

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Бурков В. Г., Яшин Ю. Я.</b> К теории рефракции электромагнитных волн в двумернонеоднородной изотропной среде . . . . .	1631
<b>Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С.</b> Об апертурных ограничениях эффективности оптических удвоителей частоты . . . . .	1639
<b>Кривошеков Г. В., Телегин Г. Г., Фолин К. Г.</b> Исследование временных характеристик Не-Не оптического квантового генератора . . . . .	1656
<b>Беленов Э. М.</b> Взаимодействие типов колебаний газового лазера . . . . .	1661
<b>Зейгер С. Г.</b> Взаимодействие аксиальных мод в газовом ОКГ . . . . .	1671
<b>Альперин М. М.</b> О релаксационном спектре некоторых простейших систем . . . . .	1683
<b>Крупнов А. Ф., Логачев В. А., Скворцов В. А.</b> Об асимметрии характеристик магнитной настройки молекулярных генераторов . . . . .	1689
<b>Гутцайт Е. М.</b> Распределение оценки энергетического спектра действительного нормального стационарного случайного процесса . . . . .	1696
<b>Ильин В. С., Костюнина Г. П.</b> Дифракция электромагнитных волн на ультразвуковых волнах в анизотропной среде. II . . . . .	1703
<b>Маслова Л. М.</b> Дифракция поверхностной волны на полубесконечной анизотропно проводящей плоскости в плоском волноводе . . . . .	1719
<b>Петровский А. Д.</b> О теореме взаимности для полей электрических источников	1727
<b>Островский Л. А., Соломин Б. А.</b> Преобразование сигналов в ключевых параметрических линиях . . . . .	1731
<b>Мишустин Б. А.</b> Синтез нерассеивающих развязывающих схем . . . . .	1737
<b>Богатырев Ю. К., Рабинович М. И.</b> Автоколебания в отрезке нелинейной активной линии . . . . .	1750

### Краткие сообщения и письма в редакцию

<b>Станкевич К. С., Ласточкин В. П., Торхов В. А.</b> Измерение температуры радиоизлучения зенита на длине волн . . . . .	1758
<b>Мельников А. А., Разин В. А., Хрулев В. В.</b> Линейная поляризация космического радиоизлучения на частоте 950 $M\Gamma$ в окрестностях точки с координатами $\delta^H = 142^\circ$ , $b^H = +8^\circ$ . . . . .	1760
<b>Татарский В. И.</b> Оценка деполяризации света турбулентными неоднородностями атмосферы . . . . .	1762
<b>Коваленко Е. С.</b> Спектр ОКГ на твердом теле с неоднородной накачкой . . . . .	1765
<b>Умарходжаев Р. М.</b> Влияние радиационного затухания на работу спинового генератора . . . . .	1768
<b>Кузнецов М. И., Васильев Э. Г., Степанов С. В.</b> К вопросу о расчете собственных частот электронного облака магнетрона . . . . .	1770
<b>Бербасов В. А., Кузнецов М. И., Яблоков Ю. А.</b> О добротности электронного резонатора неразрезного магнетрона . . . . .	1772
<b>Баранцева О. Д., Купчинов Н. Ф.</b> Исследование деформации ленточного бриллюзновского потока электронов, движущегося в трубе прямоугольного сечения . . . . .	1774
<b>Куликов М. Н.</b> К расчету статических характеристик прямолинейных электронных потоков, движущихся в скрещенных полях . . . . .	1776
<b>Афанасов С. Г., Калашников М. И., Петров С. Г., Терехов О. В.</b> О взаимодействии электронных потоков с сильно неоднородными СВЧ полями . . . . .	1778
<b>Конев Ю. Б.</b> О корреляционных свойствах поля суперлюминесценции . . . . .	1780

### Информация

<b>Аннотации статей, помещенных в ж. «Геомагнетизм и аэрономия», т. VII, № 3, 4, 1967 г.</b> . . . . .	1783
<b>Содержание т. X журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1967 г.</b> . . . . .	1786
<b>Именной указатель т. X журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1967 г.</b> . . . . .	1795

УДК 621.371.242

## К ТЕОРИИ РЕФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*В. Г. Бурков, Ю. Я. Яшин*

Получены выражения, определяющие угол рефракции в случае распространения электромагнитных волн в двумерно-неоднородной изотропной среде, когда уравнение эйконала может быть проинтегрировано в разделяющихся переменных.

Вопросам рефракции электромагнитных волн в неоднородной изотропной среде посвящено значительное число исследований, причем в подавляющем большинстве работ рассмотрение проведено для плоскостной или сферически-слоистой среды. Наиболее последовательное определение угла рефракции  $\Psi$  для этих случаев было проведено вариационным методом в работе [1], где угол  $\Psi$  отыскивался в виде функционального ряда (см. также [2]). Рефракция в среде, диэлектрическая проницаемость которой  $\epsilon$  зависит от двух и более координат, рассмотрена в работе [3] для случая, когда рефракционные поправки к решению для слоисто-неоднородной среды малы.

В данной статье предложенный в [1] метод определения малых углов рефракции  $\Psi$  применен к задаче о распространении электромагнитных волн в среде, диэлектрическая проницаемость которой зависит от двух координат при условии, что уравнение эйконала может быть проинтегрировано в разделяющихся переменных. Показано также, что, если в разложении угла  $\Psi$  в функциональный ряд в качестве нулевого приближения взять точное решение, соответствующее каким-либо конкретным «эталонным»  $\epsilon$ , то можно найти не только малые, но и большие углы рефракции.

В качестве примера общие соотношения использованы для численного решения задачи об отыскании угла  $\Psi$  для модели среды с параболической зависимостью  $\epsilon$  по высоте при наличии горизонтальных градиентов.

1. Известно [4], что, если диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(x, y)$  в декартовых координатах  $x, y$  имеет вид

$$\epsilon(x, y) = \gamma_0 + f_1(x) + f_2(y), \quad (1)$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  — произвольные функции, то уравнение эйконала

$$n^2 - \epsilon(x, y) \equiv n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - \epsilon(x, y) = 0 \quad (2)$$

( $n^2 \equiv (\nabla \Phi)^2$ ,  $\Phi$  — фаза) может быть проинтегрировано в разделяющихся переменных. В этом случае получаем из (1), (2) следующие выражения для компонент вектора  $n$ :

$$n_x^2 \equiv \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 = a_1^2 + f_1(x),$$

$$n_y^2 \equiv \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = \gamma_0 - (a_1^2 + a_2^2) + f_2(y), \quad (3)$$

$$n_z^2 \equiv \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 = a_2^2,$$

где  $a_1^2$  и  $a_2^2$  — константы интегрирования. Без ограничения общности можно принять, что

$$n_z^2 = a_2^2 = 0. \quad (4)$$

Уравнение траекторий, касательным к которым в каждой точке является вектор  $\mathbf{n}$ , имеет вид

$$\frac{dx}{n_x} = \frac{dy}{n_y} = \frac{dz}{n_z}. \quad (5)$$

Если проинтегрировать уравнение (5) с учетом (3) и (4), то уравнение луча, выходящего из источника  $(x_1, y_1, z_1)$  и попадающего в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , в которой расположен приемник, можно записать следующим образом:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{[a_1^2 + f_1(\xi)]^{1/2}} - \int_{y_0}^{y_1} \frac{d\eta}{[\gamma_0 - a_1^2 + f_2(\eta)]^{1/2}} = 0, \quad z = z_0 = z_1, \quad (6)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — переменные интегрирования. Примем далее точку наблюдения  $(x_0, y_0, z_0)$  за начало отсчета, т. е. положим  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , и запишем величину  $a_1^2$  в виде (см. рис. 1)

$$a_1^2 = \gamma_0 \sin^2(\alpha - \Psi) \quad (7)$$

( $\alpha$  — зенитный угол,  $\Psi$  — угол рефракции). Тогда вместо уравнения (6) получим

$$\int_0^{x_1} \frac{d\xi}{[\gamma_0 \sin^2(\alpha - \Psi) + f_1(\xi)]^{1/2}} - \int_0^{y_1} \frac{d\eta}{[\gamma_0 \cos^2(\alpha - \Psi) + f_2(\eta)]^{1/2}} = 0. \quad (8)$$

Рис. 1.

Уравнение (8) задает в неявном виде функционал

$$\Psi = \Psi[f_1(\xi), f_2(\eta)]. \quad (9)$$

Как известно, в случае однородной среды ( $f_1(\xi) \equiv 0$ ,  $f_2(\eta) \equiv 0$ )

$$\Psi = 0. \quad (10)$$

Разложим функционал (9) в двойной функциональный ряд Тейлора в окрестности  $\Psi = 0$ , причем разложение проведем не по функциям  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ , а по некоторым специально введенным параметрам  $\beta$  и  $\delta$  [5], записав уравнение (8) в следующем виде:

$$\int_0^{x_1} \frac{d\xi}{[\gamma_0 \sin^2(\alpha - \Psi) + \beta f_1(\xi)]^{1/2}} - \int_0^{y_1} \frac{d\eta}{[\gamma_0 \cos^2(\alpha - \Psi) + \delta f_2(\eta)]^{1/2}} = 0. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Psi = \Psi(0, 0) + \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right]_0 \beta + \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} \right]_0 \delta + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2} \right]_0 \beta^2 + \\ + \frac{2}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta \partial \delta} \right]_0 \beta \delta + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \delta^2} \right]_0 \delta^2 + \dots\end{aligned}\quad (12)$$

Если теперь положить в (12)  $\beta = \delta = 1$ , то мы получим искомый угол рефракции  $\Psi$ . Коэффициенты ряда (12) могут быть найдены из (11) по общим правилам дифференцирования неявных функций. Коэффициенты при членах до второго порядка малости включительно равны

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right]_0 = \frac{1}{2\gamma_0} \operatorname{ctg} \alpha \overline{f_1(x)}; \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} \right]_0 = -\frac{1}{2\gamma_0} \operatorname{tg} \alpha \overline{f_2(y)}; \quad (14)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2} \right]_0 = \frac{1}{2\gamma_0^2} \operatorname{ctg} \alpha (2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) (\overline{f_1(x)})^2 - \frac{3}{4\gamma_0^2} \operatorname{ctg} \alpha (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \overline{f_1^2(x)}; \quad (15)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta \partial \delta} \right]_0 = \frac{1}{4\gamma_0^2} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) \overline{f_1(x)} \overline{f_2(y)}; \quad (16)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \delta^2} \right]_0 = \frac{3}{4\gamma_0^2} \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \overline{f_2^2(y)} - \frac{1}{2\gamma_0^2} \operatorname{tg} \alpha (2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) (\overline{f_2(y)})^2, \quad (17)$$

где обозначено

$$\overline{f_1^i}(x) = (x) \frac{1}{x} \int_0^x f_1^i(\xi) d\xi, \quad \overline{f_2^j}(y) = \frac{1}{y} \int_0^y f_2^j(\eta) d\eta \quad (i, j = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Подставляя (13) — (17) в (12), окончательно имеем

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{1}{2\gamma_0} \operatorname{ctg} \alpha \overline{f_1(x)} - \frac{1}{2\gamma_0} \operatorname{tg} \alpha \overline{f_2(y)} + \frac{1}{4\gamma_0^2} \operatorname{ctg} \alpha (2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) (\overline{f_1(x)})^2 - \\ - \frac{3}{8\gamma_0^2} \operatorname{ctg} \alpha (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \overline{f_1^2(x)} + \frac{1}{4\gamma_0^2} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) \overline{f_1(x)} \overline{f_2(y)} + \\ + \frac{3}{8\gamma_0^2} \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \overline{f_2^2(y)} - \frac{1}{4\gamma_0^2} \operatorname{tg} \alpha (2\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) (\overline{f_2(y)})^2 + \dots\end{aligned}\quad (19)$$

Такой же результат можно получить, если производить разложение в ряд, являющийся обобщением соответствующего выражения, приведенного в [1], на случай зависимости от двух координат.

При  $f_1(x) = 0$  (19) совпадает с выражением для  $\Psi$ , полученным в [1]. Если ограничиться лишь первым членом разложения, то, как можно показать, получится формула, приведенная в [6].

2. Рассмотрим теперь двумерно-неоднородную среду, диэлектрическая проницаемость которой  $\epsilon$  зависит от сферических координат  $r$  и  $\theta$  таким образом, что уравнение эйконала может быть проинтегрировано методом разделения переменных. Тогда указанное уравнение запишется следующим образом [4]:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)^2 = \gamma_0 + \frac{f_1(\theta) + f_2(r)}{r^2}, \quad (20)$$

где  $f_1(\theta)$  и  $f_2(r)$  — произвольные функции соответствующих координат. После разделения переменных в уравнении (20) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 &= \gamma_0 + \frac{f_2(r) - b_1^2}{r^2}, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2 &= f_1(\theta) - \frac{b_2^2 - b_1^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)^2 &= b_2^2, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $b_1^2$  и  $b_2^2$  — константы разделения. Считая далее, что луч лежит в меридиональной плоскости  $r, \theta$ , положим  $b_2^2 = 0$ . В результате этих упрощений уравнение луча, проходящего через точки расположения источника ( $R_1, \theta_1$ ) и приемника ( $R_0, \theta_0$ ), примет вид

$$\int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r^2 [\gamma_0 + (f_2(r) - b_1^2)/r^2]^{1/2}} - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{(f_1(\theta) + b_1^2)^{1/2}} = 0. \quad (22)$$

Мы считаем, что в точке наблюдения диэлектрическая проницаемость принимает значение  $\epsilon(R_0, \theta_0) = \gamma_0$ .

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае справедливо следующее равенство (см. рис. 2):

$$\frac{1}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)_0 = \operatorname{ctg}(\alpha - \Psi). \quad (23)$$

Воспользовавшись (23), можно показать, что имеет место соотношение

$$b_1^2 = \gamma_0 R_0^2 \sin^2(\alpha - \Psi). \quad (24)$$

Рис. 2. Выражение (22) с учетом (24) окончательно преобразуется к виду

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{[\gamma_0 R_0^2 \sin^2(\alpha - \Psi) + f_1(\theta)]^{1/2}} - \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r \{ \gamma_0 [r^2 - R_0^2 \sin^2(\alpha - \Psi)] + f_2(r) \}^{1/2}} = 0. \quad (25)$$

Разлагая, как и выше,

$$\Psi = \Psi[f_1(\theta), f_2(r)] \quad (26)$$

в функциональный ряд Тейлора и определяя коэффициенты разложения, можно получить следующее явное выражение для угла  $\Psi$ :

$$\Psi = \frac{1}{K} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{f_1(\theta) d\theta}{A^{3/2}} - \int_R^{R_1} \frac{f_2(r) dr}{B^{3/2}} \right) + \operatorname{ctg}(2\alpha) (F_1 + F_2)^2 -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2K} \left[ \frac{3}{2} F_1^2 S \gamma_0^2 R_0^4 \sin^2(2\alpha) - 3F_1 \gamma_0 R_0^2 \sin(2\alpha) \int_{\theta_0}^{\theta_1} A^{-5/2} f_1 d\theta + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} A^{-5/2} f_1^2 d\theta \right] - \frac{1}{K} \left\{ \frac{3}{2} \gamma_0^2 R_0^4 \sin^2(2\alpha) F_1 F_2 S - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3}{2} \gamma_0 R_0^2 \sin^2 \alpha \left[ F_2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} A^{-5/2} f_1 d\theta - F_1 \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r} B^{-5/2} f_2 dr \right] \right\} - \\
 & - \frac{1}{2K} \left[ \frac{3}{2} \gamma_0^2 R_0^4 \sin^2(2\alpha) F_2^2 S - 3\gamma_0 R_0^2 \sin(2\alpha) F_2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r} B^{-5/2} f_2 dr - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3}{2} \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r} B^{-5/2} f_2^2 dr \right] + \dots,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{K} \int_{\theta_0}^{\theta_1} A^{-3/2} f_1(\theta) d\theta, \quad F_2 = -\frac{1}{K} \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r} B^{-3/2} f_2(r) dr, \\
 A &= \gamma_0 R_0^2 \sin^2 \alpha, \quad B = \gamma_0 (r^2 - R_0^2 \sin^2 \alpha), \\
 S &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} A^{-5/2} d\theta - \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r} B^{-5/2} dr, \\
 K &= \gamma_0 R_0^2 \sin(2\alpha) \left( \int_{\theta_0}^{\theta_1} A^{-3/2} d\theta + \int_{R_0}^{R_1} \frac{B^{-3/2}}{r} dr \right).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, мы ограничились лишь членами ряда до второго порядка малости включительно.

3. Приведенные выше результаты дают возможность достаточно точно определять малые углы рефракции. В данном разделе мы приведем приближенный метод отыскания не малых углов  $\Psi$ . Рассмотрение проведем для случая, когда зависимость  $\varepsilon$  от координат определяется выражением (1).

Пусть функции  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ , входящие в (1), могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= f_{10}(x) + \varphi_1(x), \\
 f_2(y) &= f_{20}(y) + \varphi_2(y).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Потребуем, чтобы на рассматриваемом интервале изменения независимых переменных  $x$  и  $y$  выполнялись неравенства

$$|f_{10}(x)| \gg |\varphi_1(x)|, \quad |f_{20}(y)| \gg |\varphi_2(y)|, \tag{30}$$

а уравнение (8) могло быть проинтегрировано точно, если в (29) положить  $\varphi_1(x) = \varphi_2(y) = 0$ . Тогда мы можем записать  $\Psi$  в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1, \quad (31)$$

где  $\Psi_0$  — угол, определяемый из соотношения (8) при  $f_1 = f_{10}$ ,  $f_2 = f_{20}$ , а  $\Psi_1$  — малая добавка за счет отличия функции  $\varepsilon(x, y)$  от эталонной функции  $\varepsilon_0(x, y) = \gamma_0 + f_{10}(x) + f_{20}(y)$ .

Уравнение (8) с учетом (29) и (31) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \{\gamma_0 \sin^2 [\alpha - (\Psi_0 + \Psi_1)] + f_{10}(\xi) + \varphi_1(\xi)\}^{-1/2} d\xi - \\ & - \int_0^{y_1} \{\gamma_0 \cos^2 [\alpha - (\Psi_0 + \Psi_1)] + f_{20}(\eta) + \varphi_2(\eta)\}^{-1/2} d\eta = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Разлагаем далее функционал

$$\Psi = \Psi[f_1(\xi), f_2(\eta)]$$

в окрестности  $f_1 = f_{10}$ ,  $f_2 = f_{20}$ ,  $\Psi = \Psi_0$  таким же способом, как это делалось ранее. При этом нулевой член разложения (12) будет соответствовать эталонному решению  $\Psi_0$ . В явном виде соотношение для угла рефракции с точностью до членов второго порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & F'_1 + F'_2 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\alpha - \Psi_0) [\operatorname{ctg}^2(\alpha - \Psi_0) - 1] F'^2_1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\alpha - \Psi_0) \times \\ & \times [1 - \operatorname{tg}^2(\alpha - \Psi_0)] F'^2_2 + 2 \operatorname{ctg}[2(\alpha - \Psi_0)] F'_1 F'_2 + \frac{1}{2K_1} \times \\ & \times \left\{ -\frac{3}{2\gamma_0} \int_0^{x_1} A_1^{-5/2} \varphi_1^2 d\xi + 3F'_1 \sin[2(\alpha - \Psi_0)] \int_0^{x_1} A^{-5/2} \varphi_1 d\xi - \right. \\ & - \frac{3}{2} \gamma_0 \sin^2[2(\alpha - \Psi_0)] F'^2_1 S_1 \Big\} + \frac{1}{K_1} \left\{ \frac{3}{2} \sin[2(\alpha - \Psi_0)] \left[ F'_2 \int_0^{x_1} A_1^{-5/2} \varphi_1 d\xi + \right. \right. \\ & + F'_1 \int_0^{y_1} B_1^{-5/2} \varphi_2 d\eta \Big] - \frac{3}{2} \gamma_0 \sin^2[2(\alpha - \Psi_0)] F'_1 F'_2 S_1 \Big\} + \frac{1}{2K_1} \left\{ \frac{3}{2\gamma_0} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^{y_1} B_1^{-5/2} \varphi_2^2 d\eta + 3F'_2 \sin[2(\alpha - \Psi_0)] \int_0^{y_1} B_1^{-5/2} \varphi_2 d\eta - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \gamma_0 \sin^2[2(\alpha - \Psi_0)] F'^2_2 S_1 \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} F'_1 = & \frac{1}{\gamma_0 K_1} \int_0^{x_1} A_1^{-3/2} \varphi_1(\xi) d\xi, \quad F'_2 = -\frac{1}{\gamma_0 K_1} \int_0^{y_1} B_1^{-3/2} \varphi_2(\eta) d\eta, \\ A_1 = & \gamma_0 \sin^2(\alpha - \Psi_0) + f_{10}, \quad B_1 = \gamma_0 \cos^2(\alpha - \Psi_0) + f_{20}, \\ S_1 = & \int_0^{x_1} A_1^{-5/2} d\xi - \int_0^{y_1} B_1^{-5/2} d\eta, \end{aligned} \quad (34)$$

$$K_1 = \sin [2(\alpha - \Psi_0)] \left( \int_0^{x_1} A_1^{-3/2} d\xi - \int_0^{y_1} B_1^{-3/2} d\eta \right).$$

Соотношение (33) с учетом (34) позволяет находить угол рефракции для весьма широкого класса функций  $\varepsilon(x, y)$ .

4. В качестве примера использования формулы (19) определим угол рефракции в зависимости от зенитного угла  $\alpha$  или, что то же самое, от расстояния по горизонтали при заданной высоте движения источника  $y = \text{const}$  для следующей модели диэлектрической проницаемости среды:

$$\varepsilon = 1 - ax - by^2. \quad (35)$$

Заметим, что выбранная зависимость (35) не претендует на количественное описание какой-либо реальной модели и носит чисто иллюстративный характер.

Зависимость (35) позволяет точно определить угол  $\Psi$ , благодаря чему можно сравнить, насколько хорошо и в каких областях приближенное решение совпадает с точным.

Интегрируя (8) с учетом (35), имеем

$$-\frac{2}{a} \{ [\sin^2(\alpha - \Psi) - ax]^{1/2} - [\sin^2(\alpha - \Psi)]^{1/2} \} - \frac{1}{\sqrt{b}} \times \\ \times \arcsin [y\sqrt{b}/\cos(\alpha - \Psi)] = 0. \quad (36)$$

Вычисление точного значения угла  $\Psi$ , а также приближенного по формуле (19) с учетом (35) проводилось на электронной вычислительной машине при  $y = 100 \text{ км}$ ,  $a = 10^{-3} \text{ км}^{-1}$ ,  $b = 5 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-2}$ . Результаты приведены на рис. 3. Кривые 1, 2, 3 отвечают соответственно точному решению, второму и первому приближениям ряда (19).

Для того, чтобы оценить, какой вклад дают горизонтальные градиенты в величину угла  $\Psi$  при различных значениях  $\alpha$ , параллельно была решена задача о рефракции в среде с

$$\varepsilon = 1 - by^2 \quad (b = 5 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-2}), \quad (37)$$

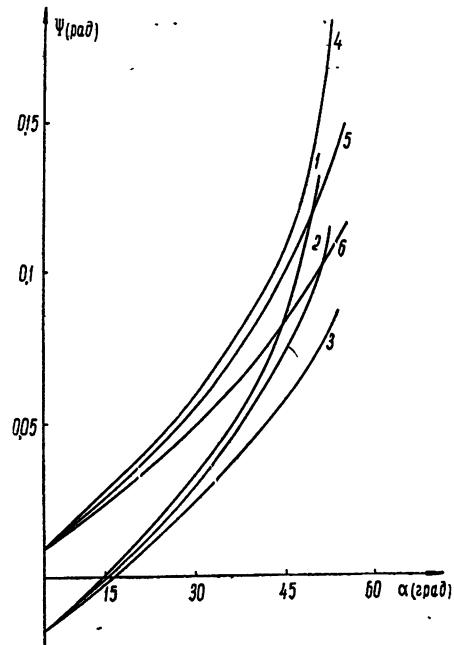


Рис. 3. Кривые 3, 2, 1 соответствуют первому и второму приближениям, а также точному решению для  $\Psi$  в слоисто-неоднородной среде ( $\varepsilon$  определяется соотношением (37)). Кривые 6, 5, 4 соответствуют первому и второму приближениям, а также точному решению, когда  $\varepsilon$  определяется из (35).

т. е. в среде с диэлектрической проницаемостью (35) при  $a \approx 0$ . Кривые 4, 5, 6 соответствуют точному решению, а также второму и первому приближениям ряда (19), когда  $\varepsilon$  имеет вид (37).

Из кривых, приведенных на рис. 3, видно, что, несмотря на относительную малость горизонтальных градиентов (по сравнению с вертикальными), они дают весьма существенный вклад в величину угла  $\Psi$ . Изменение знака  $\Psi$  на кривых 1—3 обусловлено относительным влиянием горизонтальных и вертикальных градиентов при различных положениях источника относительно приемника, поскольку вклады, вносимые в  $\Psi$  горизонтальными и вертикальными градиентами, имеют разные знаки (для выбранного примера). В других случаях эти вклады могут суммироваться, что приведет к увеличению угла  $\Psi$ , и последний ни при каких значениях  $a$  не будет равен нулю.

Авторы признательны Б. Н. Гершману, а также Ю. А. Кравцову, прочитавшим статью в рукописи и сделавшим ряд полезных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 5, 923 (1962).
2. Г. И. Скрыпник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 3, 485 (1965).
3. Я. Л. Альперт, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 4, 626 (1963).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика (механика), изд. Наука, М., 1965.
5. Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, изд. Наука, М., 1965.
6. Я. Л. Альперт, УФН, 71, № 3, 369 (1960); Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
19 ноября 1966 г.

#### TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE REFRACTION IN TWO-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS ISOTROPIC MEDIUM

*V. G. Bourkov, Yu. Ya. Yashin*

The expressions determining the refraction angle have been derived for the case of electromagnetic wave propagation in two-dimensional inhomogeneous isotropic medium when the eiconal equation may be integrated into separated variables.

УДК 535.8 : 621.374.4

## ОБ АПЕРТУРНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ УДВОИТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ

*С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин*

Развивается последовательная методика, позволяющая проанализировать влияние различия в направлениях лучевых векторов взаимодействующих волн (апертурного эффекта) на протекание нелинейных волновых взаимодействий ограниченных пучков в анизотропных средах. Исследование апертурного эффекта сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Развита теория КПД оптического удвоителя частоты, учитывающая апертурный эффект; показано, что в сильно анизотропных кристаллах насыщение КПД оптического удвоителя частоты на уровне, существенно меньшем 100%, может быть связано именно с апертурным эффектом. Проанализирован апертурный эффект в пространственно модулированных пучках. Показано, что даже регулярная пространственная модуляция пучка основного излучения может привести к возрастанию роли апертурного эффекта по сравнению со случаем немодулированного пучка. Наконец, обсуждается влияние апертурного эффекта на протекание нелинейных взаимодействий в пучках нелазерных источников. В Приложении изложен наглядный геометрический метод анализа апертурного эффекта в простых пучках, не требующий решения дифференциальных уравнений.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время хорошо известно, что для корректной теоретической оценки эффективности оптических умножителей частоты, использующих анизотропные нелинейные кристаллы, обладающие направлением синхронизма, простой теории плоских волн недостаточно (даже, если речь идет о нефокусированных лазерных пучках). Различие в показателях преломления кристалла для разных лучей делает необходимым учет расходимости пучка основного излучения [1-5] даже в том случае, когда изменениями интенсивности за счет увеличения диаметра пучка можно пренебречь; различие направлений фазовых и групповых скоростей взаимодействующих волн за счет анизотропии приводит к необходимости рассмотрения эффектов, связанных с конечной апертурой пучков [1, 6]. Приближенные оценки роли указанных эффектов (в дальнейшем мы будем называть их для краткости «дисперсионным» и «апертурным» эффектами) в процессе генерации второй оптической гармоники были даны еще в работе [1], где показано, что их влияние можно охарактеризовать, сравнивая рабочую длину нелинейного кристалла с характерными пространственными масштабами. Этими масштабами являются

$$l_0 = 2\pi/\theta_0 k_1 \quad (1)$$

— так называемая когерентная длина расходящегося пучка и

$$l_\beta = ma/\beta \quad (2)$$

— апертурная длина. В формулах (1), (2)  $\beta$  — угол двулучепреломления нелинейного кристалла,  $\theta_0$  — расходимость пучка основного излуче-

ния,  $a$  — апертура пучка,  $k_1$  — волновое число основного излучения,  $m$  — численный коэффициент, зависящий от структуры пучка основного излучения. Если в качестве модели пучка взять плоскую волну, дифрагирующую на отверстии диаметром  $\pi a$ ,  $m = 1,77$  [6]. Соотношение между характерными пространственными масштабами  $l_\theta$  и  $\gamma^*$  и, следовательно, относительная роль дисперсионного и апертурного эффектов определяются свойствами пучка основного излучения и расположением в нем нелинейного кристалла.

Для твердотельных лазеров, обладающих сравнительно большой расходимостью в ближней зоне; существенно превышающей дифракционную ( $\theta_0 \sim 10-30'$ ), и широким пучком ( $a \simeq 1 \text{ см}$ ), и слабо анизотропных кристаллов типа КДР и АДР ( $\beta \sim 1,5-2^\circ$ )  $l_\beta > l_\theta$ , а при  $m \simeq 1$   $l_\beta \gg l_\theta$  (типичные оценки для рубинового лазера и кристалла КДР дают  $\simeq 7 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ,  $l_\beta = 20 \text{ см}$ ). Именно по этой причине в большинстве работ исследовался дисперсионный эффект. К настоящему времени этот эффект изучен достаточно подробно как теоретически, включая не только приближение заданного поля, но и учет обратной реакции гармоники на основное излучение [1, 3-5], так и экспериментально [2, 5, 7]. Вместе с тем, во многих важных случаях учет апертурного эффекта имеет первостепенное значение. Сюда относятся.

1) Генерация оптических гармоник в поле газовых лазеров. Даже при использовании в этом случае кристаллов КДР и АДР малая расходимость газового лазера приводит к тому, что апертурный эффект удается наблюдать раньше, чем дисперсионный [6].

Ближнее поле газового лазера, работающего в одномодовом режиме, достаточно близко к полю, которое имеет во френелевой зоне плоская волна, дифрагирующая на круговой апертуре. Поэтому, если  $l_d \simeq a^2/\lambda > l_\beta$ , апертурный эффект будет доминирующим\*. Сказанное приобретает особое значение в связи с недавно проведенными успешными опытами с новым высокоэффективным нелинейным кристаллом Тс [7] и газовым лазером на CO<sub>2</sub>; сильное двулучепреломление этого кристалла (в опытах, описанных в [7],  $l_\beta \simeq 2 \text{ см}$ ), по-видимому, является одной из главных причин, ограничивающих КПД соответствующего удвоителя частоты инфракрасного диапазона.

2) Коэффициент  $m \simeq 1$  лишь в пучках со сравнительно гладким фазовым фронтом. В сложных пучках следует ожидать существенного уменьшения  $m$  (см., например, [9], где обсуждается предельный случай пространственно некогерентного излучения), и поэтому в таких пучках соотношение между  $l_\theta$  и  $l_\beta$  может измениться. В особенности это относится к пучкам, имеющим нитевидную структуру. Из опубликованных к настоящему времени работ теории апертурного эффекта посвящены лишь [1] и [6]. В работе [1] содержится оценка порядка величины  $l_\beta$ . Значительным шагом вперед является работа [6], однако в ней авторы рассматривают частный вид нелинейного взаимодействия ( $\gamma_0(\omega) + \gamma_0(\omega) \rightarrow \gamma_e(2\omega)$ ), простой пучок (являющийся результатом дифракции плоской волны на круговой апертуре) и ограничиваются приближениями заданного поля и геометрической оптики. Несколько искусственна и методика расчета, использованная в [6]. Вместе с тем, как уже указывалось, непосредственный практический интерес представляют ограничения КПД оптических умножителей частоты за счет апертурного эффекта, а также рассмотрение пучков более сложной структуры (здесь уже приближения геометрической оптики часто недостаточно) и других типов нелинейных взаимодействий. Учет апертурного эффекта существенен и для теории дру-

\* Вместе с тем, во фраунгоферовой зоне рассматриваемого пучка, где  $\theta_0 \sim \lambda/a$ ,  $l_\theta/l_\beta \approx 1$  и необходим учет обоих эффектов (в этом случае четкое разграничение их становится затруднительным).

того нелинейного явления — параметрического усиления световых волн.

Ниже развивается регулярная методика, при которой исследование апертурного эффекта сводится к решению краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. При этом удается провести не только расчеты в приближении заданного поля для пучков довольно широкого класса, но и учесть обратную реакцию поля гармоники на поле основного излучения. Наконец, в Приложении указан наглядный геометрический метод исследования апертурного эффекта в пучках с прямоугольным амплитудным профилем и плоским фазовым фронтом.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПРОЦЕСС ГЕНЕРАЦИИ ОПТИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКАХ

Упрощенные (так называемые укороченные) уравнения, описывающие нелинейные волновые взаимодействия в ограниченных пучках, имеют вид [10, 11]

$$\frac{(s_n \mathbf{k}_n)}{s_n^2} (s_n \nabla) A_n + \frac{i}{2} \Delta_{\perp} A_n = F_n(A_m, A_l). \quad (3)$$

Здесь  $A_n$  — комплексные амплитуды взаимодействующих волн,  $\mathbf{k}_n$  — волновые и  $s_n$  — лучевые векторы,

$$s = \frac{d\omega/d\mathbf{k}}{|d\omega/d\mathbf{k}|},$$

$\Delta_{\perp}$  — лапласиан, соответствующий дифференцированию по направлениям, перпендикулярным лучу (соответствующее слагаемое описывает дифракцию, и в дальнейшем будем называть его дифракционным),  $F_n$  — нелинейные члены.

Эффекты, связанные с различием направлений волновых и лучевых векторов взаимодействующих волн, в анизотропной среде описываются первым членом в (3), т. е. апертурный эффект проявляется уже в приближении геометрической оптики. Во многих случаях (в частности, для гауссовых пучков газовых лазеров и в случае  $l < l_d$ ) приближение геометрической оптики вполне достаточно для построения теории апертурного эффекта; вместе с тем, для более сложных пучков (например, для пучков с малым радиусом пространственной корреляции) необходим одновременный учет и апертурного эффекта, и дифракции. Ниже мы остановимся на задачах обоих типов. Однако, прежде чем переходить к ним, конкретизируем уравнения (3); в качестве примера применим их к задаче о генерации второй гармоники для взаимодействия вида  $\gamma_0(\omega) + \gamma_0(\omega) = \gamma_e(2\omega)$ . Отмечая индексом «1» величины, относящиеся к волне основной частоты  $\omega$ , и индексом «2» — величины, относящиеся ко второй гармонике  $2\omega$ , направляя ось  $z$  по нормали к границе нелинейной среды и вдоль луча основной волны, получаем систему\*

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{1}{i2k_1} \left[ \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} \right] - i2\gamma_1 A_2 A_1^* \exp(i\Delta z); \quad (4a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{1}{i2k_2} \left[ \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \right] - \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} - i2\gamma_2 A_1^2 \exp(-i\Delta z). \quad (4b)$$

\* В настоящей статье рассматриваются только взаимодействия плоскополяризованных волн.

Здесь  $\beta = \hat{s}_1 \hat{s}_2 - \hat{k}_2 \hat{s}_2$ ;  $\Delta = 2\hat{k}_1 - \hat{k}_2$ ; ось  $x$  лежит в плоскости  $e_2$ ,  $k_2$ ,  $s_2$  (где  $e_2$  — вектор поляризации волны второй гармоники);

$$\gamma_1 = \frac{2\pi\omega^2}{c^2 k_1} (\hat{e}_1 \chi_{2\omega-\omega} \hat{e}_2 \hat{e}_1), \quad \gamma_2 = \frac{4\pi\omega^2}{c^2 k_2} (\hat{e}_2 \chi_{\omega+\omega} \hat{e}_1 \hat{e}_1); \quad (4в)$$

$\chi$  — тензор нелинейной восприимчивости.

В силу граничных условий  $\Delta r = \Delta z$ . В уравнениях (4) апертурный эффект описывается членом  $\beta \partial A_2 / \partial x$ , с которым связан «боковой снос» энергии второй гармоники относительно луча основной частоты. Уравнения (4) должны быть решены с граничными условиями, поставленными при  $z = 0$ :

$$A_1(x, y, 0) = A_{10}(x, y), \quad A_2(x, y, 0) = 0. \quad (5)$$

## •2. АПЕРТУРНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ КПД ОПТИЧЕСКОГО УДВОИТЕЛЯ ЧАСТОТЫ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда апертурный эффект проявляется наиболее отчетливо и оказывается доминирующим фактором, определяющим КПД оптического удвоителя частоты. Будем считать, что источником основного излучения является газовый лазер, работающий на нижнем типе колебаний оптического резонатора, и что нелинейный кристалл находится в ближней зоне излучения лазера ( $\theta_0 \approx 0$ ,  $l_\beta \rightarrow \infty$ ). Тогда, поскольку  $z < l_d$ , уравнения (4) принимают вид (дифракцией в рассматриваемой области можно пренебречь)

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + i2\gamma A_2 A_1^* = 0; \quad (6а)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} + i2\gamma A_1^2 = 0 \quad (6б)$$

(поскольку  $k_z = 2k_1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ).

Характер процесса генерации гармоники в этом случае зависит от соотношения между характерными длинами  $l_d$ ,  $l_\beta \approx a/\beta$  и так называемой характерной длиной нелинейного взаимодействия (см. [11])

$$l_\gamma \approx \gamma^{-1} |A_{10}|^{-1}. \quad (7)$$

Если  $l_\gamma > l_d$ ,  $l_\beta > l_d$  (так как  $z < l_d$ , то  $z < l_\gamma$ ,  $l_\beta$ ), генерация гармоники во френелевской зоне описывается уравнением (6б) (приближение заданного поля), в котором  $\beta \approx 0$ . Соответствующий расчет тривиален. При  $l_\beta < l_d$ ,  $l_\gamma > l_d$  можно ограничиться анализом уравнения (6б). Результаты такого анализа приводят к тем же результатам, что и расчеты Бойда и др. [6], проведенные, правда, иным методом. При  $l_d < l_\beta$ ,  $l_d > l_\gamma$  необходимо рассматривать систему (6), однако в ней можно положить  $\beta \approx 0$ ; соответствующий анализ изложен, например, в [11]. Наконец, если одновременно  $l_\gamma < l_d$ ,  $l_\beta < l_d$ , необходимо рассмотрение полной системы (6). Переходя к действительным амплитудам и фазам ( $A_n \rightarrow A_n \exp(i\varphi_n)/2$ ) и полагая, что на расстояниях  $\sim l_\gamma$  фазы основной волны и второй гармоники удовлетворяют соотношению  $2\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$  (это соотношение можно считать хорошо выполняющимся, если фазовый фронт волны основного излучения достаточно близок к плоскому), вместо (6) получаем уравнения для действительных амплитуд:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \gamma A_1 A_2 = 0; \quad (8a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} - \gamma A_1^2 = 0. \quad (8b)$$

Подставляя  $A_1^2$  из (8б) в (8а), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_2}{\partial z} + \gamma A_2^2 \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_2}{\partial z} + \gamma A_2^2 \right) = 0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \gamma A_2^2 = f(x - \beta z). \quad (10)$$

Вид функции  $f$  определяется из граничных условий, поставленных при  $z = 0$ . Если использовать граничные условия (5),

$$f(x - \beta z) = \gamma A_{10}^2 (x - \beta z). \quad (11)$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения Рикатти (10). Задавая начальный профиль волны основного излучения в виде

$$A_{10} = A_0 / (1 + \alpha^2 x^2) \quad (12)$$

(зависимость  $A_{10}$  от координаты  $y$  будем считать ступенчатой:  $A_{10}$  не зависит от  $y$  при  $|y| < b/2$  и  $A_{10}=0$  при  $|y| > b/2$ , поэтому в дальнейшем координату  $y$  в формулах опускаем), можно рассчитать амплитудные профили основной волны и волны второй гармоники в произвольном сечении нелинейной среды:

$$A_1(x, z) = A_0 \{ (1 + \alpha^2 x^2)^{1/2} [1 + \alpha^2 (x - \beta z)^2]^{1/2} [\operatorname{ch} \xi + \alpha^2 x \beta \operatorname{sh} \xi (\gamma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{-1/2}] \}^{-1}; \quad (13)$$

$$A_2(x, z) = \{ \alpha^2 \beta^2 z \operatorname{ch} \xi + [(\gamma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{1/2} - \alpha^4 \beta^2 x (x - \beta z) (\gamma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{-1/2}] \operatorname{sh} \xi \} \{ \gamma [1 + \alpha^2 (x - \beta z)^2] [\operatorname{ch} \xi + \alpha^2 \beta x (\gamma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{-1/2} \operatorname{sh} \xi] \}^{-1}, \quad (14)$$

где

$$\xi = \frac{(\gamma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{1/2}}{\alpha \beta} \{ \operatorname{arctg} (\alpha x) - \operatorname{arctg} [\alpha (x - \beta z)] \}.$$

Из (13), (14) видно, что поведение амплитуд основного излучения и второй гармоники определяется соотношением характерных длин  $l_\gamma$  и  $l_\beta$  ( $l_\gamma \simeq (\gamma A_0)^{-1}$ ,  $l_\beta = (\alpha \beta)^{-1}$ ). При  $l_\beta \gg l_\gamma$  ( $\beta \simeq 0$ )

$$A_1(x, z) = \frac{A_0}{1 + \alpha^2 x^2} \operatorname{sech} \frac{z}{l_\gamma (1 + \alpha^2 x^2)}; \quad (15a)$$

$$A_2(x, z) = \frac{A_0}{1 + \alpha^2 x^2} \operatorname{th} \frac{z}{l_\gamma (1 + \alpha^2 x^2)}, \quad (15b)$$

т. е. в отсутствие апертурного эффекта оси пучков основного излучения и гармоники совпадают, а изменение плотности мощности вдоль лучей происходит точно так же, как в плоской волне (ср. [11]). Однако изменение интегральной мощности гармоники и основного излучения уже отлично от случая плоской волны (следует помнить, разумеется, что речь идет о приближении геометрической оптики).

При  $\beta \neq 0$  профили взаимодействующих волн с ростом  $z$  модифицируются. Рассмотрим сначала случай  $l_\beta \ll l_1$  (коэффициент преобразования основного излучения в гармонику мал; приближение заданного поля). Тогда

$$A_2 = \frac{1}{2} \gamma A_0^2 l_\beta \left\{ \frac{\alpha x}{1 + \alpha^2 x^2} - \frac{\alpha x - z/l_\beta}{1 + (\alpha x - z/l_\beta)^2} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg}(\alpha x) - \operatorname{arctg}(\alpha x - z/l_\beta) \right\}. \quad (16)$$

В общем случае  $l_1 \sim l_\beta$  надо пользоваться формулами (13), (14); соответствующие графики приведены на рис. 1а, б (здесь плотности мощности  $p_{1,2} = c n A_{1,2}^2 / 8\pi$ ,  $n$ —показатель преломления нелинейной среды).

Из рис. 1 видно, что наряду со смещением максимума плотности мощности второй гармоники вдоль оси  $z$  при не слишком малых значениях параметра  $C = (l_\beta/l_1)^2$  наблюдается заметный сдвиг максимума мощности основного излучения, происходящий в противоположном

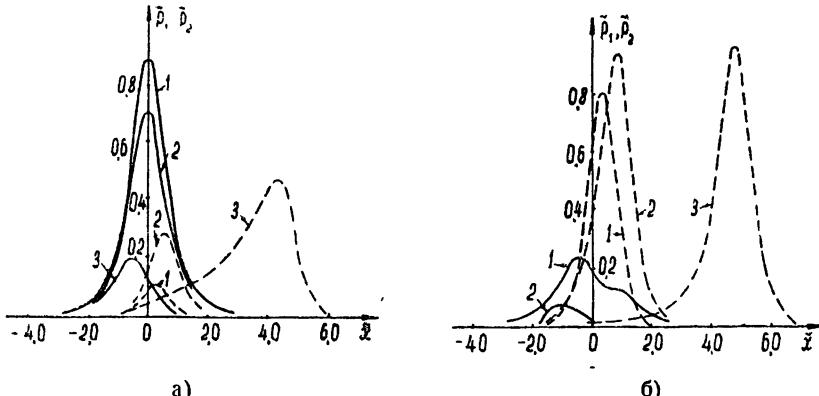


Рис. 1. Профили пучков основного излучения и второй гармоники для различных сечений двоякотреплеляющей нелинейной среды. На рисунке приведены графики зависимости относительной плотности мощности основного излучения  $\tilde{p}_1 = p_1/p_{10}$  (сплошные кривые) и второй гармоники  $\tilde{p}_2 = p_2/p_{10}$  (пунктирные кривые) от приведенной координаты  $\tilde{x} = \alpha x$ . Параметрами кривых являются  $C = (l_\beta/l_1)^2$  и  $\tilde{z} = l_\beta^{-1}$ . Для рис. 1 а, б соответственно  $C = 0,5$  и  $C = 10$ . Кривые рис. 1 а, б построены для значений

$$1-\tilde{z}=0,5, \quad 2-\tilde{z}=1,0, \quad 3-\tilde{z}=5.$$

направлении. Этот эффект связан с обратной реакцией гармоники на волну основного излучения. (В пределе, при  $C \rightarrow 0$ ,  $l_1 \rightarrow \infty$ , результаты приведенного расчета содержат как частный случай результаты работы [6].) С ростом  $z$  ширина пучка гармоники увеличивается, а ширина пучка основного излучения уменьшается. Графики зависимости положения максимумов пучков от координаты  $z$  приведены на рис. 2. На рис. 3 представлены графики зависимости КПД оптического удвоятеля частоты в зависимости от приведенной длины нелинейного кристалла (этот график получен путем интегрирования кривых рис. 1). Из графиков рис. 3 следует, что максимальное значение КПД увеличивается с ростом параметра  $C$ . Отметим интересную возможность уменьшения роли апертурного эффекта при генерации гармоник—генерацию гармо-

ник в резонаторе типа Фабри—Перо<sup>4</sup> (см. рис. 4). Из рис. 4 видно, что лучевые векторы необыкновенных прямой и отраженной от зеркала волн гармоники антипараллельны; в связи с этим апертурный эффект в резонаторе важен только на одном проходе.

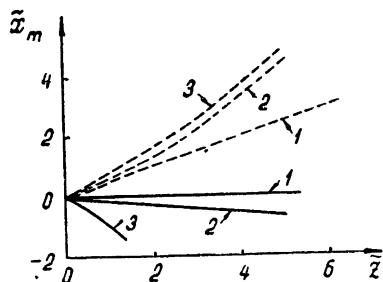


Рис. 2. Зависимость положения приведенных максимумов пучков основного излучения (сплошные кривые) и второй гармоники (пунктирные кривые)  $\tilde{x}_m = \alpha x_m$  от приведенной координаты  $\tilde{z} = l\beta^{-1}$ . Кривые соответствуют  $1 - C=0,5$ ;  $2 - C=1,0$ ;  $3 - C=10$ .

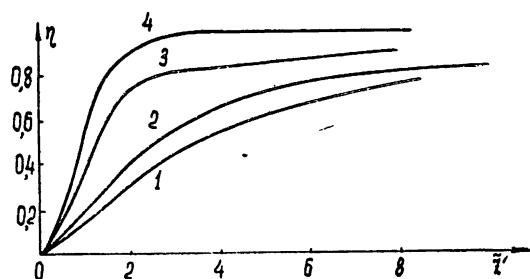


Рис. 3. Зависимость КПД оптического удвоителя частоты  $\eta = P_2/P_1$  от приведенной длины  $\tilde{z}' = l(l_\gamma^{-1} + l_\beta^{-1})$ . Параметром кривых является  $C = (l_\beta/l_\gamma)^2$ :  
 $1 - C=0,5$ ;  $2 - C=1,0$ ,  $3 - C=10$ . Кривая 4 соответствует преобразованию плоской волны основного излучения.

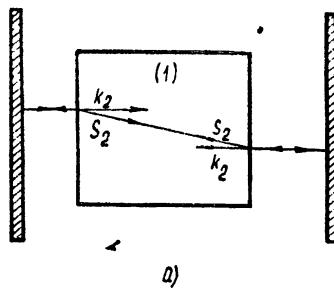
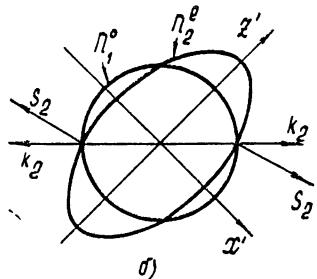


Рис. 4. Распространение необыкновенных волн второй гармоники в нелинейном кристалле (1) типа КДР, помещенном в резонатор Фабри—Перо (рис. 4а). На рис. 4б изображено сечение поверхностей показателей преломления обычной основной волны ( $n_1^0$ ) и необыкновенной волны гармоники ( $n_2^\theta$ ) в кристалле;  $z'$ ,  $x'$ —оптические оси кристалла.



### 3. АПЕРТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СЛОЖНЫХ ПУЧКАХ; ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДУЛЯЦИИ ОСНОВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ АПЕРТУРНОЙ ДЛИНЫ

Для пучков с более сложными законами изменения амплитуд и фаз, чем те, которые рассмотрены в разделе 2, расчет влияния апертурного эффекта на генерацию второй гармоники, аналогичный предыдущему, провести не удается. Однако особенности апертурного эффекта в полях сложных пучков могут быть изучены при  $l_3 < l_\gamma$ . В этом случае

\* Генерация гармоники плоскими волнами в одномерном резонаторе Фабри—Перо рассмотрена в [13].

$A_1(x, y, z) = A_{10}(x, y)$  — заданное поле, и достаточно исходить из анализа уравнения (6б). Проведенный далее расчет будет справедлив, когда двумерные взаимодействия (см. [10]) в полях сложных пучков дают незначительный вклад в мощность второй гармоники ( $l_\beta < l_x$ ).

Учтем пространственную ограниченность пучка, представив комплексную амплитуду  $A$  на границе нелинейной среды (5) в виде

$$A_{10}^2(x) = \int_{-a/2}^{a/2} A_{10}^2(\xi) \delta(x - \xi) d\xi, \quad (17)$$

где интервал  $[-a/2, a/2]$  на оси  $x$  определяет область значений  $A_{10}(x)$ , отличных от нуля; зависимость  $A_{10}$  от  $y$ , как и в (12), принята ступенчатой и для простоты записи опять опускается.

Решая (6б), для плотности мощности гармоники получим

$$p_2(x) = 16\gamma^2 \beta^{-2} \left( \frac{cn}{8\pi} \right) \int_{x-\beta l}^x dz_2 dz_1 \int_{-a/2}^{a/2} A_{10}^2(\xi_2) \times \\ \times A_{10}^2(\xi_1) \delta(z_2 - \xi_2) \delta(z_1 - \xi_1) d\xi_2 d\xi_1. \quad (18)$$

С помощью (18) рассмотрим генерацию гармоники параллельным пучком ( $\theta_0 = 0$ ,  $l_\theta \rightarrow \infty$ ).

Из (18) можно получить, что при  $\beta l \ll a$

$$p_2(x) = \gamma^2 \left( \frac{8\pi}{cn} \right) p_1^2(x) l^2. \quad (19)$$

Таким образом, зависимость  $p_2$  от  $l$  такая же, как для плоских волн [11]. Если  $l$  удовлетворяет условию  $\beta l \gg a$ , в (18) выделяются три области интегрирования (см. рис. 5а): 1)  $-a/2 \leq x \leq a/2$ , 2)  $a/2 \leq x \leq \beta l - a/2$

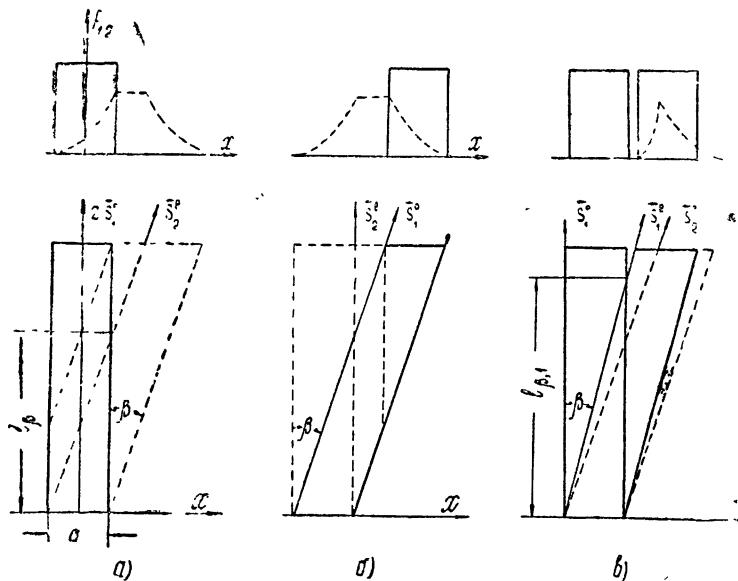


Рис. 5. Иллюстрации к геометрическому методу расчета мощности второй гармоники при различных типах взаимодействия:

а)  $\gamma_0(\omega) + \gamma_0(\omega) + \gamma_e(2\omega)$ , б)  $\gamma_0(\omega) + \gamma_e(\omega) + \gamma_e(2\omega)$ , в)  $\gamma_0(\omega) + \gamma_e(\omega) + \gamma_e(2\omega)$ . На нижних рисунках представлено взаимодействие основного излучения и второй гармоники. На верхних—распределение плотности мощностей основного излучения  $p_1$  (сплошные кривые) и второй гармоники  $p_2$  (пунктирные кривые) в произвольном масштабе в сечении  $z > l_\beta$ .

и 3)  $\beta l - a/2 \leq x \leq \beta l + a/2$ . Для плотности мощности гармоники во всех трех областях можно написать

$$p_2^{(i)}(x, l) = 16 \gamma^2 \beta^{-2} \left( \frac{cn}{8\pi} \right) \int_{x_h}^{x_b} A_{10}^2(z_2) A_{10}^{*2}(z_1) dz_2 dz_1. \quad (20)$$

Здесь  $i$  — номер области; для области 1  $x_h = -a/2$ ,  $x_b = x$ ; для области 3  $x_h = x - \beta l$ ,  $x_b = a/2$ . В области 2 длина взаимодействия волн основного излучения и второй гармоники наибольшая ( $x_b = -x_h = a/2$ ), причем всегда распределение  $p_2^{(2)}$  по  $x$  однородное. Для вычисления  $p_2^{(i)}$  необходимо знать конкретный вид пространственной модуляции пучка.

Рассмотрим сначала генерацию гармоники амплитудно-модулированным пучком\*

$$A_{10}(x) = \frac{1}{2} A_0 \cos(q_x x). \quad (21)$$

В этом случае в области 2 плотность мощности гармоники

$$p_2^{(2)}(x) = \frac{1}{4} \gamma^2 \beta^{-2} \left( \frac{8\pi}{cn} \right) p_0^2 a^2 \left[ 1 + \frac{\sin(q_x a)}{q_x a} \right]^2. \quad (22)$$

Полная же мощность гармоники  $P_2$  на длинах  $\beta l \gg a$  (здесь можно пренебречь незначительным вкладом в  $P_2$  областей 1 и 3, равна

$$P_2(l > a/\beta) = \frac{1}{4} \gamma^2 \beta^{-1} \left( \frac{8\pi}{cn} \right) p_0^2 a^2 b l \left[ 1 + \frac{\sin(q_x a)}{q_x a} \right]^2. \quad (23)$$

При  $\beta l \ll a$ , пользуясь (19), для мощности гармоники получим

$$P_2 \left( l < \frac{a}{\beta} \right) = \frac{1}{8} \gamma^2 \left( \frac{8\pi}{cn} \right) p_0^2 a b l^2 \left[ 3 + 4 \frac{\sin(q_x a)}{q_x a} + \frac{\sin(2q_x a)}{2q_x a} \right]. \quad (24)$$

Сравнивая (23) с (24), видим, что при  $\beta l \ll a$  мощность гармоники  $P_2 \sim l^2$ , а при  $\beta l \gg a$   $P_2 \sim l'_\beta$ , где

$$l'_\beta = 2 \frac{a}{\beta} \left[ 1 + \frac{\sin(q_x a)}{q_x a} \right]^2 \left\{ 3 + 4 \frac{\sin(q_x a)}{q_x a} + \frac{\sin(2q_x a)}{2q_x a} \right\}^{-1} \quad (25)$$

— апертурная длина пучка с амплитудной модуляцией (21). Для пучков с однородной амплитудой ( $q_x = 0$ ) апертурная длина  $l_\beta = a/\beta$ . При  $q_x a \gg 1$   $l'_\beta \approx 2a/3\beta$ , т. е.  $m = 2/3$ . Таким образом, пространственная модуляция амплитуды пучка (нитевидная структура пучка) приводит к уменьшению апертурной длины  $l_\beta$ .

Для иллюстрации влияния фазовой модуляции пучка на апертурную длину возьмем  $A_{10}$  в виде

$$A_{10} = \frac{1}{2} A_0 \exp[i\mu \cos(q_x)], \quad (26)$$

\* Представление лазерного пучка в виде (21) возможно с большой степенью точности в ближней зоне излучения лазера с конфокальным резонатором [13]. Здесь  $q_x$  определяется параметрами резонатора и поперечным индексом излучения.

где  $\mu$  — индекс пространственной модуляции пучка,  $2\pi/q$  — период модуляции фазы. Подстановка (26) в (20) дает

$$p_2^{(l)}(x) = \gamma^2 p_0^2 \beta^{-2} \left( \frac{8\pi}{cn} \right) (x_b - x_h)^2 \{ F_1^2(x_b, x_h, q, \mu) + F_2^2(x_b, x_h, q, \mu) \},$$

$$F_1 = J_0(2\mu) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(2\mu) \frac{\sin[nq(x_b - x_h)]}{nq(x_b - x_h)} \times$$

$$\times \cos[nq(x_b + x_h)], \quad (27)$$

$$F_2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(2\mu) \frac{\sin[(n + 1/2)q(x_b - x_h)]}{[(n + 1/2)q(x_b - x_h)]} \times$$

$$\times \cos[(n + 1/2)q(x_b + x_h)],$$

где  $J_n(2\mu)$  — функции Бесселя.

Если в пределах ширины пучка укладывается несколько периодов модуляции фазы, то при  $qa = 2\pi n \gg 1$  в области 2

$$p_2^{(2)}(x) = \gamma^2 p_0^2 \beta^{-2} \left( \frac{8\pi}{cn} \right) (x_b - x_h) J_0^2(2\mu). \quad (28)$$

В тех случаях, когда  $\mu = \mu_j$  является корнем уравнения  $J_0(2\mu_j) = 0$ ,  $p_2^{(2)} = 0$ . При рассмотренных выше условиях фазовой модуляции пучка вклад в мощность гармоники дают только области 1 и 3, причем мощность гармоники в этих областях не зависит от длины  $l$  (см. рис. 5а). Таким образом, апертурный эффект при наличии модуляции фронта пучка основного излучения приводит даже в заданном поле к насыщению КПД преобразования во вторую гармонику. Фактически КПД преобразования в данном случае будет определяться длиной  $l' = a/3$ . Такой вывод справедлив, когда вклад в мощность гармоники двумерных взаимодействий мал ( $l < l_d$ ).

Заметим, наконец, что, применив методику, развитую в настоящей статье, можно оценить относительную роль дисперсионного и апертурного эффектов. Действительно, пользуясь уравнением (66), рассмотрим генерацию второй гармоники в приближении заданного поля сферической волной с гауссовским распределением амплитуды

$$A_{10}(x) = A_0 \exp \left( -\frac{x^2}{a^2} + i \frac{k_1}{2R} x^2 \right), \quad (29)$$

где  $R$  — расстояние от фазового центра излучения. Тогда для комплексной амплитуды гармоники получим

$$A_2 = -i2\gamma A_0^2 \int_0^l \exp \left[ -2 \left( \frac{1}{a^2} + i \frac{k_1}{2R} \right) (x - \beta z)^2 \right] dz. \quad (30)$$

Если в (30) выполняются условия

$$l < a/\beta = l_3; \quad (31a)$$

$$k_1 \beta^2 l^2 / 2R \ll 1 \text{ или } l < l_3 \sqrt{\theta_a / \theta_0} \quad (31b)$$

(где  $\theta_0$  — расходимость пучка основного излучения, равная  $a/R$ ), то плотность мощности гармоники

$$p_2(x, l) = \gamma^2 \left( \frac{8\pi}{cn} \right) p_1^2 \frac{\sin^2(k_1 \beta l)}{(k_1 \beta l)^2} l^2 \quad (32)$$

(где  $\theta = x/R$ ) имеет такую же зависимость от расстройки, как в теории плоских волн [1]. Можно показать, что условие (31б) характеризует отсутствие сноса энергии для элементарной лучевой трубы, в пределах угловой расходимости которой  $2k_1 - k_2 \approx \text{const}$ . При невыполнении одного из условий (31) на процесс генерации гармоники, кроме дисперсионного эффекта, влияет также и апертурный эффект.

#### 4. ОБ АПЕРТУРНЫХ ЭФФЕКТАХ В ПОЛЕ НЕЛАЗЕРНЫХ ИСТОЧНИКОВ. ЭФФЕКТЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕКОГЕРЕНТНОСТИ

Перейдем к рассмотрению генерации второй гармоники обычным (нелазерным) излучением и будем учитывать только пространственную некогерентность излучения\*.

Тогда для случайной комплексной амплитуды  $A_{10}(x, y)$  (5) нелазерного излучения можно принять однородное и изотропное гауссовское распределение, функция корреляции которого

$$R_0(x, y) = 2 \operatorname{Re} [\bar{A}_{10}(x_1 + x, y_1 + y) A_{10}^*(x_1, y_1)]. \quad (33)$$

В поле нелазерных источников влияние апертурного эффекта на процесс генерации второй гармоники удается изучить только в приближении заданного поля ( $l_{\text{кор}}^{(\text{пр})} < l_1, l_2 < l_1$ ). Решения параболических уравнений (4) в названном приближении (здесь  $\gamma_1 = 0$ ) для амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  приводят к значениям

$$A_1(x, y, l) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_{10}(x - \xi, y - \eta) G_1(\xi, \eta, l) d\xi d\eta; \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} A_2(x, y, l) = -i 2 \gamma_2 \exp(\lambda l) \int_0^l \exp[-(\lambda - i\Delta) z] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(\mu \xi) A_1^*(x - \xi, y - \eta, l - z) G_2(\xi, \eta, z) d\xi d\eta dz, \end{aligned} \quad (34b)$$

где

$$G_n(\xi, \eta, z) = i \frac{k_n}{2\pi z} \exp \left[ -i \frac{k_n}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right], \quad (35)$$

$$\lambda = -i \frac{1}{2} k_2 \beta^2, \quad \mu = ik_2 \beta.$$

С помощью (34б) найдем пространственную функцию корреляции второй гармоники:

$$\begin{aligned} R_1(x, y, l) = 8 \gamma_2^2 \operatorname{Re} \left\{ \iint_0^l \exp[-(\lambda - i\Delta)(z_2 - z_1)] \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp[\mu(\xi_2 - \xi_1)] G_1(\xi_1, \eta_1, z_1) G_2^*(\xi_1, \eta_1, z_1) \right. \\ \left. \times \dots \int \exp[\mu(\xi_2 - \xi_1)] G_1(\xi_2, \eta_2, z_2) G_2^*(\xi_2, \eta_2, z_2) \right\} \times \end{aligned} \quad (36)$$

\* При строгом рассмотрении генерации гармоники нелазерным излучением кроме пространственной некогерентности излучения следует принимать во внимание и временную некогерентность. Однако, если длина нелинейной среды  $l < l_{\text{кор}}^{(\text{пр})} = \tau_k u_2 u_1 / |u_2 - u_1|$ , где  $\tau_k$  — время корреляции нелазерного излучения и  $u_i$  — групповые скорости волн, то временной некогерентностью можно пренебречь [9]. Условие  $l < l_{\text{кор}}^{(\text{пр})}$  в настоящей работе считаем выполненным.

$$\times A_1^2(x_1 + x - \xi_2, y_1 + y - \eta_2, z_2) A_1^2(x_1 - \xi_1, y_1 - \eta_1, z_1) \times \\ \times d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2 dz_1 dz_2.$$

Поскольку случайная амплитуда  $A_{10}(x, y)$  является гауссовским процессом, то  $A_1(x, y, l)$  (см. (34а)) — также гауссовский процесс (как сумма случайных величин, распределенных по гауссовскому закону).

Можно показать, что (см. [14])

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\overline{A_1^2(x_2, y_2, z_2) A_1^{*2}(x_1, y_1, z_1)}] = \\ = \frac{1}{2} R_1^2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2, z_1), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$R_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2, z_1) = 2 \operatorname{Re} [\overline{A_1(x_2, y_2, z_2) A_1^*(x_1, y_1, z_1)}].$$

Таким образом, для функции корреляции  $R_2$  (36) имеем

$$\begin{aligned} R_2(x, y, l) = 4 \gamma_2^2 \int_0^l \int \exp [-(\omega - i\Delta)(z_2 - z_1)] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp [\mu(\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)})] G(\xi_2, \eta_2, z_2) G^*(\xi_1, \eta_1, z_1) \times \\ \times R_0(x + \xi_1^{(1)} + \xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)}; y + \eta_1^{(1)} + \eta_1^{(2)} - \eta_2^{(1)} - \eta_2^{(2)}) \times \\ \times R_0(x + \xi_1^{(1)} + \xi_1^{(3)} - \xi_2^{(1)} - \xi_2^{(3)}; y + \eta_1^{(1)} + \eta_1^{(3)} - \eta_2^{(1)} - \eta_2^{(3)}) \times \\ \times d\xi d\eta dz_1 dz_2, \end{aligned} \quad (38)$$

где введена символическая запись

$$\begin{aligned} G(\xi_i, \eta_i, z_i) = G_2(\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(1)}, l - z_i) G_1(\xi_i^{(2)}, \eta_i^{(2)}, z_i) \times \\ \times G_1(\xi_i^{(3)}, h_i^{(3)}, z_i), \end{aligned} \quad (39)$$

$$d\xi = d\xi_1 d\xi_2, \quad d\xi_i = d\xi_i^{(1)} d\xi_i^{(2)} d\xi_i^{(3)}.$$

Рассмотрим распределение пространственного спектра гармоники  $S_2(k_{2x}, k_{2y})$ . Для этого применим к (38) теорему Винера—Хинчина. Опуская громоздкие выкладки, запишем окончательное выражение для  $S_2(k_{2x}, k_{2y})$  при  $\Delta = 0$  ( $2k_1 = k_2, \gamma_2 = \gamma$ ):

$$\begin{aligned} S_2(k_{2x}, k_{2y}) = \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int S_{10}(k'_{1x}, k'_{1y}) S_{10}(k''_{1x}, k''_{1y}) \times \\ \times \frac{\sin^2(\phi l/2)}{(\phi/2)^2} \delta(k_{2x} - k'_{1x} - k''_{1x}) \delta(k_{2y} - k'_{1y} - k''_{1y}) \times \\ \times dk'_{1x} dk''_{1x} dk'_{1y} dk''_{1y}. \end{aligned} \quad (40a)$$

Здесь  $S_{10}(k'_{1x}, k'_{1y})$  — функция распределения пространственного спектра нелазерного излучения на границе нелинейной среды и

$$\psi = -\beta(k'_{1x} + k''_{1x}) + [(k'_{1x} - k''_{1x})^2 + (k'_{1y} - k''_{1y})^2] (2k_2)^{-1}. \quad (40b)$$

Из (40) следует, что существенный вклад в спектр  $S_2(k_{2x}, k_{2y})$  могут дать волны, проекции волновых векторов которых удовлетворяют условиям

$$k_{2x} = k'_{1x} + k''_{1x}, \quad k_{2y} = k'_{1y} + k''_{1y}; \quad (41a)$$

$$2\beta k_2 (k'_{1x} + k''_{1x}) = (k'_{1x} - k''_{1x})^2 + (k'_{1y} - k''_{1y})^2, \quad (41b)$$

причем (41б) является соотношением между проекциями волновых векторов на ось  $z$  (ср. с двумерным случаем [10]). Поскольку условие (41б) выполняется лишь для положительных  $k_{2r}$ , то трехмерные синхронные взаимодействия ( $\mathbf{k}_2^2 = \mathbf{k}_1^{(1,0)} + \mathbf{k}_1^{(2,0)}$ ,  $\mathbf{k}_1^{(1,0)} \neq \mathbf{k}_1^{(2,0)}$ ) могут происходить только по одну сторону от плоскости одномерного синхронизма. Трехмерные взаимодействия приводят к несимметричному распределению  $S_2(k_{2x}, k_{2y})$  относительно  $k_{2x} = 0$ .

Условия, при которых в (40а) необходим учет апертурного эффекта и эффекта, связанного с дифракционными членами в (4), имеют соответственно вид

$$\beta k_{1x} l > 2, \quad k_{1x}^2 l / k_2 > 4. \quad (42)$$

Ширина пространственного спектра при гауссовском распределении  $k_{1x} = k_{1y} = 2r_0^{-1}$  ( $r_0$  — радиус пространственной когерентности нелазерного излучения), в связи с чем (42) можно переписать следующим образом:

$$l > l_{\text{кор}}^{(\text{пп})} = r_0 \beta^{-1}, \quad l > l_{\alpha} = k_2 r_0^2. \quad (43)$$

Средняя плотность мощности второй гармоники  $\bar{p}_2(l) = cnR_2(0, 0, l)/4\pi$  может быть найдена из выражения

$$\bar{p}_2(l) = \frac{32\pi}{cn} \gamma^2 (\bar{p}_1)^2 \int_0^l \frac{l-z}{1+z^2/l_{\alpha}^2} \exp \left[ -z^2/2(l_{\text{кор}}^{(\text{пп})})^2 \right] dz, \quad (44)$$

полученного из (40) для гауссовского распределения пространственного спектра

$$S_{10}(k_{1x}, k_{1y}) = \frac{4}{cn} r_0^2 \bar{p}_1 \exp \left[ -\frac{1}{4} r_0^2 (k_{1x}^2 + k_{1y}^2) \right]. \quad (45)$$

Проанализируем случай возможных соотношений между длинами  $l_{\text{кор}}^{(\text{пп})}$ ,  $l_{\alpha}$  и  $l$  в (44). Если  $l < l_{\text{кор}}^{(\text{пп})}$  и  $l < l_{\alpha}$ , то

$$\bar{p}_2(l) = \frac{16\pi}{cn} \gamma^2 (\bar{p}_1)^2 l^2, \quad (46)$$

т. е.  $\bar{p}_2$  зависит от  $l$  аналогично случаю плоских волн. При  $l > l_{\text{кор}}^{(\text{пп})}$ ,  $l < l_{\alpha}$

$$\bar{p}_2(l) = \frac{16\pi}{cn} \sqrt{2\pi} \gamma^2 (\bar{p}_1)^2 l l_{\text{кор}}^{(\text{пп})} \quad (47)$$

и процесс генерации гармоники носит характер нелинейного некогерентного рассеяния (ср. [4, 14]), где некогерентное рассеяние от немонохроматического во времени основного излучения подробно рассмотрено с учетом расстройки  $\Delta$ ). В случае  $l < l_{\text{кор}}^{(\text{пп})}$ ,  $l > l_{\alpha}$

$$\bar{p}_2(l) = \frac{16\pi^3}{cn} \gamma^2 (\bar{p}_1)^2 l l_{\alpha}. \quad (48)$$

Наконец, когда  $l > l_{\text{кор}}^{(\text{пр})} \simeq l_d$ , средняя плотность мощности гармоники

$$\bar{p}_2(l) = \frac{16\pi^2}{c n} \gamma^2 (\bar{p}_1)^2 l l_d [1 - \Phi(l_d / V\sqrt{2} l_{\text{кор}}^{(\text{пр})})] \times \\ \times \exp [l_d^2 / 2 (l_{\text{кор}}^{(\text{пр})})^2]. \quad (49)$$

Из (47) — (49), таким образом, следует, что при длинах  $l$ , превышающих когерентную  $l_{\text{кор}}^{(\text{пр})}$  и дифракционную  $l_d$ , зависимость мощности второй гармоники от  $l$  изменяется по сравнению со случаем генерации гармоники плоскими монохроматическими волнами. Изменяется также и характер процесса генерации гармоники: он становится некогерентным. Следует отметить, что при некогерентном рассеянии мощность гармоники оказывается пропорциональной длине  $l$  даже при наличии расстройки  $\Delta \neq 0$ .

Развитая в настоящей статье методика решения задач о взаимодействии пучков в нелинейных анизотропных средах (на примере генерации второй гармоники) позволила корректно исследовать влияние на нелинейный процесс конечной апертуры пучков. Результаты проведенного расчета показывают, что влияние апертурного эффекта в процессе генерации второй гармоники сказывается уже при малых КПД преобразования (расчет в приближении заданного поля). При этом изменяется скорость нарастания мощности гармоники  $P_2 \sim l_{\beta}$ , где  $l_{\beta}$  — апертурная длина (в отсутствие апертурного эффекта  $P_2 \sim l^2$ ). Значение апертурной длины  $l_{\beta}$  меньше для пучков с пространственной модуляцией амплитуды и фазы, чем для пучков с плоским фазовым фронтом и равномерным распределением амплитуды (простые пучки). В связи с этим роль апертурного эффекта при генерации гармоники в сложных пучках возрастает. Для простых пучков влияние апертурного эффекта в процессе генерации гармоники во френелевой зоне можно исследовать на основе наглядного геометрического метода, не требующего решения дифференциальных уравнений. При больших КПД преобразования апертурный эффект приводит к насыщению оптического удвоителя частоты на уровне, существенно меньшем 100 %. В случае генерации второй гармоники нелазерным излучением на мощность гармоники влияет как анизотропия (угол  $\beta$ ), так и пространственная некогерентность основного излучения. Здесь наряду с изменением зависимости мощности гармоники  $P_2$  от длины  $l$  ( $P_2 \sim l$ ) происходит и изменение характера генерации гармоники: процесс генерации гармоники становится некогерентным.

В заключение отметим, что изложенная в настоящей статье методика оказывается применимой и для исследования взаимодействия световых пучков в параметрических процессах [15].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Геометрический метод анализа апертурного эффекта в простых пучках

В приближении геометрической оптики генерация гармоники происходит вдоль ее лучей (см. (3)). Это обстоятельство можно положить в основу геометрического метода расчета мощности гармоники в некотором сечении кристалла. Действительно, зная геометрию взаимного расположения пучков основного излучения и гармоники, можно найти длину каждого луча гармоники, затем вычислить ее плотность мощности  $p_2$  на каждом из лучей и, наконец, получив распределение  $p_2$  в поперечном сечении пучка, можно вычислить полную мощность всего пучка гармоники  $P_2$ . Рассмотрим этим способом апертурные эффекты в простых пучках (основной пучок имеет плоский фазовый фронт и равномерное распределение амплитуды по сечению) при различных типах взаимодействия.

1. *Взаимодействие*  $\gamma_0(\omega) + \gamma_0(\omega) \rightarrow \gamma_e(2\omega)$ . Относительное расположение пучков основного излучения и гармоники показано на рис. 5а. Рассмотрим сечение кристалла  $l \ll l_\beta = a/\beta$ . Тогда в области  $-a/2 < x < -a/2 + \beta l$  длина исобыкновенного луча, имеющего на входе кристалла координату  $x$ , равна  $l(x) = (x + a/2)/\beta$ , плотность мощности второй гармоники на этом луче

$$p_2(x) = \frac{8\pi}{cn} \gamma^2 p_1^2 (x/\beta)^2,$$

а полная мощность гармоники в этой области

$$P_2^{(1)} = \int_{-a/2}^{-a/2 + \beta l} p_2(x) dx = \frac{8\pi}{3cn} \gamma^2 P_1^2 a^{-3} l^3 \beta.$$

В смежной области  $-a/2 + \beta l < x < a/2$  длина всех лучей гармоники одинакова и равна  $l$ . Здесь

$$p_2(x) = \frac{8\pi}{cn} \gamma^2 p_1^2 l^2, \quad P_2^{(2)} = \left( \frac{8\pi}{cn} \right) p_1^2 l^2 (a - \beta l) \gamma^2.$$

Наконец, в области  $a/2 < x < a/2 + \beta l$  генерация идет так же, как и в области  $-a/2 < x < -a/2 + \beta l$ . Таким образом, найдено распределение плотности мощности гармоники по сечению  $z = l$ . Сложив далее мощности отдельных областей, получим полную мощность гармоники

$$P_2 = \frac{8\pi}{cn} \gamma^2 P_1^2 a^{-2} l^2 (1 - l/3 l_\beta), \quad (50)$$

где  $P_1$  — полная мощность основного излучения. При  $l \ll l_\beta$  мощность гармоники растет  $\sim l^2$ , и с увеличением  $l$  темп роста замедляется.

Пусть теперь длина кристалла больше апертурной ( $l \gg l_\beta$ ). Здесь также можно выделить три области генерации гармоники 1)  $-a/2 < x < a/2$ . В этом случае длина луча гармоники  $l(x) = x/\beta$ , плотность мощности гармоники

$$p_2 = \frac{8\pi}{cn} \gamma^2 p_1^2 (x/\beta)^2,$$

полная мощность гармоники

$$P_2^{(1)} = \frac{8\pi}{cn} \gamma^2 P_1^2 / 3\beta^2.$$

2)  $a/2 < x < -a/2 + \beta l$ . При этом длина всех лучей постоянна и равна апертурной  $l(x) = l_\beta$ ,

$$p_2 = \frac{8\pi}{cn} \gamma^2 p_1^2 l_\beta^2,$$

$$P_2^{(2)} = \frac{8\pi}{cn} \gamma^2 P_1^2 \frac{1}{\beta^2} (l/l_\beta - 1).$$

3) В случае  $-a/2 + \beta l < x < a/2 + \beta l$  значения величин  $p_2$  и  $P_2^{(3)}$  те же, что и в области 1. Для случая  $l > l_\beta$  график распределения плотности мощности гармоники представлен на рис. 5а. Полная мощность пучка гармоники

$$P_2 = \frac{8\pi \gamma^2 p_1^2}{cn \beta^2} (l/l_\beta - 1/3) \quad (51)$$

растет пропорционально  $l$ . При достаточно больших  $l$ , когда мощность гармоники  $P_2$  становится сравнимой с  $P_1$ , приближение заданного поля уже не справедливо, и необходимо решать полную задачу, как это сделано в разделе 3.

2. *Взаимодействие*  $\gamma_e(\omega) + \gamma_0(\omega) \rightarrow \gamma_0(2\omega)$ . Расположение пучков гармоники и основного излучения показано на рис. 5б, откуда следует, что данное взаимодействие аналогично взаимодействию  $\gamma_0(\omega) + \gamma_0(\omega) \rightarrow \gamma_e(2\omega)$ . Все формулы, полученные в первом случае, остаются в силе и для данного типа взаимодействия. Это также следует из сравнения систем уравнений (3), описывающих генерацию гармоники при указанных типах взаимодействия. Действительно, если в уравнениях для взаимодействия

$\gamma_e(\omega) + \gamma_e(\omega) \rightarrow \gamma_0(2\omega)$  вместо координаты  $x$  введена новую переменную  $\xi = x - \beta z$ , то они примут такой же вид, как и уравнения, описывающие взаимодействие  $\gamma_0(\omega) + \gamma_0(\omega) \rightarrow \gamma_e(2\omega)$ .

3. Взаимодействие  $\gamma_0(\omega) + \gamma_e(\omega) \rightarrow \gamma_e(2\omega)$ . Основное излучение распространяется в кристалле в виде двух пучков обыкновенной и необыкновенной поляризации (рис. 5в). На расстоянии  $l = l_{\beta,1} = a/\beta_1$  пучки расходятся, вследствие чего область генерации гармоники конечна, и мощность гармоники даже в приближении заданного поля остается постоянной при  $l > l_{\beta,1}$ . Приведем окончательные выражения для мощности гармоники в случае  $\beta_2 > \beta_1$ . На длинах  $l < l_{\beta,2}$  полная мощность зависит от  $l$  следующим образом

$$P_2 = \frac{8\pi}{cn} \frac{\gamma^2}{a^2} P_{10} P_{1e} l^2 \left( 1 - \frac{l}{3l_{\beta,1}} - \frac{l}{3l_{\beta,2}} \right). \quad (52)$$

При длине кристалла  $l > l_{\beta,2}$  мощность растет с увеличением  $l$ .

$$P_2 = \frac{8\pi}{cn} \frac{\gamma^2}{3\beta_1\beta_2} P_{10} P_{1e} \left[ 1 - \frac{(1 - l/l_{\beta,1})^3 \beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)} \right]. \quad (53)$$

Такая зависимость сохраняется только до тех пор, пока пучки основного излучения не разойдутся, т. е. пока  $l < l_{\beta,1}$ . При  $l = l_{\beta,1}$  мощность гармоники достигает предельного значения

$$P_{2\max} = \frac{8\pi}{cn} \frac{\gamma^2}{3\beta_1\beta_2} P_{10} P_{1e}, \quad (54)$$

величина которого не зависит от диаметра пучка и длины  $l$  кристалла

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Kleinman, Phys. Rev., **128**, № 4, 1761 (1962).
2. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, Н. К. Кулакова, ЖЭТФ, **48**, 1545 (1965).
3. В. В. Бокутъ, А. Г. Хаткевич, Ж. прикл. спектр., **1**, 97 (1964).
4. S. Akhmanov, V. Dmitriev, A. Kovrygin, R. Khokhlov, Physics of Quantum Electronics Conf. Proceedings, N.Y. (1965); см. также С. А. Ахманов, Изв. АН СССР, сер. физ. мат., № 4, 68 (1965).
5. C. Wang, G. Racette, J. Appl. Phys., **36**, № 10, 3281 (1965).
6. G. Boyd, A. Ashkin, J. Dziedzic, D. Kleinman, Phys. Rev., **137**, A1305 (1965).
7. C. K. N. Patel, Phys. Rev. Letters, **15**, № 26, 1027 (1965).
8. А. И. Ковригин, Диссертация, М., 1966.
9. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, А. С. Чиркин, О. Н. Чупаев, ЖЭТФ, **50**, № 4, 829 (1966).
10. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, **50**, № 2, 474 (1966).
11. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
12. С. А. Ахманов, В. Г. Дмитриев, В. М. Моденов, Радиотехника и электроника, **10**, № 4, 649 (1965).
13. G. D. Boyd, J. P. Gordon, BSTJ, **40**, 489 (1961).
14. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Радиотехника и электроника, **11**, № 11, 1915 (1966).
15. В. В. Канер, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, Доклад на 2-ом Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Новосибирск, 1966.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
12 августа 1966 г

#### APERTURE LIMITATIONS OF EFFICIENCY OF OPTICAL FREQUENCY DOUBLERS

S. A. Akhmanov, A. P. Soukhorukov, A. S. Chirkin

A successive procedure is developed to analyse the effect of differences between the directions of ray vectors of interacting waves (aperture effect) upon the process of nonlinear wave interaction of limited beams in anisotropic media. Investigation of the

aperture effect is reduced to the boundary problem solution for the system of the first order partial differential equations. There has been developed the efficiency theory of frequency optical doubler taking into account the aperture effect. It is shown that in strongly anisotropic crystals the saturation efficiency of the frequency optical doubler at the level which is essentially less than 100% may be explained by the aperture effect. The aperture effect for spatially-modulated beams is analysed. It is shown that even regular spatial modulation of the main beam may lead to an increase of the aperture effect as compared with the case of a non-modulated beam. Finally there has been discussed the influence of the aperture effect upon the processes of nonlinear interactions in beams of nonlaser sources. In appendix a simple geometrical method to analyse the aperture effect in simple beams is set forth which does not require the solution of differential equations.

*Примечание при корректуре.* Недавно появилась экспериментальная работа (D H Mc Malion, J Appl Phys, 37, 4832, 1966), где изучалась генерация 2-ой гармоники в кристалле АДР излучением кадмневой лампы. Результаты этой работы (в частности, зависимость мощности второй гармоники от расходимости основного излучения,  $\theta_0 \sim r_0^{-1}$ ) можно объяснить, обобщая формулу (44) на случай фазовых расстроек, отличных от нуля (в этом случае под интегралом появляется функция  $\cos \Delta z + z/\lg \sin \Delta z$ ). Анализ этой формулы для условий опыта Макмагона показывает, что максимальная мощность гармоники достигается для расстроек  $\Delta_m > 0$ ; с увеличением  $\theta_0$  мощность гармоники уменьшается, а  $\Delta_m$  возрастает. Именно такие зависимости и наблюдались на эксперименте

УДК 621.378.325

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК Не-Не ОПТИЧЕСКОГО КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА

*Г. В. Кривоцеков, Г. Г. Телегин, К. Г. Фолин*

Получены выражения для времени установления стационарного режима и времени затухания колебаний Не-Не ОКГ через его параметры и проведена их экспериментальная проверка

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ ОКГ КАК ФУНКЦИИ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

Для получения уравнения, описывающего изменение интенсивности излучения ОКГ во времени, воспользуемся методикой, изложенной в [1]. Тогда изменение интенсивности в резонаторе ОКГ будет описываться уравнением

$$dI = I \left[ \sqrt{R_1 R_2} \exp(\alpha D) - 1 \right] \frac{c}{L} dt, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света;  $cdt/L$  — количество отражений от зеркал, расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга за время  $dt$ ;  $R_1$  и  $R_2$  — коэффициенты отражения зеркал;  $D$  — длина активной среды. Для интегрирования уравнения (1) необходимо знать вид зависимости коэффициента усиления  $\sigma$  от интенсивности  $I$ . В настоящей работе для решения этой задачи был применен следующий метод.

К электрооптическому кристаллу  $K$  (рис. 1), помещенному в резонатор ОКГ между одним из его зеркал  $M$  и газоразрядной трубкой  $T$  прилагается электрическое поле и, таким образом, в резонатор вводятся дополнительные управляемые потери, зависящие от напряжения  $U$  приложенного электрического поля.

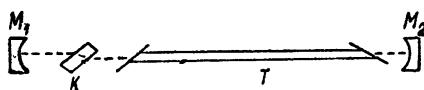


Рис. 1.

На рис. 2 в условных единицах приведены кривые зависимости  $I = I(U)$  при двух различных токах разряда. Точки соответствуют экспериментальным значениям, а сплошными линиями изображены графики функций

$$I = I_{\max} \left( 1 - \frac{U^2}{U_c^2} \right), \quad (2)$$

где  $I_{\max}$  — интенсивность выходного излучения при  $U = 0$ ;  $U_c$  — напряжение, необходимое для срыва генерации ОКГ. Учитывая удовлетворительное совпадение экспериментальных кривых и графиков функции (2), последнюю можно выбрать в качестве аппроксимирующей для зависи-

мости  $I = I(U)$ . Очевидно, каждая точка кривых, приведенных на рис. 2, соответствует стационарному режиму ОКГ при величине потерь в его резонаторе, определяемой приложенным напряжением  $U$ . Этот режим, как легко видеть, будет характеризоваться выражением

$$R_1 R_2 \cos^2 \Gamma \exp(2\alpha D) = 1, \quad (3)$$

где  $\Gamma$  — фазовый сдвиг между обыкновенным и необыкновенным лучами в кристалле, равный

$$\Gamma = \pi \frac{U}{U_0}. \quad (4)$$

Здесь  $U_0$  — напряжение, необходимое для сдвига  $\Gamma = \pi$ . Разлагая  $\cos \Gamma$  в ряд при малых  $\Gamma$  и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, из (3) с учетом (2) и (4) получим

$$\sqrt{R_1 R_2} \exp(\alpha D) \simeq \frac{1}{1 - \beta + \beta I/I_{\max}}, \quad (5)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \pi \frac{U_c}{U_0} \right)^2. \quad (6)$$

Определим время установления стационарного режима генерации. Подставляя (5) в (1), переходя к безразмерной переменной  $\xi = I/I_{\max}$  и интегрируя с начальным условием  $\xi(0) = \xi_0$ , получаем уравнение, описывающее процесс нарастания амплитуды колебаний в лазере:

$$\left[ \frac{\xi_0}{\xi} \right] \left[ \frac{1 - \xi}{1 - \xi_0} \right]^{1/(1-\beta)} = \exp \left( -\frac{\beta}{1 - \beta} \frac{c}{L} t \right). \quad (7)$$

Подставив в (7)  $\xi(\tau_1) = 0,9$ , можно получить выражение для времени  $\tau_1$ , за которое интенсивность излучения лазера нарастает до уровня  $0,9 I_{\max}$ :

$$\tau_1 \simeq \frac{L}{c} \frac{1 - \beta}{\beta} \ln \left( \frac{1}{\xi_0} \right). \quad (8)$$

Величина  $\xi_0$  в этой формуле равна отношению мощности спонтанного излучения в момент начала генерации в телесном угле и интервале частот, в которых происходит индуцированное излучение, к мощности индуцированного излучения в стационарном режиме. Ее порядок можно определить из выражения

$$\dot{\xi}_0 = \frac{1}{P} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{m\Delta\nu_0}{\Delta\nu_D} \frac{N V h\nu}{\tau}.$$

Здесь  $P$  — мощность индуцированного излучения в стационарном режиме (в нашем случае  $P \simeq 10^{-3}$  вт);  $\Delta\Omega$  — телесный угол, в котором происходит излучение ОКГ ( $10^{-8}$ , [2]);  $m$  — число генерируемых мод (для ОКГ, использованного в настоящей работе,  $m \sim 10$ );  $\Delta\nu_0$  — ширина линии генерации на одной моде, которая порядка  $10^4$  Гц для обычных Не-Не ОКГ [3, 4];  $\Delta\nu_D$  — ширина допплеровской линии люминесценции по половинному уровню (порядка  $1,5 \cdot 10^9$  Гц [5] для  $\lambda = 0,63 \mu$ );  $N$  — число активных атомов в единице объема ( $\sim 10^9$ , [6]);  $V$  — объем активной

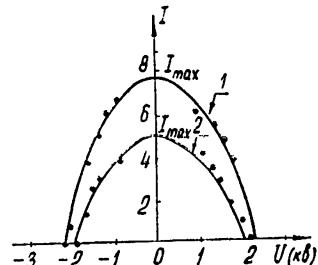


Рис. 2.

среды (в нашем случае равный  $13 \text{ см}^3$ );  $h$  — постоянная Планка;  $v$  — частота генерации ( $5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ );  $\tau$  — время перехода  $3S_2 \rightarrow 2P_4$  атомов ( $5 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$ , [7]). Для приведенных выше величин получаем  $\xi_0 \approx 10^{-13}$ .

Рассмотрим время затухания колебаний ОКГ. Поскольку для срыва колебаний лазера в его резонатор вносятся дополнительные потери, уравнение (1) перепишется в виде

$$dI = I \left( \sqrt{R_1 R_2} \cos \Gamma \exp(\sigma D) - 1 \right) \frac{c}{L} dt. \quad (9)$$

Из решения этого уравнения с использованием соотношения (5) при начальном условии  $\xi(0) = 1$  получим выражение для времени  $\tau_2$ , за которое происходит уменьшение амплитуды колебаний до уровня 0,1 от ее максимального значения:

$$\tau_2 \approx \frac{L}{c} \frac{1 - \beta}{2 \sin^2(\Gamma/2) - \beta} \ln 10. \quad (10)$$

Из (8) и (10) видно, что  $\tau_2$  в отличие от  $\tau_1$  зависит не только от параметров резонатора и свойств активной среды, но и от величины вносимых в резонатор потерь. В выражения для  $\tau_1$  и  $\tau_2$  кроме длины резонатора входит некоторая постоянная величина  $\beta$ , которая для различных ОКГ, вообще говоря, может быть различной. Однако ее можно определить экспериментально с помощью плоскопараллельной стеклянной пластины, помещенной в резонатор [8]. В формулах для  $\tau_1$  и  $\tau_2$  не фигурируют коэффициенты отражения зеркал  $R_1$  и  $R_2$ . Их влияние учитывается косвенно (посредством величины  $\beta$ ).

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ ОКГ

Для экспериментальной проверки соотношений (8) и (10) на кристалл подавались импульсы управляющего напряжения прямоугольной формы с длительностью переднего фронта порядка 50 мсек. Амплитуду и длительность импульса можно было регулировать в пределах от 1 до 4 кв и от 0,2 до 3 мксек. При подаче на кристалл импульса напряжения порядка 2,5 кв генерация полностью прекращалась на время импульса и восстановливалась после его окончания. В эксперименте был использован оптический квантовый генератор на Не-Не ( $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ). Расстояние между зеркалами резонатора составляло  $L = 180 \text{ см}$ , длина разрядного промежутка  $D = 110 \text{ см}$ , внутренний диаметр разрядной трубки — 4 мм. Коэффициенты отражения зеркал были приблизительно одинаковы и равны 0,98. Использовался кристалл КДР, который был выполнен в виде плоскопараллельной пластинки толщиной 7 мм. Срез кристалла составлял с его оптической осью угол, равный углу Брюстера. В этом случае луч лазера внутри кристалла распространялся вдоль его оптической оси. Одна из кристаллографических осей кристалла совпадала с направлением поляризации света в резонаторе. Управляющее поле прикладывалось к кристаллу вдоль оптической оси. Сигнал с фотоумножителя и управляющий импульс наблюдались одновременно на экране двухлучевого осциллографа.

На рис. 3а, б, в приведены осциллограммы управляющего импульса при различных его длительностях и постоянной амплитуде (вверху) и сигнала с ФЭУ (внизу). При этом положительные импульсы с ФЭУ соответствуют срыву колебаний. Большое деление сетки составляет 1,3 мксек. На рис. 3а за время действия управляющего импульса генерация лазера не успевает полностью затухнуть, а на рис. 3б и 3в генерация срывается полностью. Характер срыва и установления колебаний

приблизительно одинаков, а времена имеют величину одного порядка. Графическое измерение времени установления колебаний до уровня  $0,9 I_{\max}$  дает величину  $\tau_1 \simeq 2 \text{ мксек}$ .

На рис. 4а и 4б приведены осциллограммы срыва генерации при различных значениях амплитуды напряжения управляющего импульса: рис. 4а соответствует  $U = 2,7 \text{ кв}$ , а рис. 4б —  $U = 3,4 \text{ кв}$ .

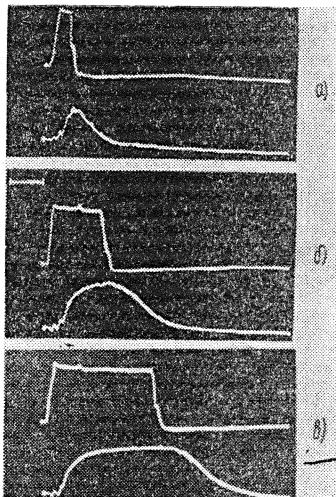


Рис. 3.

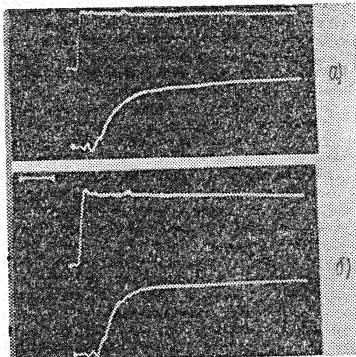


Рис. 4.

Большое деление сетки составляет  $0,75 \text{ мксек}$ . Время срыва генерации  $\tau_2$  до уровня  $0,1 I_{\max}$  для  $U = 2,7 \text{ кв}$  порядка  $1,5 \text{ мксек}$ , а для  $U = 3,4 \text{ кв}$  — порядка  $0,75 \text{ мксек}$ .

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Оценим собственное время ОКГ по формулам (8) и (10). При  $\xi_0 \simeq 10^{-13}$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $L = 180 \text{ см}$  получим  $\tau_1 \simeq 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$ , что хорошо совпадает с результатами эксперимента ( $2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$ ).

Для времени срыва при тех же значениях параметров и при  $U = 2,7 \text{ кв}$  получаем  $\tau_2 \simeq 6 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$ , а при  $U = 3,4 \text{ кв}$   $\tau_2 \simeq 3 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$ . Таким образом, время срыва при увеличении амплитуды управляющего импульса на  $0,7 \text{ кв}$  уменьшается приблизительно вдвое. К этому же результату приводит сравнение времен срыва, полученных экспериментально. Однако абсолютные значения  $\tau_2$ , определенные по формуле (10) и из эксперимента, отличаются на порядок. По-видимому, такое расхождение обусловлено тем, что в формуле (10) значение  $\Gamma$  мы вычисляем по величине напряжения, прилагаемого к кристаллу. Однако в силу того, что расстояние между контактами сравнимо с диаметром отверстий для прохождения луча, существенно должны оказаться краевые эффекты. Эффективность действия приложенного поля при этом уменьшится.

Авторы выражают благодарность Н. Д. Лизунову за изготовление кристаллических пластинок.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, УФН, 22, 161 (1960).
2. Р. Дитчберн, Физическая оптика, изд. Наука, М., 1965, стр. 593.

3. D. R. Herriot, Opt. Soc. Amer., **52**, 31 (1962).
4. A. Javan, W. R. Bennett, D. R. Herrion, Phys. Rev. Lett., **6**, 106 (1961).
5. В. Р. Беннет, УФН, **31**, 119 (1963).
6. В. П. Чеботарев, Л. С. Василенко, Оптика и спектроскопия, **20**, 913 (1966).
7. Th. Hansch, P. Toschek, Phys. Lett., **20**, 274 (1966).
8. Ю. В. Троицкий, Радиотехника и электроника, **10**, № 5, 954 (1965)

Институт физики полупроводников  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
21 октября 1966 г.

## INVESTIGATION OF TIME CHARACTERISTICS OF He-Ne LASER

*G. V. Krivoshchekov, G. G. Telegin, K. G. Folin*

The expressions for time of setting up a stationary regime and that of oscillation damping of He-Ne laser have been obtained through its parameters. The experimental verification has been carried out.

---

УДК 621.378.325

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА

Э. М. Беленов

Приведены уравнения газового лазера как для аксиальных, так и для угловых типов колебаний. Уравнения учитывают фазовые и амплитудные взаимодействия мод при произвольной пространственной форме мощности подкачки. Показано, что взаимодействие угловых мод с одинаковым продольным распределением поля приводит в типичном лазере на благородных газах к гистерезисным режимам генерации. Возбуждение и генерация угловых мод с различными аксиальными числами существенно связаны, при определенных условиях возбуждаются скорее всего угловые моды с ортогональным по зеркалу резонатора распределением поля.

Основные характеристики излучения квантового генератора определяются пространственно-временной картиной генерируемого поля. Практическое рассмотрение данной задачи сводится к анализу генератора как многомодовой автоколебательной системы. Ряд теоретических вопросов генерации многомодового газового лазера рассмотрен Лэмбом [1]. Полученные им уравнения, однако, не содержат перекрестных членов, выражающих фазовые соотношения между типами колебаний, и не учитывают неоднородности активного вещества в поперечном сечении разрядной трубки. При этих условиях уравнения Лэмба имеют дело со взаимодействием аксиальных мод и не могут быть использованы для анализа пространственно-временной картины поля, поскольку последняя связана с возбуждением угловых типов колебаний.

Задача о возбуждении угловых типов колебаний рассматривалась в [2-5]. Однако в указанных работах времена релаксации поля, поляризации и числа частиц типичны для лазера на твердом теле. Соотношения характерных времен в уравнениях движения и однородное уширение линий излучения вещества накладывают несомненный отпечаток на возможные режимы генерации многомодовой системы; перенесение полученных в [2-5] результатов на газовый лазер во многих случаях является неоправданным.

Ниже приведены уравнения поля газового лазера как для аксиальных, так и для угловых типов колебаний с одним или различными продольными индексами. Уравнения учитывают фазовые и амплитудные взаимодействия мод при произвольной пространственной зависимости мощности подкачки. Рассмотрены некоторые из допускаемых ими решений.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим поле генератора, представляющее суперпозицию угловых и аксиальных типов колебаний:

$$E(z, x, t) = \sum_k V_k(z) \sum_n E_{nk}(t) U_{nk}(x) \cos [\omega_k t + \varphi_{nk}(t)], \quad (1)$$

где собственные функции  $V_k(z)$  описывают распределение поля вдоль оси генератора (для  $k$ -го аксиального типа колебаний), а  $U_{nk}(x)$  — на

зеркале резонатора для  $n$ -го углового типа колебаний\*, принадлежащего  $k$ -му продольному индексу,  $\omega_k + \varphi_{nk}$  — частота колебаний  $nk$ -ой составляющей поля. Систему собственных функций будем считать нормированной:

$$\langle U_{nk} U_{mk} \rangle = \delta_{nm}, \quad \langle V_k V_r \rangle = \delta_{kr}, \quad \langle V_k U_{mk'} \rangle = 0.$$

Составляющие поля (1)

$$A_{nk}(t) = E_{nk}(t) \cos [\omega_k t + \varphi_{nk}(t)]$$

возбуждаются поляризацией активной среды  $P(t, z, x)$  согласно следующей системе уравнений:

$$\ddot{A}_{nk} + \frac{\omega}{Q_{nk}} A_{nk} + \Omega_{nk}^2 A_{nk} = - \frac{\omega_A}{\epsilon_0} P_{nk}. \quad (2)$$

Здесь  $Q_{nk}$  и  $\Omega_{nk}$  — добротность и собственная частота  $nk$ -го типа колебаний,  $\omega_A$  — частота линии,  $\epsilon_0$  — проницаемость свободного пространства,  $P_{nk} = \int P(t, z, x) V_k(z) U_{nk}(x) dz dx$  —  $nk$ -ая гармоника поляризации среды.

Система уравнений (2) при условии, что явный вид компонент поляризации известен, определяет взаимодействие угловых и аксиальных типов колебаний лазера.

Остановимся более подробно на составляющих поляризации, индуцируемой полем (1). Полагая, что  $2\pi a^2/L\lambda \gg 1$  ( $a$  — характерный размер лоперечной неоднородности,  $L$  — предельные размеры системы,  $\lambda$  — длина волны), поле (1) для дальнейших вычислений представим в виде

$$E(z, t, x) = \sum_k V_k(z) \Sigma_k(t, x) \cos [\omega_k t + \psi_k(x, t)], \quad (3)$$

а поляризацию — в виде суммы активных и реактивных составляющих:

$$P(z, t, x) = \sum_k V_k(z) \{ C_k(x, t) \cos [\omega_k t + \psi_k(x, t)] + S_k(x, t) \sin [\omega_k t + \psi_k(x, t)] \}. \quad (4)$$

Будем считать выполненным условие  $\gamma_a, \gamma_b \gg \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q} (\eta - 1)$  (обозначения см. ниже). Тогда поляризация квазистатически следует за полем. Подобное положение является типичным для активных сред газового лазера. В этом случае разложение  $k$ -ой составляющей поляризации  $P_k$  по  $k$ -ой компоненте поля начинается с линейного члена. Поэтому  $C_k$  и  $S_k$  можно представить как

$$C_k = \Sigma_k C_k^{(0)}, \quad S_k = S_k^{(0)} \Sigma_k. \quad (5)$$

Коэффициенты  $C_k^{(0)}$  и  $S_k^{(0)}$  зависят как от формы и интенсивности подкачки, так и от амплитуд и фаз возбудившихся типов колебаний.

Составляющую  $P_k$  с учетом (5) можно представить как

$$P_k = C_k^{(0)} \Sigma_k \cos (\omega_k t + \psi_k) + S_k^{(0)} \Sigma_k \sin (\omega_k t + \psi_k). \quad (6)$$

\* В целях сокращения обозначений угловые функции  $U_{n_1 n_2}(x, y)$  обозначены через  $U_n(x)$ .

Замечая далее, что при  $|\dot{\psi}_k/\omega_n| \ll 1$

$$\begin{aligned}\Sigma_k \cos(\omega_k t + \psi_k) &= \sum_n E_{nk} U_{nk}(x) \cos(\omega_k t + \varphi_{nk}), \\ \Sigma_k \sin(\omega_k t + \psi_k) &\simeq \sum_n E_{nk} U_{nk}(x) \sin(\omega_k t + \varphi_{nk}),\end{aligned}\quad (7)$$

получаем окончательно для  $P_{nk}$  следующее разложение:

$$\begin{aligned}P_{nk} &= \sum_m \{ \langle C_k^{(0)} U_{mk} U_{nk} \rangle E_{mk} \cos(\omega_k t + \varphi_{mk}) + \\ &+ \langle S_k^{(0)} U_{mk} U_{nk} \rangle E_{mk} \sin(\omega_k t + \varphi_{mk}) \}.\end{aligned}\quad (8)$$

Введем матричные элементы  $S_{nk}$  и  $C_{nk}$ :

$$P_{nk} = S_{nk} \sin(\omega_k t + \varphi_{nk}) + C_{nk} \cos(\omega_k t + \varphi_{nk}). \quad (9)$$

Тогда от системы уравнений (2) нетрудно перейти к уравнениям медленных движений для  $E_{nk}(t)$  и  $\varphi_{nk}(t)$ :

$$\begin{aligned}E_{nk} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{Q_{nk}} E_{nk} &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_1}{\varepsilon_0} S_{nk}, \\ \dot{\varphi}_{nk} + \omega_k - \Omega_{nk} &= -\frac{1}{2} \frac{\omega}{\varepsilon_0} C_{nk}/E_{nk},\end{aligned}\quad (10)$$

где, согласно (8), (9),

$$\begin{aligned}S_{nk} &= \sum_m \{ \langle C_k^{(0)} U_{mk} U_{nk} \rangle E_{mk} \sin(\varphi_{nk} - \varphi_{mk}) + \\ &+ \langle S_k^{(0)} U_{mk} U_{nk} \rangle E_{mk} \cos(\varphi_{nk} - \varphi_{mk}) \}, \\ C_{nk} &= \sum_m \{ \langle C_k^{(0)} U_{mk} U_{nk} \rangle E_{mk} \cos(\varphi_{nk} - \varphi_{mk}) - \\ &- \langle S_k^{(0)} U_{mk} U_{nk} \rangle E_{mk} \sin(\varphi_{nk} - \varphi_{mk}) \}.\end{aligned}\quad (11)$$

Ниже приведем явный вид уравнений движения для некоторых интересных случаев и рассмотрим допускаемые ими решения.

## 2. ДВА УГЛОВЫХ ТИПА КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО АКСИАЛЬНОГО ИНДЕКСА

В этом случае поле генератора

$$\begin{aligned}E(z, x, t) &= V_k(z) \{ E_{nk}(t) U_{nk}(x) \cos[\omega_k t + \varphi_{nk}(t)] + \\ &+ E_{mk}(t) U_{mk}(x) \cos(\omega_k t + \varphi_{mk}(t)) \}.\end{aligned}\quad (12)$$

Записав  $E(z, x, t)$  в виде (3)

$$E(z, x, t) = V_k(z) \Sigma_k(t, x) \cos(\omega_k t + \psi_k(t, x)),$$

а индуцируемую полем поляризацию  $P_k$  как

$$P_k = C_k \cos(\omega_k t + \psi_k) + S_k \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

находим, согласно [1], явное выражение для составляющих  $C_k$  и  $S_k$ :

$$\begin{aligned} C_k &= \varepsilon_k \{C_{k1} + C_{k3}\varepsilon_k^2 + \dots\} N(x), \\ S_k &= \varepsilon_k \{S_{k1} + S_{k3}\varepsilon_k^2 + \dots\} N(x), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} C_{k1} &= -\frac{\rho^2}{\hbar^2 k u} Z_{\text{Re}}(\omega_n - \omega_k), \quad C_{k3} = \frac{1}{8} \frac{\sqrt{\pi} \rho^4}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b k u} \times \\ &\times [\gamma_{ab}^2 (\omega_k - \omega_n) L(\omega_n - \omega_k)], \\ S_{k1} &= -\frac{\rho^2}{\hbar k u} Z_{\text{Im}}(\omega_n - \omega_k), \quad S_{k3} = \frac{1}{8} \frac{\sqrt{\pi} \rho^4}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b k u} \times \\ &\times [1 + \gamma_{ab}^2 L(\omega_n - \omega_k)]. \end{aligned} \quad (14)$$

В (13), (14)  $N(x)$  — распределение мощности подкачки по сечению разрядной трубы,  $k u$  — ширина допплеровской линии с центральной частотой  $\omega_n$ ,  $\rho$  — матричный элемент дипольного момента,  $\gamma_a$  и  $\gamma_b$  — скорости радиационного распада уровней,  $\gamma_{ab}$  — скорость релаксации поляризации,  $L(\xi) = [\gamma_{ab}^2 + \xi^2]^{-1}$  — функция Лоренца,  $Z_{\text{Im}}$  и  $Z_{\text{Re}}$  — мнимая и действительная составляющие плазменной дисперсионной функции.

В дальнейшем, поскольку аксиальный индекс  $k$  не повторяется, опустим его во всех выражениях данного параграфа, а собственные функции  $U_{nk}(x)$  и  $U_{mk}(x)$  будем именовать  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  соответственно.

Воспользовавшись выражениями (11) для составляющих поляризации и уравнениями (10) медленных движений и учитывая (13), (14), получаем следующую систему уравнений для двух угловых мод:

$$\begin{aligned} E_1 + \frac{\omega_n}{Q_1} E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\varepsilon_0} \{ \langle N(S_1 U_1^2 E_1 + S_1 U_1 U_2 E_2 \cos \psi + \\ &+ C_1 U_1 U_2 E_2 \sin \psi) \rangle + \langle N(S_3 U_1^2 E_1 + S_3 U_1 U_2 E_2 \cos \psi + \\ &+ C_3 U_1 U_2 E_2 \sin \psi) (E_1^2 U_1^2 + E_2^2 U_2^2 + 2E_1 E_2 U_1 U_2 \cos \psi) \rangle \}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (\dot{\varphi}_1 + \omega - \Omega_1) E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\varepsilon_0} \{ \langle N(C_1 U_1^2 E_1 + C_1 U_1 U_2 E_2 \cos \psi - \\ &- S_3 U_1 U_2 E_2 \sin \psi) \rangle + \langle N(C_3 U_1^2 E_1 + C_3 U_1 U_2 E_2 \cos \psi - \\ &- S_3 U_1 U_2 E_2 \sin \psi) (E_1^2 U_1^2 + E_2^2 U_2^2 + 2E_1 E_2 U_1 U_2 \cos \psi) \rangle \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) приведены для первого типа колебаний. Уравнения для второго типа получаются заменой индексов  $1 \rightarrow 2$  с учетом того, что  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Для того, чтобы рассмотреть фазовые взаимодействия полей, положим частоту  $\omega$  близкой к центральной частоте допплеровской линии  $\omega_n$ ; кроме того, будем считать подкачку  $N(x)$  симметричной функцией  $x \in [-a, a]$ , а собственные функции  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  совпадающими с первым и вторым низшими типами колебаний резонатора. В этом случае коэффициенты  $C_1$  и  $C_3$  можно, как это следует из (14), опустить, и система уравнений (15), (16) принимает вид

$$\dot{E}_1 = E_1 \{ \alpha_1 - \beta_1 E_1^2 - \gamma E_2^2 [2 + \cos(2\psi)] \}, \quad (17)$$

$$\dot{E}_2 = E_2 \{ \alpha_2 - \beta_2 E_2^2 - \gamma E_1^2 [2 + \cos(2\psi)] \};$$

$$2\dot{\psi} = 2\Delta + 2\gamma (E_1^2 + E_2^2) \sin(2\psi), \quad (18)$$

где

$$\alpha_t = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{\varepsilon_0} S_1 \langle N U_t^2 \rangle - \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q_t}, \quad \beta_t = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\varepsilon_0} S_3 \langle N U_t^4 \rangle,$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\varepsilon_0} S_4 \langle N U_1^2 U_2^2 \rangle, \quad \Delta = \Omega_1 - \Omega_2.$$

Интересно проследить за режимами генерации, допускаемыми системой (17), (18) при изменении мощности подкачки. Коэффициенты  $\alpha_i$ , определяющие условия возбуждения типов колебаний, меняются в зависимости от величины и пространственной формы мощности подкачки.

Рассмотрим для определенности типичный лазер на благородных газах. При малых  $\Lambda = \int n dx^3 N(x)$  повторяет пространственно ход  $U_1(x)$  и  $\alpha_1 > \alpha_2$ ; наоборот, при больших  $\Lambda$   $N(x)$  имеет провал при  $x=0$  и  $\alpha_2 > \alpha_1$  [6, 7]. Следует ожидать, что форма поля в предельных случаях больших и малых  $\Lambda$  будет различна. Остановимся на этом более подробно.

Как при больших, так и при малых  $\Lambda$  превышение над порогом не велико. В первом случае это связано с относительно слабым заселением рабочих уровней, в последнем — преимущественным заселением нижнего рабочего уровня [7, 8]. Таким образом, при небольшом превышении над порогом (случай больших и малых  $\Lambda$ ) всегда выполняется неравенство\*\*

$$\Delta \gg \gamma (E_1^2 + E_2^2). \quad (19)$$

При условии (19) уравнение для фаз упрощается до выражения  $\dot{\psi} = \Delta$ , описывающего бигармонический режим с частотами, близкими к  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Перейдем к амплитудным уравнениям. Усредняя (17) по частоте биений  $\Delta$ , получаем уравнения движения

$$\dot{E}_1 = E_1 \{ \alpha_1 - \beta_1 E_1^2 - 2\gamma E_2^2 \},$$

$$\dot{E}_2 = E_2 \{ \alpha_2 - \beta_2 E_2^2 - 2\gamma E_1^2 \},$$

решения которых находятся в критической зависимости от величины  $\xi = 2\gamma / \sqrt{\beta_1 \beta_2}$ . При постоянной по сечению разрядной трубки подкачке  $\xi$  всегда больше единицы. То же самое получается и для подкачки в форме [7]. Поэтому при выполнении условия (19) один тип колебаний подавляет другой. При малых  $\Lambda$   $\alpha_1 > \alpha_2$  и первая мода подавляет вторую, при больших  $\Lambda$  второй тип колебаний подавляет первый. В промежуточной по  $\Lambda$  области  $\Lambda \sim \Lambda_{cr}$  (19) обычно не выполняется и оба типа колебаний могут существовать одновременно. При  $\Lambda$ , стремящемся к  $\Lambda_{cr}$

\* Здесь  $n(x)$  — плотность электронов разряда

\*\* Неравенство (19) можно переписать в виде  $\Delta \gg \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q} (\eta - 1)$ , где  $\eta$  — превышение мощности подкачки над пороговым значением,

слева или справа, наблюдается типичная картина гистерезисного режима, что подтверждается численными расчетами [6].

Разберем теперь случай гармонического режима, реализующегося при условии

$$|\Delta| \leq \gamma(E_1^2 + E_2^2). \quad (20)$$

Неравенство (20) может выполняться в лазерах с большим коэффициентом усиления среды и низкодобротными резонаторами (например, ксеноновый газовый лазер).

Уравнение для фазы

$$2 \frac{d\psi}{dt} = 2\Delta + 2\gamma \sin(2\psi)(E_1^2 + E_2^2) \quad (21)$$

имеет стационарные решения

$$\sin(2\psi_{1,2}) = -\frac{\Delta}{\gamma(E_1^2 + E_2^2)}, \cos(2\psi_{1,2}) = \mp \left\{ 1 - \left[ \frac{\Delta}{\gamma(E_1^2 + E_2^2)} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (22)$$

первое из которых соответствует (случай малых расстроек) разности фаз полей  $E_1$  и  $E_2$ , близкой к  $\pi/2$ , и минимальной энергии взаимодействия мод, а второе — разности фаз, близкой к нулю, и максимальной энергии взаимодействия типов колебаний. Из двух состояний равновесия второе неустойчиво.

С увеличением расстройки или уменьшением уровня подкачки неравенство (20) может изменить смысл. При этом гармонический режим колебаний нарушается и картина генерации приобретает довольно сложный вид.

Интересно отметить, что для случая рубинового генератора стационарное решение двухмодовой системы в области неустойчивости гармонического режима имеет своеобразный колебательный характер. Излучение квантового генератора представляет собой последовательность регулярно следующих друг за другом отдельных импульсов — «пичков». При малых глубинах модуляции их зависимость от времени практически является гармонической, и период колебаний сокращается с увеличением мощности накачки [2].

Уравнения движения газового лазера не имеют подобных решений. Причина этого довольно прозрачна. Предположим, что в некоторый момент времени фазы компонент поля генератора

$$E(x, t) = E_1(t) U_1(x) \cos[\omega t + \varphi_1(t)] + E_2(t) U_2(x) \cos[\omega t + \varphi_2(t)] \quad (23)$$

совпадают ( $\omega t + \varphi_1(t) = \omega t + \varphi_2(t) + 2\pi n$ ) и составляющие (23) пространственно повторяют ход функций  $U_1(x) \sim \cos(\pi x/2a)$  и  $U_2(x) \sim \sin(\pi x/a)$  ( $x \in [-a, a]$ ). В этом случае амплитуда результирующего поля  $E(x, t)$  будет велика для  $x \in [0, a]$  и, наоборот, мала для  $x \in [-a, 0]$ .

При малых превышениях границ неравенства (20) относительный фазовый угол  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  будет медленно изменяться, вызывая соответствующую медленную деформацию поля  $E(x, t)$ , если, конечно, подобный режим устойчив. Однако устойчивость указанного режима находится в определенной зависимости от времени релаксации числа частиц и поля.

Действительно, если время спонтанного распада числа частиц мало, а мощность подкачки значительна, в области  $[-a, 0]$  с малой напряженностью поля успевает накопиться значительное количество активных частиц. В этом случае составляющим поля  $E(x, t)$  энергетически выгодно измениться таким образом, чтобы центр тяжести  $E(x, t)$  сдви-

нулся в область наибольшей инверсной населенности. Это и приводит в двухмодовой модели рубинового лазера к пичковому режиму колебаний. Зависимость частоты пичков от интенсивности подкачки также становится понятной.

В типичном газовом лазере условия противоположны рубиновому: время спонтанного распада атома велико, а мощность подкачки сравнительно низка. При таких условиях система уравнений газового лазера не допускает пичкового режима генерации.

Интересно отметить, что численный расчет поля, представляющего суперпозицию угловых мод одного аксиального индекса [6], не приводит к результатам, качественно отличным от разобранных выше.

Согласно [6], даже при одинаковых добротностях мод возбуждаются, в основном, первый или второй типы колебаний. Если, кроме того, при расчете приняты во внимание дифракционные потери мод [9], вторая мода, не говоря уже о более высоких, при любой форме  $N(x)$  из [7] вообще не возбуждается. В то же время, согласно экспериментально наблюдаемой расходимости излучения газового лазера с недиафрагмированными зеркалами резонатора, наибольшие амплитуды при достаточно большом уровне подкачки имеют моды высшего порядка (третья, четвертая).

Таким образом, система уравнений, учитывающих взаимодействие угловых мод одного и того же аксиального индекса при форме мощности подкачки, типичной для лазера на благородных газах, не описывает экспериментально наблюдаемой картины излучения лазера\*. Картину генерации можно попытаться объяснить различными условиями возбуждения угловых мод с неодинаковыми аксиальными числами.

### 3. УСЛОВИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ УГЛОВЫХ МОД С РАЗЛИЧНЫМИ АКСИАЛЬНЫМИ ИНДЕКСАМИ

Рассмотрим условия возбуждения угловых мод газового лазера с различным продольным распределением поля. Качественно картина возбуждения типов колебаний представляется следующей. С увеличением подкачки до пороговой в газовом лазере возбуждается первая угловая мода

$$A_{nr} = E_{nr} U_{nr}(x) \cos(\omega_r t + \varphi_{nr}) \quad (24)$$

с частотой  $\omega_r$ , наиболее близкой к центральной частоте допплеровской линии. При этом она, вообще говоря, подавляет угловые типы колебаний одного с ней продольного распределения. С дальнейшим ростом мощности подкачки выполняются условия возбуждения угловых типов колебаний соседнего аксиального индекса  $k$ . Однако на условие их возбуждения оказывает влияние пространственная форма и интенсивность поля (24).

При выполнении определенных условий, на которых мы остановимся ниже, быстрее всего возбуждается  $m$ -ая гармоника  $k$ -ой составляющей с ортогональным относительно (24) распределением поля на зеркале резонатора:

$$\begin{aligned} A_{mk} &= E_{mk} U_{mk}(x) \cos(\omega_k t + \varphi_{mk}), \\ \langle U_{mk} U_{nr} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

\* В качестве противоположного примера можно остановиться на генерации рубинового лазера. Большой коэффициент усиления среды (при котором усреднение уравнений угловых движений по частотам биений становится незаконным) приводит к сильной фазовой зависимости угловых мод и соответственно к их мягкому возбуждению [10]. При этом расходимость излучения можно изучать на анализе угловых мод одного аксиального индекса.

Возбуждающаяся мода (25) стремится погасить угловые моды одинакового с ней продольного индекса.

На примере взаимодействия полей

$$\begin{aligned} E_r(x, t) &= E_{nr}(t) U_{nr}(x) \cos [\omega_r t + \varphi_{nr}(t)], \\ E_k(x, t) &= E_{nk}(t) U_{nk}(x) \cos [\omega_k t + \varphi_{nk}(t)] + \\ &+ E_{mk}(t) U_{mk}(x) \cos [\omega_k t + \varphi_{mk}(t)] \end{aligned} \quad (26)$$

рассмотрим условия возбуждения составляющих  $E_k(x, t)$ .

При выяснении условий возбуждения  $E_k$  компоненты  $E_{nk}$  и  $E_{mk}$  будем считать столь малыми, чтобы пренебрежение насыщением среды полем  $E_k(x, t)$  было законным. Наша задача, таким образом, заключается в том, чтобы в предположении существования поля  $E_r(x, t)$  вида (24) найти условия возбуждения угловых составляющих  $E_k(x, t)$ .

Как и в разделе 1, индуцируемые сильным и слабым полями компоненты поляризации представим в виде

$$\begin{aligned} S_i^{(0)} &= S_{ii} + S_{i3}\varepsilon_i^2 + \gamma_j\varepsilon_j^2 + \dots, \\ C_i^{(0)} &= C_{ii} + C_{i3}\varepsilon_i^2 + \mu_j\varepsilon_j^2 + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $i, j = k, r; i \neq j$ . Коэффициенты разложения (27) можно найти в [1].

С учетом (27) уравнения движения «сильного» поля можно записать как

$$\dot{E}_{nr} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{Q_{nr}} E_{nr} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\epsilon_0} \{ \langle S_{1r} U_n^2 \rangle E_{nr} + \langle S_{3r} U_n^4 \rangle E_{nr}^3 \}, \quad (28)$$

а «слабого» — в виде

$$\dot{E}_{nk} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{Q_{nk}} E_{nk} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\epsilon_0} \{ \langle S_{1k} U_n^2 \rangle + \langle \gamma_r U_n^4 \rangle E_{nr}^2 \} E_{nk}; \quad (29)$$

$$\dot{E}_{mk} + \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{Q_{mk}} E_{mk} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\epsilon_0} \{ \langle S_{1k} U_m^2 \rangle + \langle \gamma_r U_n^2 U_m^2 \rangle E_{nr}^2 \} E_{mk}. \quad (30)$$

При выводе системы (28)–(30) для простоты считали, что подкачка — симметричная функция  $x$ , а собственные функции  $U_{nk} = U_{nr} = U_n \sim \sim \cos \frac{\pi}{2a} x$ ,  $U_{mk} = U_m \sim \sin \frac{\pi}{a} x$  — соответственно два низших типа колебаний резонатора

Как следует из вида уравнений (29), (30), насыщение активной среды на частоте  $\omega_k$  определяется амплитудой  $E_{nr}$  соседнего аксиального типа колебаний. Вместе с тем, влияние насыщения на каждую моду  $E_{nk}$  и  $E_{mk}$  зависит от матричных элементов  $\langle \gamma_r U_n^4 \rangle$  и  $\langle \gamma_r U_n^2 U_m^2 \rangle$  и связано поэтому с пространственной формой возбудившегося поля. При определенных расстройках  $\omega_r$  —  $\omega_k$  различие в абсолютных значениях матричных элементов может заметно влиять на условия возбуждения компонент поля  $E_k(x, t)$ .

Введем коэффициенты, определяющие условия возбуждения мод  $E_{nk}$  и  $E_{mk}$ :

$$\alpha_n = \partial \dot{E}_{nk} / \partial E_{nk}, \quad \alpha_m = \partial \dot{E}_{mk} / \partial E_{mk}. \quad (31)$$

Неравенство  $\Delta \alpha_{mn} = \alpha_m - \alpha_n \leq 0$  (при условии  $\alpha_m > 0$  или  $\alpha_n > 0$ ) определяет, которая из мод возбудится раньше,

В дальнейшем матричные элементы  $\langle S_{1k} U_m^2 \rangle$ ,  $\langle S_{1k} U_n^2 \rangle$ , определяющие усиление среды в линейном приближении, будем считать равными\*. В этом случае, полагая времена жизни рабочих уровней существенно различными (случай, типичный для газового лазера) и считая  $\omega_r \approx \omega_k$ , для  $\Delta\alpha_{mn}$  с учетом коэффициентов (27), согласно [1], получаем следующее выражение:

$$\Delta\alpha_{mn} = F(\xi) \alpha_{nr}^{(0)} - \mu. \quad (32)$$

Здесь

$$F(\xi) \approx \frac{1}{3} \frac{2\xi^2 + 1}{\xi^2(1 + \xi^2)}, \quad \xi = \Delta/2\gamma_{ab}, \quad \Delta = |\omega_r - \omega_k|,$$

$\mu = Q_1/Q_2 - 1$ ,  $\alpha_{nr}^{(0)} = [-\langle S_{1k} U_n^2 \rangle Q_{nr}/\varepsilon_0 - 1]$  — коэффициент, определяющий условие возбуждения поля  $E_{nr}$ .

Функция  $F(\xi)$  связана с нелинейностью, вносимой полем  $E_r(x, t)$  на частоте  $\omega_k$ . При малых  $\xi$   $F(\xi)$  резко возрастает и дискриминация мод  $E_{nk}$  и  $E_{mk}$  становится существенной.

Рассмотрим уравнение  $\Delta\alpha_{mn} = 0$ . Его решение

$$\xi_0^2 = \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) + \left[ \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + 1/x \right]^{1/2}, \quad (33)$$

где  $x = 3\mu/\alpha_{nr}^{(0)}$  определяет граничную расстройку  $\xi_0$ , разделяющую условия  $\alpha_m > \alpha_n$  ( $\xi < \xi_0$ ) и  $\alpha_n > \alpha_m$  ( $\xi > \xi_0$ ).

Если добротности мод одинаковы,  $\mu = 0$  и  $\xi_0 = \infty$ . В этом случае  $\xi$  всегда меньше  $\xi_0$  и, следовательно, с возбуждением типа колебаний (24) всегда возбуждается ортогональная ему мода.

Предположим теперь, что добротности мод  $E_{mk}$  и  $E_{nk}$  различны, например, отличаются на 3%, и условие возбуждения поля  $E_r(t, x)$  первоначально выполнено на 10%. Тогда  $x \sim 1$  и  $\xi_0^2 \approx 1,65$ . Если при этом аксиальные моды расстроены меньше, чем на 2,5  $\gamma_{ab}$ , возбуждается  $E_{mk}$ -тип колебаний; при  $\Delta > 2,5 \gamma_{ab}$  возбуждается  $E_{nk}$ -тип колебаний.

Автор благодарен А. Ф. Сучкову за советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. E. Lamb, Phys. Rev., 134, № 6A, 1429 (1964).
2. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, 49, 895 (1965).
3. А. Ф. Сучков, ЖЭТФ, 49, 1495 (1965).
4. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 48, 1087 (1965).
5. J. A. Fleck, R. E. Kidder, Phys. Rev., 36, № 7, 2327 (1965).
6. Э. М. Беленов, Е. П. Маркин, А. Ф. Сучков, ЖТФ, 38, 151 (1967).
7. W. R. Bennett, Appl. Optics Suppl. 2 of Chemical Laser, 3 (1965).
8. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, Оптика и спектроскопия, 18, 859 (1965).
9. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 44, 1050 (1963).
10. В. С. Летохов, А. Ф. Сучков, ЖЭТФ, 50, 1148 (1966).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
27 сентября 1966 г

\* Подобное утверждение строго справедливо для постоянной по  $x$  подкачки. В типичном лазере на благородных газах при малых мощностях подкачки  $\langle S_{1k} U_m^2 \rangle < \langle S_{1k} U_n^2 \rangle$ ; наоборот, при больших подкачках указанное неравенство меняет смысл. Это дает основание считать в среднем матричные элементы равными. В крайнем случае различие в величинах  $\langle S_{1k} U_n^2 \rangle$  и  $\langle S_{1k} U_m^2 \rangle$  можно включить в добротности соответствующих мод.

## INTERACTION OF MODES IN A GAS LASER

*E. M. Belenov*

Equations both for the axial and angular modes in a gas laser are given. The phase and amplitude mode interactions are taken into account at an arbitrary space form of the pumping power. The angular mode interaction with the same longitudinal field distribution is shown to lead to the hysteresis regimes of generation in a typical laser on noble gases. Excitation and generation of angular modes with different axial numbers are essentially coupled. Under definite conditions there are mostly excited the angular modes with orthogonal field distribution over the resonator mirror.

---

УДК 621.378.325

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКСИАЛЬНЫХ МОД В ГАЗОВОМ ОКГ

С. Г. Зейгер

В [1, 2] исследовалось взаимодействие двух волн, бегущих в противоположных направлениях в газовом генераторе бегущей волны (ГБВ), и было показано, что, если частоты  $\omega_1, \omega_2$  волн симметричны относительно центра линии ансамбля  $\omega_0$ , то имеет место эффект односторонней генерации — одна из двух волн гаснет\*. В настоящей работе рассматривается взаимодействие нескольких волн, бегущих в обоих направлениях в газовом ГБВ. Исследуется возможность эффекта односторонней генерации (ОГ) в многомодовых режимах. Все расчеты проводятся в приближениях 1) слабого поля, 2) большой ширины допплеровского контура по сравнению с естественной шириной ( $ku \gg \gamma_{ab}$ ), 3) большого коэффициента отражения  $r$  зеркал резонатора ( $1 - r \ll 1$ ).

## 1. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ В ГБВ

Поле в квантовом генераторе удовлетворяет уравнению [3]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\omega}{Q} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{c^2}{\epsilon} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{\epsilon} \omega^2 P, \quad (1)$$

где координата  $z$  отсчитывается вдоль оси резонатора ГБВ;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды без учета выделенного перехода;  $P(z, t)$  — поляризация выделенного перехода с инверсной заселенностью;  $Q$  — добротность резонатора. Если коэффициент отражения зеркал резонатора достаточно велик ( $1 - r \ll 1$ ), то потери на отражение также можно включить в добротность [4]. В этом приближении поле в ГБВ является суперпозицией бегущих волн, амплитуды которых не меняются вдоль оси резонатора:

$$E(z, t) = \sum_n E_n(t) \{ \exp [-i(\omega_n t + \varphi_n(t) - k_n z)] + \text{к. с.} \}. \quad (2)$$

Здесь  $k_n = 2\pi q_n / L$ ,  $L$  — длина резонатора,  $q_n$  — большое целое число.

Поляризация среды  $P(z, t)$  в двухуровневой системе определяется через недиагональные элементы матрицы плотности, усредненные по скоростям  $v$ . Матрица плотности  $\rho(z, t_0, t, v)$  атома, движущегося со скоростью  $v$  и приходящего в точку  $z$  в момент  $t_0$ , удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ab}}{dt} &= -i\omega_0 \rho_{ab} - \gamma_{ab} \rho_{ab} + iV(t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}), \\ \frac{d\rho_{aa}}{dt} &= -\gamma_a \rho_{aa} + \gamma_b + iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}), \\ \frac{d\rho_{bb}}{dt} &= -\gamma_b \rho_{bb} + \gamma_a + iV(t)(\rho_{ba} - \rho_{ab}). \end{aligned} \quad (3)$$

\* В [2] не учитывалось влияние модуляции заселенности, вследствие чего была обнаружена возможность односторонней генерации только в том случае, когда частоты волн различны ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ).

В (3)  $\omega_0$  — частота перехода;  $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$  — накачка атомов, движущихся со скоростью  $v$ , на уровни  $a$ ,  $b$  в единицу времени в единице объема;  $\gamma_a^{-1}$ ,  $\gamma_b^{-1}$  — времена жизни генерирующих уровней  $a$ ,  $b$ ;  $\gamma_{ab} \geq \frac{1}{2} (\gamma_a + \gamma_b)$  — ширина линии спонтанного излучения отдельного атома. Матричный элемент  $\hbar V(t)$  энергии взаимодействия движущегося атома с полем зависит от координаты атома  $z' = z + v(t - t_0)$ :

$$\hbar V(z, t) = -dE(z', t) = -dE[z + v(t - t_0), t],$$

где  $d$  — недиагональный матричный элемент дипольного момента между состояниями  $a$  (верхний уровень) и  $b$  (нижний).

Не рассматривая процессов установления для матрицы плотности, мы будем искать решение уравнений (3) в момент времени  $t$ , для которого  $t - t_{\text{нач}} \gg \gamma_a^{-1}; \gamma_b^{-1}; \gamma_{ab}^{-1}$ , где  $t_{\text{нач}}$  — момент включения накачки. Предполагая поле слабым [1-3],

$$\left( \frac{dE_n}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{\gamma_{ab}} \left( \frac{1}{\gamma_a} + \frac{1}{\gamma_b} \right) \ll 1, \quad (4)$$

будем решать систему (3) по теории возмущений, пренебрегая при интегрировании зависимостью амплитуд  $E_n$  и фаз  $\varphi_n$  от времени (считаем, что время релаксации поля  $T_{\text{рел}}$  больше, чем наибольшее из времен  $\gamma_a^{-1}, \gamma_b^{-1}, \gamma_{ab}^{-1}$ ). Решив систему (3) относительно разности заселенностей  $N = \rho_{aa} - \rho_{bb}$ , получим, что при наличии генерации более чем одной волны  $N$  состоит из двух членов: первый член постоянен в пространстве и во времени, а второй член зависит от разности фаз волн  $\varphi_{nm}$ , которая меняется в пространстве и во времени. Этот член, который мы будем обозначать  $N_{\text{mod}}$ , можно представить в виде

$$N_{\text{mod}} = -\frac{2N_0 d^2 D_{nm}^{(a)} E_m E_n \cos(\varphi_{nm} + \psi_{nm}^{(a)})}{\hbar^2 \gamma_{ab} \gamma_a \langle \{1 + [(\omega'_n - \omega_0)/\gamma_{ab}]^2\} \{1 + [(\omega'_m - \omega_0)/\gamma_{ab}]^2\} \rangle^{1/2}} + \quad (5)$$

+ замена.  
 $\gamma_a \longleftrightarrow \gamma_b$

Здесь  $\varphi_{nm} \equiv (\omega_n - \omega_m)t + \varphi_n - \varphi_m - (k_n - k_m)[z + v(t - t_0)]$  — разность фаз волн  $n$ ,  $m$  в момент  $t$  в точке  $z' = z + v(t - t_0)$ , в которой находится атом;  $\omega'_n = \omega_n - k_n v$ ;

$$D_{nm}^{(a)} = 2 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\omega'_n - \omega'_m}{2\gamma_{ab}} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{\omega'_n - \omega'_m}{\gamma_a} \right)^2 \right]^{-1} \right\}^{1/2}.$$

Отсюда видно, что имеется сдвиг фазы модуляции заселенности относительно фазы модуляции энергии поля  $\varphi_{nm}$  на величину  $\psi_{nm}^{(a)}$ . Этот сдвиг, характеризующий отставание модуляции заселенности от модуляции энергии поля, в основном, определяется разностью частот волн в системе атома  $\omega'_n - \omega'_m$ . Если частоты равны ( $\omega'_n = \omega'_m$ ), то сдвиг фаз  $\psi_{nm}$  равен нулю. Выпишем выражение для  $\psi_{nm}^{(a)}$  в случае симметричного относительно центра линии расположения частот ( $\omega'_n - \omega_0 = \omega_0 - \omega'_m$ ):

$$\operatorname{tg} \psi_{nm}^{(a)} = \frac{(\omega'_m - \omega'_n)(\gamma_a + 2\gamma_{ab})}{2[\gamma_a \gamma_{ab} - (\omega'_n - \omega'_m)^2/2]}. \quad (6)$$

Определим теперь поляризацию газовой среды. Для этого нужно просуммировать вклады в поляризацию атомов с различными скоростями:

$$P(z, t) = d \int [\rho_{ab}(z, t, t, v) + \rho_{ba}(z, t, t, v)] dv.$$

Распределение атомов по скоростям будем считать максвелловским:

$$\frac{\lambda_a(v)}{\lambda_a} = \frac{\lambda_b(v)}{\lambda_b} = \pi^{-1/2} u^{-1} \exp\left(-\frac{v^2}{u^2}\right).$$

Тогда выражение для поляризации среды имеет вид

$$\begin{aligned} P_n(t) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L P(z, t) \exp(-ik_n z) dz = & \frac{\epsilon}{2\pi\omega_n} E_n \times \\ & \times \exp[-i(\omega_n t + \varphi_n(t))] \left\{ M_n + E_n^2 R_n + E_m^2 L_{nm} + E_{s+n}^2 F_{ns} + \right. \\ & + \frac{E_m E_{s+n} E_g}{E_n} \delta_{smgn} H_{smg} \exp(-i\varphi_{smgn}) + \\ & \left. + \frac{E_{s+n} E_{j+n} E_p}{E_n} \delta_{sjpn} W_{sjp} \exp(-i\varphi_{sjpn}) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{smgn} &= (\omega_s + \omega_m - \omega_g - \omega_n) t + \varphi_s + \varphi_m - \varphi_g - \varphi_n, \\ \delta_{smgn} &= \begin{cases} 1, & k_s + k_m - k_g - k_n = 0 \\ 0, & k_s + k_m - k_g - k_n \neq 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8)$$

Индексы  $s, j, p$  относятся к волнам, бегущим в ту же сторону, что и волна  $n$ , а  $m, g$  — в противоположную. Коэффициенты  $R_n, L_{nm}$  при произвольных ширинах  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{ab}, ku$  приводятся в [2]. Приведем здесь коэффициенты взаимодействия в предельном случае неоднородного уширения  $\omega \gg ku \gg \gamma_{ab}, ku \gg |\omega - \omega_0|$ , ограничиваясь членами не выше второго порядка по  $\eta \equiv \gamma_{ab}/ku$ . Для удобства разделим вещественные и мнимые части:

$$\begin{aligned} M_n &= -\tau_n - i \left( \alpha_n + \frac{\delta\omega_p}{2} \right), \quad R_n = -\rho_n + i\beta_n, \\ L_{nm} &= -\tau_{nm} + i\theta_{nm}, \quad F_{ns} = -\lambda_{ns} + i\chi_{ns}, \\ H_{smg} &= -\psi_{smg} + i\vartheta_{smg}, \quad W_{sjp} = -\xi_{sjp} + i\mu_{sjp}, \\ \alpha_n &= \frac{\delta\omega_p}{2} \left[ \frac{N_0}{N_{\text{nop}}} (1 - \eta^2 f_n^2) - 1 \right], \quad \tau_n = \frac{-\delta\omega_p N_0 f_n \gamma_i}{N_{\text{nop}} \sqrt{\pi}}, \\ \beta_n &= BS(1 - \eta^2 |\zeta_n|^2), \quad \rho_n = 2BS\eta^2 f_n, \\ \theta_{nm} &= B \left[ S \frac{1 - (|\zeta_n|^2 + |\zeta_m|^2) \eta^2/2}{|\zeta_{nm}|^2} + 2\eta^2 \right], \\ \tau_{nm} &= BS \frac{f_{nm}(1 - \eta^2 |\zeta_m|^2) + 2\eta^2 f_n^m}{2|\zeta_{nm}|^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{ns} &= \frac{B}{\zeta_a |\zeta_n^s|^2} \left\{ 1 + \frac{\zeta_a - (f_n^s)^2/2}{\zeta_a |\zeta_n^s(a)|^2} \right\} + \underset{a \leftrightarrow b}{\text{замена}} + O(\eta^2), \\ \lambda_{ns} &= \frac{B f_n^s}{2 \zeta_a |\zeta_n^s|^2} \left\{ 1 + \frac{2 + \zeta_a}{\zeta_a |\zeta_n^s(a)|^2} \right\} + \underset{a \leftrightarrow b}{\text{замена}} + O(\eta^2), \\ \mu_{sjp} &= \frac{B}{|\zeta_{js}^s|^2 \zeta_a^2} \left\{ \frac{\zeta_a + f_{js}^p f_p^s/2}{|\zeta_p^s(a)|^2} + \underset{j \leftrightarrow s}{\text{замена}} (1 - \delta_{js}) \right\} + \underset{a \leftrightarrow b}{\text{замена}} + O(\eta^2), \\ \xi_{sjp} &= \frac{B}{|\zeta_{js}^p|^2 \zeta_a^2} \left\{ \frac{-f_p^s + \zeta_a f_{js}^p/2}{|\zeta_p^s(a)|^2} + \underset{j \leftrightarrow s}{\text{замена}} (1 - \delta_{js}) \right\} + \underset{a \leftrightarrow b}{\text{замена}} + O(\eta^2), \\ \eta_{smg} &= \frac{B (2 \zeta_a + f_g^m f_{smg})}{2 \zeta_a^2 |\zeta_{smg}|^2 |\zeta_g^m(a)|^2} + \underset{a \leftrightarrow b}{\text{замена}} + O(\eta^2), \\ \psi_{smg} &= \frac{B (2 f_m^g + \zeta_a f_{smg})}{2 \zeta_a^2 |\zeta_g^m(a)|^2 |\zeta_{smg}|^2} + \underset{a \leftrightarrow b}{\text{замена}} + O(\eta^2).\end{aligned}$$

Здесь  $\delta\omega_p = \omega_n/Q_n$  — ширина линии резонатора,  $N_0 = \lambda_a/\gamma_a - \lambda_b/\gamma_b$ ,

$$\begin{aligned}N_{\text{нор}} &= \frac{\hbar k u \varepsilon}{4\pi^{3/2} Q_n d^2}, \quad \eta = \frac{\gamma_{ab}}{k u}, \quad S = \frac{1}{\zeta_a} + \frac{1}{\zeta_b}, \quad \zeta_a = \frac{\gamma_a}{\gamma_{ab}}, \\ B &= \frac{d^2 \delta\omega_p N_0}{2\hbar^2 \gamma_{ab}^2 N_{\text{нор}}} , \quad \zeta_n = 1 - i f_n, \quad f_n = \frac{\omega_n - \omega_0}{\gamma_{ab}}, \quad \delta_{js} = \begin{cases} 1 & (j=s) \\ 0 & (j \neq s) \end{cases}, \\ f_n^s &= \frac{\omega_n - \omega_s}{\gamma_{ab}}, \quad \zeta_n^s = 1 - i \frac{f_n^s}{2}, \quad \zeta_n^s(a) = 1 - i \frac{\zeta_a}{\zeta_a} f_n^s, \quad (10) \\ f_{nm} &= \frac{\omega_n + \omega_m - 2\omega_0}{\gamma_{ab}}, \quad \zeta_{nm} = 1 - i \frac{f_{nm}}{2}, \quad f_{js}^p = \frac{\omega_j + \omega_s - 2\omega_p}{\gamma_{ab}}, \\ \zeta_{js}^p &= 1 - i \frac{f_{js}^p}{2}, \quad f_{smg} = \frac{\omega_s + 2\omega_m - \omega_g - 2\omega_0}{\gamma_{ab}}, \quad \zeta_{smg} = 1 - i \frac{f_{smg}}{2}.\end{aligned}$$

Подставив выражение для поляризации среды (7) в уравнения поля (1), получим, что при наличии генерации более двух пар волн, бегущих в противоположных направлениях, эти уравнения содержат члены, осциллирующие с частотой  $d\varphi_{smg}/dt$  (см. (8)):

$$\frac{d}{dt} \varphi_{smg} = \omega_s + \omega_m - \omega_g - \omega_n = 2(\omega_s - \omega_n) \approx 2(\Omega_s - \Omega_n),$$

где  $\Omega_s - \Omega_n \approx 2\pi c/L$  — разность частот двух продольных мод резонатора. Эти члены вызывают осцилляции амплитуд с той же частотой:  $E_n = E_n^0 + E'_n \cos [2(\Omega_s - \Omega_n) t - \psi]$ . Однако при

$$\alpha_n \ll |\Omega_s - \Omega_n| \quad (11)$$

амплитуда этих осцилляций мала по сравнению со средней амплитудой поля  $E'_n \leq \alpha_n E_n^0 / |\Omega_s - \Omega_n| \ll E_n^0$ , т. е. поле не успевает реагировать на быстрые осцилляции диэлектрической проницаемости среды. Полагая, что условие (11) выполняется, получим систему амплитудных и фазовых

уравнений [3] для усредненных за время  $T_{sn} = 2\pi/|\Omega_s - \Omega_n|$  величин  $E_n$ ,  $\omega_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{dE_n}{dt} &= E_n \left[ \alpha_n - \beta_n E_n^2 - \theta_{nm} E_m^2 - \gamma_{ns} E_{s+n}^2 - \frac{E_{s+n}, s < j E_{j+n} E_p}{E_n} \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta_{sjpn} (\mu_{sjp} \cos \varphi_{sjpn} + \xi_{sjp} \sin \varphi_{sjpn}) \right], \\ \frac{d\varphi_n}{dt} + \omega_n - \Omega_n &= \omega_n + \beta_n E_n^2 + \gamma_{nm} E_m^2 + \lambda_{ns} E_{s+n}^2 + \\ &+ \frac{E_{s+n}, s < j E_{j+n} E_p}{E_n} \delta_{sjpn} (\xi_{sjp} \cos \varphi_{sjpn} - \mu_{sjp} \sin \varphi_{sjpn}). \end{aligned} \quad (12)$$

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ БЕГУЩИХ ВОЛН

При генерации двух волн в ГБВ амплитуды волн не зависят от их фаз (см. (12)), вследствие чего при рассмотрении устойчивости можно исследовать одни амплитудные уравнения\*

$$\frac{dE_n}{dt} = E_n (\alpha_n - a_{ns} E_s^2) \quad (n, s = 1, 2). \quad (13)$$

Источником многих интересных эффектов в газовом лазере является различие взаимодействия волн, бегущих в одном направлении ( $a_{nn} \equiv \beta$ ;  $a_{ns} = \gamma_{ns}$ ), и волн, бегущих в противоположных направлениях ( $a_{ns} = -\theta_{ns}$ ). Эта разница определяется различием величины модуляции заселенности газового ансамбля в случае волн, бегущих в одном направлении, и волн, бегущих в противоположных направлениях. В самом деле, при наличии генерации двух волн в ГБВ заселенность атомов с любой скоростью  $v$  модулирована в пространстве и во времени, причем, если частоты волн в системе атома не равны, то модуляция заселенности сдвинута по фазе относительно модуляции энергии поля на величину  $\psi_{ns}(\omega_n, \omega'_s)$  (см. (6)). Разность частот в системе атома

$$\omega'_n - \omega'_s = \omega_n - \omega_s - (k_n - k_s) v.$$

Если волны бегут в одном направлении, то, так как  $(k_n - k_s)v/(\omega_n - \omega_s) = v/c \ll 1$ , разность частот волн для всех атомов постоянна и сдвиг фаз  $\psi_{ns}$  одинаков. Поэтому среднее по ансамблю значение модуляции заселеностей отлично от нуля и сдвинуто по фазе относительно фазы модуляции энергии поля на величину  $\psi_{ns}$  (6). Если же волны бегут в противоположных направлениях, то  $k_n = -k_s$ , и в зависимости от скорости атома разность частот пробегает значения  $-ku \leq \omega'_n - \omega'_s \leq ku$  ( $|\omega_n - \omega_s| \ll ku$ ). При этом, поскольку  $ku \gg \gamma_{ab}$ , сдвиг фаз  $\psi_{ns}$  пробегает все значения от  $-\pi$  до  $\pi$  (см. (6)) и суммарное значение модуляции заселеностей, как показывают расчеты, равно нулю:  $\int N_{\text{mod}}(v) dv = 0(\gamma^2)$ .

\* Коэффициенты  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\theta_{ns}$ ,  $\gamma_{ns}$  зависят от частот волн, поэтому при рассмотрении амплитудной устойчивости следует, вообще говоря, учитывать изменения частот, которые согласно фазовым уравнениям (12) связаны с флуктуациями амплитуд. Однако можно проверить, что учет флуктуаций частот при вычислении области устойчивости  $m$ -волновых режимов приводит к поправкам порядка  $\delta\omega_p\gamma_{ab}/(ku)^2$ ,

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0 [1 + O(\delta\omega_p\gamma_{ab}/(ku)^2)],$$

где  $\Delta\omega_0$  вычисляются без учета флуктуаций частот (см. (15), (16)).

Иными словами, модуляция заселеностей в случае волн, бегущих в противоположных направлениях, в первом приближении по  $\eta$  не влияет на взаимодействие волн.

Двухволновой режим существует и устойчив [1-3], если

$$\Delta \equiv \beta_1 \beta_2 - \theta_{12} \theta_{21} > 0; \quad (14a)$$

$$\frac{a_{12}}{\beta_2} < \frac{\alpha_1}{\sigma_2} < \frac{\beta_1}{a_{21}}. \quad (14b)$$

В случае двух волн, бегущих в противоположных направлениях, условие устойчивости (14a) (где  $a_{nm} = \theta_{nm}$ ) не выполнено при симметричных частотах [1]

$$\left| \frac{\omega_n + \omega_m}{2} - \omega_0 \right| \leq \frac{\gamma_{ab}}{ku} \sqrt{\gamma \gamma_{ab}} \quad (\gamma \approx \gamma_a \approx \gamma_b). \quad (15)$$

При таких частотах взаимодействие волн максимально, так как они генерируют на одних и тех же атомах («выедают» провалы в контуре усиления в одном и том же месте). Неустойчивость двухволнового режима при полном перекрытии «провалов» определяется остаточным влиянием модуляции заселеностей  $N_{\text{мол}} \approx 0(\gamma^2)$ ; без учета этого влияния получили бы безразличное равновесие.

В случае волн, бегущих в одном направлении, двухволновой режим является неустойчивым на близких частотах (условие (14a) при  $a_{ns} = \gamma_{ns}$  не выполняется):

$$\begin{aligned} |\omega_n - \omega_s| &\leq |\omega_n - \omega_0|, \\ |\omega_n - \omega_s|_0 &= \sqrt{a \gamma \gamma_{ab}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $a(\gamma_{ab}/\gamma)$  медленно растет с ростом  $\gamma_{ab}/\gamma$  ( $a(1) = 1$ ,  $a(\infty) = 1,23$ ).

При сравнении режимов одновременной генерации двух волн, бегущих в одном и в противоположных направлениях, обращает на себя внимание тот факт, что величины областей неустойчивости этих режимов различны (отличаются в  $ku/\gamma_{ab} \gg 1$  раз).

Это объясняется большой величиной модуляции заселеностей в случае генерации двух волн в одном направлении на близких частотах. Так как в этом случае заселенность модулирована в противофазе с полем ( $\psi_{nm} \approx 0$ ), то вынужденное излучение меньше, чем в случае постоянной заселенности ( $N_{\text{мол}} = 0$ ), который осуществляется при генерации одной волны, а также (с точностью до  $\eta^2$ ) при генерации волн в противоположных направлениях. Поэтому конкуренция волн, бегущих в одном направлении на близких частотах, сильнее, чем конкуренция волн, бегущих в противоположных направлениях на симметричных частотах.

### 3. ЭФФЕКТ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ГЕНЕРАЦИИ (ОГ) В ДВУХМОДОВОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим взаимодействие четырех волн: двух (1, 3), бегущих в одном направлении, и двух (2, 4), бегущих в противоположном направлении на тех же частотах  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\omega_3 = \omega_4$ , причем частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  симметричны относительно центра линии. В этом случае уравнения поля имеют вид (13), где  $n, s = 1, \dots, 4$ . Стационарные решения этих уравнений могут содержать  $m$  волн:

$$E_l^2 = \frac{\Delta_l^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \quad (0 \leq l \leq m), \quad E_{m+1} = E_{m+2} = \dots = 0, \quad (17)$$

где

$$\Delta^{(m)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad \Delta_l^{(m)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1l-1} a_1 a_{l+1} \dots a_{1m} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{ml-1} a_m a_{l+1} \dots a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Для того, чтобы  $m$ -волновой режим существовал и был внутренне устойчив по отношению к гашению одной из генерирующих волн, необходимо выполнение условий

$$\Delta^{(m)} > 0, \quad \Delta_l^{(m)} > 0 \quad (0 \leq l \leq m). \quad (18)$$

Для того, чтобы этот  $m$ -волновой режим (17) был внешне устойчив по отношению к возникновению  $m+1$ -й волны, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{1}{\delta E_{m+1}} \frac{d\delta E_{m+1}}{dt} = \sigma_{m+1} - \sum_{l=1}^m a_{m+1,l} E_l^2 = \frac{\Delta_{m+1}^{(m+1)}}{\Delta^{(m)}} < 0. \quad (19)$$

Отсюда следует, что для доказательства внутренней неустойчивости  $m+1$ -волнового режима (т. с. для доказательства того, что по крайней мере одно из условий (18) не выполнено:  $\Delta_l^{(m+1)} < 0$ ) достаточно показать, что 1) либо один из  $m$ -волновых режимов является устойчивым как внутренне ( $\Delta^{(m)} > 0$ ), так и внешне,  $(\delta E_{m+1})^{-1} d\delta E_{m+1}/dt < 0$ , 2) либо один из  $m$ -волновых режимов является неустойчивым как внутренне ( $\Delta^{(m)} < 0$ ), так и внешне,  $(\delta E_{m+1})^{-1} d\delta E_{m+1}/dt > 0$ . Используя утверждения 1, 2 при рассмотрении возможных устойчивых режимов четырех волн на симметричных частотах, можно ограничиться рассмотрением двухволновых режимов (все трехволновые и четырехволновой режимы неустойчивы).

Рассмотрим двухволновые режимы генерации, которых может быть два: 1) генерируются две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях на одной частоте (1 и 2 или 3 и 4); 2) генерируются две волны, распространяющиеся в одном направлении на разных частотах (1 и 3 или 2 и 4). Рассмотрим устойчивость обоих режимов.

1) В случае генерации на одной частоте в разных направлениях (1 и 2) стационарное решение имеет вид

$$E_1^2 = E_2^2 = \frac{\alpha}{\beta + \theta_{12}}.$$

Условие устойчивости относительно возникновения волн на частоте  $\omega_3$  имеет вид

$$\frac{1}{\delta E_3} \frac{d\delta E_3}{dt} = \alpha - (\theta_{32} + \chi_{31}) E_1^2 = \alpha \left( 1 - \frac{\theta_{32} + \chi_{31}}{\beta + \theta_{12}} \right) < 0.$$

Отсюда (см. (9)) можно получить условие устойчивости одночастотного режима

$$\theta_{12} - \chi_{13} - \frac{2}{S} \beta \gamma^2 < 0. \quad (20a)$$

\* Режим одновременной генерации двух волн в противоположных направлениях на симметричных частотах  $\omega_1, \omega_3$  является внутренне неустойчивым (см. раздел 2). Поэтому мы его рассматривать не будем.

2) Легко убедиться, что условие устойчивости режима одионаправленной генерации относительно возникновения волн в противоположном направлении при  $\eta^2 \rightarrow 0$  альтернативно условию (20а):

$$\chi_{13} - \theta_{12} - \frac{2}{S} \beta \eta^2 < 0 \quad \left( E_1^2 = E_3^2 = \frac{\sigma}{\beta + \chi_{13}} \right). \quad (20б)$$

Сравним значения коэффициентов  $\chi_{13}$  и  $\theta_{12}$  (см. (9)). Первые члены в  $\chi_{13}$  и  $\theta_{12}$  совпадают. Эти члены определяются перекрытием провалов в контуре усиления (немодулированной частью заселенности), которое одинаково при взаимодействии волн 1, 3 и 1, 2, так как волны 2, 3 генерируют на одних и тех же атомах («выедают» провал в одном месте). Различие коэффициентов  $\chi_{13}$  и  $\theta_{12}$  определяется исключительно модуляцией заселенности при генерации волн в одном направлении — вторым слагаемым в  $\chi_{13}$  (модуляция заселенности в случае волн, бегущих в противоположных направлениях, равна  $0(\eta^2)$ , см. раздел 2). При малой разности частот  $|\omega_n - \omega_s| < |\omega_n - \omega_s|_0$  заселенность модулирована в противофазе с полем:  $|\psi_{nm}| < \pi/2$ . Вследствие этого (см. раздел 2) режим двух волн, бегущих в противоположных направлениях, энергетически выгоднее режима ОГ (1, 3):  $\chi_{13} > \theta_{12}$ . При большой разности частот  $|\omega_n - \omega_s| > |\omega_n - \omega_s|_0$  максимумы заселенности находятся в тех же местах, что и максимумы поля:  $|\psi_{nm}| > \pi/2$ . Поэтому вынужденное излучение в режиме ОГ большие, чем в режиме двух волн, бегущих в противоположных направлениях:  $\chi_{13} < \theta_{12}$ . Граница устойчивости режимов 1) и 2)

$$|\omega_n - \omega_s|_0 = \sqrt{2\gamma\gamma_{ab}} \quad (\gamma_a \approx \gamma_b = \gamma). \quad (21)$$

Если  $\eta = 0$ , режим 1) устойчив при  $2\pi c/L \simeq |\omega_1 - \omega_3| < \sqrt{2\gamma\gamma_{ab}}$ , а режим 2) — при  $2\pi c/L > \sqrt{2\gamma\gamma_{ab}}$ .

Рассмотрим область устойчивости  $\delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3) - \omega_0$  режима ОГ. Несимметричное расположение частот  $|\delta\omega| > \delta_{00}$  приводит к различиям в противоположном направлении, т. е.

$$\frac{1}{\delta E_2} \frac{d\delta E_2}{dt} = \sigma_2 - \theta_{21}E_1^2 - \theta_{23}E_3^2 \geq 0. \quad (22a)$$

Несимметричное расположение частот  $\omega_1 - \omega_0 \neq \omega_0 - \omega_3$  приводит к различию усилений  $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$ . Вследствие этого область ОГ зависит от начакки  $(\alpha_1 - \alpha_3)/(\alpha_1 + \alpha_3)$ . Полагая  $|\delta_{00}| \ll \Delta\omega \equiv |\omega_1 - \omega_3|$ , получим из (22а), (9)

$$\left| \frac{\delta_{00}\omega}{\gamma_{ab}} \right| = \left| \frac{2G - [4G^2 + (\theta_{21}^{(0)} - \chi_{13})(\beta + \chi_{13} - \theta_{21}^{(0)})]^{1/2}}{\beta + \chi_{13} - \theta_{21}^{(0)}} \right|, \quad (22б)$$

где  $G = G_1 - G_2$ ,  $G_1 \equiv \Delta\omega\gamma_{ab}C/(\Delta\omega_{\text{поп}}^2 - \Delta\omega^2)$ ,

$$G_2 \equiv (\theta_{21}^{(0)})^2 \Delta\omega/4\beta\gamma_{ab}, \quad C \equiv \frac{(\beta + \chi_{13})(2\beta - \chi_{13} - \theta_{21}^{(0)})}{\beta - \chi_{13}} \simeq 2\beta,$$

$$\theta_{21}^{(0)} = \frac{\beta}{1 + \Delta\omega^2/4\gamma_{ab}^2}, \quad \Delta\omega \equiv |\omega_1 - \omega_3| \simeq 2\pi c/L,$$

$\Delta\omega_{\text{поп}} = |\omega_{\text{поп}1} - \omega_{\text{поп}2}|$ ;  $\omega_{\text{поп}1, 2}$  — частоты, на которых достигается пороговое условие генерации:  $\sigma(\omega_{\text{поп}1}) = \sigma(\omega_{\text{поп}2}) = 0$ ;  $\theta_{21}^{(0)}$  — коэффициент

взаимодействия волн 1, 2 при симметричных частотах ( $\delta\omega = 0$ ). Как следует из (22б), с уменьшением накачки ( $\Delta\omega_{\text{нор}}$ ) область ОГ монотонно уменьшается:

$$\left| \frac{\delta_0\omega}{\gamma_{ab}} \right| \simeq \frac{\theta_{12}^{(0)} - \gamma_{13}}{4C |G|} = \frac{(\Delta\omega^2/2\gamma_{ab}^2 - \gamma/\gamma_{ab}) \gamma_{ab} (\Delta\omega_{\text{нор}} - \Delta\omega)}{4\gamma^2(1 + \Delta\omega^2/\gamma^2) (1 + \Delta\omega^2/4\gamma_{ab}^2)}, \quad (22\text{в})$$

$$\Delta\omega_{\text{нор}} \rightarrow \Delta\omega.$$

Из (22б) получим предельную область ОГ, которая может быть достигнута при увеличении накачки ( $G \rightarrow 0$ ):

$$\left| \frac{\delta_0\omega}{\gamma_{ab}} \right| \simeq \left[ \frac{\theta_{12}^{(0)} - \gamma_{13}}{\beta + \gamma_{13} - \theta_{12}^{(0)}} \right]^{1/2} =$$

$$= \left[ \frac{\Delta\omega^2/2\gamma_{ab}^2 - \gamma/\gamma_{ab}}{\Delta\omega^4/4\gamma\gamma_{ab}^3 + \Delta\omega^2/\gamma_{ab}^2 (\gamma/4\gamma_{ab} + \gamma_{ab}/\gamma - 1/2) + 2\gamma/\gamma_{ab}} \right]^{1/2}. \quad (22\text{г})$$

Максимум  $\delta_0\omega$  достигается при  $|\omega_1 - \omega_3| \approx 2,2 \sqrt{\gamma\gamma_{ab}}$  и при  $\gamma = \gamma_{ab}$  имеет значение порядка 0,35 γ (см. 22г).

Из сравнения областей ОГ в одномодовом (15) и двухмодовом (22) режимах видно, что при оптимальной разности частот волн (см. (22г)) и достаточно большой накачке область односторонней генерации в двухмодовом режиме в  $ku/\gamma_{ab} \gg 1$  раз больше, чем в одномодовом.

#### 4. ЭФФЕКТ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ГЕНЕРАЦИИ В ТРЕХМОДОВОМ РЕЖИМЕ

При увеличении числа  $M$  генерирующих частот ( $M > 2$ ) в уравнениях поля появляются качественно новые члены (см. (12), (13)). Две волны с волновыми векторами  $k_s$ ,  $k_j$  вследствие нелинейности среды приводят к появлению новых волн с волновыми векторами  $k_n = 2k_s - k_j$  и соответственно частотами  $2\omega_s - \omega_j$ . Вследствие этого в уравнениях для  $n$ -ой волны имеются члены, зависящие от разности фаз  $\varphi_{ssjn}$ : фазы  $\varphi_n + \omega_n t$   $n$ -ой волны и фазы  $(2\omega_s - \omega_j)t + 2\varphi_s - \varphi_j$  вынуждающей силы в  $n$ -ом типе колебаний, которая возникает при генерации волн  $s$ ,  $j$ .

При рассмотрении влияния этих членов на режим односторонней генерации мы ограничимся случаем трех частот генерации  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\omega_3 = \omega_4$ ,  $\omega_5 = \omega_6$ , расположенных симметрично относительно центра линии:  $\omega_3 - \omega_0 = \omega_0 - \omega_5$ ,  $\omega_1 = \omega_0$ . Выпишем уравнения поля (12) в режиме односторонней генерации ( $E_2 = E_4 = E_6 = 0$ ,  $E_3 = E_5$ ):

$$\frac{1}{E_1} \frac{dE_1}{dt} = \alpha_1 - \beta E_1^2 - [2\gamma_{13} + \mu_{351} \cos \varphi] E_3^2 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{1}{E_3} \frac{dE_3}{dt} = \alpha_3 - [\gamma_{13} + \mu_{115} \cos \varphi] E_1^2 - [\beta + \chi_{35}] E_3^2 = 0;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2[E_1^2 \mu_{115} + E_3^2 \mu_{351}] \sin \varphi, \quad (24)$$

$$\varphi \equiv \varphi_{1135} = [(\omega_1 - \omega_3) - (\omega_5 - \omega_1)] t + (\varphi_1 - \varphi_3) - (\varphi_5 - \varphi_1),$$

где  $\varphi$  — разность фаз биений с частотой  $\omega_1 - \omega_3 = \omega_5 - \omega_1 = \Delta\omega$ . Стационарное решение амплитудных уравнений (23) описывается формулами (17), где  $\alpha_{11} = \beta$ ,  $\alpha_{33} = \beta + \chi_{35}$ ,  $\alpha_{13} = 2\gamma_{13} + \mu_{351} \cos \varphi$ ,  $\alpha_{31} = \chi_{13} + \mu_{115} \cos \varphi$ .

Рассмотрим фазовое уравнение (24). Оно имеет два стационарных решения:  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$ , причем устойчиво лишь одно из них\*. Если

$$\frac{E_3^2}{E_1^2} < -\frac{\mu_{115}}{\mu_{351}} = \frac{(\omega_3 - \omega_0)^2 - \gamma^2}{2[(\omega_3 - \omega_0)^2 + \gamma^2]} \quad (\gamma = \gamma_a = \gamma_b = \gamma_{ab}), \quad (25)$$

то устойчиво решение  $\varphi = 0$ . При увеличении накачки отношение мощностей боковой и центральной волн растет и условие (25) может не выполняться. В этом случае, т. е. при  $E_3^2/E_1^2 > -\mu_{115}/\mu_{351}$ , устойчивой является фаза  $\varphi = \pi$ .

Рассмотрим условие устойчивости режима ОГ по отношению к возникновению генерации в противоположном направлении (см. (19)). Легко проверить, что при  $\varphi = 0$  устойчивость режима ОГ определяется конкуренцией волн, бегущих в одном направлении, с центральной волной  $E_2$ , распространяющейся в противоположном направлении. Условие устойчивости при этом имеет вид  $2(\gamma_{13}-\theta_{13})+\mu_{351} \leq 0$ , что выполняется при

$$|\omega_1 - \omega_3| > 2\sqrt{2}\gamma \quad (\gamma = \gamma_a = \gamma_b = \gamma_{ab}). \quad (26)$$

Если энергия боковых волн велика (см. (25)), то  $\varphi=\pi$ . При этом устойчивость режима ОГ определяется устойчивостью по отношению к возникновению боковых волн  $E_4, E_6$ , что имеет место во всяком случае при

$$|\omega_1 - \omega_3| \geq \gamma\sqrt{5}. \quad (27)$$

Приведем выражение для ширины области ОГ  $\delta\omega \equiv |\omega_1 - \omega_0| < \delta_0\omega$  в случае  $\varphi = 0$  при большой накачке (см. вывод (22г)):

$$\left| \frac{\delta_0\omega}{\gamma} \right|^2 = \frac{\gamma^2 + K(y)E_3^2/3E_1^2}{1 - \gamma^2 - K(y)E_3^2/3E_1^2} \quad \left( \gamma \equiv \frac{\gamma}{ku} \right), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{K(y)}{3} &= \frac{1}{\beta} [2(\theta_{23} - \gamma_{13}) - \mu_{351}] = \frac{2[\Delta\omega^2 - 8\gamma^2]\gamma^2}{[\gamma^2 + \Delta\omega^2][4\gamma^2 + \Delta\omega^2]}, \\ \Delta\omega &= |\omega_1 - \omega_3|. \end{aligned}$$

Максимальное значение  $\delta_0\omega = 0,22E_3\gamma/E_1$  ( $\gamma/ku \rightarrow 0$ ) и достигается при  $|\omega_3 - \omega_1| \approx 4,3\gamma$ .

Из сравнения (26)–(28) и (21), (22) видно, что область ОГ в трехмодовом режиме меньше, чем в двухмодовом. Это объясняется наличием двух сигналов биений с частотой  $\omega_1 - \omega_3 - \omega_1$  в трехмодовом режиме и их интерференцией. Вследствие этой интерференции в активной среде возникает дополнительная перекачка энергии из более сильных мод (в смысле условия (25)) в более слабые. В результате энергия более сильной моды  $E_k$  уменьшается, что приводит к ослаблению устойчивости относительно волны  $E_{2k}$ , бегущей в противоположном направлении на симметричной  $\omega_k$  частоте ( $k=1,3$ ).

\* При рассмотрении устойчивого значения фазы следует учитывать появление несимметрии амплитуд ( $E_3 \neq E_5$ ) при флукутации фазы  $\sin \varphi \neq 0$ . При учете этой несимметрии области устойчивости режимов  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  неальтернативны. Режим  $\varphi = 0$  устойчив, если  $E_3^2 E_1^{-2} < -\mu_{115} \mu_{351}^{-1} [1 - A_0(\Delta\omega/\gamma)]$ , где  $A_0$  меняется от  $A_0(\sqrt{5}) = 0,37$  до  $A_0(\infty) = 0$ . Режим  $\varphi = \pi$  устойчив, если  $E_3^2 E_1^{-2} > -\mu_{115} \mu_{351}^{-1} [1 - A_\pi(\Delta\omega/\gamma)]$  ( $A_\pi \times (\Delta\omega/\gamma) > A_0(\Delta\omega/\gamma)$ ,  $A_\pi(\sqrt{5}) = 0,46$ ,  $A_\pi(\infty) = 0$ ).

## 5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

В экспериментах Мосса [5] с лазером на  $\text{He}-\text{Ne}$ , генерирующим на  $\lambda=3,39 \mu$ , была замечена ОГ при некоторых оптических длинах резонатора, отстоящих друг от друга на  $\lambda$ . При малых мощностях генерации эффект отсутствовал, при некоторых средних он был максимальен, при дальнейшем увеличении мощности генерации—уменьшался (отношение интенсивностей между встречными волнами падало до 3:1 по сравнению с 50:1 при оптимальных условиях). Этот эксперимент может быть объяснен изложенной выше теорией. Наличие односторонней генерации только при некоторых длинах резонатора, отстоящих друг от друга на  $\lambda$ , говорит о том, что возможность односторонней генерации в данном эксперименте зависит от положения частоты резонатора в контуре усиления. При отсутствии теплового движения атомов ( $ku \ll \gamma_{ab}$ ) генерация двух волн на одной частоте невозможна никогда [1]. Зависимость режима генерации от положения частоты в контуре усиления связана исключительно с тепловым движением атомов. Поэтому, хотя в переходе  $\lambda = 3,39 \mu$  однородная ширина ( $2\gamma_{ab} = 230 \text{ M} \cdot \text{гц}$ ) и допплеровская ширина ( $2ku \sqrt{\ln 2} = 315 \text{ M} \cdot \text{гц}$ ) [6] имеют один порядок, мы применим наши результаты, полученные в предельном случае неоднородного уширения, для объяснения эксперимента. В экспериментах [5]  $2\pi c/L = 122 \text{ M} \cdot \text{гц}$ . Так как  $\Delta\omega/\gamma_{ab} = 1,06 < \sqrt{2}$ , то (см. (21)) односторонняя генерация возможна только в одномодовом режиме, когда частота генерации совпадает с центром линии. Это объясняет тот факт, что односторонняя генерация наблюдалась при изменении длины резонатора на  $\lambda$ , а не на  $\lambda/2$ , как ожидали авторы [5]. Отсутствие эффекта на пороге объясняется отражениями на неоднородностях. Появление генерации в противоположном направлении при увеличении накачки может быть объяснено как появлением следующих поперечных мод [5], так и появлением следующих продольных мод, так как условия (26), (27) многоходовой односторонней генерации не выполнены\*.

Автор благодарит Э. Е. Фрадкина за полезные обсуждения в ходе работы, а также М. П. Чайку за советы при написании работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, Оптика и спектроскопия, 21, 386 (1966).
2. F. Aranowitz, Phys. Rev., 139, A 635 (1965).
3. W. E. Lamb, Phys. Rev., 134, A 1429 (1964).
4. Дж. Слэттер, Электропика сверхвысоких частот, М., 1948.
5. T. S. Moss, D. E. Killick, E. T. de la Perrière, Infrared Phys., 4, 209 (1964).
6. W. R. Bennett, S. F. Jacobs, J. L. la Tourrette, P. Rabinowitz, Appl. Phys. Lett., 5, 56 (1964).
7. T. J. Hutchings, J. Winocur, R. H. Durrett, E. D. Jacobs, W. L. Zingeguy, Phys. Rev., 152, 467 (1966).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
11 февраля 1966 г

\* После того, как данная работа была направлена в печать, была опубликована работа [7], в которой экспериментально исследовался эффект односторонней генерации не только в одномодовом, но и в двухмодовом режиме в кольцевом лазере  $\text{He}-\text{Ne}$  ( $\lambda = 0,63 \mu$ ,  $\Delta\omega = 510 \text{ M} \cdot \text{гц}$ , давление 2,5  $\text{мм}$  рт. ст.). В двухмодовом режиме в [7] получена область ОГ  $\Delta\omega \lesssim 1 \text{ M} \cdot \text{гц}$ . Наблюдалось уменьшение области ОГ при уменьшении накачки, что согласуется с нашей теорией. Авторы [7] высказывают мнение, что область ОГ в двухмодовом режиме должна быть всегда меньше, чем в одномодовом. Наше рассмотрение (раздел 3) показывает, что область ОГ в двухмодовом режиме зависит от параметров лазера ( $\Delta\omega_{\text{пор}}, 2\pi c/L = \Delta\omega, \gamma, \gamma_{ab}$ ) и может быть как больше, так и меньше, чем в одномодовом режиме. Малость ОГ в двухмодовом режиме в эксперименте [7] объясняется как малостью накачки (см. (22в)), так и слишком большим частотным расстоянием между модами, далеком от оптимального  $\Delta\omega \approx 2,2 \sqrt{\gamma\gamma_{ab}}$  (см. (22)).

## INTERACTION OF AXIAL MODES IN A GAS LASER

*S. G. Zeyger*

In papers<sup>[1,2]</sup> the interaction of two waves travelling in the opposite directions in a travelling-wave gas generator was investigated. It was also shown that if the frequencies,  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are symmetric relative to the central line,  $\omega_0$ , the effect of a unidirectional generation takes place, i. e. one of two waves is damped. The present paper is concerned with interaction of several waves travelling in both directions in the travelling-wave gas generator. The possibility of an unidirectional generation effect in multimode regimes is considered. The calculations are made under the assumptions: 1) a weak field, 2) a great width of a Doppler circuit in comparison with the natural width ( $ku \gg \gamma_{ab}$ ), 3) a large reflection coefficient  $r$  of the resonator mirrors ( $1 - r \ll 1$ ).

---

УДК 621 378 001 : 539 285

## О РЕЛАКСАЦИОННОМ СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕИШИХ СИСТЕМ

*M. M. Альперин*

Исследуется релаксация двухуровневой системы и системы гармонических осцилляторов. Эволюция произвольного начального распределения определяется суперпозицией главных начальных распределений. Последние характеризуются минимальным порядком отклонения момента данного начального распределения от стационарного. Найдены выражения для времени релаксации главных распределений

### 1. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА В ПРОСТРАНСТВЕ ЧИСЕЛ ЗАПОЛНЕНИЯ

В квантовой теории релаксации часто пользуются уравнением баланса, описывающим эволюцию подсистемы с конечным числом степеней свободы, взаимодействующей с диссипативной подсистемой, обладающей бесконечным числом степеней свободы. Это уравнение имеет вид

$$\frac{dW_\alpha}{dt} = \sum_{\beta} (P_{\beta\alpha} W_\beta - P_{\alpha\beta} W_\alpha). \quad (1)$$

В уравнении (1) индекс  $\alpha$  нумерует состояние подсистемы,  $W_\alpha$  — вероятность состояния  $\alpha$  и  $P_{\beta\alpha}$  — вероятность перехода  $\beta \rightarrow \alpha$ , рассчитанная на единицу времени.

В дальнейшем исследуемую подсистему будем называть просто системой. Эволюция системы в общем случае определяется выражением

$$W_\alpha = W_\alpha^{\text{ст}} + \sum_k C_\alpha^k \exp(-\lambda_k t),$$

в котором  $W_\alpha^{\text{ст}}$  — стационарное значение вероятности, а коэффициенты  $C_\alpha^k$  определяются начальными условиями. Совокупность постоянных распада  $\lambda_k$  ( $\lambda_k > 0$ ) позволяет найти релаксацию произвольного начального распределения, и в этом смысле можно говорить о релаксационном спектре.

Для определения релаксационного спектра системы невзаимодействующих друг с другом бозе-частиц удобно записать уравнение (1) в пространстве чисел заполнения. В этом случае индекс  $\alpha$  заменяется совокупностью переменных  $n_1, n_2, \dots$ , где  $n$  — число частиц в состоянии  $i$ . Нетрудно найти зависимость вероятностей перехода в единицу времени от чисел заполнения. Ввиду непрерывности спектра диссипативной системы вероятность перехода в единицу времени равна

$$P_{nn'} = \frac{2\pi}{h} |\langle n | H' | n' \rangle|^2 \rho. \quad (2)$$

В выражении (2)  $n$  и  $n'$  — совокупности чисел заполнения,  $H'$  — гамильтониан взаимодействия,  $\rho$  — плотность состояний; для краткости

здесь опущены индексы диссипативной системы. Как известно [1], отличные от нуля матричные элементы в представлении вторичного квантования равны

$$\langle \dots n_l - 1 \dots n_k \dots | H' | \dots n_l \dots n_k - 1 \dots \rangle = V \overline{n_l n_k} \langle k | H' | i \rangle, \quad (3)$$

где  $\langle k | H' | i \rangle$  — матричный элемент одной частицы.

Из (3) и (2) находим

$$P_{\dots n_l - 1 \dots n_k \dots n_l \dots n_k - 1} = n_l n_k P_{kl}. \quad (4)$$

В выражении (4)  $P_{kl}$  — вероятность перехода в единицу времени для одной частицы.

На основании (4) уравнение (1) в пространстве чисел заполнения принимает вид

$$\frac{dW_{\{n\}}}{dt} = \sum_{i, k} n_i (n_k + 1) [P_{ki} W_{\{n'\}} - P_{ik} W_{\{n\}}], \quad (5)$$

где  $\{n\}$  и  $\{n'\}$  — совокупность чисел заполнения, причем  $\{n'\}$  отличается от  $\{n\}$  уменьшением числа частиц на единицу в состоянии  $i$  и увеличением числа частиц на единицу в состоянии  $k$ . Ниже рассмотрено решение уравнения (5) для случая двухуровневых и одноуровневых систем.

## 2. ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА

Применим уравнение (5) к системе, состоящей из  $N$  частиц с двумя уровнями. Простейшей реализацией такой системы является система спинов, в которой релаксация осуществляется благодаря спин-решеточному взаимодействию. Спиновый формализм может быть применен и к системе, состоящей из  $N$  излучающих центров с двумя уровнями [2, 3]. Релаксация в этом случае обусловлена взаимодействием с излучением.

Состояние двухуровневой системы определяется заданием одного числа заполнения, например, числа частиц  $n$ , находящихся на возбужденном уровне. Вводя обозначения  $n_1 = n$ ,  $n_2 = N - n$ ,  $P_{12} = P_{21} = A^*$ , получим из уравнения (5)

$$\begin{aligned} \frac{dW_n}{dt} = & A [(n+1)(N-n) W_{n+1} + n(N-n+1) W_{n-1} - \\ & - (n+1)(N-n) W_n - n(N-n+1) W_n]. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Стационарное решение приводит к равновероятному распределению

$$W_n = \frac{1}{N+1}.$$

Нестационарное решение, соответствующее определенному корню  $-\lambda_k$  характеристического уравнения системы (5), имеет вид

$$W_n^k = W_n^{st} + W_n^k(0) \exp(-\lambda_k t). \quad (7)$$

При этом  $W_n^k(0)$  характеризует отклонение вероятности от стационарного распределения в начальный момент.

\* Равенство  $P_{12} = P_{21}$  может выполняться лишь приближенно. Например, для релаксации, обусловленной спин-решеточным взаимодействием, можно считать, что  $P_{12} \approx n_{\Phi+1}$ ,  $P_{21} \approx n_{\Phi}$ , где  $n_{\Phi}$  — среднее число фононов. При больших  $n_{\Phi}$  (высокой температуре)  $P_{12} \approx P_{21}$ .

Для нахождения корней характеристического уравнения удобно от вероятностей перейти к моментам распределения, определяемым соотношениями

$$M_l = \sum_{n=1}^N n^l W_n(t), \quad l \equiv (0, N). \quad (8)$$

Выражение (8) определяет момент порядка  $l$

Знание моментов всех порядков от 0 до  $N$  позволяет однозначно определить вероятности  $W_n(t)$ . Из (8) и (6) легко находим систему уравнений для моментов:

$$\frac{dM_l}{dt} = \sum_n \Psi_l(n) W_n. \quad (9)$$

В выражении (9) через  $\Psi_l(n)$  обозначен полином степени  $l$ , равный

$$\Psi_l(n) = A \{(n+1)(N-n)[(n+1)^l - n^l] - n(N-n+1)[n^l - (n-1)^l]\}. \quad (10)$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$\Psi_l(n) = \sum_{l'=0}^l B_{ll'} n^{l'}, \quad (11)$$

после чего уравнение (9) запишется следующим образом:

$$\frac{dM_l}{dt} = \sum_{l'=0}^l B_{ll'} M_{l'}. \quad (12)$$

Система уравнений (12) эквивалентна системе (6), однако значительно проще последней, так как характеристический детерминант  $\Delta$  системы (12) имеет треугольный вид

$$\Delta = \|B_{lk} + \lambda \delta_{lk}\|, \quad \Delta_{lk} = 0 \quad (l < k)$$

и равен

$$\Delta = \prod_i (\lambda + B_{ii}).$$

Из этого уравнения находим корни характеристического уравнения

$$\lambda_k = -B_{kk}.$$

Из (10) и (11) получаем

$$B_{kk} = -Ak(k+1), \quad k \equiv (0, N). \quad (13)$$

Решение системы (12), соответствующее корню  $-\lambda_k$ , запишем в виде

$$M_l^k(t) = M_l^{\text{cr}} + M_l^k(0) \exp(-\lambda_k t). \quad (14)$$

Из (14) видно, что величины  $M_l^k(0)$  определяют сдвиг момента порядка  $l$  от стационарного в начальный момент. Соответствующее (14) распределение (по аналогии с колебаниями системы) естественно назвать главным начальным распределением.

Найдем величины  $M_l^k(0)$ . Они, как известно, пропорциональны минорам  $d_{kl}(-\lambda_k)$  определителя  $\Delta$ . Как нетрудно видеть,  $d_{kl}$  тождественно обращаются в нуль при  $k > l$ . Поэтому главное начальное распределение имеет вид

$$M_l^k(0) = 0 \quad (l < k),$$

$M_k^k(0)$  — произвольно,

$$M_l^k(0) = M_k^k(0) \cdot \frac{d_{kl}(-\lambda_k)}{d_{kk}(-\lambda_k)} \quad (l > k). \quad (15)$$

Постоянная распада и время релаксации главного распределения равны

$$\lambda_k = A k(k+1), \quad \tau_k = \frac{1}{A k(k+1)}. \quad (16)$$

Таким образом, главное распределение характеризуется тем, что нарушение стационарности проявляется в моменте порядка  $l$ . Следовательно, время релаксации определяется минимальным порядком момента, отличающегося от стационарного.

Максимальное время релаксации  $\tau_1 = 1/2A$  соответствует случаю, когда отличие начального распределения от стационарного проявляется уже в среднем числе возбужденных частиц. Для момента первого порядка из выражений (9) и (10) находим

$$\frac{dM_1}{dt} = -2AM_1 + ANM_0.$$

Поскольку  $M_1 = \bar{n}$  и  $M_0 = \Sigma W_n = 1$ , первое уравнение системы (12) приводит к обычному кинетическому уравнению\*

$$\frac{d\bar{n}_1}{dt} = -A(\bar{n}_1 - \bar{n}_2).$$

Если рассматриваемая система представляет собой систему спинов, то разность  $(\bar{n}_1 - \bar{n}_2)$  определяет дипольный магнитный момент. Для стационарного распределения  $n_1 = n_2$  и средний дипольный момент системы равен нулю. Поэтому распределение с  $k = 2$  характеризует релаксацию таких состояний, когда в начальный момент отличие от стационарного распределения проявляется в квадрупольном моменте (и в моментах высших порядков). Вообще, в случае спиновой системы  $k$  определяет минимальный порядок мультипольного магнитного момента, которым система отличается от стационарного распределения в начальный момент.

Для произвольного начального распределения находим

$$M_l = M_l^{\text{ct}} + \sum_{k=1}^l C_k M_k^k(0) \exp(-\lambda_k t).$$

Константы  $C_k$  определяются начальными условиями. Отметим, что релаксация момента данного порядка определяется значениями начальных моментов низших порядков.

Отметим также связь между постоянными распада  $\lambda_k$  и вероятностями перехода  $P_{n_i, n_{i\pm 1}}$ .

Как видно из (4),

$$P_{n_1, n_{1+1}} = A(n_1 + 1) n_2,$$

$$P_{n_1, n_{1-1}} = An_1(n_2 + 1).$$

\* Отметим, что если  $P_{21} \neq P_{12}$ , обычное кинетическое уравнение уже не получится

Таким образом,

$$P_{n_1, n_1+1} - P_{n_1, n_1-1} = A(n_2 - n_1),$$

$$P_{n_1, n_1+1} + P_{n_1, n_1-1} = A(2n_1n_2 + n_1 + n_2).$$

Поэтому

$$\lambda_1 = |P_{n_1, n_1+1} - P_{n_1, n_1-1}| \quad \text{при } |n_1 - n_2| = 2; \quad (17a)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{2} (P_{n_1, n_1+1} - P_{n_1, n_1-1}) \quad \text{при } n_1 = n_2 = k \quad (k > 1). \quad (17b)$$

Равенство (17а) позволяет представить постоянную распада  $\lambda_1$  как разность вероятностей испускания и поглощения частицы для таких переходов, когда числа  $n_1$  и  $n_2$  отличаются от равновесных значений ( $n_1 = n_2$ ) на единицу. Равенство (17б) можно истолковать в том смысле, что релаксация высших моментов осуществляется переходами из состояний с равными числами  $n_1$  и  $n_2$ . В этом случае можно говорить о максимальной когерентности системы ( $P_{n_1, n_1 \pm 1} \sim n_1^2$ ) [4].

Аналогично проявляется когерентность системы при флюктуациях.

### 3. ОДНОУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим релаксацию одной из радиационных мод резонатора. Исследуемой системой в этом случае будет система фотонов, а дисипативной — стенки резонатора. Систему фотонов можно рассматривать как одноуровневую систему, и уравнение (1) дает

$$\frac{dW_n}{dt} = A_a(n+1) W_{n+1} + A_r n W_{n-1} - A_a n W_n - A_r(n+1) W_n. \quad (18)$$

В последнем уравнении величины  $A_a$  и  $A_r$  имеют смысл вероятностей поглощения и излучения, рассчитанных на единицу времени, а  $n$  — числа фотонов.

Дальнейшие выкладки полностью аналогичны случаю двухуровневой системы. Вводя моменты распределения согласно соотношению

$$M_l = \sum_{n=1}^{\infty} n^l W_n, \quad l \equiv (0, \infty),$$

на основании (16) получим

$$\frac{dM_l}{dt} = \sum_n \varphi_l(n) W_n,$$

где

$$\varphi_l(n) = A_a n [(n-1)^l - n^l] - A_r(n+1) [n^l - (n+1)^l]. \quad (19)$$

Обозначая, как и ранее,

$$\varphi_l(n) = \sum_{l'=0}^l D_{ll'} n^{l'}, \quad (20)$$

находим для  $M_l$  следующую систему уравнений:

$$\frac{dM_l}{dt} = \sum_{l'=0}^l D_{ll'} M_{l'}.$$

Как нетрудно видеть из (18) и (19), величины  $D_{ll}$  равны

$$D_{ll} = (A_r - A_a)l.$$

Постоянные распада и соответствующие времена релаксации оказываются равными

$$\lambda_l = (A_a - A_r)l, \quad \tau_l = \frac{1}{(A_a - A_r)l}. \quad (21)$$

Укажем также, что применимость выражений (16) и (21) ограничивается областью справедливости уравнения (1), т. е. теми моментами, для которых время релаксации значительно превышает время корреляции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, изд. Наука, М., 1963, стр. 268.
2. R. H. Dicke, Phys Rev., 93, 99 (1954).
3. В. М. Файн, УФН, 64, 273 (1958).
4. М. М. Альперин, Укр. физ. ж., 2, 322 (1957).

Одесский педагогический институт

Поступила в редакцию  
20 октября 1966 г.

#### RELAXATION SPECTRUM OF SOME SIMPLE SYSTEMS

*M. M. Al'perin*

Relaxation of two-level system and the system of harmonic oscillators is investigated. Evolution of an arbitrary initial distribution is determined by superposition of main initial distributions. The latters are characterized by minimal order of moment deflections of the given initial distribution from a stationary one. The expressions for relaxation times of the main distribution have been derived.

УДК 621.378.33

## ОБ АСИММЕТРИИ ХАРАКТЕРИСТИК МАГНИТНОЙ НАСТРОЙКИ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

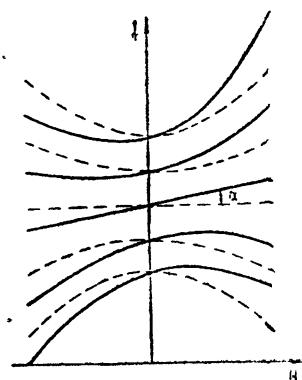
*A. Ф. Крупнов, В. А. Логачев, В. А. Скворцов*

Обнаружено влияние процессов переориентации молекул (переходов с изменением квантового числа  $M$ ) на асимметрию характеристик магнитной настройки молекулярного генератора относительно знака магнитного поля, приложенного к резонатору. Предлагаются два возможных объяснения причин возникновения асимметрии, подтвержденные экспериментом.

Для настройки молекулярных генераторов на центр спектральной линии широко используется модуляция добротности спектральной линии магнитным полем. При неточно настроенном на центр линии резонаторе расчет приводит к квадратичной зависимости частоты колебаний молекулярного генератора от величины магнитного поля, приложенного к резонатору. Точная настройка соответствует исчезновению зависимости частоты колебаний от магнитного поля [1].

Однако экспериментальные характеристики магнитной настройки отличаются от теоретических наличием, кроме квадратичной, еще и линейной зависимости (т. е. асимметрии относительно знака магнитного поля). Линейная зависимость сохраняется и при настроенном резонаторе (рис. 1) [2]. Это обстоятельство ухудшает точность настройки молекулярных генераторов. Такой эффект в конечном счете можно объяснить неравной интенсивностью переходов с  $\Delta M = +1$  и  $\Delta M = -1$  в резонаторе, частоты которых сдвигаются магнитным полем в противопо-

Рис. 1. Теоретические (пунктир) и экспериментальные характеристики магнитной настройки молекулярного генератора при различных расстройках резонатора.



ложные стороны. Преобладание одного типа переходов должно привести к линейному смещению частоты суммарного центра линии в магнитном поле. В [1] отмечается возможность возникновения указанного эффекта из-за наличия круговой поляризации СВЧ волны в резонаторе, что приводит к преобладанию одного типа переходов даже при равной населенности уровней, отличающихся знаком  $M$ , на входе в резонатор. Отме-

тим, что процесс сортировки не приводит к неравенству населенностей уровней, отличающихся знаком  $M$  [1].

Нами была обнаружена зависимость асимметрии характеристик от известных процессов переориентации (т. е. переходов с изменением квантового числа  $M$ ) молекул в слабых полях между сортирующей системой и резонатором. В отличие от [1] эффект в этом случае зависит от «способа приготовления» пучка активных молекул до влета в резонатор, в результате которого создается неравная населенность уровней, отличающихся знаком  $M$ . В настоящей работе нами предлагаются два возможных механизма влияния процессов переориентации молекул на асимметрию характеристик магнитной настройки молекулярных генераторов.

1. Рассмотрим совместное действие эффектов Штарка и Зеемана на отсортированный пучок молекул в области, где происходит переориентация. Молекулы, принадлежащие к верхнему из участвующих в мазерном действии уровню, могут иметь различные значения квантового числа  $M$ , определяющего пространственную ориентацию молекулы, причем распределение молекул по уровням с различными  $|M|$  в отсортированном пучке отличается от равновесного [1, 4]. Нас интересует изменение энергии квантовых состояний с различными  $M$  при одновременном воздействии постоянных электрического и магнитного полей (эффектов Штарка и Зеемана). Если для простоты принять, что направления электрического и магнитного полей совпадают, то состояние молекулы можно по-прежнему характеризовать квантовым числом  $M$ ; эффекты Штарка и Зеемана в этом случае просто складываются, а интенсивности переходов остаются неизменными [3]. Для аммиака эффект Зеемана линеен относительно магнитного поля, а эффект Штарка квадратичен относительно электрического поля. В этом случае одновременное наложение полей  $E$  и  $H$  приведет к тому, что частоты переходов, например, с уровня  $M = +1$  на  $M = 0$  будут отличаться от частот переходов с  $M = -1$  на  $M = 0$ . На рис. 2 показано аналогичное смещение

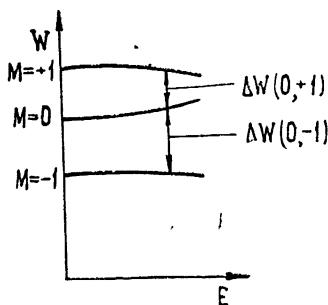


Рис. 2. Штарк-эффект уровней линейной молекулы, предварительно расщепленных в постоянном магнитном поле Поля  $E$  и  $H$  параллельны.

уровней для простого случая линейной молекулы (уровень  $J = 1$ ). Прикладывая переменное возмущение и меняя его частоту, в принципе можно раздельно индуцировать переходы каждого типа. Приложим теперь к пучку до влета в резонатор возмущение на частоте, соответствующей, например, переходам с  $M = +1$  на  $M = 0$ . Ввиду различной населенности состояний с различными  $|M|$  число актов перехода с уровня  $M = 0$  на  $M = +1$  будет отличаться от соответствующего числа переходов с  $M = +1$  на  $M = 0$ . Таким образом, после пролета возмущающего поля число молекул с  $M = +1$  будет отличаться от числа молекул с  $M = -1$ , на которые не действовало возмущение. Разность населенностей уровней, отличающихся знаком  $M$ , приведет при наложе-

нии на резонатор магнитного поля к смещению центра суммарной спектральной линии, линейно зависящему от приложенного к резонатору магнитного поля.

В реальных молекулярных генераторах в пространстве между сортирующей системой и резонатором присутствуют как электрические поля рассеяния сортирующей системы, так и магнитные поля (Земли, рассеяния от зеемановских катушек на резонаторе и т. д.). В [6] отмечалось, что при неадиабатическом пролете слабых полей могут происходить квантовые переходы с изменением числа  $M$  (переориентация молекул). Таким образом, в принципе имеются все необходимые для действия вышеописанного механизма условия.

Вероятность неадиабатических переходов дается выражением [5]

$$P_{12} = \frac{1}{(W_2 - W_1)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{21} \exp(-i\omega_{12}t) dt \right|^2, \quad (1)$$

где  $W_1 - W_2$  — разность энергий уровней, между которыми происходят переходы с частотой  $\omega_{12} = (W_1 - W_2)/\hbar$ ;  $(\partial V/\partial t)_{21}$  — матричный элемент производной от оператора возмущения. Как видно из (1), вероятность неадиабатических переходов зависит как от разности энергий уровней, так и от спектрального состава возмущения. Возмущением в реальном случае является переменное в пространстве поле, через которое проходит молекула.

Нами был поставлен эксперимент на молекулярном генераторе на переходе  $J = 3, K = 3$  аммиака  $N^{15}H_3$ . В области электрического поля рассеяния сортирующей системы (перед резонатором) прикладывалось вспомогательное магнитное поле  $H_0$ . На резонаторе имелись катушки, с помощью которых можно было создавать магнитное поле либо параллельно полю  $H_0$ , либо перпендикулярно ему. При выключенном поле  $H_0$  резонатор молекулярного генератора настраивался на центр спектральной линии по исчезновению квадратичной зависимости частоты колебаний ог магнитного поля. В отсутствие поля  $H_0$  существовал некоторый исходный наклон характеристик магнитной настройки. Наложение поля  $H_0$  приводило к увеличению крутизны наклона характеристик в 5 — 10 раз. Когда магнитное поле в резонаторе было перпендикулярно полю  $H_0$ , крутизна наклона увеличивалась примерно в 5 раз, причем знак угла наклона не зависел от знака поля  $H_0$ . При параллельных полях крутизна увеличивалась примерно на порядок и знак угла наклона изменялся с изменением знака  $H_0$ . При экранировании области приложения поля  $H_0$  от электрического поля рассеяния латунной трубкой с сеткой для пролета молекул влияния поля  $H_0$  в пределах точности эксперимента не наблюдалось. Этот эксперимент подтверждает изложенные выше соображения.

**2.** Неравная населенность состояний с разным знаком  $M$  может возникать, если процессы переориентации молекул в отсортированном пучке индуцируются врачающимся полем. При этом (в отличие от предыдущего механизма) эффект может наблюдаться и в отсутствие магнитного поля. Рассмотрим подробнее процессы перехода между двумя квантовыми уровнями, которыми могут быть, например, подуровни с различным значением  $M$ , расщепленные за счет штарк-эффекта. Состояние двухуровневой квантовомеханической системы под действием малого возмущения  $V$  описывается суперпозицией стационарных волновых функций

$$\psi = C_1 \psi_1^0 \exp\left(-i \frac{W_1}{\hbar} t\right) + C_2 \psi_2^0 \exp\left(-i \frac{W_2}{\hbar} t\right).$$

При этом  $C_1$  и  $C_2$  удовлетворяют уравнениям [5]

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{C}_1 &= V_{12} C_2 \exp(i\omega_{12} t), \\ i\hbar \dot{C}_2 &= V_{21} C_1 \exp(-i\omega_{12} t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — энергетические уровни системы;  $\omega_{12} = (W_1 - W_2)/\hbar$ ;  $V_{ij} = \int \psi_i^{0*} V \psi_j dv$  — матричные элементы возмущения; как обычно,  $V_{11} = V_{22} = 0$ . Под действием электрического поля  $\mathcal{E}$  квантовомеханическая система с дипольным моментом  $\mu$  испытывает возмущение

$$V = -\mu \mathcal{E} = -(\mu_x \mathcal{E}_x + \mu_y \mathcal{E}_y + \mu_z \mathcal{E}_z),$$

которое можно записать в виде

$$V = -\frac{1}{2} (\mu^+ \mathcal{E}^- + \mu^- \mathcal{E}^+ + 2\mu_z \mathcal{E}_z),$$

где

$$\mathcal{E}^\pm = \mathcal{E}_x \pm i\mathcal{E}_y, \quad \mu^\pm = \mu_x \pm i\mu_y.$$

Обозначив проекцию момента количества движения  $J$  на ось  $z$  через  $M$ , воспользуемся хорошо известными свойствами матричных элементов операторов  $\mu^\pm$  и  $\mu_z$ . Для разрешенных переходов  $M \rightarrow M$ ,  $M \rightarrow M-1$  и  $M \rightarrow M+1$  могут быть отличны от нуля матричные элементы операторов  $\mu_z$ ,  $\mu^+$  и  $\mu^-$  соответственно [5]. Рассмотрим переходы с  $\Delta M = \pm 1$  для случая круговой поляризации возмущающего поля, т. е. для

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E} \cos(\omega t), \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E} \sin(\omega t).$$

Тогда  $\mathcal{E}^\pm = \mathcal{E} \exp(\pm i\omega t)$ , а матричные элементы возмущения  $V$  равны

$$\begin{aligned} V_{12} &= -\frac{1}{2} \mu_{12}^+ \mathcal{E} \exp(-i\omega t) && \text{для перехода } 1 \rightarrow 2 \text{ с } \Delta M = -1, \\ V_{12} &= -\frac{1}{2} \mu_{12}^- \mathcal{E} \exp(i\omega t) && \text{для перехода } 1 \rightarrow 2 \text{ с } \Delta M = +1. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что  $V_{21} = V_{12}^*$ , а  $(\mu_{12}^+)^* = \mu_{21}^-$ . При подстановке (3) в уравнения (2) видно, что для выбранной нами поляризации врачающегося поля (против часовой стрелки) резонансные члены, определяющие векторные изменения  $C_t$ , появляются лишь для перехода  $1 \rightarrow 2$  с  $\Delta M = -1$  (и соответственно для  $2 \rightarrow 1$  с  $\Delta M = +1$ ), а переходов  $1 \rightarrow 2$  с  $\Delta M = +1$  такое возмущение не вызовет. Для обратного направления вращения вектора электрического поля резонансные члены соответствуют переходу  $1 \rightarrow 2$  с  $\Delta M = -1$ . Отметим, что такие переходы может индуцировать и врачающееся магнитное поле.

В молекулярных генераторах переходы с изменением  $M$  могут происходить в пространстве между резонатором и сортирующей системой [6]. Роль возмущения играет неоднородное в пространстве статическое поле, через которое пролетает молекула. Вращающееся поле получается в случае, когда направление поля меняется вдоль траектории молекулы. Поле рассеяния сортирующей системы, например, изменяет свое направление, проникая в отверстие предельного волновода на входе в резонатор.

В простейшем случае, когда в молекулярном генераторе используется нижний вращательный переход линейной молекулы, переориента-

ция соответствует переходам между уровнями  $J = 1$ ,  $M = 0$  и  $J = 1$ ,  $M = \pm 1^*$ . Воздействие вращающегося поля приведет к тому, что в переходах с уровня  $M = \pm 1$  будут участвовать либо только молекулы с  $M = +1$ , либо только с  $M = -1$  в зависимости от направления вращения поля. В условиях неравновесной населенности уровней с  $M = 0$  и с  $M = \pm 1$  в отсортированном пучке молекул это приведет к различию в числе молекул с  $M = +1$  и с  $M = -1$ , попадающих в резонатор, что в свою очередь приведет к неодинаковой интенсивности зеемановских компонент линии.

Нами был поставлен опыт на молекулярном генераторе, работающем на переходе  $J = 3$ ,  $K = 3$  аммиака  $N^{15}H_3$ . Пучок молекул после кольцевой сортирующей системы пропускался через плоский конденсатор, аналогичный применявшемуся для переориентации молекул в [6]. Поле рассеяния сортирующей системы, несколько ослабленное диафрагмой с отверстием диаметром 6 мм, проникало в конденсатор. Суммарное поле вдоль траектории молекулы получалось в результате сложения взаимно перпендикулярных полей рассеяния сортирующей системы и поля в конденсаторе. Изменение направления суммарного поля вдоль траектории молекулы создавало вращающуюся компоненту поля. Легко видеть, что изменение знака одного из полей меняет направление вращения суммарного поля на обратное. Одновременное же изменение знака обоих полей сохраняет направление вращения неизменным. Возникновения неравной населенности состояний, отличающихся знаком  $M$  относительно направления магнитного поля в резонаторе (которое принимается за ось  $z$ ), следовало ожидать в результате переходов с изменением квантового числа  $M$  на единицу, которые индуцируются полем, вращающимся в плоскости  $xy$ . Изменение направления вращения при этом должно приводить к изменению знака асимметрии. Поле, вращающееся в плоскости  $xz$  или  $yz$ , не должно вызывать асимметрии.

Как и в первом эксперименте, на резонаторе имелись катушки, с помощью которых можно было создавать поперечное магнитное поле порядка  $2\text{ э}$  либо параллельно электрическому полю в конденсаторе, либо перпендикулярно ему. При нулевом напряжении на конденсаторе молекулярный генератор настраивался на центр спектральной линии методом, описанным выше. Нами снималась зависимость крутизны наклона характеристик магнитной настройки в относительных единицах от напряжения на конденсаторе при различных ориентациях магнитного поля в резонаторе, а также при различных знаках напряжения на конденсаторе и сортирующей системе. Полученные зависимости приведены на рис. 3. Кривые  $a$  и  $b$  снимались при различных знаках напряжений на ближайшем к конденсатору кольце сортирующей системы, т. е. при противоположном направлении поля рассеяния. Появление вращающейся в плоскости  $xy$  компоненты электрического поля достигалось в том случае, когда электрическое поле в конденсаторе было перпендикулярно магнитному полю в резонаторе. Соответствующие этому экспериментальные кривые отмечены знаком  $\perp$ . Видна сильная зависимость крутизны наклона от поля в конденсаторе, причем максимум крутизны достигается при тех же полях в конденсаторе, при которых максимальен эффект переориентации [6].

Изменение знака поля в конденсаторе приводит к изменению знака асимметрии, а одновременное изменение знака поля в конденсаторе и

\* Такие переходы запрещены в отсутствие поля; электрическое поле, возмущая волновые функции, может привести к появлению отличного от нуля матричного элемента дипольного момента. Матричные элементы подобных переходов рассчитываются методами теории возмущений [3, 8]. Указанный случай применим к молекулярному генератору на переходе  $1_{01}-0_{00}$  молекулы формальдегида [7].

знака поля рассеяния восстанавливает прежнюю зависимость. Это показывает, что существенным является именно направление вращения поля\*. Поле, вращающееся в плоскости  $xz$  (или  $yz$ ), получалось, когда электрическое поле в конденсаторе было параллельно магнитному полю в резонаторе (кривые, отмеченные знаком  $\parallel$ ). Зависимость асимметрии от напряжения на конденсаторе в этом случае значительно слабее, и наличие ее может быть объяснено неточной установкой параллельности полей. Таким образом, результаты эксперимента подтверждают изложенные выше соображения. Отметим, что при экранировании конденсатора от поля рассеяния сортирующей системы диафрагмой с сеткой для пролета молекул подача напряжения на конденсатор не приводила к появлению асимметрии характеристик магнитной настройки.

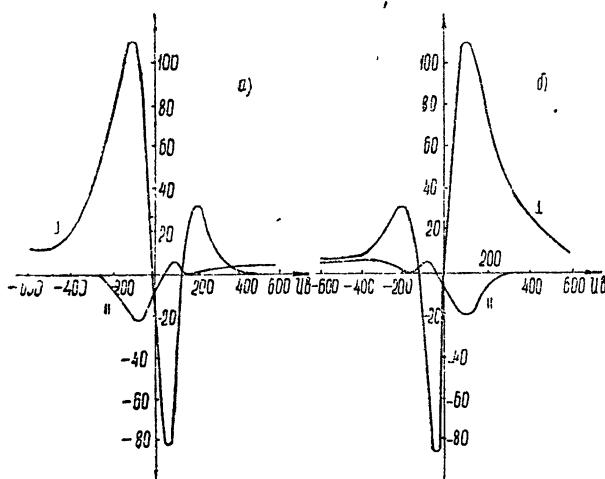


Рис. 3. Зависимость крутизны наклона характеристик магнитной настройки от напряжения на конденсаторе. По оси ординат отложено отклонение частоты колебаний в герцах при наложении на резонатор магнитного поля около двух эрстед

Итак, в настоящей работе дается качественное объяснение влияния процессов переориентации молекул на вид характеристик магнитной настройки молекулярных генераторов, подтвержденное экспериментом. Относительная роль предложенных в настоящей работе механизмов возникновения асимметрии характеристик будет зависеть в каждом случае от конкретных особенностей конструкции молекулярного генератора.

Авторы благодарят М. Я. Овчарова за любезное предоставление неопубликованных данных исследования молекулярного генератора на формальдегиде, которые были полезны при обсуждении вопроса, а также А. А. Ульянова, Ю. В. Тимофеева и Л. А. Синегубко, принимавших участие в обсуждении.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1961
- 2 K. Shimoda, J. Kohno, Japan J Appl. Phys., 1, 5, 1962 Г. А. Елкин, В. С. Казачок, Г. Г. Рахимов, А. Ф. Щербинин. Труды ин-тов Комитета стандартов, мер и измерительных приборов СССР, вып. 88 (148), стр. 46, 1966
- 3 Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959
- 4 А. Ф. Крупинов, В. А. Скворцов, Радиотехника и электроника, 10, 378 (1965)

\*Легко видеть, что в первом эксперименте изменение знака  $H_0$  не приводило к изменению направления вращения  $H_0$ , а электрические поля не переключались

- 5 Л Д Ландау, Е М Лифшиц, Квантовая механика, Физматиз, М., 1963  
6 Н Г Басов, А Н Ораевский, Г М Страховский, В М Татаренков,  
ЖЭТФ, 45, 1768 (1963)  
7 А Ф Крупнов, В А Скворцов, Изв высш уч зав ---Радиофизика, 6, № 3,  
513 (1963)  
8 H. K. Hughes Phys Rev, 72, 614 (1917).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
15 ноября 1966 г

## ON ASYMMETRY OF MAGNETIC TUNING CHARACTERISTICS OF MOLECULAR GENERATOR

*A. F. Kroupnov, V A Logachev, V. A Skvortsov*

The authors discovered the influence of molecular space reorientation processes (transitions with a change of the quantum number  $M$ ) on the asymmetry of characteristics of magnetic tuning of molecular generators relative to the sign of a magnetic field applied to a resonator. Two possible mechanisms confirmed by the experiment are proposed for the explanation of the origin of such asymmetry.

---

УДК 538.56 : 519.25

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО НОРМАЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

*E. M. Гутцайт*

Рассматривается оценка энергетического спектра стационарного случайного процесса, аналогичная точной формуле энергетического спектра неслучайной функции. Показано, что для действительного нормального стационарного случайного процесса с нежесткими ограничениями распределение оценки становится экспоненциальным, если длительность обрабатываемых реализаций неограниченно увеличивается. На основе этой оценки строится другая, являющаяся состоятельной, несмещенной и эффективной.

Вычисление энергетического спектра является важной задачей прикладной теории стационарных случайных процессов и часто используется в радиотехнике, например, при обнаружении сигнала на фоне шумов.

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением практически важного случая, когда исследуемый стационарный случайный процесс  $X(t)$  является действительным, нормальным и центрированным. Такой процесс будем называть для краткости просто случайным процессом, а его энергетический спектр  $G(f)$ , где  $f$  — частота, просто спектром. Оценку спектра определим как обычно соотношением

$$G^*(f) = \frac{2}{T} \left| \int_0^T X(t) \exp(-i2\pi ft) dt \right|^2, \quad (1)$$

где  $T$  — длительность анализируемых реализаций, аналогичным точной формуле энергетического спектра неслучайной функции.

Будем рассматривать распределение случайной величины  $G^*(f)$  при  $T \rightarrow \infty$ . Значение частоты, при котором рассматривается это распределение, обозначим через  $f_*$ , а величины  $G(f_*)$  и  $G^*(f_*)$  для удобства обозначим через  $W$  и  $W^*$  соответственно.

Если  $f_* = mT^{-1}$ , где  $m$  — целое положительное число, то на основании (1)

$$W^* = \frac{T}{2} (A_m^2 + B_m^2), \quad (2)$$

где

$$A_m = \frac{2}{T} \int_0^T X(t) \cos \left( 2\pi m \frac{t}{T} \right) dt; \quad (3)$$

$$B_m = \frac{2}{T} \int_0^T X(t) \sin \left( 2\pi m \frac{t}{T} \right) dt. \quad (4)$$

Как следует из [1],  $A_m$  и  $B_m$  являются независимыми гауссовыми случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $D_m$  и  $E_m$  соответственно, причем

$$D_m = I_1 + I_2 + I_3; \quad (5)$$

$$E_m = I_1 - I_2 + I_3, \quad (6)$$

где

$$I_1 = \int_0^\infty G(f) \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT - \pi m)^2} df; \quad (7)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi m} \int_0^\infty G(f) \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi fT - \pi m} df - \frac{1}{\pi m} \int_0^\infty G(f) \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi fT + \pi m} df; \quad (8)$$

$$I_3 = \int_0^\infty G(f) \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT + \pi m)^2} df. \quad (9)$$

В [1] показано также, что при

$$E_m = D_m = WT^{-1} \quad (10)$$

плотность распределения оценки  $W^*$ , где ввиду (2) — (4)  $G \geq 0$ ,

$$\varphi(G) = \frac{1}{W} \exp(-G/W). \quad (11)$$

Докажем сначала, что, если  $T \rightarrow \infty$  и является членом последовательности  $\{T_m\}$ , где

$$T_m = \frac{1}{f_*} m, \quad (12)$$

то имеет место асимптотическое приближение к соотношению (10), а следовательно, и к (11). Затем экспоненциальное распределение оценки  $W^*$  будет доказано для любого способа неограниченного увеличения  $T$ .

Предположим, что спектр процесса  $X(t)$  является ограниченной и кусочно-непрерывной функцией во всей области определения  $f \geq 0$ . Ввиду этого в любой рассматриваемой точке  $f_*$  пределы функции  $G(f)$  слева и справа, обозначаемые соответственно через  $G(f_* - 0)$  и  $G(f_* + 0)$ , существуют, причем будем полагать, что хотя бы один из них отличен от нуля.

Подберем теперь такое число  $\delta > 0$ , чтобы на отрезке  $[f_* - \delta, f_* + \delta]$  не было ни одной точки разрыва спектра, за исключением, быть может, точки  $f_*$ . Присоединяя  $G(f_* - 0)$  и  $G(f_* + 0)$  к функции  $G(f)$  на отрезках  $[f_* - \delta, f_*]$  и  $[f_*, f_* + \delta]$  соответственно, можно утверждать существование минимумов и максимумов функции на обоих отрезках. Минимум и максимум спектра на первом отрезке обозначим через  $m_1$  и  $M_1$ , а на втором — через  $m_2$  и  $M_2$  соответственно.

Проведенные в Приложении оценки интегралов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  дают основания считать, что

$$\lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{I_1 + I_3}{|I_2|} = \infty, \quad (13)$$

после чего ввиду (5), (6) и (П.16) при  $T_m \rightarrow \infty$  получаем

$$D_m \sim E_m \sim (I_1 + I_3) \sim qT_m^{-1}. \quad (14)$$

Здесь символ  $\sim$  означает эквивалентность бесконечно малых величин. Из (П.10) — (П.12) также следует

$$\frac{m_1 + m_2}{2} \ll q \ll \frac{M_1 + M_2}{2}. \quad (15)$$

Поскольку  $\delta$  может быть выбрано произвольно малым, из (15) вытекает предельное равенство

$$q = \frac{G(f_* - 0) + G(f_* + 0)}{2}. \quad (16)$$

Аналогично упомянутому выводу из [1] соотношение (14) позволяет записать

$$\varphi(G) = \frac{1}{q} \exp(-G/q), \quad (17)$$

где ввиду (2) — (4)  $G \geq 0$ .

Если  $G(f)$  непрерывна в точке  $f_*$ , то ввиду (16)

$$q = W, \quad (18)$$

вследствие чего в этом случае (17) переходит в (11).

Покажем теперь, что распределение (17) имеет место для любого способа неограниченного увеличения  $T$ . Член последовательности  $\{T_m\}$ , ближайший к рассматриваемому значению  $T$  и не превышающий его, обозначим через  $T'_m$ , а оценку, получаемую подстановкой в формулу (1)  $T'_m$  вместо  $T$ , — через  $W^*(T'_m)$ . Тогда ввиду (17) для любого  $\epsilon > 0$  и достаточно больших  $T$  с вероятностью  $p_\epsilon$

$$\epsilon \leq W^*(T'_m), \quad (19)$$

где

$$p_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(G) dG, \quad (20)$$

а  $\varphi(G)$  является приближенно экспонентой.

Умножая (19) на  $0,5 T'_m$  и извлекая корень, получаем

$$\sqrt{0,5 \epsilon T'_m} \leq \left| \int_0^{T'_m} X(t) \exp(-i2\pi f_* t) dt \right|. \quad (21)$$

Рассматривая последний интеграл как случайный вектор  $L$  в комплексной плоскости, можно видеть, что при  $T \rightarrow \infty$  с вероятностью, не меньшей  $p_\epsilon$ , длина этого вектора  $|L| \rightarrow \infty$ . Тот же интеграл, взятый по отрезку  $[T'_m, T]$ , рассмотрим как случайный вектор  $\Delta L$ . Из предположения абсолютной интегрируемости любой реализации  $x(t)$  процесса  $X(t)$  на любом конечном отрезке вытекает, что  $|\Delta L|$  конечен, так как каждая из его проекций короче, чем

$$\int_{T'_m}^T x(t) dt.$$

Складывая векторы  $\mathbf{L}$  и  $\Delta\mathbf{L}$  и замечая, что при этом получается интеграл из выражения (21) с отрезком интегрирования  $[0, T]$ , получаем; что с вероятностью, не меньшей  $p_\epsilon$ , имеет место соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_0^T X(t) \exp(-i2\pi f_* t) dt \right| / \left| \int_0^{T_m'} X(t) \exp(-i2\pi f_* t) dt \right| = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} |\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}| / |\mathbf{L}| = 1. \quad (22)$$

С другой стороны очевидно, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T_m' / T = 1. \quad (23)$$

Поэтому, используя теорему о пределе произведения и соотношения (1), (22) и (23), получаем, что с вероятностью, не меньшей  $p_\epsilon$ , выполняется соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W^*(T) / W^*(T_m') = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_0^T X(t) \exp(-i2\pi f_* t) dt \right| / \left| \int_0^{T_m'} X(t) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(-i2\pi f_* t) dt \right|^2 \left( \lim_{T \rightarrow \infty} T_m'/T \right) \right] = 1.$$

Поскольку при  $\epsilon \rightarrow 0$  ввиду (20)  $p_\epsilon \rightarrow 1$ , то имеет место сходимость по вероятности случайной величины  $W^*(T)$  к случайной величине  $W^*(T_m')$  при  $T \rightarrow \infty$ , что влечет за собой сходимость функций распределения этих величин во всех точках непрерывности предельной функции распределения [2]. Однако для экспоненциального закона функция распределения непрерывна во всех точках. Поэтому для процесса  $X(t)$  при любом способе неограниченного увеличения длительности обрабатываемых реализаций оценка  $W^*$  имеет экспоненциальное распределение вида (17), переходящее вследствие (18) в (11) в точках непрерывности спектра.

Рассмотрим подробнее случай, когда  $f_*$  является точкой непрерывности спектра. Используя (11) для определения математического ожидания и среднеквадратичного отклонения оценки  $W^*$ , приходим к соотношению, полученному в [3] несколько иным путем,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{W^*} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma [W^*] = W. \quad (24)$$

Выражения (11) и (24) показывают, что  $W^*$  является грубой оценкой истинного значения спектра  $W$  даже при очень больших  $T$ . Введем поэтому вторую оценку спектра

$$W^{**} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_j^*, \quad (25)$$

где  $W_j^*$  — значение оценки  $W^*$ , полученное при обработке  $j$ -ой реализации, а  $n$  — число обработанных реализаций.

Поскольку ввиду (24) и (25) математическое ожидание и дисперсия оценки  $W^{**}$

$$\overline{W^{**}} = W, \\ D[W^{**}] = W^2/n, \quad (26)$$

то  $W^{**}$  является несмещенной и состоятельной оценкой спектра. Для доказательства ее эффективности рассмотрим  $W^{**}$  как одну из несмешанных оценок математического ожидания величины  $W^*$ . Но любая из таких оценок  $\alpha^*$  согласно соотношению (32.3.3а) из [1] имеет дисперсию

$$D[\alpha^*] \geq \left[ n \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \varphi dy \right]^{-1},$$

где  $\varphi(y, \alpha)$  — плотность распределения результата одного опыта (случайная величина  $Y$ ), являющаяся в исследуемом случае экспонентой, а  $\alpha$  — оцениваемый параметр, рассматриваемый как переменный. Последний ввиду (24) равен  $W$ , причем  $W$  в нижеследующем выводе считается переменной величиной. Тогда

$$\begin{aligned} D[\alpha^*] &\geq \left\{ n \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \ln [W^{-1} \exp(-y W^{-1})]}{\partial W} \right]^2 \varphi dy \right\}^{-1} = \\ &= W^4/nD[Y] = W^2/n. \end{aligned} \quad (27)$$

Сравнение (26) и (27) показывает, что из всех несмешанных оценок математического ожидания случайной величины  $W^*$  оценка  $W^{**}$  имеет минимально возможную дисперсию, т. е. является эффективной.

Таким образом,  $W^{**}$  является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой спектра  $W$  и может быть использована для приближенного определения величины  $W$  при достаточно больших значениях  $T$ , обеспечивающих приближенную экспоненциальность распределения  $W^*$ , и значениях  $n$ , обеспечивающих требуемую малость дисперсии оценки  $W^{**}$  в соотношении (26). Точное распределение величины  $W^{**}$  при экспоненциальности распределения оценки  $W^*$  приводится в [1]. Там же указана возможность приближенного определения  $W$  не путем усреднения по реализациям, а усреднением  $n$  значений величины  $W^*$ , принадлежащих одной реализации процесса  $X(t)$  и отстоящих на расстояние  $T^{-1}$  друг от друга, если сам спектр практически постоянен в интервале частот, равном  $(n-1)T^{-1}$ .

В заключение автор выражает благодарность М. Г. Шуру за ряд ценных замечаний.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Оценка интегралов $I_1$ , $I_2$ и $I_3$

Ввиду неотрицательности и ограниченности спектра можно записать, что для любого  $f$

$$0 < G(f) < M < \infty \quad (\text{П.1})$$

Будем полагать, что для процесса  $X(t)$  общая мощность  $P$  является конечной величиной, т. е.

$$P = \int_0^{\infty} G(f) df < \infty. \quad (\text{П.2})$$

Для каждого значения  $T_m$  найдем такое  $\Delta f$ ,

$$\Delta f = \Delta k T_m^{-1}, \quad (\text{П.3})$$

где  $\Delta k$  — целое число, что

$$\Delta f < \delta < \Delta f + T_m^{-1}. \quad (\text{П.4})$$

Тогда ввиду (П.3)

$$\Delta k = \left[ \frac{\delta}{T_m^{-1}} \right] = \left[ \frac{\delta}{f_*} m \right], \quad (\text{П.5})$$

причем здесь квадратные скобки означают целую часть числа.

В дальнейшем будем рассматривать только такие члены последовательности  $\{T_m\}$ , для которых  $m \geq 2f_* \delta^{-1}$ . При этом согласно (П.5)  $\Delta k \geq 2$ . Поэтому

$$\delta < \Delta f + \frac{1}{T_m} \leq \Delta f + \frac{0.5 \Delta k}{T_m} \leq \Delta f + \frac{\delta}{2}, \quad (\text{П.6})$$

откуда с учетом (П.4) можно записать

$$0.5\delta < \Delta f < \delta. \quad (\text{П.7})$$

Из (П.4) следует также, что значения  $f_1 = f_* - \Delta f$  и  $f_2 = f_* + \Delta f$  принадлежат отрезку  $[f_* - \delta, f_* + \delta]$  при любом  $m$ .

При оценке интегралов  $I_1, I_2, I_3$  будут введены новые переменные:  $z = f - mT^{-1}$ ,  $u = \pi z T$ ,  $v = 2u$ . Для удобства здесь и далее в Приложении пишем  $T$  вместо  $T_m$ .

Разобьем  $I_1$  из соотношения (7) на три интеграла  $I_1^I, I_1^{II}, I_1^{III}$  с областями интегрирования  $(0, f_1), (f_1, f_2)$  и  $(f_2, \infty)$  соответственно. Учитывая (12), (П.1) и (П.7), имеем

$$0 < I_1^I < \frac{M}{\pi T} \int_{-\pi m}^{-\pi m + f_1 \pi T} u^{-2} du < \frac{2Mf_1}{\pi^2 f_* \delta} \frac{1}{T^2} = c_1 \frac{1}{T^2} \quad (\text{П.8})$$

Здесь и далее символ  $c$  обозначает не зависящую от  $T$  величину.

Поскольку  $f_1$  и  $f_2$  принадлежат отрезку  $[f_* - \delta, f_* + \delta]$ , то

$$I_1^{II} = q_1 \int_{f_1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T - \pi m)^2} df + q_2 \int_{f_*}^{f_2} \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T - \pi m)^2} df = \frac{2q}{\pi T} \int_0^{\Delta f \pi T} \frac{\sin^2 u}{u^2} du, \quad (\text{П.9})$$

где

$$m_1 < q_1 < M_1; \quad (\text{П.10})$$

$$m_2 < q_2 < M_2; \quad (\text{П.11})$$

$$q = (q_1 + q_2)/2 \quad (\text{П.12})$$

Используя формулу (3.741.3) из [5] и (П.9), получаем, что при  $T \rightarrow \infty$

$$I_1^{II} \sim q T^{-1}. \quad (\text{П.13})$$

Замечая, что для  $I_1^{III} 0 < \pi f_2 T - \pi m < \pi f T - \pi m$ , с учетом (12), (П.2) и (П.6) находим

$$0 < I_1^{III} < (\pi f_2 T - \pi m)^{-2} \int_{f_2}^{\infty} G(f) \sin^2(\pi f T) df < \frac{4P}{\pi^2 \delta^2} \frac{1}{T^2} = c_2 \frac{1}{T^2} \quad (\text{П.14})$$

Разобьем  $I_3$  из соотношения (9) на два интеграла с областями интегрирования  $(0, f_2)$  и  $(f_2, \infty)$  соответственно. Тогда, применяя (12), (П.1) и (П.2) и учитывая, что для первого интеграла  $\pi m < \pi f T + \pi m$ , а для второго  $2\pi m < \pi f T + \pi m$ , получаем

$$0 < I_3 < \left[ \frac{M(f_* + \delta)}{\pi^2 f_*} - \frac{P}{4\pi^2 f_*^2} \right] \frac{1}{T^2} = c_3 \frac{1}{T^2}. \quad (\text{П.15})$$

Ввиду (П.8), (П.13), (П.14) и (П.15) получаем, что при  $T \rightarrow \infty$

$$I_1 + I_3 \sim q T^{-1}, \quad (\text{П.16})$$

причем вследствие (П.10), (П.11) и (П.12) и отличия хотя бы одного из значений  $G(f_* - 0)$  или  $G(f_* + 0)$  от нуля  $q$  является конечной величиной.

Для оценки сверху модуля  $I_2$  разобьем первый интеграл в (8) на четыре части с областями интегрирования  $(0, f_1), (f_1, f_*)$ ,  $(f_*, f_2), (f_2, \infty)$  и обозначим модуль произведения каждого из них на множитель  $1/\pi m$  через  $I_2^I, I_2^{II}, I_2^{III}$  и  $I_2^{IV}$  соот-

ветственно. Вычитаемое из (8) обозначим через  $I_2^V$ . Так как модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых, то

$$|I_2| \leq I_2^I + I_2^{II} + I_2^{III} + I_2^{IV} + I_2^V, \quad (\text{П.17})$$

причем перед тремя последними интегралами знак модуля можно опустить ввиду того, что каждый из них неотрицателен. Аналогично вычислению  $I_1$  и  $I_3$  получаем

$$I_2^I + I_2^{IV} + I_2^V < \left( \frac{2M}{\pi^2 f_*^2} + \frac{2P}{\pi^2 f_*^2} + \frac{P}{\pi^2 f_*^2} \right) \frac{1}{T^2} = c_4 \frac{1}{T^2}, \quad (\text{П.18})$$

$$I_2^{II} + I_2^{III} \leq \frac{2M}{\pi^2 m T} \int_0^{\Delta k \pi} \frac{\sin^2 v}{v} dv. \quad (\text{П.19})$$

Поскольку при  $v \rightarrow 0$  подынтегральная функция также стремится к нулю, то интеграл в (П.19) на отрезке  $[0, \pi]$  конечен. Обозначая его через  $c_5$ , применяя для оценки того же интеграла в области  $(\pi, \Delta k \pi)$  неравенство Буняковского и учитывая (12) и (П.7), получаем

$$\begin{aligned} I_2^{II} + I_2^{III} &\leq \frac{2M}{\pi^2 m T} c_5 + \frac{2M}{\pi^2 m T} \left[ \left( \int_{\pi}^{\Delta k \pi} \sin^4 v dv \right) \left( \int_{\pi}^{\Delta k \pi} \frac{dv}{v^2} \right) \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{2Mc_5}{\pi^2 f_*} \frac{1}{T^2} + \frac{2M}{\pi^2 f_*} \frac{1}{T^2} \sqrt{\frac{367}{8}} = (c_6 + c_7 \sqrt{T}) \frac{1}{T^2} \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Ввиду (П.17), (П.18) и (П.20) при  $T \rightarrow \infty$

$$|I_2| \sim c_8 T^{-1.5}, \quad (\text{П.21})$$

где  $c_8$  может быть как конечной положительной величиной, не превышающей  $c_7$ , так и бесконечно малой. Из (П.21) и (П.16) следует соотношение (13).

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. M. Spetner, J. Appl. Phys., 25, № 5, 653 (1954) (Русский перевод в сб. Определение параметров случайных процессов, Гостехиздат, УССР, Киев, 1962.)
2. В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, М., 1960
3. В. С. Пугачев, Тр. Военно-Воздушной Инженерной Академии (ВВИА) им. Жуковского, вып. 592, 3 (1956).
4. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
9 ноября 1966 г

## THE DISTRIBUTION OF ESTIMATION OF ENERGY SPECTRUM OF REAL NORMAL STATIONARY RANDOM PROCESS

E. M. Goutisayt

Estimation of energy spectrum of a stationary random process, analogous to a strict formula of the energy spectrum of non-random function is considered. It is shown that for the real normal stationary random process with non-strict limitations, the distribution of estimation becomes exponential if the duration of realizations processed increases infinitely. The other consistent, non-shifted and effective estimate is based on this estimation.

УДК 621.371.167

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. II

*B. C. Ильин, Г. П. Костюнина*

На основе вариационной методики рассматривается дифракция электромагнитных волн, поляризация которых отлична от рассмотренной в [1], на пространственно-временных неоднородностях в анизотропном теле. Подробно исследуется случай, когда приращение показателя преломления происходит за счет фотоупругих эффектов, вызванных наличием в кристалле одномерного ультразвукового поля. Рассматриваются амплитудная и поляризационная модуляции дифрагированной волны. Теоретический анализ дополняется численными расчетами дифракции света на ультразвуке в монокристаллах арсенида галлия.

В работе [1] рассмотрена дифракция электромагнитных волн на стоячих ультразвуковых волнах в кристаллах произвольной симметрии для случая нормального падения плоской волны на грань кристаллического прямоугольного блока с поляризацией электрического вектора  $E$  вдоль направления распространения звука.

Проведенный теоретический анализ, в отличие от рассмотренной в [5–8] скалярной дифракции света на ультразвуке в изотропной среде (жидкости), позволил учесть поляризацию волн, анизотропию среды, отражения от границ среды, высшие типы волн ближнего поля, влияние пространственно-временных гармоник и т. д.

Рассмотрение еще двух случаев: случая нормального падения плоской волны на грань кристалла с вектором направления волны  $n$  и вектором  $E$ , перпендикулярными направлению звука  $x$ , и случая, когда  $n \parallel x$ , дает возможность построить решение задачи о произвольном падении волны на входную грань кристалла.

Случай параллельного распространения электромагнитной и ультразвуковой волн представляет предмет специального рассмотрения, поскольку его анализ целесообразно проводить на основе математического аппарата, отличного от предложенного в [1]. Напротив, решение задачи, когда векторы  $n$ ,  $E \perp x$ , может быть дано по методу, изложенному в [1].

В данной статье исследуется последний случай, т. е. рассматривается дифракция плоской электромагнитной волны, нормально падающей на грань анизотропного параллелепипеда, с вектором  $E \perp x$ . Решение последней задачи в совокупности с результатами первой части работы дает возможность после выполнения векторной суперпозиции найденных полей получить полное дифракционное поле волны, произвольно падающей на грань кристалла, при единственном ограничении:  $n$  остается нормальным к направлению  $x$ .

Кроме этого, в данной статье будут приведены некоторые численные результаты по расчету амплитудной и поляризационной модуляции волны, дифрагированной на ультразвуке.

## 1. ВЫВОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим бесконечный в направлении  $x$  и  $y$  пласт толщины  $L$  с компонентами диагонального тензора относительной диэлектрической проницаемости в форме

$$\epsilon_s = \epsilon_{s0} + \Delta\epsilon_s(t) \cos(\bar{k}x) \quad (s = x, y, z),$$

где  $\bar{k} = 2\pi/\Lambda$ ,  $\Lambda$  — длина волны звука в кристалле.

В силу периодичности изменения свойств среды и нормального падения электромагнитной волны на пласт с поляризацией вектора  $E \parallel y$  (см. рис. 1) можно без нарушения структуры поля в плоскостях  $x = m\Lambda/2$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) поместить бесконечно тонкие идеальные магнитные стенки. Тогда задача о прохождении электромагнитной волны через бесконечный слой сводится к волноводной задаче о распространении электромагнитных волн между двумя идеально магнитными плоскостями с неоднородным диэлектрическим заполнением на участке  $0 \leq z \leq L$ .

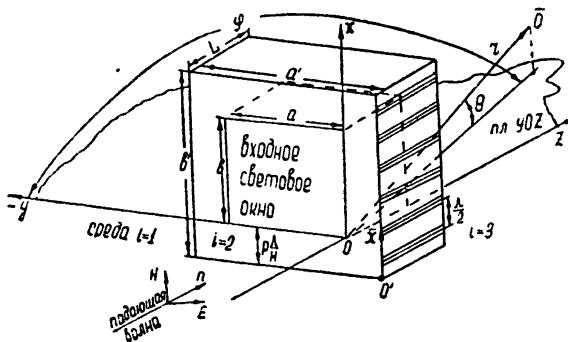


Рис. 1. К расчету дифракции электромагнитных волн на одномерной в направлении  $x$  ультразвуковой решетке в кристаллическом блоке  $a \times b \times L$ .

Поскольку для данной поляризации  $\text{grad}_y \cdot \text{div } E = 0$ , волновое уравнение в  $i$ -среде для  $E_y$ -компоненты с точностью до временного множителя  $e^{-j\omega t}$  принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 E_{yl}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{yl}}{\partial z^2} + k^2 \epsilon_{yl}(x) \mu_i E_{yl}(x, z) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $\mu_i$  — магнитная проницаемость для 1, 2, 3 сред, взятая по отношению к  $\mu$  вакуума.

Решая (1) методом разделения переменных, т. е. полагая, что  $n$ -ос частное решение (1) есть  $E_{yin} = X_{nl}(x) Z_{nl}(z)$ , приходим к уравнениям\*

$$\frac{d^2 X_{nl}}{dx^2} + X_{nl} [k^2 \epsilon_{yl}(x) \mu_i - \tilde{\gamma}_{nl}^2] = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d^2 Z_{nl}}{dz^2} + \tilde{\gamma}_{nl}^2 Z_{nl} = 0. \quad (3)$$

\* Здесь и в дальнейшем мы не будем вводить специальные индексы, учитывающие отличие получаемых в настоящем расчете величин от соответствующих величин, рассмотренных в [1].

Из уравнений Максвелла легко получить связь компонент поля

$$H_{xi} = j \frac{1}{k_p l 120 \pi} \frac{\partial E_{yi}}{\partial z}. \quad (4)$$

На идеально магнитных стенках должно выполняться граничное условие

$$\left. \frac{\partial H_{xi}}{\partial x} \right|_{x=m\Lambda/2} = 0. \quad (5)$$

Учитывая (1) и (4), из (5) для функции  $X_{ni}$  получаем граничное условие

$$\left. \frac{\partial X_{ni}}{\partial x} \right|_{x=m\Lambda/2} = 0.$$

Мембранные функции  $X_{ni}$  удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^{\Lambda/2} \varepsilon_{yi}(x) X_{ni}(x) X_{mi}(x) dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \tilde{N}_{ni} & (n = m) \end{cases}.$$

причем для 1-ой и 3-ей сред  $\tilde{N}_{n1} = \tilde{N}_{n3} = N_n$ ,  $X_{n1} = X_{n3} = X_n$ ,  $\varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y3} = \varepsilon = \text{const}$ .

Общее решение для  $E_y$ , удовлетворяющее граничным условиям на магнитных стенках, будет суперпозицией всех частных решений:

$$E_{yi}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{ni} \exp(j\tilde{\gamma}_{ni} z) + B_{ni} \exp(-j\tilde{\gamma}_{ni} z)] X_{ni}(x). \quad (6)$$

В среде 1 решение (6) необходимо подчинить граничному условию на бесконечности и, кроме того, учесть, что для волн с индексами  $0, 1, \dots, N$  постоянные распространения  $\tilde{\gamma}_{n1} = \tilde{\gamma}_{n3} = \gamma_n$  действительные, а для  $n > N$  — мнимые, так что для волны с  $n > N$  введенный волновод с магнитными плоскостями оказывается «запредельным». Это позволяет записать поле в среде 1 в виде

$$E_{yi}(x, z) = B_{n^*1} \exp(-j\tilde{\gamma}_{n^*1} z) X_{n^*1}(x) + \sum_{n=0}^N A_{ni} \exp(j\tilde{\gamma}_n z) X_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} B_{ni} \exp(|\tilde{\gamma}_n| z) X_n(x), \quad (7)$$

где  $n^*$  — индекс типа волны, «запитывающей» волновод и распространяющейся из источника, находящегося в точке  $z = -\infty$ .

В среде 3 решение (6), удовлетворяющее граничному условию при  $z = \infty$ , имеет вид

$$E_{y3}(x, z) = \sum_{n=0}^N B_{n3} \exp(-j\tilde{\gamma}_n z') X_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_{n3} \exp(-|\tilde{\gamma}_n| z') X_n(x), \quad (8)$$

где  $z' = L - z$ . И, наконец, для второй среды имеем

$$E_{y2}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{n2} \exp(j\tilde{\gamma}_{n2} z) + B_{n2} \exp(-j\tilde{\gamma}_{n2} z)] X_{n2}(x). \quad (9)$$

Коэффициенты  $A_{ni}$  и  $B_{ni}$ , связанные с  $y$ -составляющими электрического поля  $E_0$  и  $E_L$ , заданными на гранях  $z=0$  и  $z=L$ , могут быть представлены соотношениями

$$\begin{aligned}
 A_{n1} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Delta/2} \epsilon E_0 X_n dx \quad (n \neq n^* \leq N), \\
 A_{n^*1} + B_{n^*1} &= \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Delta/2} \epsilon E_0 X_{n^*} dx \quad (n = n^* \leq N), \\
 B_{n1} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Delta/2} \epsilon E_0 X_n dx \quad (n > N); \\
 A_{n2} + B_{n2} &= -\frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \int_0^{\Delta/2} \epsilon_y(x) E_0 X_{n2}(x) dx,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 A_{n2} \exp(j\tilde{\gamma}_{n2}L) + B_{n2} \exp(-j\tilde{\gamma}_{n2}L) &= \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \int_0^{\Delta/2} \epsilon_y(x) E_L X_{n2}(x) dx; \\
 A_{n3} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Delta/2} \epsilon E_L X_n dx \quad (n \geq N), \\
 B_{n3} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Delta/2} \epsilon E_L X_n dx \quad (0 \leq n \leq N).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Выражение коэффициентов-амплитуд волн  $A_{ni}$  и  $B_{ni}$  через функции  $E_0$  и  $E_L$  фактически является операцией сшивания электрического поля на плоскостях  $z=0$  и  $z=L$ . Сшивание магнитных компонент  $H_x$  на  $z=0$  и  $z=L$  произведем, используя соотношение (4), подставив в него (7)–(9). В результате можно получить систему двух интегральных уравнений, которую легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 B_{n1}(1 - R_{n^*n^*} \pm T_{n^*n^*}) \frac{\gamma_{n^*}}{\mu_1} X_{n^*}(x) &= \sum_{n=0}^{N^*} \frac{\gamma_n}{\mu_1} \frac{1}{N_n} \left[ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) \times \right. \\
 &\times \left. \epsilon X_n dx \right] X_n(x) - j \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\gamma_n|}{\mu_2} \frac{1}{N_n} \left[ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) \epsilon X_n dx \right] \times \\
 &\times X_n dx + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{n2}}{\mu_2} \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \frac{\operatorname{ch}(j\tilde{\gamma}_{n2}L) \pm 1}{\operatorname{sh}(j\tilde{\gamma}_{n2}L)} \left[ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) \epsilon_y X_{n2} dx \right] X_{n2}(x),
 \end{aligned} \tag{13}$$

где  $R_{nn^*} = A_{n1}/B_{n1}$  и  $T_{nn^*} = B_{n3}/B_{n1}$  — элементы матриц коэффициентов отражения и прохождения соответственно. (Звездочка в знаке суммирования означает пропуск члена с  $n=n^*$ ).

Из соотношений (14) и (16) имеем

$$B_{n^*1}(1 + R_{n^*n^*} \mp T_{n^*n^*}) = \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) \epsilon X_{n^*} dx. \tag{14}$$

Умножая (13) на  $(E_0 \mp E_L)$  и интегрируя, легко получить, используя (14), для всей совокупности  $n^* = 0, 1, \dots, N$  следующий набор функционалов, стационарных по отношению к малым вариациям функций  $(E_0 \mp E_L)$  вокруг их точных значений\*:

$$\begin{aligned} {}^{(\mp)} F_{n^*} &= \frac{1 - R_{n^* n^*} \pm T_{n^* n^*}}{1 + R_{n^* n^*} \mp T_{n^* n^*}} = \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\gamma_n}{\gamma_{n^*}} \frac{N_{n^*}}{N_n} \left[ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) X_n dx \right]^2 - \right. \\ &- j \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\gamma_n|}{\gamma_{n^*}} \frac{N_{n^*}}{N_n} \left[ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) X_n dx \right]^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{n2}}{\tilde{\gamma}_{n^*}} \frac{N_{n^*}}{\tilde{N}_{n2}} \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \\ &\times \frac{\operatorname{ch}(j\tilde{\gamma}_{n2}L) \pm 1}{\operatorname{sh}(j\tilde{\gamma}_{n2}L)} \left[ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) X_{n2} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon} dx \right] \left[ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) X_{n2} dx \right] \left\} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) X_{n^*} dx \right\}^{-2}. \right. \end{aligned} \quad (15)$$

Минимизируя функционалы  ${}^{(\mp)} F_{n^*}$  по методу Ритца, можно найти их значения и определить, таким образом, диагональные элементы матриц  $R$  и  $T$ . Для отыскания недиагональных элементов этих матриц необходимо, принимая во внимание (10) и (12), воспользоваться соотношениями

$$R_{nn^*} \mp T_{nn^*} = \frac{1}{N_n} \int_0^{\Delta/2} (E_0 \mp E_L) \varepsilon X_n(x) B_{n^*1}^{-1} dx$$

$$(n = 0, 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, \dots, N).$$

По матрицам  $R$  и  $T$ , как уже указывалось в [1], может быть построена  $S$ -матрица рассеяния  $2(N+1)$ -полюсника, эквивалентного рассматриваемому устройству, изображенном на рис. 1. Это позволяет описать волновые свойства бесконечного в направлении  $x$  и  $y$  кристалла в терминах теории цепей. При конечных размерах кристалла полученная эквивалентная схема, очевидно, будет верна лишь для ближней зоны системы.

## 2. МИНИМИЗИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО МЕТОДУ РИТЦА И РАСЧЕТ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУХ ВОЛН

Полученные квадратичные функционалы (15) совпадают по форме с функционалами [1]. Поэтому замечания по способу минимизирования их, сделанные в работе [1], полностью относятся и к функционалам (15), с той лишь разницей, что в данном случае введенные в [1] функции  $g_n$ ,  $w_n$  и  $\bar{w}_n$  имеют вид

\* Доказательство стационарности функционалов (15) проводится прямым вычислением их первой вариации при учете коммутативного соотношения

$$\int_0^{\Delta/2} \int_0^{\Delta/2} \eta(x) \frac{\varepsilon_y(x)}{\varepsilon} \xi(x') G(x, x') dx dx' = \int_0^{\Delta} \int_0^{\Delta/2} \xi(x) \eta(x') \frac{\varepsilon_y(x)}{\varepsilon} G(x, x') dx dx',$$

установливаемого из леммы Лоренца, примененной к объему, занимаемому второй средой. Здесь  $\eta$ ,  $\xi$  — произвольные функции,  $G(x, x')$  — функция Грина.

$$\begin{aligned} g_n &= \left( \frac{\gamma_n}{\gamma_{n^*}} \frac{N_{n^*}}{N_n} \right)^{1/2} X_n(x), \quad \bar{w}_n = \left( \frac{|\gamma_1|}{\gamma_{n^*}} \frac{N_{n^*}}{N_n} \right)^{1/2} X_n(x), \\ \bar{w}_n &= \left( \frac{\tilde{\gamma}_{n2} N_{n^*} \mu_1 [\cos(\tilde{\gamma}_{n2} L) \pm 1]}{\gamma_{n^*} \tilde{N}_{n2} \mu_2 \sin(\tilde{\gamma}_{n2} L)} \right)^{1/2} X_{n2}(x). \end{aligned}$$

Учитывая это, определим мембранные функции  $X_{ni}$ , нормирующие множители  $N_{ni}$  и постоянные  $\gamma_{ni}$  в приближении двух распространяющихся волн с индексами  $n=0$  и  $n=1$ . Амплитуды всех остальных волн, для которых  $1 < n < N$ , считаем равными нулю вследствие их малости по сравнению с первыми двумя.

Решая уравнения (2) и (3) для первой и третьей сред, имеем

$$X_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{\Lambda} x\right), \quad \gamma_n = \left[ k^2 \epsilon \mu_1 - \left(\frac{2\pi n}{\Lambda}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad N_n = \frac{\Lambda \epsilon}{2 \epsilon_n},$$

где  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_n = 2$  при  $n \neq 0$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ .

Подставляя значения  $\epsilon_y$  в уравнение (2), для второй среды получим уравнение Матье:

$$\frac{d^2 X_{n2}}{dx^2} + X_{n2} [\tilde{\theta}_{n0} + \tilde{\theta}_{n1} \cos(\bar{k}x)] = 0,$$

где

$$\tilde{\theta}_{n0} = k^2 \mu_2 \epsilon_{y0} - \tilde{\gamma}_{n2}^2, \quad \tilde{\theta}_{n1} = \left( \frac{\Delta \epsilon_y}{\epsilon_{y0}} \right) k^2 \mu_2 \epsilon_{y0}.$$

Решая это уравнение, как и в [1], вариационным методом, получим следующие соотношения для  $X_{n2}$ ,  $\gamma_{n2}$ ,  $N_{n2}$  с точностью до величин второго порядка малости:

$$X_{02} \simeq \left[ 1 - 2 \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \cos(\bar{k}x) \right], \quad \tilde{\gamma}_{02}^2 \simeq k^2 \mu_2 \epsilon_{y0} = \gamma_{02}^2, \quad \tilde{N}_{02} \simeq \epsilon_{y0} \frac{\Lambda}{2},$$

$$X_{12} \simeq \left[ -\frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_{11}}{\tilde{\theta}_{10}} + \cos(\bar{k}x) + \frac{1}{8} \frac{\tilde{\theta}_{11}}{\bar{k}^2} \cos(2\bar{k}x) \right], \quad \tilde{\gamma}_{12}^2 \simeq k^2 \mu_2 \epsilon_{y0} - \bar{k}^2 = \gamma_{12}^2,$$

$$\tilde{N}_{12} \simeq \epsilon_{y0} \Lambda / 4,$$

$$X_{n2} \simeq 0, \quad \tilde{\gamma}_{n2}^2 \simeq k^2 \mu_2 \epsilon_{y0} - n^2 \bar{k}^2 = \gamma_{n2}^2, \quad \tilde{N}_{n2} \simeq 0 \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где  $\gamma_{n2}$  — «невозмущенное» значение постоянной распространения  $n$ -ой волны в кристалле. Последние соотношения при учете (10) дают возможность получить для вещественной и мнимой частей функционалов (15) приближенные выражения

$${}^{(\mp)} F'_0 \simeq 0, \quad {}^{(\mp)} F''_0 = - \frac{N_0 \gamma_{02} \mu_1 \epsilon_{y0} [\cos(\gamma_{20} L) \pm 1]}{N_{02} \gamma_{02} \mu_2 \epsilon \sin(\gamma_{02} L)},$$

$${}^{(\mp)} F'_1 \simeq 0, \quad {}^{(\mp)} F''_1 = - \frac{N_1 \gamma_{12} \mu_1 \epsilon_{y0} [\cos(\gamma_{02} L) \pm 1]}{N_{12} \gamma_{12} \mu_2 \epsilon \sin(\gamma_{02} L)}.$$

Тогда при возбуждении волновода ТЕМ-волной ( $n^*=0$ ) поля  $E_0$  и  $E_L$  на гранях кристаллического пласта описываются следующими формулами:

$$E_0 = B_{01} \left\{ \frac{1}{1 + F_0^+} + \frac{1}{1 + F_0^-} - j \left[ \frac{Q_{12}^-}{(1 + F_0^-)(P_{22} + jQ_{22}^-)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{Q_{12}^+}{(1 + F_0^+)(P_{22} + jQ_{22}^+)} \right] \cos(\bar{k}x) \right\} \exp(-j\omega t),$$

$$E_L = B_{01} \left\{ \frac{1}{1 + F_0^+} - \frac{1}{1 + F_0^-} + j \left[ \frac{Q_{12}^-}{(1 + F_0^-)(P_{22} + jQ_{22}^-)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{Q_{12}^+}{(1 + F_0^+)(P_{22} + jQ_{22}^+)} \right] \cos(\bar{k}x) \right\} \exp(-j\omega t),$$

где

$$P_{22} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \frac{N_0}{N_1} \frac{(\Lambda/2)^2}{4}, \quad Q_{22}^{(\mp)} = -\frac{\gamma_{12} N_0 \mu_1 [\cos(\gamma_{12} L) \pm 1]}{\gamma_0 N_{12} \mu_2 \sin(\gamma_{12} L)},$$

$$Q_{12}^{(\mp)} = \frac{-\gamma_{02} N_0 \mu_1 \epsilon_{y0} (-\Lambda/2)^2 [\cos(\gamma_{02} L) \pm 1]}{\gamma_0 N_{02} \mu_2 \epsilon^2 \sin(\gamma_{02} L)} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta \epsilon_y}{\epsilon_{y0}} - \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma_{12} N_0 \mu_1 \epsilon_{y0} (\Lambda/2)^2 [\cos(\gamma_{12} L) \pm 1]}{\gamma_0 N_{12} \mu_2 \epsilon^2 4 \sin(\gamma_{12} L)} \frac{\tilde{\theta}_{11}}{\tilde{\theta}_{10}}.$$

Таким образом, получены приближенные выражения для тангенциальных полей  $E_0$  и  $E_L$ , с помощью которых, используя интегральные формулы (10)–(12) и (6), (8) и (9), можно найти полное электромагнитное поле всей системы. При конечных поперечных размерах кристалла  $a'$  и  $b'$  найденные поля будут справедливы лишь в «ближней зоне», т. е. на расстояниях  $r < a', b'$ .

### 3. ДИФРАКЦИЯ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

Выражение для  $E_L$  может быть использовано для построения дальнего дифракционного поля кристаллического блока конечных размеров. Для этого будем рассматривать выходное световое окно кристалла с размерами  $a \times b$  как некоторую апертуру с заданным распределением поля  $E_L$ .

Значение поля  $E_L$  для кристалла конечных размеров можно взять из решенной выше задачи для бесконечного пласта. Погрешность такой «замены» будет тем меньше, чем большее число длин волн  $\lambda$  укладывается на размерах светового окна.

Вычисляя компоненты электрического и магнитного векторных потенциалов на участке  $a \times b$  и используя интегральную форму принципа Кирхгофа—Гюйгенса, найдем дифракционное поле  $E_{y,\theta}$  в дальней зоне (в точке  $\bar{O}$  с радиусом-вектором  $r \gg a', b'$ ). Для случая  $\gamma_{02}L = m\pi/2$  ( $m$  — четное),  $\Lambda \gg \lambda$ ,  $\varphi = 0$  поле  $E_{y,\theta}$  запишется в виде

$$\begin{aligned}
 E_y(\theta, \varphi = \pi/2) = & -j\gamma_0 ab \frac{\exp(j\gamma_0 r)}{4\pi r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n F_n B_{01} \exp(-j\gamma_{02} L) \times \\
 & \times \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_{y0}}} \right) \left( 1 + \cos \theta \sqrt{\frac{\epsilon_{y0}}{\mu_x}} \frac{w}{120\pi} \right) J_n \left( \frac{\gamma_{02}}{2} \frac{\Delta\epsilon_y}{\epsilon_{y0}} \bar{L} \right) \times \quad (16) \\
 & \times \left[ 1 + \frac{1 - \sqrt{\epsilon/\epsilon_{y0}}}{1 + \sqrt{\epsilon/\epsilon_{y0}}} \frac{1 - \sqrt{\epsilon_{y0}/\mu_2} (w \cos \theta / 120\pi)}{1 + \sqrt{\epsilon_{y0}/\mu_2} (w \cos \theta / 120\pi)} \right], \\
 \text{где } w \simeq & 120\pi \sqrt{\mu_1/\epsilon}, \quad F_n = \left( \begin{array}{cc} \sin((\pi a/\lambda_1) \sin \theta) & \sin(n\pi b/\Lambda) \\ (\pi a/\lambda_1) \sin \theta & n\pi b/\Lambda \end{array} \right), \\
 \bar{L} = & \frac{L}{2} \left( \sqrt{\frac{\epsilon_{y0}}{\epsilon}} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_{y0}}} \right),
 \end{aligned}$$

$\lambda_1$  — длина электромагнитной волны в кристалле,  $B_{01}$  — амплитуда падающей волны.

Векторное сложение дифракционного поля (16), найденного для случая, когда в падающей волне  $E \perp x$ , и поля, определенного в работе [1] для  $E \parallel x$ , дает полное дифракционное поле волны, падающей на грань кристалла  $z=0$  с произвольно направленным  $E$  при  $n \perp x$ .

#### 4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ГАРМОНИК ДИФРАГИРОВАННОГО ПОЛЯ

При наличии ультразвуковых колебаний величины  $\Delta\epsilon_s$  являются гармоническими функциями времени и могут быть представлены в форме  $\Delta\epsilon_s = \delta\epsilon_s \cos(\Omega t)$ , где  $\Omega = 2\pi v_{\parallel}/\Lambda$  — круговая частота ультразвука,  $v_{\parallel}$  — скорость продольных колебаний в направлении оси  $x$ .

Используя известное разложение для Бесселевых функций [2]

$$J_n[2\xi \cos(\Omega t)] = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^n \cos(m\Omega t),$$

где

$$A_m^n = \begin{cases} \frac{2J_{\frac{n+m}{2}}(\xi)}{2} \frac{J_{\frac{n-m}{2}}(\xi)}{2} & (\text{для } m = n + 2k; k = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (\text{для } m = n + (2k+1); k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases},$$

для нулевого дифракционного максимума из соотношения (16) получаем

$$\begin{aligned}
 E_y(\theta, \varphi = \pi/2) = & \sum_{v=0}^{\infty} \epsilon_{yv} \exp[-j(\omega \pm v2\Omega)t] = D_y \left\{ J_0^2 \left( \frac{\pi}{2\lambda_1} \frac{\delta\epsilon_y}{\epsilon_{y0}} \bar{L} \right) e^{-j\omega t} + \right. \\
 & + J_1^2 \left( \frac{\pi}{2\lambda_1} \frac{\delta\epsilon_y}{\epsilon_{y0}} \bar{L} \right) \exp[-j(\omega \pm 2\Omega)t] - J_2^2 \left( \frac{\pi}{2\lambda_1} \frac{\delta\epsilon_y}{\epsilon_{y0}} \bar{L} \right) \times \quad (17) \\
 & \left. \times \exp[-j(\omega \pm 4\Omega)t] + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 D_y = & -j\gamma_0 ab \frac{\exp(j\gamma_0 r)}{4\pi r} F_0 B_{01} (1 + \sqrt{\epsilon/\epsilon_{y0}}) \left( 1 + \cos \theta \sqrt{\epsilon_{y0}/\mu_2} \times \right. \\
 & \times \left. \frac{w}{120\pi} \right) \left[ 1 - \exp(2j\gamma_{02} L) \frac{1 - \sqrt{\epsilon/\epsilon_{y0}}}{1 + \sqrt{\epsilon/\epsilon_{y0}}} \frac{1 - \cos \theta \sqrt{\epsilon_{y0}/\mu_2} (w/120\pi)}{1 + \cos \theta \sqrt{\epsilon_{y0}/\mu_2} (w/120\pi)} \right].
 \end{aligned}$$

Выражение, аналогичное ряду (17), можно получить, применяя для найденного в [1] дифракционного поля  $E_x(\theta, \varphi = \pi/2)$  подобное разложение:

$$E_x(\theta, \varphi = \pi/2) = \sum_{\nu}^{\infty} \mathcal{E}_{x\nu} \exp[j(\omega \pm \nu 2\Omega) t].$$

Таким образом, ультразвуковая модуляция тензора диэлектрической проницаемости во времени с частотой  $\Omega$  сопровождается амплитудной модуляцией дифрагированной электромагнитной волны, причем спектр поля в нулевом дифракционном максимуме содержит только боковые частоты ( $\omega \pm \nu 2\Omega$ ), являющиеся функциями удвоенной  $\Omega$ .

Выясним характер поляризации гармоник  $\mathcal{E}_\nu = (\mathcal{E}_{y\nu}^2 + \mathcal{E}_{x\nu}^2)^{1/2}$  полученного спектра для поля  $E(\theta, \varphi = \pi/2)$ :

$$\mathcal{E}_{y\nu} = D_y J_{y\nu}^2 \left( \frac{\pi}{2\lambda_1} \frac{\partial \varepsilon_y}{\varepsilon_{y0}} \bar{L} \right); \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_{x\nu} = D_x J_{x\nu}^2 \left( \frac{\pi}{2\lambda_1} \frac{\partial \varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \bar{L} \right). \quad (19)$$

В соответствии с матричным аппаратом Джонса [3] рассматриваемой монохроматической волне с компонентами (18) и (19) можно сопоставить полный вектор-столбец

$$\begin{vmatrix} A_x \\ A_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_x J_{x\nu}^2 \\ D_y J_{y\nu}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |D_x| J_{x\nu}^2 \exp(j\gamma_{02x} L) \\ |D_y| J_{y\nu}^2 \exp(j\gamma_{02y} L) \end{vmatrix}.$$

Тогда для азимута главной оси  $l_a$  эллипса поляризации и для отношения его полуосей  $l_b/l_a$  можно получить

$$\begin{aligned} z_\nu &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} [\operatorname{tg}(2R_\nu) \cos(\Delta\gamma L)], \\ l_{b\nu}/l_{a\nu} &= \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} (\sin(2R_\nu) |\sin(\Delta\gamma L)|) \right], \\ R_\nu &= \left| \operatorname{arctg} \frac{|D_y| J_{y\nu}^2}{|D_x| J_{x\nu}^2} \right|, \quad \Delta\gamma L = (\gamma_{02y} - \gamma_{02x}) L. \end{aligned} \quad (20)$$

## 5. МОДУЛЯЦИЯ ТЕНЗОРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ УПРУГИМИ ВОЛНАМИ В КРИСТАЛЛЕ

Проведенный электродинамический расчет электромагнитной дифракции на пространственно-временных приращениях диэлектрической проницаемости кристалла обладает известной общностью в том смысле, что он не предполагает конкретной физической природы рассматриваемых приращений. Последние могут быть вызваны различными явлениями: фотоупругими, электро- и магнитооптическими эффектами\*, плазменными волнами в полупроводниках и т. д.

В данной статье мы рассматриваем лишь случай, когда приращения тензора диэлектрической проницаемости происходят за счет упругих волн в твердом теле.

\* Здесь для краткости изложения рассматриваются лишь пространственно-временные приращения диэлектрической проницаемости кристалла. Однако данный метод формулируется и для пространственно-временных неоднородностей магнитной проницаемости кристалла. Это позволяет учитывать различные магнитооптические эффекты.

Уравнение движения упругой среды записывается [9] в виде

$$\rho \ddot{u}_l = \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial \bar{x}_k}, \quad (21)$$

где  $u_l$  — компоненты вектора смещения среды,  $\sigma_{lk}$  — тензор механических напряжений,  $\bar{x}_k$  — координаты,  $\rho$  — плотность кристалла. Для тензора  $\sigma_{lk}$  справедливо соотношение

$$\sigma_{lk} = c_{iklm} u_{lm},$$

где  $c_{iklm}$  — тензор адиабатических модулей упругости\*,  $u_{lm} = \frac{1}{2} (\partial u_m / \partial \bar{x}_l + \partial u_l / \partial \bar{x}_m)$  — тензор деформации.

Рассмотрим случай оптически изотропных (кубических) и оптически одноосных кристаллов гексагональной, тригональной и тетрагональной симметрии. Для таких кристаллов (21) записываем в виде [10, 17]

$$\frac{d^2 u_x}{dt^2} = \frac{c_{11}}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dx^2}, \quad \frac{d^2 u_y}{dt^2} = \frac{c_{66}}{\rho} \frac{d^2 u_y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 u_z}{dt^2} = \frac{c_{55}}{\rho} \frac{d^2 u_z}{dx^2}, \quad (22)$$

где  $c_{11}$ ,  $c_{66}$ ,  $c_{55}$  — элементы матрицы упругих постоянных, соответствующих тензору  $c_{iklm}$  [10].

Задавая одномерную гармоническую волну в виде

$$u_x = u_{x0}(\bar{x}) \cos(\Omega t), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0,$$

из (22) получим

$$\frac{d^2 u_{x0}}{dt^2} + \rho \frac{\Omega^2}{c_{11}} u_{x0} = 0. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) запишем в форме

$$u_{x0} = A \cos \left( \Omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}} \bar{x} \right) + B \sin \left( \Omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}} \bar{x} \right).$$

Если грани кристаллического блока  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{x} = b$  не «зажаты», то на них должно выполняться граничное условие  $\frac{\partial u_{x0}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0, b} = 0$ , т. е.  $u_v =$

$= A \cos(\Omega \sqrt{\rho/c_{11}}) \bar{x} \cos(\Omega t)$ , причем  $b' = m\Delta/2 = m\pi/\bar{k}$  — высота кристалла, в общем случае не равная размеру светового окна  $b$  ( $m$  — целое, обычно большое число).

Единственная отличная от нуля компонента тензора деформации  $u_{xx}$  равна

$$u_{xx} = -A \bar{k} \sin(\bar{k} \bar{x}) \cos(\Omega t), \quad \bar{k} = \Omega \sqrt{\rho/c_{11}}. \quad (24)$$

Отсюда для диагональных компонент тензора напряжений получаем

$$\sigma_{xx} = c_{11} u_{xx}, \quad \sigma_{yy} = c_{21} u_{xx}, \quad \sigma_{zz} = c_{31} u_{xx}. \quad (25)$$

\* Предполагается, что кристалл находится в «незажатом» состоянии. Поэтому для достаточно высоких частот звука можно пренебречь теплопередачей и считать, что упругий процесс протекает адиабатически [10].

В фотоупругом эффекте приращение симметричного тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta B$  связано с тензором напряжений через пьезооптический тензор  $\pi_{ijkl}$  [10, 18]:

$$\Delta B_{ij} = \pi_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (26)$$

Выполняя перемножение в (26), можно найти

$$\begin{aligned}\Delta B_{xx} &= \tilde{B}_{xx} - B_{xx} = \pi_{11}\sigma_{xx} + \pi_{12}\sigma_{yy} + \pi_{13}\sigma_{zz}, \\ \Delta B_{yy} &= \tilde{B}_{yy} - B_{yy} = \pi_{12}\sigma_{xx} + \pi_{11}\sigma_{yy} + \pi_{15}\sigma_{zz}, \\ \Delta B_{zz} &= \tilde{B}_{zz} - B_{zz} = \pi_{13}\sigma_{xx} + \pi_{31}\sigma_{yy} + \pi_{31}\sigma_{zz}, \\ \Delta B_{xy} &= \Delta B_{yx} = \Delta B_{xz} = \Delta B_{zx} = \Delta B_{yz} = \Delta B_{zy} = 0,\end{aligned} \quad (27)$$

где  $B_{ss} = \varepsilon_{s0}^{-1}$  — невозмущенные, а  $\tilde{B}_{ss} = \varepsilon_s^{-1}$  — возмущенные упругими волнами компоненты диагонального тензора диэлектрической проницаемости,  $\pi_{ij}$  — компоненты пьезооптической матрицы, соответствующей тензору  $\pi_{ijkl}$  [10].

Из (24) — (27) легко найти компоненты  $\varepsilon$  в координатах  $x = \bar{x} - (b' - b)\frac{1}{2} = \bar{x} - \Lambda p/4$  ( $p = 1, 3, 5, \dots$ ):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} - A(-1)^{\frac{p+1}{2}} \bar{k} \varepsilon_{x0}^2 (\pi_{11}c_{11} + \pi_{12}c_{12} + \pi_{13}c_{13}) \cos(\bar{k}x) \cos(\Omega t), \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} - A(-1)^{\frac{p+1}{2}} \bar{k} \varepsilon_{y0}^2 (\pi_{12}c_{11} + \pi_{11}c_{12} + \pi_{13}c_{13}) \cos(\bar{k}x) \cos(\Omega t), \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_{z0} - A(-1)^{\frac{p+1}{2}} \bar{k} \varepsilon_{z0}^2 (\pi_{31}c_{11} + \pi_{31}c_{12} + \pi_{33}c_{13}) \cos(\bar{k}x) \cos(\Omega t).\end{aligned} \quad (28)$$

При этом предполагается, что кристаллографическая ось  $z$  есть главная ось симметрии рассматриваемых кристаллических систем.

Таким образом, мы получили выражения для компонент возмущенного ультразвуком тензора диэлектрической проницаемости в зависимости от физических констант кристалла, амплитуды и частоты звука. Выражения (28), будучи подставленными в дифракционные формулы, позволяют вычислить модуляцию волны, прошедшей через конкретные кристаллы.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Численные расчеты были проведены для кристаллов дигидрофосфата аммония  $ADP(NH_4H_2PO_4)$  и арсенида галлия (GaAs).

Кристалл ADP имеет тетрагональную симметрию и относится в классу  $42 m$  [10]. Матрица его упругих постоянных имеет вид

$$(c_{ij}) = \left\{ \begin{array}{l} c_{11}c_{12}c_{13} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ c_{11}c_{13} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ c_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ c_{44} \quad 0 \quad 0 \\ c_{44} \quad 0 \\ c_{66} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0,71 \quad -0,20 \quad 0,13 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0,71 \quad 0,13 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0,30 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0,088 \quad 0 \quad 0 \\ 0,088 \quad 0 \\ 0,07 \end{array} \right\} \times 10^{12} \left( \frac{дин}{см^2} \right), \quad (29)$$

а матрица пьезооптических постоянных равна\*

$$(\pi_{ij}) = \begin{Bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,87 & 0,804 & -3,739 & 0 & 0 & 0 \\ 0,804 & 0,87 & -3,739 & 0 & 0 & 0 \\ 1,238 & 1,238 & -3,56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{Bmatrix} \times 10^{-12} (\text{см}^2 \cdot \text{дин}^{-1}). \quad (30)$$

Для вычисления компонент возмущенного тензора  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  были использованы следующие данные для скорости  $v_{\parallel}$  продольных звуковых волн в АДР и для показателей преломления  $n_s$ :

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{c}{\rho}} = 3,3 \cdot 10^5 \text{ (см} \cdot \text{сек}^{-1}\text{)}, \quad (31)$$

$$n_x = n_y = \sqrt{\epsilon_{x0}} = \sqrt{\epsilon_{y0}} = 1,476, \quad n_z = \sqrt{\epsilon_{z0}} = 1,521$$

для длин волн  $\sim 0,7 \mu$  [12, 13].

Для возмущенной части компонент тензора  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  с учетом (29) — (31) на частоте  $\Omega/2\pi = 10^6 \text{ гц}$  были получены значения

$$\begin{aligned} \frac{\delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} &= (1,2 \cdot \text{см}^{-1}) A \text{ (см),} & \frac{\delta\epsilon_y}{\epsilon_{y0}} &= (2,82 \cdot \text{см}^{-1}) A \text{ (см),} \\ \frac{\delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} &= (7,4 \cdot \text{см}^{-1}) A \text{ (см).} \end{aligned} \quad (32)$$

Что касается величины амплитуды  $A$  на частоте  $\sim 10^6 \text{ гц}$ , то она по оценкам, приведенным в [4], не превышает величины порядка  $10^{-7} \text{ см}$ .

Для кристалла арсенида галлия с электронной проводимостью и кубической симметрией (класс 43 m) величины  $(c_{ij})$ ,  $(\pi_{ij})$  имеют вид [10, 16]

$$(c_{ij}) = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,18 & 0,53 & 0,53 & 0 & 0 & 0 \\ 1,18 & 0,53 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \times 10^{12} (\text{дин} \cdot \text{см}^{-2}),$$

\* Значения элементов матрицы  $\pi_{ij}$  вычислялись по известной формуле [10]  $\pi_{mn} = p_{mr} s_{rn}$ , а данные для  $p_{mr}$  и  $s_{rn}$  были взяты соответственно из [4, 11]. В них не приведены значения  $p_{44}$  и  $p_{66}$  для определения  $\pi_{44}$  и  $\pi_{66}$ . Однако эти величины не участвуют в вышеприведенных расчетных формулах (28) для  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ .

$$(\pi_{ij}) = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3,2 & 5,4 & 5,4 & 0 & 0 & 0 \\ 5,4 & 3,2 & 5,4 & 0 & 0 & 0 \\ 5,4 & 5,4 & 3,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 \end{pmatrix} \times 10^{-12} \text{ см}^2/\text{дин},$$

а  $\varepsilon_{x0} = \varepsilon_{y0} = \varepsilon_{z0} = 10,89$  [14] для длины волны излучения  $\sim 1 \mu$ ,  $v_r = 5,0 \cdot 10^5$  (см·сек<sup>-1</sup>) [15]. Тогда для приращений тензора  $\varepsilon$  получаем следующие значения:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_x/\varepsilon_{x0} &= (1,3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}) A (\text{см}), \\ \delta\varepsilon_y/\varepsilon_{y0} = \delta\varepsilon_z/\varepsilon_{z0} &= (1,5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}) A (\text{см}). \end{aligned} \quad (33)$$

С учетом (32) и (33) были проведены расчеты для относительной амплитуды дифракционного поля с целью определения коэффициентов амплитудной и поляризационной модуляций. Поскольку для арсенида галлия, как видно из (32) и (33), приращения показателя преломления оказываются при одинаковой интенсивности звукового поля на три порядка больше, чем для кристаллов ADP, в дальнейшем оценку ультразвуковой модуляции проведем лишь для GaAs.

На рис. 2 изображена зависимость поля  $E_x(\theta, \varphi = \pi/2)$  в нулевом дифракционном максимуме от параметра  $v = \frac{\pi}{\lambda_1} \frac{\delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} L \cos(\Omega t)$  для двух предельных значений коэффициента отражения  $R_{00}$  от плоскости  $z = 0$  кристалла: когда  $R_{00} = 0$ , т. е. при выполнении условия  $\gamma_{02}L = v\pi/2$  ( $v$  — четное), и когда  $R_{00} = 0,83$ , при нечетном  $v$ . Легко видеть, что при изменении параметра  $v$  во времени в соответствии с функцией  $\cos(\Omega t)$  происходит изменение и амплитуды поля  $E_x(\theta, \varphi = \pi/2)$ , т. е. имеет место амплитудная модуляция. Зависимость коэффициента модуляции в нулевом дифракционном максимуме от величины  $v = \frac{\pi}{\lambda_1} \frac{\delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} L$ , построенная в пренебреже-

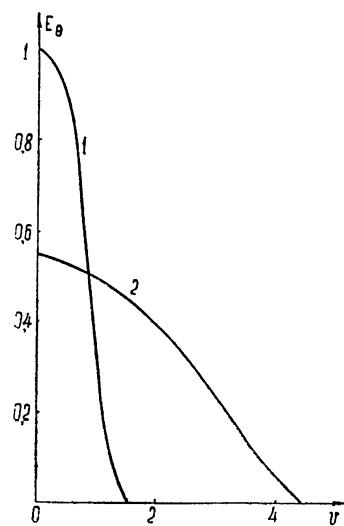


Рис. 2 Зависимость амплитуды дифракционного поля  $E_x(\theta, \varphi = \pi/2)$  в нулевом максимуме от параметра  $v = \frac{\pi}{\lambda_1} \frac{\Delta\varepsilon_x(t)}{\varepsilon_{x0}} L$ :  $1 - R_{00} = 0$ ,  $2 - R_{00} = 0,83$ .

ния гармониками ( $\omega \pm 4\Omega$ ), ( $\omega \pm 6\Omega$ ) и т. д., приведена на рис. 3, из которого видно, что глубина модуляции может меняться в широких пределах при изменении длины волны электромагнитного излучения, приращения  $\delta\varepsilon_x$  и толщины блока  $L$ . Для обеспечения коэффициента модуляции  $M = 20\%$  в кристаллах GaAs с  $L = 1 \text{ см}$  требуется амплитуда звука  $A \sim 10^{-9} \text{ см}$ , что соответствует достаточно слабым акустическим полям в кристалле.

Произведем оценку поляризационной модуляции при тех же условиях, т. е. при  $A \sim 10^{-9}$  см,  $\Omega/2\pi \sim 10^6$  гц,  $\lambda = 1\mu$ ,  $m$ —четное. Используя соотношения (33) и (20), для случая правоциркулярно поляризованной волны ( $|D_x| = |D_y|$ ,  $\Delta\gamma L = \pi/2$ ), падающей на входную грань кристаллического блока из GaAs, можно получить следующие параметры эллипса поляризации основной спектральной компоненты дифрагированной волны в нулевом максимуме:

$$\alpha_{\omega=0} = \alpha_{\omega} \approx 0, \quad (l_b/l_a)_{\omega} = 1,02, \quad (34a)$$

а для соседних боковых частот имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega \pm 2\Omega} &= \alpha_{(\omega \pm 2\Omega)} \approx 0, \\ (l_b/l_a)_{(\omega \pm 2\Omega)} &= 0,79. \end{aligned} \quad (34b)$$

При падении линейно поляризованной волны под углом  $45^\circ$  вместо (34a) и (34b) соответственно получим

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega} &= 45^\circ, \quad (l_b/l_a)_{\omega} = 0, \\ \alpha_{(\omega \pm 2\Omega)} &= 38^\circ, \\ (l_b/l_a)_{(\omega \pm 2\Omega)} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Рис. 3. Зависимость коэффициента амплитудной модуляции  $M$  от параметра

$$\bar{v} = \frac{\pi}{2\lambda_1} \frac{\delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} L.$$

Таким образом, компоненты спектра амплитудной модуляции поляризованы, вообще говоря, неодинаковым образом. Падение такого излучения на приемник, выделяющий определенную поляризацию, приводит к изменению коэффициента модуляции по сравнению с коэффициентом модуляции неполяризованного излучения. Если коэффициент модуляции неполяризованного излучения равен  $M = 2\varepsilon_1/\varepsilon_0$ , то, например, для линейно поляризованной волны при наличии анализатора, выделяющего вектор электрического поля, составляющий угол  $\varphi$  с осью  $y$ , новый коэффициент модуляции  $M_n$ , как нетрудно видеть, имеет вид

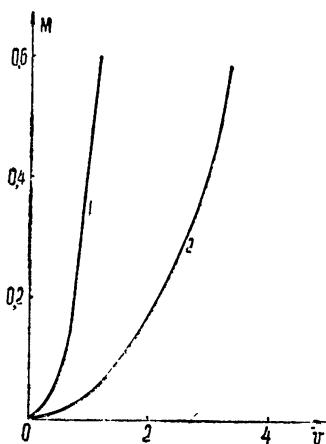
$$M_n = 2 \frac{\varepsilon_1 \cos(\varphi - \alpha_{(\omega \pm 2\Omega)})}{\varepsilon_0 \cos(\varphi - \alpha_{\omega})} = M \frac{\cos(\varphi - \alpha_{(\omega \pm 2\Omega)})}{\cos(\varphi - \alpha_{\omega})}. \quad (36)$$

Представляя  $\alpha_{\omega}$  в форме  $\alpha_{\omega} = \varphi_{\text{пад}} + \Delta\alpha_{\omega}$ , а  $\alpha_{(\omega \pm 2\Omega)} = \varphi_{\text{пад}} + \Delta\alpha_{(\omega \pm 2\Omega)}$ , где  $\varphi_{\text{пад}}$  — угол линейной поляризации падающей волны,  $\Delta\alpha_{\omega}$  и  $\Delta\alpha_{(\omega \pm 2\Omega)}$  — некоторые добавки (практически малые), для случая  $\varphi = \varphi_{\text{пад}}$  соотношение (36) можно переписать в виде

$$M_n \approx M \left\{ 1 + \frac{1}{2} [(\Delta\alpha_{\omega})^2 - (\Delta\alpha_{(\omega \pm 2\Omega)})^2] \right\}. \quad (37)$$

Выражения (36) и (37) указывают на различие между коэффициентами  $M$  и  $M_n$ , обусловленное эффектом поляризационной модуляции. Так, при условиях, для которых найдены соотношения (35), это различие невелико и составляет  $\sim 0,5\%$ . Однако для некоторых кристаллов при достаточно больших плотностях акустического поля вклад поляризационной модуляции существенен.

Поскольку при расчете дифракции мы ограничивались приращениями  $\Delta\varepsilon$  только первого порядка, то из рассмотрения выпали эффекты,



связанные с фазовой модуляцией дифрагированной волны. Полученные общие функциональные соотношения позволяют при их минимизировании по методу Ритца с учетом членов второго порядка малости найти и спектр фазовой модуляции, возникающей при дифракции электромагнитной волны на ультразвуке в кристалле.

В первой и во второй частях данной работы рассмотрена теория дифракции электромагнитных волн на одномерных ультразвуковых колебаниях в прямоугольном кристаллическом блоке. В отличие от классических формул Рамана—Ната и Рытова [5–8] для скалярной дифракции света на ультразвуке в жидкости в настоящей работе рассматриваются влияние анизотропии среды, отражения волн от граней кристалла, дифракция в ближней зоне, поляризация волн, учет высших пространственно-временных гармоник поля, спектр амплитудно-модулированного поля и т. д.

На основе вариационного метода определена матрица рассеяния  $2(N+1)$ -полюсника, эквивалентного данному рассматриваемому устройству. Последнее обстоятельство позволяет «подключать» к кристаллическому образцу различные другие оптические системы с известными матрицами рассеяния (просветляющие пленки, зеркальные или поглощающие слои на гранях кристалла) и производить сложный расчет полученных таким образом «каскадных» соединений на основе матричного метода теории цепей.

В работе подробно исследуется случай, когда приращения показателя преломления среды вызваны фотоупругими эффектами за счет ультразвуковых колебаний. Для некоторых видов кристаллической симметрии приведены выражения, позволяющие найти возмущенный тензор диэлектрической проницаемости в зависимости от амплитуды и частоты ультразвуковой волны. На основе найденных теоретических формул произведен численный расчет возмущенного тензора  $\epsilon$  моно-кристалла с электронной проводимостью GaAs и относительной амплитуды дифракционного поля. Приводятся численные оценки параметров, указывающие на пригодность кристалла GaAs в качестве рабочего тела в ультразвуковых дифракционных модуляторах света.

Важной особенностью приведенного электродинамического рассмотрения, как уже указывалось, является возможность его применения для описания дифракции электромагнитных волн на пространственно-временных неоднородностях в среде, вызванных не только ультразвуком, но и другими различными по своей физической природе эффектами (например, электрооптическим эффектом и др.).

В заключение отметим, что приведенная теория пригодна и для поглощающих кристаллов при соответствующей замене в функционалах невозмущенной части действительного тензора диэлектрической проницаемости на комплексный тензор, учитывающий потери в среде.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Ильин, Г. П. Костюнина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 16 (1966).
2. Levi Fritz, Helvetica Phys. Acta, 9, 234 (1936).
3. У. Шерклифф, Поляризованный свет, изд. Мир, М., 1965.
4. Л. Бергман, Ультразвук и его применение в науке и технике, ИЛ, М., 1956.
5. C. Raman, N. Nath, Proc. Ind. Inst. Sci., 2(A), part I, 406 (1935).
6. C. Raman, N. Nath, Proc. Ind. Inst. Sci., 2(A), part II, 413 (1935).
7. C. Raman, N. Nath, Proc. Ind. Inst. Sci., 3(A), part III, 75 (1936).
8. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, сер. физ., № 2, 223 (1937).

- 9 Ф. И. Федоров, Теория упругих волн в кристаллах, изд. Наука, М., 1965  
 10 Дж. Най, Физические свойства кристаллов, ИЛ, М., 1960.  
 11. K. Achuthan, M. Viezeale, J. Opt. Soc. Am., **51**, № 8, 914 (1961).  
 12. У. Мэзон, Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике, ИЛ, М., 1952.  
 13. R. Billard, J. Cornillault, Acta electronica, **6**, № 2, 75 (1962).  
 14. К. Хилсум, А. Роуз-Инс, Полупроводники типа  $A_{III}B_V$ , ИЛ, М., 1963  
 15. Т. В. Batemann, H. J. McSkimin and J. M. Whelan, J. Appl. Phys., **30**, № 4, 544 (1959).  
 16. M. Zerbst, Z. Naturf., **17a**, № 8, 619 (1962).  
 17. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.  
 18. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1959.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию  
2 августа 1966 г.DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY ULTRASOUND WAVES  
IN ANISOTROPIC MEDIUM II*V. S. Il'in, G. P. Kostyunina*

On the basis of the variation method the diffraction of electromagnetic waves (with polarization differed from that discussed in [1]) is considered on the spatial-time irregularities in an anisotropic body. The case is detaily studied when the increment of the index of refraction is resulted due to the photo-elastic effects in the presence of one-dimensional ultrasonic field in a crystal. The amplitude and polarization modulation of the diffracted wave are considered. The theoretical analysis is supplemented with the numerical data of the light ultrasonic diffraction in gallium arsenide monocrystals.

УДК 621.371.167·621.372.8

**ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА  
ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ  
ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ**

Л. М. Маслова

В работах [1, 2] рассматривались особенности отражения поверхности волны, косо падающей на край анизотропно проводящей полуплоскости. Вместе с тем, замедляющие структуры типа анизотропно проводящей плоскости используются, как правило, в волноводах, которые существенно меняют свойства замедляющей системы. В настоящей работе исследуется дифракция поверхности медленной волны на полу бесконечной анизотропно проводящей плоскости, помещенной в плоский волновод. Аналогичная задача о дифракции волноводных (быстрых) волн, нормально падающих на край полуплоскости, рассмотрена в [3].

Пусть плоский волновод составлен из двух бесконечных идеально проводящих плоскостей  $z = \pm a$ , а анизотропно проводящая полуплоскость задается условиями  $z = 0, x \geq 0$ . Вектор  $e_\xi(\cos \alpha, \sin \alpha)$  определяет направление на анизотропно проводящей плоскости, в котором проводимость  $\sigma = \infty$ , а вектор  $e_\eta(-\sin \alpha, \cos \alpha)$  — направление с  $\zeta = 0$  ( $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ ). На край полуплоскости со стороны замедляющей решетки набегает медленная волна, двумерный волновой вектор которой  $\mathbf{k}_0$  составляет угол  $\pi - \beta$  с осью  $x$ . Поле падающей волны зададим векторным потенциалом  $\mathbf{A}^0$  с единственной составляющей  $A_\xi^0$ :

$$A_\xi^0 = A_0 \operatorname{sh}[(a - |z|)k \operatorname{tg}(\alpha - \beta)] \exp \left[ -i \frac{k \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)} x - i \frac{k \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)} y - i \omega t \right], \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$ . Векторы поля найдутся из формул

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik} (\mathbf{k}^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2)$$

Обозначим

$$h_0 = \frac{k \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad k_y = -\frac{k \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - k_y^2}, \quad h_r = \frac{k \cos \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}, \quad (3)$$

где

$$\gamma = -\operatorname{arctg} \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \sin \alpha + \cos(\beta - \alpha)}$$

— угол, составляемый отраженной медленной волной с осью  $x$ . Из условий излучения следует, что  $-\pi/2 < \alpha - \beta < \pi/2, -\pi/2 < \alpha - \gamma < \pi/2$ . Зависи-

мость от координаты  $y$  и времени ниже будем опускать. Полное поле  $\mathbf{A}'$  ищем в виде

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}(A_\xi, 0, 0)$  — векторный потенциал поля, обусловленного наличием неоднородности, причем

$$A_\xi = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [A(w) \exp(i\sqrt{k_1^2 - w^2}z) + B(w) \exp(-i\sqrt{k_1^2 - w^2}z)] \times \\ \quad \times \exp(iwx) dw \quad (0 < z < a), \\ \int_{-\infty}^{\infty} [A'(w) \exp(-i\sqrt{k_1^2 - w^2}z) + B'(w) \exp(i\sqrt{k_1^2 - w^2}z)] \times \\ \quad \times \exp(iwx) dw \quad (-a < z < 0) \end{cases}. \quad (5)$$

Приписываем  $k_1$  малую положительную мнимую часть и проводим разрез в плоскости  $w$  от точки  $k_1$  в верхней полуплоскости и от  $-k_1$  в нижней; выбираем ветвь  $\sqrt{k_1^2 - w^2}$  так, чтобы при  $w \rightarrow 0$   $\sqrt{k_1^2 - w^2} \rightarrow k_1$ .

Из граничных условий  $E_\xi|_{z=\pm a} = 0$ ,  $E_\eta|_{z=\pm a} = 0$ ,  $E_\xi$  при  $z = 0$  непрерывна, следует

$$A'(w) = A(w), \quad B'(w) = B(w) = -A(w) \exp(i2\sqrt{k_1^2 - w^2}a).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (5), получим

$$A_\xi = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \sin[(a - |z|)\sqrt{k_1^2 - w^2}] \exp(i\sqrt{k_1^2 - w^2}a) \times \\ \quad \times A(w) \exp(iwx) dw. \quad (6)$$

Условие  $E_\xi|_{z=0} = 0$  при  $x > 0$  и непрерывность  $H_\eta^0 + H_\eta$  при  $z = 0$ ,  $x < 0$  приводят к парным интегральным уравнениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} (w - h_r)(w - h_0) \sin(a\sqrt{k_1^2 - w^2}) \exp(i\sqrt{k_1^2 - w^2}a) \times \\ \quad \times A(w) \exp(iwx) dw = 0 \quad (x > 0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_1^2 - w^2} \cos(a\sqrt{k_1^2 - w^2}) \exp(i\sqrt{k_1^2 - w^2}a) \times \\ \quad \times A(w) \exp(iwx) dw = -\frac{1}{2} ik A_0 \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{ch}[ak \operatorname{tg}(\alpha - \beta)] \times \\ \quad \times \exp(-ih_0 x) \quad (x < 0). \quad (7)$$

Используя разложение целых функций  $\sin(a\sqrt{k_1^2 - w^2})/\sqrt{k_1^2 - w^2}$  и  $\cos(a\sqrt{k_1^2 - w^2})$  в бесконечные произведения, нетрудно найти  $A(w)$ :

$$A(w) = -\frac{A_0 k \operatorname{tg}(\alpha - \beta) (h_0 + h_r) \exp(-i\sqrt{k_1^2 - w^2}a)}{4\pi(w + h_r)(w - h_r)\sqrt{k_1^2 - w^2}} \times \\ \quad \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + h_0/i\alpha_n)}{(1 - w/i\alpha_n)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - h_0/i\alpha'_n)}{(1 + w/i\alpha'_n)},$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{(n\pi/a)^2 - k_1^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

$$\alpha'_n = \sqrt{\left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi/a \right]^2 - k_1^2} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Подставляя  $A(w)$  в (6), получим

$$A_\xi = \frac{i}{2\pi} A_0 k \operatorname{tg}(\alpha - \beta) (h_0 + h_r) \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{h_0}{i\alpha_n} \right) \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{h_0}{i\alpha'_n} \right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(a - |z|) \sqrt{k_1^2 - w^2}] \exp(iwx) dw}{(w + h_0)(w - h_r) \sqrt{k_1^2 - w^2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w/i\alpha_n) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + w/i\alpha'_n)} . \quad (9)$$

При  $x > 0$  контур интегрирования замыкаем дугой на бесконечности в верхней полуплоскости, а при  $x < 0$  — в нижней. Интеграл по этим дугам и линиям разрезов равен нулю. Полюс в точке  $w = h_r$  дает медленную отраженную волну

$$A_\xi^{(h_r)} = - \frac{A_0 \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha - \gamma)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + h_0/i\alpha_n)}{(1 - h_r/i\alpha_n)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - h_0/i\alpha'_n)}{(1 + h_r/i\alpha'_n)} \times$$

$$\times \operatorname{sh}[(a - |z|)k \operatorname{tg}(\alpha - \gamma)] \exp(ih_r x) \quad (x > 0). \quad (10)$$

Полюсы в точках  $w = i\alpha_n$  дают волноводные волны. Предположим, что  $l$  — такое целое число, что

$$\left( l + \frac{1}{2} \right) \pi/a < k_1, \quad \text{а} \quad (l + 1)\pi/a > k_1. \quad (11)$$

Тогда  $\alpha_n$  и  $\alpha'_n$  будут действительными для  $n = l + 1, l + 2, \dots$  и мнимыми для  $n = 0, \dots, l$ . Обозначим через

$$\lambda_n = i\alpha_n = \sqrt{k_1^2 - \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2} \quad \text{для} \quad n = 1, \dots, l \quad (12)$$

и

$$\lambda'_n = i\alpha'_n \quad \text{для} \quad n = 0, \dots, l.$$

Волны будут затухающими при  $n = l + 1, \dots$  и распространяющимися при  $n = 1, \dots, l$ :

$$A_\xi^{(n)} = (-1)^{n+1} \lambda_n \operatorname{sgn} z A_0 k \operatorname{tg}(\alpha - \beta) (h_0 + h_r) \sin \left( \frac{n\pi z}{a} \right) \times$$

$$\times \exp(i\lambda_n x) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{h_0}{i\alpha_k} \right) \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{h_0}{i\alpha'_k} \right) \left[ \frac{n\pi}{a} (h_r - \lambda_n) \times \right.$$

$$\left. \times (h_0 + \lambda_n) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \left( 1 - \frac{\lambda_n}{i\alpha_k} \right) \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{\lambda_n}{i\alpha'_k} \right) \right]^{-1} \quad (x > 0). \quad (13)$$

При  $x < 0$  полюс в точке  $w = -h_0$  дает медленную волну

$$A_{\xi}^{(-h_0)} = - A_0 \operatorname{sh} [ (a - |z|) k \operatorname{tg} (\alpha - \beta) ] \exp (-ih_0 x) \quad (x < 0),$$

так что полное поле в этой области не содержит медленной волны

Полюсы в точках  $w = -i\lambda_n'$  при  $n = l + 1, \dots$  определяют затухающие волны, а при  $n = 0, \dots, l$  — распространяющиеся:

$$A_{\xi}^{(-\lambda_n')} = \frac{(-1)^{n+1} A_0 \lambda_n' k \operatorname{tg} (\alpha - \beta) (h_0 + h_r) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + h_0/i\alpha_k) \prod_{k=0}^{\infty} (1 - h_0/i\alpha_k')}{\left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi/a \right] (h_0 - \lambda_n') (h_r + \lambda_n') \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_n'/i\alpha_k) \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda_n'/i\alpha_k')} \times \\ \times \cos \frac{(n + 1/2) \pi z}{a} \exp (-i\lambda_n' x) \quad (x < 0). \quad (14)$$

Отметим, что как в падающей, так и в отраженной медленной волне 1) векторы  $E$  и  $H$  лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению проводимости экрана; 2) нет критической частоты; 3) фазовая скорость меньше скорости волны в свободном пространстве; 4) энергия распространяется в направлении  $\xi$ , а не в направлении распространения фазы; 5) векторы  $E$  и  $H$  имеют круговую поляризацию, причем направления вращения векторов поля противоположны в областях выше и ниже плоскости  $z = 0$ .

Определим коэффициент отражения медленной волны по мощности  $R_s$  как отношение потоков энергии в отраженной и падающей медленных волнах через ленту длины  $2a$  и единичной ширины, перпендикулярную к анизотропной плоскости. Вычисляя среднее значение вектора Пойнтинга

$$S = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E H^*] = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ E_z H_z^* - E_z H_z^*, 0, 0 \}$$

и беря интеграл  $\int_0^1 dy \int_{-a}^a S_{\xi} dz$ , получаем поток энергии через эту ленту.

Проведя несложные выкладки, находим

$$R_s = \prod_{n=1}^l \frac{(1 + h_0/\lambda_n) (1 + h_r/\lambda_n)}{(1 - h_0/\lambda_n) (1 - h_r/\lambda_n)} \prod_{n=0}^l \frac{(1 - h_0/\lambda_n') (1 - h_r/\lambda_n')}{(1 + h_0/\lambda_n') (1 + h_r/\lambda_n')} \quad (15)$$

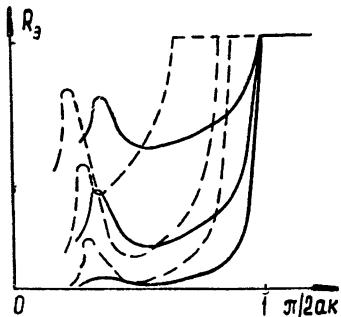
В частном случае  $\pi/2a > k_1$  все волноводные волны затухающие и  $R_s = 1$ . На рис. 1 приведен коэффициент отражения медленной волны  $R_s$  как функция  $\pi/2ak$  для углов падения  $\beta = 0$  и  $\beta = 30^\circ$  при направлениях проводимости  $a = 20, 60, 80^\circ$ . Нижняя граница аргумента соответствует критической частоте волны  $A_{\xi}^{(\lambda_0)}$ , точка максимума — кри-

тической частоте  $A_{\xi}^{(-\lambda_1')}$ , точка минимума — критической частоте  $A_{\xi}^{(\lambda_0)}$ , а значение аргумента, при котором  $R_s$  становится равным единице, — критической частоте  $A_{\xi}^{(-\lambda_0')}$ . Коэффициент отражения возрастает с ростом угла проводимости. График представляет колеблющуюся кривую;  $R_s$  начинает убывать, когда аргумент принимает значение, соответствующее критической частоте волн  $A_{\xi}^{(-\lambda_n')}$ , распространяющихся

в области  $x < 0$ , и начинает возрастать со значения, соответствующего критической частоте волн  $A_{\xi}^{(n)}$ , распространяющихся в область  $x > 0$ .

Рассмотрим теперь другой случай, когда между плоскостями плоского волновода  $z = \pm a$  помещены идеально проводящий экран  $z = 0$ ,

Рис. 1. Коэффициент отражения по мощности медленной волны  $R_3$



$x < 0$  и анизотропно проводящая полуплоскость  $z = 0$ ,  $x \geq 0$  (такая же, как и в предыдущем случае). Со стороны замедляющей решетки набегает медленная волна, задаваемая с помощью магнитного вектора Герца  $\mathbf{M}^0$  с одной составляющей  $M_{\xi}^0$ :

$$\begin{aligned} M_{\xi}^0 = B_0 \operatorname{sgn} z \operatorname{ch} [(\alpha - |z|)k \operatorname{tg}(\alpha - \beta)] \times \\ \times \exp \left\{ -i \frac{k \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)} x - i \frac{k \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)} y - i \omega t \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Векторы поля найдутся из формул

$$\mathbf{E} = ik \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}. \quad (17)$$

Падающая волна из-за разрыва при  $x = 0$  рассеивается, так что полное поле

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}^0 + \mathbf{M}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{M}$  ( $M_{\xi}, 0, 0$ ) — магнитный вектор Герца, обусловленный наличием неоднородности:

$$M_{\xi} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [C(w) \exp(i \sqrt{k_1^2 - w^2} z) + D(w) \exp(-i \sqrt{k_1^2 - w^2} z)] \times \\ \times \exp(i \omega x) dw \quad (0 < z < a), \\ \int_{-\infty}^{\infty} [C'(w) \exp(-i \sqrt{k_1^2 - w^2} z) + D'(w) \exp(i \sqrt{k_1^2 - w^2} z)] \times \\ \times \exp(i \omega x) dw \quad (-a < z < 0) \end{cases} \quad (19)$$

Из граничных условий ( $E_{\eta}|_{z=0}$  непрерывна,  $E_{\xi}|_{z=\pm a} = E_{\eta}|_{z=\pm a} = 0$ ) следует, что

$$C'(w) = -C(w), \quad D(w) = -D'(w) = C(w) \exp(2i \sqrt{k_1^2 - w^2} a).$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (17), находим

$$\begin{aligned} M_{\xi} = 2 \operatorname{sgn} z \int_{-\infty}^{\infty} C(w) \exp(i \sqrt{k_1^2 - w^2} a) \times \\ \times \cos[(\alpha - |z|) \sqrt{k_1^2 - w^2}] \exp(i \omega x) dw. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку  $E_\eta^0 + E_\eta = 0$  на  $z = 0$  при  $x < 0$  и  $H_\xi$  непрерывна на  $z = 0$  при  $x > 0$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_1^2 - w^2} \sin(a \sqrt{k_1^2 - w^2}) \exp(i \sqrt{k_1^2 - w^2} a) C(w) \times \\ \times \exp(iwx) dw = \frac{B_0}{2} k \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{sh}[ak \operatorname{tg}(\alpha - \beta)] \times \\ \times \exp(-ih_0 x) \quad (x < 0), \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (w - h_r)(w + h_0) \cos(a \sqrt{k_1^2 - w^2}) \exp(i \sqrt{k_1^2 - w^2} a) C(w) \times \\ \times \exp(iwx) dw = 0 \quad (x > 0).$$

Решая эту систему, находим

$$C(w) = \frac{B_0(h_0 - k_1)(h_0 + h_r)}{4\pi i(k_1 + w)(w + h_0)(w - h_r)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + h_0/i\alpha'_n)}{(1 - w/i\alpha'_n)} \times \\ \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - h_0/i\alpha_n)}{(1 + w/i\alpha_n)} \exp(-i \sqrt{k_1^2 - w^2} a).$$

Подставляя  $C(w)$  в (18), получаем магнитный вектор Герца

$$M_\xi = \frac{B_0}{2\pi i} \operatorname{sgn} z (h_0 - k_1)(h_0 + h_r) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + h_0/i\alpha'_n) \times \\ \times \prod_{n=1}^{\infty} (1 - h_0/i\alpha_n) \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(a - |z|) \sqrt{k_1^2 - w^2}] \exp(iwx) dw \times \quad (22) \\ \times \left[ (w + h_0)(w - h_r)(w + k_1) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + w/i\alpha_n) \prod_{n=0}^{\infty} (1 - w/i\alpha'_n) \right]^{-1}.$$

При  $x > 0$  полюс в точке  $w = h_r$  даст отраженную медленную волну

$$M_\xi^{(h_r)} = \frac{\operatorname{sgn} z B_0(h_0 - k_1)}{(h_r + k_1)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + h_0/i\alpha'_n)}{(1 - h_r/i\alpha'_n)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - h_0/i\alpha_n)}{(1 + h_r/i\alpha_n)} \times \quad (23) \\ \times \operatorname{ch}[(a - |z|)k \operatorname{tg}(\alpha - \gamma)] \exp(ih_r x).$$

Полюсы в точках  $w = i\alpha'_n$  при учете (11) дают затухающие волноводные волны для  $n = l + 1, \dots$  и распространяющиеся для  $n = 0, \dots, l$ :

$$M_\xi^{(\lambda'_n)} = \frac{(-1)^{n+1} \lambda'_n B_0(h_0 - k_1)(h_0 + h_r) \prod_{k=0}^{\infty} (1 + h_0/i\alpha'_k)}{(h_0 + \lambda'_n)(h_r - \lambda'_n)(k_1 + \lambda'_n) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} (1 - \lambda'_n/i\alpha'_k)} \times \\ \times \prod_{k=l}^{\infty} \frac{(1 - h_0/i\alpha_k)}{(1 + \lambda'_n/i\alpha_k)} \sin \frac{(n + 1/2)\pi z}{a} \exp(i\lambda'_n x) \quad (x > 0).$$

При  $x < 0$  полюс в точке  $w = -h_0$  дает волну

$$M_{\xi}^{(-h_0)} = -\operatorname{sgn} z B_0 \operatorname{ch} [(a - |z|)k \operatorname{tg}(\alpha - \beta)] \exp(-ih_0 x).$$

Следовательно, полное поле при  $x < 0$  не содержит медленной волны.

Полюс в точке  $w = -k_1$  дает ТЕМ волну:

$$\begin{aligned} M_{\xi}^{(-k_1)} &= \operatorname{sgn} z B_0 \frac{h_0 + h_r}{k_1 + h_r} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + h_0/i\alpha'_n)}{(1 + k_1/i\alpha'_n)} \times \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - h_0/i\alpha_n)}{(1 - k_1/i\alpha_n)} \exp(-ik_1 x) \quad (x < 0). \end{aligned} \quad (25)$$

При  $n = 1, \dots, l$  полюсы в точках  $w = -\lambda_n$  дают распространяющиеся волноводные волны:

$$\begin{aligned} M_{\xi}^{(-\lambda_n)} &= \frac{(-1)^n \lambda_n \operatorname{sgn} z B_0 (h_0 - k_1) (h_0 + h_r) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - h_0/i\alpha_k)}{(k_1 - \lambda_n) (h_0 - \lambda_n) (h_r + \lambda_n) \prod_{k=1, k \neq n}^{\infty} (1 - \lambda_n/i\alpha_k)} \times \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + h_0/i\alpha'_k)}{(1 + \lambda_n/i\alpha'_k)} \cos \frac{n\pi z}{a} \exp(-i\lambda_n x) \quad (x < 0). \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что в отсутствие идеально проводящего экрана  $z=0, x < 0$  в области  $x > 0$  распространяются волноводные волны  $A_{\xi}^{(\lambda_n)}$  с фазовой постоянной  $\lambda_n$ , а в области  $x < 0$  — волны  $A_{\xi}^{(-\lambda'_n)}$  с фазовой постоянной  $\lambda'_n$ , тогда как в этом случае в области  $x > 0$  распространяются волны  $M_{\xi}^{(\lambda'_n)}$  с фазовой постоянной  $\lambda'_n$ , а в области  $x < 0$  — волны  $M_{\xi}^{(-\lambda_n)}$  с фазовой постоянной  $\lambda_n$  и ТЕМ волна  $M_{\xi}^{(-k_1)}$ .

Коэффициент отражения медленной волны по мощности, введенный так же, как в предыдущем случае, равен

$$\begin{aligned} R'_s &= \frac{(h_0 - k_1)(h_r - k_1)}{(h_0 + k_1)(h_r + k_1)} \prod_{n=0}^l \frac{(1 + h_0/\lambda'_n)(1 + h_r/\lambda'_n)}{(1 - h_0/\lambda'_n)(1 - h_r/\lambda'_n)} \times \\ &\quad \times \prod_{n=1}^l \frac{(1 - h_0/\lambda_n)(1 - h_r/\lambda_n)}{(1 + h_0/\lambda_n)(1 + h_r/\lambda_n)} \end{aligned} \quad (27)$$

и связан с коэффициентом отражения  $R_s$  (15) соотношением

$$R'_s = \frac{1}{R_s} \frac{(h_0 - k_1)(h_r - k_1)}{(h_0 + k_1)(h_r + k_1)}.$$

В частном случае  $\pi/2a > k_1$  распространяется только одна волноводная волна  $M_{\xi}^{(-k_1)}$  и

$$R'_s = \frac{(h_0 - k_1)(h_r - k_1)}{(h_0 + k_1)(h_r + k_1)}.$$

На рис. 2 приведен график функции  $R'_s$  в зависимости от  $\pi/2ak$

для тех же углов и длин волн, что и на рис. 1. Как и в предыдущем случае,  $R'_s$  возрастает с увеличением угла проводимости. Областям убывания и точкам минимума функции  $R_s$  соответствуют области возрастания и точки максимума функции  $R'_s$ , и наоборот. Величина  $R'_s$  постоянна в области частот, где может распространяться только одна

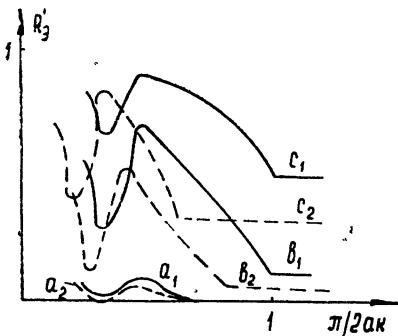


Рис. 2 Коэффициент отражения по мощности медленной волны  $R'_s$ :

$a_1$ )  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ;  $a_2$ )  $\beta = 30^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $b_1$ )  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  
 $b_2$ )  $\beta = 30^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ;  $c_1$ )  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 80^\circ$ ;  $c_2$ )  $\beta = 30^\circ$ ,  $\alpha = 80^\circ$ .

волноводная ТЕМ волна  $M(-k_z)$ . Отметим, что  $R_s$  и  $R'_s$  начинают возрастать с длиной волны, как только перестает распространяться очередная волноводная волна в области решетки  $x > 0$ , и начинают убывать с ростом длины волны, как только аргумент принимает значение, соответствующее критической частоте волны в области  $x < 0$ .

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность научному руководителю К. А. Барсукову за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Барсуков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 82 (1967)
2. К. А. Барсуков, Л. М. Маслова, Радиотехника и электроника, 12, вып. 3, 523 (1967).
3. R. K. Agoga, E. G. Cullwich, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A-67, № 1, 50 (1965).

Московский государственный педагогический институт  
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
5 ноября 1966 г

#### DIFFRACTION OF A SURFACE WAVE ON SEMI-INFINITE ANISOTROPICALLY CONDUCTING PLANE IN A PLANE WAVEGUIDE

L. M. Maslova

The peculiarities of reflection of a surface wave incidenting obliquely on an anisotropically conducting half-plane were considered in papers [1, 2]. In addition, slow-down structures similar to an anisotropically conducting plane are used, as a rule, in waveguides which considerably change the properties of the system. Diffraction of a surface slow wave on semi-infinite anisotropically conducting plane placed in a plane waveguide is investigated in the present paper. An analogous problem on diffraction of waveguide (rapid) wave normally falling on a half-plane edge has been considered in [3].

УДК 621.396.671.6

## О ТЕОРЕМЕ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

А. Д. Петровский

Показано, что в общем случае (включающем и заземленные электрические антенны) для равенства полей во взаимных точках, определяемого теоремой взаимности, недостаточно соответствующего равенства токов в антенных или эквивалентного ему равенства сторонних токов, а необходимо одновременное выполнение двух соотношений: 1) равенства токов в антенных и 2) получаемой из теоремы взаимности зависимости между сторонними токами. Если электромагнитные свойства сред, непосредственно прилегающих к антеннам, одинаковы, второе соотношение приводит к обычному равенству сторонних токов в антенах.

Следуя [1], приведем доказательство теоремы взаимности, полагая, однако, поля во взаимных точках определенными в отсутствие приемных антенн, так как именно в таком виде теорема взаимности используется при расчетах полей.

Рассмотрим два случая.

1. Электрическая антenna 1 расположена в точке 1 неоднородного пространства и возбуждается сторонним током  $j_{1ct}$ . Антenna создает в пространстве, в частности, в точке 2, поля  $E_1$  и  $H_1$ . Произвольные значения комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{1i}$  неоднородного пространства для рассматриваемого случая принимают следующие фиксированные значения:  $\epsilon_{1a}$  — в антenne,  $\epsilon_1$  — в среде, непосредственно окружающей антенну в точке 1,  $\epsilon_2$  — в точке 2. Приемная антenna в точке 2 отсутствует. Магнитные проницаемости ( $\mu$ ) сред и антены полагаются одинаковыми.

2. Электрическая антenna расположена в точке 2 и возбуждается сторонним током  $j_{2ct}$ . Антenna создает в пространстве, в частности, в точке 1, поля  $E_2$  и  $H_2$ . Комплексная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{2i}$  принимает фиксированные значения:  $\epsilon_{2a}$  — в антenne,  $\epsilon_2$  — в среде, непосредственно окружающей антенну в точке 2,  $\epsilon_1$  — в точке 1. В рассматриваемом случае антenna 1 в точке 1 отсутствует.

Запишем уравнения Максвелла для случаев 1 и 2 (зависимость от времени полагаем в виде  $e^{-i\omega t}$ ):

$$\begin{array}{lcl} \text{rot } H_1 = -i\omega\epsilon_{1i}E_1 + j_{1ct} & | & E_2 \\ \text{rot } E_1 = i\omega\mu H_1 & | & H_2 \\ \text{rot } H_2 = -i\omega\epsilon_{2i}E_2 + j_{2ct} & | & -E_1 \\ \text{rot } E_2 = i\omega\mu H_2 & | & -H_1 \end{array} \quad (1)$$

Первая пара уравнений определяет поля антены 1, вторая — поля антены 2. Входящие в уравнения значения  $\epsilon_{1i}$  и  $\epsilon_{2i}$  совпадают между собой во всех точках пространства, кроме точек расположения антенн: для случая 1 в точке 2  $\epsilon_{1i} = \epsilon_2$ , в самой антenne в точке 1  $\epsilon_{1i} = \epsilon_{1a}$ ; аналогично для случая 2  $\epsilon_{2i} = \epsilon_1$  в точке 1 и  $\epsilon_{2i} = \epsilon_{2a}$  в точке 2.

Умножив скалярно каждое из уравнений на стоящие справа векторы и сложив все четыре уравнения, получим

$$\operatorname{div}[\mathbf{H}_1 \mathbf{E}_2] - \operatorname{div}[\mathbf{H}_2 \mathbf{E}_1] = -i\omega \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 (\epsilon_{1i} - \epsilon_{2i}) + \mathbf{j}_{1ct} \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{2ct} \mathbf{E}_1, \quad (2)$$

где учтено, что  $\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{div}[\mathbf{BA}]$ . Взяв интеграл по объему от обеих частей равенства (2), получим

$$\int_v [ -i\omega \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 (\epsilon_{1i} - \epsilon_{2i}) + \mathbf{j}_{1ct} \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{2ct} \mathbf{E}_1 ] dv = 0 \quad (3)$$

(интеграл от левой части (2) равен нулю из-за непрерывности тангенциальных компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на поверхностях раздела сред).

Но интегрирование в (3) оказывается распространенным лишь на области существования сторонних токов, где  $\epsilon_{1i} - \epsilon_{2i} \neq 0$ ,  $\mathbf{j}_{1ct} \neq 0$ ,  $\mathbf{j}_{2ct} \neq 0$ . Учитывая, что в точке 1 в первом случае  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1a}$ ,  $\epsilon_{1i} = \epsilon_{1a}$ , а во втором —  $\epsilon_{2i} = \epsilon_1$  и, соответственно, в точке 2 во втором случае  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2a}$ ,  $\epsilon_{2i} = \epsilon_{2a}$ , а в первом —  $\epsilon_{1i} = \epsilon_2$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{1a} E_2 (j_{1ct} - i\omega \epsilon_{1a} E_{1a} + i\omega \epsilon_1 E_{1a}) dv = \\ & = \int_{2a} E_1 (j_{2ct} - i\omega \epsilon_{2a} E_{2a} + i\omega \epsilon_2 E_{2a}) dv. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенство (4) и представляет собой теорему взаимности в случае гармонических полей. В аналогичной форме может быть получена теорема взаимности для магнитных антенн (соответственно магнитной и электрической).

Величину, стоящую в скобках в равенстве (4), будем называть действующим током антенны  $j_d$ . Действующий ток антенны складывается из полного тока  $j_0$ , протекающего в антenne (сумма первых двух членов), и тока  $j_c$ , который возбудился бы в прилегающей среде полем  $\mathbf{E}_a$  (третий член):

$$j_d = j_0 - j_c = j_{ct} + j_a - j_c. \quad (5)$$

В практике наземной радиосвязи обычно  $j_0 \gg j_c$ ; в этом случае в (4) можно пренебречь  $j_c$  в сравнении с  $j_0$  и получить обычную запись теоремы взаимности\*. Однако заземленные источники, применяемые, например, в геофизической разведке [2], могут характеризоваться значениями  $j_c$ , соизмеримыми с  $j_0$  (хотя практически всегда  $j_c \ll j_a$ , поскольку обычно  $\epsilon_a \gg \epsilon_c$ , однако  $j_c$  может быть соизмерим с  $j_0$ , когда токи  $j_{ct}$  и  $j_a$  близки по величине и противоположно направлены). В этом случае теорема взаимности должна использоваться в форме (4):

$$\int_{1a} E_2 j_{1d} dv = \int_{2a} E_1 j_{2d} dv. \quad (4a)$$

Если принять, что интеграл по объему антennы можно заменить интегралом по длине линейной антennы с равномерным распределением тока и что длины антenn равны между собой, из (4a) получим

$$E_2 j_{1a} = E_1 j_{2a}, \quad (6)$$

где  $j_{1,2a}$  предполагаются равномерно распределенными по длине антennы.

\* Если в формуле (9.10) работы [1] под  $j_0$  понимать действующий ток  $j_d$ , то (9.10) совпадает с (4).

При  $j_{1d} = j_{2d}$  имеем

$$E_2 = E_1. \quad (7)$$

Положим дополнительно  $j_{01} = j_{02}$ , т. е. потребуем, чтобы равенство полей (7) имело место при равенстве полных токов в антенах. Тогда из (4) — (7) получим (полагаем  $\epsilon_{2a} = \epsilon_{1a}$ )

$$j_{2ct} = j_{1ct} - i\omega\epsilon_{1a} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right) E_{1a}, \quad E_{2a} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1a}, \quad (8)$$

или, учитя, что  $-i\omega\epsilon_{1a} E_{1a} = j_{1a}$ ,

$$j_{2ct} = j_{1ct} + j_{1a} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right). \quad (8a)$$

Следовательно, при равенстве токов в антенах поле антенны 1 ( $E_1$ ) равно полю антенны 2 ( $E_2$ ) в точках расположения соответственно антенн 2 и 1 только тогда, когда ток  $j_{2ct}$  связан соотношением (8) с токами  $j_{1ct}$  и  $j_{1a}$  и параметрами сред  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  в точках измерения полей.

Из (8) имеем:

а) при  $\epsilon_1 = \epsilon_2$

$$j_{2ct} = j_{1ct},$$

б) при  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$

$$j_{2ct} \approx j_{1ct} + j_{1a} = j_{01},$$

в) при  $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$

$$j_{2ct} \approx j_{1ct} - \epsilon_1 j_{1a} / \epsilon_2.$$

Таким образом, оказывается, что в формулировку теоремы взаимности для полей входят в явном виде параметры сред, непосредственно прилегающих к антенне.

Этот факт необходимо иметь в виду при расчетах с помощью теоремы взаимности в тех случаях, когда среда, непосредственно окружающая одну из антенн, обладает достаточно высокой проводимостью и ток, текущий в антenne, соизмерим с током, протекающим в среде (например, в случае заземленного в рудное тело электрического источника поля, применяемого в одном из методов геофизической разведки [2]).

При этом, если по известному значению поля  $E_1$ , создаваемого заданными токами  $j_{01}$  и  $j_{1ct}$ , с помощью теоремы взаимности определяется поле  $E_2 = E_1$ , отнесенное к току  $j_{02} = j_{01}$ , то сторонний ток  $j_{2ct}$ , необходимый для возбуждения поля  $E_2$ , находится из соотношения (8).

Если полагать равными стороны токи во взаимных антенах, то аналогичное (8) соотношение для полного тока  $j_{02}$  во второй антenne будет иметь вид (с точностью до членов порядка  $\epsilon_1 \epsilon_2 / \epsilon_a^2$ )

$$j_{02} = j_{01} + j_{1a} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_a}. \quad (9)$$

Когда поля  $E_1$  и  $E_2$  измеряются соответственно антennами 2 и 1, в (4) необходимо положить  $\epsilon_1 = \epsilon_{1a}$  и  $\epsilon_2 = \epsilon_{2a}$ . В этом случае

$$\int_{1a} E_2 j_{1ct} dv = \int_{2a} E_1 j_{2ct} dv. \quad (10)$$

Соотношение (10) есть теорема взаимности для двух антенн (передающей и приемной). Естественно, что здесь параметры сред, окружающих антенны, в формулировку теоремы взаимности не входят.

Автор благодарен Е. Л. Фейнбергу и М. А. Миллеру за полезные замечания, учтенные в окончательном тексте статьи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
2. А. И. Зaborовский, Электроразведка, Гостоптехиздат, М., 1943.,

Центральный научно-исследовательский горноразведочный институт цветных, редких и благородных металлов «ЦНИГРИ» Поступила в редакцию 4 августа 1966 г.

### RECIPROCITY THEOREM FOR THE FIELDS OF ELECTRICAL SOURCES

*A. D. Petrovsky*

It is shown that in a general case (including also the grounded electric antennae) the corresponding equality of antenna currents or equivalent equality of impressed currents is not enough for the equality of fields at reciprocal points. In this case two following relations are to be simultaneously satisfied: 1) the equality of the antenna currents, 2) the relation between the impressed currents obtained from the reciprocity theorem. If the electromagnetic properties of the media in which the antennae are placed, are the same, the second relation leads to the well-known equality of impressed currents in antennae.

УДК 621.391.814 2

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В КЛЮЧЕВЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

*Л. А. Островский, Б. А. Соломин*

Рассмотрено распространение волн в линии передачи с движущимся скачком реактивного параметра, создаваемым изменением активных элементов (ключей). Получены формулы для изменения частоты, амплитуды и энергии волны в результате взаимодействия со скачком.

1. Преобразование спектра волн при взаимодействии с движущимся скачком реактивных параметров исследовано в настоящее время для различных сред и линий передачи [1-6]. Решение соответствующих задач получается с помощью граничных условий, связывающих величины полей на движущемся скачке. В простейшем случае недиспергирующей двухпроводной линии, описываемой телеграфными уравнениями, эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= v_p(L_2 I_2 - L_1 I_1), \\ I_2 - I_1 &= v_p(C_2 U_2 - C_1 U_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $U$  — напряжение,  $I$  — ток в линии,  $L$ ,  $C$  — погонные индуктивность и емкость,  $v_p$  — скорость скачка разрыва; индексы 1 и 2 относятся к величинам соответственно до и после скачка.

Условия (1) справедливы в тех случаях, когда на протяжении всей области, аппроксимируемой скачком, изменяются только реактивные параметры линии — емкость и индуктивность. Известный физический и практический интерес представляют системы, в которых результирующий скачок реактивного параметра (необходимый для эффективного изменения спектра) достигается изменением активных параметров («ключей»), «включающих» или «отключающих» те или иные реактивные элементы [7]. Хотя при этом диссипация энергии в линии вдали от скачка может быть пренебрежимо малой, необходимо учитывать поверхностный ток, протекающий в области скачка при включении, или изменение энергии волны за счет отключенных элементов. В результате условия (1), полученные для недиссипативной линии, могут стать несправедливыми.

В качестве простого примера подобных систем рассмотрим линию, эквивалентная схема которой изображена на рис. 1. Если сопротивление  $R$  быстро (скаккообразно) изменяется от больших до малых величин (в пределе от 0 до  $\infty$  или от  $\infty$  до 0; такие ключи назовем идеальными), то общая емкость линии уменьшается или увеличивается на величину  $C''$ . Конечным результатом здесь является скачок реактивного параметра.

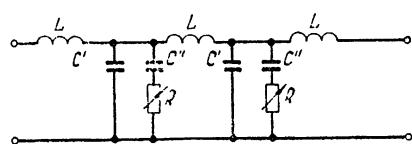


Рис. 1.

Уравнения такой линии при произвольном законе изменения  $R(z, t)$  имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} + L \frac{\partial I}{\partial t} = 0; \quad (2a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} + C' \frac{\partial U}{\partial t} + C'' \frac{\partial U''}{\partial t} = 0; \quad (2b)$$

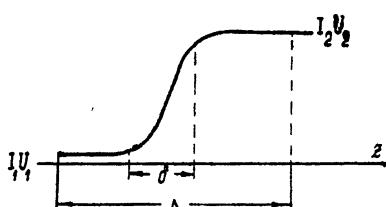


Рис. 2.

$$U = U'' + RC'' \frac{\partial U''}{\partial t}, \quad (2b)$$

где  $U''$  — напряжение на емкости  $C''$ .

Пусть теперь  $R$  меняется от значения  $R_1$  до  $R_2$  в узкой (ширины  $\delta \rightarrow 0$ ) движущейся области (рис. 2):

$$R = \begin{cases} R_1 & (z - v_p t > \delta) \\ R_2 & (z - v_p t < -\delta) \end{cases}. \quad (3)$$

Для получения граничных условий проинтегрируем систему (3) по  $z$  в некоторой области  $\Delta(v_p t - \Delta < z < v_p t + \Delta)$ , где  $\Delta$  велико по сравнению с  $\delta$ , но мало по сравнению с масштабом изменения величин вне этой области. Тогда, например,  $\int_{\Delta} (dI/dt) dz = v_p(I_2 - I_1)$  и т. д., и из первых двух уравнений (2) получаем

$$U_2 - U_1 = v_p L (I_2 - I_1); \quad (4a)$$

$$I_2 - I_1 = v_p C'(U_2 - U_1) + v_p C''(U_2'' - U_1''). \quad (4b)$$

Как указывалось, индексы 1 и 2 относятся к величинам на краях области  $\Delta$ .

Уравнение (2b) специфично для диссипативной линии. Оно не приводит непосредственно к разностному соотношению типа (4a), (4b). Вообще, поскольку система (2) при  $R \neq 0$  уже не гиперболична и порядок ее повышается, вопрос о граничных условиях и даже об их однозначном существовании значительно усложняется. Однако в данном случае необходимые условия все же могут быть получены с учетом конечности всех искомых величин. Интегрирование (2b) дает

$$U_2'' - U_1'' = \frac{1}{v_p C''} \int_{\Delta} \frac{U'' - U}{R} dz. \quad (4b)$$

Предположим сначала, что  $R$  всюду отлично от нуля\*. Тогда при  $\Delta \rightarrow 0$  правая часть (b) равна нулю ( $U$  и  $U''$  конечны), и из (4a) — (4b) следует непрерывность напряжений и токов на скачке:

$$U_2 = U_1, \quad U_2' = U_1', \quad I_2 = I_1. \quad (5)$$

Итак, при конечном скачке  $R$  (или скачке от бесконечности до конечного значения) искомые величины непрерывны. Этот результат достаточно очевиден: изменение  $U$  и  $I$  не может произойти быстрее, чем за время заряда емкости  $C''$ , большее  $C'' R_{\min}$ .

Непосредственный интерес представляют, однако, случаи идеальных ключей, когда на одной из границ интервала  $R$  близко к ну-

\* Точнее,  $(\delta/v_p C'' R_{\text{инф}}) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ ;

лю ( $v_p C'' R_{\min} \sim \delta \rightarrow 0$ ), на другой же границе  $R \rightarrow \infty^*$ . Тогда возможно, что подынтегральное выражение в (4в) вблизи точки  $R = 0$  расходится, а весь интеграл (пропорциональный полному заряду, протекшему через  $R$  за время  $\Delta/v_p$ ) отличен от нуля, хотя и должен оставаться конечным. Рассмотрим два возможных случая.

а) *Замыкание ключей*. При этом в (3)  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 \rightarrow 0$ . Ясно, что вне области  $\delta$  величина  $(U'' - U)/R$  не может быть бесконечной, иначе интеграл в (4в) расходится при сколь угодно малом  $\Delta \gg \delta$ . Отсюда следует, что разность  $U'' - U$  стремится к нулю вместе с  $R$  и  $U'_2 = U'_1$ . Это и есть искомое третье соотношение, позволяющее найти все величины после скачка по известным значениям до скачка. Из (4а), (4б) следует тогда

$$U_2 = U'_2 = \frac{U_1(1 - v_p^2/v_1^2) - v_n^2 LC'' U'_1}{1 - v_p^2/v_2^2}, \quad I_2 = I_1 - \frac{v_p C'' (U_1 - U'_1)}{1 - v_p^2/v_2^2}, \quad (6)$$

где  $v_1 = (LC')^{-1/2}$ ,  $v_2 = (LC' + LC'')^{-1/2}$  — значения  $v$  перед и за скачком. Заметим, что, если  $U'_1 = 0$  (емкость  $C''$  в начальный момент не заряжена), то соотношения (6) совпадают с вытекающими из (1) для реактивного скачка.

Формулы (6) справедливы и при произвольном конечном  $R_1$ , лишь бы  $R_2 = 0$ .

б) *Размыкание ключей* ( $R_1 \rightarrow 0$ ,  $R_2 \rightarrow \infty$ ). В этом случае при  $R_1 \rightarrow 0$  имеем, как и выше,  $U_1 = U'_1$ . Однако это равенство непосредственно ничего не дает, если величины перед скачком заданы.

Необходимое соотношение здесь дается равенством нулю интеграла в (4в). Действительно, отношение  $(U'' - U)/R$  может быть бесконечным лишь в точке  $R = 0$  в начале скачка, но перед скачком  $(U'' - U)/R = 0$  (емкость  $C''$  заряжена до  $U_1$ , и ток через нее не протекает). Тогда это отношение всюду конечно, и остаются справедливыми полученные выше условия (5), причем в данном случае  $U \equiv U''$  во всей области интегрирования\*\*. Заметим, что граничные условия здесь отличны от получаемых из формул (1) при том же результирующем изменении параметров.

Проведенное рассмотрение, возможно, нельзя считать вполне строгим в математическом отношении\*\*\*, однако полученные результаты достаточно наглядны физически. При замыкании ключей начальные напряжения  $U_1$  и  $U'_1$  на конденсаторах  $C'$  и  $C''$  различны, и через сопротивление  $R$  протекает ток, выравнивающий  $U$  и  $U''$ . При размыкании же  $U_1 = U'_1$  уже в начальный момент, и зарядный ток отсутствует.

2. Формулы (5), (6) позволяют (за указанными ниже исключениями) решить задачу о падении волны на скачок, т. е. определить все прошедшие и отраженные волны, если задана падающая. В общем случае величины по каждую сторону скачка могут быть представлены суммой изображений двух бегущих навстречу волн:

$$U_{1,2} = U_{1,2}^+(z - v_{1,2} t) + U_{1,2}^-(z + v_{1,2} t), \quad (7)$$

$$I_{1,2} = I_{1,2}^+ + I_{1,2}^- = \rho_{1,2}^{-1} (U_{1,2}^+ - U_{1,2}^-),$$

\* Практически речь идет об изменении  $R$  внутри области  $\delta$  в пределах  $C'' R_1 \ll T \ll C' R_2$ , или  $C'' R_1 \gg T \gg C' R_2$ , где  $T$  — характерный период изменения  $I$  и  $U$  вне скачка. При этих условиях затуханием вне области  $\delta$  можно пренебречь.

\*\* Это ясно и непосредственно из системы (2), которая при любом  $R(z, t)$  имеет частное решение  $U \equiv U'' \equiv \text{const}$ .

\*\*\* Вероятно, можно было бы не предполагать конечности величин после скачка, а доказать ее для достаточно широкого класса функций  $R(z, t)$ .

где  $\rho_1 = \sqrt{L/C'}$ ,  $\rho_2 = \sqrt{L/(C'+C'')}$ . Пусть, например, задана падающая навстречу скачку ( $v_p < 0$ ) волна  $U_1^+$ ; из (5) или (6) можно найти остальные. Результат зависит от соотношения скоростей  $v_1$ ,  $v_2$  и  $|v_p| = u$ . Рассмотрим, для определенности, случай  $|v_p| > v_{1,2}$  (соответствующий эксперименту, описанному в работе [7]). Тогда, очевидно, отраженная скачком волна  $U_1^-$  невозможна; оставшиеся неизвестные легко могут быть найдены из (5) — (7). Простые вычисления приводят к следующим результатам.

а) *Замыкание ключей*. Из (6) и (7) получаем (считая для простоты, что  $U_1'' = 0$ )

$$U_2^+ = U_1^+ \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1} \right) \left( \frac{1+u/v_1}{1+u/v_2} \right), \quad U_2^- = U_1^+ \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_1} \right) \left( \frac{1+u/v_1}{1-u/v_2} \right). \quad (8)$$

б) *Размыкание ключей*. Из (5) и (7) следует

$$U_2^+ = U_1^+ \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1} \right), \quad U_2^- = U_1^+ \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_1} \right). \quad (9)$$

Отметим, что этот результат не зависит от скорости скачка.

Частным случаем локальных соотношений (8), (9) является непрерывность аргументов волн (7) (для синусоидальных сигналов — фаз). Отсюда следуют обычные допплеровские формулы для длительностей соответствующих участков волны во всех случаях (а не только при  $u > v_{1,2}$ ):

$$\tau_2^+ = \tau_1^+ \left( \frac{1+u/v_2}{1+u/v_1} \right), \quad \tau_2^- = \tau_1^+ \left( \frac{1-u/v_2}{1+u/v_1} \right), \quad \tau_1^- = \tau_1^+ \left( \frac{1-u/v_1}{1+u/v_1} \right). \quad (10)$$

Для синусоидальных сигналов по (10) преобразуются величины, обратные частотам волн.

Столь же просто рассмотреть «попутное» распространение падающей волны и скачка, а также все аналогичные задачи при  $|v_p| < v_{1,2}$ .

3. Рассмотрим еще энергетические соотношения. При взаимодействии сигнала с реактивным скачком общая его энергия может расти или падать в зависимости от того, растет или падает  $v$  при переходе через скачок. В нашем случае фактически изменяются лишь активные элементы, поэтому рост энергии невозможен (ср. [9]). Покажем это на рассмотренном выше примере встречного падения волны на скачок, для которого  $|v_p| > v_{1,2}$ . Так как энергия  $E$  бегущего цуга длительности  $\tau$  есть  $\xi U^2/\rho$ , то отношение  $\xi$  полных энергий до и после взаимодействия цуга со скачком равно

$$\xi = \frac{E_2^+ + E_2^-}{E_1^+} = \frac{\rho_1(\tau_2^+ U_2^{+2} + \tau_2^- U_2^{-2})}{\rho_2 \tau_1^+ U_1^{+2}}. \quad (11a)$$

Подставляя сюда (8), имеем в случае замыкания ( $U_1'' = 0$ )\*\*

$$\xi = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{v_1}{u} \right) \left[ \frac{(1+v_2/v_1)^2}{(1+v_2/u)} + \frac{(1-v_2/v_1)^2}{(1-v_2/u)} \right]. \quad (11b)$$

Учитывая, что  $u > v_1 > v_2$ , можно показать, что всегда  $\xi \ll 1$ . Этот случай, как указывалось, дает тот же результат, что и для реактивного

\* Если  $|v_p|$  лежит между  $v_1$  и  $v_2$  (внутри  $\delta$  имеется точка синхронизма  $v = |v_p|$ ), то соотношения (5) и (6) не дают возможности найти все волны по данной падающей. Эта особенность не специфична для диссипативной линии и для реактивных скачков обсуждается в работе [8].

\*\* Здесь учтено, что  $(\rho_1/\rho_2) = (v_1/v_2)$ .

с скачка, но природа потерь (равных  $E_1^+(1-\xi)$ ) иная — энергия расходуется не на изменение параметров полем, а диссирируется на активных элементах в области скачка (управление сопротивлением в принципе не требует затрат энергии).

В режиме размыкания получаем

$$\xi = \frac{(1+v_1/v_2)^2 (1+v_2/u) + (1-v_1/v_2)^2 (1-v_2/u)}{4(1+v_1/u)}. \quad (12)$$

Так как здесь  $u > v_2 > v_1$ , то, как следует из (12),  $\xi \leq 1$ , и энергия также убывает. Если, однако, при замыкании энергия расходуется на джоулевы потери в ключах, то здесь таких потерь нет, поскольку ток в ключах не протекает. «Потери» здесь связаны лишь с энергией  $E''$  емкостей  $C''$ , которые остаются заряженными до прежнего напряжения  $U_1^+$ . Легко видеть, что

$$E'' = \frac{C'' U_1^{+2}}{2} \tau_i^+ \left( \frac{uv_1}{u+v_1} \right), \quad \xi'' = 1 - \frac{E''}{E_1^+} = \frac{1+2v_1/u+v_1^2/v_2^2}{2(1+v_1/u)}. \quad (13)$$

Величины  $\xi$  и  $\xi''$  в (12) и (13) тождественно равны, т. е., как и следовало ожидать,  $E'' + E_2^+ + E_2^- = E_1^+$ . Следовательно, энергия  $E_1^+$  теряется лишь в том смысле, что она не переносится в каком-либо направлении\*.

Аналогично может быть рассмотрена и более общая схема — две линии, связанные ключевой связью (рис. 3). При замыкании ключей условие типа (4в) приводит к равенству напряжений в линиях за скачком, при размыкании же напряжения и токи в линиях остаются непрерывными. Рассмотренный выше случай получается отсюда при  $L'' \rightarrow \infty$ ; если же  $C'' \rightarrow 0$ , то ключи изменяют индуктивность в 1-ой линии; здесь скорость (а значит, и частота) сигнала растет при замыкании ключей.

Изложенная здесь теория хорошо согласуется с результатами экспериментов с ключевыми линиями [7].

Отметим в заключение, что данная задача может рассматриваться как частный случай некоторого класса задач о взаимодействии сигналов со скачком реактивных параметров, содержащим поверхностный ток. При этом ключевыми свойствами может обладать любой диссипативный фактор, включающий дополнительную внутреннюю степень свободы, если потери энергии стремятся к нулю как при очень малых, так и при очень больших значениях этого фактора. Таким фактором может быть, например, частота  $\nu$  соударений в плазме для продольных волн (при  $\nu \ll \omega$  распространяется плазменная волна, при  $\nu \gg \omega$  — акустическая), теплопроводность в газе для звуковых волн и т. п.

Авторы весьма признательны А. В. Гапонову за обсуждение результатов работы.

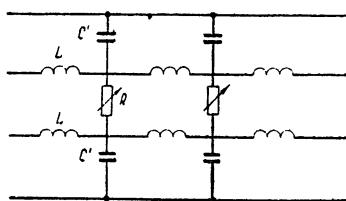


Рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Lampert, Phys. Rev., 102, 299 (1956).
2. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, 29, 491 (1959).

\* Подобная ситуация имеется при отражении от движущегося фронта ионизации в плазме [10].

3. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 5, 833 (1959).
4. В. И. Курилко, ЖТФ, 31, 71 (1961).
5. С. Н. Столляров, ЖТФ, 33, 565 (1963).
6. С. Yeh, J. Appl. Phys., 36, 3513 (1965).
7. Б. А. Соломин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1227 (1966).
8. Л. А. Островский, Б. А. Соломин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1183 (1967).
9. Л. И. Мандельштам, Собр. трудов, 2, изд. АН СССР, М., 1947, стр. 342.
10. В. И. Семенова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1077 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
15 ноября 1966 г.

## TRANSFORMATION OF SIGNALS IN KEY PARAMETRIC LINES

*L. A. Ostrovskii, B. A. Solomin*

Propagation of waves in transmission lines with a moving jump of reactive parameter produced by a change of active elements (keys) has been considered. Formulae have been derived for a change of frequency, amplitude and energy of a wave as a result of interaction with a jump.

УДК 621.372.061.1

**СИНТЕЗ НЕРАССЕИВАЮЩИХ РАЗВЯЗЫВАЮЩИХ СХЕМ****Б. А. Мишустин**

Рассмотрена задача синтеза произвольного реактивного многополюсника с согласованными и развязанными между собой входными зажимами по заданной унитарной матрице рассеяния. Искомый многополюсник со-ставляется из каскадно соединенных восьмиполюсников. Для определения параметров восьмиполюсников и схемы их соединения используются математические методы разложения унитарных матриц на элементарные со-множители.

Под нерассеивающей развязывающей схемой мы будем понимать составленный из реактивных элементов многополюсник, зажимы кото-рого разделены на две равные группы таким образом, что сигнал, подан-ный на любой из зажимов одной группы, трансформируется в некото-рую комбинацию сигналов только на зажимах второй группы. Простей-шими развязывающими схемами являются восьмиполюсники, имеющие два входных и два выходных зажима: гибридное кольцо, направленный ответвитель, квадратный мост.

Задача разработки развязывающих схем с большим числом вход-ных и выходных зажимов возникает при конструировании сканирующих антенных решеток. Развязывающая схема в этом случае выполняет функции возбуждения элементов антенной решетки для различных на-правлений луча и иногда называется диаграммообразующей матричной схемой. Примером развязывающей схемы для линейной антенной ре-шетки является матрица Батлера [1].

В настоящей работе рассматриваются методы синтеза нерассеиваю-щих развязывающих схем общего вида, имеющих на фиксированной частоте заданные распределения выходных сигналов, при условии, что требуемые распределения в принципе могут быть реализованы реактив-ной схемой.

**1. МАТРИЦА ТРАНСФОРМАЦИИ**

Математически внешние параметры каждого многополюсника мож-но представить в виде некоторой матрицы, описывающей соотношения между сигналами на зажимах многополюсника. Матрица рассеяния, на-пример, определяет амплитуды уходящих от многополюсника волн при заданных амплитудах приходящих волн [2]. Матрица рассеяния  $[S]$  раз-вязывающего  $4n$ -полюсника имеет порядок  $2n$  и может быть предста-влена в клеточном виде:

$$[S]_{2n} = \begin{bmatrix} [0]_n & [\tilde{R}]_n \\ [R]_n & [0]_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $[0]_n$  — нулевые матрицы  $n$ -го порядка. Эти матрицы означают от-сутствие передачи энергии между зажимами развязывающего  $4n$ -по-люсника, принадлежащими одной группе, в том числе и отсутствие от-ражений по возбуждаемому входу. Столбцы матрицы  $[R]_n$  определяют

относительные мощности волн, уходящих от зажимов второй группы (элементы столбцов пропорциональны мощности в степени 1/2) при возбуждении зажимов первой группы. Столбцы матрицы  $[\tilde{R}]_n$  ( $[\tilde{R}]_n$  — матрица, транспонированная по отношению к  $[R]_n$ ) характеризуют распределение мощности уходящих волн при возбуждении зажимов второй группы.

Таким образом, развязывающий  $4n$ -полюсник полностью характеризуется одной матрицей  $n$ -го порядка  $[R]_n$  — клеткой матрицы рассеяния  $[S]_{2n}$ . Мы будем называть матрицу  $[R]_n$  матрицей трансформации. При согласованных и равных по величине нагрузках выходных зажимов  $4n$ -полюсника матрица трансформации описывает распределение выходных напряжений, соответствующих возбуждению отдельных входов волнами единичной мощности.

Известно, что матрица рассеяния любого многополюсника, составленного из элементов без омических потерь, является унитарной:

$$[S][\tilde{S}^*] = [1], \quad (2)$$

где  $[\tilde{S}^*]$  — матрица, комплексно сопряженная с  $[S]$ ,  $[1]$  — единичная матрица соответствующего порядка. Подставив в (2) клеточную матрицу рассеяния (1), мы найдем, что матрица трансформации реактивного развязывающего многополюсника также должна быть унитарной:

$$[R]_n [\tilde{R}^*]_n = [1]_n. \quad (3)$$

Синтез нерассеивающего развязывающего  $4n$ -полюсника заключается, таким образом, в построении схемы с  $n$  входными и  $n$  выходными зажимами, обладающей на определенной частоте заданной унитарной матрицей трансформации.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Задача построения схемы по заданной матрице рассеяния не имеет единственного решения: может существовать целый ряд различных по структуре схем с одной и той же матрицей рассеяния. Мы будем искать развязывающий  $4n$ -полюсник в виде каскадного соединения элементарных  $4n$ -полюсников (рис. 1а), для которых легко рассчитать все конструктивные параметры. Схема элементарного  $4n$ -полюсника показана на рис. 1б. Согласно этой схеме,  $(n-2)$  входных и  $(n-2)$  выходных зажимов элементарного  $4n$ -полюсника соединены между собой фидерными линиями, а 2 входа и 2 выхода связаны восьмиполюсником (показан в виде квадрата). Будем считать, для простоты электрические длины всех фидерных линий равными нулю, а необходимые сдвиги фаз обозначать специальными фазовращателями.

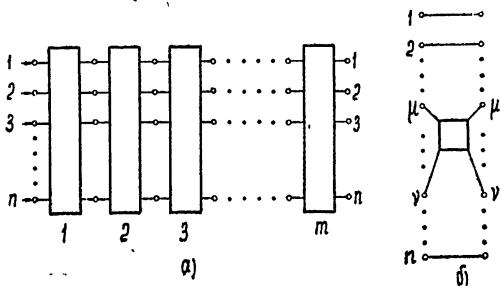


Рис. 1. а) Развязывающий  $4n$ -полюсник в виде каскадного соединения элементарных  $4n$ -полюсников.  
б) Структура элементарного  $4n$ -полюсника.

Матрица трансформации нерассеивающего развязывающего восьми-полюсника в самом общем случае имеет вид

$$[R]_2 = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} \cos \tau & \exp(i\psi_2) \sin \tau \\ \exp(i\psi_1) \sin \tau & -\exp[i(\psi_1 + \psi_2)] \cos \tau \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\varphi, \psi_1, \psi_2$  — некоторые фазовые углы, и  $0 \leq \tau \leq \pi/2$ . Учитывая (4), для матрицы трансформации элементарного  $4n$ -полюсника получаем

$$[A]_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

остальные элементы матрицы  $[A]_n$  равны нулю. Матрицы типа (5) называются элементарными унитарными матрицами. При крайних значениях параметра  $\tau$  матрица описывает вырожденный элементарный  $4n$ -полюсник: в случае  $\tau = 0$  мы имеем просто два фазовращателя, при  $\tau = \pi/2$  матрице  $[A]_n$  соответствует перекрестное соединение двух входных и двух выходных зажимов  $4n$ -полюсника.

Легко показать, что матрица трансформации каскадного соединения развязывающих многополюсников равна произведению матриц трансформации этих многополюсников в последовательности, обратной последовательности соединения. Обозначим через  $[A_1]_n, [A_2]_n, \dots, [A_m]_n$  матрицы трансформации элементарных  $4n$ -полюсников, составляющих развязывающий  $4n$ -полюсник с матрицей трансформации  $[R]_n$ . Тогда

$$[R]_n = [A_m]_n [A_{m-1}]_n \dots [A_1]_n. \quad (6)$$

Основным моментом синтеза развязывающей схемы по заданной унитарной матрице трансформации  $[R]_n$  является, таким образом, разложение  $[R]_n$  на элементарные сомножители типа (5). Мы рассмотрим два математических метода, позволяющих выполнить это разложение.

1. *Метод диагонализации обратной матрицы.* Преобразуем равенство (6), используя унитарность матрицы  $[R]_n$ . Имеем

$$[\tilde{R}^*] [A_m] [A_{m-1}] \dots [A_1] = [1]. \quad (7)$$

(В дальнейшем мы будем опускать индекс порядка матрицы.) Соотношение (7) описывает процесс диагонализации матрицы  $[\tilde{R}^*] = [R]^{-1}$  с помощью последовательного умножения на элементарные унитарные матрицы, которые рассчитываются таким образом, чтобы постепенно обратить в нуль все недиагональные элементы.

Пусть  $\rho_{\lambda\mu}$  и  $\rho_{\lambda\nu}$  — отличные от нуля элементы строки  $\lambda$  матрицы  $[\tilde{R}^*]$ . Для того, чтобы матрица  $[\tilde{R}^*] [A_m]$  имела элемент с индексом

$(\lambda \mu)$ , равный нулю, необходимо, чтобы варьируемые элементы матрицы  $[A_m]$  (см. (5)) были расположены в строках (и столбцах) с номерами  $\lambda$  и  $\mu$ , а параметры  $\tau$  и  $\psi_1$  удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\operatorname{tg} \tau = |\rho_{\lambda \mu}| / |\rho_{\lambda \nu}|; \quad (8a)$$

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \left( \arg \rho_{\lambda \mu} - \arg \rho_{\lambda \nu} + \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sgn}(\nu - \mu). \quad (8b)$$

Два параметра матрицы  $[A_m]$  — фазовые углы  $\varphi$  и  $\psi_2$  — остаются, таким образом, произвольными.

Следующая элементарная унитарная матрица  $[A_{m-1}]$  рассчитывается так, чтобы после умножения на нее матрицы  $[\tilde{R}^*] [A_m]$  в строке  $\lambda$  образовался еще один нулевой элемент. Матрица  $[A_{m-2}]$  обращает в нуль один из оставшихся ненулевыми элементов строки  $\lambda$  матрицы  $[\tilde{R}^*] [A_m] [A_{m-1}]$ , и т. д. С помощью последовательности  $(n-1)$  (в общем случае) элементарных унитарных матриц мы получим матрицу

$$[B_1] = [\tilde{R}^*] [A_m] [A_{m-1}] \dots [A_{m-n+2}],$$

у которой все недиагональные элементы строки  $\lambda$  равны нулю. Матрица  $[B_1]$  как произведение унитарных матриц сама является унитарной. Поэтому модуль диагонального элемента строки  $\lambda$  равен 1, а все недиагональные элементы столбца  $\lambda$  равны нулю:

$$[B_1] = \begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \dots & b_{1(\lambda-1)}^{(1)} & 0 & b_{1(\lambda+1)}^{(1)} & \dots & b_{1n}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \dots & b_{2(\lambda-1)}^{(1)} & 0 & b_{2(\lambda+1)}^{(1)} & \dots & b_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(\lambda-1)1}^{(1)} & b_{(\lambda-1)2}^{(1)} & \dots & b_{(\lambda-1)(\lambda-1)}^{(1)} & 0 & b_{(\lambda-1)(\lambda+1)}^{(1)} & \dots & b_{(\lambda-1)n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \exp(i\theta_\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ b_{(\lambda+1)1}^{(1)} & b_{(\lambda+1)2}^{(1)} & \dots & b_{(\lambda+1)(\lambda-1)}^{(1)} & 0 & b_{(\lambda+1)(\lambda+1)}^{(1)} & \dots & b_{(\lambda+1)n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(1)} & \dots & b_{n(\lambda-1)}^{(1)} & 0 & b_{n(\lambda+1)}^{(1)} & \dots & b_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, умножая  $[\tilde{R}^*]$  на  $n-1$  элементарных унитарных матриц, мы получили матрицу  $[B_1]$  с одним обособленным диагональным элементом. Нетрудно проверить, что при этом столбец с номером  $\lambda$  матрицы-произведения  $[A_m] [A_{m-1}] \dots [A_{m-n+2}]$  отличается от столбца  $\lambda$  матрицы  $[\tilde{R}]$  только фазовым множителем  $\exp(i\theta_\lambda)$ .

Вторая последовательность элементарных унитарных матриц, состоящая из  $n-2$  матриц, позволяет получить матрицу  $[B_2] = [\tilde{R}^*] [A_m] [A_{m-1}] \dots [A_{m-2n+4}]$  с двумя обособленными диагональными элементами, матрица  $[B_3] = [\tilde{R}^*] [A_m] [A_{m-1}] \dots [A_{m-3n+7}]$  имеет 3 обособленных диагональных элемента, и т. д. Общее число элементарных унитарных матриц, необходимых в общем случае для приведения матрицы  $[\tilde{R}^*]$  к диагональному виду, определяется, очевидно, суммой арифметической прогрессии

$$m = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n}{2}(n-1). \quad (9)$$

В каждой элементарной матрице-множителе мы оставляли произвольными два фазовых угла. Выбирая теперь значения этих углов таким образом, чтобы фазы  $\theta$  всех элементов диагональной матрицы  $[B_n] = [\tilde{R}^*] [A_m] [A_{m-1}] \dots [A_1]$  были равны нулю, мы приедем к равенству (7).

Рассчитав все элементарные сомножители в разложении (6), можно составить схему развязывающего  $4n$ -полюсника с матрицей трансформации  $[R]$ . Матрица  $[A_1]$  определяет параметры и место включения восьмиполюсника в первом элементарном  $4n$ -полюснике. С этим  $4n$ -полюсником каскадно соединяется  $4n$ -полюсник с матрицей трансформации  $[A_2]$ , и т. д. до  $m$ -го элементарного  $4n$ -полюсника, схема которого определяется матрицей  $[A_m]$ .

*2. Метод унитарных преобразований.* Применение метода унитарных преобразований для разложения матрицы  $[R]$  на элементарные сомножители основывается на следующем утверждении: для каждой унитарной матрицы  $[R]$  существует унитарная матрица  $[U]$  со столбцами, пропорциональными собственным векторам матрицы  $[R]$ , такая, что произведение  $[\tilde{U}^*][R][U]$  будет диагональной матрицей:

$$[\tilde{U}^*][R][U] = [\exp(i\xi_1), \exp(i\xi_2), \dots, \exp(i\xi_n)] = [G], \quad (10)$$

где  $\exp(i\xi_1), \exp(i\xi_2), \dots, \exp(i\xi_n)$  — собственные значения матрицы  $[R]$  (см. [3], стр. 154). Решая (10) относительно матрицы  $[R]$ , находим

$$[R] = [U][G][\tilde{U}^*]. \quad (11)$$

Следовательно, для разложения на элементарные сомножители матрицы  $[R]$  достаточно разложить на множители матрицу унитарного преобразования  $[U]$  (разложение на множители фазовой матрицы  $[G]$  trivialно и к тому же не является необходимым для синтеза развязывающего  $4n$ -полюсника).

В теории матриц доказывается ([3], стр. 154), что матрицу унитарного преобразования  $[U]$  можно представить в виде произведения унитарных матриц, рассчитываемых по относительно простому алгоритму. Пусть

$$[U] = [V_1] [V_2] \dots [V_{n-1}]. \quad (12)$$

Матрица  $[V_1]$  определяется таким образом, чтобы элементы ее первого столбца были пропорциональны компонентам одного из собственных векторов матрицы  $[R]$ . Остальные элементы матрицы  $[V_1]$  существенной роли не играют, но должны быть выбраны так, чтобы матрица  $[V_1]$  была унитарной. Если собственному вектору, пропорциональному столбцу матрицы  $[V_1]$ , соответствует собственное значение  $\exp(i\xi_1)$ , то

$$[\tilde{V}_1^*][R][V_1] = [C_1] = \begin{bmatrix} \exp(i\xi_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \dots & c_{2n}^{(1)} \\ 0 & c_{32}^{(1)} & c_{33}^{(1)} & \dots & c_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2}^{(1)} & c_{n3}^{(1)} & \dots & c_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы представить  $[V_1]$  в виде произведения элементарных унитарных матриц, можно воспользоваться рассмотренным выше мето-

дом диагонализации обратной матрицы. Поскольку в матрице  $[V_1]$  существенным является только один столбец, число элементарных матриц-сомножителей, необходимых для разложения  $[V_1]$ , не превышает  $(n-1)$ . Параметры этих матриц определяет, очевидно, первая строка матрицы  $[\tilde{V}_1^*]$ , комплексно сопряженная с первым столбцом матрицы  $[V_1]$ .

В матрице  $[V_2]$  элементы первого столбца принимаются равными нулю, за исключением диагонального элемента, равного 1, а в качестве второго столбца выбирается какой-либо собственный вектор матрицы  $[C_1]$ , ортогональный вектору с компонентами  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ . Применяя к матрице  $[C_1]$  унитарное преобразование с матрицей  $[V_2]$ , получим

$$[C_2] = [\tilde{V}_2^*] [C_1] [V_2] = \begin{bmatrix} \exp(i\xi_1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(i\xi_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{(2)} & c_{34}^{(2)} & \dots & c_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & c_{43}^{(2)} & c_{44}^{(2)} & \dots & c_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3}^{(2)} & c_{n4}^{(2)} & \dots & c_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Для представления  $[V_2]$  в виде произведения элементарных унитарных матриц достаточно  $(n-2)$  сомножителей. Матрица  $[V_3]$  содержит в качестве столбца собственный вектор матрицы  $[C_2]$  и может быть представлена в виде произведения  $(n-3)$  элементарных унитарных матриц, и т. д. Таким путем можно определить и остальные матрицы  $[V_4], [V_5], \dots, [V_{n-1}]$  в разложении (12) и представить каждую матрицу в виде произведения элементарных унитарных матриц. Перемножив в должном порядке все элементарные матрицы, мы получим искомое разложение на элементарные сомножители матрицы унитарного преобразования  $[U]$ , содержащее, в общем случае,  $\frac{n}{2}(n-1)$  элементарных унитарных матриц.

Разложение на элементарные сомножители матрицы  $[\tilde{U}^*]$  нетрудно получить, зная разложение  $[\tilde{U}]$ . Для этого достаточно все элементарные матрицы, составляющие  $[U]$ , заменить транспонированными комплексно сопряженными и перемножить в обратном порядке.

Таким образом, связывающая схема с матрицей трансформации  $[R]$ , синтезированная на основе метода унитарных преобразований, будет представлять собой в соответствии с (11) каскадное соединение  $\frac{n}{2}(n-1)$  элементарных  $4n$ -полюсников, определяемых разложением на

элементарные сомножители матрицы  $[\tilde{U}^*]$ , фазосдвигающего  $4n$ -полюсника с матрицей трансформации  $[G]$  и  $\frac{n}{2}(n-1)$  элементарных  $4n$ -полюсников, соответствующих элементарным унитарным матрицам-сомножителям, составляющим матрицу  $[U]$ . Общее число восьмиполюсников, участвующих в этой схеме, равно, следовательно,  $n(n-1)$ . (Фазосдвигающий  $4n$ -полюсник реализуется просто отрезками фидерных линий с электрическими длинами, равными фазам диагональных элементов матрицы  $[G]$ .)

Для синтеза связывающей схемы с помощью метода диагонализации обратной матрицы необходимо, в общем случае,  $\frac{n}{2}(n-1)$  восьми-

полюсников, т. е. вдвое меньше, чем по методу унитарных преобразований. Отсюда, однако, было бы поспешным делать вывод о предпочтительности первого метода. Во-первых, в ряде конкретных задач оказывается, что собственные векторы, определяющие матрицу  $[U]$  унитарного преобразования, имеют простой вид и содержат много нулевых компонент. В этом случае для разложения  $[U]$  на элементарные сомножители

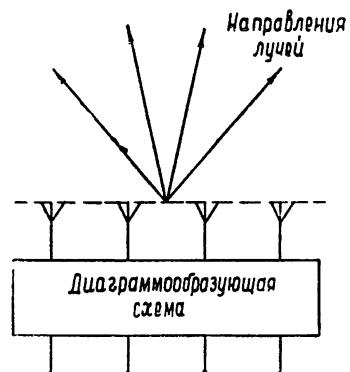
может потребоваться гораздо меньше, чем  $\frac{n}{2}(n-1)$  элементарных унитарных матриц. Во-вторых, развязывающая схема, синтезированная в соответствии с формулой (11), обладает большой общностью: варьируя только параметры фазосдвигающего  $4n$ -полюсника, мы можем получить все развязывающие схемы, матрицы трансформации которых имеют те же собственные векторы, что и рассматриваемая матрица трансформации  $[R]$ .

### 3. ПРИМЕР

Для иллюстрации рассмотренных методов синтеза развязывающих схем составим 16-полюсник для возбуждения 4-элементной сканирующей линейной антенной решетки (рис. 2).

Этот 16-полюсник должен обеспечить 4 варианта возбуждения антенных элементов решетки для четырех различных диаграмм направленности. Во всех вариантах антенные элементы возбуждаются с одинаковыми амплитудами и с линейным распределением фаз, но наклон фазового распределения различный в каждом варианте.

Рис. 2. Четырехэлементная линейная антенная решетка с диаграммообразующей схемой, имеющая 4 независимых луча, соответствующих четырем входным зажимам схемы.



Легко показать, что реактивный развязывающий 16-полюсник с равным делением мощности между выходными зажимами может обеспечить только такие линейные фазовые распределения, при которых разность фаз напряжений соседних выходных зажимов в случае согласованных нагрузок составляет  $\pm \pi/4$  или  $\pm 3\pi/4$ . В соответствии с этим соседние элементы каждого столбца матрицы трансформации  $[L]$  16-полюсника должны отличаться по фазе или на  $45^\circ$ , или на  $135^\circ$ . Поскольку диаграмма направленности антенной решетки зависит не от абсолютных значений фаз возбуждения ее элементов, а от разности фаз, столбцы матрицы  $[L]$  определены только с точностью до произвольных фазовых множителей. В надежде получить собственные векторы с простыми составляющими мы будем рассматривать такую матрицу

$$[L] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \exp(3i\pi/4) & i & \exp(-3i\pi/4) \\ \exp(-i\pi/4) & 1 & \exp(-3i\pi/4) & -i \\ -i & \exp(-3i\pi/4) & 1 & \exp(-i\pi/4) \\ \exp(-3i\pi/4) & i & \exp(3i\pi/4) & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Составим схему развязывающего 16-полюсника с матрицей трансформации  $[L]$  (13), воспользовавшись рассмотренными методами разложения унитарной матрицы на элементарные сомножители.

1. Применение диагонализации матрицы  $[\tilde{L}^*]$ . Выберем первую элементарную унитарную матрицу  $[D_1]$  таким образом, чтобы в произведении  $[\tilde{L}^*][D_1]$  был равен нулю четвертый элемент первой строки. Варьируемые элементы матрицы  $[D_1]$  можно расположить, например, во втором и четвертом столбцах (и строках). Параметры  $\tau$  и  $\psi_1$  этих элементов (см. (5)) мы определим по формулам (8), рассматривая в качестве  $p_{\lambda\mu}$  и  $p_{\lambda\nu}$  второй и четвертый элементы первой строки матрицы  $[\tilde{L}^*]$ . Положив затем для определенности  $\varphi = 0$  и  $\psi_2 = \pi/2$ , находим

$$[D_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

и для произведения  $[\tilde{L}^*][D_1]$  получаем

$$[\tilde{L}^*][D_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \exp(i\pi/4) & i & 0 \\ \exp(-3i\pi/4) & 0 & \exp(3i\pi/4) & -i\sqrt{2} \\ -i & \sqrt{2} \exp(3i\pi/4) & 1 & 0 \\ \exp(3i\pi/4) & 0 & \exp(i\pi/4) & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Рассматривая далее вместо  $[\tilde{L}^*]$  матрицу  $[\tilde{L}^*][D_1]$ , мы найдем вторую элементарную матрицу-множитель  $[D_2]$ , такую, что в первой строке матрицы  $[\tilde{L}^*][D_1][D_2]$  будет два нулевых элемента. Наконец, умножая  $[\tilde{L}^*][D_1][D_2]$  на соответствующим образом рассчитанную матрицу  $[D_3]$ , мы получим матрицу  $[B_1]$ , у которой все недиагональные элементы первой строки (и столбца) равны нулю. Расчет матриц  $[D_2]$  и  $[D_3]$  не отличается, по существу, от расчета матрицы  $[D_1]$ , за исключением выбора значений фазовых углов  $\varphi$  и  $\psi_2$  в последней матрице  $[D_3]$ . Эти углы необходимо выбрать так, чтобы любой элемент матрицы  $[B_1]$ , оказавшийся единственным ненулевым элементом в какой-либо строке, был равен единице.

Элементарные унитарные матрицы  $[D_2]$  и  $[D_3]$  имеют вид

$$[D_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, [D_3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ \exp(-\frac{i\pi}{4}) & \exp(-\frac{3i\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$[B_1] = [\tilde{L}^*][D_1][D_2][D_3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(3i\pi/4) & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\pi/4) & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Матрицы  $[D_1]$ ,  $[D_2]$  и  $[D_3]$  определяют параметры и место включения

восьмиполюсников в трех последних элементарных 16-полюсниках искомой развязывающей схемы (рис. 3). Восьмиполюсники в последнем и предпоследнем элементарных 16-полюсниках имеют одинаковые матрицы рассеяния

$$[S_a] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и могут быть выполнены, например, в виде направленных ответвителей с равным делением мощности. В 16-полюснике, соответствующем матрице  $[D_3]$ , восьмиполюсник имеет матрицу рассеяния, отличную от  $[S_a]$ . Однако и его можно выполнить на основе трехдекабельного направленного ответвителя, используя дополнительно 3 фазовращателя (рис. 3).

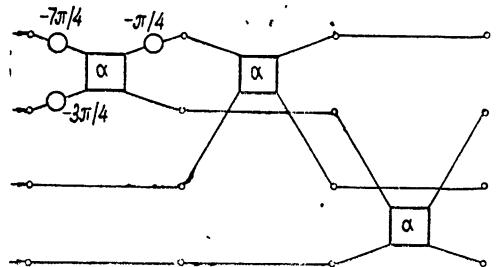


Рис. 3 Три последних элементарных 16-полюсника в развязывающей схеме с матрицей трансформации  $[L]$ .

Для преобразования матрицы  $[B_1]$  (14) к диагональному виду (точнее, к единичной матрице) необходимо еще 2 элементарных унитарных матрицы-омножители:

$$[D_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [D_5] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-3i\pi/4) & \exp(-i\pi/4) \\ 0 & 0 & i & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая из этих матриц, матрица  $[D_4]$ , является вырожденной, ей соответствует просто перекрестное соединение двух входных и двух выходных зажимов 16-полюсника.

Таким образом, в процессе диагонализации матрицы  $[\tilde{L}^*]$  мы определили все элементарные матрицы-омножители, составляющие матрицу  $[L]$ :

$$[L] = [D_1] [D_2] \dots [D_5]. \quad (15)$$

По этим матрицам легко найти все параметры искомого развязывающего 16-полюсника и составить его схему (рис. 4). Синтезированная схема отличается от известной в литературе матрицы Батлера для 4-элементной антенной решетки ([4], стр. 160) только четырьмя фазовращателями, отмеченными на рис. 4 звездочками и не существенными для диаграммы направленности решетки. Воспользовавшись для разложения

[L] на элементарные сомножители методом унитарных преобразований, мы получим другой вариант схемы развязывающего 16-полюсника.

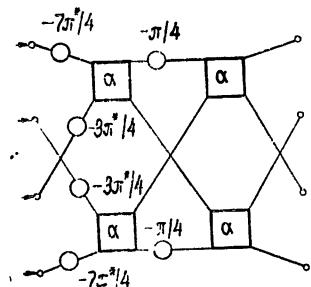


Рис. 4. Схема развязывающего 16-полюсника с матрицей трансформации [L], полученная с помощью диагонализации матрицы.

2. Применение метода унитарных преобразований. Нетрудно проверить, что нормированный вектор  $\alpha (1/\sqrt{2}, 0, -i/\sqrt{2}, 0)$  является собственным вектором матрицы [L]. Выберем компоненты вектора в качестве первого столбца матрицы унитарного преобразования  $[V_1]$ . Элементы остальных столбцов необходимо выбрать таким образом, чтобы матрица  $[V_1]$  была элементарной унитарной матрицей:

$$[V_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Схема элементарного 16-полюсника, соответствующего этой матрице, показана на рис. 5а. Применив к матрице [L] унитарное преобразование с матрицей  $[V_1]$ , находим

$$[\tilde{V}_1][L][V_1] = [C_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \exp(-3i\pi/4) & -i/\sqrt{2} \\ 0 & \exp(-3i\pi/4) & 0 & \exp(-i\pi/4) \\ 0 & i/\sqrt{2} & \exp(3i\pi/4) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Матрица  $[V_2]$  следующего унитарного преобразования имеет в качестве первого столбца вектор с составляющими  $(1, 0, 0, 0)$ , а ее второй столбец должен быть пропорционален одному из собственных векторов матрицы  $[C_1]$ , ортогональных вектору  $(1, 0, 0, 0)$ . Матрица  $[V_2]$  имеет вид

$$[V_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Элементарный 16-полюсник с такой матрицей трансформации показан на рис. 5б. Применение к матрице  $[C_1]$  унитарного преобразования с матрицей  $[V_2]$  приводит к матрице с двумя обособленными диагональными элементами:

$$[C_2] = [\tilde{V}_2^*] [C_1] [V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-3i\pi/4) \\ 0 & 0 & \exp(-3i\pi/4) & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, применяя к  $[C_2]$  унитарное преобразование с матрицей

$$[V_3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

мы приходим к диагональной матрице  $[G]$ :

$$[G] = [\tilde{V}_3^*] [C_2] [V_3] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \exp(-3i\pi/4) & \\ & & & \exp(i\pi/4) \end{bmatrix}.$$

Матрице  $[V_3]$  последнего унитарного преобразования соответствует элементарный 16-полюсник, показанный на рис. 5в.

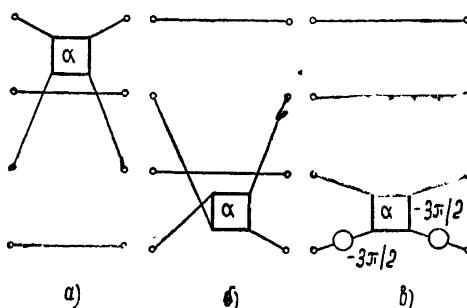


Рис. 5. Элементарные 16-полюсники с матрицами трансформации  $[V_1]$ ,  $[V_2]$  и  $[V_3]$ .

Таким образом, разложение  $[L]$  на элементарные сомножители, полученное методом унитарных преобразований, состоит из шести элементарных унитарных матриц и фазовой матрицы  $[G]$ :

$$[L] = [V_1] [V_2] [V_3] [G] [\tilde{V}_3^*] [\tilde{V}_2^*] [\tilde{V}_1^*]. \quad (16)$$

Схема связывающего 16-полюсника, составленная в соответствии с разложением (16), приведена на рис. 6. Все восьмиполюсники, участвующие в схеме, выполнены на основе трехдекибелевых направленных ответвителей. При этом в элементарных 16-полюсниках, соответствующих матрицам  $[\tilde{V}_1]$ ,  $[\tilde{V}_2]$ ,  $[\tilde{V}_3]$  и  $[V_3]$ , пришлось использовать дополнительные фазовращатели.

В диагональной матрице  $[G]$  только два элемента имеют отличную

от нуля фазу. Поэтому в развязывающей схеме матрице  $[G]$  соответствуют 2 фазовращателя (на рис. 6 отмечены звездочками).

Такова вторая схема реактивного развязывающего 16-полюсника с матрицей трансформации  $[L]$ . По виду эта схема является более сложной, чем первая (рис. 4), построенная с помощью диагонализации матрицы  $[L^*]$ , однако ее можно упростить, объединив два центральных восьмиполюсника на рис. 6 в один. При тех фазовращателях, которые показаны на рис. 6, результатом объединения оказывается просто перекрестное соединение, и по сложности схема получается такой же, как на рис. 4.

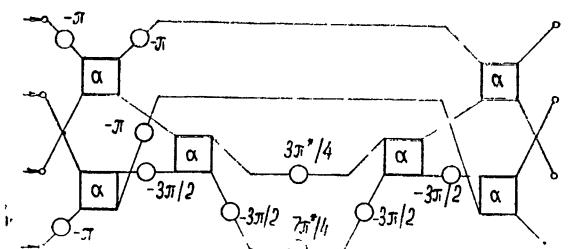


Рис. 6. Схема развязывающего 16-полюсника с матрицей трансформации  $[L]$ , составленная с помощью метода унитарных преобразований.

На основе схемы, синтезированной с помощью метода унитарных преобразований, мы можем легко составить любой развязывающий 16-полюсник, матрица трансформации которого имеет те же собственные векторы, что и матрица  $[L]$ . Для этого достаточно выбрать определенным образом фазы элементов диагональной матрицы  $[G]$ . Например, матрице  $[G]=[1, 1, 1, -1]$  соответствует развязывающий 16-полюсник с матрицей трансформации

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Если такой 16-полюсник использовать в качестве диаграммообразующей схемы для плоской антенной решетки с элементами, расположенными по вершинам квадрата (рис. 7), мы получим 4 независимых луча, отклоненных в направлениях вершин квадрата на некоторый угол  $\Omega$  от нормали к плоскости решетки (рис. 7).

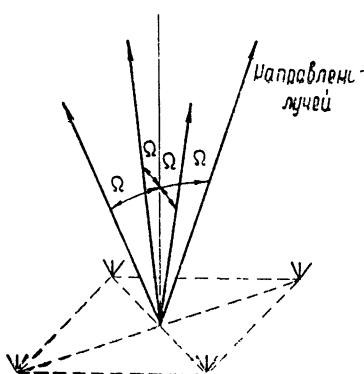


Рис. 7. Плоская четырехэлементная антенная решетка, лучи которой расположены на поверхности конуса.

Рассмотренные методы синтеза развязывающих схем являются наиболее простыми методами, позволяющими составить реактивную развязывающую схему с любой унитарной матрицей трансформации. Мы строили развязывающие схемы в виде каскадного соединения простейших развязывающих многополюсников-восьмиполюсников. В принципе, можно использовать более сложные составляющие элементы, например, 12-полюсники. Каскадное соединение также, по-видимому, не является единственной возможной структурой развязывающей схемы. Таким образом, задача синтеза развязывающей схемы по заданной матрице трансформации  $[R]$  не имеет единственного решения. Даже в пределах рассмотренных методов мы будем получать различные схемы в зависимости от того, какую строку матрицы  $\tilde{[R^*]}$  или какой собственный вектор матрицы  $[R]$  будем рассматривать в первую очередь.

Выбор оптимальной развязывающей схемы зависит от частотных характеристик схемы, технологичности изготовления ее элементов, веса и габаритов реальной конструкции и т п. Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Moody, IRE Trans., AP-12, № 6, 786 (1964).
2. Б. М. Машковцев, Радиотехника, 17, № 6, 3 (1962).
3. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3, ч. I, ГИТЛ, М., 1953.
4. Сб. Антенные решетки, под ред. Л. С. Бененсона, изд. Сов. радио, М., 1966.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
17 октября 1966г.

#### SYNTHESIS OF NON-SCATTERING DISTRIBUTIVE NETWORKS

*B. A. Mishoustin*

The author considers the synthesis of arbitrary reactive multiterminals with matched and isolated between each other input terminals according to the given unitary scattering matrix. The desired network is composed of cascade-coupled eightterminals. The mathematical method of unitary matrix expansion into elementary multipliers are used to find the eightterminal parameters and the scheme for their coupling.

УДК 621.372.2 621.3 019 54

## АВТОКОЛЕБАНИЯ В ОТРЕЗКЕ НЕЛИНЕЙНОЙ АКТИВНОЙ ЛИНИИ

*Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович*

Экспериментально исследуются автоколебания в отрезке искусственной *LC*-линии с туннельными диодами. Показано, что в такой системе возможно установление своеобразных нелинейных режимов как квазигармонических, так и релаксационных. Выяснено влияние дисперсии на характер установленного процесса. Полученные экспериментальные результаты подтверждают проведенное ранее теоретическое рассмотрение [4, 5].

Автоколебательные процессы в нелинейных ограниченных распределенных системах во многих случаях, в частности, при слабой нелинейности, можно рассматривать как результат взаимодействия встречных бегущих волн. При отсутствии одной из таких волн решение носит бегущий характер и может существовать, очевидно, лишь в кольцевой системе\*.

Характер нелинейного взаимодействия встречных волн так же, как и свойства этих волн, определяется соотношением между величиной дисперсии и нелинейности [2, 4, 5]. Весьма существенной особенностью такого взаимодействия является возможность установления в автоколебательной системе даже при сильной дисперсии и слабой нелинейности режимов, которые принципиально не имеют аналога в линейном случае. К таким режимам, например, относятся несимметричные решения, существующие при симметричных граничных условиях [4–6]. В настоящей статье излагаются результаты экспериментального исследования взаимодействия встречных волн в отрезке активной линии\*\*. Показано, что в слабонелинейной автоколебательной системе возможно установление квазимонохроматических режимов типа стоячей волны и, кроме того, принципиально нелинейных режимов, в частности, с несимметричным распределением напряжения вдоль линии (при симметричной нагрузке на концах). Исследованы низкочастотные (длинноволновые) процессы в отрезке линии, которые носят существенно релаксационный характер.

1. *Схема и режимы работы* В качестве экспериментальной модели использовалась искусственная *LC*-линия с туннельными диодами (рис. 1), подробно описанная в [3]. Исследовались автоколебания в отрезках из 28 и 56 идентичных ячеек с активной нагрузкой  $R_0$  и  $R_l$  на концах, в том числе и при  $R_{0,l} = 0, \infty$ .

В отрезке линии наблюдались как квазимонохроматические, так и релаксационные режимы, характер которых определялся их частотой или пространственным периодом  $\gamma$  и величиной дисперсии в системе.

\* Автоколебания в виде стационарных бегущих волн в кольцевых активных линиях изучены теоретически и экспериментально в работах [1–3].

\*\* Взаимодействие импульсов в отрезке линии, периодически нагруженной туннельными диодами, экспериментально исследовалось в работе [7].

Величина дисперсии, аналогично [3], изменялась с помощью увеличения или уменьшения емкости  $C$ . При сильной дисперсии ( $C = 6000 \text{ пФ}$ ) процессы в линии были близки к квазимохроматическим, в то время как при слабой дисперсии ( $C = 100 \text{ пФ}$ ) в отрезке устанавливались релаксационные режимы. В линии с промежуточной величиной дисперсии ( $C = 600 \text{ пФ}$ ) при различных начальных условиях<sup>\*</sup> наблюдались и релаксационные и квазигармонические режимы. Первые имели пространственный период  $\lambda = 7; 14$  и  $28$  ячейкам, а вторые  $\lambda = 2,8; 3,1; 4$  и  $5,6$  ячейки.

**2. Теоретический анализ.** Для анализа наблюдавшихся стационарных процессов и обсуждения экспериментальных данных воспользуемся результатами работы [5].

Полученные с помощью метода усреднения по стационарным волнам уравнения относительно квадратов амплитуд встречных волн  $m_{1,2}(z, t)$  для рассматриваемой системы имеют вид

$$\gamma v m'_{1,2} = \pm h v m_{1,2} [1 - (m_{1,2} + \rho m_{2,1})], \quad (1)$$

$$h = 3\alpha g \gamma_1 / Cv, \quad \rho = \gamma_2 / \gamma_1.$$

Здесь  $\gamma_i$  — интегральные характеристики стационарных периодических волн, образующих решение,  $v$  — скорость их распространения,  $\alpha$  и  $g$  — параметры вольтамперной характеристики туннельного диода, представленной в виде  $\varphi(u) = -g(1 - \alpha u^2) u$ .

Поскольку характер стационарных волн, по которым проводилось усреднение при получении системы (1), может быть произвольным, эти уравнения описывают и квазимохроматические и релаксационные процессы в исследуемой линии.

Уравнения интегральных кривых на фазовой плоскости системы (1) записываются в виде

$$m_1 m_2 |1 - (m_1 + m_2)|^{\rho-1} = D, \quad (2)$$

где постоянная  $D > 0$ . Характер фазового портрета существенно зависит от величины и знака параметра  $\rho$  периодических бегущих волн, образующих решение в отрезке. Существенно, что для всех стационарных бегущих волн, наблюдавшихся в кольцевой активной линии [3] (очевидно, именно эти периодические волны образуют решение в отрезке), параметр  $\rho$  оказался положителен. Величина  $\rho$  зависит от формы периодической функции. Для синусоиды  $\rho = 2$ , с ростом длины стационарных волн их форма становится все более релаксационной и величина этого параметра убывает\*\*.

Фазовый портрет системы (1) для значений  $\rho > 1$  представлен на рис. 2. Границные условия в точках  $z = 0, l$  при активной нагрузке представляются на этой плоскости двумя прямыми  $m_1 = r_1 m_2$  и  $m_1 = m_2/r_2$ , где

$$r_{1,2} = [(C_1 v R_{0,l} - 1)/(C_1 v R_{0,l} + 1)]^2. \quad (3)$$

\* Переход от одного установившегося режима к другому осуществлялся посредством изменения напряжения  $U_{\text{cm}}$ , т. е. изменением положения рабочей точки на характеристике диода.

\*\* Расчет  $\rho$  производился на основании осцилограмм стационарных бегущих волн, наблюдавшихся в кольцевой линии той же длины, что и исследуемый отрезок.

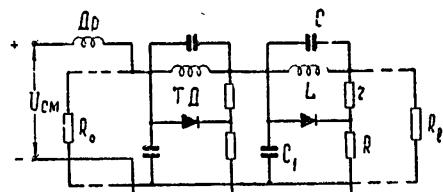


Рис. 1.

Реализоваться в отрезке линии могут лишь те решения, которым на плоскости  $m_1, m_2$  соответствует траектория, начинающаяся на первой из этих прямых и заканчивающаяся на второй. Интервал изменения  $\Delta z$  на этих траекториях должен быть равен  $nl$ , где  $l$  — длина отрезка, а  $n$  — целое число.

На основании изложенного рассмотрения проанализируем подробно квазимохроматические и релаксационные режимы, наблюдавшиеся экспериментально.

### 3. Квазимохроматические процессы

На рис. 3 представлены наиболее характерные осциллограммы различных квазигармонических режимов, экспериментально наблюдавшихся в отрезке линии с  $r_{1,2} = 1$ . Рис. 3а соответствует режиму стоячих волн с  $\lambda = 7$  ячейкам ( $C = 6000 \text{ пФ}$ ). Здесь и в дальнейшем нижние осциллограммы кадра сняты с ячеек, номера которых указаны сбоку от кадра, а верхние — с одной и той же контрольной ячейки и приведены для сравнения. Для разомкнутого на концах отрезка линии на рис. 3б приведены осциллограммы

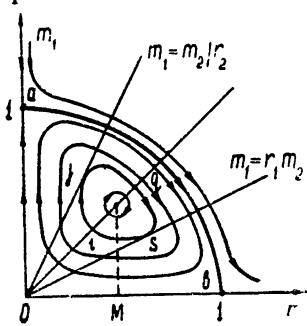


Рис. 2.

с ячейками, номера которых указаны сбоку от кадра, а верхние — с одной и той же контрольной ячейки и приведены для сравнения. Для разомкнутого на концах отрезка линии на рис. 3б приведены осциллограммы

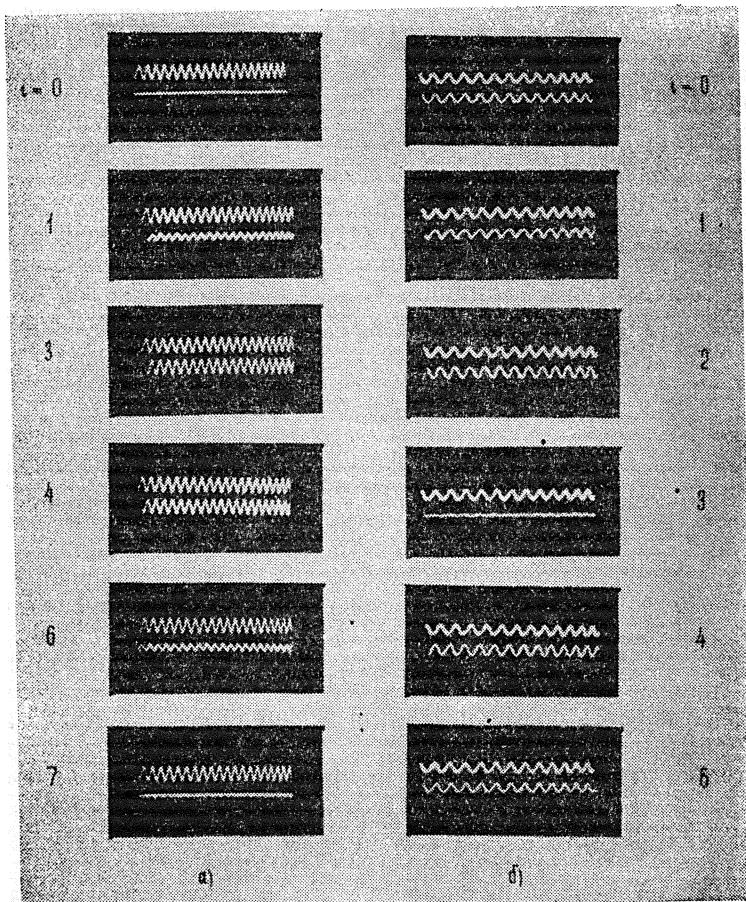


Рис. 3. Осциллограммы квазимохроматических колебаний.

несимметричного режима, где преобладает бегущая вправо волна ( $\lambda = 4$  ячейкам). Из осциллограмм видно, что на начальном участке ( $i = 0 \div 3$ ) решение имеет вид стоячей волны, в то время как на следующих ячейках наблюдается практически бегущая волна с  $\lambda = 4$ .

Распределение безразмерной амплитуды решения, нормированной на амплитуду стационарной бегущей волны той же частоты, вдоль линии для различных квазисинусоидальных режимов представлено на рис. 4. Распределение на рис. 4а соответствует стоячей волне с  $\lambda = 7$ , наблюдавшейся в отрезке закороченной на концах линии; рис. 4б соответствует стоячей волне с  $\lambda = 6$  в отрезке с  $l = 28$  ячейкам. На плоскости  $m_1, m_2$  эти решения представляются состоянием равновесия  $m_1 = m_2 = M$ , где  $M = (1 + \rho)^{-1}$ . Для синусоидальных решений  $M = 1/3$  ( $\rho = 2$ ) и относительная амплитуда стоячих волн равна  $2\sqrt{M} = 1, 2$ . Этот результат совпадает с экспериментальным (рис. 4).

Как следует из вида фазового портрета (рис. 2а), в исследуемом отрезке при условии, что его длина  $l$  больше некоторого  $l_{kp}$ , возможно

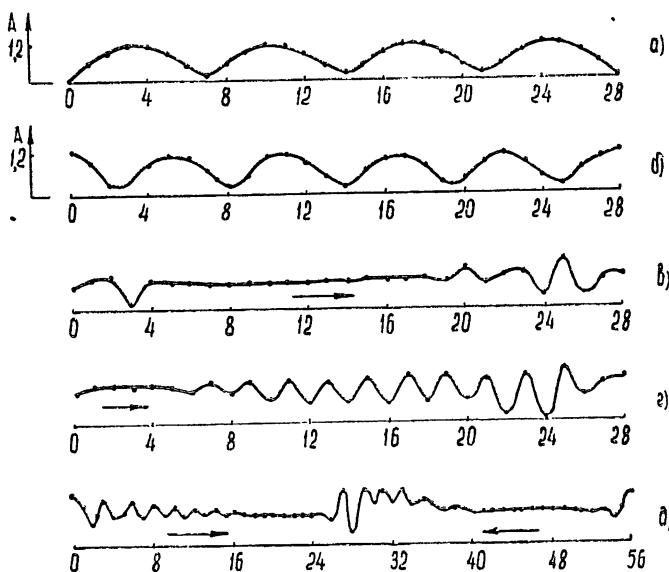


Рис. 4. Распределение безразмерной амплитуды решения вдоль линии для квазимохроматических режимов.

существование решений с несимметричным распределением амплитуды вдоль линии. Таким решениям на плоскости  $m_1, m_2$  при  $r_{1,2} = 1$  соответствуют, например, траектории  $ijq$  и  $qsi$ . Величину  $l_{kp}$  нетрудно оценить экспериментально—при последовательном уменьшении длины отрезка  $l$  найти  $l = l_{kp}^0 = \min \{l(\lambda)\}$ , при котором исчезают все несимметричные режимы. В исследуемой линии исчезновение несимметричных режимов наблюдалось при  $l = 14$  ячейкам.

На рис. 4в—4д представлено распределение амплитуд вдоль линии для трех из четырех наблюдавшихся нелинейных режимов (рис. 4в и 4г соответствуют несимметричным решениям с  $\lambda = 4$  и  $\lambda = 3,5$ , которые реализовались в линии с  $l = 28$  ячейкам, а рис. 4д—решению с  $\lambda = 5,6$ , наблюдавшемуся в линии с  $l = 56$  ячейкам); на фазовой плоскости  $m_1, m_2$

это решение представляется траекторией  $ijqsi$  (рис. 2)\*. В области преобладания одной из волн наблюдаемые решения мало отличались от бегущего (направление распространения указано на рис. 4), в то время как в интервале  $\Delta z$ , где амплитуды встречных волн близки друг другу, решение аналогично по характеру стоячей волне. На фазовой плоскости распределению рис. 4г соответствует траектория, близкая к центру ( $m_1 \approx m_2$ ), в то время, как распределению рис. 4в—траектория, приближающаяся к сепаратрисам седел (преобладание одной из волн существенно на большем интервале  $\Delta z$ ).

**4. Релаксационные режимы.** С ростом длины волны (уменьшением частоты колебаний), как и при уменьшении дисперсии в системе, установившиеся в отрезке линии колебательные процессы из квазигармонических становятся существенно несинусоидальными и затем релаксационными.

На рис. 5а, 5б и 6 представлены четыре типа релаксационных колебаний, наблюдавшихся в закороченном на концах отрезке линии при  $C = 100 \text{ нф}$ . Процессы, осцилограммы которых приведены на рис. 5а, 5б и 6, имеют соответственно частоты  $v = (0,36; 0,74; 0,36) \cdot 10^6 \text{ Гц}$  и длины волн  $\lambda = 28; 14; 28$  ячейкам. Длинноволновые режимы, совпадающие с приведенными на рис. 5, наблюдались также в отрезке с активной нагрузкой на концах  $R_0 = R_l \ll 15\Omega$  ( $r_{1,2} \geq 0,5$ ). Аналогичные режимы реализовались в линии с более сильной дисперсией ( $C = 600 \text{ нф}$ ), однако интервал напряжений смещения  $\Delta U_{\text{см}}$ , в котором они устойчиво наблюдались, существенно сузился.

Под осцилограммами колебаний в отрезке с  $l = 28$  ячейкам на рис. 5а и 5б приведены осцилограммы соответствующих им по длине волн и частоте периодических бегущих волн  $f(vt \mp z)$ , наблюдавшихся в кольцевой линии той же длины [3]. Как видно из представленных осцилограмм, форма колебаний релаксационных режимов, в отличие от монохроматических, существенно зависит от координаты вдоль линии уже в интервале  $\Delta z \sim \lambda$ .

Согласно рис. 7, на котором приведено распределение напряжения вдоль линии для режимов с  $\lambda = 28; 14$  и 7, медленная амплитуда решения не зависит от координаты, т. е. наблюдаемым режимам на плоскости  $m_1, m_2$  системы (1) соответствует точка  $m_{1,2} = M$  (рис. 2б). Следовательно, рассматриваемые решения имеют вид\*\*

$$u = (1 + \rho)^{-1/2} [f(vt - z) - f(vt + z)]. \quad (4)$$

Здесь  $f(vt - z)$  и  $f(vt + z)$  — встречные стационарные волны той же частоты, что и колебания, исследуемые в отрезке линии.

В справедливости представления наблюдавшихся в отрезке линии режимов в виде (4) нетрудно убедиться. Действительно, в результате сложения волн  $f(vt - z)$  и  $f(vt + z)$  (см. рис. 5а, 5б) для различных  $z$  из интервала  $\Delta z = \lambda$  получаются функции, совпадающие по характеру с осцилограммами, снятыми с различных ячеек. При изменении  $z$  (сдвига между слагаемыми волнами по фазе) форма этих функций меняется в соответствии с формой приведенных осцилограмм. Распределение амплитудных значений напряжения в линии с активной нагрузкой на концах ( $r_{1,2} = 0,5$ ) дано на рис. 7а пунктиром.

\* Экспериментально в линии с  $l = 28$  ячейкам наблюдался также режим с  $\lambda = 3,5$ , аналогичный представленному на рис. 4г, в котором преобладала волна, бегущая не вправо, а влево. На плоскости  $m_{1,2}$  ему соответствует траектория  $qsi$  (рис. 2а).

\*\* Знак  $(-)$  перед  $f(vt - z)$  соответствует  $R_0 = R_l = 0$  (см. (3)).

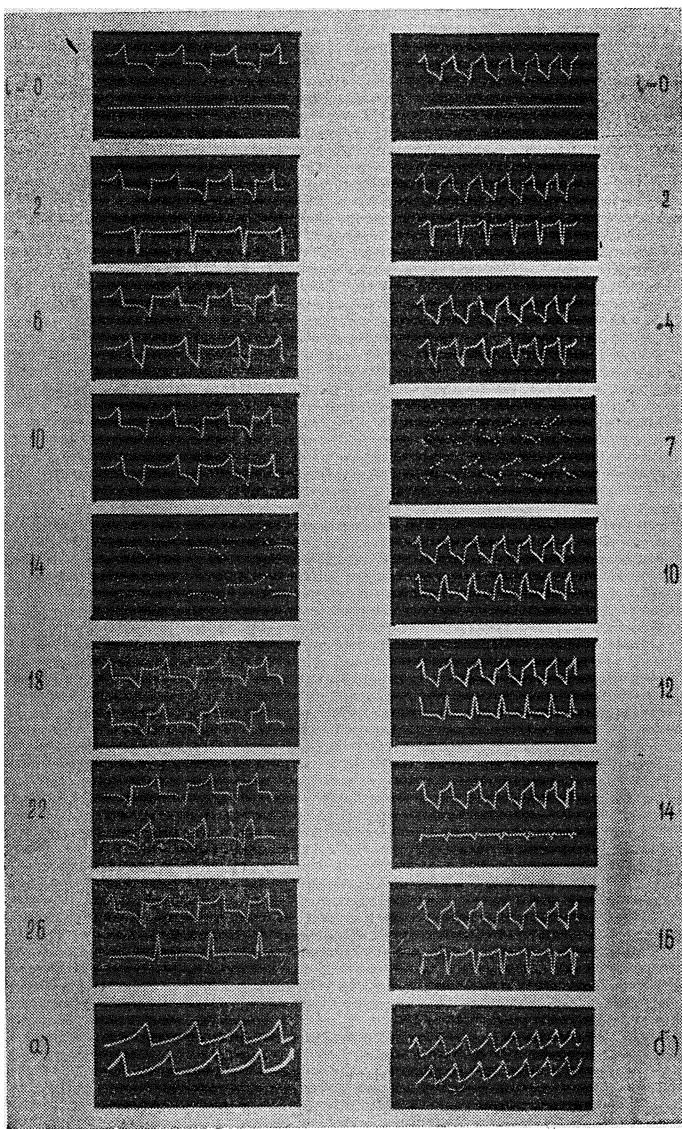


Рис. 5. Осциллографмы релаксационных колебаний (а —  $\lambda = 28$  ячейкам; б —  $\lambda = 14$  ячейкам).

Амплитуда исследуемых решений, согласно (4), убывает с ростом параметра  $\rho$ . Для образующих решения с  $\lambda = 14$  и 7 ячейкам периодических функций этот параметр имеет значения  $\rho = 1$  и  $\rho = 1,7$ . Воспользовавшись (4), получим относительные амплитуды колебаний рассматриваемых режимов:  $A = 1,4$  и  $A = 1,25$ . Данные результаты практически совпадают с полученными экспериментально.

Для функций, образующих режим рис. 5а,  $\rho = 0,7$ , а относительная амплитуда равна 1,5. Однако, поскольку в [5] рассмотрение проводилось для нелинейности с симметричной характеристикой, численные оценки справедливы лишь для решений, образованных периодическими функциями, близкими к симметричным.

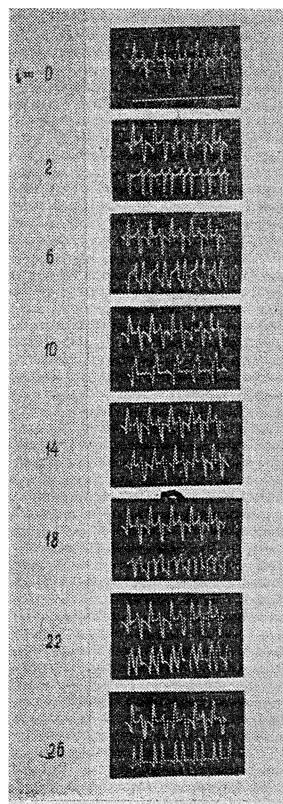


Рис. 6. Осциллографмы релаксационных колебаний (а— $\lambda = 14$  ячейкам, б— $\lambda = 7$  ячейкам).

В заключение остановимся на режиме автоколебаний, представленном на рис. 6. Этот режим имеет ту же частоту и пространственный период, что и режим рис. 5а. Из сравнения осциллографм этих режимов видно, что первый имеет удвоенное число пиков по сравнению с «простым» режимом типа (4) (рис. 5а и 5б). Можно предположить, что такой «сложный» режим есть результат взаимодействия стационарных волн с различными, но кратными длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . При этом для объяснения наблюдаемой картины необходимо принять, что различные стационарные волны, образующие «сложное» решение, имеют одинаковую частоту  $v = v/\lambda$ . Однако, как показано в [3], таких волн в рассматриваемой системе не существует. С другой стороны, поскольку в исследуемой линии возможно установление стационарных решений в виде релаксационных волн с одинаковыми  $v$  и  $\lambda$ , но с различными фазами  $\varphi$ , в системе со слабой нелинейностью могут существовать и решения вида\*

$$u = \sum_{1,2} a_{1,2} [f(vt - z + \varphi_{1,2})] - f(vt + z + \varphi_{1,2}). \quad (5)$$

Сравнительный анализ осциллографм, приведенных на рис. 6 и 5а, показывает, что режим рис. 6 действительно можно представить как суперпозицию двух «простых» режимов с  $\lambda = 28$  (рис. 5а), сдвинутых по фазе.

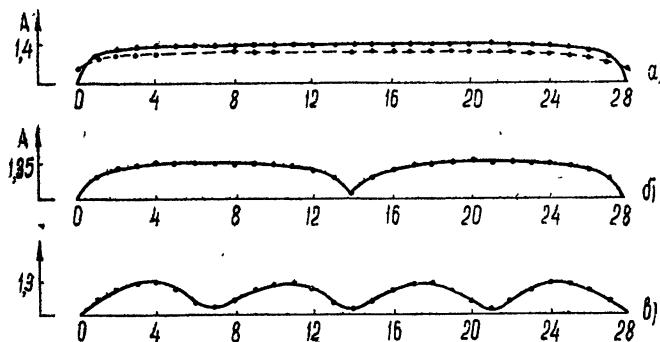


Рис. 7. Распределение безразмерной амплитуды решения вдоль линии для релаксационных режимов.

Авторы благодарны А. В. Гапонову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

\* Наличие четырех волн необходимо для удовлетворения граничных условий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 173 (1966).
2. М. И. Рабинович, Радиотехника и электроника, 11, 1467 (1966).
3. Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 128 (1967).
4. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 987 (1966).
5. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 214 (1967).
6. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 91 (1965).
7. Ю. И. Воронцов, Радиотехника и электроника, 9, 2184 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 октября 1966 г.

## AUTO-OSCILLATIONS IN A SECTION OF A NONLINEAR ACTIVE LINE

*Yu. K. Bogatyryov, M. I. Rabinovich*

Auto-oscillations in a section of artificial LC-line with tunnel diodes are experimentally investigated. It is shown that it is possible to establish special nonlinear regimes, both quasi-harmonic and relaxational, in such a system. The influence of dispersion on the character of steady-state process is clarified. The experimental data obtained confirm earlier theoretical consideration [4, 5].

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164

**ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЗЕНИТА НА ДЛИНЕ  
ВОЛНЫ  $\lambda = 3,2 \text{ см}$**

*К. С. Станкевич, В. П. Ласточкин, В. А. Торхов*

Абсолютные измерения температуры радиоизлучения зенита, приведшие к открытию реликтового космического излучения, были проведены на ряде волн сантиметрового диапазона  $3,2 \text{ см}$  [1],  $7,35 \text{ см}$  [2] и  $20,7 \text{ см}$  [3]. Методика в этих исследованиях была одинаковой и состояла в тщательном измерении разности температур от антенн, направленной в зенит, и согласованной нагрузки, охлаждаемой жидким гелием. При этом для определения температуры радиоизлучения зенита необходимо знать, какой вклад в температуру антенны дает радиоизлучение Земли, стенок рупора, волноводов, асимметрия плеч переключателя — факторы, которые весьма трудно учесть непосредственно с необходимой точностью. Поэтому в некоторых случаях пользовались расчетными значениями температур отдельных составляющих, что могло приводить к неучтеным систематическим ошибкам. Поскольку величина температуры реликтового радиоизлучения имеет важное значение, то представляло определенный интерес проведение измерений температуры зенита другим, более простым методом.

При абсолютных измерениях потоков дискретных источников наилучшие точности достигаются при калибровке температуры антенны по методу «искусственной Луны» [4], при котором калибровка приращений температуры антенны производится непосредственно во фраунгоферовой зоне антенны, что достигается помещением диска из абсолютно поглащающего материала в луч диаграммы направленности. Этот принцип такжеложен в основу методики измерения распределенного излучения. Главный луч диаграммы направленности полностью закрывается диском из поглащающего материала, охлажденного жидким азотом, и измеряемой величиной является разность температур антенны при приеме радиоизлучения диска  $T_{\text{азот}}$  и зенита  $T_3$  после того как диск удален из диаграммы

$$T_3 - T_{\text{азот}} = \alpha n \quad (1)$$

Калибровка осуществляется при сравнении температур антенны при приеме радиоизлучения диска, охлаждаемого жидким азотом, и такого же размера диска, находящегося при температуре окружающего воздуха.

$$T_0 - T_{\text{азот}} = \alpha n_k \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем температуру радиоизлучения зенита:

$$T_3 = T_{\text{азот}} - \frac{n}{n_k} (T_0 - T_{\text{азот}}). \quad (3)$$

В измерениях на  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  в качестве антенны использовался длинный рупор с раскрытием  $15 \times 15 \text{ см}$ , имевший ширину диаграммы направленности по уровню половинной мощности около  $12^\circ$ . На расстоянии  $115 \text{ см}$  ( $1,5 D^2/\lambda$ ) от раскрыва рупора ставились калибровочные эталоны, которые диаграмму направленности закрывали на уровне  $2-3\%$ . Пространство вокруг рупора металлизировалось на площади  $2 \times 2 \text{ м}^2$ . Калибровочные эталоны из поглащающего материала имели форму квадрата с размерами сторон  $50 \text{ см}$  и помещались в пенопластовые ящики с толщиной дна  $25 \text{ мм}$ . Коэффициент отражения поглащающего материала измерялся несколькими методами и равен  $R = 0,4\%$  с погрешностью  $\pm 10\%$ . Пенопластовые ящики и охлаждение материала жидким азотом не меняли величины коэффициента отражения материала. Этalon, охлаждаемый жидким азотом, находился внутри жидкости и не касался стенок пенопластовой ванны. После прекращения кипения жидкого азота на поверхности поглащающего тела в ванне устанавливалось равновесие, и температура эталона принималась равной температуре кипения жидкого азота. В дни измерений атмосферное давление было нормальным и температура жидкого азота, соответствующая этому давлению, равнялась  $77,36^\circ\text{K}$ . С учетом коэффициента отражения температура радиоизлучения эталона имела величину

$$T_3(1 - R) = 77,05^\circ\text{K}. \quad (4)$$

Температуру радиоизлучения, принимаемого рупорами, можно определить из уравнения переноса излучения охлаждаемого эталона через пенопластовую стенку, имеющую оптическую толщину  $t$ :

$$T_{\text{азот}} = T_a(1 - R)(1 - \tau) + T_s, \quad (5)$$

где  $T_s$  — собственное излучение дна пенопластового ящика, в который налит жидкий азот

Учитывая, что к излучению эталона добавляется также переотраженное излучение металлического листа с температурой  $T_m$ , будем иметь для эффективной температуры радиоизлучения охлаждаемого эталона следующее выражение:

$$T_{\text{азот}} = T_a(1 - R)(1 - \tau) + T_s + T_m R. \quad (6)$$

Температура переотраженного излучения определялась из измерений температуры радиоизлучения металлического экрана, идентичного по размерам применявшимся эталонам и расположенного во фраунгоферовой зоне рупора, и равна  $T_m = 70^\circ\text{K}$ . Собственное излучение ящика с азотом (без эталона) составляло  $1,3^\circ\text{K} \pm 0,2^\circ\text{K}$  при температуре окружающего воздуха  $-20^\circ\text{C}$ , и соответствующая оптическая толщина стенки равна

$$\tau = \frac{2T_s}{T_0 + T_s} = 0,0079.$$

Учитя приведенные выше систематические поправки, для температуры излучения охлаждаемого эталона получим величину  $T_{\text{азот}} = 78^\circ\text{K} \pm 0,2^\circ\text{K}$ .

Для температуры излучения эталона, находящегося при температуре окружающего воздуха, имеем выражение, аналогичное (6):

$$T = T_0(1 - R) + T_m R \approx T_0(1 - 0,27 R) \quad (7)$$

Относительно температуры  $T_{\text{азот}}$  производились измерения излучения зенита и эталона, находящегося при температуре окружающего воздуха, которая была во время измерений меньше  $-25^\circ\text{C}$ . Время одного цикла измерений зенита и калибровки составляло 10 минут, было сделано 60 циклов за 5 дней. Измерения проводились с радиометром, имевшим чувствительность  $0,3^\circ\text{K}$ . В результате этих измерений для температуры зенита получилась величина

$$T_z = 5,2^\circ\text{K} \pm 0,4^\circ\text{K}, \quad (8)$$

где  $0,3^\circ\text{K}$  является статистической ошибкой измерений, а полная среднеквадратичная ошибка с учетом систематических погрешностей составляет  $\pm 0,4^\circ\text{K}$ .

Температура зенита определяется реликтовым космическим излучением и радиоизлучением атмосферы. Для выделения вклада атмосферы были проведены измерения, аналогичные описанным выше, когда направление оси рупора составляло  $30^\circ$  с горизонтом. Температура фона в этом направлении была равна

$$T_\phi(30^\circ) = 8,9^\circ\text{K} \pm 0,3^\circ\text{K}. \quad (9)$$

Температуру радиоизлучения атмосферы можно вычислить, используя известные соотношения

$$T_a(h) = (T_0 - 6,5H) \propto H \operatorname{cosec} h; \quad (10)$$

$$T_{\text{антенны}}(30^\circ) = \int_{\Omega_d} T_a(h) F(h, \varphi) d\Omega / \int_{4\pi} F(h, \varphi) d\Omega = 2,22 (T_0 - 6,5H) \propto H. \quad (11)$$

Представляя (8) и (9) в виде

$$T_p + T_a(90^\circ) = 5,2^\circ\text{K}, \\ T_p + 2,22 T_a(90^\circ) = 8,9^\circ\text{K}, \quad (12)$$

определим температуру радиоизлучения атмосферы в зените  $T_a(90^\circ) = (3 \pm 0,3)^\circ\text{K}$  и температуру реликтового космического излучения  $T_p = (2,2 \pm 0,3)^\circ\text{K}$ , что на  $0,8^\circ\text{K}$  меньше полученного в [1] значения  $T_p = 3,0^\circ\text{K} \pm 0,5^\circ\text{K}$ .

При оценке погрешности определения температур учитывалось, что  $T_p$  и  $T_a$  — сравнимые величины, и при непосредственных измерениях они имели бы одинаковые ошибки. Тогда из (8)  $\sqrt{(\Delta T_a)^2} \approx \sqrt{(\Delta T_p)^2} \approx \sqrt{(\Delta T_z)^2} / \sqrt{2}$ .

В дни измерений абсолютная влажность была меньше  $0,5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$  и, следовательно, температура радиоизлучения водяного пара в направлении зенита не превосходила  $0,1^\circ\text{K}$ . Поэтому полученное значение температуры радиоизлучения атмосферы почти полностью определялось излучением молекулярного кислорода:  $T_{O_2} = 2,90^\circ\text{K}$ , что со-

ответствует полному поглощению в зените  $\Gamma = 0,053 \text{ об}$ . Эта величина в пределах точности совпадает с определенной ранее из измерений теплового излучения атмосферы  $\Gamma = 0,055 \text{ об}$  [5].

Авторы пользуются случаем выразить благодарность В. С. Троицкому за ценные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Roll, D. T. Wilkinson, Phys. Rev. Lett., 16, № 10, 405 (1966).
2. A. A. Penzias, R. W. Wilson, Aph. J., 142, № 1, 420 (1965).
3. T. F. Howell, J. R. Shakeshaft, Nature, 210, № 5043, 1318 (1966).
4. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 6, 1004 (1961).
5. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 5, 985 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 марта 1967 г.

УДК 523.164 4:621.396.628

### ЛИНЕЙНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ НА ЧАСТОТЕ 950 Мгц В ОКРЕСТНОСТИХ ТОЧКИ С КООРДИНАТАМИ $l^{\text{II}} = 142^\circ, b^{\text{II}} = +8^\circ$

*A. A. Мельников, B. A. Разин, B. B. Хрулев*

В работе [1] приведены результаты наблюдений линейно поляризованной компоненты космического радиоизлучения на частотах 437, 510 и 735 Мгц в весьма интересной области небосвода в окрестностях точки с координатами  $l^{\text{II}} = 142^\circ, b^{\text{II}} = +8^\circ$  ( $\alpha = +48^\circ, \delta = +64^\circ$ ). Эти результаты, наряду с данными поляризационных измерений на частотах 408 Мгц [3, 4], 610 Мгц [3] и 1407 Мгц [5], показывают, что межзвездное магнитное поле вблизи антицентра Галактики не является однородным, как предполагалось в [3], а имеет сложную структуру, о чем свидетельствует, в частности, заметный рост степени поляризации с частотой при очень малом изменении позиционного угла в точке  $l^{\text{II}} = 142^\circ, b^{\text{II}} = +8^\circ$  [1, 2].

С целью получения дополнительной информации о структуре указанной области Галактики в октябре—декабре 1966 г. на радиоастрономической станции НИРФИ в Старой Пустыни были проведены измерения поляризации космического радиоизлучения в окрестностях точки с координатами  $l^{\text{II}} = 142^\circ, b^{\text{II}} = +8^\circ$  на частоте 950 Мгц. Ниже описываются полученные результаты.

Наблюдения, как и в работе [1], проводились с помощью радиотелескопа с парabolическим рефлектором диаметром 8 м. Облучатель представлял собой полуволновый вибратор с контрефлексором в виде диска эллиптической формы. Размеры осей контрефлексора подбирались такими, чтобы главный лепесток диаграммы направленности антенны имел одну и ту же ширину в *E*- и *H*-плоскостях.

Основные параметры радиотелескопа приведены в таблице 1.

Таблица 1

Час- тота (Мгц)	Ширина полосы пропускания на уровне 0,5 по мощности (Мгц)	Флуктуационный порог чувстви- тельности при по- стоянной време- ни 16 сек (°К)	Ширина луча на уровне 0,5 по мощ- ности	$D_{\text{гл}}$	Эффек- тивность луча ( $1 - \beta_{\text{гл}}$ ) $\eta$	Скорость вращения облучателя
950	25	0,07	$2^{\circ}46' \times 2^{\circ}46'$	5154	0,6	1 оборот за 5 минут

Распределение линейно поляризованной компоненты космического радиоизлучения было исследовано в области небосвода, ограниченной координатами  $\alpha = +1^\circ - 0^\circ - 7^\circ$ ,  $\delta = 58^\circ - 70^\circ$ . Методика измерений и редакция экспериментальных данных подробно

Таблица 2\*

$\alpha$	$\delta = 58^\circ$				$\delta = 61^\circ$				$\delta = 70^\circ$			
	$\phi^H$ (град)	$t^H$ (град)	$T_A$ (°К)	$\gamma^H$ (град)	$b^H$ (град)	$t^H$ (град)	$T_A$ (°К)	$\gamma^H$ (град)	$b^H$ (град)	$t^H$ (град)	$T_A$ (°К)	$\gamma^H$ (град)
21 <sup>h</sup> 18 <sup>m</sup>	6,9	98,4			10,9	103,2			14,5	167,2	1,13	158,0
21 48	3,5	102,0			8,4	105,9	0,98	160,5	18,4	12,7	103,6	1,1
22 18	1,1	105,5			6,3	103,7	0,87	159,0	10,0	11,2	111,9	0,87
22 48	-0,9	109,3	0,37	52,0	76,7	4,7	111,5	0,85	163,0	7,7	10,0	114,3
23 18	-2,4	112,2	0,41	48,5	66,0	3,4	114,4	0,95	156,5	174,5	9,1	116,6
23 48	-3,4	116,2	0,54	45,0	57,0	2,5	117,5	1,08	174,2	5,4	8,3	119,0
0 18	-4,1	120,4	0,64	40,5	45,0	2,0	120,7	0,5	116,0	1,0	7,7	121,4
0 48	-4,3	124,4	0,65	33,0	31,0	1,7	123,0	1,21	145,0	174,0	7,5	123,9
1 18	-4,0	128,1	0,84	15,5	7,5	1,8	126,8	1,56	3,0	175,5	7,7	126,5
1 48	-3,2	132,0	1,06	13,0	178,0	2,3	120,0	1,68	9,0	175,0	8,2	129,0
2 18	-2,2	135,0	1,24	23,5	2,5	3,3	133,2	1,83	19,0	178,0	9,1	131,5
2 48	-0,6	139,5	1,48	33,5	5,0	4,9	136,4	1,83	21,0	174,0	10,2	133,9
3 18	1,3	142,8	1,66	45,0	11,0	6,2	139,4	1,63	25,0	170,0	11,5	136,2
3 48	3,4	145,8	1,7	55,0	15,0	8,1	142,2	1,65	43,0	2,6	12,9	138,4
4 18	6,4	149,0	1,7	62,5	17,0	10,5	144,7	1,3	47,5	0,5	14,6	140,3
4 48	9,3	151,6	1,56	68,0	17,0	12,8	146,9	1,14	44,0	171,0	16,5	141,9
5 18	12,5	154,1	1,38	51,0	174,0	15,7	148,7	0,9	33,0	153,0	18,8	143,2
5 48	15,9	156,0	0,98	29,0	146,0	18,7	150,3	0,72	24,0	138,0	21,1	144,4
6 18	19,7	157, <sup>j</sup>	0,85	26,0	137,0	21,7	151,6	0,72	22,5	131,0	23,7	145,5
6 48	23,4	158,9	0,6	52,0	158,0	23,4	152,7			26,2	146,4	

\* Погрешность измерений  $T_A$  составляет  $\pm 0,2^\circ\text{K}$ , а  $\gamma^H$  и  $\gamma^r$  —  $\pm 2^\circ (\pm 4,6^2/T_A)$ .

описаны в работе [1]. Измерения состояли в наблюдении (по 3—4 раза) сечений области по прямому восхождению при склонениях  $58^\circ$ ,  $64^\circ$  и  $70^\circ$  [1]. Побочные эффекты исключались по наблюдениям центра области с координатами  $\alpha = 3^h48^m$ ,  $\delta = +64^\circ$  [6].

Результаты измерений поляризации космического радиоизлучения на частоте 950 МГц приведены в таблице 2; в ней даны координаты точек в экваториальной и новой галактической системах координат, температуры поляризованной компоненты, усредненные по главному лучу ( $T_d$ ), и позиционные углы в экваториальной ( $\chi^a$ ) и новой галактической ( $\chi^g$ ) системах координат.

Сопоставление приведенных в таблице 2 данных с результатами измерений поляризации космического радиоизлучения на частотах 437, 510 и 735 МГц показывает, что выводы, сделанные в работе [1], подтверждаются наблюдениями на частоте 950 МГц.

1) В диапазоне частот 437—950 МГц наблюдается увеличение степени поляризации космического радиоизлучения с частотой.

2) В направлениях с заметной мерой вращения отчетливо проявляется немонотонность частотной зависимости степени поляризации.

3) В точке с координатами  $\ell^{II} = 142^\circ$ ,  $b^{II} = +8^\circ$ , как уже отмечалось [1, 2], степень поляризации возрастает с частотой, однако позиционный угол фактически остается постоянным. Это означает, что налуче зрения в межзвездном пространстве имеются по крайней мере две области с противоположно направленными продольными компонентами магнитного поля.

4) Обращает на себя внимание значительное увеличение угловых размеров исследовавшейся области по точкам половинной температуры поляризованной компоненты космического радиоизлучения на частоте 950 МГц по сравнению с ее размерами на частоте 437 МГц. Наиболее правдоподобно этот факт объясняется фарадеевским вращением плоскости поляризации космического радиоизлучения в межзвездной среде.

5) Мера вращения по данным таблицы 2 и работы [1] получается малой в центре области (в направлении  $\ell^{II} = 142^\circ$ ,  $b^{II} = +8^\circ$ ) и увеличивается к ее краям, причем при  $\ell^{II} > 145^\circ$  мера вращения положительна, а при  $\ell^{II} < 140^\circ$  — отрицательна [1—3].

Авторы глубоко признательны М. Т. Греховой за интерес к работе и ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. РАЗИН, В. В. ХРУЛЕВ, В. Т. ФЕДОРОВ, С. А. ВОЛОХОВ, А. А. МЕЛЬНИКОВ, А. М. ПАСЕКА, Л. В. ПУПЫШЕВА, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика. (в печати).
2. В. А. РАЗИН, В. В. ХРУЛЕВ, Доклад на всесоюзном симпозиуме по радиоастрономии, Горький, 1967.
3. E. M. Berkhoujsen, W. N. Brouw, C. A. Muller, J. Tinbergen, BAN, 17, 465 (1964).
4. R. Wielebinski, J. R. A. Shakeshaft, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 128, 19 (1964).
5. R. G. Bingham, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 134, 327 (1966).
6. В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 ноября 1967 г.

УДК 535.5:551.51

## ОЦЕНКА ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТА ТУРБУЛЕНТНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ АТМОСФЕРЫ

*B. И. Тамарский*

В опубликованной недавно работе [1] приводятся экспериментальные данные о деполяризации излучения ОКГ в атмосфере, причем автор интерпретирует этот эффект как результат воздействия турбулентности. Ниже производится расчет деполяризации света, вызываемый турбулентностью, из которого следует, что наблюдавшаяся в эксперименте деполяризации, по-видимому, не могла быть вызвана турбулентностью.

Уравнение, описывающее распространение света в среде с неоднородностями показателя преломления, может быть записано в виде

$$\Delta E + k^2 n^2 E + \text{grad}(E \text{ grad} \ln n^2) = 0, \quad (1a)$$

где  $n$  — показатель преломления,  $\mathbf{E}$  — электрический вектор,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ . Положим  $n^2 = 1 + \epsilon_1$ , где  $\epsilon_1$  — флукутирующая часть диэлектрической проницаемости. Будем считать  $|\epsilon_1| \ll 1$ , так что  $\ln n^2 = \ln(1 + \epsilon_1) \approx \epsilon_1$  и (1а) можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -k^2 \epsilon_1 \mathbf{E} - \text{grad}(\mathbf{E} \cdot \text{grad} \epsilon_1). \quad (16)$$

Второй член в правой части (16) имеет порядок  $\epsilon_1/l_0$ , где  $l_0$  — размер наименьших неоднородностей; первый член имеет порядок  $\epsilon_1/\lambda^2$ , а отношение второго члена к первому имеет порядок  $\lambda/l_0$  и мало, если  $\lambda \ll l_0$ . Если пренебречь вторым членом в правой части (16), то уравнение для вектора  $\mathbf{E}$  распадается на три уравнения для его компонент, откуда следует, что в этом приближении деполяризация отсутствует. Поэтому для учета деполяризации следует учесть второй (малый) член в правой части (16). Пусть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_\perp, \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}_0$  — падающая волна,  $\mathbf{E}_s$  — рассеянная волна, поляризованная вдоль  $\mathbf{E}_0$ , и  $\mathbf{E}_\perp$  — деполяризованная компонента рассеянной волны. Рассеянная волна  $\mathbf{E}_s$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{E}_s + k^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \epsilon_1 \mathbf{E}_0 - \text{grad}_{\parallel}(\mathbf{E}_0 \cdot \text{grad} \epsilon_1), \quad (3)$$

где  $\text{grad}_{\parallel}$  — продольная (по отношению к  $\mathbf{E}_0$ ) компонента градиента. Подставляя (2) в (16), учитывая (3) и пренебрегая членами порядка  $\epsilon_1 \mathbf{E}_s$ ,  $\epsilon_1 \mathbf{E}_\perp$  в правой части, найдем

$$\Delta \mathbf{E}_\perp + k^2 \mathbf{E}_\perp = -\text{grad}_\perp(\mathbf{E}_0 \cdot \text{grad} \epsilon_1). \quad (4)$$

Здесь  $\text{grad}_\perp$  означает поперечную (по отношению к  $\mathbf{E}_0$ ) компоненту градиента. Пусть  $\mathbf{E}_0 = (E_0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{E}_\perp = (0, E_\perp, 0)$ , т. е. ось  $x$  ориентирована вдоль  $\mathbf{E}_0$ , а ось  $y$  — вдоль  $\mathbf{E}_\perp$ . Тогда решение уравнения (4) имеет вид

$$E_\perp(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp[ik|r-r'|]}{|r-r'|} \frac{\partial}{\partial y'} \left[ E_0 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x'} \right] dx' dy' dz'. \quad (5a)$$

Пусть  $E_0$  — плоская волна, распространяющаяся вдоль оси  $z$ . Тогда  $E_0 = A_0 \exp(ikz)$ . Кроме того, так как мы рассматриваем случай  $\lambda \ll l_0$ , то рассеяние сосредоточено в узком конусе с раствором порядка  $\lambda/l_0$ , и в экспоненте в (5а) можно положить

$$|r-r'| = (z-z') + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(z-z')} = (z-z') + p^2/2(z-z'),$$

а в знаменателе можно просто считать  $|r-r'| \approx (z-z')$ . Таким образом,

$$E_\perp(r) = \frac{A_0}{4\pi} \int_0^z dz' \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \times \\ \times \frac{\exp[ik((z-z') + p^2/2(z-z') + z')]}{z-z'} \frac{\partial^2 \epsilon_1(x', y', z')}{\partial x' \partial y'}. \quad (56)$$

Магнитный вектор можно найти из уравнения Максвелла

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \text{rot} \mathbf{E},$$

откуда для волновой зоны

$$H_x = \frac{1}{ik} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_\perp}{\partial z} \approx -E_\perp$$

и среднее за период значение вектора Пойнтинга равно

$$S_{\perp z} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\mathbf{E}_\perp \mathbf{H}_\perp^*] = \frac{c}{8\pi} |E_{\perp y}^2|.$$

Подставляя (5б), найдем для среднего значения  $\langle S_{\perp z} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle S_{\perp z} \rangle &= \frac{cA_0^2}{128\pi^3} \int_0^z \frac{dz'}{z-z'} \int_0^z \frac{dz''}{z-z''} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' dx'' dy'' \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[ \frac{x'^2 + y'^2}{z-z'} - \frac{x''^2 + y''^2}{z-z''} \right] \right\} \left\langle \frac{\partial^2 \epsilon_1(x', y', z')}{\partial x' \partial y'} \frac{\partial^2 \epsilon_1(x'', y'', z'')}{\partial x'' \partial y''} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференцируя соотношение

$$\langle \epsilon_1(x', y', z') \epsilon_1(x'', y'', z'') \rangle = B_\epsilon(x' - x'', y' - y'', z' - z''),$$

где  $B_\epsilon$  — корреляционная функция флюктуаций диэлектрической проницаемости, получим

$$\left\langle \frac{\partial^2 \epsilon_1(x', y', z')}{\partial x' \partial y'} \frac{\partial^2 \epsilon_1(x'', y'', z'')}{\partial x'' \partial y''} \right\rangle = \frac{\partial^4 B_\epsilon(x' - x', y' - y', z' - z'')}{\partial x'^2 \partial y'^2}. \quad (7)$$

Кроме того, воспользуемся двумерным спектральным разложением [2]

$$B_\epsilon(\xi, \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_\epsilon(\mathbf{z}, \zeta) \exp[i(\mathbf{z}_1 \xi + \mathbf{z}_2 \eta)] d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2, \quad (8)$$

где  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, 0)$ . Подставим (8) в (7), а полученное выражение — в (6). После этого интегрирование по переменным  $x', y', x'', y''$  выполняется и можно получить формулу

$$\langle S_{\perp} \rangle = \frac{cA_0^2}{32\pi k^2} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' \int_{-\infty}^{\infty} z_1^2 z_2^2 F_\epsilon(\mathbf{z}, z' - z'') \exp \left[ \frac{i\kappa^2(z' - z'')}{2k} \right] d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2. \quad (9)$$

Функция  $F_\epsilon(\mathbf{z}, z' - z'')$  пренебрежимо мала в области, где  $|z(z' - z'')| > 1$ . Поэтому в существенной для интегрирования области  $|z(z' - z'')| < 1$  выполняется неравенство  $|z^2(z' - z'')/k| < z/k \ll 1$  и экспоненциальный множитель можно опустить.

$$\langle S_{\perp} \rangle \approx \frac{cA_0^2}{32\pi k^2} \int_{-\infty}^{\infty} z_1^2 z_2^2 d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 \int_0^z dz' \int_0^z dz'' F_\epsilon(\mathbf{z}, z' - z''). \quad (10)$$

Введем в интеграле по  $z', z''$  новые переменные интегрирования  $u = z' - z''$ ,  $v = (z' + z'')/2$ . Так как функция  $F_\epsilon(\mathbf{z}, u)$  быстро убывает с ростом  $u$ , то пределы интегрирования по этой переменной можно заменить на бесконечные. Учитывая соотношение [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\epsilon(\mathbf{z}, u) du = 2\pi \Phi_\epsilon(\mathbf{z})$$

между  $F_\epsilon(\mathbf{z}, u)$  и трехмерной спектральной плотностью  $\Phi_\epsilon(\mathbf{z})$ , найдем

$$\int_0^z dz' \int_0^z dz'' F_\epsilon(\mathbf{z}, z' - z'') \approx 2\pi z \Phi_\epsilon(\mathbf{z}),$$

и формула (10) принимает вид

$$\langle S_{\perp} \rangle = \frac{cA_0^2 z}{16k^2} \int_{-\infty}^{\infty} z_1^2 z_2^2 \Phi_\epsilon(\mathbf{z}) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2. \quad (11)$$

Рассмотрим случай статистически изотропных флюктуаций, когда  $\Phi_\epsilon(\mathbf{z}) = \Phi_\epsilon(\mathbf{z}) = \Phi_\epsilon(\sqrt{z_1^2 + z_2^2})$ . Вводя в (11) полярные координаты и выполняя интегрирование по угловой переменной, получим формулу

$$\langle S_{\perp} \rangle = \frac{\pi c A_0^2 z}{64 k^2} \int_0^{\infty} \Phi_\epsilon(z) z^6 dz, \quad (12)$$

Рассмотрим конкретный пример, когда флуктуации вызываются турбулентностью и спектральная плотность  $\Phi_\epsilon(x)$  имеет вид

$$\Phi_\epsilon(x) = AC_\epsilon^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2), \quad A = 0,033. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12) и интегрируя, легко найдем

$$\langle S_\perp \rangle = \frac{\pi \Gamma(7/6) A}{128} c A_0^2 \frac{x_m^2}{k^2} C_\epsilon^2 x_m^{1/3} z. \quad (14)$$

Разделив это выражение на плотность потока энергии падающей волны  $S_0 = c A_0^2 / 8\pi$ , получим относительную величину деполяризованной компоненты

$$\frac{\langle S_\perp \rangle}{S_0} = N \frac{x_m^2}{k^2} C_\epsilon^2 x_m^{1/3} z, \quad N = \frac{\pi^2}{16} A \Gamma(7/6) = 0,019. \quad (15)$$

Произведем численную оценку, полагая  $C_\epsilon^2 = 10^{-15} \text{ см}^{-2/3}$ ,  $x_m = 60 \text{ см}^{-1}$  (что соответствует внутреннему масштабу турбулентности порядка 1 мкм),  $z = 1 \text{ км}$ . Тогда получим

$$\langle S_\perp \rangle / S_0 = 2 \cdot 10^{-18}.$$

Столь незначительное отношение  $\langle S_\perp \rangle / S_0$  в настоящее время вряд ли можно измерить. Однако следует отметить, что присутствие в атмосфере даже незначительных количеств аэрозоля, который еще существенно не сказывается на флуктуациях и среднем значении поля, может дать вполне ощутимое и доступное измерению значение деполяризации. Именно этим, по-видимому, и можно объяснить результаты описанных в [1] экспериментов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. L. Fried, G. E. Mevers, J. Opt. Soc. of Amer., 55, № 6, 740 (1965).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию  
7 февраля 1967 г.

УДК 621.378.32

## СПЕКТР ОКГ НА ТВЕРДОМ ТЕЛЕ С НЕОДНОРОДНОЙ НАКАЧКОЙ

*E. С. Коваленко*

Известно [1-3], что число продольных мод, возникающих при работе ОКГ на твердом теле, определяется эффектом пространственной модуляции населеностей уровней с периодом  $\lambda/2$ . В [1, 2] показано, что учет этого эффекта в стационарном режиме приводит к эквидистантному спектру генерируемых мод, энергия которых падает по параболическому закону при удалении от центра линии. Среди других причин, существенно влияющих на генерацию лазера, важной является неоднородность накачки [4-6]. Ниже рассматривается влияние продольной неоднородности накачки на форму и ширину спектра ОКГ.

Уравнения, связывающие число фотонов  $N_s$  в mode  $s$  с разностью населенностей  $n$  рабочих уровней, имеют вид

$$\dot{N}_s + \gamma N_s = D g_s N_s \int_0^L n A_s^2 dz; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (n - n_0) = -2D \sum_s g_s N_s n A_s^2, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — коэффициент затухания резонатора;  $g_s$  — функция, описывающая форму линии люминесценции;  $T_1$  — время продольной релаксации;  $n_0$  — параметр накачки;  $L$  — длина кристалла и резонатора;  $A_s^2 = 1 - \cos(2k_s z)$ ,  $k_s$  — волновое число  $s$ -моды. При неоднородной накачке  $n_0$  есть функция  $z$ , которую удобно записать в виде

$$n_0 = \sum_{k=0}^{\infty} R_k \cos(k\pi z/L).$$

Ограничимся случаем стационарной генерации. В том же приближении, которое было использовано для анализа работы ОКГ с однородной накачкой [2], для  $N_s$  получим систему уравнений

$$x_s + \sum_{s' \neq s} \delta_2 |s-s'| x_{s'} = u_s, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} x_s &= D T_1 g_s N_s \Delta^{-1}, \quad u_s = 1 - \frac{\Delta}{\alpha g_s}, \quad \delta_s = \frac{1}{2} R_s R_0^{-1}, \\ \alpha &= D L R_0 \gamma^{-1}, \quad \Delta^{-1} = 1 - 2 \sum_s x_s. \end{aligned}$$

Левая часть (3) характеризует потери в усиливании на  $s$ -моде за счет пространственной модуляции разности населенностей и неоднородности накачки. Математически именно эти члены ответственны за одновременную генерацию многих мод. Неоднородность накачки приводит к дополнительной связи между модами и в зависимости от знаков  $R_k$  увеличивает или уменьшает усиление на  $s$ -моде. Это изменяет форму и ширину спектра.

Из вида (3) следует, что лишь четные гармоники  $n_0$  оказываются существенными для генерации. Поскольку учет гармоник, начиная с четвертой, делает решение громоздким, рассмотрим здесь только члены  $R_0$  и  $R_2$ . Кроме того предположим, что неоднородность накачки изменяет форму и ширину спектра, но не нарушает его эквидистантности.

В этих условиях решение (3) имеет вид

$$x_s = x_j \operatorname{sh}^{-1} \beta \operatorname{sh}[(j+1-s)\beta] + 2 \operatorname{cth} \beta \sum_{m=s}^j u_m \operatorname{sh}[(s-m)\beta]; \quad (4)$$

$$x_j = \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch}^{-1}[(j+1)\beta] \sum_{s=-j}^j u_m \exp(m\beta), \quad (5)$$

где  $2j+1$  — число мод, входящих в генерацию, а

$$\exp \beta = -\frac{1}{2\delta_2} - \sqrt{-\frac{1}{4\delta_2^2} - 1}.$$

При использовании формул (4), (5) необходимо знание величины  $\Delta$ , для которой после несложных вычислений получим

$$\Delta = \frac{\alpha}{2} \frac{\sum_s r_s - 0.5}{\sum_s r_s g_s^{-1}} + \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \frac{\sum_s r_s - 0.5}{\sum_s r_s g_s^{-1}} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sum_s r_s g_s^{-1}} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$$r_s = (1 - \operatorname{ch}^{-1} \beta) \{1 - \exp(-s\beta) \operatorname{ch}^{-1}[(j+1)\beta]\}.$$

В совокупности соотношения (4) — (6) определяют форму спектра ОКГ при заданном числе мод, величине  $\alpha$  (характеризующей превышение накачкой ее порогового значения) и неоднородности накачки, определяемой  $\delta_2$ . Величины  $\alpha$ ,  $j$  и  $\delta_2$  связаны между собой, так что режим генерации  $2j+1$  моды может осуществляться лишь в некотором интервале накачек и на пороге генерации этого режима:

$$\Delta = \alpha \left( 2 + \sum_{s=-j+1}^{j-1} \exp(-s\beta) \operatorname{ch}^{-1}(j\beta) \right) \left( 2g_j^{-1} + \sum_{s=-j+1}^{j-1} g_s^{-1} \exp(-s\beta) \operatorname{ch}^{-1}(j\beta) \right)^{-1}. \quad (7)$$

Приравнивая правые части (6) и (7), получим при заданном  $\alpha$  уравнение для числа мод, входящих в генерацию. Часто контур линии люминесценции можно считать лорентзевским так что

$$g_s^{-1} = 1 + \xi^2 s^2,$$

причем  $\xi \ll 1$ . В этом случае на пороге генерации  $2j+1$  моды

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \xi^{-2} = a_3 j^3 + a_2 j^2 + a_1 j + a_0, \quad (8)$$

где

$$a_3 = 8\eta/3, \quad a_2 = 1 + 8\eta t_j, \quad a_1 = 4\eta^2 - \frac{14}{3}\eta + (2 + 8\eta)t_j, \quad a_0 = (2\eta + 1)(t_j - t_0),$$

$$\eta = \operatorname{ch} \beta (\operatorname{ch} \beta - 1)^{-1}, \quad t_j = \operatorname{ch} (j\beta) \{\operatorname{ch} (j\beta) - \operatorname{ch} [(j+1)\beta]\}^{-1}.$$

Используя (8), нетрудно подсчитать число мод и ширину спектра при любом уровне накачки и заданной неоднородности. Если  $j \gg 1$ , то, пренебрегая в правой части (8) всеми членами, кроме первого, получим

$$j_{\text{ff}} = j_0 (1 + 2\delta_2)^{1/3}, \quad (9)$$

где  $2j_{\text{ff}}+1$  и  $2j_0+1$  — число мод при неоднородной и однородной накачке соответственно. Из (9) следует, что увеличение подсветки в центре кристалла ( $2\delta_2 < 0$ ) ведет к сужению ширины спектра генерации. Наоборот, концентрация энергии подсветки вблизи зеркал расширяет спектр. При  $2\delta_2 = -1$  разность населенностей вблизи зеркал равна нулю, но в центре кристалла она в два раза выше среднего значения. Хотя соотношение (9) в случае  $2\delta_2 \rightarrow -1$  несправедливо, тем не менее здесь можно ожидать резкого уменьшения ширины линии генерации.

Для того, чтобы составить более точное суждение о влиянии неоднородности накачки на ширину и форму спектра ОКГ, рассмотрим три частных случая  $2\delta_2 = 1; 0, -1$ . При этом для порогов генерации  $2j+1$  моды получим:

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \xi^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{3} j(j+1)(4j+5) & (2\delta_2 = 1) \\ \frac{1}{3} j(8j^2 + 3j - 2) & (2\delta_2 = 0) \\ \frac{1}{45} j(j+1)(16j^3 + 24j^2 - 4j + 9) & (2\delta_2 = -1) \end{cases} \quad (10)$$

Как видно из (10), при  $2\delta_2 = -1$  и больших  $j$  правая часть (10) пропорциональна  $j^5$ , что при заданном  $\alpha$  приводит к значительному сужению спектра. Для величин  $x_s$ , пропорциональных амплитудам мод, справедливы следующие соотношения:

$$x_s = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi^2 (j^2 - s^2), & j - s = 2k \quad (2\delta_2 = 1) \\ \frac{1}{2} \xi^2 [(j+1)^2 - s^2], & j - s = 2k + 1 \quad (2\delta_2 = 1) \\ \xi^2 (j^2 - s^2) & (2\delta_2 = 0) \\ \frac{1}{6} \xi^2 (j^2 - s^2) [(j+1)^2 - s^2] & (2\delta_2 = -1) \end{cases} \quad (11)$$

Из (11) видно, что при  $2\delta_2 = -1$  амплитуды мод убывают к краю линии несколько быстрее, чем при однородной накачке. При  $2\delta_2 = 1$  изменение амплитуд мод при удалении к краю линии носит немонотонный характер.

Поясним смысл полученных результатов. Если в среде с неоднородной накачкой генерируется волна с частотой  $\omega_s$  и волновым числом  $k_s$ , то она модулирует неоднородную часть разности населенностей так, что появляется распределение активных ионов с волновыми числами  $2k_{s\pm 1}$ . При  $\delta_2 > 0$  минимумы разности населенностей совпадают с пучностями волн  $s \pm 1$ . В результате для этих волн вносится дополнительное затухание. При  $\delta_2 < 0$  картина обратная и возрастает усиление волн.

Пусть  $\delta_2 > 0$ . Дополнительное затухание, вносимое в  $s$ -ую моду, будет пропорционально  $\delta_2(x_{s+1} + x_{s-1})$ . Так как гармоники убывают при удалении от центра линии, то и вносимое затухание максимально в центре линии. Очевидно, что при этом спектр

становится более плоским и широким. Если же  $\delta_2 < 0$ , в центре линии вносится максимальное усиление, линия заостряется и сужается.

В заключение следует отметить, что при большой неоднородности накачки, когда  $|2\delta_2| > 1$ , (8) может приводить к решениям, не имеющим физического смысла. При этом стационарная генерация осуществляется либо на неэквидистантном спектре, либо только на четных или нечетных модах. Генерация на неэквидистантном спектре, а также возможность нестационарной генерации [4] здесь не рассматривается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. L. Tang, H. Statz, G. de Mars, J. Appl. Phys., **34**, 2289 (1963).
2. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, ЖЭТФ, **49**, 1843 (1965).
3. В. С. Машкевич, Основы кинетики излучения лазеров, изд. Наукова думка, Київ, 1966.
4. В. И. Беспалов, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **8**, № 5, 909 (1965).
5. А. Ф. Сучков, ЖЭТФ, **49**, № 5 (11), 1495 (1965).
6. D. Ross, Z. Naturforsch., **19a**, № 4, 421 (1964).

Поступила в редакцию  
3 октября 1966 г.

УДК 621.373:519.12...142

## ВЛИЯНИЕ РАДИАЦИОННОГО ЗАТУХАНИЯ НА РАБОТУ СПИНОВОГО ГЕНЕРАТОРА

P. M. Умарходжаев

Радиационное затухание заключается в отборе энергии из системы прецессирующих ядерных спинов катушкой, содержащей образец, и последующем рассеянии этой энергии в виде джоулева тепла [1].

Рассмотрим влияние этого явления на работу спинового генератора на примере генератора Шмельцера [2] (см. рис. 1). Оси катушек  $L_x$  и  $L_y$  «скрещены» [3] и направлены соответственно по осям  $X$  и  $Y$ . По оси  $Z$  направлено магнитное поле  $H_0$ .

Пусть резонансные свойства усилителя определяются контуром 2, т. е.  $Q_2 \gg Q_1$ , где  $Q_1$  и  $Q_2$  — добротности контуров 1 и 2 соответственно. Контур 1 настроен на частоту ларморовой прецессии  $\omega_0 = \gamma H_0$  ( $\gamma$  — гиромагнитное отношение). Обозначим через  $I_y$ ,  $I_a$ ,  $I$ ,  $I_x$  токи в катушках  $L_y$ ,  $L_a$ ,  $L$ ,  $L_x$ ;  $M$  — коэффициент взаимоиндукции катушек  $L_a$  и  $L$ ;  $S_1$  и  $S_2$  — крутизны характеристик ламп усилителей.

На систему ядерных спинов действуют следующие поля:  $H_z = H_0$  — постоянное поле;  $H_x$  — поле, пропорциональное току  $I_x$  ( $H_x = aI_x$ );  $H_y$  — поле реакции, пропорциональное току  $I_y$ , индуцируемому прецессирующими вектором

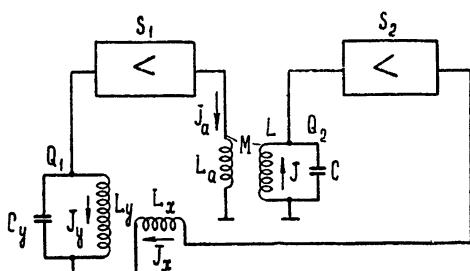


Рис. 1.

намагниченности [4]. Так как контур 1 настроен в резонанс на частоту  $\omega_0$ , то ток  $I_y$  в катушке  $L_y$  есть

$$I_y = \frac{\epsilon_{яд}}{R_y} = -\frac{4\pi n \Delta f \dot{M}_y}{R_y},$$

где  $n$  — число витков катушки;  $\Delta$  — площадь витка;  $f$  — коэффициент заполнения;  $R_y$  — сопротивление катушки  $L_y$ . По определению индуктивности [3],  $H_y n \Delta = L_y I_y$  следовательно,

$$H_y = -\frac{4\pi L_y f \dot{M}_y}{R_y}.$$

Так как  $H_x = xI_x$ , то уравнение радиотракта имеет вид

$$\dot{H}_x + 2\delta_k \dot{H}_y + \omega_k^2 H_y = \pm 4bM_y, \quad (1)$$

где

$$\omega_k^2 = 1/LC, \quad 2\delta_k = R/L, \quad b = \pi n \Lambda f S_1 S_2 \sigma M \omega_k^2 / R_y C_y.$$

Спиновый генератор описывается с помощью уравнения Блоха [3]

$$\dot{M} = -\gamma[MH] - i\delta_2 M_x - j\delta_1 M_y - k\delta_1(M_0 - M_z), \quad (2)$$

где  $\delta_1 = 1/T_1$ ,  $\delta_2 = 1/T_2$  ( $T_1$  и  $T_2$  — времена продольной и поперечной релаксаций), и уравнения радиотракта (1)

Ищем решение системы (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} H_x &= 2H_1 \cos \psi, \\ M_x &= -U \cos \psi - V \sin \psi, \\ M_y &= -(U \sin \psi + V \cos \psi). \end{aligned}$$

Из (1), (2) имеем систему укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U(\delta_2 + K\gamma M_z) + V\Delta\omega_0 = 0, \\ \dot{V} &= V(\delta_2 + K\gamma M_z) - U\Delta\omega_0 = -\gamma H_1 M_z, \\ \dot{M}_z &= M_0 \delta_1 - \gamma H_1 V - \delta_1 M_0 + K(U^2 + V^2), \\ \dot{H}_1 &= \dot{H}_1 \frac{\omega_k}{\delta_k} \Delta\omega_k = -bU \frac{\Delta\omega_k}{\delta_k}, \\ \dot{H}_1 &+ H_1 \delta_k = -bV, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $K = 2\pi Qf$ ,  $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \dot{\psi}$ ,  $\Delta\omega_k = \omega_k - \dot{\psi}$ .

Для стационарного случая получаем стационарную частоту

$$\omega = \omega_0 - \eta \Delta\omega_0 / \delta_k, \quad \eta = \frac{\delta_2 + K\gamma M_z}{\delta_k} \ll 1, \quad \Delta\omega_0 / \delta_k = \omega_0 - \omega_k.$$

Стационарная амплитуда (при условии  $b \gg K\delta_k$ , обычно осуществляется в эксперименте) находится из решений системы

$$M_z = \frac{\delta_2 \delta_k (1 + \Delta\omega_{0k}^2 / \delta_k^2)}{b\gamma}; \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} M_z^2 K \gamma \delta_1 b &+ M_z \delta_1 b (\delta_2 - K\gamma M_0) = \\ &= M_0 \delta_1 \delta_2 b - H_1^2 \gamma \delta_2 \delta_k. \end{aligned} \quad (4b)$$

Уравнение (4a) представляет собой параболу, симметричную относительно оси  $\Delta\omega_{0k} / \delta_k = 0$ , а (4b) — уравнение эллипса с центром в точке  $[0, -(\delta_2 - K\gamma M_0) / \delta_k]$ , малой полуосью  $\{M_0 \delta_2 / K\gamma + [( \delta_2 - K\gamma M_0 ) / 2K\gamma]^2\}^{1/2}$  и большой полуосью  $M_0$ .

$$\left( \frac{Kb\delta_1}{\delta_2\delta_k} \right)^{1/2} \left[ M_0 \frac{\delta_2}{K\gamma} + \left( \frac{\delta_2 - K\gamma M_0}{2K\gamma} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Если пренебречь радиационным затуханием ( $K = 0$ ), то совместное решение уравнений (4a), (4b) дает ранее полученное в [5] уравнение эллипса

$$\frac{\Delta\omega_{0k}^2}{\delta_k^2} + H_1^2 \frac{\gamma^2}{\delta_1 \delta_2} = M_0 \frac{b\gamma}{\delta_2 \delta_k} - 1.$$

При наличии радиационного затухания ( $K \neq 0$ ) зависимость  $H_1(\Delta\omega_{0k})$  найдем, решив систему (4) графически. На рис. 2 приведена зависимость  $H_1(\Delta\omega_{0k})$  для следующих случаев:

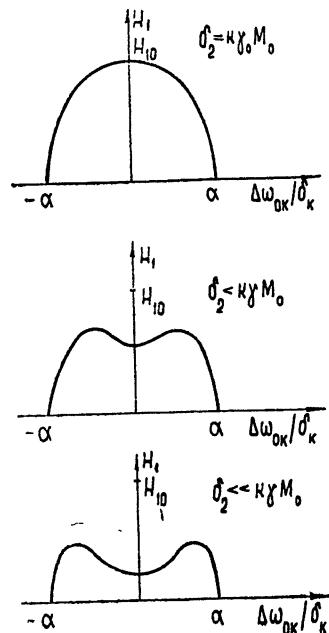


Рис. 2.

$$\text{а) } \delta_2 = K\gamma M_0, \quad \text{б) } \delta_2 < K\gamma M_0,$$

$$\text{в) } \delta_2 \ll K\gamma M_0$$

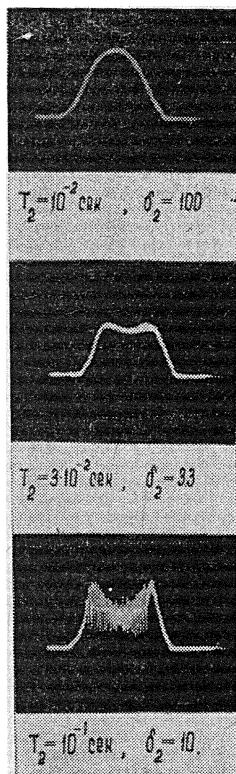


Рис. 3.

при условии  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , справедливом при работе с жидкими образцами. На рисунке введены следующие обозначения

$$H_{10} = \left[ \frac{\delta_1}{\gamma^2} \left( M_0 \frac{\gamma b}{\delta_k} - \frac{K\delta_2\delta_k}{b} \right) \right]^{1/2},$$

$$\alpha = \left[ \frac{M_0 b \gamma}{\delta_2 \delta_k} - 1 \right]^{1/2}.$$

Условия а), б), в) удовлетворяются применением рабочего вещества с необходимым  $T = 1/\delta$ . С ростом  $T$  эллипс  $H_1(\Delta\omega_0 k)$  деформируется в эллипсообразный овал, который, в свою очередь, при  $K\gamma M_0 > \delta_2 + K\delta_2\delta_k/b$  переходит в овал с «талией».

Выяснение вопроса об устойчивости найденного решения—в общем случае трудеемкая задача, однако в частном случае  $\delta_2 \ll K\gamma M_0$  при работе с нулевой расстройкой  $\Delta\omega_0 k = 0$  легко показать, что решение неустойчиво.

На рис. 3 показана экспериментально снятая зависимость  $H_1(\Delta\omega_0 k)$  на спиновом генераторе, работающем в поле  $H_0 \sim 5000$  эрстед [6]. Рабочим веществом служили водные растворы  $\text{CuSO}_4$ . Начиная с  $T_2 \sim 10^{-1}$  сек ( $\delta_2 \sim 10$ ) работа спинового генератора в области, близкой к  $\Delta\omega_0 k = 0$ , становится неустойчивой. Величина  $K\gamma M_0$  в нашем случае  $\sim 45$ . Приведенное рассмотрение показывает, что провал кривой  $H_1(\Delta\omega_0 k)$  вблизи точки  $\Delta\omega_0 k = 0$  и неустойчивость работы спинового генератора могут быть объяснены «радиационным затуханием».

## ЛИТЕРАТУРА

1. А Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
2. Ch Schmelzer, Lectures on theory and design of an alternating-gradient proton-synchrotron, Geneva, 1953.
3. Э Эндрю, Ядерный магнитный резонанс, ИЛ, М., 1957.
4. S Bloom, Journ. Appl. Phys., 28, 800 (1957).
5. И. М. Иевская, Р. М. Умарходжаев, Электричество, № 7, 57 (1965).
6. Р. М. Умарходжаев, Вестник МГУ, № 5, 88 (1964).

Поступила в редакцию  
27 июля 1966 г.

УДК 621.385.64

## К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА МАГНЕТРОНА

*М. И. Кузнецов, Э. Г. Васильев, С. В. Степанов*

В работах [2-4] было показано, что при расчете статического потенциала в междудиэлектродном пространстве магнетрона в предосцилляционном режиме можно предполагать, что облако пространственного заряда имеет двухслойную структуру.

В слое, примыкающем к катоду, состояние пространственного заряда близко к двухпоточному, а в верхнем слое — к потоку Бриллюэна. Слои имеют приблизительно одинаковую толщину, а суммарная толщина облака практически не отличается от той, которую оно имело бы, если бы было полностью бриллюэновским от катода до верхней границы\*. Известно, что такая модель позволяет рассчитать статический потенциал в междуэлектродном пространстве магнетрона с точностью до 2—5%. Однако вопрос о возможности ее использования для расчета электродинамических свойств электронного облака не решен. Для его решения мы рассчитали спектр собственных колебаний магнетрона со сплошным анодом как для двухслойной модели электронного облака, так и для полностью бриллюэновской модели. Расчет был выполнен для квазиплоского магнетрона, что существенно упростило вычисления. Кроме того, для упрощения расчетов предполагалось, что электроны нижнего слоя не взаимодействуют с волнами пространственного заряда в верхнем слое, так как их скорость далека от синхронной. Это дало возможность воспользоваться для расчета частоты собственных колебаний результатами работы [1], в которой получено уравнение для переменного потенциала бегущей волны в бриллюэновском слое, «подвешенном» между катодом и анодом на произвольном расстоянии от катода. При указанных выше предположениях это уравнение имеет следующее решение:

$$V = (A - BS) \left| \sqrt{1 - \frac{1}{S^2}} \right|, \quad (1)$$

где  $S = 2\pi y/\lambda_n - \omega/\omega_H$ ,  $y$  — расстояние точки наблюдения от катода,  $\lambda_n$  — длина волны собственных колебаний облака. Очевидно, что в квазиплоском магнетроне

$$\frac{2\pi(r_k + y_2)}{n} > \lambda_n > \frac{2\pi r_k}{n}.$$

Таким образом, условие  $|S| \ll 1$ , при котором справедливо выражение (1), заведомо выполняется для самых длинноволновых типов колебаний ( $n = 1, 2, 3$ ).

Используя методику работы [1], мы получили дисперсионное уравнение

$$S_1^3 S_2^2 - S_2^3 S_1^2 + \frac{2\pi}{\lambda_n} y_1 S_2^2 = S_1^2 \frac{2\pi}{\lambda_n} (y_2 - y_a), \quad (2)$$

где  $S_1 = 2\pi y_1/\lambda_n - \omega/\omega_H$ ,  $S_2 = 2\pi y_2/\lambda_n - \omega/\omega_H$ ,  $y_a$ ,  $y_2$ ,  $y_1$  — соответственно расстояния от анода, верхней и нижней границ облака до катода. Поскольку  $|S_1| \ll 1$ ,  $|S_2| \ll 1$ ,  $y_1 = y_2/2 \neq 0$ , в уравнении (2) можно отбросить все члены более высокого порядка относительно  $S_1$ ,  $S_2$ , чем второй. Это дает следующее выражение для собственных частот.

$$\omega_n = \frac{n\omega_H y_1}{r_k} \left( \frac{y_a/y_1}{2 + y_a/y_1} \pm j \frac{\sqrt{y_a/y_1 - 2}}{2 + y_a/y_1} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где  $r_k$  — радиус катода. Наличие отрицательного мнимого члена в выражении (3) означает, что в рассматриваемой системе возможно возбуждение автоколебаний на всех частотах  $\omega_n$ .

В системах с подобными свойствами могут иметь место такие автоколебания, при которых происходят частые случайные перескоки с одного типа колебаний на другой. В этом случае спектр колебаний состоит из ряда полос, расположенных около частот  $\text{Re } \omega_n$ . Как известно (см., например, [5]), спектр собственных колебаний пространственного заряда магнетрона имеет именно такой характер.

Для расчета частот  $\omega_n$  удобно привести формулу (3) к следующему виду:

$$\text{Re } \omega_n = n\omega_H \frac{y_a(1 - \sqrt{1 - h^2})(2 - \sqrt{1 - h^2})}{2r_k + y_a(1 - \sqrt{1 - h^2})(2 - \sqrt{1 - h^2})}, \quad (4)$$

где  $h = B_{kp}/B$ .

Для экспериментального определения частот  $\omega_n$  использовался специально изготовленный неразрезной магнетрон с отношением радиусов анода и катода, равным 1,83 ( $r_a = 11 \text{ мм}$ ,  $r_k = 6 \text{ мм}$ ). Конструкция магнетрона была аналогична описанной в [5]. Измерения спектра проводились при помощи измерительного приемника П-5-1. Как

\* Возможность существования такой структуры облака была теоретически установлена в работе [6].

видно из графика (рис. 1), расчетные значения частоты с точностью не хуже 5% совпадают с частотами собственных колебаний, наблюдавшихся в соответствующих режимах. Таким образом, не только распределение потенциала, но и электродинамические свойства электронного облака магнетрона хорошо описываются двухслойной моделью.

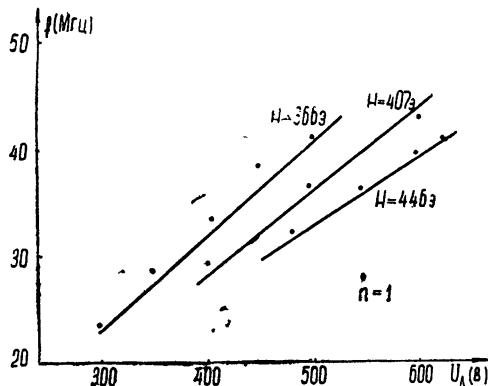


Рис. 1. Сплошными линиями показана зависимость  $f$  (Мгц) от  $U_A$  (в), рассчитанная по формуле (4). Точки соответствуют экспериментальным значениям.

Уравнение (2) позволяет вычислить также собственные частоты колебаний полностью бриллюэновского облака. Для этого следует считать, что  $y_1 = 0$ . Расчеты дают следующее выражение для собственных частот:

$$\omega_n = \omega_H n [\sqrt{1 - h^2} / (1 - \sqrt{1 - h^2})]^{1/2}. \quad (5)$$

Однако это выражение дает разумный порядок величины  $\omega_n$  только в том случае, если граница облака очень близка к аноду ( $h > 0,9$ ). Иными словами, в полностью бриллюэновском облаке, не прижатом слишком близко к аноду, не могут существовать собственные колебания с такими частотами, которые наблюдаются экспериментально. Следовательно, действительное состояние пространственного заряда облака в этих практически наиболее интересных режимах не может быть отражено при помощи модели полностью бриллюэновского облака.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. Банеман, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, 1, ИЛ, М., 1961, стр 310
2. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 6, 1104 (1961).
3. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 6, 1217 (1964)
4. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 167 (1966).
5. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 2, 290 (1960).
6. В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, Доклад на 22 Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
30 ноября 1966 г.

УДК 621.385.042.2

#### О ДОБРОТНОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО РЕЗОНАТОРА НЕРАЗРЕЗНОГО МАГНЕТРОНА

*В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, Ю. А. Яблоков*

В работах [1, 2] было установлено, что верхняя «бриллюэновская» часть электронного облака цилиндрического неразрезного магнетрона является электронным резонатором, собственные колебания которого представляют собой врачающиеся волны пространственного заряда. Этот резонатор играет очень важную роль в процессах, опре-

деляющих распределение заряда, высокий уровень флуктуаций, бомбардировку катода электронами высоких энергий и другие специфические «магнетронные» явления. Поэтому изучение его характеристик является необходимым этапом построения теории магнетрона. В настоящем сообщении излагаются результаты экспериментального исследования зависимости добротности электронного резонатора магнетрона от амплитуды колебаний. Для исследований был изготовлен специальный неразрезной магнетрон, подробно описанный в работе [1] (рис. 1). Анод представляет собой цилиндр радиуса  $r_a = 0,8 \text{ см}$  и длины  $l = 4,2 \text{ см}$ .

Оксидный подогревный катод имеет длину 3 см и радиус  $r_k = 0,3 \text{ см}$ . В анодном цилиндре магнетрона вырезаны два круглых отверстия диаметром 6 мм, в которые

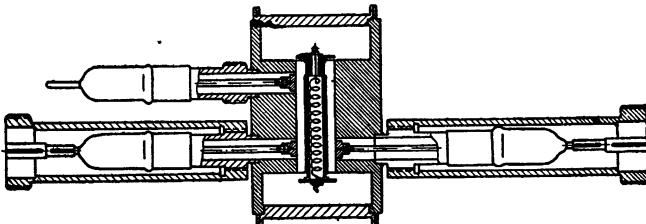


Рис. 1.

помещаются измерительные диски диаметром 4 мм такой формы, что их поверхность совпадает с внутренней поверхностью анодного цилиндра. Измерительные диски имеют коаксиальные выводы, к одному из которых присоединяется генератор типа ГЗ-12, а другой с помощью согласованной линии соединяется со специально сконструированным измерительным супергетеродинным приемником с полосой  $\Pi = 10 \text{ кГц}$ .

Благодаря тому, что для измерения использовались диски, угловое расстояние между которыми равно  $180^\circ$ , «холодная» связь между ними была незначительной (прямое прохождение  $< -40 \text{ дБ}$ ). Для измерения добротности электронного заряда мы измеряли коэффициент передачи высокочастотного напряжения ( $K$ ) между выводами измерительных дисков. Он имеет резонансный характер (рис. 2). Но его величина существенно зависит не только от частоты, но и от амплитуды подаваемого сигнала  $V_{bx}$ . С увеличением амплитуды сигнала происходит уменьшение величины коэффициента передачи и расширение резонансной кривой ( $\Delta F$ ), т. е. имеет место уменьшение добротности электронного резонатора ( $Q_{sp}$ ) с увеличением амплитуды колебаний.

На рис. 3 приведена зависимость добротности электронного резонатора от амплитуды колебаний. На основании [2] наиболее целесообразно измерить амплитуду колебаний резонатора как отношение тангенциальной компоненты электрического поля на границе облака к постоянной составляющей электрического поля в этой же области  $E_\infty/E_0$ . Поскольку добротность является отношением запасенной энергии к рассеиваемой, удобнее строить зависимость добротности  $Q_{sp}$  от квадрата величины отноше-

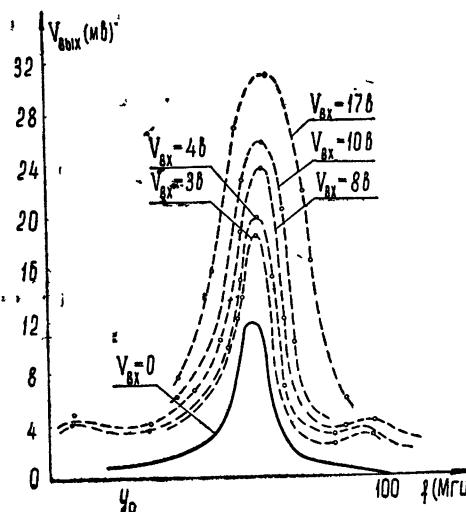


Рис. 2.

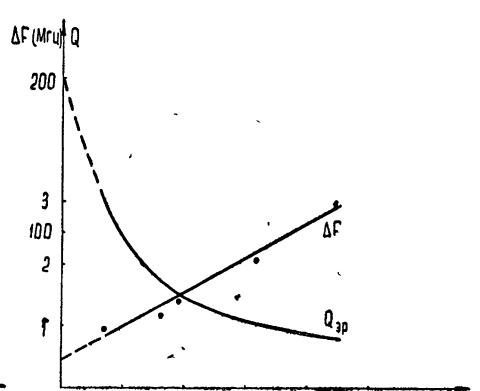


Рис. 3.

ния  $E_{\sim}/E_{\perp}$ . Расчет величин  $E_{\sim}$  и  $E_{\perp}$  по переменному напряжению на входе измерительного приемника, анодному напряжению и напряженности магнитного поля выполнялся в предположении, что верхняя граница облака совпадает с теоретической границей при бриллюэновском состоянии пространственного заряда.

Как видно из рис. 3, график зависимости ширины полосы резонатора от величины  $(E_{\sim}/E_{\perp})^2$  представляет собой прямую линию. Необходимо подчеркнуть, что на этой же прямой находится точка, полученная по измерению спектра выходного сигнала (при отсутствии переменного напряжения) как соотношение между шириной полосы и величиной  $(\bar{E}_{\sim}^2/E_{\perp})$ , где  $\bar{E}_{\sim}^2$  — средний квадрат амплитуды шумового выходного напряжения. Таким образом, зависимость ширины полосы электронного резонатора от амплитуды колебаний линейна вплоть до значений амплитуды, соответствующих собственным флуктуациям этого резонатора.

Экстраполируя указанную зависимость вплоть до нулевой амплитуды, можно оценить ширину полосы электронного резонатора при исчезающей малой амплитуде колебаний. Как видно из рисунка, она отличается от полосы шумов магнетрона не более, чем в 1,5 раза. Таким образом, без существенной ошибки можно считать, что добротность электронного резонатора может быть измерена по ширине спектра шумов линии. Ее зависимость от амплитуды колебаний может быть оценена следующим образом: при изменении амплитуды колебаний от ее шумовой величины до величины, пре-восходящей последнюю в 2 раза, добротность меняется в 2 раза. При этом ширина резонансной характеристики увеличивается линейно с увеличением мощности колебаний

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кузнецов, Ю. А. Яблоков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 9, № 6, 634 (1966).
2. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, № 6, 1104 (1961).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
30 марта 1967 г.

УДК 621.385.001

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЛЕНТОЧНОГО БРИЛЛЮЭНОВСКОГО ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ТРУБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ\*

О. Д. Баранцева, Н. Ф. Купчинов

В работе рассматривается формирование ленточного пучка в случае, когда катод пушки полностью экранирован от магнитного поля.

Поскольку в литературе отсутствует решение задачи о движении электронов ленточного пучка конечной ширины (так как учет краевых эффектов встречается со значительными математическими трудностями), то для упрощения задачи обычно вводят предположение о том, что влиянием пространственного заряда у краев потока (вдоль оси  $x$ , рис. 1) можно пренебречь и считать составляющую напряженности электрического поля  $E_x = 0$ .

В этом случае равновесная полутолщина принимает свое минимальное значение, которое в литературе называется бриллюэновской полутолщиной, и расфокусирующая сила, создаваемая пространственным зарядом, уравновешивается в потоке Бриллюэна силой Лоренца, обусловленной движением электронов поперек магнитного поля [1].

В настоящей работе рассматривается ленточный пучок конечной ширины и определяются траектории движения электронов и изменение формы бриллюэновского потока с учетом действия сил пространственного заряда на краях потока в формирующем магнитном поле (поле по Бриллюэну) [1].

$$B_B^2 = 5,41 \cdot 10^{-7} \frac{I_0}{a \sqrt{U_0}}, \quad (1)$$

где  $I_0$  — ток на единицу ширины пучка;  $U_0$  — ускоряющее напряжение;  $a$  — бриллюэновская полутолщина. Формула (1) записана в практической системе единиц.

\* Работа доложена на 5-ой межвузовской конференции по электронике СВЧ, Саратов, 1966.

Предположим, что скорость движения электронов пучка вдоль оси  $z$  остается постоянной. Это условие выполняется, если пучок движется в достаточно длинной трубе прямоугольного сечения. Тогда составляющую напряженности электрического поля по оси  $z$  можно положить равной нулю. Высокочастотные составляющие напряженности электрического поля при определении деформации не учитываются.

Для исследования деформации применим метод [2], основанный на принципах моделирования источников поля в электролитической ванне. Метод заключается в том, что пучок и канал делятся на равные отрезки плоскостями, перпендикулярными оси  $z$ , совпадающей с направлением движения пучка электронов, в предположении, что в пределах каждого отрезка составляющие напряженности электрического поля  $E_x$  и  $E_y$  можно считать постоянными. В этом случае уравнения движения электронов могут быть приближенно решены в пределах каждого продольного отрезка пучка. С учетом начальных условий при  $t = 0$  ( $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ ,  $y = y_0$  и  $\dot{y} = \dot{y}_0$ ) решение имеет вид

$$\dot{x} - x_0 = \frac{E_y}{B} t + \frac{1}{\eta B} \left( \dot{x}_0 - \frac{E_y}{B} \right) \sin(\eta B t) + \frac{1}{\eta B} \left( \dot{y}_0 + \frac{E_x}{B} \right) [\cos(\eta B t) - 1]; \quad (2)$$

$$y - y_0 = - \frac{E_x}{B} t + \frac{1}{\eta B} \left( \dot{y}_0 + \frac{E_x}{B} \right) \sin(\eta B t) - \frac{1}{\eta B} \left( \dot{x}_0 - \frac{E_y}{B} \right) [\cos(\eta B t) - 1]; \quad (3)$$

$$z - z_0 = \dot{z}_0 t, \quad (4)$$

где  $z$ ,  $x$ ,  $y$  — прямоугольные координаты,  $\eta$  — отношение заряда электрона к его массе,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  — производные от координат по времени  $t$ .

Полагаем, что на входе первого отрезка пучок имеет прямоугольную форму сечения, плотность пространственного заряда одинакова по всему сечению пучка, а начальные поперечные скорости движения электронов определяются из соотношений

$$\dot{x}_0 = E_y / B_B; \quad (5)$$

$$\dot{y}_0 = - E_x / B_B. \quad (6)$$

Начальными входными условиями каждого следующего отрезка являются условия на выходе предыдущего. Тем самым обеспечивается «сшивание» решения на границе раздела двух отрезков. Каждый из отрезков, на которые разделены пучок и канал, моделируется в плоскости  $x_0 y$  в электролитической ванне с токовводящими элементами. Распределение потенциала в каждой из моделируемых областей определяется методом последовательных приближений [3], а составляющие напряженности электрического поля  $E_x$  и  $E_y$  измеряются с помощью двойного зонда. Время, за которое электроны проходят отдельные области, находится из выражения (4). По формулам (2) и (3) рассчитываются смещения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  граничных электронов пучка, позволяющие получить деформацию пучка на выходе каждой моделируемой области.

В качестве примера приводятся результаты исследования деформации пучка, имеющего поперечные размеры  $1,8 \times 0,3 \text{ мм}^2$  и движущегося в трубе прямоугольного сечения с поперечными размерами  $1,96 \times 0,46 \text{ мм}^2$  и длиной  $l = 6 \text{ мм}$  при ускоряющем напряжении пучка  $U_0 = 5000 \text{ в}$ , токе пучка  $I = 0,2 \text{ а}$ , магнитной индукции  $B_B = 0,074 \text{ вб} \cdot \text{м}^{-2}$ .

На рис. 1 показано изменение формы пучка и смещение отдельных граничных электронов пучка при переходе к каждому следующему сечению.

Для сравнения на рис. 1 показано также изменение формы ленточного пучка, движущегося в трубе прямоугольного сечения при наличии однородного магнитного поля

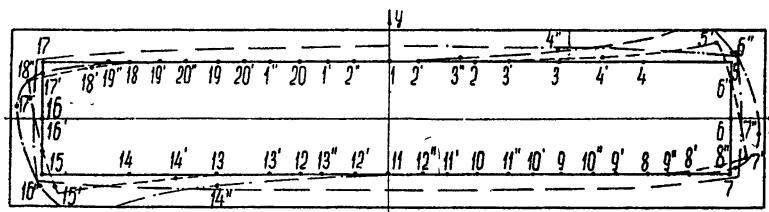


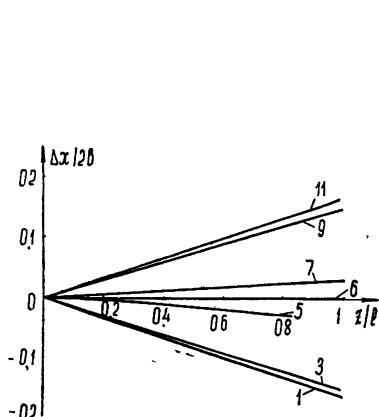
Рис. 1. Деформация ленточного пучка электронов, движущегося в трубе прямоугольного сечения при нарастании поля на входе в трубу на расстояниях

$z=0$ ;  $z=3 \text{ мм}$ ;  $z=6 \text{ мм}$ ; при однородном поле на расстоянии  $z=3 \text{ мм}$ . Положение электронов на расстояниях  $z=0 \text{ мм}, 1, 2, 3, \dots, 20$ ;  $z=3 \text{ мм}-1', 2', 3', \dots, 20'$ ;  $z=6 \text{ мм}-1'', 2'', 3'', \dots, 20''$ .

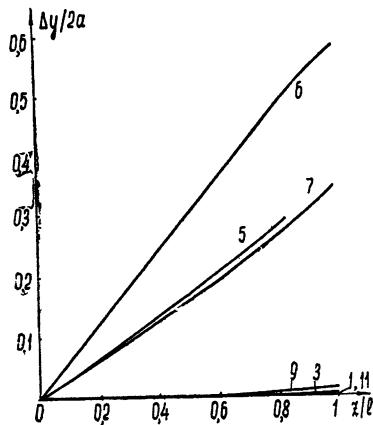
(в этом случае начальные поперечные скорости движения электронов на входе в трубу  $x_0$  и  $y_0$  принимаются равными нулю).

Как видно из рис. 1, поворот пучка в магнитном поле происходит быстрее в том случае, когда начальные поперечные скорости движения электронов на входе в трубу отличны от нуля, т. е. в случае бриллюэновского потока. Амплитуда же пульсаций поверхности у бриллюэновского потока меньше; при этом амплитуда пульсаций бриллюэновского потока увеличивается при движении пучка в трубе, так как расфокусирующая сила, созданная пространственным зарядом, в прямоугольном пучке (в отличие от пучка бесконечно широкого) перестает уравновешиваться силой Лоренца, обусловленной движением электронов поперек магнитного поля.

На рис. 2а и 2б приведены траектории движения граничных электронов пучка 1, 3, 5—7, 9, 11 в проекциях на плоскости  $xOz$  и  $yOz$  ( $2b$  — ширина пучка).



а)



б)

Рис. 2. Проекции траекторий движения граничных электронов пучка 1, 3, 5—7, 9, 11:

а) на плоскость  $xOz$ , б) на плоскость  $yOz$ .

Погрешность метода измерений потенциала в электролитической ванне составляет 5%.

Проведенные исследования дают возможность определять траектории движения электронов ленточного пучка конечной ширины, а также количественные характеристики процесса оседания электронов пучка на стенах трубы прямоугольного сечения при наличии бриллюэновского магнитного поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Brillouin, Phys. Rev., 67, № 7—8, 260 (1945).
2. О. Д. Баранцева, Н. Ф. Кунчинов, Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, вып. 7, 97 (1966).
3. В. С. Лукошков, Электроника, вып. 7 и 8 (1958).

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию  
24 октября 1966 г.

УДК 621.385.11

#### К РАСЧЕТУ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

*M. N. Куликов*

Уравнения, определяющие статические параметры прямолинейных бриллюэновских электронных потоков, движущихся в скрещенных полях, сформулированы в [1]. Полученная система уравнений, однако, не имеет точного аналитического решения и может быть решена только численно. В настоящей работе приведены результаты приближенного аналитического решения этой задачи.

Анализ исходной системы уравнений, приведенной в [1], показывает, что ее решение, удовлетворяющее физическому смыслу поставленной задачи (границы электронного потока не должны выходить за пределы окружающих его электродов), возможно не при всех значениях исходных параметров, характеризующих режим работы прибора. В частности, такое решение имеет место только при значениях линейного нормированного тока  $i < 0.67$  (условия нормировки приведены ниже). Это позволяет искать неизвестные статические параметры луча в виде ряда по степеням  $i$ . С точностью до членов выше второго порядка малости по  $i$  расчеты приводят к следующим выражениям для толщины луча, положения его центра, средней скорости электронов и относительного сдвига скоростей в луче:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{y_a} &= \frac{i}{\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi} - 1 - \frac{2\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi^2} \right) \frac{i^2}{\varphi^2}, \\ \frac{y_0}{y_a} &= \left( \frac{1}{2} \varphi + \frac{\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi} \right) + \left( \frac{1}{4} \varphi + \frac{\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi^2} \frac{\varphi_a}{\varphi} \right) \frac{i}{\varphi} + \\ &+ \left[ \frac{1}{4} \frac{\varphi_a}{\varphi} - \frac{1}{8} + \frac{\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi^2} \frac{\varphi_a}{\varphi} \left( \frac{3}{2} \frac{1}{\varphi} - 1 - \frac{3\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi} \right) \right] \frac{i^2}{\varphi^2}, \quad (1) \\ \frac{v_{e0}}{\omega_c y_a} &= \varphi - \frac{1}{2} \left( 1 - \varphi - \frac{2\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi} \right) \frac{i}{\varphi} + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1}{\varphi} - \frac{\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi} + \frac{2\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi^2} \frac{\varphi_a}{\varphi} \right) \frac{i^2}{\varphi^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{1}{2\varphi} \frac{i}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi} \left( \frac{1}{\varphi} - 1 - \frac{\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi^2} \right) \frac{i^2}{\varphi^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $y_2$  и  $y_1$  — расстояние от отрицательного электрода до верхней и нижней границ луча соответственно;  $y_0$  — расстояние от отрицательного электрода до центра луча;  $y_a$  — расстояние от отрицательного электрода до анода (замедляющей системы);  $v_{e0}$  — скорость электронов на оси луча;  $\alpha_0 = (v_{e2} - v_{e1})/(v_{e2} + v_{e1})$  — относительный сдвиг скоростей в луче,  $v_{e2}$  и  $v_{e1}$  — скорости электронов на верхней и нижней границах луча соответственно;  $i = I/\epsilon_0 \omega_c^2 B_0 y_a^2$  — нормированный линейный ток луча;  $I$  — ток на единицу ширины луча (в направлении магнитного поля),  $B_0$  — магнитная индукция внешнего поля,  $\omega_c = \eta B_0$  — циклотронная частота;  $\varphi_a = V_a/\omega_c B_0 y_a^2$  — нормированный потенциал анода,  $V_a$  — разность потенциалов между анодом и катодом;  $\varphi_{0\text{ э}} = -V_{0\text{ э}}/\omega_c B_0 y_a^2$  — нормированный потенциал отрицательного электрода,  $V_{0\text{ э}}$  — разность потенциалов между отрицательным электродом и катодом (величина  $V_{0\text{ э}}$  предполагается отрицательной);  $\varphi = \varphi_a + \varphi_{0\text{ э}}$  — нормированная разность потенциалов между анодом и отрицательным электродом.

Используемые нормированные параметры связаны с критическим значением магнитной индукции  $B_{kp} = (2V_a/\eta)^{1/2} (1 + |V_{0\text{ э}}|/V_a)/y_a$  соотношением

$$\frac{B_0^2}{B_{kp}^2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varphi_{0\text{ э}}}{\varphi} \right) \frac{1}{\varphi} \quad (2)$$

так, что обычному режиму работы приборов при  $B_0 > B_{kp}$  соответствует  $\varphi < 0.5$ .

Сравнение результатов расчета по приближенным соотношениям (1) и данных точного численного решения исходной системы уравнений показывает, что в приближении линейной зависимости от тока луча соотношения (1) дают достаточно хорошее совпадение (расхождение меньше 10%) с результатами точного расчета вплоть до значения толщины электронного потока, равной расстоянию от нижней границы луча до плоскости нулевого потенциала. С учетом квадратичной зависимости от тока соотношения (1) дают значения параметров, отличающиеся (для тех же предельных значений толщины луча) от точных значений меньше чем на 2—3%.

Полученные соотношения могут быть использованы для аналитического расчета условий согласования электронного потока на выходе из электронной пушки и на входе в область взаимодействия, необходимого для получения прямолинейного движения электронов, а также для расчета влияния изменения статических параметров электронного потока (при изменении режима работы) на высокочастотные характеристики СВЧ лучевых приборов со скрещенными полями (усиление в линейном режиме, стартовые условия, электронное смещение частоты и т. д.).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, перев с англ.  
под ред. М. М. Федорова, 1961, стр. 127.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию  
13 октября 1966 г.,  
после переработки  
29 марта 1967 г.

УДК 621.385.61

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ С СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМИ СВЧ ПОЛЯМИ

С. Г. Афанасов, М. И. Калашников, С. Г. Петров, О. В. Терехов

Как известно, системы с динамическим управлением электронным потоком и дискретным взаимодействием электронного потока и СВЧ поля характеризуются определенными закономерностями в распределении статического и СВЧ полей, которые реализуются с помощью сетчатых электродов или диафрагм, устанавливаемых на пути следования потока.

В настоящей работе рассмотрен один из возможных способов формирования подобной структуры поля путем выбора определенной формы эмиттера и коллектора [1].

Ярко выраженные узкие области сильного СВЧ поля, разделенные пространством, где поле сравнительно невелико и где происходит преобразование скоростной модуляции потока в модуляцию по плотности, могут быть созданы, если эмиттер и коллектор имеют, например, форму острый, направленных навстречу друг другу и образующих

емкостную часть СВЧ резонатора (рис. 1). Действительно, при малом радиусе закругления эмиттера и коллектора (по сравнению с расстоянием между ними) как статические, так и СВЧ поля локализуются непосредственно вблизи электродов и быстро спадают, становясь весьма малыми уже на расстояниях порядка десятков  $\rho$  ( $\rho$  — радиус кривизны вершины электродов). Большая часть пространства между эмиттером и коллектором характеризуется сравнительно малой напряженностью полей и вполне может выполнять функции, аналогичные пространству дрейфа в пролетном кластроне. Для изучения распределения

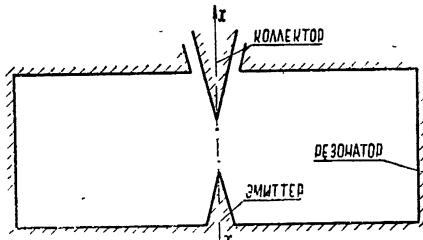


Рис. 1.

потенциала в системе двух встречных остряй можно, например, рассматривать систему двух встречных гиперболоидов.

Выражение для потенциала на оси  $x$  в этом случае записывается в виде.

$$u(x) = \frac{V}{2 \ln 2R/\rho_k \sqrt{m}} \ln \frac{2R}{\rho_k m} \frac{m + 2x/\rho_k}{2R/\rho_k + 1 - 2x/\rho_k}, \quad (1)$$

$$m = \rho_e/\rho_k, \quad R/\rho_k \gg m > 1,$$

где  $R$  — расстояние между электродами,  $V$  — потенциал коллектора. Здесь для общности не предполагается равенство радиусов закругления эмиттера  $\rho_e$  и коллектора  $\rho_k$ . График распределения потенциала, соответствующего этому выражению, приведен на рис. 2 (кривая а). Как видно из рисунка, на кривой, характеризующей распределение потенциала, можно выделить три области: ОА — область сильного поля вблизи эмиттера, ВС — область сильного поля вблизи коллектора, АВ — область сравнительно слабого поля.

Такая структура поля напоминает распределение, существующее в пролетном кластроне, причем область ОА соответствует зазору первого резонатора кластрона (область модуляции по скорости), область АВ соответствует пространству дрейфа, а область ВС — зазору выходного резонатора (область отдачи энергии).

Следовательно, в такой системе можно ожидать существования процессов, подобных процессам, протекающим в клистронах. В отличие от клистронов, в описываемой системе, во-первых, все три области совмещены в одном резонаторе, а, во-вторых, в областях сильного СВЧ поля на электронный поток действует и статическое ускоряющее поле.

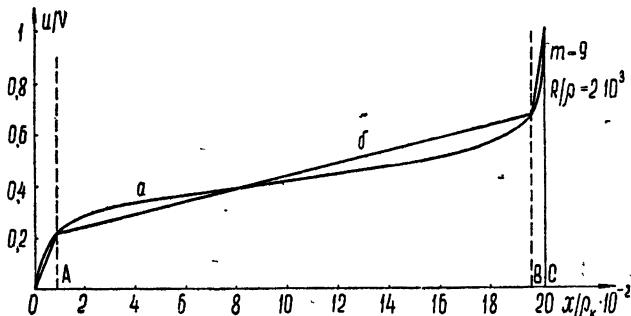


Рис. 2.

Для оценки возможностей системы заменим реальное распределение потенциала ломаной линией (рис. 2, кривая б) В этом случае легко показать, что эффективное взаимодействие аксиального электронного потока с СВЧ полем наступает при выполнении следующего фазового соотношения\*:

$$\frac{1}{2} \theta_3 + \theta_2 - \Phi + \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\gamma} = 2\pi \left( n + \frac{3}{4} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где

$$\Phi = \operatorname{arctg} \theta_2 \frac{1 - \sigma_1 \theta_1 \xi \sin(\theta_1/2) - \theta_2^{-1} \sin \theta_2}{1 + \sigma_1 \theta_1 \xi \theta_2 \cos(\theta_1/2) - \cos \theta_2};$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$  — углы пролета в областях ОА, АВ, ВС соответственно;  $E_1, E_2, E_3$  — напряженности поля в соответствующих областях;

$$\sigma_1 = E_1/E_2; \quad \sigma_2 = E_2/E_3; \quad \xi = \sin(\theta_1/2)/(\theta_1/2);$$

$$\gamma = \left[ \sigma_2 (\theta_2 + \sigma_1 \theta_1) + \frac{1}{2} \theta_3 \right] \sin \frac{1}{2} \theta_3; \quad \delta = \sin(\theta_3/2) - \frac{1}{2} \theta_3 \cos(\theta_3/2).$$

Средняя мощность, отдаваемая электронами за период, равна

$$\{P_e\}_T = \frac{4I_0 J_1(\chi) \tilde{u}^{BC} (\delta^2 + \gamma^2)^{1/2}}{\theta_3^2 + 2\theta_3 \sigma_2 (\theta_2 + \sigma_1 \theta_1)}, \quad (3)$$

где  $J_1(\chi)$  — функция Бесселя первого порядка,

$$\chi = \frac{\alpha}{\theta_2 + \sigma_1 \theta_1} \left[ \left( 1 + \sigma_1 \theta_1 \xi \theta_2 \cos \frac{\theta_1}{2} - \cos \theta_2 \right)^2 + \right. \\ \left. + \theta_2^2 \left( 1 - \sigma_1 \theta_1 \xi \sin \frac{\theta_1}{2} - \theta_2^{-1} \sin \theta_2 \right)^2 \right]^{1/2}$$

— параметр группировки,  $\tilde{u}^{BC}$  — амплитуда переменного поля в области ВС,  $\alpha$  — коэффициент использования напряжения. Электронный коэффициент полезного действия

$$\eta_e = k \frac{4\alpha J_1(\chi) (\delta^2 + \gamma^2)^{1/2}}{\theta_3^2 + 2\theta_3 \sigma_2 (\theta_2 + \sigma_1 \theta_1)}, \quad (4)$$

где  $k$  — коэффициент, показывающий, какая доля потенциала от общего приложенного напряжения падает в области коллектора. При  $\theta_3 \rightarrow 0$   $\eta_e \approx k \alpha J_1(\chi)$ .

\* Пространственный заряд не учитывается.

Следует отметить, что наличие ускоряющего статического поля в области отдачи энергии может существенно увеличить КПД. Как показывают эксперименты, описанные в работах [2, 3], ускоряющее статическое поле между сетками выходного резонатора увеличивает КПД кластрона до 60–70%, что согласуется с выводами нелинейной теории кластрона. Это показывает, что строгий анализ процессов в описываемой системе может дать высокое значение КПД.

Для оценки предельной рабочей частоты можно в качестве эмиттера выбрать автоэлектронный катод, радиус кривизны которого обычно порядка  $10^{-4}$  см (рассматриваемая система, по-видимому, легко реализуется в случае применения автоэлектронного эмиттера). При  $\rho = 10^{-4}$  см длина зоны модуляции ОА =  $10\rho$  [4], величина приложенного напряжения  $V = 10^4 \div 2 \cdot 10^4$  в и время пролета в области модуляции порядка  $10^{-13}$  сек. Если  $\xi = 0,9$ , то предельная частота  $f \approx 10^{12}$  Гц. При этом длина области дрейфа равна  $10^{-2}$  см (для нулевой зоны).

В качестве эмиттера можно использовать конический полый катод с  $\rho$  порядка 0,1–0,5 мм. При этом область дрейфа в зависимости от рабочей частоты и приложенного напряжения увеличивается до нескольких десятков миллиметров. Так при  $\rho = 0,1$  мм и  $V = 3$  рабочей частоте  $f = 10^9$  Гц соответствует область дрейфа порядка 25 мм.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Авторское свидетельство № В1405.
2. Rowe Joseph, Proc. IEEE, 52, № 3, 328 (1964).
3. Nefni Ibrahim, Proc. IEEE, 52, № 1, 102 (1964).
4. J. R. Fontana, H. J. Shaw, Communication and Electronics, № 59 (1962).

Германский государственный университет

Поступила в редакцию  
12 января 1967 г.

УДК 536.376

## О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛЯ СУПЕРЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

Ю. Б. Конев

В некоторых задачах квантовой радиофизики представляют интерес корреляционные свойства излучения суперлюминесценции, распространяющегося в противоположных направлениях от среды с инверсной заселенностью. В случае поля теплового излучения, корреляционные свойства которого хорошо известны\*, этот вопрос не возникает: если оптическая толщина вещества значительно меньше линейных размеров среды, то поле в данной точке обусловлено только теми излучателями, которые находятся в слое толщиной порядка оптической толщины вещества вблизи участков поверхности, которые видны из точки наблюдения. Поэтому тепловое излучение, распространяющееся в противоположных направлениях от среды, некоррелировано. В случае активной среды ответ на этот вопрос не очевиден, так как спектральная интенсивность поля  $(E(r_1) E^*(r_2))_\omega$  возрастает с увеличением линейных размеров среды (чертой сверху обозначено статистическое усреднение).

Используя обобщение флукутационно-диссиликционной теоремы на случай стационарных неравновесных систем [2], запишем спектральную интенсивность сторонних токов в изотропной среде:

$$\overline{(j(r_1) j^*(r_2))_\omega} = B(\omega) \delta(r_1 - r_2). \quad (1)$$

Если активные частицы можно считать двухуровневыми системами,

$$B(\omega) = \frac{\hbar}{\pi} \frac{n_2}{n_2 - n_1} \omega^2 |\chi''(\omega)|. \quad (2)$$

Здесь  $\chi''(\omega)$  — мнимая часть восприимчивости на частоте  $\omega$ ;  $n_1$ ,  $n_2$  — населенности уровней.

Пользуясь теоремой взаимности, запишем спектральную интенсивность поля следующим образом [1]:

\* Корреляционные свойства поля теплового излучения детально рассмотрены в монографии Левина и Рытова [1]. Там же имеются многочисленные ссылки на литературу.

$$\overline{(E(r_1)E^*(r_2))\omega} = W(\omega, r_1, r_2) = B(\omega) \int d\rho G(\omega, r_1, \rho) G^*(\omega, r_2, \rho), \quad (3)$$

$G(\omega, r, \rho)$  — поле, которое создает в точке  $\rho$  точечный диполь единичной интенсивности частоты  $\omega$ , помещенный в точку  $r$ . Интегрирование производится по объему активной среды.

Будем считать, что активное вещество находится внутри стержня длины  $2d$  и радиуса  $a$ . Поместим начало координат в центр стержня и направим ось  $z$  вдоль его оси. Предположим, что отражением от границ стержня можно пренебречь, а усиление и набег фазы на длине  $a$ , обусловленные активными частицами, малы, т. е.  $k|x(\omega)|a \ll 1$ . Тогда в приближении геометрической оптики для точек внутри цилиндра радиуса  $a$

$$G(\omega, r, \rho) = \frac{ik}{c} \exp(2\pi ikx | \pm d - \zeta |) \frac{\exp(ik|r - \rho|)}{|r - \rho|}, \quad (4)$$

где  $r = (x, y, z)$ ;  $\rho = (\xi, \eta, \zeta)$ ;  $k = \omega/c$ ; знак «+» соответствует  $z > d$ , знак «-» соответствует  $z < d$ .

Считая напряженность поля узкополосным гауссовским случайным процессом, с помощью функции корреляции напряженности

$$\psi_E(\tau, r_1, r_2) = 2\operatorname{Re} \left\{ \exp(i\omega_0\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega\tau) W(\omega + \omega_0, r_1, r_2) \right\} \quad (5)$$

получим функцию корреляции интенсивности  $\tilde{\psi}_{E^2} = \tilde{\psi}_E^2$  (волной сверху обозначено усреднение по периоду и длине волны высокочастотных колебаний).

Определяя спектральную интенсивность поля в точках на оси  $z_1 = h_1$ ,  $z_2 = -h_2$ ,  $h_{1,2} \gg d$ , заметим, что подынтегральное выражение в (3) быстро осциллирует по координате вдоль оси цилиндра, а усиление в активной среде приводит к появлению в (3) множителя, не зависящего от точки интегрирования и равного коэффициенту усиления по напряженности на частоте  $\omega$  на длине  $2d$ . Вследствие этого основной вклад в  $W(\omega, h_1, -h_2)$  вносят слои толщиной порядка длины волны вблизи торцов. Воспользовавшись указанным обстоятельством, получим  $W(\omega, h_1, -h_2)$  с помощью интегрирования по частям с точностью до членов порядка  $1/k_0 d \ll 1$ , а интеграл обращения в (5) вычислим по методу Лапласа, предполагая большим коэффициент усиления на длине цилиндра. При этом во всех функциях  $\omega$ , плавных по сравнению с форм-фактором линии излучения, положим  $\omega = \omega_0$ .

В результате получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{E^2}(\tau, h_1, -h_2) = & \left( \frac{\hbar}{(2\pi)^{3/2}} \frac{n_3}{n_2 - n_1} \frac{k_0^2 a^2}{h_1 h_2} \frac{\beta \exp \beta}{d \sqrt{\beta |\gamma'_0|}} \right)^2 \times \\ & \times \left\{ \left( \frac{\sin x_1}{x_1} \right)^2 \exp \left( -\frac{t_1^2}{\beta |\gamma'_0|} \right) + \left( \frac{\sin x_2}{x_2} \right)^2 \exp \left( -\frac{t_2^2}{\beta |\gamma'_0|} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\exp \beta = \exp(4\pi k_0 |x''(\omega_0)|d)$  — коэффициент усиления по напряженности на длине  $2d$  на частоте перехода  $\omega_0$ ;  $|\gamma'_0| = -(d^2 \gamma / d\omega^2)|_{\omega=\omega_0}$ ;  $\gamma(\omega)$  — форм-фактор линии;  $\gamma(0)=1$ ;  $x_1 = k_0 a^2 (h_1 - h_2 + 2d) / h_1 h_2$ ;  $x_2 = k_0 a^2 (h_1 - h_2 - 2d) / h_1 h_2$ ;  $t_1 = \tau + (h_1 - h_2 + 2d/c)$ ;  $t_2 = \tau + (h_1 - h_2 - 2d/c)$ .

Вычисление среднего значения интенсивности в точках на оси при тех же предположениях дает

$$\bar{E}^2(h) = \frac{\hbar}{2\sqrt{\pi}} \frac{n_2}{n_2 - n_1} k_0^3 \frac{a^2}{h^2} \frac{\exp(2\beta)}{\sqrt{\beta |\gamma'_0|}}. \quad (7)$$

Найдем коэффициент корреляции интенсивности:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\psi}_{E^2}(\tau, h_1, -h_2)}{\bar{E}^2(h_1) \bar{E}^2(-h_2)} = & \left( \frac{\beta}{\pi \sqrt{2}} \frac{e^{-\beta}}{k_0 d} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\sin x_1}{x_1} \right)^2 \exp \left( -\frac{t_1^2}{\beta |\gamma'_0|} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\sin x_2}{x_2} \right)^2 \exp \left( -\frac{t_2^2}{\beta |\gamma'_0|} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как указано выше, основной вклад в корреляцию интенсивности излучения суперлюминесценции, распространяющегося в противоположных направлениях от активной среды, обусловлен излучением слоев активного вещества толщиной порядка длины волны вблизи торцов. Так как интенсивность излучения обусловлена всем объемом активной среды (с учетом усиления в ней), коэффициент корреляции (8) оказывается малым.

Автор благодарит Ф. В. Бункина за обсуждение результатов и С. М. Рытова за любезно предоставленную возможность воспользоваться рукописью книги, еще не вышедшей из печати.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флюктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
2. Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 496 (1961).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
16 февраля 1967 г.