4. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 260 (1965).
5. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, **10**, 552 (1965).
6. Н. Г. Бондаренко, И. В. Еремина, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 ноября 1966 г.

* Заметим, что применение только угловой селекции в плоскопараллельном резонаторе не разрезает спектра ($c_a = \infty$), а пространственное ограничение при $c_s \gg 10$ оказывается неэффективным.

** Здесь T_0 и T_1 относятся соответственно к основному и первому типам колебаний ($T = |p|^2$).

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В связи со статьей «Электромагнитные волны в изотропном слоистом плазменном волноводе», опубликованной в Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 110 (1966), мне хотелось бы сделать следующие замечания

В разделе 3 статьи, где исследовались волны дискретной части спектра, был рассмотрен случай, когда волны в плазменном волноводе распространяются без потерь. При этом указано лишь одно условие, при котором электромагнитные волны в плазме не имеют потерь, а именно требование, чтобы диэлектрическая проницаемость плазмы была вещественной (отсутствие поглощения энергии на столкновение частиц). Поскольку в работе рассматривался слоистый волновод из неоднородных плазменных слоев общего типа, то необходимо добавить еще одно условие, которое заключается в требовании отсутствия так называемого резонансного поглощения в области, где диэлектрическая проницаемость плазмы проходит через нуль. Такое поглощение может иметь место даже тогда, когда плазма не имеет потерь на столкновение частиц [1-3]. Однако резонансное поглощение отсутствует, если диэлектрическая проницаемость плазмы проходит через нуль скачком. Поэтому результаты третьего раздела справедливы только в этом случае.

Второе замечание касается поверхностных волн плазменного волновода. Следует отметить, что эти волны являются не просто частным случаем более общих комплексных волн, а их особым случаем. Некоторые свойства комплексных волн не распространяются на поверхностные волны. Так, в плазме без потерь полный поток мощности комплексной волны равен нулю, а поток мощности поверхностной волны нулю не равен.

Выражаю благодарность И. Г. Кондратьеву, который обратил мое внимание на указанные обстоятельства.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Herlofson, Arkiv For Fysic, 3, 247 (1951).
2. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 45, 1978 (1963).
3. К. Н. Степанов, ЖТФ, 35, 1002 (1965).

В. В. ШЕВЧЕНКО

29 сентября 1966 г.