

СОДЕРЖАНИЕ

Митякова Э. Е., Череповицкий В. А. Состояние ионосферы по результатам наблюдений за спутниками «Электрон 1» и «Электрон 3»	7
Каплан С. А., Трахтенгерц В. Ю. К теории синхронного излучения в магнитоактивной плазме	14
Цхакая Д. Д. Кинетические уравнения для радиационных процессов в плазме, находящейся в сильном магнитном поле	19
Орлов Ю. И. Об особенностях рефракции и фокусировки сферических электромагнитных волн в слабонеоднородном плазменном параболическом слое	30
Гречишкин В. С., Гордеев А. Д. Ядерная спин-решеточная и спин-спиновая релаксация в многоуровневых квадрупольных системах	40
Гуревич Г. Л., Хейфец М. И. О взаимодействии резонансного и двухфотонного излучений при выполнении условий пространственного синхронизма	43
Татарский В. И. О сильных флуктуациях амплитуды волны, распространяющейся в среде со слабыми случайными неоднородностями	48
Берштейн И. Л., Андропова И. А., Зайцев Ю. И. Флуктуации интенсивности и частоты излучения оптического генератора	59
Фейзулин З. И., Кравцов Ю. А. К вопросу о расширении лазерного пучка в турбулентной среде	68
Беспалов В. И. Параметрическое усиление света в нелинейной среде со случайными неоднородностями	74
Гудков К. Г., Гуревич А. Г. К расчету порогового поля в волноводе, содержащем ферритовый эллипсоид	78
Барсуков К. А. О дифракции поверхностных электромагнитных волн на краю полубесконечной анизотропно проводящей плоскости	82
Нарышкина Л. Г., Герценштейн М. Е. Медленные волны в анизотропно проводящей плоскости, лежащей на диэлектрике	91
Поддубный Г. В. Влияние паразитной поляризации в падающем поле на поля, рассеянные идеально проводящими шаром и конечным цилиндром	98
Андрушкевич В. С., Козлов Г. А., Трубецков Д. И. К двумерной линейной теории СВЧ приборов <i>O</i> -типа	105
Вигдорчик В. И., Конторович В. М. Стационарные колебания электронного облака в цилиндрическом магнетроне. II. Режим установившихся колебаний	114
Богатырев Ю. К., Рабинович М. И. Исследование автоколебаний в активной кольцевой линии	128
Мосоян К. С., Струков И. А., Эткин В. С. К исследованию каскадных параметрических систем с последовательным включением модулируемых емкостей	132

Краткие сообщения и письма в редакцию

Янцевич А. А. Об одной задаче электродинамики неоднородной анизотропной среды	137
Бегияшвили Г. А., Монин Ю. С. Излучение заряда, движущегося в статистически неоднородной анизотропной среде	139
Крупнов А. Ф., Скворцов В. А., Синегубко Л. А. Об оптимальном варианте двухрезонаторного молекулярного генератора со встречными пучками	141
Крупнов А. Ф., Скворцов В. А., Синегубко Л. А. Разрешение структуры центральной линии $J = 3, K = 3, \Delta F = 0$ аммиака $N^{14}H_3$	142

Александров А. П., Генкин В. Н., Ефремова Г. Ф., Леонов А. М. О двухквантовом поглощении органических молекул	145
Ахманов С. А., Бакланова В. В., Чиркин А. С. Параметрическое усиление при многомодовой накачке	146
Бутров М. В. К вопросу о дифракции на цилиндре произвольного сечения	150
Серебряник А. Н. К вопросу о фокусирующих и дисперсионных свойствах поля сферического конденсатора	152
Грошкóв Л. М., Степанов С. В. Экспериментальная проверка наличия виртуального катода в неразрезном магнетроне	154

УДК 621 : 371.177

СОСТОЯНИЕ ИОНОСФЕРЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА СПУТНИКАМИ «ЭЛЕКТРОН 1» и «ЭЛЕКТРОН 3»

Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий

Приводятся результаты наблюдений разности фаз сигналов когерентных частот 20 и 30 Мгц ИСЗ «Электрон 1» и «Электрон 3» в периоды февраль—март и июль—октябрь 1964 г в г. Горьком. Получен суточный

ход полной электронной концентрации $N_{n\infty} = \int_0^{\infty} Ndz$. Минимальные значения

$N_{n\infty} (0,2 \div 0,3) \cdot 10^{13} \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ отмечаются в ночное время, максимальные значения $N_{n\infty} (1,3 \div 1,5) \cdot 10^{13} \text{ эл} \cdot \text{см}^{-2}$ — в послеполуденные часы. Приводится зависимость эффективной толщины ионосферы от времени суток. Наблюдаются два максимума эффективной толщины ионосферы в период восхода и захода Солнца. Получена также зависимость размеров крупномасштабных неоднородностей и величины относительного изменения электронной концентрации $\Delta N_n/N_n$ от широты и времени суток.

В период с 22 февраля по 26 марта и с 7 июля по 1 октября 1964 г. в НИРФИ (Зименки) проводились наблюдения сигналов ИСЗ «Электрон 1» и «Электрон 3» на когерентных частотах 20,005 и 30,0075 Мгц. Всего было проведено более 100 и обработано 76 сеансов наблюдений. Основная цель наблюдений — исследование распределения электронной концентрации в ионосфере, получение суточного хода числа электронов в вертикальном столбе единичного сечения и эффективной толщины ионосферы выше максимума слоя F_2 , исследование изменения формы слоя F_2 в течение суток, а также выявление временных и пространственных закономерностей поведения неоднородностей «полного столба» электронов до высоты спутника.

Метод дисперсионного интерферометра, приемная аппаратура и методика экспериментальных данных достаточно полно описаны в работах [1, 2, 3]. В настоящей статье приведены результаты наблюдений ИСЗ «Электрон 3», относящиеся к вечерним, ночным и утренним часам в период июль—октябрь 1964 года. Для сравнения приводятся также данные об интегральной электронной концентрации, полученные с помощью спутника «Электрон 1», относящиеся к дневным часам (9 час 30 мин—17 час) в феврале—марте 1964 г. и опубликованные в работе [3].

На рис. 1 показана зависимость полного столба электронов $N_{n\infty} = \int_0^{\infty} Ndz$ от времени суток; $N_{n\infty}$ вычислялась по записям разности фаз

сигналов двух частот и данным станции вертикального зондирования ионосферы по методике, описанной в [3]. Суточный ход снимался в различные дни и различные сезоны. Полный интеграл относится к вертикальному разрезу ионосферы, проходящему через «подыоносферную» точку (см. [3]), которая была расположена для рассмотренных пролетов в интервале широт $\sim 53^\circ \div 59^\circ$. Из рис. 1 помимо суточного хода видна также сезонная зависимость. В летние месяцы рост интегральной концентрации начинается несколько раньше.

Результаты наблюдений показали, что максимальное значение полного столба электронов на широте Горького в период минимума солнеч-

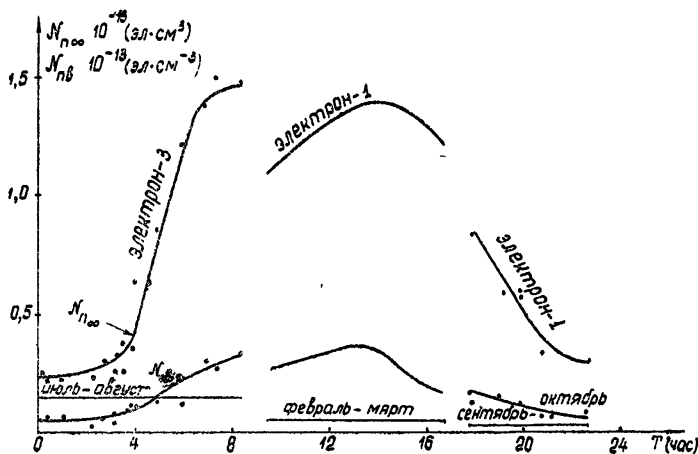


Рис. 1.

ной активности (среднее число солнечных пятен в период наших наблюдений $W \sim 17$) приходится на околополуденные часы (11 ÷ 15 час) и составляет $(1,3 \div 1,5) \cdot 10^{13}$ эл. см⁻², а минимальное значение между 22 час и 02 час составляет $(0,2 \div 0,3) \cdot 10^{13}$ эл. см⁻². Отношение $N_{n \max}/N_{n \min} \sim 5 \div 6$. Нижняя кривая на рис. 1 — интегральная электронная концентрация до максимума F_2 слоя $N_{nb} = \int_0^{z_m} N dz$, где z_m — высота максимума F_2 слоя; N_{nb} вычислялась на электронно-вычислительной машине по данным станции вертикального зондирования, расположенной в Зименках. В таблице 1 приведены средние значения отношения N_{na}/N_{nb} , где $N_{na} = \int_{z_m}^{\infty} N dz$ — интегральная электронная концентрация выше максимума слоя F_2 .

Таблица 1

Электрон 1				Электрон 3					
(час, мин)	09-30	12-30	15-30	18-00	20-00	23-00	01-00	04-00	07-30
N_{na}/N_{nb}	2,8	2,6	4,2	6,2	3,6	2,25	2,7	5,2	4,0

Сравнение полученного суточного хода $N_{n \infty}$ с данными измерений, относимся к максимуму солнечной активности (1960 г.) (см., например, [4]), показывает, что отношения $N_{n \max}/N_{n \min}$ и N_{na}/N_{nb} мало зависят от активности Солнца, тогда как значения $N_{n \infty}$ в период минимума в 3 ÷ 6 раз меньше, чем в период максимума,

В работе [5] опубликованы данные об интегральной электронной концентрации до высоты спутника $N_{nc} = \int_0^{z_c} N dz$ ($z_c \sim 1000$ км), полученные в период пониженной солнечной активности (1962 г.) с помощью ИСЗ Транзит 4А. Эти данные хорошо согласуются с результатами наших измерений.

Мы предполагали, как и в работе [3], что электронная концентрация выше максимума слоя F_2 (до высот ~ 1000 км) распределена по экспоненциальному закону $N = N_{\max} \exp\left(-\frac{z-z_m}{H}\right)$, где H — эффективная толщина ионосферы выше максимума слоя F_2 ; N_{\max} и z_{\max} — концентрация электронов и высота максимума слоя F_2 . На рис. 2 представлен суточный ход эффективной толщины верхней части ионосферы H (сплошная линия). На этом же графике построен суточный ход эффективной толщины всей ионосферы τ , определенной как $\tau = N_{nc}/N_{\max}$ (пунктирная кривая).

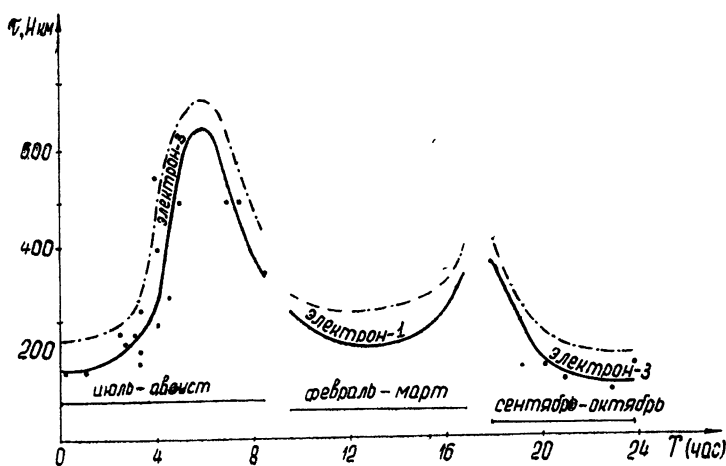


Рис. 2.

Из графика видно, что в течение суток дважды происходит «расширение» ионосферы: после восхода Солнца (5 час—7 час) и во время захода (17 час—19 час). В дневные часы (10 ÷ 16) эффективная толщина ионосферы $\tau \sim 250 \div 300$ км.

Качественно наличие максимумов на восходе и заходе Солнца можно, по-видимому, объяснить неравномерным освещением всей толщи ионосферы в эти часы. Восход Солнца, а следовательно, и ионизация ультрафиолетом в верхних слоях ионосферы начинается раньше, чем в нижней части и на высоте максимума слоя F_2 . Аналогично и на заходе Солнца верхние слои ионосферы более длительное время подвержены воздействию солнечного излучения, чем нижние.

Интересно сравнить кривую τ на рис. 2 с аналогичной зависимостью, полученной в период максимума солнечной активности [4]. Приведенные в работе [4] дневные значения и утренний максимум примерно совпадают с нашими результатами. Вечерний максимум более расплывчатый и практически смыкается с утренним; по-видимому, усиление солнечной деятельности больше сказывается на ночной концентрации слоя.

В работе [5] также приведена суточная зависимость параметра τ , но в отличие от наших данных эффективная толщина ионосферы определя-

дальше до высоты спутника, т. е. $\tau = \int_0^{z_c} N dz / N_m$. Этим можно объяснить различие в величине максимума τ в утренние часы (420 км). В вечерние часы в работе [5] явно выраженного максимума нет.

На рис. 3 показано изменение формы слоя F_2 в течение суток. Нижняя часть профиля до максимума слоя F_2 рассчитана на электронно-вычислительной машине для каждого случая; на рис. 3 приведен средний профиль для данного времени суток. Выше максимума слоя F_2 форма слоя считалась экспоненциальной с соответствующим для данного времени средним значением H . 1-ый профиль соответствует 9 ÷ 10 час; 2-ой — 12 ÷ 14 час; 3-ий — 17 ÷ 18 час; 4-ый — 19 ÷ 20 час; 5-ый — 23 ÷ 01 час; 6-ой — 2 ÷ 4 час; 7-ой — 6 ÷ 7 час.

Большой интерес, на наш взгляд, представляет сравнение полученных профилей с недавно опубликованными результатами импульсного зондирования ионосферы с помощью спутника «Алуэт» [6].

Данные спутника «Алуэт» показывают, что верхняя часть слоя F_2 имеет до высот ~ 1000 км совершенно плавный ход, хорошо описываемый экспоненциальным законом, и не обнаруживает никаких вторичных максимумов [7].

На рис. 3 для сравнения приведен профиль, полученный в [6] на широте 40° в 13 час 14 мин местного времени в декабре 1963 г. (пунктир). Некоторое несовпадение вполне объяснимо широтным и сезонным ходом.

Исследование нерегулярного хода полного столба электронной концентрации включало изучение флуктуаций полного столба электронной концентрации в зависимости от времени суток и широты. На рис. 4 по-

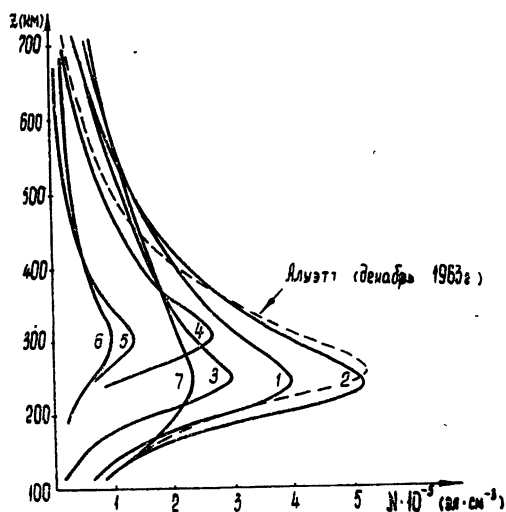


Рис. 3.

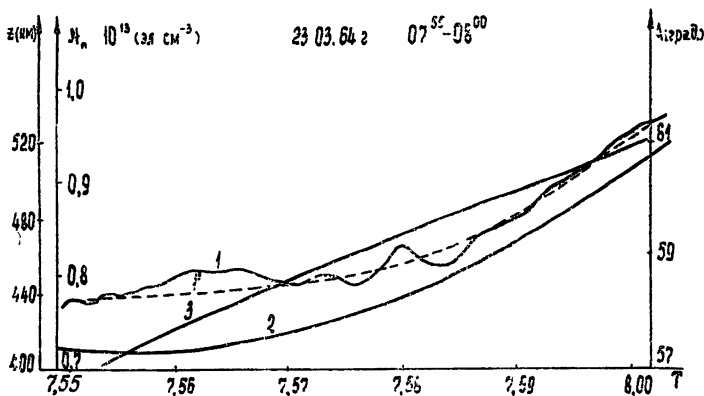


Рис. 4.

казана зависимость $N_{nc} = \int_0^{z_c} N dz$ (полный интеграл до высоты спутника) от времени за период одного сеанса наблюдений (кривая 1). На этом графике показано также изменение высоты спутника (кривая 2) и широты «подыоносферной» точки (кривая 3) за этот период. Видно, что во время пролета имеют место как крупные, так и мелкие флуктуации полного столба электронов. Пунктирной линией на рисунке показана сглаженная зависимость $N_{nc}(t)$. Для каждой неоднородности определили относительные флуктуации полного электронного столба $\Delta N_{nc}/\bar{N}_{nc}$, где \bar{N}_{nc} — среднее значение интеграла на каждом участке, а ΔN_{nc} — максимальное отклонение от него. Горизонтальный размер этих неоднородностей вычислялся по формуле $l_i = \Delta t_i \frac{z_m}{z_c} v_r$, где Δt — продолжительность i -ой неоднородности, z_m — высота «подыоносферной» точки; z_c , v_r — высота и горизонтальная скорость спутника. Кроме этого, определялся параметр появляемости неоднородностей $\Delta T/T$, где T — полное время наблюдений, а ΔT — время, в течение которого наблюдались неоднородности.

На рис. 5 приведена гистограмма параметра $\Delta T/T$ неоднородностей различных размеров в течение разных периодов суток*. Видно, что для

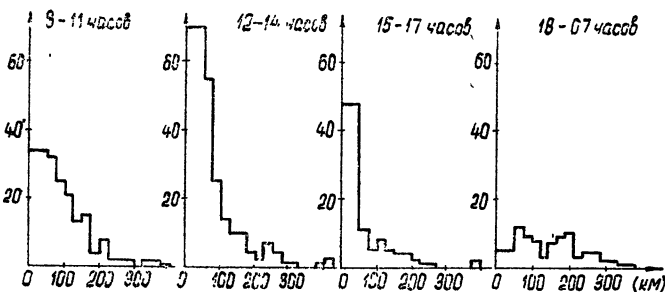


Рис 5.

неоднородностей с размерами до 50 км наблюдается максимум в дневные часы, который затем постепенно расплывается. Ночью более вероятно появление неоднородностей с размерами $l \sim 100 \div 200$ км. Эти результаты хорошо согласуются с полученными нами ранее данными по спутникам «Космос 1» и «Космос 2» [8].

На рис. 6 приведены аналогичные гистограммы для параметра $\Delta N_n/N_n$. По оси ординат отложено число случаев, а по оси абсцисс $\Delta N_n/N_n$ в процентах. В дневные часы наблюдается явно выраженный максимум $\Delta N_n/N_n < 1\%$, затем он становится шире; ночью наиболее вероятны относительные флуктуации $\Delta N_n/N_n \sim 1 \div 2\%$, но встречаются также и значения $\Delta N_n/N_n \sim 3 \div 6\%$.

«Подыоносферная» точка в рассмотренных пролетах была расположена в интервале широт $\sim 53^\circ \div 59^\circ$. Это дало возможность построить широтное распределение размеров неоднородностей l и относительных флуктуаций $\Delta N_n/N_n$. На рис. 7 приведены усредненные значения l и $\Delta N_n/N_n$ за 20-минутные интервалы географической широты. Можно

* Фиксировались только крупномасштабные неоднородности с размером от 20 до 500 км.

проследить увеличение размеров неоднородностей и относительных флуктуаций $\Delta N_n/N_n$ в направлении на Север.

В таблице 2 приведены средние значения параметра появления неоднородностей для различного времени суток.

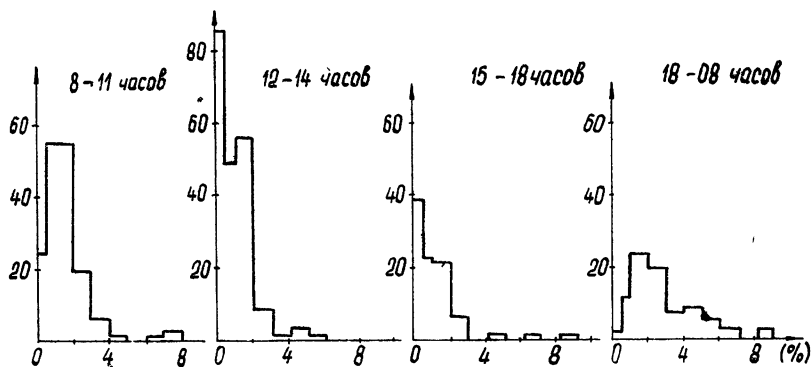


Рис. 6.

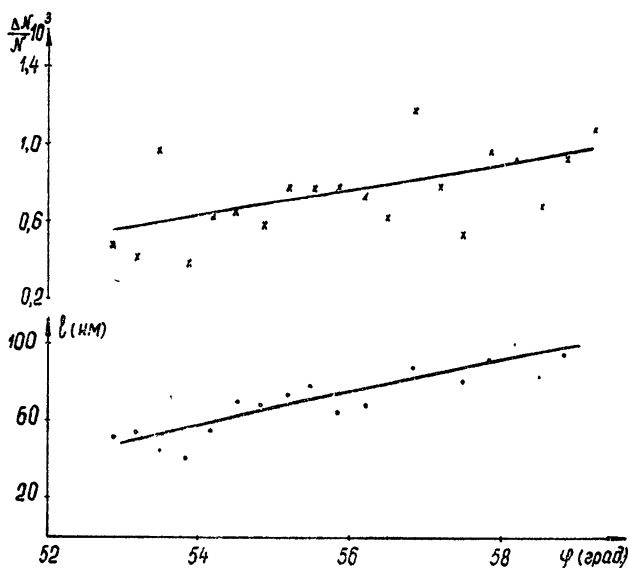


Рис. 7.

Таблица 2

(час, мин)	Электрон 1						Электрон 3							
	9-30	11-00	12-30	14-00	15-30	17-00	18-00	20-00	23-00	01-00	03-00	04-30	7-00	8-30
$\Delta T/T$	0,68	0,75	0,73	0,63	0,62	0,63	0,75	0,7	0,6	0,7	0,5	0,45	0,57	0,6

В отличие от мелкомасштабных неоднородностей с $l \sim 1$ км, которые имеют явно выраженный максимум $\Delta T/T$ в ночное время, параметр

появления крупномасштабных неоднородностей с $l \gtrsim 20$ км слабо зависит от времени суток.

Авторы признательны Л. М. Ерухимову и Н. А. Митякову за полезные обсуждения, а также Л. М. Гонобоблевой, В. А. Васину, Л. М. Барсуковой и Л. И. Грековой за помощь в обработке экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, УФН, 3, 64 (1958).
2. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, Геомagnetизм и аэрономия, 3, 858 (1963).
3. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Космические исследования, 3, № 2, 249 (1966).
4. Распределение электронной концентрации в ионосфере и экзосфере, изд. Мир, М., 1964, стр. 283.
5. R. V. Bhonele, Aldo Vda Rosa and O. K. Garriott, Radio Science Journal of Research NBS/USNC—URSI, 69D, 929 (1965).
6. P. R. Arendt and A. Paravonov, J. Geophys. Res., 70, 3675 (1965).
7. Я. Л. Альперт, В. М. Синельников, Геомagnetизм и аэрономия, 5, 209 (1965).
8. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Геомagnetизм и аэрономия, 3, 816 (1963).
9. Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 839 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 января 1966 г.

IONOSPHERE STATE ACCORDING TO OBSERVATION RESULTS OF „ELECTRON 1“ AND „ELECTRON 3“

E. E. Mityakova, V. A. Cherepovitsky

The observation results are given of phase difference of the signals with coherent frequencies of 20 and 30 Mgc from Sputniks „Electron 1“ and „Electron 3“ during February—March and July—October 1964 for Gorky. The daily variation of the total

electron concentration $N_{n\infty} = \int_0^{\infty} N dz$ is obtained. The minimal values of $N_{n\infty}$ (0,2—0,3)

10^{13} el/cm⁻² are observed in the night-time, the maximal values $N_{n\infty}$ (1,3—1,5) 10^{13} el/cm⁻² — in the hours after the noon. The dependence is given of the effective ionosphere thickness upon the day-time. These observed two maxima of the effective ionosphere thickness in the period of the sunrise and the sunset. Variations of sizes of large-scale inhomogeneities and relative changes of electron concentration $\Delta N_n/N_n$ are obtained as functions of day-time and latitude.

УДК 539.95.01

К ТЕОРИИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

С. А. Каплан, В. Ю. Трахтенгерц

Получено выражение для интенсивности синхротронного излучения релятивистского электрона, движущегося под произвольным углом в анизотропной среде. Подробно рассмотрен случай $n_j \beta \ll 1$ и обсуждается случай $n_j \beta > 1$ (n_j — показатель преломления, $v = \beta c$ — полная скорость электрона). При синхротронном излучении в магнитоактивной плазме влияние анизотропии существенно лишь в непосредственной близости к плазменной частоте.

Синхротронное излучение в среде с отличным от единицы показателем преломления обладает некоторыми особенностями, которые можно использовать для интерпретации ряда радиоастрономических наблюдений (завал спектра в области низких частот [1], отрицательная реабсорбция [2], ускорение частиц излучением в космических условиях [3] и т. п.). При этом обычно используются формулы, записанные для случая изотропной плазмы с показателем преломления $n < 1$, при условии, что излучающий электрон вращается по окружности. В настоящей заметке мы хотим обратить внимание на возможность получения удобной формулы синхротронного излучения поперечных и плазменных волн, свободной от указанных выше ограничений.

Мы будем исходить из общей формулы для интенсивности излучения электрона в магнитоактивной плазме, приведенной, например, в [4]. В случае высоких гармоник $s \gg 1$ эту формулу можно записать в виде*

$$W_{j\omega} = \frac{e^2 \beta_{\perp}^2}{c \omega_{H_0}} \omega^2 \int_{-1}^{+1} \left\{ a_j^2 J_s^2 + a_j \frac{dJ_s^2}{dz} + \left(\frac{dJ_s}{dz} \right)^2 \right\} \frac{n_j d\mu}{1 + K_j^2}, \quad (1)$$

где e — заряд электрона, $\omega_{H_0} = \omega_H (1 - \beta^2)^{-1/2}$ — гирочастота электрона, ω и n_j — частота и показатель преломления j -ой нормальной волны, $\vartheta = \arccos \mu$ — угол между магнитным полем H_0 и волновым вектором \mathbf{k} , $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ и $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ — поперечная ($\perp H_0$) и продольная ($\parallel H_0$) составляющие скорости электрона, отнесенные к скорости света c , J_s — функция Бесселя от действительного аргумента $z = \frac{\omega}{\omega_H} n_j \beta_{\perp} \sin \vartheta$, номер гармоники $s = \frac{\omega}{\omega_H} (1 - \beta_{\parallel} n_j \cos \vartheta)$. Коэффициент a_j следующим образом выражается через поперечную ($\perp \mathbf{k}$) и продольную ($\parallel \mathbf{k}$) поляризации j -ой волны K_j и Γ_j :

$$a_j = \frac{K_j (\cos \vartheta - n_j \beta_{\parallel}) + \Gamma_j \sin \vartheta}{\beta_{\perp} n_j \sin \vartheta}.$$

* Выражение (1) определяет интенсивность излучения в поперечные волны. Аналогичный вид имеет формула для излучения плазменных волн [5].

Используя известные преобразования функций Бесселя, а также асимптотические представления J_s высокого порядка ($s \gg 1$; $s \gg z$) через функцию Макдональда $K_{1/3}$ (см., например, [3]), выражение (1) можно преобразовать к виду

$$W_{j\omega} = \frac{4e^2\omega^2}{\pi^2\sqrt{3}c\omega_H} \int_{p^*}^{\infty} dp \{ \Psi_1(p) K_{1/3}(p) + \Psi_2(p) K_{2/3}(p) \}, \quad (2)$$

где

$$\Psi_1^J = \int_{v^*}^1 \frac{dv}{(1-v^2)^{1/2}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right) \frac{n_j \beta_{\perp}^2}{1+K_i^2} \left(\frac{3p}{2s} \right)^{1/3} \left\{ a_{j\pm}^2 + \frac{v^2(3p/2s)^{2/3}}{1-(3p/2s)^{2/3}} + 1 - v^2 \right\}, \quad (3a)$$

$$\Psi_2^J = \int_{v^*}^1 \frac{dv}{(1-v^2)^{1/2}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right) \frac{n_j \beta_{\perp}^2}{1+K_i^2} \left(\frac{3p}{2s} \right)^{2/3} a_{j\pm}. \quad (3б)$$

В формулах (2)–(3б) старая переменная интегрирования $\mu = \cos \vartheta$ связана с переменными p и v соотношением

$$p = \frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_H} (1 - \beta_{\parallel} n_j \cos \vartheta) \left[1 - v^2 \frac{n_j^2 \beta_{\perp}^2 \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta_{\parallel} n_j \cos \vartheta)^2} \right]^{3/2}. \quad (4)$$

а коэффициент $a_{j\pm}$ имеет вид $a_{j\pm} = \frac{1}{2} [a_j(\theta^+) + a_j(\theta^-)]$, где θ^+ и θ^-

являются разными ветвями двузначной функции $\theta(p)$, определяемой с помощью (4). Предел интегрирования p^* в (2) равен минимальному значению $p(\mu)$ при $v = 1$, а v^* в (3a)–(3б) определяется из (4), куда нужно подставить ϑ , при котором p минимально (при фиксированном v).

Дальнейшие упрощения формул (2)–(3б) связаны с тем обстоятельством, что $K_{1/3}(p)$ быстро убывает с увеличением p (экспоненциально при $p > 1$). Поэтому излучение на высоких гармониках будет не экспоненциально малым лишь при $p^* \ll 1$, что при $s \gg 1$ соответствует условию $1 - \beta_{\parallel}^2 n_j^2 \ll 1$. При этом основной вклад в интеграл по p в (2) будут давать близкие к p^* значения p . При $s \gg 1$ значениям $p - p^* \sim 1$ соответствуют интервалы $\Delta\mu = \mu - \mu^* \sim \frac{1}{s} \ll 1$ и $1 - v \sim \frac{1}{s} \ll 1$, что

объясняется узкой диаграммой направленности излучения. В этом случае выражение (4) для p , а также подынтегральная функция в (3) могут быть представлены в виде рядов по $\Delta\mu = \mu - \mu^*$ и $\Delta v = 1 - v$. Это, в свою очередь, позволяет вычислить интегралы (3a)–(3б). Используя следующие условия и обозначения:

$$v^* = 1 + \frac{p^{*2/3} - p^{2/3}}{\xi_1}; \quad \frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{1}{3V\xi_1\xi_2} \frac{p^{-1/3}}{\sqrt{v-v^*}};$$

$$\xi_1 = \left(\frac{\partial p^{2/3}}{\partial v} \right)_{v=1, \mu=\mu^*} = 2n_j^2 \beta_{\perp}^2 \left(\frac{2\omega}{3\omega_{H\perp}} \right)^{2/3},$$

получим окончательное выражение для $W_{j\omega}$ в случае, когда n_j слабо зависит от ϑ (тогда, в частности, $2\xi_2 = \left(\frac{\partial^2 p^{2/3}}{\partial \mu^2} \right)_{v=1, \mu=\mu^*} = 2 \frac{n_j^2 \beta_{\perp}^4}{\beta_{\perp}^2} \times \left(\frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_{H\perp}} \right)^{2/3}$):

$$\begin{aligned}
 W_{j\omega} = & \frac{e^2 \omega}{2\pi \sqrt{3} c} \left\{ (1 - n_j^2 \beta^2) \left[\int_{p^*}^{\infty} K_{5/3}(p) dp + \frac{1 - K_j^2}{1 + K_j^2} K_{2/3}(p^*) \right] + \right. \\
 & + \frac{2}{1 + K_j^2} \left[\Gamma_j^2 - 2K_j \Gamma_j (1 - n_j^2 \beta^2) \frac{\beta_{\parallel}}{n^2 \beta_{\perp}^2} \right] \int_{p^*}^{\infty} K_{1/3}(p) dp + \\
 & \left. + \frac{2}{1 + K_j^2} \left[\Gamma_j - K_j (1 - n_j^2 \beta^2) \frac{\beta_{\parallel}}{n^2 \beta_{\perp}^2} \right] (1 - \beta^2 n_j^2)^{1/2} K_{1/3}(p^*) \right\}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где

$$p^* = \frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_{H\perp}} (1 - n_j^2 \beta^2)^{3/2}.$$

Аналогичным образом, используя общее выражение из [5], можно получить формулу для интенсивности излучения электронных плазменных волн на высоких гармониках. В этом случае $W_{3\omega}$ также описывается формулой (2), но функции Ψ_1^J и Ψ_2^J теперь равны

$$\Psi_1^3 = \left| \frac{\omega^2 - \omega_{H_0}^2}{R\omega_L^2} \right| \left(\frac{3\omega_{H\perp}}{2\omega} \right)^{2/3} \frac{1}{\beta_T^2 n_3 \sqrt{2\xi_2}}; \quad \Psi_2^3 = 0, \quad (6)$$

где ω_L — плазменная частота, $v_T = \beta_T c$ — тепловая скорость электронов плазмы, а R выражается известным образом через μ и ω_{H_0}/ω (см. [5]). Как и прежде, $2\xi_2 = (\partial^2 p^{2/3}/\partial \mu^2)_{v=1, \mu=\mu^*}$.

Рассмотрим теперь пределы применимости и точность полученных формул. Во-первых, необходимо, чтобы $\beta_{\perp}^2/\beta^2 \gg 1 - n_j^2 \beta^2$. В случае обратного неравенства излучение становится дипольным с максимумом на первой гармонике, причем направление максимального излучения совпадает с направлением H_0 . Второе условие, которое накладывается при выводе полученных соотношений, есть $s \geq z$ или $\beta^2 n_j^2 \leq 1$. Однако не составляет особых трудностей и рассмотрение более общего случая, когда $n_j \beta$ может быть больше единицы. Здесь существенно то обстоятельство, что при $n_j^2 \beta^2 = 1$ в интенсивности излучения не появляется никаких особенностей. При этом в случае $n_j^2 \beta^2 > 1$ в выражении (2) следует провести замену

$$K_{1/3}(p) \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}} \{J_{1/3}(p') + J_{-1/3}(p')\}, \quad (7)$$

где p' определяется той же формулой (4), что и p , в которой нужно только выражение в квадратных скобках умножить на (-1) . Асимптотика обоих выражений в (7) при $n_j^2 \beta^2 \rightarrow 1$, ($p, p' \rightarrow 0$) одинакова, но при больших p и p' поведение функций Бесселя порядка $\pm 1/3$ другое — вместо экспоненциального спада появляются быстро осциллирующие члены, спадающие довольно медленно. Поэтому оценки точности формул требуют в этом случае специального рассмотрения.

В случае $n_j^2 \beta^2 < 1$ точность окончательных формул можно оценить с помощью следующих членов разложения по Δr и Δv . Эти члены оказываются порядка $O(s^{-2/3})$ по сравнению с членами нулевого приближения.

Из формул (5) — (6) можно получить ряд новых закономерностей. Прежде, однако, отметим, что движение излучающего электрона по спирали (а не по окружности) отражается в общей формуле заменой ω_H на

$\omega_{H\perp}$ и в неявной зависимости коэффициентов поляризации K_j и Γ_j от β_{\parallel} , куда вместо μ нужно подставить угол, определяющий направление максимальной интенсивности излучения $\mu^* = n_j \beta_{\parallel} / \beta^2$.

Формула (5) имеет простую структуру. Первый член в этом выражении соответствует синхротронному излучению электрона в изотропной среде. Два других слагаемых появляются из-за различия в поляризации нормальных волн в анизотропной среде. Оценим эти члены для случая релятивистского электрона в магнитоактивной плазме. При $\omega_{H_0} \ll \omega$ имеем

$$\Gamma_j \simeq \frac{\omega_{H_0}}{\omega} \frac{\omega_L^2 \sin^2 \vartheta^*}{\omega^2 - \omega_L^2} \simeq \frac{\omega_{H_0}}{\omega} \frac{\omega_L^2 n_j \beta_{\perp}}{\beta^2 (\omega^2 - \omega_L^2)}, \quad (8)$$

$$K_j = \pm 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{H_0} \omega}{\omega^2 - \omega_L^2} \frac{n_j \beta_{\perp}^2}{\beta^2 (\beta_{\parallel} + n_j \sqrt{1 - n_j^4 \beta_{\parallel}^4})}.$$

Рассмотрим сначала случай $\omega^2 \gg \omega_L^2$. При этом $\Gamma_j = \omega_{H_0} \omega_L^2 / \omega^3$. В случае, когда влияние среды невелико, т. е. на частотах $\omega \gg \omega_L$ (ε / mc^2)², где ε — энергия электрона и m — его масса покоя, максимум спектральной интенсивности приходится на частоту $\omega \simeq 0,3\omega_c = 0,45 \omega_{H\perp} (1 - \beta^2 n_j^2)^{-3/2}$ ($\rho^* = 0,3$). Порядок множителя, учитывающего анизотропию,

$$\Gamma_j (1 - n_j^2 \beta^2)^{-1/2} \simeq \frac{1 - n_j^2 \beta^2}{0,9 (1 - \beta^2)^{1/2}} \simeq 2mc^2 / \varepsilon. \quad (9)$$

Когда влияние среды становится существенным, максимум в спектре излучения смещается к частоте $\sqrt{2} \omega_L \varepsilon / mc^2$. Здесь множитель анизотропии

$$\Gamma_j (1 - n_j^2 \beta^2)^{-1/2} \simeq \omega_{H_0} / 2\sqrt{3} \omega_L. \quad (10)$$

Так как при этом должно выполняться неравенство $2\omega_L / \omega_{H_0} (mc^2 / \varepsilon) \gg 1$ [6], то (10) имеет тот же порядок mc^2 / ε , что и (9). Итак, при синхротронном излучении в плазме на частотах, далеких от плазменной, влияние анизотропии несущественно.

Однако при приближении ω к ω_L эффекты анизотропии становятся существенными даже еще до перехода к плазменным волнам. Во-первых, здесь растут параметры Γ_j и K_j . Во-вторых, для необыкновенной волны с квазиперечным распространением показатель преломления может превышать единицу. Рассматривая область частот, где $n_j^2 \beta^2 \simeq 1$, с помощью (5) нетрудно получить

$$W_{\omega_j} \simeq 2e^2 \Gamma_j^2 / 3c (1 + K_j^2). \quad (11)$$

Здесь оставлен лишь наибольший член, пропорциональный Γ_j^2 .

Таким образом, при расчете синхротронного излучения релятивистских частиц на частотах, близких к плазменной, учет анизотропии является определяющим. Конкретизируем выражение (11), используя условие $n_j \beta = 1$ и известные формулы для K_1 и Γ_1 в интересующем нас случае $\omega \simeq \omega_L$. Для квазиперечного распространения имеем

$$\frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega_H^2} \simeq mc^2 / \varepsilon, \quad \Gamma_1 = \frac{3\omega_L}{\omega_H} \frac{\varepsilon}{mc^2}. \quad (12)$$

Так как $K_1 = 0$, то окончательно из (11)

$$W_{\omega 1} = \frac{6e^2 \omega_L^3}{c v_H^2} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2. \quad (13)$$

Это излучение сосредоточено в узкой полосе частот $\Delta\omega \simeq (mc^2/\varepsilon)^2 \omega_H^2/2\omega_L$, так что полные потери энергии $W \sim 3e^2\omega_L^2/c$ совпадают по порядку величины с поляризационными потерями.

Выше рассматривалось излучение в холодной плазме с температурой $T = 0$. Оценим теперь интенсивность синхротронного излучения плазменных волн. Для простоты ограничимся случаем $\omega \gg \omega_H$. Тогда $n_3^2 \simeq (\omega^2 - \omega_L^2)/3\beta_T^2\omega_L^2$ и, используя формулы (2) и (6), получим следующее выражение для $W_{\omega 3}$ ($n_3^2\beta^2 \leq 1$):

$$W_{\omega 3} = \frac{e^2 v_0 \omega^3}{3\sqrt{3} \pi \omega_L^2 v_T^2} \int_{p^*(\omega)}^{\infty} K_{1/3}(p) dp |_{p^*=0} \simeq \frac{e^2 v_0 \omega}{9 v_T^2}. \quad (14)$$

При этом полная интенсивность излучения

$$W_s \simeq \frac{e^2 \omega_L^2}{v_0} \frac{\Gamma(2/3)}{2\pi\sqrt{3}} \frac{1}{s^{2/3}}; \quad s = (2\omega^2/3\omega_H^2)^{1/2}. \quad (15)$$

Так как $\beta s^{-2/3} \ll 1$, то интенсивность излучения (15) значительно меньше, чем в предыдущем случае излучения электромагнитных волн в среде с $n \leq 1$. Последний результат объясняется тем, что в случае плазменных волн из-за более резкого изменения показателя преломления в зависимости от частоты $\left(\frac{dn_3}{d\omega} \sim \frac{1}{\beta_T} \frac{dn_2}{d\omega} \right)$ синхротронное излучение происходит в значительно более узком интервале частот, чем в случае электромагнитных волн. Напомним, что в магнитоактивной плазме разделение на плазменную ветвь и электромагнитную ветвь — условное понятие; мы считаем плазменной волну с большим значением показателя преломления.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 4, 584, № 6, 921 (1960).
2. В. В. Железняков, ЖЭТФ (в печати).
3. В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 5, 918 (1963).
4. В. В. Железняков, Радионизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
5. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 41, 1971 (1961).
6. В. В. Железняков, В. Ю. Трахтенгерц, Астрон. ж., 62, 1005 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 апреля 1966 г.

TO THE THEORY OF SYNCHROTRON RADIATION IN MAGNETO-ACTIVE PLASMA

S. A. Kaplan, V. Yu. Trakhtenherz

An expression is obtained for the intensity of the synchrotron radiation of a relativistic electron, moving at an arbitrary angle in an anisotropic medium. The case when $n_j \beta \ll 1$ is considered in detail and there discussed the case when $n_j \beta > 1$ (n_j is the refractive index, $v = \beta c$ is the total electron velocity). For the synchrotron radiation in a magnetoactive plasma the anisotropy influence is essential only in the close vicinity of the plasma frequency.

УДК 621 371.182

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАДИАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д. Д. Цхакая

Дан вывод кинетических уравнений для электронов и фотонов в однородной плазме, находящейся в сильном магнитном поле, при условии, что основным механизмом взаимодействия служат радиационные столкновения.

Кинетические уравнения для электронов и излучаемых ими фотонов в плазме, находящейся в сильном магнитном поле, выводились в ряде работ [1, 2]. При этом исходили из квантового описания электрон-фотонного взаимодействия. Так как в основном излучаются фотоны, энергии которых мала по сравнению с энергией электрона, то, используя метод Фоккера—Планка, получались классические выражения для радиационных интегралов столкновений.

В настоящей работе кинетические уравнения для электронов и фотонов в плазме, находящейся в сильном магнитном поле H_0 ($\omega_H \tau_e \gg 1$, ω_H — гирочастота электрона, τ_e — время свободного безрадиационного пробега электрона), выводятся на основе классических уравнений движения и уравнений Максвелла.

Мы будем исходить из системы уравнений для корреляционных функций электронов и фотонов, пренебрегая в них корреляцией электронов и фотонов во втором приближении теории возмущений [3]. Для упрощения вычислений будем считать, что самосогласованное поле равно нулю (в теории возмущений его легко можно восстановить в окончательных результатах). Мы не будем также учитывать эффектов, связанных с продольным электрическим полем, которое, как известно, приводит к кулоновским столкновениям [4].

1. Микроскопическое состояние системы электронов и электромагнитного поля задано, если в данный момент времени t известны значения микроскопической фазовой плотности электронов

$$\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \quad (1)$$

в каждой точке шестимерного фазового пространства \mathbf{r}, \mathbf{p} и микроскопические значения напряженностей электрического и магнитного полей \mathbf{E}, \mathbf{H} в любой точке \mathbf{r} (N — полное число электронов, $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{p}_i(t)$ — радиус-вектор и импульс i -го электрона). Производная по времени от функции $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ равна, очевидно,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \nabla) \hat{f} - \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) \quad (2)$$

где \mathbf{v} — скорость электрона и $F_i(\mathbf{r}_i, t)$ — полная сила, действующая на i -й электрон.

В выражении для силы F_i выделим лоренцову силу лучистого трения, представив в ней напряженности электрического и магнитного полей, созданных самим i -м электроном, в виде полуразности и полусуммы запаздывающих E_s^r, H_s^r и опережающих E_s^a, H_s^a напряженностей:

$$F_i(\mathbf{r}_i, t) = \dot{\mathbf{p}}_i(t) = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{H}_0] + e \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{H}(\mathbf{r}_i, t)] \right\} + \\ + e \left\{ \frac{1}{2} (E_s^r(\mathbf{r}_i) - E_s^a(\mathbf{r}_i)) + \frac{1}{c} \left[\mathbf{v}_i, \frac{1}{2} (H_s^r(\mathbf{r}_i) - H_s^a(\mathbf{r}_i)) \right] \right\} + \\ + e \left\{ \frac{1}{2} (E_s^r(\mathbf{r}_i) + E_s^a(\mathbf{r}_i)) + \frac{1}{c} \left[\mathbf{v}_i, \frac{1}{2} (H_s^r(\mathbf{r}_i) + H_s^a(\mathbf{r}_i)) \right] \right\}, \quad (3)$$

где e и \mathbf{v}_i — заряд и скорость i -го электрона, c — скорость света.

Первый член в выражении для силы обусловлен внешним магнитным полем \mathbf{H}_0 , второй член представляет собой лоренцову силу, действующую на i -ый электрон, который в момент времени t находится в точке \mathbf{r}_i , со стороны всех остальных электронов. Последний член, содержащий полусуммы напряженностей собственных электрического и магнитного полей в точке нахождения самого электрона, как известно, приводит к полевой добавке Δm неполевой массе электрона m . Энергия и импульс электрона при этом будут равны

$$\varepsilon = \frac{(m + \Delta m) c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{(m + \Delta m) \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Подставляя (3) в (2), получим следующее уравнение для микроскопической функции распределения:

$$\frac{\hat{\partial} f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \hat{f} + \frac{ec}{\varepsilon} [\mathbf{p}, \mathbf{H}_0] \frac{\hat{\partial} f}{\partial \mathbf{p}} = -e \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{c}{\varepsilon} [\mathbf{p}, \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \right\} \times \\ \times \frac{\hat{\partial} f}{\partial \mathbf{p}} - e \left\{ \frac{1}{2} (E_s^r(\mathbf{r}) - E_s^a(\mathbf{r})) + \frac{c}{\varepsilon} \left[\mathbf{p}, \frac{1}{2} (H_s^r(\mathbf{r}) - \right. \right. \\ \left. \left. - H_s^a(\mathbf{r})) \right] \right\} \frac{\hat{\partial} f}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4)$$

Микроскопическая функция распределения (1) является функцией точных координат $\mathbf{r}_i(t)$ и импульсов $\mathbf{p}_i(t)$ всех электронов. (Аналогичная ситуация будет иметь место и для фотонной функции распределения, определение которой будет дано ниже.)

Для макроскопического описания электрон-фотонной системы нас будет интересовать усредненные по статистическому ансамблю электронного газа значения микроскопических функций распределения электронов и фотонов [4]. Будем обозначать статистическое усреднение чертой

сверху. Для функции распределения электронов $f = \hat{f}$ из (4) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f - \omega_H \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \text{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{I}^{(e)}, \quad (5)$$

где

$$I^{(r)} = -e \left\{ \overline{E(\mathbf{r}, t) + \frac{c}{\varepsilon} [\mathbf{p}, \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]} \right\} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - \quad (6)$$

$$- e \left\{ \frac{1}{2} (E_s^r(\mathbf{r}) - E_s^a(\mathbf{r})) + \frac{c}{\varepsilon} \left[\mathbf{p}, \frac{1}{2} (\mathbf{H}_s^r(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_s^a(\mathbf{r})) \right] \right\} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

$\omega_H = eH_0c/\varepsilon$, φ — азимутальный угол импульса электрона в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю H_0 . Радиационный интеграл столкновений для электронов мы представили в виде дивергенции от вектора $I^{(r)}$, который мы будем называть электронным радиационным током.

Разложим напряженности электрического и магнитного полей $E(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, а также функцию $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в ряды Фурье по переменной \mathbf{r} :

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Тогда радиационный ток $I^{(r)}$, согласно (6), примет вид

$$I^{(r)} = -e \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}] \left\{ \overline{E_{\mathbf{k}} \hat{f}_{-\mathbf{k}'}} + \frac{c}{\varepsilon} [\mathbf{p}, \overline{H_{\mathbf{k}} \hat{f}_{-\mathbf{k}'}}] \right\} - \quad (7)$$

$$- e \left\{ \frac{1}{2} (E_s^r - E_s^a) + \frac{c}{\varepsilon} \left[\mathbf{p}, \frac{1}{2} (\mathbf{H}_s^r - \mathbf{H}_s^a) \right] \right\} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t).$$

Полуразности напряженностей собственных полей электрона, движущегося в магнитном поле H_0 , в точке нахождения самого электрона хорошо известны [5]:

$$\frac{1}{2} (E_s^r - E_s^a) = - \frac{2e^3 H_0^2}{3\varepsilon^2 mc} \frac{p_{\perp}}{(1 - v^2/c^2)(1 - v^2/c^2)^{1/2}}; \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{H}_s^r - \mathbf{H}_s^a) = \frac{2e^3 H_0}{3\varepsilon^2 mc} \frac{p_z}{mc} \frac{[\mathbf{p}_{\perp}, \mathbf{H}_0]}{1 - v^2/c^2},$$

где \mathbf{p}_{\perp} — вектор с составляющими $(p_x, p_y, 0)$, внешнее магнитное поле H_0 направлено вдоль оси z .

Как уже указывалось, мы не будем интересоваться эффектами, связанными с продольным электрическим полем. Для фурье-компонент поперечных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей из уравнений Максвелла получим

$$i[\mathbf{k}, E_{\mathbf{k}}] = - \frac{1}{c} \frac{\partial H_{\mathbf{k}}}{\partial t}, \quad (\mathbf{k}E_{\mathbf{k}}) = (\mathbf{k}H_{\mathbf{k}}) = 0, \quad (9)$$

$$i[\mathbf{k}, H_{\mathbf{k}}] = \frac{1}{c} \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} I_{\mathbf{k}},$$

где $I_{\mathbf{k}}$ — фурье-компонента поперечной составляющей электрического тока.

Удобно ввести следующие комбинации величин $\overline{E_k \hat{f}_{-k'}}$ и $\overline{H_k \hat{f}_{-k'}}$:

$$Z_{\pm} = \overline{E_k \hat{f}_{-k'}} \pm i \overline{H_k \hat{f}_{-k'}},$$

для которых с помощью (4) и (9) получим уравнение

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - i(\mathbf{v}\mathbf{k}') - \omega_H \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} Z_{\pm} \mp c [\mathbf{k}Z_{\pm}] = \mathbf{g}_{\pm}. \quad (10)$$

Здесь

$$\mathbf{g}_{\pm} = \mathbf{g}_1 \pm i\mathbf{g}_2,$$

$$\mathbf{g}_1 = -4\pi I_k \hat{f}_{-k'} - e \sum_{k''} \overline{E_k \left\{ E_{-k''} + \frac{c}{\varepsilon} [p, H_{-k''}] \right\}} \frac{\partial \hat{f}_{k''-k'}}{\partial p_i} -$$

$$- e E_k \left\{ \frac{1}{2} (E_s^r - E_s^a) + \frac{c}{\varepsilon} \left[p, \frac{1}{2} (H_s^r - H_s^a) \right] \right\} \frac{\partial \hat{f}_{-k'}}{\partial p_i};$$

$$\mathbf{g}_2 = -e \sum_{k''} \overline{H_k \left\{ E_{-k''} + \frac{c}{\varepsilon} [p, H_{-k''}] \right\}} \frac{\partial \hat{f}_{k''-k'}}{\partial p_i} -$$

$$- e H_k \left\{ \frac{1}{2} (E_s^r - E_s^a) + \frac{c}{\varepsilon} \left[p, \frac{1}{2} (H_s^r - H_s^a) \right] \right\} \frac{\partial \hat{f}_{-k'}}{\partial p_i},$$

$$(\mathbf{k}\mathbf{g}_1) = (\mathbf{k}\mathbf{g}_2) = (\mathbf{k}Z_{\pm}) = 0.$$

В правую часть уравнения (10), как мы видим, входят третьи моменты $\overline{EE\hat{f}}$ и $\overline{EH\hat{f}}$. Для изменения со временем этих величин можно получить уравнения (аналогичные уравнению (10)), в первую часть которых будут входить уже четвертые моменты. Так как взаимодействие между электронами и фотонами слабое, цепочку уравнений можно оборвать на уравнении (10), сделав в нем следующие замены:

$$\overline{EE\hat{f}} \rightarrow \overline{EE}f, \quad \overline{EH\hat{f}} \rightarrow \overline{EH}f, \quad \overline{I_k\hat{f}} \rightarrow \overline{I_k}f.$$

Тогда для величин \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 получим

$$\mathbf{g}_1 = -e \sum_{k''} \overline{E_k \left\{ E_{-k''} + \frac{c}{\varepsilon} [p, H_{-k''}] \right\}} \frac{\partial f_{k''-k'}}{\partial p_i}; \quad (11)$$

$$\mathbf{g}_2 = -e \sum_{k''} \overline{H_k \left\{ E_{-k''} + \frac{c}{\varepsilon} [p, H_{-k''}] \right\}} \frac{\partial f_{k''-k'}}{\partial p_i}.$$

(Мы учли, что $\overline{E} = \overline{H} = \overline{I} = 0$.)

Будем искать решение уравнения (10) в виде

$$Z_{\pm} = \exp \left\{ -i \frac{v_{\perp} k'}{\omega_H} \sin \theta' \sin (\varphi - \psi') \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{\pm}^n \exp [in(\varphi - \psi')], \quad (12)$$

где ψ' и θ' — азимутальный и полярный углы волнового вектора $\mathbf{k}' (k' \sin \theta' \cos \psi', k' \sin \theta' \sin \psi', k' \cos \theta')$, v_{\perp} — поперечная составляющая скорости электрона по отношению к магнитному полю H_0 .

Для величины U_{\pm}^n из (10) получаем следующее уравнение:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - i v_z k'_z - i n \omega_H \right\} U_{\pm}^n \mp c [\mathbf{k}, U_{\pm}^n] = q_{\pm}^n, \quad (13)$$

где

$$q_{\pm}^{(n)} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n-n'}(\alpha') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}_{\pm} \exp[-in'(\varphi - \psi')] d(\varphi - \psi') \quad (14)$$

и v_z , k'_z — продольные составляющие скорости электрона и волнового вектора \mathbf{k}' по отношению к магнитному полю \mathbf{H}_0 , J_n — функция Бесселя, $\alpha' = v_{\perp} k'_{\perp} / \omega_H$. При выводе (13) мы воспользовались равенством

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(inx - ia \sin x) dx = J_n(a).$$

Предположим, что характерное время τ_e изменения электронной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и характерное время изменения величин $\overline{E_k E_{-k'}}$, $\overline{E_k H_{-k'}}$, $\overline{H_k H_{-k'}}$ («фотонной функции распределения»), которое мы будем обозначать через τ_p , удовлетворяют неравенствам $\omega_H \tau_e v_z / c \gg 1$, $\omega_H \tau_p v_z / c \gg 1$. Решение уравнения (13) в этом случае имеет вид

$$U_{\pm}^n = \frac{\{\delta - i v_z k'_z - i n \omega_H\} q_{\pm}^n \pm c [\mathbf{k}, q_{\pm}^n]}{\{\delta - i v_z k'_z - i n \omega_H\}^2 + c^2 k^2},$$

$$\delta \rightarrow +0.$$

Используя полученное выражение, а также формулы (12), (14), для величин $\overline{E_k \hat{f}_{-k'}}$ и $\overline{H_k \hat{f}_{-k'}}$ получим

$$\overline{E_k \hat{f}_{-k'}} = -\frac{i^s}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A (ck - v_z k'_z - n \omega_H - i\delta)^{-1} \times$$

$$\times \exp[in(\varphi - \psi') - ia' \sin(\varphi - \psi')] + \left(\begin{matrix} \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}' \end{matrix} \right)^* ; \quad (15)$$

$$\overline{H_k \hat{f}_{-k'}} = -\frac{i^s}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nA] (ck - v_z k'_z - n \omega_H - i\delta)^{-1} \times$$

$$\times \exp[in(\varphi - \psi') - ia' \sin(\varphi - \psi')] + \left(\begin{matrix} \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}' \end{matrix} \right)^* ,$$

где

$$A = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n-n'}(\alpha') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\mathbf{g}_1 - [n, \mathbf{g}_2]\} \exp[-in'(\varphi - \psi')] d(\varphi - \psi');$$

$$n = \mathbf{k} / |\mathbf{k}|.$$

В выражениях (15) скобкой мы обозначили для краткости члены, которые получаются из первых членов соответствующих выражений путем комплексного сопряжения и замены $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}'$,

Разложим фурье-компоненты напряженностей электрического и магнитного полей по единичным векторам поляризации $e_{k\lambda}$, представив их в виде

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 (\mathcal{E}_{k\lambda} + \mathcal{E}_{-k\lambda}^*) e_{k\lambda}; \quad (16)$$

$$H_k = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 (\mathcal{E}_{k\lambda} - \mathcal{E}_{-k\lambda}^*) [n, e_{k\lambda}].$$

С помощью этих соотношений, а также формул (11), для вектора A получим

$$A = -\frac{e}{2} \sum_{k''} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 e_{k\lambda} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n-n'}(\alpha') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\varphi - \psi') \times \\ \times \exp[-in'(\varphi - \psi')] \left\{ \overline{\mathcal{E}_{k''\lambda'} \mathcal{E}_{k\lambda}} \left(e_{k''\lambda'} + \frac{c}{\varepsilon} [p[n'', e_{k''\lambda'}]] \right) + \right. \\ \left. + \overline{\mathcal{E}_{k\lambda} \mathcal{E}_{-k''\lambda'}} \left(e_{k''\lambda'} - \frac{c}{\varepsilon} [p[n'', e_{k''\lambda'}]] \right) \right\} \frac{\partial f_{k''-k'}}{\partial p_i}.$$

Величина $\overline{\mathcal{E}_{k\lambda} \mathcal{E}_{k'\lambda'}}$ следующим образом связана с функцией распределения фотонов $N_{\lambda\lambda'}(k, k')$:

$$N_{\lambda\lambda'}(k, k') = \frac{V}{8\pi} \frac{1}{\hbar \sqrt{\omega\omega'}} \overline{\mathcal{E}_{k\lambda} \mathcal{E}_{k'\lambda'}}, \quad (17)$$

где V — объем системы, $\omega = c|k|$, \hbar — постоянная Планка.

Составляя с помощью (9) уравнение для $\overline{\mathcal{E}_{k\lambda} \mathcal{E}_{-k'\lambda'}}$ (см. ниже вывод кинетического уравнения для фотонной функции распределения), можно показать, что, если частота фотона велика по сравнению с частотой соударений $\omega_{H\tau_p} \gg 1$ (т. е. когда вообще возможно ввести понятие фотона), то величина $\overline{\mathcal{E}_{k\lambda} \mathcal{E}_{-k'\lambda'}}$ в нулевом приближении по малому параметру $1/\omega_{H\tau_p}$ равна нулю. Следовательно, выражение для вектора A в этом приближении можно представить в виде

$$A = -\frac{4\pi e}{V} \sum_{k''} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \hbar \sqrt{\omega\omega''} N_{\lambda'\lambda}(k'', k) e_{k\lambda} \times \\ \times \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n-n'}(\alpha') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-in'(\varphi - \psi')] d(\varphi - \psi') \times \\ \times \left\{ e_{k''\lambda'} + \frac{c}{\varepsilon} [p[n'', e_{k''\lambda'}]] \right\} \frac{\partial f_{k''-k'}}{\partial p_i}.$$

Рассмотрим пространственно однородную плазму. Для не зависящей от координат функции распределения электронов $f(p, t)$ из (5) получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \omega_H \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \text{div}_p I^{(e)},$$

Будем искать функцию $f(\mathbf{p}, t)$ в виде разложения по степеням малого параметра $1/\omega_H \tau_e$:

$$f = f_0 + f_1 + \dots$$

и соответственно

$$I^{(r)}\{f, N\} = I^{(r)}\{f_0, N\} + I^{(r)}\{f_1, N\} + \dots$$

Функции f_0, f_1, \dots определяются из уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0; \tag{18}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \omega_H \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = \text{div}_{\mathbf{p}} I^{(r)}\{f_0, N\};$$

.....

Как мы видим, функция распределения электронов в нулевом приближении $f_0(\mathbf{p}, t)$ не зависит от азимутального угла φ . Усредняя (18) по углу φ (при этом следует учитывать, что f_1 и $I^{(r)}$ периодичны по углу φ с периодом 2π), для функции $f_0(\mathbf{p}, t)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} (p_{\perp} \overline{I_{\perp}^{(r)}}\{f_0, N\}^{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial p_z} \overline{I_z^{(r)}}\{f_0, N\}^{\varphi}, \tag{19}$$

где $\overline{I_{\perp}^{(r)}}^{\varphi}$ и $\overline{I_z^{(r)}}^{\varphi}$ — усредненные по углу φ значения поперечной и продольной (по отношению к магнитному полю \mathbf{H}_0) составляющих радиационного тока:

$$\overline{I_{\perp}^{(r)}}^{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{\perp}^{(r)} d\varphi, \quad \overline{I_z^{(r)}}^{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_z^{(r)} d\varphi,$$

где

$$I_{\perp}^{(r)} = I_x^{(r)} \cos \varphi + I_y^{(r)} \sin \varphi.$$

Для пространственно однородных функций распределения имеем

$$N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'); \tag{20}$$

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) = f(\mathbf{p}, t) \Delta(\mathbf{k})$$

($\Delta(\mathbf{k}) = 0$, если $\mathbf{k} \neq 0$, и $\Delta(\mathbf{k}) = 1$ при $\mathbf{k} = 0$).

С помощью этих соотношений для вектора \mathbf{A} получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\{f_0, N\} = & -\frac{4\pi\hbar\omega}{V} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{k\lambda'} \left[(\mathbf{e}_{k\lambda} \mathbf{B}(\mathbf{k})) \times \right. \\ & \times \left\{ \frac{1}{p_{\perp}} \left(\frac{\varepsilon}{c} - n_z p_z \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + n_z \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right\} - \frac{\varepsilon}{c^2 p_{\perp}} \frac{\omega - \varphi_2 k_{\parallel} - n\omega_H}{p_z k} \times \\ & \times \left. e_{k\lambda}^z B_z(\mathbf{k}) \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} p_z - \frac{\partial f_0}{\partial p_z} p_{\perp} \right\} \right] \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{21} \end{aligned}$$

где

$$B_x(\mathbf{k}) = \frac{ec^2 p_\perp}{2\varepsilon} \{e^{-i\psi} J_{n+1}(\alpha) + e^{i\psi} J_{n-1}(\alpha)\};$$

$$B_y(\mathbf{k}) = i \frac{ec^2 p_\perp}{2\varepsilon} \{e^{-i\psi} J_{n+1}(\alpha) - e^{i\psi} J_{n-1}(\alpha)\};$$

$$B_z(\mathbf{k}) = \frac{ec^2 p_z}{\varepsilon} J_n(\alpha).$$

Радиационные токи $\overline{I_x^{(r)^\varphi}}$ и $\overline{I_z^{(r)^\varphi}}$ в однородном случае, согласно формулам (7), (8), (15) и (21), будут равны

$$\begin{aligned} \overline{I_x^{(r)^\varphi} \{f_0, N\}^\varphi} &= \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k} \frac{\omega}{cp_\perp} \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos \theta \right) \frac{\hbar\omega}{c} \times \\ &\times \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_z} \cos \theta + \frac{1}{p_\perp} \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos \theta \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right] \times \\ &\times \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) R_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}) \delta(\omega - v_z k_z - n\omega_H) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{cp_\perp} \frac{2e^4 H_0^2}{3m^2 c^6} \frac{v_\perp^2}{1 - v_z^2/c^2} (1 - v_z^2/c^2) f_0(\mathbf{p}, t); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \overline{I_z^{(r)^\varphi} \{f_0, N\}^\varphi} &= \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k} k_z \frac{\hbar\omega}{c} \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_z} \cos \theta + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{p_\perp} \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos \theta \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right] \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) R_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}) \times \\ &\times \delta(\omega - v_z k_z - n\omega_H) + \frac{v_z}{c} \frac{2e^4 H_0^2}{3m^2 c^6} \frac{v_\perp^2}{1 - v_z^2/c^2} f_0(\mathbf{p}, t), \end{aligned}$$

где

$$R_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega V} (\mathbf{e}_{k\lambda} \mathbf{B}(\mathbf{k}))^* (\mathbf{e}_{k\lambda'} \mathbf{B}(\mathbf{k})).$$

При получении последних выражений мы воспользовались соотношениями

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n J_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n J'_n = 0;$$

$$\frac{1}{x - i\delta} - \frac{1}{x + i\delta} = 2\pi i \delta(x)$$

($\delta(x)$ — дельта-функция).

Выражения (22) для радиационных токов $\overline{I_x^{(r)^\varphi}}$, $\overline{I_z^{(r)^\varphi}}$ и определяют радиационный интеграл столкновений для электронов в кинетическом уравнении (19).

Радиационные токи $\overline{I_x^{(r)^\varphi}}$ и $\overline{I_z^{(r)^\varphi}}$ можно преобразовать к виду, в каком они представлены в работе [2]. Для этого заметим, что имеют место следующие равенства;

$$\frac{\varepsilon}{cp_{\perp}} \frac{2e^4 H_0^2}{3m^2 c^6} \frac{v_{\perp}^2}{1 - v^2/c^2} (1 - v_z^2/c^2) = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k} \frac{\omega}{cp_{\perp}} \times$$

$$\times \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos \theta \right) \sum_{\lambda=1}^2 R_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}) \delta(\omega - v_z k_z - n\omega_H),$$

$$\frac{v_z}{c} \frac{2e^4 H_0^2}{3m^2 c^6} \frac{v_{\perp}^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k} k_z \sum_{\lambda=1}^2 R_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}) \delta(\omega - v_z k_z - n\omega_H).$$

Используя эти равенства, из (22) получим

$$\overline{I_{\perp}^{(r)}\{f_0, N\}^{\varphi}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k} \frac{\omega}{cp_{\perp}} \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos \theta \right) \times$$

$$\times \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ f_0 \delta_{\lambda\lambda'} + \frac{\hbar\omega}{c} \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_z} \cos \theta + \frac{1}{p_{\perp}} \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos \theta \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} \right] N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \right\} \times$$

$$\times R_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}) \delta(\omega - v_z k_z - n\omega_H);$$

$$\overline{I_z^{(r)}\{f_0, N\}^{\varphi}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k} k_z \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \left\{ f_0 \delta_{\lambda\lambda'} + \frac{\hbar\omega}{c} \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_z} \cos \theta + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{p_{\perp}} \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos \theta \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} \right] N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \right\} R_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}) \delta(\omega - v_z k_z - n\omega_H)$$

($\delta_{\lambda\lambda'}$ — символ Кронекера). Эти выражения для радиационных токов совпадают с выражениями, найденными в [2].

2. Перейдем к выводу кинетического уравнения для фотонной функции распределения $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Используя формулы (9), (16), (17), а также определение микроскопического электрического тока

$$\hat{I} = e \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

для функции $N_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + i(\omega - \omega') N_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) =$$

$$= -\frac{V}{2\hbar} \frac{e}{\sqrt{\omega\omega'}} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ v_{\lambda'} \overline{f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{p}, t) \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}(t)} + \right.$$

$$\left. + v_{\lambda} \overline{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) \varepsilon_{\mathbf{k}'\lambda'}^*(t)} \right\}. \quad (23)$$

Здесь $v_{\lambda} = (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{v})$ — составляющая скорости электрона вдоль вектора поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$.

Величину $\overline{f_{\mathbf{k}'}^* \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}}$ можно представить в виде

$$\overline{f_{\mathbf{k}'}^* \varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}} = \frac{1}{V^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r} - i\mathbf{k}\mathbf{r}') \overline{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{r}', t)}.$$

Выделим в выражении для $\overline{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{r}', t)}$ поле, созданное электроном, находящимся в точке \mathbf{r} ;

$$\overline{\hat{f}_{k'}^* \mathcal{E}_{k\lambda}} = (\mathbf{e}_{k\lambda}, \mathbf{E}_k \hat{f}_{-k'} - [n, \mathbf{H}_k \hat{f}_{-k'}]) + \\ + \frac{1}{V^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r} - i\mathbf{k}\mathbf{r}') f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathcal{E}_s^{(\lambda)}(\mathbf{r}', t).$$

Величина $\mathcal{E}_s^{(\lambda)}(\mathbf{r}', t)$ определяет поле в точке \mathbf{r}' в момент времени t , созданное электроном, который в тот же момент времени t находится в точке \mathbf{r} и обладает импульсом \mathbf{p} . Ясно, что $\mathcal{E}_s^{(\lambda)}$ в действительности является функцией разности $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$; поэтому мы будем ее обозначать через $\mathcal{E}_{sk}^{(\lambda)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Используя соотношения (15) для величины

$\overline{\hat{f}_{k'}^* \mathcal{E}_{k\lambda}}$, получим

$$\overline{\hat{f}_{k'}^* \mathcal{E}_{k\lambda}} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{e}_{k\lambda} \mathbf{A})}{\omega - v_z k_z - n\omega_H - i\delta} \exp[in(\varphi - \psi') - \\ - i\alpha' \sin(\varphi - \psi')] + f_{k'-k}^*(\mathbf{p}, t) \mathcal{E}_{sk}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, t), \quad (24)$$

где

$$\mathcal{E}_{sk}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}' \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] \mathcal{E}_s^{(\lambda)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \mathbf{p}, t).$$

Величину $\mathcal{E}_{sk}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, t)$ легко можно найти с помощью уравнений Максвелла, представив в них плотности заряда и электрического тока в следующем виде:

$$\rho(\mathbf{x}) = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)); \\ \mathbf{I}(\mathbf{x}) = e\mathbf{u}(\tau)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)), \quad (25)$$

где $\mathbf{r}_0(\tau)$ и $\mathbf{u}(\tau)$ определяют положение и скорость электрона, движущегося в магнитном поле \mathbf{H}_0 , в момент времени τ . Их следует определить таким образом, чтобы при $\tau = t$ $\mathbf{r}_0(t) = 0$ и $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}$.

Величина $\mathcal{E}_{sk}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, \tau)$, согласно (9), (25), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{E}_{sk}^{(\lambda)} + i\mathbf{ck} \mathcal{E}_{sk}^{(\lambda)} = -\frac{4\pi e}{V} u_\lambda(\tau) \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(\tau)],$$

где

$$r_{0x}(\tau) = \frac{v_\perp}{\omega_H} \{ \sin[\omega_H(\tau - t) - \varphi] + \sin \varphi \},$$

$$r_{0y}(\tau) = \frac{v_\perp}{\omega_H} \{ \cos[\omega_H(\tau - t) - \varphi] - \cos \varphi \},$$

$$r_{0z}(\tau) = v_z(\tau - t),$$

$$u_x(\tau) = v_\perp \cos[\omega_H(\tau - t) - \varphi], \quad u_z(\tau) = v_z = \text{const},$$

$$u_y(\tau) = -v_\perp \sin[\omega_H(\tau - t) - \varphi].$$

Предполагая, что при $\tau = -\infty$ электромагнитное поле исчезает, найдем

$$\varepsilon_{sk}^{(\lambda)}(\mathbf{p}, t) = \frac{i4\pi}{V} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e_{k'})B(\mathbf{k})}{\omega - v_z k_z - n\omega_H - i\delta} \exp[in(\varphi - \psi) - i\alpha \sin(\varphi - \psi)],$$

$$\delta \rightarrow +0.$$

Подставляя полученное выражение в (24) и воспользовавшись соотношениями (20), кинетическое уравнение (23) для пространственно однородной функции распределения фотонов после интегрирования по углу φ можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}) = - \sum_{\lambda''=1}^2 \{N_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{k}) \Gamma_{\lambda''\lambda}(\mathbf{k}) + \Gamma_{\lambda''\lambda'}(\mathbf{k}) N_{\lambda''\lambda}(\mathbf{k})\} + \nu_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}),$$

где

$$\Gamma_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) = - \frac{V}{2\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar\omega}{c} \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_z} \cos\theta + \frac{1}{p_{\perp}} \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_z \cos\theta \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} \right] \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} R_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \delta_+(\omega - v_z k_z - n\omega_H),$$

$$\nu_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) = \frac{V}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f_0(\mathbf{p}, t) \sum_{n=1}^{\infty} R_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \delta(\omega - v_z k_z - n\omega_H),$$

$$\delta_+(x) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{x + i\delta}.$$

Полученное кинетическое уравнение для фотонов совпадает с уравнением работы [2].

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. В. Пелетминскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахизер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ, 42, 552 (1962); В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1115 (1963); В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 702 (1963).
2. С. В. Пелетминский, ЖЭТФ, 44, 735 (1963).
3. Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров, ЖЭТФ, 17, 614 (1947)
4. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, изд. МГУ, М., 1964.
5. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A167, 148 (1938).

Физико-технический институт АН УССР

Поступила в редакцию
21 марта 1966 г.

KINETIC EQUATIONS FOR RADIATION PROCESSES IN MAGNETIZED PLASMA

D. D. Tskhakaya

The kinetic equations is derived for electrons and photons in a uniform plasma, subjected to the strong magnetic field. The radiation collisions being assumed to be the principle interaction mechanism.

УДК 621.371.18

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕФРАКЦИИ И ФОКУСИРОВКИ СФЕРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛАБНЕОДНОРОДНОМ ПЛАЗМЕННОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СЛОЕ

Ю. И. Орлов

Методами лучевой оптики рассмотрена задача о падении сферической электромагнитной волны на параболический плазменный слой. Анализируются особенности лучевой картины, каустики и поля, возникающие при учете конечной кривизны падающего волнового фронта. Исследуются и определяются особые точки каустики. Проведено разбиение плоскости характерных параметров задачи на характеристические области, каждой из которых поставлен в соответствие определенный вид каустики. Показана эволюция лучевой картины и каустики при изменении положения источника, положения и величины максимума электронной концентрации.

В ряде работ (см., например, [1-5]) можно найти анализ особенностей поведения траекторий лучей в стратифицированной среде с симметричным параболическим законом распределения электронной концентрации по слою. Однако, как уже указывалось в [6], этот анализ проведен лишь для некоторой области возможных изменений параметров задачи. Настоящая работа показывает, что более детальное исследование поведения цилиндрического и сферического волновых фронтов в параболическом слое позволяет выявить некоторые новые закономерности.

Ниже основное внимание будет уделено анализу особенностей поведения семейства лучей, вышедших после рефракции в свободное пространство. Оказывается, что лучевая картина здесь имеет весьма сложный вид. При этом важной интегральной характеристикой поведения поля лучей служит форма каустической поверхности, которая в подобных задачах является особой [6].

Отметим, что анализ лучевой теории параболического слоя, кроме прикладного значения, имеет также определенный теоретический интерес, поскольку он позволяет оценить влияние кривизны и конечности объема неоднородной среды на характер каустики и лучевой картины (на примере неоднородного плазменного шара с параболическим законом изменения электронной концентрации по радиусу, уже исследованного в [6]).

Как легко понять, исследование, подобное проведенному ниже и в [6], совершенно необходимо также при построении коротковолновой асимптотики задачи о точечном источнике, расположенном над поверхностью неоднородной среды (плазмы). В частности, результаты анализа стратифицированного параболического слоя могут быть использованы в задаче о диполе, расположенном над неоднородным цилиндром с параболическим распределением электронной концентрации по радиусу. Во второй части работы [6] была исследована структура поля лучей в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. В настоящей работе фактически исследуются особенности лучевой картины в плоскости, прохо-

дящей через источник и ось цилиндра. В конце статьи проведено совместное рассмотрение каустических кривых в этих двух главных сечениях.

Рассмотрим падение локально-плоской цилиндрической (сферической) электромагнитной волны на плоскую поверхность слабонеоднородной изотропной плазмы. Пусть электронная концентрация N меняется по симметричному параболическому закону в направлении внутренней нормали z к границе плазмы $z = 0$ (рис. 1):

$$N(z) = N_m \left(\frac{2z}{z_m} - \frac{z^2}{z_m^2} \right) \quad (z \geq 0), \quad (1)$$

где z_m — координата максимума концентрации, а N_m — концентрация в максимуме слоя. Для простоты ниже считается, что поглощение в плазме отсутствует ($\nu = 0$). В этом случае выражение для диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\varepsilon(\omega, z) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1 - gz + hz^2, \quad (2)$$

где

$$g = \frac{2\omega_k^2}{\omega^2 z_m}, \quad h = \frac{\omega_k^2}{\omega^2 z_m^2}, \quad \omega_k^2 = \frac{4\pi e^2 N_m}{m}.$$

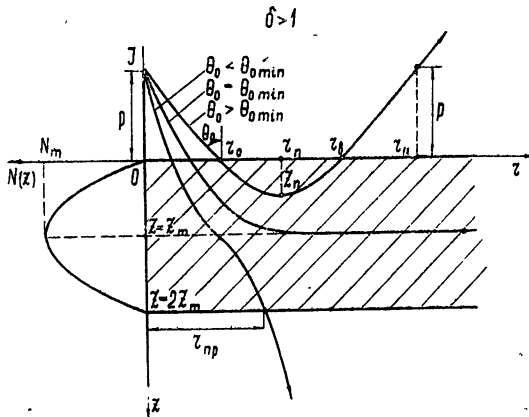


Рис. 1.

Из уравнения луча в стратифицированной среде легко получить, что после рефракции лучи выходят из плазмы через поверхность $z = 0$ при $r = r_B$ [6]:

$$r_B = r_0 + 2 \int_0^{z_n} \frac{\sin \theta_0 dz}{(\varepsilon(z) - \sin^2 \theta_0)^{1/2}}, \quad (3)$$

причем

$$\frac{dr_B}{dr_0} = \frac{4 \cos^3 \theta_0}{p} \int_0^{z_n} \frac{(d^2\varepsilon/dz^2)(\varepsilon - 2 \sin^2 \theta_0) dz}{(d\varepsilon/dz)^2 (\varepsilon - \sin^2 \theta_0)^{1/2}} - \frac{4 \cos^3 \theta_0 \cos(2\theta_0)}{(d\varepsilon/dz)_{z=0} p} + 1. \quad (4)$$

Здесь r_0 — радиальная координата точки входа луча в плазму (в дальнейшем r_0 — параметр, индивидуализирующий луч), $\theta_0 = \text{arctg}(r_0/p)$ — угол падения луча (угол между волновой нормалью и осью z), p — расстояние по нормали от поверхности плазмы до центра кривизны фронта (рис. 1). В (3) и (4) z_n — координата точки поворота луча, определяемая из уравнения $\varepsilon(z_n) = \sin^2\theta_0$. Вторая координата точки поворота луча дается соотношением

$$r_n = r_0 + \int_0^{z_n} \frac{\sin \theta_0 dz}{(\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0)^{1/2}}. \quad (5)$$

Легко понять, что семейство лучей, вышедших из стратифицированной среды, описывается при $z \leq 0$ уравнением

$$r = r_b(r_0) - z \frac{r_0}{p}. \quad (6)$$

Заметим, что приведенные в настоящей статье результаты для сферической волны легко могут быть обобщены на случай произвольного локально-плоского волнового фронта.

Для параболического закона (2) в случае сферического волнового фронта находим из (3)

$$r_b = r_0 + \frac{2 \sin \theta_0}{g\delta} \ln \frac{1 + \delta \cos \theta_0}{1 - \delta \cos \theta_0}, \quad (7)$$

где

$$\delta = \frac{2\sqrt{h}}{g} = \frac{\omega}{\omega_k} = (1 - \varepsilon(z_m))^{-1/2}.$$

Иногда нужно исключить параметр g ; тогда (7) можно представить в виде

$$r_b = r_0 + z_m \delta \sin \theta_0 \ln \frac{1 + \delta \cos \theta_0}{1 - \delta \cos \theta_0},$$

и ниже в формулах всюду следует заменить $2(g\delta)^{-1}$ на $z_m \delta$.

Как известно [2,3], функция $r_b(r_0)$, определяемая (7), в общем случае не является монотонной. При этом, как показано в настоящей работе, она может иметь не только один экстремум, а в зависимости от величины параметров p , g и δ могут существовать одна, две или три стационарные точки ($dr_b/dr_0 = 0$). Положение же и число стационарных точек функции $r_b(r_0)$ определяют соответственно координаты и число точек выхода каустики на границу стратифицированной среды [6]. Причем при $dr_b/dr_0 < 0$ каустика располагается в свободном полупространстве $z < 0$.

Параметрические уравнения этой каустики легко получаются из (6) и имеют вид

$$r = p \frac{dr_b}{dr_0}, \quad (8)$$

$$r = r_b - r_0 \frac{dr_b}{dr_0},$$

где r_b и dr_b/dr_0 определяются соответственно выражениями (3) и (4).

Прежде чем переходить к анализу особенностей рефракции лучей в параболическом слое (2), получим важное условие выхода каустики на уровень источника $z = -p$. Из уравнений каустики (8) при $z \leq -p$ получим соотношение $dr_{\text{в}}/dr_0 + 1 \leq 0$, которое, как следует из (5), эквивалентно искомому условию $dr_{\text{н}}/dr_0 \leq 0$, причем

$$\frac{dr_{\text{н}}}{dr_0} = \frac{2 \cos^3 \theta_0}{p} \int_0^{z_{\text{н}}} \frac{(d^2 \varepsilon / dz^2) (\varepsilon - 2 \sin^2 \theta_0) dz}{(d\varepsilon/dz)^2 (\varepsilon - \sin^2 \theta_0)^{1/2}} - \frac{2 \cos^2 \theta_0 \cos(2\theta_0)}{(d\varepsilon/dz)_{z=0} p} + 1. \quad (9)$$

При $dr_{\text{н}}/dr_0 > 0$ каустика поверхность (8) локализована в области $z > -p$. Радиальная координата точек выхода каустики на уровень источника $z = -p$ определяется при условии $dr_{\text{н}}/dr_0 = 0$ очевидным выражением $r_{\text{н}} = 2r_{\text{н}}$ (рис. 1).

Займемся теперь исследованием особенностей формы каустики (8) в случае параболического закона (2). Продифференцировав (7), или что то же самое, из (4), находим, что

$$\frac{dr_{\text{в}}}{dr_0} = 1 + \frac{2 \cos^2 \theta_0}{pg} \frac{1}{\delta} \left[\cos \theta_0 \ln \frac{1 + \delta \cos \theta_0}{1 - \delta \cos \theta_0} - \frac{2\delta \sin^2 \theta_0}{1 - \delta^2 \cos^2 \theta_0} \right], \quad (10)$$

откуда при условии $dr_{\text{в}}/dr_0 = 0$ получаем уравнение, определяющее совместно с (7) положение точек выхода каустики из неоднородного параболического слоя:

$$2 \cos^2 \theta_0 \left(\frac{2 \sin^2 \theta_0}{1 - \delta^2 \cos^2 \theta_0} - \frac{\cos \theta_0}{\delta} \ln \frac{1 + \delta \cos \theta_0}{1 - \delta \cos \theta_0} \right) = pg. \quad (11)$$

Результаты решения уравнения (11) представлены на рис. 2 и позволяют произвести разбиение плоскости независимых параметров задачи

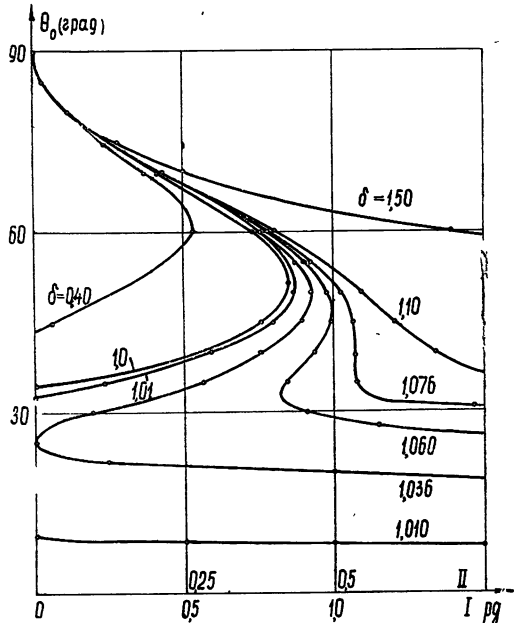


Рис. 2. Зависимость от параметров pg и δ углов падения лучей θ_0 , проходящих через точки выхода каустики на границу слоя (I масштаб pg) и на уровень источника (II масштаб).

на характеристические области (I масштаб pg на рис. 3), с каждой из которых можно сопоставить определенный вид каустики (рис. 4).

При $\delta \leq 1$, когда существует область, где $\varepsilon(\omega) \leq 0$, поведение каустики в параболическом слое не содержит ничего нового по сравнению

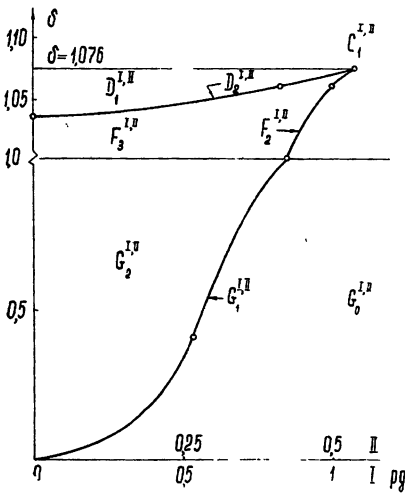


Рис. 3. Плоскость характерных параметров задачи и характеристические области. Нижний индекс области совпадает с числом точек выхода каустики на границу слоя (I масштаб pg) и на уровень источника (II масштаб pg); масштаб по оси ординат неравномерный.

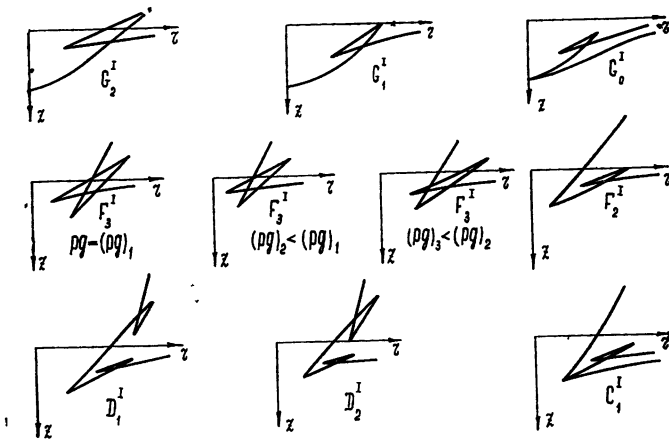


Рис. 4. Зависимость вида каустики от параметров pg и δ .

с линейным слоем, рассмотренным в [6]. Действительно, как видно из рис. 2, 4, каустическая поверхность в этом случае либо пересекает границу слоя в двух точках (если $pg < (pg)_{\max} = f(\delta)$; область G_2^I рис. 3), либо полностью располагается внутри неоднородной среды (при $pg > (pg)_{\max}$; область G_0^I). При $pg = (pg)_{\max}$ (область G_1^I) каустика имеет ребро возврата на границе слоя $z = 0$.

Лучевая картина существенно перестраивается при $\delta > 1$, когда $\varepsilon(\omega) > 0$ при любых $z \geq 0$ (рис. 1). В этом случае при любом $\delta > 1$ существует такой угол $\theta_{\min} = \arccos \delta^{-1}$ (соответствующий точке поворота, расположенной в вершине слоя $z_n = z_m$), что при $\theta_0 < \theta_{\min}$ лучи не возвращаются на поверхность плазмы $z = 0$ (функция $r_v(r_0)$ при $\theta_0 < \theta_{\min}$ комплексна, а при $\theta_0 \rightarrow \theta_{\min}$ $r_v \rightarrow \infty$) [1-3]. Не останавливаясь на учете эффектов просачивания волны при θ_0 , близких к θ_{\min} ,

укажем, что лучевая трактовка с большой точностью пригодна почти вплоть до $\theta_{0 \min}$ [4, 5, 11].

Как видно из рис. 2, при $\delta > 1$ функция $r_b(r_0)$ всегда имеет по крайней мере одну экстремальную точку. Поэтому для $\delta > 1$ каустика в свободном пространстве образуется при любом $0 < pg < \infty$. Здесь следует различать два случая: $1 < \delta < 1,076$ и $\delta \geq 1,076$.

При $\delta \geq 1,076$ функция $r_b(r_0)$ имеет только один экстремум (минимум), который существует при всех $0 < pg < \infty$. Этим значениям δ соответствует каустика (8), которая монотонно и без асимптоты уходит в бесконечность ($z \rightarrow -\infty, r \rightarrow \infty$) (G_1^1 на рис. 4). Естественно, что эта ветвь каустики всегда пересекает уровень источника $z = -\rho$. Напомним, что наличием этой каустики можно объяснить в теории ионосферного распространения коротких радиоволн появление зоны молчания и интерференционных замираний в окрестности границы этой зоны ([3], стр. 184).

В случае $1 < \delta < 1,076$ в зависимости от величины pg функция $r_b(r_0)$ может иметь одну, две или три стационарные точки. В этом случае соответственно меняется и картина лучей, вышедших из неоднородной плазмы. Каустики, образуемые этими лучами в свободном пространстве, изображены на рис. 4 и отличаются от каустик, рассмотренных выше при $\delta \geq 1,076$, появлением дополнительного «каустического треугольника». Вершинами этого треугольника в области F_3^1 служат две точки выхода каустики на границу неоднородной среды $z = 0$ и точка возврата первого рода, в которой каустика меняет свое направление на обратное (рис. 4).

Координаты точек возврата на каустике (8) определяются из уравнений каустики (7), (8), (10) при условии $d^2 r_b / dr_0^2 = 0$ [6]. Последнее условие при учете формулы (10) легко можно представить в виде

$$s(\xi) \equiv \xi \left[\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{3}{4} \frac{(1 - \xi^2)^2}{\xi} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right]^{1/2} = \delta, \quad (12)$$

где $\xi = \delta \cos \theta_0$. Выражение (12) при любом $0 < \delta < 1,076$ определяет число и положение точек возврата на каустике (8) (рис. 5). При этом, как ясно из рис. 4, 5, при $\delta < 1$ и $pg < (pg)_{\max}$ (область G_2^1) на внешней каустике может существовать только одна точка возврата. При $pg > (pg)_{\max}$, как можно понять из рис. 2, условие (12) физически не реализуется, ибо в этом случае $dr_b/dr_0 > 0$.

При $1 < \delta < 1,036$ и $pg < (pg)_{\max}$ (область F_3^1) условие (12) также определяет только одну точку возврата, хотя и (12), и рис. 5 дают два значения угла θ_0 . Это связано с тем, что при меньшем значении θ_0 (большем значении ξ) снова $dr_b/dr_0 > 0$. Вторая точка возврата каустики в этом случае расположена внутри параболического слоя и, естественно, не определяется условием (12).

Однако при $\delta = 1,036$ вторая точка возврата выходит из параболического слоя на границу $z = 0$, так что при $1,036 < \delta < 1,076$ и при $pg < (pg)_{\min}$ на ветви каустики, уходящей в бесконеч-

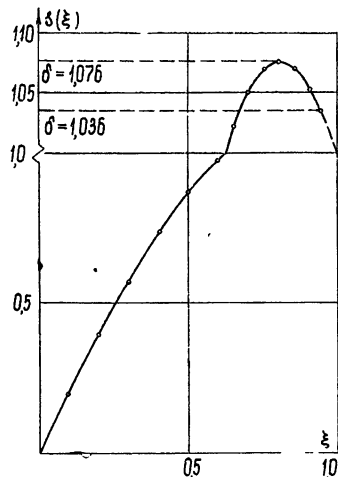


Рис. 5. График, определяющий положение точек возврата внешней каустики (масштаб по оси ординат неравномерный).

ность, реализуются обе точки возврата (D_1^I и D_2^I на рис. 4). При этом образуется петля, а выделенная ветвь каустики становится многозначной и особой. Характерно, что петля замыкается целиком в свободном полупространстве $z < 0$, чего не наблюдалось в случае монотонных законов $N(z)$ [6] для внешнего источника.

Координаты точек выхода каустики на уровень источника $z = -p$ определяются, как указывалось выше, экстремальными значениями функции

$$r_n = 2r_n = 2r_0 + \frac{2 \sin \theta_0}{g\delta} \ln \frac{1 + \delta \cos \theta_0}{1 - \delta \cos \theta_0}.$$

Положение и число этих экстремумов или (что то же самое) экстремумов функции $r_n(r_0)$ определяются с учетом (9) и (11) из уравнения

$$\cos^2 \theta_0 \left(\frac{2 \sin^2 \theta_0}{1 - \delta^2 \cos^2 \theta_0} - \frac{\cos \theta_0}{\delta} \ln \frac{1 + \delta \cos \theta_0}{1 - \delta \cos \theta_0} \right) = pg. \quad (13)$$

Корни уравнения (13), как ясно из сравнения с (11), могут быть найдены также из рис. 2 при изменении масштаба pg в два раза (масштаб II на рис. 2).

Как видно из рис. 2 и 3, при $0 < \delta \leq 1$ каустика может пересекать уровень источника $z = -p$ в двух точках (область G_2^{II} на рис. 3) или в одной (G_1^{II}) точке, или не пересекать его совсем (G_0^{II}). При $1 < \delta < 1,076$ число точек пересечения каустики с уровнем $z = -p$ может возрасти до трех (область F_3^{II}). Характерно, что при $1 < \delta < 1,076$ за счет ветви, уходящей в бесконечность, всегда существует по крайней мере одна точка выхода каустики на уровень источника $z = -p$.

Следует специально остановиться на поле лучевых траекторий, выходящих из слоя через границу $z = 2z_m$ под углами $\theta_0 < \theta_{0 \min}$. В этом случае радиальные координаты r_{np} точек выхода лучей из слоя найдутся из уравнения луча и определяются для параболического закона (2) следующим выражением:

$$r_{np} = r_0 + \frac{2 \sin \theta_0}{g\delta} \ln \frac{\delta \cos \theta_0 + 1}{\delta \cos \theta_0 - 1}. \quad (14)$$

Семейство траекторий лучей при $z > 2z_m$ описывается уравнением

$$r = r_{np}(r_0) + \frac{r_0}{p}(z - 2z_m).$$

Это семейство является регулярным: оно не образует каутической поверхности, так как, согласно (14), $dr_{np}/dr_0 > 0$ при любых p, g, δ . Очевидно, что лучевые траектории заполняют все пространство $z > 2z_m$ [12].

Значение интенсивности поля в приближении геометрической оптики (первый член соответствующего лучевого разложения) легко может быть найдено из основного закона геометрической оптики — закона сохранения энергии в лучевой трубке. В соответствии с этим законом можно получить, что интенсивность поля E рефрагированных лучей (вторичного поля) в произвольной точке $\{r, z < 0\}$ определяется формулой

$$|E| = E_I(\theta_0) \frac{\cos \theta_0}{p} \left(\frac{r_0 \omega_0 P_I}{r |dr/dr_0|} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

где P_I — полная мощность, излучаемая источником, $E_I(\theta_0)$ — диаграмма направленности источника в свободном пространстве, $\omega_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} \simeq 376,7$ ом — волновое сопротивление свободного пространства.

Продифференцировав (6), из (15) окончательно находим

$$|E| = E_I(\theta_0) \left[\frac{\cos \theta_0 \sin \theta_0 \omega_0 P_I}{(r_b - z r_0/p) |p dr_b/dr_0 - z|} \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Формула (16) позволяет найти геометрико-оптическую амплитуду поля при $z < 0$. Фаза поля Φ при этом определяется эйконалом с учетом закона изменения фазы при прохождении волной каустики. Как известно [8–10], согласно этому закону, фаза поля на луче, проходящем неособую каустику, либо изменяется скачком на $\pi/2$ (в случае касания лучевой трубки с каустикой), либо совсем не изменяется (в случае пересечения лучом других ветвей каустики).

В результате поле на некотором выделенном луче j , прошедшем каустику, может быть записано в виде

$$E_j = |E_j| \exp(i\Phi_j), \quad (17)$$

где $|E_j|$ определяется формулой (16), $\Phi_j = k_0 L_j - (\pi/2) n \delta_{j1}$, L_j — эйконал, n — число точек касания луча с каустикой (в случае неособой каустики $n = 1$). Символ Кронекера δ_{j1} в (17) соответствует дилемме, присутствующей в указанном законе. Учитывая, что через точку с координатами $\{r, z\}$ может проходить несколько «невоздействующих лучей», соответствующих различным значениям θ_{0j} или r_{0j} , в окончательной формуле, определяющей интенсивность поля, следует взять сумму слагаемых типа (17):

$$E = \sum_j E_I(\theta_{0j}) \left[\frac{\cos \theta_{0j} \sin \theta_{0j} \omega_0 P_I}{r |p dr_b(r_{0j})/dr_0 - z|} \right]^{1/2} \exp(i\Phi_j). \quad (18)$$

В случае параболического слоя (2) выражение (18) конкретизируется формулами (7) и (10). При этом число и значения параметров θ_{0j} , индивидуализующих лучи, определяется, согласно (6), из уравнения

$$2 \ln \frac{1 + \delta \cos \theta_{0j}}{1 - \delta \cos \theta_{0j}} + g \delta \left(\frac{p - z}{\cos \theta_{0j}} - \frac{z}{\sin \theta_{0j}} \right) = 0. \quad (19)$$

Проведенный выше анализ показал, что в зоне «каустического треугольника» (в F_3^1 при $pg = (pg)_1$) и в области петли (в $D_{1,2}^1$ на рис. 4) проходят четыре луча. Поэтому максимальное число корней уравнения (19) также равно четырем.

Естественно, что формула (16), полученная непосредственно из геометрико-оптических соображений, дает неограниченное возрастание поля в окрестности каустики (8), на которой $z = p dr_b/dr_0$. В результате обычный метод геометрической оптики теряет силу вблизи каустики. В частности, как указывалось выше, каустика может выходить на уровень $z = -p$ в трех точках; поэтому, при $z = -p$ в зависимости от r существует три области неприменимости формулы (16). Не останавливаясь подробно в настоящей статье на фактическом исследовании поля при произвольных z и r и при различных параметрах задачи,

укажем, что поля в указанных областях могут быть найдены с помощью одной из известных модификаций геометрико-оптических методов [7-9].

Отметим, что в случае рассматриваемой стратифицированной среды (2), а также в некоторых более общих случаях, когда координаты допускают разделение переменных в волновом уравнении, асимптотика поля точечного источника может быть получена математически безупречно применением асимптотики и модификаций метода перевала к интегральным представлениям функции Грина соответствующей задачи.

В заключение остановимся на сравнении полученных здесь результатов с результатами, приведенными в [6] для неоднородного плазменного шара с параболическим законом изменения диэлектрической проницаемости по радиусу:

$$\varepsilon(\omega, r) = 1 - a \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (r \leq R). \quad (20)$$

Для сравнения перепишем параболический закон (2) в виде

$$\varepsilon(\omega, z) = 1 - a \left[1 - \frac{(z - z_m)^2}{z_m^2}\right] \quad (a = \delta^{-2}), \quad (21)$$

так что значениям $\delta \geq 1$ соответствуют величины $a \leq 1$.

Следует подчеркнуть, что, к сожалению, неоднородный параболический слой (2) или (21) не может быть получен из неоднородного шара предельным переходом $R \rightarrow \infty$. Поэтому ниже приводится лишь качественное сравнение результатов.

В случае $a < 1$ и для шара, и для стратифицированной среды общим фактом является наличие у каустики ветвей, уходящих в бесконечность, хотя в остальном характер каустической поверхности различен: в случае стратифицированной среды, помимо того что рассматриваемая ветвь не имеет асимптоты, каустическая поверхность может образовывать петли как на указанной ветви, так и за счет образования «каустика треугольника».

Исключая из рассмотрения случай «идеальной» фокусировки лучей неоднородным шаром при $a = 1$, отметим, что уже при $a > 1$ характер каустической поверхности одинаков в том и другом случае. Действительно, при $a > 1$ каустика имеет одинаковый петлеобразный характер, а при некоторых значениях параметров задачи она локализуется в неоднородной среде и далее становится неособой. Некоторое различие при сравнительно близко расположенном источнике следует объяснить конечной кривизной поверхности плазменного шара.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. Т. Маркову за внимание к работе и Ю. А. Кравцову за обсуждение вопросов, затронутых в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. O. Pedersen, The propagation of radio waves, Danmarks Naturvidenskabelige Samfund, Copenhagen, 1927.
2. J. M. Kelso, Radio ray propagation in the ionosphere, McCraw—Hill, Ltd., 1964
3. K. G. Budden, Radio waves in the ionosphere, The University Press, Cambridge, 1961.
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960
5. O. E. N. Rydbeck, On the propagation of radio waves, Goteborg, 1944
6. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 657 (1966); 9, 497 (1966).
7. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 664 (1964); 8, 659 (1965).
8. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957

- 9 Ю Л. Газарян, сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 5, изд. ЛГУ, 1961, стр. 73.
10. В. М. Бабич, сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 5, изд. ЛГУ, 1961, стр. 115.
11. Я. А. Альперт, Ф. Ф. Добрякова, Э. Ф. Чудесенко, Б. С. Шапиро, УФН, 65, 161 (1958).
12. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 1036 (1966)

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию

17 марта 1966 г.

ON PECULIARITIES OF REFRACTION AND FOCUSING OF SPHERICAL
ELECTROMAGNETIC WAVE INCIDENT TO A WEAKLY NONUNIFORM
PARABOLIC PLASMA LAYER

Yu. I. Orlov

The method of beam optics is applied to the problem of the spherical electromagnetic wave incidence upon a parabolic plasma layer. The features of the ray ensemble, the field and caustic structure owing to the curvature of the incident wave front are analysed. The special points of the caustic are determined and investigated. The plane of the characteristic parameters of the system is divided into the regions corresponding to the different types of the caustic. The evolution of the ray picture and of caustic connected with the change of the source position, the position and the maximum magnitude of the electronic density is considered.

УДК 589 285

ЯДЕРНАЯ СПИН-РЕШЕТОЧНАЯ И СПИН-СПИНОВАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В МНОГОУРОВНЕВЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В. С. Гречишкин, А. Д. Гордеев

Проведено экспериментальное исследование квадрупольной релаксации в многоуровневых системах. Обнаружено, что спин-решеточная и спин-спиновая релаксации описываются набором 4-х релаксационных констант. Дана качественная интерпретация результатов эксперимента на основе кинетических уравнений.

Если спин ядра больше $3/2$ (например, $5/2$; $7/2$ или $9/2$), то в ядерном квадрупольном резонансе можно наблюдать несколько частот переходов. Так, для $J = 9/2$ в нулевом поле можно обнаружить по крайней мере 4 частоты поглощения, поскольку для небольших параметров асимметрии η интенсивности «запрещенных» переходов с $\Delta m = \pm 2$ обычно малы. Если в двухуровневой системе спин-решеточная релаксация может быть описана лишь одной релаксационной константой [1], то для многоуровневой системы приходится вводить в общем случае несколько констант [2, 3, 4]. Исследование релаксационных характеристик многоуровневых систем представляет значительный интерес для квантовой радиоэлектроники.

Процесс спин-решеточной релаксации в многоуровневых системах может быть приближенно исследован методом кинетических уравнений [5]. В нулевом поле решение системы кинетических уравнений можно записать в общем виде

$$n_j(t) = \sum_k a_j^{(k)} \exp(-\lambda^{(k)} t) + n_j(\infty) \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, J - 1/2).$$

Здесь коэффициенты $a_j^{(k)}$ зависят от начальных условий, а $\lambda^{(k)}$ являются собственными значениями определителя однородной части уравнения. Таким образом, число релаксационных констант равно $J - 1/2$. В случае $\eta \neq 0$ число релаксационных констант не должно измениться, поскольку в любом случае одно из кинетических уравнений линейно зависимо.

Наличие параметра асимметрии приводит к смешиванию состояний, и это может оказать влияние на механизм образования спинового эхо.

Целью настоящей работы является изучение спин-решеточной и спин-спиновой релаксаций при $\eta \neq 0$ для многоуровневой системы.

Карлсон [6], а затем Кессель и Корчемкин [7] рассмотрели влияние асимметрии на спиновое эхо и индукцию для $J = 3/2$. Однако в случае $J = 3/2$ экспериментально не обнаружено ни одного случая больших параметров асимметрии η . Более того, влияние η на частоту и интенсивность переходов здесь очень незначительно. Самые большие параметры асимметрии наблюдаются для $J > 3/2$. Именно это и определило выбор кристалла.

В качестве объекта исследования мы выбрали BiCl_3 , у которого для $\text{Bi}^{209} (I = 9/2) \eta = 58\%$ [8]. В этом кристалле наблюдаются достаточно интенсивные сигналы спинового эхо, что весьма существенно для точного определения релаксационных констант. Эксперимент был выполнен на установке квадрупольного спинового эхо.

Блок-схема этой установки включала импульсник, ВЧ генератор, импульсный приемник, стробоскопический интегратор. Полоса приемника была равна $0,5 \text{ Мгц}$, что обеспечивало воспроизведение сигналов эхо на экране осциллографа. Длительность радиочастотных импульсов выбиралась $4 \div 10 \text{ мксек}$ при напряжении на аноде ВЧ генератора $1,5 \text{ кв}$. Время T_2 измерялось методом $90^\circ\text{—}180^\circ$ импульсов, а для определения спин-решеточной релаксации использовался метод стимулированного эхо. Поскольку при понижении температуры интенсивность сигналов возрастает, то эксперимент проводился при 77°К . Спад сигналов стимулированного эхо после $90^\circ\text{—}180^\circ\text{—}90^\circ$ импульсов в зависимости от временного интервала между вторым и третьим импульсом не мог быть описан одной экспонентой, как и следует из соотношения (1). Если релаксационные константы сильно различаются, то для их определения можно применить графический метод, используемый для анализа распада радиоактивных смесей [9]. Этот метод позволяет быстро получить результаты, но не отличается большой точностью. Для получения большей точности измерений релаксационную кривую следует обрабатывать по методу наименьших квадратов на электронно-вычислительной машине. Отметим, что эхо наблюдалось лишь при $t = 2\tau$. При $t = 3/2\tau$ и $t = 3\tau$ дополнительные сигналы из-за конечного η , как предсказано для $I = 3/2$ Кесселем и Корчемкиным [7], не наблюдались.

Возможно, что наблюдение дополнительных эхо требует наложения очень большого магнитного поля, как в ядерном магнитном резонансе, где это явление действительно было обнаружено Соломоном в 1958 году при использовании когерентных импульсов.

После третьего импульса наряду с сигналом стимулированного эхо мы наблюдали 3 вторичных эхо. Чтобы вторичные эхо не мешали измерениям, интервал между вторым и третьим импульсом перед снятием релаксационных кривых был взят достаточно большим.

Обработка релаксационных кривых стимулированного эхо при 77°К показала, что переходы $1/2 \rightarrow 3/2$ ($33,7 \text{ Мгц}$) и $5/2 \rightarrow 7/2$ ($37,9 \text{ Мгц}$) позволяют получить две релаксационные константы: $T_{1a} = 4,7 \text{ мсек}$ и $T_{1b} = 1,3 \text{ мсек}$. Эти константы описывают релаксацию для указанных переходов. Еще две константы позволили получить переход $7/2 \rightarrow 9/2$ ($52,7 \text{ Мгц}$): $T_{1c} = 2,5 \text{ мсек}$ и $T_{1d} = 12,6 \text{ мсек}$. Переход $3/2 \rightarrow 5/2$ ($25,9 \text{ Мгц}$) описывался лишь одной релаксационной экспонентой с $T_1 \sim 2,5 \text{ мсек}$. Таким образом, спин-решеточная релаксация в BiCl_3 для Bi^{209} описывается четырьмя временами релаксации $1,3 \text{ мсек}$; $2,5 \text{ мсек}$; $4,7 \text{ мсек}$ и $12,6 \text{ мсек}$, что не противоречит уравнению (1). Конечный параметр асимметрии η , кроме сдвига частот поглощения, не приводит к качественному изменению механизма образования спинового эхо. Однако при больших η становятся равновероятными как прецессия вокруг оси z , так и вокруг оси y [10], что может сказываться на интенсивности сигналов.

В работе [10] показано, что при $\eta \neq 0$ для любого спина все три компоненты спинового оператора (J_x ; J_y и J_z) отличны от нуля.

Действительно, сигналы спинового эхо Bi^{209} в BiCl_3 были очень интенсивными (сигнал/шум 50 на экране осциллографа).

При наложении магнитного поля на кристалл наблюдалось увеличение времен T_2 , что свидетельствует о магнитном механизме спин-спиновой релаксации. Следует отметить, что для перехода $7/2 \rightarrow 9/2$

(52,7 МГц) $T_2 = 620$ мксек, а для перехода $1/2 \rightarrow 3/2$ (33,7 МГц) $T_2 = 115$ мксек. По-видимому, такие различия во временах спин-спиновой релаксации связаны со спектром локального поля.

Таким образом, для описания спин-спиновой релаксации в многоуровневой системе для $J = 9/2$ также приходится ввести 4 времени T_2 . Отметим, однако, что спин-спиновая релаксация для каждого перехода описывалась лишь одной экспонентой. В этом обнаруживается отличие спин-спиновой релаксации от спин-решеточной. Поскольку для верхних переходов $T_2 \sim T_1$, то метод кинетических уравнений становится неприменимым. В этом методе производится разделение спин-спиновой и спин-решеточной релаксаций, поэтому он не может дать количественных результатов. Таким образом, необходима разработка основанной на микроскопических представлениях теории спин-спиновой и спин-решеточной релаксаций для многоуровневых квадрупольных систем. Феноменологические теории позволяют лишь качественно объяснять экспериментальные результаты.

В заключение авторы выражают благодарность В. Д. Нефедову (ЛГУ) за предоставление образца треххлористого висмута.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bayer, Zs. Phys., **130**, 227 (1951)
2. В. С. Гречишкин, ФТТ, **3**, 1067 (1961).
3. A. C. Daniel, W. G. Moulton, J. Chem. Phys., **41**, № 6, 1833 (1964).
4. В. С. Гречишкин, А. Д. Гордеев, Н. Е. Айнбиндер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 3, 507 (1966).
5. T. Kushida, A. H. Silver, J. Phys. Chem. Solids, **26**, 1045 (1965)
6. E. H. Carlson, J. Chem. Phys., **43**, № 7, 2569 (1965).
7. А. Р. Кессель, М. А. Корчемкин, ФТТ, **8**, № 2, 387 (1966)
8. В. С. Гречишкин, Г. Б. Соيفер, сб Радиоспектроскопия, **11**, № 2, 3 (1964), S. L. Segel, R. G. Barnes, Catalog of NQR frequencies in solids, Iowa, 1962.
9. А. Н. Мурин, Введение в радиоактивность, изд. ЛГУ, 1955.
10. I. C. Raich, R. M. Good, Am. J. Phys., **31**, № 5, 356 (1963).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
5 апреля 1966 г

NUCLEAR SPIN-LATTICE AND SPIN-SPIN RELAXATION IN MULTI-LEVEL QUADRUPOLE SYSTEMS

V. S. Grechishkin, A. D. Gordeev

An experimental investigation of the quadrupole relaxation in multi-level systems is made. The spin-lattice and spin-spin relaxation is found to be described by the combination of 4 relaxational constants. The qualitative interpretation of the experimental results is given on the basis of the kinetic equations.

Примечание при корректуре. Конечный результат работы [7] не позволяет сделать предсказания о наличии сигналов дополнительных эхо, поскольку фаза заполнения $\sin \omega_0(t-2\tau)$ определяет сигнал эхо лишь при $t=2\tau$. Использование когерентных импульсов не привело к новым результатам.

УДК 621 378.325

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЗОНАНСНОГО И ДВУХФОТОННОГО
ИЗЛУЧЕНИЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО СИНХРОНИЗМА**

Г. Л. Гуревич, М. И. Хейфец

Рассматривается вопрос о влиянии резонансного поля на двухфотонное излучение для случая, когда в системе выполняются условия пространственного синхронизма. Показано, что в такой системе возможен мягкий режим возбуждения комбинационных полей. Найдены состояния равновесия. Описан процесс установления стационарных колебаний.

В [1] были получены уравнения, описывающие процесс двухфотонного излучения в присутствии резонансного поля, и проведено исследование их для случая, когда в системе не выполняются условия пространственного синхронизма. В настоящей работе с помощью этих уравнений рассматривается взаимодействие двухфотонного и резонансного излучений в активной среде в случае, когда условия пространственного синхронизма выполнены. Предполагается, что вещество помещено в резонатор бегущей волны, в котором на каждой из рабочих частот ω_l ($l = 1, 2, 3$) возбуждается по одной моде. Исходная система уравнений (3) работы [1] для переменных E_l и φ_l тогда примет вид

$$\dot{E}_{1,2} + (2\tau_{1,2})^{-1} E_{1,2} = \frac{1}{2} n [b_{1,2} E_{2,1}^2 E_{1,2} + B_{1,2} E_{2,1} E_3 \cos \Phi], \quad (1a)$$

$$\dot{E}_3 + (2\tau_3)^{-1} E_3 = \frac{1}{2} n [cE_3 + B_3 E_1 E_2 \cos \Phi], \quad (1б)$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{1}{2} n \left[B_1 \frac{E_2 E_3}{E_1} + B_2 \frac{E_1 E_3}{E_2} + B_3 \frac{E_1 E_2}{E_3} \right] \sin \Phi, \quad (1в)$$

$$\dot{n} + (n - n_0) T^{-1} = -n [a_1 E_1^2 E_2^2 + a_2 E_3^2 + B_4 E_1 E_2 E_3 \cos \Phi]. \quad (1г)$$

Здесь E_l и φ_l — соответственно модуль амплитуды и фаза комбинационного ($l = 1, 2$) и резонансного ($l = 3$) полей; $\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2$. Из (1в) видно, что при $n > 0$ плоскость фазового пространства $\Phi = 0$ является устойчивой. Мы рассмотрим случай, когда $\Phi(0) = 0$, тогда $\Phi = 0$ во все последующие моменты времени.

Введем безразмерные переменные x_1, x_2, x_3, η так же, как в работе [1]. Тогда для переменных $x_1, x_2, y = x_3^{1/2}$ и η в случае, когда $|\omega_3 - \omega_{21}| \ll \ll T_{21}^{-1}$ и $|\omega_{21} - \omega_1 - \omega_2| \ll \ll T_{21}^{-1}$, исходная система уравнений примет вид

$$a_1 \dot{x}_1 + x_1 = \sqrt{x_1 x_2} (\sqrt{x_1 x_2} + y) \eta,$$

$$a_2 \dot{x}_2 + x_2 = \sqrt{x_1 x_2} (\sqrt{x_1 x_2} + y) \eta,$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 \dot{y} + y &= A (\sqrt{x_1 x_2} + y) \eta, \\ \dot{\eta} + \eta - \eta_0 &= -(\sqrt{x_1 x_2} + y)^2 \eta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha_l = \tau_l T^{-1}$ ($l = 1, 2, 3$), а точка означает дифференцированное по безразмерному времени $\theta = tT^{-1}$.

Предполагая, что $\alpha_1 = \alpha_2$, из первых двух уравнений системы (2) получаем

$$x_1 - x_2 = \text{const} \exp(-\alpha_1^{-1} \theta).$$

Отсюда видно, что плоскость $x_1 = x_2$ является устойчивой. Если в начальный момент $x_1 = x_2$, то последнее равенство выполняется во все последующие моменты времени. Если же в начальный момент $x_1 \neq x_2$, то разность между ними стремится к 0 со временем $t = \tau_1$. В дальнейшем мы будем интересоваться случаем $x_1 = x_2 = x$. Тогда вместо (2) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{x} + x &= x(x + y) \eta, \\ \alpha_3 \dot{y} + y &= A(x + y) \eta, \\ \dot{\eta} + \eta - \eta_0 &= -(x + y)^2 \eta. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассматриваемая система уравнений имеет следующие положения равновесия:

- 1) $x = 0, \quad y = 0, \quad \eta = \eta_0;$
- 2) $x = 0, \quad y = \sqrt{A\eta_0 - 1}, \quad \eta = A^{-1};$
- 3) $x = \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1} - A, \quad y = A, \quad \eta = \frac{\eta_0}{2} - \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1};$
- 4) $x = \frac{\eta_0}{2} - \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1} - A, \quad y = A, \quad \eta = \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} - 1}.$

Второе положение равновесия существует, если $\eta_0 > A^{-1}$ (это неравенство совпадает с условием возбуждения резонансного лазера). Условие существования третьего положения равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} \eta_0 &> 2(A < 1), \\ \eta_0 &> A + A^{-1}(A > 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Четвертое положение равновесия существует, если справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \eta_0 &> 2, \\ \eta_0 &< A + A^{-1}. \end{aligned}$$

На рис. 1 в плоскости η_0, A изображены области существования всех положений равновесия.

Приведем теперь результаты исследования устойчивости положений равновесия.

Первое положение равновесия становится неустойчивым при

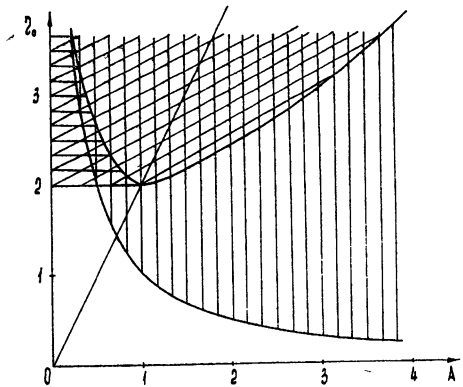
$$\eta_0 > A^{-1},$$

Это неравенство представляет собой условие возбуждения резонансного лазера. Второе положение равновесия становится неустойчивым, если

$$\eta_0 > A + A^{-1}.$$

Рис. 1. Области существования состояний равновесия на плоскости η_0, A :

область существования 2-го положения равновесия обозначена вертикальной штриховкой, 3-го — кривой, 4-го — горизонтальной. Первое положение равновесия существует при всех $\eta_0 > 0, A > 0$.



Заметим сразу, что при выполнении последнего неравенства автоматически удовлетворяются условия существования 3-го положения равновесия (4), а четвертое равновесное состояние не существует.

Третье положение равновесия устойчиво, если одновременно

$$\alpha_1 > \eta_3^2 \frac{1 - A\eta_3}{1 + A\eta_3} \left(1 - \frac{\alpha_3}{\eta_3^2}\right), \quad (5)$$

$$\alpha_1 > \eta_3^2 (1 - A\eta_3)^2 / (1 + A\eta_3). \quad (6)$$

Четвертое положение равновесия устойчиво, если

$$\eta_0 > A^{-1},$$

$$\alpha_1 > \frac{\eta_4}{2A} \frac{(1 - A\eta_4)^2}{\alpha_3 + (1 - A\eta_4)}.$$

Здесь η_3 и η_4 — значения η соответственно в третьем и четвертом положениях равновесий.

Условия (5) и (6) получены в предположении $\alpha_3 \ll \alpha_1^*$. Заметим, что при $A \rightarrow 0$ (5) и (6) вырождаются в условие существования устойчивого положения равновесия в комбинационном лазере в отсутствие резонансного поля (см. [2]).

Перейдем теперь к рассмотрению фазового пространства. Как уже указывалось, в наиболее интересном случае $\alpha_3 \ll \alpha_1$.

В этом случае в той части пространства, где $\eta_1 < A^{-1}$, можно пренебречь \dot{y} (см. [3]), изображающая точка быстро стремится к поверхности

$$y = \frac{A\eta x}{1 - A\eta}, \quad (7)$$

где совершает медленные движения. Уравнения, описывающие движение системы в переменных x, η , примут тогда вид

* Можно показать, что для выполнения условия существования третьего положения равновесия (4) при реальных параметрах системы требуется $\tau_3 \tau_1^{-1} = \alpha_3 \alpha_1^{-1} \ll 1$.

$$\alpha \dot{x} + x = x^2 \eta (1 - A\eta)^{-1},$$

$$\dot{\eta} + \eta - \eta_0 = -x^2 \eta (1 - A\eta)^{-2}.$$

Отсюда видно, что вдали от плоскости $\eta = A^{-1}$ изображающая точка движется так же, как и в комбинационном лазере в отсутствие резонансного поля. В частности, если одновременно выполняются условия

$$A\eta_3 \ll 1, \quad \eta_0^2 \alpha \simeq 1^* \quad (8)$$

и условие устойчивости третьего положения равновесия (4), то в рассматриваемой системе существует неустойчивый предельный цикл.

Рассмотрим процесс установления движений в системе для случая, когда $\eta_0 > A + A^{-1}$ (четвертое положение равновесия отсутствует) и удовлетворяются условия (8).

Пусть в начальный момент изображающая точка находилась на оси $\eta (x = 0, y = 0)$. Сначала начнется процесс нарастания y , как в обычном резонансном лазере. Как только изображающая точка окажется в области $\eta < A^{-1}$, она быстро стремится к поверхности (7). Поскольку в рассматриваемой системе существует 3 положения равновесия, из которых первое и второе — неустойчивые, а при смене характера устойчивости третьего положения равновесия рождается неустойчивый предельный цикл, то при движении по поверхности (7) изображающая точка должна стремиться к устойчивому циклу, охватывающему третье положение равновесия. Соответствующее разбиение фазового пространства для случая, когда третье равновесное состояние устойчиво, изображено на рис. 2.

Таким образом, при выполнении условия (4) в системе возможен мягкий режим возбуждения полей. В стационарном режиме генерируются поля комбинационных и резонансной частот, причем излучение имеет импульсный характер. Особенности данной системы по сравнению с рассмотренной в [1] обусловлены наличием параметрического взаимодействия между комбинационными и резонансными полями, связанного с существованием пространственного синхронизма.

Таким образом, при выполнении условия (4) в системе возможен мягкий режим возбуждения полей. В стационарном режиме генерируются поля комбинационных и резонансной частот, причем излучение имеет импульсный характер. Особенности данной системы по сравнению с рассмотренной в [1] обусловлены наличием параметрического взаимодействия между комбинационными и резонансными полями, связанного с существованием пространственного синхронизма.

Наше рассмотрение относилось к случаю, когда начальные фазы полей удовлетворяли условию $\Phi(0) = 0$. Если $\Phi(0) \neq 0$, то развитие процесса происходит аналогичным образом.

Из (1в) имеем

$$\Phi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\Phi(0)}{2} \exp \left(- \int_0^t f dt \right) \right\},$$

* При выполнении последнего условия размеры неустойчивого цикла, рождающегося при смене характера устойчивости положения равновесия 3, достаточно малы.

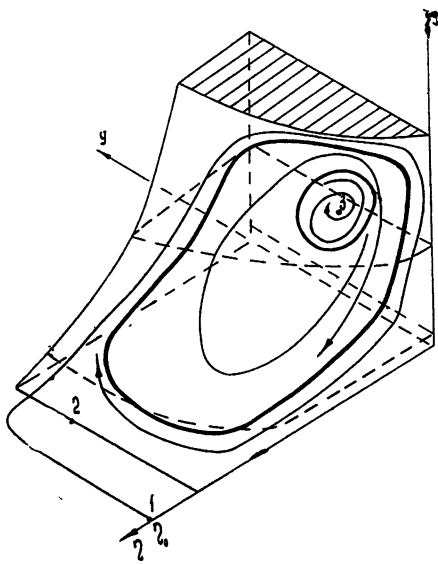


Рис 2.

где

$$f = \frac{1}{2} n \{ B_1 E_1^{-1} E_2 E_3 + B_2 E_1 E_2^{-1} E_3 + B_3 E_1 E_2 E_3^{-1} \},$$

откуда видно, что фаза Φ монотонно стремится к нулю при любых значениях $\Phi(0)$. Можно оценить характерное время движения фазы к стационарному значению: $\tau \ll \left(\frac{1}{2} n B_{1,2} \bar{E}_3 \right)^{-1}$. Если в качестве \bar{E}_3 взять

величину резонансного поля во втором положении равновесия, то $\tau \ll 10^{-9}$ сек. Через время $t > \tau$ установится фаза, равная нулю, и поведение системы будет описываться уравнениями (2).

В заключение приведем численную оценку условия существования описанного режима работы ОКГ. Пусть $\omega = 10^{15}$ сек, ширина линии $T_{21}^{-1} = 10^{12}$ сек⁻¹, вероятность перехода между рабочими уровнями под действием некогерентной накачки порядка 10^6 сек⁻¹; $|p_{12}| \simeq 10^{-20}$ CGSE, $\sum_k p_{1k} p_{k2} \simeq 10^{-36}$ CGSE (p_{rl} — матричный элемент дипольного момента между r -ым и l -ым уровнями); время затухания поля на частотах комбинационных полей $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-8}$ сек; плотность числа активных ионов $N \simeq 10^{20}$ см⁻³. Тогда условие (4) удовлетворяется, если время затухания поля на частоте резонансного поля $\tau_3 \simeq 10^{-10}$ сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Бутылкин, Г. Л. Гуревич, М. И. Хейфец, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 539 (1966).
2. Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 495 (1965).
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. З. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Поступила в редакцию
23 февраля 1966 г.

ON INTERACTION OF RESONANCE AND DOUBLE RADIATION AT THE SPACE SYNCHRONISM

G. L. Gourevich, M. I. Kheifets

The influence of a resonance field upon the double radiation in the case of a space synchronism existed in the system is considered. A soft regime of excitation of the combinational fields is shown to be possible in such a system. The equilibrium states are found. The setting on process of stationary oscillations is described. 1

УДК 621.371.168

О СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СРЕДЕ СО СЛАБЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Татарский

Задача о сильных флуктуациях амплитуды волны, распространяющейся в случайно неоднородной среде, рассматривается в приближении геометрической оптики. Предполагается, что флуктуации направления распространения малы. В этом случае оказывается возможным в явном виде выполнить интегрирование для амплитуды волны по случайным траекториям луча и найти выражение для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды в той области, где теория возмущений не применима.

При исследовании распространения света в турбулентной атмосфере в работе М. Е. Грачевой и А. С. Гурвича [1] была экспериментально обнаружена область сильных флуктуаций, в которой с ростом расстояния, проходимого волной в неоднородной среде, средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды перестает возрастать и остается приблизительно постоянным (порядка единицы). В области сильных флуктуаций оказываются непригодными расчеты, основанные на той или иной форме метода возмущений. В работе автора [2] это явление было рассмотрено на основе учета накапливающихся искажений рассеиваемой волны. Однако приведенный в этой работе расчет носит довольно грубый характер, и его результат содержит неопределенный параметр, выбор которого позволяет добиться хорошего согласия теории с экспериментальными данными.

Ниже приводится расчет сильных флуктуаций амплитуды, основанный на приближении геометрической оптики. Здесь удастся решить задачу более корректно и получить результат в виде простых конечных формул.

1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НАПРАВЛЕНИЯ ЛУЧА

Пусть $\theta(\mathbf{r})$ — эйконал, $A(\mathbf{r})$ — амплитуда волны, $n(\mathbf{r})$ — показатель преломления, являющийся случайной функцией координат. Уравнения геометрической оптики имеют вид

$$(\nabla\theta)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(A^2\nabla\theta) = 0. \quad (2)$$

Пусть ϵ — диэлектрическая проницаемость среды (магнитную проницаемость будем считать равной единице). Тогда $n^2 = \epsilon = \langle\epsilon\rangle + \epsilon_1$, где $\langle\epsilon\rangle$ — среднее значение и ϵ_1 — флуктуирующая часть ϵ . Случайную величину $\epsilon_1(\mathbf{r})$ будем считать статистически однородной и изотропной в области $x > 0$. Будем считать, что $\langle\epsilon\rangle = 1$ (небольшое отличие $\langle\epsilon\rangle$ от единицы можно включить в эйконал) и $|\epsilon_1| \ll 1$.

Пусть неоднородная среда расположена в области $x > 0$, и на нее падает плоская волна с амплитудой A_0 . Будем считать, что $\theta(0, \rho) = 0$ (здесь $\rho = (y, z)$). Запишем уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 = 1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}) - (\nabla_{\perp}\theta)^2, \quad (1a)$$

где $\nabla_{\perp} = \partial/\partial\rho$ — поперечный градиент. Отношение $|\nabla_{\perp}\theta|/|\partial\theta/\partial x| = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, составляемый лучом с осью x . Будем считать, что выполняется условие $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$. Для этого необходимо, конечно, чтобы выполнялось и условие $\langle \varepsilon_1^2 \rangle \ll 1$. В этом случае уравнение (1a) можно решать путем итераций по малому члену $(\nabla_{\perp}\theta)^2$. В первом приближении

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = n = [1 + \varepsilon_1(\mathbf{r})]^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$$\theta(x, \rho) = x + \frac{1}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, \rho) d\xi. \quad (4)$$

Поправки к (4) имеют порядок ε_1^2 и $(\nabla_{\perp}\theta)^2$. В области, где малы флуктуации направления луча, ими можно пренебречь.

Пусть $\chi(\mathbf{r}) = \ln [A(\mathbf{r})/A_0]$. Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$2 \nabla\chi\nabla\theta + \Delta\theta = 0.$$

Введем единичный вектор $l = \nabla\theta/|\nabla\theta| = \nabla\theta/n$ вдоль луча. Последнее уравнение тогда примет вид

$$2nl\nabla\chi = 2n \frac{d\chi}{ds} = -\Delta\theta, \quad (2a)$$

где d/ds — производная вдоль луча. Интегрируя (2a) вдоль луча, получим

$$\chi(s) = -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{\Delta\theta}{n} ds. \quad (5)$$

В случае, если боковое смещение луча мало по сравнению с радиусом корреляции подинтегрального выражения, интегрирование в (5) можно производить вдоль прямой $y = z = 0$. Однако в области сильных флуктуаций амплитуды это условие не выполняется, и интегрирование в (5) необходимо производить вдоль истинного луча.

Дифференциальное уравнение луча при заданном $\theta(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = l = \frac{\nabla\theta}{n}. \quad (6)$$

Пусть $\mathbf{r} = (x, \rho)$. Тогда в соответствии с (3)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{n} \frac{\partial\theta}{\partial x} = 1, \quad ds = dx$$

(это соотношение справедливо с точностью до величин порядка α^2) и

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = \frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{n} \nabla_{\perp}\theta(x, \rho(x)). \quad (7)$$

Величина $\nabla_{\perp}\theta$, согласно (4), имеет первый порядок малости по ε_1 , поэтому в знаменателе правой части (7) можно считать $n = 1$. Тогда, подставляя (4), найдем

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{2} \int_0^x \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho(x)) d\xi. \quad (8)$$

Искомая величина ρ входит в (8) под знак случайной функции ε_1 , поэтому решение уравнения (8) получить затруднительно. Однако в случае малых флуктуаций направления луча величину $\rho(x)$ в правой части (8) можно заменить нулем. В том, что это действительно так, можно убедиться следующим образом. Если на основании уравнения

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{2} \int_0^x \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi \quad (8a)$$

подсчитать средний квадрат $\langle \rho^2(x) \rangle$, то эта величина оказывается пропорциональной x^3 (см. ниже). В то же время расчет $\langle \rho^2 \rangle$, основанный на применении уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка (см. [2]), не ограниченный условием малости $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$, приводит к тому же результату в области, где $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$, и к диффузионному закону $\langle \rho^2 \rangle \sim x$ в области $\langle \alpha^2 \rangle \gg 1$. Таким образом, при $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ уравнение (8a) пригодное для нахождения луча*.

В (8a) учтено, что при $x = 0$ выполняется условие $d\rho/dx = 0$ (нормальное падение волны на слой). Интегрируя уравнение (8a) при добавочном условии $\rho(L) = 0$ (луч должен проходить через точку наблюдения $(L, 0, 0)$), получим

$$\rho(x) = -\frac{1}{2} \int_0^L M(L, x, \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi, \quad (9)$$

где

$$M(L, x, \xi) = \vartheta(x - \xi)(L - x) + \vartheta(\xi - x)(L - \xi) \quad (10)$$

и $\vartheta(x) = 0$ при $x < 0$, $\vartheta(x) = 1$ при $x > 0$.

Используя равенство $ds = dx$ и полагая в знаменателе (5) $n = 1$, так как $\Delta\theta$ уже является величиной порядка ε_1 , можно записать

$$\chi(L) = -\frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \Delta_{\perp} \theta \right) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_L - \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0 \right] - \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_{\perp} \theta dx.$$

Легко показать, что локальные члены $\partial\theta/\partial x$ вносят незначительный вклад в χ и ими можно пренебречь. Тогда мы получаем окончательное выражение для $\chi(L)$:

$$\chi(L) = -\frac{1}{2} \int_0^L \Delta_{\perp} \theta(x, \rho(x)) dx, \quad (11)$$

где $\rho(x)$ задается соотношением (9).

Дальнейшая задача заключается в определении среднего квадрата флуктуаций χ : $\sigma_{\chi}^2 = \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2$.

* Доказательство применимости уравнения (8a) в случае сильных флуктуаций амплитуды содержится в другой работе автора [3].

Прежде всего, свяжем величины σ_χ^2 и $\langle \chi \rangle$. Подставляя в (2) $\nabla \theta = n l$ и усредняя, найдем

$$\operatorname{div} \langle A^2 n l \rangle = 0.$$

В случае статистической однородности флуктуаций ε в плоскости $x = \text{const}$ из соображений симметрии ясно, что $\langle A^2 n l \rangle$ зависит только от x . Поэтому последнее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dx} \langle A^2 n l_x \rangle = 0. \quad (12)$$

Но в рассматриваемом приближении $l_x = 1$, так что (12) приводит к соотношению ($n \simeq 1 + \varepsilon_1/2$)

$$\frac{d \langle A^2 \rangle}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d \langle A^2 \varepsilon_1 \rangle}{dx} = 0.$$

Так как $\langle A^2 \varepsilon_1 \rangle < \langle A^2 \rangle \sigma_{\varepsilon_1}$, где $\sigma_{\varepsilon_1}^2 = \langle \varepsilon_1^2 \rangle$, то с точностью до величины порядка ε_1 имеет место соотношение $\langle A^2 \rangle = \text{const} = A_0^2$. Подставляя $A = A_0 \exp(\chi)$, получим

$$\langle \exp(2\chi) \rangle = 1. \quad (13)$$

Далее заметим, что согласно (11) χ представляет собой интеграл от случайной величины $\Delta_\perp \theta$. В случае, когда L намного превышает радиус корреляции флуктуаций величины $\Delta_\perp \theta$, в силу предельной теоремы χ имеет гауссовское распределение. Но для гауссовской случайной величины 2χ имеет место равенство

$$\langle \exp(2\chi) \rangle = \exp \left\{ \langle 2\chi \rangle + \frac{1}{2} [\langle (2\chi)^2 \rangle - \langle 2\chi \rangle^2] \right\},$$

которое легко получить, интегрируя $\exp(2\chi)$ с гауссовской плотностью распределения вероятностей. Используя это соотношение, получим из (13) формулу

$$\sigma_\chi^2 = - \langle \chi \rangle, \quad (14)$$

которая значительно упрощает расчет σ_χ^2 , сводя его к более простой задаче нахождения $\langle \chi \rangle$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ФЛУКТУАЦИЙ ЛОГАРИФМА АМПЛИТУДЫ

Усредняя (11), получим с учетом (14)

$$\sigma_\chi^2 = - \frac{1}{2} \int_0^L F(x) dx, \quad (15)$$

где

$$F(x) = \langle \Delta_\perp \theta(x, \rho(x)) \rangle. \quad (16)$$

Используя формулу (4), найдем, что

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \varphi(x, \xi) d\xi, \quad (17)$$

где

$$\varphi(x, \xi) = \langle \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho(x)) \rangle. \quad (18)$$

Величина $\rho(x)$, входящая в аргумент случайной функции ε_1 , является согласно (9) функционалом от ε_1 и, следовательно, коррелирована с ε_1 . Для нахождения φ представим $\Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho(x))$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - \rho(x)) \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho) d^2\rho = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\mathbf{x}[\rho - \rho(x)]\} \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho) d^2\rho d^2x. \end{aligned}$$

Усредняя это выражение, найдем

$$\varphi(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mathbf{x}\rho) \langle \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho) \exp[-i\mathbf{x}\rho(x)] \rangle d^2\rho d^2x. \quad (19)$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi[\mathbf{a}] \equiv \left\langle \exp\left[i \int_0^L d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \mathbf{a}(\xi', \rho') \nabla_{\perp \varepsilon_1}(\xi', \rho') \right] \right\rangle, \quad (20)$$

где $\mathbf{a} = (a_2, a_3)$. Если в качестве \mathbf{a} взять функцию

$$\mathbf{a}_0(\xi', \rho') = \frac{1}{2} \mathbf{x} M(L, x, \xi') \delta(\rho'), \quad (21)$$

то значение $\Phi[\mathbf{a}_0]$ с учетом (9) будет равно

$$\begin{aligned} \Phi[\mathbf{a}_0] &= \left\langle \exp\left[i\mathbf{x} \frac{1}{2} \int_0^L M(L, x, \xi') \nabla_{\perp \varepsilon_1}(\xi', 0) d\xi' \right] \right\rangle = \\ &= \langle \exp[-i\mathbf{x}\rho(x)] \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Применим к (20) оператор вариационного дифференцирования $\delta/\delta a_k(\xi, \rho)$; тогда получим

$$\frac{\delta\Phi[\mathbf{a}]}{\delta a_k(\xi, \rho)} = \left\langle i \frac{\partial \varepsilon_1(\xi, \rho)}{\partial \rho_k} \exp\left[i \int_0^L d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \mathbf{a}(\xi', \rho') \nabla_{\perp \varepsilon_1}(\xi', \rho') \right] \right\rangle. \quad (23)$$

Применив к (23) оператор $-i\partial/\partial\rho_k$, найдем

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial \rho_k} \frac{\delta\Phi[\mathbf{a}]}{\delta a_k(\xi, \rho)} &= \left\langle \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho) \exp\left[i \int_0^L d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \mathbf{a}(\xi', \rho') \nabla_{\perp \varepsilon_1}(\xi', \rho') \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Если в (24) после выполнения операций дифференцирования в качестве функционального аргумента взять функцию (21), то мы получим выражение

$$\langle \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho) \exp[-i x \rho(x)] \rangle = -i \frac{\partial}{\partial \rho_k} \frac{\delta \Phi[\mathbf{a}]}{\delta a_k(\xi, \rho)} \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0}, \quad (25)$$

входящее в (19) и необходимое для нахождения σ_{λ}^2 .

Найдем теперь $\Phi[\mathbf{a}]$. Интеграл, стоящий в экспоненте в (20), в силу предельной теоремы можно считать гауссовской случайной величиной (в действительности необходимо, чтобы он был гауссовским при $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, т. е. чтобы случайное смещение луча было гауссовской случайной величиной). Используя формулу $\langle \exp(i\gamma) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \gamma^2 \rangle\right)$ для гауссовской случайной величины γ (при $\langle \gamma \rangle = 0$), получим

$$\Phi[\mathbf{a}] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^L d\xi' \int_0^L d\xi'' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi', \rho') a_l(\xi'', \rho'') \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_n} \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_l} \right\rangle d^2 \rho' d^2 \rho'' \right\}.$$

В случае, когда случайное поле ε_1 статистически однородно, легко получить формулу

$$\left\langle \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_n} \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_l} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'')}{\partial \rho'_n \partial \rho''_l},$$

где

$$D_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'') = \langle [\varepsilon_1(\xi', \rho') - \varepsilon_1(\xi'', \rho'')]^2 \rangle$$

— структурная функция флуктуаций ε_1 . Таким образом,

$$\Phi[\mathbf{a}] = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^L d\xi' \int_0^L d\xi'' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' d^2 \rho'' \frac{\partial^2 D_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'')}{\partial \rho'_n \partial \rho''_l} \times \right. \\ \left. \times a_n(\xi', \rho') a_l(\xi'', \rho'') \right\}. \quad (26)$$

Выполняя входящие в (25) операции дифференцирования и полагая затем $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, получим

$$\langle \Delta_{\perp \varepsilon_1}(\xi, \rho) \exp[-i x \rho(x)] \rangle = \Phi[\mathbf{a}_0] \frac{i x_l}{4} \times \\ \times \int_0^L d\xi' M(L, x, \xi') \frac{\partial \Delta_{\perp} D_\varepsilon(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_l}. \quad (27)$$

Заметим также, что

$$\Phi[\mathbf{a}_0] = \langle \exp[-i x \rho(x)] \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} x_i x_j \langle \rho_i(x) \rho_j(x) \rangle \right].$$

Но в случае статистически изотропных флуктуаций ε , очевидно, $\langle \rho_i(x) \rho_j(x) \rangle = \delta_{ij} f(x)$. Отсюда, свертывая по $i = j = 2, 3$, получим

$f(x) = \frac{1}{2} \langle \rho^2(x) \rangle$, где $\rho^2 = \rho^2$. Поэтому

$$\Phi[\mathbf{a}_0] = \exp \left\{ -\frac{1}{4} x^2 \langle \rho^2(x) \rangle \right\}. \quad (28)$$

Подставляя (27), (28) в (19) и выполняя интегрирование по x , получаем выражение

$$\varphi'_i(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \langle \rho^2(x) \rangle^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho \int_0^L d\xi' M(L, x, \xi') \rho_i \times \quad (29)$$

$$\times \frac{\partial \Delta_\perp D_\varepsilon(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_i} \exp[-\rho^2 \langle \rho^2(x) \rangle^{-1}].$$

Формулы (15), (17) и (29), в принципе, представляют решение задачи о нахождении σ_z^2 .

Чтобы провести дальнейшие вычисления, удобно использовать двумерное спектральное разложение структурной функции D_ε :

$$D_\varepsilon(\xi - \xi', \rho) - D_\varepsilon(\xi - \xi', 0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(i\mathbf{x}\rho)] F_\varepsilon(\xi - \xi', \mathbf{x}) d^2\mathbf{x}, \quad (30)$$

$$F_\varepsilon(-\xi, \mathbf{x}) = F_\varepsilon(\xi, \mathbf{x}) = F_\varepsilon(\xi, -\mathbf{x}).$$

Представление (30) удобно потому, что двумерный спектр $F_\varepsilon(\xi, \mathbf{x})$ в случае статистически изотропных флуктуаций ε обладает важным свойством — функция $F_\varepsilon(\xi, \mathbf{x})$ быстро убывает при $x\xi \gg 1$ (см. [4]). Это связано с тем, что величина (30) равна среднему значению:

$$\langle [\varepsilon_1(\xi, 0) - \varepsilon_1(\xi, \rho)] [\varepsilon_1(\xi', 0) - \varepsilon_1(\xi', \rho)] \rangle.$$

Но корреляция разностей $\varepsilon_1(\xi, 0) - \varepsilon_1(\xi, \rho)$ и $\varepsilon_1(\xi', 0) - \varepsilon_1(\xi', \rho)$ вызвана лишь теми неоднородностями, масштабы которых превышают расстояние $|\xi - \xi'|$, т. е. соответствующие волновые числа удовлетворяют условию $x|\xi - \xi'| \leq 1$.

Подставим (30) в (29). После этого интегрирование по ρ легко выполняется, в результате чего получаем формулу

$$\varphi(x, \xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left[-\frac{1}{4} x^2 \langle \rho^2(x) \rangle\right] d^2\mathbf{x} \int_0^L M(L, x, \xi') \times \quad (31)$$

$$\times F_\varepsilon(\xi - \xi', \mathbf{x}) d\xi'.$$

Используя отмеченное выше свойство функции $F_\varepsilon(\xi, \mathbf{x})$, можно приближенно вычислить внутренний интеграл в (31):

$$\int_0^L M(L, x, \xi') F_\varepsilon(\xi - \xi', \mathbf{x}) d\xi' \simeq (L - x) \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\xi - \xi', \mathbf{x}) d\xi' = \quad (32)$$

$$= 2\pi(L - x) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \text{при } \xi < x.$$

Здесь $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ — трехмерное преобразование Фурье корреляционной функции ε_1 . Подставим (32) в (31), а затем введем по \mathbf{x} полярные координаты и выполним интегрирование по углу (в случае статистической изотропности флуктуаций ε функция $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ не зависит от направления вектора \mathbf{x}). В результате получим.

$$\varphi(x, \xi) = 2\pi^2(L - x) \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(x) \exp\left[-\frac{1}{4} x^2 \langle \rho^2(x) \rangle\right] x^5 dx. \quad (33)$$

Подставим (33) в (17) и выполним интегрирование по ξ (от которого $\varphi(x, \xi)$ фактически не зависит). Подставляя полученное выражение $F(x)$ в (15), найдем

$$\sigma_{\chi}^2(L) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^L x(L-x) dx \int_0^{\infty} \Phi_{\varepsilon}(x) \exp\left[-\frac{1}{4} x^2 \langle \rho^2(x) \rangle\right] x^5 dx. \quad (34)$$

Нам остается еще найти $\langle \rho^2(x) \rangle$. Для этого возведем (9) в квадрат и усредним. Входящую в подынтегральное выражение величину $\langle \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi_1, 0) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi_2, 0) \rangle$ можно выразить через $\Delta_{\perp} D_{\varepsilon}$, а затем перейти при помощи (30) к функции F_{ε} . Тогда получим

$$\langle \rho^2(x) \rangle = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d^2x \int_0^L \int_0^L M(L, x, \xi_1) M(L, x, \xi_2) F_{\varepsilon}(\xi_1 - \xi_2, x) \times \\ \times d\xi_1 d\xi_2. \quad (35)$$

Интегрирование по ξ_1, ξ_2 можно выполнить в том же приближении, в котором найдено (32) (однако применять непосредственно формулу (32) нельзя, так как в (35) не выполняется условие $\xi < x$). Простое вычисление приводит к формуле

$$\langle \rho^2(x) \rangle = \frac{\pi^2}{3} (L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \int_0^{\infty} x_1^3 \Phi_{\varepsilon}(x_1) dx_1. \quad (36)$$

В соответствии с условием $\rho(L) = 0$ (36) обращается в нуль при $x = L$. Полагая $x = 0$, находим, что $\langle \rho^2(0) \rangle \sim L^3$, о чем было сказано в первой части статьи.

Выражение (36) следует подставить в (34). При этом оказывается, что величина $x(L-x)$ в (34) пропорциональна производной от выражения $L^3 - 3Lx^2 + 2x^3$, входящего в $\langle \rho^2(x) \rangle$. Это позволяет взять интеграл по x , что приводит к окончательному выражению

$$\sigma_{\chi}^2 = \frac{1}{Q} \int_0^{\infty} x^3 \Phi_{\varepsilon}(x) \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 L^3}{12} Q x^2\right) \right] dx, \quad (37)$$

где

$$Q = \int_0^{\infty} x_1^3 \Phi_{\varepsilon}(x_1) dx_1. \quad (38)$$

При $L \rightarrow 0$ экспоненту в (37) можно разложить в ряд и взять первые два члена разложения. Тогда мы получим для σ_{χ}^2 выражение

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi^2 L^3}{12} \int_0^{\infty} x^5 \Phi_{\varepsilon}(x) dx, \quad (39)$$

соответствующее первому приближению теории возмущений [4]. При $L \rightarrow \infty$ экспонентой в (37) можно пренебречь, и мы получаем

$$\sigma_{\chi}^2 \rightarrow 1 \quad \text{при } L \rightarrow \infty. \quad (40)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда флуктуации диэлектрической проницаемости вызываются турбулентными пульсациями

температуры газа. В этом случае трехмерную спектральную плотность $\Phi_\varepsilon(x)$ можно аппроксимировать выражением

$$\Phi_\varepsilon(x) = AC_\varepsilon^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2), \quad (41)$$

где A — численная постоянная, C_ε^2 — величина, характеризующая интенсивность флуктуаций диэлектрической проницаемости, x_m — волновое число, определяющее размер наименьших неоднородностей $x_m \sim l_0^{-1}$. В этом случае интегралы, входящие в (37), (38), (39), легко вычисляются и можно получить формулу

$$\sigma_\chi^2 = 1 - [1 + 6\sigma_0^2]^{-1/6} \quad (\sigma_0^2 = \text{const } C_\varepsilon^2 L^3 x_m^{7/3}), \quad (42)$$

связывающую средний квадрат флуктуаций σ_χ^2 с величиной σ_0^2 , найденной в первом приближении теории возмущений.

Зависимость $\sigma_\chi = f(\sigma_0)$ экспериментально исследовалась в атмосфере в работе [1]. Результаты измерений представлены на рис. 1. В виде сплошной линии нанесена кривая, соответствующая (42). Хотя в усло-

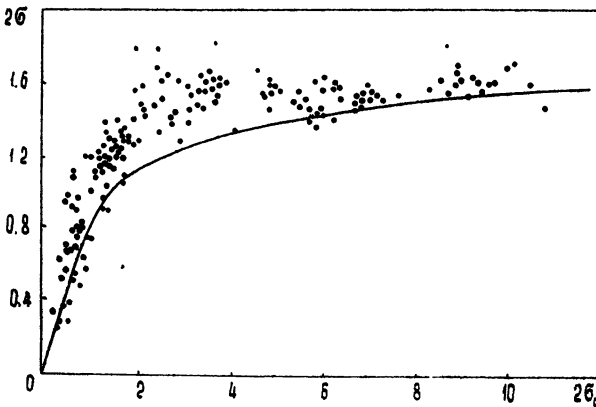


Рис. 1.

виях эксперимента и не выполнялись условия применимости геометрической оптики, согласие результатов измерений с формулой (42) следует считать удовлетворительным. По-видимому, это является следствием того, что зависимость $\sigma_\chi = f(\sigma_0)$ не очень чувствительна к виду спектра $\Phi_\varepsilon(x)$, хотя от него сильно зависит сама величина σ_0^2 .

Если найти величину σ_0^2 в первом порядке теории возмущений, исходя из волнового уравнения или уравнения метода плавных возмущений, то вместо формулы (39) будет иметь место выражение [4]

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi^2 k^2 L}{2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{k}{x^2 L} \sin \frac{x^2 L}{k}\right) \Phi_\varepsilon(x) x dx, \quad (43)$$

справедливое при $\sigma_0^2 \ll 1$ и в той области, где теряет силу полученное из геометрической оптики выражение (39). Это выражение отличается от (39) тем, что спектр флуктуаций $\Phi_\varepsilon(x)$ заменен выражением

$$\Phi_\varepsilon^{(3)}(x) = 6 \left(1 - \frac{k}{x^2 L} \sin \frac{x^2 L}{k}\right) \left(\frac{x^2 L}{k}\right)^{-2} \Phi_\varepsilon(x), \quad (44)$$

в котором вследствие дифракции подавлены мелкомасштабные компоненты. Можно попытаться оценить влияние дифракционных эффектов, совершив замену (44) и в формулах (37), (38), хотя это, конечно, требует дополнительного обоснования, и заранее неясно, насколько законна такая операция в области сильных флуктуаций*. Если в качестве $\Phi_a(x)$ снова взять функцию (41), то вычисление можно провести до конца, и это приводит в случае $x_m^2 L/k \gg 1$ (когда геометрическая оптика уже не применима) к формуле

$$\sigma_z^2 = 1 - \frac{17}{6} \sec \frac{\pi}{12} d^{-11/6} \left[1 - (1 + d^2)^{17/12} \frac{\sin(17/6 \operatorname{arctg} d)}{17/6 d} \right], \quad (45)$$

где

$$d = \frac{17}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} (\sigma_0^2)^{-1}, \quad \sigma_0^2 = \operatorname{const} C_2^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad \operatorname{const} = \frac{9\pi^2 A}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \times \\ \times \sin \frac{\pi}{12}.$$

Хотя формула (45) сильно отличается от (42), сравнение этих выражений как функций от σ_0^2 приводит к заключению, что они практически совпадают (отличия имеют порядок нескольких процентов). При этом, конечно, выражения для σ_0^2 сильно отличаются в этих двух случаях. Близостью зависимостей (45) и (42) и можно, по-видимому, объяснить удовлетворительное согласие экспериментальных данных работы [1] с зависимостью (42).

В заключение попытаемся дать наглядное истолкование полученного результата. Как следует из принципа Ферма, истинная траектория луча стационарна. Отсюда следует, что, если взять луч, приходящий в точку $(L, \delta\rho)$, бесконечно-близкую к точке наблюдения $(L, 0)$ и находящуюся на той же поверхности $\theta = \operatorname{const}$, то разность эйконолов в них будет порядка $(\delta\rho)^2$. Если же интегрирование производить не вдоль истинных лучей, а, например, вдоль прямых линий, проходящих через эти точки, как это делается в методе возмущений, то разность эйконолов будет порядка $\delta\rho$. Таким образом, для истинного луча поперечное изменение эйконола меньше, чем для произвольно выбранной линии, а поэтому и амплитудные флуктуации, определяемые поперечными изменениями эйконола, меньше, чем при расчете по теории возмущений.

Следует также сделать одно замечание к проделанному расчету. Принятое нами уравнение луча (8а) всегда имеет единственное решение в отличие от точного уравнения (8). Это означает, что мы пренебрегаем возможностью попадания точки наблюдения в область вблизи каустики, где лучи могут пересекаться. Но учет этого эффекта нельзя провести в рамках геометрической оптики, которая вблизи каустики несправедлива [5]. Однако согласие результатов проведенного расчета с данными эксперимента дает основание предполагать, что этот эффект не играет определяющей роли и может, по-видимому, изменить результат не очень существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 717 (1965).
2. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 49, 1581 (1965).
3. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958

* Расчет, выполненный аналогичным образом, на основе метода плавных возмущений, а не геометрической оптики, приводит к выражению, отличному от (45), но зависимость $\sigma_z = f(\sigma_0)$, полученная при этом, слабо отличается от (45).

4. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, М., 1948.
6. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
2 апреля 1966 г.

ON AMPLITUDE STRONG FLUCTUATIONS OF WAVE PROPAGATING IN MEDIUM WITH WEAK RANDOM INHOMOGENEITIES

V. I. Tatarsky

The problem of the amplitude strong fluctuations of a wave propagating in a random inhomogeneous medium is considered in the geometric optics approximation. The fluctuations of a propagation direction are supposed to be small. In this case the integration for the wave amplitude over the ray random trajectories can be made in an explicit form and the expression can be found for the mean square of fluctuations of the amplitude logarithm in that region, where the perturbation theory cannot be used.

УДК 621.378.325

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ И ЧАСТОТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

И. Л. Берштейн, И. А. Андропова, Ю. И. Зайцев

Рассматриваются флуктуации колебания одномодового непрерывно действующего лазера. Расчет проведен с использованием феноменологических параметров. Получены формулы для спектральных плотностей флуктуаций интенсивности и частоты. Некоторые результаты сопоставлены с имеющимися опытными данными

Настоящая работа посвящена расчету флуктуаций излучения лазера непрерывного действия. В статьях, посвященных этому вопросу (см., например, [1, 2]), отсутствует достаточно полный учет дисперсионных и нелинейных свойств активной среды, а также не получены формулы для спектров флуктуаций. Наш анализ проводится на основе феноменологического описания свойств активной среды; последняя характеризуется ее электрической поляризацией (результаты легко переносятся на случай магнитной поляризации). Такой путь позволил, исходя из простых физических положений, решить задачу в достаточно общем виде, получить выражения для спектральных плотностей флуктуаций и естественной ширины линии излучения. Численные значения параметров, входящих в эти формулы, могут быть либо рассчитаны на основе той или иной конкретной модели, либо определены на опыте*. Анализ проводится для одномодового режима генерации лазера; в конце работы приводятся качественные соображения для случая многомодового режима.

Существенный интерес представляет, в первую очередь, сравнительно низкочастотный участок спектра флуктуаций. Для его определения допустимо заменить дифференциальные уравнения, связывающие поляризацию среды с полем (и другими параметрами), прямой (алгебраической) связью поляризации с полем. Такой прием годен до частот порядка $1/\tau$, где τ — характерное время релаксации в среде. Например, в газовых лазерах $\tau \approx 10^{-7} \div 10^{-8}$ сек, и поэтому проводимые расчеты спектра флуктуаций можно считать законными до частот порядка 10^7 ω **.

При составлении уравнений для электрического и магнитного полей E и H будем пользоваться обычной идеализацией, согласно которой поле считается чисто поперечным, изменяющимся лишь вдоль оси резонатора x . Активную среду будем считать однородной, а ее поляризацию определим соотношением $P = \chi E = (\chi_1 - i\chi_2) E$, где χ_1 и χ_2 являются функциями интенсивности и частоты колебаний, но не времени. Потери в резонаторе (дифракционные, при отражении от зеркал и т. д.) учтем

* С другой стороны, экспериментальное исследование флуктуаций может позволить определить некоторые параметры (свойства) системы, которые затруднительно или невозможно определить по ее динамическому поведению.

** Прямая связь поляризации с полем была принята В. С. Троицким [3] для построения теории флуктуаций молекулярного генератора. Более полная теория [4] дала те же результаты для низкочастотной части спектра флуктуаций.

введением равномерно распределенной омической проводимости σ (это позволяет не усложнять анализ введением граничных условий). Численное значение σ можно найти из определяемой на опыте ширины полосы резонатора.

Параметры χ_2 и σ , характеризующие диссипацию (положительную или отрицательную) энергии, позволяют ввести для расчета флуктуаций в системе сторонние случайные поля, дельта коррелированные в пространстве (этот вопрос для равновесного излучения обстоятельно разобран в [5]), или — как мы сделаем, и это является совершенно эквивалентным — ввести сторонние случайные составляющие поляризации и плотности тока, которые обозначим соответственно ρ и j .

Для E и H в резонаторе напишем, учитывая сказанное,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial (P + \rho)}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} (\sigma E + j). \quad (2)$$

Спектральную плотность ρ и j просто вычислить при отсутствии колебаний в системе: выделяя малый объем в резонаторе $dV = Sdx$, где S — площадь поперечного сечения резонатора, и применяя к нему известное соотношение Г. Каллена и Т. Вельтона, получим для спектральных плотностей j и ρ

$$\bar{j}_\omega^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma}{Sdx} \theta_1, \quad (3)$$

$$\bar{\rho}_\omega^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\chi_2}{\omega Sdx} \theta_2, \quad (4)$$

где

$$\theta_i = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT_i) - 1} \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Величина σ характеризует диссипацию энергии из резонатора в окружающее пространство, и естественно считать в выражении для \bar{j}_ω^2 значение T_1 равным температуре этого пространства; при этом величина \bar{j}_ω^2 является неизменной как при отсутствии, так и при наличии колебаний в системе. Вопрос о значении $\bar{\rho}_\omega^2$ при колебаниях сложнее, и мы к нему вернемся позднее.

Считая систему близкой к соответствующей консервативной, решение уравнений (1) и (2) будем искать известным методом разложения по собственным функциям консервативной системы. Полагая

$$E = e \sin(Kx), \quad H = h \cos(Kx), \quad (6)$$

получим уравнения для e и h^* :

$$dh/dt = -cKe, \quad (7)$$

$$\frac{de}{dt} = cKh - \frac{8\pi}{L} \frac{de}{dt} \int_{x_1}^{x_2} x \sin^2(Kx) dx - 4\pi\sigma e - \xi - \tau_i, \quad (8)$$

* Реально значение K не является постоянным вдоль всей длины резонатора, но учет этого не является существенным для разбираемых вопросов. Отражением от границ внутри резонатора пренебрегаем

где

$$\xi = \frac{8\pi}{L} \int_0^L j \sin(Kx) dx \quad (9)$$

и

$$\eta = \frac{8\pi}{L} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \sin(Kx) dx \quad (10)$$

— случайные функции времени, L — длина резонатора, а $x_2 - x_1 = l$ — длина активной среды.

Определим спектральные плотности ξ и η при отсутствии колебаний в системе. В этом случае x_2 и T_2 не зависят от x , и согласно (3) и (4) получаем

$$\overline{\xi^2} = \frac{64\pi^2}{L^2} \int_0^L (\overline{j^2} dx) \sin^2(Kx) dx = \frac{64\pi\sigma}{V} \theta_1, \quad (11)$$

$$\overline{\eta^2} = \frac{64\pi^2}{L^2} \omega^2 \int_{x_1}^{x_2} (\overline{\rho^2} dx) \sin^2(Kx) dx = \frac{64\pi\omega}{V} \frac{l}{L} x_2 \theta_2, \quad (12)$$

где $V = LS$ — объем резонатора*.

Правильность принятых положений можно проверить, положив $\theta_2 = \theta_1 = \theta$ (равновесный случай). Из (7) и (8) можно найти спектральную плотность $\overline{e^2}$, а затем средний квадрат $\overline{e^2} = \int_0^\infty \overline{e^2} d\omega$. Интегрированием по всему объему резонатора легко найти значение средней энергии в нем, которое оказывается равным θ , как и должно быть в этом случае.

Автоколебания в системе возможны лишь при $x_2 < 0$ и при достаточной величине $|x_2|$. При стационарном режиме колебаний x будет функцией x (естественно положить, что x зависит от $\overline{E^2} \sim \sin^2(Kx)$). В правой части (8) сделаем замену

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} \int_{x_1}^{x_2} x \sin^2(Kx) dx &= \frac{de}{dt} \frac{l}{2} \tilde{x} = \frac{de}{dt} \frac{l}{2} (\tilde{x}_1 - i\tilde{x}_2) = \\ &= \frac{l}{2} \left[\tilde{x}_1 \frac{de}{dt} + \omega x_2 e \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь \tilde{x} — взвешенное среднее значение x . Теперь (8) перепишем в виде

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\epsilon_1} \left\{ cKh - 4\pi \left(\sigma + \frac{l}{L} \omega x_2 \right) e - \tilde{x} \right\}, \quad (14)$$

где для краткости введено $\epsilon_1 = 1 + 4\pi l \tilde{x}_1 / L$, $\zeta = \xi + \eta$.

* * Разумеется, к результатам (11) и (12) можно придти и вводя дельта коррелированные (по пространству) величины j и ρ .

Уравнения (7) и (14) для e и h совпадают с уравнениями, описывающими процессы (с учетом флуктуаций) в дискретной, близкой к консервативной, автоколебательной системе с одной степенью свободы. При их решении следуем методу, примененному в работах [3, 6, 7]. Считая, что в системе имеет место устойчивый режим автоколебаний, положим

$$e = R \cos \vartheta, \quad h = \sqrt{\varepsilon_1} R \sin \vartheta. \quad (15)$$

Для R и ϑ имеем

$$dR/dt = \Phi \varepsilon_1^{-1} \zeta \cos \vartheta, \quad (16)$$

$$d\vartheta/dt = -cK\varepsilon_1^{-1/2} + \Psi + \zeta \sin \vartheta/\varepsilon_1 R. \quad (17)$$

Для нашего случая расчет дает

$$\Phi = -2\pi\varepsilon_1^{-1}(\sigma + l\omega\tilde{x}_2/L)R, \quad \Psi = 0; \quad (18)$$

Φ и ε_1 являются функциями R и частоты ω . Среднее значение амплитуды R_0 определится из условия

$$(\Phi)_0 = 0, \quad (\omega\tilde{x}_2)_0 = -L\sigma/l. \quad (19)$$

Скобки с индексом нуль здесь и далее показывают, что значения величин берутся при средних значениях параметров. Средняя частота колебаний равна

$$\omega_0 = cK(\varepsilon_1)_0^{-1/2}. \quad (20)$$

Теперь можно составить уравнения первого приближения для малых флуктуаций амплитуды $R - R_0$ и частоты $\delta = \omega - \omega_0$. Введем, однако, предварительно коэффициент хаотической модуляции амплитуды, позволяющий легко перейти в дальнейшем к относительным флуктуациям интенсивности излучения:

$$m = \sqrt{2} (R - R_0)/R_0 \ll 1. \quad (21)$$

Для m и δ имеем уравнения

$$dm/dt = (\partial\Phi/\partial R)_0 m + \sqrt{2} R_0^{-1} (\partial\Phi/\partial\omega)_0 \delta - \quad (22)$$

$$- \sqrt{2} \zeta \cos \vartheta/\varepsilon_1 R_0,$$

$$\delta = \frac{R_0 cK}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial\varepsilon_1^{-1/2}}{\partial R} \right)_0 m + cK \left(\frac{\partial\varepsilon_1^{-1/2}}{\partial\omega} \right)_0 \delta - \zeta \sin \vartheta/\varepsilon_1 R_0. \quad (23)$$

Для краткости в дальнейшем обозначим

$$p_1 = -(\partial\Phi/\partial R)_0 = 4\pi l\omega_0 R_0^2 \varepsilon_1^{-1} L^{-1} (\partial\tilde{x}_2/\partial R^2)_0, \quad (24)$$

$$q_1 = -\sqrt{2} R_0^{-1} (\partial\Phi/\partial\omega)_0 \cong 2\sqrt{2} \pi l\omega_0 \varepsilon_1^{-1} L^{-1} (\partial\tilde{x}_2/\partial\omega)_0, \quad (25)$$

$$p_2 = -\frac{cKR_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial\varepsilon_1^{-1/2}}{\partial R} \right)_0 = 2\sqrt{2} \pi l\omega_0 R_0^2 \varepsilon_1^{-1} L^{-1} (\partial\tilde{x}_1/\partial R^2)_0, \quad (26)$$

$$q_2 = -cK \left(\frac{\partial\varepsilon_1^{-1/2}}{\partial\omega} \right)_0 = 2\pi l\omega_0 \varepsilon_1^{-1} L^{-1} (\partial\tilde{x}_1/\partial\omega)_0. \quad (27)$$

Если частота генератора ω_0 совпадает со средней частотой линии перехода молекул ω_n , то коэффициенты q_1 и p_2 равны нулю. Введем еще коэффициент p , равный

$$p = p_1 + q_1 p_2 / (1 + q_2), \quad (28)$$

который характеризует прочность предельного цикла, описывающего процессы в автоколебательной системе. Устойчивость колебаний имеет место лишь при $p > 0$.

Из (22) и (23) путем элементарных выкладок можно получить выражения для спектральных плотностей величин m и δ , \overline{m}_Ω^2 и $\overline{\delta}_\Omega^2$, исходя из спектральной плотности величины ζ , которую обозначим $\overline{\zeta}_\omega^2$, где $\omega = \omega_0 \pm \Omega \simeq \omega_0$:

$$\overline{m}_\Omega^2 = \frac{\overline{\zeta}_\omega^2}{\varepsilon_1^2 R_0^2 (p^2 + \Omega^2)} \left\{ 1 + \frac{q_1^2}{2(1 + q_2)^2} \right\}, \quad (29)$$

$$\overline{\delta}_\Omega^2 = \frac{\overline{\zeta}_\omega^2}{2(1 + q_2)^2 \varepsilon_1^2 R_0^2} \left\{ 1 + \frac{2p_2}{p^2 + \Omega^2} \left[p_2 \left(1 + \frac{q_1^2}{2(1 + q_2)^2} \right) + \frac{q_1 p}{1 + q_2} + \sqrt{2} \Omega \right] \right\}. \quad (30)$$

Вторые члены в фигурных скобках этих выражений обязаны неизохронности генератора; при $\omega_0 = \omega_n$ они равны нулю.

Отметим, что коэффициент хаотической модуляции интенсивности излучения лазера имеет спектральную плотность, равную $4 \overline{m}_\Omega^2$; ее можно определить, наблюдая флуктуации фототока (см. подробнее [8]).

Перейдем к расчету величины $\overline{\zeta}_\omega^2 = \overline{\xi}_\omega^2 + \overline{\eta}_\omega^2$. Значение $\overline{\xi}_\omega^2$ дается формулой (11), и по причинам, отмеченным выше, это выражение остается в силе и при генерации в системе. Сложнее вопрос об определении $\overline{\eta}_\omega^2$ при генерации. Прежде всего, заметим, что при отсутствии колебаний выражение (4) для $\overline{\rho}_\omega^2$ остается в силе и при инверсии в активной среде: при этом $x_2 < 0$, но и $T_2 < 0$. В этом случае имеем

$$\theta_2 = \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{n_2/g_2}{n_1/g_1 - n_2/g_2} \right] < 0. \quad (31)$$

Здесь n_2 и n_1 — населенности верхнего и нижнего уровней энергии, а g_2 и g_1 — степени вырождения этих уровней.

Для определения изменений, которые внесет наличие колебаний, запишем множитель $x_2 \theta_2$ в формуле (4) в виде

$$x_2 \theta_2 = x_2 \frac{\hbar\omega}{2} + x_2 \hbar\omega \frac{n_2/g_2}{n_1/g_1 - n_2/g_2} = x_2 \frac{\hbar\omega}{2} + D$$

и рассмотрим физический смысл слагаемого D .

В случае распространения плоской электромагнитной волны достаточно малой амплитуды вдоль x при $\sigma = 0$ ее интенсивность изменяется с расстоянием по экспоненциальному закону с показателем, пропорциональным x_2 . С другой стороны, этот же показатель пропорционален $B_{21}(g_2 n_1 / g_1 - n_2) \varphi(\omega)$, где B_{21} — эйнштейновский коэффициент индуцированного излучения, а $\varphi(\omega)$ описывает форму спектральной линии,

причем $\int_0^\infty \varphi(\omega) d\omega = 1$. Сопоставляя, получаем

$$D \sim \hbar\omega B_{21} \left(\frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2 \right) \varphi(\omega) \frac{n_2/g_2}{n_1/g_1 - n_2/g_2} = A_{21}\varphi(\omega) n_2, \quad (32)$$

где $A_{21} = \hbar\omega B_{21}$ — эйнштейновский коэффициент спонтанного излучения для одной моды, а множитель $\varphi(\omega)$ определяет спектральное распределение спонтанного излучения. Это сопоставление показывает, что слабое D , по-существу, описывает (с некоторым коэффициентом) спектр спонтанного излучения, что и позволит наметить те изменения, которые можно ожидать при наличии колебаний в среде.

Предварительно следует, однако, подчеркнуть, что проводимые рассуждения о спонтанном излучении исходят из тех же предпосылок о некогерентности спонтанного излучения отдельных молекул, которые принимаются при выводе так называемого «уравнения переноса энергии». Этим самым полагается, что в обычных лазерах (из-за столкновений молекул, микронеоднородностей полей и т. п.) не могут иметь места особые, связанные состояния, при которых возникает когерентное спонтанное излучение*.

Естественно принять, что и при наличии колебаний слабое D должно описывать спонтанное излучение молекул на верхнем уровне. Если в среде имеет место однородное уширение, то (32) непосредственно показывает необходимый пересчет: при колебаниях значение n_2 уменьшится, и соответственно уменьшится величина D . Введем коэффициент

$$\beta = D/D^0 = n_2/n_2^0, \quad (33)$$

где значок нуль наверху означает значение параметра при отсутствии колебаний. Величина β зависит от источника, создающего инверсию, и параметров среды; расчет ее затруднителен, но следует отметить, что в реальных системах ее значение может меняться примерно в пределах $0,5 \div 1$.

При неоднородном уширении в среде вопрос сложнее, ибо в спектральной линии перехода появляются «провалы» (по терминологии Беннета [9]). Кажется бы, что β , характеризующий «обеднение» уровня, следует брать соответствующим середине «провала», но это верно лишь приближенно (молекулы вне «провала» также вносят некоторую долю в интересующий нас участок спектра спонтанного излучения). И в этом случае можно пользоваться формально коэффициентом β , причем нижний предел его возможных изменений будет еще больше указанного выше. Значение β является, строго говоря, функцией x .

Вводя для краткости величину

$$\alpha = \frac{n_2^0/g_2}{n_2^0/g_2 - n_1^0/g_1}, \quad (34)$$

характеризующую «начальную инверсию» (т. е. при отсутствии колебаний) в среде, запишем выражение для $\bar{\eta}_\omega^2$ взамен (12) в виде

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_\omega^2 &= \frac{64 \pi \omega_0}{LV} \hbar\omega \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - 2\beta\alpha x_2^0) \sin^2(Kx) dx = \\ &= \frac{64 \pi \omega_0 l}{LV} \hbar\omega \left(\frac{x_2}{2} - \alpha x_2^0 \beta \right), \end{aligned} \quad (35)$$

* За полезное обсуждение этого вопроса мы благодарны В. М. Файну.

где $\tilde{\beta} = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \beta \sin^2(Kx) dx \leq 1$ — взвешенное среднее значение β .

Теперь, пользуясь (11), (35) и (19), найдем

$$\begin{aligned} \overline{\zeta}_\omega^2 &= \overline{\xi}_\omega^2 + \overline{\eta}_\omega^2 = \frac{64\pi}{V} \left\{ \sigma\theta_1 + \frac{\omega_0 l}{L} \hbar\omega \left(\frac{x_2}{2} - \alpha x_2^0 \tilde{\beta} \right) \right\} \cong \\ &\cong \frac{64\pi\omega_0 l}{LV} \hbar\omega\alpha |x_2^0| \tilde{\beta} = \frac{64\pi\sigma}{V} \hbar\omega\alpha \tilde{\beta} \frac{x_2^0}{x_2}. \end{aligned} \quad (36)$$

В выражении для θ_1 опущен член $\hbar\omega [\exp(\hbar\omega/kT_1) - 1]^{-1}$, пренебрежимо малый для оптических частот.

Подставляя (36) в полученные выше формулы, получим выражение для величин, характеризующих флуктуационные процессы в системе. Полезно, однако, привести результаты к виду, более удобному для сравнения с опытом. Для этого введем мощность генератора P_0^* , добротность Q и ширину полосы $\Delta\omega$ резонатора, которые определяются из следующих очевидных соотношений:

$$\begin{aligned} P_0 &= \int_V \sigma \overline{E^2} dV = \frac{\sigma R_0^2}{4} V; \quad Q = \omega_0 P_0^{-1} \frac{1}{8\pi} \int_V (\epsilon_1 E^2 + H^2) dV = \\ &= \omega_0 \epsilon_1 / 4\pi\sigma; \quad \Delta\omega = \omega_0 / Q = 4\pi\sigma / \epsilon_1. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя (36) в (29) и пользуясь (37), получим

$$\overline{m}_2^2 = \frac{(\Delta\omega)^2 \hbar\omega}{\pi P_0 (\rho^2 + \Omega^2)} \tilde{\beta} \alpha \frac{x_2^0}{x_2} \left\{ 1 + \frac{q_1^2}{2(1 + q_2)^2} \right\}. \quad (38)$$

При $\omega_0 = \omega_l$ второй член в фигурной скобке равен нулю.

В работе [10] был проведен расчет флуктуаций фототока, возникающего при освещении фотокатода излучением гелий-неонового лазера. Авторы приняли модель дискретного колебательного контура с отрицательным сопротивлением при простейшем законе его нелинейности. С помощью несложных пересчетов можно показать совпадение их результата с результатом, следующим из формулы (38), если в ней заменить $\rho/2\pi$ на введенную в [10] «эффективную полосу» $\Delta\nu$, а также положить $\tilde{\beta} x_2^0 / x_2 = 1$ и $q_1 = 0$. Такие упрощения допустимы при работе вблизи порога генерации при оптимальной настройке резонатора; эти условия были выполнены в их экспериментах (мощность генератора менее 4 микроватт), и данные опытов подтвердили результаты расчетов. Можно считать формулу (38) проверенной экспериментально при указанных ограничениях.

Представляет практический интерес рассмотрение зависимости величины \overline{m}_2^2 от мощности генератора P_0 . Последняя может регулироваться как величиной потерь резонатора, так и уровнем инверсии. В обоих случаях наиболее существенно влияет на величину \overline{m}_2^2 при значениях $\Omega \ll \rho$ множитель $P_0 \rho^2$ в знаменателе (38). Примем для x_2

* Заметим, что на опыте измеряется обычно лишь та часть величины P_0 , которая выходит через одно из зеркал резонатора.

зависимость $\tilde{x}_2 = x_2^0 (1 + \gamma P_0)^{-a}$, где γ — некоторый коэффициент и $\frac{1}{2} < a < 1$. Так как обычно $p \simeq 2p_1$, то согласно (24) получаем $p \sim P_0 / (1 + \gamma P_0)^{a+1}$ и $P_0 p^2 \sim P_0^3 / (1 + \gamma P_0)^{2a+2}$. Следовательно, при малых мощностях получается приближенная зависимость $\overline{m}_2^2 \sim P_0^{-3}$, но при дальнейшем росте P_0 уменьшение \overline{m}_2^2 замедляется. Такая закономерность получена на опыте в работе [8].

Приведем для примера численную оценку для случая, типичного для гелий-неонового лазера на волну 0,63 микрона: положим $q_1 = 0$, $p/2\pi = 10^5$ гц, $\Delta\omega/2\pi = 10^6$ гц, $P_0 = 10^{-4}$ вт, $\tilde{\beta} \alpha x_2^0 / \tilde{x}_2 = 2$, $\Omega \ll p$. При этом получим $\overline{m}_2^2 \simeq 2 \cdot 10^{-13}$.

Подставляя (36) в (30) и пользуясь (37), получим выражение для спектральной плотности частотных флуктуаций

$$\overline{\delta}_2^2 = \frac{(\Delta\omega)^2 \hbar\omega}{2\pi P_0 (1 + q_2)^2} \tilde{\beta} \alpha \frac{x_2^0}{\tilde{x}_2} \left\{ 1 + \frac{2p_2}{p^2 + \Omega^2} \left[p_2 \left(1 + \frac{q_1^2}{2(1 + q_2)^2} \right) + \frac{q_1 p}{1 + q_2} + \cancel{1/2\Omega} \right] \right\}. \quad (39)$$

Напомним, что естественная ширина спектра колебания (в круговых частотах) в π раз больше $\overline{\delta}_2^2$ при $\Omega \rightarrow 0$ (см., например, [7]). Следовательно, для ее нахождения следует выражение (39) умножить на π и положить $\Omega = 0$. В частности, при $\omega_0 = \omega_L$ для ширины спектральной линии лазера, выраженной в гц, получаем

$$\Delta\nu_0 = \frac{\pi (\Delta\omega/2\pi)^2 \hbar\omega}{P_0 (1 + q_2)^2} \tilde{\beta} \alpha \frac{x_2^0}{\tilde{x}_2}.$$

Полученный результат для ширины линии излучения лазера близок к результату работ [1, 2] при условии, что ширина линии перехода больше ширины полосы резонатора.

Проведенный анализ относился к одномодовому режиму лазера. При одновременной генерации на нескольких модах между колебаниями разных частот имеет место взаимосвязь из-за нелинейности активной среды. Параметры последней становятся функциями интенсивностей и частот колебаний всех мод, и это обстоятельство затрудняет проведение расчета для общего случая. Ограничимся нижеследующими качественными соображениями. Естественно ожидать, что будет иметь место корреляция флуктуаций колебаний отдельных мод. При неоднородном уширении указанной связью можно пренебречь, если частоты отдельных мод разнесены на величину, заметно превышающую ширину «провала» в спектральной линии перехода; при этом к каждому колебанию можно применять результаты, полученные выше. Если мощность одной из мод заметно превышает (скажем в 2 ÷ 3 раза) мощности остальных мод, то к флуктуациям ее колебания приближенно также можно применять полученные результаты*.

* Отметим, что при числе мод колебаний, большем двух, в спектре излучения появляются дополнительные комбинационные оптические частоты, и весьма малые нестабильности параметров системы приводят к резкому увеличению уровня флуктуаций (см. подробнее в [8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Fleck Jr., J. Appl. Phys., **37**, 188 (1966).
2. H. Naken, Z. fur Phys., **190**, 327 (1966).
3. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, **3**, 1298 (1958).
4. В. Б. Цареградский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 1075 (1964).
5. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
6. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, серия физическая, **14**, 145 (1950).
7. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, 20 (1958).
8. Ю. И. Зайцев, ЖЭТФ, **50**, 527 (1966).
9. W. R. Bennet Jr., Phys. Rev., **126**, 580 (1962); русский перевод: Лазеры, ИЛ, М., 1965, стр. 207.
10. C. Freed, H. A. Haus, Appl. Phys. Lett., **6**, 85 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 марта 1966 г.

RADIATION INTENSITY AND FREQUENCY FLUCTUATIONS OF OPTICAL GENERATOR

I. L. Berstein, I. A. Andronova, Yu. I. Zaitsev

The oscillation fluctuations of the one-mode continuously-working-laser are considered. The calculation is made using the phenomenological parameters. The formulae for the spectral densities of intensity and frequency fluctuations are obtained. Some results are compared with the experimental data.

УДК 621.378.325.538.566

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов

Рассмотрен вопрос о расширении лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде. Наряду с размытием, обусловленным рассеянием на неоднородностях среды, учтено также дифракционное расхождение пучка и его качание как целого около невозмущенного положения.

Флуктуации параметров пространственно ограниченного пучка электромагнитного излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, рассматривались в работах [1, 2]. В [1] методом плавных возмущений рассчитаны статистические характеристики флуктуаций фазы в ограниченном пучке и найдена линейная мера расширения пучка в ближней зоне. В работе [2] в приближении геометрической оптики вычислены флуктуации амплитуды и фазы, а также отклонение пучка от невозмущенного направления и флуктуации его поперечного сечения. В данной работе проводится последовательное дифракционное рассмотрение вопроса о расширении пространственно ограниченного пучка, позволяющее учесть наряду с размытием, обусловленным рассеянием на неоднородностях среды, также дифракционное расхождение пучка и его качание как целого около невозмущенного положения.

Меру ширины пучка, распространяющегося в турбулентной среде, определим следующим образом. Если $I_s(\rho)$ — интенсивность поля в перпендикулярной к невозмущенному пучку плоскости S , то величина

$$\Delta \rho^2 = \frac{\int_s (\rho - \rho_c)^2 I_s(\rho) d\rho}{\int_s I_s(\rho) d\rho}, \quad (1)$$

где ρ — радиус-вектор в плоскости S , а ρ_c — радиус-вектор «центра тяжести» освещенной зоны

$$\rho_c = \frac{\int_s \rho I_s(\rho) d\rho}{\int_s I_s(\rho) d\rho}, \quad (2)$$

характеризует размер области, на которую приходится основная часть энергии пучка. Так как $I_s(\rho)$ представляет собой случайную величину, в формуле (1) необходимо произвести статистическое усреднение. Учитывая, что при отсутствии поглощения и заметного рассеяния в стороны полный поток энергии через поверхность сохраняется: $\int_s I_s(\rho) d\rho = \int_s \overline{I_s(\rho)} d\rho = \text{const}$, после усреднения получаем

$$\overline{\Delta\rho^2} = \frac{\int_S \rho^2 \overline{I_s(\rho)} d\rho}{\int_S \overline{I_s(\rho)} d\rho} - \overline{\rho_c^2} \equiv \langle \rho^2 \rangle - \overline{\rho_c^2}, \quad (3)$$

где

$$\overline{\rho_c^2} = \frac{\iint_S (\rho_1, \rho_2) \overline{I_s(\rho_1) I_s(\rho_2)} d\rho_1 d\rho_2}{\left(\int_S \overline{I_s(\rho)} d\rho\right)^2}. \quad (4)$$

Здесь $\langle \rho^2 \rangle$ определяет полное расширение пучка, $\overline{\rho_c^2}$ описывает качание пучка около невозмущенного положения оси, а $\overline{\Delta\rho^2}$ характеризует расширение относительно возмущенного положения центра пучка. Из формул (3), (4) видно, что для нахождения этих величин необходимо знать среднюю интенсивность поля $\overline{I_s(\rho)} = \overline{u_s(\rho) u_s^*(\rho)}$, а также функцию корреляции интенсивности $\overline{I_s(\rho_1) I_s(\rho_2)} = \overline{u_s(\rho_1) u_s^*(\rho_1) u_s(\rho_2) u_s^*(\rho_2)}$ в плоскости S ($u_s(\rho)$ — распределение поля в плоскости S).

Будем считать, что волна, выходящая из оптической системы, фокусирующей лазерный пучок, является плоской. Пусть эта волна распространяется в положительном направлении оси x и дает на границе турбулентной среды S' (плоскость $x=0$) распределение поля $u_{s'}(\rho')$. Воспользовавшись принципом Гюйгенса—Кирхгофа и приближением френелевской дифракции, для поля $u_s(\rho)$ в плоскости S , удаленной от плоскости S' на расстояние L , получаем

$$u_s(\rho) = \frac{k\dot{e}^{ikL}}{2\pi iL} \int_{S'} u_{s'}(\rho') \exp\left[ik \frac{(\rho-\rho')^2}{2L} + \psi(\rho, \rho')\right] d\rho', \quad (5)$$

где k — волновое число, а $\psi(\rho, \rho')$ — случайный набег комплексной фазы сферической волны, распространяющейся из точки $(0, \rho')$ в точку (L, ρ) . При помощи (5) находим

$$\overline{I_s(\rho)} = \frac{k^2}{(2\pi L)^2} \iint_{S'} u_{s'}(\rho'_1) u_{s'}^*(\rho'_2) \exp\left\{\frac{ik}{2L} [2\rho(\rho'_2 - \rho'_1) + (\rho_1'^2 - \rho_2'^2)]\right\} \Gamma_2(\rho; \rho'_1, \rho'_2) d\rho'_1 d\rho'_2, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \overline{I_s(\rho_1) I_s(\rho_2)} &= \frac{k^4}{(2\pi L)^4} \iiint_{S'} u_{s'}(\rho'_1) u_{s'}^*(\rho'_2) u_{s'}(\rho'_3) u_{s'}^*(\rho'_4) \times \\ &\times \Gamma_4(\rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4) \exp\left\{\frac{ik}{2L} [2\rho_1(\rho'_2 - \rho'_1) + \right. \\ &\left. + 2\rho_2(\rho'_4 - \rho'_3) + (\rho_1'^2 - \rho_2'^2) + (\rho_3'^2 - \rho_4'^2)]\right\} d\rho'_1 d\rho'_2 d\rho'_3 d\rho'_4, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Gamma_2(\rho; \rho'_1, \rho'_2) = \overline{\exp[\psi(\rho_1, \rho'_1) + \psi^*(\rho_1, \rho'_2)]}, \quad (8)$$

$$\Gamma_4(\rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4) = \overline{\exp[\psi(\rho_1, \rho'_1) + \psi^*(\rho_1, \rho'_2) + \psi(\rho_2, \rho'_3) + \psi^*(\rho_2, \rho'_4)]}. \quad (9)$$

Из выражений (6)—(7) следует, что для нахождения $\overline{I_s(\rho)}$ и $\overline{I_s(\rho_1) I_s(\rho_2)}$ надо вычислить статистические характеристики (8) и (9)

комплексной фазы $\psi = p + is$ сферической волны, проходящей через плоский турбулентный слой толщины L . Воспользуемся для этого методом плавных возмущений [3]. Предположим, что вещественная и мнимая части величины ψ , т. е. уровни p и фаза s , распределены по нормальному закону. Можно показать, что в приближении метода плавных возмущений и с учетом членов порядка не выше ϵ_1^2 ($\epsilon_1 = \epsilon - \bar{\epsilon}$ — флуктуации диэлектрической проницаемости среды) для сферической волны, как и для плоской, выполняется равенство $\bar{p} = -\bar{p}^2$ [3]. Тогда для моментов Γ_2 и Γ_4 получаются следующие выражения:

$$\Gamma_2(p; p'_1, p'_2) = \exp \left[-\frac{1}{2} D_\psi (|p'_1 - p'_2|) \right], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4(p_1, p_2; p'_1, p'_2, p'_3, p'_4) = \exp \left\{ 4\bar{p}^2 - \frac{1}{2} [D_{11}^\psi(1, 2) + D_{12}^\psi(1, 3) + \right. \\ \left. + D_{12}^\psi(1, 4) + D_{12}^\psi(2, 3) + D_{12}^\psi(2, 4) + D_{12}^\psi(3, 4)] + D_{12}^s(2, 4) + \right. \\ \left. + D_{12}^s(1, 3) + i [D_{12}^{ns}(2, 4) - D_{12}^{ns}(1, 3)] \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_\psi (|p'_1 - p'_2|) &= \overline{|\psi(p, p'_1) - \psi(p, p'_2)|^2}, \\ D_{ik}^\psi(l, m) &= \overline{|\psi(p_i, p'_i) - \psi(p_k, p'_m)|^2}, \\ D_{ik}^s(l, m) &= \overline{[s(p_i, p'_i) - s(p_k, p'_m)]^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$D_{ik}^{ns}(l, m) = \overline{[p(p_i, p'_i) - p(p_k, p'_m)] [s(p_i, p'_i) - s(p_k, p'_m)]}.$$

Пользуясь (10), найдем величину $\overline{\langle \rho^2 \rangle}$, которая определяет полное расширение пучка. Подставим для этого в выражение для $\overline{\langle \rho^2 \rangle}$ формулы (6), (10). Проводя сначала интегрирование по p , получаем в оставшемся интеграле лапласиан от дельта-функции, в силу чего дальнейшее интегрирование выполняется особенно просто. В результате находим

$$\begin{aligned} \overline{\langle \rho^2 \rangle} &\equiv \frac{\int_s \rho^2 \overline{I_s(\rho)} d\rho}{\int_s \overline{I(\rho)} d\rho} = \frac{\int_{s'} \rho'^2 |u_{s'}(\rho')|^2 d\rho'}{\int_{s'} |u_{s'}(\rho')|^2 d\rho'} + \\ &+ \left\{ \frac{2 \frac{L}{k} \int_{s'} \rho' \operatorname{Im} [u_{s'}^*(\rho') \nabla u_{s'}(\rho')] d\rho'}{\int_{s'} |u_{s'}(\rho')|^2 d\rho'} + \right. \\ &\left. + \frac{L^2 \int_{s'} |\nabla u_{s'}(\rho')|^2 d\rho'}{k^2 \int_{s'} |u_{s'}(\rho')|^2 d\rho'} \right\} + \frac{L^2}{2k^2} \Delta D_\psi(0). \quad (13) \end{aligned}$$

Первый член этой формулы характеризует размер невозмущенного пучка в плоскости S' , т. е. на выходе оптической системы, фокусирующей лазерный пучок. Два слагаемых в фигурных скобках связаны с дифракционным расширением (в случае вещественного поля $u_{s'}(\rho')$ первое слагаемое в фигурных скобках обращается в нуль). Существенно, что дифракционный член в (13) при наличии разрывов у поля $u_{s'}(\rho')$ обра-

щается в бесконечность. Поэтому использование нашей меры ширины пучка предполагает, что распределение поля в плоскости S' непрерывно*. Наконец, последний член в (13) определяет расширение, обусловленное рассеянием на флуктуациях диэлектрической проницаемости среды. Отметим, что структура выражения (13) такая же, как и выражения для ширины освещенной области в задаче об излучении антенны в турбулентной среде [4].

Можно показать, что структурная функция комплексной фазы $D_\psi(|\rho'_1 - \rho'_2|)$ в приближении метода плавных возмущений имеет вид

$$D_\psi(|\rho'_1 - \rho'_2|) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^1 dx \int_0^\infty x \Phi_n(x) [1 - J_0(x x |\rho'_1 - \rho'_2|)] dx, \quad (14)$$

откуда находим, что

$$\Delta D_\psi(0) = \frac{8}{3} \pi^2 k^2 L \int_0^\infty x^3 \Phi_n(x) dx. \quad (15)$$

Здесь $\Phi_n(x)$ — спектр флуктуаций коэффициента преломления среды. При локально-однородной изотропной турбулентности, когда флуктуации коэффициента преломления описываются «законом двух третей», спектр флуктуаций $\Phi_n(x)$ можно записать в виде [1]

$$\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2), \quad (16)$$

где $x_m l_0 = 5,91$, l_0 — внутренний масштаб турбулентности, C_n — структурная постоянная. Тогда, подставляя (16) в (15), получаем

$$\Delta D_\psi(0) = 4,38 C_n^2 k^2 l_0^{-1/3} L$$

и, следовательно, флуктуационный член в (13) принимает вид

$$\frac{L^2}{2k^2} \Delta D_\psi(0) = 2,19 C_n^2 l_0^{-1/3} L^3. \quad (17)$$

Интересно отметить, что (17) в точности совпадает со средним квадратом поперечного смещения луча $\overline{\rho_\perp^2} = 2,19 C_n^2 l_0^{-1/3} L^3$ [3], т. е. дифракционный расчет уширения пучка по формуле (13) приводит к тому же результату, что и приближение геометрической оптики.

Выражение (13) приобретает особенно простой вид в случае гауссова распределения поля в плоскости S' : $u_s(\rho') = A_0 \exp(-\rho'^2/2a^2)$ (этот случай рассмотрен в работе [1]). Тогда из формул (13) и (17) находим

$$\overline{\langle \rho^2 \rangle} = a^2 + \frac{L^2}{k^2 a^2} + 2,19 C_n^2 l_0^{-1/3} L^3. \quad (18)$$

* Как показывает более тщательный анализ, для того, чтобы величина $\overline{\langle \rho^2 \rangle}$ характеризовала область, через которую проходит какая-то фиксированная доля полного потока энергии (допустим, половина потока), поле u_s не должно претерпевать резких изменений на расстояниях порядка длины волны, т. е. должно выполняться условие $\lambda \left| \frac{1}{u_s} \nabla u_s \right| \ll 1$. В противном случае, когда $\lambda \left| \frac{1}{u_s} \nabla u_s \right| \geq 1$, через круг радиуса

$\sqrt{\overline{\langle \rho^2 \rangle}}$ проходит уже не половина, а практически весь поток энергии, тогда как половина потока приходится на круг значительно меньшего радиуса. Причина этого в следующем. Интегрирование интенсивности с весом ρ^2 означает (по крайней мере, в зоне Фраунгофера), что излучению, содержащемуся в боковых лепестках и обусловленному участками апертуры с резкими изменениями поля, придается излишне большой удельный вес, пропорциональный ρ^2 , хотя энергия, переносимая излучением в боковых лепестках, составляет небольшую часть энергии главного лепестка.

Оценим эту величину для тех параметров пучка и среды, которые использованы в [1]: $a = 35,7$ см, $l_0 = 0,1$ см, $\lambda = 2\pi/k = 0,5 \cdot 10^{-4}$ см, $C_n = 0,02 \cdot 10^{-6}$ см $^{-1/3}$. Тогда для $L_1 = 15$ км и $L_2 = 145$ км получаем соответственно

$$\frac{L_1^2}{a^2 k^2} \simeq 0,11 \text{ см}^2, \quad 2,19 C_n^2 l_0^{-1/3} L_1^3 \simeq 7 \cdot 10^3 \text{ см}^2, \quad \sqrt{\langle \rho^2 \rangle_1} \simeq 91 \text{ см},$$

$$\frac{L_2^2}{a^2 k^2} \simeq 11 \text{ см}^2, \quad 2,19 C_n^2 l_0^{-1/3} L_2^3 \simeq 7 \cdot 10^6 \text{ см}^2, \quad \sqrt{\langle \rho^2 \rangle_2} \simeq 26,5 \text{ м}.$$

Отметим следующее обстоятельство. Результаты работы [1] показывают, что увеличение ширины лазерного пучка замедляется с ростом дистанции L , тогда как из (18) вытекает, что такого замедления не происходит. Расхождение результатов объясняется различием между мерой ширины пучка (3) и мерой, введенной в работе [1]. Если найти флуктуации амплитуды с гауссовым распределением поля, воспользовавшись для этого методом, который был применен в [1], а затем определить $\langle \rho^2 \rangle$ по формуле (3), то результат совпадает с выражением (18), в котором нужно отбросить второй член, связанный с дифракционным расхождением и не учитываемый в [1].

Говоря о качании «центра тяжести» пучка, рассмотрим два крайних случая.

а) Крупномасштабные неоднородности (размеры пучка много меньше l_0). В этом случае достаточно знать структурную функцию $D_{ik}^\psi(l, m)$ только для малых $\alpha_{ik} = \rho_i - \rho_k$ и $\alpha'_{im} = \rho'_i - \rho'_m$. Воспользовавшись общим выражением

$$D_{ik}^\psi(l, m) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^l dx \int_0^\infty x \Phi_n(x) \left\{ 1 - J_0 \left[x x \left| \rho_i - \rho_k + \frac{1-x}{x} (\rho'_i - \rho'_m) \right| \right] \right\} dx, \quad (19)$$

которое можно вывести на основе метода плавных возмущений, при $\alpha_{ik}, \alpha'_{im} \ll l_0$ получаем

$$D_{ik}^\psi(l, m) \simeq 0,6 C_n^2 k^2 x_m^{1/3} L (\alpha_{ik}^2 + \alpha_{ik} \alpha'_{im} + \alpha'_{im}{}^2). \quad (20)$$

Подставив (7), (11) и (20) в формулу (4) и пренебрегая амплитудными флуктуациями, после интегрирования находим

$$\overline{\rho_c^2} = 2,19 C_n^2 l_0^{-1/3} L^3,$$

т. е. $\overline{\rho_c^2}$ в точности совпадает с третьим членом в выражении (18). Это означает, что расширения пучка не происходит, а имеет место только его качание как целого около невозмущенного положения. С точки зрения геометрической оптики этот результат очевиден.

б) Мелкомасштабные неоднородности (размеры пучка значительно превышают l_0). Прямые оценки $\overline{\rho_c^2}$ по формуле (4) в этом случае затруднительны. Однако из геометрических представлений можно заключить, что в случае, когда на ширине пучка умещается много неоднородностей, смещение «центра тяжести» пучка незначительно. Объясняется это тем, что отдельные лучи в пучке смещаются при $l_0 \ll a$ независимо друг от друга и суммарное смещение пучка мало. Положение вещей в данном случае аналогично тому, какое имеет место при исследовании смещения

центра освещенной области в задаче об излучении антенны в турбулентной среде [4], когда расчет $\overline{\rho_c^2}$ удается довести до числовых оценок, указывающих на малость $\overline{\rho_c^2}$ по сравнению с $L^2 \Delta D_\psi(0)/2k^2$.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность С. М. Рытову за руководство работой и В. И. Татарскому и А. И. Кону за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА.

1. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 870 (1965).
2. P. Beckman, Signal degeneration in laser beams propagated through a turbulent atmosphere. Report to NBS, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1 Sept., 1964; Зарубежная радиоэлектроника, № 7, 116 (1965); № 8, 109 (1965).
3. В. И. Татарский, Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере, Докторская диссертация, М., 1964.
4. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 888 (1966).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
6 марта 1966 г.

TO PROBLEM OF LASER BEAM EXPANSION IN A TURBULENT MEDIUM

Z. I. Feizulin, Yu. A. Kravtsov

The expansion of laser beam in a turbulent medium is considered. Along with the blow-up of a beam, resulting from the scattering on the medium nonuniformities, the diffraction divergence of the beam and its scanning as a whole near the nonperturbed position are taken into account.

УДК 548.0.535:621.378.5

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ СВЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Беспалов

В приближении заданного поля проведена оценка влияния случайных изменений направлений оптической оси нелинейного кристалла, используемого для параметрического усиления света, на инкремент усиливаемой волны.

1. Расчеты, проведенные в [1], показали, что случайные колебания направления оптической оси нелинейного кристалла приводят к уменьшению эффективности генерации гармоник света. Очевидно, что неоднородность нелинейной среды в той или иной степени скажется на процессе параметрического усиления света. Ниже приведены соответствующие оценки. Рассмотрение проведено в тех же предположениях, что и в [1]: (а) параметры среды и поля зависят от одной координаты, (б) амплитуда поля накачки (частоты 2ω) предполагается неизменной (приближение заданного поля)*. При этих условиях оценено влияние случайных изменений направления оптической оси на инкремент усиливаемой волны. Расчет проведен для вырожденного параметрического усилителя**.

2. В приближении заданного поля частоты 2ω уравнения для нормированной амплитуды и фазы усиливаемой волны частоты ω запишутся в виде

$$du/d\xi = -u \sin \tilde{\theta}, \quad (1a)$$

$$d\tilde{\theta}/d\xi = \delta(\xi) - 2\cos \tilde{\theta}, \quad (16)$$

где

$$u = A_1(z)/A_2^0, \quad \tilde{\theta} = 2\varphi_1 - \varphi_2^0 + 2k_{\omega 0} z - \int_0^z k_{2\omega e}(v) dv,$$

A_1 и φ_1 — медленно меняющиеся амплитуда и фаза усиливаемой волны, A_2^0 и φ_2^0 — амплитуда и фаза поля накачки, $k_{\omega 0}$ и $k_{2\omega e}$ — волновые векторы взаимодействующих волн, $\xi = z/l$, $l^{-1} = \sigma A_2^0$, $\sigma = 2\pi\omega\chi \sin \vartheta' / nc$, χ — параметр нелинейности, ϑ' — угол между оптической осью и направлением синхронного усиления, $\delta = \{2k_{\omega 0} - k_{2\omega e}(z)\} l$ — величина, пропорциональная расстройке фазовых скоростей и характеризующая неоднородность нелинейной среды.

Из (1a) видно, что максимум усиления имеет место при $\tilde{\theta} = -\pi/2$.

* Так как проводимое здесь рассмотрение в некоторых пунктах аналогично сделанному в [1], то ниже в ряде случаев детали расчета опущены.

** Полученные результаты позволяют сделать необходимые оценки, касающиеся изменений условий самовозбуждения параметрического генератора. Ввиду ограниченности и для краткости изложения соответствующие формулы здесь не приводятся.

Это значение $\tilde{\theta}$ при $\delta \equiv 0$ является стационарным решением уравнения (16), а при $\tilde{\theta}|_{\xi=0} = -\pi/2$ — решением, удовлетворяющим начальному условию. Наличие неоднородностей приведет к отлнчию δ от нуля, и, следовательно, к отлнчию $\tilde{\theta}$ от $-\pi/2$. Так как любое отклонение $\tilde{\theta}$ от $-\pi/2$ приводит к уменьшению $|\sin \theta|$, то в среднем неоднородности приведут к уменьшению коэффициента усиления. Поэтому влияние неоднородностей можно оценить по величине изменения среднего значения инкремента усиливаемой волны.

Будем отыскивать среднее значение инкремента $\mu = d \ln u / d \xi$, считая, что в отсутствие неоднородностей условия усиления являются оптимальными, т. е. $\tilde{\theta}|_{\xi=0} = -\pi/2$, $2k_{\omega 0} = k_{2\omega e}$. Для дальнейшего рассмотрения уравнения (1) удобнее записать в виде

$$\mu = \cos \theta, \quad (2a)$$

$$d\theta/d\xi = \delta(\xi) - 2\sin \theta, \quad (26)$$

$$\theta|_{\xi=0} = 0,$$

где $\theta = \tilde{\theta} + \pi/2$ — отклонение фазового угла от оптимального значения.

Задача определения среднего статистического значения $\mu(\langle \mu \rangle)$ сводится, как видно из (2), к отысканию плотности вероятности величины $\theta(\xi)$. Так как процесс $\theta(\xi)$ является Марковским, то для плотности вероятности $W(\theta, \xi)$ с помощью известной методики [2] нетрудно получить уравнение*

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \sin \theta W \} + p \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} W, \quad (3)$$

решение которого в рассматриваемом случае должно удовлетворять условиям

$$W(\theta, \xi)|_{\xi=0} = \tilde{\delta}(\theta),$$

$$W(\theta, \xi) = W(\theta + 2\pi, \xi), \quad (4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\theta, \xi) d\theta = 1,$$

где $\tilde{\delta}(\theta)$ — дельта-функция. В (3) через p обозначена величина, пропорциональная интенсивности неоднородностей и их размеру (d):

$$p = \frac{1}{2} \langle (2k_{\omega 0} - k_{2\omega e})^2 \rangle ld.$$

Найти аналитическое решение уравнения (3) при относительно больших значениях $\delta(\xi)$, к сожалению, не удается. Однако его стационарное решение ($\partial W / \partial \xi \equiv 0$) находится достаточно просто. О характере переходного процесса можно получить представление из рассмотрения случая малых $\delta(\xi)$ (вероятность значений $\theta \gg \pi$ стремится к нулю), для которого можно получить решение, пригодное для любых ξ . Рассмотрением эти двух случаев и ограничимся.

* Уравнение (3) с точностью до обозначений совпадает с уравнениями (18.44) и (19.67) работы [3], получающимися при рассмотрении синхронизации генератора и параметрического усиления в контуре при наличии случайных помех.

3. Полагая в (3) $\partial W/\partial \xi \equiv 0$, получим

$$p \frac{d^2 W}{d\theta^2} + 2 \frac{d}{d\theta} \{\sin \theta W\} = 0. \quad (5)$$

Решением уравнения (5), удовлетворяющим условиям (4) (кроме начального условия), является функция

$$W(\theta) = \{2\pi e^{-2p} I_0(2/p)\}^{-1} \exp[-4\sin^2(\theta/2)/p]. \quad (6)$$

Умножая правую и левую части соотношения (2а) на $W(\theta)$ и интегрируя в пределах $-\pi \leq \theta \leq \pi$, получим выражение для среднего статистического значения стационарного инкремента:

$$\langle \mu \rangle_{\text{стац}} = I_1(2/p)/I_0(2/p). \quad (7)$$

График функции $\langle \mu(p) \rangle_{\text{стац}}$ для значений $\theta \leq p \leq 6$ приведен на рис. 1. Из графика видно, что с ростом p величина инкремента примерно линейно уменьшается от 1 при $p = 0$ до 0,37 при $p \approx 2,5$. В этой области значений p для приближенных оценок $\langle \mu \rangle_{\text{стац}}$ можно пользоваться соотношением

$$\langle \mu \rangle_{\text{стац}} = 1 - p/4. \quad (8)$$

При больших значениях p ($p > 4$) выражение (7) достаточно точно аппроксимируется его асимптотическим значением

$$\langle \mu \rangle_{\text{стац}} \approx 1/p. \quad (9)$$

4. Характер установления $\langle \mu \rangle_{\text{стац}}$ проиллюстрируем на примере параметрического усилителя с малыми неоднородностями. Полагая $\theta \ll \pi$, перепишем уравнения (2) в виде

$$\mu = 1 - \theta^2/2, \quad (10a)$$

$$d\theta/d\xi = \delta(\xi) - 2\theta. \quad (10б)$$

Из решения уравнения (10б)

$$\theta = e^{-2\xi} \int_0^\xi \delta(v) e^{2v} dv \quad (11)$$

следует, что величина $\theta(\xi)$ распределена по нормальному закону со средним квадратом, определяемым соотношением

$$\langle \theta^2 \rangle = p(1 - e^{-4\xi})/2. \quad (12)$$

Из (6) видно, что при $p/2 \ll 1$ стационарное распределение θ является также нормальным, со средним квадратом

$$\langle \theta^2 \rangle_{\text{стац}} = p/2. \quad (13)$$

Следовательно, при $p/2 \ll 1$ стационарное распределение устанавливается при значениях $\xi \sim 0,5$ или на расстояниях $z \sim 0,5l$. С ростом p область переходного режима, по-видимому, несколько увеличивается, так как величина стабилизирующего члена в правой части уравнения (2а) относительно уменьшается ($\sin \theta$ вместо θ). Для приближенных оце-

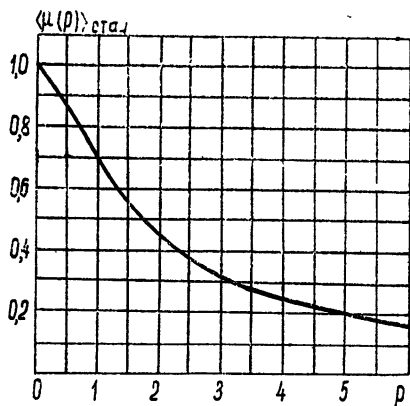


Рис. 1.

нок $\langle \mu \rangle$ на участке переходного режима, по-видимому, можно использовать соотношение (7) для $\langle \mu \rangle_{\text{стан}}$ с заменой в нем p на $p(1 - e^{-4\xi})$.

5. В заключение приведем некоторые оценки. Так как величина $2k_{\omega 0} - k_{2\omega e}$ пропорциональна отклонению направления оптической оси от оптимального значения $\Delta\vartheta$, то, следовательно, (см. (5))

$$p \sim \langle \Delta\vartheta^2 \rangle dl \sim \langle \Delta\vartheta^2 \rangle d(A_2^0)^{-1},$$

т. е. изменения среднего квадрата отклонения направления оси, или протяженности неоднородностей, или величины, обратной амплитуде поля накачки, в одинаковое число раз приводит к одинаковому относительному изменению инкремента усиливаемой волны. Так, например, для кристалла КДР при $\lambda = 10^{-4}$ см, $l = 3$ см ($p_{2\omega} \approx 50$ Мвт), $d = 0,1$ см $\langle \Delta\vartheta^2 \rangle^{1/2} \approx 3'$ получим $p = 1,5$ и, следовательно, найдем $\langle \mu \rangle_{\text{стан}} = 0,55$. Уменьшение мощности волны накачки до величины ~ 10 Мвт снизит относительное значение инкремента $\langle \mu \rangle_{\text{стан}}$ примерно в два раза, а его абсолютное значение примерно в 4 раза.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1117 (1966).
- 2 М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, М.—Л., 1944.
- 3 Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, Сов. радио, М., 1961

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 марта 1966 г.

PARAMETRIC AMPLIFICATION OF LIGHT IN NONLINEAR MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

V. I. Bespalov

In a given field approximation the estimation is made of the influence of random changes in the directions of an optical axis of the nonlinear crystal, used for the parametric light amplification, upon the increment of the amplified wave.

УДК 538.311.001.24 : 621.372 853.2

К РАСЧЕТУ ПОРОГОВОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ФЕРРИТОВЫЙ ЭЛЛИпсоИД

К. Г. Гудков, А. Г. Гуревич

Рассчитывается пороговое поле для нестабильностей первого и второго порядков в случае ферритового эллипсоида вращения, находящегося в линейно поляризованном поле бесконечного волновода, и в случае связи двух пересекающихся волноводов с помощью ферритового эллипсоида вращения. Приводятся результаты экспериментальной проверки полученных формул.

Как показано в работе [1], величина СВЧ магнитного поля (с линейной поляризацией), при которой возникает нестабильность спиновых волн, определяется следующими соотношениями:

$$H_{\text{пор}} = 2\Delta H \Delta H_{\text{к}} / 4\pi M_0 \quad (1)$$

для процесса первого порядка и

$$H_{\text{пор}} = 2\Delta H (2\Delta H_{\text{к}} / 4\pi M_0)^{1/2} \quad (2)$$

для процесса второго порядка при резонансе однородной прецессии. Здесь $2\Delta H$ — ширина резонансной кривой ферритового образца, $2\Delta H_{\text{к}}$ — ширина резонансной кривой спиновых волн, $4\pi M_0$ — намагниченность насыщения феррита. Эти формулы получены без учета реакции ферритового образца, следовательно, $H_{\text{пор}}$ есть пороговое значение действующего на феррит переменного поля. Пользуясь методикой, изложенной в работе [2], с учетом соотношений (1) и (2), можно очень просто вычислить пороговое значение переменного поля падающей волны в волноводе при произвольной реакции образца.

Рассмотрим сначала ферритовый эллипсоид вращения, находящийся в линейно поляризованном поперечном магнитном поле бесконечного волновода (рис. 1).

Согласно [2]

$$\widetilde{M}_x = \chi(H_v + H_n), \quad (3)$$

$$H_n = -ia\widetilde{M}_x, \quad (4)$$

где $\chi = \chi' - i\chi''$ — диагональный компонент внешнего тензора восприимчивости образца; \widetilde{M}_x — составляющая переменной намагниченности, совпадающая по направлению с переменным полем; H_v — амплитуда невозмущенного поля в волноводе (амплитуда падающей волны); H_n — амплитуда основной волны поля излучения, возбуждаемого переменной намагниченностью; a — постоянный коэффициент, зависящий от размеров поперечного сечения волновода, объема ферритового эллипсоида и рабочей частоты.

Рис. 1. Ферритовый эллипсоид в бесконечном волноводе.

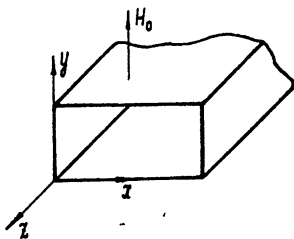


Рис. 1. Ферритовый эллипсоид в бесконечном волноводе.

Исключая H_n из выражений (3) и (4), получим

$$H_v = \widetilde{M}_x(1 + ia\chi)/\chi. \quad (5)$$

Учитывая, что при резонансе $\chi = -i\chi''_{рез}$, получим для пороговых значений следующее выражение:

$$H_{v \text{ пор}} = \widetilde{M}_x \text{ пор}(1+q)/\chi''_{рез}. \quad (6)$$

При этом введено обозначение [2]

$$q = a\chi''_{рез} = Q_0/Q_c. \quad (7)$$

Здесь Q_0 — собственная добротность ферритового эллипсоида, определяемая по следующей формуле [2]:

$$Q_0 = \omega/\gamma 2\Delta H, \quad (8)$$

ω — резонансная частота, γ — гиромагнитное отношение, а Q_c — добротность связи ферритового эллипсоида, определяемая по следующей формуле [2]:

$$Q_c = \omega S/4\pi M_0 \gamma v \beta, \quad (9)$$

где S — площадь поперечного сечения волновода, v — объем ферритового эллипсоида, β — постоянная распространения в волноводе. Очевидно, что

$$\widetilde{M}_x \text{ пор}/\chi''_{рез} = H_{\text{пор}}. \quad (10)$$

С учетом (10) выражение (6) запишется в виде

$$H_{1 \text{ в пор}} = H_{\text{пор}}(1+q). \quad (11)$$

Пусть теперь ферритовый эллипсоид находится в отверстии, связывающем два закороченных скрещенных волновода, как показано на рис. 2. Согласно [2], вместо (3) мы имеем теперь два уравнения:

$$\widetilde{M}_x = \chi(H_{v_x} + H_{n_x}) + i\chi_a(H_{v_y} + H_{n_y}), \quad (12)$$

$$\widetilde{M}_y = -i\chi_a(H_{v_x} + H_{n_x}) + \chi(H_{v_y} + H_{n_y}),$$

где H_{v_x} и H_{v_y} — невозмущенные поля в волноводах, H_{n_x} и H_{n_y} — поля излучения в этих волноводах, возбуждаемые соответственно составляющими намагниченности \widetilde{M}_x и \widetilde{M}_y .

Пусть волна с амплитудой H_+ поступает со стороны волновода 1. Тогда для H_{v_x} и H_{v_y} справедливы следующие выражения (см. рис. 2):

$$H_{v_x} = 2H_+ \cos \beta d_1, \quad (13)$$

$$H_{v_y} = 0.$$

Согласно [2],

$$H_{n_{x,y}} = -2ia\widetilde{M}_{x,y} \cos \beta d_{1,2} e^{-i\beta d_{1,2}}. \quad (14)$$

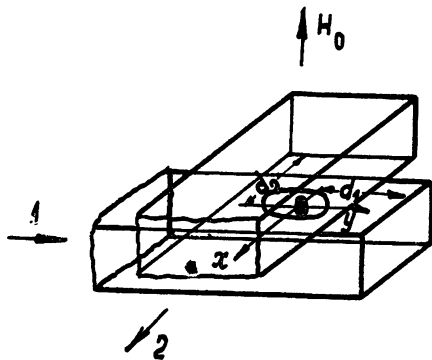


Рис. 2. Ферритовый эллипсоид в скрещенных волноводах.

Рассмотрим случай $d_1 = d_2 = \pi n/\beta$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ Тогда выражения (13) и (14) переписываются соответственно:

$$H_{в.х} = 2H_+, \quad (15)$$

$$H_{и.х, у} = -2ia\widetilde{M}_{х, у}. \quad (16)$$

Исключая из выражений (12), (15) и (16) $H_{в.х}$ и $H_{и.х, у}$ и учитывая, что для ферритов с узкой шириной резонансной кривой при резонансе $\chi = \chi_a = -i\chi_{рез}$ [3], получим

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_x &= -2i\chi_{рез}' H_+ - 2a\chi_{рез}'' \widetilde{M}_x - i2a\chi_{рез}'' \widetilde{M}_y, \\ \widetilde{M}_y &= -2\chi_{рез}'' H_+ + 2ia\chi_{рез}'' \widetilde{M}_x - 2a\chi_{рез}'' \widetilde{M}_y, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда следует, что

$$\widetilde{M}_y = -i\widetilde{M}_x. \quad (18)$$

Исключая \widetilde{M}_y из (17), получаем

$$H_+ = \widetilde{M}_x(1 + 4a\chi_{рез}'')/2\chi_{рез}'. \quad (19)$$

Учитывая далее выражение (10), получаем формулу для определения порогового поля падающей волны:

$$H_{2 в пор} = H_{пор}(1 + 4q)/2. \quad (20)$$

Формулы (11) и (20) справедливы для волновода любого сечения (прямоугольного, коаксиального, полоскового) при том условии, что ферритовый эллипсоид находится в линейно поляризованном магнитном поле. Аналогичным образом могут быть рассмотрены случаи круговой, а также и произвольной эллиптической поляризации магнитного поля.

Для того, чтобы избежать трудностей, связанных с независимым определением величины ΔH_k , экспериментально проверялось соотношение

$$H_{2 в пор}/H_{1 в пор} = (1 + 4q)/2(1 + q). \quad (21)$$

На рис. 3 сплошной линией изображена кривая, рассчитанная по формуле (21). Точками изображены результаты измерений в коаксиальном волноводе для процесса 1-го порядка. Как видно из рис. 3, результаты приведенного расчета подтверждают экспериментально. Формулы (11) и (20) могут быть использованы для определения порогового уровня мощности в ферритовых фильтрах-ограничителях.

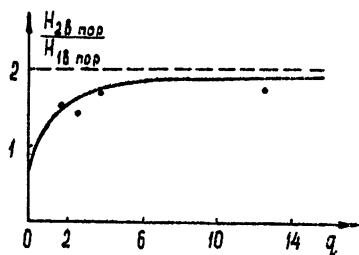


Рис. 3. Кривая, рассчитанная по формуле (21) (точками указаны экспериментальные значения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Суи, Proc. IRE, 44, 1270 (1956).
2. А. Г. Гуревич, Радиотехника и электроника, 8, № 5, 780 (1963).
3. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, ГИФМЛ, М., 1960.

TO CALCULATION OF THRESHOLD FIELD IN WAVEGUIDE
WITH FERRITE ELLIPSOID*K. G. Gudkov, A. G. Gurevich*

The threshold field for the nonstabilities of the first and second order is calculated for the case of the ferrite ellipsoid of rotation, being in a linear-polarized field of an infinite waveguide and for the case of two waveguide intersections by means of the ferrite ellipsoid of rotation. The results of an experimental checking of the obtained formulae are given.

УДК 621.371.162 : 621.371.167

О ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КРАЮ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

К. А. Барсуков

Рассматривается отражение и дифракция поверхностной волны, падающей на край полубесконечной анизотропно проводящей плоскости. Вычислен коэффициент отражения поверхностной волны от края полуплоскости, найдено дифрагированное поле и исследованы условия полного внутреннего отражения поверхностной волны.

В последнее время проблеме дифракции поверхностных волн на различных неоднородностях посвящено довольно большое число работ (см., например, обзор [1] и цитируемую там литературу). В частности, в работах [2, 3] рассмотрена дифракция поверхностной волны на краю импедансной полуплоскости [2] и анизотропно проводящей полуплоскости [3], где найдены коэффициенты отражения поверхностной волны от края и дифрагированное поле при нормальном падении волны на край полуплоскости. Вместе с тем, для анализа работы многих волновых приборов, в которых используются конечные участки плоских замедляющих структур, оказывается необходимым исследование косо падения поверхностной волны на край, особенно в случаях, когда распространение поверхностной волны происходит путем многократного отражения от границ замедляющей плоскости. Ниже на простом примере полубесконечной анизотропно проводящей плоскости мы рассмотрим основные особенности отражения и дифракции косо падающей на край полуплоскости поверхностной электромагнитной волны.

Пусть анизотропно проводящая поверхность занимает полуплоскость $z = 0$, $x > 0$ и ось y является краем полуплоскости. На полуплоскости введем еще одну систему координат ξ, η , которая задается векторами $e_\xi(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $e_\eta(-\sin \varphi, \cos \varphi)$, причем $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Будем считать, что полуплоскость в направлении ξ обладает бесконечно большой проводимостью, а в направлении η проводимость равна нулю. Пусть далее на край полуплоскости набегают поверхностная волна, двумерный волновой вектор $k^{(0)}$ которой составляет с осью x угол $\pi + \alpha$ (см. рис. 1). Поле в падающей волне будем задавать с помощью векторного потенциала, единственная отличная от нуля составляющая которого может быть записана в виде

$$A_\xi^{(0)} = A_0 \exp \left\{ -i \frac{k \cos \alpha}{\cos(\alpha - \varphi)} x - i \frac{k \sin \alpha}{\cos(\alpha - \varphi)} y - \frac{|\sin(\alpha - \varphi)| k}{\cos(\alpha - \varphi)} z \right\}, \quad (1)$$

где A_0 — амплитуда падающей волны. Волновой вектор отраженной волны $k^{(r)}$ составляет с осью x угол β , и векторный потенциал отраженной волны равен

$$A_{\xi}^{(r)} = B_0 \exp \left\{ i \frac{k \cos \beta}{\cos(\beta - \varphi)} x + \frac{ik \sin \beta}{\cos(\beta - \varphi)} y - \frac{k |\sin(\beta - \varphi)|}{\cos(\beta - \varphi)} |z| \right\}, \quad (2)$$

где B_0 — амплитуда отраженной поверхностной волны. Векторы поля поверхностной волны найдутся из соотношений

$$E = -\frac{1}{ik} (k^2 + \text{grad div}) A; \quad H = \text{rot } A. \quad (3)$$

Зависимость всех величин от времени вида $e^{-i\omega t}$ здесь и ниже будет опускаться.

Для того, чтобы найти неизвестную амплитуду B_0 и поле волны, излучаемой от края полуплоскости, необходимо решать граничную электродинамическую задачу, сводящуюся, в конечном счете, как это будет показано ниже, к парным интегральным уравнениям. Но ряд важных свойств отражения поверхностной волны от края можно установить по соотношениям (1) и (2) с помощью общих рассуждений.

Установим прежде всего условия излучения для полубесконечной анизотропно проводящей плоскости, так как здесь эти условия обладают определенными особенностями из-за сильно выраженной анизотропии плоскости. В качестве условий излучения потребуем, что падающая волна должна подводить энергию к краю полуплоскости, а отраженная — отводить от края, т. е. чтобы x -ая проекция вектора Умова — Пойнтинга для падающей волны $S_x^{(0)} < 0$ и для отраженной волны $S_x^{(r)} > 0$ *. Это требование приводит к следующему ограничению на значения углов падения и отражения:

$$-\frac{\pi}{2} + \varphi < \alpha < \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad -\frac{\pi}{2} + \varphi < \beta < \frac{\pi}{2} + \varphi. \quad (4)$$

Любопытно заметить, что при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} + \varphi$ для решения задачи приходится использовать опережающие потенциалы, так как проекции групповой и фазовой скоростей на ось x имеют разные знаки.

Теперь оказывается возможным получить закон отражения поверхностной волны от края полуплоскости.

Если обозначить $k_y^{(0)} = -k \sin \alpha / \cos(\alpha - \varphi)$; $k_y^{(r)} = k \sin \beta / \cos(\beta - \varphi)$, то очевидно, что $k_y^{(0)} = k_y^{(r)} = k_y$ и, следовательно,

$$\text{tg } \beta = -\frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha \sin \varphi + \cos(\alpha - \varphi)}. \quad (5)$$

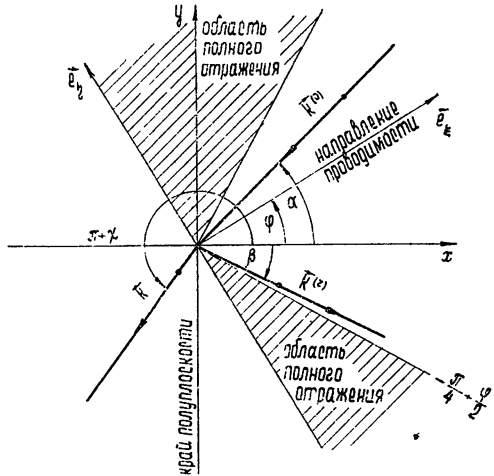


Рис. 1.

* Как было показано Л. И. Мандельштамом [4], эти условия являются самым общим условием излучения для краевых задач.

Из (5), в частности, следует, что, если угол падения α лежит в пределах

$$-\frac{\pi}{2} + \varphi < \alpha < -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right), \quad (6)$$

для отраженной волны необходимо пользоваться опережающим потенциалом для x -ой составляющей волнового вектора, так как здесь $\frac{\pi}{2} + \varphi > \beta > \frac{\pi}{2}$; при дальнейшем увеличении α волновой вектор отраженной волны попадает в первую четверть на рис. 1 и при $\alpha \rightarrow 0$ также $\beta \rightarrow 0$. При $\alpha > 0$ углы α и β меняются местами, т. е., если, например, угол β удовлетворяет теперь неравенству (6), то $\frac{\pi}{2} + \varphi > \alpha > \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что углы φ , близкие к $\pi/2$, являются запрещенными, так как в этом случае β близко к нулю, и приближение анизотропно проводящей плоскости оказывается неприменимым.

Если проводить аналогию между отражением плоской волны от границы диэлектрика и настоящей задачей, то тогда анизотропно проводящей плоскости следует приписать коэффициент преломления, равный $n^* = 1/\cos(\alpha - \varphi)$. Нетрудно видеть, что $n^* > 1$, и, следовательно, в нашем случае следует ожидать, что при определенных углах падения будет наблюдаться явление полного внутреннего отражения. Условие, при котором этот эффект имеет место, можно сформулировать из следующих простых соображений.

Ясно, что при дифракции поверхностной волны на краю полуплоскости дифрагированная волна имеет волновой вектор, проекция которого на ось u равна соответствующей проекции волнового вектора падающей и отраженной волны. Но модуль волнового вектора в пустоте равен k , поэтому, если потребовать, чтобы $|k_y| \geq k$, то при этом условии излучение в свободное пространство оказывается невозможным, и имеет место явление полного внутреннего отражения. Используя приведенное выше выражение для k_y , получим, что полное внутреннее отражение от края полубесконечной плоскости имеет место, если угол α заключен в пределах

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad -\frac{\pi}{2} + \varphi < \alpha < -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (7)$$

(см. рис. 1). Отсюда, в частности, следует, что при $\varphi = 0$, когда срез полуплоскости перпендикулярен направлению проводимости, полное отражение имеет место при $\frac{\pi}{2} > |\alpha| > \frac{\pi}{4}$. Можно также сформулировать закон преломления на краю полуплоскости следующим образом.

Из соображений симметрии очевидно, что максимум энергии дифракционного излучения будет лежать в плоскости $z = 0$, причем направление этого максимума можно найти, зная модуль волнового вектора и его проекцию на ось u . Поэтому, если направление максимума дифракционного излучения мы определим через угол с осью x $\pi + \chi$, то $k_y = -k \cos \chi$ или

$$\frac{\sin \chi}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos(\alpha - \varphi)} = n^*, \quad (8)$$

т. е. (8) является аналогом известного закона преломления плоской волны на границе диэлектрика.

Все приведенные выше фазовые соотношения носят, конечно, качественный характер, но все они следуют и из точного решения соответ-

вующей дифракционной задачи. Кроме того, точное решение позволяет также вычислить коэффициент отражения поверхностной волны от края полуплоскости и структуру дифрагированной с края волны. Поэтому ниже мы перейдем к изложению точного решения данной задачи.

Поле набегающей на край полуплоскости волны опять будем искать с помощью ξ -ой составляющей векторного потенциала, определяемой (1). Эта поверхностная волна возбуждает на полуплоскости ξ -ую составляющую тока, равную

$$j_{\xi}^{(0)} = \frac{ic(k_1^2 - h_0^2)^{1/2}}{2\pi} A_0 \exp(-ih_0x), \quad (9)$$

где $h_0 = k \cos \alpha / \cos(\alpha - \varphi)$, $k_1 = (k^2 - k_y^2)^{1/2}$, а зависимость всех величин от y здесь и ниже опущена.

Ток, который возбуждается отраженной от края поверхностной волной и дифрагированным полем, следуя [5], будем искать в виде

$$j_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(w) \exp(iwx) dw. \quad (10)$$

При $x < 0$ полный ток обращается в нуль, поэтому имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w) \exp(iwx) dw = - \frac{ic(k_1^2 - h_0^2)^{1/2}}{2\pi} A_0 \exp(-ih_0x) \quad \text{при } x < 0. \quad (11)$$

Кроме того, на полуплоскости должно выполняться условие $E_{\xi} = 0$. Поле падающей волны удовлетворяет этому условию, поэтому нам достаточно потребовать, чтобы поле, возбужденное током j_{ξ} , давало бы $E_{\xi} = 0$.

Можно показать, что векторный потенциал, создаваемый составляющей тока j_{ξ} , имеет следующий вид:

$$A_{\xi} = \frac{2\pi i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \exp(iwx + ix|z|) \frac{dw}{x}, \quad (12)$$

где $x = (k^2 - w^2 - k_y^2)^{1/2}$ и $\text{Im} x > 0$. Находя далее E_{ξ} по формуле (3); имеем

$$E_{\xi} = \frac{2\pi}{kc} \cos^2 \varphi \int_{-\infty}^{\infty} (w + h_0)(w - h_r) F(w) \exp(iwx + ix|z|) \frac{dw}{x}. \quad (13)$$

Отсюда можно получить парное по отношению к (11) интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} (w + h_0)(w - h_r) F(w) \exp(iwx) dw/x = 0 \quad \text{при } x > 0, \quad (14)$$

где $h_r = k \cos \beta / \cos(\varphi - \beta)$ — волновое число отраженной волны.

Парные интегральные уравнения (11) и (14) аналогичны соответствующим уравнениям задачи дифракции плоской волны на идеально проводящей полуплоскости. Эти уравнения довольно просто решаются методом Вайнштейна. Именно, выполняя с помощью [5] факторизацию подынтегральной функции в (14), получим в конечном счете

$$F(w) = \frac{c(h_0 + h_r)}{4\pi^2} A_0 \frac{(k_1 - w)^{1/2}}{(w + h_0)(w - h_r)}. \quad (15)$$

Отсюда ток, возбуждаемый отраженной волной и дифрагированным пелем, находится по формуле (10):

$$j_{\varepsilon} = \frac{c(h_0 + h_r)(k_1 - h_0)^{1/2}}{4\pi^2} A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_1 - \omega)^{1/2}}{(\omega + h_0)(\omega - h_r)} \exp(i\omega x) d\omega, \quad (16)$$

причем здесь мы считаем, что $\text{Im } h_r > 0$, т. е. отраженная поверхностная волна затухает при $x \rightarrow \infty$. Очевидно, что полюс в подынтегральной функции (16) определяет при $x > 0$ отраженную поверхностную волну, а интеграл, взятый по берегам разреза функции $(k_1 - \omega)^{1/2}$ — дифрагированную волну. Формула (16) дает полный ток в анизотропно проводящей полуплоскости, если полюса в интеграле (16) обходить снизу.

Коэффициент отражения поверхностной волны по току нетрудно получить из выражения (16), беря соответствующие вычеты в точках $\omega = -h_0$ и $\omega = h_r$. Если определить этот коэффициент как отношение амплитуд токов в отраженной и падающей волне, то получим

$$R_j = \left(\frac{h_r - k_1}{h_0 + k_1} \right)^{1/2} \exp(-i\pi/2). \quad (17)$$

В частном случае нормального падения поверхностной волны на край полуплоскости имеем,

$$R_j = \left(\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right)^{1/2} \exp(-i\pi/2). \quad (18)$$

Эта формула совпадает с соответствующим выражением работы [3]. При направлении проводимости, перпендикулярном краю полуплоскости ($\varphi = 0$), имеем

$$R_j = \left(\frac{\cos \alpha - \sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{\cos 2\alpha}} \right)^{1/2} \exp(-i\pi/2). \quad (19)$$

При $|\alpha| > \frac{\pi}{4}$ $\cos 2\alpha < 0$, и нетрудно проверить, что в этом случае

$|R_j| = 1$ и имеет место полное внутреннее отражение, как это и следовало ожидать из общего рассмотрения, проведенного выше.

В общем случае модуль коэффициента отражения не имеет простого энергетического смысла. Легко проверить, например, что при $\varphi \rightarrow \pi/2$ $|R_j| \rightarrow \infty$ и $|R_j|^2$ нельзя представить как отношение потоков энергии в падающей и отраженной волнах. Дело заключается в том, что волновые числа падающей и отраженной волн в общем случае не равны друг другу и угол падения поверхностной волны не равен углу отражения. Выражение же потенциала поля, как это видно из формул (1) и (2), зависит существенным образом от угла между направлением распространения волны и проводимостью плоскости. Так, например, при $\varphi \rightarrow \pi/2$ направление распространения отраженной волны оказывается почти перпендикулярным направлению проводимости и «толщина» отраженной поверхностной волны оказывается значительно меньше «толщины» падающей. Это приводит к сильному увеличению магнитного поля у поверхности плоскости, а тем самым и тока, что и объясняет значительное увеличение коэффициента отражения по току.

Введем еще один коэффициент отражения поверхностной волны по полю с помощью соотношения $B_0 = A_0 R_n$. Нетрудно видеть из (12), что R_n определяется выражением

$$R_n = \left(\frac{h_0 - k_1}{h_r + k_1} \right)^{1/2} \exp(-i\pi/2). \quad (20)$$

Чтобы связать R_n с потоком энергии в падающей и отраженной волнах, найдем соответствующие значения вектора Умова — Пойнтинга. Для среднего по времени потока энергии имеем

$$\begin{aligned} \frac{dS_\xi^{(0)}}{dz} &= -\frac{ck^2}{4\pi} |A_0|^2 \operatorname{tg}^2(\varphi - \alpha) \exp[-2k|z \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)|], \\ \frac{dS_\xi^{(r)}}{dz} &= \frac{ck^2}{4\pi} |R_n A_0|^2 \operatorname{tg}^2(\varphi - \beta) \exp[-2k|z \operatorname{tg}(\varphi - \beta)|], \end{aligned} \quad (21)$$

где $dS_\xi^{(0)}/dz$ и $dS_\xi^{(r)}/dz$ — составляющие по оси ξ потока вектора Умова — Пойнтинга в падающей и отраженной волнах соответственно. Интегрируя (21) по z , получим

$$\begin{aligned} S_\xi^{(0)} &= -\frac{ck}{4\pi} |A_0|^2 |\operatorname{tg}(\varphi - \alpha)|, \\ S_\xi^{(r)} &= \frac{ck}{4\pi} |R_n A_0|^2 |\operatorname{tg}(\varphi - \beta)|, \end{aligned} \quad (22)$$

где $S_\xi^{(0)}$ и $S_\xi^{(r)}$ имеют смысл потока энергии, переносимого падающей и отраженной волнами через вертикальную бесконечную полосу единичной ширины. Коэффициент отражения по мощности R_s , определяемый как отношение $S_\xi^{(r)}$ и $S_\xi^{(0)}$, нетрудно найти из (22):

$$R_s = S_\xi^{(r)}/S_\xi^{(0)} = |R_n|^2 \left| \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \beta)}{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha)} \right|. \quad (23)$$

Подставляя в (23) выражение из (20) и проводя несложные выкладки, получим

$$R_s = |\sin \alpha + \sin \varphi \cos(\alpha - \varphi)| |\sin(\varphi - \alpha)| \{ [\cos(\varphi - 2\alpha)]^{1/2} + \cos(\varphi - \alpha) (\cos \varphi)^{1/2} \}^{-2} \quad (24)$$

при $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} > \alpha > -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ и

$$R_s = 1 \quad (25)$$

при $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} + \varphi$ или $-\frac{\pi}{2} + \varphi < \alpha < -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$. Таким образом, строгое решение дает те же самые условия для явления полного отражения, что и общее рассмотрение, проведенное ранее.

Из (24) видно, что коэффициент отражения обращается в нуль при $\alpha = \varphi$ и

$$\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi}. \quad (26)$$

Первый случай не представляет интереса, так как при $\alpha = \varphi$ поверхностная волна превращается в обычную плоскую волну, электрический вектор которой перпендикулярен направлению проводимости полуплоскости, и, следовательно, наличие полуплоскости не сказывается на распространении этой плоской волны. Наличие второго нуля у R_s означает, что отраженная волна, которая должна бы распространяться вдоль

направления проводимости полуплоскости, не возникает и вся энергия поверхностной волны уходит в излучение

На рис. 2 показана зависимость R_s от угла падения поверхностной волны при различных значениях угла φ , причем графики построены для области, где полное отражение отсутствует.

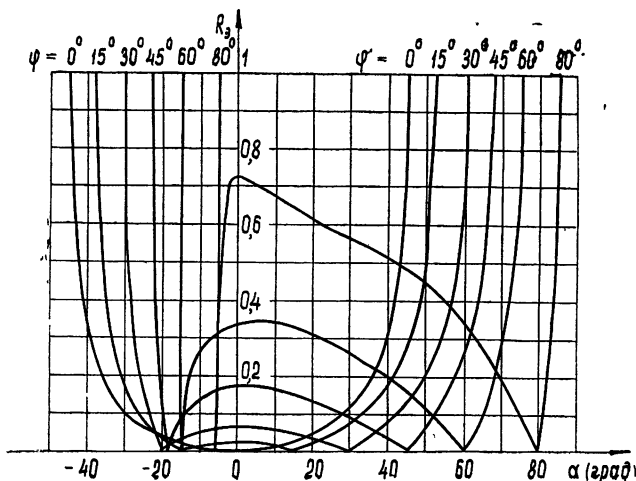


Рис. 2.

Дифрагированное поле найдем, подставляя в (12) $F(w)$ из (15):

$$A_{\xi} = \frac{i(k_1 - h_0)^{1/2} (h_0 + h_r) A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega x + i\omega' z) d\omega}{(k_1 + \omega)^{1/2} (\omega + h_0)(\omega - h_r)}. \quad (27)$$

Последний интеграл в волновой зоне при $kR \gg 1$ может быть найден с помощью метода перевала. Выполняя обычные для этого метода вычисления, получим в конечном счете

$$A_{\xi} = \frac{i(k_1 - h_0)^{1/2} (h_0 + h_r) \sin \frac{\theta}{2} A_0}{\sqrt{\pi} (k_1 \cos \theta + h_0) (k \cos \theta + h_r)} \exp\left(ik_1 R + i\frac{\pi}{4} + ik_y y\right) R^{-1/2}, \quad (28)$$

где $x = R \cos \theta$, $z = R \sin \theta$. Выражение (28) определяет коническую волну, расходящуюся от края полуплоскости, волновой вектор которой образует с краем полуплоскости (осью y) угол γ , равный

$$\gamma = \pi - \arccos \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \varphi)}. \quad (29)$$

В волновой зоне поле излучения, как это видно из формул (28) и (3), оказывается линейно поляризованным. Для характеристики направления поляризации поля введем плоскость, проходящую через ось y и волновой вектор, и угол этой плоскости с отрицательным направлением оси x обозначим через ψ . Тогда электрический вектор конической волны образует с проведенной плоскостью угол μ , который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \psi \cos(\alpha - \varphi) \sqrt{\cos \varphi}}{\sin \varphi \sqrt{\cos(2\alpha - \varphi)} - \cos \psi \sin \alpha \sqrt{\cos \varphi}}. \quad (30)$$

Из (30), в частности, видно, что при $\psi=0$ электрический вектор лежит на продолжении анизотропно проводящей полуплоскости, а магнитный — ей перпендикулярен.

Поток энергии, переносимый дифрагированной на краю волной, можно подсчитать с помощью вектора Умова — Пойнтинга. Модуль этого вектора оказывается равным

$$W = \frac{c(h_0 - k_1)(h_0 + h_r)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \varphi}{8\pi^2(h_0 + k_1 \cos \theta)(h_r - k_1 \cos \theta) R} |A_0|^2, \quad (31)$$

и W составляет с осью u угол γ .

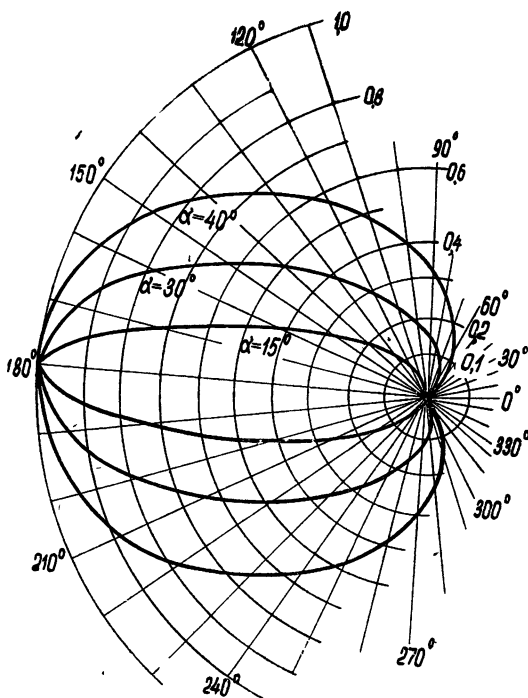


Рис. 3.

На рис. 3 показана нормированная угловая диаграмма направленности излучения с края полуплоскости в направлении угла γ в частном случае, когда $\varphi = 0$ и $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 40^\circ$. Угол γ , как это следует из (29), принимает значения $105,5^\circ; 124,3^\circ; 147^\circ$. Максимум интенсивности с края полуплоскости приходится на $\theta = 180$, и лепестки диаграммы направленности сжимаются при уменьшении угла падения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 132 (1959).
2. Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, 163 (1958).
3. S. R. Seshadri, IRE Trans. MTT-10, 367 (1962).
4. Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ, 15, 475 (1945).
5. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Сов радио, М.—Л., 1953.

**ON DIFFRACTION OF SURFACE ELECTRO-MAGNETIC WAVES ON THE
EDGE OF HALF-INFINITE UNIDIRECTIONALLY CONDUCTING PLANE***K. A. Barsukov*

Reflection and diffraction are considered of a surface wave incident upon the edge of a half-infinite unidirectionally conducting plane. The reflection coefficient of the surface wave from the edge of the half-plane is calculated, the diffraction field is found and the conditions of the total internal reflection of the surface wave are investigated.

УДК 538.3

МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНО-ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ДИЭЛЕКТРИКЕ

Л. Г. Нарышкина, М. Е. Герценштейн

Рассматривается замедляющая система — идеально проводящая решетка, покоящаяся на границе полубесконечного диэлектрика ($\epsilon > 1$). Предполагается, что период решетки мал по сравнению с длиной медленной волны.

В настоящее время широкополосные замедляющие плоские структуры получили распространение в мазерах бегущей волны [1, 2] в силу ряда технических преимуществ. Теоретических работ по таким системам почти нет, поэтому представляет интерес качественное исследование плоских замедляющих систем на математически простых моделях. В настоящей работе исследуется простейшая модель — идеально проводящая анизотропная плоскость, лежащая на диэлектрике. Приближение анизотропной проводящей поверхности часто используется при исследовании решеток из проводящих проволок, оно дает хорошие результаты [3], когда период решетки мал по сравнению с длиной волны.

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Пусть плоскость решетки и граница диэлектрика совпадают с плоскостью xOy ; решетка является идеально проводящей вдоль оси Ox , диэлектрик находится в области $z < 0$, а при $z > 0$ $\epsilon = 1$. Тогда граничные условия можно записать в следующем виде:

$$z = 0, \quad E_x^{(1,2)} = 0, \quad H_x^{(1)} = H_x^{(2)}, \quad E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \quad (1)$$

где индексы 1, 2 отвечают $z > 0$ и $z < 0$ соответственно.

Граничные условия (1) не содержат переменных x, y, t явно, эти переменные можно отделить для плоской волны с помощью экспоненциального множителя $\exp(-ik_x x - ik_y y + i\omega t)$. Зависимость поля медленной волны от z имеет вид

$$e^{-\kappa_1 z} \text{ при } z > 0, \quad e^{\kappa_2 z} \text{ при } z < 0,$$

где κ_1 и κ_2 определяются из уравнений Максвелла:

$$\kappa_1 = (k_x^2 + k_y^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}, \quad \kappa_2 = (k_x^2 + k_y^2 - \epsilon\omega^2/c^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Рассматривая однородную систему уравнений Максвелла вместе с граничными условиями (1), можно получить условие совместности этой системы в виде следующего дисперсионного уравнения:

$$\kappa_1 \kappa_2 = k_y^2. \quad (3)$$

Выполняя несложные выкладки, получим

$$\sin^2 \varphi k_{\perp}^4 (1 + \cos^2 \varphi) - k_{\perp}^2 \omega^2 (\epsilon + 1)/c^2 + \omega^4 \epsilon/c^4 = 0, \quad (4)$$

где $k_x = k_{\perp} \sin \varphi$, $k_y = k_{\perp} \cos \varphi$ и φ — угол между осью y и волновым век-

тором поверхностной волны k_{\perp} . Дисперсионное уравнение (4) определяет частоту как функцию k_x и k_y , причем кривая $\omega = \text{const}$ не является замкнутой на плоскости k_{\perp} , а имеет бесконечно удаленные точки (при $\varphi = 0$), что соответствует бесконечному показателю преломления. Предельный переход $\varphi \rightarrow 0$ выводит нас за пределы применимости модели анизотропно проводящей плоскости. Однако при заданном угле φ и длине волны λ всегда можно указать верхний предел шага решетки, при котором приближение анизотропно проводящей плоскости применимо. Из уравнения (4) можно найти явную зависимость волнового вектора от частоты:

$$k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2 \{ \varepsilon + 1 + [(\varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon \cos^4 \varphi]^{1/2} \}}{2c^2(1 + \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi}. \quad (5)$$

Отметим, что дисперсионному уравнению (3) удовлетворяет лишь один из корней биквадратного уравнения (4). В дальнейшем мы будем считать, что дисперсия в диэлектрике не существенна и $d\varepsilon/d\omega = 0$, что хорошо оправдывается в области длин волн $\lambda \geq 0,1$ см. Для фазовой и групповой скорости имеем

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k_{\perp}} k_{\perp}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_{\perp}}. \quad (6)$$

Фазовая скорость, как это видно из (6), направлена вдоль вектора k_{\perp} , направления фазовой и групповой скоростей не совпадают, причем это отличие становится особенно большим при $\varphi \rightarrow 0$. Фазовая и групповая скорости связаны соотношением

$$v_{\text{гр}}^2 = v_{\phi}^2 + \frac{4c^4 \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi}{v_{\phi}^2 [(\varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon \cos^4 \varphi]}. \quad (7)$$

Заметим, что при фиксированном угле φ значение производной $\partial \omega / \partial k_{\perp}$ равно проекции групповой скорости на направление фазовой скорости и эта проекция по величине совпадает с фазовой скоростью волны.

Замедление по фазовой и групповой скоростям в поверхностной волне

$$B_{\phi} = \frac{c}{v_{\phi}} = \frac{ck_{\perp}}{\omega}, \quad B_{\text{гр}} = \frac{c}{v_{\text{гр}}} = c / |\partial \omega / \partial k_{\perp}| \quad (8)$$

определим с помощью (5) и (6):

$$B_{\phi} = \left[\frac{\varepsilon + 1 + [(\varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon \cos^4 \varphi]^{1/2}}{2(1 + \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

$$B_{\text{гр}} = B_{\phi} \left[1 + B_{\phi}^4 \frac{4 \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi}{(\varepsilon - 1)^2 + 4\varepsilon \cos^4 \varphi} \right]^{-1/2}.$$

При $\varepsilon > 1$ B_{ϕ} и $B_{\text{гр}}$ всегда вещественны, полос запрета нет, причем $B_{\phi} > 1$ и $B_{\text{гр}} > 1$ при всех значениях углов φ . Кроме того, B_{ϕ} является также монотонной функцией от ε и угла φ . График зависимости B_{ϕ} от угла приведен при различных значениях ε на рис. 1.

Представляют интерес системы с большим замедлением $B_{\phi} \gg 1$, которое имеет место при малых φ . В этом случае формулы (9) приобретают вид

$$B_{\phi} = \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{2}} \frac{1}{\sin \varphi}, \quad B_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{2}} \quad (10)$$

и $B_{\text{гр}}$ не зависит от угла φ . Здесь можно считать, что при малых

углах $B_\phi = B_1 B_2$, где $B_1 = \sqrt{\frac{\epsilon+1}{2}} = B_{\text{гф}}$ — замедление за счет диэлектрика, $B_2 = 1/\sin \varphi$ — замедление за счет проводов. Полное замедление равно произведению замедлений за счет диэлектрика и проводов.

При исследовании замедляющих систем интерес представляет не только величина замедления, но и структура поля. Выпишем формулы для компонент поля медленной волны:

$$E_x^{(1)} = 0; \quad E_x^{(2)} = 0;$$

$$E_y^{(1)} = i \frac{\omega}{c} \alpha_1 A e^{-\alpha_1 z}; \quad E_y^{(2)} = i \frac{\omega}{c} \alpha_1 A e^{\alpha_2 z};$$

$$E_z^{(1)} = \frac{\omega}{c} k_\perp \cos \varphi A e^{-\alpha_1 z};$$

$$E_z^{(2)} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} k_\perp \frac{\omega}{c} \cos \varphi A e^{\alpha_2 z};$$

$$H_x^{(1)} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2 \sin^2 \varphi \right) A e^{-\alpha_1 z};$$

$$H_x^{(2)} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2 \sin^2 \varphi \right) A e^{\alpha_2 z};$$

(11)

$$H_y^{(1)} = -k_\perp^2 \sin \varphi \cos \varphi A e^{-\alpha_1 z}; \quad H_y^{(2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} k_\perp^2 \sin \varphi \cos \varphi A e^{\alpha_2 z};$$

$$H_z^{(1)} = i k_\perp \alpha_1 \sin \varphi A e^{-\alpha_1 z}; \quad H_z^{(2)} = i \alpha_1 k_\perp \sin \varphi A e^{\alpha_2 z},$$

где A — амплитуда поверхностной волны, определяемая из условий возбуждения, экспоненциальный множитель опущен.

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

Как видно из формул (11), поверхностная волна, вообще говоря, обладает эллиптической поляризацией. В мазере бегущей волны имеет место взаимодействие замедленной волны как с активным веществом, так и с невзаимной ферритовой системой. Для получения хорошего вентиляционного отношения феррит должен помещаться в точке с круговой поляризацией переменного магнитного поля волны относительно направления постоянного магнитного поля H_0 . Это постоянное магнитное поле обычно перпендикулярно направлению распространения k_\perp и лежит в плоскости замедляющей системы.

Эллиптически поляризованное поле (11) можно разложить на два поля с круговой поляризацией с противоположным направлением вращения магнитного вектора. Для этого найдем компоненты переменного магнитного поля в плоскости, образованной вектором k_\perp и осью z . В воздухе ($z > 0$) поле равно

$$\begin{aligned} H_{k_\perp}^{(1)} &= (A_1^+ - A_1^-) e^{-\alpha_1 z} \cos [k_\perp (x \sin \varphi + y \cos \varphi) - \omega t], \\ H_z^{(1)} &= (A_1^+ + A_1^-) e^{-\alpha_1 z} \sin [k_\perp (x \sin \varphi + y \cos \varphi) - \omega t], \end{aligned} \quad (12)$$

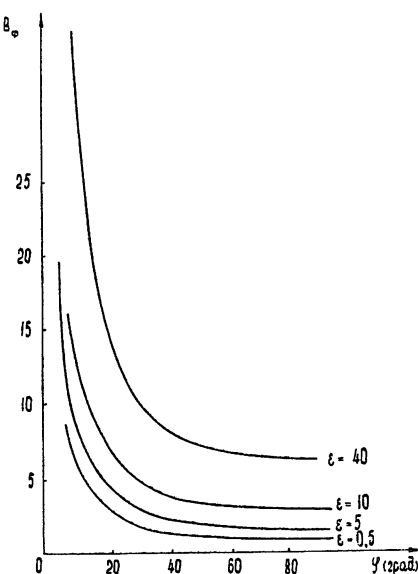


Рис. 1.

где индекс k_{\perp} обозначает проекцию на вектор k_{\perp} , A_1^+ и A_1^- — амплитуды полей с круговой поляризацией, выражение для которых нетрудно получить из (11). Отношение амплитуд этих полей будет, очевидно, определять отличие поляризации полного поля от круговой и оно, как это следует из (11) и (12), равно

$$M = \frac{A_1^+}{A_1^-} = \frac{k_{\perp} - x_1}{k_{\perp} + x_1}, \quad (13)$$

где M есть отношение амплитуды поля с вращением вектора H от оси Oz к вектору k_{\perp} в направлении прямого угла к соответствующей амплитуде поля с противоположным направлением вращения вектора H . При большом замедлении формула (13) с помощью (9) приобретает вид

$$M = \frac{\sin^2 \varphi}{2(\varepsilon + 1)} = \frac{1}{4B_{\Phi}^2}, \quad (14)$$

откуда видно, что $M \ll 1$ и эллипс поляризации в этом случае близок к кругу.

Если мы рассмотрим обратную волну, в которой k_{\perp} меняет знак, то она будет иметь противоположное направление вращения вектора H в обоих типах полей. Величина M для нее тоже будет определяться формулой (13), но у k_{\perp} следует взять знак минус. В мазерах бегущей волны обратная волна является нежелательной и она обычно поглощается с помощью невзаимной системы — феррита, который имеет вентиляционные свойства. В идеальном феррите вентиляционное отношение равно M^{-2} ; практически при $M < 0,1$ вентиляционное отношение определяется не структурой волны, а потерями в феррите. При больших замедлениях поляризация волны в воздухе практически не отличается от круговой. Величина M в воздухе определяется только полным замедлением, при этом безразлично, обусловливается ли замедление диэлектриком или проводящей плоскостью.

Рассмотрим теперь структуру поля в диэлектрике ($z < 0$); соответствующие компоненты переменного магнитного поля, как это следует из (11), имеют вид

$$H_{k_{\perp}}^{(2)} = (A_2^+ - A_2^-) \cos[k_{\perp}(x \sin \varphi + y \cos \varphi) - \omega t] e^{i'z}, \quad (15)$$

$$H_z^{(2)} = (A_2^+ + A_2^-) \sin[k_{\perp}(x \sin \varphi + y \cos \varphi) - \omega t] e^{i'z}.$$

Величина M теперь равна

$$M = \frac{A_2^+}{A_2^-} = \frac{k_{\perp} \cos^2 \varphi + x_1}{x_1 - k_{\perp} \cos^2 \varphi}. \quad (16)$$

При малых углах φ (16) приобретает вид

$$M = \frac{2(\varepsilon + 1)}{\varepsilon \sin^2 \varphi} = \frac{4B_{\Phi}^2}{\varepsilon}, \quad (17)$$

т. е. при малых углах φ $M \gg 1$ и опять поляризация близка к круговой. Из сравнения (14) и (17) видно, что направления вращения магнитного вектора в пустоте и диэлектрике противоположны.

3. ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ В ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЕ

Плотность энергии электромагнитного поля при $z > 0$ и $z < 0$ соответственно может быть подсчитана по известным формулам:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} [E^2 + H^2] dz, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^0 [\varepsilon E^2 + H^2] dz, \quad (18)$$

где плотность энергии отнесена к единице поверхности решетки. Подставляя в (18) выражения для полей из (11) и проводя усреднение по времени, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{k_{\perp}^2 |A|^2}{16\pi\kappa_1} \left[\frac{\omega^2}{c^2} \cos 2\varphi + k_{\perp}^2 \sin^2 \varphi \right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{k_{\perp}^2 \kappa_1^2 |A|^2}{16\pi\kappa_2^3} \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \cos 2\varphi + k_{\perp}^2 \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Отношение этих величин равно

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \left(\frac{B_{\Phi}^2 - \varepsilon}{B_{\Phi}^2 - 1} \right)^{3/2} \frac{\cos 2\varphi + B_{\Phi}^2 \sin^2 \varphi}{\varepsilon \cos 2\varphi + B_{\Phi}^2 \sin^2 \varphi}, \quad (20)$$

где B_{Φ} — коэффициент замедления.

При малых углах ($B_{\Phi} \gg \sqrt{\varepsilon}$) (20) принимает простой вид:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon + 3}{3\varepsilon + 1}, \quad 1 \gg \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \gg \frac{1}{3}. \quad (21)$$

Энергия электрического и магнитного полей, запасенная в диэлектрике, составляет от 50% до 75% запасенной энергии. Представляет также интерес найти долю электрической и магнитной энергии поверхностной волны, приходящуюся на область $z > 0$. С помощью формул (11) имеем для электрического поля волны

$$\frac{\varepsilon_1^{(e)}}{\varepsilon_1^{(e)} + \varepsilon_2^{(e)}} = \frac{\kappa_2^2}{\kappa_2^2 + \kappa_1^2 \varepsilon}; \quad (22)$$

при малых углах φ $\kappa_2 = \kappa_1$ и

$$\frac{\varepsilon_1^{(e)}}{\varepsilon_1^{(e)} + \varepsilon_2^{(e)}} = \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad (23)$$

т. е. при $\varepsilon \gg 1$ почти вся энергия электрического поля оказывается сосредоточенной в диэлектрике. Для магнитной энергии волны имеем

$$\frac{\varepsilon_1^{(m)}}{\varepsilon_1^{(m)} + \varepsilon_2^{(m)}} = \frac{k_{\perp}^2 \kappa_2 [(x_2 - x_1)^2 \cos^2 \varphi + x_2 (x_1 + x_2) \sin^2 \varphi]}{(x_1 + x_2) [k_{\perp}^2 (\kappa_2^2 + \kappa_1^2) - 2\kappa_1^2 \kappa_2^2]}, \quad (24)$$

и при $\varphi \ll 1$ это отношение стремится к $1/2$. То обстоятельство, что вся электрическая энергия сосредоточена в диэлектрике, приводит при больших ε к увеличению электрических потерь. В самом деле, замедление пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$ при фиксированном φ , а электрические потери пропорциональны $\varepsilon \operatorname{tg} \delta_{\varepsilon}$.

4. ПОТОК ЭНЕРГИИ

Поток энергии проще всего можно найти с помощью вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \operatorname{Re} \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}^*]. \quad (25)$$

Подставляя выражение для полей из (11), получим S_1 и S_2 — соответствующие значения S при $z > 0$ и $z < 0$. Поток энергии, переносимой полем через вертикальную полосу единичной ширины, определим из соотношений

$$W_1 = \int_0^{\infty} S_1 dz = \frac{\omega k_{\perp}}{16\pi} |A|^2 \{i(x_1 + x_2) \sin \varphi + j(x_2 - x_1) \cos \varphi\},$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^0 S_2 dz = \frac{\omega k_{\perp}}{16\pi} \frac{x_1^2}{x_2^2} |A|^2 \{i(x_1 + x_2) \sin \varphi - j(x_2 - x_1) \cos \varphi\},$$
(26)

где i, j — орты.

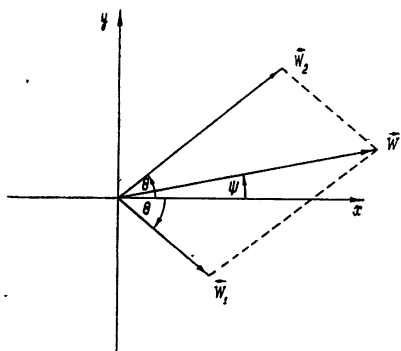


Рис. 2.

Из (26) видно, что W_1 и W_2 не совпадают по величине и образуют с направлением проводимости равные углы (см. рис. 2). Из (26) видно, что отношение потоков энергии в верхнем и нижнем полупространствах равно

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{B_{\phi}^2 - \epsilon}{B_{\phi}^2 - 1}. \quad (27)$$

Если $\epsilon > 1$, то $W_1 < W_2$, и при малых углах φ , когда $B_{\phi} \gg 1$, отношение (27) равно единице. Угол между векторами W_1, W_2 и проводами равен

$$\theta = \arctg \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} \operatorname{tg} \varphi \right), \quad (28)$$

и W_2 образует меньший угол с направлением волнового вектора k_{\perp} по сравнению с W_1 (см. рис. 2).

Угол ψ между групповой скоростью и проводами определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega^2(\epsilon + 1)/c^2 - 2k_{\perp}^2 \sin^2 \varphi}{\omega^2(\epsilon + 1)/c^2 - 2k_{\perp}^2} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (29)$$

В частном случае, когда $\epsilon = 1$, угол $\psi = 0$ и W направлен по оси x , как и следовало ожидать, так как

$$E_x = H_x = 0.$$

При малых углах φ формула (29) упрощается и приобретает вид

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{(\epsilon - 1)}{2(\epsilon + 1)^2} \sin^3 \varphi \simeq \frac{\sin^3 \varphi}{2} \quad (\varphi \ll 1), \quad (30)$$

т. е. угол ψ тоже мал: $\psi = \varphi^3/2$. Следовательно, вектор групповой скорости образует почти прямой угол с фазовой скоростью волны. Суммарный вектор потока из (26) оказывается равным

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\omega k_{\perp}}{16\pi} |A|^2 \frac{(x_1 + x_2)}{x_2^2} \{i(x_1^2 + x_2^2) \sin \varphi - j(x_2 - x_1)^2 \cos \varphi\}. \quad (31)$$

Можно проверить непосредственно прямым вычислением, что вектор

потока энергии W совпадает по направлению с вектором групповой скорости $d\omega/dk_{\perp}$. Равенство скорости потока энергии и групповой скорости следует непосредственно из теоремы Рытова [4]. Подчеркнем, что это равенство имеет место всегда, даже при $\varphi \rightarrow 0$, когда из-за сильного распывания пакета понятие групповой скорости теряет смысл.

5. РАСПЫВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Известно, что распывание волнового пакета определяется вторыми производными частоты по волновому вектору — тензором $\partial^2\omega/\partial k_x \partial k_y$. Приведем формулы для этого тензора при малых углах $\varphi \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial k_x^2} &= -\frac{c^2}{\omega} \frac{(\varepsilon-1)^2}{(\varepsilon+1)^2} \sin^2\varphi \simeq -\frac{c^2}{\omega} \sin^2\varphi, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial k_x \partial k_y} &= \frac{3c^2}{\omega} \frac{(\varepsilon-1)^2}{(\varepsilon+1)^2} \sin^3\varphi \simeq \frac{3c^2}{\omega} \sin^3\varphi, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial k_y^2} &= -\frac{3c^2}{\omega} \frac{(\varepsilon-1)^2}{(\varepsilon+1)^2} \sin^4\varphi \simeq -\frac{3c^2}{\omega} \sin^4\varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Последний столбец справа — приближенные выражения при $\varepsilon \gg 1$. Как видно из (32), производная $\partial^2\omega/\partial k_x^2$ наибольшая, поэтому распывание пакета происходит в основном в направлении проволоч, перпендикулярно направлению распространения.

Медленные электромагнитные волны в анизотропно проводящей плоскости имеют несколько необычные свойства. При распространении этих волн сильно проявляется анизотропия системы: фазовая и групповая скорости при большом замедлении заметно отличаются как по величине, так и по направлению. В связи с этим движение энергии и распывание волнового пакета происходит, в основном, поперек направления распространения фазы. Потоки энергии в диэлектрике и вакууме не совпадают по направлению. Поляризация магнитного поля близка к круговой.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Miller, H. U. Jim, Proc. IEEE, **51**, 1779 (1963).
2. L. C. Marris, D. J. Miller, IEEE J. Quant. Electr., **1**, 164 (1965).
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
4. С. М. Рытов, ЖЭТФ, **17**, 930 (1947).

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
9 февраля 1966 года.

SLOW WAVES ON ANISOTROPICALLY CONDUCTIVE PLANE PLACED ON DIELECTRIC

L. G. Naryshkina, M. E. Gertsenshtein

A delay system consisted of an ideal conductive grating placed upon the boundary of a half-infinite dielectric is considered. The grating period is assumed to be small in comparison with the length of the slow wave.

УДК 621.371.165

ВЛИЯНИЕ ПАРАЗИТНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ПАДАЮЩЕМ ПОЛЕ НА ПОЛЯ, РАССЕЯННЫЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ ШАРОМ И КОНЕЧНЫМ ЦИЛИНДРОМ

Г. В. Поддубный

Получены формулы, позволяющие учесть влияние паразитной поляризации в падающем поле на поля, рассеянные идеально проводящими шаром и конечным цилиндром.

При экспериментальном исследовании диаграмм рассеяния тел необходимо учитывать, что падающее поле не является чистой линейно поляризованной волной, а в нем в той или иной мере присутствует паразитная по поляризации компонента. Поэтому представляет определенный интерес выяснить влияние этой компоненты.

Как известно, рассеивающие свойства объекта полностью определяются матрицей рассеяния [1]. При этом падающее и рассеянное поля связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} E_{s\xi} \\ E_{s\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{s\xi}^{(1)} & E_{s\eta}^{(1)} \\ E_{s\xi}^{(2)} & E_{s\eta}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i^{(1)} \\ E_i^{(2)} \end{pmatrix},$$

в котором

$$E_i = E_i^{(1)}x + E_i^{(2)}y \tag{1}$$

— падающее поле с направлением падения k_i , перпендикулярным ортогональным осям x и y , а

$$E_s = E_{s\xi}\xi + E_{s\eta}\eta \tag{2}$$

— рассеянное поле (ξ и η — ортогональные орты, перпендикулярные направлению рассеяния k_s , (рис. 1)). Что касается комплексных коэффициентов матрицы рассеяния, то $E_{s\xi}^{(1)}$, например, представляет собой тот вклад, который вносит единичная составляющая по оси x падающего поля в проекцию по ξ рассеянного поля.

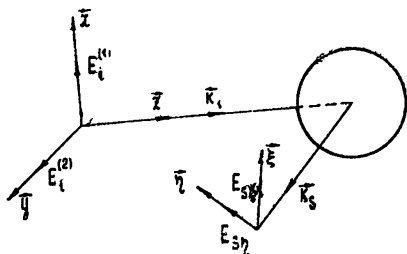


Рис. 1. Ориентация ортов, связанных с направлением падающей и рассеянной волн.

Поляризацию падающего поля относительно выбранных направлений будем характеризовать коэффициентом

$$\beta_i = E_i^{(2)}/E_i^{(1)} = b_i \exp(i\varphi_i), \tag{3}$$

а поляризацию рассеянного поля относительно направлений ξ и η — коэффициентом

$$\beta_s = E_{s\eta}/E_{s\xi}. \quad (4)$$

Заметим, что, если ξ и η совпадают соответственно с направлениями x и $(-y)$, то β_s характеризует деполяризацию рассеянного поля [2].

Если падающее поле линейно поляризовано и имеет либо составляющую $E_i^{(1)}$, либо $E_i^{(2)}$, то коэффициенты поляризации рассеянного поля определяются соответственно из выражений

$$\beta_s^{(1)} = E_{s\eta}^{(1)}/E_{s\xi}^{(1)}, \quad \beta_s^{(2)} = E_{s\eta}^{(2)}/E_{s\xi}^{(2)}. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение вектор влияния паразитной поляризации

$$\beta^{(n)} = \beta_\xi^{(n)}\xi + \beta_\eta^{(n)}\eta,$$

проекция которого (назовем их коэффициентами влияния паразитной поляризации) определяются из соотношений

$$\beta_\xi^{(n)} = E_{s\xi}^{(2)}/E_{s\xi}^{(1)}, \quad \beta_\eta^{(n)} = E_{s\eta}^{(2)}/E_{s\eta}^{(1)}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что коэффициенты $\beta_\xi^{(n)}$ и $\beta_\eta^{(n)}$ характеризуют вклад паразитной поляризации в соответствующие проекции рассеянного поля.

Пусть $P_s^{(0)}$ и $P_s^{(n)}$ — мощности, выделяемые в приемной антенне, когда в падающем поле имеется либо только основная, либо паразитная составляющая. Через P_s обозначим суммарную мощность, обусловленную полным полем E_i , т. е. обеими составляющими $E_i^{(1)}$ и $E_i^{(2)}$. Тогда нетрудно убедиться, что имеют место соотношения

$$\rho^{(n)} = P_s^{(n)}/P_s^{(0)} = \left| \frac{\beta_\xi^{(n)}(1 + \beta\beta_s^{(2)})}{1 + \beta\beta_s^{(1)}} \right|^2, \quad (7)$$

$$\rho = P_s/P_s^{(n)} = \left| \frac{1 + \beta\beta_s^{(1)}}{(1 + \beta_\xi^{(n)})(1 + \beta\beta_s)} \right|^2, \quad (8)$$

где β — коэффициент поляризации поля, излучаемого приемной антенной (если бы она работала в режиме передачи) относительно направлений ξ и η . Заметим, в частности, что, если приемная антенна линейно поляризована и ее плоскость поляризации совпадает с плоскостью, проходящей через вектор ξ и направление рассеяния, то $\beta = 0$ и, следовательно,

$$\rho^{(n)} = |\beta_\xi^{(n)}|^2, \quad \rho = |1 + \beta_\xi^{(n)}|^{-2}.$$

Предположим, что на идеально проводящую сферу радиуса a падает эллиптически поляризованная волна (рис. 2)

$$E_i = E_i^{(1)}x + E_i^{(2)}y,$$

где

$$E_i^{(p)} = D_i^{(p)} \exp[-i(k_r r + \varphi_p)] \quad (p = 1; 2), \quad (9)$$

$k_i = kz$; $k = 2\pi/\lambda$; $D_i^{(p)}$ — амплитуда; φ_p — начальная фаза соответствующего поля; x, y, z — орты соответствующих осей координат.

Как показано в [3], рассеянное поле $E_s = E_s^{(1)} + E_s^{(2)}$ определяется соотношением

$$E_s^{(p)} = \frac{k\rho_0 D_i^{(p)}}{4\pi r} \exp[-i(kr + \varphi_p)] \{a_r \times [T_\theta^{(p)}(k_s/k_i) \times a_r]\} \quad (10)$$

(ρ_0 — волновое сопротивление среды, \mathbf{k}_s — волновой вектор рассеянных волн). Для вектор-функций $T_e^{(p)}(\mathbf{k}_s/\mathbf{k}_i)$ в приближении Кирхгофа в дальней зоне справедливы следующие выражения [4]:

$$T_e^{(1)}(\mathbf{k}_s/\mathbf{k}_i) = \frac{4\pi a^2}{\rho_0} (A\mathbf{x} - iB \cos \psi \mathbf{z}), \quad (11)$$

$$T_e^{(2)}(\mathbf{k}_s/\mathbf{k}_i) = \frac{4\pi a^2}{\rho_0} (A\mathbf{y} - iB \sin \psi \mathbf{z}). \quad (12)$$

Здесь

$$A = \int_0^{\pi/2} \exp(iq \cos t) J_0(Z \sin t) \sin t \cos t dt, \\ B = -iZq_0^{-1} (A - J_1(Z)/Z), \quad (13)$$

$$q_0 = ka(1 - \cos \theta), \quad Z = ka \sin \theta,$$

$J_0(Z)$ и $J_1(Z)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка.

После некоторых вычислений получаем следующие формулы для рассеянных полей:

$$E_s^{(1)} = M^{(1)} \left\{ \left[A(\cos \theta - \cos 2\theta) - \frac{J_1(Z)}{Z} \sin^2 \theta \right] \frac{\cos \psi}{1 - \cos \theta} \xi - A \sin \psi \eta \right\}, \quad (14)$$

Рис. 2. К определению влияния паразитной поляризации на поле, рассеиваемое сферой.

$$E_s^{(2)} = M^{(2)} \left\{ \left[A(\cos \theta - \cos 2\theta) - \frac{J_1(Z)}{Z} \sin^2 \theta \right] \frac{\sin \psi}{1 - \cos \theta} \xi + A \cos \psi \eta \right\}, \quad (15)$$

где

$$M^{(p)} = \frac{ka^2 D_i^{(p)}}{r} \exp[-i(kr + \varphi_p)] \quad (p = 1; 2). \quad (16)$$

Из соотношений (6), (14), (15) вычисляем необходимые коэффициенты:

$$\beta_\xi^{(n)} = \beta_i \operatorname{tg} \psi, \quad \beta_\eta^{(n)} = -\beta_i \operatorname{ctg} \psi, \quad \beta_i = \frac{D_i^{(2)}}{D_i^{(1)}} \exp[-i(\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (17)$$

$$\beta_s^{(1)} = -\beta_s^{(2)} \operatorname{tg}^2 \psi = -\frac{ZA \operatorname{tg} \psi (1 - \cos \theta)}{ZA(\cos \theta - \cos 2\theta) - J_1(Z) \sin^2 \theta}. \quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (7), получаем отношение мощностей, выделяемых в индикаторе приемной антенны за счет паразитной и основной поляризации в падающем поле:

$$\rho^{(n)} = P_s^{(n)}/P_s^{(0)} = b_i^2 \left| \frac{\operatorname{tg} \psi + N}{\operatorname{tg} \psi - N} \right|^2, \quad (19)$$

где

$$N = \frac{\beta ZA (1 - \cos \theta)}{ZA(\cos \theta - \cos 2\theta) - J_1(Z) \sin^2 \theta}. \quad (20)$$

Здесь необходимо отметить, что интеграл A , входящий в (20), в элементарных функциях не выражается. Однако в работах [4, 5] получено асимптотическое выражение для этого интеграла, справедливое при

$q_0 \gg 1$, что соответствует коротковолновой асимптотике и некоторому сектору углов рассеяния вблизи радиолокационного направления. В частном случае измерения рассеянного поля в радиолокационном направлении имеем $\theta = \pi$, $\psi = 0$. Поэтому из (19) находим

$$\rho^{(n)} = b_i^2. \quad (21)$$

Таким образом, если, например, чувствительность приемника равна (-70) дБ по отношению к 1 мвт, то паразитную поляризацию антенны, для которой $b_i < 10^{-2}$, можно не учитывать, так как в этом случае часть мощности, принимаемой за счет паразитной поляризации, лежит ниже уровня (-70) дБ, если мощность излучения передающей антенны не превышает 10 мвт.

С помощью (8) нетрудно также вычислить для шара отношение мощности P_s , выделяемой в приемной антенне, к соответствующей мощности $P_s^{(0)}$, которая бы имела место при отсутствии паразитной поляризации:

$$\rho = P_s/P_s^{(0)} = \left| \frac{1 - N \operatorname{tg} \psi}{1 + \beta_i \operatorname{tg} \psi + (\beta_i - \operatorname{tg} \psi)N} \right|^2. \quad (22)$$

Для радиолокационного направления в случае шара имеем

$$\rho = |1 - \beta\beta_i|^{-2}. \quad (23)$$

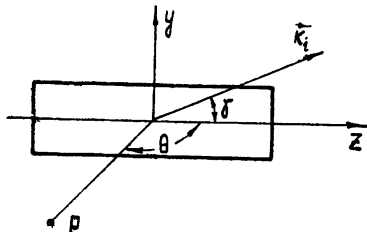
Рассматривая теперь в качестве рассеивающего объекта конечный цилиндр, на который падает плоская волна под углом γ к его оси, нетрудно получить соответствующие выражения для $\rho^{(n)}$ и ρ в приближении физической теории дифракции [2]:

$$\sqrt{\rho^{(n)}} = b^0 b_i^2 |\Sigma(\theta, \theta_0) / \bar{\Sigma}(\theta, \theta_0)|^2, \quad (24)$$

$$\rho = \left| \frac{\Sigma(\theta, \theta_0)}{\bar{\Sigma}(\theta, \theta_0) - \beta\beta_i \Sigma(\theta, \theta_0)} \right|^2, \quad (25)$$

справедливые для области $\psi = -\pi/2$, $\theta > \pi/2$, $\gamma < \pi/2$ ($\theta_0 = \pi - \gamma$). Здесь θ и ψ — сферические координаты (рис. 3). Функции $\Sigma(\theta, \theta_0)$ и $\bar{\Sigma}(\theta, \theta_0)$ определяются соотношениями (15.10) — (15.13) работы [2], которые из-за их громоздкости здесь опускаются.

Рис. 3. К определению влияния паразитной поляризации на поле, рассеиваемое цилиндром.



Расчеты проводились для идеально проводящего цилиндра, радиолокационного направления ($\theta = \theta_0$) и значений $ka = 6$, $kl = 48$ (a — радиус основания цилиндра, l — его длина). На рис. 4 приведена зависимость $\rho^{(n)}/|q|^2$ от θ_0 , где $0 < \theta_0 < \pi/2$, $q = \beta^2 \beta_i^2$. Как видно из графика, для всех рассматриваемых углов $\rho^{(n)} < 2|q|^2$. На рис. 5 приведен расчет величины ρ для разных θ и q , где $|q|$ принимает значения в интервале $(-1, 1)$ ($q = 0$ соответствует отсутствию паразитной поляризации в падающем поле). В случае однопозиционной системы $\beta_i = -\beta$ и $q = -\beta^2$.

Следует отметить, что значения $q < 0$ отвечают линейно поляризованному падающему полю ($\beta = b$ — действительно, так как между составляющими основной и паразитной поляризаций падающего поля нет

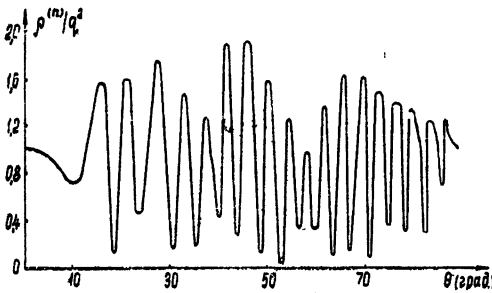


Рис. 4. Зависимость $\rho^{(n)}/|q|^2$ для цилиндра от угла рассеяния θ_0 ($ka = 6$, $kl = 48$).

сдвига фаз). Если же передающая антенна эллиптически поляризована и направление главной оси поляризационного эллипса совпадает с направлением вектора E основной поляризации падающего поля, то $\beta = ib$, так как любую эллиптически поляризованную плоскую волну можно разложить на две линейно поляризованные по осям поляризационного эллипса плоские волны, сдвинутые по фазе на $\pi/2$. В этом случае $q = b^2$ и, следовательно, значениям $q > 0$ соответствует эллиптическая поляризация падающего поля.

На рис. 6 показана зависимость ρ от θ_0 для разных значений q . Сплошные линии относятся к линейно поляризованному, а пунктирные — к эллиптически поляризованному падающему полю. Как видно из графика, в случае линейной поляризации $0,2 < \rho \leq 1$, т. е. рассеянная мощность при двух синфазных компонентах падающего поля больше, чем в случае, когда в падающем поле имеется лишь основная поляризация. В случае же эллиптической поляризации мы имеем противоположный результат: $\rho > 1$ и для углов θ_0 , близких к 0 и $\pi/2$, и при q , близких к единице, может достигать больших значений. Это и понятно, так как компоненты падающего поля имеют сдвиг фаз, равный $\pi/2$, и поэтому P_s может достигать малых значений, в то время как P_s^0 не мало.

На рис. 7 приведены значения ρ для малых q . Из рисунка видно, что даже при $|q| \sim 0,1$, т. е. когда амплитуда паразитной поляризации падающего поля составляет около 30% амплитуды основной поляризации ($b = 0,3$), рассеянная мощность увеличивается за счет паразитной поляризации не более, чем на 20%. Если же $|q| < 0,01$, т. е. $b < 0,1$, то

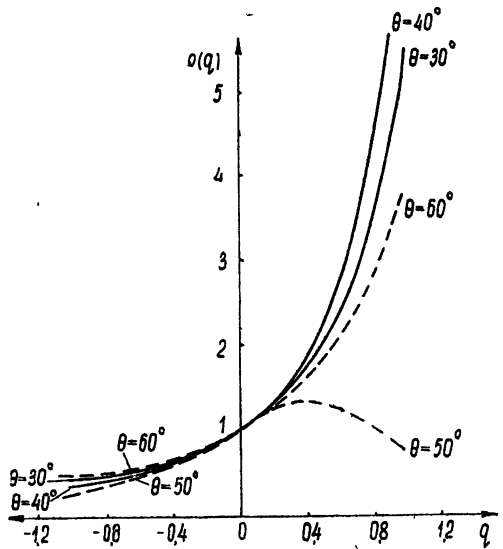


Рис. 5. Зависимость функции ρ для цилиндра от параметра паразитной поляризации q при различных углах рассеяния θ ($ka = 6$, $kl = 48$).

влияние паразитной поляризации менее двух процентов для всех $0 < \theta_0 < \pi/2$. При очень малых q из формул (24) и (25) получаем

$$\rho = 1 + 2q\sqrt{\rho^{(n)}} \cos \nu, \quad (26)$$

где

$$\nu = \arg [\Sigma(\theta_0, \theta_0) / \bar{\Sigma}(\theta_0, \theta_0)].$$

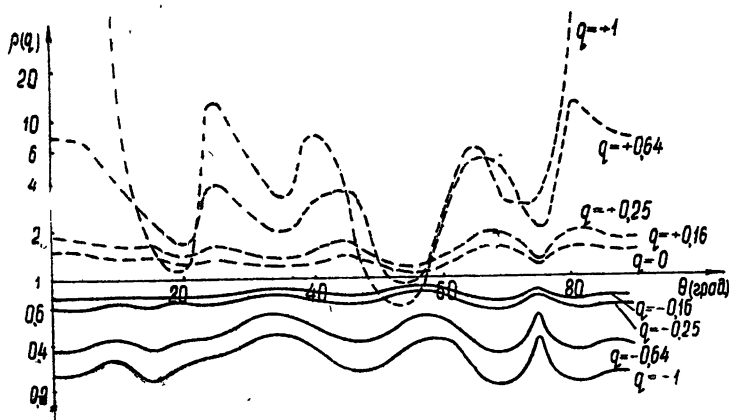


Рис. 6. Зависимость функции ρ для цилиндра от угла рассеяния θ_0 при различных значениях q ($ka = 6$, $kl = 48$).

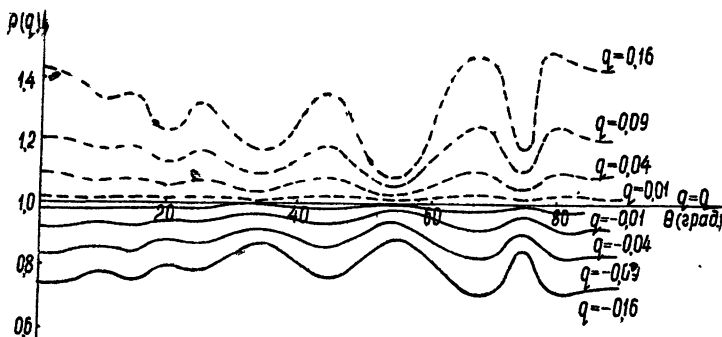


Рис. 7. Зависимость функции ρ для цилиндра от угла рассеяния θ_0 при различных значениях q ($ka = 6$, $kl = 48$).

Так как $\rho^{(n)} < 2$, то $\rho < 1 + 3q$. Эта формула хорошо согласуется с данными более строгого расчета и справедлива уже для $q < 0,1$.

Проведенный анализ позволяет прийти к выводу, что при исследовании рассеивающих свойств шара и цилиндра в случае однопозиционной измерительной системы, собранной на линзовой антенне, для которой, как показали экспериментальные исследования, модуль коэффициента паразитной поляризации $b < 0,01$, т. е. $|q| < 10^{-4}$, влиянием паразитной поляризации можно пренебречь, так как погрешность, которую она вносит в измерение рассеянной мощности, составляет сотые доли процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Р. Менцер, Дифракция и рассеяние радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1958.
2. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, изд. Сов. радио, М., 1962.
3. М. Д. Хаскинд, Тр. учебных институтов связи, № 22, 13 (1964).
4. Г. В. Поддубный, Тр. учебных институтов связи, № 22, 24 (1964).
5. Г. В. Поддубный, Изв. высш. уч. зав.—Математика, 8, 130 (1965).

Одесский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
23 ноября 1965 г.,
после переработки
23 мая 1966 г.

INFLUENCE OF SPURIOUS POLARIZATION IN AN INCIDENT FIELD
ON FIELDS SCATTERED BY PERFECTLY CONDUCTING SPHERE
AND FINITE CYLINDER

G. V. Poddubny

Formulae have been derived permitting to account the influence of a spurious polarization in an incident field on the fields scattered by the perfectly conducting sphere and finite cylinder.

УДК 621.385.61

К ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СВЧ ПРИБОРОВ О-ТИПА*

В. С. Андрушкевич, Г. А. Козлов, Д. И. Трубецков

На основе сформулированного интегрального уравнения в рамках двумерной линейной теории проведен анализ процессов взаимодействия электронов с ВЧ полем в приборах типа *O*. Обнаружен и проанализирован ряд эффектов, обусловленных динамическим поперечным движением электронов и не имеющих места при решении задачи в рамках одномерной модели.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство работ по линейному анализу СВЧ приборов *O*-типа, как известно, ограничивается рассмотрением одномерной модели движения электронов.

Несомненный интерес представляет развитие двумерной теории, учитывающей влияние поперечных компонент ВЧ поля и поперечных смещений электронов на процесс взаимодействия, поскольку это позволит более четко определить границы применимости одномерной модели и проанализировать случаи, в которых одномерная модель оказывается непригодной.

Попытка построения такого рода двумерной теории предпринималась рядом авторов [1-8]; однако анализ, как правило, ограничивался составлением дисперсионного уравнения и решением его для частных случаев. Рассмотрение общего случая, насколько известно, нигде не доведено до расчета основных характеристик приборов. Кроме того, эти работы характеризуются различными подходами и методами решения задачи [1, 2, 8], [3], [5-7], а иногда и использованием довольно искусственных приемов [4]. Это в известной мере затрудняет как получение цельной картины взаимодействия пучка с ВЧ полем, так и анализ полученных частных результатов.

Как представляется, наиболее последовательный и строгий подход к этому вопросу может быть осуществлен путем использования электродинамической теории возбуждения волноводов электронными потоками, предложенной А. В. Гапоновым [9]. Попытке такого рода рассмотрения и посвящена настоящая работа.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Анализируемая схема представлена на рис. 1. Тонкий электронный пучок, находящийся в однородном магнитном поле $B = B_z = \text{const}$ направлен вдоль положительного направления оси z . В отсутствие высокочастотных полей электроны движутся с постоянной скоростью v_0 .

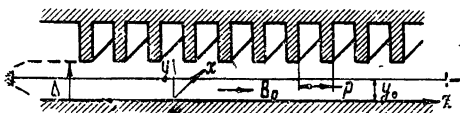


Рис. 1.

* Основные результаты работы доложены на 1-м Всесоюзном семинаре по колебаниям в электронных потоках, Ленинград, декабрь, 1965 г.

Рассматривается взаимодействие пучка с полем плоской замедляющей системы*, компоненты собственного электрического поля которой для случая прямой волны имеют вид

$$E_{sz}^+ = E_0 \operatorname{sh}(\beta y) \exp(-jh_0 z), \quad E_{sy}^+ = jE_0 \operatorname{ch}(\beta y) \exp(-jh_0 z), \quad (1)$$

$$E_{sx}^+ = 0, \quad \beta = (h_0^2 - k^2)^{1/2} \simeq h_0 \quad (v_\phi/c \ll 1).$$

Задача решается в рамках линейной теории, а также в пренебрежении влиянием пространственного заряда и ВЧ магнитного поля.

В качестве исходных уравнений используются уравнение движения электронов

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}}{dt^2} = \eta \mathbf{E} + \eta \left[\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \mathbf{B} \right] \quad (2)$$

и уравнение возбуждения линии передачи непрямолинейным электронным потоком [9]

$$\mathbf{E} = V_s^+ \mathbf{E}_s^+, \quad (3)$$

где

$$V_s^+ = \frac{j\omega I_0}{N_s} \int_0^{\tau_0(z)} \tilde{\mathbf{r}}(\tau) (\mathbf{E}_{s1}^+)^* d\tau, \quad (4)$$

\mathbf{E} — поле, возбуждаемое пучком, $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(\tau) \exp(j\omega t)$ — высокочастотное смещение электрона, $\tau = t - t_1$, t_1 — время влета электрона в пространство взаимодействия, t — текущее время, $\eta = e/m$, I_0 — постоянная составляющая тока пучка, N_s — норма s -ой волны**.

Согласно работе [9],

$$\mathbf{E}_{s1} = \mathbf{E}_s^+ + [v_e \mathbf{B}_s^+].$$

Поскольку в анализируемом случае влияние высокочастотного магнитного поля не учитывается, действующее на электрон поле \mathbf{E}_{s1} , входящее в (4), совпадает с собственным полем системы \mathbf{E}_s .

Переходя от переменной τ к z и используя преобразование Лапласа, запишем решение уравнения движения (2) в интегральной форме***:

$$\tilde{z} = \frac{\eta}{v_e^2} \int_0^z E_z(\xi) (z - \xi) \exp[-j\beta_e(z - \xi)] d\xi, \quad (5)$$

$$\tilde{y} = \frac{\eta}{v_e^2} \int_0^z E_y(\xi) \frac{\sin[\beta_c(z - \xi)]}{\beta_c} \exp[-j\beta_e(z - \xi)] d\xi, \quad (6)$$

где $\beta_e = \omega/v_e$, $\beta_c = \omega_c/v_e$.

Решения (5), (6) получены при граничных условиях

$$\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \frac{d\tilde{x}}{dt}, \frac{d\tilde{y}}{dt}, \frac{d\tilde{z}}{dt} \right)_{z=0} = 0.$$

* Проводимый ниже анализ может быть также легко распространен на случай цилиндрических замедляющих систем с осевой симметрией.

** Запись (3) соответствует пренебрежению влиянием обратного излучения и учету лишь одной собственной волны системы, фазовая скорость которой близка к скорости электронов v_e .

*** Поскольку рассматривается двумерная задача ($E_x = 0$), высокочастотное возмущение \tilde{x} на процесс взаимодействия не влияет.

Согласно (3) и (4), компоненты искомого поля при переходе от независимой переменной τ к z примут вид

$$E_z = -\frac{h_0^2 K I_0}{2} \operatorname{sh}(h_0 y_0) \exp(-jh_0 z) \int_0^z [j\beta_e \operatorname{sh}(h_0 y_0) \tilde{z}(\xi) + \beta_e \operatorname{ch}(h_0 y_0) \tilde{y}(\xi)] \exp(jh_0 \xi) d\xi, \quad (7)$$

$$E_y = -\frac{jh_0^2 K I_0}{2} \operatorname{ch}(h_0 y_0) \exp(-jh_0 z) \int_0^z [j\beta_e \operatorname{sh}(h_0 y_0) \tilde{z}(\xi) + \beta_e \operatorname{ch}(h_0 y_0) \tilde{y}(\xi)] \exp(jh_0 \xi) d\xi, \quad (8)$$

где K — сопротивление связи.

Как видно из (7) и (8), между E_z и E_y существует простая линейная связь

$$E_y = j \operatorname{cth}(h_0 y_0) E_z. \quad (9)$$

Это позволяет использовать лишь одну компоненту поля (например, E_z).

Подставляя (5) и (6) в (7) с учетом (9) и добавляя к возбуждаемому полю «холодное» поле входного сигнала, получим следующее интегральное уравнение для z -компоненты искомого поля:

$$\begin{aligned} \bar{E}_z = E_{0z} \operatorname{sh}(h_0 y_0) \exp(-jh_0 z) - h_0^2 C^3 \operatorname{sh}^2(h_0 y_0) \exp(-jh_0 z) \times \\ \times \left\{ j\beta_e \int_0^z \exp[j(h_0 - \beta_e)\xi] \int_0^\xi \bar{E}_z(\bar{z})(\xi - \bar{z}) \exp(j\beta_e \bar{z}) d\bar{z} d\xi + \right. \\ \left. + j\beta_e \operatorname{cth}^2(h_0 y_0) \int_0^z \exp[j(h_0 - \beta_e)\xi] \int_0^\xi \bar{E}_z(\bar{z}) \sin[\beta_c(\xi - \bar{z})] \beta_c^{-1} \exp(j\beta_e \bar{z}) d\bar{z} d\xi \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где C — параметр усиления ($C^3 = I_0 K_0 / 4V_0$), K_0 — сопротивление связи на поверхности замедляющей системы $\left(K_0 = (E_{sz}^+ E_{sz}^*)_{y=1} \frac{1}{2} h_0^{-2} P_s^{-1} \right)$,

E_{0z} — амплитуда поля входного сигнала.

Как представляется авторам, интегральное уравнение (10) весьма удобно при решении задачи методом дисперсионного уравнения, поскольку из (10) непосредственно можно получить не только дисперсионное уравнение, но и систему уравнений для определения амплитуд парциальных волн. Преимущества интегральной записи (10) в случае решения задачи методом последовательных приближений [11] бесспорны: решение сводится к циклическому интегрированию «заданных» элементарных функций.

Подставляя в соотношение (10) решение в виде

$$E_z(z) = \sum_{i=1}^n E_i(0) \exp(-jh_i z), \quad (11)$$

где $E_i(0)$ — амплитуда i -ой парциальной волны, h_i — искомая постоянная распространения i -ой парциальной волны, проводя интегрирование и приравнявая коэффициенты в правой и левой частях полученного уравнения при членах вида $\exp(-jh_i z)$, легко получить дисперсионное уравнение пятой степени для определения искомого h_i .

Система уравнений для определения амплитуд $E_i(0)$ парциальных волн может быть получена путем приравнивания коэффициентов при экспонентах с показателями, не равными $(-jh_i z)$.

Поскольку для алгебраического уравнения 5-й степени алгоритма не существует, большинство авторов [1-8] ограничивается рассмотрением ряда частных случаев, когда удается понизить степень дисперсионного уравнения. Сравнительно наиболее изученным [2, 5, 6, 8] является случай «чисто поперечного» поля, которому соответствует дисперсионное уравнение третьей степени.

Ниже дано общее аналитическое рассмотрение задачи на основе метода последовательных приближений.

2. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ЛБВ

Подставляя в правую часть уравнения (10) в качестве нулевого приближения соотношения (1) и проводя интегрирование, получим в первом приближении выражение для компоненты искомого поля:

$$E_z(z) = E_{0z} \operatorname{sh}(h_0 y_0) \exp(-j h_0 z) + E_1(z) + E_2(z), \quad (12)$$

где

$$E_1(z) = -E_{0z} \operatorname{sh}^3(h_0 y_0) \exp(-j h_0 z) (2\pi C N)^3 (h_0/\beta_e)^2 [2(1 - \exp(-j \Phi_0)) - j \Phi_0 (1 + \exp(-j \Phi_0)) \Phi_0^{-3}], \quad (13)$$

$$E_2(z) = E_{0z} \operatorname{sh}(h_0 y_0) \operatorname{cth}^2(h_0 y_0) \exp(-j h_0 z) (2\pi C N)^3 (h_0/\beta_e)^3 \times \left[\frac{\exp[-j(\Phi_0 - \varphi_c)] - 1}{2\varphi_c(\Phi_0 - \varphi_c)^2} - \frac{\exp[-j(\Phi_0 + \varphi_c)] - 1}{2\varphi_c(\Phi_0 + \varphi_c)^2} + \frac{j}{\Phi_0^2 - \varphi_c^2} \right], \quad (14)$$

$$\Phi_0 = (\beta_e - h_0) z, \quad \varphi_c = \beta_c z.$$

Согласно (12), возбужденное пучком поле (в рамках первого приближения) складывается из двух частей. Первая часть $E_1(z)$, определяемая соотношением (13), соответствует [10] ЛБВ с бесконечным фокусирующим магнитным полем, а вторая часть $E_2(z)$ обусловлена влиянием поперечной компоненты ВЧ поля и поперечным движением электронов*.

Из выражений (12) — (14) следует, что в зависимости от положения пучка относительно замедляющей системы существенно меняется вклад в процесс взаимодействия продольной и поперечной компонент ВЧ поля. Так при $y_0 \rightarrow 0$ продольное взаимодействие становится пренебрежимо малым и остается лишь поле E_2 , обусловленное поперечной компонентой ВЧ поля (лампа с «чисто поперечным» полем)**. При приближении пучка к поверхности замедляющей системы влияние продольной компоненты поля резко возрастает.

Интересно отметить, что влияние компоненты E_y имеет место, в принципе, при любом положении пучка.

Из соотношения (12) нетрудно вычислить коэффициент усиления ЛБВ с учетом конечной величины фокусирующего магнитного поля по формуле $G = 20 \lg |\bar{E}(l)/E_{0z}|$. На рис. 2 приведены кривые усиления в зависимости от величины Φ_0 при различных значениях φ_c .

Как видно из кривых, коэффициент усиления ЛБВ возрастает с уменьшением величины φ_c . Это можно пояснить следующим образом. Как нетрудно заметить из соотношений (13) и (14), возбужденное поле в ЛБВ с конечным фокусирующим магнитным полем в рамках первого приближения формально можно представить в виде суммы возбужден-

* Нетрудно показать, что такого рода разделение продольных и поперечных эффектов имеет место только в рамках первого приближения.

** Следует отметить, что рассмотрение лампы с «чисто поперечным» полем на примере широко известной гребенчатой замедляющей системы носит здесь, в основном, методический характер.

ных полей ЛБВ с бесконечным фокусирующим магнитным полем (лампа с «чисто продольным» полем) и лампы с «чисто поперечным» полем. Таким образом, увеличение усиления можно связать с вкладом, вносимым во взаимодействие эквивалентной лампой с «чисто поперечным» полем. В частности, при $\varphi_c \rightarrow 0$ выражения в квадратных скобках соотношений (13) и (14) совпадают и имеет место наибольшее увеличение усиления.

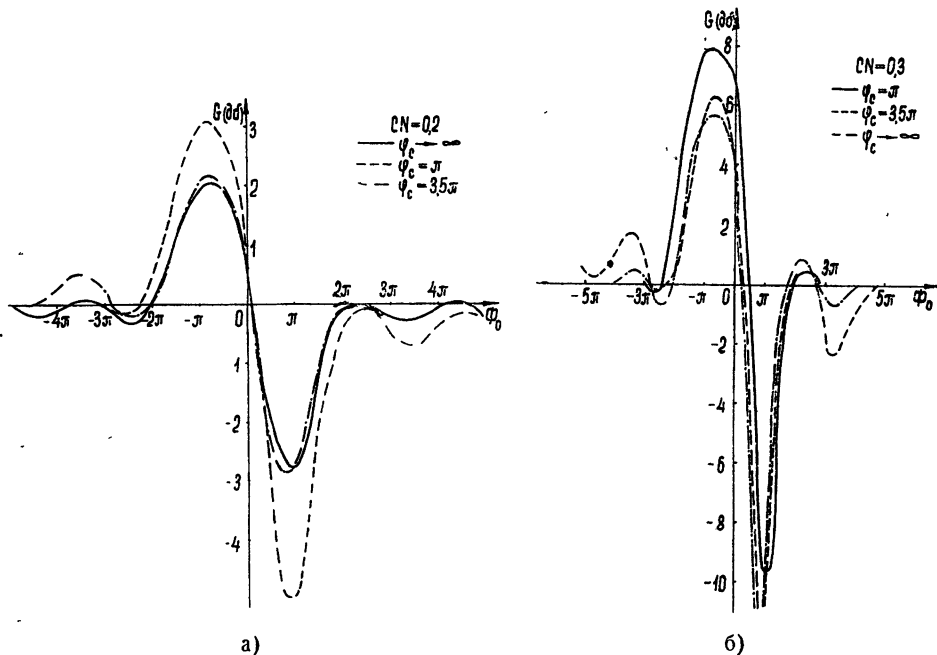


Рис. 2.

Как было показано в работе [7] и как это нетрудно заметить из формулы (14), при выполнении условия $\Phi_0 = \pm \varphi_c$ (или $h_0 = \beta_e \mp \beta_c$) должны иметь место резонансные эффекты, что иллюстрируется зависимостями, приведенными на рис. 2.

При больших значениях φ_c ($\varphi_c \gg 1$), что и имеет место в реальных конструкциях ламп, эффекты, связанные с поперечным движением электронов, слабо сказываются на характеристиках прибора, что непосредственно видно из формулы (14). С этой точки зрения рассмотренный выше эффект увеличения усиления при слабых магнитных полях (малые φ_c) представляет, в основном, теоретический интерес.

3. ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА С ПОЛЕМ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Можно ожидать, что влияние поперечных движений электронов на процесс взаимодействия будет заметным в случае использования неоднородных замедляющих систем. Это связано с тем, что электронный поток в магнитном поле характеризуется набором собственных волн (синхронная ($h = \beta_e$), медленная циклотронная (МЦВ, $h = \beta_e + \beta_c$) и быстрая циклотронная (БЦВ, $h = \beta_e - \beta_c$) волны). Поэтому при осуществлении синхронизма одной из собственных волн пучка с выбранной пространственной гармоникой поля неоднородной замедляющей системы может одновременно иметь место синхронизм и двух других собственных волн пучка с соответствующими пространственными гармониками поля системы.

В соответствии с работами [11] и [12] можно показать, что первое приближение для полного поля в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{E_z(z)} = \sum_n E_n \operatorname{sh}(h_n y_0) \exp(-j h_n z) \left\{ 1 - (2\pi C_n N)^3 (h_n/\beta_e)^2 \operatorname{sh}^2(h_n y_0) \times \right. \\ \times \left\langle 2[1 - \exp(-j(\beta_e - h_n)z)] - j(\beta_e - h_n)z[1 + \exp(-j(\beta_e - h_n)z)](\beta_e - h_n)^{-3} z^{-3} - \right. \\ \left. - \operatorname{cth}^2(h_n y_0) (h_n/\beta_e)^3 \left(\frac{\exp[-j(\beta_e - h_n - \beta_c)z] - 1}{2\beta_c(\beta_e - h_n - \beta_c)^2 z^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\exp[-j(\beta_e - h_n + \beta_c)z] - 1}{2\beta_c(\beta_e - h_n + \beta_c)^2 z^3} + j[(\beta_e - h_n)^2 - \beta_c^2]^{-1} z^{-2} \right) \right\rangle \left. \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где E_n — амплитуда n -ой пространственной гармоники поля системы; $h_n = h_0 + (2\pi/p)n$ — постоянная распространения n -ой пространственной гармоники; p — период замедляющей системы; $n = 0 \pm 1; \pm 2; \dots$; $C_n^3 = I_0 K_n / 4V_0$; K_n — сопротивление связи n -ой пространственной гармоники.

Рассмотрим для иллюстрации ряд частных случаев.

При условии $h_0 = \beta_e$, соответствующем точному синхронизму синхронной волны электронного потока с нулевой пространственной гармоникой поля, из соотношения (15) видно, что в случае $2\pi n/p = \pm \beta_c (|n| \geq 1)$ одновременно с взаимодействием электронов с нулевой гармоникой имеет место взаимодействие с $+n$ и $-n$ гармониками поля.

Условие $2\pi n/p = \beta_c (h_{+n} = \beta_e + \beta_c)$ соответствует точному равенству фазовых скоростей прямой n -ой пространственной гармоники и медленной циклотронной волны пучка, а условие $2\pi n/p = -\beta_c (h_{-n} = \beta_e - \beta_c)$ — равенству фазовых скоростей обратной n -ой пространственной гармоники и обратной быстрой циклотронной волны ($\beta_c > \beta_e$). Сохраняя в выражении (15) только «резонансные» слагаемые и выделяя возбужденное поле, для наиболее интересного случая $n = \pm 1$ с использованием соответствующих выражений для сопротивления связи и амплитуд пространственных гармоник поля [8] получим

$$\begin{aligned} E_z(l) = -E_0 \operatorname{sh}^3(\beta_e y_0) \exp(-2j\pi N) (2\pi C_0 N)^3 \times \\ \times \left\{ \frac{1}{3!} - \frac{\operatorname{sh}[(\beta_e + \beta_c)y_0] \operatorname{ch}^2[(\beta_e + \beta_c)y_0] \operatorname{sh}(\beta_e \Delta)}{\operatorname{sh}^3(\beta_e y_0) \operatorname{sh}[(\beta_e + \beta_c)\Delta]} \left(\frac{2\pi N}{2\pi N + \varphi_c} \right)^4 \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{4\varphi_c} - \frac{j}{4\varphi_c^2} \right] \exp(-j\varphi_c) - \frac{\operatorname{sh}[(\beta_e - \beta_c)y_0] \operatorname{ch}^2[(\beta_e - \beta_c)y_0] \operatorname{sh}(\beta_e \Delta)}{\operatorname{sh}^3(\beta_e y_0) \operatorname{sh}[(\beta_e - \beta_c)\Delta]} \times \\ \left. \times \left(\frac{2\pi N}{2\pi N - \varphi_c} \right)^4 \left[\frac{1}{4\varphi_c} + \frac{j}{4\varphi_c^2} \right] \exp(j\varphi_c) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что при реальных магнитных полях второе и третье слагаемые сравнимы по величине и пренебрежимо малы по сравнению с первым. Однако в случае лампы с «чисто поперечным» полем возбужденное поле описывается только этими слагаемыми, и учет взаимодействия электронов с несколькими гармониками необходим.

При осуществлении усиления на $+1$ -ой пространственной гармонике поля (случай, имеющий практический интерес в миллиметровом диапазоне длин волн) из формулы (15) следует, что, если $h_{+1} = h_0 + 2\pi/p = \beta_e$, при $2\pi/p = \pm \beta_c$ возможно одновременное взаимодействие с нулевой и $+2$ -ой пространственными гармониками, причем $h_0 = \beta_e - \beta_c$, $h_{+2} = \beta_e + \beta_c$ ($\beta_e > \beta_c$). В результате

$$\begin{aligned} \overline{E_z(l)} = & E_{+1} \operatorname{sh}(\beta_e y_0) \exp(-j\beta_e l) \left\{ 1 - (2\pi C_{+1} N)^3 \operatorname{sh}^2(\beta_e y_0) \frac{1}{3!} \right\} + \\ & + E_0 \operatorname{sh}[(\beta_e - \beta_c) y_0] \exp[-j(\beta_e - \beta_c) l] \left\{ 1 + (2\pi C_0 N)^3 \operatorname{ch}^2[(\beta_e - \beta_c) y_0] \times \right. \\ & \times \left(\frac{\beta_e - \beta_c}{\beta_e} \right)^3 \left[\frac{1}{4\varphi_c} - \frac{j}{4\varphi_c^2} \right] \left. \right\} + E_{+2} \operatorname{sh}[(\beta_e + \beta_c) y_0] \exp[-j(\beta_e + \beta_c) l] \times \\ & \times \left\{ 1 - (2\pi C_{+2} N)^3 \operatorname{ch}^2[(\beta_e + \beta_c) y_0] \left(\frac{\beta_e + \beta_c}{\beta_e} \right)^3 \left[\frac{1}{4\varphi_c} + \frac{j}{4\varphi_c^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Первое и второе слагаемые в последней формуле, соответствующие возбужденному полю, могут оказаться сравнимыми по величине. Так как второе слагаемое содержит множитель $\exp(j\beta_c l)$, его вклад во взаимодействие будет различным в зависимости от величины $\beta_c l$.

Интересно отметить, что в случае лампы с «чисто поперечным» полем при синхронизме +2-ой пространственной гармоники поля с медленной циклотронной волной пучка (в выражении (17) остаются второе и третье слагаемые) превалирующим будет не третье, а второе слагаемое, которое соответствует синхронизму нулевой пространственной гармоники поля с быстрой циклотронной волной пучка. Поэтому вместо ожидаемого эффекта усиления на +2-ой гармонике будет иметь место подавление сигнала на нулевой гармонике.

4. РАСЧЕТ ПУСКОВЫХ УСЛОВИЙ ЛОВ

В работе [10] показано, что в пренебрежении обратным излучением формулы возбуждения прямой волны в линии передачи могут быть использованы для описания взаимодействия электронного потока с обратной электромагнитной волной, если формально изменить знак потока мощности (или сопротивления связи) на противоположный. Поэтому для анализа пусковых условий генератора обратной волны можно воспользоваться формулой (12), считая в ней $C^3 < 0^*$.

Пусковые характеристики генератора определяются из условия

$$\overline{E_z(l)} = 0. \quad (18)$$

Результаты решения уравнения (18) представлены на рис. 3 и 4**. Как видно из рис. 3, $CN_{\text{пуск}}$ сильно зависит от величины магнитного поля лишь при слабых магнитных полях (малые φ_c). При реальных значениях магнитного поля функция $CN_{\text{пуск}}(\varphi_c)$ стремится к постоянному пределу, равному 0,314, т. е. к значению

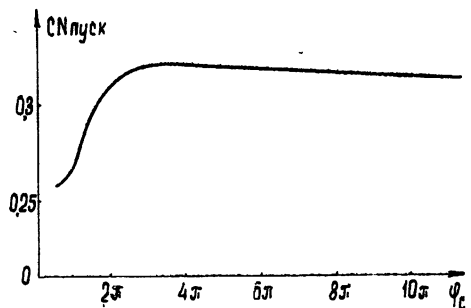


Рис. 3.

* Следует отметить, что подобно рассмотренному выше случаю усиления на прямой волне в генераторе на обратной волне могут также наблюдаться эффекты одновременного взаимодействия пучка с несколькими пространственными гармониками поля замедляющей системы. Мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе и лишь отметим, что при синхронизме пучка с минус первой пространственной гармоникой поля может иметь место одновременное взаимодействие пучка с нулевой и минус второй пространственными гармониками.

** Приведенные зависимости могут быть использованы для определения условий полного подавления входного сигнала в ЛБВ при изменении магнитного поля. При этом $CN_{\text{пуск}} = CN_{\text{подавления}}$; $\Phi_0 \text{ пуск} = -\Phi_0 \text{ подавления}$.

$SN_{\text{пуск}}$, следующему из одномерной теории ЛОВ [13]. Более сильно изменение магнитного поля влияет на величину относительного угла пролета электронов и волны Φ_0 пуск, соответствующего пусковому режиму генератора. Это влияние заметно и при реальных значениях величины магнитного поля (рис. 4). Последнее немаловажно, поскольку Φ_0 пуск непосредственно связано с частотой колебаний ЛОВ.

К современным генераторам типа ЛОВ представляются достаточно высокие требования в отношении стабильности частоты колебаний при фиксированном режиме работы прибора. В ряде случаев кратковременный относительный «уход» частоты не должен превышать величину $\Delta\omega/\omega_0 \leq 10^{-8}$, а длительный — $\Delta\omega/\omega_0 \leq 10^{-7}$. Полученная выше зависимость Φ_0 пуск = $f(\varphi_c)$ позволяет провести оценку величины относи-

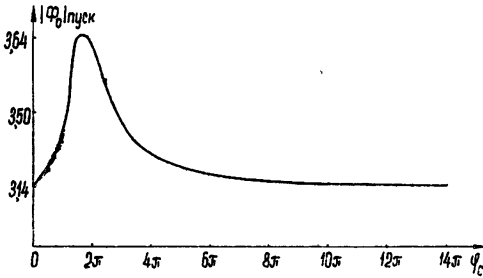


Рис. 4.

тельного «ухода» частоты с изменением магнитного поля.

Для определенности рассмотрим ЛОВ с однорядной встречно-штыревой замедляющей системой, дисперсионную характеристику которой можно приближенно представить следующим соотношением (кривая 3 рис. 4, 3 из работы [13]):

$$c/v_\phi = 4,3\lambda - 12, \quad (19)$$

где λ — длина волны в см. С учетом формулы (19) выражение для относительного угла пролета электронов и волны можно представить в виде

$$\Phi_0 = \frac{\omega}{v_e} \left[1 - v_e \left(4,3 \frac{2\pi}{\omega} - \frac{12}{c} \right) \right] l. \quad (20)$$

Аппроксимация пологого участка кривой Φ_0 пуск = $f(\varphi_c)$ (рис. 4) приводит к формуле

$$|\Phi_0 \text{ пуск}| = \pi + \frac{0,43}{\varphi_c - 7,7}. \quad (21)$$

Приравнявая (20) и (21), получим

$$\omega = [\pi(1 + 9,6l) + 0,43(\varphi_c - 7,7)^{-1} [v_e^{-1} + 12c^{-1}]l]^{-1}. \quad (22)$$

Рассмотрим конкретный случай: $l = 12,5$ см, $V_0 = 320$ в, $B = 400$ гс ($\varphi_c = 28\pi$). Тогда

$$\Delta\omega/\omega_0 = - \frac{87,9 - \varphi_c}{\varphi_c - 7,7} 1,6 \cdot 10^{-5}, \quad (23)$$

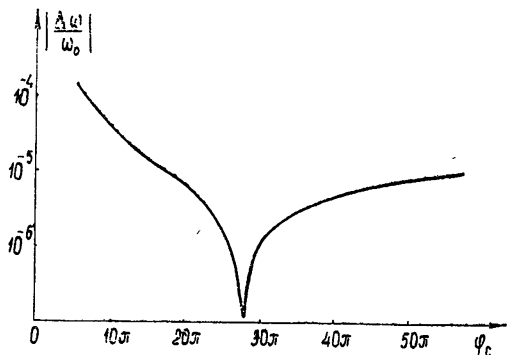


Рис 5.

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, ω_0 рассчитана по формуле (22) для указанных значений l , V_0 и B . Результаты расчета величины $\Delta\omega/\omega_0 = f(\varphi_c)$ представлены на рис. 5. Как видно из приведенного рисунка, при достаточно вы-

соких требованиях, предъявляемых к постоянству частоты колебаний в ЛОВ, необходимо обращать внимание не только на высокую стабильность источников питания, но и на стабильность величины напряженности фокусирующего магнитного поля.

ВЫВОДЫ

1. Сформулированы интегральные уравнения, описывающие процессы в приборах O -типа в рамках двумерной линейной теории.

2. Проведен расчет коэффициента усиления ЛБВ с конечным фокусирующим магнитным полем. Показано, что увеличение усиления (по сравнению со случаем ЛБВ с бесконечным фокусирующим магнитным полем) имеет место лишь при слабых магнитных полях.

3. Показано, что наличие динамических поперечных движений электронов позволяет осуществить одновременное взаимодействие электронного пучка с несколькими пространственными гармониками поля неоднородной замедляющей системы, причем в ряде случаев это может привести даже к изменению самого характера взаимодействия.

4. Проведен расчет пусковых характеристик ЛОВ при конечном значении фокусирующего магнитного поля. Показано, что изменение величины фокусирующего магнитного поля сравнительно слабо влияет на пусковой ток и в значительно большей мере — на частоту колебаний ЛОВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лампы с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952, глава 13; J. Pierce. BSTJ, 27, 732 (1948).
2. H. G. Kosmull, IRE Trans., ED-5, 252 (1958).
3. O. Doehler, W. Kleen, Ann. Radioelectricite, 4, 76, 117 (1949).
4. П. В. Блюх, М. И. Каганов, Радиотехника и электроника, 3, 1172 (1958).
5. A. E. Siegman, J. Appl. Phys., 31, 17 (1960).
6. C. S. Johnson, IRE Trans., ED-9, 288 (1962).
7. У. Люиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, ИЛ, М., 1963, гл. 2 и приложение.
8. R. Hutter, Beam and wave electronics in microwave tubes, New York, 1960, p. 230, 292.
9. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 443 (1959).
10. В. Н. Шевчик, Взаимодействие электронных пучков с электромагнитными волнами, изд. Саратовского университета, 1963.
11. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2340 (1957).
12. Г. Н. Рапопорт, В. Е. Чайка, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 7, 58 (1964).
13. Ю. Г. Альшулер, А. С. Татаренко, Лампы малой мощности с обратной волной, изд. Сов. радио, М., 1963.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
21 января 1966 г.

ON TWO-DIMENSIONAL LINEAR THEORY OF UHF „O“-TYPE DEVICES

V. S. Androushkevich, G. A. Kozlov, D. I. Troubetskov

On the basis of integral equation formulated in the frames of two-dimensional linear theory, the analysis has been made of the processes of electron interaction with HF field in „O“-type devices. A number of effects has been found and examined which were caused by the dynamic transverse motion of electrons and did not take place in unidimensional solution.

УДК 621.385.64

СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МАГНЕТРОНЕ II. РЕЖИМ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

В. И. Вигдорчик, В. М. Конторович

Изучено дисперсионное уравнение магнетрона, полученное в работе авторов [1], найдены условия стационарности и области существования установившихся колебаний. Показана возможность затягивания колебаний в область докритических магнитных полей. Исследован на устойчивость режим установившихся колебаний и найдена зависимость амплитуды стационарных колебаний от магнитного поля и анодного напряжения. Время стабилизации неустойчивости оказывается меньше времени группировки электронов по скоростям.

1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

Как уже обсуждалось в работе [1], нелинейный механизм сжатия электронного облака высокочастотным полем способен ограничивать нарастание колебаний в неустойчивой системе, которую представляет собой бриллюэновский поток в магнетроне с поверхностной волной [2, 3]. Неустойчивость статического режима, для которого $P = 0$, означает, что $\text{Im } \omega(0) > 0^*$. Инкремент нарастания колебаний $\text{Im } \omega$ вблизи усредненных по периоду колебаний траекторий электронов является функцией амплитуды: $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega(P)$. По мере роста амплитуды усредненный режим все больше отклоняется от статического. Уменьшение положительной обратной связи, происходящее из-за выталкивания электронов из области более сильного поля, приводит к уменьшению инкремента $\text{Im } \omega(P)$. При некотором значении амплитуды $P = P_s$ инкремент обращается в нуль и возможно установление стационарного режима, в котором колебания происходят с постоянной, не зависящей от времени амплитудой.

В работе [1] было получено дисперсионное уравнение, описывающее колебания бриллюэновского облака в цилиндрическом магнетроне вблизи стационарного режима. При этом, аналогично [3], внутри пучка учитывалась только вращающаяся поверхностная волна, поле в которой пропорционально $r^{l-1} \exp[i(\gamma\varphi - \omega t)]$ и $\gamma \gg 1$. Кроме того, принималось во внимание взаимодействие пучка только с одной резонансной гармоникой поля, угловая фазовая скорость которой близка к угловой скорости электронов на границе облака. Как показано в работе [1], коэффициенты дисперсионного уравнения (3.16) [1] зависят от амплитуды колебаний через эффективную плазменную частоту $\tilde{\Omega}_p^2$ (3.11) [1] и безразмерный усредненный радиус $R = r_0/r_a$ электронного облака (см.

* Величину P , которая определена в формуле (2.15) работы [1] и представляет собой безразмерный квадрат амплитуды колебаний, будем для краткости также называть амплитудой.

(3.15). [1]). (Здесь и ниже мы употребляем обозначения работы [1], кроме отдельных случаев, оговариваемых особо. Исходные формулы для удобства приведены в Приложении 1*.)

Для исследования стационарного режима рассмотрим дисперсионное уравнение (1.П) в случае достаточно малых амплитуд (см. неравенство (5.П)), когда эффективная плазменная частота $\tilde{\Omega}_p$ (3.П) не зависит явно от P . Будем также считать, что радиус катода значительно меньше радиуса электронного облака («тонкий катод»):

$$r_k^2/r_0^2 \equiv \sigma^2/R^2 \ll 1/\gamma. \quad (1.1)$$

В этих предположениях параметр рассинхронизации Γ (2.П) и плазменная частота Ω_p (3.П) не зависят от R и имеют простой вид:

$$\Gamma = \gamma\Omega_L - 1, \quad \Omega_p^2 = 2\Omega_L^2,$$

где $\Omega_L = \omega_L/\omega_0$ — безразмерная ларморовская частота. Соответственно упрощается и дисперсионное уравнение (1.П) для относительного сдвига частоты $X = (\omega - \omega_0)/\omega_0$:

$$X(X - \Gamma)^2 = \Omega_L^2 [X(1 + R^{2\gamma}) + gR^{2\gamma}]. \quad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что от амплитуды колебаний $P = e^2 |pr_0^{-1}|^2 / m\omega_0^2 r_a^2$ (см. (2.15), [1]) на границе облака зависит только величина $R^{2\gamma}$. Зависимость $R(P)$ (см. (4.П)) в приближении тонкого катода можно в довольно широких пределах, определяемых условием (6.П), представить в виде

$$\zeta^2 - R^2(1 - \ln R^2) = P\Omega_L^{-2} |X - \Gamma|^{-2} R^{-2}(1 - \ln R^{2\gamma} - \Omega_L^2 |X - \Gamma|^{-2}). \quad (1.3)$$

Здесь $1/\zeta = H/H_k$ — приведенное магнитное поле,

$$H_k(V) = \frac{2c}{r_a} (2mV/|e|)^{1/2}$$

— критическое поле, V — анодное напряжение.

Условие стационарности колебаний, соответствующее обращению в нуль мнимой части частоты, может быть представлено в виде равенства нулю дискриминанта дисперсионного уравнения (1.2), являющегося алгебраическим уравнением третьей степени относительно смещения частоты X . После простых преобразований это условие можно записать в виде $R = R_s(H)$, где функция $R_s(H)$ определяется трансцендентным уравнением

$$27 |G| R_s^{2\gamma} = 2 [(\Gamma_1^2 + 3)^{3/2} + \Gamma_1(\Gamma_1^2 - 9) \operatorname{sgn} g], \quad (1.4)$$

$$G = g/\Omega_L(1 + R_s^{2\gamma})^{3/2}, \quad \Gamma_1 = \Gamma/\Omega_L(1 + R_s^{2\gamma}), \quad \Gamma = \gamma\Omega_L - 1.$$

Величину R_s мы будем называть стационарным усредненным радиусом электронного облака.

Решение уравнения (1.2) вблизи стационарного режима имеет вид**

* Ссылки на формулы Приложений мы везде обозначаем буквой П.

** Решение уравнения (1.2) в произвольной точке приведено в Приложении 4,

$$\operatorname{Re} X|_{R=R_s} \equiv \dot{X}_s(H) = [\Omega_L(1 + R_s^{2\gamma})^{1/2}/3] [2\Gamma_1 - (\Gamma_1^2 + 3)^{1/2} \operatorname{sgn} g], \quad (1.5)$$

$$\operatorname{Im} X|_{R=R_s} = \Omega_L(1 + R_s^{2\gamma})^{1/2} [|G|(R_s^{2\gamma} - R_s^{2\gamma})/(\Gamma_1^2 + 3)^{1/2}]^{1/2}.$$

Мнимая часть этого решения существует лишь при $R > R_s$. Это обстоятельство связано с механизмом сжатия электронного облака высокочастотным полем поверхностной волны. Очевидно, что в стационарном режиме усредненный радиус облака (1.4) и смещение частоты (1.5) зависят только от магнитного поля H .

В некоторых предельных случаях решение уравнения (1.2) значительно упрощается. Если относительное смещение частоты достаточно велико ($X \gg |g|R^{-\gamma}$), то дисперсионное уравнение вообще не имеет комплексных корней. В этом случае стационарный колебательный режим с $P \neq 0$ невозможен и, следовательно, область стационарных колебаний ограничена по частоте. Если $X \ll g$ или $R_s^{2\gamma} \ll 1$, то в (1.2) величину $1 + R^{2\gamma}$ можно заменить единицей. Тогда $\Gamma_1 = \Gamma/\Omega_L$, $G = g/\Omega_L$ и функция $R_s(H)$ определяется формулой (1.4) в явном виде.

Наиболее интересен, однако, случай $|X| \sim |g|$, так как в реальных приборах $|g| \sim 1/\gamma$ (см. Приложение 3), а в стационарном режиме, согласно (1.5), $|X| \sim \Omega_L \sim 1/\gamma$. Введенное ниже ограничение $g > g_0$ (см. (1.10)) позволяет весьма просто исследовать поведение $R_s(H)$. При этом условие (1.10) является менее жестким по сравнению с неравенством $|X| \ll g$ и не противоречит соотношению $|g| \sim 1/\gamma$.

Амплитуду колебаний в стационарном режиме $P_s(H, V)$ можно найти из уравнения (1.3), если воспользоваться формулами для $X_s(H)$ и $R_s(H)$ (см. выше):

$$P_s(H, V) = \frac{\zeta^2 - R_s^2(1 - \ln R_s^2)}{1 - \ln R_s^{2\gamma} - \Omega_L^2/(X_s - \Gamma)^2} \Omega_L^2 (X_s - \Gamma)^2. \quad (1.6)$$

Укажем характерные особенности этой функции. Как следует из определения критического магнитного поля, $P_s(H, V)$ является линейной функцией анодного напряжения. Она меняет знак при обращении в нуль числителя:

$$R_s(H) = R_B(H, V), \quad (1.7)$$

где $R_B(H, V)$ — радиус статического бриллюэновского облака, определяемый в случае тонкого катода уравнением

$$\zeta^2 - R_B^2(1 - \ln R_B^2) = 0. \quad (1.7a)$$

Согласно (1.6), P_s обращается в нуль также при $H = H_\gamma$, где

$$H_\gamma = 2mc\omega_0/|e|(\gamma - \operatorname{sgn} g). \quad (1.8)$$

Это имеет место, когда $\Omega_L = (\gamma - \operatorname{sgn} g)^{-1}$, $R_s(H_\gamma) = 0$ и знаменатель в (1.6) логарифмически обращается в бесконечность. Однако в этом случае нарушается приближение тонкого катода (1.1) и модель оказывается не применимой для значений $H \simeq H_\gamma$.

Амплитуда $P_s(H, V)$ обращается в бесконечность, если

$$R_s(H) = R_\infty(H), \quad (1.9)$$

где $R_\infty(H)$ — корень уравнения

$$1 - \ln R_\infty^{2\gamma} - \Omega_L^2/[X_s(R_\infty) - \Gamma]^2 = 0. \quad (1.9a)$$

Исследование функций $R_s(H)$ и $R_\infty(H)$, приведенное в Приложении 2, показывает, что при

$$|g| > g_0 = 1/(2\gamma - \text{sgn } g) \quad (1.10)$$

уравнение (1.9) имеет одно решение $H = H_\infty$. При $|g| < g_0$ это уравнение не имеет решений в интервале $\sigma < R < 1$. Таким образом, если $|g| > g_0$, то амплитуда P_s в точке H_∞ меняет знак, причем $P_s(H) \rightarrow \pm \infty$, когда $H \rightarrow H_\infty \pm 0$. Фактически же рост P_s и, соответственно, интервал изменения магнитного поля ограничены неравенствами (5.11) и (2.14) [1].

В случае $|g| = g_0$ уравнение (1.9) имеет решение

$$H_0 = 2mc\omega_0/|e| \left(\gamma - \frac{1}{2} \text{sgn } g \right), \quad (1.10a)$$

которому соответствует $R_s = R_\infty = 1$. В дальнейшем мы для определенности ограничимся положительными значениями параметра замедляющей системы g , удовлетворяющими условиям (1.10) и (9.П).

Используя полученную зависимость $P_s(H, V)$, можно убедиться, что стационарные колебания вследствие сжатия облака возможны при магнитных полях, меньших критического (режим затягивания [1]). Для этого рассмотрим неравенство

$$R_s + |\xi(R_s)/r_a| < 1, \quad (1.11)$$

где $\xi(R)$ — амплитуда колебаний границы облака (см. (3.8), [1]). Это неравенство означает, что мы исключаем возможность попадания электронов из облака на анод. (В силу (3.9) [1] в разделах 2—4 будем полагать $R_s(H) < 1$.) Подставляя в (1.11) выражение для $\xi(R)$ и используя формулы (2.15) [1] и (1.6), получим условие существования колебаний при $H < H_k(V)$ (условие затягивания) в форме $H_k^*(V) < H < H_k(V)$ или

$$V_k(H) < V < V_k^*(H). \quad (1.11a)$$

Здесь $V_k(H) = m\omega_L^2 r_a^2/2|e|$ — критическое анодное напряжение, $H_k^*(V)$ — эффективное критическое магнитное поле,

$$V_k^*(H) = V_k(H) \left\{ R_s^2 (1 - \ln R_s^2) + (1 - R_s)^2 \left[\frac{(X_s - \Gamma)^2}{\Omega_L^2} (1 - \ln R_s^2) - 1 \right] \right\}$$

— эффективное критическое анодное напряжение, при котором $R_s + |\xi(R_s)/r_a| = 1$. Как показано ниже, для каждого γ существует область на плоскости (H, V) , где условие затягивания (1.11a) выполняется.

2. ОБЛАСТИ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим вначале область неустойчивости статического бриллюэновского режима, границы которой определяются неравенством

$$R_s(H) \leq R_B(H, V) \leq 1. \quad (2.1)$$

Действительно, равенство $R = R_s = R_B$ соответствует границе комплексных корней дисперсионного уравнения (1.2) при $P_s = 0$ ($\text{Im } \omega(0) = 0$). Эти границы в работах [2, 3] не определялись. Ниже изложен простой способ, позволяющий построить область неустойчивости на плоскости (H, V) . Результаты этого построения понадобятся нам в дальнейшем при исследовании областей стационарных колебаний,

На рис. 1 схематически показаны функции $R_s^{2\gamma}(H)$ для $g > g_0$ и $R_B^{2\gamma}(H, V)$ для нескольких значений $V (V_I < V_{II} < V_{III} < V_{IV})^*$. Границы области неустойчивости неявно определяются уравнением $R_s(H) = R_B(H, V)$ (см. (2.1)).

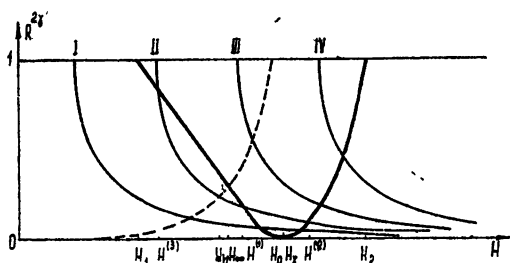


Рис. 1. Взаимное расположение кривых $R_s^{2\gamma}(H)$ (жирная линия), $R_\infty^{2\gamma}(H)$ (пунктирная линия) и $R_B^{2\gamma}(H, V)$ для нескольких значений $V: V_I < V_{II} < V_{III} < V_{IV}$ (тонкие линии).

Для небольших напряжений ($V \sim V_I$), когда $H_k(V) < H_1$ (см. рис. 1), существуют две точки пересечения $H^{(1)}(V)$ и $H^{(2)}(V)$ кривых R_s и R_B при малых R , которые находятся вблизи точки H_1 (см. (1.8)). Область неустойчивости расположена при этом между $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$. С увеличением V эта область расширяется, так как $H^{(1)}(V)$ уменьшается, а $H^{(2)}(V)$ растет. Когда V достигает таких значений, что $H_k(V) > H_1$, возникает еще одна точка пересечения кривых R_s и R_B в соответствии с их поведением вблизи точек H_1 и H_k (см. (7.П) и (8.П)). Образующаяся при этом новая область неустойчивости ограничена полями $H_k(V)$ и $H^{(3)}(V)$, которые растут с увеличением V . При дальнейшем росте напряжения обе области сливаются в одну $H_k(V) \leq H \leq H^{(2)}(V)$.

Область неустойчивости статического режима изображена на рис. 2. Ее границы $H^{(1)}(V)$, $H^{(2)}(V)$, $H^{(3)}(V)$ со стороны малых напряжений показаны кривыми (1), (2), (3) соответственно. Со стороны больших анодных напряжений область неустойчивости ограничена параболой критических режимов $H_k(V)$ (см. кривую (k)).

Обратимся теперь к исследованию области стационарных колебаний. Последняя не совпадает полностью с областью неустойчивости статического режима, которая может быть получена в линейной теории. Причи-

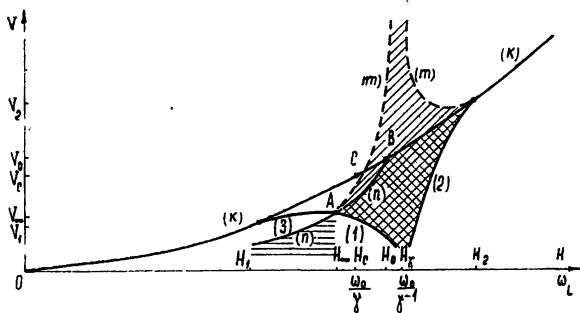


Рис. 2. Схематическое расположение областей различного типа и их границ на плоскости (V, H) . Область стационарных колебаний с мягким возбуждением показана двойной штриховкой, область затягивания—косой, область стационарных колебаний с жестким возбуждением—горизонтальной штриховкой.

на этого заключается в проявлении нелинейного эффекта сжатия электронного облака, который может приводить как к отсутствию стационарных колебаний с $P_s > 0$ в некоторой части области неустойчивости, так и к стабилизации колебаний, получаемых вне этой области с помощью затягивания или «жесткого» возбуждения.

* Характерные особенности функций $R_s^{2\gamma}(H)$ и $R_B^{2\gamma}(H, V)$ и их поведение при различных значениях магнитного поля и напряжения обсуждаются в Приложении 2.

Области стационарных колебаний легко найти из условия $P_s(H, V) \geq 0$ для амплитуды (см. (1.6)). (При тех значениях H и V , когда $P_s < 0$, стабилизация колебаний в нашей модели невозможна.) Это условие может быть записано в простом виде, так как числитель и знаменатель $P_s(H, V)$ — монотонные функции R_s .

Если числитель и знаменатель в формуле (1.6) положительны, то $P_s \geq 0$ при условии

$$R_s(H) < R_B(H, V); \quad R_s(H) < R_\infty(H). \quad (2.2)$$

Второе неравенство, согласно сказанному в разделе 1, можно переписать в виде $H > H_\infty$. Из сравнения с (2.1) видно, что указанные неравенства выделяют на плоскости (H, V) область стационарных колебаний, которая частично перекрывается с областью неустойчивости. Если же числитель и знаменатель в (1.6) отрицательны, то $P_s \geq 0$, когда

$$R_s(H) \geq R_B(H, V); \quad R_s(H) > R_\infty(H). \quad (2.3)$$

(Второе неравенство соответствует $H < H_\infty$.) Эта часть области стационарных колебаний лежит вне области неустойчивости, так как первые неравенства в (1.2) и (2.2) противоположны.

Используя теперь результаты, полученные выше при исследовании области неустойчивости (2.1), легко построить область стационарных колебаний (см. рис. 2). Одна часть этой области, определяемая неравенствами (2.2), ограничена кривыми (1), (2), (3) со стороны малых V и прямыми $H = H_\infty$ и $H = H_2$. Колебания при $H < H_\kappa(V)$ можно получить с помощью затягивания или «жесткого» возбуждения. Другая часть области стационарных колебаний, лежащая вне области неустойчивости (см. 2.3)), ограничена кривыми (1), (3) со стороны больших напряжений и прямыми $H = H_1$ и $H = H_\infty$. Колебания в этом случае можно получить только путем «жесткого» возбуждения*.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Хотя стационарным колебаниям соответствует равный нулю инкремент $\text{Im } \omega(P_s) = 0$, сколь угодно малые отклонения P от P_s (и, следовательно, R от R_s) приводят к появлению $\text{Im } \omega(P) \neq 0$. Благодаря этому амплитуда P начинает изменяться во времени пропорционально $\exp[2 \text{Im } \omega(P) t]$. Для устойчивых стационарных колебаний это изменение должно возвращать систему в исходное стационарное состояние. В противном случае стационарный режим неустойчив и не может осуществиться, так как любая флуктуация будет уводить систему от стационарного состояния [5, 6]. Таким образом, для исследования стационарного режима на устойчивость необходимо рассмотреть поведение инкремента $\text{Im } X(R, H)$ и амплитуды $P(R, H, V)$ (см. (10.П) и (1.3)) как функций внутреннего параметра R при фиксированных внешних параметрах H и V .

Величина $X''(R) = \text{Im } X(R)$ отлична от нуля и положительна только для $R > R_s$, причем $(\partial X''/\partial R)|_{R \geq R_s} > 0$. Функцию $P(R)$ (1.3) можно записать в виде

$$P(R) = A\varphi(R)/\psi(R), \quad (3.1)$$

* Следует отметить, что в рассматриваемом нами режиме колебаний отсутствует ток на анод (см. (1.11)). Учет анодного тока приводит к тому, что напряжение V становится функцией тока, зависящего, в свою очередь, от амплитуды колебаний и магнитного поля. Отсюда следует соотношение между H и V , которое из всей области стационарных колебаний выделяет только некоторую линию. Обычно магнетроны работают в режиме, когда напряжение пропорционально магнитному полю (прямые Хартри) [4].

где $\varphi(R) = \zeta^2 - R^2(1 - \ln R^2)$; $\psi(R) = 1 - \ln R^{2\gamma} - \Omega_L^2/(X_s - \Gamma)^2$; $A = \Omega_L^{-2}(X_s - \Gamma)^{-2}$ — множитель, слабо зависящий от R . Рассматривая состояние, близкое к стационарному, мы здесь заменили величину $X(R, H)$ ее значением в стационарном режиме $X_s(H)$ (см. (1.5)). Очевидно, что P меняет знак при $R = R_B(H, V)$ и $R = R_\infty(H)$, так как $\varphi(R) \geq 0$, если $R \leq R_B$ и $\psi(R) \geq 0$, если $R \leq R_\infty$.

Исследование на устойчивость требует анализа возможных случаев взаимного расположения точек R_s , R_B и R_∞ . Ограничимся вначале условием (2.2), когда область стационарных колебаний перекрывается с областью неустойчивости, и рассмотрим случай $R_B < R_\infty$. Тогда $P \geq 0$, если $R \leq R_B$ (см. (3.1)). Если $R_s < R_B$, то вблизи стационарного режима ($R \simeq R_s$) $P(R)$ — убывающая функция и $\partial P/\partial R|_{R=R_s} < 0$ (см. рис. 3а)*. Покажем, что стационарный режим является при этом устойчивым.

Действительно, пусть усредненный радиус облака отклонился от своего стационарного значения на малую величину δR . При $\delta R > 0$

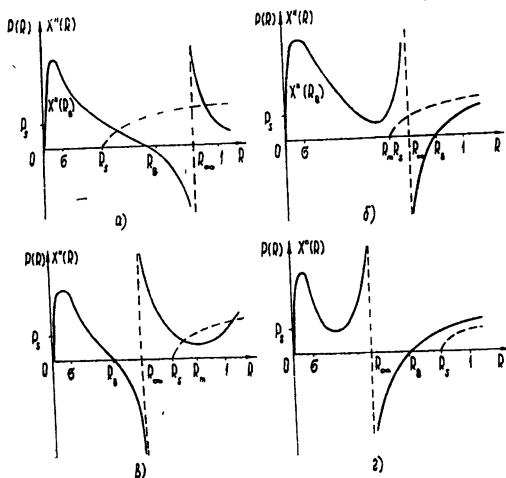


Рис. 3. Зависимость амплитуды P и инкремента нарастания X'' колебаний от радиуса R для различных случаев расположения точек R_s , R_B и R_∞ :

- а) $R_s < R_B < R_\infty$, $R_B < 1$ (устойчивый стационарный режим с мягким возбуждением), б) $R_s < R_\infty < R_B$, $R_s > R_m$ (неустойчивый стационарный режим, статический режим также неустойчив); в) $R_B < R_\infty < R_s$, $R_s < R_m$ (устойчивый стационарный режим с жестким возбуждением, при $R_s > R_m$ стационарный режим неустойчив); г) $R_\infty < R_B < R_s$ (неустойчивый стационарный режим) В случаях в) и г) статический режим является устойчивым.

величина P уменьшается, но одновременное появление инкремента $X''(R) > 0$ приводит к усилению колебаний. Благодаря этому амплитуда возрастает, радиус уменьшается и система возвращается в стационарное состояние. Уменьшение радиуса ($\delta R < 0$) приводит к увеличению амплитуды P . Однако в силу того, что $X'' = 0$, сколь угодно малое затухание κ , которое всегда имеет место в колебательной системе, вызывает уменьшение амплитуды до стационарного значения**. Благодаря этому R возрастает до R_s и начальный стационарный режим восстанавливается. Рассмотренный тип устойчивости стационарных колебаний имеет место при тех значениях параметров H и V , для которых в стационарном режиме

$$R_s(H) \leq R_B(H, V) < R_\infty(H); \quad R_B(H, V) < 1. \quad (3.2)$$

* В действительности при $R \rightarrow 0$ $P(R)$ стремится к нулю как $|\ln R|^{-1}$ и, следовательно, имеет максимум в области малых R . Однако для малых значений R ($\leq 0,4$ по грубой численной оценке) при $\alpha \geq 0,4 \gamma^{-1/2}$ нарушается условие (1.1), и мы не будем их рассматривать.

** При наличии затухания с декрементом κ стационарному режиму соответствует, очевидно, точка $X'' = \kappa/\omega_0 = 0$, в которой «затухание» компенсируется усилением.

В случае $R_\infty < R_B$ (рис. 3б) P положительно, если $R < R_\infty$ и $P \rightarrow \infty$, если $R \rightarrow R_\infty$: Из очевидной монотонности функций φ и ψ (см. (3.1)) следует, что при $R \leq R_\infty$ амплитуда $P(R)$ может иметь минимум в точке $R = R_m$:

$$\partial P / \partial R |_{R=R_m} = 0. \quad (3.3)$$

С другой стороны, $(\partial P / \partial R) |_{R=R_s} \leq 0$, если

$$R_s(H) < R_m(H, V) \quad (R_m \leq 1), \quad (3.4)$$

и стационарный режим является устойчивым в указанном выше смысле.

При $R_m < R_s < R_\infty$ возникает неустойчивость стационарного режима, так как малое увеличение радиуса $\delta R > 0$ приводит как к увеличению амплитуды, так и к появлению инкремента нарастания $X'' > 0$. Благодаря этому P экспоненциально растет со временем, усредненный радиус также возрастает и режим все больше отклоняется от стационарного.

Имеется, однако, существенное различие между устойчивыми стационарными состояниями (3.2) и (3.4). В первом случае стационарный режим возникает в результате развития неустойчивости статического бриллюэновского режима с $R = R_B(H, V)$ (мягкое возбуждение). Во втором случае стационарное состояние может быть достигнуто либо затягиванием стационарных колебаний из области мягкого возбуждения при медленном изменении магнитного поля, либо жестким возбуждением с помощью внешнего переменного поля, которое сжимает облако до значений $R < R_m$.

Следует отметить, что для тех значений параметров H и V , при которых осуществляется случай $R_\infty < R_B$, статический бриллюэновский режим сам по себе неустойчив ($(dX''/dP)|_{R=R_B} > 0$), причем эта неустойчивость приводит к расширению облака. В этом случае, однако, требуется дополнительный анализ исходных уравнений, так как статический режим далек от стационарного.

Исследуем далее на устойчивость стационарные состояния в области (2.3), лежащей вне области неустойчивости статического режима (2.1). В случае $R_B < R_\infty$ (см. рис. 3в) состояния с $R_\infty < R_s < R_m$ являются устойчивыми. (Значение $R_m(H, V)$, определяемое из (3.3), может быть при этом больше единицы, и тогда вместо указанного двойного неравенства надо написать $R_\infty < R_s$.) Состояния с $R_m < R_s$ (если $R_m < 1$) оказываются неустойчивыми. Устойчивые колебания с $R_\infty < R_s < R_m$ можно получить только с помощью жесткого возбуждения внешним переменным полем, так как область таких режимов не имеет общих границ с областью генерации с мягким возбуждением, кроме точки $A(H_\infty, V_\infty)$, в которой $R_s(H) = R_B(H, V)$; $R_s(H) = R_\infty(H)$ (см. рис. 2). В случае $R_\infty < R_B$ (см. рис. 3г) стационарные состояния с $R_B < R_s < 1$ являются неустойчивыми.

Области стационарных колебаний разного типа представлены на рис. 2 в плоскости (V, H) . Индексами указаны границы этих областей.

Как видно из рис. 2, границы области стационарных колебаний с мягким возбуждением (3.2) и области неустойчивости (2.1) имеют общую часть — кривые (1), (2), (3), (k), — причем область стационарных колебаний с мягким возбуждением является частью области неустойчивости.

Кривая (n), заданная уравнением $R_B(H, V) = R_\infty(H)$ или функцией $H_n(V)$ (одно из ее значений см. на рис. 1), при $H > H_\infty$ разделяет область затягивания и область стационарных колебаний с мягким возбуждением, а при $H < H_\infty$ ограничивает область стационарных ко-

лебаний с жестким возбуждением. Анализ функций R_B и R_∞ (см. Приложение 2) позволяет исследовать $H_n(V)$ и построить кривую (n) , используя опорные точки $B(H_0, V_0): R_\infty(H_0) = R_B(H_0, V_0)$, где $V_0 = V_k(H_0)$ (см. (1.8)), и $A(H_\infty, V_\infty): R_\infty(H_\infty) = R_B(H_\infty, V_\infty)$ (см. (1.9)).

Пунктирная кривая (m) , ограничивающая область затягивания со стороны больших V , отражает поведение функции $H_m(V)$, которая является решением уравнения $R_s(H) = R_m(H, V)$ (см. (3.4)). Эта кривая определяется опорными точками $A(H_\infty, V_\infty); (H_2, V_2)$, где $V_2 = V_k(H_2)$, и построена схематически с помощью условия $R_m(H, V) \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$, которое, в силу (3.4), дает $H_m(V)|_{V \rightarrow \infty} \rightarrow H_1$.

4. АМПЛИТУДА УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИИ

Рассмотрим поведение амплитуды $P_s(H, V)$ на одном из сечений $V = \text{const}$ плоскости (V, H) при уменьшении H . Выберем для примера $V_\infty < V < V_0$ (см. рис. 2). На рис. 1 этому значению V соответствует кривая III. (Для других V исследование $P_s(H, V)$ проводится аналогичным способом.)

Когда $H^{(2)} < H$, $R_B < R_s < R_\infty$ и, в силу (2.2) и (2.3), стационарные колебания невозможны ($P_s < 0$). Если $H = H^{(2)}(V)$, то $R_s = R_B$ и $P_s = 0$ (см. рис. 4б). При дальнейшем уменьшении магнитного поля H радиус R_s уменьшается, а P_s становится положительной и растет, пока H не станет достаточно близким к H_1 , где R_s обращается в нуль. Область вблизи H_1 следует исключить. При $H_1 < H$ R_s возрастает, а P_s уменьшается с уменьшением H . В интервале $H_n < H < H^{(2)}$ $R_s < R_B < R_\infty$ и, как было показано, имеет место устойчивый стационарный режим с мягким возбуждением. Если $H < H_n$, мягкое возбуждение становится невозможным.

В интервале $H_m < H < H_n$ амплитуда продолжает уменьшаться. При этом $R_\infty < R_B$, и устойчивые стационарные колебания можно получить только с помощью затягивания. На рис. 4б эта часть кривой $P_s(H)$ показана пунктиром. При $H < H_m$ стационарный режим неустойчив, поскольку $R_m < R_s$ (см. раздел 3).

На рис. 4а, б, в приведены схематические зависимости $P_s(H)$ для указанных интервалов значений V (см. рис. 2).

Оценим характерные размеры области стационарных колебаний с мягким возбуждением. При $V \sim V_0$ размер области по магнитному полю H определяется, очевидно, разностью $\Delta H \sim (H_2 - H_0)$. Если $|\gamma g|^{1/2} \sim 1$ (см. (9.П)) то,

$$\Delta H/H \sim 1/\gamma. \quad (4.1)$$

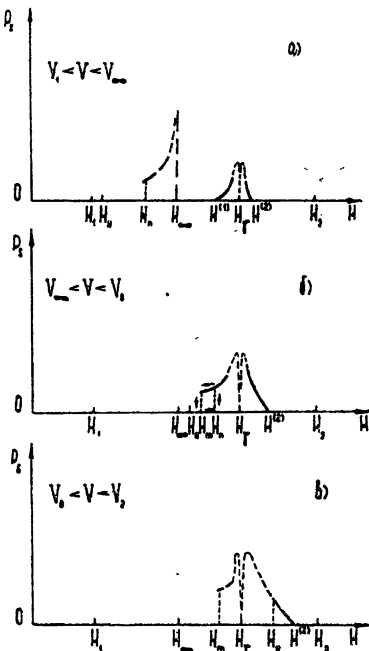


Рис. 4. Зависимость амплитуды стационарных колебаний P_s от магнитного поля при различных значениях V . Штрих-пунктирной линией показана часть кривой $P_s(H, V)$ в области жесткого возбуждения, пунктиром — в области затягивания, тонким пунктиром — при нарушении условия (5.П). В области затягивания имеет место гистерезис (рис. 4б).

Вблизи параболы критических режимов $\Delta V/V \sim 2\Delta H/H$, и, следовательно, относительный размер области по напряжению тоже порядка $1/\gamma$.

При $V \ll V_\infty$ характерная ширина области стационарных колебаний по H уменьшается почти экспоненциально с уменьшением V , и по порядку величины равна $(H^{(1)} - H^{(2)})$:

$$\frac{\Delta H}{H} \sim \frac{1}{\gamma} \left(\frac{V}{V_\gamma} \right)^\gamma; \quad V_\gamma = V_k(H_\gamma).$$

Уменьшение ширины области в e раз происходит на относительном расстоянии $\Delta V/V \sim 1/\gamma$.

Точка $C(H_c, V_c)$, которая в приближении тонкого катода (1.1) соответствует условию точного синхронизма ($\omega_L|_{H=H_c} = \omega_0/\gamma$), может находиться как внутри, так и вне области неустойчивости в зависимости от величины g . Однако, как видно из рис. 2, она всегда находится вне области стационарных колебаний с мягким возбуждением, хотя может попасть в область затягивания. На прямой Хартри $V = V_X(H)$, касательной к параболе критических режимов (k) в точке C , область стационарных колебаний с мягким возбуждением находится на конечном расстоянии от H_c (см. рис. 2). Такое заключение качественно соответствует расположению экспериментально исследованных Уилшоу и Робертшоу областей генерации [7]. В качественном согласии с оценкой (4.1) находятся также приведенные в работе [7] размеры области генерации $\Delta H/H \sim 8\%$ для $\gamma = 14$.

Как видно из рис. 2, область стационарных колебаний с мягким возбуждением оказывается сосредоточенной вблизи $H \sim H_\gamma$ и $V \sim V_\gamma$. Поэтому с увеличением γ она будет сдвигаться к меньшим магнитным полям и напряжениям.

В заключение заметим, что, используя метод усреднения, можно было бы рассмотреть также и нестационарные состояния ($\text{Im } \omega(P) \neq 0$), позволяющие исследовать динамику перехода от статического режима к стационарному.

В простейшем случае мягкого возбуждения процесс установления стационарного режима можно представить следующим образом. В статическом режиме при заданном внешнем поле H и напряжении V в электронном потоке возникает неустойчивость типа вращающейся поверхностной волны с инкрементом нарастания $\text{Im } \omega(0, H)$. При появлении нелинейных стабилизирующих эффектов и, следовательно, зависимости $\text{Im } \omega$ от амплитуды колебаний P , инкремент уменьшается с увеличением P и обращается в нуль, когда амплитуда достигает стационарного значения $P = P_s$. В достаточно широком интервале значений амплитуд P это происходит быстрее, чем продольная группировка электронов по скоростям.

Действительно, оценим характерное время установления стационарных колебаний t_s и сравним его со временем группировки электронов $t_{гр}$. Под действием дополнительной силы $f(r)$, обусловленной неоднородностью высокочастотного поля, электрон с бриллюэновской траектории смещается на усредненную стационарную орбиту с радиусом r_s за время $t_0 \sim [2m(r_B - r_s)/f(r_s)]^{1/2}$. Из выражения (2.18) [1] для $\bar{E}_r(r)$ можно найти $f(r)$. При малых амплитудах P_s как $f(r_s)$, так и $r_B - r_s$ (см. (1.6)) пропорциональны P_s : $f = \alpha P_s$, $r_B - r_s = \beta P_s^*$, откуда сле-

* Из определения $\bar{E}_r(r)$ (2.18) [1] и P_s (1.6) следует, что $\alpha = \pi r_s \omega_L^2 \gamma I / R_B \Omega_L^4$; $\beta = r_s \gamma I [1 - (1 - \gamma)/2\gamma \ln R_B] / R_B \Omega_L^4$; $I = \Omega_L^2 (X_s - \gamma)^{-2}$.

дует, что t_0 не зависит от амплитуды P . Подставляя значения α и β , находим оценку для времени установления стационарных колебаний $t_0 \sim \omega_L^{-1}(\psi(R_B)/2\gamma \ln R_B)^{1/2}$ (см. (3.1)). Вдали от $R_B = R_\infty$ (см. (1.9а)), где $\psi(R_B)$ обращается в нуль, и от точек, в которых $R_B = 1$ (при $H_2 \neq H_1$), подкоренное выражение ~ 1 и $t_0 \sim 1/\omega_L$. Добавляя время раскочки колебаний в статическом режиме $1/\text{Im } \omega(0, H)$ (см. (11.П)), получаем время установления стационарного режима

$$t_s \sim 1/\omega_L, \quad (4.2)$$

не зависящее от амплитуды колебаний.

В качестве характерного времени группировки можно взять время обгона электронов в поле бегущей волны $E_\varphi^*(r) \exp[i(\gamma\varphi - \omega t)]$ (см. (2.17). [1]). Выражая $E_\varphi^*(r_s)$ через P_s , получим

$$t_{гр} \sim \delta/P_s^{1/4}; \quad \delta = \frac{1}{\omega_0} (R_s/\gamma)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Эта оценка справедлива, если скорость электрона не слишком отличается от фазовой скорости волны:

$$|X_s - \Gamma| \leq 2P_s^{1/4} (\gamma/R_s)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Время группировки обратно пропорционально корню из амплитуды, и для достаточно малых амплитуд $P_s^{1/4} \ll \Omega_L (R_s/\gamma)^{1/2}$ выполняется условие $t_s \ll t_{гр}$, которое совпадает с основным неравенством (5.П). Таким образом, при выполнении (12.П) стационарный режим устанавливается быстрее, чем начинается группировка электронов по скоростям. Последняя развивается уже на фоне этого стационарного режима.

Авторы благодарны А. А. Веденову, В. Е. Нецаеву и Я. Б. Файнбергу за полезные обсуждения отдельных вопросов, а также Л. И. Жильцовой и Л. П. Сальниковой за помощь в проведении расчетов на электронной вычислительной машине.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Дисперсионное уравнение (3.16) [1] имеет вид

$$X(X - \Gamma)^2 = (\tilde{\Omega}_p^2/2) [X(1 + R^2\gamma) + gR^2\gamma], \quad (1.П)$$

где g — коэффициент, характеризующий замедляющую систему магнетрона (см. (3.3) [1]). Входящие в это уравнение параметр рассинхронизации Γ (3.17) [1] и эффективная плазменная частота $\tilde{\Omega}_p$ (3.11) [1] являются функциями усредненного радиуса облака R и амплитуды колебаний P .

$$\Gamma = \gamma\Omega_L (1 - \sigma^2/R^2) - 1, \quad (2.П)$$

$$\tilde{\Omega}_p^2 = \Omega_p^2 + 2\gamma^2 PR^{-2} |X - \Gamma|^{-2} \left[1 + \frac{1}{4} \Omega_L^2 |X - \Gamma|^{-2} (1 + \sigma^4/R^4) \right]; \quad (3.П)$$

$$\Omega_p^2 = 2\Omega_L^2 (1 + \sigma^4/R^4).$$

В работе [1] установлена связь (3.15) [1] между величинами R и P , которая имеет вид

$$\begin{aligned} & \zeta^2 (1 - \sigma^2)^2/R^2 - (1 - \sigma^2/R^2)^2 - (1 - \sigma^4/R^4) \ln(1/R^2) = \\ & = (P/R^2 \Omega_L^2 |X - \Gamma|^2) \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \Omega_L^2 (1 - 3\sigma^4/R^4) \gamma^{-1} |X - \Gamma|^{-2} \right] \times \right. \\ & \left. \times \ln R^{-2\gamma} + 1 - \frac{1}{2} \Omega_p^2 |X - \Gamma|^{-2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.П)$$

где $\zeta = H_k/H$, $H_k = 2c(-2mV/e)^{1/2}/r_a(1 - \sigma^2)$. (В [1] здесь имеется опечатка: лишний множитель $R^{2\gamma}$ при P .)

Мы будем пренебрегать слагаемым с амплитудой P в выражении для $\tilde{\Omega}_p^2$ (3.П), что допустимо, если величина амплитуды достаточно мала:

$$P \ll R^2 \Omega_L^2 |X - \Gamma|^2 \gamma^{-2}. \quad (5.П)$$

В этом случае $\tilde{\Omega}_p^2 = \Omega_p^2$. Зависимость $R(P)$ (4.П) также можно упростить, если предполагать, что параметр, характеризующий отклонение от синхронизма, не слишком мал ($|X - \Gamma| \sim |\Gamma|$):

$$|X - \Gamma|^2 \gg \Omega_L^2 / 2\gamma. \quad (6.П)$$

Из дисперсионного уравнения (1.П) легко теперь получить исходное уравнение настоящей работы (1.2), если воспользоваться приближением тонкого катода (1.1) и неравенством (5.П). В том же приближении и с учетом (6.П) связь между усредненным радиусом R и амплитудой P принимает простой вид (1.3).

В наиболее интересной области значений параметра замедляющей системы $|\gamma g| \sim 1$ (см. (9.П)) решение дисперсионного уравнения (1.2) показывает, что $|X - \Gamma|$ и Ω_L — величины одного порядка. Поэтому неравенства (6.П) и (2.16) [1] удовлетворяются при всех значениях R , а условие (5.П) для амплитуды колебаний совпадает с основным неравенством работы [1] $P \ll |X - \Gamma|^4 R^2 \gamma^{-2}$ (см. (2.14) [1]), указывающим границы применимости метода усреднения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим поведение функций $R_s^{2\gamma}(H)$ (1.4); $R_B^{2\gamma}(H, V)$ (1.7a) и $R_\infty^{2\gamma}(H)$ (1.9a) при $g > g_0$ (см. (1.10)). Графики этих функций показаны на рис. 1 соответственно жирной линией, тонкими линиями (для различных V) и пунктирной кривой. Здесь H_1 и H_2 ($H_1 < H_2$) — значения магнитного поля, при которых R_s равно единице, $H = H_1$ (см. (1.8)) — двойной корень функции $R_s^{2\gamma}(H)$, причем $\Gamma_1(H_1) = 1$. Величина $R_s^{2\gamma}(H)$ монотонно возрастает в области $H_1 < H < H_2$ и монотонно убывает (для $g > g_0$) в области $H_1 < H < H_1$, причем $H_1 < H_0$ (см. (1.10a)) и

$$\left| dR_s^{2\gamma}/dH \right|_{H=H_1} < \infty. \quad (7.П)$$

Вдали от точки H_1 ($(H - H_1)/H_1 \gg 1/\gamma$), когда $|\Gamma_1| \gg 1$, а $R_s \simeq 1$, имеют место асимптотические формулы

$$R_s^{2\gamma}(H) |_{\Gamma_1 < -1} \simeq (g/|\Gamma_1 - 1|)^{-1}; \quad R_s^{2\gamma}(H) |_{\Gamma_1 > 1} \simeq \frac{4}{27} (\Omega_L/g) (\Gamma/\Omega_L)^3.$$

Напомним, что $\Gamma = \gamma \Omega_L - 1$, а Γ_1 определено в (1.4). Кроме того, в интересующем нас случае $g \sim \gamma^{-1}$ второй асимптотической формулой для количественных оценок пользоваться нельзя.

Положение кривой $R_B^{2\gamma}(H, V)$ определяется значением анодного напряжения V , т. е. величиной критического магнитного поля $H_k(V)$, для которого $R_B^{2\gamma}(H_k, V) = 1$ (сравнить с (2.11)). Используя (1.7a), можно показать, что функция $R_B^{2\gamma}(H, V)$ определена только при $H_k(V) < H$ (если $\sigma < R \leq 1$) и является убывающей на этом интервале. Видно (см. рис. 1), что с увеличением напряжения $V_I < V_{II} < V_{III} < V_{IV}$ кривая R_B смещается параллельно самой себе в сторону больших магнитных полей. При $H \simeq H_k$ функция $R_B^{2\gamma}(H, V)$ быстро уменьшается с ростом H : $R_B^{2\gamma}(H, V) |_{H \sim H_k} \simeq \{1 + [2(1 - (H_k/H)^2)]^{1/2}\}^{-\gamma}$. Кроме того

$$\left| dR_B^{2\gamma}/dH \right|_{H \rightarrow H_k} \rightarrow \infty. \quad (8.П)$$

Если $H \rightarrow \infty$, функция $R_B^{2\gamma}(H, V)$ — малая величина порядка $\sigma^{2\gamma}$.

Функция $R_\infty^{2\gamma}(H)$ однозначно определена при заданном γ уравнением (1.9a) (для любых значений $|g|$ и V). Она изменяется в пределах $0 < R \leq 1$, если $0 < H \leq H_0$ (см. (1.10a)), монотонно возрастает на этом интервале и $R_\infty^{2\gamma}(H_0) = 1$. Если $H \rightarrow 0$, $R_\infty^{2\gamma}(H) \simeq \exp(-4/\Omega_L^2)$.

Указанное поведение $R_s(H)$; $R_B^{2\gamma}(H, V)$, $R_\infty(H)$ позволяет утверждать, что уравнение (1.7) имеет не менее одного и не более трех решений, уравнение (1.9) — один корень $H_\infty (\leq H_0)$, и уравнение $R_B(H, V) = R_\infty(H)$ также один корень H_n в интервале $H_k(V) < H_n(V) \leq H_0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Оценим параметр g (см. (3.3) [1]) для периодической замедляющей структуры на аноде. Легко составить дисперсионное уравнение, подобное уравнению (3.7) главы 2 книги Коллинза [4], используя вместо граничных условий на катоде условия (3.4) [1] — (3.6) [1] на колеблющейся границе облака. Удерживая только резонансные члены в сумме по пространственным гармоникам и ограничиваясь величинами не выше второго порядка в разложении по $|X| \ll 1$ остальных членов уравнения, приведем его к виду (1.П). Для прямоугольного резонатора шириной d и глубиной h получим тогда

$$g = \frac{1}{\gamma} \frac{2\theta N}{\pi} \frac{r_a}{h} [\sin(2\pi h/\lambda_0)]^2 \left[1 + \frac{\sin(4\pi h/\lambda_0)}{4\pi h/\lambda_0} \right]^{-1} \left[\frac{\sin(\gamma\theta)}{\gamma\theta} \right]^2.$$

Здесь N — число резонаторов; γ — волновое число ($\gamma = |n + mN|$, $n = 0, 1, 2, \dots, N/2$ — номер вида колебаний, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — номер пространственной гармоники); $2\theta = d/r_a$; $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ — собственная длина волны резонатора, ω_0 — его собственная частота.

Полагая $h \approx \lambda_0/4$, $r_a \sim \lambda_0/q_1$, $N\theta \sim \pi/q_2$, $[\sin(\gamma\theta)/\gamma\theta]^2 \sim 1/q_3$, где $q_1, q_2, q_3 \geq 1$, получим $|\gamma g| \sim 8/q_1 q_2 q_3$. Мы будем пользоваться оценкой

$$|\gamma g| \sim 1. \quad (9.П)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Корень дисперсионного уравнения (1.2), для которого $\text{Im } X > 0$, имеет вид

$$\text{Re } X \equiv X'(R, H) = (\Omega_L (1 + R^{2\gamma})^{1/2})^{1/3} \left[2\Gamma_1 - \frac{1}{2} (\Gamma_1^2 + 3)^{1/2} (\beta_1^{1/3} + \beta_1^{-1/3}) \text{sgn } g \right], \quad (10.П)$$

$$\text{Im } X \equiv X''(R, H) = [\Omega_L (1 + R^{2\gamma})^{1/2} / 2\sqrt{3}] (\Gamma_1^2 + 3)^{1/2} (\beta_1^{1/3} - \beta_1^{-1/3}),$$

где

$$\beta_1 = \alpha_1 + (\alpha_1^2 - 1)^{1/2}, \quad \alpha_1 = 27 |G| (R^{2\gamma} - R_s^{2\gamma}) / 2 (\Gamma_1^2 + 3)^{3/2},$$

а R_s , Γ и Ω_L определены в (1.6) и (1.5).

Так как $|\gamma g| \sim 1$, а $|G/\Omega_L| \ll 1$, то при выполнении условия $\alpha - 1 \sim R^{2\gamma} - R_s^{2\gamma} \geq 1/\gamma$ получаем для инкремента нарастания $\text{Im } X \equiv X'' > 0$ оценку $X'' \sim \Omega_L \sim 1/\gamma$. Следовательно, если $P = 0$, по

$$\text{Im } \omega(0, H) = \omega_0 X''(R_B^{2\gamma}, H) \sim \omega_L, \quad (11.П)$$

когда

$$(R_B^{2\gamma} - R_s^{2\gamma}) \geq 1/\gamma. \quad (12.П)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Вигдорчик, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 155 (1966).
2. В. П. Тычинский, Радиотехника и электроника, 7, 912 (1957).
3. В. Я. Малеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 333 (1962).
4. G. Collins, Microwave Magnetrons, New York—Toronto—London, 1948 (sec. 2.6).
Магнетроны сантиметрового диапазона, изд. Сов радио, М., 1, 1950 (раздел 2.6).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954 (стр. 127—134).
6. А. А. Веденов, Теория турбулентной плазмы, сер. Итоги науки, М., 1965.
7. Р. Д. Робертшоу, В. Э. Уилшоу, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, под ред. М. М. Федорова, 2, 1961 (стр. 280).

STATIONARY OSCILLATIONS OF ELECTRON CLOUD IN A CYLINDRICAL
MAGNETRON

II. REGIME OF STEADY-STATE OSCILLATIONS

V. I. Vigdorzhik, V. M. Kontorovich

The dispersion equation of a magnetron obtained in the previous paper [1] has been studied. The stationary conditions and regions of steady-state oscillations have been found. It has been shown the possibility of oscillations pulling into the region of precritical magnetic field. The stability of steady-state regime has been investigated and the dependence of the amplitude of stationary oscillations upon the magnetic field and plate voltage has been found. The time of instability stabilization is less than that of velocity-electron bunching.

УДК 621.372.22

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В АКТИВНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ЛИНИИ

Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович

Экспериментально исследуются автоколебания типа стационарных бегущих волн в замкнутой в кольцо искусственной LC -линии с туннельными диодами. Показано, что колебания такого вида устойчивы. Выяснена зависимость характера автоколебаний от нелинейных и дисперсионных свойств системы и от длины волны. Полученные результаты подтверждают проведенное ранее теоретическое рассмотрение [2, 3].

Экспериментальному исследованию автоколебаний активных распределенных систем в последние годы уделяется весьма большое внимание. Однако все известные авторам работы посвящены автоколебательным системам оптического диапазона — оптическим квантовым генераторам. В оптическом диапазоне частот нелинейные активные среды обладают слабой нелинейностью и сравнительно сильной дисперсией, что ограничивает круг наблюдаемых нелинейных эффектов явлениями, связанными с взаимодействием нескольких монохроматических волн [1]. В радиодиапазоне нелинейные и дисперсионные свойства систем более разнообразны. В частности, при использовании полупроводников с туннельными $p-n$ переходами, ферритов и т. д. могут быть созданы активные распределенные системы, например, активные линии передачи, которые имеют сильную нелинейность и слабую дисперсию. Нелинейные активные линии конечной длины (нагруженный на концах отрезок линии или линия, замкнутая в кольцо) представляют собой распределенную автоколебательную систему. Теоретическому рассмотрению автоколебаний таких систем посвящены работы [2-5].

В настоящей работе излагаются результаты экспериментального исследования активной кольцевой линии, рассмотренной в [2, 3].

1. В качестве экспериментальной модели использовалась искусственная LC -линия, содержащая туннельные диоды. Схема и внешний вид линии, состоящей из 30 идентичных ячеек, приведены на рис. 1, 2. Величины основных параметров для исследуемой модели таковы: $C_1 = 1800$ пф; $[L(C_1 + C)]^{1/2} = \rho = 50$ Ом; $C \geq 20$ пф; $L = 4,5$ мкгн. Наименьшее значение параметра C определяется суммарной емкостью $p-n$ перехода туннельного диода (ЗИ301-Г) и межвитковой емкостью индуктивности звена. Параметры ячеек подбирались равными с точностью до 1%, а туннельные диоды отбирались с одинаковыми вольт-

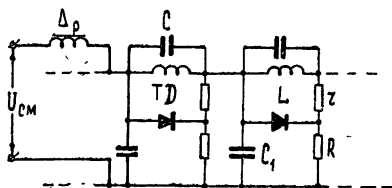


Рис. 1.

амперными характеристиками. Значения величин r и R (рис. 1) определялись, исходя из условия, чтобы при малых низкочастотных потерях

рабочие точки находились на падающем участке характеристик туннельных диодов. Изменение положения рабочей точки на характеристике достигалось изменением напряжения смещения $U_{см}$ (рис. 1).

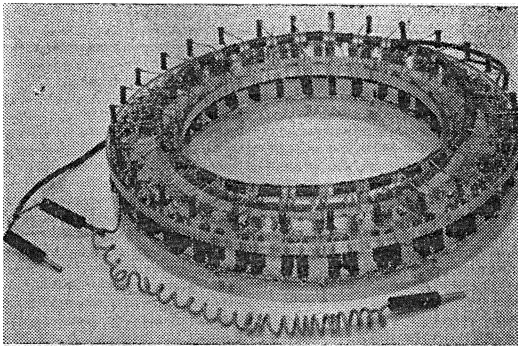


Рис. 2. Внешний вид кольцевой активной линии.

2. В исследуемой системе при выполнении условий самовозбуждения возможно существование устойчивых автоколебаний в виде стационарных бегущих волн [2]. Число различных типов колебаний (мод) в распределенной системе при достаточно малых потерях может быть как угодно велико. В искусственной LC -линии число мод, очевидно, не может превышать половины от числа ячеек.

В исследуемой линии экспериментально наблюдались все возможные колебания в виде стационарных бегущих волн (15 мод с $\lambda = 30/n$ (ячеек), $n = 1, 2, \dots, 15$)*. Осциллограммы шести из них с $\lambda = 30; 15; 10; 7,5; 3,75; 2$ приведены на рис. 3. На осциллограммах отчетливо видно, что с ростом номера моды (т. е. уменьшением λ) частота колебаний возрастает, а их амплитуда уменьшается; форма стационарных волн при уменьшении λ непрерывно изменяется от релаксационной до синусоидальной. Такая зависимость параметров стационарных волн от их длины полностью соответствует результатам теоретического рассмотрения. Действительно, как показано в [3], форма автоколебаний определяется соотношением между нелинейностью и дисперсией в системе и зависит от длины волны. Если нелинейность невелика ($C/Lg^2 \gg 1$, g — параметр нелинейности), то в достаточно длинной системе ($l = C/g(LC_1)^{1/2}$) волны с $\lambda \sim l$ должны носить существенно релаксационный характер, в то время как короткие волны в такой системе будут близки к синусоидальным.

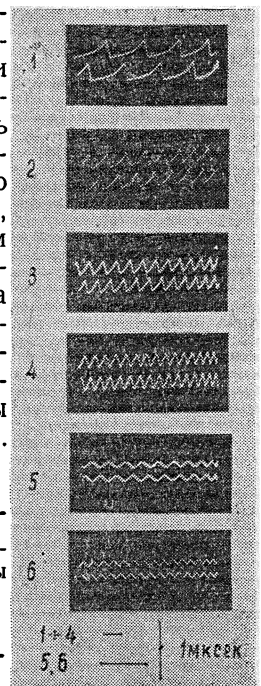


Рис. 3. Осциллограммы наиболее характерных типов стационарных бегущих волн (нижние осциллограммы сдвинуты относительно верхних на число ячеек, равное $\lambda/2$):

1 — $\lambda = 30$; 2 — $\lambda = 15$; 3 — $\lambda = 10$; 4 — $\lambda = 7,5$; 5 — $\lambda = 3,5$; 6 — $\lambda = 2$.

* Направление распространения волн зависело от случайных начальных условий; появление волн, бегущих в противоположные стороны, было равновероятно.

Частоты ω_k и относительные скорости распространения v_k/v_0 коротких волн определяются выражениями [2, 3]

$$\omega_k^2 = L(C + C_1/k^2)^{-1/2}, \quad v_k^2/v_0^2 = (1 + k^2C/C_1)^{-1/2}, \quad (1)$$

где $v_0^{-2} = LC_1$. Зависимость амплитуды колебаний от длины волны имеет вид

$$A_k = u\sqrt{b} \simeq 0,18 \lambda \quad (2)$$

для квазисинусоидальных волн и

$$A_k = u\sqrt{b} \simeq 0,24 \lambda \quad (3)$$

для релаксационных волн (здесь b — параметр характеристики туннельного диода).

Следует указать, что при исследовании процессов в активной линии в [2, 3] параметры r и $1/R$ считались равными нулю. Однако, если $1/R$ мало ($1/R \ll 1/\rho$), проведенное рассмотрение остается справедливым. Действительно, наличие r легко учесть, рассматривая вместо исходной нелинейной характеристики туннельного диода результирующую характеристику диода и проводимость $1/r$. Влиянием же малых низкочастотных потерь на автоколебательные процессы можно пренебречь (для исследуемой модели $\rho/R \simeq 6 \cdot 10^{-3}$).

Сравнение экспериментальных данных о зависимости скорости распространения и амплитуды стационарных волн от длины волны с теоретическими (соотношения (1) ÷ (3)) приведено на графиках рис. 4. Как

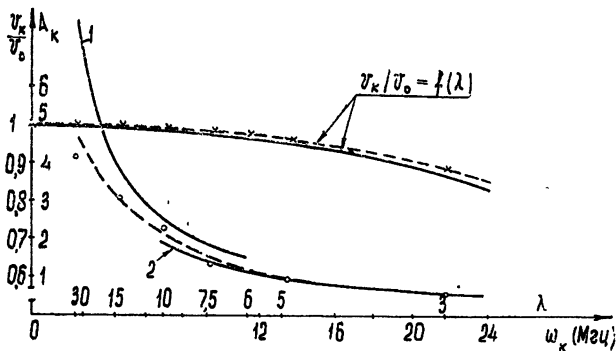


Рис. 4. Зависимость скоростей распространения v_k и амплитуды A_k стационарных бегущих волн от длины волны λ (сплошные кривые соответствуют рассчитанным теоретически, пунктирные — полученным экспериментально).

видно, экспериментально наблюдаемая зависимость скоростей распространения от длины волны хорошо совпадает с расчетной. Расхождение амплитудных кривых (кривые 1 и 2 рассчитаны по формулам (3) и (2) соответственно) в области длинных (релаксационных) волн объясняется тем, что для сильно нелинейных волн амплитуда колебаний существенно зависит от формы реальной характеристики туннельного диода, которая асимметрична. Кроме того,

при слабой временной дисперсии заметно сказывается влияние пространственной дисперсии. Соотношение (3), полученное для симметричной характеристики диода при рассмотрении чисто распределенной модели, оба эти фактора не учитывает.

Экспериментально подтвердилась также зависимость характера автоколебаний от величины дисперсии в системе. При увеличении дисперсии (увеличивался параметр C) частоты колебаний различных типов изменялись в соответствии с (1), а форма автоколебаний всех типов приближалась к синусоидальной. Отметим, что форма колебаний данной моды с ростом C изменялась точно так же, как форма моды с повышением

номера при $C = \text{const}$ (рис. 3). При уменьшении параметра C ($C_{\min} \approx \approx 20 n\phi$) форма автоколебаний изменялась незначительно. Это объясняется тем, что для исследуемой модели существенной оказывается пространственная дисперсия (периодичность структуры линии), которая влияет на автоколебательные процессы в системе аналогично временной [3].

3. Автоколебания в виде стационарных бегущих волн являются устойчивыми как по отношению к малым возмущениям начальных данных, так и по отношению к малым изменениям параметров системы*. Так, при изменении в определенных пределах характеристики нелинейности (посредством изменения $U_{\text{см}}$) установившийся стационарный режим не изменялся. Реализация определенного режима в области параметров, в которой возможно существование волн различных типов, достигалась либо возмущением начальных условий, в частности, временным выключением схемы при $U_{\text{см}} = \text{const}$, либо непрерывным изменением смещения. В последнем случае легко удавалось возбуждать колебания определенного заданного типа, поскольку границы существования различных режимов различны**.

В исследуемой кольцевой активной линии удалось наблюдать автоколебания лишь в виде стационарных бегущих волн. Факт отсутствия стоячих волн, а такие решения возможны, по крайней мере в слабонелинейной кольцевой системе [5, 6], свидетельствует об их неустойчивости. Теоретически неустойчивость стоячих волн в слабонелинейной системе, аналогичной исследуемой, показана в [6].

В заключение отметим, что системы, аналогичные рассмотренной, могут найти применение в различного рода дискретных устройствах, где окажется полезным существование многих типов устойчивых колебаний, в том числе и релаксационных. Кроме того, такая система может быть использована как релаксационный генератор перестраиваемой частоты.

Авторы благодарны А. В. Гапонову за интерес к работе и обсуждение результатов и Б. Р. Розенштейну за помощь в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
2. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 794 (1965).
3. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 173 (1966).
4. М. И. Рабинович, Радиотехника и электроника, 11, 1467 (1966).
5. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 91 (1965).
6. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 987 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 марта 1966 г.

INVESTIGATION OF AUTOOSCILLATIONS IN AN ACTIVE RING LINE

Yu. K. Bogatyrev, M. I. Rabinovitch

Stationary travelling wave autooscillations are experimentally investigated in a closed ring artificial LC-line with tunnel diodes. The oscillations are shown to be steady. The dependence is clarified of the autooscillation character upon the nonlinear and dispersive properties of the system and the wavelength as well. The results obtained confirm the earlier theoretical consideration [2, 3].

* Ввиду этого исследуемую систему по аналогии с сосредоточенными системами, обладающими таким свойством, можно назвать грубой.

** Границей является крайнее положение рабочей точки на вольт-амперной характеристике туннельного диода, при котором колебания определенного типа еще существуют.

УДК 621.372.061 1

К ИССЛЕДОВАНИЮ КАСКАДНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ВЛКЮЧЕНИЕМ МОДУЛИРУЕМЫХ ЕМККОСТЕЙ

К. С. Мосоян, И. А. Струков, В. С. Эткин

Рассматриваются каскадные соединения схем с многими переменными параметрами. Для характеристики схемы используется система алгебраических уравнений (полученная путем использования результатов [4, 5]), решение которой находится с помощью ориентированных графов. Проводится полный расчет каскадной схемы из 2-х переменных емкостей (включенных последовательно в линию сигнала), показывающий, что такая система будет обладать весьма высокими параметрами.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы появились работы, в которых рассматриваются схемы с несколькими переменными параметрами [1-3]. В частности, в [2, 3] рассматривается система в виде линии, шунтированной двумя переменными емкостями на расстоянии, равном четверти длины волны сигнала и кратном полуволне холостой частоты.

Как видно из проводимого ниже расчета, система из 2-х переменных емкостей, включенных последовательно в линию сигнала, также обладает весьма интересными свойствами.

Обычно применение матричных методов расчета к многокаскадным схемам не обеспечивает наглядности в исследовании путей преобразования сигналов и определении физических причин получения тех или иных результатов. В связи с этим, обобщая результаты работ [4, 5], проведем решение получаемых алгебраических уравнений с помощью ориентированных графов, отличающееся на наш взгляд, большей наглядностью.

Рассмотрим сложную цепь из контуров с переменными параметрами (см. рис. 1а). Обозначения и нумерация контуров, токов и сопротивлений указаны на рисунке и соответствуют принятым в теории цепей.

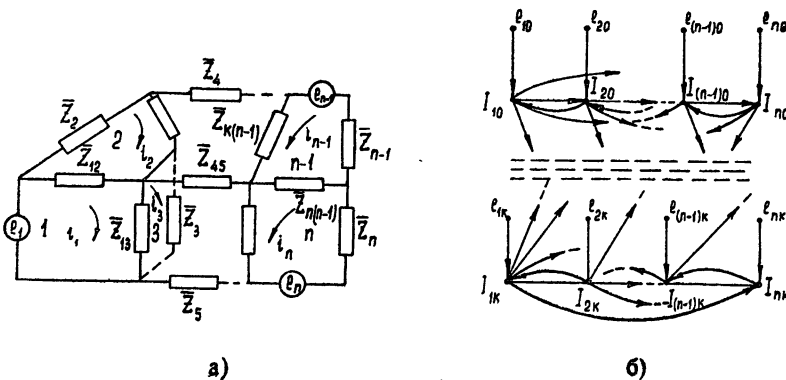


Рис. 1.

Используя результаты работ [4,5], можно получить систему уравнений, связывающих токи комбинационных частот в различных контурах с параметрами схемы и действующими ЭДС.

Выпишем эту систему для частного случая, когда модулируются только емкости. Уравнение для колебаний на частоте $\omega_0 + kp$ (где p — частота модуляции) в n -ом контуре имеет вид

$$I_{nk} z_{nnk} + \sum_m z_{nmk} I_{mk} - \sum_m j \frac{m_{nm}}{2} \left[\frac{\exp(j\varphi_{nm}) I_{m, k-1}}{\omega_0 + (k-1)p} + \frac{\exp(-j\varphi_{mn}) I_{m, k+1}}{\omega_0 + (k+1)p} \right] = e_{nk}. \quad (1)$$

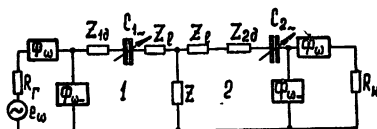
В этом уравнении I_{mk} — амплитуда тока в m -ом контуре на частоте $\omega_0 + kp$, z_{nmk} — сопротивление общей ветви между m и n -ыми контурами на этой частоте, m_{nm} — глубина модуляции емкости в переменной части сопротивления z_{nm} . Из уравнения (1) видно, что ток I_{nk} обусловлен ЭДС e_{nk} , токами других контуров на этой же частоте и появлением добавочных ЭДС, вызванных взаимодействием $\omega_0 + kp$ токов с частотами $\omega_0 + (k+1)p$ и $\omega_0 + (k-1)p$.

Решение системы уравнения (1) удобно представить в виде ориентированного графа (см. рис. 1б).

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСИЛЕНИЯ И ШУМА И ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ СХЕМЫ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ЕМКОСТЯМИ

Частный случай схемы рис. 1 представляет система каскадного двухчастотного усилителя на двух переменных емкостях (см. рис. 2а).

Рис. 2. Схема каскадного двухчастотного усилителя на двух переменных емкостях ($C_{i\sim} = C_0[1 + m \cos(pt + \varphi_i)]^{-1}$).



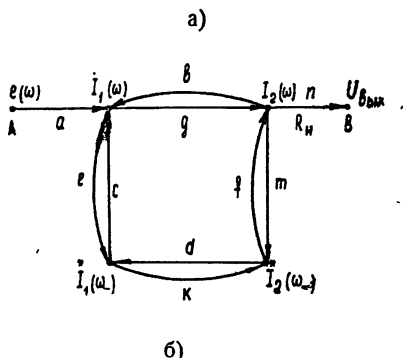
Изображенные на схеме фильтры являются пропускающими для частот сигнала ω и $\omega_- = \omega - p$ и запирающими для остальных частот. В этой схеме можно выделить контуры 1 и 2. Если диоды включены в линию длиной l , то элементы четырехполюсника z_1 и z соответственно равны

$$z_1 = -jz_0 \operatorname{ctg}(\beta l), \quad z = jz_0 / \sin(\beta l), \quad (2)$$

где z_0 — волновое сопротивление линии, β — постоянная распространения.

В соответствии с изложенным выше токи в контурах связаны с ЭДС сигнала и ЭДС преобразования соотношениями, представленными на графе рис. 2б, отдельные ветви которого обозначают

$$\begin{aligned} a &= 1/z_{11}(\omega); & b &= -z(\omega)/z_{11}(\omega); & c &= -0,5jm_1 \exp(j\varphi_1)/\omega C_{10}z_{11}(\omega); \\ d &= z^*(\omega_-)/z_{11}^*(\omega_-); & e &= 0,5jm_1 \exp(-j\varphi_1)/\omega C_{10}z_{11}^*(\omega_-); \\ f &= 0,5jm_2 \exp(j\varphi_2)/\omega C_{20}z_{22}(\omega); & g &= -z(\omega)/z_{22}(\omega); \\ k &= -z^*(\omega_-)/z_{22}^*(\omega_-); & m &= -0,5jm_2 \exp(j\varphi_2)/\omega C_{20}z_{22}^*(\omega_-), \end{aligned} \quad (3)$$



где

$$\begin{aligned} z_{11}(\omega) &= R_r + z_{g_1}(\omega) + z_l(\omega) + z(\omega), \\ z_{11}^*(\omega_-) &= z_{g_1}^*(\omega_-) + z_l^*(\omega_-) + z^*(\omega_-), \\ z_{22}(\omega) &= R_n + z_{g_2}(\omega) + z_l(\omega) + z(\omega), \\ z_{22}^*(\omega_-) &= z_{g_2}^*(\omega_-) + z_l^*(\omega_-) + z^*(\omega_-). \end{aligned}$$

Пользуясь правилом Мэсона для коэффициента передачи графа (см., например, [7, 8]), найдем коэффициент передачи от точки A к точке B , который при $l = \lambda\omega/4$, $l = n\lambda\omega_-/2$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ и резонансе в контурах с одинаковыми переменными емкостями, нагрузками и потерями ($z_{11}(\omega) = R_r + r$, $z_{22}(\omega) = R_n + r$, $R_r = R_n = R$) имеет вид

$$K_u = \frac{u_{\text{вых}}}{e(\omega)} = -j \frac{R}{R+r} (z_0 + m^2/8C_0^2 \omega \omega_- r) [R+r + z_0^2/(R+r) - m^2/4C_0^2 \omega \omega_- r]^{-1}. \quad (4)$$

В этом случае коэффициент передачи (усиления) по мощности

$$G = 4|K_u|^2. \quad (4a)$$

Обозначая в дальнейшем для первого контура холостые частоты индексом x , а резонансные — индексом 0, положив $B = \omega_{x0}/\omega_{10}$, $A = m^2/4C_0^2$,

$$Q_1 = Q_{x0}/B, \quad Q_{x0} = \omega_{x0}L_x/r, \quad Q_0 = \omega_0L_0/(R+r), \quad \xi = 2\Delta\omega/\omega_0$$

и используя эти обозначения для выражения импедансов схемы, найдем произведение коэффициента усиления на полосу пропускания

$$K_u \text{ рез } \xi = \frac{R}{R+r} (z_0 + A/2\omega_0^2 B) [(R+r)Q - z_0^2Q_0/(R+r) + AQ_1/Br]^{-1}. \quad (5)$$

Чтобы определить коэффициент передачи схемы в обратном направлении, в соответствии с правилами обращения графов (см. [7, 8]) изменим направление ветвей n и a на рис. 2б и подставим сюда

$$n = 1/z_{22}(\omega), \quad a = R_r.$$

Учитывая эти изменения, получим для случая резонанса

$$\begin{aligned} K_u \text{ обр} &= -j \frac{R}{R+r} (z_0 - m^2/8C_0^2 \omega \omega_- r) [R+r + z_0^2/(R+r) - m^2/4\omega \omega_- C_0^2 r]^{-1}, \\ G_{\text{обр}} &= 4|K_u \text{ обр}|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Отношение

$$\beta = \frac{G}{G_{\text{обр}}} = (z_0 + m^2/8C_0^2 \omega \omega_- r)^2 (z_0 - m^2/8C_0^2 \omega \omega_- r)^{-2} \quad (7)$$

становится бесконечно большим, если $z_0 = m^2/8C_0^2 \omega \omega_- r$. Иными словами, при конечном усилении в прямом направлении система не пропускает в обратном направлении.

При расчете коэффициента шума следует учесть, что источники шумовых ЭДС находятся в разных точках схемы. Это приводит к тому, что в графе системы появятся источники (см. рис. 3а и 3б) шумов (от сопротивлений потерь диодов и нагрузки) на частотах ω и ω_- в первом и втором контурах:

$$e_1(\omega) = e_2(\omega) = (4kT_d r \Delta f)^{1/2},$$

$$e_1^*(\omega_-) = e_2^*(\omega_-) = (4kT_d r \Delta f)^{1/2}, \quad e_{R_H}(\omega) = (4kT_0 R_H \Delta f)^{1/2},$$

где T_d и T_0 — температура диодов и комнатная температура.

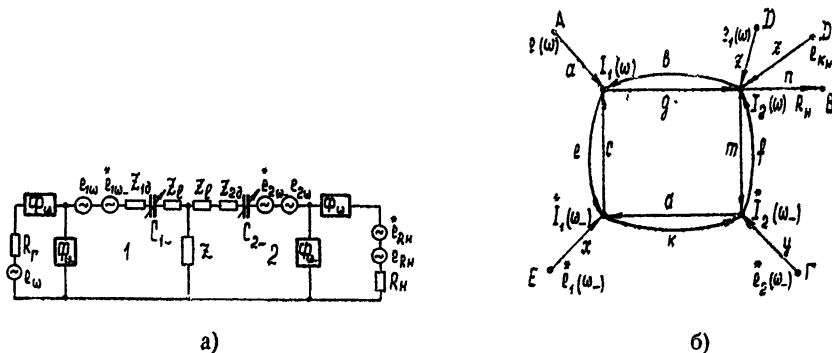


Рис. 3.

Определив передачи из точек приложения шумов A, B, Γ, E, D в B и пользуясь определением коэффициента шума как отношения полной мощности шумов на выходе, вызванной всеми ЭДС шума, к мощности выходных шумов, вызванных ЭДС шумов сопротивления R_r , найдем значение коэффициента шума системы:

$$F = 1 + \frac{r}{R} \frac{T_d}{T_0} + \left(\frac{r}{R} \frac{T_d}{T_0} + \frac{T_H}{T_0} \right) \left[(z_0 - m^2/8\omega\omega_- C_0^2 r)(z_0 + m^2/8\omega\omega_- C_0^2 r)^{-1} \right]^2 + \frac{2r}{R} \frac{T_d}{T_0} \{ [m(R+r) + z_0]/4\omega_- C_0 r \}^2 (z_0 + m^2/8\omega\omega_- C_0^2 r)^{-2}. \quad (8)$$

Как видно из (4), в случае согласования для $r \ll R, z_0 \approx R + r \approx R$ входное и выходное сопротивления системы равны $z_{вх} \approx z_{вых} \approx R$. При этом из формулы (4) получаем

$$z_0 \approx R = \frac{m^2}{8C_0^2 \omega\omega_- r} \frac{\sqrt{G} + 1}{\sqrt{G} - 1}. \quad (9)$$

Для усилителя на базе такой схемы с переменной емкостью (например, с полупроводниковыми диодами) $r = 6 \text{ ом}$, $C_0 = 0,13 \text{ пф}$, если диод работает в режиме с детектированием накачки (или с положительным смещением) на частоте $f_0 \approx 10^9 \text{ гц}$ и при $n = 5$, полагая $m \approx 1$, из формул (4), (4а), (5) — (9) имеем $\Delta f/f_0 = 0,38$, $z_0 = R = 145 \text{ ом}$, $\beta = 15 \text{ дб}$, $F = 1,17$, если $G = 15 \text{ дб}$. При охлаждении диодов до температуры жидкого азота $F = 1,05$. Если $G = 20 \text{ дб}$, то $\Delta f/f_0 = 0,20$, $z_0 = R = 120 \text{ ом}$, $\beta = 20 \text{ дб}$, $F = 1,16$. При охлаждении до температуры жидкого азота $F = 1,04$.

В заключение остановимся на физических причинах, обуславливающих столь высокие расчетные параметры рассмотренной схемы. Прежде всего следует указать на однонаправленность изученной схемы, которая связана с интерференцией колебаний и шумов, идущих из нагрузки и второго контура на выход схемы по двум путям, отчетливо видимым на графе рис. 2б. Граф позволяет без дополнительных вычислений установить, какие сдвиги фазы должны быть между колебаниями, если нужно обеспечить их подавление или прохождение между двумя точками системы. Благодаря однонаправленности шумы системы уменьшаются за счет отсутствия усиления в обратном направлении. Действительно, шумы на-

грузки и второго контура на частоте сигнала вносят при согласованном входе вклад в коэффициент шума в β раз меньший, чем входной контур. Это видно из сравнения коэффициентов при втором и третьем слагаемых в выражении для F (см. (8)).

С другой стороны из формулы (8) видно, что вклад шумов сопротивлений на холостой частоте ω_0 , пропорциональный глубине модуляции емкости m , уменьшается с ростом этой частоты. Нужно отметить также, что шумы на холостой частоте проходят одинаково на выход как из первого, так и из второго контура, что связано с природой самого усилителя (существование холостой частоты является необходимым условием усиления в системе).

В схеме, рассмотренной в [2], коэффициент шума получается хуже, чем в настоящей системе. Это объясняется тем, что в последовательной схеме легко реализуется большое отношение холостой и сигнальной частот.

Основным преимуществом последовательной схемы по сравнению с параллельными является возможность реализации режима с большей (примерно в 1,5 раза) глубиной модуляции [10] за счет модуляции параметров диода током, а не напряжением. С другой стороны, в схемах с последовательным включением диодов уменьшается также шунтирующее действие паразитных емкостей конструкций (монтажа), т. е. возрастает схемный коэффициент включения переменной емкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Baldwin, Proc. IRE, 49, 1075 (1961).
2. J. Hamasaki, The Bell System Technical J., 43, 1123 (1964).
3. K. Graboueski, Proc. IEEE, 53, 1313 (1965).
4. В. С. Эткин, Е. М. Гершензон, Параметрические системы на полупроводниковых диодах, изд. Сов. радио, М., 1964.
5. В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1150 (1964).
6. В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1006 (1964).
7. С. Мэзон, Г. Циммерман, Электронные цепи, сигналы и системы, ИЛ, М., 1963.
8. Л. Робишо, М. Буавер, Ж. Робер, Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам, изд. Энергия, М., 1964.
9. Теория линий передачи сантиметровых волн, 1, 2, перевод с англ., изд. Сов радио, М., 1951.
10. G. Matthaei, Tr. IRE, MTT-9, 23 (1961).

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
9 февраля 1966 г.

INVESTIGATION OF CASCADE PARAMETRIC SYSTEMS WITH SUCCESSIVE SWITCHING OF MODULATED CAPACITIES

K. S. Mosoyan, I. A. Stroukov, V. S. Etkin

Considers the cascade couplings of circuits with many variable parameters. The system of algebraic equations is used to characterize the scheme (derived by using the results of [4, 5]). The solution of the system is found by means of oriented graphs. A full calculation is made of the cascade circuit of two variable capacities (successively connected in the signal line), showing that such a system will have very good parameters.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.3

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНОЙ
АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ**

А. А. Янцевич

Рассмотрение задач, связанных с динамооптическими явлениями, сводится к следующей системе уравнений Максвелла [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{E}, & \text{div } \mathbf{H} &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{H}, & \text{div } \mathbf{D} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \overset{\vee}{\epsilon}(\overset{\vee}{P}) \mathbf{E},$$

где тензор диэлектрической проницаемости $\overset{\vee}{\epsilon}$ задается как функция тензора напряжений сплошной среды. Для установившихся турбулентных потоков вязкой несжимаемой жидкости в линейной модели изотропной гидродинамики тензор вязких напряжений $\overset{\vee}{P}$ линейно выражается через тензор скоростей деформации $\overset{\vee}{V}$, и поэтому $\overset{\vee}{\epsilon}$ можно в рассматриваемом случае считать функцией $\overset{\vee}{V}$. Так как изменение $\overset{\vee}{\epsilon}$ под влиянием вязких напряжений мало, то зависимость $\overset{\vee}{\epsilon}(\overset{\vee}{V})$ можно представить в следующем виде:

$$\overset{\vee}{\epsilon}(\overset{\vee}{V}) = \epsilon_1 [(1 + \eta_1 I_2) \mathbf{I} + \eta_2 \overset{\vee}{V} + \eta_3 \overset{\vee}{V}^2], \quad (2)$$

где ϵ_1 — диэлектрическая проницаемость неподвижной жидкости, $I_2 = V_{ik} V_{ki}$ — инвариант тензора скоростей деформации, η_1, η_2, η_3 — так называемые динамооптические постоянные, причем $\eta_1, \eta_3 \sim \eta_2^2$.

При турбулентном режиме движения жидкости $\overset{\vee}{V}$ является случайным тензорным полем и, следовательно, соответствующая электродинамическая задача носит вероятностный характер. Поэтому при оптическом исследовании турбулентных потоков вязкой жидкости можно построить или усредненную оптическую картину потока (определение по известному среднему полю $\langle \mathbf{E} \rangle$ поляризации, ориентации осей эллипса поляризации и т. д.) или найти вероятностные характеристики электродинамических и оптических величин. Нахождение среднего поля связано с вычислением тензора эффективной диэлектрической проницаемости, который определяется из соотношения $\langle \overset{\vee}{\epsilon} \mathbf{E} \rangle = \overset{\vee}{\epsilon}^{\text{эфф}} \langle \mathbf{E} \rangle$ и является в общем случае линейным интегральным оператором. Наличие малого параметра позволяет воспользоваться теорией возмущений, применение которой несколько осложняется вероятностным характером задачи [3-5]. Заметим, что наиболее последовательно вопросы электродинамики неоднородной анизотропной случайной среды рассмотрены в работе [5], где методами квантовой теории поля получено выражение для $\overset{\vee}{\epsilon}^{\text{эфф}}$ при любых (а не только при малых) случайных возмущениях сплошной среды.

Ограничимся в рассматриваемом случае следующим «модельным» уравнением для монохроматического поля \mathbf{E} :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\vee}{\epsilon} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где $\overset{\vee}{\varepsilon} = \varepsilon_1(I + \eta \overset{\vee}{\varepsilon^1} + \eta^2 \overset{\vee}{\varepsilon^2})$, а $\overset{\vee}{\varepsilon^1}$ и $\overset{\vee}{\varepsilon^2}$ — случайные тензорные поля, вероятностные характеристики которых известны. Воспользовавшись процедурой, развитой в работе [4], получаем с точностью до η^3 следующее векторное интегро-дифференциальное уравнение для $\langle E \rangle$:

$$L \langle E \rangle - \eta^2 k_0^2 \langle \overset{\vee}{\varepsilon^1} \rangle \langle E \rangle + \eta^2 \left[k_0^4 \langle \overset{\vee}{\varepsilon^1} \rangle \int \overset{\vee}{G}(r, r') \langle \overset{\vee}{\varepsilon^1}(r') \rangle \langle E(r') \rangle dr' - \right. \\ \left. - k_0^4 \langle \overset{\vee}{\varepsilon^1}(r) \rangle \int \overset{\vee}{G}(r, r') \overset{\vee}{\varepsilon}(r') \langle E(r') \rangle dr' + k_0^2 \langle \overset{\vee}{\varepsilon^2} \rangle \langle E \rangle \right] = 0, \quad (4)$$

где $L = \text{rot rot} - k_0^2$, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_1 / c^2$, а $\overset{\vee}{G}(r, r')$ — тензорная функция Грина оператора L для неограниченного пространства [3, 4], Пусть

$$\langle \overset{\vee}{\varepsilon^1} \rangle = \langle \overset{\vee}{\varepsilon^2} \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_{ik}(r) \varepsilon_{lm}(r') \rangle = A_{iklm} e^{-\xi|a}, \quad \xi = |r - r'|, \quad (5)$$

где $\overset{\vee}{A}$ — постоянный тензор четвертого ранга, причем $A_{lllm} = 0$, а a — некоторая постоянная, характеризующая масштаб корреляции. (Заметим, что в рассматриваемом случае статистические свойства среды задаются аргюи, строгий подход заключался бы в нахождении $\langle v_{ik} \rangle$ и $\langle v_{ik} v_{lm} \rangle$ из уравнений гидродинамики, в этом смысле задача носит «модельный» характер.) При этих предположениях уравнение (4) для $\langle E \rangle$ упрощается:

$$L \langle E \rangle - \eta^2 k_0^4 \langle \overset{\vee}{\varepsilon^1}(r) \rangle \int \overset{\vee}{G}(r, r') \overset{\vee}{\varepsilon^1}(r') \langle E(r') \rangle dr' = 0. \quad (6)$$

Будем искать решения уравнения (6) в виде плоских волн:

$$\langle E \rangle = B \exp(ikr). \quad (7)$$

Имеем из (6) с точностью до η^3

$$(k^2 - k_0^2) B - (kB)k + \eta^2 k_0^4 \overset{\vee\vee}{AF}(k_0, \chi) B = 0, \quad (8)$$

где

$$(\overset{\vee\vee}{AFB})_j = A_{jklm} F_{kl} B_m, \\ \chi = k_0 a, \quad (9)$$

$$F_{kl}(k_0, \chi) = \frac{1}{k_0^3} \left\{ \int_0^\infty \frac{\exp(-a\zeta)}{\zeta^2} \left[\zeta(-1 - i\chi_0 \zeta + \chi_0^2 \zeta^2) \sin \chi_0 \zeta - \right. \right. \\ \left. \left. - (3 - 3i\chi_0 \zeta - \chi_0^2 \zeta^2) \frac{\chi_0 \zeta \cos \chi_0 \zeta - \sin \chi_0 \zeta}{\zeta \chi_0^2} \right] d\zeta \right\} \delta_{lm} - \\ - \frac{1}{k_0^3} \left\{ \int_0^\infty \frac{\exp(-a\zeta)}{\zeta^3 \chi_0^2} (3 - 3i\chi_0 \zeta - \chi_0^2 \zeta^2) (3 \sin \chi_0 \zeta - \chi_0^2 \zeta^2 \sin \chi_0 \zeta - 3\chi_0 \zeta \cos \chi_0 \zeta) d\zeta \right\} k_{lm}^0, \\ a = 1 - i\chi_0.$$

$\overset{\vee}{k^0} = \overset{\wedge}{k_0} \overset{\wedge}{k_0}$ — диадное произведение единичных векторов направления k_0 .

Из (8) видно, что для $\overset{\vee}{\varepsilon^{\text{эфф}}}$ имеем

$$\overset{\vee}{\varepsilon^{\text{эфф}}} = \eta^2 k_0^2 \overset{\vee\vee}{AF}(k_0, \chi). \quad (10)$$

В двух предельных случаях $\chi_0 \ll 1$ и $\chi_0 \gg 1$ для $\overset{\vee}{\varepsilon^{\text{эфф}}}$ получаем следующие выражения:

$$\overset{\vee}{\varepsilon^{\text{эфф}}} = 2\eta^2 k_0^{-1} \chi_0^3 (1 + 3i\chi_0) \overset{\vee}{A} (4I - \overset{\vee}{k^0}/8) \quad (\chi_0 \ll 1), \quad (11)$$

$$\overset{\vee}{\varepsilon^{\text{эфф}}} = -2i\chi_0 k_0^{-1} \eta^2 \overset{\vee}{A} (I + \overset{\vee}{k^0}) \quad (\chi_0 \gg 1). \quad (12)$$

Характер зависимости $\overset{\vee}{\varepsilon^{\text{эфф}}}$ от безразмерного параметра χ_0 в выражениях (11), (12)

аналогичен результатам работы [3], где рассматривался случай изотропного малого возмущения сплошной среды, однако предложенный в работе [3] метод возмущений нуждается в некоторых уточнениях (по этому поводу можно сослаться на работу [4], где разложение по малому параметру проведено с учетом всех членов второго порядка по η^2)

Вернемся теперь к системе (1). Найдем уравнение для характеристического функционала $\Phi[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \tau]$, который полностью описывает вероятностные свойства электромагнитного поля:

$$\Phi[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \tau] = \langle \exp i[(\mathbf{uE}) + (\mathbf{wH}) + (\tau \epsilon)] \rangle, \quad (13)$$

где

$$(\mathbf{uE}) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_\beta(r, t) E_\beta(r, t) dr dt,$$

(для (\mathbf{wH}) аналогично)

$$(\tau \epsilon) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tau_{\beta\gamma}(r, t) \epsilon_{\beta\gamma}(r, t) dr dt.$$

Умножая уравнения «движения» (1) на $\exp i[(\mathbf{uE}) + (\mathbf{wH}) + (\tau \epsilon)]$ и усредняя, получим следующие уравнения в функциональных производных для $\Phi[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \tau]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \Phi}{\delta w_\alpha(r, t)} &= -\epsilon_{\alpha p}^q \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\delta \Phi}{\delta u_q(r, t)}; & \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\delta \Phi}{\delta w_\alpha(r, t)} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta \tau_{\alpha\beta}(r, t) \delta u_\beta(r, t)} &= \epsilon_{\alpha p}^q \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\delta \Phi}{\delta w_q(r, t)}; & \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\delta \Phi}{\delta \tau_{\alpha\beta}(r, t) u_\beta(r, t)} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Предполагая, что характеристический функционал ϵ известен и обозначая его через $\Psi[\tau]$, получаем следующее «граничное» условие для $\Phi[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \tau]$:

$$\Phi[0, 0, \tau] = \Psi[\tau]. \quad (15)$$

Автор благодарен Н. И. Ахизеру и Г. Я. Любарскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
2. В. Л. Герман, А. А. Янцевич, Записки механико-математического ф-та и ХМО, 32, 17 (1966).
3. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 827 (1959).
4. F. C. Karal, J. B. Keller, J. Math. Phys., 5, 537 (1964).
5. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 39 (1966).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
14 марта 1966 г.

УДК 538.3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Г. А. Бегиашвили, Ю. С. Моник

В предыдущей заметке авторов [1] методом эффективной диэлектрической проницаемости (см. [2]) было получено выражение для излучения заряженной частицы, движущейся в статистически неоднородной анизотропной среде (поликристалле), в области низких частот $\omega \ll c/a$ (a — средний размер кристаллитов). В данной заметке рассмотрен противоположный предельный случай — излучение в области высоких частот $\omega \gg c/a$. Излучение заряженной частицы в статистически неоднородной изотропной среде в области высоких частот рассматривалось в работах [3, 4]. По-видимому, усло-

вие $\omega \gg c/a$ выполняется в оптической области спектра излучения заряженной частицы.

Статистически неоднородная анизотропная среда (поликристалл) в рассматриваемой области частот в случае изотропного распределения кристаллитов по углам описывается эффективным тензором диэлектрической проницаемости [5]:

$$(\epsilon_{эфф})_{ik} = (\epsilon + \gamma_1 + i\gamma_2) \delta_{ik},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{50} \frac{\nu}{\epsilon}, \quad \gamma_2 = \frac{7}{60} \frac{\nu a}{c \sqrt{\epsilon}} \omega, \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{1}{3} \epsilon_{ii}^0, \quad \nu = (\epsilon_{ik}^0)^2 - \frac{1}{3} (\epsilon_{ii}^0)^2,$$

ϵ_{ik}^0 — тензор диэлектрической проницаемости отдельных кристаллитов, ν — параметр анизотропии, который, например, для одноосного кристалла имеет вид $\nu = \frac{2}{3} (\epsilon_1 - \epsilon_3)^2$.

Соответственно для спектральной плотности потерь энергии частицы на единицу пути легко получим

$$W_\omega = \frac{7}{60} \frac{e^2 \omega^2 a}{\pi \nu_0^2 c} \frac{\nu}{\sqrt{\epsilon} (\epsilon + \nu/50 \epsilon)^2} \left\{ \ln \frac{q_0^2 \nu_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \beta^2 (\epsilon + \nu/50 \epsilon)} - (\epsilon + \nu/50 \epsilon) \beta^2 \right\}. \quad (2)$$

Здесь q_0 — параметр обрезания интеграла, в данном случае $q_0 \sim \epsilon^{3/2}/\nu a$.

При выводе формулы (2) предполагалось, что порог черенковского излучения (для средней диэлектрической проницаемости среды) не достигается. Из формулы (2), с другой стороны, видно, что вблизи порога черенковского излучения спектральная плотность потерь растет логарифмически.

Сравнивая полученные здесь выражения для потерь с результатами работ [1, 2], легко видеть, что спектральная плотность потерь для заданной величины неоднородности a ведет себя следующим образом: в области частот $\omega \ll c/a$ спектральная плотность потерь $W_\omega \sim \omega^4$, а в области $\omega \gg c/a$ $W_\omega \sim \omega^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Бегияшвили, Ю. С. Монин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, 3, 627 (1966).
2. В. В. Тамойкин, С. Б. Бирагов, ЖЭТФ, **44**, 1544 (1963).
3. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН Арм. ССР, **14**, 103 (1961).
4. В. В. Тамойкин, Диссертация, г. Горький, 1965.
5. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап. ХГУ, Труды физ.-мат. ф-та, **2**, 41 (1950).

Институт кибернетики АН ГССР

Поступила в редакцию
1 апреля 1966 г.

УДК 621.378.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВАРИАНТЕ ДВУХРЕЗОНАТОРНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА СО ВСТРЕЧНЫМИ ПУЧКАМИ

А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко

Одним из способов повышения стабильности частоты колебаний молекулярных генераторов является сужение спектральной линии в рамзеевских схемах с разнесенными резонаторами и встречными пучками. Принцип действия таких схем теоретически обоснован и экспериментально подтвержден в работах [1–4]. Однако вопрос об оптимальном варианте таких генераторов и о предельном выигрыше в эффективной добротности линии, который можно получить в реальных условиях, остался нерассмотренным.

Эффективная добротность спектральной линии в таких генераторах определяется, как правило, по крутизне изменения частоты генерации перестройкой резонаторов как $Q_{эфф} = Q_p \Delta\omega_p / \Delta\omega_r$. Выигрыш определяется как отношение эффективной добротности линии в симметричной двухрезонаторной схеме к добротности линии в генераторе с идентичным одиночным резонатором. В приближении малых амплитуд генерации он равен [2]

$$G = \frac{1 + 7\chi + 6\chi T/\tau}{1 + 3\chi} \quad (1)$$

Здесь τ — время пролета молекулой одиночного резонатора (общепринятая длина короткого ~ 10 см), T — время пролета расстояния l_0 между резонаторами, коэффициент ослабления пучка $\chi = N(l)/N(0)$, где $N(0)$ — число активных молекул, влетающих из сортирующей системы в первый по пучку резонатор, $N(l)$ — число молекул этого же пучка, достигающих второго резонатора, $l = l_0 + l_{\text{рез}}$, где $l_{\text{рез}}$ — длина резонатора.

С увеличением расстояния l , с одной стороны, линейно растет время пролета T , а с другой — убывает χ вследствие угловой расходимости пучка молекул. Знание зависимости χ от длины пучка l позволило бы решить вопрос об оптимальном с точки зрения выигрыша расстоянии между резонаторами, а также о величине максимально достижимого выигрыша в таких системах. Поэтому нами был поставлен эксперимент по определению зависимости $\chi(l)$ на молекулярном генераторе на переходе 3—3 аммиака $N^{14}H_3$.

Зависимость $\chi(l)$ определяется способом формирования пучка активных молекул, т. е. конструкцией источника молекулярного пучка и сортирующей системы. Нами исследовались зависимости $\chi(l)$ для тех сортирующих систем и источников, с которыми были получены наилучшие результаты в предыдущей работе [4]. Источником пучка служил цилиндрический канал, диаметр и длина которого равны 0,15 мм, расположенный на расстоянии 20 мм от начала сортирующей системы. Применялись кольцевые сортирующие системы, расстояние между кольцами у которых равнялось радиусу кольца. Система № 1 имела длину 40 мм и внутренний диаметр 3,5 мм. С этой системой нами ранее было получено самовозбуждение молекулярного генератора при удалении одиночного резонатора на 50 см от сортирующей системы. Система № 2 имела длину 100 мм и диаметр 6 мм. С ее помощью была получена генерация при удалении резонатора на 70 см [4].

Нами измерялось отношение числа активных молекул $N(l)$, попадающих из сортирующей системы в одиночный резонатор, удаленный от нее на расстояние l , к числу активных молекул $N(0)$, попадающих в резонатор, поднесенный непосредственно к сортирующей системе ($l = 0$). Для этого в обоих случаях при неизменных интенсивности пучка и сортирующем напряжении измерялся коэффициент усиления по мощности $K(l)$, $K(0)$ недовозбужденного мазера способом, описанным авторами ранее [5]*. Далее по коэффициенту усиления рассчитывался параметр возбуждения мазера $\eta(l) = 1 - [K(l)]^{-1/2}$; $\eta(0) = 1 - [K(0)]^{-1/2}$, который прямо пропорционален числу активных молекул, попадающих в резонатор. Отношение $\eta(l)/\eta(0) = N(l)/N(0)$ и давало величину $\chi(l)$.

Измерения проводились двумя способами. При первом из них источник пучка и сортирующая система помещались на движущуюся по направляющим платформу, позволявшую изменять расстояние от сортирующей системы до неподвижного резонатора непосредственно в рабочих условиях, при неизменном пучке и сортирующем напряжении. Достоинством этого способа является возможность снятия всей зависимости $\chi(l)$ за один эксперимент, а недостатком — трудность сохранения достаточно хорошей юстировки при больших (порядка полуметра) перемещениях сортирующей системы. Кроме этого, здесь ухудшались условия вымораживания пучка. Поэтому измерения были повторены вторым способом, в котором за один опыт снималась лишь одна точка $\chi(l)$, а изменение расстояния производилось скачками от опыта к опыту, причем на каждом расстоянии сортирующая система и источник юстировались заново.

При этом методе измерения основным являлось обеспечение воспроизводимости от опыта к опыту рабочей интенсивности пучка (воспроизводимость сортирующего напряжения обеспечивается легко). Для этого применялся второй, вспомогательный источник пучка, аммиак к которому подводился параллельно основному рабочему источнику. Длина подводных аммиак трубок оставалась одной и той же при всех опытах, что обеспечивало их одинаковое сопротивление потоку газа. Вспомогательный источник вводился в сторону и был нацелен на ионизационную манометрическую лампу, по показаниям которой и выставлялся пучок. Эта область установки была защищена холодными экранами, так что показания манометрической лампы зависели только от потока молекул из вспомогательного, но не из основного источника (что проверялось при отключенной вспомогательном источнике). После сортирующей системы ставилась холодная диафрагма и холодная медная трубка диаметром ~ 7 мм, внутри которой и пропускался пучок молекул. Аммиак при обоих опытах очищался перемораживанием. Повторение опытов день ото дня при одном и том же расстоянии между сортирующей системой и резонатором (причем установка каждый раз юстировалась заново) показало весьма хорошую воспроизводимость результатов. При работе по второму методу удалось получить меньшее ослабление пучка активных молекул с расстоянием, нежели

* Резонатор мазера имел длину 10 см, два отверстия связи и включался на проход. Частота пробного сигнала стабилизировалась по кварцевому генератору схемой ФАП; по кварцевому же генератору был стабилизирован гетеродин приемника. Детектор УПЧ приемника работал в квадратичной области.

в первом случае, при сохранении общего вида зависимости. Далее приводятся результаты, полученные вторым методом.

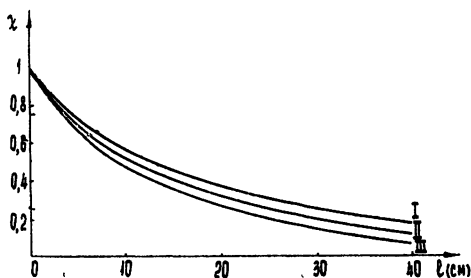


Рис. 1.

ошибка на большей части кривых не превышает 10÷15% и лишь на больших расстояниях, когда приходится измерять малый коэффициент усиления в присутствии шума, может доходить до 25%.

Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что сортирующая система № 1 формирует менее расходящийся пучок молекул и поэтому оказывается более предпочтительной в двухрезонаторной схеме, несмотря на то, что система № 2 дает большее абсолютное число активных молекул. С помощью экспериментальной зависимости $\chi(l)$ по формуле (1) был рассчитан максимально возможный выигрыш в эффективной добротности линии в двухрезонаторном молекулярном генераторе по сравнению с обычным молекулярным генератором с одним резонатором длиной 10 см.

Этот выигрыш оказался равным 3,5 и соответствует расстоянию между резонаторами ~ 27 см. Полученные зависимости $\chi(l)$ могут быть применены также и при расчетах других режимов таких генераторов [3, 4].

Авторы благодарят Б. В. Громова и Ю. И. Николаеву за помощь в эксперименте.

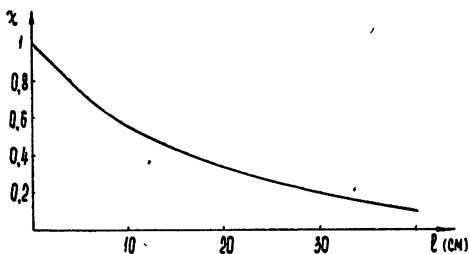


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964
2. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, ЖТФ, 36, 557 (1966).
3. А. Ф. Мухамедгалиева, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 302 (1966).
4. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
5. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, ЖЭТФ, 47, 1605 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 июня 1966 г.

УДК 621.378.33 · 539 28

РАЗРЕШЕНИЕ СТРУКТУРЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ $J=3$, $K=3$, $\Delta F=0$ АММИАКА $N^{14}H_3$

А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко

Структура наиболее интенсивного перехода $J=3$, $K=3$ инверсионного спектра аммиака исследовалась рядом авторов (см., например, [1]). Наиболее существенное

* На рисунках приведены, по существу, нормированные зависимости. Абсолютное число активных молекул увеличивалось с ростом напряжения.

продвижение было достигнуто Гордоном [2], применившим в качестве радиоспектроскопа мазер на пучке аммиака. Это позволило на порядок (с 70 до 7 кгц) повысить разрешающую способность по сравнению с ячейным газовым спектроскопом и разрешить ряд боковых компонент квадрупольной и магнитной сверхтонкой структуры. Однако центральная компонента $J = 3, K = 3, \Delta F = 0$, широко используемая в молекулярных генераторах [3], осталась неразрешенной. В настоящей работе сообщается о разрешении квадрупольной структуры этой линии, полученном благодаря увеличению разрешающей способности мазерного спектроскопа по схеме Рамзея [7].

Использовавшийся нами пучковый радиоспектроскоп по конструкции был аналогичен описанному ранее [4, 5]. Работы по увеличению чувствительности пучкового радиоспектроскопа [6], а также по получению длинных пучков активных молекул [5] позволили нам увеличить длину пучка до двух метров; ширина отдельного максимума при этом равнялась 240 герцам. Это примерно на 25% больше, чем ширина максимума, рассчитанного для максвелловского распределения молекул по скоростям [7]. Наблюдение линии при уменьшенной в 5 раз мощности индуцирующего переход сигнала показало отсутствие уширения из-за насыщения. Указанное уширение может быть объяснено селекцией молекул по скоростям в сортирующей системе, которая при большой длине пучка приводит, согласно [8], к некоторому обогащению отсортированного пучка быстрыми молекулами. Пролетное пространство и места расположения резонаторов тщательно экранировались от электрического и магнитного полей. Эффективность защиты от магнитных полей проверялась наблюдением линии при разных уровнях защиты, а также по неизменности формы линии при поднесении к установке магнита. Эффективность экранировки пролетного пространства от поля сортирующей системы проверялась по совпадению результатов при сортирующих напряжениях, различавшихся в 10 раз.

Малая относительная ширина рамзеевских компонент спектральной линии ($\Delta f/f \approx 10^{-8}$) требовала достаточной относительной стабильности частоты сигнала, индуцирующего переходы. Для стабилизации частоты сигнала использовалась схема фазовой автоподстройки по молекулярному генератору, а изменение частоты осуществлялось перестройкой этого молекулярного генератора [6], предварительно прокалиброванного по частоте.

Для повышения чувствительности радиоспектроскопа применялась молекулярная модуляция, которая осуществлялась наложением неоднородного электрического поля на участок пролетного пространства перед вторым (по пучку) резонатором. Это смешивало фазы поляризации различных молекул и приводило к исчезновению «молекулярного звона» во втором резонаторе [3]. Сигнал принимался супергетеродинным приемником, усиливался и поступал на фазовый детектор, интегрирующую RC-цепочку и самописец. Образец записи при линейной перестройке частоты сигнала мотором и постоянной времени интегрирующей цепочки, равной 1 сек., приведен на рис. 1. Симметричная картина спектральной линии, соответствующая относительной разности фаз колебаний СВЧ резонаторов 0 или π , устанавливалась с помощью фазовращателя.

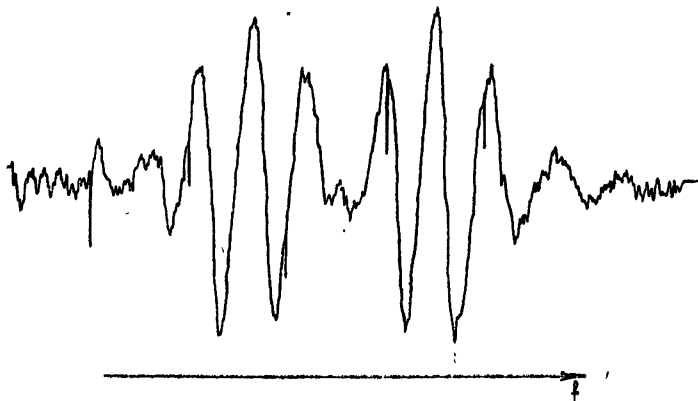


Рис. 1.

Квадрупольная структура линии $\Delta F = 0$ обусловлена небольшим различием констант квадрупольного взаимодействия для верхнего и нижнего инверсионных уровней, что приводит к расщеплению линии на три компоненты, соответствующие $F = 2; 3$ и 4 ($F = J + I, J$ — вращательное квантовое число, $I = 1$ — спин ядра азота). По существующей косвенной оценке (по асимметрии спектральной линии) разность квадрату-

польных констант порядка 4000 ± 1000 герц [2], что дает расстояние компонент $F = 2$; 3 и 4 от центра невозмущенной линии, равное $+1000$ *гц*, -1250 *гц* и $+400$ *гц* соответственно.

Наблюдение спектральной линии проводилось в различных условиях. Использовались как кольцевые, так и квадрупольные сортирующие системы. С квадрупольными системами было получено лучшее разделение компонент благодаря более быстрому затуханию интерференционной картины от каждой компоненты, что может быть объяснено большим разбросом сфокусированных молекул по скоростям и квантовым числам M_J . Кольцевые системы давали большую интенсивность сигнала. Изменение сортирующего напряжения меняло относительную интенсивность компонент, что объясняется преимущественной фокусировкой в удаленный резонатор молекул с тем или иным значением M_J . Часть наблюдений проводилась при замене первого по пучку резонатора волноводом с отверстием для пропускания пучка молекул, что устраняло возможную регенерацию спектральной линии в первом резонаторе.

Обработка около 40 записей показала, что наблюдаются две компоненты спектральной линии, отстоящие по частоте на 1586 ± 80 герц, интерпретированные нами как $F = 3$ и $F = 4^*$. Центр линии, соответствующий максимальной амплитуде колебаний молекулярного генератора на том же переходе, находится посередине между компонентами. Разность квадрупольных констант верхнего и нижнего уровней, определенная нами, равна 3800 герц со среднеквадратичной ошибкой ± 200 герц.

Получение записей с отношением сигнал/шум до 40 свидетельствует о возможности дальнейшего увеличения длины пучка в таких радиоспектроскопах. При этом следует учесть возможность усиления сигнала с малым уровнем шумов во втором по пучку резонаторе, регенерированном вспомогательным пучком активных молекул. Полученные результаты позволяют также надеяться, что при той же длине пучка (~ 2 м) удастся наблюдать вращательные переходы аммиака, в которых принимают участие те же уровни энергии, применяя известный метод индикации таких переходов по изменению интенсивности линии инверсионного перехода [10, 3]. Для этого нужен пучок молекул, прошедший через рамзеевскую систему субмиллиметрового диапазона, направить в обычный микроволновый резонатор, настроенный на частоту соответствующего инверсионного перехода. При индуцировании вращательных переходов субмиллиметровым сигналом будет изменяться населенность соответствующих инверсионных уровней, что может быть зарегистрировано по изменению коэффициента усиления недовозбужденного лазера. Использование схемы Рамзея с длиной пучка два метра в субмиллиметровом диапазоне позволило бы повысить добротность спектральной линии до $\sim 5 \cdot 10^9$.

В заключение авторы благодарят А. И. Наумова за любезно предоставленную низкочастотную часть аппаратуры, а также Б. В. Громова за помощь в эксперименте

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959
2. J. P. Gordon, Phys. Rev., **99**, 1253 (1955).
3. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
4. S. G. Kukulich, Phys. Rev., **138**, A 1322 (1965).
5. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 4, 824 (1966).
6. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Приборы и техника эксперимента, № 1, 212 (1964).
7. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
8. G. Becker, Zs. für angew. Phys., **19**, 537 (1965).
9. K. Shimoda, J. Phys. Soc. Japan, **12**, 1006 (1957).
10. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **34**, 1658 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 июля 1966 г.

* Это согласуется с расчетами [9], по которым отношение интенсивностей компонент с $F = 3$; 4 и 2 после сортировки равно 1 : 0,92 : 0,05 соответственно, т. е. вес третьей компоненты пренебрежимо мал.

УДК 621.378.001

О ДВУХКВАНТОВОМ ПОГЛОЩЕНИИ ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ

А. П. Александров, В. Н. Генкин, Г. Ф. Ефремова, А. М. Леонов

1. Нелинейные свойства органических молекул, проявляющиеся при лазерных мощностях излучения, служат важными источниками информации о строении молекул. При этом следует ожидать больших значений нелинейных восприимчивостей в оптике, так как органические молекулы обладают интенсивными переходами в этой области спектра. Здесь мы остановимся на двухквантовом поглощении. Экспериментально этот вопрос изучался лишь на циклических производных бензола [1-10]. Можно считать установленным, что флюоресценция этих соединений, возбуждаемая излучением ОКГ на рубине ($\omega_0 = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$), связана в основном с двухквантовым поглощением, хотя (при подходящей симметрии) не исключается образование и поглощение второй гармоники [11]. Отметим, что с ростом поглощения на частоте $2\omega_0$ эффективность образования второй гармоники падает.

Детальное выяснение механизма двухквантового поглощения и относительной роли в возбуждении люминесценции второй гармоники затруднено тем, что эффективность возбуждения известна лишь по порядку величины, а данные разных авторов сильно расходятся. Ниже обсуждается возможная роль колебательных состояний при двухквантовом поглощении и приводятся данные по измерению эффекта на новом классе соединений (β -дикетонатах Eu).

2. Плотность вероятности возбуждения W при двухквантовом поглощении для линейно поляризованного поля в дипольном приближении*

$$W = \frac{\chi''(\omega_0) (\bar{E}^2)^2}{\hbar} = \frac{(2\pi)^3}{\hbar^2} n_0 g(2\omega_0) M^2 \left(\frac{\omega_0 F}{c n(\omega_0)} \right)^2 = n_0 \delta F^2, \quad (1)$$

где $\chi''(\omega_0)$ — мнимая часть восприимчивости на частоте поля под действием куба поля E [12], n_0 — плотность молекул, $g(2\omega_0)$ — плотность возбужденных состояний, $n(\omega_0)$ — показатель преломления, F — плотность потока квантов, $M = \left| \sum_m d_{1m} d_{m2} (\omega_0 - \omega_{2m})^{-1} \right|^2$

(d_{1m} и d_{m2} — матричные элементы дипольного момента, 1, 2, m — соответственно начальное, конечное и промежуточные состояния); δ характеризует эффективность возбуждения на молекулу. Наблюдаемые значения $\delta \sim 10^{-49} \div 10^{-51}$ обычно объясняют чисто электронными переходами при d_{1m}, d_{m2} порядка дебая [1]. Такое объяснение, однако, не годится для centrosимметричных молекул с разрешенным переходом 1—2, если не считать, как в [2], что состоянию 2 соответствуют два электронных уровня разной четности. Когда речь идет о ряде веществ [7], квантовохимические расчеты для которых не подтверждают вырождения, гипотеза [2] выглядит искусственно. Двухквантовое поглощение таких молекул, по-видимому, связано в основном с электронно-колебательными переходами, так как волновые функции колебаний основного и возбужденного состояний существенно не ортогональны.

Наблюдаемые значения δ объясняются при рассмотрении в качестве промежуточных состояний колебательных подуровней термов 1 и 2, поскольку дипольные моменты колебательных переходов достигают в циклических производных бензола [14] 0,5 дебая. Речь идет о колебаниях в области $700 \div 900 \text{ см}^{-1}$ (неплоские колебания C—H связей колец), что допускает проверку гипотезы при исследовании замещенных соединений, электронные спектры которых существенно не искажены. Попытки [10, 15, 16] объяснения пространственной дисперсии, как следует из приведенных ниже достаточно точных измерений, не дают правильных значений по порядку величины.

3. Экспериментально двухквантовое поглощение измерялось на растворах $(\text{Bz Az})_4 \text{Eu}$ — тетраэтиламмоний-тетраakis-бензоилацетоната европия и тетраэтиламмоний-тетраakis-теноилтрифторацетоната европия $(\text{TTA})_4 \text{Eu}$ в ацетонитриле (10^{-2} м.л.). Особенностью этих β -дикетонатов является то, что возбуждение из органической части молекулы эффективно передается Eu, который фосфоресцирует в узкой области вблизи 6130 Å. Последнее обстоятельство позволяет провести более точное измерение δ .

Возбуждение осуществлялось гигантским импульсом рубинового ОКГ (мощность 2 Мвт при длительности по уровню $0,5 \sim 6 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$), причем плотность фотонов при незначительной фокусировке составляла $\sim 10^{26} \text{ фотон} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$. Зависимость ин-

* Выражение (1) может быть получено во втором порядке теории возмущений [13].

тенсивности люминесценции от мощности возбуждения имеет, в соответствии с (1), квадратичный характер, причем энергетическая структура $(\text{BzAz})_4 \text{Eu}$ и $(\text{TТА})_4 \text{Eu}$ исключает возможность ступенчатого поглощения. Полученные значения δ^* и χ'' в пересчете на плотность кристалла ($n \sim (1+5) 10^{21} \text{ см}^{-3}$) приведены в таблице 1. Там же для сравнения приведены данные по антрацену, оригинальные и вычисленные по литературным данным. Уместно отметить, что большему значению δ для $(\text{TТА})_4 \text{Eu}$ соответствует и большая вероятность электронно-колебательного перехода в области частот, отличающихся от ω_0 на величину колебательного кванта ($600 \div 1000 \text{ см}^{-1}$).

Таблица 1

Вещество	$\delta \cdot 10^{51}$	$\chi'' \cdot 10^{14}$	$n_0 \cdot 10^{-21}$ см^{-3}	Примечание
$(\text{BzAz})_4 \text{Eu}$	22	3,2	1	
$(\text{TТА})_4 \text{Eu}$	40	7,3	1	
Антрацен	6		5	
"	0,9; 4	0,7; 3,1		[6,7] (в растворе)
"	60,3; 2,5	46; 2,3; 1,9		[1,4,7] (поликристаллы)

Относительная точность наших измерений δ не хуже 50%, тогда как абсолютные значения δ измерены с точностью до двойки.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить Г. А. Домрачева, К. К. Фукина и М. И. Грязнову за синтез хелатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. L. Peticolas, J. P. Coldsborough, K. E. Rieckhoff, Phys. Rev. Lett., 10, 43 (1963).
2. S. Singh, B. P. Stoicheff, J. Chem. Phys., 38, 2032 (1963).
3. W. L. Peticolas, K. E. Rieckhoff, J. Chem. Phys., 39, 1347 (1963).
4. J. L. Hall, D. A. Yennings, R. M. McClinton, Phys. Rev. Lett., 11, 365 (1963).
5. S. Z. Weisz, A. B. Zahlan, J. Gilreath, R. C. Jarnagin, M. Silver, J. Chem. Phys., 41, 3491 (1964).
6. W. L. Peticolas, K. E. Rieckhoff, Phys. Lett., 15, 230 (1965).
7. D. H. McMahon, R. A. Soref, A. R. Franklin, Phys. Rev. Lett., 14, 1060 (1965).
8. S. Singh, L. T. Brodley, Phys. Rev. Lett., 12, 612 (1964).
9. P. M. Rentzepis, Yoh-Han Paо, Appl. Phys. Lett., 5, 156 (1964).
10. M. Iannuzzi, E. Polacco, Phys. Rev., 138A, 806 (1965).
11. Yoh-Han Paо, P. M. Rentzepis, Bull. Am. Phys. Soc., 10, 393 (1965); J. Chem. Phys., 43, 1281 (1965).
12. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
13. M. Coerper-Mayer, Ann. Physik, 9, 273 (1931).
14. Применение спектроскопии в химии, ИАМ, 1959.
15. M. Iannuzzi, E. Polacco, Phys. Rev. Lett., 13, 371 (1964).
16. R. Guccione, J. Van Kranendonk, Phys. Rev. Lett., 14, 583 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 июня 1966 г.

УДК 621.375.931

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ ПРИ МНОГОМОДОВОЙ НАКАЧКЕ

С. А. Ахманов, В. В. Бакланова, А. С. Чиркин

В настоящем сообщении приведены результаты теоретического исследования влияния многомодовой структуры накачки на процесс параметрического усиления бегущих электромагнитных волн. Как известно, в опытах по параметрическому усилению [1,2] и генерации [3-6] световых волн наблюдаются эффекты, не укладывающиеся в теорию

* Измерения проводились путем сравнения интенсивности люминесценции со светом калиброванной светометрической лампы.

параметрического усиления при монохроматической накачке: несоответствие экспериментальных и расчетных порогов параметрического усиления и генерации, пониженная фазовая селективность вырожденного параметрического усилителя света, аномальное уширение спектра усиленного сигнала и т. п. Ниже показано, что эти эффекты можно объяснить, учитывая немонохроматичность волны накачки, используемой в реальных условиях.

Ограничимся рассмотрением эффектов, связанных с временной немонохроматичностью накачки. Будем считать, что лазерную волну накачки на входе в нелинейную среду можно представить в виде

$$E_n(t) = e_n \sum_{n=1}^N A_{n,n} \cos[\omega_{n,n} t + \varphi_{n,n}(t)], \quad (1)$$

где e_n — вектор поляризации; $A_{n,n}$, $\varphi_{n,n}$, $\omega_{n,n}$ — амплитуда, фаза и частота n -ой моды накачки ($A_{n,n}$ для простоты считаются постоянными и $A_{n,1} = A_{n,2} = \dots = A_{n,n}$); $\Delta\omega = (\omega_{n,n+1} - \omega_{n,n})$ — частота биений между модами; N — число мод в волне накачки ($N\Delta\omega/\omega_{n,n} \ll 1$). Для проводимых ниже расчетов поле (1) удобно представить в виде квазимонохроматической волны с частотой $\omega_n = (\omega_{n,1} + \omega_{n,N})/2$:

$$E_n(t) = e_n A_{n,0}(t) \cos[\omega_n t + \varphi_{n,0}(t)]. \quad (2)$$

Сопоставляя представления (1) и (2), $A_{n,0}(t)$ и $\varphi_{n,0}(t)$ можно выразить через $A_{n,n}$ и $\varphi_{n,n}(t)$.

Процесс параметрического усиления монохроматического на входе «квадратичной» среды сигнала частоты ω_c ($\omega_c < \omega_n$)

$$E_c = e_c A_{c,0} \cos[\omega_c t + \varphi_{c,0}] \quad (3)$$

в поле волны накачки (2) описывается в приближении заданного поля ($A_n^2 \gg A_c^2$) укороченными нестационарными уравнениями

$$\frac{\partial E_n}{\partial z} + \frac{1}{u_n} \frac{\partial E_n}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_c}{\partial z} + \frac{1}{u_c} \frac{\partial E_c}{\partial t} + \delta E_c + i\beta_c E_n E_p^* = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} + \frac{1}{u_p} \frac{\partial E_p}{\partial t} + \delta E_p + i\beta_p E_n E_c^* = 0,$$

где $E = \frac{1}{2} A \exp(i\varphi)$, u_i — групповые скорости волн; ось z направлена по нормали к границе нелинейной среды и вдоль направления синхронизма, δ характеризует потери в среде, значение $\beta_{c,p}$ определяется нелинейностью среды.

Граничные условия для системы (4) имеют вид

$$E_n(t, z=0) = E_{n,0}(t); \quad E_c(t, z=0) = E_{c,0}; \quad E_p(t, z=0) = 0. \quad (5)$$

Для большинства практически интересных случаев процесс параметрического усиления можно рассматривать в квазистатическом приближении*

$$u_n = u_c = u_p = u. \quad (6)$$

Решая (4) с учетом (5) и (6), получим

$$E_c(t, l) = E_{c,0} \exp(-\delta l) \operatorname{ch} \{\beta |E_{n,0}(t-l/u)| l\}, \quad (7)$$

$$E_p(t, l) = i(\beta_p/\beta_c)^{1/2} E_{c,0} \exp(-\delta l) \frac{E_{n,0}(t-l/u)}{|E_{n,0}(t-l/u)|} \operatorname{sh} \{\beta |E_{n,0}(t-l/u)| l\}, \quad (8)$$

где $\beta = (\beta_p \beta_c)^{1/2}$. Пользуясь (7), (8) и (1), (2), можно определить спектр и мощность сигнала и волны разностной частоты в произвольном сечении среды l . Так, для двухмодовой накачки ($N=2$) напряженность поля сигнала при $\omega_n \neq 2\omega_c \neq \omega_{n,n}$ имеет вид

$$E_c = e_c A_{c,0} e^{-\delta l} \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}(\Gamma l) \cos \{(\omega_c \pm n\Delta\omega)(t-l/u) + \varphi_{c,0} - n[\varphi_{n,2}(t-l/u) - \varphi_{n,1}(t-l/u)]\}. \quad (9)$$

* Условие (6) является, как известно, условием широкополосного параметрического усиления. Условие, когда можно пренебречь различием групповых скоростей взаимодействующих волн, будет получено ниже.

Здесь $\Gamma = \beta A_{N2}$ и $J_{2n}(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Мощности, фигурирующие в эксперименте, измеряются приборами с постоянной времени $T_{\text{пр}} \gg (\Delta\omega)^{-1}$, поэтому полные мощности накачки $P_N = \frac{1}{2} N A_{N2}^2$ и сигнала $P_c^{(\text{инт})} = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}^2(\Gamma l) \exp \times$
 $\times (-2\delta l)$. Мощность спектральной компоненты частоты $(\omega_c \pm n\Delta\omega)$

$$P_c(\omega_c \pm n\Delta\omega) = P_{c0} J_{2n}^2(\Gamma l) \exp(-2\delta l), \quad (10)$$

причем ее ширина $2nD$, где D — коэффициент диффузии фаз мод накачки. Следовательно полная мощность сигнала

$$P_c^{(\text{инт})} = P_{c0} \exp(-2\delta l) [1 + J_0(2\Gamma l)]/2. \quad (11)$$

На графиках рис. 1 представлена зависимость приведенной ширины спектра, группирующегося вблизи ω_c , $2n = \Omega/\Delta\omega$, определенной по уровню $0,01 P_c(\omega_c)$, от длины l . При достаточно больших значениях $\beta l (2P_N)^{1/2}$ ширина спектра $\Omega \simeq a \Delta\omega (\beta l)^{1/2} P_N^{1/4}$, где $a = 1,34$ для $N = 2$ и $a = 2,42$ для $N = 3$. На рис. 1 также представлена приведенная спектральная ширина $2n$ для двухмодовой накачки, когда $\omega_n = \frac{1}{2} (\omega_{n1} + \omega_{n2}) = 2\omega_c$ и $u_n \neq u_c$. Видно, что в этом случае ширина спектра сигнала определяется кривой (1) до тех пор, пока

$$\Delta\omega |u_n^{-1} - u_c^{-1}| l/4 \ll 1. \quad (12)$$

Таким образом, различие групповых скоростей существенно лишь на длинах, на которых времена группового запаздывания взаимодействующих волн $T_{ij} = l |u_i^{-1} - u_j^{-1}|$ сравнимы со временем модуляции $\tau \sim [(N-1)\Delta\omega]^{-1}$.

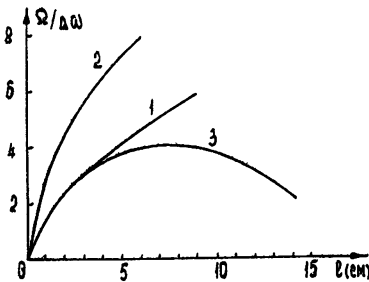


Рис. 1. График зависимости приведенной ширины спектра усиленного сигнала $2n = \Omega/\Delta\omega$ от длины l при $\beta(2P_N)^{1/2} = 1 \text{ см}^{-1}$ для случаев $N=2$ (кривые 1, 3) и $N=3$, $2\varphi_{n2} = \varphi_{n1} + \varphi_{n3}$ (кривая 2). Кривые 1, 2 соответствуют $\omega_n \neq 2\omega_c$ и $\omega_n = 2\omega_c$, $u_c = u_p = u_n = u$; кривая 3 — $\omega_n = (\omega_{n1} + \omega_{n2})/2 = 2\omega_c$ и $\Delta\omega |u_n^{-1} - u_c^{-1}| = 20 \text{ см}^{-1}$.

Пользуясь (10), можно определить величину пороговой мощности накачки $P_N^{(\text{пор})}$, при которой затухание волны сигнала сменяется ее нарастанием (см. рис. 2). Для не слишком малых $\delta l P_N^{(\text{пор})} \simeq 2(\delta/\beta)^2$ при $N = 2$;

$(\delta/\beta)^2$ при $N=2$ и $\frac{2}{3}(\delta/\beta)^2$ при $N=3$, т. е. с ростом

N мощность $P_N^{(\text{пор})}$ уменьшается. При $N \geq 3$ величина $P_N^{(\text{пор})}$ зависит от соотношения фаз φ_{n1} , однако всегда пороговая мощность при одномодовой накачке максимальна. Получить аналитические результаты при $N \geq 3$ удается лишь для спе-

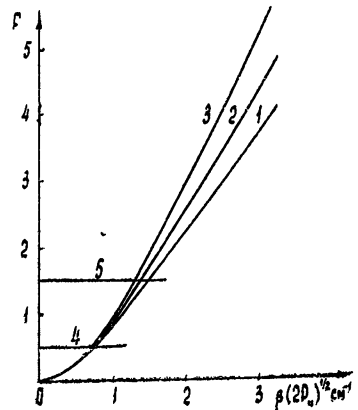


Рис. 2. Кривые для определения порога параметрического усиления сигнала:

1 — $\ln \text{ch}(L/2)$, $N=2$, $2 - \ln J_0(L/\sqrt{2})$, $N=2$;
 3 — $\ln [\text{ch}(L/2 \sqrt{3}) J_0(L/\sqrt{3})]$, $N=3$, $2\varphi_{n2} = \varphi_{n1} + \varphi_{n3}$,
 $L = \beta l (2P_N)^{1/2}$; 4 — $\delta l = 0,5$; 5 — $\delta l = 1,5$, $l = 3 \text{ см}$.

циальных законов соотношения фаз и распределения энергии в модах накачки. Практически интересным случаем является параметрическое усиление в поле второй гармоники колебания (1). При достаточно больших N пороговая мощность накачки равна

$$P_n^{(\text{пор})} = 8(\delta/\beta)^2 (N+1)^{-2} \quad (13a)$$

при $\beta l (8P_n)^{1/2} N^{-1} > 1$ и

$$P_n^{(\text{пор})} = 2\beta^{-2} l^{-2} (N+1/N-1)^2 \{ [1+2(N-1)\delta l/(N+1)]^{1/2} - 1 \}^2 \quad (13b)$$

при $\beta l (8P_n)^{1/2} N^{-1} < 1$.

Изложенная методика расчета позволяет проанализировать случай «вырожденного» параметрического усиления при многомодовой накачке, для которого частота сигнала ω_c кратна одной из частот накачки $\omega_{n\pi}$ ($2\omega_c = \omega_{n\pi}$). Можно показать, что с ростом N фазовая селективность усилителя с многомодовой накачкой меньше, чем у усилителя с одномодовой: взаимодействие сигнала с другими модами ($\omega_{nj} \neq 2\omega_c$) происходит по законам невырожденного усиления.

Таким образом, модовая структура накачки в параметрических процессах может существенно изменить количественные оценки; пренебрежение интерференционными эффектами и оперирование лишь с интегральной мощностью накачки $P_n = \frac{1}{2} \sum_n A_{n\pi}^2$ является, как следует из приведенного анализа, весьма грубым приближением*. Изложенная методика расчета, примененная к процессам вынужденного рассеяния модулированного излучения, позволяет получить достаточно общие количественные результаты по сравнению со спектральным рассмотрением, использованным в [10, 11]. Разумеется, общие выводы о расширении спектра (ср. с [12]) и коэффициенте нарастания, полученные выше, относятся и к вынужденному рассеянию.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Akhmanov, V. G. Dmitriev, A. I. Kovrygin, R. V. Khokhlov, *Physics of Quantum Electronics Conf., Proceedings, New York* (1965).
2. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, А. С. Пискарскас, В. В. Фадеев, Р. В. Хохлов, *ЖЭТФ, письма*, 2, 7, 300 (1965).
3. J. Giordmaine, R. Miller, *Phys. Rev. Lett.*, 14, 973 (1965).
4. J. Giordmaine, R. Miller, *Physics of Quantum Electronics Conf., Proceedings, New York* (1965).
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, *УФН*, 88, № 3, 439 (1966).
6. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, В. А. Колосов, А. С. Пискарскас, В. В. Фадеев, Р. В. Хохлов, *ЖЭТФ, письма*, 3, № 9, 372 (1966).
7. J. Ducuing, N. Bloembergen, *Phys. Rev.*, 133, A1493 (1964).
8. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, *Вестник МГУ, сер. физики*, № 5, 78 (1965).
9. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, А. С. Чиркин, О. Н. Чунаев, *ЖЭТФ*, 50, № 4, 829 (1966).
10. N. Bloembergen, Y. Shen, *Phys. Rev. Lett.*, 13, № 24, 720 (1964).
11. W. Wagner, S. Yatsiv, R. Hellwarth, *Physics of Quantum Electronics Conf. Proceedings, New York* (1965).
12. B. Stoecheff, *Phys. Lett.*, 7, 186 (1963).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
6 апреля 1966 г.

* Напомним, что с аналогичной ситуацией приходится сталкиваться и в задаче о генерации оптических гармоник [7-9].

К ВОПРОСУ О ДИФРАКЦИИ НА ЦИЛИНДРЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

М. В. Бутров

В ряде работ [1-3] рассматривалась задача дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре произвольного сечения. В работах [1, 3] предполагается, что представление рассеянного поля в форме

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) \exp(jn \varphi) \tag{1}$$

справедливо вплоть до поверхности цилиндра. Однако формула (1), т. е. система функций $H_n^{(1)}(kr)$, недостаточна для точного представления поля в области $r_c < r < < r_c \max$, так как там помимо «расходящихся» рассеянных волн имеются также «сходящиеся» рассеянные волны (обусловленные, в частности, переотражениями). Поэтому указанное выше допущение ограничивает решение лишь областью низких частот. Граничные условия в [1-3] удовлетворяются в конечном числе точек на периферии сечения и, таким образом, задача сводится к решению конечной системы алгебраических уравнений. Из результатов вычислений, приведенных в [3], видно, что для гладких цилиндров, не сильно отклоняющихся от круговых, представление рассеянного поля в форме (1) вблизи поверхности цилиндра справедливо вплоть до средних частот.

В настоящей заметке упомянутой выше круг задач рассматривается с помощью одного из вариантов метода возмущений. При этом отпадает необходимость в решении алгебраических систем уравнений. Суть приема состоит в следующем. В уравнение контура, ограничивающего сечение цилиндра, вводится малый параметр η . Так как a_n в (1) зависит от формы контура, то a_n представляется степенным рядом по параметру η . Сходные соображения использованы в [4] для решения задач электростатики.

Пусть уравнение контура имеет вид

$$r_c = r_0 [1 + \eta f(\varphi)] \tag{2}$$

где

$$|f(\varphi)| \leq 1, \quad |\eta k r_0| < 1.$$

Будем искать поле рассеянной волны в форме

$$\Psi^S(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{0n} + \eta a_{1n} + \eta^2 a_{2n} + \dots) H_n^{(1)}(kr) \exp(jn \varphi), \tag{3}$$

где через Ψ обозначена единственная параллельная оси цилиндра компонента электрического поля; a_{in} ($i = 1, 2, 3, \dots$) — искомые коэффициенты. На поверхности цилиндра должны удовлетворяться граничные условия

$$\Psi^i(r_c, \varphi) + \Psi^S(r_c, \varphi) = 0. \tag{4}$$

Каждую частную сумму в (3) назовем рассеянным полем нулевого, первого и т. д. порядков и запишем (4) в виде

$$\Psi^i(r_c, \varphi) + \Psi_0^S(r_c, \varphi) + \eta \Psi_1^S(r_c, \varphi) + \eta^2 \Psi_2^S(r_c, \varphi) + \dots = 0. \tag{5}$$

Подставим (2) в (5) и разложим функции в (5) в ряд Тейлора по малому параметру η . Необходимыми условиями, при которых сумма разложений в (5) равна нулю, будут равенства нулю коэффициентов при различных степенях η . Эти условия имеют вид

$$\Psi^i(r_0, \varphi) + \Psi_0^S(r_0, \varphi) = 0,$$

$$r_0 f(\varphi) [\Psi_r^i(r_0, \varphi) + \Psi_{0r}^S(r_0, \varphi)] + \Psi_1^S(r_0, \varphi) = 0. \tag{6}$$

$$\frac{r_0^2 f^2(\varphi)}{2} [\Psi_{rr}^i(r_0, \varphi) + \Psi_{0rr}^S(r_0, \varphi)] + r_0 f(\varphi) \Psi_{1r}^S(r_0, \varphi) + \Psi_2^S(r_0, \varphi) = 0,$$

где значок r обозначает дифференцирование по радиальной координате. Равенства (6) представляют собой граничные условия для нахождения коэффициентов a_{in} в (3),

Описанная процедура была применена к задаче рассеяния на цилиндре прямо-угольного сечения для случая нормального падения плоской волны на грань цилиндра. Вычисления были выполнены для $kr_0=1,17$ и $kr_0=3,40$; $\eta=0,2$ и $f(\varphi)=-\cos 4\varphi$. Ограничиваясь рассеянным полем второго порядка, получим после несложных преобразований из (6) искомые коэффициенты:

$$a_{0n} = -(j)^n \frac{J_n(kr_0)}{H_n^{(1)}(kr_0)}; \quad a_{1n} = -\frac{(j)^{n+1}}{\pi H_n^{(1)}(kr_0)} \left[\frac{1}{H_{n-4}^{(1)}(kr_0)} + \frac{1}{H_{n+4}^{(1)}(kr_0)} \right];$$

$$a_{2n} = -\frac{(j)^{n+1}}{2\pi [H_n^{(1)}(kr_0)]^2} - \frac{(j)^{n+1}}{4\pi H_n^{(1)}(kr_0)} \left[\frac{1}{H_{n-8}^{(1)}(kr_0)} + \frac{1}{H_{n+8}^{(1)}(kr_0)} \right] +$$

$$+ \frac{kr_0}{2H_n^{(1)}(kr_0)} [a_{1, n-4} (H_{n-4}^{(1)}(kr_0))' + a_{1, n+4} (H_{n+4}^{(1)}(kr_0))'] . \quad (7)$$

Вычисления проводились по формулам (3) и (7). Для сравнения с точными данными [5] для указанных величин kr_0 вычислялась нормированная плотность интенсивности

$$G_R = |\Psi^S(r, \varphi)|^2 / \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Psi^S(r, \varphi)|^2 d\varphi .$$

Результаты вычислений представлены на рис. 1. Штриховой линией изображена кривая для $kr_0=1,17$. Последняя соответствует цилиндру квадратного сечения с $kb=1,0$ (b — половина стороны квадрата). Максимальное отклонение поверхности

[2] от поверхности бруса по нормали к грани последнего порядка $0,06 kb$. Сплошная кривая на рис. 1 соответствует $kr_0=3,40$. Поверхность бруса с $kb=3,00$ в этом случае отклоняется от поверхности [2] не более, чем на $0,25 kb$. Обе эти кривые хорошо согласуются с соответствующими кривыми в [5]. Последние не приведены на рис. 1, поскольку из-за сравнительно мелкого масштаба изображения, принятого в [5], соответствующие кривые полностью совпадают. Штрихпунктирная линия изображает характеристику рассеяния для невозмущенного цилиндра с $kr_0=3,40$.

Из сравнения соответствующих характеристик видно, что при $\eta \neq 0$ существенно увеличивается рассеяние назад и уменьшается рассеяние под углами $\pm 90^\circ$, что и следует ожидать из физических соображений. При вычислениях выяснилось, что для $kb=1,0$ достаточно первого приближения. Для $kb=3,00$ вычислялось рассеянное поле второго порядка. Были выполнены прикидочные расчеты для $kb=5,0$ во втором приближении. Максимальное расхождение в значениях G_R составило в этом случае около 30%. Таким образом, можно утверждать, что для цилиндров квадратного сечения с $kb < 4$ приведенные здесь формулы удовлетворительно описывают рассеянное поле. Можно также утверждать, что для цилиндров более гладких и более выпуклых, чем брус, описанный в заметке способ решения будет давать удовлетворительные результаты вплоть до средних частот. Следует, однако, отметить, что описанный способ предпочтительней методов, описанных в [1-3], лишь при ручном счете.

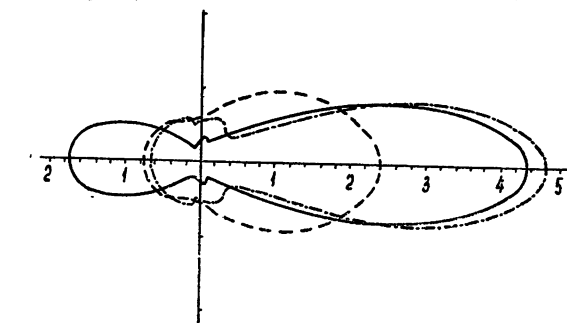


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Y. Yee, IEEE Trans., AP-13, 818 (1965).
2. Н. Y. Yee, IEEE Trans., AP-13, 822 (1965).
3. С. R. Mullin, R. Sandberg, C. O. Velline, IEEE Trans., AP-13, 141 (1965).
4. V. Erga, J. Math. Phys., 4, 1517 (1963).
5. К. К. Mei, Van Bladel, IEEE Trans., AP-11, 185 (1963).

К ВОПРОСУ О ФОКУСИРУЮЩИХ И ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

А. Н. Серебряник

Некоторые экспериментально наблюдаемые особенности в работе электронных приборов СВЧ становятся понятными, если принимать во внимание энергетический спектр электронных потоков [1, 2].

В связи с этим представляет интерес создание приборов, позволяющих производить энергетический анализ потока. Ниже приводится исследование свойств поля сферического конденсатора, которое можно применить для анализа спектра энергии однородных по массе частиц.

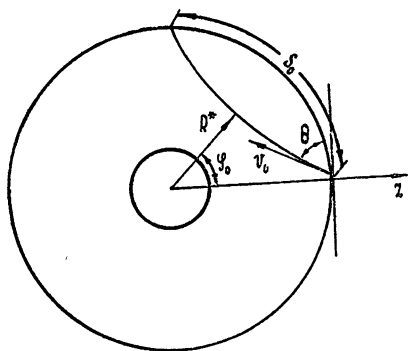


Рис. 1. Сечение сферического конденсатора плоскостью, проходящей через центр сферических поверхностей.

На рис. 1 представлено сечение сферического конденсатора плоскостью, проходящей через центр сферических поверхностей. Поток заряженных частиц входит в поле конденсатора под углом θ к касательной к поверхности внешней сферы. Между внутренней и внешней обкладками приложена разность потенциалов δU . Полярность δU такова, что поле оказывает на частицу тормозящее действие. Кинетическая энергия частиц, влетающих в поле, определяется потенциалом внешней обкладки U . При определенном соотношении между ускоряющим и тормозящим потенциалами частицы, влетающие в поле конденсатора, возвращаются на внешнюю обкладку, не достигая внутренней.

Определим основные параметры траектории частицы в конденсаторе — расстояние по поверхности внешней сферы от точки входа до точки возвращения на внешнюю обкладку S_0 и расстояние минимального удаления траектории частицы от центра сферы R^* . Для этого запишем систему

уравнений движения частицы в поле конденсатора:

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = r \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U R_0 r_0 \eta}{(R_0 - r_0) r^2},$$

$$r^2 \dot{\varphi} = R_0 v_0 \cos \theta$$

с начальными условиями

$$t = 0, \quad r = R_0, \quad \varphi = 0, \quad dr/dt = -v_0 \sin \theta, \quad v_0 = \sqrt{2\eta U}.$$

Здесь R_0 и r_0 — соответственно радиус внешней и внутренней сферы, $\eta = e/m$ — удельный заряд частицы. Уравнения записаны в полярной системе координат r, φ .

Решение уравнений (1) имеет вид

$$S_0 = 2R_0 \arcsin \{ \operatorname{tg} \theta [\operatorname{tg}^2 \theta + (1 + p/\cos^2 \theta)^{-1/2}] \},$$

$$R^* = R_0 \{ [\operatorname{tg}^2 \theta + (1 + p/\cos^2 \theta)^{-1/2}]^2 - p/\cos^2 \theta \}^{-1}.$$

Выражение (2), устанавливая зависимость смещения частиц вдоль внешней сферы S_0 от ускоряющего напряжения U , входящего в безразмерный параметр

$$p = \partial U / 2U(R_0/r_0 - 1),$$

показывает, что рассматриваемая система может быть использована для энергетического анализа потоков заряженных частиц.

Как и большинство известных в настоящее время спектрометров, описываемая инерционно-оптическая система не только разделяет частицы по энергии, но и фокусирует их по направлению. Условием фокусировки частиц по углу входа (направлению) является равенство $(\partial S_0 / \partial \theta) = 0$, эквивалентное соотношению

$$1/p = 2 \operatorname{tg}^2 \theta - 1/\cos^2 \theta.$$

Уравнение (3) было решено численным методом. Его решение представлено на рис. 2, из которого видно, что угол $\theta = \theta_{\text{ф}}$, под которым должен входить слаборасхо-

дящийся пучок частиц в поле конденсатора для того, чтобы сфокусироваться на внешней обкладке в узкую фокальную полоску на расстоянии S_0 от точки входа, с ростом p уменьшается. При $\theta = \theta_{\text{ф}}$, удовлетворяющем (3), величина S_0 максимальна. В таблице 1 представлена зависимость S_0/R_0 , R^*/R_0 , $S_0/2R_0$, R_0/r_0 от параметра p при $\theta = \theta_{\text{ф}}$. Случай $(R_0/r_0)_1$ соответствует $(\delta U/U) = 1$, а случай $(R_0/r_0)_2$ — значению $(\delta U/U) = 2$. Удельная дисперсия по энергии определяется соотношением

$$\delta_{u \text{ сф}} = \frac{U}{\Delta S_0} \frac{dS_0}{dU}, \quad (4)$$

где ΔS_0 — ширина линии изображения.

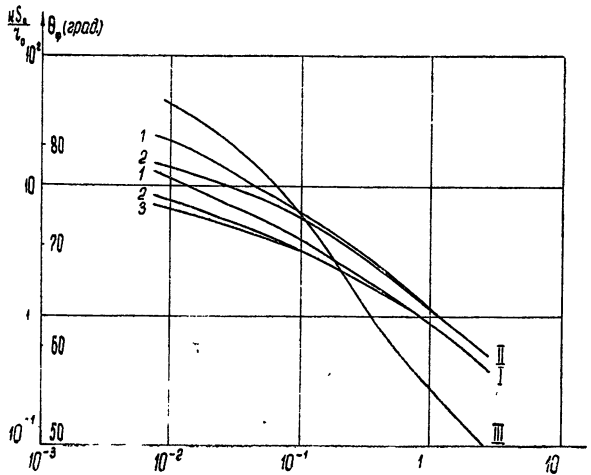


Рис. 2. Зависимость угла фокусировки $\theta_{\text{ф}}$ от параметра p (кривая III); зависимость kS_0/r_0 от величины параметра p при углах раствора пучка 1 — $\alpha = 0$, 2 — $\alpha = 2^\circ$, 3 — $\alpha = 4^\circ$ (группа кривых I построена для $\delta U/U = 1$, а группа кривых II — для $\delta U/U = 2$).

Таблица 1

p	R^*/R_0	S_0/R_0	$\varphi_0 = S_0/2R_0$	$(R_0/r_0)_1$	$(R_0/r_0)_2$
2,38	0,92	0,35	10°	1,21	1,42
1,28	0,84	0,54	15°20'	1,39	1,78
0,505	0,635	1,06	30°	2,0	2,98
0,28	0,562	1,38	39°50'	2,78	4,58
0,152	0,435	1,74	49°50'	4,29	7,57
0,078	0,318	2,1	60°10'	7,4	13,9
0,032	0,201	2,44	70°10'	16,6	32,1
0,008	0,095	2,8	80°	65,0	129,5

Дифференцируя (2) по U :

$$dS_0/dU = kS_0/U, \quad (5)$$

$$k = p \frac{\text{tg } \theta}{\cos^2 \theta} \{ [\text{tg}^2 \theta + (1 + p/\cos^2 \theta)^2] \arcsin [\text{tg } \theta [\text{tg}^2 \theta + (1 + p/\cos^2 \theta)^2]^{-1/2}] \}^{-1}$$

и подставляя (5) в (4), получим $\delta_{u \text{ сф}} = kS_0/\Delta S_0$.

На рис. 2 представлена зависимость kS_0/r_0 от параметра p . С помощью приведенных кривых можно оценить дисперсионные свойства сферического конденсатора. Сравнение полученной дисперсии с величиной последней в других системах можно провести на основании таблицы 1 работы [3]. Как следует из этой таблицы, оптимальные значения удельной дисперсии в различных конденсаторах при углах раствора пучка частиц $\alpha = 2^\circ$ и 4° соответственно равны: для плоского конденсатора $2/a^2 = 1/2$ и $1/8$, для сферического $8/3a^2 = 2/3$ и $1/6$, конденсатора Юза—Рожанского $6/4a^2 = 3/8$ и $3/32$, цилиндрического конденсатора с вводом частиц под углом α к оси $2,46/a^2 = 0,615$ и $0,15$. Удельная дисперсия в описанном конденсаторе может быть значительно больше (например, 18 — для $\alpha = 2^\circ$ и 10 — для $\alpha = 4^\circ$ при $p = 0,008$, $\Delta S_0 = 1$, $r_0 = 1$, рис. 2). Это является несомненным преимуществом ввода заряженных частиц в поле сферического конденсатора со стороны внешней обкладки.

В реальных приборах входные и выходные щели имеют небольшую ширину. Сквозь них проходят пучки с первеансом $< 10^{-8} a/b^{3/2}$, поэтому при выводе расчетных соотношений влиянием пространственного заряда можно пренебречь [4, 5].

Таким образом, необходимые данные для построения спектрометра, в котором в качестве анализирующего элемента использовалась бы описанная система, получены.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Шевчик, Н. И. Сеницын, Радиотехника и электроника, 6, 1881 (1961).
2. Н. Johnson, Proc. IRE, 43, 684 (1955).
3. И. Г. Козлов, А. С. Шаповалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 531 (1964).
4. Н. С. Зинченко, Курс лекций по электронной оптике, изд. Харьковского у-та, 1961, гл. 6, стр. 98.
5. А. С. Шаповалов, ЖТФ, 35, 1053 (1965).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
10 ноября 1965 г.

УДК 621.385.64

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА НАЛИЧИЯ ВИРТУАЛЬНОГО КАТОДА В НЕРАЗРЕЗНОМ МАГНЕТРОНЕ

Л. М. Грошков, С. В. Степанов

В работе [1] методом зондирования магнетрона продольным электронным лучом был обнаружен виртуальный катод в середине электронного облака неразрезного магнетрона в статическом режиме. Этот виртуальный катод представляет собой слой пространственного заряда повышенной плотности, образованный электронами, движущимися вблизи вершин их петлеобразных траекторий в нижней (прикатодной) части облака.

Проверить наличие виртуального катода в магнетроне можно путем измерения тока на зонд-проволочку, натянутую параллельно оси лампы на некотором расстоянии от катода. При изменении анодного напряжения ток на зонд будет меняться. Из-за повышенной плотности пространственного заряда в окрестности виртуального катода ток зонда должен возрастать, когда поверхность виртуального катода будет проходить через зонд. В случае же, когда виртуальный катод будет находиться ниже зонда (ближе к катоду) или выше него, ток должен быть меньшим. Изменение положения виртуального катода относительно неподвижного зонда при заданном магнитном поле может быть достигнуто путем изменения анодного напряжения.

Рассмотрим зависимость от анодного напряжения плотности тока j в точках некоторой цилиндрической поверхности r , лежащей внутри электронного облака, исходя из теории бидромического состояния пространственного заряда с двухпетлевыми траекториями электронов. Для этого воспользуемся соотношениями, полученными в работе [2], и учтем наличие виртуального катода в середине облака. Поскольку система аксиально симметрична, плотность тока во всех точках этой поверхности будет одинаковой. Исходные уравнения для определения плотности тока таковы:

$$j = \rho v, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r_k^2 R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dV}{dR} \right) = \frac{-\rho}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

$$v = (2eV/m)^{1/2}, \quad (3)$$

$$V = \frac{m \omega_H^2 r_k^2}{8e} \left[\mu (R')^2 + \left(R - \frac{1}{R} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Здесь ρ —плотность пространственного заряда, v —скорость электронов, V —электростатический потенциал, $\omega_H = eB/m$, e/m —удельный заряд электрона, B —индукция

внешнего магнитного поля, $R=r/r_k=R_0-\mu^{1/4} \sin \psi/4\sqrt{2k}$, $R_0 = \frac{\Phi}{2} + (\Phi^2/4+1)^{1/2}$, $\Phi = \sqrt{\mu} \omega_H t/2$ — безразмерное время, $k=(2/\mu)^{1/2}(1+R_0^{-4})^{1/2}$, $\psi = \int_0^{\Phi} k d\Phi$, $\mu = \frac{1}{2\pi^2} \times \left[\int_0^{\Phi_1} (1+R_0^{-4})^{1/2} d\Phi \right]^2$, $\Phi_1 = R_{01}^2 - R_{01}^{-2}$, $R_{01} = r_0/r_k$, r_0 — радиус виртуального катода, r_k — радиус катода.

Исключая ρ и v из уравнений (1)–(4), получим для плотности тока в точке R выражение

$$j = \frac{\epsilon_0 m \omega_H^2}{8e} \left[\mu \left(\frac{R''}{R} + \frac{R'''}{R'} \right) + 2 \left(1 + \frac{1}{R^4} \right) \right] (2eV_a m)^{1/2},$$

где R' , R'' , R''' — производные функции $R(\Phi)$ по Φ .

График рассчитанной зависимости $j(V_a)$ приведен на рис. 1. Как видно из графика, при определенных значениях анодного напряжения существует максимум плотности тока в точке с выбранной координатой r . Подобный максимум должен наблюдаться, очевидно, и в токе, текущем на продольный зонд, помещенный на том же расстоянии r от оси лампы, если в магнетроне имеет место гидромическое состояние пространственного заряда с двухпетлевыми траекториями электронов.

Таким образом, измеряя ток на зонд в зависимости от анодного напряжения, можно проверить наличие виртуального катода в середине облака пространственного заряда.

Измерения проведены на специальном макете магнетрона, схематический чертеж которого представлен на рис. 2.

Оксидный катод магнетрона имеет диаметр 18 мм и длину 90 мм. Внутрь катода плотно вставлена кварцевая трубка с подогревателем в виде спирали. Кварцевая трубка обеспечивает механическую прочность системы, изоляцию катода от подогревателя и высокую тепловую инерционность катода. Последняя необходима для того, чтобы во время измерений можно было выключать накал лампы с целью устранения неконтролируемого магнитного

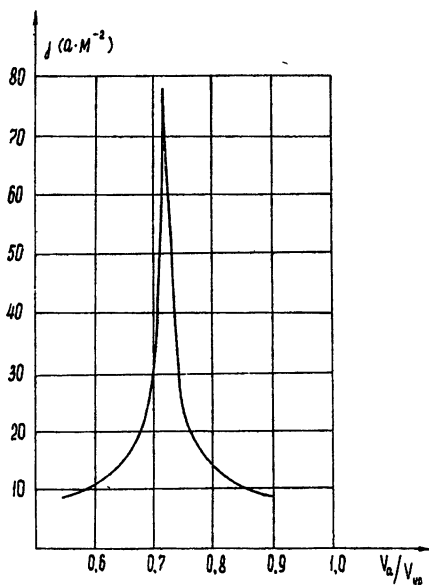


Рис. 1. Расчетная кривая $j(V_a/V_{кр})$ при $r_3=14,5$ мм.

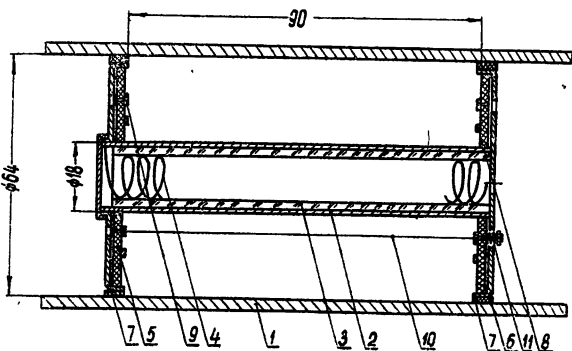


Рис. 2. Конструкция экспериментальной лампы:

- 1—анод, 2—катод, 3—кварцевая трубка, 4—подогреватель, 5—керамический диск, 6—катодная чашечка, 7—слюдяная прокладка, 8—малое кольцо, 9—большое кольцо, 10—металлический зонд, 11—пружина,

поля, создаваемого током накала.

Катод закреплен в анодном цилиндре с помощью металлических чашечек, приваренных к концам катода и отделенных от анода слюдяными прокладками. В каждую чашечку со стороны, обращенной к катоду, вставлены керамические диски, на которых укреплены узкие металлические кольца для задания потенциала на края магнетрона. На основании работ [1, 3, 4] на кольца подается напряжение, соответствующее бриллюэновскому распределению потенциала в магнетроне.

Сквозь небольшие отверстия в кольцах пропускается молибденовая проволока-зонд

диаметром 0,1 мм, натянутая параллельно оси лампы. Натяжение проволоки с помощью пружин, укрепленных на керамических дисках, исключает ее провисание в горячей лампе. На зонд подается тот же потенциал, что и на соответствующие кольца. Для устранения вторичной эмиссии зонд и кольца покрыты тонким слоем окиси висмута, полученным осаждением окиси в виде сажи в результате распыления металлического висмута в атмосфере воздуха при давлении порядка нескольких мм рт. ст.

Анодом магнетрона служит медная труба с внутренним диаметром (диаметр анода), равным 64 мм, которая одновременно выполняет роль внешней оболочки лампы.

Расхождение между измеренными анодными напряжениями, при которых наблюдается максимальный ток на зонд, и расчетными значениями V_a может быть связано с погрешностями в установке зонда и в измерении магнитного поля и анодного напряжения. Если учесть, что абсолютная ошибка в установке зонда не превышает 0,2 мм, а магнитное поле и анодное напряжение измеряются приборами, обеспечивающими точность 1,5 и 0,5% соответственно, то нетрудно показать, что суммарная относительная ошибка может достигать 6%.

Были использованы два экземпляра лампы с различным расстоянием зонда от катода. Некоторые графики зависимости тока на зонд от анодного напряжения, полученные с помощью лампы № 1, приведены на рис. 3. Эти кривые относятся к случаю, когда зонд находится в средней части электронного облака. На графиках видны отчетливые максимумы тока на зонд при определенных анодных напряжениях. Величина

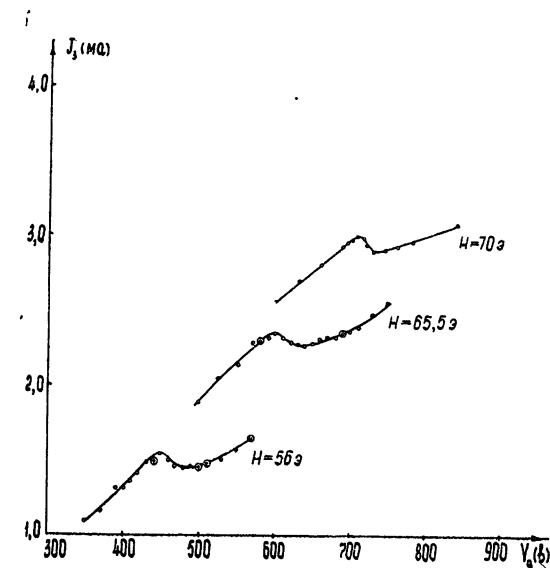


Рис. 3. Экспериментальные кривые тока на зонд

этих напряжений и соответствующие значения магнитного поля приведены в таблице 1. В той же таблице указаны значения V_a , при которых, согласно расчету, проведенному указанным в [1] способом, поверхность виртуального катода должна проходить через зонд. Аналогичные данные, относящиеся к лампе № 2, приведены в таблице 2.

Таблица 1

$r_3 = 14,5$ мм

$H(\text{э})$	56	65,5	70	75
$V_a(\text{В})$ расч.	432	580	663	761
$V_a(\text{В})$ эксп.	450	600	708	756

Таблица 2

$r_3 = 13,0$ мм

$H(\text{э})$	56	65,5	70	75
$V_a(\text{В})$ расч.	341	459	539	602
$V_a(\text{В})$ эксп.	350	460	550	610

Как видно из таблиц, расчетные значения анодных напряжений с точностью до нескольких процентов совпадают с экспериментальными. Этот результат подтверждает наличие виртуального катода в середине электронного облака магнетрона.

Интересно, что измеренный ток зонда по порядку величины совпадает с расчетными значениями тока. Плотность расчетного тока вблизи максимума J_{max} составляет несколько десятков ампер на квадратный метр ($J_{\text{max}} \approx 80 \text{ а} \cdot \text{м}^{-2}$). Площадь S использованного в лампе зонда равна 28 мм^2 .

Отсюда

$$J_{\text{max}} = S j_{\text{max}} \approx 2,2 \text{ ма.}$$

Как видно из графиков рис. 3, ток на зонд вблизи максимума также равен нескольким миллиамперам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1217 (1964).
2. L. Brillouin, F. Bloch, Adv. in Electronics, 3, 145 (1951).
3. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 748 (1959).
4. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1104 (1961).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
27 января 1966 г.