

СОДЕРЖАНИЕ

Неймарк Ю. И., Фишман Л. З. Квазилинейные дифференциальные уравнения с запаздываниями, зависящими от времени и искомой функции	1479
Леонов Н. Н. Динамика одноканальных экстремальных систем пропорционального и релейно-пропорционального типов с инерционными объектами	1489
Беленький Я. Е. Качественная теория генератора пилообразного напряжения на $prp-prp$ транзисторах	1501
Шильман С. В. Анализ чувствительности линейных динамических систем при конечных вариациях параметров	1510
Кирьянов К. Г. Исследование систем по зависимости условного среднего от параметров	1523
Марченко Ю. И. Взаимная synchronization автоколебательных систем с учетом запаздывания сил связи	1533
Алексеев А. С., Минчук Ф. Ф. Аналитическое исследование оптимального движения кусочно-линейной системы методом точечных преобразований и неопределенных множителей Лагранжа	1540
Сабаев Е. Ф. Уравнения с отклоняющимся аргументом и устойчивость кипящих каналов	1551
Горохов В. А. Об устойчивости движения железнодорожного вагона	1563
Эйнгорин М. Я., Эйнгорина Т. Н. Некоторые вопросы связи теории запоминающих устройств с многократным совпадением сигналов с теорией латинских гиперквадратов I	1569
Эйнгорин М. Я., Эйнгорина Т. Н. Некоторые вопросы связи теории запоминающих устройств с многократным совпадением сигналов с теорией латинских гиперквадратов II	1576
Эйнгорин М. Я., Эйнгорина Т. Н. К вопросу о наибольшем избирающем отношении в запоминающей или дешифрующей матрице	1596
Гребенников В. Н. Минимальные контактные схемы, метод их синтеза и оценки числа контактов	1599
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Брусин В. А. Вывод некоторых результатов В. А. Якубовича при помощи метода В. М. Попова	1612
Бланк А. М., Гильман Г. А. О разделении регулярных событий в источниках . .	1614
Улитовский В. А. Влияние технологического разброса параметров сердечников на температурные характеристики магнитного запоминающего устройства	1616
Самойлов Л. К., Мельник Г. С. Некоторые вопросы построения регистров без сдвига информации	1618

УДК 5179

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ И ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

Ю. И. Неймарк, Л. З. Фишман

Показывается, что исследование системы квазилинейных дифференциальных уравнений с переменными запаздываниями может быть сведено к исследованию некоторой вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В настоящей работе результаты предыдущей работы [1] авторов о соответствии в целом решений квазилинейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями с решениями некоторой вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений обобщаются на квазилинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от искомой функции и времени вида

$$\dot{x} = A_0 x + A_1 x(t - \tau_1) + \dots + A_m x(t - \tau_m) + \\ + \mu f(t, x(t), x(t - \Theta_1(x, t)), \dots, x(t - \Theta_k(x, t))), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор, A_0, A_1, \dots, A_m — постоянные матрицы n -го порядка, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < 2\pi$ — постоянные запаздывания, $\Theta_1(x, t), \dots, \Theta_k(x, t)$ — переменные запаздывания, зависящие от x и t , μ — малый параметр. Функция $f(t, u, u_1, \dots, u_k)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по аргументам u, u_1, \dots, u_k и непрерывной и периодической с периодом 2π по переменной t . Принимается, что переменные запаздывания $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ неотрицательные периодические по t с периодом 2π , дифференцируемые (удовлетворяющие условию Липшица) по x , и что при $t \geq 0$ и всех x

$$\Theta_i(x, t) < 2\pi \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (2)$$

Ради простоты последующее рассмотрение ограничено частным случаем, когда $A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0$. Соответствующее обобщение может быть получено так же, как и в случае постоянных запаздываний [1]. В заключение работы приведены примеры.

1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Система уравнений (1) при $A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0$ для значений времени $t \geq t_0 \geq 0$ может быть представлена в следующей эквивалентной интегральной форме:

$$x(t) = \exp[A_0(t - t_0)] x(t_0) + \\ + \mu \int_{t_0}^t \exp[A_0(t - s)] f(s, x(s), x(s - \Theta_1(x(s), s)), \dots, x(s - \Theta_k(x(s), s))) ds. \quad (3)$$

Исходя из интегрального уравнения (3), можно доказать существование единственного непрерывного решения $x(t)$, совпадающего с заданной функцией при $t_0 - 2\pi \leq t \leq t_0$. В силу этого фазовое пространство Φ системы уравнений (1) можно определить как пространство непрерывных функций $\varphi(\xi)$, определенных на промежутке $[0, 2\pi]$, и моментов времени t_0 .

Доказательство. Всякое непрерывное решение $x(t)$, совпадающее с $\varphi(t - t_0 + 2\pi)$ при $t_0 - 2\pi \leq t \leq t_0$, для $t \geq t_0$ дифференцируемое. Поэтому можно предположить, что искомое решение находится среди непрерывных и удовлетворяющих при $t \geq t_0$ условию Липшица функций $x(t)$, совпадающих с некоторой заданной функцией при $t_0 - 2\pi \leq t \leq t_0$. Правая часть уравнения (3) определяет на этом множестве функций C_L некоторое отображение

$$\bar{x}(t) = \exp[A_0(t - t_0)]x(t_0) + \mu \int_{t_0}^t \exp[A_0(t - s)]f(s, x(s), \dots, x(s - \Theta_k(x, s)))ds, \quad (4)$$

преобразующее функцию $x(s)$, заданную на промежутке $[t_0 - 2\pi, t_0 + \tau]$ ($0 < \tau < 2\pi$), в функцию $\bar{x}(s)$, определенную на том же промежутке.

Пусть функция $x(s)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L , тогда

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)\| &\leq \|x(t_0)\| \|\exp[A_0(t_2 - t_0)] - \exp[A_0(t_1 - t_0)]\| + \\ &+ |\mu| \left\| \int_{t_1}^{t_2} \exp[A_0(t - s)]f(s, x(s), \dots, x(s - \Theta_k(x, s)))ds \right\| \leqslant \quad (5) \\ &\leq K_1 |t_2 - t_1| + |\mu| K_2(L) |t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

где K_1 — некоторая константа, а K_2 — постоянная, зависящая от L . Пусть L и μ выбраны так, что при* $|\mu| \leq \mu$

$$K_1 + |\mu| K_2(L) \leq L. \quad (6)$$

Тогда отображение (4), согласно (5), переводит множество C_L функций $x(s)$ в себя.

Функции f и запаздывания Θ_i предполагаются удовлетворяющими условию Липшица, поэтому отображение (4) в C_L при достаточно малых μ сжимающее, если в качестве нормы в множестве C_L принять

$$\|x(s)\|_{C_L} = \max_{t_0 < s < t_0 + \tau} \|x(s)\|. \quad (7)$$

В самом деле, из (4) следует, что

$$\|\bar{x}_2(t) - \bar{x}_1(t)\| \leq |\mu| \tau \max_{0 < s < \tau} \{ \|e^{A_0 s}\| (K_3 L + K_4) \|x_2(s) - x_1(s)\| \}$$

и, следовательно, при $|\mu| \leq \bar{\mu} \leq \bar{\mu}$ (или $|\mu| \leq \bar{\mu}$, но достаточно малых τ)

$$\|\bar{x}_2(s) - \bar{x}_1(s)\|_{C_L} \leq a |\mu| \|x_2(s) - x_1(s)\|_{C_L}, \quad (8)$$

где $0 < a |\mu| < 1$. Из сжимаемости отображения (4) и полноты в метрике (7) множества функций C_L вытекает требуемое утверждение о существовании и единственности решения уравнений (1).

* Заметим, что константа Липшица L при этом может быть выбрана за счет достаточной малости μ сколь угодно большой.

Итерируя преобразование (4), можно найти последовательные приближения решения уравнений (1). Если в качестве начального приближения взять функцию $x_0(t)$, совпадающую с заданной при $t_0 - 2\pi \leq t \leq t_0$ и равную $\exp[A_0(t-t_0)]x(t_0)$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, то следующее приближение $x_1(t)$ будет

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \exp[A_0(t-t_0)]x(t_0) + \\ & + \mu \int_{t_0}^t \exp[A_0(t-s)]f(s, x_0(s), \dots, x_0(s-\Theta_k(x_0, s)))ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как коэффициент сжатия q , согласно (8), не превосходит $a|\mu|$, то для ошибки приближения может быть найдена следующая оценка:

$$\|x(t) - x_1(t)\|_{C_L} \leq \frac{q}{1-q} \|x_1(t) - x_0(t)\|_{C_L} \leq M\mu^2, \quad (10)$$

где M — некоторая постоянная.

Обозначим через $T_{2\pi}$ точечное отображение, которое каждой точке $M(\varphi(\xi), t_0)$ ($0 \leq \xi \leq 2\pi$) фазового пространства Φ ставит в соответствие точку $\bar{M}(\varphi(\xi), t_0)$, в которую переходит точка M согласно уравнениям (1) за время 2π .

Точечное отображение $T_{2\pi}$, согласно изложенному, вполне непрерывно.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Возьмем следующую вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздываний:

$$\begin{aligned} \dot{y} = & A_0 y + \mu f(t, y(t), \exp[-A_0\Theta_1(y, t)]y(t), \dots \\ & \dots, \exp[-A_0\Theta_k(y, t)]y(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Точечное отображение $T'_{2\pi}$, соответствующее сдвигу по времени точек $(n+1)$ -мерного фазового пространства Φ' этой системы на 2π , может быть расширено на пространство Φ . Именно, определим расширение этого отображения, которое обозначим через $\tilde{T}'_{2\pi}$ как точечное отображение, которое точке $M(\varphi(\xi), t_0)$ фазового пространства Φ ставит в соответствие точку $M(x(t_0 + \xi), t_0)$, где $x(t)$ — решение уравнений (11), обращающееся в $\varphi(2\pi)$ при $t = t_0$. Так же, как и в случае постоянных запаздываний, рассмотренном в работе [1], в шаре $S(\|M\| < K)$, где K — любое фиксированное ограниченное положительное число, и соответственно в компактном множестве $T_{2\pi}S$, имеют место при достаточно малых μ и некоторых постоянных K_1 и K_2 следующие оценки:

$$\|T_{2\pi}M - (\tilde{T}'_{2\pi})_{\mu=0}M\| < |\mu|K_1(M \subset S), \quad (12)$$

$$\|T_{2\pi}M - \tilde{T}'_{2\pi}M\| < \mu^2K_2(M \subset T_{2\pi}S). \quad (13)$$

Справедливость этих оценок легко проверяется, если воспользоваться приближенным решением (9) и соответствующей оценкой (10) и аналогичным приближенным решением вспомогательного дифференциального уравнения (11).

$$y_1(t) = \exp [A_0(t - t_0)] y(t_0) + \mu \int_{t_0}^t \exp [A_0(t - s)] \times \quad (14)$$

$\times f(s, \exp [A_0(s - t_0)] y(t_0), \dots, [A_0(s - \Theta_k(\exp [A_0(s - t_0)] y(t_0), s))]) ds$,
отличающимся от точного решения на величину порядка μ^2 .

3. О ПРИБЛИЖЕННОМ КАЧЕСТВЕННОМ ОПИСАНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ РЕШЕНИЯМИ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЙ

Допустим, что вспомогательное дифференциальное уравнение (11) имеет устойчивое состояние равновесия или устойчивое периодическое движение Γ' и пусть Π' — его область притяжения в $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве Φ' . Для точечного отображения $T'_{2\pi}$ кривая Γ' является устойчивой инвариантной кривой с областью притяжения Π' . Поскольку нас интересует поведение решений уравнения (1) при неограниченном возрастании t , то мы позволим себе вместо всего пространства Φ рассмотреть его часть $T'_{2\pi}S$, которую будем ради простоты также обозначать буквой Φ . Кривой Γ' и области притяжения Π' в пространстве Φ можно сопоставить некоторую кривую $\tilde{\Gamma}'$ и область $\tilde{\Pi}'$. Именно, если $x = x(t)$ — уравнение кривой Γ' , то $\tilde{\Gamma}'$ состоит из точек $M(x, t_0)$, где $0 \leq t_0 < +\infty$, а $\tilde{\Pi}'$ состоит из всевозможных точек $M(\varphi(\xi), t_0)$ пространства Φ , для которых точка $(\varphi(2\pi), t_0)$ принадлежит Π' .

Все точки области $\tilde{\Gamma}'$, отвечающей любой ограниченной области G' , лежащей строго внутри Π' , при последовательных применениях преобразования $T'_{2\pi}$ попадают в некоторую окрестность порядка μ кривой $\tilde{\Gamma}'$ и в ней остаются.

Доказательство этого утверждения ничем не отличается от рассуждений, проведенных в работе [1]. Следует лишь иметь в виду, что при этом предполагается, что решение (Γ') вспомогательной системы (11) асимптотически устойчиво и что соответствующие ему корни характеристического уравнения точечного отображения $T'_{2\pi}$ по модулю меньше единицы на величины порядка μ .

Сформулированный выше факт позволяет (по крайней мере в практическом случае, когда фазовое пространство вспомогательной системы разбивается на конечное число областей притяжения асимптотически устойчивых состояний равновесия или периодических движений) свести изучение асимптотического поведения решений дифференциального уравнения с запаздываниями к такому же изучению решений вспомогательного дифференциального уравнения (11).

4. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В заключение рассмотрим примеры, в которых обнаруживаются некоторые особенности систем с переменными запаздываниями. Ради удобства последующего рассмотрения заметим, что уравнению с переменным запаздыванием вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x(t), \dot{x}(t), x(t - \tau(t, x)), \dot{x}(t - \tau(t, x))) \quad (15)$$

соответствует вспомогательное уравнение

$$\ddot{y} + y = \mu f(y(t), \dot{y}(t), y \sin \tau(t, y) + \dot{y} \cos \tau(t, y), y \cos \tau(t, y) - \dot{y} \sin \tau(t, y)) \quad (16)$$

и что при применении к вспомогательному уравнению метода усреднения и переходе к полярным координатам K и Θ придем к следующим двум дифференциальным уравнениям первого порядка [2]:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K, \Theta), \quad \frac{d\Theta}{dt} = \mu \Psi(K, \Theta), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(K, \Theta) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u, K \cos u \sin \tau(u - \Theta, K \cos u) - \\ & - K \sin u \cos \tau(u - \Theta, K \cos u), K \cos u \cos \tau(u - \Theta, K \cos u) - \\ & - K \sin u \sin \tau(u - \Theta, K \cos u)] \sin u du, \\ \Psi(K, \Theta) = & -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u, K \cos u \sin \tau(u - \Theta, K \cos u) - \\ & - K \sin u \cos \tau(u - \Theta, K \cos u), K \cos u \cos \tau(u - \Theta, K \cos u) - \\ & - K \sin u \sin \tau(u - \Theta, K \cos u)] \cos u du. \end{aligned}$$

В качестве первого примера рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с переменным запаздыванием вида

$$\ddot{x} + x = \mu [\dot{x}(t - \tau(t)) - h \dot{x} - v x^3], \quad (18)$$

где μ — малый параметр и

$$\tau(t) = \tau_0 + \alpha \sin(\omega t) \quad (\tau_0 > 0, |\alpha| < \tau_0).$$

Согласно (17), усредненные вспомогательные уравнения, соответствующие квазилинейному уравнению с запаздыванием (18), в полярных координатах записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = & -v K^3 + (g \cos^2 \Theta + f \sin^2 \Theta + l \cos \Theta \sin \Theta) K, \\ \frac{d\Theta}{dt} = & a \cos^2 \Theta + b \sin^2 \Theta + c \sin \Theta \cos \Theta, \end{aligned} \quad (19)$$

где введены обозначения (J_0 и J_1 — функции Бесселя):

$$\begin{aligned} a = & -\gamma \omega \sin(\tau_0 \omega) \frac{1}{\omega \alpha} J_1(\omega \alpha) b = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin(\tau_0 \omega) \left(\frac{\omega \alpha}{2} \right)^{-1} \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) J_1(\omega \alpha), \\ c = & \frac{1}{\omega} \left\{ J_0(\omega \alpha) \cos(\tau_0 \omega) + \frac{2}{\pi} \cos(\tau_0 \omega) [\sin(\omega \alpha) - (\omega \alpha) \cos(\omega \alpha)] \right\}, \\ l = & -\gamma \omega J_0(\omega \alpha) \sin(\tau_0 \omega), \quad g = -\cos(\tau_0 \omega) J_0(\omega \alpha), \end{aligned}$$

$$f = -\frac{1}{2\pi} J_1(\omega\alpha) \frac{1}{\omega\alpha} \cos(\tau_0\omega).$$

Исследуем возможные качественные картины разбиения фазовой плоскости K, Θ при всевозможных значениях параметров ν, g, f, l, a, b и c , входящих в уравнения (19).

Уравнения (19) имеют состояние равновесия в начале координат и состояния равновесия K_0, Θ_0 , определяемые из уравнений

$$\begin{aligned} -\nu K_0^2 + g \cos^2 \Theta_0 + f \sin^2 \Theta_0 + l \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 &= 0, \\ a \cos^2 \Theta_0 + b \sin^2 \Theta_0 + c \sin \Theta_0 \cos \Theta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

При $\Delta = c^2 - 4ab < 0$ эти уравнения не имеют действительных решений. При обратном неравенстве ($\Delta > 0$) они имеют четыре решения:

$$\begin{aligned} \Theta_0^1 &= \arctg \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{2b}, \quad K_0^1 = \cos^2 \Theta_0^1 \left\{ \nu^{-1} \left[\left(l + \frac{f}{b} \right) \operatorname{tg} \Theta_0^1 + g + \frac{f}{b} a \right] \right\}^{1/2}, \\ \Theta_0^2 &= \Theta_0^1 + \pi, \quad K_0^2 = K_0^1, \\ \Theta_0^3 &= \arctg \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{2b}, \quad K_0^3 = \cos^2 \Theta_0^3 \left\{ \nu^{-1} \left[\left(l + \frac{f}{b} \right) \operatorname{tg} \Theta_0^3 + g + \frac{f}{b} a \right] \right\}^{1/2}, \\ \Theta_0^4 &= \Theta_0^3 + \pi, \quad K_0^4 = K_0^3, \end{aligned} \quad (21)$$

некоторые из которых могут быть комплексными.

При обращении Δ в нуль состояния равновесия (Θ_0^1, K_0^1) , (Θ_0^3, K_0^3) и (Θ_0^2, K_0^2) , (Θ_0^4, K_0^4) попарно сливаются.

При $\Delta > 0$ лучи $\Theta = \Theta_0^1, \Theta = \Theta_0^2, \Theta = \Theta_0^3$ и $\Theta = \Theta_0^4$ являются интегральными для уравнения (19). Направления движения фазовых точек на этих лучах в окрестности начала координат определяются знаками величин

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left(\frac{1}{K} \frac{dK}{dt} \right)_{\Theta = \Theta_0^1, K = 0} = \frac{\Delta f + \sqrt{\Delta}(2bl - 2cf) + 4b^2g + fc^2 - 2lcb}{4b^2}, \\ \delta_2 &= \left(\frac{1}{K} \frac{dK}{dt} \right)_{\Theta = \Theta_0^3, K = 0} = \frac{\Delta f + \sqrt{\Delta}(2cf - 2bl) + 4b^2g + 2blc + fc^2}{4b^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Как видно из первого уравнения (19), бесконечность устойчива при $\nu < 0$ и неустойчива при $\nu > 0$.

При $\Delta > 0$, согласно сказанному, через начало координат проходят две интеральные прямые, направления движения фазовых точек по которым зависят от знаков величин δ_1 и δ_2 , так что в случае $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ имеет место неустойчивый узел, в случае $\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$ — устойчивый узел и при разных знаках величин δ_1 и δ_2 — седловое состояние равновесия. При $\Delta < 0$ начало координат является состоянием равновесия типа фокуса устойчивость которого может быть выяснена следующим образом.

Разделим в системе (19) одно уравнение на другое:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{d\Theta} &= K \frac{g \cos^2 \Theta + f \sin^2 \Theta + l \cos \Theta \sin \Theta}{a \cos^2 \Theta + b \sin^2 \Theta + c \cos \Theta \sin \Theta} - \\ &- \nu K^3 (a \cos^2 \Theta + b \sin^2 \Theta + c \cos \Theta \sin \Theta)^{-1}. \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Для исследования устойчивости в линейном приближении этого состояния равновесия член с K^3 можно отбросить.

Уравнения (23) с отброшенным членом интегрируются так, что

$$K(\Theta) = K(0) \exp \left[\int_0^\Theta A(s) ds \right],$$

где введено обозначение

$$A(s) = \frac{g \cos^2 s + f \sin^2 s + l \sin s \cos s}{a \cos^2 s + b \sin^2 s + c \sin s \cos s}.$$

Рассматриваемое состояние равновесия будет устойчиво или неустойчиво в зависимости от знака интеграла

$$\int_0^{2\pi} A(s) ds,$$

величину которого обозначим через χ . При $\chi > 0 K(2\pi) > K(0)$ и поэтому имеет место неустойчивость, при $\chi < 0 K(2\pi) < K(0)$, что означает устойчивость. Вычисление величины χ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \chi = 4\pi & \left\{ f \left(\frac{b}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{\sqrt{-\Delta} + b}{a - b - \sqrt{-\Delta}} \right) + g \frac{\sqrt{-\Delta} + b}{a - b - \sqrt{-\Delta}} + \right. \\ & \left. + l \left[\frac{1}{2c} - \frac{a}{c} \frac{\sqrt{-\Delta} + b}{a - b - \sqrt{-\Delta}} - \frac{b}{c} \frac{ab - 2b^2\sqrt{-\Delta} b - \Delta}{\sqrt{-\Delta}(a - b - \sqrt{-\Delta})} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В случае $\Delta > 0$ уравнение (19) не имеет предельных циклов, так как в этом случае состояния равновесия лежат на интегральных прямых. Покажем, что в случае $\Delta < 0$ возможен не более чем один предельный цикл. Действительно, в этом случае возможны только предельные циклы, охватывающие начало координат (как единственное состояние равновесия), и если бы было два различных предельных цикла $K = K_1(\Theta)$ и $K = K_2(\Theta)$, то имели бы место, согласно (19), соотношения

$$d \ln K_j = - \nu K_j^2 g^{-1}(\Theta) d\Theta + f(\Theta) g^{-1}(\Theta) d\Theta,$$

в которых функция

$$g(\Theta) = a \cos^2 \Theta + b \sin^2 \Theta + c \sin \Theta \cos \Theta$$

определенна положительна и

$$f(\Theta) = g \cos^2 \Theta + f \sin^2 \Theta + l \sin \Theta \cos \Theta.$$

Интегрируя эти соотношения по Θ в пределах от 0 до 2π и вычитая одно из другого, придем к соотношению

$$\nu \int_0^{2\pi} (K_2^2 - K_1^2) g^{-1}(\Theta) d\Theta = 0,$$

из которого в силу определенной положительности функции $g(\Theta)$ следует, что $K_1(\Theta) = K_2(\Theta)$.

В соответствии с изложенным в зависимости от знаков величин Δ , ν , δ_1 , δ_2 и χ на рис. 1 и 2 приведены все возможные виды разбиения фазовой плоскости K , Θ на траектории.

Заметим, что устойчивым состоянием равновесия, отличным от начала координат (началу координат соответствует равновесное положение системы), соответствуют вынужденные колебания рассматриваемого осциллятора с частотой изменения запаздывания (явление захвата на частоту изменения запаздывания), устойчивому периодическому движению соответствуют квазипериодические колебания.

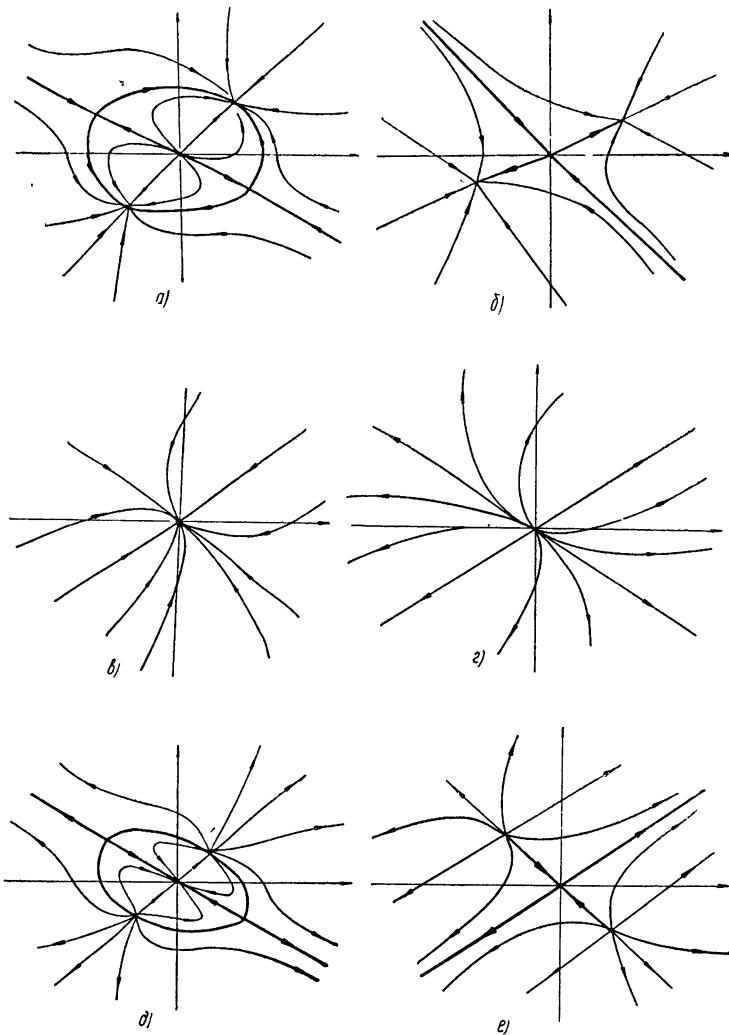


Рис. 1. а— $\Delta > 0$, $v > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$;
 б— $\Delta > 0$, $v > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 < 0$;
 в— $\Delta > 0$, $v > 0$, $\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$;
 г— $\Delta > 0$, $v < 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 < 0$;
 д— $\Delta > 0$, $v < 0$, $\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$;
 е— $\Delta > 0$, $v < 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 < 0$

В качестве следующего примера рассмотрим систему, описываемую уравнением вида

$$\ddot{x} + x = \mu \{ \dot{x}(t - \Theta(x)) + 2\hbar \dot{x}(t) \}, \quad (24)$$

где

$$\Theta(x) = \alpha |x| \quad (\alpha > 0).$$

Согласно (17), вспомогательные уравнения после усреднения записываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{K} &= \mu \Phi(K) = \mu \left\{ \frac{4 \sqrt{\pi}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) J_1(\alpha K) + \hbar K \right\}, \\ \dot{\Theta} &= \mu \Psi(K) = \mu \left\{ \pi E_0(\alpha K) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) H_0(\alpha K) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} (\alpha K)^{2s-1}}{(1^2 - 2^2)(3^2 - 2^2) \dots [(2s-1)^2 - 2^2]} \right\},\end{aligned}\quad (25)$$

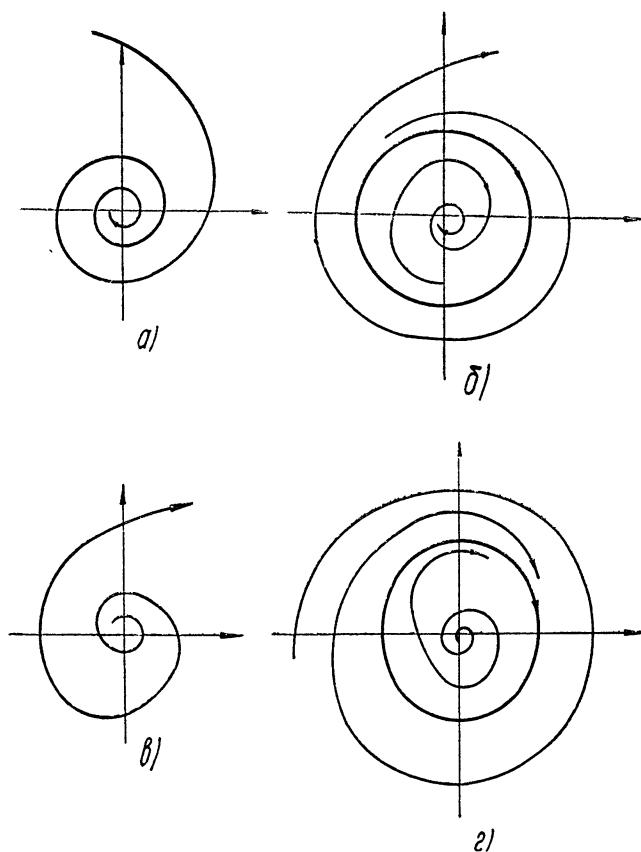


Рис. 2. а— $\Delta < 0$, $\nu > 0$, $\kappa < 0$;
б— $\Delta < 0$, $\nu < 0$, $\kappa < 0$;
в— $\Delta < 0$, $\nu < 0$, $\kappa > 0$;
г— $\Delta < 0$, $\nu > 0$, $\kappa > 0$.

где $E_0(x)$ —функция Вебера, $H_0(x)$ —функция Струве, $J_1(x)$ —функция Бесселя [3].

Так как в правую часть уравнения (25) переменная Θ не входит, то вид разбиения фазовой плоскости переменных K , Θ и x , y определяется корнями уравнения

$$\Phi(K) = \frac{4 \sqrt{\pi}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) J_1(\alpha K) + \hbar K = 0. \quad (26)$$

При $h = 0$ это уравнение имеет бесчисленное множество корней $K = 0, K = K_1, K = K_2, \dots$. При $h \neq 0$ число корней конечно и с возрастанием $|h|$ уменьшается так, что при достаточно больших $|h|$ остается только один корень $K = 0$. Каждому из корней уравнения (26) соответствует предельный цикл, охватывающий начало координат. Устойчивости этих предельных циклов чередуются. Устойчивость бесконечности определяется знаком величины h : при $h > 0$ бесконечность устойчива и при $h < 0$ неустойчива.

Таким образом, рассматриваемая система абсолютно устойчива при $h < -\bar{h}$, полностью неустойчива при $h > \bar{h}$ и имеет конечное число автоколебательных режимов при промежуточных значениях h .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Л. З. Фишман, ДАН СССР, 171, № 1, 44 (1966); Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 9, № 6, 1210 (1966).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М—Л, 1963.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 декабря 1966 г.

QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME DELAYS, DEPENDING ON TIME AND ON UNKNOWN FUNCTION

Y. I. Neimark, L. Z. Fishman

It is shown that investigation of quasilinear differential equations system with variable delays could be reduced to the exploration of some subsidiary system of ordinary differential equations

УДК 62—506

ДИНАМИКА ОДНОКАНАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО И РЕЛЕЙНО-ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ТИПОВ С ИНЕРЦИОННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

H. H. Леонов

Рассматриваются некоторые вопросы помехо-устойчивости экстремальных систем пропорционального типа и исследуется один способ повышения качества работы экстремальных систем.

1. В работе рассматриваются экстремальные системы с объектами, имеющими один вход u и один выход φ , которые могут быть представлены в виде соединения безынерционного (нелинейного звена и инерционного линейного звена первого порядка (рис. 1). Предполагается, что нелинейное безынерционное звено имеет характеристику (т. е. зависимость выхода от входа) с одним экстремумом. Пусть для определенности это максимум. Управляющие устройства экстремальных систем — автоматические оптимизаторы — предназначены для нахождения и поддержания экстремального значения выхода объекта φ^0 при постоянно действующих возмущениях. Возмущения, действующие на объект, вызывают изменение со временем как величины φ^0 , так и величины входа объекта u^0 .

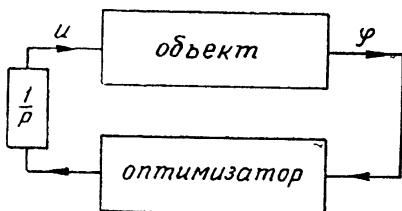


Рис. 1.

соответствующей экстремальному значению выхода. Если рассмотреть плоскость $u\varphi$ координат входа и выхода объекта, то возмущения, действующие на объект, вызывают перемещение точки $M^0(u^0, \varphi^0)$ по этой плоскости. В зависимости от расположения точки $M(u, \varphi)$, характеризующей текущее состояние объекта относительно точки M^0 , перед оптимизатором встают две задачи: задача слежения за экстремумом выхода объекта и задача поиска экстремума выхода объекта. Если точка M находится в окрестности точки M^0 , размеры которой определяются недовериями системы, то первая задача заключается в том, чтобы точка M оставалась в указанной окрестности точки M^0 при медленном перемещении точки M^0 по плоскости $u\varphi$. Если же точка M не принадлежит указанной окрестности точки M^0 , то возникает вторая задача — задача выведения точки M в окрестность точки M^0 . Качество процесса слежения за экстремумом выхода объекта характеризует локальные свойства экстремальных систем, а качество процесса поиска экстремального значения выхода объекта характеризует глобальные их свойства. Одним из основных показателей качества процесса слежения является величина ошибки слежения, а процесса поиска — устойчивость и быстродействие.

В настоящей работе рассматриваются экстремальные системы

с объектами указанного выше вида, управляемые оптимизаторами пропорционального и релейно-пропорционального типов. Целью рассмотрения является изучение некоторых показателей качества работы этих систем.

2. Рассмотрим сначала экстремальные системы релейно-пропорционального типа. Как известно, релейными (или автоколебательными) экстремальными системами принято называть системы, у которых скорость изменения входа объекта постоянна по величине. Экстремальными системами пропорционального типа называются системы, у которых скорость изменения входа объекта (скорость поиска) пропорциональна величине, некоторым образом характеризующей величину отклонения входа объекта от его значения, соответствующего экстремуму выхода. Рассмотрим здесь экстремальную систему, в которой скорость изменения входа объекта имеет постоянную составляющую и составляющую, пропорциональную отклонению входа объекта от его значения, соответствующего экстремуму выхода. Эта система может быть названа релейно-пропорциональной. Экстремальные системы такого смешанного типа рассматривались в [1]. Возможность улучшения качества работы экстремальных систем при использовании оптимизаторов смешанного типа отмечалась в [2]. Итак, рассмотрим экстремальную систему с объектом, представимым в виде последовательно соединенных нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена первого порядка, движение которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u}(t) = \eta(t-\theta), \quad \eta = \zeta v + \xi \alpha^{-1} \frac{\sigma}{u} \gamma, \\ \sigma = \alpha(\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}), \quad \zeta = \Phi[\dot{u}, \sigma], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Phi[\dot{u}, \sigma] = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{u} > 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } \dot{u} < 0 \text{ и } \sigma < -1, \\ -1, & \text{если } \dot{u} < 0 \text{ и } \sigma > -1 \text{ или } \dot{u} > 0 \text{ и } \sigma < -1, \end{cases}$$

где $|\xi| = 1$, $v > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Рассмотрим эту систему при исчезающем малом θ . В этом случае система (1) приводится к следующему виду:

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = \zeta v - 2\gamma\xi u, \quad \zeta = \Phi[\dot{u}, \sigma], \quad \sigma = \alpha(\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}). \quad (2)$$

Фазовое пространство системы (2) $\Phi(u, \varphi)$ — плоское, двулистное, образованное двумя плоскостями Φ_{+1} и Φ_{-1} , на которых ζ имеет соответственно значение $+1$ и -1 . Движение фазовой точки по траекториям листа Φ_{ζ} описывается уравнениями (при $\xi\gamma \neq 0,5$ и $\xi\gamma \neq 0,25$)

$$\begin{aligned} u &= 0,5 \gamma^{-1} v \xi \zeta + A \exp(-2\gamma\xi t), \\ \varphi &= B(u - 0,5 \gamma^{-1} v \xi \zeta)^{0,5\gamma^{-1}\xi} - \frac{2v^2 - 2v\xi u + (1 - 2\gamma\xi)u^2}{(1 - 2\gamma\xi)(1 - 4\gamma\xi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Исследование движений в системе (2) разобьем на два случая, когда $\xi = +1$ и $\xi = -1$.

3. При $\xi = +1$ фазовые траектории на плоскости Φ_{+1} имеют вид, изображенный на рис. 2а. На листе Φ_{+1} имеется единственная особая точка $(0,5\gamma^{-1}v, -0,25\gamma^{-2}v^2)$ — устойчивый узел. Фазовые траектории листа Φ_{-1} , согласно уравнениям (2), симметричны относительно оси φ траекториям листа Φ_{+1} . Если фазовая точка в некоторый момент времени попадает на лист Φ_{ζ} , то она движется вдоль траектории этого

листа до тех пор, пока не будет нарушено только одно из следующих условий: $\operatorname{sgn} \dot{u} = \operatorname{sgn} \zeta$, $\sigma > -1$. Если нарушается только одно из них, а не оба сразу, то фазовая точка переходит на лист $\Phi_{-\zeta}$. Если же происходит нарушение сразу обоих условий, то она продолжает движение по листу Φ_ζ .

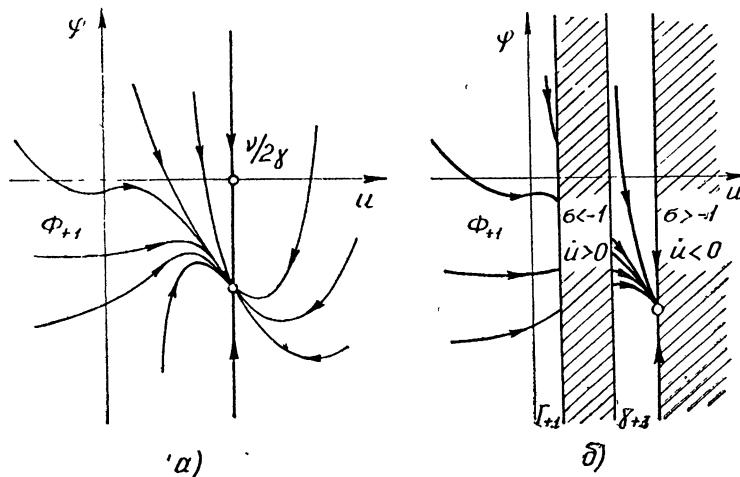


Рис. 2.

Первое из этих условий на плоскости Φ_ζ выполняется, согласно второму равенству системы (2), если $u\zeta < 0,5 \gamma^{-1} v$.

Из уравнений (2) получаем, что $\sigma = 4\gamma au^2 - 2va\zeta u$. Следовательно, $\sigma = -1$, если $u = 0,25a^{-1}\gamma^{-1}(av \pm \sqrt{a^2v^2 - 4a\gamma})$. При $\gamma > 0,25av^2$ величина σ во время движения фазовой точки по листу Φ_ζ все время больше -1 . В этом случае фазовая точка может перейти с листа Φ_ζ на лист $\Phi_{-\zeta}$ лишь при нарушении первого условия. Поэтому если фазовая точка начинает движение по листу Φ_ζ из его части $u\zeta < 0,5 \gamma^{-1} v$, то при $\gamma > 0,25av^2$ она не покидает этот лист во время движечия, приближаясь к устойчивому состоянию равновесия.

Обозначим через Γ_ζ прямые $u = 0,25a^{-1}\gamma^{-1}(\gamma v - \sqrt{\gamma^2v^2 - 4a\gamma})$, а через γ_ζ — прямые $u = 0,25a^{-1}\gamma^{-1}(\gamma v + \sqrt{\gamma^2v^2 - 4a\gamma})$. На листе Φ_ζ эти прямые существуют при $\gamma \leq 0,25av^2$. Нетрудно убедиться в том, что Γ_ζ и γ_ζ принадлежат той части Φ_ζ , где $u\zeta < 0,5 \gamma^{-1} v$. Если $\gamma < 0,25av^2$, то переход фазовой точки при движении ее по листу Φ_ζ на лист $\Phi_{-\zeta}$ может произойти не только в результате нарушения первого условия, но также и в результате нарушения условия $\sigma > -1$. Действительно, в полосе $\zeta u(\Gamma_\zeta) < \zeta u < \zeta u(\gamma_\zeta)$ листа Φ_ζ имеет место неравенство $\sigma < -1$, и фазовая точка, попав в эту полосу листа Φ_ζ , переходит на лист Φ_{-1} (рис. 2б). На рис. 2б изображен лист Φ_{+1} при $\gamma < 0,25av^2$. Заштрихованы те области этого листа, в которые, фазовая точка переходит на лист Φ_{-1} . Как выше было отмечено, фазовая картина на листе Φ_{-1} симметрична относительно оси φ картины на листе Φ_{+1} .

Дальнейшее изучение системы (2) с $\xi = +1$ будем проводить при $\gamma < 0,25av^2$.

Очевидно, область $\zeta u(\gamma_\zeta) < u\zeta < 0,5 \gamma^{-1} v$ листа Φ_ζ является областью притяжения устойчивого состояния равновесия $(0,5 \gamma^{-1} v, -0,25 \gamma^{-2} v^2)$. Исключив из пространства Φ области притяжения устойчивых состоя-

ний равновесия листов Φ_{+1} и Φ_{-1} , получим пространство Φ^0 , в котором изучение движений рассматриваемой системы сводится к исследованию точечного отображения T линии Γ_{+1} в себя следующего вида:

$$\varphi_1 = \left(\frac{0.5v - \gamma u_1}{0.2v + \gamma u_1} \right)^{0.5\gamma^{-1}} \left[\varphi_0 + \frac{2v^2 + 2vu_1 + (1-2\gamma)u_1^2}{(1-2\gamma)(1-4\gamma)} \right] - \frac{2v^2 - 2vu_1 + (1-2\gamma)u_1^2}{(1-2\gamma)(1-4\gamma)}, \quad (4)$$

где φ_0 — исходная точка линии Γ_{+1} , $\varphi_1 = T\varphi_0$, $u_1 = 0.25\alpha^{-1}\gamma^{-1}(av - \sqrt{\alpha^2v^2 - 4\alpha\gamma})$. Нетрудно проверить, что при $\gamma < 0.25\alpha v^2$ имеют место неравенства $0 < \frac{v-2\gamma u_1}{v+2\gamma u_1} < 1$. Поэтому отображение T имеет единственную неподвижную точку, устойчивую в большом, с координатой $\varphi^* = -\frac{2v^2 + (1-2\gamma)u_1^2}{(1-2\gamma)(1-4\gamma)} + \frac{2vu_1}{(1-2\gamma)(1-4\gamma)} \frac{(0.5v + \gamma u_1)^{0.5\gamma^{-1}} + (0.5v - \gamma u_1)^{0.5\gamma^{-1}}}{(0.5v + \gamma u_1)^{0.5\gamma^{-1}} - (0.5v - \gamma u_1)^{0.5\gamma^{-1}}}$.

Рассматриваемая экстремальная система имеет соответствующий единственный периодический режим работы. Среднее отклонение (вернее, модуль среднего отклонения) выхода объекта за период его экстремального значения при работе системы в этом режиме записывается следующим образом:

$$\delta_1 = \frac{u_1^2}{3(1-4\gamma)} + \frac{2v^2}{(1-2\gamma)(1-4\gamma)} \left[1 - (1+2\gamma)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \frac{(1+2\gamma^{v-1}u_1)^{0.5\gamma^{-1}+1} - (1-2\gamma^{v-1}u_1)^{0.5\gamma^{-1}+1}}{(1+2\gamma^{v-1}u_1)^{0.5\gamma^{-1}} - (1-2\gamma^{v-1}u_1)^{0.5\gamma^{-1}}} \right].$$

Обозначим величину средней ошибки за период при $\gamma=0$ через δ_0 . Нетрудно проверить, что $\delta_0 = (12\alpha^2v^2)^{-1}$. Из выражения для δ_1 при малых γ с точностью до величины порядка выше первого относительно γ получаем, что $\delta_1 = \delta_0 + \gamma H$, где $H = [4v^2 + (3\alpha^2v^2)^{-1} - 2\alpha^{-1} - 4\alpha^{-1}(\exp(\alpha^{-1}v^{-2}) - 1)^{-1}]$. Можно показать, что $H > 0$ при любых положительных α и v . Поэтому $\delta_1 > \delta_0$ по крайней мере для малых значений γ .

Уравнения (2) при $\gamma=0$ описывают движения в экстремальной системе автоколебательного типа [3], в которой скорость изменения входа объекта постоянна по величине. По сравнению с этой системой система (2) при $\gamma > 0$ и $\xi = +1$ имеет большую скорость поиска в области $|u| > 0.5\gamma^{-1}$, но также и большую ошибку слежения за экстремальным значением выхода объекта.

4. Пусть $\xi = -1$. Обозначим в этом случае листы Φ_ζ через Ψ_ζ . Фазовые траектории листа Ψ_{+1} изображены на рис. 3а. На листе Ψ_{+1} имеется единственная особая точка $(-0.5\gamma^{-1}, -0.25v^2\gamma^{-2})$ типа седла. Фазовые траектории листа Ψ_{-1} , согласно (2), симметричны относительно оси φ траекториям листа Ψ_{+1} . Если фазовая точка попадает в некоторый момент времени на лист Ψ_ζ , то при выполнении условий $\operatorname{sgn} u = \operatorname{sgn} \zeta$, $\sigma > -1$ или при одновременном нарушении их (т. е. $\operatorname{sgn} u = -\operatorname{sgn} \zeta$, $\sigma \leq -1$) она остается на этом листе и движется по траектории этого листа до тех пор, пока не будет нарушено только одно из двух указанных условий. После того, как будет нарушено одно из условий, фазовая точка перейдет на лист $\Psi_{-\zeta}$. Первое из условий

$(\operatorname{sgn} \dot{u} = \operatorname{sgn} \zeta)$ выполняется на листе Ψ_ζ , если $\zeta u > -0,5v\gamma^{-1}$. Второе условие $(\sigma > -1)$ выполняется в полосе $-0,25\alpha^{-1}\gamma^{-1}(\sqrt{\alpha^2v^2+4\alpha\gamma}+\alpha v) < \zeta u < 0,25\alpha^{-1}\gamma^{-1}(\sqrt{\alpha^2v^2+4\alpha\gamma}-\alpha v)$ листа Ψ_ζ .

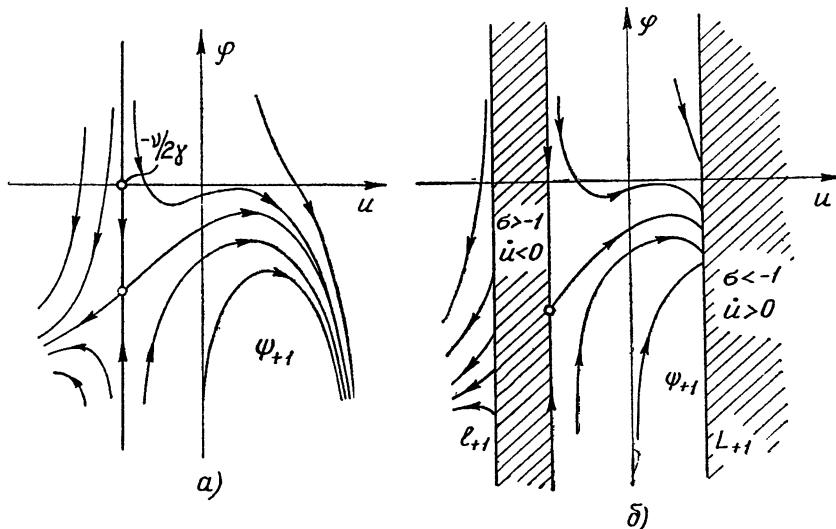


Рис. 3.

Обозначим через L_ζ прямые $u = 0,25\alpha^{-1}\gamma^{-1}\zeta(\sqrt{\alpha^2v^2+4\alpha\gamma}-\alpha v)$ и через l_ζ — прямые $u = -0,25\alpha^{-1}\gamma^{-1}\zeta(\sqrt{\alpha^2v^2+4\alpha\gamma}+\alpha v)$. Нетрудно проверить, что ζ и $(l_\zeta) < -0,5v\gamma^{-1}$. Это неравенство говорит о том, что линия L_ζ расположена в той части листа Ψ_ζ , где $\operatorname{sgn} \dot{u} = -\operatorname{sgn} \zeta$. Очевидно, линия L_ζ расположена в той части листа Ψ_ζ , где $\operatorname{sgn} \dot{u} = \operatorname{sgn} \zeta$. Теперь нетрудно убедиться в том, что в той части листа Ψ_ζ , где $\zeta u > \zeta u(L_\zeta)$, имеют место соотношения $\sigma < -1$ и $\operatorname{sgn} \dot{u} = \operatorname{sgn} \zeta$, а в той части, где $\zeta u(l_\zeta) < \zeta u < -0,5v\gamma^{-1}$, имеют место соотношения $\sigma > -1$ и $\operatorname{sgn} \dot{u} = -\operatorname{sgn} \zeta$ (рис. 3б). Обозначим сумму указанных областей листа Ψ_ζ через O_ζ . В области O_ζ нарушено одно из двух вышеуказанных условий. Поэтому фазовая точка, попав в область O_ζ листа Ψ_ζ , переходит на лист $\Psi_{-\zeta}$. Если же фазовая точка попадает на лист Ψ_ζ в точку, не принадлежащую области O_ζ , то она продолжает движение по листу Ψ_ζ до тех пор, пока не попадает в область O_ζ .

Если часть области O_ζ (обозначим ее через G_ζ) накладывается на соответствующую часть $G_{-\zeta}$ области $O_{-\zeta}$ (т. е. каждой точке из G_ζ соответствует точка из $G_{-\zeta}$ с теми же координатами), то фазовая точка, попав в G_ζ , движется, непрестанно переходя из G_ζ в $G_{-\zeta}$ и обратно, по траекториям режима скольжения. Можно показать, что при движении фазовой точки по траектории режима скольжения вход объекта изменяется по закону $u = u_0 \exp(2\gamma t)$. Отсюда следует, что фазовая точка движется в сторону удаления входа объекта от его значения, соответствующего экстремуму выхода.

Нетрудно проверить, что $|u(l_\zeta)| > |u(L_\zeta)|$. Если $\gamma > 2\alpha v^2$, то $|u(L_\zeta)| > 0,5v\gamma^{-1}$. Поэтому при $\gamma > 2\alpha v^2$ имеют место неравенства $0,5v\gamma^{-1} < \zeta u(L_\zeta) < \zeta u(l_{-\zeta})$, которые свидетельствуют о существовании областей G_ζ и $G_{-\zeta}$, т. е. о существовании области режимов скольжения. Траектории режимов скольжения в этом случае принадлежат двум полосам: $u(l_{+1}) < u < u(L_{-1})$ и $u(L_{+1}) < u < u(l_{-1})$. Нетрудно убедиться в том, что при $\gamma > 2\alpha v^2$ рассматриваемая система абсолютно

неустойчива, т. е. $\varphi(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$ для любого начального состояния системы, не принадлежащего линиям $|u| = 0,5v\gamma^{-1}$.

Если $\gamma < 2\alpha v^2$, то линия L_ζ принадлежит области $0 < \zeta u < 0,5v\gamma^{-1}$. Траектории режимов скольжения в этом случае принадлежат полосам $u(l_{+1}) < u < -0,5v\gamma^{-1}$, $0,5v\gamma^{-1} < u < u(l_{-1})$. Та часть фазового пространства, где $|u| > 0,5v\gamma^{-1}$, является областью неустойчивого поиска. При $\gamma < 2\alpha v^2$ в фазовом пространстве появляется область устойчивого поиска — полоса $|u| < 0,5v\gamma^{-1}$. Фазовая точка, попав в эту область, в процессе движения не может ее покинуть. Изучение движений фазовой точки в этой области сводится к исследованию точечного отображения прямой L_{+1} в себя. Это отображение описывается выражением, получающимся из (4) заменой γ на $-\gamma$. Оно имеет единственную неподвижную точку, устойчивую в большом, которой соответствует единственный периодический режим работы рассматриваемой системы. Среднее отклонение выхода объекта за период от экстремального его значения при работе системы в этом режиме равно $\delta_1(-\gamma)$. А так как $\delta_1(\gamma) = \delta_0 + \gamma H$ при малых γ , то по крайней мере при малых величинах γ имеет место неравенство $\delta_1(-\gamma) < \delta_0$.

Таким образом, установлено, что по сравнению с системой (2) при $\gamma = 0$ рассматриваемая система имеет меньшую ошибку слежения за экстремальным значением выхода объекта, но наряду с этим имеет и узкую по оси u область устойчивого поиска.

5. Обозначим систему, описываемую уравнениями (2), при $\gamma = 0$ через S , при $\gamma > 0$ и $\xi = +1$ — через S^+ , при $\gamma > 0$ и $\xi = -1$ — через S^- . Приведенные выше исследования показывают, что система S^+ обладает лучшими глобальными свойствами, чем система S , но худшими локальными, а система S^- обладает худшими глобальными, но лучшими локальными свойствами, чем S . Именно, скорость поиска в S^+ выше скорости поиска в системе S , но ошибка слежения за экстремумом выхода объекта в S^+ больше, чем в S . В системе же S^- ошибка слежения за экстремумом выхода объекта меньше, чем в S , но поиск неустойчив в большой области фазового пространства.

За счет некоторого усложнения системы управления можно объединить положительные качества систем S^+ и S^- и устраниТЬ их отрицательные качества. Это достигается, например, при таком построении управляющей части системы, когда ее работа описывается уравнениями

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u}(t) = \gamma(t - \theta), \quad \gamma = \nu \zeta + \gamma \alpha^{-1} \frac{\sigma}{u} \xi, \quad (5)$$

$$\sigma = \alpha(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}), \quad \zeta = \Phi[\dot{u}, \sigma], \quad \xi = \Psi[\sigma],$$

$$\Psi[\sigma] = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \leq -1 \\ -1, & \text{если } -1 < \sigma \leq 2\alpha v^2 \gamma^{-1} \end{cases} \quad \text{или} \quad \sigma > 2\alpha v^2 \gamma^{-1},$$

где $\alpha > 0$, $v > 0$, $0 < \gamma < 0,25\alpha v^2$. Принципиальная схема этой системы изображена на рис. 4. Исследуем работу этой системы (обозначим ее через S^0). При этом запаздывание θ будем считать исчезающее малой величиной.

Фазовое пространство $\Phi(u, \varphi)$ системы S^0 плоское, многолистное, образованное листами Φ_{+1} , Φ_{-1} , Ψ_{+1} , Ψ_{-1} , такими, что на листах Φ_{+1} , Φ_{-1} величина ξ равна $+1$, а ζ равна $+1$ и -1 соответственно; на листах Ψ_{+1} и Ψ_{-1} величина $\xi = -1$, а ζ равна соответственно $+1$ и -1 . Листы Φ_{+1} и Φ_{-1} образуют фазовое пространство системы S^+ , а листы Ψ_{+1} и Ψ_{-1} — фазовое пространство системы S^- . Плоскости Φ_{+1} и Ψ_{+1}

изображены на рис. 2а и 3а. Фазовые траектории листов Φ_{-1} и Ψ_{-1} симметричны относительно оси φ траекториям листов Φ_{+1} и Ψ_{+1} соответственно.

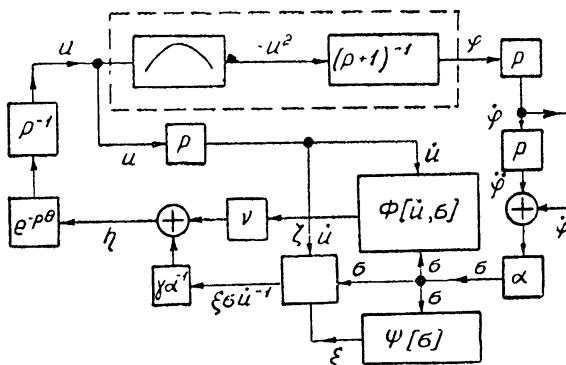


Рис. 4.

1) Пусть фазовая точка движется по листу Φ_{+1} . Если при этом $\xi = +1$ и $\zeta = +1$, то она продолжает движение по этому листу. Если по крайней мере одна из величин ξ , ζ станет равной -1 , то фазовая точка перейдет на другой лист.

Изучим разбиение листа Φ_{+1} на области допустимых движений по траекториям этого листа и на области перехода фазовой точки с Φ_{+1} на другие листы фазового пространства.

Согласно (5), величина $\xi = +1$, если $\sigma \ll -1$ или $\sigma > 2\alpha\gamma^2\gamma^{-1}$. Выше было показано, что $\sigma \ll -1$ в полосе $u(\Gamma_{+1}) < u \leq u(\gamma_{+1})$ листа Φ_{+1} . Так как из (5) следует, что $\sigma = -2\alpha u(u\zeta - 2\gamma\xi u)$, то $\sigma > 2\alpha\gamma^2\gamma^{-1}$ в областях $u < -0,5\gamma^{-1}\nu$, $u > \nu\gamma^{-1}$ листа Φ_{+1} .

При изучении системы S^+ было показано, что $\zeta = +1$ в области $u < u(\Gamma_{+1})$ и $u(\gamma_{+1}) < u < 0,5\nu\gamma^{-1}$ листа Φ_{+1} .

Таким образом, на основании изложенного выше получаем, что $\xi = +1$ и $\zeta = +1$ в области $u < -0,5\nu\gamma^{-1}$ листа Φ_{+1} (обозначим эту область через A_1^{+1}); $\xi = -1$ и $\zeta = +1$ в областях $-0,5\nu\gamma^{-1} < u < u(\Gamma_{+1})$ и $u(\gamma_{+1}) < u < 0,5\nu\gamma^{-1}$ (обозначим их через A_2^{+1} и A_3^{+1} соответственно); $\xi = +1$ и $\zeta = -1$ в областях $A_4^{+1}: u(\Gamma_{+1}) < u < u(\gamma_{+1})$ и $A_5^{+1}: u > \nu\gamma^{-1}$; $\xi = -1$ и $\zeta = -1$ в области $A_6^{+1}: 0,5\nu\gamma^{-1} < u < \nu\gamma^{-1}$. Согласно (5) фазовая точка из A_2^{+1} и A_3^{+1} переходит на лист Ψ_{+1} , из A_4^{+1} и A_5^{+1} — на лист Ψ_{-1} , из A_6^{+1} — на лист Φ_{-1} .

Лист Φ_{-1} разбивается на соответствующие области A_i^{-1} ($i = 1, 2, \dots, 6$).

2) Изучим теперь разбиение листа Ψ_{+1} на области движений фазовой точки по траекториям этого листа и на области перехода фазовой точки с Ψ_{+1} на другие листы фазового пространства.

Если фазовая точка попадает на лист Ψ_{+1} , то она движется по траекториям этого листа, если $\xi = -1$ и $\zeta = +1$. Если же по крайней мере одна из величин ξ , ζ имеет другой знак, то она переходит на другой лист.

Величина $\xi = -1$, если $-1 < \sigma \leq 2\alpha\gamma^2\gamma^{-1}$. Нетрудно убедиться в том, что на листе Ψ_{+1} всюду $\sigma < 2\alpha\gamma^2\gamma^{-1}$. Неравенство же $\sigma > -1$, как установлено при исследовании системы S^- , имеет место в области $u(l_{+1}) < u < u(L_{+1})$. Там же было показано, что $\zeta = -1$ в областях $u(l_{+1}) < u < -0,5\nu\gamma^{-1}$, $u > u(L_{+1})$.

Таким образом, получаем, что $\xi = -1$, $\zeta = +1$ в области $B_1^{+1}: -0,5\nu\gamma^{-1} < u < u(L_{+1})$; $\xi = +1$, $\zeta = +1$ в области $B_2^{+1}: u < u(l_{+1})$;

$\xi = +1$, $\zeta = -1$ в области $B_3^{+1}: u > u(L_{+1})$; $\xi = -1$, $\zeta = -1$ в области B_4^{+1} : $u(l_{+1}) < u < -0,5v\gamma^{-1}$. Согласно (5), фазовая точка из B_2^{+1} переходит на лист Φ_{+1} ; из B_3^{+1} — на лист Φ_{-1} ; из B_4^{+1} — на лист Ψ_{-1} . Область B_1^{+1} является областью движений фазовой точки по траекториям листа Ψ_{+1} .

На соответствующие области B_i^{+1} ($i = 1, 2, 3, 4$) разбивается и лист Ψ_{-1} .

3) Рассмотрим теперь общую картину движений фазовой точки в пространстве $\Phi(u, \varphi)$. Так как изучение системы (5) проводится при $\gamma < 0,25\alpha v^2$, то $u(\Gamma_{+1}) > u(L_{+1})$, $u(l_{-1}) < v\gamma^{-1}$. Поэтому область A_2^{+1} разбивается на области $A_2^{+1}_1: -0,5v\gamma^{-1} < u < u(L_{+1})$ и $A_2^{+1}_2: u(L_{+1}) < u < u(\Gamma_{+1})$, такие, что фазовая точка переходит из $A_2^{+1}_1$ в B_1^{+1} а из $A_2^{+1}_2$ в B_3^{+1} . Область A_6^{+1} разбивается на области $A_6^{+1}_1: 0,5v\gamma^{-1} < u < u(l_{-1})$ и $A_6^{+1}_2: u(l_{-1}) < u < v\gamma^{-1}$, такие, что фазовая точка переходит из $A_6^{+1}_1$ в B_2^{-1} , а из $A_6^{+1}_2$ в B_4^{-1} . Область B_3^{+1} , в свою очередь, разбивается на области $B_3^{+1}_1 (u > 0,5v\gamma^{-1})$ и $B_3^{+1}_2: u(L_{+1}) < u < 0,5v\gamma^{-1}$, такие, что фазовая точка переходит из $B_3^{+1}_1$ в A_1^{-1} , а из $B_3^{+1}_2$ в A_2^{-1} . Аналогично разбиваются и области A_2^{-1} , A_6^{-1} , B_3^{-1} на соответствующие части.

Пусть фазовая точка движется некоторое время в области A_1^ζ и затем переходит в область B_1^ζ . Запишем это символически так: $A_1^\zeta \rightarrow B_1^\zeta$. В этой символике для системы S^0 имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_1^\zeta &\rightarrow B_1^\zeta, \quad A_2^{+1} \rightarrow B_1^\zeta, \quad A_2^{-1} \rightarrow B_3^{+1}_2, \quad A_3^\zeta \rightarrow B_3^{+1}_2, \quad A_4^\zeta \rightarrow B_1^{-\zeta}, \\ A_5^\zeta &\rightarrow A_1^{-\zeta}, \quad A_6^{+1} \rightarrow B_1^{-\zeta}, \quad A_6^{-1} \rightarrow B_4^{-\zeta}, \quad B_1^\zeta \rightarrow A_1^{-\zeta}, \quad B_2^\zeta \rightarrow A_1^\zeta, \\ B_3^{+1}_1 &\rightarrow A_1^{-\zeta}, \quad B_3^{+1}_2 \rightarrow A_2^{-1}, \quad B_4^\zeta \rightarrow B_3^{-1} \quad (\zeta = +1, -1). \end{aligned} \quad (6)$$

Фазовая точка в процессе движения находится в каждой области A_i^ζ , B_j^ζ конечный промежуток времени, после чего переходит в другую область фазового пространства. Поэтому каждой фазовой траектории системы S^0 соответствует бесконечная последовательность, составленная из соотношений (6). Если эта последовательность начинается с A_1^ζ или B_1^ζ , то она является циклической, образованной циклами, содержащими четыре различных элемента: $\dots \rightarrow A_1^\zeta \rightarrow B_1^\zeta \rightarrow A_1^{-\zeta} \rightarrow B_1^{-\zeta} \rightarrow A_1^\zeta \rightarrow \dots$. Если же эта последовательность начинается с элементов, отличных от A_1^ζ и B_1^ζ , то, отбросив несколько ее первых членов, опять получим циклическую последовательность указанного вида.

Таким образом, в системе S^0 для любого начального состояния через конечное время устанавливается движение циклического типа $\dots \rightarrow A_1^{+1} \rightarrow B_1^{+1} \rightarrow A_1^{-1} \rightarrow B_1^{-1} \rightarrow A_1^{+1} \rightarrow \dots$. Можно показать, что изучение этого движения сводится к изучению точечного отображения T прямой L_{+1} в себя. Это отображение рассматривалось при изучении системы S^- . Отображение описывается выражением, получающимся из (4) заменой γ на $-\gamma$, и имеет единственную неподвижную точку, устойчивую в большом. Система S^0 имеет соответственно единственный периодический режим работы. Ошибка слежения за экстремумом выхода объекта при работе системы в этом режиме равна $\delta_1(-\gamma)$. Это говорит о том, что система S^0 обладает теми же локальными качествами, что и система S^- .

Глобальные качества системы S^0 могут быть охарактеризованы качеством поиска в той части фазового пространства $\Phi(u, \varphi)$, для которой

$|u| > 0,5 \nu \gamma^{-1}$. Эта часть фазового пространства образована областями $A_1^c, A_5^c, A_{61}^c, A_{62}^c, B_2^c, B_{31}^c, B_4^c$ ($c = +1, -1$). Соотношения (6) позволяют установить, что изучение движений системы S^0 при $|u| > 0,5 \nu \gamma^{-1}$ сводится к изучению движений системы S^0 в областях A_1^+ , A_1^- , т. е. к изучению движений системы S^+ в области $|u| > 0,5 \nu \gamma^{-1}$. Следовательно, система S^0 обладает теми же глобальными качествами, что и система S^+ .

Таким образом, система S^0 сочетает в себе положительные глобальные качества системы S^+ и положительные локальные качества системы S^- .

6. Остановимся кратко на экстремальных системах с оптимизаторами пропорционального типа. Изучению систем такого типа посвящено большое количество работ. Укажем лишь работы [1, 2, 4–6]. Из всего множества инерционных объектов с экстремальной зависимостью выхода от входа можно выделить две большие группы объектов [5]. К первой группе можно отнести объекты, которые могут быть представлены в виде последовательно соединенных нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена, а ко второй те объекты, которые могут быть представлены в виде последовательно соединенных линейного инерционного звена и нелинейного безынерционного звена.

Экстремальные системы пропорционального типа с объектами из первой группы рассматривались в работах [1, 4–6]. Первая попытка исследовать работу такой системы с объектом, имеющим инерционность первого порядка, была сделана в [1]. В этой работе для системы, в которой скорость изменения входа объекта пропорциональна производной от координаты выхода по координате входа объекта, было получено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, описывающее изменение во времени входа объекта при движении фазовой точки в области так называемых «нормальных» движений соответствующего фазового пространства. Более полное исследование этой системы было проведено в работе [5], где было отмечено наличие в фазовом пространстве рассматриваемой системы не только области «нормальных» движений, но и области режимов скольжения. Без изучения режимов скольжения нельзя утверждать, как это сделано в [1], что рассматриваемая система абсолютно устойчива. При изучении экстремальной системы автоколебательного типа, в которой скорость изменения входа объекта постоянна по величине, было обнаружено [7], что в реальной системе наличие области режимов скольжения в соответствующем фазовом пространстве вызывает появление области неустойчивого поиска, в то время как движение в области «нормальных» движений устойчиво. Поэтому при изучении экстремальных систем различных типов необходимо уделять известную долю внимания исследованию режимов скольжения, если они имеют место в этой системе. Изучение режимов скольжения для экстремальной системы пропорционального типа с объектом из первой группы является сложной задачей, требующей исследования нелинейного дифференциально-разностного уравнения. В [5] режимы скольжения не изучались. Однако в этой работе выявлен целый ряд различных помех, имеющих место в реальных системах, не связанных с существованием режимов скольжения, которые могут привести к неустойчивости поиска в системе.

Один путь улучшения качества работы экстремальной системы пропорционального типа с объектом из первой группы был предложен в [1]. Он заимствован из работ В. С. Кулебакина по инвариантности обычных следящих систем и заключается во введении в цепь управления систе-

мы звена с оператором, обратным оператору линейного звена объекта. В этом случае уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u}(t) = \gamma(t-\theta), \quad \eta = \gamma \frac{\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}}{u}. \quad (7)$$

При исчезающем малом запаздывании θ эта система сводится к системе

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = -2\gamma u, \quad (8)$$

которая имеет следующее решение:

$$u = u_0 \exp(-2\gamma t), \quad \varphi = \begin{cases} Cu^{0.5\gamma^{-1}} + (4\gamma - 1)^{-1} u^2, & \text{если } \gamma \neq 0.25 \\ Cu^2 + u^2 \ln u^2, & \text{если } \gamma = 0.25 \end{cases}$$

Фазовые траектории системы (8) изображены на рис. 5. Система (8) имеет единственную устойчивую особую точку типа узла, расположенную в начале координат. Рассмотренная система не имеет, в отличие от системы, рассмотренной в [5], ни режимов скольжения, ни области ненаправленного поиска. Поэтому в идеальной системе, в которой отсутствуют помехи, получаем существенное улучшение качества работы.

Однако в реальной системе, подверженной действию помех, улучшение качества работы получается не таким уж полным. Действительно, можно показать, что если в системе (7) учсть возмущение на выходе безынерционного нелинейного звена объекта, изменяющееся с постоянной скоростью, то поиск устойчивой фазовой точки приходит из любого начального состояния в окрестность координаты u , отвечающей экстремальному значению выхода объекта; размеры этой окрестности пропорциональны величине скорости изменения сигнала-помехи, а движение фазовой точки в этой окрестности описывается нелинейным дифференциально-разностным уравнением и происходит по траекториям

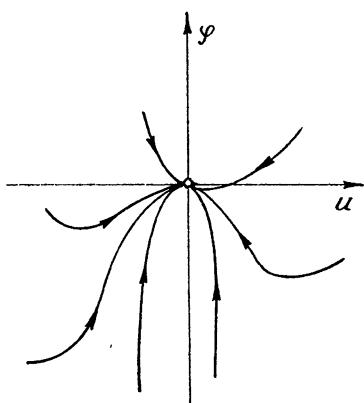


Рис. 5.

режимов скольжения. Если же в системе (7) учсть возмущение на выходе безынерционного нелинейного звена объекта, изменяющееся с постоянной скоростью v , то изменение входа объекта во времени описывается уравнением $\dot{u}(t+\theta) \dot{u}(t) = v - 2u(t)u(t)$. При $\theta=0$ из этого уравнения следует, что $u = -u \pm \sqrt{u^2 + v}$. Если $v > 0$, то на основании последнего равенства нетрудно убедиться в неустойчивости поиска в рассматриваемой системе. Поэтому устранить отрицательное влияние на качество работы экстремальной системы пропорционального типа помехи на выходе нелинейного безынерционного звена объекта, изменяющейся с постоянной скоростью, с помощью введения в цепь управления звена с оператором, обратным оператору линейного звена объекта, не удается.

Экстремальные системы пропорционального типа с объектами из второй группы рассматривались в работах [1, 2, 4]. В этих работах изучались системы, в которых скорость изменения входа объекта предлагалась пропорциональной производной от выхода объекта по координате входа нелинейного безынерционного звена объекта. В [1] было уста-

новлено, что в такой системе с инерционным объектом первого порядка при отсутствии помех поиск устойчив и система имеет единственное состояние равновесия, устойчивое в большом. Однако в [2] было установлено, что при наличии на выходе объекта сигнала-помехи, изменяющейся с постоянной скоростью, в системе может возникнуть неустойчивость поиска.

Экстремальные системы пропорционального типа, в которых скорость изменения входа объекта пропорциональна скорости изменения выхода объекта, рассматривались в работах [1, 6]. В [6] изучалась система с объектом из первой группы. В [1] рассматривались экстремальные системы с объектами из второй группы. Однако в [1] изучение было поверхностным, и поэтому в этой работе были высказаны некоторые неверные рекомендации по улучшению качества работы экстремальных систем подобного типа. Действительно, изучение движения в экстремальной системе пропорционального типа с объектом, представимым в виде последовательно соединенных линейного инерционного звена первого порядка и нелинейного безынерционного звена, в которой вход объекта изменяется со скоростью, пропорциональной скорости изменения выхода объекта, может быть сведено к изучению движений системы

$$\varphi = -u^2, \quad \dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = \gamma \varphi \operatorname{sgn} v. \quad (9)$$

В фазовом пространстве $\Phi(u, v)$ системы (9) фазовая точка движется по траекториям, уравнения которых имеют следующий вид: $v = C - u - \gamma u \operatorname{sgn} v$. Дальше начинается расхождение с результатами, полученными в [1]. Общий вид фазового пространства изображен на рис. 6а. Система (9) имеет отрезок притяжения $(-1/2\gamma, 1/2\gamma)$, каждая точка которого является состоянием равновесия системы (9). Этот отрезок устойчив в большом

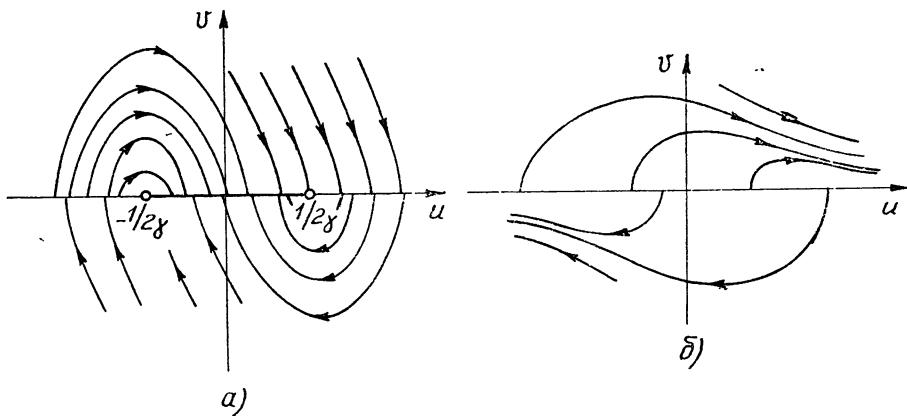


Рис. 6

Для улучшения качества работы рассматриваемой системы в [1] предлагается в цепи управления осуществлять коррекцию по величине v — скорости изменения входа безынерционного нелинейного звена объекта. При этом система (9) принимает следующий вид.

$$\varphi = -u^2, \quad \dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = \gamma \varphi \operatorname{sgn} v - \beta v. \quad (10)$$

Фазовые траектории этой системы описываются уравнением $v = C -$

$-(1+\beta)u - \gamma u^2 \operatorname{sgn} v$. Система (10) имеет отрезок покоя $\left(-\frac{1+\beta}{2\gamma}, \frac{1+\beta}{2\gamma}\right)$

В [1] утверждается, что при $\beta > 0$ качество работы системы (10) выше качества работы системы (9). На самом деле, введение коррекции по v с $\beta > 0$ ухудшает качество работы системы, так как при увеличении отрезка покоя увеличивается и ошибка слежения за экстремальным значением выхода объекта. Улучшение может быть достигнуто лишь при $-1 < \beta < 0$, так как в этом случае отрезок покоя уменьшается. Если же $\beta < -1$, то система становится абсолютно неустойчивой даже при отсутствии помех.

Если в рассматриваемой системе на выходе объекта имеется помеха с постоянной скоростью изменения, то движение в такой системе описывается системой

$$\varphi = -u^2 + vt, \quad \dot{u} = v, \quad \dot{v} + v = \gamma \varphi \operatorname{sgn} v. \quad (11)$$

При $v > 0$ система (11) абсолютно неустойчива. Ее фазовое пространство изображено на рис. 6б.

Если аналогичная помеха имеется в экстремальной системе подобного типа с объектом из первого класса, то поиск также становится неустойчивым [6].

Таким образом, для всех рассмотренных экстремальных систем пропорционального типа характерна потеря устойчивости поиска при появлении на выходе объекта помехи, изменяющейся с постоянной скоростью (увеличивающейся для экстремума — максимума, уменьшающейся для экстремума — минимума). Единственным способом устранения отрицательного влияния на качество работы системы подобных помех является, по-видимому, введение в управляющее устройство коммутаторов различного рода, идея применения которых была выдвинута В. В. Казакевичем [2, 5, 8].

ЛИТЕРАТУРА

- О. М. Крыжановский, В. М. Кунцевич, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 3, 32 (1959).
- А. П. Юркевич, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 6, 30 (1961).
- Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, 26, 1720 (1965).
- О. М. Крыжановский, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 6, 151 (1959).
- Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Приборостроение, № 1, 46 (1964).
- Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Приборостроение, № 3, 18 (1964).
- Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1249 (1963).
- В. В. Казакевич, Труды совещания по автоматическому управлению и вычислительной технике, Машгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 января 1967 г.

DYNAMICS OF ONE-CHANNEL PROPORTIONAL AND RELAY-PROPORTIONAL EXTREMAL SYSTEMS WITH APERIODIC CONTROLLED PLANTS

N. N. Lyeonov

Some aspects of proportional extremal systems noise immunity are considered and a method for improvement of extremal systems performance is suggested.

УДК 517.9 : 621.373.431.3

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ГЕНЕРАТОРА ПИЛООБРАЗНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА *pnp-pnp* ТРАНЗИСТОРАХ

Я. Е. Беленький

В статье выводится система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая движение изображающей точки генератора пилообразного напряжения на транзисторах. Исследуется фазовая плоскость движения и определяются параметры предельного цикла. Выводятся формулы для инженерных расчетов параметров генератора.

Генератор пилообразного напряжения (рис. 1) на *pnp-pnp* транзисторах представляет большой интерес при проектировании высокотехнологичных развертывающих устройств на транзисторах [1]. Помимо высокой линейности изменения напряжения, которую возможно получить в таком генераторе, он также обладает повышенной стабильностью, так как формирование основного пилообразного напряжения происходит при запертых транзисторах, когда изменение параметров транзисторов на длительность импульса сказывается слабо.

Свойства генераторов пилообразного напряжения на *pnp-pnp* транзисторах достаточно не изучены, поэтому представляет интерес рассмотрение возможных движений этих схем методами качественной теории дифференциальных уравнений. Схема генератора собрана на двух триодах T_1 и T_2 типа *pnp-pnp*. В цепи эмиттера одного из триодов T_2 включено сопротивление $R_{\delta 2}$, к эмиттеру этого триода подключена емкость C . Выходное напряжение снимается с этой емкости.

Составим дифференциальное уравнение, описывающее работу данной схемы. Для получения невырожденной математической модели генератора учтем малую паразитную емкость C_2 . Дальнейший анализ покажет, что учет этой емкости позволяет объяснить «скакки» схемы, т. е. она является существенной для объяснения качественной картины работы схемы. В качестве независимых примем напряжение базы — эмиттер обоих триодов и выходное напряжение u .

Уравнения для токов в точках a и b схемы имеют вид

$$\frac{u_1 + E_1}{R_{61}} + \Psi(u_1) = \Phi(u_2) + C_2 \frac{du_{k_2}}{dt}, \quad (1a)$$

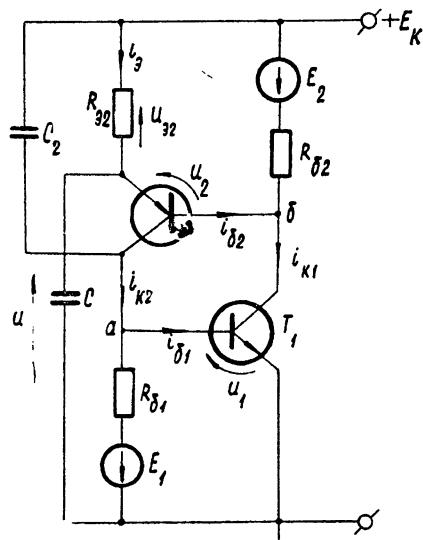


Рис. 1.

$$\frac{u_2 + u_{\vartheta 2} + E_1}{R_{\vartheta 2}} + \Psi(u_2) = \Phi(u_1), \quad (16)$$

где

$$u_{\vartheta 2} = R_{\vartheta 2} \left[\Phi(u_2) + \Psi(u_2) + C \frac{du_c}{dt} \right], \quad (2)$$

$$u_{\kappa 2} = E_{\kappa} - u_1. \quad (3)$$

Функции $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ представляют зависимости соответственно коллекторного и базового тока от напряжения база — эмиттер, E_1 и E_2 — смещения в цепи баз триодов; $R_{\vartheta 2}$, R_6 , $R_{\vartheta 2}$, C_2 и C — величины соответствующих элементов схемы. Функции $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ определяют нелинейные свойства триодов и аппроксимируются следующими выражениями:

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & (u \leq 0) \\ Su & (u > 0) \\ Su_{1\text{нас}} & (0 < u \leq u_{1\text{нас}}) \end{cases}, \quad (4a)$$

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0 & (u \leq 0) \\ u/h_{11} & (u > 0) \end{cases}, \quad (4b)$$

где S — крутизна триода, равная β/h_{11} , h_{11} — входное сопротивление постоянному току, $u_{1\text{нас}}$ — напряжение база — эмиттер, при котором наступает режим насыщения триодов при данных значениях коллекторного напряжения и нагрузок в цепях триодов. Если полагать, что $u_{\vartheta 2}$ и $u_{\kappa 2}$ триодов в режиме насыщения существенно меньше E_{κ} , то напряжение насыщения для обоих триодов можно определить из соотношений

$$u_{1\text{нас}} = E_{\kappa} \left[S \frac{R_{\vartheta 2}(R_{\vartheta 2} + h_{11})}{R_{\vartheta 2} + R_{\vartheta 2} + h_{11}} \right]^{-1}, \quad (5a)$$

$$u_{2\text{нас}} = E_{\kappa} \left[S \left(R_{\vartheta 2} + \frac{R_{61} h_{11}}{R_{61} + h_{11}} \right) \right]^{-1}. \quad (5b)$$

Если один из триодов заперт, когда другой находится в режиме насыщения, то в соответствующей формуле необходимо принять $h_{11} = \infty$. После несложных упрощений и введения относительных величин напряжений и времени система уравнений (1a), (1b), (2) приводится к виду

$$\mu \dot{x}_1 = -x_1 - e_1 + K_{1\vartheta}(x_2) - b_1 \psi(x_1) = P(x_1, x_2), \quad (6a)$$

$$y = -x_2 - b_2 \psi(x_2) - e_2 + K_{1\vartheta}(x_1) = Q(x_1, x_2), \quad (6b)$$

$$\dot{y} = -y + \sigma [\varphi(x_2) + c \psi(x_2)], \quad (6v)$$

где $\mu = \frac{C_2 R_6}{C R_{\vartheta 2}} \rightarrow 0$, так как $C_2 \ll C$, $x_{1,2} = u_{1,2}/e$, e — напряжение при ведения (примем $e = 18$), $e_{1,2} = E_{1,2}/e$, $K_{1,2} = S_{1,2} R_{61,2}$, $b_{1,2} = R_{61,2}/h_{11}$, $y = E_{\kappa} - u = u_{\vartheta 2}$, $\sigma = S_2 R_{\vartheta 2}$, $c = 1/S h_{11}$, $t = t' C R_{\vartheta 2}$, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \\ x_{1\text{нас}} & (x \geq x_{1\text{нас}}) \end{cases}, \quad (7a)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}, \quad (7b)$$

причем производные взяты по времени t' .

Генератор пилообразного напряжения на $rpr-pnp$ триодах описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром μ при производной x_1 . Уравнение (6б) является уравнением связи.

Очевидно, что движение изображающей точки данной схемы в фазовом пространстве должно состоять из медленных движений с постоянной времени порядка $\tau_{\text{в2}} = R_{\text{в2}} C$ и быстрых движений с постоянной времени порядка $\mu \tau_{\text{в2}}$ [2].

Изучим вначале медленные движения схемы, т. е. движение изображающей точки, описываемое вырожденной системой уравнений, когда $\mu=0$. В этом случае вырожденная система уравнений будет иметь точки равновесия, координаты x_1 и x_2 которых получаются в результате пересечения кривых $P(x_1, x_2) = 0$ и $Q(x_1, x_2) = \sigma[\varphi(x_2) + c\psi(x_2)]$.

Проведем построение указанных кривых в плоскости x_1x_2 для случая отрицательных смещений. Кривая $P(x_1, x_2) = 0$ состоит из отдельных участков, которые определяются значениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Первый участок получим при $x_1, x_2 < 0$:

$$x_1 = -e_1; \quad (8\alpha)$$

второй участок при $x_1 < 0, x_2 > 0$:

$$x_2 = (x_1 + e_1)/K_2; \quad (8\beta)$$

третий участок при $x_1 > 0, 0 < x_2 < x_{2\text{нас}}$:

$$x_2 = \frac{x_1(b_1 + 1) + e_1}{K_2}. \quad (8\gamma)$$

И, наконец, последний участок получаем при $x_1 > 0, x_2 \geq x_{2\text{нас}}$:

$$x_{1m} = \frac{K_2 x_{2\text{нас}} - e_1}{b_1 + 1}. \quad (8\delta)$$

Аналогичным образом строим по участкам кривую

$$Q(x_1, x_2) = \sigma[\varphi(x_2) + c\psi(x_2)].$$

Первый участок при $x_1, x_2 < 0$:

$$x_2 = -e_2; \quad (9\alpha)$$

второй участок при $x_1 > 0, x_2 < 0$:

$$x_2 = K_1 x_1 - e_2; \quad (9\beta)$$

третий участок при $x_1, x_2 > 0$:

$$x_2 = \frac{K_1 x_1 - e_2}{\sigma + \sigma c + b_2 + 1}. \quad (9\gamma)$$

Четвертый участок в зависимости от того, какая из переменных достигнет величины $x_{\text{нас}}$, может быть представлен двумя выражениями: если раньше достигнет величины насыщения величина x_2 , то уравнение четвертого участка имеет вид

$$x_2 = K_1 x_{1\text{нас}} - e_2 - (\sigma + \sigma c + b_2) x_{2\text{нас}}, \quad (9\delta)$$

если раньше достигает величины насыщения величина x_1 , то четвертый участок будет последним и его уравнение имеет вид

$$x_2 = \frac{K_1 x_{1\text{нас}} - e_2}{\sigma + \sigma c + b_2 + 1}. \quad (9\epsilon)$$

Наконец, для первого случая получаем последний пятый участок кривой

$$x_2 = K_1 x_{1\text{нас}} - e_1 - (s + \sigma c + b_2) x_{2\text{нас}}. \quad (9)$$

На рис. 2а изображены кривая P и две кривых Q , одна из которых состоит из пяти участков (кривая Q_1), а другая — из четырех (кривая Q_2).

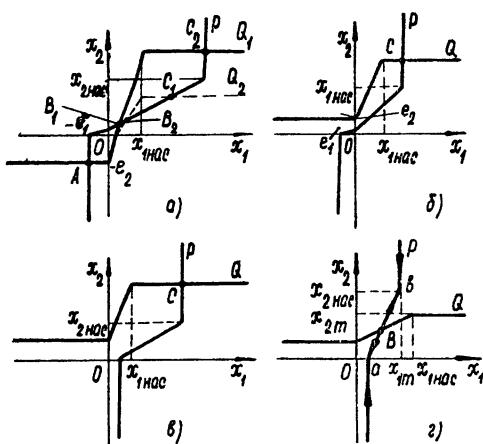


Рис 2

одну точку равновесия типа C (рис. 2б и в), а также возможно получение точки равновесия типа B (рис. 2г), если тангенсы углов наклона отрезков на вторых участках обеих кривых будут лодчинены соотношению

$$\frac{K_1}{\sigma(1+c)+(b_2+1)} < \frac{b_1+1}{K_2}. \quad (10)$$

Третью координату y точек равновесия легко определить из соотношения $y = \sigma[\varphi(x_2) + c\psi(x_2)]$.

Отметим, что кривая $P(x_1, x_2) = 0$, как следует из (6а), является следом поверхности $P(x_1, x_2) = 0$, в которой происходят медленные движения. Поэтому медленные движения, которые описываются вырожденной системой уравнений, могут происходить в плоскости x_1, x_2 лишь по кривой $P(x_1, x_2) = 0$.

Определим характер точек равновесия A , B и C , для чего составим характеристический определитель системы (6а) — (6в), и, полагая $\mu = 0$, получим корень, определяющий медленное движение. Обозначая координаты точек равновесия через x_{10}, x_{20}, y_0 , перейдем к новым переменным $\eta_1 = x_1 - x_{10}$, $\eta_2 = x_2 - x_{20}$, $\xi = y - y_0$. Характеристический определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mu\lambda + 1 + b_1\psi'(x_{10}) & -K_2\varphi'(x_{20}) & 0 \\ 0 & \sigma[\varphi'(x_{20}) + c\psi'(x_{20})] & -(\lambda + 1) \\ K_1\varphi'(x_{10}) & -[1 + b_2\psi'(x_{20})] & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

При $\mu = 0$ получим

$$\lambda = -[K_1\varphi'(x_{10}) K_2\varphi'(x_{20}) - \{\sigma\varphi'(x_{20}) + c\psi'(x_{20})\} + 1 + b_2\psi'(x_{20})][1 + b_1\psi'(x_{10})] \{K_1\varphi'(x_{10}) K_2\varphi'(x_{20}) - [1 + b_1\psi'(x_{10})][1 + b_2\psi'(x_{20})]\}^{-1}, \quad (12)$$

При смещениях $e_1, e_2 > 0$ вторые участки кривых исчезают, изменяются также координаты первого участка кривой Q , остальные особенности кривых остаются без изменения.

В случае двух запирающих смещений система имеет три точки равновесия: типа A , характеризующая состояние схемы, когда триода заперты; типа B , характеризующая состояние схемы, когда оба триода находятся на активном участке; и типа C , характеризующая состояние схемы, когда один или оба триода насыщены (точки C_1 и C_2).

При изменении знака одного или обоих смещений система имеет

Анализ этого корня показывает, что если точка равновесия расположена в любой области, где хотя бы один из триодов заперт или насыщен ($\varphi'(x_0) = \psi'(x_0) = 0$), то корень будет отрицательным, а точка равновесия устойчивой. Это обстоятельство относится к точкам равновесия типа *A* и *C*. Система приходит в соответствующую точку равновесия и движение ее прекращается. Если оба триода будут открыты, то величина корня

$$\lambda = -\frac{K_1 K_2 - [\sigma(1+c) + 1 + b_2](1 + b_1)}{K_1 K_2 - (1 + b_1)(1 + b_2)}, \quad (13)$$

и если

$$K_1 K_2 > (1 + b_1)(1 + b_2), \quad (14a)$$

то

$$K_1 K_2 < [\sigma(1+c) + 1 + b_2](1 + b_1). \quad (14b)$$

Знак корня станет положительным, а точка равновесия неустойчивой. Если условие (14a) не выполняется, то корень всегда будет отрицательным, и такой случай нас интересовать не будет. Условие (14b) тождественно совпадает с условием (10), т. е. неустойчивая точка равновесия медленного движения, представляющая наибольший интерес при получении автоколебательного режима схемы, появляется лишь в случае расположения кривых *P* и *Q*, показанного на рис. 2г.

Проекция траектории изображающей точки в плоскости $x_1 x_2$ будет совпадать с кривой $P(x_1, x_2) = 0$, изображающая точка по прямой $x_1 = e_1$ или $x_1 = x_{1m}$ будет приближаться соответственно к точкам *a* и *b*, так как при $x_2 < 0$ или $x_2 > x_{2m}$ значение λ будет отрицательным. На отрезке *ab* изображающая точка будет удаляться от точки равновесия *B* к точкам *a* и *b*. Таким образом, точки *a* и *b* являются проекциями точек стыка фазовых траекторий, в которые фазовые траектории только входят. Естественно, что это — результат исследования «дефектной» модели генератора. Для устранения этого дефекта необходимо рассмотреть систему в целом с учетом малого паразитного параметра C_2 .

Точки равновесия быстрого движения расположены на поверхности $P(x_1, x_2) = 0$ (рис. 3), а их характер определяется значением второго быстрого корня характеристического уравнения (11) при $\mu \rightarrow 0$, который равен

$$\lambda = \frac{K_1 \varphi'(x_{10}) K_2 \psi'(x_{20}) - [1 + b_1 \varphi'(x_{10})] [1 + b_2 \psi'(x_{20})]}{\mu [1 + b_2 \psi'(x_{20})]}. \quad (15)$$

При выполнении неравенства (14a) знак корня будет положительным лишь в области, где оба триода находятся на активных участках своих характеристик. В остальных случаях система скачком приходит на поверхность $P(x_1, x_2) = 0$, в которой совершаются медленные движения. Фазовая траектория медленного движения задается уравнением (66) и при $x_1, x_2 < 0$ имеет вид

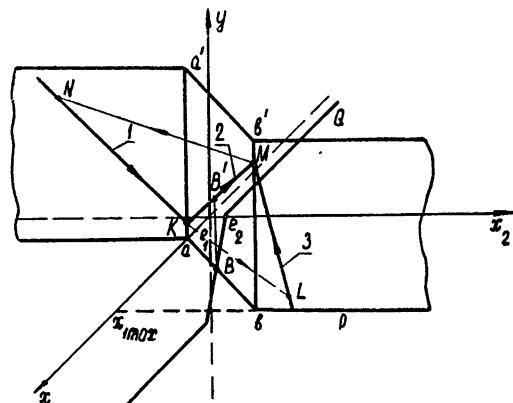


Рис. 3

$$y = -x_2 + e_2 + K_1 e_1, \quad (16a)$$

а при $x_2 > x_{2\text{нас}}$

$$y = -x_2(1+b_2) + e_2 + K_1 x_{1m}, \quad (16b)$$

где $x_{1m} = (K_2 x_{2\text{нас}} + e_1)/(1+b_1)$, что следует из уравнения (8г).

Уравнение падающего участка траектории медленного движения представляется как

$$y = x_2 \left(\frac{K_1 K_2}{1+b_1} - 1 - b_2 \right) + e_2 + \frac{K_1 e_1}{1+b_2}. \quad (16b)$$

На рис 3 показаны отрезки 1 и 3 интегральной кривой, соответствующие уравнениям (16а) и (16б), по которым совершается медленное движение и указано направление движения изображающей точки. Отрезок 2 соответствует уравнению (16в), изображающая точка, попав на этот отрезок, скачком «перепрыгивает» на отрезок 1 или 3. Если исходные координаты изображающей точки будут несовместимы с уравнениями этих прямых, то изображающая точка скачком перейдет на эти прямые, в дальнейшем движение ее будет совершаться по этим прямым. Отметим также, что скорость движения по прямой 1 имеет порядок λ_1/τ_{e2} , так как величина корня в этой области равна -1 , а по прямой 3 $-\lambda_3/\tau_{e2}$, где $\lambda_3 = -\left[1 + \frac{\varepsilon(1+c)}{(1+b_1)(1+b_2)}\right]$. При достаточно большой величине эмиттерного сопротивления λ_3 по абсолютной величине заметно больше λ_1 и скорость движения по прямой 3 достаточно велика. Это позволяет назвать движение по прямой 3 полубыстрым, оно соответствует обратному ходу генератора.

Таким образом, движение изображающей точки осуществляется следующим образом. При произвольных начальных условиях изображающая точка скачком попадает на отрезки 1 и 2. Примем для определенности, что изображающая точка попадает на отрезок 1. В процессе медленного движения она достигает начала отрезка 2 (точки K) и затем скачком перепрыгивает на отрезок 3 в точку L . По нему в процессе полубыстрого движения изображающая точка попадает в точку M и затем скачком перепрыгивает на отрезок 1 и т. д. Очевидно, что замкнутая кривая $KLMN$ будет представлять замкнутый предельный цикл, к которому стремится в процессе работы пилообразного генератора изображающая точка. Доказательство его единственности, а тем самым и предельности вытекает из теории характеристических определителей [2].

Определим координаты концевых точек K , L , M и N отрезков, по которым осуществляется движение изображающей точки, используя условие скачка $y_K = y_L$ и $y_M = y_N$, после чего можно будет определить исходные параметры предельного цикла: время медленного движения и амплитуду пилообразного напряжения.

Координаты точки K известны: $x_{1K} = e_1$, $x_{2K} = 0$, $y = e_2 + K_1 e_1$. Две координаты точки L также известны: $x_{1L} = x_{1m}$, $y_L = e_2 + K_1 e_1$, последнюю координату получаем из выражения (16б):

$$x_{2L} = \frac{K_1}{1+b_2} \left[\frac{K_2 x_{2\text{нас}} + e_1}{1+b_1} - e_1 \right].$$

Для точки M известны две координаты: $x_{1M} = x_{1m}$ и $x_{2M} = x_{2\text{нас}}$, третью координату находим из выражения (16б):

$$y_M = -x_{2\text{нас}}(1+b_2) + e_2 + K_1 x_{1m}.$$

Для точки N известны координаты $x_{1N} = e_1$ и $y_N = y_M$, третья координата определяется из уравнения (16а):

$$x_{2N} = x_{2\text{рас}}(1+b_2) - K_1 x_{1m} + K_1 e_1.$$

Время медленного движения определяется как время, за которое величина y изменится на величину $y_N - y_K$. Учитывая, что координата y на отрезке NK изменяется во времени по закону

$$y = y_N \exp(-t/\tau_{\text{з2}}), \quad (17)$$

для длительности медленного движения получим выражение

$$T = \tau_{\text{з2}} \ln \frac{y_M}{e_2 + K_1 e_1}, \quad (18)$$

а для амплитуды пилообразного напряжения

$$u_n = y_N - (e_2 + K_1 e_1). \quad (19)$$

В заключение отметим, что схема шилообразного генератора может быть ждущей, если создать точку равновесия типа A или C (рис. 2). В первом случае импульс запуска должен переводить систему в область неустойчивости быстрого движения, т. е. отпирать триоды, во втором случае—запирать. Ждущая схема, у которой устойчивое состояние сохраняется, когда один триод открыт, а другой насыщен, может найти применение в качестве чувствительного амплитудного дискриминатора, так как для вывода из режима насыщения при достаточно больших сопротивлениях схемы необходимо подать весьма малое (менее 100 мв) напряжение запуска.

Вывод расчетных формул и экспериментальная проверка. Использование формул (18) и (19) для расчета параметров схемы встречает большие трудности, поскольку их вывод основан на неточной аппроксимации характеристик триодов и они содержат параметры триодов S и h_{11} , которые на участке аппроксимации не остаются постоянными. Их величина зависит от режима работы триодов: напряжения питания и сопротивлений. Поэтому возникает необходимость в экспериментальной проверке соотношений (16а)—(16в) и выводе формул (18)—(19), быть может, менее точных, но практически позволяющих провести удовлетворительный расчет схемы при сохранении всех особенностей качественной картины работы.

Была собрана схема на транзисторах П-11 и П-13 со следующими параметрами: $R_{61}=R_{62}=9,1$ ком, $R_{\text{з2}}=47$ ком, $C=2\text{мф}$, $E_k=5\text{в}$, $E_2=-0,5$ в, $E_1=I_{\text{ко}}$, $R_{61}=0,05\text{в}$.

На рис. 4 представлена проекция замкнутого цикла на плоскости yx_2 для этой схемы. Координаты точек сопряжения предельного цикла в вольтах приведены в таблице 1.

Уравнения прямых NK и LM соответственно равны

$$y_{NK} = -1,05 x_2 + 1,2, \quad y_{LM} = -4,9 x_2 + 6.$$

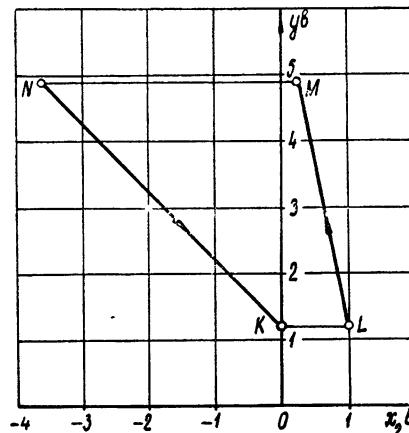


Рис. 4.

Для совпадения этих соотношений с уравнениями (16а) и (16б) необходимо принять следующие значения параметров триодов:

$$S_1 = S_2 = 0,45 \text{ м}a \cdot \text{в}^{-1}, \quad h_{11}^{(1)} \gg R_{61}, \quad h_{11}^{(2)} = 2,3 \text{ ком},$$

откуда могут быть получены и такие величины, как $x_{1m} = 1\text{в}$, $x_{1\text{нас}} \approx 1,2 \text{ в}$, $x_{2\text{нас}} \approx 0,22 \text{ в}$.

Таблица 1

Координаты	Точки			
	K	L	M	N
x_2	0	~ 1	0,24	-3,6
y	1,2	$\sim 1,2$	4,9	4,9

Такая малая крутизна получается вследствие того, что рабочий участок триодов сравним с напряжением, при котором наступает их фактическое отпирание ($0,15 \div 0,2$ в). Уменьшать сопротивление R_{92} для увеличения крутизны триодов нельзя, так как при этом нарушится условие возбуждения (14б), которое приводится к неравенству

$$S_1 R_{61} R_{62} \ll R_{92}. \quad (20)$$

При изменении смысла этого неравенства автоколебание срывается и схема обладает устойчивой точкой равновесия, при которой второй триод насыщен, а первый открыт. Выполнение неравенства (20) в реальных схемах позволяет существенно упростить расчет, так как из него следует, что

$$x_{1m} \approx x_{1\text{нас}}. \quad (21)$$

При замене в выражениях (18) и (19) x_{1m} величиной $x_{1\text{нас}}$ для времени медленного процесса получим выражение при $e_1 = 0$

$$T = R_{92} C \ln \left[1 + \frac{E_k}{e_2} - \frac{(1+b_2) E_k}{S_2 R_{92} e_2} \right] \approx R_{92} C \ln \frac{E_k}{e_2}, \quad (22)$$

а для амплитуды

$$u_n = E_k - e_2. \quad (23)$$

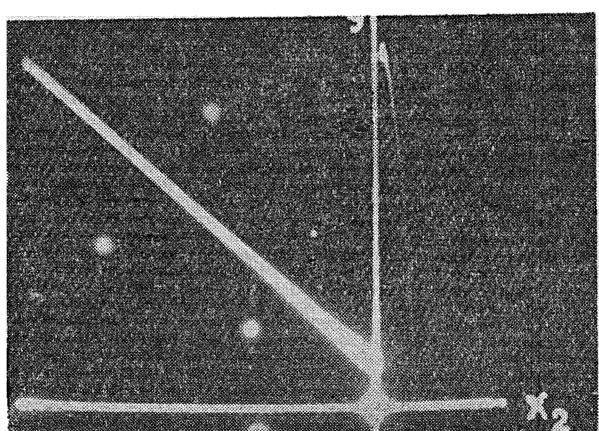


Рис. 5.

происходит от нуля до величины $E_k - e_2$, при которой отпирается второй триод.

Соотношения (22) и (23) не определяются параметрами триодов и дают совпадение с экспериментом в пределах $\pm 5\%$. Несложно физически установить причину, почему длительность и амплитуда импульсов пилообразного генератора почти не зависят от параметров триодов. Основные процессы, которые обусловливают длительность, происходят, когда триоды заперты, за это время изменение амплитуды

На рис. 5 приведена осциллограмма предельного цикла испытуемой схемы в координатах (y_1x_2) , а также траектории изображающей точки при различных начальных условиях. Характер осциллограммы подтверждает теоретически полученную качественную картину работы генератора пилообразного напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Хекимиан, Новый взгляд на схемы, построенные на транзисторах, кн. Электронника, № 49, ИЛ, М., 1962
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, М., 1959.

Физико-механический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
3 января 1967 г.

QUALITATIVE THEORY FOR THE SAWTOOTH VOLTAGE GENERATOR WITH *pnp-npn* TRANSISTORS

Ja. Je. Byelyenki

The system of nonlinear differential equations for the description of the transistor sawtooth voltage generator representative point motion is derived in this paper. The phase plane for this problem was studied and parameters of the limit cycle were estimated. Formulas for engineering calculations of the generator parameters are developed.

УДК 517.941.92

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ КОНЕЧНЫХ ВАРИАЦИЯХ ПАРАМЕТРОВ

C. B. Шильман

Излагается метод анализа чувствительности линейных динамических систем при конечных вариациях параметров. Метод основан на аппроксимации динамического процесса с помощью конечного числа членов разложения по системе ортонормированных функций от вариаций параметра.

Основное внимание в теории чувствительности уделяется изучению влияния достаточно малых изменений параметров [1]. При этом дополнительное движение динамической системы аппроксимируется конечным числом членов разложения Тейлора (чаще всего одним) по варьируемому параметру. Путем определения функций влияния, являющихся коэффициентами этого разложения, устанавливается зависимость дополнительного движения от малых вариаций параметра.

Однако во многих приложениях теории чувствительности встречаются задачи, для решения которых требуется исследовать влияния не столько малых, сколько конечных вариаций параметров. Использование разложения Тейлора для анализа чувствительности при конечных вариациях часто не обеспечивает приемлемой точности, тем более, что в некоторых случаях ряд Тейлора может совсем расходиться. В ряде работ [1-3] для исследования конечных вариаций используется метод варьируемого звена. Этот метод позволяет найти дополнительное движение при заданном изменении параметра, но не позволяет установить функциональную связь между ними.

В работе излагается метод анализа чувствительности линейных динамических систем при конечных вариациях их параметров. Метод основан на аппроксимации движения системы с помощью конечного числа членов разложения по системе ортонормированных функций от вариаций параметра. С помощью преобразования Лапласа находятся линейные дифференциальные операторы, которые определяют функции, являющиеся коэффициентами этого разложения. Показывается, что этим операторам соответствуют трансцендентные функции комплексного переменного. Предлагается метод их разложения с помощью дробно-рациональных функций, вычисление которых не требует знания самих операторов. Изучаются сходимость и некоторые свойства этого разложения на плоскости комплексного переменного. Устанавливается связь коэффициентов рассматриваемой аппроксимации с обычными функциями чувствительности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется линейная динамическая система, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(x)y + f(t), \\ y(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{1}$$

где $y(t), f(t)$ — вектор функции, $A(x)$ — квадратная $n \times n$ матрица, зависящая от параметра x , x — скаляр, $|x| \leq 1$. Предполагаем, что $A(x)$ непрерывна от x в интервале $[-1, 1]$, $f(t)$ — интегрируема по t . Тогда решение системы (1) — $y(t, x)$ при заданных начальных условиях и $|x| \leq 1$ будет непрерывным по обоим аргументам.

Аппроксимируем зависимость $y(t, x)$ от параметра в интервале $[-1, 1]$ с помощью выражения

$$\tilde{y}(t, x) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i(t) \varphi_i(x), \quad (2)$$

где $k_i(t)$ — вектор-функция, $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, l-1$) образуют систему из l ортонормированных функций в гильбертовом пространстве интегрируемых в квадрате с весом $\rho(x) \geq 0$ функций:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{(при } i \neq k) \\ 1 & \text{(при } i = k) \end{cases}$$

В качестве меры уклонения $\tilde{y}(t, x)$ от $y(t, x)$ возьмем функционал

$$D(y, \tilde{y}) = \int_0^T \int_{-1}^{+1} \mu(t) \rho(x) |y(t, x) - \tilde{y}(t, x)|^2 dx dt.$$

Здесь $T > 0$, в частности, T может быть бесконечным; $\mu(t) \geq 0$, $\rho(x) \geq 0$.

Задача заключается в том, чтобы найти систему вектор-функций $k_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, l-1$).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ $k_i(t)$

Рассмотрим линейное нормированное пространство H вектор-функций $y(t, x)$, квадрат модуля которых дважды интегрируем с весом $\mu(t)$ $\rho(x)$. Норма $y(t, x)$ определяется равенством

$$\|y(t, x)\| = \left(\int_0^T \int_{-1}^{+1} \mu(t) \rho(x) |y(t, x)|^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

Пусть $\tilde{y}(t, x)$, определяемые соотношением (2), образуют подпространство $G \in H$.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием того, чтобы $\tilde{y}(t, x) \in G$ давало наилучшую аппроксимацию $y(t, x) \in H$, является соотношение

$$k_i(t) = \int_{-1}^{+1} \rho(x) y(t, x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 0, 1, \dots, l-1). \quad (3)$$

Доказательство. Наилучшая аппроксимация $\tilde{y}^*(t, x) \in G$ определяется условием $\min D[y, \tilde{y}]$; $D[y, \tilde{y}]$ является функционалом относительно неизвестных $k_i(t)$. Необходимое условие минимума этого функционала как раз и дает равенства

$$k_i^*(t) = \int_{-1}^{+1} \rho(x) y(t, x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 0, 1, \dots, l-1),$$

Покажем, что это условие является и достаточным. Для этого возьмем произвольную вектор-функцию $\tilde{y}(t, x) \in G$ и сравним $D(y, \tilde{y})$ с $D(y, \tilde{y}^*)$. Нетрудно установить, что

$$D(y, \tilde{y}) - D(y, \tilde{y}^*) = \int_0^T \mu(t) \sum_{i=0}^{l-1} |k_i(t) - k_i^*(t)|^2 dt \geq 0. \quad (4)$$

Отсюда следует, что аппроксимация любым элементом, принадлежащим G , отличным от $\tilde{y}^*(t, x)$, не дает уменьшения уклонения.

Проверим, принадлежит ли элемент $y^*(t, x)$ пространству G и H :

$$\| \tilde{y}^*(t, x) \| = \left(\int_0^T \mu(t) \left[\sum_{i=0}^{l-1} |k_i^*(t)|^2 \right] dt \right)^{1/2}. \quad (5)$$

В силу неравенства Бесселя [4],

$$\sum_{i=0}^{l-1} |k_i^*(t)|^2 \leq \int_{-1}^{+1} \rho(x) |y(t, x)|^2 dx,$$

отсюда

$$\| \tilde{y}^*(t, x) \| \leq \int_0^T \int_{-1}^{+1} \mu(t) \rho(x) |y(t, x)|^2 dx dt \leq \| y(t, x) \|.$$

Заметим, что равенство (4) позволяет оценить аппроксимацию любым другим $\tilde{y}(t, x)$ по сравнению с $\tilde{y}^*(t, x)$.

Полученное через интеграл от $y(t, x)$ выражение для $k_i^*(t)$ с определенным весом дает основание называть функции $k_i^*(t)$ интегральными функциями чувствительности (ИФЧ) в отличие от функций чувствительности, получаемых путем дифференцирования по параметру [1].

Теперь пусть $y(t, x)$ является решением системы (1). Будем искать соответствующие ей ИФЧ $k_i^*(t)$. Введем функции

$$k_i(t, x) = \int_{-1}^x \rho(\lambda) y(t, \lambda) \varphi_i(\lambda) d\lambda.$$

Очевидно, $k_i(t, 1) = k_i^*(t)$ и

$$\frac{\partial k_i(t, x)}{\partial x} = \rho(x) \varphi_i(x) y(t, x). \quad (6)$$

Умножим систему уравнений (1) слева и справа последовательно на $\rho(x) \varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, l-1$). С учетом соотношения (6) получим l систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_i(t, x)}{\partial x \partial t} &= A(x) \frac{\partial k_i(t, x)}{\partial x} + \rho(x) \varphi_i(x) f(t), \\ \frac{\partial k_i(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=0} &= y_0 \rho(x) \varphi_i(x) \\ (i &= 0, 1, \dots, l-1). \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения этих уравнений можно использовать преобразование Лапласа по переменному t . Обозначив через $K_i(p, x) \doteq k_i(t, x)$ и переходя в (7) к изображениям, получим

$$p \frac{\partial K_i(p, x)}{\partial x} = A(x) \frac{\partial K_i(p, x)}{\partial x} + \rho(x) \varphi_i(x) \Psi(p), \quad (8)$$

где $\Psi(p) = F(p) + F_n(p)$, $F(p) \doteq f(t)$, $F_n(p)$ — составляющая за счет начальных условий.

Перемена порядка интегрирования по t и дифференцирования по x при переходе к (8) допустима, поскольку для $\frac{\partial K_i(p, x)}{\partial x} = \rho(x) \varphi_i(x) Y(p, x)$ существует сходящееся равномерно по x обратное преобразование Лапласа $Y(p, x) \doteq y(t, x)$.

Из (8) находим

$$\frac{\partial K_i(p, x)}{\partial x} = [Ep - A(x)]^{-1} \rho(x) \varphi_i(x) \Psi(p), \quad (9)$$

где E — единичная матрица. Интегрируя левую и правую часть (9) по x от -1 до $+1$, получим

$$K_i^*(p) = \left\{ \int_{-1}^{+1} [Ep - A(x)]^{-1} \rho(x) \varphi_i(x) dx \right\} \Psi(p), \quad (10)$$

$$K_i(p) \doteq k_i^*(t).$$

Вектор-функции

$$B_i(p) = \int_{-1}^{+1} [Ep - A(x)]^{-1} \rho(x) \varphi_i(x) dx \quad (11)$$

при $p = \frac{d}{dt}$ будем называть операторами чувствительности.

В тех случаях, когда система имеет один вход, а нас интересует один выходной сигнал, выражение (10) примет вид

$$K_i^*(p) = B_i(p) \Psi(p),$$

$$B_i(p) = \int_{-1}^{+1} \rho(x) W(p, x) \varphi_i(x) dx,$$

где $K_i^*(p)$, $\Psi(p)$ — функции переменного p , $W(p, x)$ — коэффициент передачи системы от входа к заданному выходу.

Пример. Рассмотрим систему с одним входом $f(t)$ и одним выходом $y(t, x)$. Пусть

$$W(p, x) = \frac{M(p) + M_1(p)x}{N(p) + N_1(p)x},$$

где $M(p)$, $N(p)$, $M_1(p)$ и $N_1(p)$ — полиномы.

Такой вид коэффициент передачи имеет, в частности, в тех случаях, когда варьируемым параметром являются постоянная времени или коэффициент усиления одного из звеньев системы. В качестве системы ортонормированных функций возьмем два полинома Лежандра с весом $\rho(x) = 1$, $\varphi_0 = 1/\sqrt{2}$, $\varphi_1 = \sqrt{3/2}x$. Тогда $\tilde{y}^*(t, x) = (1/\sqrt{2}) k_0^*(t) + \sqrt{3/2} x k_1^*(t)$. Найдем соответствующие $k_0^*(t)$ и $k_1^*(t)$ операторы чувствительности:

$$B_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{M(p) + xM_1(p)}{N(p) + xN_1(p)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2 \frac{M_1(p)}{N_1(p)} + \frac{M(p)N_1(p) - N(p)M_1(p)}{N_1^2(p)} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{N(p) + N_1(p)}{N(p) - N_1(p)} \right],$$

$$B_1(p) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{M(p) + xM_1(p)}{N(p) + xN_1(p)} x dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{M(p)N_1(p) - N(p)M_1(p)}{N_1^2(p)} \times \right. \\ \left. \times \left[2 - \frac{N(p)}{N_1(p)} \ln \frac{N(p) + N_1(p)}{N(p) - N_1(p)} \right] \right\}.$$

Выражение $\ln \frac{N(p) + N_1(p)}{N(p) - N_1(p)}$ можно разложить в ряд вида

$$\ln \frac{N(p) + N_1(p)}{N(p) - N_1(p)} = 2 \left\{ \frac{N_1(p)}{N(p)} + \frac{1}{3} \left[\frac{N_1(p)}{N(p)} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{N_1(p)}{N(p)} \right]^5 + \dots + \right\}.$$

Тогда, если учесть только первый член ряда, получим

$$B_0(p) \simeq \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{2}{\sqrt{2}} W(p, 0),$$

$$B_1(p) \simeq 0.$$

Если взять два члена ряда, то

$$B_0(p) \simeq \frac{2}{\sqrt{2}} \left\{ W(p, 0) - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial W(p, x)}{\partial x} \right]_{x=0} \frac{N_1(p)}{N(p)} \right\},$$

$$B_1(p) \simeq \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{\partial W(p, x)}{\partial x} \right]_{x=0}.$$

В последнем случае $B_1(p)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с обычной функцией чувствительности в комплексной области [1].

3. О РАЗЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Формула (11) для вычисления операторов чувствительности не всегда позволяет найти их в конечном виде. В тех же случаях, когда это удается (как в приведенном примере), мы получаем трансцендентные операторы. Реализация таких операторов, в частности, на математических моделях связана с известными трудностями. Ниже предлагается способ разложения операторов чувствительности с помощью дробно-рациональных функций. Этот способ не требует знания самих операторов и поэтому позволяет изучить их общие свойства. Кроме того, такое разложение дает возможность с любой степенью точности получить реализацию операторов чувствительности.

а) Рассмотрим сначала частную задачу, однако достаточно типичную для систем автоматического регулирования. Пусть динамическая система имеет один выход $y(t)$ при одном входе $f(t)$. Уравнение системы в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях пусть имеет вид

$$Y(p, x) = W(p, x) F(p),$$

где

$$Y(p, x) \rightarrow y(t, x),$$

$$F(p) \rightarrow f(t),$$

$$W(p, x) = \frac{M(p) + xM_1(p)}{N(p) + xN_1(p)},$$

$M(p)$, $N(p)$, $M_1(p)$, $N_1(p)$ — такие полиномы, что степень числителя $W(p, x)$ не превышает степень его знаменателя.

С учетом выражения для $W(p, x)$ уравнение (12) может быть записано в виде

$$Y(p, x) [N(p) + xN_1(p)] = [M(p) + xM_1(p)] F(p). \quad (13)$$

Будем искать аппроксимацию $y(t, x)$ с помощью l первых полиномов из любой полной бесконечной системы ортонормированных полиномов [5]: $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{l-1}(x)$. Заметим, что при $l \rightarrow \infty$ получим разложение $y(t, x)$ в ряд вида

$$y(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(t) \varphi_i(x), \quad (14)$$

соответственно

$$Y(p, x) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(p) \varphi_i(x). \quad (15)$$

Теперь подставим $Y(p, x)$ в виде (15) в уравнение (13). Затем умножим левую и правую части (11) последовательно на $\rho(x) \varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots$) и проинтегрируем по x в интервале $[-1, 1]$. Получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $K_m(p)$:

$$\begin{aligned} N(p)K_m(p) + N_1(p) \sum_{i=0}^{\infty} K_i(p) \int_{-1}^{+1} \rho(x) x \varphi_i(x) \varphi_m(x) dx = \\ = M(p) F(p) \int_{-1}^{+1} \rho(x) \varphi_m(x) dx + M_1(p) F(p) \int_{-1}^{+1} \rho(x) x \varphi_m(x) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Известно, что полином $\varphi_m(x)$ ортогонален любому полиному меньшей степени [5]. Отсюда

$$\int_{-1}^{+1} \rho(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} a & (\text{при } m = 0) \\ 0 & (\text{при } m = 1, 2, \dots) \end{cases},$$

$$\int_{-1}^{+1} \rho(x) x \varphi_m(x) dx = \begin{cases} b_m & (\text{при } m = 0, 1) \\ 0 & (\text{при } m = 2, 3, \dots) \end{cases},$$

$$\int_{-1}^{+1} \rho(x) x \varphi_m(x) \varphi_i(x) dx = \begin{cases} a_{i-m, m} & (\text{при } |i - m| \leq 1) \\ 0 & (\text{при } |i - m| > 1) \end{cases}.$$

С учетом этих равенств система уравнений (16) примет вид

$$\begin{aligned} N_1(p)a_{-1, m} K_{m-1}(p) + [N(p) + a_{0, m} N_1(p)] K_m(p) + \\ + N_1(p) a_{1, m} K_{m+1}(p) = \Psi_m(p), \end{aligned}$$

где

$$\Psi_m(p) = \begin{cases} [aM(p) + b_0M_1(p)] F(p) & (\text{при } m = 0) \\ b_1M_1(p) F(p) & (\text{при } m = 1) \\ 0 & (\text{при } m = 2, 3, \dots) \end{cases}.$$

Из системы (17) мы можем найти интересующие нас функции $K_i(p)$ ($i = 0, 1, \dots, l-1$). Решение (17) может быть найдено с помощью цепных дробей [6]. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 K_0(p) &= \frac{\Psi_0(p)}{N(p) + a_{0,0}N_1(p)} - \frac{a_{1,0}N_1(p)}{N(p) + a_{0,0}N_1(p)} K_1(p), \\
 K_1(p) &= \frac{-a_{-1,1}N_1(p)\Psi_0(p) + [N(p) + a_{0,0}N_1(p)]\Psi_1(p)}{[N_1(p) + a_{0,0}N_1(p)]Z_1(p) - \frac{a_{1,0}a_{-1,1}N_1^2(p)}{N(p) + a_{0,0}N_1(p)}}, \quad (18) \\
 K_i(p) &= -\frac{a_{-1,i}N_1(p)}{Z_i(p)} K_{i-1}(p) \\
 (i &= 2, 3, \dots, l-1).
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 Z_i(p) &= N(p) + a_{0,i}N_1(p) - \frac{a_{1,i}a_{-1,i+1}N_1^2(p)}{N(p) + a_{0,i+1}N_1(p)} - \\
 &- \frac{a_{1,i+1}a_{-1,i+2}N_1^2(p)}{N(p) + a_{0,i+2}N_1(p)} - \dots, \quad (19)
 \end{aligned}$$

причем $a_{1,i} = a_{-1,i+1}$.

Исследуем сходимость дробей, определяемых соотношением (19).

Теорема 2. Цепные дроби $Z_i(p)$ сходятся к голоморфным ограниченным функциям при $\operatorname{Re} p \geq \sigma$, где σ — достаточно большое число.

Доказательство. Сходимость дробей (19) может быть изучена с помощью функций, определяемых равенствами [6]:

$$C_m(p) = \frac{a_{1,m}a_{-1,m+1}N_1(p)}{[N(p) + a_{0,m}N_1(p)][N(p) + a_{0,m+1}N_1(p)]}. \quad (20)$$

Каждую тройку входящих в (20) чисел $a_{l-m,m-1}, a_{l-m,m}, a_{l-m,m+1}$, где $i = m-1, m, m+1$, можно рассматривать как коэффициенты разложения функции $x\varphi_i(x)$ в ряд по ортонормированным полиномам $\varphi_{m+1}(x)$. Отсюда в силу формулы Парсеваля [4] $\sum_{m=l-1}^{m=l-1} |a_{l-m,m}|^2 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и любом i , следовательно, $|a_{l-m,m}| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для $i = m-1, m, m+1$.

Рассмотрим область E переменного p , охватывающую всю плоскость за исключением малых окрестностей нулей полиномов $N_m^*(p) = N(p) + a_{0,m}N_1(p)$, где $m = 0, 1, \dots$. В указанной области $\lim_{m \rightarrow \infty} |C_m(p)| = 0$ равномерно по p . (При $a_{0m} = 0$ предполагаем, что степень $N(p)$ не ниже степени $N_1(p)$.) Отсюда при $m \geq m_0$, где m_0 — достаточно большое натуральное число, $|C_m(p)| \leq 1/4$ и, следовательно, [6] дроби $Z_i(p)$ ($i \geq m_0$) сходятся равномерно к ограниченным функциям, причем $|Z_i(p)| \neq 0$. Поскольку подходящие дроби для $Z_i(p)$ ($i \geq m_0$) — голоморфные функции, то и $Z_i(p)$ будут при $p \in E$ голоморфными ограниченными функциями.

Справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$Z_i(p) = N(p) + a_{0,i}N_1(p) - \frac{a_{1,i}a_{-1,i+1}N_1(p)}{Z_{i+1}(p)}.$$

Из него следует, что любая дробь $Z_i(p)$ при $i < m_0$ может быть получена из $Z_i(p)$ с $i \geq m_0$ конечным числом операций. Подходящие дроби для $Z_i(p)$ ($i < m_0$) являются дробно-рациональными функциями и имеют, следовательно, конечное число полюсов и нулей. Все это означает,

что $Z_i(p)$ при $i < m_0$ сходятся к голоморфным ограниченным функциям в области E , за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

Покажем теперь, что все нули полиномов $N_m^*(p)$ лежат в конечной области плоскости p . Пусть p_λ — нули полинома $N(p)$, а δ_λ — их малые окрестности. Последовательность полиномов $N_m^*(p)$ в любой конечной части плоскости p сходится равномерно к $N(p)$. Отсюда внутри окрестностей δ_λ и на их границах $|N_m^*(p) - N(p)| < \varepsilon_\lambda$ при $m > m_1$, где m_1 — достаточно большое число. Согласно теореме Руше [7], $N_m^*(p)$ ($m > m_1$) имеют столько же нулей, сколько и $N(p)$. Нули эти, очевидно, удовлетворяют условиям $|p_\lambda - p_\lambda^{(m)}| \leq \delta_\lambda$. Полиномы $N_m^*(p)$ при $m \leq m_0$ имеют конечное число нулей.

Таким образом, мы установили, что все полюса и нули цепных дробей $Z_i(p)$ в области E и исключенные малые окрестности нулей $N_m^*(p)$ лежат в конечной части плоскости p . Следовательно, можно найти такое σ , что при $\operatorname{Re} p > \sigma$ $Z_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots$) будут голоморфными и ограниченными функциями.

Следствие. Если $\Psi_m(p)$ — ограниченные и голоморфные функции при $\operatorname{Re} p > \sigma_1$, то при $\operatorname{Re} p > \sigma_2$, где $\sigma_2 > \sigma_1$, $\sigma_0 > \sigma$, $K_m(p)$ ($m = 0, 1, \dots$) будут также ограниченными голоморфными функциями.

Теорема 3. Цепные дроби $Z_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots$) можно представить в виде отношения двух функций с неизолированными особыми точками.

Доказательство. Возьмем цепную дробь с произвольным индексом i $Z_i(p)$. Подходящие цепные дроби $Z_{ik}(p)$ можно представить в виде

$$Z_{ik}(p) = \frac{P_{ik}(p) [N(p) + a_0; N_1(p)]}{Q_{ik}(p)},$$

где $P_{ik}(p)$ и $Q_{ik}(p)$ определяются рекуррентными формулами

$$P_{ik}(p) = P_{i+k-1}(p) - C_{i+k-1}(p) P_{i+k-2}(p) \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$Q_{ik}(p) = Q_{i+k-1}(p) - C_{i+k-1}(p) Q_{i+k-2}(p) \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$P_{i0}(p) = Q_{i0}(p) = Q_{i1}(p) = 1,$$

$$P_{ii}(p) = 1 - C_i(p).$$

Функции $C_{i+k}(p)$ определяются соотношениями (20). Из этих соотношений видно, что $C_{i+k}(p)$ являются дробно-рациональными функциями с полюсами в точках $p_\alpha^{(i+k)}$, $N_{i+k}^*(p_\alpha^{(i+k)}) = 0$. Отсюда $P_{ik}(p)$ и $Q_{ik}(p)$ также будут дробно-рациональными функциями с теми же полюсами. Для дроби $Z_i(p)$ точки $p_\alpha^{(i+k)}$ ($k = 0, 1$) будут полюсами, а точки $p_\alpha^{(i+k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) будут точками условной сходимости.

При доказательстве теоремы 2 было показано, что $p_\alpha^{(i+k)} \rightarrow p_\lambda$ при $k \rightarrow \infty$, где p_λ — нули $N(p)$. Отсюда точки p_λ как пределы полюсов $P_{ik}(p)$ и $Q_{ik}(p)$ являются неизолированными существенно особыми точками этих функций. Для $Z_i(p)$ p_λ являются точками существенной расходимости. Что касается области E плоскости p , то в ней справедливы неравенства

$$|P_{ik}(p)| \leq \prod_{n=0}^k [1 + |C_{i+n}(p)|] \leq \exp \left[\sum_{n=0}^k |C_{i+n}(p)| \right]$$

$$|Q_{ik}(p)| \leq \prod_{n=1}^k [1 + |C_{i+n}(p)|] \leq \exp \left[\sum_{n=1}^k |C_{i+n}(p)| \right].$$

Поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |C_{i+n}(p)| < M < \infty$, то функции $Q_{ik}(p)$ и $P_{ik}(p)$ сходятся в области E к ограниченным и голоморфным функциям.

Доказанная теорема указывает на трансцендентный характер операторов чувствительности в рассматриваемом случае.

б) Рассмотрим линейную динамическую систему с одним входом и одним выходом в более общем случае.

Пусть

$$W(p, x) = \frac{M(p) + M_1(p, x)}{N(p) + N_1(p, x)},$$

где $M(p)$, $N(p)$, $M_1(p, x)$, $N_1(p, x)$ являются полиномами относительно p , $M_1(p, 0) = N_1(p, 0) = 0$. Примем, что степень числителя $W(p, x)$ не превосходит степени знаменателя.

Уравнение в изображениях такой системы можно представить в виде

$$\left[1 + \frac{N_1(p, x)}{N(p)} \right] Y(p, x) = \frac{M(p)}{N(p)} \left[1 + \frac{M_1(p, x)}{M(p)} \right] F(p),$$

где $F(p)$ — ограниченная голоморфная функция при $\operatorname{Re} p > \sigma_1$. Поскольку $\frac{M(p)}{N(p)} F(p) = Y(p, 0)$, то

$$\left[1 + \frac{N_1(p, x)}{N(p)} \right] Y(p, x) = \left[1 + \frac{M_1(p, x)}{M(p)} \right] Y(p, 0). \quad (21)$$

Будем искать аппроксимацию $y(t, x)$ с помощью $\tilde{y}(t, x) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i(t) \varphi_i(x)$,

где $\varphi_i(x)$ — l первых функций из любой полной системы ортонормированных функций с весом $\rho(x)$ в гильбертовом пространстве интегрируемых в квадрате функций с тем же весом. Тогда $Y(p, x)$ можно представить в виде ряда:

$$Y(p, x) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(p) \varphi_i(x)$$

Так же, как это делалось в пункте а), подставим это соотношение в (21). Затем, умножив (21) последовательно на $\rho(x) \varphi_i(x)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) и проинтегрировав левую и правую часть по x в интервале $[-1, 1]$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $K_m(p)$:

$$K_m(p) + \frac{1}{N(p)} \sum_{i=0}^{\infty} L_{im}(p) K_i(p) = \Psi_m(p) \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (22)$$

где

$$L_{im}(p) = \int_{-1}^{+1} \rho(x) N_1(p, x) \varphi_i(x) \varphi_m(x) dx,$$

$$L_{im}(p) = L_{mi}(p),$$

$$\Psi_m(p) = \left\{ \int_1^{+1} [M(p) + M_1(p, x)] \rho(x) \varphi_m(x) dx \right\} \frac{F(p)}{N(p)}. \quad (23)$$

Функции $L_{im}(p)$ являются полиномами от p той же или меньшей степени, что и $N_1(p, x)$.

Поделим левую и правую части каждого уравнения системы (22) соответственно на $1 + \frac{L_{0m}(p)}{N(p)}$. Тогда получим

$$K_m(p) + \frac{1}{N_m^*(p)} \sum_{i=1}^{\infty} L_{im}(p) K_i(p) = \Phi_m(p), \quad (24)$$

где $N_m^*(p) = N(p) + L_{0m}(p)$, $\Phi_m(p) = \Psi_m(p) \frac{N(p)}{N_m^*(p)}$.

Теорема 4. Если при любом конечном p выполняются условия

$$1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |L_{im}(p)|^2 < \infty,$$

2) полиномы $N_m^*(p)$ имеют степень, не меньшую степени $N_1(p, x)$, то при $\operatorname{Re} p > \sigma$ существует единственное, голоморфное и ограниченное решение системы (24).

Доказательство. Из первого условия теоремы следует, что при любом конечном p $|L_{0m}(p)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда в любой конечной области p $\lim_{m \rightarrow \infty} N_m^*(p) = N(p)$ равномерно по p . Следовательно, можно найти (это было показано при доказательстве теоремы 2) такое σ_2 , что в области $\operatorname{Re} p > \sigma_2$ не будет нулей $N_m^*(p)$ ($m = 0, 1, \dots$). Тогда при

$\operatorname{Re} p > \sigma_3$, где $\sigma_3 > \sigma_1$, $\sigma_3 \geq \sigma_2$, функции $\Phi_m(p) = F(p) \int_{-1}^{+1} \frac{M(p) + M_1(p, x)}{N(p) + L_{0m}(p)} \times$

$\times \rho(x) \varphi_m(x) dx$ будут голоморфными и ограниченными функциями.

Кроме того, в силу равенства Парсеваля,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\Phi_m(p)|^2 \leq \frac{|F(p)|^2}{\inf_m |N_m^*(p)|^2} \int_{-1}^{+1} \rho(x) |M(p) + M_1(p, x)|^2 dx < M_0 < \infty.$$

Рассмотрим выражение

$$R(p) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{L_{im}(p)}{N_m^*(p)} \right|^2 \right]^{1/2}.$$

В силу второго условия теоремы $\frac{L_{im}(p)}{N_m^*(p)}$ ограничены по модулю при $\operatorname{Re} p > \sigma_2$. Тогда из первого условия следует, что в той же области p $R(p) < M_2 < \infty$. Последнее означает, что бесконечная система уравнений (24) является вполне непрерывной [8]. Ее решение может быть найдено методом редукции, т. е. путем решения конечных (усеченных) систем алгебраических уравнений (если эти решения существуют) с последующим предельным переходом.

Решение усеченной системы из n уравнений можно найти по правилу Крамера, оно будет иметь следующий вид:

$$K_m^{(n)}(p) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta_{im}^{(n)}(p)}{\Delta^{(n)}(p)} \Phi_i(p), \quad (25)$$

где $\Delta^{(n)}(p)$ — определитель усеченной системы, $\Delta_{im}^{(n)}(p)$ — алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителя $\Delta^{(n)}(p)$.

Согласно неравенству Адамара ([4], стр. 191),

$$|\Delta^{(n)}(p)| \leq \prod_{m=0}^n \sum_{l=1}^n \left[1 + \left| \frac{L_{im}(p)}{N_m^*(p)} \right|^2 \right]. \quad (26)$$

Условие $R(p) < M_2$ при $\operatorname{Re} p > \sigma_2$ является достаточным для равномерной сходимости $\Delta^{(n)}(p)$ и всех его алгебраических дополнений при $n \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Re} p > \sigma_2$. Функции $\Delta^{(n)}(p)$ являются дробно-рациональными функциями с конечным числом нулей. Теорема Руше позволяет заключить, что $\Delta(p) = \lim \Delta^{(n)}(p)$ могут иметь в области $\operatorname{Re} p > \sigma_2$ лишь конечное число нулей. Отсюда можно найти такое $\sigma (\sigma > \sigma_3, \sigma > \sigma_2)$ и такое $n \geq n_0$, что при $\operatorname{Re} p > \sigma$ как $\Delta^{(n)}(p)$, так и $\Delta_{im}^{(n)}(p)$ не будут иметь нулей и полюсов. Тогда функции $K_m^{(n)}(p)$ при $\operatorname{Re} p > \sigma$ и $n \geq n_0$ будут ограниченными и голоморфными функциями. А в силу равномерной сходимости $\Delta_{im}^{(n)}(p)$ при $n \rightarrow \infty$, они будут равномерно сходиться к $K_m(p)$.

Отсюда следует, что $K_m(p)$ будут также ограниченными и голоморфными функциями при $\operatorname{Re} p > \sigma$. Причем функции $K_m(p)$ могут быть представлены в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$K_m(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_{im}(p) \Phi_i(p), \quad \Delta_{im}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{im}^{(n)}(p).$$

Теорема 5. Определитель системы (24) и его алгебраические дополнения при условиях теоремы 4 являются функциями с неизолированными существенно особыми точками.

Доказательство. Из неравенства (26) следует, что последовательность $\{\Delta^{(n)}(p)\}$ сходится равномерно по p в любой конечной области комплексного переменного, если последняя не содержит малых окрестностей нулей функций $N_m^*(p)$ ($m=0, 1, \dots$). Очевидно, нули $N_m^*(p)$ являются полюсами $\Delta(p)$ и его алгебраических дополнений. Поскольку эти нули имеют предельные точки, равные нулям $N(p)$, то последние являются особыми неизолированными точками как определителя, так и его алгебраических дополнений.

Замечание 1. Условие 1 теоремы 4 выполняется, в частности, для важного с точки зрения многих приложений случая, когда $\varphi_i(x)$ ($i=0, 1, \dots$) образуют полную систему ортонормированных полиномов, а $N_1(p, x)$ является полиномом относительно x степени γ .

Действительно, $\varphi_i(x) \varphi_m(x) = \sum_{k=|i-m|}^{i+m} a_k^{(im)} \varphi_k(x)$, где $a_k^{(im)} = \int_{-1}^{+1} \rho(x) \times$

$\times \varphi_i(x) \varphi_m(x) \varphi_k(x) dx$. Тогда

$$L_{im}(p) = \sum_{k=|i-m|}^{i+m} a_k^{(im)} \left[\int_{-1}^{+1} \rho(x) N_1(p, x) \varphi_k(x) dx \right],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |L_{im}(p)|^2 \leq \sum_{k=0}^{\gamma} \left[\left| \int_{-1}^{+1} \rho(x) N_1(p, x) \varphi_k(x) dx \right|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=|k-i|}^{k+i} |a_k^{(im)}|^2 \right].$$

Сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=|k-i|}^{k+i} |a_k^{(im)}|^2 (k \leq \gamma)$ следует из сходимости рядов

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_k^{(im)}|^2 \text{ при любом } m \text{ и } \sum_{m=0}^{\infty} |a_k^{(im)}|^2 \text{ при любом } i.$$

Замечание 2. Если в качестве меры уклонения двух функций взять

$$\int_0^\infty \int_{-1}^{+1} e^{-\sigma t} \rho(x) |y_1(t, x) - y_2(t, x)|^2 dx dt,$$

то близость точного решения $\tilde{y}^*(t, x)$ и приближенного оценивается без перехода в область оригиналлов.

Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} e^{-\sigma t} \rho(x) |\tilde{y}(t, x) - \tilde{y}^*(t, x)|^2 dx dt = \\ & = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \sum_{i=0}^{l-1} |k_i(t) - k_i^*(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j-i}^{\sigma+j} \sum_{i=0}^{l-1} |K_i(p) - K_i^*(p)|^2 dp. \end{aligned}$$

4. СВЯЗЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ОБЫЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Изложенные в разделе 3 методы определения операторов чувствительности не требуют дифференцируемости $y((t, x))$ по параметру. В настоящем разделе будем считать, что $y(t, x)$ ($n+1$) раз непрерывно дифференцируема по x в интервале $[-1, 1]$.

На матрицу $A(x)$ наложим соответствующие условия.

Введем функцию $z(t, \alpha) = y(t, x)$, где $\alpha = \alpha_0 + \lambda x$ — ненормированный параметр, λ — половина длины интервала варьирования его относительно значения α_0 . Разложим $z(t, \alpha)$ по формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} y(t, x) = z(t, \alpha_0 + \lambda x) &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \eta_m(t) \lambda^m x^m + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} z(t, \alpha_0 + \lambda_0 x)}{d \alpha^{n+1}} \lambda^{n+1} x^{n+1}, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &= z(t, \alpha_0), \\ \eta_m(t) &= \frac{d^m z(t, \alpha_0)}{d \alpha^m} \quad (m = 1, 2, \dots, n), \\ |\lambda_0| &\leq \lambda. \end{aligned}$$

Функции $\eta_m(t)$ ($m = 1, \dots, n$) есть обычные функции чувствительности m -го порядка. Подставив $y(t, x)$ в виде (27) в выражения для $k_i(t)$, получим

$$\begin{aligned} k_i(t) &= \int_{-1}^{+1} \rho(x) y(t, x) \varphi_i(x) dx = \sum_{m=0}^n d_{im} \eta_m(t) \lambda^m + \xi_i(t) \lambda^{n+1} \\ & \quad (i = 0, 1, \dots, l-1), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$d_{im} = \frac{1}{m!} \int_{-1}^{+1} \rho(x) x^m \varphi_i(x) dx,$$

$$\xi_i(t) = \frac{1}{(n+1)!} \int_{-1}^{+1} \rho(x) x^{n+1} \frac{d^{n+1}z(t, \alpha_0 + \lambda_0 x)}{d\alpha^{n+1}} \varphi_i(x) dx.$$

Поскольку производная $z(t, \alpha)$ $(n+1)$ -го порядка непрерывна по α , то

$$|\xi_i(t)| \leq \frac{M(t)}{(n+1)!} \int_{-1}^{+1} \rho(x) x^{n+1} |\varphi_i(x)| dx.$$

Выражение (28) устанавливает зависимость интегральных функций чувствительности от обычных. Кроме того, оно позволяет найти с достаточной степенью точности интересующие нас $k_i(t)$ путем вычисления функций $\eta_i(t)$ известными способами. Вопросы определения функций $\eta_i(t)$ аналитическими методами, а также моделированием и экспериментально, широко освещены в литературе [1, 2]. Заметим, что в большинстве случаев наибольший интерес представляют коэффициенты $k_0(t)$ и $k_1(t)$.

В частном случае, когда $\varphi_i(x)$ — нормированные полиномы Лежандра и Чебышева, при $\lambda \rightarrow 0$ и любом конечном t

$$k_0(t) = y(t, 0) + O(\lambda^2),$$

$$k_1(t) \varphi_1(x) = \eta_1(t) \Delta \alpha + O(\lambda^3).$$

В заключение автор благодарит Ю. И. Неймарка за внимание и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. В. Кокотович, Р. С. Рутман, Автоматика и телемеханика, 26, № 4, 730 (1965).
2. М. Л. Быховский, Основы динамической точности электрических и механических цепей, изд. АН СССР, М., 1958.
3. Р. С. Рутман, Техническая кибернетика, № 2, 138 (1965).
4. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
5. К. Ланцош, Практические методы прикладного анализа, ГИФМЛ, М., 1961.
6. А. Н. Хованский, Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, Гостехиздат, М., 1956.
7. Н. Н. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1960.
8. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИФМЛ, М—Л, 1962, стр. 55.
9. М. В. Моргулис, С. В. Шильман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 197 (1966).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 января 1967 г.

SENSITIVITY ANALYSIS FOR LINEAR DYNAMIC SYSTEMS UNDER FINITE PARAMETERS VARIATIONS

S. V. Shilman

The article presents a method of sensitivity analysis for linear dynamic systems under finite variations of parameters. The method is based on the approximation of a dynamic process with the finite number of decomposition terms taken out from the decomposition into orthonormal functions of parameter variations.

УДК 517.9 : 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ПО ЗАВИСИМОСТИ УСЛОВНОГО СРЕДНЕГО ОТ ПАРАМЕТРОВ

К. Г. Кирьянов

При рассмотрении динамических систем предлагается изучать зависимость условного среднего значения на выходе как функцию параметров системы. Показывается, что при входе в виде Гауссовского шума условное среднее дает полное описание некоторых систем. Проводится сравнение с экспериментом.

1. Пусть исследуется динамическая система, имеющая входной координатой $v_1(t)$, а выходной $v_2(t)$, и пусть существует условная плотность вероятности $w(x_2/x_1)$, где $x_1 = v_1(t)$, $x_2 = v_2(t+\tau)$. Тогда при эргодичности процесса $v_2(t)$ для вычисления условного среднего $x_2(\tau, x_1) = \int x_2 w(x_2/x_1) dx_2$ как функции x_1 и $\tau = t_2 - t_1 \geq 0$ можно применить следующий алгоритм вычислений, использующий записи процессов $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Пусть t_1 — множество корней уравнения $v_1(t) = x_1$ и пусть $[0, T_p]$ — произвольный интервал изменения τ . Если из случайногопроцесса $v_2(t)$ «нарезать» множество «кусков» длительностью T_p , с началом кусков, соответствующих временем t_1 , а затем «наложить» эти «куски» друг на друга, совместив их начала, то получится множество кривых, среднее значение ординат которых в любом сечении τ равно $x_2(\tau, x_1)$. Для вычисления условного среднего $x_2(\tau, x_1)$ в указанном алгоритме операция наложения «кусков» может быть заменена их сложением при соответствующих значениях τ . Обе операции имеют свои преимущества, однако результирующая картина, получающаяся при алгоритме с наложением, содержит, как увидим далее, кроме информации об условном среднем информацию об условной дисперсии.

Заметим, что если $v_i(t)$ — напряжения, то для алгоритма с наложением существует простая аналоговая реализация этого алгоритма, так как указанная в алгоритме ситуация имеет место при подаче напряжения $v_2(t)$ на осциллограф с длительностью развертки T_p и запуска ее от напряжения $v_1(t)$ в моменты, когда $v_1(t)$ переходит через уровень x_1 (рис. 1). Поэтому при выборе осциллографической трубки с определенным временем послесвечения и регулировке яркости можно получить некий аналог среднего при каждом τ на экране самой электронно-лучевой трубки, благодаря свойствам люминофоров, где при достаточно большом числе реализаций τ будет наблюдаться кривая

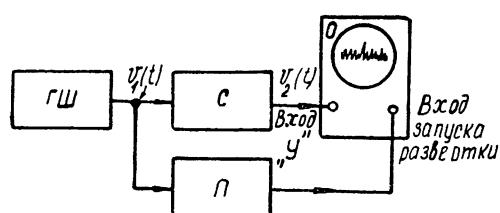


Рис. 1. Блок-схема аналоговой реализации алгоритма:
ГШ — генератор шума, С — исследуемая система, О — осциллограф, П — приставка, формирующая импульсы, запускающие развертку осциллографа.

$x_2(\tau, x_1)$ как функция τ с параметром x_1 в виде кривой максимальной яркости. Отметим также, что при всегда легко выполняемом условии $T_p \gg \tau_{\text{кор}}^{(2)}$, где $\tau_{\text{кор}}^{(2)}$ — время корреляции выходного процесса $v_2(t)$, которое в силу фильтрующих свойств изучаемой системы C предполагается всегда не меньшим времени корреляции $\tau_{\text{кор}}^{(1)}$ входного сигнала $v_1(t)$, начала соседних «кусков» процесса $v_2(t)$ длительностью T_p , могут не соответствовать двум соседним решениям уравнения $v_1(t) = x_1$. Это условие упрощает оценку необходимого числа n «кусков» для получения определенной точности Δ величины $\overline{x_2(\tau, x_1)}$ с помощью указанного алгоритма, так как при любом τ выборки $x_2^{(a_l)} = v_2(t_{a_l} + \tau)$ будут независимы. Условные среднее и дисперсия, определяемые на n «кусках», будут равны

$$\overline{x_2(\tau, x_1)}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{a_l=1}^n x_2^{(a_l)}(\tau), \quad (1)$$

$$[g_y^{(n)}(\tau, x_1)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{a_l=1}^n |x_2^{(a_l)}(\tau) - \overline{x_2(\tau, x_1)}^{(n)}|^2, \quad (2)$$

а точность Δ величины $\overline{x_2(\tau, x_1)}^{(n)}$ определяется неравенством Чебышева

$$P[|\overline{x_2(\tau, x_1)} - \overline{x_2(\tau, x_1)}^{(n)}| \leq \Delta] > 1 - \frac{M[\sum_{a_l} (x_2^{(a_l)}(\tau) - \overline{x_2(\tau, x_2)})]^2}{n^2 \Delta^2}.$$

При аналоговой реализации алгоритма условная дисперсия характеризует размытость наблюдаемой кривой $x_2(\tau, x_1)$ как функции τ .

Заметим, что при нахождении моментов времени t_{a_l} можно считать, что эти моменты удовлетворяют, кроме условия $v_1(t_{a_l}) = x_1$, некоторым условиям F , облегчающим, например, вычисление $\overline{x_2(\tau, x_1)}$. Таким условием, например, может быть условие $(t_{a_l+1} - t_{a_l}) < T_p$, которое следует из $T_p \gg \tau_{\text{кор}}^{(2)}$. Соотношения (1) и (2) при любом виде условий F остаются прежними.

2. Если система C — линейная с импульсной переходной функцией $k(\tau)$, то при действии дельта-коррелированного центрированного стационарного гауссового случайного сигнала на входе ($R_{11}(\tau) = \overline{v_1(t)v_1(t+\tau)^t} = \delta(t)$) оказывается, что $\overline{x_2(\tau, x_1)} = \text{const} k(\tau)$. Действительно, известно [1], что при действии дельта-коррелированного стационарного случайного процесса на входе системы функция взаимной корреляции $R_{12}(\tau) = \overline{v_1(t)v_2(t+\tau)^t}$ совпадает с импульсной реакцией системы $k(\tau)$. С другой стороны, поскольку для стационарных гауссовых процессов $v_1(t)$ и $v_2(t)$,

$$\overline{x_2(\tau, x_1)} = \overline{x_2} + \rho(\tau) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \overline{x_1}), \quad (3)$$

где $\sigma_i^2 = (\overline{v_i - \overline{v_i}})^2$, $\overline{v_i} = \overline{x_i}$ ($i = 1, 2$), $R_{12}(\tau) = \rho(\tau)\sigma_1\sigma_2$, $\rho(\tau)$ — нормированная функция взаимной корреляции, то для центрированных процессов ($\overline{x_1} = \overline{x_2} = 0$) $\overline{x_2(\tau, x_1)} = \text{const} R_{12}(\tau)$.

Так как стационарный гауссов процесс эргодичен, то из (1) следует, что

$$\rho^{(n)}(\tau) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{x_1 n} \sum_{a_l=1}^n x_2^{(a_l)}(\tau), \quad (4)$$

т. е. формула (1) дает возможность вычислять и наблюдать функцию взаимной (или авто) корреляции и импульсную реакцию линейных систем, используя только операции наложения (сложения) и сравнения [2]. Известно, что условная дисперсия в этом случае будет

$$\sigma_y^2(\tau, x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - \overline{x_2(\tau, x_1)}]^2 w(x_2/x_1) dx_2 = \sigma_2^2 [1 - \rho^2(\tau)]. \quad (5)$$

Из (5) видно, что при алгоритме с наложением размытость кривой $x_2(\tau, x_1)$ увеличивается с отклонением τ от значений τ_m , соответствующих максимумам $\rho^2(\tau)$. Если $\rho(\tau)$ есть функция автокорреляции с $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, то $\tau_1 = 0$ и $\rho(\tau_1) = 1$ и при изменении τ от 0 до ∞ σ_y^2 изменяется от 0 до σ_2^2 , проходя через минимумы при $\tau = \tau_m$ ($m = 2, 3, \dots$). Если $\rho(\tau)$ есть функция взаимной корреляции с $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, то τ_1 может быть не равным нулю, а $\rho^2(\tau_m) = \max_m \rho^2(\tau_m) < 1$. Известно, что в случае взаимной корреляции $\rho^2(\tau_m) = 1$ в том и только в том случае, когда $v_2(t) = A_1 v_1(t - \tau_m) + A_2$, где A_i ($i = 1, 2$) — константы, т. е. когда С не искажает формы входного сигнала. При упомянутой аналоговой реализации алгоритма вычисления условного среднего на экране осциллографа может быть четко виден только один экстремум $\rho(\tau)$, а все остальные будут размыты, и тем больше, чем больше $\rho^2(\tau_m)$ отличается от 1. Таким образом, при алгоритме с наложением нельзя получить кривую $\rho(\tau)$, имеющую несколько четких максимумов. Однако при непосредственном вычислении по формуле (4) (алгоритм со сложением) за счет выбора достаточно большого числа n можно получить $\rho^{(n)}(\tau)$, сколь угодно близкую к действительной кривой $\rho(\tau)$ при любом числе экстремумов N . В рассматриваемом случае процессы гауссовые, и можно дать более точные оценки числа n слагаемых в формуле (4), а также приближенно оценить необходимую длительность T записи процессов $v_1(t)$ и $v_2(t)$ (или необходимого времени послесвечения экрана осциллографа при аналоговой реализации алгоритма). Действительно, используя условную плотность вероятности $w(x_2/x_1)$, получаем

$$\Delta \leq V^2 \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \rho^2(\tau)} \Phi^{-1}(P), \quad (6)$$

где $\Phi^{-1}(P)$ — обратная функция интеграла ошибок $P = \Phi(\beta) = \frac{2}{V\pi} \int_0^\beta e^{-t^2} dt$. Из (6) получаем, что минимальное число n_0 , для обеспечения ошибки Δ с вероятностью P , зависит от τ и равно

$$n_0 = \frac{2\sigma_2^2}{\Delta^2} [1 - \rho^2(\tau)] [\Phi^{-1}(P)]^2. \quad (7)$$

Известно [3, 4], что среднее число пересечений N_1 гауссовым процессом уровня x_1 вверх и вниз в единицу времени дается выражением $N_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{-\rho_{11}(0)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$, где $\frac{\pi}{2} (-\rho_{11}(0))^{-1/2} = \tau_{\text{кор}}^{(1)}$ имеет смысл времени корреляции для процессов $v_1(t)$, имеющих спектр в при-

мыкающей к нулю частот полюсе. При этом предполагается, что $\rho_{11}(0)$ существует и отрицательна, т. е. предполагается, что случайный процесс $v_1(t)$ дифференцируем в среднеквадратичном смысле. В соответствии с этим для получения точности Δ при аргументе τ с вероятностью P необходимо, чтобы время T удовлетворяло неравенству $T \geq \max\left\{\frac{n_0}{N_1}, n_0 T_p\right\}$

$$T \geq 2 \frac{\tau_{\text{кор}}^{(1)}}{\Delta_{\text{отн}}^2} \frac{1 - \rho^2(\tau)}{\rho^2(\tau)} \frac{e^{(1/2)z^2}}{z^2} [\Phi^{-1}(P)]^2 \quad (\text{при } 1/N_1 > T_p) \quad (8)$$

или

$$T \geq 2 \frac{T_p}{\Delta_{\text{отн}}^2} \frac{1 - \rho^2(\tau)}{\rho^2(\tau)} [\Phi^{-1}(P)]^2 \quad (\text{при } 1/N_1 \leq T_p),$$

где $z = \frac{x_1}{\sigma_1}$, $\Delta_{\text{отн}} = \frac{\Delta}{x_2(\tau, x_1)}$. При $\frac{1}{N_1} > T_p$ оптимальный уровень x_1 , минимизирующий T при других фиксированных параметрах, входящих в (8), как нетрудно проверить, равен $V\bar{2}\sigma_1$.

Если дополнительным условием F является условие $\dot{v}_1(t_{a_1}) > 0$ (или $\dot{v}_1(t_{a_1}) < 0$), что соответствует прохождению процесса $v_1(t)$ при $t = t_{a_1}$ через уровень x_1 только снизу вверх (сверху вниз), то необходимая условная плотность вероятности $w(v_2(t + \tau) = x_2/v_1(t) = x_1, v_1(t) > 0)$, как можно показать (см. Приложение), будет равна

$$w = \{2\pi\sigma_2^2[1 - \rho^2(\tau)]\}^{-1/2} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\dot{\rho}(\tau)}{2\{-\ddot{\rho}_{11}(0)[1 - \rho^2(\tau)] - \dot{\rho}^2(\tau)\}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{x_2 - \rho(\tau) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1}{\sigma_2[1 - \rho^2(\tau)]^{1/2}} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[x_2 - \rho(\tau) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1 \right]^2}{\sigma_2^2[1 - \rho^2(\tau)]} \right\}, \quad (9)$$

где Φ определена ранее, а условные средние и дисперсия, вместо (3) и (5), будут равны соответственно

$$\overline{x_2(\tau, x_1)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1 \left[\rho(\tau) - \frac{\sigma_1}{x_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{V - \ddot{\rho}_{11}(0)} \dot{\rho}(\tau) \right], \quad (10)$$

$$\sigma_y^2(\tau, x_1) = \sigma_2^2 \left[1 - \rho^2(\tau) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(-\ddot{\rho}_{11}(0))} \dot{\rho}^2(\tau) \right]. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

а) $\overline{x_2(\tau, x_1)}$ является линейной комбинацией $\rho(\tau)$ и $\dot{\rho}(\tau)$; при увеличении x_1 $\overline{x_2(\tau, x_1)}$ будет приближаться к $(\sigma_2/\sigma_1)\rho(\tau)x_1$, что может быть использовано для приближенного вычисления $\rho(\tau)$ с относительной погрешностью $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_1}{|x_1|} \frac{1}{V - \ddot{\rho}_{11}(0)} \frac{|\dot{\rho}(\tau)|}{\rho(\tau)}$;

б) существуют точки $\overline{x_2(\tau, x_1)}$ с нулевой и минимальной дисперсией при тех же самых значениях $\tau = \tau_m$, что и в случае F ($\dot{v}_1(t_{a_1})$ любое), рассмотренное ранее, так как в экстремумах $\rho(\tau)$ $\dot{\rho}(\tau_m) = 0$.

3. Если C — безынерционная нелинейность с запаздыванием $v_2(t) = f(v_1(t-\tau_s))$, то такую систему также можно исследовать при помощи измерения зависимости условного среднего от параметров. Вычисления показывают, что условное среднее $x_2(\tau, x_1)$ при гауссовом шуме и любой $f(x)$ будет иметь точки с нулевой и минимальными дисперсиями, определяемыми экстремумами функции $\rho^2(\tau)$, и что при любом виде условий $F(v_1(t_{a_l}) > 0, v_1(t_{a_l}) \geq 0$ и т. п.) при $\tau = \tau_s$

$$\overline{x_2(\tau_s, x_1)} = f(x_1), \quad \sigma_y^2(\tau_s, x_1) = 0, \quad (12)$$

поскольку условная плотность вероятности обращается в δ -функцию. Ясно, что если в условия F будут входить, кроме условий $v \geq 0$, еще и другие более сложные условия, то точка кривой $x_2(\tau, x_1)$ при $\tau = \tau_s$ останется также точкой с нулевой дисперсией, только нужные «куски» в выходном процессе будут встречаться реже. Это дает возможность исследовать с помощью условного среднего сложные функции $f(x)$, обладающие неоднозначностью и гистерезисом (рис. 2а, б) за счет выбора различных условий F при разных значениях порога x_1 и характера его изменения. Например, для случая (рис. 2а) при снятии характеристики системы C методом условного среднего при изменении x_1 в сторону возрастания условие F можно выбрать в следующем виде: 1) $v_1(t_{a_l}) > 0$, 2) случайный процесс $v_1(t)$ до момента t_{a_l} монотонно возрастает от некоторого значения $c < a$ для нижнего участка неоднозначности и 3) $c < x_1$. При снятии характеристики системы C при убывании x_1 должны выполняться другие симметричные им условия.

Заметим, что если процессы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ в рассматриваемом алгоритме поменять местами так, чтобы производить «нарезку» процесса $v_1(t+\tau_s)$, а моменты t_{a_l} находить из условия $v_2(t) = x_1$, то при нало-

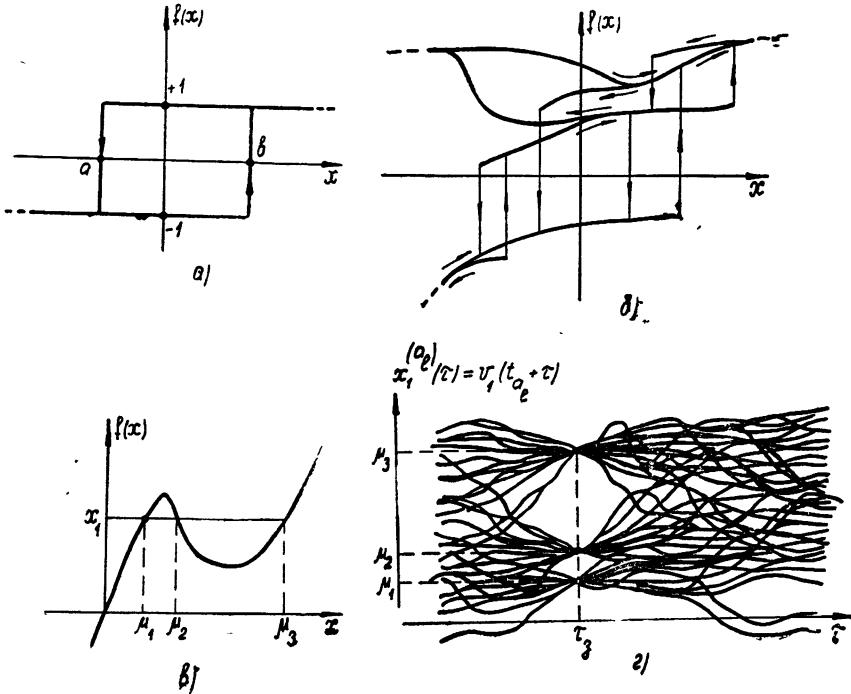


Рис. 2.

жении реализаций шума v_1 при $\tau = \tau_3$ будет k меченых точек (рис. 2в, г) с нулевой дисперсией, где k — число корней μ_i уравнений $f(\mu) = x_1$.

4. Экспериментальное исследование проводилось по блок-схеме (рис. 1) с помощью генераторов шума, имеющих равномерный спектр до 300 Мгц и выше, осциллографов С1-13, С1-17, стробоскопического осциллографа и линейных четырехполюсников, параметры которых указаны далее. Запуск развертки осуществлялся с помощью приставок к осциллографу, формирующих запускающие развертку импульсы фиксированной полярности в моменты t_{a_1} перехода напряжением $v_1(t)$ уровня x_1 как с положительной и отрицательной производными, так и с производными одного знака. В последнем случае можно обойтись без приставки, используя внутреннюю схему запуска осциллографа.

Экспериментально исследовалось а) измерение запаздывания в линиях задержки, б) функции взаимной корреляции для систем со многими отражениями, в) узкополосные системы и 2) возможность применения рассмотренного алгоритма к исследованию высокочастотных систем с помощью стробоскопа

а) Так как реакция линии задержки $e^{-P\tau_3}$ на импульс есть им-

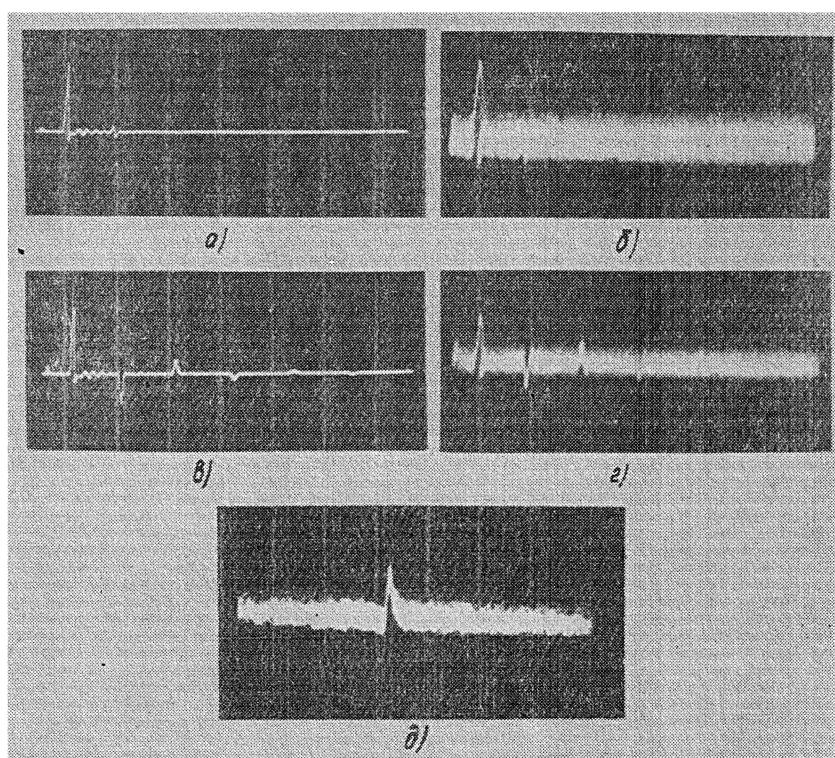


Рис. 3. Импульсная реакция (а, в) и функция взаимной корреляции (б, г) между входным и выходным напряжениями на кабеле РК-101 длиной 100 м (задержка $\approx 0,3$ мсек); а, б—согласованная на конце линии ($\Gamma_h=0$, $\Gamma_r \approx 1$); в, г—замкнутая на малое сопротивление $R_h \ll z_0$ на конце линии ($\Gamma_h \approx -1$, $\Gamma_r \approx 1$); R_h , Γ_h —сопротивление и коэффициент отражения нагрузки, Γ_r —коэффициент отражения от генератора, z_0 —75-омное волновое сопротивление кабеля.

Пояснения к случаям д—и см. в тексте.

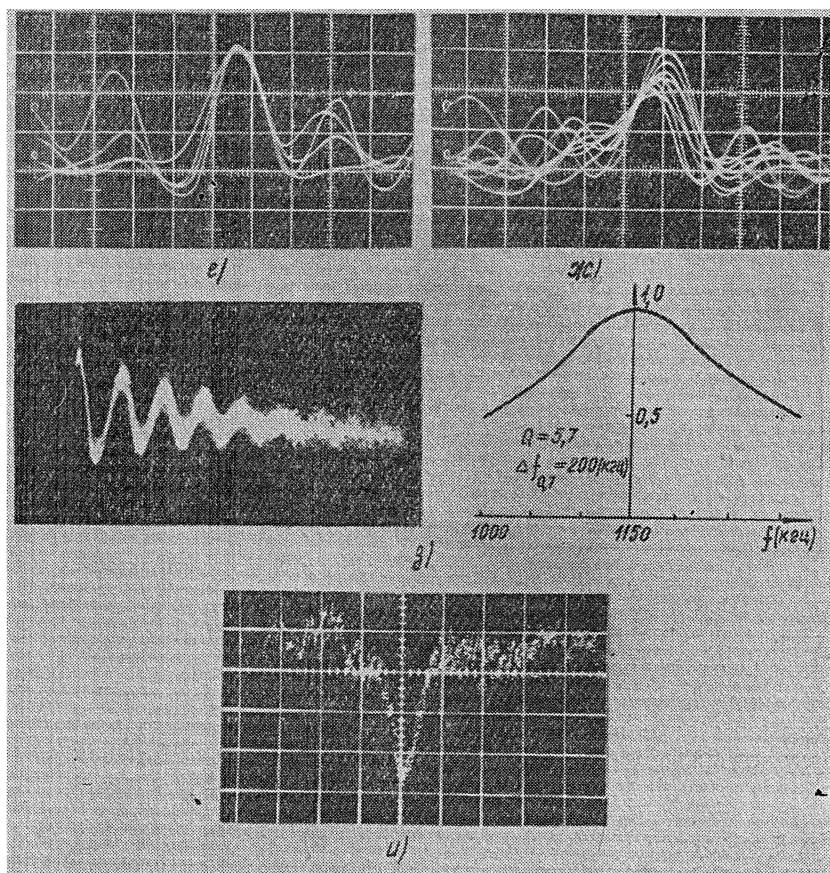


Рис. 3

пульс, сдвинутый на время τ_3 , то функция взаимной корреляции для такой системы C должна иметь максимум при $\tau = \tau_3$ с $\sigma_y^2(\tau_3, x_1) = 0$ (рис. 3б). По аналогии с импульсным методом можно ошибочно полагать, что разрешающая способность определения времени задержки τ_3 системы C данным методом зависит, как и у импульсного метода, от ширины спектра $\Delta f_{ш}$ шумового сигнала, прошедшего задержку, так как полуширина пика кривой $\rho(\tau)$ равна $\tau_{\text{кор}}^{(2)} \simeq 1/\Delta f_{ш}$. Реализация теоретически бесконечной разрешающей способности метода практически не может иметь места, так как ее при $\rho^2(\tau_3) = 1$ ограничивают мешающие шумы на выходе системы C и флюктуации времени t_{a_1} запуска развертки осциллографа. Оба фактора приводят к размазыванию «меченой» точки с теоретически нулевой дисперсией при $\tau = \tau_3 \sim \sigma'_{\tau_3} = \sqrt{(\Delta\tau_3)^2}$. Количество информации, получаемое при измерении времени задержки τ_3 по «меченой» точке равно $J \cong \log_2 \tau_3 / [(\sigma'_{\tau_3})^2 + (\sigma'_{\tau_3})^2]^{1/2}$ бит, где $[\sigma'_{\tau_3}]^2 = \frac{\pi}{2} [1 - \rho^2(\tau_3)] \cdot (-\ddot{\rho}_{11}(0)) / \dot{\rho}^2(\tau_3)$ — дисперсия положения по τ «меченой» точки, полученная из соотношений (10) и (11). При $[(\sigma'_{\tau_3})^2 +$

$+ (\sigma'_{\tau_3})^2]^{1/2} < \tau_{\text{кор}}^{(2)}$ «меченая» точка в $\tau = \tau_3$ с минимальной дисперсией позволяет производить отсчет задержки от начала развертки до этой точки с неопределенностью, принципиально меньшей, чем $\tau_{\text{кор}}^{(2)}$, так как для других методов измерения τ_3 с той же точностью требуется дополнительная информация о величине порога x_1 и параметрах задерживающего четырехполюсника C . Последнее позволяет получать одинаковую с импульсным методом точность определения τ_3 при шумовом сигнале $v_2(t)$ с более узким спектром, чем спектр импульса на выходе системы C . Заметим, что в случае неискажающего четырехполюсника изменение задержки по точке с нулевой дисперсией, как нетрудно показать, возможно при шуме $v_1(t)$ с любым законом распределения.

Если система C — искажающая, диспергирующая задержка, то дисперсия скорости распространения сигнала в задержке приводит к сдвигу и дисперсии «меченой» точки, т. е. если коэффициент передачи $C \sim K(p) = K_a(p)e^{-pt_3}$ ($K_a(p) \neq \text{const}$), то аргумент τ_m определяется суммой $\tau_3 + \hat{\tau}$, где $\hat{\tau} \geq 0$ — точка наибольшего экстремума функции $k(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint K_a(p) e^{pt} dp$ и $\rho^2(\tau_m) < 1$. При запуске осциллографа с положительной и отрицательной производными «меченая» точка $(\tau_m, x_2(\tau_m, x_1))$ соответствует экстремуму $\underline{x_2(\tau, x_1)}$, а при запуске с $v_1(t_{a_1}) > 0$ находится на левом склоне кривой $\underline{x_2(\tau, x_1)}$ (рис. 3д). Как и следует ожидать (см. (10) и (11)), положение «меченой» точки в этом случае не зависит от величины порога (рис. 3е, ж).

Наличие «меченой» точки с нулевой или минимальной дисперсией в описанном алгоритме вычисления условного среднего позволяет, как показывает расчет, определять одним и тем же способом как «импульсную» задержку (когда спектр шумового сигнала Δf_w шире полосы пропускания четырехполюсника Δf и включает эту полосу — случай, близкий к δ -образной функции корреляции входного сигнала), так и задержку, определяемую на некоторой фиксированной частоте f_0 (когда полоса $\Delta f \gg \Delta f_w$ и включает последнюю — случай, близкий к δ -образной спектральной плотности мощности $G_1(\omega)$ входного сигнала). Возможность применения данного метода измерения τ_3 в радиоастрономии и сейсмологии при использовании естественных генераторов шума вполне очевидна.

б) В системах с многократными отражениями, например, длинных линиях, возможны функции $\rho(\tau)$ со многими экстремумами (рис. 3а—г).

в) Если система узкополосная (контуры, настроенный на частоту f_0 , усилитель частот от f_1 до f_2 и $\Delta f = f_2 - f_1 \ll (f_2 + f_1)/2 = f_0$), то алгоритм дает возможность определить эффективную добротность $f_0/\Delta f$ этой системы по числу «чистых» периодов колебаний функции $x_2(\tau, x_1)$ при $v_1 = v_2$ (рис. 3з), что следует из вида функции корреляции $(\rho\tau) = \frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{\pi\Delta f\tau} \cos(2\pi f_0\tau)$, шума с равномерной спектральной плотностью мощности $G_1(\omega) = G_0$ на интервале частот $[f_1, f_2]$.

г) Достоинством аналоговой реализации алгоритма является возможность просмотра корреляционных характеристик сигналов, имеющих спектр до частот $3 \cdot 10^8 \text{ Гц}$ и выше, если использовать стробоскопический осциллограф, имеющий ждущий запуск и ждущую ступенчатую развертку (рис. 3и, масштаб по $\tau - 10^{-8} \text{ сек} \cdot \text{см}^{-1}$).

Автор выражает глубокую благодарность Ю. И. Неймарку за советы и замечания, учтенные в работе. Автор признателен С. И. Боровиц-

кому, а также рецензенту за замечания при обсуждении результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для гауссовых стационарных процессов плотность вероятности w_3 будет равна

$$w_3(x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t+\tau)) = (2\pi)^{-3/2} - [\det K]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} [x_1 \dot{x}_1 x_2] K^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right).$$

Симметричные матрицы K и K^{-1} , пользуясь теоремой Винера—Хинчина о связи корреляционных функций и спектральной плотности случайных процессов, можно записать в следующем виде

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \rho_{12}(\tau) \sigma_1 \sigma_2 \\ 0 & \sigma_2^2 & -\rho_{11}(0) \sigma_1^2 \\ -\rho_{11}(0) \sigma_1^2 & -\rho_{12}(\tau) \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

$$K^{-1} = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 [\Lambda]} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma} [\ddot{\rho}_{11}(0) + \dot{\rho}_{12}^2(\tau)] & -\frac{1}{\gamma} \dot{\rho}_{12}(\tau) \rho_{12}(\tau) & \ddot{\rho}_{11}(0) \rho_{12}(\tau) \\ & \frac{1}{\gamma} [1 - \rho^2(\tau)] & \dot{\rho}_{12}(\tau) \\ & & -\ddot{\rho}_{11}(0) \end{bmatrix},$$

где $\det K = \sigma_1^4 \sigma_2^2 \Lambda$, $\Lambda = \{-\ddot{\rho}_{11}(0)[1 - \rho_{12}^2(\tau)]\}$, $\gamma = \sigma_1 / \sigma_2$. Опуская индексы у $\rho(\tau)$ и ее производных, запишем w_3 в виде

$$w_3 = (2\pi)^{-3/2} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-1} [\Lambda]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{-(\rho^2 + \dot{\rho}) x_1^2 + (1 - \rho^2) x_1^2 - \gamma^2 \rho x_2^2 - 2\rho \rho x_1 \dot{x}_1 + 2\gamma \rho \rho x_1 x_2 + 2\gamma \dot{\rho} \dot{x}_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2 \gamma [-\dot{\rho}(1 - \rho^2) - \dot{\rho}^2]} \right\}.$$

По формуле Байеса

$$w(x_2/x_1, \dot{x}_1 > 0) = \int_{\dot{x}_1=0}^{\infty} w_3(x_1 \dot{x}_1 x_2) d\dot{x}_1 / w_1(x_1) \int_{\dot{x}_1=0}^{\infty} w(\dot{x}_1) d\dot{x}_1,$$

где использована статистическая независимость гауссова процесса и его производной в один и тот же момент времени, вытекающая из вида матрицы K . Выполняя интегрирование, получим (9).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Д. Х. Ленинг, Р. Г. Беттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958.
- 2 К. Г. Кирьянов, Авторское свидетельство № 31949 (1965), № 32473 (1964).
- 3 C. O. Rice, BSTJ, 24, 46 (1945).
- 4 В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1957.

**SYSTEMS INVESTIGATION ON THE BASIS OF CONDITIONAL
AVERAGE DEPENDENCE ON PARAMETERS***K. G. Kiryanov*

This article suggests to study the conditional average exit of a system as a function of system parameters when considering dynamic systems. It is proved that conditional average presents a full description of a particular system when input signal is a Gaussian noise. A comparison with experimental data is provided.

УДК 517.9

ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ СИЛ СВЯЗИ

Ю. И. Марченко

Решается задача построения приближенных решений системы произвольного числа автоколебательных объектов в случае слабых связей между ними при наличии запаздывания в элементах связи. В качестве примера рассматривается взаимодействие трех автогенераторов, соединенных звездой на общую емкость.

В радиотехнике и измерительной технике часто встречаются системы, состоящие из нескольких автоколебательных объектов, соединенных некоторыми линиями связи. Так, например, для повышения стабильности частоты ряд автогенераторов связывается через общую нагрузку. В вибрационной технике используются системы, состоящие из некоторого числа самосинхронизирующихся вибраторов, размещенных на одном или нескольких колеблющихся телах.

Исследованию взаимодействия автоколебательных систем посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ [1–11]. Почти во всех этих работах предполагалось, что сигналы взаимодействия от одной парциальной системы к другой передаются мгновенно. Однако часто встречаются взаимосвязанные колебательные системы, находящиеся на некотором удалении одна от другой и связанные некоторыми волновыми каналами связи. Такие колебательные системы в общем случае описываются сложными дифференциальными уравнениями, в которые входят уравнения в частных производных гиперболического типа и нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, связанные с уравнениями в частных производных через краевые условия. Совместное решение таких систем является задачей очень сложной.

При некоторых весьма общих предположениях волновую связь можно заменять более простой запаздывающей связью [12]. Исследованию взаимодействия двух нелинейных колебательных систем, как без учета запаздывания сил связи, так и с запаздыванием, посвящен ряд работ [2–6, 10, 11].

В данной работе решается задача о взаимодействии произвольного числа слабо связанных автоколебательных систем с учетом запаздывания в элементах связи. На примере трех автогенераторов, соединенных звездой на общую емкость, выясняется влияние запаздывания на характер устойчивого синхронного режима.

1. Рассматриваемая система описывается следующими дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_s(t) + \omega_s^2(\tau) x_s(t) &= \varepsilon f_s(\tau, x_s(t), \dot{x}_s(t); \dots, x_k(t - \Delta_{sk}), \\ &\quad \dot{x}_k(t - \Delta_{sk}), \dot{x}_k(t - \Delta_{sk}), \dots; \varepsilon) \\ (s = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad k \neq s), \end{aligned} \quad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ — медленно изменяющийся параметр, $\omega_s(\tau)$ — положительные и достаточное число раз дифференцируемые функции τ , $\tau \in [0, T]$, Δ_{sk} — вещественные неотрицательные постоянные, f_s — функции, достаточное число раз дифференцируемые по каждому из аргументов при $\tau \in [0, T]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и в достаточно большой области изменения $x_s(t)$, $\dot{x}_s(t); \dots, x_u(t - \Delta_{sk})$, $\dot{x}_k(t - \Delta_{sk})$, $\ddot{x}_k(t - \Delta_{sk}), \dots$.

Следуя [2], построим асимптотическое приближение для решений системы (1).

Будем предполагать, что между частотами парциальных систем выполняются резонансные соотношения

$$\sum_{l=1}^n q_{lh} \omega_l(\tau) \simeq 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где q_{lh} — небольшие целые числа.

Это предположение обуславливает значительное взаимодействие между парциальными системами при малых связях.

При $\varepsilon = 0$ и постоянных ω_s система (1) имеет семейство порождающих решений

$$x_{s0}(t) = a_s \cos(\omega_s t + \theta_s), \quad (3)$$

где a_s, θ_s — произвольные постоянные.

При $\varepsilon > 0$, но довольно малых, и медленно изменяющихся $\omega_s(\tau)$ амплитуды и начальные фазы не будут постоянными. В выражениях $x_s(t)$ появятся гармоники с кратными частотами. Будем искать решения системы (1) в виде асимптотических рядов

$$x_s(t) = a_s \cos \psi_s + \varepsilon U_{s1}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) + \varepsilon^2 U_{s2}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) + \varepsilon^3 \dots, \quad (4)$$

где $\psi_s = \omega_s(\tau) t + \theta_s$, $U_{s1}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ — ограниченные функции, периодические по каждому из аргументов ψ_s с периодом 2π , a_s, θ_s — медленно изменяющиеся функции времени.

Функции $a_s(t), \psi_s(t)$ определяются дифференциальными уравнениями .

$$\begin{aligned} \frac{da_s}{dt} &= \varepsilon P_{s1}(\tau, a_l, \eta_h) + \varepsilon^2 P_{s2}(\tau, a_l, \eta_h) + \dots, \\ \frac{d\psi_s}{dt} &= \omega_s(\tau) + \varepsilon Q_{s1}(\tau, a_l, \eta_h) + \varepsilon^2 Q_{s2}(\tau, a_l, \eta_h) + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\eta_h = \sum_{l=1}^n p_{lh} \psi_l$ ($s = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, n$; $h = 1, 2, \dots, k$).

Для определения неизвестных функций $U_{s1}, P_{s1}, Q_{s1}, U_{s2}, P_{s2}, Q_{s2}, \dots$ подставляем выражения (4) и их производные первого и второго порядка с учетом уравнений (5) в уравнение (1), располагаем результат по степеням ε и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{aligned} \left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right)^2 + \omega_s^2 \right] U_{s1} &= 2\omega_s P_{s1} \sin \psi_s + \\ &+ 2\omega_s a_s Q_{s1} \cos \psi_s + f_{s1}(\tau, a_l, \psi_l) - a_s \frac{d\omega_s}{d\tau} \sin \psi_s \\ (s = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right)^2 + \omega_s^2 \right] U_{s2} = 2\omega_s P_{s2} \sin \psi_s + \\ + 2\omega_s a_s Q_{s2} \cos \psi_s + f_{s2}(\tau, a_1, \psi_1) + \varphi_{s2}(\tau, a_1, \psi_1) \\ (s = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где

$$f_{s1}(\tau, a_1, \psi_1) = f_s(\tau, x_s(t), \dot{x}_s(t); \dots, x_k(t - \Delta_{sk}), \\ \dot{x}_k(t - \Delta_{sk}), \ddot{x}_k(t - \Delta_{sk}), \dots; \varepsilon),$$

причем

$$x_s(t) = a_s \cos \psi_s, \quad \dot{x}_s(t) = -a_s \omega_s \sin \psi_s, \\ x_k(t - \Delta_{sk}) = a_k \cos (\psi_k - \Delta_{sk} \omega_k), \quad \dot{x}_u(t - \Delta_{sk}) = -a_k \omega_k \sin (\psi_k - \Delta_{sk} \omega_u), \\ \ddot{x}_k(t - \Delta_{sk}) = -a_k \omega_k^2 \cos (\psi_k - \Delta_{sk} \omega_k), \quad (\varepsilon = 0).$$

Функции $f_{s2}(\tau, a_1, \psi_1)$ выражаются через производные от функции f_s , в которые подставлены первые приближения $x_s(t)$, и через функции U_{s1}, P_{s1}, Q_{s1} , определяемые из уравнений (6), а функции $\varphi_{s2}(\tau, a_1, \psi_1)$ — через U_{s1}, P_{s1}, Q_{s1} и их производные. Аналогично можно определить функции $f_{s3}, \varphi_{s3}, f_{s4}, \varphi_{s4}, \dots$, необходимые для получения высших приближений.

Для определения функций U_{s1}, P_{s1}, Q_{s1} правые части уравнений (6) как функции, периодические по каждому из аргументов, представим в виде n -кратных рядов Фурье:

$$f_{s1}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = f_{s1}^{(0)}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n) + \\ + \sum_{m_l} \left[f_{s1}^{(m_l)}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n) \cos \left(\sum_{i=1}^n m_i \psi_i \right) + q_{s1}^{(m_l)}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n) \times \right. \\ \left. \times \sin \left(\sum_{i=1}^n m_i \psi_i \right) \right]. \quad (8)$$

Неизвестные функции U_{s1} ищем в виде таких же рядов с коэффициентами Фурье $U_{s1}^{(m_l)}, V_{s1}^{(m_l)}$. Чтобы получить для U_{s1} ограниченные решения, периодические по всем аргументам ψ_i , надо потребовать отсутствия в правых частях уравнений (6) резонансных гармоник с $\cos \psi_s$ и $\sin \psi_s$, а также близких к ним с аргументами, удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_{i=1}^n m_i \psi_i = \sigma_{hs} \sum_{i=1}^n p_{ih} \psi_i \pm \psi_s.$$

Аргументы указанных гармоник заменим по формулам

$$\sum_{i=1}^n m_i \psi_i = \sigma_{hs} \eta_h \pm \psi_s. \quad (9)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos \psi_s$ и $\sin \psi_s$ в правых частях уравнений (6), получим равенства для определения P_{s1}, Q_{s1} :

$$2\omega_s a_s Q_{s1} + \bar{f}_{s1}^{(s)}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) = 0, \\ 2\omega_s P_{s1} + \bar{g}_{s1}^{(s)}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) - a_s \frac{d\omega_k}{d\tau} = 0, \quad (10)$$

где через $\bar{f}_{s1}^{(s)}$ и $\bar{g}_{s1}^{(s)}$ обозначены новые коэффициенты при $\cos \psi_s$ и $\sin \psi_s$ в разложении (8), полученные в результате замены (9). Теперь из системы (6) с учетом (10) найдем выражения для функций U_{s1} :

$$U_{s1}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \\ = \sum_{\substack{m_l \\ m_l \neq \sigma h, p_l h \pm \delta_{si}}} \left[f_{s1}^{(m_l)}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n) \cos \left(\sum_{i=1}^n m_i \psi_i \right) + \right. \\ \left. + g_{s1}^{(m_l)}(\tau, a_1, a_2, \dots, a_n) \sin \left(\sum_{i=1}^n m_i \psi_i \right) \right] \left[\omega_s^2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i \omega_i \right)^2 \right]^{-1} \\ (s = 1, 2, \dots, n).$$

Имея выражения для U_{s1} , P_{s1} , Q_{s1} , можем построить первое и первое улучшенное приближение для искомых решений. Подставив найденные U_{s1} , P_{s1} , Q_{s1} в выражения f_{s2} , φ_{s2} , аналогично найдем U_{s2} , P_{s2} , Q_{s2} из системы (7) и построим приближенное решение во втором приближении.

Практически чаще всего ограничиваются первым приближением, поэтому в построении дальнейших приближений нет необходимости.

Исходя из полученного решения и уравнений (5), можно исследовать стационарные периодические режимы синхронизированных колебаний и их устойчивость, а также процессы установления.

2. В качестве примера рассмотрим взаимодействие трех автогенераторов, соединенных звездой на общую емкость C . Такая сложная колебательная система описывается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) = \varepsilon \{ \beta_1 [1 - \alpha_1 x_1^2(t)] \dot{x}_1(t) - \gamma_{11} x_1(t) - \\ - \gamma_{12} [x_2(t - \Delta) + x_3(t - \Delta)] \}, \\ \ddot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) = \varepsilon \{ \beta_2 [1 - \alpha_2 x_2^2(t)] \dot{x}_2(t) - \gamma_{21} x_2(t) - \\ - \gamma_{22} [x_1(t - \Delta) + x_3(t - \Delta)] \}, \\ \ddot{x}_3(t) + \omega_3^2 x_3(t) = \varepsilon \{ \beta_3 [1 - \alpha_3 x_3^2(t)] \dot{x}_3(t) - \gamma_{31} x_3(t) - \\ - \gamma_{32} [x_1(t - \Delta) + x_2(t - \Delta)] \}, \quad (11)$$

где

$$\omega_s^2 = \frac{C_{s1} + C_{s2}}{L_s C_{s1} C_{s2}}, \quad \gamma_{s1} = \frac{C + \sum_{l=1,3} C_{l2} - C_{s2}}{L_s C_{s2} (C + \sum_{l=1}^n C_{l2})}, \quad \gamma_{s2} = \frac{1}{L_s (C + \sum_{l=1}^3 C_{l1})},$$

$$\varepsilon \beta_s = \frac{M_s S_{s1} - R_{s-}}{L_s}, \quad \alpha_s = \frac{3S_{s2}}{S_{s1}} \quad (s = 1, 2, 3),$$

S_{s1} , S_{s2} — крутизна характеристик ламп.

Будем предполагать, что силы связи между генераторами малы

$$\varepsilon \gamma_{s2} \ll 1 \quad (s = 1, 2, 3)$$

и имеет место резонансное соотношение

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_3.$$

Введем обозначения для расстроек частот:

$$\omega_2 - \omega_1 = \varepsilon \delta_1, \quad \omega_2 - \omega_3 = \varepsilon \delta_2.$$

Решение системы (11) ищем в первом приближении в форме

$$\begin{aligned} x_s(t) = & a_s(t) \cos \psi_s(t) + \varepsilon U_{s1}(\varepsilon t, a_1(t), a_2(t), a_3(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) \\ & (s = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Следуя изложенному методу, для определения $a_s(t)$, $\psi_s(t)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} = & \frac{\varepsilon}{2\omega_1} \left\{ \beta_1 a_1 \omega_1 \left(1 - \frac{1}{4} a_1^2 \alpha_1 \right) - \gamma_{12} [a_2 \sin(\eta_1 - \Delta\omega_2) + \right. \\ & \left. + a_3 \sin(\eta_1 - \eta_2 - \Delta\omega_3)] \right\}, \\ \frac{da_2}{dt} = & \frac{\varepsilon}{2\omega_2} \left\{ \beta_2 a_2 \omega_2 \left(1 - \frac{1}{4} a_2^2 \alpha_2 \right) + \gamma_{21} [a_1 \sin(\eta_1 + \Delta\omega_1) + \right. \\ & \left. + a_3 \sin(\eta_2 + \Delta\omega_3)] \right\}, \\ \frac{da_3}{dt} = & \frac{\varepsilon}{2\omega_3} \left\{ \beta_3 a_3 \omega_3 \left(1 - \frac{1}{4} a_3^2 \alpha_3 \right) + \gamma_{31} [a_1 \sin(\eta_1 - \eta_2 + \Delta\omega_1) - \right. \\ & \left. - a_2 \sin(\eta_2 - \Delta\omega_2)] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega_1 + \frac{\varepsilon}{2\omega_1 a_1} \left\{ \gamma_{11} a_1 + \gamma_{12} [a_2 \cos(\eta_1 - \Delta\omega_2) + a_3 \cos(\eta_1 - \eta_2 - \Delta\omega_3)] \right\},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \omega_2 + \frac{\varepsilon}{2\omega_2 a_2} \left\{ \gamma_{21} a_2 + \gamma_{22} [a_1 \cos(\eta_1 + \Delta\omega_1) + a_3 \cos(\eta_2 + \Delta\omega_3)] \right\},$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \omega_3 + \frac{\varepsilon}{2\omega_3 a_3} \left\{ \gamma_{31} a_3 + \gamma_{32} [a_1 \cos(\eta_1 - \eta_2 + \Delta\omega_1) + a_2 \cos(\eta_2 - \Delta\omega_2)] \right\},$$

где

$$\eta_1 = \psi_2 - \psi_1, \quad \eta_2 = \psi_2 - \psi_3.$$

Общую частоту синхронизированных колебаний обозначим через ω . Тогда $\omega_s = \omega + \varepsilon q_s$ и величины ε/ω_s можно приближенно заменить величинами ε/ω .

Для исследования взаимной синхронизации рассмотрим стационарные периодические режимы и их устойчивость. Стационарные периодические режимы получим из условий

$$a_s = \text{const}, \quad \eta_i = \text{const} \quad (s = 1, 2, 3; i = 1, 2)$$

или

$$\frac{da_s}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt} - \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt} - \frac{d\psi_3}{dt} = 0.$$

Таким образом, амплитуды a_s и разности фаз η_i стационарных режимов находятся из системы уравнений

$$\beta_1 a_1 \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_1 a_1^2 \right) - \frac{\gamma_{12}}{\omega} [a_2 \sin(\eta_1 - \Delta\omega_2) + a_3 \sin(\eta_1 - \eta_2 - \Delta\omega_3)] = 0,$$

$$\beta_2 a_2 \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_2 a_2^2 \right) + \frac{\gamma_{23}}{\omega} [a_1 \sin(\eta_1 + \Delta\omega_1) + a_3 \sin(\eta_2 + \Delta\omega_3)] = 0,$$

$$\beta_3 a_3 \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_3 a_3^2 \right) + \frac{\gamma_{31}}{\omega} [a_1 \sin(\eta_1 - \eta_2 + \Delta\omega_1) - a_2 \sin(\eta_2 - \Delta\omega_2)] = 0,$$

$$\delta_1 + \frac{1}{2\omega} \left\{ \gamma_{21} - \gamma_{11} + \frac{\gamma_{22}}{a_2} [a_1 \cos(\eta_1 + \Delta\omega_1) + a_3 (\eta_2 + \Delta\omega_3)] - \frac{\gamma_{12}}{a_1} [a_2 \cos(\eta_1 - \Delta\omega_2) + a_3 \cos(\eta_1 - \eta_2 - \Delta\omega_3)] \right\} = 0,$$

$$\delta_2 + \frac{1}{2\omega} \left\{ \gamma_{21} - \gamma_{31} + \frac{\gamma_{22}}{a_2} [a_1 \cos(\eta_1 + \Delta\omega_1) + a_3 \cos(\eta_2 + \Delta\omega_3)] - \frac{\gamma_{32}}{a_3} [a_1 \cos(\eta_1 - \eta_2 + \Delta\omega_1) + a_2 \cos(\eta_2 - \Delta\omega_2)] \right\} = 0.$$

Для исследования устойчивости стационарных режимов составляем для системы (12) соответствующую систему уравнений в вариациях и получаем характеристическое уравнение и условия устойчивости. В силу громоздкости мы их здесь не приводим.

Рассмотрим случай идентичных генераторов:

$$\alpha_s = \alpha, \beta_s = \beta, \gamma_{si} = \gamma, \omega_s = \omega_0 \quad (s = 1, 2, 3; i = 1, 2).$$

При отсутствии запаздывания получаем три стационарных режима:

$$\eta_1 = \eta_2 = 0, \quad a = 2/\sqrt{\alpha};$$

$$\eta_1 = 4\pi/3, \quad \eta_2 = 2\pi/3, \quad \eta_1 - \eta_2 = 2\pi/3, \quad a = 2/\sqrt{\alpha};$$

$$\eta_1 = 2\pi/3, \quad \eta_2 = 4\pi/3, \quad \eta_1 - \eta_2 = -2\pi/3, \quad a = 2/\sqrt{\alpha}.$$

Проведя исследование с помощью полученного характеристического уравнения и критерия Рауса—Гурвица, заключаем, что указанные стационарные режимы асимптотически устойчивы для любых значений параметров.

При учете запаздывания ($\Delta\omega_0 \neq 0$) получаем те же стационарные режимы. Первый из них устойчив при любых значениях параметров и $0 < \Delta\omega_0 \leq \pi$, причем амплитуда возрастает до величины $a = 2 \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{2\gamma}{\alpha\beta\omega_0} \sin(\Delta\omega_0) \right]^{1/2}$. Для второго и третьего режимов амплитуды уменьшаются до $a = 2 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha\beta\omega_0} \sin(\Delta\omega_0) \right]^{1/2}$, а область устойчивости определяется следующими условиями:

$$z > (5/2) \sin(\Delta\omega_0);$$

$$4z^2 - 26 \sin(\Delta\omega_0) z + (9 + 22 \sin^2(\Delta\omega_0)) > 0;$$

$$-2 \sin(\Delta\omega_0) z^2 + (3 + 4 \sin^2(\Delta\omega_0)) z - (3 + 2 \sin^2(\Delta\omega_0)) > 0;$$

$$\begin{aligned}
 & -16 \sin(\Delta\omega_0) z^5 + (12 + 164 \sin^2(\Delta\omega_0)) z^4 - (156 + \\
 & + 604 \sin^2(\Delta\omega_0)) \sin(\Delta\omega_0) z^3 + (27 + 585 \sin^2(\Delta\omega_0) + 988 \sin^4(\Delta\omega_0)) z^2 + \\
 & + (135 + 750 \sin^2(\Delta\omega_0) + 740 \sin^4(\Delta\omega_0)) \sin(\Delta\omega_0) z + (108 + \\
 & + 309 \sin^2(\Delta\omega_0) + 208 \sin^4(\Delta\omega_0)) \sin^2(\Delta\omega_0) > 0,
 \end{aligned}$$

где $z = \beta\omega_0/\gamma$.

Небольшие области устойчивости, изображенные на рис. 1, мы получаем лишь при $\Delta\omega_0$, изменяющемся в пределах от 0 до $\pi/9$ и от $8\pi/9$ до π . Следовательно, практически устойчив один синфазный стационарный режим.

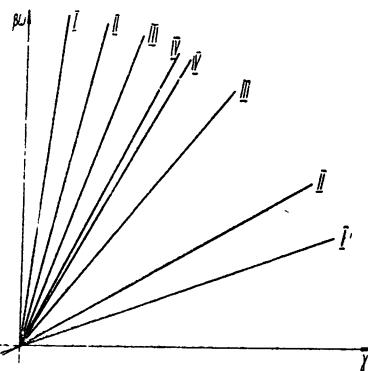


Рис. 1. Области устойчивости при $\Delta\omega_0 = \pi/36, \pi/8, \pi/12, \pi/9$.

ЛИТЕРАТУРА

7. И. И. Блехман, ПММ, 28, вып. 2, 193 (1964).
2. В. П. Рубаник, Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 2, 183 (1963).
3. В. И. Гапонов, ЖТФ, 6, вып. 5, 801 (1936).
4. Н. И. Есафов, ЖТФ, 17, вып. 7, 803 (1947).
5. Б. Н. Горожанкин, Изв АН СССР, сер. физ., 11, № 2, 147 (1947).
6. Г. Н. Рапопорт, Радиотехника, 6, № 4, 53 (1951).
7. В. Н. Парыгин, Радиотехника и электроника, 1, вып. 2, 197 (1956).
8. И. И. Блехман, Изв АН СССР, ОТН, № 6, 53 (1958).
9. И. И. Блехман, Тр. ин-та машиноведения АН СССР, семинар по теории машин и механизмов, 21, вып. 83—84, 41 (1961).
10. В. П. Рубаник, Радиотехника и электроника, 7, № 10, 1711 (1962).
11. Ю. И. Марченко, В. П. Рубаник, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 8, № 4, 679 (1965).
12. Ю. И. Марченко, В. П. Рубаник, Инженерный ж., механика твердого тела, № 2, 174 (1966).

Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию
7 января 1967 г.

INTER-SYNCHRONIZATION OF THE AUTOOSCILLATING SYSTEM WITH THE ACCOUNT OF INTERACTION FORCES TIME DELAY,

Jao. I. Marchenko

This paper presents the development of the approximate solution for the system with an arbitrary number of the autooscillating members having time delay in the interaction elements.

Interaction of three self-excited oscillators is considered as an example.

УДК 62—505 7

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ
ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ
МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА**

A. С. Алексеев, Ф. Ф. Минчук

Методами точечных преобразований и неопределенных множителей Лагранжа решается плоская задача оптимального управления движением материальной точки через горизонтальную границу раздела двух сред. Находится оптимальное (кусочно-постоянное) управление и траектория, на которой достигается минимум частного вида квадратичного функционала, зависящего от времени движения и параметров управления.

В работе [1] было указано на возможность применения метода изохронных точечных преобразований и метода неопределенных множителей Лагранжа для решения задач об оптимальном управлении и нахождения оптимальных траекторий в фазовом пространстве кусочно-линейных динамических систем. При этом с помощью первого метода эффективно отыскиваются условия, которым должно быть подчинено движение, а с помощью второго решается задача отыскания условного экстремума функционала. Очевидно, рассмотрение лишь кусочно-постоянных во времени управлений (правых частей дифференциальных уравнений) не является принципиальным. В настоящей работе рассмотрен простой пример кусочно-линейной системы и такой вид нелинейного функционала, который позволяет указанныю процедуру провести в достаточной мере аналитически. Другой особенностью этой задачи является не только ограниченность области допустимых управлений первым квадрантом, но и то, что ее решение достигается, как правило, на границах этой области. Широко применяемый для этих целей, обобщенный метод Лагранжа [2—5], как уже обсуждалось [1—3], не спасает от перебора поисков решения на границах (и их всевозможных пересечениях) области допустимых управлений, а помогает лишь изящно записать все многообразие задачи введением дополнительных переменных и условий дополнительной нежесткости. Действительно, в каждом случае в отдельности, т. е. внутри этой области и на ее границах, всякий раз работает обычный метод неопределенных множителей Лагранжа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть, как и в [1], в плоскости Y, Z , разделенной на две части прямой $Z = Z_0$, требуется перевести материальную точку, подчиняющуюся уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + H_k \dot{Y} &= P_k, \\ \ddot{Z} + H_k \dot{Z} &= Q_k, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где H_k — заданные, а P_k и Q_k — искомые константы, $k = 1$ в области $Z \leq Z_0$ и $k = 2$ в области $Z > Z_0$, из начала координат в некоторую

точку с координатами Y_1 и $Z_1 > Z_0$ так, чтобы функционал вида $\int_0^T (\alpha + \beta P + \gamma Q) dt'$, т. е. в данном случае

$$J = \sum_{k=1}^2 (\alpha + \beta P_k + \gamma Q_k) t'_k, \quad (1.2)$$

в котором α, β и γ — некоторые размерные константы, достигал минимума при условии

$$P_k, Q_k \geq 0 \quad (k = 1, 2). \quad (1.3)$$

Введем новые переменные

$$t = \alpha t', \quad y = \alpha \beta Y, \quad z = \alpha \gamma Z \quad (1.4)$$

и, обозначая опять точкой дифференцирование по новому времени, получим систему (1.1), функционал (1.2) и условия (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y} + h_k \dot{y} &= p_k, \\ \ddot{z} + h_k \dot{z} &= q_k; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$J = \sum_{k=1}^2 (1 + p_k + q_k) t_k; \quad (1.6)$$

$$p_k, q_k \geq 0 \quad (k = 1, 2),$$

где t' в дальнейшем

$$\begin{aligned} h_k &= H_k/\alpha > 0, \quad p_k = P_k \beta / \alpha, \quad q_k = Q_k \gamma / \alpha, \\ a &= \alpha \gamma Z_0, \quad b = \alpha \beta Y_1, \quad c = \alpha \gamma Z_1, \quad (c > a). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассматривая движение системы в четырехмерном фазовом пространстве, разделенном гиперплоскостью $z = a$ на два слоя ($k = 1$ для $0 \leq z \leq a$ и $k = 2$ для $z > a$), и применяя метод точечных преобразований, нетрудно получить (см. также [1]) условия

$$\Phi_1 \equiv q_1 k_1 - a = 0, \quad (1.8)$$

$$\Phi_2 \equiv p_1(k_1 + l_1 l_2) + p_2 k_2 - b = 0, \quad (1.9)$$

$$\Phi_3 \equiv q_1 l_1 l_2 + q_2 k_2 - c + a = 0, \quad (1.10)$$

которые должны удовлетворяться при произвольном переходе изображающей точки из начального в конечное состояние и в которых введены обозначения функций времени

$$l_k \equiv \frac{1}{h_k} (1 - e^{-h_k t_k}) \geq 0, \quad k_k \equiv \frac{1}{h_k} (t_k - l_k) \geq 0 \quad (1.11)$$

при $t_k \geq 0$, удовлетворяющих, как нетрудно видеть, тождествам

$$\begin{aligned} \dot{l}_k &\equiv e^{-h_k t_k}, \quad \dot{k}_k \equiv l_k, \\ t_k l_k - k_k &\equiv l_k^2 - k_k e^{-h_k t_k} \equiv \frac{1}{h_k} (l_k - t_k e^{-h_k t_k}) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В результате поставленная задача свелась к отысканию минимума функционала (1.6) при выполнении трех условий (1.8)–(1.10) и с по-

мощью обобщенного метода Лагранжа в матричной форме может быть записана в виде уравнений для v , u и λ :

$$d\Phi(u)^T \lambda - \partial J(u) + v = 0, \quad (1.13)$$

$$\Phi(u) = 0, \quad (1.14)$$

$$v^T u = 0, \quad (1.15)$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (1.16)$$

где

$$\Phi^T \equiv \|\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3\|, \quad \lambda^T \equiv \|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\|, \quad u^T \equiv \|u_1 \dots u_6\| \equiv \|p_1 p_2 q_1 q_2 t_1 t_2\|,$$

$$v^T \equiv \|v_1 \dots v_6\|, \quad \partial J(u)^T \equiv \left\| \frac{\partial J}{\partial u_1} \dots \frac{\partial J}{\partial u_6} \right\|,$$

$$d\Phi(u)^T \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_6} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_6} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_6} \end{vmatrix}.$$

Уравнения (1.13) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\lambda_2(k_1 + l_1 l_2) - t_1 + v_1 = 0, \quad (1.17)$$

$$\lambda_2 k_2 - t_2 + v_2 = 0, \quad (1.18)$$

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_3 l_1 l_2 - t_1 + v_3 = 0, \quad (1.19)$$

$$\lambda_3 k_2 - t_2 + v_4 = 0, \quad (1.20)$$

$$-(1 + p_1 + q_1) + \lambda_1 q_1 l_1 + \lambda_2 p_1 (l_1 + l_2 e^{-h_1 t_1}) + \lambda_3 q_1 l_2 e^{-h_1 t_1} + v_5 = 0, \quad (1.21)$$

$$-(1 + p_2 + q_2) + \lambda_2 (p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + p_2 l_2) + \lambda_3 (q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + q_2 l_2) + v_6 = 0, \quad (1.22)$$

уравнения (1.14) определяются с помощью (1.8) — (1.10), а уравнения (1.15) и (1.16) совместно дают равенства

$$\begin{aligned} v_1 p_1 &= 0, & v_2 p_2 &= 0, & v_3 q_1 &= 0, \\ v_4 q_2 &= 0, & v_5 t_1 &= 0, & v_6 t_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

которые, по сути дела, служат для выбора из системы уравнений (1.8) — (1.10), (1.17) — (1.22) подсистемы, соответствующей рассмотрению внутренних или граничных точек в области допустимых u . Действительно, для внутренних точек этой области ($u > 0$) $v = 0$, для точек границы $u_m = 0$ получим $v_{i+m} = 0$, а уравнение, в котором присутствует слагаемое $v_m \neq 0$, следует отбросить и т. д. Очевидно, этот процесс приводит к обычной процедуре Лагранжа для каждого конкретного случая.

Заметим, что из всего многообразия случаев, задаваемых уравнениями (1.23), выпадают, вообще говоря, случай $p_1 = p_2 = 0$ и, в силу (1.8), случай с $q_1 = 0$, т. е. всегда следует считать $v_3 = 0$.

Будем также в дальнейшем считать, что оптимальные $t_1, t_2 > 0$, и поэтому сразу положим в уравнениях (1.17) — (1.23) $v_5 = v_6 = 0$, а также для определенности примем

$$h_1 > h_2. \quad (1.24)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ

В этом случае $v = 0$, что соответствует полной системе уравнений (1.8)–(1.10), (1.17)–(1.22). Исключая из нее все искомые величины, кроме t_1 и t_2 , получим для последних уравнения в виде

$$f_{10}(t_1, t_2) \equiv t_2(k_1 + l_1 l_2) - t_1 k_2 = 0, \quad (2.1)$$

$$f_{20}(t_1, t_2) \equiv (p_1 + q_1)(k_1 + l_1 l_2) + (p_2 + q_2)k_2 = b + c, \quad (2.2)$$

где

$$p_1 + q_1 = \frac{k_2}{t_2(l_1 + l_2 e^{-h_1 t_1}) - k_2}, \quad (2.3)$$

$$p_2 + q_2 = \frac{k_2 - t_2 l_1 e^{-h_2 t_2} (p_1 + q_1)}{t_2 l_2 - k_2}. \quad (2.4)$$

Прибавляя и вычитая в левой части выражения (2.1) член $t_1 t_2 l_2$, запишем выражение (2.1) в виде

$$f_{10}(t_1, t_2) \equiv t_1(t_2 l_2 - k_2) + k_1 t_2(1 - h_1 l_2) = 0, \quad (2.5)$$

из которого следует, что задаваемая им функция $t_2(t_1)$ не существует для $0 < t_2 < t'_2$, где t'_2 определяется уравнением

$$h_1 l_2 = 1. \quad (2.6)$$

Частная производная

$$f'_{10|t_1} = \frac{t_2}{t_1} (h_1 l_2 - 1) (k_1 - t_1 l_1) \leq 0 \quad (2.7)$$

в точках, удовлетворяющих уравнению (2.1) или (2.5), отрицательна в силу (1.12) и совпадает (см. 2.1)) со знаменателем выражения (2.3), которое, следовательно, всюду на кривой $f_{10}(t_1, t_2) = 0$ также отрицательно. Поэтому в любой точке t_{10}, t_{20} , определяемой уравнениями (2.1) и (2.2), в силу (1.8) будет иметь место $p_1 < 0$. Следовательно, искомое решение задачи внутри области допустимых управлений отсутствует.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ГРАНИЦЫ $p_1=0$

В этом случае $v_i \neq 0$, а $v_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, 6$) и система уравнений, дающих искомое решение, получается из исходной системы уравнений (1.8)–(1.10), (1.17)–(1.22) путем отбрасывания уравнения (1.17) и подстановки в них значений $p_1 = 0$, $v_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, 6$). После этого нетрудно получить, что искомые времена t_{11} и t_{21} должны определяться уравнениями

$$f_{11}(t_1, t_2) \equiv -1 - q_1 + \lambda_1 q_1 l_1 + \lambda_3 q_1 l_2 e^{-h_1 t_1} = 0, \quad (3.1)$$

$$f_{21}(t_1, t_2) \equiv -1 - p_2 - q_2 + \lambda_2 p_2 l_2 + \lambda_3 (q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + q_2 l_2) = 0, \quad (3.2)$$

где

$$q_1 = \frac{a}{k_1}, \quad p_2 = \frac{b}{k_2}, \quad q_2 = \frac{c - a - q_1 l_1 l_2}{k_2} > 0, \quad (3.3)$$

$$\lambda_1 = \frac{t_1 k_2 - t_2 l_1 l_2}{k_1 k_2}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{t_2}{k_2},$$

а неравенство $q_2 > 0$ должно выполняться при существовании решения в рассматриваемом случае.

Подставляя выражения (3.3) в функцию f_{11} (3.1), нетрудно убе-

диться, что она принимает отрицательные значения при любых $t_1, t_2 > 0$, т. е. кривая $t_2(t_1)$, определяемая уравнением (3.1), отсутствует в этой области. Действительно, после указанной подстановки получим, учитывая (1.12) и (3.3), что

$$f_{11}(t_1, t_2) = -1 - \frac{q_1}{k_1 k_2} (t_1 l_1 - k_1)(t_2 l_2 - k_2) < 0 \quad (3.4)$$

при $t_1, t_2 > 0$. Следовательно, во внутренних точках рассмотренной границы также нет искомого решения.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ГРАНИЦЫ $p_2=0$

В этом случае $v_2 \neq 0$, а $v_i = 0$ ($i = 1, 3, \dots, 6$) и необходимая система уравнений получается из исходной системы (1.8)–(1.10), (1.17)–(1.22) путем отбрасывания уравнения (1.18) и подстановки в нее значений $p_2 = 0$, $v_i = 0$ ($i = 1, 3, \dots, 6$). В результате для определения искомых t_{12} и t_{22} можно написать следующие уравнения:

$$f_{12}(t_1, t_2) \equiv -1 - p_1 - q_1 + \lambda_2 p_1(l_1 + l_2 e^{-h_1 t_1}) + \lambda_1 q_1 l_1 + \lambda_3 q_1 l_2 e^{-h_2 t_2} = 0, \quad (4.1)$$

$$f_{22}(t_1, t_2) \equiv -1 - q_2 + \lambda_3 q_2 l_2 + \lambda_2 p_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + \lambda_3 q_1 l_1 e^{-h_1 t_1} = 0, \quad (4.2)$$

где q_1, q_2, λ_1 и λ_3 определяются так же, как и в (3.3), а

$$p_1 = \frac{b}{k_1 + l_1 l_2}, \quad \lambda_2 = \frac{t_1}{k_1 + l_1 l_2}. \quad (4.3)$$

Образуем разность

$$f_{12} - f_{22} = -q_1(1 - \lambda_1 l_1 + \lambda_3 l_2 e^{-h_1 t_1}) - q_2(\lambda_3 l_2 - 1) - \lambda_3 q_1 l_1 e^{-h_2 t_2} - p_1[1 - \lambda_2(l_1 + l_2 e^{-h_1 t_1}) + \lambda_2 l_1 e^{-h_2 t_2}], \quad (4.4)$$

в которой, как нетрудно усмотреть с учетом выражений (1.12) и (4.3), первые три слагаемых отрицательны при положительном q_2 , последнее же приводится к виду

$$-\frac{p_1}{k_1 + l_1 l_2} [t_1 l_1 e^{-h_2 t_2} + (h_1 l_2 - 1)(t_1 l_1 - k_1)] \equiv -\frac{p_1}{k_1 + l_1 l_2} \eta(t_1, t_2) < 0, \quad (4.5)$$

и также отрицательно при $h_1 > h_2$ и $t_1, t_2 > 0$, так как в этом случае

$$\begin{aligned} \eta(t_1, t_2) &> \eta_1(t_1, t_2) \equiv (t_1 l_1 - k_1)(e^{-h_2 t_2} - 1 + h_1 l_2) = \\ &= (h_1 - h_2) l_2 (t_1 l_1 - k_1) > 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Знакопостоянство разности (4.4) при указанных предположениях показывает, что в рассматриваемом случае искомое решение также отсутствует.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ГРАНИЦЫ $q_2=0$

В этом случае $v_4 \neq 0$, а $v_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 5, 6$), в системе (1.8)–(1.10), (1.17)–(1.22) производится подстановка значений $q_2 = 0$, $v_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 5, 6$) и отбрасывается уравнение (1.20). После этого из (1.10) и (1.17), (1.18) нетрудно получить уравнения (см. (2.1), (2.5) и (4.3))

$$f_{13}(t_1, t_2) \equiv f_{10}(t_1, t_2) \equiv t_2(k_1 + l_1 l_2) - t_1 k_2 = 0, \quad (5.1)$$

$$f_{23}(t_1, t_2) \equiv F(t_1, t_2) \equiv c k_1 - a(k_1 + l_1 l_2) = 0 \quad (5.2)$$

для определения искомых t_{11}^*, t_{21}^* , а также из остальных уравнений значений

$$q_1 = \frac{a}{k_1} > 0, \quad p_2 = \frac{b - p_1(k_1 + l_1 l_2)}{k_2} > 0,$$

$$p_1 = \left[b \frac{t_2 l_2 - k_2}{k_2^2} - 1 + a \frac{l_1 e^{-h_2 t_2}}{k_1 l_2} - \frac{k_1 l_1 e^{-h_2 t_2}}{l_2(t_1 l_1 - k_1)} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{k_1}{k_2} (h_1 l_2 - 1) - \frac{l_1}{l_2} e^{-h_2 t_2} \right]^{-1} > 0. \quad (5.3)$$

Заметим, что требуемая в рамках этого случая положительность величин p_1 и p_2 (5.3) относится непосредственно к их числителям, так как несложно показать, что знаменатель p_1 в (5.3) по крайней мере при условии (5.1), совпадающем с (2.1) и (2.5), положителен при $t_1, t_2 > 0$. Действительно, учитывая (2.5) и то, что $t_1 > l_1$, для этого знаменателя получим

$$\begin{aligned} \xi(t_1, t_2) &\equiv \frac{k_1}{k_2} (h_1 l_2 - 1) - \frac{l_1}{l_2} e^{-h_2 t_2} > \frac{k_1}{k_2} (h_1 l_2 - 1) - \frac{t_1}{l_2} e^{-h_2 t_2} = \\ &= \frac{t_1}{t_2 l_2 - k_2} [l_2(t_2 l_2 - k_2) - t_2 k_2 e^{-h_2 t_2}] \equiv \frac{t_1}{t_2 l_2 - k_2} \xi_1(t_2), \\ \xi_1(0) &= 0, \\ \dot{\xi}_1 &= e^{-h_2 t_2} (t_2 l_2 - 2k_2 + h_2 t_2 k_2) \equiv e^{-h_2 t_2} \xi_2(t_2), \\ \xi_2(0) &= 0, \quad \dot{\xi}_2 = 2h_2 k_2 > 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

т. е. $\xi_2, \xi_1 > 0$, а значит и $\xi > 0$ при $t_1, t_2 > 0$, что и требовалось показать.

Покажем теперь, что в рассматриваемом случае имеется единственная точка t_{11}^*, t_{21}^* , дающая экстремум функционала (1.6), т. е. что кривые $f_{13} = 0$ (5.1) и $F = 0$ (5.2) на плоскости t_1, t_2 пересекаются в одной точке.

Поведение кривой $F = 0$ (5.2) качественно показано на рис. 1. Она выходит из начала координат под углом, тангенс которого равен $c - a/2a > 0$, и имеет вертикальную асимптоту при значении $t_1 = t_1^*$, которое определяется из условия

$$\frac{l_1}{k_1} = \frac{h_2(c - a)}{a}, \quad (5.5)$$

производная (см. (1.12)) на ней

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{c - a}{a} \frac{t_1 l_1 - k_1}{l_1^2 e^{-h_2 t_2}} > 0. \quad (5.6)$$

Поведение кривой $f_1 = 0$ (2.1), (2.5), (5.1), качественно показано на том же рисунке. Она имеет вертикальную асимптоту при $t_1 = 0$ и горизонтальную асимптоту при $t_2 = t_2^0$, которое определяется из условия

$$t_2 = h_1 k_2. \quad (5.7)$$

Производная $\frac{dt_2}{dt_1}$ на ней отрицательна, так как $f'_1 t_1 < 0$ (см. (2.7))

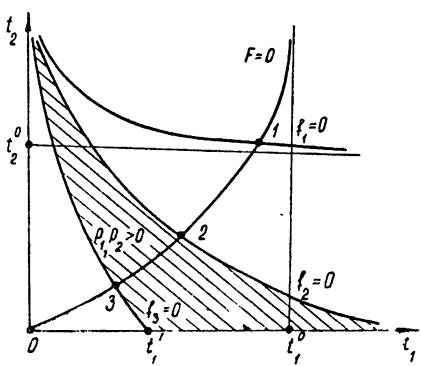


Рис. 1.

$$\begin{aligned} f'_{1 t_2} &= k_2(1 - h_1 l_2) + l_1 t_2 e^{-h_2 t_2} = l_1 t_2 e^{-h_2 t_2} - t_1 \frac{t_2 l_2 - k_2}{t_2} = \\ &= l_1 t_2 e^{-h_2 t_2} - (k_1 + l_1 l_2) \frac{t_2 l_2 - k_2}{k_2} < \frac{l_1}{k_2} [t_2 k_2 e^{-h_2 t_2} - l_2(t_2 l_2 - k_2)] \equiv \frac{l_1}{k_2} \xi(t_2) < 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

в силу (1.12), (5.4).

Из высказанного следует существование и единственность точки пересечения кривых $F = 0$ и $f_1 = 0$. Для дальнейшего отметим, что (см. (2.5)) $f_1 > 0$ ниже кривой $f_1 = 0$. Заметим также, что уравнения кривых $F = 0$ и $f_1 = 0$ (см. (2.5)), (равно как и рассматриваемые ниже ($f_2 = 0$, $f_3 = 0$) являются уравнениями с разделяющимися переменными, т. е. могут быть записаны в виде $\varphi(t_1) = \psi(t_2) = f(t)$. Поэтому поведение кривых легко изучается, а сами они могут быть качественно построены графически на плоскости t, f ($t = t_1 = t_2, f = \varphi = \psi$).

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ГРАНИЦЫ $q_2 = p_1 = 0$

В этом случае $v_1 \neq 0$, $v_4 \neq 0$, $v_i = 0$ ($i = 2, 3, 5, 6$), в системе (1.8) — (1.10), (1.17) — (1.22) производится подстановка значений $p_1 = q_2 = 0$, $v_i = 0$ ($i = 2, 3, 5, 6$) и отбрасываются уравнения (1.17) и (1.20). После этого, или просто из предыдущего случая (раздел 5), отбрасывая уравнение (5.1) и полагая $p_1 = 0$ в равенствах (5.3), для t_{12}^* и t_{22}^* получим уравнение (5.2) и

$$f_{14}(t_1, t_2) \equiv f_2(t_1, t_2) \equiv \varphi(t_1) - \psi(t_2) = 0, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) &\equiv l_1 \left(\frac{a}{k_1} - \frac{k_1}{t_1 l_1 - k_1} \right), \\ \psi(t_2) &\equiv l_2 e^{h_2 t_2} \left(1 - b \frac{t_2 l_2 - k_2}{k_2^2} \right), \end{aligned} \quad (6.2)$$

а также значение $q_1 > 0$ из (5.3) и

$$p_2 = b/k_2. \quad (6.3)$$

На этой границе также имеется единственная точка (t_{12}^*, t_{22}^*) , дающая экстремум функционала (1.6). Действительно, кривая (5.2) прежняя, а кривая (6.1) имеет своими асимптотами оси координат $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$ (рис. 1). Производная кривой (6.1) отрицательна.

Действительно (см. (6.2)),

$$\dot{\varphi}(t_1) = -a \frac{t_1 l_1 - k_1}{k_1^2} - \frac{\gamma(t_1)}{(t_1 l_1 - k_1)^2} < 0,$$

так как функция (см. (1.12))

$$\gamma(t_1) \equiv l_1^2(t_1 l_1 - k_1) - k_1^2 e^{-h_1 t_1} > 0, \quad (6.4)$$

ибо

$$\gamma(0) = 0, \quad \dot{\gamma} = e^{-h_1 t_1} [3l_1(t_1 l_1 - k_1) + k_1(t_1 - 2l_1)] = e^{-h_1 t_1} \gamma_1(t_1),$$

$$\gamma_1(0) = 0, \quad \dot{\gamma}_1 = 6e^{-h_1 t_1} (t_1 l_1 - k_1) + h_1 l_1 k_1 + \gamma_2(t_1),$$

$$\gamma_2(t_1) \equiv 2k_1 - t_1 l_1 > 0, \quad \gamma_2(0) = 0, \quad \dot{\gamma}_2 = h_1(t_1 l_1 - k_1) > 0.$$

Несмотря на то, что производная (см. (6.2))

$$\dot{\psi}(t_2) = -b \frac{e^{-h_2 t_2}}{k_2^3} \left[\frac{k_2^3}{b} + (t_2 l_2 - k_2)(2l_2^2 - k_2) - t_2 l_2 k_2 e^{-h_2 t_2} \right] \quad (6.5)$$

при больших b , вероятно, может становиться положительной (два раза меняя знак при значениях t_2 , для которых $l_2 e^{h_2 t_2} > 1$ и $\psi < 0$), нетрудно показать, что в точках пересечения кривых $F = 0$ (5.2) и $f_2 = 0$ (6.1) производная $\frac{dt_2}{dt_1}$ на последней сохраняет знак. С этой целью заменим в (6.1) с помощью (5.2) величины

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{k_1} &= \frac{c-a}{al_2}, \quad k_1 = \frac{a}{c-a} l_1 l_2, \\ e^{-h_2 t_2} &= 1 - h_2 l_2 = 1 - \beta_1 \frac{k_1}{l_1} > 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$\beta_1 = h_2 \frac{c-a}{a}, \quad (6.7)$$

и получим (6.1) в виде

$$\varphi_1(t_1) + \psi_1(t_2) = 0,$$

в котором

$$\varphi_1(t_1) \equiv -\frac{a}{c-a} \left(1 - \beta_1 \frac{k_1}{l_1} \right) \frac{l_1}{t_1 l_1 - k_1}, \quad (6.8)$$

$$\psi_1(t_2) \equiv b \frac{t_2 l_2 - k_2}{k_2^2} - 1 + \frac{c-a}{l_2^2} e^{-h_2 t_2}. \quad (6.9)$$

Вычисляя производные функций (6.8) и (6.9), получим (см. (1.12) и (6.6))

$$\dot{\varphi}_1 = \beta_1 + \left(1 - \beta_1 \frac{k_1}{l_1} \right) \frac{2k_1 - t_1 l_1}{(t_1 l_1 - k_1)^2} > 0, \quad (6.10)$$

так как выражение $2k_1 - t_1 l_1 > 0$ при $t_1 > 0$ (см. (6.4)), и

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{c-a}{a} \frac{1 + e^{-h_2 t_2}}{l_2} e^{-h_2 t_2} - b \frac{2l_2(t_2 l_2 - k_2) - t_2 k_2 e^{-h_2 t_2}}{k_2^3} < 0, \quad (6.11)$$

так как выражение

$$\delta(t_2) \equiv 2l_2(t_2 l_2 - k_2) - t_2 k_2 e^{-h_2 t_2} = (t_2 l_2 - k_2)(t_2 + l_2) - l_2 k_2 > 0 \quad (6.12)$$

при $t_2 > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 0, \quad \dot{\delta} = e^{-h_2 t_2} [2(t_2 l_2 - k_2) + t_2^2 - k_2] \equiv e^{-h_2 t_2} \delta_1(t_2), \\ \delta_1(0) &= 0, \quad \dot{\delta}_1 = 2t_2 e^{-h_2 t_2} + 2t_2 - l_2 > 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Постоянство знаков производных (6.10) и (6.11) в любой точке пересечения кривых $F = 0$ (5.2) и $f_2 = 0$ (6.1) показывает единственность такой точки. Заметим еще, что ниже кривой (6.1) функция $f_2(t_1, t_2)$ положительна.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК ГРАНИЦЫ $q_2=p_2=0$

В уравнениях (1.8)–(1.10) (1.17)–(1.22) следует положить $v_1 = v_3 = v_5 = v_6 = 0$, $q_2 = p_2 = 0$ и отбросить уравнения (1.18) и (1.20). Полученная система уравнений определит t_{13}^* , t_{23}^* для которых будем иметь опять уравнение (5.2) и

$$f_{15}(t_1, t_2) \equiv f_3(t_1, t_2) \equiv a \frac{c+b}{c} \frac{l_1}{k_1} - \frac{l_1 k_1}{t_1 l_1 - k_1} - l_2 e^{-h_2 t_2} \equiv \\ \equiv \varphi_3(t_1) - \psi_3(t_2) = 0, \quad (7.1)$$

точно также q_1 определяется из (5.3) и

$$p_1 = \frac{b}{k_1 + l_1 l_2} > 0. \quad (7.2)$$

В этом случае имеет место единственное решение уравнений (5.2), (7.1), дающее экстремум функционала (1.6), так как кривая $f_3 = 0$ (7.1) имеет своей асимптотой ось $t_1 = 0$ и монотонно опускается (рис. 1) к точке $t_2 = 0$, $t_1 = t_1'$, где t_1' определяется из уравнения

$$k_1 = a \frac{c+b}{c} \frac{t_1 l_1 - k_1}{k_1}, \quad (7.3)$$

которое имеет единственное решение при любых $a, b, c > 0$.

Производная $\frac{dt_2}{dt_1}$ на кривой $f_3 = 0$ отрицательна, так как

$$\dot{\psi}_3(t_2) = e^{h_2 t_2} > 0, \quad (7.4)$$

а в силу (6.4)

$$\dot{\varphi}_3(t_1) = -a \frac{c+b}{c} \frac{t_1 l_1 - k_1}{k_1^2} - \frac{l_1^2(t_1 l_1 - k_1) - k_1^2 e^{-h_2 t_2}}{(t_1 l_1 - k_1)^2} < 0. \quad (7.5)$$

Функция $f_3 = -f_2$ (см. (5.3)) отрицательна выше кривой $f_3 = 0$ (7.1).

8. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В результате исследования (рис. 1) найдены три точки 1(t_{11}^*, t_{21}^*), 2(t_{12}^*, t_{22}^*) и 3(t_{13}^*, t_{23}^*) на кривой $F = 0$ (5.2), дающие экстремальные значения (локальные минимумы [3]) функционала (1.6); предстоит выбрать из них ту, которая дает его наименьшее значение, т. е. наименьшее из выражений (см. (1.6), (5.3), (6.3) и (7.2), а также (5.1) и (5.2))

$$J_1 = t_{11} + t_{21} + a \frac{t_{11}}{k_{11}} + b \frac{t_{21}}{k_{21}} = t_{11} + t_{21} + a \frac{t_{11}}{k_{11}} \left(1 + \frac{b}{c}\right), \quad (8.1)$$

$$J_2 = t_{12} + t_{22} + a \frac{t_{12}}{k_{12}} + b \frac{t_{22}}{k_{22}}, \quad (8.2)$$

$$J_3 = t_{13} + t_{23} + a \frac{t_{13}}{k_{13}} \left(1 + \frac{b}{c}\right). \quad (8.3)$$

В силу (5.1) и (5.2) выражения для J (8.2) по форме совпадают с (8.1) и (8.3). Кроме того, все три экстремальные точки расположены на одной кривой $F = 0$, т. е. подчинены одному уравнению (5.2). Оба эти обстоятельства упрощают нахождение наименьшего значения функционала

(1.6). Заметим, прежде всего, что кривая $f_3 = 0$ (7.1) проходит левее и ниже кривой $f_2 = 0$ (6.1). Действительно, используя условия $f_3(t_1, t_2) = 0, F(t_1, t_2) = 0$ ((5.2), (7.1)), получим в силу (6.4)

$$\begin{aligned} f_2(t_1, t_2) &= b \left(l_2 \frac{t_2 l_2 - k_2}{k_2^2} e^{h_2 t_2} - \frac{a}{c} \frac{l_1}{k_1} \right) = \\ &= b \frac{e^{h_2 t_2}}{k_2^2 l_2} \left[l_2^2 (t_2 l_2 - k_2) - \frac{c-a}{c} k_2^2 e^{-h_2 t_2} \right] > \\ &> \frac{b e^{h_2 t_2}}{k_2^2 l_2} [l_2^2 (t_2 l_2 - k_2) - k_2^2 e^{-h_2 t_2}] > 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Поэтому выше кривой $f_3 = 0$ и ниже кривой $f_2 = 0$ всегда существует область, в которой, как уже указывалось, $f_2 > 0$ и $f_3 < 0$, т. е. $p_1, p_2 \geq 0$ (см. (5.3)). Следовательно, во-первых, на кривой $F = 0$ точка 3 всегда левее и ниже точки 2 (см. рис. 1) и, во-вторых, случай, рассмотренный в разделе 5 (см. (5.1), (5.2)), может дать решение задачи только тогда, когда точка 1 на кривой $F = 0$ лежит между точками 2 и 3, иначе либо p_1 , либо p_2 окажутся отрицательными. Кроме того (см. раздел 5), в точке 3 значения времен t_1 и t_2 меньше, чем в точке 2, т. е.

$$t_{13} < t_{12}, \quad t_{23} < t_{22}. \quad (8.5)$$

Заметим, наконец, что функционал (1.6) или (8.1), (8.2), (8.3) при условии (5.2), т. е. на кривой $F = 0$, по разному ведет себя в зависимости от t_1 и t_2 . Действительно (раздел 5), полная производная

$$\frac{dJ_1}{dt_1} = 1 + (t_1 l_1 - k_1) \left[\frac{c-a}{al_1^2} e^{h_2 t_2} - \frac{a(c+b)}{ck_1^2} \right] \quad (8.6)$$

меняет знак, т. е. при малых t_1, t_2 с их ростом J_1 убывает, а при больших растет. Разделяющим является значение $t_1 = t_1^*$, для которого с учетом (5.2) получаем условие (см. (5.2) и (6.6))

$$1 + (t_1 l_1 - k_1) \left\{ \frac{c-a}{l_1 [al_1 - h_2(c-a)k_1]} - a \frac{c+b}{ck_1^2} \right\} = 0. \quad (8.7)$$

Если прямая $t_1 = t_1^*$ (8.7) находится правее точки 2 ($t_1 > t_{12}$), то решение задачи дает точка 2 (t_{12}, t_{22}^*) (5.2), (6.1)), если эта прямая проходит левее точки 3, то решение задачи дает точка 3 (t_{13}^*, t_{23}^*) (5.2), (7.1)), наконец, если прямая проходит между этими точками ($t_{13}^* < t_1^* < t_{12}^*$), то вопрос остается открытым. Точка 1 (t_{11}^*, t_{21}^*) может оказаться решением только в этом последнем случае при условии, что сама она лежит между точками 2 и 3 ($t_{13}^* < t_{11}^*, t_1^* < t_{12}^*$).

В пространстве параметров a, b, c, h_1, h_2 условия (5.2), (6.1), (8.7) и (5.2), (7.1), (8.7) определяют поверхности, разделяющие области, соответствующие этим случаям. Кроме того, условия (5.1), (5.2), (6.1) и (5.1), (5.2), (7.1) выделяют ту часть пространства параметров для значений, в которой решение задачи могут давать уравнения (5.1), (5.2)

После определения оптимальных параметров $t_1^*, t_2^*, p_1^*, p_2^*$ и q_1^* нахождение оптимальной траектории (см. [1]) не представляет труда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Алексеев, Ф. Ф. Минчук, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 3, 372 (1967).
2. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Nonlinear programming, Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (под ред. Дж. Неймана), Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951, p. 481.
3. Дж. Б. Денисис, Математическое программирование и электрические цепи, ИЛ, М., 1961.
4. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, М., 1962.
5. Ю. М. Ермольев, Кибернетика, АН УССР, **4**, № 1 (1966).
6. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 7, 1042 (1967).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 декабря 1966 г.

ANALYTICAL STUDY OF AN OPTIMAL MOTION IN A PIECEWISE LINEAR SYSTEM USING A POINT-TO-POINT MAPPING TECHNIQUE AND LAGRANGIAN MULTIPLIERS METHOD

A. S. Aleksyeyev, F. F. Minchook

Optimal control problem for the material point motion through a horizontal partition boundary of two mediums is considered using a point-to-point mapping technique and Lagrangian multipliers method. An optimal control (piecewise constant) and a corresponding trajectory minimizing a quadratic functional of a certain type depending on the time of motion and on the parameters of control are determined.

УДК 517.949.22

УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНИЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ И УСТОЙЧИВОСТЬ КИПЯЩИХ КАНАЛОВ

E. F. Сабаев

Рассматривается устойчивость стационарного режима кипящего канала. Исходная система уравнений гиперболического типа приводится к форме уравнений с отклоняющимся аргументом. Получены условия устойчивости стационарного режима. Дается оценка области притяжения к состоянию равновесия

ВВЕДЕНИЕ

Кипящие каналы входят составной частью в различные технические устройства, такие как парогенераторы прямоточного или барабанного типа, кипящие реакторы и т. д.. При некоторых условиях в таких системах возникают интенсивные колебания расхода теплоносителя и всех связанных с ним параметров. Это явление нежелательно по многим причинам, в связи с чем анализу условий устойчивости стационарного режима уделяется значительное внимание [1–12]. Часть отмеченных работ имеет преимущественно экспериментальный характер, в остальных [7–12] для анализа устойчивости привлекаются более или менее подробные математические модели процессов, протекающих в таких системах. Использующиеся математические модели основываются на ряде упрощающих предположений. Приведем те из них, которые потребуются нам в дальнейшем:

- 1) движение теплоносителя одномерно,
- 2) проскальзывание паровой фазы относительно жидкой фазы пре-небрежимо мало,
- 3) зависимостью удельного объема от давления, т. е. сжимаемостью теплоносителя, можно пренебречь.

В имеющихся работах по устойчивости кипящих каналов анализируются условия устойчивости стационарного режима в малом. Характеристический определитель линеаризованной системы в тех случаях, когда его удается получить в явном виде, представляет собой некоторый квазиполином (см., например, [8–12]). Это обстоятельство указывает на возможность приведения исходных уравнений кипящего канала к форме уравнений с отклоняющимся аргументом. Такая редукция представляется желательной, так как позволяет применить обширные результаты, имеющиеся в теории уравнений с отклоняющимся аргументом, к анализу устойчивости систем с кипением теплоносителя.

Ниже исходная система квазилинейных уравнений гиперболического типа с соответствующими краевыми условиями приводится к форме уравнений с отклоняющимся аргументом первого порядка. Получены условия устойчивости стационарного режима. Дается оценка области притяжения к состоянию равновесия.

Итак, рассмотрим отдельный кипящий канал, который, следуя [8], будем представлять в виде обогреваемой трубы постоянного сечения

с местными сопротивлениями, расположеннымными на входном и выходном концах трубы. В соответствии с предположениями 1)–3) запишем уравнения неразрывности и энергии (последнее в форме уравнения теплового баланса) в виде [13]

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{v} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u}{v} = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} = qv. \quad (1)$$

Здесь и ниже t — время, x — координата вдоль канала, u , v и i — скорость, удельный объем и энталпия теплоносителя, q — тепловой поток, приходящийся на единицу объема теплоносителя. Тепловой поток будем считать функцией энталпии теплоносителя, т. е.

$$q = q(i) \quad (q \geq 0). \quad (2)$$

С учетом потерь давления на гидравлических сопротивлениях уравнение движения запишется в виде [14–17]

$$\frac{di}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{u^2}{2d} = -v \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (3)$$

где P — давление, d — эквивалентный диаметр канала, λ — коэффициент сопротивления (для развитого турбулентного режима $\lambda = \text{const}$).

Удельный объем теплоносителя v будем считать известной функцией энталпии и давления. Характерный вид этой зависимости показан на рис. 1. Без существенной погрешности можно принять [13]

$$v = \begin{cases} v' & (\text{при } 0 \leq i \leq i') \\ v' + \frac{v'' - v'}{i'' - i'}(i - i') & (\text{при } i' \leq i \leq i''), \end{cases} \quad (4)$$

где v' и i' — удельный объем и энталпия жидкой фазы на линии насыщения, v'' и i'' — удельный объем и энталпия паровой фазы на линии насыщения.

Предполагая энталпию теплоносителя на входе в канал и полный перепад давления на канале постоянными, граничные условия к уравнениям (1)–(4) запишем в виде

$$i(0, t) = \text{const} = i_0, \quad (5)$$

$$\Delta P = \text{const}.$$

Очевидно,

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 - \int_0^l \frac{\partial P}{\partial x} dx, \quad (6)$$

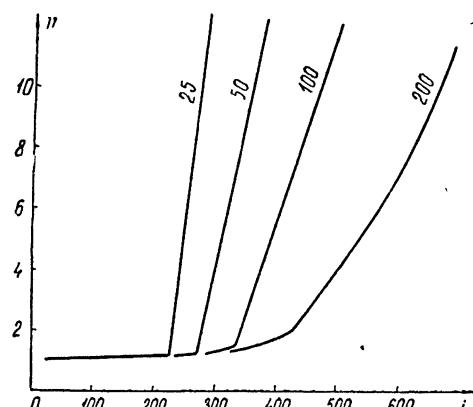
Рис. 1. Зависимость удельного объема паро-водяной смеси от энталпии для давлений 25, 50, 100 и 200 ата.

По оси абсцисс — энталпия (i) в $\text{кал}\cdot\text{кг}^{-1}$;
По оси ординат — удельный объем в $\text{м}^3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}^{-1}$.

где l — длина обогреваемого участка, ΔP_1 и ΔP_2 — перепады давления на местных сопротивлениях [16, 17]:

$$\Delta P_1 = \lambda_1 \frac{u^2(0, t)}{2v(0, t)} \quad (\lambda_1 = \text{const}),$$

$$\Delta P_2 = \lambda_2 \frac{u^2(l, t)}{2v(l, t)} \quad (\lambda_2 = \text{const}). \quad (7)$$



1. ПРИВЕДЕНИЕ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ К УРАВНЕНИЯМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

С целью приведения полученных уравнений к желаемому виду попытаемся выразить значения зависимых переменных по длине канала через значения, принимаемые скоростью теплоносителя на его входе, т. е. найти решение, удовлетворяющее на левом конце ($x=0$) граничному условию

$$i(0, t) = i_0, \quad u = u_0(t). \quad (1.1)$$

В пренебрежении сжимаемостью уравнения (1) и (3) интегрируются последовательно и задача сводится к решению системы (1) при краевом условии (1.1).

Перейдем к новым независимым переменным, положив

$$x = \varphi(i, t) \quad u = \psi(i, t). \quad (1.2)$$

В результате получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \psi &= qv \frac{\partial \varphi}{\partial i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial i} &= \left(q \frac{dv}{di} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial i}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Исключая из (1.3) ψ , приходим к уравнению первого порядка относительно $\frac{\partial \varphi}{\partial i}$, общее решение которого легко находится методом характеристик [18]:

$$\varphi = x = \int_0^{\Gamma} c_1(t - \xi) V(\xi) d\xi + c_2(t). \quad (1.4)$$

Здесь c_1 и c_2 — произвольные функции, определяемые из граничных и начальных условий, V и Γ как функции энталпии находятся из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\Gamma}{di} = \frac{1}{qv}, \quad V = v(i(\Gamma)), \quad (1.5)$$

постоянную интегрирования удобно определить равенством

$$\Gamma(i_0) = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя полученное решение в (1.3), находим

$$u = \psi = \frac{dc_2}{dt} + c_1 V(0) + \int_0^{\Gamma} c_1(t - \xi) dV(\xi). \quad (1.7)$$

Краевому условию (1.1) можно удовлетворить, если положить $c_2 = 0$, $c_1 = u_0/V(0)$. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{\Gamma} u_0(t - \xi') w(\xi') d\xi', \\ u &= u_0(t) + \int_0^t u_0(t - \xi') dw(\xi'), \quad w = V(\xi')/V(0). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Детерминант преобразования (1.2) равен $\frac{\partial \varphi}{\partial i}$, из (1.8) находим $\frac{\partial \varphi}{\partial i} = \frac{u_0(t - \xi')}{q} \neq 0$, если только скорость теплоносителя на входе канала не обращается в ноль. В дальнейшем исследовании будем полагать $u_0 > 0$.

Подставляя (1.8) в (3) и интегрируя, находим

$$\int_0^x \frac{\partial P}{\partial x} dx = \mu \frac{d}{dt} u_0 + \Delta P_0,$$

$$\mu = \int_0^\Gamma \frac{u_0(t - \xi)}{V(0)} d\xi > 0,$$

$$\Delta P_0 = \int_0^\Gamma \frac{\lambda_0}{2d} \frac{u_0(t - \xi)}{V(0)} u^2 d\xi + \int_0^\Gamma u_0^2(t - \xi) \frac{1}{V(0)} dw(\xi) +$$

$$+ \int_0^\Gamma \frac{u_0(t - \xi)}{V(0)} \left[\int_0^\xi \frac{d}{dt} u_0(t - \xi') dw(\xi') \right] d\xi, \quad (1.9)$$

где μ определяется согласно (1.8) при $\Gamma = \xi$. С помощью (1.8) и (1.9) уравнение $\Delta P = \Delta P^* = \text{const}$ легко приводится к форме уравнения с отклоняющимся аргументом первого порядка

$$\mu \frac{d}{dt} u_0 = X(u_0(t - \xi)) \quad (0 \leq \xi \leq \Gamma), \quad (1.10)$$

где

$$X = \Delta P^* - \Delta P_0 - \Delta P_1 - \Delta P_2,$$

ΔP_0 , ΔP_1 , ΔP_2 , μ и Γ — функционалы, определяемые уравнениями (6), (7) и (1.8), (1.9) при $x = l$.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В МАЛОМ

Пусть $u_0 = u_0^*$ ($u_0^* = \text{const}$, $u_0^* > 0$) — значение скорости теплоносителя на входе кипящего канала в некотором стационарном режиме. Значения остальных величин, характеризующих стационарный режим, легко находятся:

$$u_0^* m = u^*, \quad m = w(\Gamma^*), \quad l = u_0^* \int_0^{\Gamma^*} w d\xi,$$

$$\Delta P^* = \Delta P_0^* + \Delta P_1^* + \Delta P_2^*, \quad \Delta P_1^* = \lambda_1 u_0^*/2 V(0),$$

$$\Delta P_0^* = \frac{u_0^{*2}(m - 1)}{V(0)} + \frac{u_0^{*3}}{2d V(0)} \left(\int_0^\Gamma \lambda_0 w^2 d\xi \right),$$

$$\Delta P_2^* = \lambda_2 u_0^{*2} m / 2 V(0).$$

Рассмотрим устойчивость стационарного режима $u = u_0^*$ в малом. Согласно [20], стационарное состояние системы, описываемой линейными

уравнениями с отклоняющимся аргументом, асимптотически устойчиво, если спектр оператора (корни характеристического уравнения) p_σ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} p_\sigma < -\gamma \quad (\gamma = \text{const}, \gamma > 0).$$

Характеристический определитель линейного уравнения с отклоняющимся аргументом первого порядка записывается в виде [20]

$$\Delta = \mu p + a + \int_0^{\Gamma^*} e^{-p\xi} d f(\xi), \quad (2.1)$$

где $\mu = \text{const}$, $a = \text{const}$, f — кусочно-непрерывная функция.

В нашем случае параметры a и μ и функция f имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu &= u_0^* \Gamma^* / V(0) > 0, \quad a = a_0 + 2\Delta P_1^* + \frac{2}{m} \Delta P_2^*, \\ a_0 &= \xi w d \int_0^{\Gamma^*} \frac{u_0^{*3}}{d} \lambda, \quad f = f_0 + f_2, \\ f_2 &= \Delta P_2^* 2 \int_0^\xi \left(\frac{dw}{d\xi} - \sigma w \right) \frac{d\xi}{m}, \quad \sigma = \frac{d}{d\Gamma^*} \ln w(\Gamma^*), \\ f_0 &= \frac{u_0^{*2}}{V(0)} \frac{m}{2\Delta P_2^*} f_2 + (\Gamma - \xi) \left(\frac{dw}{d\xi} \right) \frac{u_0^{*2}}{V(0)} + \\ &+ \frac{\lambda u_0^{*3}}{2dV(0)} \int_\xi^{\Gamma^*} \left(2w - mw + w^2 + \frac{dw}{d\xi} \int_\xi^{\Gamma^*} w d\xi' \right) d\xi'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Можно показать, что функция f , определяемая уравнениями (2.2), будет иметь конечную вариацию, если $\frac{dw}{d\xi}$ является функцией конечной вариации. Последнее выполняется, если q и $\frac{dv}{dt}$ имеют ограниченную полную вариацию. Эти ограничения на вид функций q и v несущественны и можно полагать, что $\sum_0^{\Gamma^*} f < \infty$. Теперь докажем следующее.

Предложение. Пусть $a > \sum_0^{\Gamma^*} f$. Тогда корни характеристического уравнения

$$\Delta = 0 \quad (2.3)$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re} p < -\gamma$ ($\gamma = \text{const}$, $\gamma > 0$). Доказательство легко проводится от противного. В самом деле, пусть $p = v + j\omega$ — корень уравнения $\Delta = 0$ и $v > -\gamma$ где γ — некоторое положительное число. Отделяя в (2.3) реальную часть, имеем

$$\mu v + a + \int_v^{\Gamma^*} e^{-p\xi} \cos(\omega\xi) df(\xi) = 0,$$

но

$$\left| \int_0^{\Gamma^*} e^{-\gamma \xi} \cos(\omega \xi) df(\xi) \right| < e^{\gamma \Gamma^*} \bigvee_0^{\Gamma^*} f$$

и, следовательно,

$$a \leq \mu \gamma + e^{\gamma \Gamma^*} \bigvee_0^{\Gamma^*} f.$$

Выбирая

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma^*} \ln \frac{a + \mu/\Gamma^*}{\bigvee_0^{\Gamma^*} f + \mu/\Gamma^*} > 0,$$

приходим к противоречию, и доказательство закончено.

Заметим, что в случае $f(\xi) = 1(\xi - \Gamma^*)$ и $\mu = 0$ условие $a > \bigvee f$ является необходимым и, следовательно, не может быть улучшено без привлечения дополнительных сведений о виде функции $f(\xi)$.

Из (2.2) следует, что коэффициент a с увеличением перепада давления на входном местном сопротивлении увеличивается неограниченно. Следовательно, устойчивость рассматриваемой системы в малом можно обеспечить, выбирая коэффициент сопротивления λ_1 достаточно большим. В случае необходимости можно провести уточнение расположения границы области устойчивости, используя метод D -разбиений [19].

С целью иллюстрации полученных результатов рассмотрим случай пренебрежимо малых a_0 и f_0 по сравнению с ΔP_1^* и f_2 . Этот случай соответствует малым потерям давления на обогреваемом участке по сравнению с потерями на местных сопротивлениях. В соответствии с этим замечанием μ будем считать малым положительным параметром.

Полагая $q = \text{const}$, из уравнений (4) и (1.5) находим

$$w = \begin{cases} 1 & (\text{при } \xi < \Gamma') \\ e^{(\xi-\Gamma')/\tau} & (\text{при } \Gamma' \leq \xi \leq \Gamma'') \end{cases}, \quad (2.4)$$

где $\Gamma' = \Gamma(i')$, $\Gamma'' = \Gamma(i'')$ и $\tau = \frac{i'' - i'}{q(v'' - v')}$. Подставляя в (2.1) и принимая $a_0 = f_0 = 0$, $\Gamma^* < \Gamma''$, получаем характеристическое уравнение

$$\mu_1 s + 2 \left(\Pi + \frac{1}{m} \right) - \frac{1 - e^{-bs}}{ms} + e^{-bs} \frac{m e^{-s \ln m} - 1}{m(1-s)} = 0, \quad (2.5)$$

где $s = p\tau$, $\mu_1 = \mu/\tau \Delta P_2^*$, $\Pi = \Delta P_1^*/\Delta P_2^*$ и $b = \Gamma'/\tau$.

Уравнение (2.5) представляет собой квазиполином, D -разбиение удобно проводить по параметрам b и Π . Полагая в (2.5) $s = j\omega$ и отделяя действительную и минимую части для интересующего нас предельного случая $\mu_1 = 0$, находим уравнение границы D -разбиения

$$\Pi = -\frac{1}{m} \pm \left[\frac{m^2 + 3 - 4m \cos \omega \ln m + 2m \sin \omega \ln m/\omega}{4m^2(1 + \omega^2)} \right]^{1/2}, \quad (2.6)$$

$$b \omega = \arctg \frac{\omega(2\Pi m + 3)}{1 - \omega^2(2\Pi m + 2)} + \arctg \frac{\omega(m \cos \omega \ln m - 2)}{1 + \omega m \sin \omega \ln m} + 2\pi n$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

и уравнение особой прямой ($\omega = 0$).

$$2\Pi m = b - m - 1, \quad (2.7)$$

Для рассматриваемого случая

$$\bigvee_0^{\Gamma^*} f = \frac{1}{m} (b + m - 1)$$

и, следовательно, b и Π , удовлетворяющие неравенству

$$2\Pi m > (b + m - 3)$$

принадлежат области устойчивости.

Таким образом, область устойчивости на плоскости (b, Π) располагается выше особой прямой (2.7) и D -кривых (2.6). Так как $|\Pi(0)| + |1/m| \geq |\Pi(\omega)| + |1/m|$, то с некоторым запасом, который оказывается тем меньшим, чем больше m и b , область устойчивости можно определить неравенствами

$$\begin{aligned} \Pi &> [-1/m + \Pi(0)], \\ 2\Pi m &> (b - m - 1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим случай, когда подвод тепла к теплоносителю осуществляется посредством теплопередачи от среды с постоянной температурой

$$q = \alpha(-\vartheta + T), \quad T = \text{const},$$

где α — коэффициент теплопередачи, ϑ — температура теплоносителя. Как известно [21], при приближении паросодержания теплоносителя к единице происходит срыв пленки жидкой фазы с поверхности трубы; в связи с этим коэффициент теплопередачи резко уменьшается до значений, характерных для чистого пара. Изучая качественную картину, это явление можно учесть, полагая

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1(i) & (\text{при } i < i') \\ \alpha_2 = \text{const} & (\text{при } i' \leq i \leq i_2), \\ 0 & (\text{при } i > i_2) \end{cases} \quad (2.9)$$

где i_2 — критическое значение энталпии смеси.

На испарительном участке, т. е. на интервале (i', i'') , температура теплоносителя сохраняет постоянное значение. Таким образом, тепловой поток на испарительном участке сохраняет постоянное значение и $w(\xi)$ на интервале $[0, \Gamma(i_2)]$ принимает вид (2.4), а при $\xi > \Gamma(i_2)$ сохраняет постоянное значение, равное $w(\Gamma(i_2))$.

Следовательно, случай $\Gamma^* < \Gamma(i_2)$ не отличается от рассмотренного ранее случая $q = \text{const}$. Для случая $\Gamma^* > \Gamma(i_2)$ характеристическое уравнение приводится к виду

$$\mu_1 s + 2\Pi + \frac{2}{m} + \frac{2}{m} e^{-bs} \frac{me^{-s \ln m} - 1}{1 - s} = 0. \quad (2.10)$$

Для рассматриваемого случая $\bigvee_0^{\Gamma^*} f = \frac{2(m-1)}{m}$ и достаточное условие устойчивости запишется в виде

$$\Pi > (m-2)/m. \quad (2.11)$$

Граница области устойчивости на плоскости параметров (b, Π) для различных значений m приведена на рис. 2. Пунктирные прямые соответствуют условию (2.11). Из построения, приведенного на рис. 2,

следует, что уже при $b > 3$ различие между достаточным условием (2.10) и необходимыми несущественно.

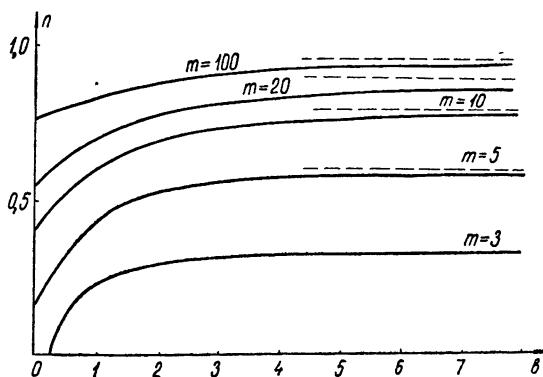


Рис. 2.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В БОЛЬШОМ

Чтобы избежать громоздких математических выражений, будем пренебрегать перепадом давления на обогреваемом участке канала. Обозначая $y = u_0/u_0^*$, уравнения (1.10) запишем в несколько более удобном виде:

$$\mu \frac{dy}{dt} = X(y(t - \xi)) \quad (0 \leq \xi \leq \Gamma), \quad (3.1)$$

где функционалы X и Γ в более подробной записи имеют вид:

$$X = \Pi + 1 - \Pi y^2 - Y^2/mw(\Gamma); \quad (3.2)$$

$$Y = y(t) + \int_0^\Gamma y(t - \xi) dw(\xi); \quad (3.3)$$

$$\int_0^\Gamma y(t - \xi) w(\xi) d\xi = \int_0^{\Gamma^*} w(\xi) d\xi = \text{const}, \quad (3.4)$$

$$\mu = \frac{u_0^{*2}}{V(0)} \cdot \frac{1}{\Delta P_2^*} \int_0^{\Gamma^*} y(t - \xi) d\xi, \quad m = w(\Gamma^*).$$

Уравнение (3.1) имеет стационарное решение $y \equiv 1$, устойчивость которого исследуется ниже при следующих предположениях относительно вида функции $w(\xi)$:

$$\begin{aligned} a) \quad 1 &\leq w(\xi) < \infty, \\ b) \quad 0 &\leq \frac{dw}{d\xi} < kw \quad (k = \text{const}, \quad k > 0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее, следуя [20], введем функциональное пространство $\{y(-\xi)\}$ ($0 \leq \xi \leq \Gamma$) с нормой

$$\|y\|^{\Gamma} = \text{Sup}(|y(-\xi)|) \quad (\text{при } 0 \leq \xi \leq \Gamma). \quad (3.6)$$

Функционал X в области $H = (H : y > 0)$ удовлетворяет условию Липшица. В самом деле, пусть $y_1(-\xi)$ и $y_2(-\xi)$ — некоторые кусочно-непрерывные начальные функции, заданные соответственно на интервалах $[0, \Gamma_1]$ и $[0, \Gamma_2]$ и удовлетворяющие ограничению

$$\varepsilon_1 \leq y_j(-\xi) \leq \varepsilon_2 \quad (j = 1, 2),$$

где ε_1 и ε_2 — некоторые наперед заданные числа. Без ограничения общности можно принять $\Gamma_2 > \Gamma_1$. Тогда из уравнения (3.4) находим

$$\int_0^{\Gamma_1} (y_1 - y_2) w d\xi = \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} y_2(-\xi) w d\xi. \quad (3.7)$$

Откуда, в силу неравенств (3.5) и (3.7), имеем оценки

$$\begin{aligned} |w(\Gamma_1) - w(\Gamma_2)| \varepsilon &\leq k \|y_1 - y_2\|_{\Gamma_1} \left(\int_0^{\Gamma_1} w d\xi \right), \\ \left| \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} y_2 dw \right| &\leq k \|y_1 - y_2\|_{\Gamma_1} \left(\int_0^{\Gamma_1} w d\xi \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее, из (3.3), используя полученные оценки, находим

$$|Y_1 - Y_2| \leq \|y_1 - y_2\|_{\Gamma_1} \left[w(\Gamma_1) + k \int_0^{\Gamma_1} w d\xi \right]. \quad (3.9)$$

Теперь легко найти оценку

$$|X(y_1) - X(y_2)| \leq L \|y_1 - y_2\|_{\Gamma_1}, \quad (3.10)$$

где L — некоторое положительное число, зависящее от выбора ε_1 и ε_2 .

Таким образом, решения уравнения (3.1) непрерывны и продолжим на те значения времени t , при которых решение еще остается в области H [20]. Далее, следуя [22], определим верхнюю и нижнюю грани функционала $X(y)$ на множестве допустимых функций $y(-\xi)$ ($\beta \leq y \leq \alpha$ при $0 < \xi \leq \Gamma$, $0 < \beta \leq 1 \leq \alpha < \infty$):

$$S(y(0), \alpha, \beta) = \text{Sup } X(y(-\xi)),$$

и

$$J(y(0), \alpha, \beta) = \text{Inf } X(y(-\xi)).$$

Функции S и J будут непрерывными по совокупности своих переменных, так как функционал X удовлетворяет условию Липшица.

Обозначим

$$M = (\alpha : \alpha \geq 1, \beta : 0 \leq \beta \leq 1),$$

$$M_1 = ((\alpha, \beta) : S(\alpha, \alpha, \beta) \geq 0, (\alpha, \beta) \in M),$$

$$M_2 = ((\alpha, \beta) : J(\beta, \alpha, \beta) \leq 0, (\alpha, \beta) \in M)$$

и

$$M_3 = M_1 \cup M_2 / M.$$

Теорема. Пусть множество M_3 непустое и точка (1.1) принадлежит его замыканию. Тогда состояние равновесия $y \equiv 1$ устойчиво. Пусть далее M'_3 — любое односвязное подмножество множества M_3 , содержащее в качестве своей предельной точки точку (1.1). Тогда $y(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, если только начальная функция удовлетворяет условию

$$\beta_0 \leq y(-\xi) \leq \alpha_0 \text{ при } 0 \leq \xi \leq \Gamma \text{ и } (\alpha_0, \beta_0) \in M'_3.$$

Доказательство. Пусть $\beta = B(\alpha)$ — некоторая гладкая кривая, соединяющая точку (1.1) с точкой (α_0, β_0) и целиком расположенная в области M_3 . Такая кривая обязательно найдется, так как множество M'_3 односвязно и функции S и J удовлетворяют неравенству

$$\frac{S(y(0), \alpha, \beta) - S(y(0), \alpha, \beta')}{(\beta - \beta')} \leq 0 \quad (3.11)$$

и аналогично неравенству

$$\frac{J(y(0), \alpha, \beta) - J(y(0), \alpha', \beta)}{(\alpha - \alpha')} \leq 0. \quad (3.12)$$

Более того, в силу неравенств (3.11) и (3.12) зависимость $\beta = B(\alpha)$ можно полагать взаимно-однозначной.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V = b^2(y)$,

$$b = \begin{cases} 1 - B(y) & (\text{при } y > 1), \\ y - 1 & (\text{при } y \leq 1), \end{cases}$$

непрерывную вместе с производной первого порядка. Составляя производную от функции V , приходим к функционалу

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\mu} b \frac{db}{dy} X(y(t - \xi)) = U. \quad (3.13)$$

Рассмотрим множество траекторий системы, удовлетворяющее неравенству

$$V(y(-\xi)) < q V(y(0)) \quad (0 \leq \xi \leq \Gamma, q > 0). \quad (3.14)$$

Полагая в (3.14) $y(0) = \alpha_0$ и $y(0) = \beta_0$, находим

$$\beta'_0 \leq y(-\xi) \leq \alpha'_0, \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \beta'_0 &= 1 - \sqrt{q}(1 - \beta_0), \\ \alpha'_0 &= B^{-1}[1 - \sqrt{q}(1 - \beta_0)]. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{\mu} b \frac{db}{dy}$ имеет знак $y(0) - 1$, то при условии (3.15) справедливо неравенство

$$U \leq \left(\frac{1}{\mu} \frac{db}{dy} b \right) S(\alpha_0, \alpha'_0, \beta'_0)$$

при $y(0) = \alpha_0$ и

$$U \leq \left(\frac{1}{\mu} \frac{db}{dy} b \right) J(\beta_0, \alpha'_0, \beta'_0)$$

при $y(0) = \beta_0$

Полагая $q = 1$, имеем $S = S(\alpha_0, \alpha_0, \beta_0) < 0$ и $J = J(\beta_0, \alpha_0, \beta_0) > 0$ и, следовательно, $U < 0$. Так как функции S и J непрерывны по аргументам α и β , то полученное неравенство сохранится и при некотором q , большем единицы.

Кривая $\beta = B(\alpha)$ целиком расположена в области M_3 , поэтому приведенное выше рассуждение можно без изменений перенести на

любое значение $y(0)$ из интервала $\beta_0 \leq y(0) \leq \alpha_0$. Таким образом, на траекториях системы, удовлетворяющих неравенству (3.14) и $\beta_0 \leq y(0) \leq \alpha_0$, функционал U определенно отрицательный, и, следовательно, в силу общих теорем об устойчивости систем с последействием (см. [20] и [23, 24]) начальная кривая $\beta_0 \leq y(-\xi) \leq \alpha_0$ принадлежит области притяжения к состоянию равновесия. Теорема доказана.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай $i_0 = i'$ и $q(i) = \text{const}$. Тогда

$$w = e^{\xi/\tau}$$

и уравнения (3.1) принимают особенно простой вид:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dy}{dt} &= \Pi + 1 - \Pi y^2 - (y + m - 1)^2/m e^{\Gamma/\tau}, \\ \tau(m-1) &= \int_0^\Gamma e^{\xi/\tau} y(t-\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда, после несложных выкладок, находим

$$\begin{aligned} S &= \Pi + 1 - \Pi \alpha^2 - \frac{(\alpha + m - 1)^2}{m(\beta + m - 1)} \beta, \\ J &= \Pi + 1 - \Pi \beta^2 - \frac{(\beta + m - 1)^2}{m(\alpha + m - 1)} \alpha. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для определенности возьмем $\Pi = 0,4$ и $m = 10$. Далее, построим на плоскости (α, β) кривые $S = 0$ и $J = 0$ (рис. 3). Области, расположенные слева от кривой $S = 0$ и справа от кривой $J = 0$, заштрихуем.

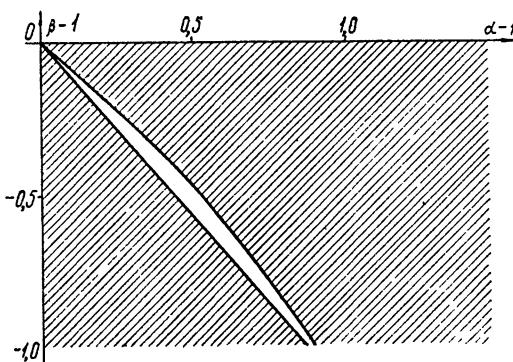


Рис. 3. Область притяжения к состоянию равновесия для случая $\Pi = 0,4$, $m = 10$ и $i_0 = i'$.
По оси абсцисс — $(\alpha - 1)$; По оси ординат — $(\beta - 1)$.

Заштрихованная область, как нетрудно видеть, будет представлять собой объединение множеств M_1 и M_2 . Для выбранных нами численных значений параметров множество M_3 непустое и, следовательно, стационарное решение $y = 1$ устойчиво. Кроме того (рис. 3), начальные кривые $y(-\xi)$ ($0 \leq y(-\xi) \leq 1,78$; $0 \leq \xi \leq \Gamma$) принадлежат области притяжения к состоянию равновесия,

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Давидов, сб. Гидродинамика и теплообмен при кипении в котлах высокого давления, изд. АН СССР, М., 1955
2. И. Е. Семеновкер, Гидродинамика и теплообмен при кипении в котлах высокого давления, изд. АН СССР, М., 1956
3. А. А. Давидов, А. И. Краснов, Электрические станции, 27, № 3, 4 (1956).
4. А. А. Давидов, Б. И. Шейнин, Теплоэнергетика, № 11, 53 (1959).
5. П. А. Петров, Гидродинамика прямоточного котла, ГЭИ, М—Л, 1960
6. Е. П. Серов, О. К. Смирнов, Л. А. Зыков, Теплоэнергетика, № 10, 70 (1964).
7. Уоллис, Хисли, Теплопередача, 83, серия С, № 3, 166 (1961)
8. И. И. Морозов ИФЖ, 8, 49 (1961)
9. И. И. Морозов, ИФЖ, 4, 51 (1964).
10. Е. П. Серов, А. Т. Пашков, Теплофизика высоких температур, 3, 4 (1965).
11. В. И. Будников, А. В. Сергиевский, ИФЖ, 8, № 3, 300 (1965)
12. В. И. Будников, А. В. Сергиевский, ИФЖ, 10, № 5, 632 (1966)
13. Е. П. Серов, сб. Труды МЭИ, вып. 11 (теплотехнический), 207 (1953).
14. И. А. Чарный, Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
15. Л. Л. Калишевский, Л. В. Селиховкин, Теплоэнергетика, № 1, 65 (1957).
16. Н. И. Семенов, Б. И. Шейнин, Теплоэнергетика, № 1, 33 (1960).
17. И. Е. Идельчик, Гидравлические сопротивления, Госэнергоиздат, М—Л, 1954.
18. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М 1961
19. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, Л, 1949
20. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959
21. М. А. Стырикович, Внутрикотловые процессы, ГЭИ, М—Л, 1954
22. Е. Ф. Сабаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 637 (1966).
23. Н. Н. Красовский, Прикладная математика и механика, 20, 315 (1956)
24. R. D. Driver, Archiv for Rational Mechanics and Analysis, 10, 401 (1962).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 ноября 1965 г.,
после доработки
10 апреля 1967 г

EQUATIONS WITH DEVIATING INDEPENDENT VARIABLE AND STABILITY OF BOILING CHANNELS

Y. F. Sabayev

Steady-state regime in a boiling channel is considered. The original system of hyperbolic equations is reduced to equations with deviating independent variable. Stability conditions for the steady-state regime are obtained. Domain of attraction for the stationary state is estimated.

УДК 531.391.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ВАГОНА

B. A. Горюхов

Асимптотическим методом рассматривается устойчивость движения железнодорожного вагона, имеющего 6 степеней свободы. Приближенно указывается область устойчивости в пространстве параметров системы.

При исследовании на устойчивость движений железнодорожных вагонов и локомотивов, которые представляют собой системы со многими степенями свободы, приходится иметь дело с характеристическими уравнениями высокого порядка [1-4]. При этом бывает необходимо найти область устойчивости в пространстве многих параметров системы. Трудности, связанные с такого рода задачами, общеизвестны, но они могут быть в значительной мере обойдены, если применить асимптотический метод исследования характеристического уравнения [5], который позволяет вместо исходного уравнения исследовать уравнение меньшего порядка.

В настоящей работе показано применение асимптотического метода к исследованию устойчивости движения вагона, состоящего из кузова, упруго закрепленного на двух тележках. Причем тележки могут смещаться относительно кузова в поперечном направлении и поворачиваться вокруг вертикальных осей, проходящих через их центры масс. Полагаем при этом, что вагон катится по прямолинейному участку пути с постоянной скоростью V . Трение между кузовом и тележками не учитывается. Не учитывается также влияние, которое оказывают на движение вагона последовательно соединенные с ним соседние вагоны.

Уравнения движения такого вагона содержат малый параметр — конусность колес. Соответствующее этим уравнениям характеристическое уравнение имеет малые коэффициенты при низших степенях. Сравнительно просто удается доказать, что когда колеса цилиндрические, характеристическое уравнение имеет два нулевых корня, а остальные корни имеют отрицательные действительные части. Чтобы решить вопрос об устойчивости движения, следует определить, с какой стороны от нейтральной оси лежат названные выше два корня, когда колеса достаточно близки к цилиндрическим. Для этого составляется вспомогательное уравнение третьего порядка, которое легко исследуется методом Раута—Гурвица. В заключение сравниваются области устойчивости в плоскости двух параметров системы, полученные асимптотическим методом и методом D -разбиения [6].

1. При составлении уравнений движения вагона будем считать, согласно Картеру [7], что сила, действующая на колесо со стороны рельса, пропорциональна отношению скорости скольжения u к скорости качения V ,

$$F = -fuV^{-1}, \quad (1)$$

где f — коэффициент пропорциональности, зависящий от нагрузки на колесо и от его радиуса.

Введем обозначения: M — масса кузова, m — масса каждой тележки, ρ — радиус инерции кузова относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс, ρ_1 — радиус инерции каждой из тележек относительно вертикальных осей, проходящих через их центры масс,

θ — конусность колеса, r — радиус кругов катания колес, когда тележки находятся в среднем положении относительно пути, $2s$ — расстояние между кругами катания колес, y — поперечное смещение центра масс кузова от среднего положения, y_1 и y_2 — поперечные смещения центров масс первой и второй тележек от их среднего положения, φ — угол поворота кузова вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс, φ_1 и φ_2 — углы поворота первой и второй тележек вокруг вертикальных осей, проходящих через их центры масс, t — время.

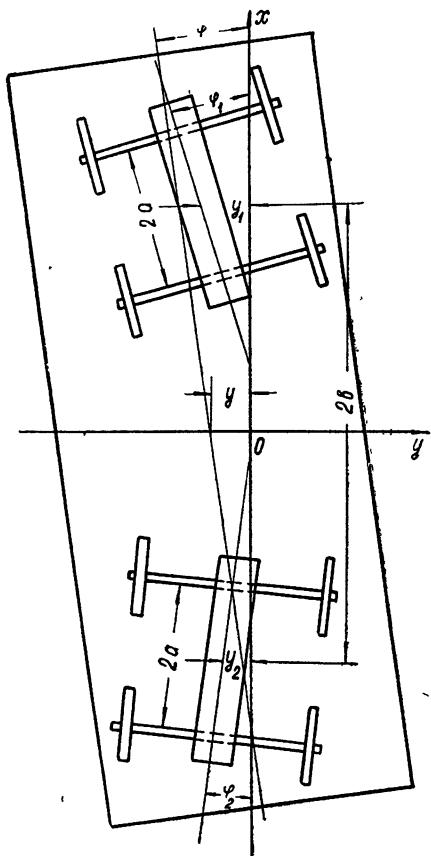


Рис. 1.

Считаем далее, что при поперечном смещении центра масс тележки относительно кузова на величину z на тележку действует возвращающаяся сила, равная $-kz$, а при повороте тележки на угол ϕ относительно продольной оси кузова на тележку действует вращающий момент, равный $-c\phi$. Положительное направление и начало отсчета координат, а также расстояние между колесными осями и центрами тележек, показаны на рис. 1.

Уравнения движения составим в форме Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа.

$$L = \frac{1}{2} \{ [M\dot{y}^2 + m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + M\rho^2\dot{\varphi}^2 + m\rho_1^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)] - \\ - [k(y - b\varphi - y_1)^2 + k(y + b\varphi - y_2)^2 + c(\varphi - \varphi_1)^2 + c(\varphi - \varphi_2)^2] \}. \quad (2)$$

Сумма всех сил, действующих со стороны рельсов на i -ю тележку в поперечном направлении, равна

$$F_i = -4f \left(\frac{y_i}{V} + \varphi_i \right) \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

а момент сил, действующих на i -ю тележку со стороны рельсов, будет

$$M_i = -4f \left(\frac{a^2 + s^2}{V} \dot{\varphi}_i - \frac{s\dot{\theta}}{r} y_i \right) \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Составляя уравнения Лагранжа и производя затем замену: $a^2 + s^2 = l^2$,

$2t\sqrt{2f/lM} = \tau$, $s\theta/r = \gamma$, $b/l = \beta$, $kl/4f = \kappa$, $c/4fl = \sigma$, $2m/M = \mu$, $\rho^2/l^2 = \lambda$, $V\sqrt{M/8fl} = v$, $2m\rho^2/Ml^2 = \nu$, $l\varphi = \psi$, $(y_1 + y_2)/2 = \eta_1$, $(y_1 - y_2)/2 = \eta_2$, $l(\varphi_1 + \varphi_2)/2 = \psi_1$, $l(\varphi_1 - \varphi_2)/2 = \psi_2$, получим уравнения движения с безразмерными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \kappa(y - \eta_1) &= 0, \\ \lambda\ddot{\psi} + (\kappa\beta^2 + \sigma)\psi - \sigma\psi_1 + \kappa\beta\eta_2 &= 0, \\ \mu\ddot{\eta}_1 + \frac{1}{v}\dot{\eta}_1 + \kappa\eta_1 + \psi_1 - \kappa y &= 0, \\ \mu\ddot{\eta}_2 + \frac{1}{v}\dot{\eta}_2 + \kappa\eta_2 + \psi_2 + \kappa\beta\psi &= 0, \\ \nu\ddot{\psi}_1 + \frac{1}{v}\dot{\psi}_1 + \sigma\psi_1 - \sigma\psi - \gamma\eta_1 &= 0, \\ \nu\ddot{\psi}_2 + \frac{1}{v}\dot{\psi}_2 + \sigma\psi_2 - \gamma\eta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Запишем характеристическое уравнение системы (5), объединив при этом члены, содержащие одинаковые степени γ :

$$\begin{aligned} a_0^{(0)}z^{12} + a_1^{(0)}z^{11} + \dots + a_{10}^{(0)}z^2 + \gamma(a_0^{(1)}z^8 + a_1^{(1)}z^7 + \dots + \\ + a_8^{(1)}) + \gamma^2(a_0^{(2)}z^4 + a_1^{(2)}z^3 + \dots + a_4^{(2)}) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $a_i^{(k)}$ — коэффициенты, зависящие от параметров системы.

Покажем, что все колебания нашей системы при $\gamma = 0$ затухают со временем и устанавливается прямолинейное равномерное движение вагона под некоторым углом к направлению пути. Это будет означать, что среди корней уравнения (6) при $\gamma = 0$ имеются 2 нулевых, а остальные 10 корней имеют отрицательные действительные части. Но тогда при достаточно малом значении γ соответствующие 10 корней уравнения (6) будут также иметь отрицательные действительные части.

Система (5) при $\gamma = 0$ распадается на 3 системы:

$$\nu\ddot{\psi}_2 + \frac{1}{v}\dot{\psi}_2 + \sigma\psi_2 = 0; \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} \lambda\ddot{\psi} + (\kappa\beta^2 + \sigma)\psi - \sigma\psi_1 + \kappa\beta\eta_2 &= 0, \\ \nu\dot{\psi}_1 + \frac{1}{v}\dot{\psi}_1 + \sigma\psi_1 - \sigma\psi &= 0, \end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned} \mu\ddot{\eta}_2 + \frac{1}{v}\dot{\eta}_2 + \kappa\eta_2 + \kappa\beta\psi &= -\psi_2; \\ \ddot{y} + \kappa(y - \eta_1) &= 0, \\ \mu\ddot{\eta}_1 + \frac{1}{v}\dot{\eta}_1 + \kappa\eta_1 - \kappa y &= -\psi_1. \end{aligned} \tag{5c}$$

Из уравнения (5a) видно, что с течением времени $\psi_2 \rightarrow 0$. Поэтому для системы (5b) можно рассматривать лишь собственные колебания,

положив $\psi_2 = 0$. Умножим первое уравнение системы (5б) на $\dot{\psi}$, второе на $\dot{\psi}_1$ третье на η_2 и сложим их. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\lambda \dot{\psi}^2 + \nu \dot{\psi}_1^2 + \mu \dot{\eta}_2^2 + \sigma(\psi - \psi_1)^2 + \chi(\eta_2 + \beta\psi)^2] = \\ = -\frac{1}{v} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\eta}_2^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как функция, стоящая в квадратных скобках, неотрицательна, а ее производная неположительна, то с течением времени она стремится к некоторому постоянному значению, как ограниченная снизу монотонно невозрастающая функция. А так как ψ , ψ_1 и η_2 являются решением системы линейных уравнений, то эта функция представляет собой сумму экспоненциальных функций, и если она стремится к постоянному значению при $t \rightarrow \infty$, то ее производная стремится при этом к нулю. Из равенства (7) получим, что $\dot{\psi}_1 \rightarrow 0$, $\dot{\eta}_2 \rightarrow 0$. Но тогда $\psi_1 \rightarrow \psi_1^* = \text{const}$ и $\eta_2 \rightarrow \eta_2^* = \text{const}$, а из второго уравнения системы (5б) получим, что $\psi \rightarrow \psi_1^*$.

Точно также можно показать, что все собственные колебания системы (5в) затухают и в установившемся состоянии $y = \eta_1 = \text{const}$, а вынужденное движение под действием постоянного возмущения $-\psi_1^*$ является линейной функцией времени. Это означает, что с течением времени устанавливается прямолинейное равномерное движение вагона под некоторым углом к направлению пути.

Чтобы решить вопрос об устойчивости движения вагона, нужно определить, с какой стороны от мнимой оси при достаточно малых положительных значениях γ лежат те корни уравнения (6), которые стремятся к нулю при $\gamma \rightarrow 0$. Для этого произведем в уравнении (6) замену: $z = \sqrt{\gamma} q$. Разделим полученное уравнение на γ и затем отбросим все члены, содержащие γ в степени выше, чем $1/2$. Получим уравнение, которое будем называть вспомогательным,

$$\sqrt{\gamma} a_9^{(0)} q^3 + a_{10}^{(0)} q^2 + \sqrt{\gamma} a_7^{(1)} q + a_8^{(1)} = 0. \quad (8)$$

Если все корни этого уравнения лежат слева от мнимой оси, то соответствующие корни характеристического уравнения (6), в силу равенства $z = \sqrt{\gamma} q$, будут при достаточно малом γ лежать слева от мнимой оси. Таким образом, вспомогательное уравнение (8) позволяет определить при малом γ знак действительной части тех корней уравнения (6), которые стремятся к нулю при $\gamma \rightarrow 0$.

Подставив в (8) вместо $a_9^{(0)}$, $a_{10}^{(0)}$, $a_7^{(1)}$ и $a_8^{(1)}$ их выражения через параметры системы, получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\gamma} \chi \sigma}{v} \left[\frac{2x\beta^2 + \chi + \sigma}{v^2} + \chi \sigma (1 + \lambda + \nu + \mu + \beta^2 + 2\mu\beta^2) \right] \times \\ \times q^3 + \frac{x^2 \sigma^2}{v} (1 + \beta^2) q^2 + \frac{\sqrt{\gamma} \chi \sigma}{v} (2x\beta^2 + \chi + \sigma) q + x^2 \sigma^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

С помощью критерия Раута—Гурвица получим следующее условие устойчивости движения вагона:

$$v^2 < \frac{\beta^2}{1 + \lambda + \nu + \mu + \beta^2 + 2\mu\beta^2} \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1 + 2\beta^2}{\sigma} \right). \quad (10)$$

2. Для примера возьмем случай, когда $\sigma = \infty$ (тележки не могут поворачиваться относительно кузова, а могут лишь упруго смещаться в поперечном направлении), и сравним область устойчивости на плоскости v^2, x полученную по формуле (10), с областью устойчивости, вычисленной по точным формулам. Кривая 1 (рис. 2) изображает на плоскости v^2, x границу области устойчивости при $\mu = 0,4$, $\beta^2 = 36$, $\lambda + v = 20,6$, $\sigma = \infty$, вычисленную по формулам (10).

Запишем уравнения движения при $\sigma = \infty$. При этом $\psi_2 = 0$, $\psi_1 = \psi$

$$y + x(y - \eta_1) = 0,$$

$$(\lambda + v)\ddot{\psi} + \frac{1}{v}\dot{\psi} + x\beta^2\psi + x\beta\eta_2 - \gamma\eta_1 = 0, \quad (11)$$

$$\mu\ddot{\eta}_1 + \frac{1}{v}\dot{\eta}_1 + x\eta_1 + \psi - xy = 0,$$

$$\mu\ddot{\eta}_2 + \frac{1}{v}\dot{\eta}_2 + x\eta_2 + x\beta\psi = 0.$$

Для выделения области устойчивости в плоскости параметров воспользуемся методом D -разбиения. Для этого составим характеристическое уравнение системы (11) и, положив в нем $z = i\omega$, приведем нулю действительную и мнимую части. Получим параметрическое уравнение границы, которая выделяет на плоскости v^2, x области $D(k, n-k)$, где n — порядок уравнения, k — число корней слева от мнимой оси. Но нам удобнее сначала записать уравнения этой границы для вспомогательных параметров $\epsilon = x^2$ и $\delta = x/v^2$, т. е.

$$p^2(p^2 - 1)Q_1(p)\delta - p^2P_1(p)\epsilon = \gamma(p^2 - 1)R_1(p), \quad (12)$$

$$p^2(p^2 - 1)\delta - p^2P_2(p)\epsilon = \gamma(p^2 - 1),$$

где

$$p = \omega^2/x \quad (-\infty < p < +\infty),$$

$$P_1(p) = p^2[\mu(\lambda + v)p^4 - \mu[(2 + \mu)(\lambda + v) + \mu\beta^2]p^2 + (1 + \mu)(\lambda + v + \mu\beta^2)],$$

$$P_2(p) = \mu[\mu + 2(\lambda + v)]p^4 - [\mu^2 + 2\mu(1 + \lambda + v + \beta^2) + 2(\lambda + v)]p^2 + \mu(1 + 2\beta^2) + 1 + \lambda + v + \beta^2,$$

$$R_1(p) = \mu p^2 - 1,$$

$$Q_1(p) = (2\mu + \lambda + v)p^2 - 1 - \beta^2.$$

На рис. 2 (кривая 2) показана граница области устойчивости, вычисленная по формулам (12) А. И. Козловой, для $\mu = 0,4$, $\beta^2 = 36$, $\lambda + v = 20,6$ и $\gamma = 0,05$. Как видно из рис. 2, границы области устойчивости, вычисленные по формулам (10) и по формулам (12), практически совпадают для значений $x \geq 0,07$, и, начиная с $x = 0,05$, обе кривые, изображающие границу области устойчивости, резко расходятся.

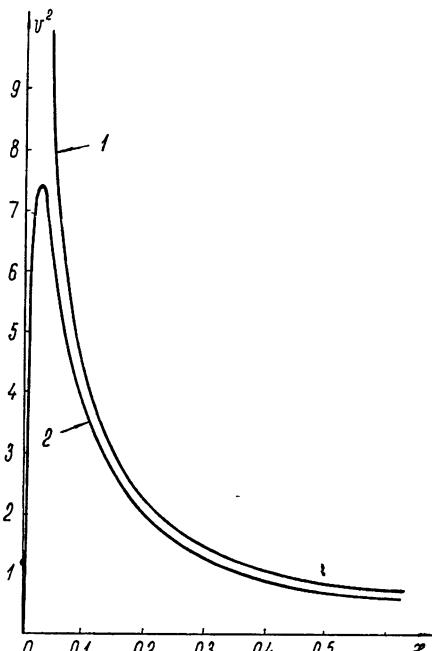


Рис. 2.

Простейший анализ формулы (10) показывает, что для повышения критической скорости, начиная с которой движение становится неустойчивым, следует применять возможно более мягкое соединение кузова с тележками. При этом следует учитывать, что формула (10) применима с достаточной для практических целей точностью лишь тогда, когда α и β больше значения γ .

Увеличение расстояния между центрами масс тележек и увеличение расстояния между колесными осями также повышает критическую скорость.

Увеличение масс и моментов инерции кузова и тележек относительно вертикальных осей, проходящих через их центры масс, напротив, понижает критическую скорость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Ковалев, Изв. АН СССР, Механ. машиностр., № 2, (1959).
2. Н. А. Ковалев, Боковые колебания подвижного состава, Трансжелдориздат, М., 1957
3. В. Б. Медель, Тр. МЭМИИТ, вып. 55, (1948)
4. Т. А. Тиболов, Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 157 (1955).
5. М. В. Meerov, Автоматика и телемеханика, 8, № 4, 225 (1947).
6. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, 1949
7. F. W. Carter, Proc. Roy. Soc., ser. A, 121, (1928).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 января 1967 г.

ON THE STABILITY OF RAILWAY VAN MOTION

V. A. Gorokhov

The stability of motion for the railway van with six degrees of freedom is considered using asymptotic method. Domain of stability in the parameter space is approximately determined.

УДК 681.14

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СВЯЗИ ТЕОРИИ ЗАПОМИНАЮЩИХ
УСТРОЙСТВ С МНОГОКРАТНЫМ СОВПАДЕНИЕМ СИГНАЛОВ
С ТЕОРИЕЙ ЛАТИНСКИХ ГИПЕРКВАДРАТОВ. I**

М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина

Рассмотрен вопрос о связи теории запоминающих устройств с теорией перестановок с ограниченными позициями, характеризуемых лестничной схемой. На основе N -мерных запоминающих матриц порядка $\{n\}$, работающих по принципу K -кратного совпадения сигналов, вводятся определения латинского гиперпрямоугольника, редуцированного латинского гипер-прямоугольника, ортогональности латинских гиперпрямоугольников. Рассмотрена связь запоминающих матриц порядка $n \times n$ и латинских гиперквадратов того же порядка, где n — простое число.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривая перестановки из n элементов с ограниченными позициями в зависимости от характера ограничений, накладываемых на позиции этих переставляемых элементов, можно прийти к целому ряду задач, например, к задачам о встречах, о гостях, о парных картах, к задаче Симона Ньюкомба и другим, каждая из которых отличается от другой своей схемой. Схема — это таблица, в которой переставляемые элементы отмечаются номерами столбцов, а позиции — номерами строк. Знак, стоящий на пересечении соответствующего столбца и соответствующей строки, говорит о накладываемом ограничении. Ясно, что число всевозможных схем для каждого n конечно, но точное значение этого числа для большинства случаев не найдено. Считываются, в некотором роде, наиболее интересными и известными «треугольные схемы», связанные, например, с задачей Симона Ньюкомба, «прямоугольные» — с задачей о парных картах, «диагональные» или «лестничные» схемы, связанные с задачей о встречах, гостях. «Лестничные» схемы связаны с латинскими прямоугольниками, специальными прямоугольными таблицами, составленными из n элементов. Впервые латинские (элементы обозначены латинскими буквами) и греко-латинские (элементы обозначены латинскими и греческими буквами) прямоугольники стал изучать Эйлер в 1779 году в связи с задачей о 36 офицерах. После Эйлера только примерно с 1900 года проблема «латинских прямоугольников» вновь привлекла к себе внимание математиков.

Тэрри, Нетто, Якоб, Нортон, Стивенс, Керавала, Манн и, наконец, Ямamoto, Риордан, Сэйд и другие внесли большой вклад в дело изучения задач, связанных с латинскими прямоугольниками. Однако и в настоящее время проблема «латинских прямоугольников» изучена недостаточно.

Действительно, к настоящему времени известно следующее. Латинским прямоугольником называется такая прямоугольная таблица из n элементов, в которой каждый элемент встречается точно один раз в каждой строке (столбце) и не более одного раза в каждом столбце (строке). Латинский прямоугольник называется редуцированным, если

его первая строка (столбец) записана в естественном порядке: 1, 2, 3, ..., n . Обычно рассматриваются только редуцированные латинские прямоугольники. В этом случае, если через $L(m, n)$ обозначить число латинских прямоугольников вида $m \times n$, где $m < n$, а через $K(m, n)$ — число редуцированных латинских прямоугольников того же вида, то

$$L(m, n) = n! \quad K(m, n).$$

Два латинских прямоугольника называются ортогональными, если при наложении одного прямоугольника на другой каждая пара элементов встречается один и только один раз. Для латинских прямоугольников с m строками и $n > m$ столбцами известен результат М. Холла [1] о том, что к каждому из таких прямоугольников можно по меньшей мере $(n-m)!$ способами добавить новую строку, чтобы построить латинский прямоугольник вида $(m+1) \times n$. Известно число всех двухстрочных латинских прямоугольников $L(2, n)$

$$L(2, n) = n! \quad D_n,$$

где D_n — число смещений в задаче о встречах [2]. Число редуцированных 3-строчных латинских прямоугольников $K(3, n)$ выражается через числа задачи о гостях [1, 2] следующим образом:

$$K(3, n) = \sum_{k=0}^m C_n^k D_{n-k} D_k U_{n-2k},$$

где $m = [n/2]$ и $U_0 = 1$.

О латинских прямоугольниках $L(m, n)$ с числом строк, большим трех, известно только то, что

$$L(m, n) \sim n!^m e^{-(m/2)}.$$

Эрдеш и Капланский показали, что эта оценка справедлива для $m < (\lg n)^{3/2}$, а позднее Ямамото доказал, что она остается в силе и для $m < n^{1/3}$. О частном случае латинских прямоугольников — о латинских квадратах $L(n, n)$ — известно, что

$$L(n, n) = n! \quad (n-1)! \quad l_n,$$

где l_n — число латинских квадратов с упорядоченной первой строкой и первым столбцом, $L(n, n)$ были перечислены для $n = 2, 3, \dots, 7$:

n	2	3	4	5	6	7
l_n	1	1	4	56	9408	16942080

В известной литературе изучено свойство взаимной ортогональности латинских квадратов для случая некоторых значений n . Показано, что полное множество взаимно-ортогональных латинских квадратов дает конечную евклидову плоскость и наоборот [3]. Найдено полное множество взаимно-ортогональных латинских квадратов $L(n, n)$ для n , являющегося простым числом или степенью простого числа [4, 5].

Оно состоит из $(n-1)$ взаимно-ортогональных латинских квадратов порядка $n \times n$. Известно, что для некоторых значений n может не существовать двух взаимно-ортогональных латинских квадратов. Например, Тэрри [6] показал это систематическими попытками для $n = 6$.

На Международном математическом конгрессе, проходившем в

Москве летом 1966 года, Кудвелль сделал сообщение о том, что для $n \leq 20$, кроме $n = 6$, существует по крайней мере пара взаимно-ортогональных латинских квадратов. Он считает, что это справедливо и для $n > 20^*$. Вот основные результаты о числе латинских прямоугольников и квадратов и о множестве взаимно-ортогональных латинских квадратов, которые были получены к настоящему времени. Заметим также, что ранее изучались только двумерные латинские прямоугольники.

В настоящей статье рассматривается более общий случай латинских гиперпрямоугольников. Вводится определение N -мерного латинского прямоугольника и его частного случая — латинского гиперквадрата.

Рассмотрено множество взаимно-ортогональных двумерных латинских гиперквадратов и его связь с некоторыми вопросами теории двумерных запоминающих устройств. Для дальнейшего введем необходимые определения.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1) Латинским гиперпрямоугольником порядка $\{n_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ назовем такую систему из $Q_1 = \prod_{i=2}^N n_i$ различных элементов, расположенных в $Q = \prod_{i=1}^N n_i$ точках N -мерного пространства с координатами $i_1, \dots, i_j, \dots, i_N$ ($1 \leq i_j \leq n_j$) при $n_1 \leq \dots \leq n_j \leq \dots \leq n_N$, в которой в любой из $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N n_i$ строк**, соответствующих координатному направлению j ($1 \leq j \leq N$), не встречается одинаковых элементов.

В случае, когда $n_1 = \dots = n_j = \dots = n_N = n$, латинский гиперпрямоугольник порядка $\{n_i\}_{i=1, \dots, N}$ становится латинским гиперквадратом порядка $\{n\}$.

2) Рассмотрим латинский гиперпрямоугольник порядка $\{n_i\}_{i=1, \dots, N}$ в N -мерном аффинном пространстве с началом координат 1 и координатным базисом

$$i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_N \quad (1 \leq i_j \leq n_j) \quad (1)$$

Пусть одна из вершин этого прямоугольника совмещена с точкой 1, а N ребер, исходящих из нее, совмещены соответственно с i_1, i_2, \dots, i_N . Тогда, рассматривая (1) как позиционное число с основанием счисления n_j и младшим разрядом*** i_N , можно ввести порядок нумерации точек в латинском гиперпрямоугольнике согласно монотонному возрастанию (1). Если для $i_1 = 1$ и для введенного порядка нумерации номера точек латинского гиперпрямоугольника размерности $\{n_k\}_{k \neq j}$ возрастают монотонно от 1 до Q_1 , то латинский гиперпрямоугольник порядка $\{n_i\}_{i=1, \dots, N}$ назовем редуцированным. Если $L(n_1, \dots, n_N)$ — число всех латинских гиперпрямоугольников порядка $\{n_i\}_{i=1, \dots, N}$, а $K(n_1, \dots, n_N)$ — число редуцированных латинских гиперпрямоугольников того же порядка, то

$$L(n_1, \dots, n_N) = Q_1! \quad K(n_1, \dots, n_N). \quad (2)$$

* К сожалению, материалы конгресса не опубликованы, и мы не можем сделать более полной ссылки.

** Определение строки, соответствующей координатному направлению j , дано в работе [7].

*** В качестве базиса (1) может быть выбрана произвольная последовательность.

Заметим еще, что при известном способе нумерации значения (или номера) точек любого N -мерного прямоугольника порядка $\{n_i\}_{i=1}^N$ можно записать в виде прямоугольной таблицы размера $n'_1 \times n'_2$, где, например $n'_1 = Q_1$ и $n'_2 = n_1$, располагая номера точек этого прямоугольника по порядку в первый столбец таблицы, сверху вниз, затем во второй и в n'_1 -й столбец сверху вниз.

Справедливо и обратное, т. е., имея способ нумерации и соответствующую таблицу, можно обозначить все точки любого гиперпрямоугольника порядка $\{n_i\}_{i=1, \dots, N}$.

3) Два латинских гиперпрямоугольника порядка $\{n_i\}_{i=1}, \dots, n$ назовем ортогональными, если при наложении одного гиперпрямоугольника на другой каждая комбинация пар элементов встречается один и только один раз.

4) Пусть имеем множество $\{M^*\}_N$ в N -мерном пространстве, состоящее из Q точек. Перенумеруем точки этого множества следующим образом:

1, 2, 3, ..., Q

и представим их в виде таблицы:

$$\begin{matrix} 1 & s+1 & \dots & k_j s+1 & \dots & (n_j-1)s+1 \\ 2 & s+2 & \dots & k_j s+2 & \dots & (n_j-1)s+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s & 2s & \dots & (k_j+1)s & \dots & n_js \end{matrix}, \quad (3)$$

іде

$$s = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N n_l.$$

Эту таблицу точек множества $\{M^*\}_N$ будем называть исходной для координатного направления i_j , где $1 \leq k_j \leq n_j$ и $1 \leq j \leq N$. В случае $n_1 = n_2 = \dots = n_i = \dots = n_N = n$ таблица (3) примет вид

$$\begin{array}{cccc}
 1 & n^{N-1} + 1 & \dots & n^N - n^{N-1} + 1 \\
 2 & n^{N-1} + 2 & \dots & n^N - n^{N-1} + 2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 n^{N-1} & 2n^{N-1} & \dots & n^N
 \end{array} \tag{4}$$

Тогда таблицу (4) будем называть просто исходной.

2. ЗАПОМИНАЮЩИЕ МАТРИЦЫ ПОРЯДКА $n \times n^*$ И ЛАТИНСКИЕ КВАДРАТЫ ПОРЯДКА $n \times n$, ГДЕ n – ПРОСТОЕ ЧИСЛО

Установим связь между двумерными запоминающими** матрицами $\|a_{ij}\|$ порядка n , прошитыми K группами элементов, работающими по принципу K -кратного совпадения сигналов, и двумерными взаимно-ортогональными латинскими квадратами порядка $\{n\}$. При этом мы будем

* Здесь и в дальнейшем все обозначения взяты из работы [8].

** Для примера будем рассматривать матрицы, в которых в качестве запоминающих элементов использованы ферриты с прямоугольной петлей гистерезиса.

ссылаясь на два основных условия, которым удовлетворяет каждый элемент любой прошивки матрицы $\|a_{ij}\|$ (условия А): а) ни один сердечник не прошивается двумя элементами из одной и той же прошивки; б) ни одна пара элементов разных прошивок не пересекается более, чем в одном сердечнике.

Между всевозможными ферритовыми матрицами $\|a_{ij}\|$ порядка $\{n\}$ и множествами $\{M^*\}_2$, состоящими из n^2 точек, существует взаимно-однозначное соответствие. Точно так же существует оно и между совокупностью элементов всевозможных прошивок матриц $\|a_{ij}\|$ и множествами $\{M\}_2$, каждый элемент которых состоит из n определенных точек множества $\{M^*\}_2$. В силу взаимной однозначности указанного соответствия связь между матрицами $\|a_{ij}\|$ порядка $\{n\}$ и латинскими квадратами того же порядка мы попытаемся свести к связи между последними и множествами $\{M^*\}_2$. Итак, пусть дано некоторое множество $\{M^*\}_2$. Перенумеруем все точки этого множества следующим образом:

$$1, 2, 3, \dots, n^2. \quad (5)$$

Введем преобразование T , которое переводит номера точек множества $\{M^*\}_2$ в номера, которые принимают значения только от 1 до n таким образом, что

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n; & n+1, & \dots, & 2n; & \dots; & n^2-n+1, & n^2-n+2, & \dots, & n^2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & \dots & n; & \underbrace{1 \dots n}; & \dots; & \underbrace{1} & \underbrace{2 \dots n} & & & & \\ -0 & & & & & -n & & & & -(n-1)n & & & \end{array}, \quad (6)$$

г. е. из первых n чисел верхнего ряда вычитаем «0», из следующих n чисел — n , далее $2n$ и т. д., из последних n чисел — $(n-1)n$. Это преобразование взаимно-однозначно, ибо сохраняется позиционность записи. Следовательно, исходная квадратная таблица номеров точек множества $\{M^*\}_2$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & n+1 & \dots & (j-1)n+1 & \dots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & \dots & (j-1)n+2 & \dots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n & \dots & jn & \dots & n^2 \end{array} \quad (7)$$

переходит согласно преобразованию T (6) в следующую, также квадратную таблицу номеров:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & & n & & n \end{array} \quad (8)$$

Ясно, что для восстановления таблицы (7) по (8) достаточно ко всем числам первого столбца прибавить «0», второго столбца — n и так далее, j -го столбца — $(j-1)n$ и последнего столбца — $(n-1)n$. Таким образом, если через j обозначить номер j -го столбца таблицы (8), то число $t_j^{(2)}$, прибавляемое к числу j -го столбца для восстановления таблицы (7), будет иметь величину

$$t_j^{(2)} = (j - 1)n. \quad (9)$$

Для дальнейшего сделаем несколько замечаний.

1) Требования для совокупности множеств $\{M^*\}_2$ или $\{M_2\}$, аналогичные условиям А для прошивания соответствующих запоминающих матриц, состоят в следующем [8] (условия Б):

а) Все элементы множества $\{M_2\}$ можно разбить на группы, состоящие из n^2 различных точек множества $\{M^*\}_2$. При этом элементы одной группы не имеют одинаковых точек. Для определенности мы составляем элементы множества $\{M\}_2$ из номеров точек множества $\{M^*\}_2$, расположенных в строго возрастающем порядке. Однако это не является обязательным условием.

б) Любые два элемента, принадлежащие к различным группам $\{M\}_2$, могут иметь не более одной общей точки* из $\{M^*\}_2$.

2) Способ «кручения» [8], используемый для построения полной и максимальной совокупности множества элементов $\{M\}_2$, удовлетворяющих условиям Б, перебирает все возможные сочетания из n номеров по n номеров в сочетании, т. е. какую бы точку из $\{M^*\}_2$ с номером α мы ни взяли, всегда можно указать ее сочетания с точкой, имеющей номер β , где β пробегает все значения номеров от 1 до n^2 , кроме номера α .

Сформулируем теорему, устанавливающую связь между полным максимальным набором таблиц, построенных по способу «кручения» по исходной таблице вида (7), и полным набором двумерных взаимно-ортогональных редуцированных латинских квадратов.

Теорема. Полное множество двумерных редуцированных взаимно-ортогональных латинских квадратов порядка $\{n\}$

$$\rho = \frac{\rho_{\max} \{M\}_2}{n} - 2, \quad (10)$$

где n — простое число. Справедливо и обратное утверждение

$$\rho_{\max} \{M\}_2 = (\rho + 2)n.$$

1) Пусть к исходной таблице (7) применен способ «кручения». Он дает возможность получить полное и максимальное множество таблиц, удовлетворяющих условиям Б, что аналогично условиям А, налагаемым на элементы прошивок ферритовых матриц $\|a_{ij}\|$. Таких таблиц будет $\rho_{\max} \{M\}_2 / n$. В силу свойства несовпадения полученные из исходной таблицы (7) способом «кручения» таблицы при применении к ним преобразования (6) перейдут в редуцированные взаимно-ортогональные латинские квадраты, так как первый столбец переходит сам в себя, а он всегда записан в естественном порядке. Исключение составляют лишь исходная таблица (7) и последняя таблица, являющаяся транспонированной исходной. При применении к ним преобразования (6) они не будут представлять латинские квадраты. Однако эти две таблицы входят в выражение $\rho_{\max} \{M\}_2 / n$. Поэтому число всех двумерных взаимно-ортогональных латинских квадратов порядка $\{n\}$

$$\rho = \frac{\rho_{\max} \{M\}_2}{n} - 2. \quad (11)$$

Так как $\rho = n - 1$, то множество этих квадратов будет полным [9].

* Для случая N -мерного пространства в определении условий Б необходимо заменить n^2 на n^{N-1} , а $\{M\}_2$ и $\{M^*\}_2$ на $\{M\}_N$ и $\{M^*\}_N$ соответственно.

2) Обратное очевидно, если заметить, что к множеству таблиц, полученных с помощью преобразования (6) из полного множества редуцированных взаимно-ортогональных латинских квадратов, следует добавить исходную таблицу (7) и таблицу, являющуюся транспонированной исходной таблицей. Тогда $\rho_{\max}\{M_2\} = (n-1+2)n = n(n+1)$. Теорема доказана.

Из теоремы следует способ построения полного множества взаимно-ортогональных редуцированных латинских квадратов на основе таблиц «кручения» и преобразования (6). На основе обратного преобразования (6) легко получить по полному набору взаимно-ортогональных латинских квадратов все возможные координатные прошивки.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. Холл, Комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963
- 2 Д. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963
- 3 W. L. Stevens, Ann. Engeenics, 9, 82 (1939).
- 4 H. B. Mann, Ann. Math. Stat., 14, 401 (1943).
- 5 H. B. Mann, Analysis and Design of Experiments D. P., № 4 (1949).
- 6 J. Tagge, C. R. Ass. Trans. Av. Sci., Z 170 (1901).
- 7 Н. П. Соколов, Пространственные матрицы и их применение, ГИФМЛ, М., 1960
- 8 М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 9, № 5, 1020 (1966).
- 9 Г. Дж. Райзер, Комбинаторная математика, изд. Мир, М., 1966.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 января 1967 г.

SOME ASPECTS OF CONNECTION BETWEEN THE THEORY OF STORAGE WITH A MULTIPLE COINCIDENCE OF SIGNALS AND THE THEORY OF LATIN HYPERSQUARES. I

M. Y. Eyngorin, T. N. Eyngorina

The article presents a consideration of a connection between the theory of storage and the theory of transpositions with restricted positions described by a staircase scheme. Definitions of N -dimensional Latin rectangle, reduced N -dimensional Latin rectangle, orthogonality of N -dimensional Latin rectangles are given on the basis of N -dimensional storage matrixes of $\{n\}$ -the order operating on the principle of multiple coincidence. Connection between storage matrixes of $n \times n$ -th order and Latin squares of the same order is considered when n is a prime number.

УДК 681.14

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СВЯЗИ ТЕОРИИ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ С МНОГОКРАТНЫМ СОВПАДЕНИЕМ СИГНАЛОВ С ТЕОРИЕЙ ЛАТИНСКИХ ГИПЕРКВАДРАТОВ. II

М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина

Рассмотрен вопрос о связи теории многомерных запоминающих устройств с теорией перестановок с ограниченными позициями, характеризуемых лестничной схемой. Находится полное множество взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов. Дан пример для $n = 2$ и $N = 4$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрено множество взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов порядка $\{n\}$ и его связь с некоторыми вопросами теории N -мерных запоминающих устройств, где $N \geq 2$ и n — простое число.

Поскольку данная статья является непосредственным продолжением работы [1], то мы будем постоянно ссылаться на обозначения, введенные в работе [1] следующим образом: (2—1) обозначает ссылку на раздел 2 работы [1]; (5.1) обозначает ссылку на формулу (5) в работе [1]; (Б.1) — условие Б работы [1].

Аналогично изложенному в (2—1) установим связь между N -мерными запоминающими матрицами порядка $\{n\}$, работающими по принципу K -кратного совпадения токов, или, что то же самое, множествами $\{M^*\}_N$, $\{M\}_N$ и взаимно-ортогональными латинскими гиперквадратами того же порядка.

В этом случае нумерация точек множества $\{M^*\}_N$ будет следующая:

$$1, 2, 3, \dots, n^N,$$

Преобразование T^j примет вид:

$$\begin{array}{cccc} 1, 2, \dots, n^{j-1}; & n^{j-1} + 1, \dots, 2n^{j-1}; \dots; & n^j - n^{j-1} + 1, \dots, n^j \\ \hline 1, 2, \dots, n^{j-1}; & 1, \dots, n^{j-1}; \dots; & 1, \dots, n^{j-1} \\ \hline -0 & -n^{j-1} & -(n-1)n^{j-1} \end{array}, \quad (1)$$

К исходной таблице применяется преобразование T^j , где n^{j-1} есть число элементов в столбце таблицы и $1 \leq j \leq N$.

Ясно, что, как и в работе [1], преобразование T^j для $j = N$ дает взаимно-однозначное соответствие между исходной таблицей

$$\begin{array}{cccc} 1 & \dots & (j-1)n^{N-1} + 1 & \dots & (n-1)n^{N-1} + 1 \\ 2 & \dots & (j-1)n^{N-2} + 2 & \dots & (n-1)n^{N-1} + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{N-1} & \dots & jn^{N-1} & \dots & n^N \end{array} \quad (2)$$

и таблицей, полученной из исходной согласно преобразованию (1), которая имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2 & \dots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{N-1} & \dots & n^{N-1} & \dots & n^{N-1} \end{array} \quad (3)$$

Таким образом, таблицы типа (3) будут состоять только из номеров $1, 2, \dots, n^{N-1}$. Аналогично, как и для случая $N = 2$ (см.(2—1)), если через γ обозначить номер столбца таблицы (3), то для восстановления таблицы (2) к каждому элементу γ -го столбца таблицы (3) следует добавить величины

$$t_{\gamma}^{(N)} = (\gamma - 1) n^{N-1}. \quad (4)$$

Рассмотрим ряд следующих теорем.

1. ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНО-ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ ГИПЕРКВАДРАТАХ ПОРЯДКА $\{n\}$

В этом разделе мы рассмотрим некоторые теоремы о взаимно-ортогональных латинских гиперквадратах порядка $\{n\}$ и о связи полного и максимального множества прошивок $\{M\}_n$ с полным множеством взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов порядка $\{n\}$, где n — простое число и $N \geq 2$, в котором каждый латинский гиперквадрат будет представлен в виде плоской таблицы размера $n^{N-1} \times n$.

Теорема 1. Пусть дано множество взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов A_1, A_2, \dots, A_t порядка $\{n\}$ ($n \geq 2$), тогда

$$t \leq \sum_{i=1}^{N-1} (n^i - 1). \quad (5)$$

Доказательство. N -мерный латинский квадрат порядка $\{n\}$ можно представить в виде совокупности n $(N-1)$ -мерных квадратов порядка $\{n\}$ с помощью прямоугольной таблицы размера $n_1 \times n_2$, где $n_1 = n^{N-1}$, $n_2 = n$ и номера точек любого из n_2 столбцов меняются от 1 до n^{N-1} . Очевидно, что такое представление возможно самое большое ($n^{N-1} - 1$) способами.

Всякий N -мерный латинский квадрат порядка $\{n\}$ можно представить в виде n^2 $(N-2)$ -мерных квадратов порядка $\{n\}$. Это можно осуществить максимум с помощью $(n^{N-2} - 1)$ способов. Наконец, всякий N -мерный латинский квадрат порядка $\{n\}$ можно представить в виде n^{N-1} двухмерных квадратов порядка $\{n\}$ самое большое $(n - 1)$ способами.

Таким образом,

$$t \leq (n^{N-1} - 1) + (n^{N-2} - 1) + \dots + (n - 1) = \sum_{i=1}^{N-1} (n^i - 1). \quad (6)$$

Если в (5) имеет место равенство, то множество взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов порядка $\{n\}$ называется полным.

Теорема 2. Для построения полного множества взаимно-ортогональных N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$, где n —простое число, а N —размерность пространства, в котором эти квадраты рассматриваются, необходимо построить все таблицы, связанные с исходной таблицей (2), по способу «кручения» и применить к ним преобразование (1). Число всех взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов.

$$\rho_N = \sum_{i=1}^{N-1} (n^i - 1) \quad (N \geq 2). \quad (7)$$

Доказательство. Для доказательства полноты и взаимной ортогональности множества латинских квадратов, соответствующих множеству таблиц, полученных из (2) методом «кручения», используем доказательство полноты и максимальности множества $\{M\}_N$. Доказательство существования полного и максимального множества в [2] шло по шагам; на каждом из них были свои исходные таблицы, к которым применялся способ «кручения». Нам удобнее на каждом шаге, имеющем таблицы с числом элементов в столбце n^{N-1} , объединить таблицы в одну исходную таблицу порядка $n^{N-1} \times n$. Тогда получим N шагов, в каждом из которых будет таблица, имеющая n элементов в строке и n^{N-1} в столбце.

1 шаг

$$\begin{array}{cccccc} 1 & n^{N-1} + 1 & \dots & (n-1) & n^{N-1} + 1 \\ 2 & n^{N-1} + 2 & \dots & (n-1) & n^{N-1} + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{N-1} & 2n^{N-1} & \dots & & n^N & ; \end{array} \quad (8)$$

2 шаг

$$\begin{array}{cccccc} 1 & n^{N-2} + 1 & \dots & (n-1) & n^{N-2} + 1 \\ 2 & n^{N-2} + 2 & \dots & (n-1) & n^{N-2} + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{N-2} & 2n^{N-2} & \dots & & n^{N-1} & ; \\ n^{N-1} + 1 & n^{N-1} + n^{N-2} + 1 & \dots & & 2n^{N-1} - n^{N-2} + 1 & \\ n^{N-1} + 2 & n^{N-1} + n^{N-2} + 2 & \dots & & 2n^{N-1} - n^{N-2} + 2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ n^{N-1} + n^{N-2} & n^{N-1} + 2n^{N-2} & \dots & & 2n^{N-1} & ; \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array} \quad (9)$$

$n^N - n^{N-1} + 1$	$n^N - n^{N-1} + n^{N-2} + 1$	\dots	$n^N - n^{N-2} + 1$
$n^N - n^{N-1} + 2$	$n^N - n^{N-1} + n^{N-2} + 2$	\dots	$n^N - n^{N-2} + 2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n^N - n^{N-1} + n^{N-2}$	$n^N - n^{N-1} + 2n^{N-2}$	\dots	n^N
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(N-1)$ шаг			
1	$n+1$	\dots	$n^2 - n + 1$
2	$n+2$	\dots	$n^2 - n + 2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	$2n$	\dots	n^2
$n^2 + 1$	$n^2 + n + 1$	\dots	$n^3 - n + 1$
$n^2 + 2$	$n^2 + n + 2$	\dots	$n^3 - n + 2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n^2 + n$	$n^2 + 2n$	\dots	n^3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n^N - n^2 + 1$	$n^N - n^2 + n + 1$	\dots	$n^N - n + 1$
$n^N - n^2 + 2$	$n^N - n^2 + n + 2$	\dots	$n^N - n + 2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n^N - n^2 + n$	$n^N - n^2 + 2n$	\dots	n^N
N шаг			
1	2	\dots	n
$n+1$	$n+2$	\dots	$2n$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$-n+1$	$n^2 - n + 2$	\dots	n^2
$n^2 + 1$	$n^2 + 2$	\dots	$n^2 + n$
$+n+1$	$n^2 + n + 2$	\dots	$n^2 + 2n$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$$\begin{array}{cccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^3 - n + 1 & n^3 - n + 2 & \dots & n^3 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^N - n^2 + 1 & n^N - n^2 + 2 & \dots & n^N - n^2 + n \\
 n^N - n^2 + n + 1 & n^N - n^2 + n + 2 & \dots & n^N - n^2 + 2n \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^N - n + 1 & n^N - n + 2 & \dots & n^N
 \end{array} \quad (11)$$

Рассмотрим первый шаг. Здесь мы имеем одну исходную таблицу (8) и из нее способом «кручения» получаем ($n^{N-1} - 1$) новых таблиц, удовлетворяющих условию несовпадения номеров в строках и в столбцах, согласно требованиям (Б.1). Применив к ним преобразование (1) для $j = N$ получим, что все таблицы, кроме исходной, перейдут согласно определениям в N -мерные взаимно-ортогональные редуцированные латинские квадраты порядка $\{n\}$. Таким образом, на 1-м шаге мы получим их в количестве

$$n^{N-1} - 1. \quad (12)$$

Второй шаг. Применив к исходной таблице второго шага (9) преобразование (1) для $j = N$, получим в каждом столбце по n последовательностей, состоящих из n^{N-2} однотипных элементов:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & n^{N-2} + 1 & \dots & (n-1) n^{N-2} + 1 \\
 2 & n^{N-2} + 2 & \dots & (n-1) n^{N-2} + 2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^{N-2} & 2n^{N-2} & \dots & n^{N-1} \\
 \end{array} \quad ; \quad (13)$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & n^{N-2} + 1 & \dots & (n-1) n^{N-2} + 1 \\
 2 & n^{N-2} + 2 & \dots & (n-1) n^{N-2} + 2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^{N-2} & 2n^{N-2} & \dots & n^{N-1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \end{array} \quad (14)$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & n^{N-2} + 1 & \dots & (n-1) n^{N-2} + 1 \\
 2 & n^{N-2} + 2 & \dots & (n-1) n^{N-2} + 2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^{N-2} & 2n^{N-2} & \dots & n^{N-1}
 \end{array}$$

Таким образом, N -мерный квадрат на втором шаге изображается табліцей (14), состоящей из n упорядоченных подтаблиц размерности $(n^{N-2} \times n)$, в каждой из которых удовлетворяется условие несовпадения номеров. Очевидно, этот квадрат не будет латинским. Для построения на этом шаге N -мерных латинских квадратов, взаимно-ортогональных ко всем квадратам, полученным на 1-м шаге, потребуется лишь часть таблицы (14), обозначенная (13).

Для таблицы (13) по способу «кручения» можно построить еще $(n^{N-2} - 1)$ таблиц 1, 2, 3, ..., $(n^{N-2} - 1)$, удовлетворяющих условиям несовпадения номеров в строках (Б.1):

1)

1	$n^{N-2} + 2$...	$n^{N-1} - n^{N-2} + (n-1)$
2	$n^{N-2} + 3$...	$n^{N-1} - n^{N-2} + n$
3	$n^{N-2} + 4$...	$n^{N-1} - n^{N-2} + (n+1)$
.	.	.	.
.	.	.	.
$n^{N-2} - 1$	$2n^{N-2}$...	$n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3)$
n^{N-2}	$n^{N-2} + 1$...	$n^{N-1} - n^{N-2} + (n-2)$
.	.	.	.
$n-1$			

n-1)

1	$n^{N-2} + n - 1$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3)(n-1)] \bmod n^{N-1}$
2	$n^{N-2} + n$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3)(n-1) + 1] \bmod n^{N-1}$
3	$n^{N-2} + n + 1$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3)(n-1) + 2] \bmod n^{N-1}$
.	.	.	.
.	.	.	.
$n^{N-2} - 1$	$n^{N-2} + n - 3$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3)(n-1) - 2] \bmod n^{N-1}$
n^{N-2}	$n^{N-2} + n - 2$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3)(n-1) - 1] \bmod n^{N-1}$
n)			
1	$n^{N-2} + n - 1$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-2)(n-1)] \bmod n^{N-1}$
2	$n^{N-2} + n$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-2)(n-1) + 1] \bmod n^{N-1}$
3	$n^{N-2} + n + 1$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-2)(n-1) + 2] \bmod n^{N-1}$
.	.	.	.
.	.	.	.
$n^{N-2} - 1$	$n^{N-2} + n - 3$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-2)(n-1) - 2] \bmod n^{N-1}$
n^{N-2}	$n^{N-1} + n - 2$...	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-2)(n-1) - 1] \bmod n^{N-1}$
.	.	.	.

(17)

$$\begin{array}{cccc}
 n^{N-2} - 1) & & & \\
 1 & 2n^{N-1} & \dots & [n^{N-1} - n^{N-2} + (n^{N-2} - 2)(n-1)] \bmod n^{N-1} \\
 2 & n^{N-2} + 1 & \dots & [n^{N-1} - n^{N-2} + (n^{N-2} - 2)(n-1) + 1] \bmod n^{N-1} \\
 3 & n^{N-2} + 2 & \dots & [n^{N-1} - n^{N-2} + (n^{N-2} - 2)(n-1) + 2] \bmod n^{N-1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^{N-2} - 1 & 2n^{N-2} - 2 & \dots & [n^{N-1} - n^{N-2} + (n^{N-2} - 2)(n-1) - 2] \bmod n^{N-1} \\
 n^{N-2} & 2n^{N-2} - 1 & \dots & [n^{N-1} - n^{N-2} + (n^{N-2} - 2)(n-1) - 1] \bmod n^{N-1}
 \end{array} \quad (18)$$

Применим к полученным таблицам преобразование (1) для $j = N - 1$ и получим $(n^{N-2} - 1)(N - 1)$ -мерных редуцированных взаимно-ортогональных латинских квадратов $1, 2, \dots, (n^{N-2} - 1)$:

1)

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & \dots & n \\
 2 & 3 & \dots & n+1 \\
 3 & 4 & \dots & n+2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & ; \\
 n^{N-2} - 1 & n^{N-2} & \dots & n-2 \\
 n^{N-2} & 1 & \dots & n-1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n-1) & & & &
 \end{array} \quad (19)$$

n - 1)

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & n-1 & \dots & [n + (n-3)(n-1)] \bmod n^{N-2} \\
 2 & n & \dots & [n + (n-3)(n-1) + 1] \bmod n^{N-2} \\
 3 & n+1 & \dots & [n + (n-3)(n-1) + 2] \bmod n^{N-2} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & ; \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 n^{N-2} - 1 & n-3 & \dots & [n + (n-3)(n-1) - 2] \bmod n^{N-2} \\
 n^{N-2} & n-2 & \dots & [n + (n-3)(n-1) - 1] \bmod n^{N-2} \\
 n) & & & & \\
 1 & n & \dots & [n + (n-2)(n-1)] \bmod n^{N-2} \\
 2 & n+1 & \dots & [n + (n-2)(n-1) + 1] \bmod n^{N-2} \\
 3 & n+2 & \dots & [n + (n-2)(n-1) + 2] \bmod n^{N-2} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array} \quad (20)$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n^{N-2}-1 & n-2 & \dots & [n+(n-2)(n-1)-2] \bmod n^{N-2} & & (21) \\ n^{N-2} & n-1 & \dots & [n+(n-2)(n-1)-1] \bmod n^{N-2} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} n^{N-2}-1) & & & & & \\ 1 & n^{N-2} & \dots & [n+(n^{N-2}-2)(n-1)] \bmod n^{N-2} & & \\ 2 & 1 & \dots & [n+(n^{N-2}-2)(n-1)+1] \bmod n^{N-2} & & \\ 3 & 2 & \dots & [n+(n^{N-2}-2)(n-1)+2] \bmod n^{N-2} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (22) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} n^{N-2}-1 & n^{N-2}-2 & \dots & [n+(n^{N-2}-2)(n-1)-2] \bmod n^{N-1} & & \\ n^{N-2} & n^{N-2}-1 & \dots & [n+(n^{N-2}-2)(n-1)-1] \bmod n^{N-1} & & \end{array}$$

Заметим также, что эти квадраты можно строить способом, указанным в работах [3, 4].

Искомые N -мерные латинские квадраты второго шага будем строить по схеме

1 столбец таблицы 13	2 столбец таблицы 13	3 столбец таблицы 13	\dots	n -й столбец таблицы 13
2-й столбец S -го латин- ского квадрата	2-й столбец S -й таблицы	3-й столбец S -й таблицы	\dots	n -й столбец S -й таблицы
3-й столбец S -го латин- ского квадрата	2-й столбец ($S+1$) таблицы	3-й столбец ($S+1$) таблицы	\dots	n -й столбец ($S+1$) таблицы
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(k+2)$ столбец S -го латин- ского квадрата	2-й столбец ($S+k$) таблицы	3-й столбец ($S+k$) таблицы	\vdots	n -й столбец ($S+k$) таблицы
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n -й столбец S -го латин- ского квадрата	2-й столбец ($S+n-2$) таб- лици	3-й столбец ($S+n-2$) таб- лици	\dots	n -й столбец ($S+n-2$) таблицы

где S ($1 \leq S \leq n^{N-2}-1$) — номер $(N-1)$ -мерного латинского квадрата (19) — (22) или соответствующий номер таблицы (15) — (18). Величина $(S+k)$ берется по $\bmod n^{N-2}$, где $0 \leq k \leq n-2$.

Тогда получим $(n^{N-2}-1)$ следующих квадратов:

1)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & n^{N-2}+1 & \dots & n^{N-1}-n^{N-2}+1 & & \\ 2 & n^{N-2}+2 & \dots & n^{N-1}-n^{N-2}+2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n^{N-2}	$2n^{N-2}$.	n^{N-1}
2	$n^{N-2}+2$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+n-1$
3	$n^{N-2}+3$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+n$
4	$n^{N-2}+4$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+n+1$
.	.	.	.
.	.	.	.
n^{N-2}	$2n^{N-2}$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+n-3$
1	$n^{N-2}+1$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+n-2$
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$n^{N-2}+n$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n-2)(n-1)] \bmod n^{N-1}$
$n+1$	$n^{N-2}+n+1$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n-2)(n-1)+1] \bmod n^{N-1}$
$n+2$	$n^{N-2}+n+2$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n-2)(n-1)+2] \bmod n^{N-1}$
.	.	.	.
.	.	.	.
$n-2$	$n^{N-2}+n-2$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n-2)(n-1)-2] \bmod n^{N-1}$
$n-1$	$n^{N-2}+n-1$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n-2)(n-1)-1] \bmod n^{N-1}$
	$n^{N-2}-1$		
1	$n^{N-2}+1$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+1$
2	$n^{N-2}+2$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+2$
3	$n^{N-2}+3$.	$n^{N-1}-n^{N-2}+3$
.	.	.	.
.	.	.	.
$n^{N-2}-1$	$2n^{N-2}-1$.	$n^{N-1}-1$
n^{N-2}	$2n^{N-2}-2$.	n^{N-1}
n^{N-2}	$2n^{N-2}$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n^{N-2}-2)(n-1)] \bmod n^{N-1}$
1	$n^{N-2}+1$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n^{N-2}-2)(n-1)+1] \bmod n^{N-1}$
2	$n^{N-2}+2$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n^{N-2}-2)(n-1)+2] \bmod n^{N-1}$
.	.	.	.
.	.	.	.

; (24)

.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$n^{N-2}-1$	$2n^{N-2}-1$.	$n^{N-1}-1$
n^{N-2}	$2n^{N-2}-2$.	n^{N-1}
n^{N-2}	$2n^{N-2}$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n^{N-2}-2)(n-1)] \bmod n^{N-1}$
1	$n^{N-2}+1$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n^{N-2}-2)(n-1)+1] \bmod n^{N-1}$
2	$n^{N-2}+2$.	$[n^{N-1}-n^{N-2}+(n^{N-2}-2)(n-1)+2] \bmod n^{N-1}$
.	.	.	.
.	.	.	.

; (25)

$n^{N-2} - 2$	$2n^{N-2} - 2$	\dots	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n^{N-2} - 2) \times$ $\times (n-1) - 2] \bmod n^{d-1}$
$n^{N-2} - 1$	$2n^{N-2} - 1$	\dots	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n^{N-2} - 2) \times$ $\times (n-1) - 1] \bmod n^{N-1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$[n + (n^{N-2} - 2) \times$ $\times (n-1)] \bmod n^{N-2}$	$n^{N-2} + n - 1$	\dots	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3) \times$ $\times (n-1)] \bmod n^{N-1}$
$[n + (n^{N-2} - 2) \times$ $\times (n-1) + 1] \bmod n^{N-2}$	$(n^{N-2} + n$	\dots	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3) \times$ $\times (n-1) + 1] \bmod n^{N-1}$
$[n + (n^{N-2} - 2) \times$ $\times (n-1) + 2] \bmod n^{N-2}$	$n^{N-2} + n + 1$	\dots	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3) \times$ $\times (n-1) + 2] \bmod n^{N-1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$[n + (n^{N-2} - 2) \times$ $\times (n-1) - 2] \bmod n^{N-2}$	$n^{N-2} + n - 3$	\dots	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3) \times$ $\times (n-1) - 2] \bmod n^{N-1}$
$[n + (n^{N-2} - 2) \times$ $\times (n-1) - 1] \bmod n^{N-2}$	$n^{N-2} + n - 2$	\dots	$[n^{N-1} - n^{N-2} + (n-3) \times$ $\times (n-1) - 1] \bmod n^{N-1}$

1. Эти гиперквадраты будут взаимно-ортогональны, поскольку при наложении одного из них на другой никогда не встретится двух одинаковых пар элементов, так как:

1) первый столбец первого искомого гиперквадрата и первый столбец второго искомого гиперквадрата построены соответственно из взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов;

2) остальные столбцы в этих двух искомых гиперквадратах построены из таблиц 1, 2, ..., $n^{N-2} - 1$, каждая из которых не содержит первого столбца и удовлетворяет условиям несовпадения номеров в строчках;

3) каждая пара столбцов любого из этих двух искомых латинских квадратов состоит из двух непересекающихся наборов точек.

2. Построенные латинские гиперквадраты будут ортогональны и к латинским гиперквадратам, построенным на первом шаге, так как каждая пара столбцов построенных латинских гиперквадратов состоит соответственно из двух непересекающихся наборов номеров точек.

Третий шаг почти аналогичен второму. Это «почти» состоит в том, что все сказанное на втором шаге относительно таблицы (13) справедливо и на третьем шаге, но справедливо относительно каждой из следующих первоначальных таблиц:

1)

1	$n^{N-3} + 1$	\dots	$n^{N-2} - n^{N-3} + 1$
2	$n^{N-3} + 2$	\dots	$n^{N-2} - n^{N-3} + 2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n^{N-3}	$2n^{N-3}$	\dots	n^{N-2}

; (26)

2)

$$\begin{array}{cccc} n^{N-2} + 1 & n^{N-2} + n^{N-3} + 1 & \dots & 2n^{N-2} - n^{N-3} + 1 \\ n^{N-2} + 2 & n^{N-2} + n^{N-3} + 2 & \dots & 2n^{N-2} - n^{N-3} + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{N-2} + n^{N-3} & n^{N-2} + 2n^{N-3} & \dots & 2n^{N-2} \end{array}; \quad (27)$$

n)

$$\begin{array}{cccc} n^{N-1} - n^{N-2} + 1 & n^{N-1} - n^{N-2} + n^{N-3} + 1 & \dots & n^{N-1} - n^{N-3} + 1 \\ n^{N-1} - n^{N-2} + 2 & n^{N-1} - n^{N-2} + n^{N-3} + 2 & \dots & n^{N-1} - n^{N-3} + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{N-1} - n^{N-2} + n^{N-3} & n^{N-1} - n^{N-2} + 2n^{N-3} & \dots & n^{N-1} \end{array}. \quad (28)$$

Пользуясь рассуждениями второго шага относительно построения последовательности из $(n^{N-2} - 1)$ взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов (см. 23)), мы построим n последовательностей, каждая из которых состоит из $(n^{N-3} - 1)$ взаимно-ортогональных $(N - 1)$ -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$:

$$\begin{array}{cccccc} 1^{(1)} & 2^{(1)} & \dots & k^{(1)} & \dots & (n^{N-3} - 1)^{(1)} \\ 1^{(2)} & 2^{(2)} & \dots & k^{(2)} & \dots & (n^{N-3} - 1)^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^{(j)} & 2^{(j)} & \dots & k^{(j)} & \dots & (n^{N-3} - 1)^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^{(n)} & 2^{(n)} & \dots & k^{(n)} & \dots & (n^{N-3} - 1)^{(n)} \end{array}, \quad (29)$$

где $k^{(j)}$ — номер k -го квадрата ($1 \leq k \leq n^{N-3} - 1$) в j -й последовательности ($1 \leq j \leq n$). Объединим все квадраты 1-го столбца в первый, 2-го столбца — во второй и т. д., $(n^{N-3} - 1)$ -го столбца — в $(n^{N-3} - 1)$ -й квадрат. Тогда мы получим множество из $(n^{N-3} - 1)$ взаимно-ортогональных N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$, ортогональных квадратам 2-го и 1-го шагов, по тем же соображениям, которые были высказаны для латинских квадратов, полученных на втором шаге. Аналогичным образом доказательство пойдет на 4-м и т. д. и $(N - 1)$ -м шаге, где мы получим $(n - 1)$ новых N -мерных латинских квадратов, взаимно-ортогональных и ортогональных ко всем квадратам, полученным на предыдущих шагах. На N -м шаге в силу особенностей способа «кручения» мы не получим ни одного латинского квадрата.

Итак, основываясь на сказанном выше, можно заключить, что полученное множество N -мерных взаимно-ортогональных латинских квадратов порядка $\{n\}$ состоит из

$$\rho_N = n^{N-1} - 1 + n^{N-2} - 1 + \dots + n - 1 = \sum_{i=1}^{N-1} (n_i - 1)$$

квадратов, где $N > 2$ и n — простое число. По определению оно будет полным. Теорема доказана.

Следствия из теоремы 2. 1) В теореме указывается конкретный способ построения полного множества взаимно-ортогональных N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$. 2) Учитывая введенный выше способ нумерации точек в N -мерном прямоугольнике порядка $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$, можно заметить, что в предложенном способе построения полного множества взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов порядка $\{n\}$ все квадраты, полученные на первом шаге доказательства теоремы, редуцированы, если считать в определении редуцированности $i_1 = 1$; все квадраты, полученные на втором шаге, редуцированы, если в определении редуцированности положить $i_2 = 1$ и т. д., наконец, все квадраты, полученные на $(N-1)$ -м шаге, редуцированы, если в определении редуцированности считать $i_{N-1} = 1$.

Таким образом, в теореме 2 получен способ построения N -мерных латинских гиперквадратов порядка $\{n\}$, редуцированных относительно координатных гиперплоскостей $(N-1)$ -го порядка, проходящих соответственно в направлении векторов

$$i_2, \dots, i_N; i_1, i_3, i_4, \dots, i_N; i_1, i_2, \dots, i_{N-2}, i_N. \quad (30)$$

Теорема 3. Для получения полного и максимального множества прошивок $\{M\}_N$ достаточно построить полное множество взаимно-ортогональных N -мерных латинских гиперквадратов порядка $\{n\}$, где n — простое число, а $N \geq 2$.

Доказательство. Пусть дано любое полное множество взаимно-ортогональных N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$. Не нарушая ортогональности множества, можно перенумеровать элементы каждого латинского квадрата так, чтобы получилось множество взаимно-ортогональных N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$, редуцированных относительно координатных гиперплоскостей $(N-1)$ -го порядка в смысле следствия 2 теоремы 2. Полученное множество вновь будет

полным и будет состоять из $\sum_{i=1}^{N-1} (n^i - 1)$ квадратов, каждый из которых

можно представить в виде прямоугольных таблиц размера $n^{N-1} \times n$. Среди них будет $(n^{N-1} - 1)$ таблиц, у которых каждый из n столбцов состоит из n^{N-1} различных номеров точек $1, 2, \dots, n^{N-1}$; $(n^{N-2} - 1)$ таблиц, каждый из столбцов которых состоит из n наборов по n^{N-2} различных номеров точек соответственно $1, 2, \dots, n^{N-2}; n^{N-2} + 1, n^{N-2} + 2, \dots, 2n^{N-2}; \dots; n^{N-1} - n^{N-2} + 1, n^{N-1} - n^{N-2} + 2, \dots, n^{N-1}$ и т. д., наконец $(n-1)$ таблиц, каждый из столбцов которых состоит из n^{N-1-i} наборов по n различных номеров точек соответственно $1, 2, \dots, n, n^2 + 1, \dots, n^2 + n, \dots, n^{N-1} - n^2 + 1, \dots, n^{N-1} - n^2 + n; \dots; n^2 - n + 1, \dots, n^2, 2n^2 - n + 1, \dots, 2n^2, \dots, n^{N-1} - n + 1, \dots, n^{N-1}$. Далее доказательство пойдет для каждого типа таблиц отдельно.

1. Возьмем $(n^{N-1}-1)$ таблиц, каждый столбец которых состоит из n^{N-1} различных точек с номерами $1, 2, \dots, n^{N-1}$. Применим к ним преобразование, обратное (1) для $j = N$, присоединив затем к вновь полученным таблицам исходную таблицу (2). Тогда, основываясь на взаимной ортогональности и редуцированности N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$, представленных рассматриваемыми таблицами, мы получим $(n^{N-1} \times n^{N-1})$ элементов прошивок, удовлетворяющих условиям (Б.1).

2. Рассмотрим теперь совокупность из $(n^{N-2}-1)$ N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$, представленных каждый таблицами размера $n^{N-1} \times n$, состоящих из n упорядоченных подтаблиц размера $n^{N-2} \times n$. Каждая такая подтаблица может быть получена из полного множества взаимно-ортогональных редуцированных $(N-1)$ -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$ или, что то же самое; из полного множества взаимно-ортогональных редуцированных латинских прямоугольников размера $n^{N-2} \times n$.

1)

	1	2	...	n
2		3	...	$n+1$
.
.
.
n^{N-2}		1	...	$n-1$
			.	
			.	
			.	
$n^{N-2}-1$.
1	n^{N-2}		...	$[n+(n^{N-2}-2)(n-1)] \bmod n^{N-2}$
2	1		...	$[n+(n^{N-2}-2)(n-1)+1] \bmod n^{N-2}$
.	.		.	.
.	.		.	.
.	.		.	.
n^{N-2}	$n^{N-2}-1$...	$[n+(n^{N-2}-2)(n-1)-1] \bmod n^{N-2}$

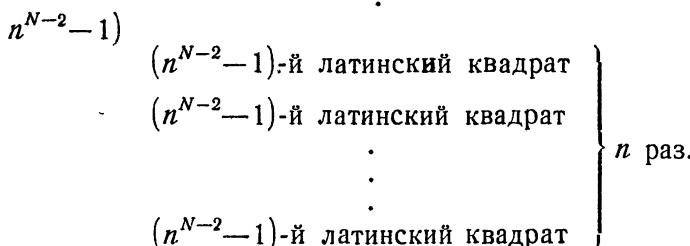
Составим из них $(n^{N-2}-1)$ таблиц второго шага по схеме.

1)

1-й латинский квадрат	{
1-й латинский квадрат	
.	
.	
1-й латинский квадрат	

n раз ... ;

(32)



А затем к каждой из полученных таблиц применим обратное преобразование (1) для $j = N - 1, N$ так, как показано на примере подтаблицы 1):

1	2	...	$n+1$	n подтаблиц.	(33)
2	3	...	$n+2$		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
n^{N-2}	1	...	$n-1$		
1	2	...	$n+1$		
2	3	...	$n+2$		
.	.	.	.		
n^{N-2}	1	...	$n-1$		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
1	2	...	$n+1$		
2	3	...	$n+2$		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
n^{N-2}	1	...	$n-1$		

Расписываем эту таблицу в строчку по каждой из n подтаблиц и применяем к ней преобразование T^{N-1} , а затем T^N

$$\begin{array}{cccc} \underline{\underline{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n^{N-2}}} & \underline{\underline{2 \ 3 \ 4 \ \dots \ 1}} & \dots & \underline{\underline{n+1 \ n+2 \ \dots \ n-1}} \\ +0 \cdot n^{N-2} & +1 \cdot n^{N-2} & & + (n-1) n^{N-2} \\ \hline & +0 \cdot n^{N-1} & & \end{array} \quad (34)$$

$$\begin{array}{cccc} \underline{\underline{1 \ 2 \ \dots \ n^{N-2}}} & \dots & \underline{\underline{n+1 \ \dots \ n-1}} & \dots & \underline{\underline{1 \ \dots \ n^{N-2}}} & \underline{\underline{n+1 \ \dots \ 1}} \\ +0 \cdot n^{N-2} & & (n-1) n^{N-2} & & 0 \cdot n^{N-2} + (n-1) n^{N-2} & \\ \hline & +1 \cdot n^{N-1} & & & & +(n-1) n^{N-1} \end{array}$$

Далее, если обозначить полученные после преобразования номера точек через a_i , где $1 \leq i \leq n^N$, то искомую таблицу можно записать так:

a_1	$a_{n^{N-2}+1}$	\dots	$a_{n^{N-1}-n^{N-2}+1}$
a_2	$a_{n^{N-2}+2}$	\dots	$a_{n^{N-1}-n^{N-2}+2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_n^{N-2}	$a_{2n^{N-2}}$	\dots	a_n^{N-1}
$a_n^{N-2}+1$	$a_{n^{N-1}+n^{N-2}+1}$	\dots	$a_{2n^{N-1}-n^{N-2}+1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_n^{N-1}+n^{N-2}$	$a_{n^{N-1}+2n^{N-2}}$	\dots	$a_{2n^{N-1}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_n^{N-n^{N-1}+1}$	$a_{n^{N-n^{N-1}+n^{N-2}+1}}$	\dots	$a_{n^{N-n^{N-2}+1}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$a_n^{N-n^{N-1}+n^{N-2}}$	$a_{n^{N-n^{N-1}+2n^{N-2}}}$	\dots	a_n^N

Тогда, присоединяя к полученным таблицам исходную таблицу (9), мы получим в строках этих таблиц еще $(n^{N-2} \times n^{N-1})$ элементов прошивок, удовлетворяющих условиям (Б.1). На $(N-1)$ -м шаге мы получим указанным способом $(n \times n^{N-1})$ элементов прошивок, удовлетворяющих условиям (Б.1). Наконец, если к полученному множеству прошивок добавить еще элементы прошивок, являющиеся строками транспонированной исходной таблицы $(N-1)$ -го шага, то мы получим полное максимальное множество $\{M\}_N$ с размерностью

$$\rho_{\max} \{M\}_N = n^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} n_i = n^{2N-1} \sum_{i=1}^N n^{-i}. \quad (36)$$

Этим теорема доказана.

Замечания. 1. Таблицы, полученные из латинских квадратов на r -м шаге, где $1 \leq r \leq N$, осуществляют полный перебор любой точки с номером α в сочетании из n точек с точкой с номером β при условии: 1) $\alpha \neq \beta$, 2) α и β меняются независимо друг от друга соответственно в паре наборов из множества, состоящего из n^r наборов по n^{N-r} точек в каждом.

Таким образом, в полученных таблицах полностью выполняются особенности способа «кручения».

2. Теоремы 2 и 3 дают необходимое и достаточное условие для построения полного множества взаимно-ортогональных N -мерных латинских квадратов порядка $\{n\}$ по $\{M\}_N$ или наоборот при простом n и $N \geq 2$.

В заключение рассмотрим пример построения по полному максимальному множеству $\{M\}_4$ полного множества четырехмерных взаимно-ортогональных латинских гиперквадратов порядка $n = 2$ и наоборот

по полному множеству четырехмерных взаимно-ортогональных латинских квадратов порядка 2 полного и максимального множества $\{M\}_4$.

Пример. Для $n = 2$ и $N = 4$. Таблицы, полученные способом «кручения» и составляющие полное и максимальное множество прошивок $\{M\}_4$:

1 шаг

1	9	1	10	1	11	1	12	1	13	1	14	1	15	1	16
2	10	2	11	2	12	2	13	2	14	2	15	2	16	2	9
3	11	3	12	3	13	3	14	3	15	3	16	3	9	3	10
4	12	4	13	4	14	4	15	4	16	4	9	4	10	4	11
5	13	5	14	5	15	5	16	5	9	5	10	5	11	5	12
6	14	6	15	6	16	6	9	6	10	6	11	6	12	6	13
7	15	7	16	7	9	7	10	7	11	7	12	7	13	7	14
8	16	8	9	8	10	8	11	8	12	8	13	8	14	8	15

2 шаг

1	5	1	6	1	7	1	8
2	6	2	7	2	8	2	5
3	7	3	8	3	5	3	6
4	8	4	5	4	6	4	7
9	13	9	14	9	15	9	16
10	14	10	15	10	16	10	13
11	15	11	16	11	13	11	14
12	16	12	13	12	14	12	15

3 шаг

1	3	1	4
2	4	2	3
5	7	5	8
6	8	6	7;
9	11	9	12
10	12	10	11
13	15	13	16
14	16	14	15

4 шаг

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16

Полное множество взаимно-ортогональных 4-мерных латинских квадратов порядка 2, полученных из $\{M\}_4$:

1)

1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8
2	3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2	1
3	4	3	5	3	6	3	7	3	8	3	1	3	2
4	5	4	6	4	7	4	8	4	1	4	2	4	3
5	6	5	7	5	8	5	1	5	2	5	3	5	4
6	7	6	8	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5
7	8	7	1	7	2	7	3	7	4	7	5	7	6
8	1	8	2	8	3	8	4	8	5	8	6	8	7

2)

1	5	1	5	1	5
2	6	2	6	2	6
3	7	3	7	3	7
4	8	4	8	4	8
2	6	3	7	4	8
3	7	4	8	1	5
4	8	1	5	2	6
1	5	2	6	3	7

3)

1 3

2 4

2 4

1 3 .

5 7

6 8

6 8

5 7

Построим полное и максимальное множество $\{M\}_4$, из полного множества взаимно-ортогональных 4-мерных латинских квадратов порядка 2.

1. Применяя преобразование T^4 к каждому латинскому квадрату, полученному выше в пункте 1, имеем

Затем к полученным таблицам присоединяют исходную таблицу

1	9
2	10
3	11
4	12
5	13
6	14
7	15
8	16

2. Применяем преобразование T^3 , а затем T^4 к каждому следующему латинскому квадрату

1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & \underbrace{1 \ 2 \ 3 \ 4}_{+0.4} & \underbrace{2 \ 3 \ 4 \ 1}_{+1.4} & \underbrace{1 \ 2 \ 3 \ 4}_{+0.4} & \underbrace{2 \ 3 \ 4 \ 1}_{+1.4} & \rightarrow 1 \ 7 \\
 2 & 3 \longrightarrow & & & & & \rightarrow 2 \ 8 \\
 3 & 4 & & & & & .3 \ 5 \\
 4 & 1 & & & & & 4 \ 6 \\
 \\
 1 & 2 & +0.8 & & +1.8 & & 9 \ 15 \\
 2 & 3 & & & & & 10 \ 16 \\
 3 & 4 & & & & & 11 \ 13 \\
 4 & 1 & & & & & 12 \ 14
 \end{array}$$

2)

1	3				1	7
2	4	→	<u>1234</u>	<u>3412</u>	<u>1234</u>	<u>3412</u>
3	1		+0.4	+1.4	+0.4	+1.4
4	2					
1	3		+0.8		+1.8	
2	4					
3	1					
4	2					

3)

1	4						1	8
2	1	<u>1234</u>	<u>4123</u>	<u>1234</u>	<u>4123</u>		2	5
3	2	→ +0·4	+1·4	+ 0·4	+1·4	→	3	6
4	3	/	<u>+0·4</u>	<u>+1·4</u>	<u>+0·4</u>		4	7
1	4		+0·8		+1·8		9	16
2	1						10	13
3	2						11	14
4	3						12	15

Присоединяем к полученным таблицам исходную таблицу 2-го шага:

1	5
2	6
3	7
4	8
9	13
10	14
11	15
12	16

3. Применяем последовательность преобразований T^2 , T^3 , T^4 к следующему латинскому квадрату:

1	2	<u>1 2</u>	<u>2 1</u>	1	4						
2	1	+0·2	+1·2	+0·2	+1·2	+0·2	+1·2	+0·2	+0·2	2	3
1	2	→ +0·4		+1·4		+0·4		+1·4	→ 5	8	
2	1		+0·8			+1·8				6	7.
1	2									9	12
2	1									10	11
1	2									13	16
2	1									14	15

Присоединяем к полученной таблице исходную таблицу 3-го шага:

1	3
2	4
5	7
6	8
9	11
10	12
13	15
14	16

И, наконец, ко всем полученным выше с помощью преобразования T^j ($j = 2, 3, 4$) таблицам присоединяется таблицу, являющуюся транспортированной исходной таблицей 3-го шага:

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16

Ясно, что полученные таблицы образуют полное и максимальное множество $\{M\}_4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 11 (1967)
2. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 1020 (1966).
3. H. B. Mann, Ann. Math. Stat., 14, 401 (1943).
4. H. B. Mann, Analysis and Design of Experiments, D. P., № 4 (1949).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 января 1967 г.

SOME ASPECTS OF CONNECTION BETWEEN THE THEORY OF STORAGE WITH A MULTIPLE COINCIDENCE OF SIGNALS THE THEORY OF LATIN HYPERSQUARES. II

H. Y. Eyngorin, T. N. Eyngorina

The article presents a consideration of a connection between the theory of storage and the theory of transpositions with restricted positions described by a staircase scheme. A full set of mutually-orthogonal Latin hypersquares is found. An example for $n=2$ and $N=4$ is given.

УДК 681.14

К ВОПРОСУ О НАИБОЛЬШЕМ ИЗБИРАЮЩЕМ ОТНОШЕНИИ В ЗАПОМИНАЮЩЕЙ ИЛИ ДЕШИФРУЮЩЕЙ МАТРИЦЕ

М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина

Рассмотрен вопрос о получении наибольшего из всех возможных избирающего отношения [1] в ферритовой матрице порядка n^N для n , являющегося степенью простого числа, на основе нахождения размерности некоторого полного максимального множества $\{M\}_N = \rho_{\max}\{M\}_N$.

Между N -мерными матрицами, состоящими из n^N магнитных сердечников или других аналогичных элементов, работающих по принципу К-кратного совпадения, и множествами $\{M^*\}_N$ точек a_1, i_2, \dots, i_N в N -мерном пространстве можно установить взаимно-однозначное соответствие [2]. Точно так же между элементами всевозможных прошивок этих N -мерных матриц и элементами множеств $\{M\}_N$, состоящими из n точек множества $\{M^*\}_N$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. При этом условия, которым удовлетворяет каждый элемент всякой прошивки ферритовой матрицы:

- 1) ни один сердечник не прошивается двумя элементами из одной и той же прошивки;
- 2) ни одна пара элементов разных прошивок не пересекается более, чем в одном сердечнике, переходят в условие несовпадения более одного номера точки в любой паре элементов множества $\{M\}_N$.

Если I^0 — значение тока, необходимого для перевода сердечника с прямоугольной петлей гистерезиса из одного состояния в другое, а K — число прошивок матрицы, то, благодаря взаимно-однозначному соответствуанию между матрицами порядка n^N и множествами $\{M^*\}_N$, элементами прошивок матрицы и множествами $\{M\}_N$ задача о доведении тока, проходящего через каждый элемент прошивки, $i = I^0/K$ до i_{\min} при заданных n и N , т. е. задача о выборе наибольшего из всех возможных избирающего отношения, сводится к нахождению $\rho_{\max}\{M\}_N$ — размерности некоторого полного и максимального множества $\{M\}_N$. В работе [2] эта задача решена для случая, когда n является простым числом. Нам предстоит рассмотреть случай, когда n является степенью простого числа.

Теорема 1. Для любого множества $\{M^*\}_2$, состоящего из n^2 точек и для n , являющегося степенью простого числа, существует с точностью до нумерации его точек единственное полное максимальное множество $\{M\}_2$ с размерностью $\rho_{\max}\{M\}_2 = n(n+1)$.

Доказательство. Пусть $n = k^j$, где k — любое простое число, $n \geq 3$ и $j = 1, 2, \dots$. Известно [3], что между множеством таблиц порядка $n \times n$, кроме исходной и транспонированной исходной, которые используются для получения полного и максимального множества $\{M\}_2$, и полным множеством взаимно-ортогональных редуцированных латинских квадратов порядка $\{n\}_2$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, необходимо найти полное множество редуцированных

взаимно-ортогональных латинских квадратов порядка $\{n\}_2$, где n — степень простого числа, применить к ним преобразование T работы [3], переводящее эти латинские квадраты в таблицы для получения множества $\{M\}_2$ к этим таблицам добавить исходную и транспонированную исходную таблицы множества $\{M\}_2$. Тогда мы получим все множество M таблиц, необходимое для составления полного и максимального множества $\{M\}_2$. Оно будет единственным для выбранного способа нумерации точек множества $\{M^*\}_2$. Если r — число редуцированных взаимно-ортогональных латинских квадратов, составляющих полное множество, то множество M состоит из $(r+2)$ таблиц, в каждой из которых содержится n элементов искомого множества $\{M\}_2$. Поэтому

$$\rho_{\max}\{M\}_2 = n(r + 2).$$

Найдем r . Из работы [4], известно, что для построения множества редуцированных взаимно-ортогональных двумерных латинских квадратов порядка n , где n является степенью простого числа, надо построить абелеву группу из j элементов A_1, \dots, A_j , удовлетворяющих следующим условиям:

$$A_1^k = A_2^k = \dots = A_j^k = 1,$$

$$A_i A_l = A_l A_i \quad (i, l = 1, 2, \dots, j).$$

Затем надо определить такое автоморфное отображение S , которое ни один элемент группы, кроме 1, не переводит сам в себя. Доказывается, что это сделать можно, если n является степенью простого числа. Тогда из таблицы умножения для абелевой группы можно получить полное множество из $(n-1)$ взаимно-ортогональных редуцированных латинских квадратов. Таким образом, $r = n - 1$ и $\rho_{\max}\{M\}_2 = n(n+1)$. Этим теорема доказана.

Теорема 2. Для любого множества $\{M^*\}_N$, состоящего из n^N точек, и для n , являющегося степенью простого числа, существует с точностью до нумерации точек множества $\{M^*\}_N$ единственное полное максимальное множество $\{M\}_N$ с размерностью

$$\rho_{\max}\{M\}_N = n^{2N-1} \sum_{i=1}^N n^{-i}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы заметим следующее. Рассмотрим латинские прямоугольники размерности $n_1 \times n$, где $n = k^j$ и $n_1 = k^{j_\alpha}$, k — простое число, $j = 1, 2, \dots, \alpha = 1, 2, \dots, N-1$, N — размерность заданного пространства. Для получения полного множества редуцированных взаимно-ортогональных латинских прямоугольников вида $n_1 \times n$ рассмотрим множество взаимно-ортогональных редуцированных двумерных латинских квадратов порядка $\{n_1\}$ полное множество которых состоит из $(n_1 - 1)$ квадратов. Мы запишем эти квадраты таким образом, чтобы первый столбец был расположен в естественном порядке. А затем в каждом из $(k^{j_\alpha} - 1)$ квадратов уберем последние $(k^{j_\alpha} - k^j)$ столбцов. Тогда получится полное множество из $(k^{j_\alpha} - 1)$ редуцированных взаимно-ортогональных латинских прямоугольников размерности $k^{j_\alpha} \times k^j$.

Далее, принимая во внимание все сказанное в работе [5] об N -мерном случае и применяя для построения таблиц, необходимых для получения полного и максимального множества $\{M\}_N$, указанный выше прием построения полного множества редуцированных взаимно-ортогональных латинских прямоугольников размерности $k^{j_\alpha} \times k^j$ мы имеем право утверждать, что

$$\rho_{\max}\{M\}_N = n^\alpha + n^\alpha + (n^{\alpha-1} n^{\alpha-1}) n + \dots + n n^{\alpha-1} = n^{2\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha} n^{-i}.$$

Таким образом, если $\alpha = 1, 2, \dots, N-1$, где $j = 1, 2, \dots$, то

$$\rho_{\max}\{M\}_N = n^{2N-1} \sum_{i=1}^N n^{-i} = k^{j(2N-1)} \sum_{i=1}^N k^{-ji},$$

где k — любое простое число. Таким образом, теорема доказана.

В заключение заметим, что этот же способ доказательства может быть применен и в случае неравных n_i , т. е. $n_i = k^{\alpha_i}$. Тогда

$$\rho_{\max}\{M\}_N = \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^{i-1} n_j \prod_{s=i+1}^N n_s^2.$$

Доказательство этого результата для случая простых n_i дано в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. К. Ричардс, Элементы и схемы цифровых вычислительных машин, ИЛ, М., 1961.
2. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 1020 (1966).
3. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 11, (1967).
4. Н. В. Манн, Ann. Math. Stat., 14, 40 (1943).
5. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 11, (1967).
6. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 7, 1015 (1967).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 января 1967 г.

TO THE DERIVATION OF A HIGHEST SELECTIVE RATIO IN A FERROMAGNETIC MATRIX OF n^N —THE ORDER

M. Ya. Eyngorin, T. N. Eyngorina

The derivation of a highest selective ratio [1] in a ferromagnetic matrix of n^N the order is considered in this paper for n being a degree of a prime number. The problem is reduced to determination of dimensionality for some full maximal set $\{M\}_N - \rho_{\max}\{M\}_N$.

УДК 621.372.061

МИНИМАЛЬНЫЕ КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ, МЕТОД ИХ СИНТЕЗА И ОЦЕНКИ ЧИСЛА КОНТАКТОВ

B. N. Гребеников

Предлагается метод синтеза двухполюсных и многополюсных минимальных контактных схем для функций любого типа от 4, 5, 6 переменных. В основу метода положен процесс приведения заданных функций к виду, при котором они являются реализуемыи в бесповторной схеме. Оптимальный способ такого преобразования определяется необходимым и достаточным критерием бесповторности контактных схем.

Контактные схемы, проводимости между полюсами которых описываются одним и тем же набором булевых функций, принадлежат к семейству функционально эквивалентных. Схемы из этого семейства, содержащие наименьшее количество контактов, называются минимальными. В настоящее время неизвестны универсальные методы синтеза минимальных схем для любых заданных функций некоторого числа переменных.

Число разных типов функций четырех переменных относительно невелико (402). Для них различными методами были найдены минимальные схемы, составившие таблицу [5, 6]. Для функций большего числа переменных табличный метод становится слишком громоздким. Он не может быть применен и для функций четырех переменных, если они описывают многополюсные схемы.

В настоящей статье предлагается метод синтеза двухполюсных и многополюсных минимальных схем для функций любого типа от 4, 5, 6 переменных при числе полюсов в многополюсных схемах того же порядка, что и число переменных. Этот метод может быть применен и к функциям большего числа переменных, если они содержат относительно малое количество членов в заданных дизъюнктивных нормальных формах (ДНФ) (функции, используемые в технических приложениях, относятся именно к этому виду). Если не ставить задачу определения минимальных схем, то метод упрощается и дает достаточно экономичные схемы.

1. СИНТЕЗ ДВУХПОЛЮСНЫХ СХЕМ

Рассмотрим множество всех ДНФ булевой функции A . Схему, реализующую некоторую ДНФ и имеющую минимально возможное число контактов, назовем квазиминимальной.

Излагаемый ниже метод синтеза контактных схем позволяет осуществить учет всех ДНФ функции A путем введения коэффициентов, определяющих присутствие или отсутствие в A некоторых членов, и находить непосредственно минимальные схемы. Однако в настоящей статье ограничимся изложением более простого метода синтеза квазиминимальных схем, а минимальные схемы будем определять, варьируя ДНФ. Для функций 4, 5, 6-переменных такая вариация может быть осуществлена с помощью ЭВМ.

Допустим, что $a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots$ — булевые переменные, $t, u, v, w, x, y, z, u_1, u_2 \dots$ — буквы типа 1, $a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots$ или их произведения, $A = \bigvee_{i=1}^m u_i$ — булева функция в ДНФ (q и \bar{q} будем считать разными переменными, между которыми существует связь $q = (\bar{q})$). Если u содержит все буквы, встречающиеся в u_1, u_2, \dots, u_h , нечетное число раз, то полагаем, что $u = P(u_1, u_2, \dots, u_h)$. Если u содержит все буквы, каждая из которых встречается в каждом из u_1, u_2, \dots, u_h , то полагаем, что $u = Q(u_1, u_2, \dots, u_h)$. Если $u = u_1$ при $u_1 = u_2$ и $u = 0$ при $u_1 \neq u_2$, то будем считать, что $u = R(u_1, u_2)$.

Назовем функцию A бесповторно (или квазибесповторно) реализуемой, если существует реализующая ее бесповторная [1] (или квазибесповторная [2, 3]) схема.

Триада членов функции A вида

$$u_x = tuxy, \quad u_\lambda = tuxz, \quad u_\mu = twyz \quad (1)$$

(здесь $t = t, 1; u \neq 1; v \neq 1; w \neq 1; x \neq 1; y \neq 1; z \neq 1$, а каждая пара из t, u, v, w, x, y, z не содержит общих букв) может быть реализована в бесповторной (или квазибесповторной) схеме в том и только в том случае, если имеют место определенные соотношения между величинами $tuxy, tuxz, twyz, t, u, v, w, x, y, z, A$. Рассмотрим некоторые из них (с целью упрощения опускаем t , способ реализации которого очевиден).

Если каждая из величин u, v, w, x, y, z содержит по одной букве, то существует только одна бесповторная реализация триады (рис. 1a), которая имеет место, если в функции A содержатся члены вида xuz, uxv, uwz, uvw .

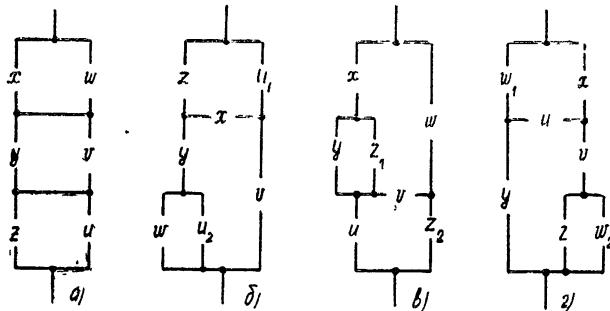


Рис. 1.

Если одна из величин u, v, w содержит две буквы, а все остальные из u, v, w, x, y, z по одной, то существует несколько бесповторных (или квазибесповторных) реализаций (1). Одна из них показана на рис. 1б. Эта реализация имеет место, если функция A содержит члены u_1v, u_1wxu, u_2yz (в квазибесповторных схемах некоторые из этих членов (или все) могут равняться нулю). Аналогичные реализации могут быть получены из схемы рис. 1б перестановкой букв внутри групп u, v, w и x, y, z .

Существуют и другие реализации (1), имеющие место в том случае, когда некоторые из u, v, w, x, y, z (или все) содержат по несколько букв.

Все бесповторные (и квазибесповторные) реализации триады (1), составленной из n переменных a, b, c, \dots и их инверсий, назовем списком

реализаций № n . Если имеется несколько триад вида (1), каждая из которых в отдельности реализуема, то некоторые из них могут не допускать совместной реализации в одной схеме.

Совокупность триад вида (1), составленных из n переменных a, b, c, \dots и их инверсий, назовем бесповторно (или квазибесповторно) нереализуемой, если она состоит из реализуемых триад, не допускающих совместной реализации, и триад, не удовлетворяющих списку реализаций № n . Каждую триаду, входящую в эту совокупность, будем называть нереализуемой триадой I типа.

Теорема 1. Для того, чтобы функция A была бесповторно (или квазибесповторно) реализуемой, необходимо и достаточно, чтобы в A отсутствовали бесповторно (или квазибесповторно) нереализуемые триады I типа и чтобы выполнялись соотношения

$$P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma) \leq A \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m; \quad \alpha < \beta < \gamma), \quad (2)$$

в которых любые переменные вида q и \bar{q} считаются независимыми друг от друга.

Триаду членов вида

$$u_\alpha, \quad u_\beta, \quad u_\gamma, \quad (3)$$

не удовлетворяющую соотношениям (2), назовем бесповторно (или квазибесповторно) нереализуемой триадой II типа.

Допустим, что имеется некоторая схема, реализующая ДНФ A (произвольного вида, в том числе квазиминимальная). Если контакты типа q и \bar{q} считать независимыми друг от друга, то из этой схемы может быть построена бесповторная схема путем введения обозначений t_1, t_2, \dots, t_k для всех одинаковых контактов типа t (для всех t). Назовем ее корректированной схемой. Функцию A^* , которую она реализует, назовем корректированной функцией A . В любой корректированной функции существуют, очевидно, только такие члены, которые могут быть получены из членов A заменой буквы t на $t_1, t_2, \dots, t_k, t_1t_2, t_1t_3, \dots, t_1t_2t_3, \dots$ или содержащие одновременно буквы q_α и q_β .

Установим связь, существующую между A и A^* . Функция A^* переходит в A после замены каждой буквы t_1, t_2, \dots, t_k на t (для всех t) и после устраниния членов, в которых оказались одновременно буквы q и \bar{q} . Этот процесс назовем склеиванием переменных t_1, t_2, \dots, t_k . Он очень прост и протекает всегда однозначно. Функция A переходит в A^* после замены буквы t (для всех t) в каждом члене, содержащем эту букву, одним из выражений $t_1, t_2, \dots, t_k, t_1t_2, t_1t_3, \dots, t_1t_2t_3, \dots$ и после добавления в A членов, содержащих буквы вида q_α и q_β (в разных членах при этом могут быть использованы различные выражения для замены и из каждого члена A может возникнуть несколько членов A^*). Назовем этот процесс (обратный склеиванию) размножением переменных типа t . Число k будем называть кратностью размножения переменной t . Если $k = 1$, то будем считать, что соответствующая переменная t не размножается. В этом случае будем опускать ее индекс. Размножение переменных в A протекает неоднозначно, и в результате может возникнуть функция A^* , которая не соответствует бесповторной схеме. Однако, как нетрудно видеть, всегда существует способ размножения, который приводит к построению функции A^* , описывающей корректированную квазиминимальную схему.

Процесс размножения переменных и теорема 1 могут быть положены в основу простого метода синтеза квазиминимальных схем. Этот метод состоит в таком наиболее экономичном размножении переменных в функции A , при котором исчезают нереализуемые триады и получается бесповторно реализуемая функция A^* . После этого по функции

A^* строится бесповторная схема, из которой легко получается заменой контактов t_1, t_2, \dots, t_k на t (для всех t) квазиминимальная схема.

Рассмотрим произвольный способ размножения переменных в функции A . В результате размножения некоторые нереализуемые триады A могут сохраняться, некоторые могут исчезнуть и некоторые новые могут появиться.

Для получения бесповторно реализуемой функции A^* мы должны выбрать такой способ размножения, при котором все нереализуемые триады A исчезают и не появляется ни одной новой. Метод синтеза, в котором путем однократного размножения переменных выполняются эти условия, назовем параллельным.

Может быть использован и другой метод, в котором возникновение новых нереализуемых триад не предотвращается. В этом случае синтез должен состоять из нескольких этапов, на каждом из которых устраняются триады, возникшие на предыдущем этапе (на первом этапе устраняются нереализуемые триады A). Назовем такой метод последовательным.

При $n = 4, 5, 6$ новые нереализуемые триады возникают относительно редко, и последовательный метод обладает несомненными преимуществами (в большинстве случаев возникает один или два этапа). В настоящей статье ограничимся изложением последовательного метода синтеза.

Допустим, что при синтезе возникает r этапов и на каждом j -м этапе размножаются переменные t_1, t_2, \dots, t_{h_j} . Предположим, что каждая переменная t_i размножается на $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik_{ji}}$ (k_{ji} — кратность размножения t_i).

Для числа контактов в искомой схеме существует следующая рекуррентная оценка:

$$N_r = N_{r-1} + N_r^d = N_{r-1} + \sum_{i=1}^{h_r} (k_{ri} - 1). \quad (4)$$

Здесь N_0 — число типов переменных в функции A (q и \bar{q} считаются разными типами), N_r^d — число контактов, которое добавляется в схему на каждом j -м этапе.

Для минимизации N_r необходимо варьировать способы размножения переменных на каждом этапе. Из (4) вытекают некоторые ограничения, которые существенно сокращают вариацию. Если найдено некоторое значение N_r , и требуется проверить, не может ли существовать еще меньшего N_r , то на любом j -м этапе достаточно рассмотреть такие способы размножения переменных, которые дают

$$N_j^d \leq N_r - N_{j-1}. \quad (5)$$

Если при рассмотрении какого-либо варианта удается снизить N_r , то в дальнейшем следует использовать это новое значение N_r , и число вариантов, которое еще остается рассмотреть, существенно сократится.

Рассмотрим любой j -й этап последовательного метода синтеза. Исходную функцию обозначим через $A^{(j)}$ ($A^{(1)} = A$).

Составим для $A^{(j)}$ список всех триад, удовлетворяющих списку реализаций № n и совместно реализуемых

$$u_\rho, u_\sigma, u_\tau \quad (\rho, \sigma, \tau \in 1, \dots, m). \quad (6)$$

Если имеется несколько вариантов (6), то рассмотрим их все поочередно.

Заметим, что для триад вида (1), возникающих при размножении

переменных в $A^{(j)}$, список реализаций № n расширяется, так как допустимыми оказываются и такие реализации, в которых некоторые члены триады укорачиваются (укачиваться могут только члены, вновь возникшие при размножении переменных). На рис. 1в изображена схема, реализующая триаду uxy, uxz_1z_2, wyz_1z_2 . Эта реализация возможна при условии, что в функции $A^{(j)}$ имеются (или могут быть введены) члены uxz_1, uxz_2, wz_2, uw . На рис. 1г изображена схема, в которой укорачивается член w_1w_2yz .

Построим все возможные реализации совокупности триад (6), и для каждой из них проведем все остальные этапы синтеза в предположении, что данная реализация является подсхемой искомой схемы, а после окончания синтеза сравним полученные схемы и выберем ту, которая содержит наименьшее число контактов. Для $n = 4, 5, 6$ число возможных реализаций незначительно. Поэтому указанное исследование не вызывает особых затруднений.

После того, как выбрана некоторая реализация (6), в функцию $A^{(j)}$ добавляются те члены, которые должны в ней, согласно этой реализации, обязательно присутствовать (и которых нет в $A^{(j)}$).

Составим для $A^{(j)}$ список всех нереализуемых триад II типа:

$$u_\alpha, u_\beta, u_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in 1, \dots, m) \quad (7)$$

и список всех нереализуемых триад I типа

$$u_x, u_\lambda, u_\mu \quad (\lambda, \mu \in 1, \dots, m). \quad (8)$$

Назовем исправлением триады такой способ размножения входящих в нее переменных, после которого она удовлетворяет (2) или не имеет вида (1).

Если имеется некоторая нереализуемая триада II типа $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$, то мы, очевидно, учтем все возможные способы ее исправления, если оценим возможности поглощения величины $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ любыми членами функции $A^{(j)}$ (до или после склейивания размноженных переменных) и возможности приравнивания $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ к нулю.

Сравним $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ с каждым членом u_π функции $A^{(j)}$ и построим набор $p_{\pi 1}, p_{\pi 2}, \dots, p_{\pi f_\pi}$ таких переменных, которые присутствуют в u_π , отсутствуют в $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ и присутствуют в $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ (для некоторых членов u_π такого набора может не существовать). Размножением переменных $p_{\pi 1}, p_{\pi 2}, \dots, p_{\pi f_\pi}$ (если они существуют для u_π) можно, очевидно, добиться того, что они войдут в $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$, и если $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ при этом уже поглощается членом u_π , то (2) удовлетворено, а если $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ поглощается членом u_π только после склейивания размноженных переменных, то в функцию $A^{(j)}$ необходимо добавить новый член $u_\theta = P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$, и после этого (2) будет также удовлетворено.

Если $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma) = q_1q_2 \dots q_f$, то из $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_f$ выберем те переменные, которые присутствуют в триаде $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ (таких переменных может не оказаться). Размножением одной из этих переменных (если они существуют) можно ввести ее в $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$. Добавляя в $A^{(j)}$ новый член $u_\theta = P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$, равный нулю, мы удовлетворяем (2).

Если $P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ содержит переменные q_ϕ и \bar{q}_ϕ и не поглощается членами $A^{(j)}$, то, добавляя в $A^{(j)}$ новый член $u_\theta = P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$, мы удовлетворяем (2) без всякого размножения переменных. Поскольку

этот способ исправления триады протекает без затраты контактов, будем считать, что он всегда осуществляется, когда это возможно, и в дальнейшем к нему не будем возвращаться.

Заметим, что размножение переменных во всех u_0 должно осуществляться путем размножения переменных в членах u_α , u_β , u_γ . Заметим также, что если некоторый набор $p_{\pi 1}, p_{\pi 2}, \dots, p_{\pi f_\pi}$ составляет часть другого, то это означает, что триада может быть исправлена размножением меньшего числа переменных, чем содержится во втором наборе (второй набор содержит лишние переменные). Такое же взаимодействие существует между переменными q_ω и наборами $p_{\pi 1}, p_{\pi 2}, \dots, p_{\pi f_\pi}$. Размножение лишних переменных совершенно бесполезно для j -го этапа, но иногда может привести к устраниению некоторых нереализуемых триад на последующих этапах. Поэтому будем устранять наборы, содержащие лишние переменные, при минимизации оценки N_j^d и будем рассматривать все наборы при вариации способов размножения переменных j -го этапа с целью минимизации $N_{j+\epsilon}^d$ последующих этапов.

Для отображения всех вариантов исправления триады, при которых лишние переменные не размножаются, построим функцию $E_{\alpha\beta\gamma}$, равную булевой сумме всех произведений вида $p_{\pi 1} p_{\pi 2} \dots p_{\pi f_\pi}$ и переменных $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_f$. Для вычисления $E_{\alpha\beta\gamma}$ можно использовать следующие формулы:

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \bigvee_{i=1}^m R(f_i, Q(u_\alpha, f_i) Q(u_\beta, f_i) Q(u_\gamma, f_i)),$$

$$f_i = Q(u_i, P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)) \quad (9)$$

для бесповторных схем и

$$E_{\alpha\beta\gamma} = E'_{\alpha\beta\gamma} \vee \bigvee_{l=\alpha, \beta, \gamma} \left[\prod_{j=1}^{g_l} Q(v_{lj}, P(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)) \right], \quad \bigvee_{j=1}^{g_l} v_{lj} = \bar{u}_l \quad (10)$$

для квазибесповторных схем (здесь переменные вида q и \bar{q} считаются независимыми друг от друга, а $E'_{\alpha\beta\gamma}$ равно $E_{\alpha\beta\gamma}$ (из 9)).

Если имеется некоторая нереализуемая триада I типа, то мы, очевидно, учтем все возможные способы ее исправления, если оценим возможности ликвидации общих букв в каждой паре членов.

Построим набор переменных s_1, s_2, \dots, s_g , общих в какой-либо паре членов триады. Размножением этих переменных можно, очевидно, добиться того, что в членах исчезнут общие буквы. Для отображения всех вариантов исправления триады построим функцию $D_{x\lambda\mu}$, равную булевой сумме всех произведений вида $s_1 s_2 \dots s_g$. Для вычисления $D_{x\lambda\mu}$ можно использовать формулу

$$D_{x\lambda\mu} = x \vee y \vee z. \quad (11)$$

Здесь x, y, z имеют то же значение, что и в (1).

Из изложенного выше следует, что для исправления любой триады достаточно взять произвольный член из $E_{\alpha\beta\gamma}$ или из $D_{x\lambda\mu}$ и размножить входящие в него переменные. Рассмотренные выше допустимые способы размножения могут быть сведены к следующим простым правилам.

а) Если в некоторой нереализуемой триаде II типа размножается (с целью ее исправления) переменная t_i , то выражения, которыми заменяются буквы t_i в двух членах триады, должны быть различными, а в функцию $A^{(i)}$ необходимо добавить новый член $u_0 = P(u_a, u_b, u_t)$, если он не поглощается каким-либо членом $A^{(i)}$.

б) Если в некоторой нереализуемой триаде I типа размножается (с целью ее исправления) переменная t_i , то выражения, которыми заменяются буквы t_i в двух членах триады, не должны содержать общих букв вида $t_{i\omega}$.

Рассмотрим способы исправления совокупности триад вида (7) и (8). Для того, чтобы исправить (7) и (8), необходимо выбрать из каждой функции $E_{\alpha\beta\gamma} (\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \in 1, \dots, m)$ и $D_{\lambda\mu\nu} (\lambda, \mu, \nu \in 1, \dots, m)$ по одному члену и размножить входящие в них переменные таким образом, чтобы все триады были исправлены. Для облегчения выбора этих переменных построим булеву функцию.

$$F = \prod_{\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \in 1, \dots, m} E_{\alpha\beta\gamma} \prod_{\lambda, \mu, \nu \in 1, \dots, m} D_{\lambda\mu\nu}. \quad (12)$$

Здесь переменные q и \bar{q} считаются независимыми друг от друга. Каждый член F вида $z_p = t_1 t_2 \dots t_n$ определяет искомую совокупность переменных. Наиболее перспективными для минимизации N_j^d являются, конечно, самые короткие члены F . В каждой функции $E_{\alpha\beta\gamma}$ или $D_{\lambda\mu\nu}$ может быть несколько членов, состоящих только из переменных, входящих в z_p . Назовем их главными. Для исправления триады при выбранном z_p можно размножить переменные любого главного члена y . Назовем y осевым членом.

Заметим, что разные триады могут иметь общие члены. Поэтому размножение переменных в этих триадах может натолкнуться на противоречия. Для определения непротиворечивого способа размножения переменных в $A^{(i)}$, пригодного для исправления всех триад, будем строить совокупность неориентированных графов $G_{t_1}, G_{t_2}, \dots, G_{t_n}$ (по одному для каждой размножаемой переменной t_i). Вершины графа G_{t_i} будем сопоставлять членам $A^{(i)}$, содержащим переменную t_i . Пару вершин будем соединять пунктирной линией, если соответствующие ей члены входят в нереализуемую триаду II типа, осевой член которой содержит t_i . Будем соединять пару вершин сплошной линией, если соответствующие ей члены входят в нереализуемую триаду I типа, осевой член которой содержит t_i . Около каждой вершины будем ставить выражение, которым заменяется t_i в соответствующем члене. Эти выражения будем выбирать таким образом, чтобы по отношению к каждой паре вершин выполнялось правило «а», если она соединена пунктирной линией, и правило «б», если она соединена сплошной линией. Указанная расстановка всегда возможна, так как существует способ, который можно применить всегда, такой, при котором у всех вершин стоят разные буквы t_{i1}, t_{i2}, \dots .

Для определения наивыгоднейшего способа размножения переменных на j -м этапе необходимо выбрать такой член z_p , такую совокупность осевых членов y и провести такую расстановку выражений в вершинах графов $G_{t_1}, G_{t_2}, \dots, G_{t_n}$, чтобы кратность размножения каждой переменной и, следовательно, N_j^d были наименьшими. Для $n = 4, 5, 6$ эта задача решается относительно просто.

Заметим, что при осуществлении j -го этапа некоторые триады из (6) могут оказаться исправленными, а триады из (8) могут после размножения переменных удовлетворять списку реализаций № n . В этом случае необходимо рассмотреть j -й этап пов-

торно, сохраняя неизменными те условия, при которых триады исправляются и реализуются, и не применяя для этого никаких дополнительных мер.

Заменяя на j -м этапе переменную t_i в l -м члене $A^{(j)}$ выражением, стоящим у l -й вершины графа G_{t_i} , и осуществляя такую замену для всех возможных комбинаций i и l и для всех этапов, получим функцию

A' , которую назовем исправленной. Добавляя в нее члены u_0 , получим корректированную функцию A^* . Синтез бесповторной схемы по корректированной или исправленной функции может быть осуществлен методом [4]. С целью упрощения вычисления F можно использовать таблицу рис. 2а. Знаками X и O отмечаются нереализуемые триады II и I типов.

В описанном выше методе можно ограничиться рассмотрением первого этапа, отбрасывая решения, в которых возникают нереализуемые триады, вместо того, что-

			$p(u_\alpha u_\beta u_\delta)$			
			$p(u_\alpha u_\beta u_\delta)$			
u_1	X					
u_2		O				
u_m	X	O				
$E_{\alpha\beta\gamma}$						
$D_{2\lambda\mu}$						

			$p(u_\alpha u_\beta u_\delta)$			
			$p(u_\alpha u_\beta u_\delta)$			
A_{12}	u_1	X				
A_{13}	v_1	X	X		O	
A_{23}	$E_{\alpha\beta\delta}$			X		O
A_{23}	$E_{\alpha\beta\delta}$					
A_{23}	$E_{\alpha\beta\delta}$					
A_{23}	$D_{2\lambda\mu}$					
A_{23}	$D_{2\lambda\mu}$					

δ/

Рис. 2.

бы осуществлять для них дальнейшие этапы (это удобно при использовании ЭВМ).

Изложенный метод синтеза может быть упрощен путем устранения несущественных способов вариации параметров. При этом появляется вероятность того, что найденная схема не будет минимальной, но она все же будет достаточно экономичной. Упрощенный метод можно применять при $n \geq 6$.

2. СИНТЕЗ МНОГОПОЛЮСНЫХ СХЕМ

Допустим, что заданы булевые функции $A_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \dots, s; \alpha \leq \beta)$ в ДНФ, описывающие проводимости между полюсами s -полюсной контактной схемы (полагаем, что s того же порядка, что и n). Назовем совокупность функций $A_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \dots, s; \alpha \leq \beta)$ бесповторно (или квазибесповторно) реализуемой, если существует реализующая их бесповторная (или квазибесповторная) s -полюсная схема.

Теорема 2. Для того, чтобы функции $A_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \dots, s; \alpha \leq \beta)$ были бесповторно (или квазибесповторно) реализуемыми, необходимо и достаточно, чтобы каждая функция в отдельности была бесповторно (или квазибесповторно) реализуемой и чтобы для функций $A_{x\lambda} =$

$$= \bigvee_{i=1}^{m_1} u_i, A_{\mu\nu} = \bigvee_{i=1}^{m_2} v_i, A_{x\mu}, A_{x\nu}, A_{\lambda\mu}, A_{\lambda\nu} (x, \lambda, \mu, \nu = 1, \dots, s; x \leq \lambda \leq \mu \leq \nu)$$

выполнялись соотношения

$$P(u_\alpha, v_\beta) \leq A_{x\mu} \quad (\alpha = 1, \dots, m_1; \beta = 1, \dots, m_2; x \neq \mu \neq \lambda = \nu),$$

$$P(u_\alpha, v_\beta) \leq A_{x\mu} A_{\lambda\nu} \bigvee A_{x\nu} A_{\lambda\mu}. \quad (13)$$

$$(\alpha = 1, \dots, m_1; \beta = 1, \dots, m_2; \chi \neq \lambda \neq \mu \neq \nu),$$

в которых любые переменные q и \bar{q} считаются независимыми друг от друга. Теорема 2 позволяет распространить метод синтеза на много-полюсные схемы. При этом вместо рис. 2а используется рис. 2б, а коррекция A_{qr} осуществляется с учетом членов A_{qr} и членов A_{pq} и A_{pr} .

	$\bar{a}b\bar{c}$	$a\bar{b}c$	$\bar{a}bc$	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$ab\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$a\bar{b}c\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}bc\bar{d}\bar{e}$	$ab\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$
1	$a\bar{b}c$	X	X												O
2	$a\bar{c}b$	X	X	X	X										
3	$a\bar{e}b$	X		X		X	X	O							O
4	$c\bar{d}f$	X		X	X	X	O								
5	$d e$			X	X	X									
		c	o	\bar{d}	\bar{d}	\bar{d}	\bar{d}	a							
		1	1	e	d	d	d	f							

a)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
1	$a\bar{b}c$	X	X												O
2	$a\bar{b}d$	X	X	X	X										
3	$a\bar{e}f$	X		X		X	X	O							O
4	$c\bar{d}f$	X		X	X	X	O								
		c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

b)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	X	X										O
2	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	X	X	X	X	O							O
3	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	X	X	X	X	O							O
4	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	X	X	X	X	O							O
		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{d}	\bar{e}	\bar{f}	\bar{g}	\bar{h}	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}	\bar{l}	\bar{m}	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

b)

	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$
1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	O	O										
2	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	O	O										
3	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	O												
4	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	X	O												
		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{d}	\bar{e}	\bar{f}	\bar{g}	\bar{h}	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}	\bar{l}	\bar{m}	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

e)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	O	O										
2	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	O	O										
3	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	O												
4	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	O												
		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{d}	\bar{e}	\bar{f}	\bar{g}	\bar{h}	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}	\bar{l}	\bar{m}	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

e)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	O	O										
2	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	X	O	O										
3	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	O												
4	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	X	O												
		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{d}	\bar{e}	\bar{f}	\bar{g}	\bar{h}	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}	\bar{l}	\bar{m}	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

e)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
1	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g}\bar{s}$	X	O	O	O										
2	$a\bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g}\bar{m}\bar{n}\bar{q}\bar{r}\bar{t}$	X	O	O	O										
3	$\bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{h}\bar{k}\bar{m}\bar{p}\bar{q}\bar{r}\bar{u}$	O		O	O										
4	$\bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{h}\bar{l}\bar{n}\bar{q}\bar{r}\bar{v}\bar{w}$	X	O	O	O										
		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{d}	\bar{e}	\bar{f}	\bar{g}	\bar{h}	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}	\bar{l}	\bar{m}	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

j)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
1	$a\bar{b}$	X	X												
2	$a\bar{c}$	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
3	$a\bar{e}$		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
4	$b\bar{c}\bar{e}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
5	$c\bar{d}$														
6	$c\bar{d}\bar{d}$														
7	$a\bar{d}\bar{e}$														
8	$a\bar{d}\bar{d}$														
9	$a\bar{d}\bar{d}\bar{e}$														
		\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{d}	\bar{e}	\bar{f}	\bar{g}	\bar{h}	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}	\bar{l}	\bar{m}	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

j)

Рис. 3.

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Допустим, что дана монотонная функция $A = abc \vee acf \vee aef \vee cdf \vee de$ и необходимо осуществить синтез схемы. Таблица нереализуемых триад будет иметь вид рис. 3а. Построим произведения переменных, которые отсутствуют в $P(u_1, u_2, u_3) = abe$ и при-
сутствуют в u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . Получим c, cf, f, cdf, d . Устраним отсюда

произведения, содержащие переменные, не встречающиеся в u_1, u_2, u_3 . Получим c, cf, f . Образуем булеву сумму этих произведений $E_{123} = cVf$. Запишем E_{123} в нижнюю часть первого столбца рис. 3а. Аналогично определяем остальные $E_{\alpha\beta\gamma}, D_{134}$, определяем по формуле (11). Функция F имеет вид $F = fVacde$. Из F следует, что A можно корректировать размножением переменной f . Построим граф G_f для f . Расставляя допустимые выражения в вершинах графа, получим (рис. 4а), что кратность размножения f равна двум. Оценка числа контактов в схеме следует из (4) и равна $N_1 = 6 + 1 = 7$. Исправленная функция будет иметь вид $A' = abcVacf_1f_2Vae f_1Vcdf_2Vde$. Корректированная функция A имеет вид $A^* = abcVacf_1f_2Vae f_1Vcdf_2VdeVabef_2Vbcdf_1$. В этой функции отсутствуют нереализуемые триады, следовательно, она бесповторно реализуема, и ей соответствует схема рис. 5а. Совершенно очевидно, что любая вариация не может улучшить оценки (4). Поэтому найденная схема минимальна.

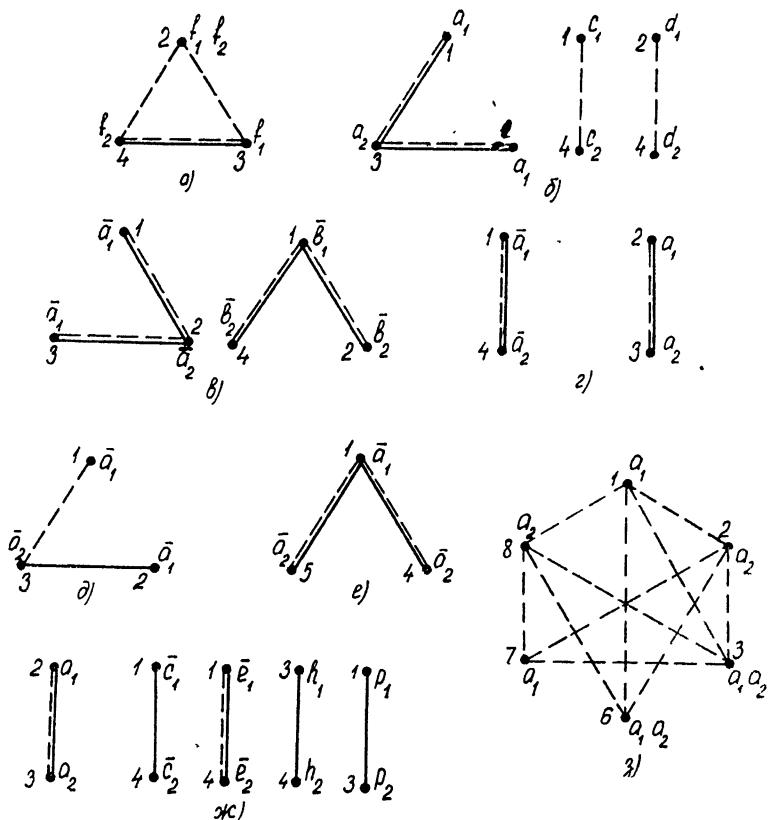


Рис. 4.

Пример 2. $A = abcVabdVae fVcde$. Решение: рис. 3б, $F = acdVabcV$ $VabdVcdeV\dots$, $z_p = acd$, рис. 4б, $N_1 = 6 + 3 = 9$, $A' = a_1bc_1V a_1bd_1V a_2e fV$ Vc_2d_2e , $A^* = A'$, рис. 5б. Полученная схема минимальна, так как оценка не может быть улучшена.

Пример 3. $A = \Sigma(0, 3, 5, 9) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}V\bar{a}\bar{b}\bar{c}dV\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}V\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$. Решение: рис. 3в, (здесь в $E_{\alpha\beta\gamma}$ добавляются в качестве членов переменные q_1, q_2, \dots из $q_1q_2\dots = P(u_a, u_b, u_c)$, содержащиеся в триаде u_a, u_b, u_c).

$F = \bar{ab}V\bar{ac}V\bar{ad}V\bar{bc}V\bar{bd}V\bar{cd}V\dots$, $z_p = \bar{ab}$, рис. 4в, $N_1 = 8 + 2 = 10$,
 $A' = \bar{a}_1\bar{b}_1\bar{cd}V\bar{a}_2\bar{b}_2\bar{cd}V\bar{a}_1\bar{bcd}V\bar{ab}_2\bar{cd}$, $A^* = \bar{a}_1\bar{b}_1\bar{cd}V\bar{a}_2\bar{b}_2\bar{cd}V\bar{a}_1\bar{bcd}V\bar{ab}_2\bar{cd}V$
 $V\bar{a}_2\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{cd}V\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{ab}_1\bar{cd}V\bar{ab}_1\bar{b}_2\bar{cd}V\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{abcd}$, рис. 5в. Полученная схема
минимальна.

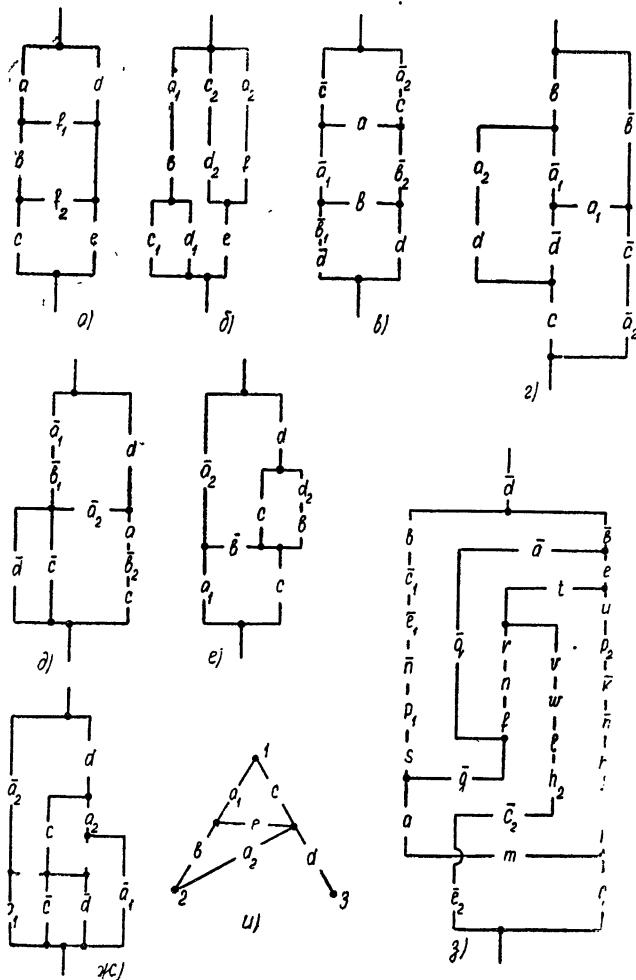


Рис. 5.

Пример 4. $A = \Sigma(0, 1, 6, 10, 15) = \bar{ab}\bar{cd}V\bar{abc}\bar{d}V\bar{abcd}V\bar{abc}\bar{c}$. Решение:
рис. 3г, $F = \bar{aa}V\bar{bb}V\bar{ab}V\bar{ab}V\dots$, $z_p = \bar{aa}$, рис. 4г, $N_1 = 8 + 2 = 10$, $A' = \bar{a}_1\bar{b}_1\bar{cd}V$
 $V\bar{a}_1\bar{bcd}V\bar{a}_2\bar{bcd}V\bar{a}_2\bar{bc}$, $A^* = \bar{a}_1\bar{bcd}V\bar{a}_1\bar{bcd}V\bar{a}_2\bar{bcd}V\bar{a}_2\bar{bc}V\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_1\bar{bcd}V$
 $V\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{bc}V\bar{a}_2\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{bcd}d$, рис. 5г. Для доказательства минимальности
полученной схемы необходимо рассмотреть вторую возможную ДНФ A .
Это не улучшит схему рис. 5г.

Пример 5. $A = \Sigma(0, 1, 2, 5, 11, 14) = \bar{ab}\bar{c}V\bar{ab}\bar{d}V\bar{acd}V\bar{abcd}$. Решение:
рис. 3д, $F = \bar{a}V\bar{bc}V\dots$, $z_p = \bar{a}$, рис. 4д, $N_1 = 7 + 1 = 8$, $A' = \bar{a}_1\bar{bc}V\bar{a}_1\bar{bd}V$
 $V\bar{a}_2\bar{cd}V\bar{abcd}$, $A^* = \bar{a}_1\bar{bc}V\bar{a}_1\bar{bd}V\bar{a}_2\bar{cd}V\bar{ab}\bar{cd}V\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{ac}V\bar{a}_2\bar{dd}$. В функциях A' и A^* возникает нереализуемая триада I типа. Поэтому A^* не может быть бесповторно реализована. Для исправления триады составляем новую таблицу (рис. 3е). Размножая \bar{b} , получаем $A^* = \bar{a}_1\bar{b}_1\bar{c}V\bar{a}_1\bar{b}_1\bar{d}V$

$V \bar{a}_2 \bar{c}d V \bar{a}\bar{b}_2 cd V \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}\bar{b}_1 \bar{b}_2 c V \bar{a}\bar{b}\bar{d}d$, рис. 5д. Из [5] следует, что эта схема принадлежит к минимальным.

Пример 6. $A = \Sigma (0, 1, 2, 7, 11, 13) = \bar{a}bcd V \bar{a}\bar{b}cd V \bar{a}\bar{b}\bar{c}d V \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$. Решение: рис. 3ж, $F = \bar{a}\bar{b} V \bar{a}\bar{a} V \bar{a}\bar{a}d V \dots$. Замечаем, что если устраниТЬ пос-ледний столбец, то $F = \bar{a}\bar{a} V \dots$. Но триада последнего столбца не удовлетворяет списку реализаций № 4. Посмотрим не будет ли она удовлетворять ему после размножения переменных, $z_p = \bar{a}\bar{a}$, рис. 4е. Триада принимает вид $\bar{a}_1 \bar{b}cd, a_2 \bar{b}\bar{c}d, a_2 \bar{b}c$. Она оказывается реализуемой, и ей соответствует схема рис. 5е. Далее, $N_1 = 8 + 2 = 10, A' = \bar{a}_1 \bar{b}cd V a_1 \bar{b}cd V V a_2 \bar{b}cd V \bar{a}_2 \bar{b}c V \bar{a}_2 \bar{b}d$. Из рис. 5е следует, что в A необходимо добавить $a_2 a_1, a_1 a_2 \bar{b}bd, \bar{c}cd$. После этого получаем $A^* = \bar{a}_1 \bar{b}cd V a_1 \bar{b}cd V a_2 \bar{b}cd V V \bar{a}_2 \bar{b}c V \bar{a}_2 \bar{b}d V \bar{a}_2 a V a_1 a_2 \bar{b}bd V \bar{c}cd V \bar{a}_1 a_2 d V \bar{a}_1 a_2 \bar{b}b V \bar{a}_1 a_2 a_2 \bar{b}c V \bar{c}dd V V a_2 \bar{b}dd$. Строим схему рис. 5ж, подсхемой которой является рис. 5е. Она квазиминимальна. Из [5] следует, что она и минимальна.

Пример 7. Рассмотрим функцию 20 переменных $A = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{m}\bar{n}\bar{p}\bar{q}\bar{s} V V \bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g}\bar{m}\bar{n}\bar{q}\bar{r}\bar{t} V \bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{h}\bar{k}\bar{m}\bar{p}\bar{q}\bar{r}u V \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{h}\bar{l}\bar{n}\bar{q}\bar{r}\bar{v}\bar{w}$. Решение: рис. 3з, $F = \bar{c}\bar{e}\bar{h}p V \dots, z_p = \bar{c}\bar{e}\bar{h}p$, рис. 4ж, $N_1 = 28 + 4 = 32, A' = \bar{a}\bar{b}\bar{c}_1 \bar{d}\bar{e}_1 \bar{m}\bar{p}_1 \bar{q}\bar{s} V V \bar{a}\bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{g}\bar{m}\bar{n}\bar{q}\bar{r}\bar{t} V \bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}_1 \bar{h}_1 \bar{k}\bar{m}\bar{p}_2 \bar{q}\bar{r}u V \bar{a}\bar{b}\bar{c}_2 \bar{d}\bar{e}_2 \bar{f}\bar{h}_2 \bar{l}\bar{n}\bar{q}\bar{r}\bar{v}\bar{w}$. В A^* возникают триады вида (1). Однако для функций большого числа переменных они почти всегда реализуемы. Попытка построения схемы по A^* (или по A') дает рис. 5з. Возможно, что и триады из рис. 3з реализуемы. Для проверки этого можно разработать алгоритм (список реализаций № 20 слишком громоздок).

Пример 8. Рассмотрим синтез многополюсной схемы: $A_{12} = ab V ac V V ae V bce, A_{13} = cd V abd V ade, A_{23} = ad V bde$. Решение: рис. 3и, $F = a, z_p = a$, рис. 4з, $A'_{12} = a_1 b V a_2 c V a_1 a_2 e V bce, A'_{13} = cd V a_1 a_2 bd V a_1 de, A'_{23} = a_2 d V bde, A''_{12} = a_1 b V a_2 c V a_1 a_2 e V bce, A''_{13} = cd V a_1 a_2 bd V a_1 de, A''_{23} = a_2 d V bde V a_1 bcd$, рис. 5и. Полученная схема минимальна.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство необходимости теоремы 1 (вида $A \rightarrow B$) может быть получено путем рассмотрения трех цепей контактов, проходящих через произвольную бесповторную схему и соответствующих любой триаде членов в описывающей ее функции (вид триады не уточняется). Удаляя все контакты, по которым не проходит никакой цепи или проходит четное число цепей (две), получим схему, в которой по любому контакту проходит нечетное число цепей. В этой схеме обязательно имеется цепь, соединяющая входной и выходной полюсы, так как при удалении контактов ни в одном из узлов не возникает неустранимого обрыва какой-либо цепи (цепи можно переключить таким образом, что их непрерывность будет восстановлена). Нетрудно видеть, что эта цепь описывается набором всех или части переменных, встречающихся в триаде нечетное число раз, что и доказывает теорему.

Доказательство достаточности теоремы 1 (вида $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$) может быть получено путем рассмотрения небесповторной схемы, содержащей два контакта одинакового типа (вид остальных контактов не уточняется, но на них наложены незначительные ограничения). Эти два контакта могут быть расположены в схеме по отношению к ее полюсам десятью различными способами. Некоторые из них являются изоморфными друг другу. В одной части образующихся при этом схем можно таким образом выбрать три первичных цепи, что окажется невозможным существо-

вание вторичной цепи, состоящей только из контактов, по которым проходит нечетное число первичных цепей (отдельные отрезки, из которых должна быть составлена эта цепь, окажутся разобщенными). В другой части схем вторичную цепь всегда можно выбрать, однако обязательно возникает нереализуемая триада вида (1). Тем самым теорема оказывается доказанной.

Теорема 2 доказывается аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Трахтенброт, Тр. Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 51, 226 (1958).
2. Б. Ю. Пильчак, Проблемы кибернетики, 3, 95 (1960).
3. П. Ханко, Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 12, № 3, 244 (1963).
4. В. Н. Гребенщиков, ДАН СССР, 119, № 2, 278 (1958).
5. Ю. Л. Васильев, ДАН СССР, 127, № 5, 242 (1959).
6. E. F. Moore, A. table for four—relay two—terminal contact networks (appendix to the book: R. A. Higonnet, R. A. Grea, Logical design of Electrical Circuits, Mc Graw—Hill Book Company, N.—Y., Toronto, London, 1958).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 апреля 1967 г.

MINIMAL CONTACT NETWORKS METHOD OF SYNTHESIS AND ESTIMATION OF NEEDED AMOUNT OF CONTACTS

V. N. Grebenschchikov

This article presents a method for synthesis of two-terminal and multiterminal minimal contact networks for any function of 4, 5, 6 variables.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 62—501.32

**ВЫВОД НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В. А. ЯКУБОВИЧА
ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА В. М. ПОПОВА**

B. A. Брусин

В статье [1] методом функций Ляпунова рассматривалась задача об абсолютной устойчивости вынужденных колебаний нелинейных регулируемых систем. В частности, там была доказана теорема об абсолютной устойчивости вынужденных процессов в системе с кусочно-непрерывной нелинейностью и периодическим воздействием.

В настоящей заметке методом В. М. Попова проводится обобщение этого результата на случай распределенной модели линейного звена.

Рассмотрим процесс $(x(t), y(t))$ ($0 \leq t < \infty$), удовлетворяющий системе

$$x(t) = - \int_0^t G(t-\tau) y(\tau) d\tau + \xi(t) + u(t), \quad (1)$$

$$y(t) = \varphi(x(t)),$$

где $G(t)$, $\xi(t)$, $u(t)$ — непрерывные при $t > 0$ функции, причем существуют такие константы C_1 , C_2 , $\lambda > 0$, что при $t > 0$

$$|G(t)| < C_1 e^{-\lambda t}, \quad |\xi(t)| < C_2 e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

$\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая в точках непрерывности условию

$$x \varphi(x) \geq 0. \quad (3)$$

Как известно, система (1) определяет процесс $(x(t), y(t))$, вообще говоря, только на интервале непрерывности. Однако эту систему можно доопределить так, чтобы она списывала этот процесс при всех $t \geq 0$. Способ доопределения тот же, что и для линейных систем, и состоит в следующем [2]*. Полагаем, что $y(t)$ — любое число, заключенное между значениями $\varphi(x(t)+0)$ и $\varphi(x(t)-0)**$.

Очевидно, доопределенный процесс $(x(t), y(t))$ также будет удовлетворять неравенству (3).

Сформулируем относительно этого процесса теорему 1 об абсолютной устойчивости.

Обозначим через $\xi_T(t)$ функцию, равную 0 при $t < T$ и равную $-\int_0^T G(t-\tau) y(\tau) d\tau + \xi(t) + u(t)$ при $t \geq T$; $\xi_T(t)$ удовлетворяет условию $|\xi_T(t)| \leq C_3(T) e^{-\lambda(t-T)}$. Можно показать, что задание функции $\xi_T(t)$ единственным образом определяет процесс $(x(t), y(t))$ доопределенной системы при $t \geq T$. В силу этого $\xi_T(t)$ может рас-

* Для случая систем с конечным числом степеней свободы известен еще ряд способов доопределения. Однако все они эквивалентны, т. е. определяют один и тот же процесс.

** На каждом временном интервале, определяемом неравенствами вида $y(t) > 0$, $y(t) < 0$, или $y(t) \equiv 0$ (последний соответствует скользящему режиму [2]), можно решить задачу Коши. Определяются и условия перехода из одного интервала в другой. Сшивая решения на границах интервалов, мы можем определить искомое решение на сумме этих интервалов. Предполагаем, что таким образом решение продолжается на весь интервал $[0, \infty]$.

сматриваться как состояние ξ_T динамической системы, описываемой доопределенными уравнениями (1)–(2).

Обозначим через $W(j\omega)$ фурье-изображение $G(t)$ и

$$\|\xi_T\| = \int_0^\infty |\xi_T(t)| dt.$$

Теорема 1. Пусть $u(t) \equiv 0$ и существует такое $\beta > 0$, что при некотором $\rho (0 < \rho < \lambda)$

$$\operatorname{Re} W(j\omega - \rho) > \beta |W(j\omega - \rho)|^2, \quad (0 < \omega < \infty). \quad (4)$$

Тогда

$$\|\xi_T\| e^{\rho T} \leq C_4 < \infty \quad (\text{при } 0 \leq T < \infty). \quad (5)$$

Обозначим $\tilde{x}(t) = x(t)e^{\rho t}$, $\tilde{y}(t) = y(t)e^{\rho t}$, $y_T(t) = \{y(t), \text{ если } 0 \leq t \leq T, 0, \text{ если } t > T, t < 0\}$, $\tilde{y}_T(t) = y_T(t)e^{-\rho t}$; $\tilde{Y}_T(j\omega)$ — фурье-изображение $y_T(t)$;

$$\begin{aligned} x_T(t) &= - \int_0^T G(t-\tau) y(\tau) d\tau + \xi(t), \quad \tilde{x}_T(t) = x_T(t)e^{-\rho t}, \\ \tilde{\xi}(t) &= \xi(t)e^{-\rho t}, \quad \tilde{G}(t) = G(t)e^{-\rho t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматривая интеграл $\int_0^\infty \tilde{x} \tilde{y}_T dt$, после характерных для метода Попова преобразований приходим к равенству

$$\int_0^\infty (\tilde{x}, \tilde{y}_T - \tilde{y}_T \tilde{\xi}) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} W(j\omega - \rho) |\tilde{Y}_T(j\omega)|^2 d\omega = 0. \quad (7)$$

Пусть $M > 0$ — достаточно большое число и $\Delta_+(M)$, $\Delta_-(M)$ — временные отрезки, на которых соответственно $|y(t)| \geq M$ и $|y(t)| \leq M$; и пусть $N > 0$ и $T^* > 0$ определяются условиями $|x(t)| \geq M$ при $t \in \Delta_+$ и $C_2 \exp[-(\lambda - \rho)T^*] \leq N$. Тогда

$$-\int_{\Delta_+}^\infty (\tilde{x} \tilde{y}_T - \tilde{y}_T \tilde{\xi}) dt \leq \int_{\Delta_+}^\infty [-N |\tilde{y}_T(t)| + |\tilde{y}_T(t)| |\tilde{\xi}(t)|] dt \leq \int_0^{T^*} |\tilde{y}(t)| |\tilde{\xi}(t)| dt = L_1.$$

Аналогично получаем, что $-\int_{\Delta_-}^\infty (\tilde{x} \tilde{y}_T - \tilde{y}_T \tilde{\xi}) dt \leq L_2$ и

$$-\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^\infty (\tilde{x} \tilde{y}_T - \tilde{y}_T \tilde{\xi}) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} W(j\omega - \rho) |\tilde{Y}_T(j\omega)|^2 d\omega \leq L_1 + L_2 = L. \quad (8)$$

На основании (4), (8) выводим, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{x}_T^2 dt &\equiv \int_0^\infty \left[- \int_0^t \tilde{G}(t-\tau) \tilde{y}_T(\tau) d\tau + \tilde{\xi}(t) \right]^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^\infty \left\{ \left[\int_0^t \tilde{G}(t-\tau) \tilde{y}_T(\tau) d\tau \right]^2 + \tilde{\xi}^2(t) \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j\omega - \rho)|^2 |\tilde{Y}_T(j\omega)|^2 d\omega + 2 \int_0^\infty \tilde{\xi}^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} W(j\omega - \rho) |\tilde{Y}_T(j\omega)|^2 d\omega + 2 \int_0^\infty \tilde{\xi}^2(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Из равномерной сходимости $\int_0^\infty \tilde{x}_T^2 dt$ следует, что равномерно по T $\int_T^\infty \tilde{x}_T^2 dt = \int_T^\infty (x_T e^{p_1 t})^2 dt < \infty$, откуда

$$\infty > \int_T^\infty x_T^2 e^{2p_1 t} dt \geq 2\rho e^{2p_1 T} \left(\int_T^\infty |x_T| dt \right)^2 = 2\rho (e^{p_1 T} \| \xi_T \|)^2.$$

Из теоремы 1 немедленно вытекает следствие.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда $y(t) e^{p_1 t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где $0 < p_1 < p$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4) и для любых $t_1, t_2 > 0$ $|y(t_1) - y(t_2)| \times |x(t_1) - x(t_2)| > 0$. Если $u(t)$ — Ω -периодическая функция при $t > 0$, то любой процесс $(x(t), y(t))$, удовлетворяющий доопределенной системе (1), (2); при $t \rightarrow \infty$ стремится (экспоненциально) к некоторому фиксированному Ω -периодическому процессу $(x_0(t), y_0(t))$.

Теорема 2 доказывается по аналогии с теоремой 1, если вместо процесса $(x(t), y(t))$ рассмотреть процесс $(x(t + \Omega) - x(t), y(t + \Omega) - y(t))$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика, 25, 7 (1964).
2. Ю. И. Неймарк, Труды ГИФТИ и ГГУ, 30, 159 (1956).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 сентября 1966 г.

УДК 62—507

О РАЗДЕЛЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ СОБЫТИЙ В ИСТОЧНИКАХ

A. M. Бланк, Г. А. Гильман

Естественна постановка следующей задачи. Имеется конечное множество событий, необходимо построить граф (или автомат), который производил бы фильтрацию или сортировку этих событий. Эта задача может иметь теоретические и практические приложения. В настоящей заметке приводятся необходимые и достаточные условия существования фильтрующих графов.

Рассмотрим конечное множество регулярных событий T_1, T_2, \dots, T_n с порождающими источниками A_1, A_2, \dots, A_n .

Пусть $\{S^V\}, \{S^*\}_1, \{S^V\}_2, \{S^*\}_2, \dots, \{S^V\}_n, \{S^*\}_n$ — множество начальных и конечных состояний источников A_1, A_2, \dots, A_n .

Будем следовать следующей терминологии. Источники эквивалентны, если порождаемые ими события совпадают. Источник B' называется подысточником источника B , если B и B' отличаются только своими конечными множествами $\{y^*\}'$ и $\{y^*\}$, причем $\{y^*\}' \subseteq \{y^*\}$. В случае строгого включения подысточник называется строгим подысточником. Источник B' является максимальным подысточником B , если нет B'' , для которого $\{y^*\}'' \supset \{y^*\}'$, причем B' эквивалентен B'' .

Определение 1. Источник $A = A(1, 2, \dots, n)$ называется фильтром для A_1, A_2, \dots, A_n если

$$a) \{S^*\} = \bigcup_{i=1}^n \{S^*\}_i,$$

б) для любого i A_i подысточник A , определяемый $\{S^*\}$, эквивалентен A_i и является максимальным подысточником A и если, кроме того,

в) $\{S^*\}^k \cap \{S^*\}^j = \emptyset$ (при $k \neq j$), то фильтр называется строгим фильтром

Определение 2. Слово $\sigma = \beta\gamma$ есть продолжение β ; если γ имеет хотя бы один символ, то α — строгое продолжение β .

Событие T называется чистым по отношению к T' , если никакое слово из T не является строгим продолжением слова из T' . В частности, если T чисто по отношению к T , то будем называть T чистым.

Если во множестве $\{T_i\}$ каждое T_k чисто по отношению к каждому T_j , то будем называть множество $\{T_i\}$ чистым.

При замене термина «строгое продолжение» на «продолжение» получим более сильное понятие, называемое строгой чистотой*.

Теорема 1. Для того, чтобы множество источников A_1, A_2, \dots, A_n имело фильтр $A(1, 2, \dots, n)$, необходимо и достаточно, чтобы множество событий, порожденных этими источниками, было чистым.

Если A_1, A_2, \dots, A_n имеет фильтр, то существует и фильтр с одноэлементным начальным множеством.

Доказательство теоремы 1 является частью доказательства теоремы 2.

Теорема 2. Для того, чтобы множество источников A_1, A_2, \dots, A_n имело строгий фильтр, необходимо и достаточно, чтобы множество было строго чистым.

Аналогично существование строгого фильтра влечет существование строгого фильтра с одноэлементным начальным множеством.

Для доказательства теоремы 2 достаточно построить строгий фильтр для множества, состоящего из двух источников A_1, A_2 , имеющих одноэлементные начальные множества.

Действительно, если теорема доказана для этого частного случая, то, во-первых, ее можно распространить на пару источников, имеющих неодноэлементные начальные множества. Пусть есть произвольный источник \bar{A} с начальным множеством $\{\mathcal{S}_k^V\}$. Сопоставим ему источники $\{A_k\}$ с начальными состояниями S_k . Каждый A_k порождает слова из A , начинающиеся в S_k . Построив для A_1, A_2, \dots, A_k строгий фильтр, получим источник A , эквивалентный \bar{A} и имеющий одно начальное состояние.

Далее, для источников A, B (эквивалентных \bar{A}, \bar{B}) строим строгий фильтр, который будет также строгим фильтром A, B .

Во-вторых, теорема распространяется на случай n источников (по индукции).

Пусть имеются источники A_1, A_2 с одноэлементными начальными множествами $\{\mathcal{S}_1^V\}, \{\mathcal{S}_2^V\}$ и конечными множествами $\{\mathcal{S}^*\}_1, \{\mathcal{S}^*\}_2$. Источники A_1, A_2 порождают строго чистые T_1, T_2 над алфавитом символов $\{u_e\}$. Многозначные функции, определяющие отображения множеств состояний источников в себя, обозначим соответственно f_1 и f_2 .

Построим источник A , являющийся строгим фильтром по отношению к A_1 и A_2 .

Введем следующие обозначения: $\{S\}_1 = \{\mathcal{S}_1^i\}$ — множество состояний A_1 , $\{S\}_2 = \{\mathcal{S}_2^j\}$ — множество состояний A_2 , $\{S\} = \{\mathcal{S}^k\}$ — множество состояний A .

Каждому из подмножеств $\{\mathcal{S}_1^i \mathcal{S}_2^j\}$ ставится в соответствие состояние $\mathcal{S}^{ij} \in \{\mathcal{S}^k\}$.

Будем считать $\mathcal{S}^{ij} = S^V$ начальным состоянием, если $\mathcal{S}_1^i = S_1^V$ и $\mathcal{S}_2^j = S_2^V$. Состояние \mathcal{S}^{ij} будем считать конечным, если $\mathcal{S}_1^i \in \{\mathcal{S}^*\}_1$ или $\mathcal{S}_2^j \in \{\mathcal{S}^*\}_2$.

Для любых u_e и ij , где \mathcal{S}_1^i не принадлежит $\{\mathcal{S}^*\}_1$, \mathcal{S}_2^j не принадлежит $\{\mathcal{S}^*\}_2$, \mathcal{S}^{ij} соединяется ребром, направленным от \mathcal{S}^{ij} к состоянию \mathcal{S}^{mn} , где m и n такие, что $f_1(\mathcal{S}_1^i u_e) = S_1^m, f_2(\mathcal{S}_2^j u_e) = S_2^n$.

Докажем, что A есть фильтр для A_1, A_2 . Обозначим N_A^μ множество состояний A , в которых оканчиваются все пути, порождающие слово μ . Аналогично определяются $N_{A_1}^\mu$ и $N_{A_2}^\mu$.

При этом

$$\begin{aligned} N_A^\mu &= \{S^{ij}\}, \quad S^{ij} \in N_{A_1}^\mu, \\ N_A^\nu &= \{S^{ij}\}, \quad S^{ij} \in N_{A_2}^\nu. \end{aligned}$$

Доказательство осуществляется по индукции по длине слова μ . Отсюда следует, поскольку μ произвольно, что подисточники A'_1 и A'_2 , определяемые $\{\mathcal{S}^{ij}\} = \{\mathcal{S}^*\}_1$, где $\mathcal{S}^{ij} \in \{\mathcal{S}^*\}_1$ и $\{\mathcal{S}^{ke}\} = \{\mathcal{S}^*\}_2$ ($\mathcal{S}^e \in \{\mathcal{S}^*\}_2$), эквивалентны A_1 и A_2 и, очевидно, максимальны в A .

Кроме того, разумеется, $\{S^*\}_A = \{S^*\}_1 \cup \{S^*\}_2$ и $\{S^*\}_1 \cap \{S^*\}_2 = \emptyset$, поскольку события T_1 и T_2 строго чисты.

Понятия фильтра и строгого фильтра для множества регулярных событий в теории конечных автоматов играют роль обобщения понятий представимости и перечислимости [1, 2].

Решаемую здесь задачу можно рассматривать и как некоторый вариант пробле-

* Чтобы множество было строго чистым, необходимо и достаточно, чтобы оно было чистым и, кроме того, $T_k \cap T_j = \emptyset$, если $i \neq k$.

мы кодирования [3]. Если имеется конечное множество регулярных событий T_1, T_2, \dots, T_n и любое событие T_i , чистое, то можно считать каждое слово T_i кодовой комбинацией для i . Условие чистоты события T_i тождественно условию префиксного кода. Так как в любом источнике A_i , порождающем T_i , отмечены конечные состояния, то можно считать T_i аналогом префиксного кода с разделительными знаками. Различие с алфавитным кодированием заключается в том, что при алфавитном кодировании каждый символ кодируется словом или конечным числом слов, а в данном случае каждому символу ставится в соответствие регулярное событие.

Кодирование этого типа можно интерпретировать как «пересказ» или «перевод» фиксированного числа сообщений.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Б. Лупанов, Проблемы кибернетики, вып. 9, 321 (1963).
2. В. А. Козмидиади, ДАН СССР, 142, № 5, 1005 (1962).
3. А. Сардинас, Дж. Патерсон, Кибернетический сб., № 3, 93 (1961).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 октября 1966 г.

УДК 681.142—652

ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО РАЗБРОСА ПАРАМЕТРОВ СЕРДЕЧНИКОВ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАГНИТНОГО ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

В. А. Улитовский

Различие бинарной кодовой информации, хранящейся в каждом ферритовом сердечнике МОЗУ, в конечном счете определяется остаточным потоком сердечника, который зависит от амплитуды записывающего и разрушающего полей. Назовем максимальную допустимую величину разрушающего поля полем трогания H_t , а минимальную величину поля, переводящего сердечник из состояния «0» в состояние «1», достоверно отличающее штатным электронным оборудованием данного ЗУ, — полем переброса H_p . Величина H_p выбирается с учетом последующего разрушения состояния «1».

При идентичных сердечниках максимальное поле записи и чтения в матричном ЗУ составляет $2H_t$, максимальное поле записи в линейном ЗУ равно $3H_t$. Минимальное поле для обоих ЗУ равно H_p :

$$H_p \ll H = 2\lambda \ll 2H_t, \quad (1)$$

$$H_p \ll H = Z + P \ll 3H_t. \quad (2)$$

Величина $H = 2X$ является полем записи и чтения в матричном ЗУ; $H = Z + P$ — полем записи в линейном ЗУ, равным сумме разрядного и адресного полей. Поле H в дальнейшем называется полем записи. Неравенства (1) и (2) определяют пределы изменения поля записи H .

Величины H_p и H_t для ЗУ разных типов и конструкций различны. Относительный допуск на величины H_t и H_p примерно равен относительному допуску на коэрцитивную силу H_c , если последний невелик.

Учет допусков на магнитные параметры сердечников и на амплитуду полей возбуждения приводит к замене систем (1) и (2) на (3) и (4) соответственно:

$$\begin{aligned} 2X(1 - \delta_x) &\geq H_p(1 + \delta_c), \\ 2X(1 + \delta_x) - P(1 - \delta_p) &\leq H_t(1 - \delta_c), \\ P(1 + \delta_p) &\leq H_t(1 - \delta_c), \\ X(1 + \delta_x) &\leq H_t(1 - \delta_c), \\ H &= 2X, \end{aligned} \quad (3)$$

где X — амплитуда поля по двум адресным координатам матричного ЗУ; P — амплитуда поля в разряднойшине ЗУ обоих типов; Z — амплитуда поля в адреснойшине

линейного ЗУ; δ_x , δ_p , δ_c , δ_z — относительный симметричный допуск на соответствующие величины.

Первая строчка системы (3) соответствует условиям записи кода «1» и режиму чтения кодов, вторая строчка — записи кода «0», а третья и четвертая ограничивают разрядный и координатные импульсы. Система (3) при условии $X = P$ и $\delta_x = \delta_p$, обычно имеющем место в матричном ЗУ, будучи разрешена относительно поля записи кода «1» $H = 2X$, при малых δ_c и δ_x имеет вид

$$H_n(1 + \delta_c + \delta_x) \leq H = 2X \leq 2H_t(1 - \delta_c - 3\delta_x). \quad (4)$$

В линейном ЗУ в режиме записи импульсы имеют следующие ограничения:

$$\begin{aligned} Z(1 - \delta_z) + P(1 - \delta_p) &\geq H_n(1 + \delta_c), \\ Z(1 + \delta_z) - P(1 - \delta_p) &\leq H_t(1 - \delta_c), \\ P(1 + \delta_p) &\leq H_t(1 - \delta_c), \\ H &= Z + P. \end{aligned} \quad (5)$$

Первая строчка этой системы характеризует процесс записи кода «1», вторая — кода «0», а третья ограничивает разрядные импульсы.

Эта система может быть разрешена относительно поля записи $H = Z + P$; при малых значениях δ_c и δ_p решение имеет вид

$$\begin{aligned} H_n[2 + 2\delta_c + \delta_p - \delta_z(1 + \delta_c + \delta_z)] + H_t[\delta_z(1 - \delta_c + 2\delta_p - \delta_z) - \delta_p] &\leq \\ 2(1 - \delta_z) & \\ \leq H = Z + P &\leq \frac{H_t[3 - 3\delta_c - 3\delta_p + \delta_z(1 - \delta_c - \delta_p)]}{1 + \delta_z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Системы неравенств (1) и (4) характеризуют диапазон изменения поля записи H в матричном ЗУ без учета допусков и с их учетом. Системы (2) и (6) характеризуют диапазон изменения поля записи в линейном ЗУ. По этим системам неравенств составлены графики рис. 1а и б соответственно. По оси абсцисс отложена температура t° , по оси ординат — поле записи H . Пунктиром нанесены зависимости, не учитывающие разброс параметров (1 и 2), сплошной линией — учитывающие разброс (4 и 6).

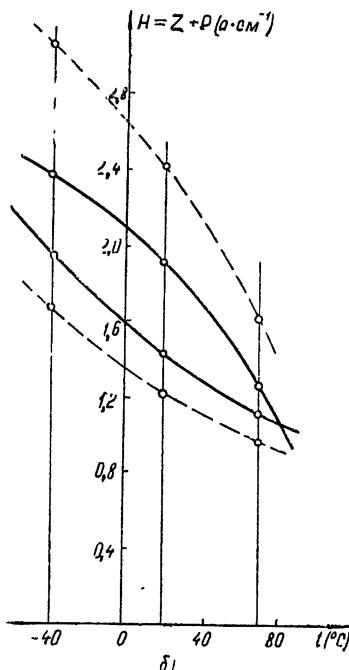
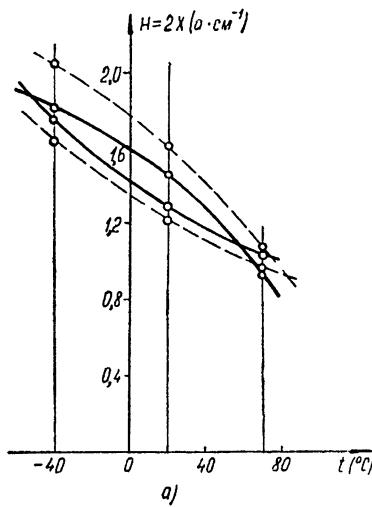


Рис. 1. Изменение поля записи H при изменении температуры. Феррит марки ВТ-1.

а) Матричное ЗУ. $H = 2X$; $\delta_x = \delta_p = 0,02$; $\delta_c = 0,03 [1 + 0,01 | t^{\circ} - 20 |]$.

б) Линейное ЗУ: $H = Z + P$; $\delta_p = 0,05$; $\delta_z = 0,2$; $\delta_c = 0,05 [1 + 0,01 | t^{\circ} - 20 |]$

Диапазон изменения поля H ограничен внутренней областью графиков. Точки пересечения сплошных линий характеризуют температурный предел работы ЗУ.

Графики построены для ферритов марки ВТ-1. Расчеты производились для трех значений температуры. Параметры ферритов при этих температурах заимствованы из [1]. Величины H_t и H_n определялись по индукции. $-0,9 B_r$ и $+0,7 B_r$, соответственно. Величины допусков δ_x , δ_p и δ_z считались не зависящими от температуры и составляли $\delta_x = \delta_p = 0,02$ для матричного ЗУ и $\delta_p = 0,05$; $\delta_z = 0,2$ для линейного ЗУ. Считалось, что допуск на H_c , а следовательно, и на параметры H_t и H_n изменяется с изменением температуры за счет различия температурных характеристик отдельных торов.

$$\begin{aligned}\delta_c &= 0,03 [1 + 0,01 |t^\circ - 20|] && \text{(для матричного ЗУ),} \\ \delta_c &= 0,05 [1 + 0,01 |t^\circ - 20|] && \text{(для линейного ЗУ).}\end{aligned}$$

Из графиков рис. 1а и б следует, что даже небольшой разброс параметров ферритов и амплитуд импульсов управления существенно сокращает диапазон поля записи H за счет его максимальной величины. Увеличение δ_x до 0,05 в матричном ЗУ стягивает диапазон H в точку.

Системы неравенств (4) и (6) позволяют оценить температурные свойства ЗУ по заданным параметрам ферритовых сердечников и допускам на эти параметры и голя возбуждения. Методом подбора возможно решить обратную задачу — задачу определения допусков по требуемым температурным характеристикам ЗУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Пирогов, Ю. М. Шамаев, Магнитные сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса, изд. Энергия, М., 1964.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
23 января 1967 г.

УДК 681.142.642.7

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕГИСТРОВ БЕЗ СДВИГА ИНФОРМАЦИИ

Л. К. Самойлов, Г. С. Мельник

Регистры без сдвига информации (РСИ) [1] во многих случаях позволяют создавать экономичные запоминающие устройства для хранения информации в виде последовательности импульсов. В частности, они могут с успехом использоваться для хранения информации в решающих блоках цифровых интегрирующих машин [2], преобразователях и других устройствах вычислительной техники. Для работы РСИ необходимы управляющие импульсы, вид и количество которых зависит от типа запоминающей ячейки. Минимальное количество управляющих импульсов равно двум, максимальное зависит от разрядности хранимого числа, параметров запоминающей ячейки, конструктивных требований. Если количество разрядов РСИ, используемых в устройстве, мало, или, как будет показано ниже, связано определенными соотношениями с управляющими импульсами системы, то для создания управляющих импульсов РСИ выгодно использовать управляющие импульсы системы. Такие РСИ в дальнейшем будем определять как неавтономные. Если же для работы РСИ используется отдельный источник, число управляющих импульсов которого не зависит от числа управляющих импульсов устройства, то такие РСИ будем определять как автономные.

Из принципа работы РСИ известно, что число разрядов информации, которое может храниться в одном регистре, всегда меньше числа управляющих импульсов на величину α . (Здесь и далее используются обозначения, принятые в [1].)

В неавтономном РСИ этот факт часто вынуждает ставить дополнительные цепи хранения информации (электромагнитные линии задержки, триггеры и т. д.), что снижает эффективность использования РСИ. В данной работе рассматриваются те случаи, когда вся информация хранится только в РСИ и логических цепях системы. При большом количестве разрядов хранимого в регистре числа (n) возрастает число управляющих импульсов РСИ (N) и время хранения информации в ячейке, что иногда нежелательно с конструктивной точки зрения.

Для устранения этого недостатка весь регистр разбивают на ряд малых регистров. Тогда весь регистр будет состоять из последовательно соединенных малых регистров, число которых обозначим через k (рис. 1). Естественно, что количество n -раз-

рядных регистров определяется нагрузочной способностью генератора управляющих импульсов. Целью настоящей работы является выбор числа управляющих импульсов при заданном числе хранимых разрядов информации в случае автономного и неавтономного РСИ.

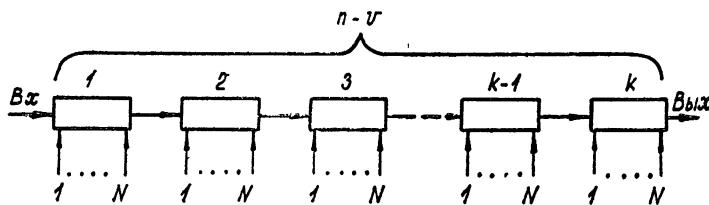


Рис. 1. Блок-схема регистра без сдвига информации (РСИ).

Неавтономные РСИ. Управляющие импульсы РСИ зависят от управляющих импульсов системы. Обозначим $m = Y/N$, где Y — число управляющих импульсов системы, в которой используется РСИ; m — целое число ($m = 1, 2, 3, \dots$). Пример получения различного числа управляющих импульсов для РСИ из управляющих импульсов системы приведен на рис. 2. Количество разрядов хранимого числа обычно жестко связано с числом управляющих импульсов системы, что можно записать как $n = zy$, где $z = 1, 2, 3, \dots$. Информация, обрабатываемая в системе, может задерживаться в логических схемах, тогда время хранения числа в РСИ должно быть уменьшено на число разрядов этой задержки (обычно $v = 0, 1, 2$, не более). С учетом принятых обозначений можно записать, что количество разрядов хранимого числа связано с остальными параметрами соотношением

$$n = \frac{zm(ka - v)}{k - zm}. \quad (1)$$

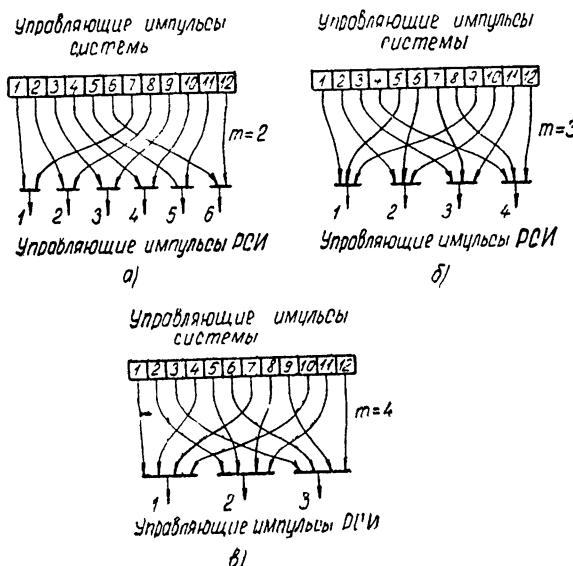


Рис. 2. Примеры получения различного числа управляющих импульсов для РСИ из управляющих импульсов системы с помощью собирательных схем.

Реальные значения n получаются при $k > zm$. При $z = m = k = a = v = 1$ получается неопределенность. Но реально это означает, что при данных условиях $N = y$, и это справедливо при любых значениях n .

В соответствии с условием (1) составлена таблица 1, в которой даны реально возможные значения n при $z = 1$, $v = 0, 1$.

Для каждой величины m имеется две строки значений n : верхняя строка при $v=0$ и нижняя при $v=1$. Необходимо учитывать, что нижняя строка показывает значение разрядов информации, хранимой в РСИ и в логических цепях системы.

Из таблицы видно, что логическая гибкость неавтономных РСИ невелика и за-

Таблица 1

Значения числа разрядов информации (n) для неавтоматного РСИ

N	α	1					2					3												
		k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	2											4	3				6	4				
	1	1												3					5	4				
2	0	0	6	4										12	8	6			18	12	10	1	8	
	1	1												10	6				16		8			
3	0	0	12	6										24	15	12			36	18				
	1	1	9	6										21	9				33	21	15			
4	0	0	20	12	8									40	24	16			60	36	28	24	20	
	1	1	16	8										36					56					
5	0	0	30		10									60	35	20			90	40		30		
	1	1	25	15	10									55	25				85	50				
6	0	0	42	24	18									84	48	36	30		126	72	54			
	1	1	36											78					120					
7	0	0	56											112	63				168	70				
	1	1	49	28	21									105					161	91	56			
8	0	0	72	40										144	80				216	120	88			
	1	1	64											136	56				208					
9	0	0	90											180	99				270					
	1	1	81	45										171					261	144				
10	0	0	110											171					220					
	1	1	100											171					210					

всплеск от числа управляющих импульсов системы. Для расширения логических возможностей РСИ необходимо использовать автономный источник управляющих импульсов. **Автономные РСИ.** Пользуясь принятymi обозначениями, можно выразить количество разрядов хранимого числа для автономного РСИ как (таблица 2)

$$n = k(N - \alpha). \quad (2)$$

Таблица 2

Значения числа разрядов информации (n) для автономного РСИ

$N \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
4	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
5	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
6	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
7	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
8	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
9	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
10	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
11	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
12	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
13	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

При выборе величин k и N необходимо учитывать, что увеличение k (уменьшение N) приводит к увеличению числа активных элементов в схеме. Увеличение N (уменьшение k) приводит к увеличению числа управляющих импульсов, что не всегда желательно с конструктивной точки зрения. Оптимальные значения k и N получаются при равенстве последних. Это означает, что величину k желательно выбирать около значения \sqrt{n} .

ЛИТЕРАТУРА

- М Я Эйнгорин, Изв высш. уч зав — Радиофизика, 5, № 5, 1026 (1962).
- Л. К. Самойлов, Сб. Полупроводниковые элементы в вычислительной технике, ОНТИ, Приборпром, М, 1965