

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Железняков В. В. К теории переноса излучения в неоднородной среде . . . . .	1057
Кондратенко А. Н. Кинетическая теория слоисто-плазменного волновода в сильном магнитном поле . . . . .	1065
Рядов В. Я., Фурашов Н. И. О ширине спектральной линии поглощения водяного пара $\lambda = 0,92$ мм . . . . .	1073
Дрягин Ю. А., Кисляков А. Г., Кукин Л. М., Наумов А. И., Федосеев Л. И. Измерение атмосферного поглощения радиоволн в диапазоне 1,36—3,0 мм . . . . .	1078
Скрипник Г. И. О влиянии движения космического источника на частотный спектр флуктуаций амплитуды и фазы в турбулентной атмосфере . . . . .	1085
Калмыков А. И., Островский И. Е., Розенберг А. Д., Фукс И. М. Обратное рассеяние сантиметровых радиоволн взволнованной поверхностью моря при малых углах скольжения . . . . .	1035
Каллистратова М. А., Кон А. И. Флуктуации угла прихода световых волн от протяженного источника в турбулентной атмосфере . . . . .	1100
Яшин Ю. Я. О методе геометрической оптики в теории распространения электромагнитных волн в гиротропной среде . . . . .	1108
Беспалов В. И. Удвоение частоты света в нелинейной среде со случайными неоднородностями . . . . .	1117
Тамойкин В. В. О влиянии некоторых статистических факторов на характеристики рассеяния ограниченного цилиндра . . . . .	1124
Цареградский В. Б. О некоторых применениях обобщенной теоремы Каллена—Велтона для расчета флуктуационных характеристик квантовых устройств . . . . .	1134
Генкин В. М., Генкин В. Н. Излучение молекулы в резонансной среде большой плотности . . . . .	1142
Марцафей В. В. Излучение электромагнитных волн бесконечным пакетом импедансных полуплоскостей . . . . .	1146
Чугунов Ю. В. Об излучении заряда в среде с конвективной неустойчивостью . . . . .	1151
Дерюгин И. А., Воронцов В. И. Квадратичные соотношения в электродинамике движущихся сред . . . . .	1155
Гуревич Г. Л., Отмахов Ю. А. Комбинационные процессы в распределенных системах бегущей волны . . . . .	1164
Шапошников А. А. О роли поперечной группировки в клистроне с широким электронным потоком . . . . .	1175
Афанасов С. Г., Ашбель И. Я., Красильников Ю. Е. Об островном эффекте в платонах . . . . .	1190
Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Об одном радиофизическом методе измерения малых механических колебаний . . . . .	1196
Кетков Ю. Л. Об оптимальных методах кусочно-линейной аппроксимации . . . . .	1202
Неймарк Ю. И. и Фишман Л. З. О поведении в целом фазовых траекторий квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами . . . . .	1210
Алексеев А. С. Применение метода точечных преобразований к исследованию динамики нелинейных импульсных систем . . . . .	1217
Лыткин И. П. Об области управляемости и корректности постановки одной оптимальной задачи . . . . .	1222
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Соломин Б. А. Параметрическое преобразование спектра видеоимпульсов в ключевой линии . . . . .	1227
Литвак А. Г. Усредненное уравнение движения заряженной частицы в стационарном случайном электромагнитном поле . . . . .	1229
Павленко Ю. Г., Гальцов Д. В. Классическое рассмотрение индуцированного излучения электронов в скрещенных полях . . . . .	1232
Кривицкас Р., Лесаускис В. Синхронизация автодина с автоматическим регулированием амплитуды . . . . .	1234
<b>Информация</b>	
Аннотации статей, помещенных в ж. «Геомagnetизм и астрономия», т. VI, № 3, 1966 г. . . . .	1238
Содержание т. IX журнала «Известия высших учебных заведений» МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1966 г. . . . .	1239
Именной указатель т. IX журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1966 г. . . . .	1245

УДК 621.371.123

## К ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. В. Железняков

Известное уравнение переноса излучения в неоднородной среде (1) получено, исходя из уравнения непрерывности для плотности энергии излучения в пространстве координат и направлений групповой скорости. Показана несостоятельность теории переноса в неоднородной среде, выдвинутой Остером [1], и недопустимость ее применения Остером и Софиа [2] к исследованию радиоизлучения «спокойного» Солнца.

1. Проблема переноса излучения играет фундаментальную роль во многих задачах астрофизики и радиоастрономии, что оправдывает публикацию специальной статьи о корректной форме уравнения переноса. Ниже мы покажем несостоятельность уравнения переноса излучения в неоднородной среде, предложенного Остером [1], и корректность уравнения переноса в форме (1). Затем мы остановимся на выборе выражения для излучательной способности  $a$  и поглощения  $\mu$  в работах [1, 2] и обсудим результаты применения теории переноса излучения Остера к проблеме излучения из плазмы, в частности, к проблеме радиоизлучения «спокойного» Солнца.

Хорошо известно (см., например, [3, 4] и [5], § 26), что уравнение переноса излучения в неоднородной изотропной среде имеет вид\*

$$n^2 \frac{d}{dl} \left( \frac{I}{n^2} \right) = a - \mu I. \quad (1)$$

Здесь  $n$  — показатель преломления,  $I$  — интенсивность излучения, отнесенная к единичному телесному углу,  $a$  — излучательная способность единицы объема,  $\mu$  — коэффициент поглощения,  $dl$  — элемент длины луча. Это уравнение справедливо в области, где законно приближение геометрической оптики, и записано для стационарного случая, когда  $I$  не зависит от времени  $t$ .

Уравнение (1), определяющее баланс энергии излучения вдоль луча, обычно получают следующим образом. Если прозрачная ( $\mu = 0$ ) и неизлучающая ( $a = 0$ ) среда неоднородна, то вследствие рефракции интенсивность излучения вдоль луча изменяется пропорционально  $n^2$ , т. е.

$$\frac{I}{n^2} = \text{const}, \quad \frac{d}{dl} \left( \frac{I}{n^2} \right) = 0 \quad (2)$$

или, что то же самое,

$$\frac{dI}{dl} = \frac{2I}{n} \frac{dn}{dl} \quad (3)$$

(см., например, [3] и [5], § 26). Влияние поглощения ( $\mu \neq 0$ ) и излучения ( $a \neq 0$ ) в среде скажется в дополнительном изменении интенсивности

\* Здесь и ниже рассматриваются спектральные значения интенсивности  $I$ , излучательной способности  $a$  и т. д. Однако для простоты записи обычно в этом случае индексы  $\omega$  у соответствующих величин мы опускаем.

вдоль луча; это изменение на единицу длины луча равно  $a - \mu I$ . Прибавив последнюю величину к изменению  $I$  за счет рефракции (3), получим соотношение

$$\frac{dI}{dl} = \frac{2I}{n} \frac{dn}{dl} + a - \mu I,$$

которое совпадает с уравнением переноса излучения в неоднородной изотропной среде (1)\*.

Приведенные соображения представляются довольно убедительными. Однако в работах [1, 2], а также в статье [3] были выражены сомнения в правильности уравнения (1).

В статье [1] Остер предложил другое уравнение переноса излучения в неоднородной среде, а именно:

$$v_{гр} \nabla f = q - \sigma f. \quad (4)$$

Здесь  $v_{гр}$  — групповая скорость фотонов,  $f$  — число фотонов в единице объема и телесного угла,  $q$  — число излученных фотонов из единицы объема в единицу времени и телесного угла,  $\sigma$  — фактор, который, будучи помножен на  $f$ , характеризует число поглощенных фотонов. Помножив обе части уравнения (4) на энергию фотона  $\hbar\omega$ , приведем (4) к виду

$$v_{гр} \nabla u = a - \sigma u, \quad (5)$$

в котором теперь вместо плотности фотонов  $f$  фигурирует обычное макроскопическое значение плотности энергии излучения в единичном телесном угле  $u = \hbar\omega f$ . Поскольку направление луча совпадает с направлением групповой скорости, уравнения (4), (5) можно представить так:

$$v_{гр} \frac{df}{dl} = q - \sigma f, \quad (4a)$$

$$v_{гр} \frac{du}{dl} = a - \sigma u. \quad (5a)$$

Относительно уравнений Остера можно сказать следующее. Уравнение (4) для фотонов в среде фактически написано Остером по аналогии с кинетическим уравнением для частиц в отсутствие сил:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla_r f = G, \quad (6)$$

где  $f$  — функция распределения частиц,  $G$  — член, учитывающий «рождение» и «исчезновение» частиц. В стационарном случае ( $\partial f / \partial t = 0$ ) и при условии, что  $G \equiv q - \sigma f$ , это уравнение переходит в (4).

Стремление получить уравнение переноса излучения таким же образом, как кинетическое уравнение для частиц, вполне оправдано. В самом деле, кинетическое уравнение в форме

\* Обобщение уравнения переноса излучения на случай неоднородной анизотропной среды дано в [5], § 26:

$$(n_j^2 / |\cos \vartheta|) d(I_j / |\cos \vartheta| / n_j^2) / dl = a_j - \mu_j I_j.$$

Здесь  $\vartheta$  — угол между волновым вектором  $k_j$  и групповой скоростью  $d\omega / dk_j$ ; индекс  $j$  указывает, что соответствующая величина относится к волне одного типа (скажем, обыкновенной или необыкновенной).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_r f + \frac{F}{m} \nabla_v f = G \quad (7)$$

(где  $F$  — сила, действующая на частицу массой  $m$ ) есть следствие уравнения непрерывности (уравнения сохранения) для плотности частиц в фазовом пространстве координат  $\mathbf{r}$  и скоростей  $\mathbf{v}^*$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_r(\dot{\mathbf{r}}f) + \nabla_v(\dot{\mathbf{v}}f) = G \quad (8)$$

и уравнений движения частиц:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}; \quad \dot{\mathbf{v}} = F(\mathbf{r})/m. \quad (9)$$

Соотношение же, аналогичное (8), имеет место и для плотности энергии излучения  $u$ , отнесенной к единичному телесному углу. Однако в процессе вывода уравнения переноса из уравнения непрерывности (уравнения сохранения) мы приходим к соотношению (12а), которое не совпадает с уравнением Остера (5); вместе с тем из этого соотношения, как мы убедимся, может быть получено уравнение переноса (1).

2. Итак, получим уравнение переноса излучения в неоднородной среде, исходя из уравнения непрерывности для плотности излучения  $u$ .

Прежде всего здесь надо учесть, что производная  $\dot{\mathbf{r}}$ , имеющая теперь смысл скорости переноса энергии излучения, совпадает с групповой скоростью  $\mathbf{v}_{гр} = d\omega/d\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор). Абсолютная же величина групповой скорости

$$v_{гр} = \left| \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right| = c \left[ \frac{\partial(\omega n)}{\partial \omega} \right]^{-1} \quad (10)$$

однозначно связана со значением радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  (через показатель преломления  $n = n(\omega, \mathbf{r})$ ). Поэтому плотность энергии  $u$  (в отличие от функции  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  для частиц) является функцией лишь времени, радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  и направления групповой скорости  $\mathbf{l}$ :

$$u = u(\mathbf{r}, \mathbf{l}, t) \quad (11)$$

( $\mathbf{l}$  — единичный вектор, направленный по касательной к лучу, т. е. вдоль групповой скорости:  $\mathbf{v}_{гр} = l v_{гр}$ ). Отсюда ясно, что в отличие от материальных частиц фазовым пространством для излучения будет  $\mathbf{r}, \mathbf{l}$ , а не  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ ; соответственно уравнение непрерывности для плотности излучения в пространстве  $\mathbf{r}, \mathbf{l}$  запишется следующим образом\*\*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_r(\mathbf{v}_{гр} u) + \nabla_l(\dot{\mathbf{l}} u) = G \equiv a - cu \quad (12)$$

( $\nabla_l(\dot{\mathbf{l}} u)$  означает двумерную дивергенцию по единичному вектору  $\mathbf{l}$ ). Второе уравнение (9), разумеется, не применимо к случаю излучения; его следует заменить уравнением, определяющим форму луча в приближении геометрической оптики (см. [6], § 65):

\* Точкой здесь отмечены полные производные по времени  $t$ .

\*\* Интегрируя почленно уравнение (12) по всем направлениям  $\mathbf{l}$ , т. е. по всем телесным углам  $d\Omega$ , и учитывая, что  $\int_{4\pi} u d\Omega = w$  — плотности энергии излучения,

$\int_{4\pi} \mathbf{v}_{гр} u d\Omega = \mathbf{s}$  — вектору Пойнтинга,  $\int_{4\pi} \nabla_l(\dot{\mathbf{l}} u) d\Omega = 0$ , мы приходим при  $G = 0$  к теореме Пойнтинга в непроглощающей среде:  $\partial w / \partial t + \nabla_r \mathbf{s} = 0$ .



$$\frac{dl}{dl} = \frac{1}{n} [\nabla_r n - l(\nabla_r n)]. \quad (13)$$

Соотношение (12) не совпадает с уравнением Остера (5). В самом деле, переписав соотношение (12) в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_{rp} \nabla_r u + u \nabla_r v_{rp} + \nabla_i (i u) = a - \sigma u, \quad (12a)$$

мы видим, что в стационарном случае ( $\partial u / \partial t = 0$ ) оно отличается от (5) членами  $u \nabla_r v_{rp}$  и  $\nabla_i (i u)$ . С другой стороны, нетрудно показать, что с учетом (13) и при условии  $\partial u / \partial t = 0$  уравнение (12) сводится к известному уравнению переноса излучения (1).

Для доказательства последнего утверждения заметим, что\*

$$\begin{aligned} I &= v_{rp} u; & v_{rp} u &= l v_{rp} u = l I; \\ i &= \frac{dl}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dl} v_{rp}; & \sigma &= \mu v_{rp}. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая эти очевидные соотношения, перепишем (12) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_r (l I) + \nabla_i \left( \frac{dl}{dl} I \right) = a - \mu I \quad (15)$$

или

$$\frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial I}{\partial t} + l \Delta_r I + I \nabla_i \frac{dl}{dl} + \frac{dl}{dl} \nabla_i I = a - \mu I. \quad (16)$$

При переходе к (16) было учтено равенство  $u = I / v_{rp}$ , в котором  $v_{rp}$  зависит только от  $r$ , но не от  $t$  (в среде, свойства которой не меняются во времени); кроме того, здесь принято во внимание, что  $\nabla_r l = 0$ , поскольку вектор  $l$  есть независимая переменная наряду с  $r$ . Подставив выражение для  $dl/dl$  (13) в  $\nabla_i (dl/dl)$ , получим

$$\nabla_i \frac{dl}{dl} = -\frac{1}{n} (l \nabla_r n) \nabla_i l - l \nabla_i \left\{ \frac{1}{n} (l \nabla_r n) \right\}.$$

Однако  $\nabla_i l = 2$ ; кроме того,  $l \nabla_i \left\{ \frac{1}{n} (l \nabla_r n) \right\} = 0$ , поскольку градиент по единичному вектору  $l$  ортогонален этому вектору. Поэтому

$$\nabla_i \frac{dl}{dl} = -\frac{2}{n} (l \nabla_r n)$$

и, следовательно, уравнение (16) переходит в

$$\frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial I}{\partial t} + l \nabla_r I - I \frac{2}{n} l \nabla_r n + \frac{dl}{dl} \nabla_i I = a - \mu I.$$

Поделив все члены уравнения на  $n^2$  и несколько преобразовав его, получаем

$$\frac{1}{n^2 v_{rp}} \frac{\partial I}{\partial t} + l \nabla_r \left( \frac{I}{n^2} \right) + \frac{dl}{dl} \nabla_i \left( \frac{I}{n^2} \right) = \frac{a}{n^2} - \mu \frac{I}{n^2}. \quad (17)$$

\* \* \* Равенство  $I = v_{rp} u$  справедливо только в слабопоглощающей среде. Последнее вместе с требованием законности геометрико-оптического приближения служит условием применимости уравнения переноса.

Соотношение (17) представляет собой уравнение в частных производных для  $I$  с независимыми переменными  $r, l, t$ .

Рассмотрим теперь, как меняется отношение  $I/n^2$  вдоль определенного луча:

$$r = r(l); \quad l = l(l), \quad (18)$$

где  $l$  — координата вдоль луча (длина луча). Поскольку при изменении  $l$  меняются и  $r$  и  $l$ , производная от  $I/n^2$  вдоль луча

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{I}{n^2} \right) = \frac{dr}{dl} \nabla_r \left( \frac{I}{n^2} \right) + \frac{dl}{dl} \nabla_l \left( \frac{I}{n^2} \right) = l \nabla_r \left( \frac{I}{n^2} \right) + \frac{dl}{dl} \nabla_l \left( \frac{I}{n^2} \right). \quad (19)$$

(При переходе к последнему равенству учтено, что  $dr/dl = l$ .) В правой части соотношения (19) векторы  $r$  и  $l$  не независимы — они связаны между собой через параметр  $l$  (см. (18)). Фигурирующую в этой части величину  $l \nabla_r (I/n^2) + (dl/dl) \nabla_l (I/n^2)$  можно найти из уравнения (17); она равна

$$\frac{a}{n^2} - \mu \frac{I}{n^2} - \frac{1}{n^2 v_{rp}} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (20)$$

при условии, что значения  $r, l$  здесь взяты вдоль луча (18). Подставив (20) в (19), окончательно получаем

$$\frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial I}{\partial t} + n^2 \frac{d}{dl} \left( \frac{I}{n^2} \right) = a - \mu I \quad (21)$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\omega n)}{\partial \omega} \frac{\partial I}{\partial t} + n^2 \frac{d}{dl} \left( \frac{I}{n^2} \right) = a - \mu I. \quad (21a)$$

В стационарном случае это совпадает с известным уравнением переноса (1).

Заметим, что уравнение (17) в сущности аналогичным способом было получено Харрисом [8]. Однако он усомнился в справедливости равенства (19), что дало ему повод утверждать, будто уравнение (17) в конечном счете не сводится к уравнению (21).

3. Посмотрим, к каким различиям в интенсивности излучения приводит применение корректного уравнения переноса (1) и уравнения Остера (5а) к системе, частицы которой находятся в равновесном состоянии (в смысле их распределения по скоростям). Излучательная способность такой системы  $a$  связана с коэффициентом поглощения  $\mu$  уравнением Кирхгофа:

$$a = \mu I^{(0)}, \quad (22)$$

где  $I^{(0)}$  — интенсивность равновесного излучения в этой системе. (Если показатель преломления в этой системе равен  $n$ , то

$$I^{(0)} = n^2 J_0^{(0)}, \quad (23)$$

где  $J_0^{(0)}$  — равновесная интенсивность в вакууме; см. [5], § 26.) С учетом (22), (23), первого и последнего из равенств (14) уравнения (1), (5а) принимают вид

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{I}{n^2} \right) + \mu \frac{I}{n^2} = \mu J_0^{(0)}; \quad (24)$$

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{I}{v_{\text{гp}}} \right) + \mu \frac{I}{v_{\text{гp}}} = \mu I_0^{(0)} \frac{n^2}{v_{\text{гp}}}. \quad (25)$$

Решение уравнения переноса (24) можно записать в форме (§ 26, [5])

$$\frac{I}{n^2} = e^{-\tau} \int_0^{\tau} I_0^{(0)} e^{\tau'} d\tau' + e^{-\tau} \left( \frac{I}{n^2} \right)_{l=l_0}, \quad (26)$$

где оптическая толщина  $\tau$  выражается через интеграл от  $\mu$  вдоль луча:

$$\tau = \int_{l_0}^l \mu dl.$$

В свою очередь, решением уравнения Остера (25) служит выражение

$$\frac{I}{v_{\text{гp}}} = e^{-\tau} \int_0^{\tau} I_0^{(0)} \frac{n^2}{v_{\text{гp}}} e^{\tau'} d\tau' + e^{-\tau} \left( \frac{I}{v_{\text{гp}}} \right)_{l=l_0}. \quad (27)$$

В однородной среде ( $v_{\text{гp}} = \text{const}$ ,  $n^2 = \text{const}$ ) оба выражения (26), (27) совпадают. Однако в неоднородной среде они дают различные результаты. Так, например, интенсивность излучения, выходящего из поглощающего слоя в вакуум, согласно (26), равна

$$I = e^{-\tau} \int_0^{\tau} I_0^{(0)} e^{\tau'} d\tau', \quad (28)$$

в то время как (27) в этом случае дает\*

$$I = e^{-\tau} \int_0^{\tau} I_0^{(0)} \frac{cn^2}{v_{\text{гp}}} e^{\tau'} d\tau'. \quad (29)$$

Выражение (29) отличается от корректной формулы (28) наличием фактора  $cn^2/v_{\text{гp}}$  в подынтегральном выражении. В плазме  $v_{\text{гp}} = cn$  и фактор  $cn^2/v_{\text{гp}} = n < 1$ ; отсюда ясно, что в применении к задаче излучения из плазмы уравнение Остера приводит к заниженным результатам (при одинаковых значениях  $\tau$ ).

Некорректность решения (29) особенно ясно видна на примере излучения внутри непрозрачной полости с температурой  $T$ . Если в середине такой полости показатель преломления  $n = 1$ , то, как известно из термодинамики, в полости существует равновесное излучение с интенсивностью  $I = I_0^{(0)}$  независимо от характера стенок — значения  $n$ ,  $v_{\text{гp}}$  и пр. (единственным требованием является непрозрачность стенок). Этот же результат следует из решения (28): при  $T = \text{const}$  величина  $I = I_0^{(0)}(1 - e^{-\tau})$  и для непрозрачных стенок с  $\tau \gg 1$  интенсивность в полости  $I = I_0^{(0)}$ . Однако из решения (29) уравнения Остера следует другой результат: при  $T = \text{const}$  и постоянном значении  $cn^2/v_{\text{гp}}$  в стенках\*\* ве-

\* При переходе от (27) к (29) учтено, что в вакууме  $v_{\text{гp}} = c$ .

\*\* Уравнение переноса (1) и его решение (28) записаны при условии, что отражение излучения от резких границ отсутствует. Поэтому в рассматриваемом примере параметр  $cn^2/v_{\text{гp}}$  должен быть постоянным лишь в тех слоях, где коэффициент поглощения  $\mu \neq 0$ ; для отсутствия отражений необходимо, чтобы от центра полости эти слои отделялись плавно-неоднородной средой.

личина  $I = I_0^{(0)}(cn^2/v_{гр})(1 - e^{-\tau})$ ; если же стенки непрозрачны ( $\tau \gg 1$ ), то, в противоречии с термодинамикой, интенсивность в полости  $I = I_0^{(0)}(cn^2/v_{гр}) \neq I_0^{(0)*}$ .

Помимо неверного уравнения переноса, в работах [1, 2] используется также ошибочное выражение для коэффициента поглощения  $\mu$ , определяющего оптическую толщину  $\tau = \int \mu dl$ . Остер утверждает, что излучательная способность системы  $a = \hbar\omega q$  не зависит от наличия среды, т. е. не зависит от показателя преломления  $n$ . В соответствии с законом Кирхгофа  $a = \mu I^{(0)}$  отсюда следует, что  $\mu \propto n^{-2}$  (поскольку равновесная интенсивность  $I^{(0)} \propto n^2$ ; см. § 26, [5]). Иными словами, коэффициент поглощения в среде

$$\mu = \mu_0 n^{-2}, \quad (30)$$

где  $\mu_0$  — коэффициент поглощения системы излучающих частиц в вакууме. Таким образом, согласно Остеру, достаточно знать коэффициент поглощения в вакууме, чтобы сказать, каким будет коэффициент поглощения в среде.

Хорошо известно, однако, что присутствие среды с показателем преломления  $n \neq 1$  существенно меняет характер излучения от отдельных элементарных центров (заряженных частиц, атомов и молекул). Так, интенсивность тормозного излучения одного электрона пропорциональна  $n$  (в дипольном приближении); при достаточно больших  $n$  электрон, движущийся со скоростью  $v$ , генерирует излучение Вавилова—Черенкова, которого нет в вакууме, и т. д. Ясно, что и свойства излучения системы таких частиц существенно меняются в зависимости от наличия или отсутствия среды, причем в каждом конкретном случае это изменение будет иным.

В качестве примера мы приведем тормозное излучение и связанное с ним поглощение в плазме. Излучательная способность  $a$  при этом пропорциональна  $n$  (как и для отдельного электрона; см. выше); величина

$$\mu = \frac{a}{I^{(0)}} \propto n^{-1}, \quad (31)$$

в то время как по Остеру  $\mu \propto n^{-2}$ . Правильность формулы (31) доказывает и выражение для коэффициента поглощения электромагнитных волн в изотропной плазме, получаемое из элементарной теории (см. § 7, [7]):

$$\mu = \frac{2\pi e^2 N v_{эфф}}{m\omega(\omega^2 + v_{эфф}^2)n}. \quad (32)$$

Выражение (32) характеризует связанное с тормозным излучением поглощение системой  $N$  электронов, испытывающих соударения с ионами с частотой  $v_{эфф}$ ; оно также обратно пропорционально  $n$ . (В (32)  $e$  — заряд электрона.)

Из сказанного следует, что введенное Остером уравнение переноса в неоднородной среде и использованный им метод расчета коэффициента поглощения в среде (через значение коэффициента поглощения при  $n = 1$ ) несостоятельны. Поэтому и результаты обширных расчетов распределения радиояркости по диску «спокойного» Солнца, выполненных Остером и Софиа в статье [2], некорректны по двум причинам. Во-пер-

\* То обстоятельство, что уравнение переноса Остера находится в противоречии с термодинамикой, было отмечено ранее в заметке Кронина [9].

вых, корона и хромосфера неоднородны; в этом случае, как было выяснено выше, использование уравнения переноса в форме (5), (5а) приводит к существенным ошибкам, занижая величину интенсивности радиоизлучения. Из сопоставления формул (28), (29) нетрудно усмотреть, что в разных точках диска эти ошибки будут различны; поэтому не только абсолютная величина интенсивности, но и характер распределения радиояркости по диску будут отличаться от истинного. Во-вторых, расчет коэффициента поглощения оптической толщины солнечной короны и хромосферы с помощью «универсального» соотношения между коэффициентами поглощения в среде и в вакууме (30) также приводит к неверным результатам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Oster, *Astrophys. J.*, **138**, 761 (1963).
2. L. Oster, S. Sofia, *Astrophys. J.*, **141**, 1139 (1965).
3. R. Woolley, D. Stibbs, *The Outer Layers of a Star*, Oxford, Clarendon Press, 1953.
4. S. F. Smerd, *Austral. J. Sci. Res.*, **3A**, 34 (1950).
5. В. В. Железняков, *Радиоизлучение Солнца и планет*, изд. Наука, М., 1964.
6. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, М., 1957.
7. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Гостехиздат, М., 1960.
8. E. G. Harris, *Phys. Rev.*, **138**, 479 (1965).
9. W. M. Spong, *Astrophys. J.*, **144**, 834 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 декабря 1965 г.

#### ON THE THEORY OF RADIATIVE TRANSFER IN A NONUNIFORM MEDIUM

V. V. Zheleznyakov

The conventional radiative transfer equation in a nonuniform medium (1) is derived from the equation of continuity for the density of radiative energy in the six-dimensional coordinates and group velocity space. The theory of radiative transfer in a nonuniform medium, proposed by Oster in [1] is shown to be incorrect especially when it is applied by Oster and Sofia [2] to the investigation of the radio emission of the quiet Sun.

УДК 621.372.853.32

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЛОИСТО-ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Н. Кондратенко

Найдены коэффициенты затухания и определены условия распространения высокочастотных и низкочастотных колебаний в слоистом плазменном волноводе, находящемся в сильном магнитном поле.

Изучение вопросов распространения электромагнитных волн в периодических структурах представляет значительный интерес в связи с возможностями ускорения в них заряженных частиц, генерированием микрорадиоволн и рядом других приложений. Распространение электромагнитных волн в слоистых диэлектриках рассматривалось в работах [1], изучение частиц при прохождении через слоистые среды рассматривалось в [2] и в последующих работах (см. обзор [3], где имеется подробная библиография).

В настоящей работе рассматривается кинетическая теория распространения электромагнитных волн в слоистом плазменном волноводе радиусом  $R$ , находящемся в бесконечно сильном ( $\omega_{H\alpha} \gg \Omega_\alpha, \omega, k_\perp v_\alpha$ ) магнитном поле. Необходимость кинетического рассмотрения подобной задачи становится очевидной в том случае, если период высокочастотного поля сравним или меньше среднего времени пролета слоя частицей плазмы ( $\omega a \lesssim v_\alpha$ ).

Кинетическая теория позволяет определить также коэффициент затухания волны, который, как будет показано, может достигать значительной величины.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть толщина плазменного слоя равна  $a$ , расстояние между слоями, заполненное диэлектриком с продольной диэлектрической постоянной  $\epsilon_2$  и поперечной  $\epsilon_1$ , равно  $b$ , так что  $L = a + b$  — период структуры. Вдоль оси волновода (ось  $z$ ) распространяется аксиально-симметричная электромагнитная волна. Зависимость всех величин от времени имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ .

Исходная система уравнений состоит из уравнений Максвелла ( $E$ -волна)

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = ikH_\varphi, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = ikE_r, \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) = -ikE_z + \sum_{\alpha=i}^e \frac{4\pi}{c} j_\alpha \quad (1.3)$$

и линеаризованного кинетического уравнения для малого отклонения  $f_\alpha$  от равновесной функции распределения  $f_{0\alpha}$ :

$$\frac{df_\alpha}{dz} - i\gamma f_\alpha + e_\alpha E_z f'_{0\alpha} = 0, \quad (1.4)$$

где

$$k = \omega/c; \quad \gamma = \omega/v; \quad f'_{0\alpha} = \partial f_{0\alpha}/\partial \omega; \quad \omega = m_\alpha v^2/2,$$

индекс  $\alpha = i$  относится к ионам, индекс  $\alpha = e$  — к электронам.

Уравнения (1.1)—(1.4) необходимо дополнить граничными условиями. Считая стенки волновода металлическими, найдем, что граничные условия для компонент электрического и магнитного полей имеют следующий вид:

$$E_z(z, R) = 0, \quad (1.5)$$

$$E_r^I(z, r) = E_r^{II}(z, r)|_{z=0, a}, \quad (1.6)$$

$$H_\varphi^I(z, r) = H_\varphi^{II}(z, r)|_{z=0, a},$$

где индекс I указывает на поля в плазме, индекс II — в диэлектрике. Кроме того, между компонентами полей в диэлектрике должны выполняться соотношения

$$A(-b, r) = A(a, r)e^{ik_s L}; \quad A = E_{z,r}^{II}; \quad H_\varphi^{II}. \quad (1.7)$$

Зависимость компонент поля и функций  $f_\alpha$  от координаты  $r$  ищем в следующем виде:

$$E_z, f_\alpha \sim J_0(k_\perp r); \quad E_r, H_\varphi \sim J_1(k_\perp r),$$

где  $J_{0,1}(k_\perp r)$  — функции Бесселя. Тогда уравнение (1.5) сразу определяет  $k_\perp = \lambda_{0p}/R$ , где  $\lambda_{0p}$  — корень нулевой функции Бесселя. Граничные условия для  $f_\alpha$  запишем в виде

$$f_\alpha^+(0) = p f_\alpha^-(0); \quad f_\alpha^-(a) = p f_\alpha^+(a), \quad (1.8)$$

где  $f_\alpha^+$  — функции распределения для частиц, имеющих  $v > 0$ ,  $f_\alpha^-$  — для частиц, имеющих  $v < 0$ . Отражение частиц от границ плазмы — диффузное или зеркальное в зависимости от того, равно  $p$  нулю или единице. Через  $f_\alpha^\pm$  ток определяется следующим образом:

$$j_\alpha = e_\alpha \int_0^\infty v(f_\alpha^+ - f_\alpha^-) dv. \quad (1.9)$$

Решая уравнение (1.4) с граничными условиями (1.8), найдем

$$\begin{aligned} f_\alpha^+ - f_\alpha^- = e_\alpha f'_{0\alpha} \left\{ -2i \int_0^z dt E_z(t) \sin \gamma(z-t) + \right. \\ \left. + [(pe^{i\gamma z} - e^{-i\gamma z})/(e^{-i\gamma a} - p^2 e^{i\gamma a})] \int_0^a dt E_z(t) \times \right. \\ \left. \times [\exp(-i\gamma(a-t)) - p \exp(i\gamma(a-t))] \right\}. \end{aligned} \quad (1.9a)$$

## 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Предполагая плазменные слои однородными, с резкой границей, будем решать систему уравнений (1.1)—(1.3) в плазме с током (1.9) методом Фурье. Поле  $E_r$ , заданное в интервале  $(0, a)$ , продолжаем на

интервал  $(-a, 0)$  как четную функцию ( $E_z$ ,  $H_\varphi$  и  $j$  как нечетные функции), а на остальную ось — периодически с периодом  $2a$ . Решение ищем в виде сумм:

$$E_r = \sum_{n=0}^{\infty} E_1(n) \cos(\alpha_n z); \quad E_z = \sum_{n=1}^{\infty} E_3(n) \sin(\alpha_n z); \quad (2.1)$$

$$H_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} H(n) \sin(\alpha_n z); \quad f_a^+ - f_a^- = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_a(n) \sin(\alpha_n z),$$

где  $\alpha_n = n\pi/a$ ; штрих у суммы означает, что член суммы, соответствующий  $n=0$ , умножается на  $1/2$ .

Выражение (1.9а) для коэффициентов Фурье  $\psi_a(n)$  дает следующее значение:

$$\psi_a(n) = e_a f'_{0a} \left\{ \frac{2i\gamma E_3(n)}{\alpha_n^2 - \gamma^2} + \frac{1-p}{a} \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} a_k E_3(k) \times \right. \\ \left. \times \frac{[(-1)^n e^{i\gamma a} - 1][p(-1)^k + e^{-i\gamma a}] - [(-1)^n e^{-i\gamma a} - 1][(-1)^k + p e^{i\gamma a}]}{(\alpha_k^2 - \gamma^2)(\alpha_n^2 - \gamma^2)(e^{-i\gamma a} - p^2 e^{i\gamma a})} \right\}. \quad (2.2)$$

Для зеркального отражения частиц плазмы от границ последнее выражение существенно упрощается:

$$\psi_a(n) = \frac{2i\gamma}{\alpha_n^2 - \gamma^2} e_a f'_{0a}. \quad (2.3)$$

Уравнения Максвелла (1.1)–(1.3) с учетом выражения (2.3) приводят к следующему значению для коэффициентов Фурье поля:

$$E_1(n) = \frac{2i}{ka} [H_\varphi(0) - (-1)^n H_\varphi(a)] \frac{k_\perp^2 - k^2 \epsilon_{33}}{k_\perp^2 + (\alpha_n^2 - k^2) \epsilon_{33}}, \quad (2.4)$$

где

$$\epsilon_{33} = 1 - \sum_a 8\pi e_a^2 \int_0^\infty \frac{f'_{0a} dv}{\alpha_n^2 - \gamma^2}.$$

Подставим  $E_1(n)$  из (2.4) в первую сумму (2.1) и найдем ее значение при  $z=0$  и  $z=a$ . Тогда

$$E_r(0) = i[S_1 H_\varphi(0) - S_2 H_\varphi(a)], \\ E_r(a) = i[S_2 H_\varphi(0) - S_1 H_\varphi(a)]. \quad (2.5)$$

Предполагая равновесную функцию распределения  $f_{0a}$  максвелловской, выделим в  $\epsilon_3$  в явном виде действительное и мнимое слагаемые:

$$\epsilon_3 = \epsilon'_3 + i\epsilon''_3,$$

$$\epsilon'_3 = 1 + \sum_a 2 \frac{\Omega_a^2}{\omega^2} q_a^2 (1 - 2q_a e^{-q_a^2} \int_0^{q_a} e^{t^2} dt), \quad (2.6)$$

$$\epsilon''_3 = 2\sqrt{\pi} \sum_a \frac{\Omega_a^2}{\omega^2} q_a^3 e^{-q_a^2}, \quad (2.7)$$



где

$$\Omega_a^2 = 4\pi e_a^2 n_0 / m_a; \quad q_a = \omega / \alpha_n v_a.$$

Теперь  $S_1$  и  $S_2$ , входящие в выражения (2.5), можно представить в следующем виде:

$$S_1 = S'_1 + iS''_1; \quad S_2 = S'_2 + S''_2;$$

$$S'_1 = \frac{2}{ka} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \{ (k_{\perp}^2 - \epsilon'_3 k^2) [k_{\perp}^2 + \epsilon'_3 (\alpha_n^2 - k^2)] - \epsilon_3'^2 k^2 (\alpha_n^2 - k^2) \}; \quad (2.8)$$

$$S''_1 = -\frac{2}{ka} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \epsilon_3' k_{\perp}^2 \alpha_n^2; \quad (2.8a)$$

$$S'_2 = \frac{2}{ka} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Delta} \{ (k_{\perp}^2 - \epsilon'_3 k^2) [k_{\perp}^2 + \epsilon'_3 (\alpha_n^2 - k^2)] - \epsilon_3'^2 k^2 (\alpha_n^2 - k^2) \}; \quad (2.9)$$

$$S''_2 = -\frac{2}{ka} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Delta} \epsilon_3' k_{\perp}^2 \alpha_n^2; \quad (2.9a)$$

$$\Delta = [k_{\perp}^2 + \epsilon'_3 (\alpha_n^2 - k^2)]^2 + \epsilon_3'^2 (\alpha_n^2 - k^2)^2.$$

Решение уравнений Максвелла в диэлектрике имеет вид

$$E_r = B_1 \exp(ik_2 z) + B_2 \exp(-ik_2 z), \quad (2.10)$$

$$H_{\varphi} = \frac{k}{k_2} \epsilon_1 [B_1 \exp(ik_2 z) - B_2 \exp(-ik_2 z)], \quad (2.11)$$

где

$$k_2 = \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (k^2 \epsilon_2 - k_{\perp}^2) \right]^{1/2}.$$

Используя граничные условия (1.6) и (1.7), соотношения (2.5) и значения полей в диэлектрике (2.10) и (2.11), можно получить уравнение для определения  $k_3 \omega$ :

$$\cos k_3 L = -\frac{k_{\epsilon_1}}{2k_2 S_2} \left[ (S_2^2 - S_1^2) \sin k_2 b - \frac{2k_2 S_1}{k_{\epsilon_1}} \cos k_2 b + \frac{k_2^2}{\epsilon^2 k^2} \sin k_2 b \right]. \quad (2.12)$$

Суммы  $S_1$  и  $S_2$  вычисляются в предельных случаях.

### 3. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ВОЛНЫ

Пренебрегая движением ионов, рассмотрим высокочастотные колебания в случае слабой пространственной дисперсии:  $\omega a \gg v_e$ . Рассмотрим  $S'_1$ . Величина

$$\lambda = \frac{2}{ka} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{k_{\perp}^2 - \epsilon_3 k^2}{k_{\perp}^2 + \epsilon_3 (\alpha_n^2 - k^2)} = \frac{k_1}{k} \operatorname{ctg}(k_1 a), \quad (3.1)$$

где

$$k_1 = (k^2 - k_{\perp}^2 / \epsilon_3)^{1/2}; \quad \epsilon_3 = 1 - \Omega_e^2 / \omega^2,$$

представляет собой значение  $S'_1$  при  $v_e = 0$ . Поэтому в разность  $\varphi_1 = \lambda - S'_1$  основной вклад дают большие  $n$ , определяемые из условия  $\alpha_n \gg \omega / v_e \gg k_{\perp}, k$ . Учитывая эти неравенства и переходя от суммы к интегралу, найдем

$$\varphi_1 = \frac{2k_{\perp}^2 v_e}{\pi \epsilon_3 k \omega} \int_0^{\tau} dt \left[ 1 - \frac{\epsilon_3'(t) \epsilon_3}{\epsilon_3'^2(t) + \epsilon_3'^2(t)} \right] \quad (\tau \sim 1). \quad (3.2)$$

Заметим, что для частот  $\omega \gg \Omega_e$   $\epsilon_3' > \epsilon_3 > 0$ , поэтому  $\varphi_1 > 0$ .

Так как каждый член суммы  $S_1''$  пропорционален  $\epsilon_3'' \sim \exp(-q^2)$ , то при вычислении  $S_1''$  имеют место те же соображения, что и при вычислении  $\varphi_1$ . Пренебрегая для простоты величиной  $\epsilon_3''$  по сравнению с  $\epsilon_3'$  и обозначая  $\bar{\epsilon}_3 = \epsilon_3'$  при  $q \sim 1$ , найдем, что

$$S_1' = \frac{k_1}{k} \operatorname{ctg}(k_1 a - \varphi_1); \quad S_1'' = - \frac{2\Omega_e^2 v_e k_{\perp}^2}{\sqrt{\pi} \omega^3 \bar{\epsilon}_3^2 k}. \quad (3.3)$$

При нахождении суммы  $S_2$  заметим, что при  $p \gg 1$

$$N_2 = \sum_p^{\infty} (-1)^n f(n) \ll \sum_p^{\infty} f(n) = N_1.$$

Так как  $S_1$  и  $S_2$  в формуле (2.12) сопоставляются, то суммами типа  $N_2$ , входящими в  $S_2$ , можно пренебречь. Учитывая сказанное, найдем

$$S_2 = \frac{k_1}{k \sin(k_1 a)}. \quad (3.4)$$

Подстановка  $S_1$  и  $S_2$  в формулу (2.12) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \cos(k_3 L) = & \cos(k_1 a) \cos(k_2 b) - \frac{k_1^2 \epsilon_1 + k_2^2}{2\epsilon_1 k_1 k_2} \sin(k_1 a) \sin(k_2 b) + \frac{\epsilon_1 k}{k_1 k_2} \times \\ & \times (iS_1'' - \varphi_1) \left[ k_1 \cos(k_1 a) \sin(k_2 b) + \frac{k_2}{\epsilon_1} \cos(k_2 b) \sin(k_1 a) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В случае  $k_1^2 = -q_1^2 < 0$ ,  $k_2^2 = -q_2^2 < 0$  (3.5) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \cos(k_3 L) = & \operatorname{ch}(q_1 a) \operatorname{ch}(q_2 b) + \frac{q_1^2 \epsilon_1^2 + q_2^2}{2\epsilon_1 q_1 q_2} \operatorname{sh}(q_1 a) \operatorname{sh}(q_2 b) + \\ & + \frac{\epsilon_1 k}{q_1 q_2} (iS_1'' - \varphi) \left[ q_1 \operatorname{ch}(q_1 a) \operatorname{sh}(q_2 b) + \frac{q_2}{\epsilon_1} \operatorname{ch}(q_2 b) \operatorname{sh}(q_1 a) \right]. \end{aligned} \quad (3.5a)$$

Так как  $\operatorname{ch} x > 1$ , то из уравнения (3.5a) видно, что при пренебрежении тепловым движением частиц плазмы ( $v_e = 0$ )  $k_3$  имеет чисто мнимое значение, т. е. волна не распространяется. Учет теплового движения приводит к расширению области распространения, поскольку  $\varphi > 0$  (по крайней мере для тех частот, где  $k_1^2 < 0$ , т. е.  $\epsilon_3 > 0$ ), вследствие чего действительная часть правой стороны формулы (3.5a) может стать меньше единицы. Если  $\omega < \Omega_e$  ( $\epsilon_3 < 0$ ), то волна всегда распространяется.

Как видно из формул (3.2), (3.3) и уравнения (3.5), при больших радиусах волновода ( $k_{\perp} = \lambda_{op}/R \rightarrow 0$ ) кинетические эффекты исчезают, а при малых становятся значительными. Действительно, если  $k \ll k_{\perp} |\epsilon_3|^{-1}$ ,  $k_{\perp}$ , то в «кинетическое» слагаемое формулы (3.5) радиус волновода

входит в виде  $1/R$ . Это связано с тем обстоятельством, что граничные условия «завязывают» продольные и поперечные волны. В случае  $R \rightarrow \infty$  эта связь исчезает, волна становится поперечной и тепловые эффекты в настоящей задаче, являющиеся чисто продольными, не проявляются.

Полагая  $k_3 \rightarrow k'_3 = k_3 + i\delta$ ,  $\delta \ll k_3$ , из уравнения (3.5) можно найти коэффициент затухания волны:

$$\delta = \frac{2\Omega_e^2 k_\perp^2 v_e}{\sqrt{\pi k_1 k_2 L \omega^3 \epsilon_3^2 \sin(k_3 L)}} [k_1 \epsilon_1 \cos(k_1 a) \sin(k_2 b) + k_2 \cos(k_2 b) \sin(k_1 a)]. \quad (3.6)$$

Таким образом, затухание обратно пропорционально периоду структуры.

Уравнение (3.5) и формула (3.6) упрощаются в случае  $k_3 L$ ,  $k_1 a$ ,  $k_2 b \ll 1$ :

$$k_3^2 L^2 = k_1^2 a^2 + k_2^2 b^2 + \frac{k_1^2 \epsilon_1^2 + k_2^2}{\epsilon_1} ab - 2k(iS_1'' - \varphi)(b\epsilon_1 + a), \quad (3.7)$$

$$\delta = [2(1 - \epsilon_3)k_\perp^2 v_e(\epsilon_1 b + a)] / \sqrt{\pi k_3 L^2 \epsilon_3^2 \omega}. \quad (3.8)$$

Заметим, что если толщина плазменного слоя  $a \rightarrow 0$ , то и  $\delta \rightarrow 0$ , поскольку  $\omega a \gg v_e$ .

#### 4. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Пусть частота распространяющейся волны и параметры плазмы таковы, что выполняются неравенства  $v_e \gg \omega a \gg v_i$ . Рассмотрим сначала случай зеркального отражения частиц от границ плазмы. Суммы  $S_1, 2$  снова запишем в виде (3.1). Тогда  $S_1'$  и  $S_2'$  вычисляются аналогично предыдущему случаю и имеют следующий вид:

$$S_1' = -\frac{k_\perp^2 \operatorname{ctg}(q_3 a)}{k q_3 \epsilon_i} - \varphi_i; \quad S_2' = -k_\perp^2 / k q_3 \epsilon_i \sin(q_3 a). \quad (4.1)$$

В формулах (4.1)

$$q_3 = \left[ \frac{-1}{\epsilon_i} (k_\perp^2 + 2\Omega_e^2 / v_e^2) \right]^{1/2}; \quad \epsilon_i = 1 - \Omega_i^2 / \omega^2,$$

а  $\varphi_i$  равно выражению (3.4) после замены индексов  $e \rightarrow i$ . При получении (4.1) предполагалось, что  $q_3 \gg k$ .

Сумма  $S_{ii}''$  состоит из ионного и электронного слагаемых:  $S_{ii}'' = S_{ii}'' + S_{ie}''$ ;  $S_{ii}''$  имеет такой же вид, как  $S_{ii}'$  (см. формулы (3.3)):

$$S_{ii}'' = -2\Omega_i^2 k_\perp^2 v_i / \sqrt{\pi k \omega^3 \epsilon_{3i}^2}, \quad (4.2)$$

где

$$\epsilon_{3i} = 1 - 2 \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} q^2 \left( 1 - 2q e^{-q} \int_0^q e^t dt \right)$$

при  $q \sim 1$ ;

$$S_{ie}'' = -\frac{4\sqrt{\pi} k_\perp^2 \Omega_e^2 \omega}{k a v_e^3} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n (\epsilon_{3i} \alpha_n^2 - q_3^2 \epsilon_i)^2]^{-1}. \quad (4.3)$$

Если  $q_3 a \ll 1$ , то в сумме (4.3) достаточно ограничиться первым слагаемым. В этом случае  $\epsilon_{3i} = \epsilon_i$  и

$$S_{1e}'' = -4k_{\perp}^2 \Omega_e^2 \omega a^4 / \pi^4 \sqrt{\pi} k v_e^3. \quad (4.3a)$$

В сумме  $S_2''$  можно пренебречь вкладом ионов:

$$S_2'' = S_{2e}'' = -\frac{4\sqrt{\pi} k_{\perp}^2 \Omega_e^2 \omega}{k a v_e^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / \alpha_n (\epsilon_{3i} \alpha_n^2 - q_3^2 \epsilon_i)^2. \quad (4.4)$$

В случае  $q_3 a \ll 1$   $S_{2e}'' = -S_{1e}'$ .

Подставив  $S_1$  и  $S_2$ , даваемые выражениями (4.1)–(4.4), в формулу (2.15), для определения  $k_3$  получим следующее уравнение (предполагая, что  $S_{1,2}'' \ll S_{1,2}'$ , и пренебрегаем величиной  $\varphi_i$ ):

$$\begin{aligned} \cos(k_3 L) = & (1 - iS_2''/S_2') [\text{ch}(q_2 b) \cos(q_3 a) + \epsilon_i q_3 \epsilon_i / 2q_2 k_{\perp}^2 \times \\ & \times (k_{\perp}^2 / q_3^2 \epsilon_i^2 - q_2^2 / \epsilon_i^2) \sin(q_3 a) \text{sh}(q_2 b)] + iS_1'' k_3 / k_{\perp}^2 \times \\ & \times \left[ \frac{k_{\perp}^2 \epsilon_1}{q_3 q_2} \text{sh}(q_2 b) \cos(q_3 a) - \epsilon_i \text{ch}(q_2 b) \sin(q_3 a) \right] - iS_2'' \frac{\epsilon_i k}{q_2} \text{sh}(q_2 b), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$q_2 = k_{\perp} \sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2}.$$

Если  $\epsilon_i > 0$ , то  $q_3 = i|q_3|$  и волна не проходит, поскольку уравнение (4.5) имеет чисто мнимое решение.

В случае  $k_3 L, q_2 b, q_3 a \ll 1$  уравнение (4.5) упрощается:

$$\begin{aligned} (k_3 L)^2 = & (q_2 b)^2 + (q_3 a)^2 - \epsilon_i a b \frac{q_3^2}{k_{\perp}^2} (k_{\perp}^2 / q_3^2 \epsilon_i^2 + q_2^2 / \epsilon_i^2) - \\ & - 2i(S_{1i}'' + 2S_{1e}'') (\epsilon_i k b - q_3^2 \epsilon_i k / k_{\perp}^2). \end{aligned} \quad (4.5a)$$

Величины  $S_{1i}''$  и  $S_{1e}''$  ответственны за затухание волны. Из вида  $S_{1e}''$  видно, что затухание сильно зависит от толщины слоя плазмы:

$$\delta = k_3^{-1} L^{-2} (S_{1i}'' + 2S_{1e}'') (\epsilon_i k b - q_3^2 \epsilon_i k a / k_{\perp}^2).$$

Наконец, рассмотрим случай, когда  $v_e \gg \omega a \gg v_i$ , а отражение частиц плазмы от границ незеркальное:  $1 - p > \omega a / v_e$ . Ионы считаем холодными, а для электронов из выражения (1.9a) аналогично [4] получим

$$f_e^+ - f_e^- = -e_e f_{0e}' \frac{1-p}{1+p} \int_0^a E_z(t) dt. \quad (4.6)$$

Ток, создаваемый электронами плазмы, определяется по формуле (1.9) и в случае максвелловской равновесной функции распределения имеет вид

$$j_e = \frac{e_e^2 n_0}{v_e m_e} \frac{1-p}{1+p} \int_0^a E_z(t) dt. \quad (4.7)$$

Ток, создаваемый ионами, равен

$$j_i = i e_i^2 n_0 E_z / \omega m_i. \quad (4.7a)$$

Подстановка токов (4.7) и (4.7a) в уравнения (1.1)–(1.3) и решение этих уравнений приводит к следующему виду для полей в плазме:

$$E_r = \sigma_2 C z + B; \quad H_\varphi = C, \quad (4.8)$$

где  $C$  и  $B$  — постоянные,

$$\sigma_2 = k_\perp^2 / (ik\varepsilon_i - \sigma_1 a), \quad \sigma_1 = \frac{1-p}{1+p} \frac{\Omega_e^2}{c v_e}.$$

Дисперсионное уравнение в рассматриваемом случае имеет вид

$$\cos(k_\perp L) = \operatorname{ch}(q_2 b) - \frac{i\varepsilon_1 k a k_\perp (ik\varepsilon_i + \sigma_1 a)}{2q_2(\varepsilon_i^2 k^2 + \sigma_1^2 a^2)}. \quad (4.9)$$

Если  $q_2 b \gg 1$  или  $\sigma_1 a \gg |\varepsilon_i| k$ , то волна не распространяется. Если же

$$|\varepsilon_i| k \gg \sigma_1 a \quad (\text{т. е. } m_e/m_i \gg \omega a/v_e),$$

то

$$\cos(k_\perp L) = \operatorname{ch}(q_2 b) - \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (k_\perp a \omega^2 / 2\Omega_i^2 + ik_\perp a^2 \sigma_1 / 2\varepsilon_i^2 k). \quad (4.10)$$

В этом случае волна может распространяться, если  $q_2 b < 1$ ,  $k_\perp a \gg 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖТФ, **25**, 711 (1955); Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
2. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ, **32**, 883 (1957).
3. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН, **86**, 189 (1965).
4. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, **35**, 961 (1965).

Поступила в редакцию  
24 января 1966 г.

#### KINETIC THEORY OF LAYERED-PLASMA WAVEGUIDE IN A STRONG MAGNETIC FIELD

A. N. Kondratenko

The attenuation coefficients are found and the conditions of propagation of the high and low frequency oscillations are determined in a layered-plasma waveguide placed in a strong magnetic field

УДК 621.371.166.2

## О ШИРИНЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПОГЛОЩЕНИЯ ВОДЯНОГО ПАРА $\lambda=0,92$ мм

В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов

С помощью источника монохроматического излучения и радиометра с тепловым индикатором выполнены измерения коэффициента поглощения атмосферных паров воды в области резонанса спектральной линии  $1/\lambda_{ij} = 10,86 \text{ см}^{-1}$ , соответствующей вращательному переходу  $4_0-5_{-4}$ . Измерения проводились методом изменяющейся влажности в натуральных условиях при базовом расстоянии 1350 м. В предположении, что дипольный момент перехода равен  $1,84 \cdot 10^{-18}$  CGSE, т. е. равен усредненной по всем состояниям величине дипольного момента молекулы  $\text{H}_2\text{O}$ , для полуширины линии получено  $\Delta\nu/c = 0,101 \pm 0,009 \text{ см}^{-1}$ . Это значение на 19% превышает вычисленное Бенедиктом и Капланом.

Известно [1,2], что наблюдаемое на опыте поглощение электромагнитного излучения атмосферными парами воды в окнах прозрачности миллиметрового диапазона волн примерно в 1,5 раза превышает рассчитанное теоретически. Выполненные в последнее время измерения [3-6] показали, что расхождение в  $1,3 \div 2$  раза имеет место и в окнах относительной прозрачности атмосферы субмиллиметрового диапазона ( $\lambda = 0,05 \div 1$  мм). Одной из причин несоответствия теории эксперименту может явиться то обстоятельство, что использовавшиеся в расчетах коэффициента поглощения [1,2] ширины спектральных линий отличаются от истинных (поглощение в окнах прозрачности пропорционально ширине линий [4]).

Принятые для расчета значения ширины линий были вычислены Бенедиктом и Капланом [7] на основании теории Андерсона. Для определения свободных параметров, входящих в эту теорию, авторы [7] использовали результаты единственных имевшихся в то время надежных измерений ширины линии с резонансной длиной волны  $\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$  [8]. Значения параметров были выбраны таким образом, чтобы теоретическая ширина линии  $1,35 \text{ см}$  совпала с измеренной. Однако, насколько точными оказались при этом вычисленные ширины остальных линий по всему вращательному спектру паров  $\text{H}_2\text{O}$ , пока остается неясным. Правда, в последние годы был выполнен ряд экспериментальных исследований [9-12] в различных участках миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, но, на наш взгляд, они не позволяют внести определенность в вопрос о точности теоретических данных [7]. Так, если измерения [9] ширины линии  $\lambda_{ij} = 1,63 \text{ мм}$  дают результат, близкий к теоретическому, то в то же время измеренная ширина этой линии по данным работы [10] оказалась в два раза большей. Что же касается субмиллиметровой области, то по измерениям [11] в участке  $\lambda = 0,05 - 0,1 \text{ мм}$  ширины линий водяного пара примерно в 1,5 раза превышают расчетные; вместе с тем в эксперименте [12] на волне  $0,538 \text{ мм}$  получено значение ширины линии, в два раза меньшее теоретического. В связи с вышеизложенным необходимость проведения дальнейших исследований

ширин и интенсивностей линий вращательного спектра паров  $H_2O$  становится очевидной.

В данном сообщении приводятся результаты измерений линии поглощения, соответствующей переходу  $4_0-5_4(\lambda_{ij}=0,92 \text{ мм})$ .

## 1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Подробное описание аппаратуры и методики измерений дано в работе [6]. Поэтому ограничимся здесь лишь некоторыми основными сведениями. Измерения проводились над водной поверхностью в сентябре 1964 г. методом изменяющейся влажности при расстоянии между пунктами расположения передатчика и приемника 1350 м.

В приемном устройстве использовался неселективный пневматический индикатор типа элемента Голея, а в качестве источника монохроматического излучения в передатчике — лампа обратной волны. Измерение длины волны излучения производилось интерференционным методом по схеме интерферометра Больцмана. Точность измерений длины волны при этом была не хуже 0,2%. Калибровка чувствительности приемного устройства и контроль уровня излучаемой передатчиком мощности осуществлялись так же, как и в измерениях [6].

Абсолютная влажность воздуха измерялась аспирационными психрометрами одновременно в двух пунктах — вблизи передатчика и приемника на высоте прохождения трассы сигнала. Наибольшее отклонение средних значений влажности в каждом из пунктов от общего среднего значения не превышало  $\pm 10\%$ .

Измерение поглощения выполнялось при средней температуре воздуха  $20^\circ\text{C}$  и среднем давлении 760 мм рт. ст. При этом за все время измерений температура изменялась не более, чем на  $\pm 8^\circ\text{C}$ , а изменения давления не превышали  $\pm 10$  мм рт. ст.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Экспериментальные значения коэффициента поглощения  $\gamma^{\text{экср}}$  в области резонанса спектральной линии  $\lambda_{ij} = 0,92 \text{ мм}$  приведены на рис. 1, где они отмечены кружками; результаты теоретического расчета [1]

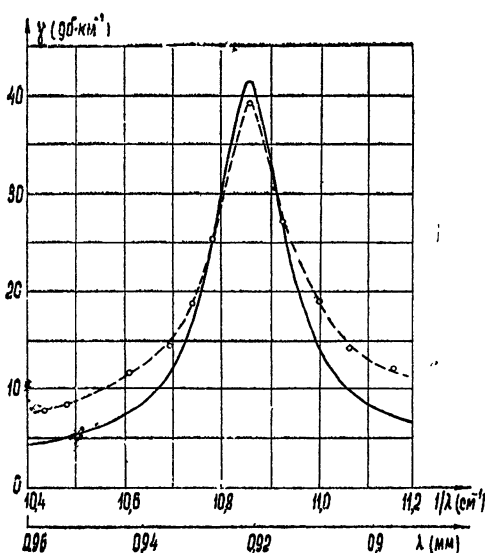


Рис. 1. Теоретические (сплошная кривая) и экспериментальные (пунктирная кривая) значения коэффициента поглощения атмосферного водяного пара при абсолютной влажности  $7,5 \text{ г}\cdot\text{м}^{-3}$ , температуре  $20^\circ\text{C}$  и давлении 760 мм рт. ст.

представлены здесь сплошной кривой. Среднеквадратичная ошибка значений  $\gamma^{\text{эксп}}$ , определенная по разбросу экспериментальных точек, дающих зависимость принимаемого сигнала от влажности, составляет примерно  $\pm 6,5\%$  на резонансной частоте линии и уменьшается до  $\pm 4\%$  в ее крыльях\*. Наибольшее значение коэффициента поглощения  $\gamma^{\text{эксп}}(\nu_{ij})$ , соответствующее резонансной частоте линии, составляет  $39,2 \pm 2,5 \text{ дб} \cdot \text{см}^{-1}$ . Теоретический расчет [1] для этой частоты дает  $\gamma^{\text{теор}}(\nu_{ij}) = 41,4 \text{ дб} \cdot \text{см}^{-1}$ .

Переходя к вопросу о ширине линии, необходимо предварительно сделать следующее замечание. Полученные непосредственно из эксперимента значения коэффициента поглощения не определяются полностью только рассматриваемым переходом  $4_0-5_{-4}$ . Действительно, поскольку интенсивность линии, соответствующей этому переходу, сравнительно невелика, то заметный вклад в коэффициент поглощения дают крылья других (более интенсивных) линий паров  $\text{H}_2\text{O}$ . Вследствие этого кривая, аппроксимирующая ход экспериментальных точек (как и теоретическая кривая рис. 1), не описывает контур изолированной линии и не может быть непосредственно использована для определения ее ширины.

Чтобы преодолеть эту трудность и с помощью полученных данных найти истинное значение ширины  $2(\Delta\nu/c)_{4_0-5_{-4}}^{\text{эксп}}$ , воспользуемся тем обстоятельством, что при фиксированной температуре для всех известных форм спектральных линий имеет место зависимость

$$\gamma_{ij}(\nu_{ij}) \sim (\Delta\nu/c)_{ij}^{-1}, \quad (1)$$

где  $\gamma_{ij}(\nu_{ij})$  — коэффициент поглощения, обусловленный  $ij$ -переходом на резонансной частоте  $\nu_{ij}$ ,  $(\Delta\nu/c)_{ij}$  — полуширина линии, соответствующей  $ij$ -переходу. Если известна экспериментальная величина  $\gamma_{ij}^{\text{эксп}}(\nu_{ij})$ , то, используя теоретические значения  $\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij})$  и  $(\Delta\nu/c)_{ij}^{\text{теор}}$ , на основании (1) легко найти

$$\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{\text{эксп}} = \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{\text{теор}} \frac{\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij})}{\gamma_{ij}^{\text{эксп}}(\nu_{ij})}. \quad (2)$$

При таком способе определения ширины линии предполагается, что необходимые для расчета величины  $\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij})$  значения  $\mu_{ij}$  — дипольного момента и  $\beta_{ij}$  — силы осциллятора  $ij$ -перехода известны с достаточной точностью ( $\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij}) \sim \beta_{ij} \mu_{ij}^2$ ). В связи с этим заметим, что силы осцилляторов, которые рассчитываются на основании теории жесткого асимметричного волчка, при небольших значениях квантового числа  $J$  (последнее имеет место для перехода  $4_0-5_{-4}$ , где  $J$  равно 4 и 5) действительно определены с малой погрешностью  $\sim \pm 1\%$  [1]. Что же касается дипольного момента, то его точное значение для рассматриваемого перехода  $4_0-5_{-4}$  неизвестно. Поэтому, строго говоря, измерения коэффициента поглощения на резонансной частоте этой линии дают лишь величину  $(\Delta\nu/c)_{ij} \mu_{ij}^{-2**}$ . Можно, однако, в качестве величины  $\mu_{ij}$  для перехода  $4_0-5_{-4}$  воспользоваться усредненным по всевозможным пере-

\* Несколько большая погрешность измерений вблизи центра линии объясняется тем, что вследствие сильного поглощения здесь сигнал уверенно регистрировался в менее широком интервале изменения влажности, чем для участков, соответствующих крыльям линии.

\*\* В том случае, когда полуширина  $\Delta\nu/c$  может быть определена непосредственно по экспериментально полученному контуру линии, измерения поглощения в пике линии позволяют найти величину дипольного момента для данного перехода. Такие непосредственные измерения  $\Delta\nu/c$  выполнены авторами для линий  $\lambda_{ij} = 0,789$  и  $0,538 \text{ м.м.}$  Результаты измерений подготавливаются к печати.



ходам значением дипольного момента молекулы  $\text{H}_2\text{O}$ , равным  $1,84 \cdot 10^{-18}$  CGSE.

Учитывая, что значения  $\mu_{ij}$  для различных переходов могут, по видимому, отличаться от указанного среднего на  $\pm 5\%$  [13], возможную ошибку в расчете  $\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij})$  и соответственно в определении ширины линии по формуле (2) можно оценить в  $\pm 10\%$ .

Чтобы определить входящую в (2) величину  $\gamma_{ij}^{\text{экср}}(\nu_{ij})$ , которая по указанной выше причине не равна измеренному поглощению в пике линии, необходимо учесть вклад других линий в значение  $\gamma^{\text{экср}}(\nu_{ij})$ . Последнее было сделано нами на основании экспериментальных данных [6] о поглощении в соседних с рассматриваемой линией окнах прозрачности, на волнах  $\lambda = 0,87$  и  $0,98$  мм. При этом из значений  $\gamma^{\text{экср}}$  (для этих волн, соответственно равных  $10,8$  и  $6,2$  дб·км<sup>-1</sup>) было вычтено, разумеется, поглощение, обусловленное самим переходом  $4_0-5_{-4}$ . Как показывают оценки, оно составляет на указанных волнах примерно  $0,8$  дб·км<sup>-1</sup>. Зная для этих двух близких точек диапазона поглощение, определяемое крыльями всех остальных линий, путем интерполяции можно определить его и на резонансной частоте перехода  $4_0-5_{-4}$ . В результате было получено значение, равное  $7,9 \pm 0,5$  дб·км<sup>-1</sup>.

Следует отметить, что вблизи резонансной частоты  $1/\lambda_{ij} = 10,86$  см<sup>-1</sup> исследуемой линии расположена слабая линия перехода  $9_{-3}-10_{-7}$  ( $1/\lambda_{ij} = 10,78$  см<sup>-1</sup>). При использовавшейся линейной интерполяции вклад этой линии на частоте  $10,86$  см<sup>-1</sup> не был, очевидно, полностью учтен. Чтобы учесть его, мы вычислили с помощью формулы (15) работы [1] поглощение на частоте  $10,86$  см<sup>-1</sup>, обусловленное только переходом  $9_{-3}-10_{-7}$ . Оно оказалось равным  $\sim 0,4$  дб·км<sup>-1</sup>\*. Таким образом, вычитая из измеренного поглощения  $\gamma^{\text{экср}}(\nu_{ij})$  вклад всех других линий, находим  $\gamma_{ij}^{\text{экср}}(\nu_{ij}) = (39,2 \pm 2,5) - (7,9 \pm 0,5) - 0,4 = 30,9 \pm 2,6$  дб·км<sup>-1</sup>.

Теоретическое значение  $\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij})$  для линии  $\lambda_{ij} = 0,92$  мм определяется также с помощью расчетной формулы работы [1], дающей  $\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij}) = 36,8$  дб·км<sup>-1</sup>. Наконец, теоретическая полуширина линии вычислялась, согласно [1], из соотношения

$$\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{\text{теор}} = 0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2} \left(\frac{T}{300}\right)^{-n_{ij}}, \quad (3)$$

в котором значения  $(\Delta\nu/c)_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}$  — полуширины линии, обусловленной соударениями молекул  $\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2$ , и температурного коэффициента  $n_{ij}$  брались из работы Бенедикта и Каплана [7]. Для  $T = 293^\circ\text{K}$  (средней температуры, при которой проводились измерения) величина  $(\Delta\nu/c)_{4_0-5_{-4}}^{\text{теор}} = 0,08487$  см<sup>-1</sup>. Используя приведенные выше данные, на основании (2) получаем

$$\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{0-5_{-4}}^{\text{экср}} = 0,101 \text{ см}^{-1},$$

т. е. найденная из эксперимента ширина линии превышает предсказанную теоретически примерно на  $19\%$ .

Ошибка указанного значения  $(\Delta\nu/c)_{4_0-5_{-4}}^{\text{экср}}$ , обусловленная разбросом величины  $\gamma_{ij}^{\text{экср}}(\nu_{ij})$ , составляет примерно  $\pm 0,009$  см<sup>-1</sup>. Напомним,

\* Величина  $\gamma_{ij}^{\text{теор}}(\nu_{ij})$  для этой линии составляет всего  $1,07$  дб·км<sup>-1</sup>, т. е. менее  $5\%$  от суммарного поглощения на частоте  $10,78$  см<sup>-1</sup>, вследствие чего на рис. 1 данная линия не заметна.

что не исключена также возможность дополнительной ошибки, связанной с отличием действительного значения дипольного момента для данного перехода от принятого нами значения  $1,84 \cdot 10^{-18}$  CGSE.

В заключение отметим, что согласно [1] поглощение в окнах прозрачности миллиметровой и длинноволновой субмиллиметровой области определяется не только исследованной, но еще тремя сильными линиями  $\lambda_{ij} = 0,789; 0,668$  и  $0,538$  мм. Если отличие действительных ширин этих линий от принятых в расчетах [1, 2] не больше, чем это установлено данным экспериментом\*, то наблюдаемое расхождение в 1,5—2 раза между теорией и экспериментом в значениях коэффициента поглощения для указанных окон прозрачности не может быть полностью объяснено только неточностью использовавшихся в расчетах данных о ширинах линий.

Авторы выражают благодарность С. А. Жевакину за обсуждение результатов и просмотр рукописи, а также В. И. Аникину и Б. А. Свердлову за большую помощь в подготовке и проведении эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 674 (1963).
2. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **9**, 1327 (1964).
3. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, **9**, 943 (1964).
4. Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия, **20**, 427 (1966).
5. В. Я. Рядов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, **11**, 1037 (1966).
6. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 859 (1966).
7. W. S. Benedict, L. D. Kaplan, J. Chem. Phys., **30**, 388 (1959).
8. G. E. Becker, S. H. Autler, Phys. Rev., **70**, 300 (1946).
9. J. R. Rusk, J. Chem. Phys., **42**, 493 (1965).
10. G. T. Coats, R. A. Bond, C. W. Tolbert, EERL Report No. 7—20, University of Texas, 1962.
11. R. B. Sanderson, N. Ginsburg, JQSRT, **3**, 435 (1963).
12. J. A. Bastin, A. E. Gear, G. O. Jones, H. J. T. Smith, P. J. Wright, Proc. Roy. Soc., ser. A, **278**, 543 (1964).
13. S. Golden, T. Wentink, B. Hilger, M. Strandberg, Phys. Rev., **73**, 92 (1918).
14. Ю. А. Дрягин, А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, А. И. Наумов, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 1078 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
7 февраля 1966 г.

#### ON WIDTH OF ABSORPTION SPECTRAL LINE OF WATER VAPOUR AT

$$\lambda = 0.92 \text{ mm}$$

V. Ya. Ryadov, N. I. Fourashov

By means of a source of monochromatic radiation and a radiometer with the thermal indicator the measurements of the absorption coefficient of the atmospheric water vapour are made in the range of the spectral line resonance at  $1/\lambda_{ij} = 10.86 \text{ cm}^{-1}$ , corresponding to the rotary transition  $4_0 - 5_{-4}$ . The measurements have been carried out by the method of varying humidity under natural conditions, the basic distance being 1350 m. Under the assumption that the dipole moment for the indicated transition is equal to  $1.84 \cdot 10^{-18}$  CGSE, i. e. it is equal to the value (averaged over all states) of the dipole moment of a molecule  $\text{H}_2\text{O}$ , these obtained the line half-width  $\Delta\nu/c = 0.101 \pm 0.009 \text{ cm}^{-1}$ . This value exceeds the one, calculated by Benediktov and Kaplan, by 19%.

\* Близкий к нашему результат получен также авторами [14], одновременно с нами выполнившими измерения ширины соседней линии.  $\lambda_{ij} = 1,63$  мм.

УДК 621.371.166

ИЗМЕРЕНИЕ АТМОСФЕРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН  
В ДИАПАЗОНЕ 1,36—3,0 ммЮ. А. Дрягин, А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, А. И. Наумов,  
Л. И. Федосеев

Излагаются результаты экспериментального исследования атмосферного поглощения радиоволн в диапазоне 1,36—3,0 мм. Кратко описаны аппаратура, методика измерений и обработка опытных данных. Измерены коэффициенты поглощения паров воды (во всем указанном диапазоне волн) и молекулярного кислорода (вблизи линии 2,53 мм). Найдено, что коэффициент поглощения паров воды в области длин волн, далеких от резонанса, в 1,5—2 раза больше, чем его теоретическое значение, рассчитанное в [2]. Коэффициент поглощения в резонансе ( $\lambda = 1,63$  мм) равен  $26,8 \pm 1$  дб·см<sup>-1</sup> против 31,6 дб·см<sup>-1</sup>, следующим из того же расчета. Сильное расхождение измеренных и рассчитанных значений коэффициента поглощения паров воды для волн, далеких от резонанса, нельзя объяснить неправильным выбором полуширины линий, так как измеренная полуширина линии в воздухе равна  $0,1025 \pm 0,0035$  см<sup>-1</sup>, а расчет [2] дает  $0,087$  см<sup>-1</sup>. Коэффициент поглощения кислорода на волне 2,53 мм оказался в близком соответствии с рассчитанным, тогда как на волнах, далеких от этой линии, измеренный коэффициент поглощения превышает рассчитанный в 5—10 раз.

Условия распространения в атмосфере радиоволн коротковолновой части миллиметрового диапазона в значительной мере определяются молекулярным поглощением кислорода и водяного пара. Теоретически этот вопрос рассматривался рядом авторов. Наиболее полный анализ сделан в работах [1,2], где приводятся данные расчета коэффициента поглощения водяного пара на сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волнах, а также в статьях [3,4], где вычислено поглощение в молекулярном кислороде. Согласно [1-4], поглощение в миллиметровом диапазоне на волнах длиннее 2 мм определяется как водяным паром, так и кислородом, в то время как на волнах короче 2 мм и в субмиллиметровом диапазоне — водяным паром.

Экспериментальному исследованию атмосферного поглощения радиоволн миллиметрового диапазона посвящено большое число работ [5-18]. Детальное сравнение результатов измерений коэффициента поглощения водяного пара с теорией проведено в [19]. Авторы [19] приходят к выводу, что в диапазоне 2÷8 мм (вне резонанса) экспериментальные значения коэффициента поглощения водяного пара отличаются в 1,5 раза от значений, рассчитанных с учетом формы линии, вытекающей из решения кинетического уравнения, в то время как в случае аналогичного расчета с формой линии Ван-Флека—Вайскопфа получается отличие в 3 раза. В другой работе [4] из сравнения с теорией имеющих данных о кислородном поглощении получено, что нерезонансное поглощение в кислороде отличается от теоретического значения на порядок и более, в то время как в кислородных линиях поглощения (на волнах 2,5 и 5,0 мм) совпадение очень хорошее.

Для проверки теории и дальнейшей ее коррекции очень важны опытные данные об интенсивностях и ширинах линий поглощения атмосферных газов. К сожалению, такие данные немногочисленны. В особенности это касается паров воды: опубликована единственная работа [20], где описывается прямое измерение линии вращательного перехода  $5_{-1} - 6_{-5}$  молекулы воды ( $\lambda = 13,5$  мм)\*. Стоит отметить, что полученное авторами этой работы значение полуширины линии  $\left(\frac{\Delta\nu}{C}\right)_{5_{-1}-6_{-5}}$  в дальнейшем было использовано для расчета ширины линии других переходов, а следовательно, и поглощения.

Заметим, что на волнах  $\lambda = 1 \div 2$  мм атмосферное поглощение измерялось только радиоастрономическими методами. Поэтому было целесообразно произвести измерения поглощения активным методом в широком диапазоне волн короче 3 мм, а также измерить интенсивность и ширину линий в этом диапазоне.

### 1. АППАРАТУРА. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Коэффициенты атмосферного поглощения измерялись в натуральных условиях с применением источника излучения в одном конце трассы и приемника в другом.

В качестве генераторов мощности были использованы лампы обратной волны с диапазонами перестройки  $1,36 \div 2$  мм и  $1,8 \div 3,0$  мм и средней мощностью  $3 \div 6$  ватт [23]. Соответственно этим длинам волн было создано два комплекта приемной и передающей аппаратуры. Приемниками служили детекторные модуляционные радиометры с параболическими антеннами диаметром 300 мм. В передающих антеннах была применена двухзеркальная система: параболическое зеркало диаметром 920 мм и плоский отражатель диаметром 130 мм. Мощность от ЛОВ, расположенной за параболическим зеркалом, подводилась к фокусу такой системы с помощью прямоугольного волновода с размерами  $1,8$  мм  $\times$   $3,6$  мм, имеющего на конце соответствующее сужение. Антенны устанавливались на поворотных устройствах вертикально-азимутального типа и снабжались оптическими визирами для наводки. Передающие антенны имели диаграммы направленности  $12' \div 6'$  и располагались на высоте  $7 \div 10$  метров, так что при горизонтальном распространении до расстояний  $5 \div 6$  км луч практически не касался подстилающей поверхности.

При измерениях коэффициентов поглощения были применены метод вариации влажности и метод изменения расстояния между передатчиком и приемником. Первый метод заключается в регистрации уровня сигнала в месте приема при различных значениях абсолютной влажности воздуха на пути между корреспондирующими пунктами. При этом показание выходного прибора радиометра  $\alpha$  связано с абсолютной влажностью  $\rho$  на трассе следующим соотношением:

$$\alpha = \frac{AP_0}{r^2} \exp[-(a\rho + b)r], \quad (1)$$

где  $a$  — удельный коэффициент поглощения в парах воды,  $b$  — коэффициент поглощения в кислороде,  $x = (a\rho + b)$  — полный коэффициент

\* Имеется, правда, работа [10], где с помощью вакуумного спектрометра зафиксировано заметное увеличение поглощения в линии перехода  $2_2 - 3_{-2}$  молекулы воды ( $\lambda = 1,63$  мм). Однако из-за слишком малого поглощения на небольшом оптическом пути авторы получили значение коэффициента поглощения, примерно на 60 об превышающее теоретическое значение.

поглощения,  $r$  — расстояние между передающей и приемной антеннами,  $P_0$  — мощность передатчика,  $A$  — некоторый постоянный коэффициент, зависящий от размеров и качества антенн.

Если влажности  $\rho_0$  соответствует показание выходного прибора  $\alpha_0$ , то

$$\ln \frac{\alpha}{\alpha_0} = -a(\rho - \rho_0)r. \quad (2)$$

Построив на графике зависимость  $\ln(\alpha/\alpha_0)$  от абсолютной влажности воздуха  $\rho$ , легко определить удельное поглощение в водяном паре  $a$ .

Второй метод заключается в регистрации уровня сигнала в месте приема при двух расстояниях между приемником и передатчиком; в отличие от предыдущего, он позволяет определить полный коэффициент поглощения в атмосфере. В этом случае

$$x = a\rho' + b = \frac{\ln(\alpha/\alpha_0) - 2\ln(r_0/r)}{r_0 - r}, \quad (3)$$

где

$$\rho' = \frac{\rho r - \rho_0 r_0}{r - r_0}, \quad (4)$$

$\rho'$  — некоторая приведенная влажность,  $\rho$  и  $\rho_0$  — влажность на трассе в моменты, когда производятся измерения при удалении от передатчика на расстояния  $r$  и  $r_0$  соответственно,  $\alpha$  и  $\alpha_0$  — соответствующие показания радиометров.

Несложный анализ, учитывающий флуктуации коэффициента усиления приемника, частоты и мощности передатчика, флуктуации влажности на трассе и ошибки в измерении расстояний, позволяет найти оптимальные расстояния между приемником и передатчиком, при которых погрешность в измерении поглощения оказывается минимальной. Для диапазона волн  $2,0 \div 1,4$  мм это примерно  $3 \div 4$  км (при измерениях по методу вариации влажности) и  $3 \div 12$  км при методе вариации расстояния, а для волн  $1,8 \div 3,0$  мм —  $3 \div 6$  км и  $3 \div 15$  км соответственно.

При выборе расстояний следует принять во внимание также следующее: флуктуации мощности в месте приема дополнительно возрастают за счет флуктуирующего характера рефракции на трассе луча. Кроме того, при использовании второго метода на малых расстояниях возможны ошибки, связанные с тем, что приемник находится в таком месте, где еще не сформировалась диаграмма передатчика.

На больших расстояниях влияние подстилающей поверхности может сказаться в появлении дополнительного ослабления сигнала, связанного не с поглощением в атмосфере, а с поглощением поверхностной волны. Величину этого ослабления трудно учесть. Эти обстоятельства принимались во внимание при окончательном выборе трасс. Измерения поглощения по вариациям влажности проводились в обоих диапазонах на расстоянии  $3,2$  км. При измерениях с изменением расстояния на волнах  $1,8 \div 3$  мм расстояние менялось от  $3,2$  км до  $5,15$  км; на волнах  $1,4 \div 2$  мм — от  $2$  км до  $3,2$  км. Измерения вблизи волны  $1,63$  мм, где ожидалось повышенное поглощение в парах воды (пик резонансного поглощения), проводились методом вариации влажности на расстоянии  $\sim 1$  км.

Измерения по первой методике выполнялись следующим образом. С целью исключения грубых рефракционных ошибок перед каждым измерением производилась проверка правильности наводки луча передатчика на приемник (по максимуму сигнала). Высокое напряжение, питающее ЛОВ передатчика, плавно изменялось с помощью синхронно-

го моторчика, вращавшего ось потенциометра регулировки напряжения в пределах, соответствующих диапазону генерации ЛОВ. Одновременно производилась запись уровня сигнала в приемном пункте и на эту запись наносились метки напряжения, сообщаемые с передающего пункта по телефону.

Весь спектр регистрировался за 5 ÷ 7 минут; обычно делалось от 5 до 10 таких записей за сеанс. Из записей спектров мощности сигнала на приемном пункте выбирались типичные максимумы (или просто характерные точки), которые определялись частотными характеристиками ЛОВ. Положение выбранных точек на шкале частот определялось с помощью меток напряжения и градуировочной характеристики ЛОВ, которая снималась с помощью волномеров.

Далее для каждой выбранной волны строился график зависимости логарифма величины сигнала в месте приема от влажности воздуха на трассе. Как следует из формулы (2), наклон получающейся прямой определяет поглощение в парах воды. Влажность измерялась аспирационными психрометрами в двух точках трассы: в середине и на одном из ее концов.

Как уже отмечалось, полное поглощение в атмосфере измерялось вторым методом. Аналогично описанному выше записывался спектр мощности принимаемого сигнала на одной трассе, а затем приемник перевозился на другое расстояние и снова записывался спектр. Путем обработки таких записей можно получить полное поглощение и, вычитая уже известное поглощение в парах воды, выделить поглощение в кислороде. Однако вследствие большого поглощения в парах воды в диапазоне 1,4 ÷ 2 мм надежно определить поглощение в кислороде не удалось.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ. ДИСКУССИЯ

Результаты измерений коэффициентов поглощения  $\gamma$  ( $\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}$ ) в атмосферных парах воды, приведенные к абсолютной влажности  $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ , представлены на рис. 1. Значками ●, + и × обозначены величины коэффициентов поглощения, полученные методом вариации влажности по данным обеих измерительных установок. Значками □ и ○ отмечены результаты измерений по методу вариации расстояния на одной и той же измерительной установке, выполненные соответственно в 1963 и в 1964 гг. Остальными значками представлены данные работ [14–18].

Там же, на рис. 1, сплошной кривой изображены результаты теоретического расчета коэффициентов поглощения водяного пара, выполненного в [2] с формой линии, полученной с помощью кинетического уравнения для нормальных атмосферных условий (температура  $T = 300^\circ\text{К}$ , давление  $p = 760 \text{ мм рт. ст.}$  и абсолютная влажность  $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ ).

Вопросы теоретического расчета достаточно полно обсуждены в статье [19], в которой дан критический обзор как теории, так и имеющихся экспериментальных работ в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах радиоволн. Поэтому целесообразно продолжить сопоставление полученных в настоящей работе экспериментальных данных с теоретическими результатами работы [19] и приведенными в ней экспериментальными данными измерений других авторов.

Как видно из рис. 1, в эксперименте поглощение в пике получилось несколько меньше теоретического, а вдали от линии поглощения (в так называемых окнах прозрачности) экспериментальные точки лежат выше теоретических. Так, на длинноволновом крыле поглощение превышает данные теоретического расчета примерно в 1,5 раза, причем с удалением от линии расхождение увеличивается до 2,5 ÷ 3 раз ( $\lambda = 2,5 \div$

$\div 3$  мм). То же следует из работ [14–18]. Увеличение поглощения в этом участке спектра, на наш взгляд, подтверждает выдвинутое в [14, 15] Толбертом и Стрейтоном предположение о существовании вблизи волны 2,73 мм линии водяного пара с шириной  $0,08 \text{ см}^{-1}$  и значением в пике  $0,35 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ .

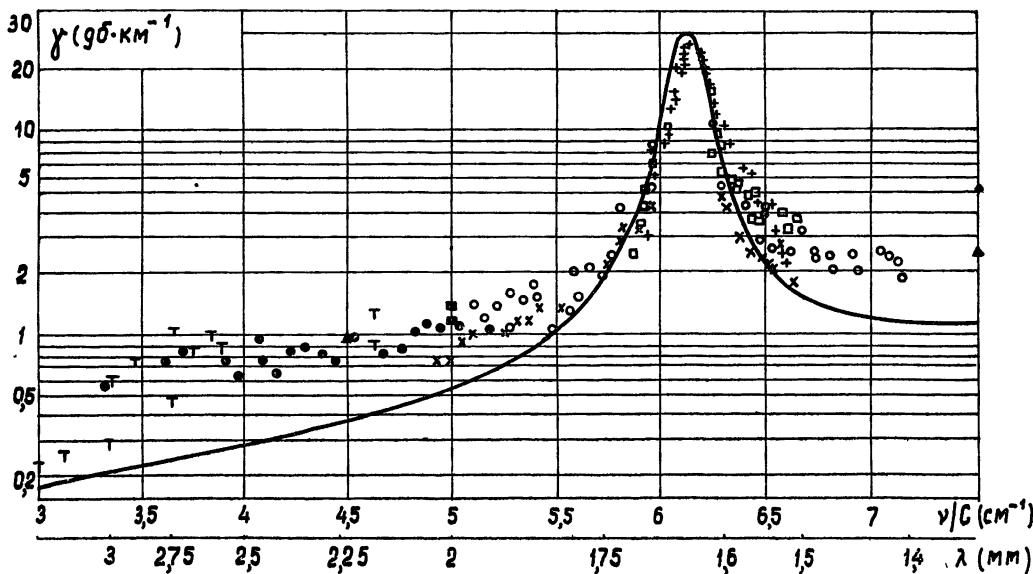


Рис. 1. Поглощение в атмосферных парах воды в диапазоне 1,3–3,3 мм при нормальных атмосферных условиях (температура  $T=300^\circ\text{К}$ , давление  $p=760$  мм рт. ст. и абсолютная влажность  $\rho=7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ ). Сплошная линия—теоретическая кривая; T—измерения, выполненные в Техасском университете [14–16]; ■, ▲—данные [17, 18]; ●, ×, +—данные, полученные методом вариации влажности на разных измерительных установках в 1964 г. (НИРФИ); □, ○—данные, полученные методом вариации расстояния в 1963 и 1964 гг. соответственно (НИРФИ).

Расхождение с теорией на высокочастотном крыле линии  $2_2 - 3_{-2}$  достигает почти двух раз; в окне прозрачности  $1,2 \div 1,4$  мм полученные значения поглощения не расходятся с данными, приведенными в работе Кона, Вентворта и других [18]. Подобное превышение в  $1,5 \div 2$  раза экспериментальных данных по сравнению с рассчитанными [2] в окнах прозрачности весьма устойчиво и отмечалось также на волнах  $0,87$  мм [11, 12],  $0,73$  мм,  $0,45$  мм [12] и  $0,65$  мм [13].

Что касается коэффициента поглощения в пике линии перехода  $2_2 - 3_{-2}$ , то измеренное его значение составляет  $26,8 \pm 1 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ , в то время как рассчитанное [2, 19] равно  $31,6 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ . Непосредственно измеренная (на уровне половинного поглощения) полуширина этой линии в воздухе  $(\Delta\nu/C)_{2_2 - 3_{-2}} = 0,107 \pm 0,005 \text{ см}^{-1}$  и превышает следующее из расчета Бенедикта и Каплана [21] значение  $(\Delta\nu/C)_{2_2 - 3_{-2}} = 0,087 \text{ см}^{-1}$ . Величину  $(\Delta\nu/C)_{ij}$  можно более точно определить, используя известное соотношение

$$\gamma_{\text{рез}} \sim 1/(\Delta\nu/C)_{ij}, \quad (6)$$

где  $\gamma_{\text{рез}}$  — поглощение на частоте перехода. Коэффициент пропорциональности в (6) может быть найден из формулы, связывающей теоретические значения  $\gamma_{\text{рез}}$  и  $\Delta\nu_{ij}$ . В этом случае получаем  $(\Delta\nu/C)_{2_2 - 3_{-2}} = 0,1025 \pm 0,0035 \text{ см}^{-1}$ , что в пределах ошибки измерений совпадает с непосредственно измеренной величиной.

Таким образом, из всех допустимых в пределах ошибки значений полуширины линии даже максимальное  $(\Delta\nu/C)_{2_2-3_2} = 0,112 \text{ см}^{-1}$  отличается от теоретического не более, чем на 29%, и не может полностью объяснить имеющее место в окнах прозрачности расхождение в  $1,5 \div 2$  раза между теоретическими и измеренными значениями коэффициента поглощения. Такой же вывод следует и из измерений ширины линии водяного пара  $4_0-5_4$  ( $\lambda = 0,92 \text{ мм}$ ) [24] и поглощения в примыкающих к ней окнах прозрачности [25].

Следует также обратить внимание на то, что разброс точек на высокочастотном крыле линии поглощения водяных паров  $2_2-3_2$  ( $\nu/C \simeq \simeq 6,3 \text{ см}^{-1}$ ) заметно превышает разброс их на низкочастотном крыле и, по-видимому, не может быть объяснен неточностью измерения поглощения. Возможно, что в отмеченном участке спектра имеются одна или несколько узких линий поглощения небольшой интенсивности, которые из-за неточной установки частоты (в каждом из отдельных измерений) сильно сгладились при усреднении большого числа данных и проявляются в виде аномально большого разброса.

В диапазоне волн  $3 \div 1,8 \text{ мм}$  измерено поглощение в атмосферном кислороде методом вариации расстояния. Вследствие недостаточной точности измерений кислородное поглощение определено только вблизи линии  $\lambda = 2,53 \text{ мм}$ . Полученные результаты представлены на рис. 2. Там же приведена теоретическая кривая [4] с формой линии по кинетическому уравнению и данные других авторов (значки  $T$ ) [16].

Измеренное значение поглощения в максимуме кислородной линии согласуется с данными теоретического расчета, но на склонах линии расхождение существенно и превышает данные теоретического расчета в  $5 \div 10$  раз. Это расхождение экспериментальных данных с результатами теоретического расчета следует и из данных американских авторов. Таким образом, в миллиметровом диапазоне волн, так же, как и в дециметровом [22], обнаруживается существенное превышение коэффициента поглощения в кислороде по сравнению с рассчитанным, что свидетельствует о неудовлетворительности теории молекулярного поглощения.

Авторы пользуются случаем, чтобы выразить свою признательность А. П. Наумову за выполненные им расчеты поглощения, К. М. Стрежневой и М. Б. Флакман, участвовавшим в обработке данных измерений, а также В. Н. Воронову, принимавшему участие в измерениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, 425 (1947).
2. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 674 (1963).

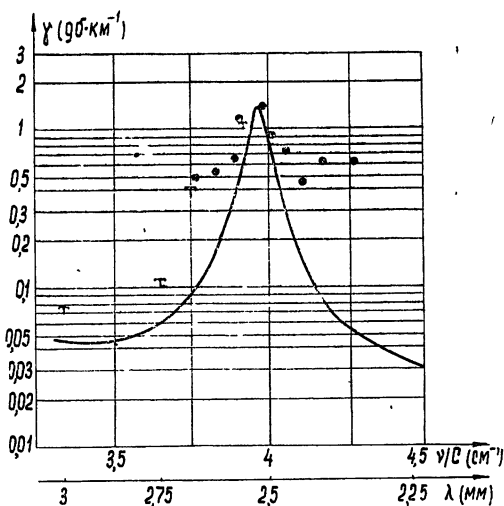


Рис. 2. Кислородное поглощение в области линии  $\lambda = 2,53 \text{ мм}$ . Данные получены методом вариации расстояния (сплошная линия—теоретическая кривая;  $\bullet$  и  $T$ —измерения, выполненные соответственно в НИРФИ и в Техасском университете).



3. J. H. Van Vleck, *Phys. Rev.*, **71**, № 7, 47 (1947).
4. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, *Радиотехника и электроника* (в печати).
5. А. Е. Саломонович, О. М. Атаев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **3**, 606 (1960)
6. R. N. Whitehurst, F. H. Mitchell, *Proc. IRE*, **44**, № 12, 1879 (1956).
7. R. N. Whitehurst, F. H. Mitchell, J. Copeland, *J. Appl. Phys.*, **28**, № 3, 295 (1957).
8. R. J. Coates, *Proc. IRE*, **46**, № 1, 122 (1958).
9. W. M. Sinton, *J. Opt. Soc. America*, **45**, № 11, 975 (1955).
10. Н. Г. Ярославский, А. Е. Станевич, *Оптика и спектроскопия*, **7**, вып. 5, 627 (1959).
11. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Г. А. Шаронов, *Радиотехника и электроника*, **9**, № 6, 989 (1964).
12. В. Я. Рядов, Г. А. Шаронов, *Радиотехника и электроника* (в печати).
13. Н. И. Фурашов, *Оптика и спектроскопия* (в печати).
14. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, *IRE Wescon Convent. Rec.*, **3**, pt. 1, 56 (1959).
15. A. W. Straiton, C. W. Tolbert, *Proc. IRE*, **48**, № 5, 898 (1960); *Correction. Proc. IRE*, № 49, 1, 220 (1961).
16. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, *Proc. IRE*, **49**, № 2, 649 (1961).
17. D. J. H. Wort, *Nature*, **195**, 4848 (1962)
18. M. Cohn, F. L. Wentwort, J. C. Wiltse, *Proc. IEEE*, **51**, № 9, 12 (1963)
19. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, *Радиотехника и электроника*, **9**, 1327 (1964).
20. G. E. Becker, S. H. Autler, *Phys. Rev.*, **70**, № 5—6, 300 (1946).
21. W. S. Benedict, L. D. Caplan, *J. Chem. Phys.*, **30**, № 2, 388 (1959).
22. К. С. Станкевич, В. П. Ласточкин, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **6**, 1098 (1963).
23. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. А. Париллов, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, *Приборы и техника эксперимента*, № 4, 136 (1965).
24. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, *Радиотехника и электроника* (в печати).
25. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика* (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
26 января 1966 г.

## MEASUREMENT OF ATMOSPHERIC RADIO WAVE ABSORPTION IN 1.36—3.0 mm RANGE

*Yu. A. Dryagin, A. G. Kislyakov, L. M. Kukin, A. I. Naumov, L. I. Fedoseev*

There are given the results of the experimental investigation of the atmospheric radio wave absorption in 1,36—3.0 mm range. The equipment, measurement method and experimental data processing are briefly described. The absorption coefficients of water vapour (in all the wave range indicated) and molecular oxygen (near the 2.53 mm line) are measured. The absorption coefficient of water vapour in the far from resonance range is shown to be  $1.5 \div 2$  times that of its theoretical value calculated in [2]. The resonance absorption coefficient ( $\lambda = 1.63$  mm) is equal to  $26.8 \pm 1$  db·km<sup>-1</sup> opposite to 31.6 db·km<sup>-1</sup> given *ibid.* The strong disagreement of measured and calculated values of the absorption coefficient of water vapour in the far from resonance range cannot be explained by an incorrect choice of the line half-width as its measured value in the air is equal to  $0.1025 \pm 0.0035$  cm<sup>-1</sup> and the calculated [21] one is 0.087 cm<sup>-1</sup>. The absorption coefficient of the oxygen at the wave of 2.53 mm turns to be in a good agreement with the calculated one but for the waves being far from this line, the measured absorption coefficient exceeds the calculated one by 5—10 times.

УДК 523.42

## О ВЛИЯНИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА НА ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Г. И. Скрыпник

Методом теории возмущений рассчитываются частотные спектры флуктуаций амплитуды, фазы и пространственной разности фаз в турбулентном слое с учетом движения источника. Задача рассматривается в приближении дифракции Френеля для колмогоровской модели турбулентности и при наблюдении «принципа замороженности». Предполагается, что статистические свойства среды плавно меняются с высотой. Сопоставляются спектры флуктуаций амплитуды для неподвижного и движущегося источников. В пределах применимости геометрической оптики анализируется отклонение спектра флуктуаций фазы от колмогоровского.

1. Известно, что атмосферная турбулентность оказывает существенное влияние на распространение радиоволн в атмосфере, вызывая флуктуации основных параметров волны. Исследование частотного спектра флуктуаций амплитуды и фазы волны, излучаемой подвижным космическим источником, представляет интерес как с точки зрения радиофизического изучения атмосферной турбулентности, так и при рассмотрении влияния флуктуаций на работу радиотехнических устройств.

Как показывает эксперимент (см., например, [1-5]), временное изменение флуктуаций в основном обусловлено переносом «замороженных» неоднородностей поперек луча со средней скоростью ветра. При этом оказывается [3,5], что гипотеза «замороженности» справедлива в достаточно широком интервале времени ( $\tau \leq 10^2$  сек). Выражения для частотных спектров флуктуаций амплитуды, фазы, а также разности фаз, учитывающих однородное перемещение неоднородностей, теоретически получены в [1,2] для колмогоровской модели турбулентности и достаточно хорошо согласуются с экспериментом.

Движение источника вызывает дополнительное временное изменение флуктуаций. Учет движения, как это будет показано ниже, при определенных условиях эквивалентен введению переменной по трассе эффективной скорости ветра. В результате этого частотный спектр флуктуаций амплитуды и фазы, изменяя свою форму, перемещается в область более высоких частот.

В настоящей статье методом возмущений рассчитываются частотные спектры корреляционных (структурных) функций флуктуаций амплитуды, фазы и пространственной разности фаз компонент поля волны, излучаемой движущимся космическим источником и проходящей через турбулентный слой с плавно меняющимися по высоте статистическими характеристиками. При исследовании частотных спектров используется колмогоровская модель изотропной турбулентности, которая может быть удобно описана при помощи трехмерной спектральной плотности флуктуаций показателя преломления:

$$\Phi_n(x, \nu) = 0,033C_n^2 x^{-11/3} \delta(\nu - \mathbf{xv}_s) (2\pi/L_0 \ll x \ll 2\pi/l_0, \nu > 2\pi/\tau), \quad (1)$$

где  $C_n$  — структурная постоянная,  $v_b$  — скорость ветра,  $L_0, l_0$  — соответственно внешний и внутренний масштабы турбулентности.

Вид спектральной плотности при  $x < 2\pi/l_0$  не является универсальным и зависит от конкретной метеорологической обстановки. Однако для количественных оценок можно пользоваться функцией, предложенной Карманом [1]:

$$\Phi_n(x, \nu) = 0,033C_n^2 \frac{L_0^{11/3}}{(1 + x^2 L_0^2)^{11/6}} \delta(\nu - xv_b) \quad (x \ll 2\pi/l_0, \nu > 2\pi/\tau). \quad (2)$$

При конкретных расчетах предполагается, что изменение  $C_n^2$  с высотой происходит по экспоненциальному закону

$$C_n^2/C_{n0}^2 = g(z) = \exp(-z/H_0). \quad (3)$$

Приводимые ниже формулы получены в предположении, что длина волны  $\lambda \ll l_0$ , однако в действительности нарушение этого условия не оказывает существенного влияния на окончательные выражения [6]. В связи с этим указанные соотношения могут быть применены в оптическом, сантиметровом и отчасти в дециметровом диапазоне волн, когда влияние ионосферы не существенно.

2. Рассмотрим задачу о флуктуациях комплексной фазы  $\psi = \ln E$  волны, излучаемой движущимся со скоростью  $v_0$  ( $v_0 \ll c$ ) точечным источником. Так как отклонение показателя преломления от среднего значения мало ( $n_1 \ll n_0 \simeq 1$ ), то флуктуации комплексной фазы в сферической волне можно найти методом возмущений, рассмотренным в [1]. Временное изменение флуктуаций, обусловленное перемещением источника, можно учесть, осуществляя в выражении для невозмущенной сферической волны галилеево преобразование пространства-времени. Так как за время наблюдения расстояние до источника практически не меняется, то это преобразование необходимо учитывать только в фазе, а изменением амплитуды можно пренебречь.

С учетом сделанных замечаний можно показать, что в приближении дифракции Френеля случайная амплитуда флуктуаций комплексной фазы, являющейся фурье-разложением  $\psi_1 = E_1/E_0$  в плоскости  $s = \text{const}$ ,

$$\psi_1(\rho, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_\psi(x, s, \nu) \exp[i(\rho x - \nu t)] dx d\nu \quad (4)$$

определяется следующим соотношением:

$$A_\psi(x, L, \nu) = ikr^2 \int_0^L \frac{ds}{(r-s)^2} \exp\left[-\frac{irsx^2}{2k(r-s)}\right] A_n\left(\frac{r}{r-s} \times \right. \\ \left. \times x, s, \nu + \frac{s}{r-s} xv_0\right). \quad (5)$$

Здесь  $A_n(x, s, \nu)$  — случайная амплитуда флуктуаций показателя преломления;  $v_0$  — скорость объекта;  $r$  — расстояние от точки наблюдения до источника;  $s$  — переменная интегрирования вдоль луча зрения;  $\nu_d = sxv_0/(r-s)$  — доплеровский сдвиг частоты рассеяния локальной неоднородностью масштаба  $l \sim x^{-1}$ , удаленной от точки наблюдения на расстояние  $s$ ; остальные обозначения ясны из рис. 1.

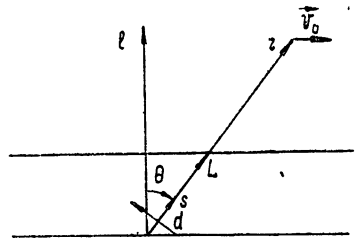
Формула (5), справедливая при  $v_0 \ll c$ ,  $v_0 n r^{-1} \ll \nu$ , является простым обобщением имеющегося в литературе соотношения для статических флуктуаций в сферической волне.

В реальных условиях  $r \gg L$  и в (5) можно осуществить предельный переход к плоской волне. В результате получим

$$A_{\psi}(\mathbf{x}, L, \nu) = ik \int_0^L ds \exp \left[ -\frac{isx^2}{2k} \right] A_n \left( \mathbf{x}, s, \nu + \frac{s\mathbf{x}\mathbf{v}_0}{r} \right). \quad (6)$$

Движение источника, как видно из (6), вызывает зависящий от переменной интегрирования доплеровский сдвиг частоты  $\nu_d = s\mathbf{x}\mathbf{v}_0/r$ . Отметим, что для бесконечно удаленного источника ( $r \rightarrow \infty$ )  $\nu_d \rightarrow 0$ . К этому результату можно также прийти из простых качественных рассуждений, выделяя на расстоянии  $s$  локальную неоднородность масштаба  $l \simeq x^-$  и рассматривая в точке наблюдения перемещение создаваемой ею дифракционной картины за счет движения источника. Нетрудно убедиться в том, что при  $r \gg L$  флуктуации комплексной фазы от движущегося источника эквивалентны флуктуациям от неподвижного объекта, если среду как целое завращать с угловой скоростью  $\mathbf{v}_{0n}/r$  относительно точки наблюдения в направлении, противоположном движению источника\*.

Рис. 1. К расчету флуктуаций амплитуды и фазы.



Усредняя квадрат действительной и мнимой части соотношения (6) и применяя обычную методику вычисления двойных интегралов [1], нетрудно получить выражения для двумерных спектральных плотностей флуктуаций логарифма амплитуды ( $F_{\chi}$ ) и фазы ( $F_{\phi}$ )\*\*. В результате приходим к следующим формулам:

$$F_{\chi}(\mathbf{x}, 0, \nu) = 2\pi k^2 \int_0^L ds \sin^2 \frac{x^2 s}{2k} \Phi_n \left( \mathbf{x}, 0, \nu + \frac{s\mathbf{x}\mathbf{v}_0}{r} \right), \quad (7)$$

$$F_{\phi}(\mathbf{x}, 0, \nu) = 2\pi k^2 \int_0^L ds \cos^2 \frac{x^2 s}{2k} \Phi_n \left( \mathbf{x}, 0, \nu + \frac{s\mathbf{x}\mathbf{v}_0}{r} \right). \quad (8)$$

Здесь  $\Phi_n(\mathbf{x}, 0, \nu)$  — трехмерная спектральная плотность, имеющая вид (1) или (2).

Следует особо отметить, что представление флуктуаций амплитуды и фазы в виде однородных и стационарных случайных полей возможно

\* Автор благодарен В. И. Татарскому, обратившему внимание на этот факт.  
 \*\* Пространственно-временной спектр флуктуаций  $F_{\chi, \phi}(\mathbf{x}, 0, \nu)$  связан с корреляционной функцией соотношением

$$B_{\chi, \phi}(\rho, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\mathbf{x}\rho - \nu t) F_{\chi, \phi}(\mathbf{x}, 0, \nu) d\mathbf{x}d\nu.$$

В случае необходимости может быть введена структурная функция

$$D_{\chi, \phi}(\rho, t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\mathbf{x}\rho - \nu t)] F_{\chi, \phi}(\mathbf{x}, 0, \nu) d\mathbf{x}d\nu.$$

для ограниченного промежутка времени  $t \leq \tau_0$ , в течение которого не происходит заметного перемещения источника ( $\tau_0 v_{0n} \ll r$ ,  $\tau_0 \geq 10$  сек). При этом условия параметры  $L$ ,  $r$ ,  $v_{0n}$  можно считать постоянными. Так как  $\tau_0 \ll \tau$  ( $\tau$  — характерное время, в течение которого выполним «принцип замороженности»), то вместо средней скорости ветра  $v_b$  можно ввести эффективное значение скорости перемещения неоднородностей\*:

$$v = v_b - \frac{s}{r} v_0.$$

3. Перейдем к вычислению частотного спектра флуктуаций логарифма амплитуды для колмогоровской модели турбулентности. Обозначая спектральную плотность через  $W_\chi(f)$ , по определению имеем\*\*

$$W_\chi(f) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} F_\chi(x, 0, 2\pi f) dx. \quad (9)$$

Подставляя в (9) соотношение (7) с учетом (1) и выполняя интегрирование по  $x_{||} \parallel v$ , получим для частотного спектра флуктуаций, удовлетворяющего условию нормировки в логарифмическом масштабе, следующую формулу:

$$U_\chi = \frac{f W_\chi}{\chi^2} = 1,57\Omega \int_0^\infty du e^{-u} \int_0^\infty dt \frac{\sin^2[(t^2 + \Omega^2/u^2)u/2]}{u(t^2 + \Omega^2/u^2)^{11/6}}, \quad (10)$$

где

$$u = z/H_0, \quad t = x_\perp \sqrt{\frac{H_0}{k \cos \theta}}, \quad \Omega = f/f_0, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{H_0 \cos \theta}} v = \\ = v(2\pi\lambda H_0 \cos \theta)^{-1/2}, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad v = \left| v_{bn}(H_0) - \frac{H_0}{r} v_{0n} \right|$$

( $v$  — значение нормальной к лучу составляющей эффективной скорости на высоте  $z = H_0$ ,  $\theta$  — зенитный угол источника ( $\theta < \pi/2$ )).

При выводе выражения (10) предполагалось, что изменение  $C_n^2$  с высотой происходит по экспоненте (3), а изменение эффективной скорости — по линейному закону. Интегрирование по  $u$  распространено до бесконечности, так как основной вклад в значение интеграла происходит в области  $u \simeq 1$ .

Дальнейшее вычисление двойного интеграла (10) было выполнено по следующей схеме. Если произвести замену переменных  $X = (t^2 + \Omega^2 u^{-2})u$ ,  $Y = u^{-1}$  и соответственно изменить область интегрирования, то интегрирование по  $Y$  дает  $\sqrt{\pi} \Omega^{1/3} X^{-2/3} W_{2/3, 2/3}(\Omega^2 X^{-1}) \exp(-\Omega^2/2X)$ . Здесь  $W_{2/3, 2/3}(\Omega^2 X^{-1})$  — функция Уиттекера. Воспользовавшись одним из интегральных представлений этой функции, можно осуществить интегрирование по  $X$ , а затем — по вновь введенной переменной. В результате для частотного спектра  $U_\chi$  получаем следующее выражение:

$$U_\chi(f) = \Omega^{-5/3} \left\{ 1 - 2^{-2/3} \Gamma^{-2} \left( \frac{4}{3} \right) \Omega^{8/3} \operatorname{Re} \left[ \exp \left( \frac{i\pi}{3} \right) K_{4/3}(\sqrt{i} \Omega) \right]^2 \right\}, \quad (11)$$

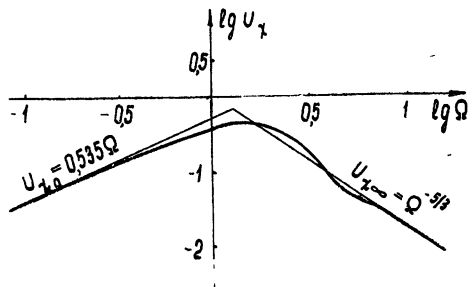
\* Знак «минус» отвечает тому факту, что при  $v_b \parallel v_0$  перемещения дифракционной картины, вызванные ветром и движением источника, происходят в противоположных направлениях.

\*\* Среднеквадратичное значение  $\bar{\chi}^2$  находится интегрированием  $W_\chi(f)$  по положительным частотам  $\bar{\chi}^2 = \int_0^\infty W_\chi(f) df$ .

где  $K_{4/3}(\sqrt{i}\Omega)$  — функция Макдональда от комплексного аргумента, которая может быть выражена через табличные функции Кельвина (Томсона) [7, 8],  $\Gamma$  — гамма-функция.

Как следует из формул (10) и (11), величина  $U_\chi$  есть функция  $\Omega = f/f_0$ , не меняющая своего вида при изменении  $f_0$ . В логарифмическом масштабе изменению  $H_0$ ,  $v$  или  $\lambda$  соответствует перемещение кривой  $U_\chi$  вдоль оси абсцисс. При этом подобие кривой сохраняется независимо от вида функции  $g(u)$ . Вид частотного спектра  $U_\chi$  в логарифмическом масштабе приведен на рис. 2. Функция  $U_\chi(\Omega)$  имеет максимум при  $\Omega_m \approx 1,5$ , свидетельствующий о том, что масштаб корреляции флуктуаций амплитуды имеет порядок  $(\lambda H_0)^{1/2}$ . В области низких ( $\Omega \leq 0,25$ , приближение геометрической оптики) и высоких ( $\Omega \geq 4$ , зона фраунгоферовой дифракции) частот кривая  $U_\chi(\Omega)$  асимптотически стремится соответственно к  $U_{\chi 0} = 0,535\Omega$  и  $U_{\chi \infty} = \Omega^{-5,3}$ .

Рис. 2. Теоретический вид частотного спектра логарифма амплитуды при переменной скорости ветра.



Сравнивая (10) с выражением частотного спектра, приведенным в [1] для неподвижного источника, можно установить, что учет движения источника приводит к изменению  $f_0$  и вида подынтегральной функции. Это, в свою очередь, вызывает перемещение частотного спектра в область высоких частот (так, например, при  $\theta = 0^\circ$ ,  $v_0 = 8 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $r = 200 \text{ км}$ ,  $H_0 = 2 \text{ км}$ ,  $v_B(H_0) = 5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$   $f_0$  увеличивается в 17 раз) и изменение его формы. Для определения характера этих изменений на рис. 3 приве-

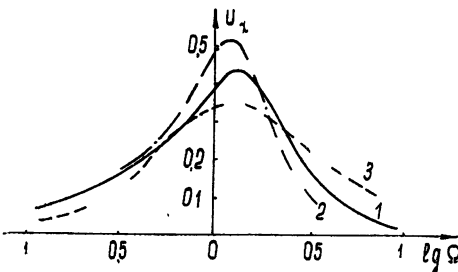


Рис. 3. Сопоставление теоретического спектра флуктуаций логарифма амплитуды при постоянной и переменной скорости ветра: 1—переменная скорость ветра, 2—постоянная скорость ветра, 3—экспериментальная кривая.

дено сопоставление теоретических кривых частотного спектра при постоянной и переменной скорости ветра. На этом же рисунке приведена эмпирическая кривая частотного спектра, полученная в [1] по измерениям флуктуаций амплитуды в приземном слое. Максимумы всех кривых искусственно совмещены. Из рисунка видно, что движение источника приводит к заметному расширению частотного спектра в области  $\Omega \approx 1$ . При  $\Omega \ll 1$  и  $\Omega \gg 1$  характер флуктуаций амплитуды не меняется. Асимптотические кривые  $U_{\chi 0}$  и  $U_{\chi \infty}$  сохраняют ту же частотную зависимость, меняется лишь численный коэффициент при соответствующей степенной функции.

4. Частотные спектры флуктуаций фазы и логарифма амплитуды связаны функциональным соотношением. В соответствии с (7) и (8) запишем

$$W_{\Phi}(f) = 2W_{\chi\infty}(f) - W_{\chi}(f), \quad (12)$$

где  $W_{\chi\infty}$  — частотный спектр флуктуаций амплитуды в зоне фраунгоферовой дифракции, который для колмогоровской модели турбулентности совпадает с асимптотическим значением  $W_{\chi}$  при  $\Omega \rightarrow \infty$ .

Подставляя в (12) соотношение (11) и принимая во внимание известное выражение  $\chi^2 = 0,53C_{n0}^2 k^{7/6} H_0^{11/6} \cos^{-11/6} \theta$ , получим следующую формулу:

$$\omega_{\Phi} = \frac{v \cos^{4/3} \theta W_{\Phi}}{2\pi C_{n0}^2 k^{2/3} H_0^{7/3}} = 0,53\Omega^{-8/3} \left\{ 1 + 2^{-2/3} \Gamma^{-2} \left( \frac{4}{3} \right) \Omega^{8/3} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Re} [e^{\pi i/3} K_{4/3}(\sqrt{i}\Omega)]^2 \right\}. \quad (13)$$

Функция (13), изображенная на рис. 4, асимптотически стремится при  $\Omega \leq 0,5$  (гесметрическая оптика) к кривой  $\omega_{\Phi 0} = 1,06\Omega^{-8/3}$ . В зоне фраунгоферовой дифракции ( $\Omega \geq 2$ ) частотный спектр, осциллируя, приближается к  $\omega_{\Phi \infty} = 0,53\Omega^{-8/3}$ . Соответствующий расчет показывает, что при постоянной скорости ветра численные коэффициенты при степенных функциях асимптотических кривых уменьшаются всего в 1,5 раза. Движение источника вызывает изменение формы спектра в диапазоне частот  $0,5 \leq \Omega \leq 2$ . Так как частотный спектр флуктуаций амплитуды несколько шире в случае подвижного источника, то, в соответствии с (12), при переменной скорости ветра в частотном спектре фазы происходит более медленный переход от одной асимптоты к другой. Указанное отличие, однако, незначительно.

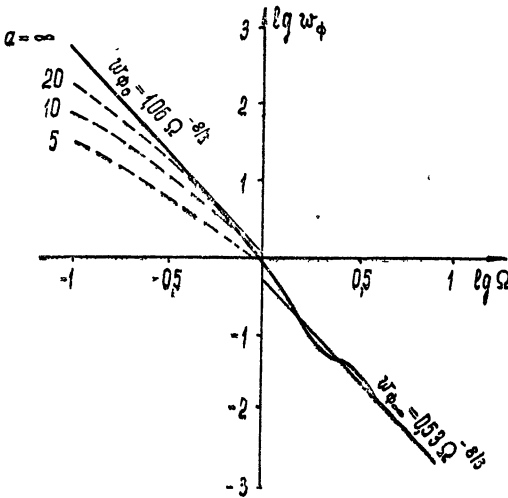


Рис. 4. Теоретический вид частотного спектра флуктуаций фазы при переменной скорости ветра ( $a = \infty$  — колмогоровский спектр,  $a < \infty$  — кармановский спектр).

Формулы (11) и (13) получены для спектральной плотности (1) и потому справедливы в области частот  $f \gg v(H_0)/L_0$ . В случае быстро движущегося космического источника (ИСЗ) это условие может нарушаться на частотах порядка нескольких герц. В связи с этим представляет практический интерес проследить отклонение частотного спектра флуктуаций фазы от колмогоровского. Так как  $k^{-1}H_0 \ll L_0^2$ , то иссле-

дование флуктуаций для кармановской модели турбулентности можно произвести в приближении геометрической оптики. Подставляя в (8) спектральную плотность (2), полагая  $\cos^2(sx^2/2k) \equiv 1$  и выполняя интегрирование по  $x$ , нетрудно получить следующую формулу:

$$W_{\Phi}(f) = 0,033C_{n0}^2 k^2 v^{5/3} f^{-8/3} H_0 \cos^{-8/3} \theta \int_0^{\infty} e^{-u} u^{5/3} (1 + u^2/\Omega_1^2)^{-4/3} du, \quad (14)$$

где

$$\Omega_1 = f/f_{01}, \quad f_{01} = v/(2\pi L_0 \cos \theta).$$

Принимая во внимание, что  $\overline{\Phi_1^2} = 0,79C_{n0}^2 k^2 L_0^{5/3} H_0 \cos^{-1} \theta$ , приведем выражение для логарифмически нормированного частотного спектра флуктуаций фазы:

$$U_{\Phi} = \frac{f W_{\Phi}}{\overline{\Phi_1^2}} = 0,9 \Omega_1^{-5/3} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{5/3} (1 + u^2/\Omega_1^2)^{-4/3} du. \quad (15)$$

Функция  $U_{\Phi}$ , полученная численным интегрированием, изображена на рис. 5. Если ввести безразмерный параметр  $a = \Omega_1/\Omega = (kL_0^2 \cos \theta/H_0)^{1/2}$ , то при различных его значениях можно пересчитать кривую  $U_{\Phi}$  на пло-

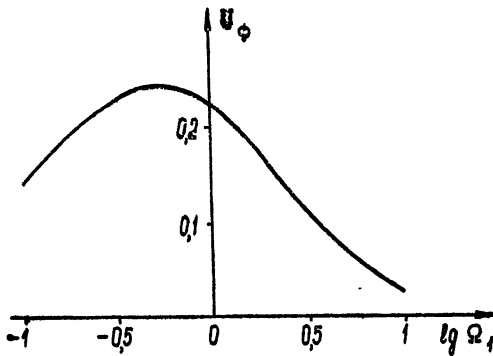


Рис. 5. Теоретический вид частотного спектра флуктуаций фазы в области низких частот.

скость  $lg \omega_{\Phi}$ ,  $lg \Omega$ . Результат пересчета приведен на рис. 4, из которого видно, что при  $a \leq 20$  и  $\Omega \leq 0,5$  происходит заметное отклонение спектра флуктуаций фазы от колмогоровского.

5. Пространственно-временной спектр флуктуаций разности фаз  $\Delta \Phi_1(\rho, t) = [\Phi_1(\rho, t) - \Phi_1(\rho + d, t)]$  ( $d$  — фиксированный вектор, определяемый базой интерферометра,  $\rho, t$  — текущие координаты случайных полей) связан с  $F_{\Phi}(x, 0, v)$  соотношением\*

$$F_{\Delta \Phi}(x, v) = 2(1 - \cos \kappa d) F_{\Phi}(x, v). \quad (16)$$

\* Если существует корреляционная функция фазы  $B_{\Phi}(\rho, t)$ , то формула (16) непосредственно вытекает из очевидного соотношения

$$B_{\Delta \Phi}(\rho, t) = \Delta \Phi_1(\rho_1, t_1) \Delta \Phi_1^*(\rho_1 + \rho, t_1 + t) = 2B_{\Phi}(\rho, t) - B_{\Phi}(\rho - d, t) - B_{\Phi}(\rho + d, t).$$

Указанная зависимость сохраняется также между спектрами структурных функций, Отметим, что  $\overline{\Delta \Phi_1^2}(d) = D_{\Phi}(d)$ .



Так как характер флуктуаций фазы не меняется при переходе от геометрической оптики к зоне фраунгоферовой дифракции, то достаточно произвести исследование флуктуаций  $\Delta\Phi_1$  в приближении геометрической оптики. Выражение для нормированного частотного спектра разности фаз, получающееся интегрированием (16) по  $\mathbf{x}$  для колмогоровской модели турбулентности, имеет вид

$$U_{\Delta\Phi} = f_d W_{\Delta\Phi} / \overline{\Delta\Phi_1^2} = 0,477 \Omega_d^{-8/3} / \int_0^\infty g(u) du \left[ \int_0^\infty g(u) u^{5/3} du - 2^{-1/3} \Gamma^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) \Omega_\perp^{4/3} \int_0^\infty g(u) \cos \frac{\Omega_\parallel}{u} u^{1/3} K_{4/3} \left( \frac{\Omega_\perp}{u} \right) du \right], \quad (17)$$

где

$$\overline{\Delta\Phi_1^2} = 2,94 k^2 d^{5/3} H_0 \cos^{-1} \theta C_{n_0}^2 \int_0^\infty g(u) du, \quad \Omega_d = f/f_d,$$

$$\Omega_\parallel = \frac{|d_\parallel| \cos \theta_v}{v}, \quad \Omega_\perp = \frac{|d_\perp| \cos \theta_v}{v}, \quad f_d = \frac{v}{2\pi d \cos \theta},$$

$d_\parallel, d_\perp$  — проекции  $\mathbf{d}$  соответственно на направление  $\mathbf{v}$  и ему перпендикулярное,  $g(u) = C_n^2(u)/C_n^2$ .

Из приведенного соотношения видно, что частотный спектр флуктуаций разности фаз зависит от ориентации векторов  $\mathbf{v}, \mathbf{d}$ . Однако при  $\Omega_d \ll 1$  и  $\Omega_d \gg 1$  данная зависимость слабая или вообще пропадает. Можно показать, что при  $\Omega_d \ll 1$  частотный спектр  $U_{\Delta\Phi}$  изменяется по закону

$$U_{\Delta\Phi} = A \Omega_d^{-2/3}, \quad (18)$$

где

$$A = 0,12 (2 + \sin^2 \varphi) \left[ \int_0^\infty g(u) u^{-1/3} du / \int_0^\infty g(u) du \right],$$

$\varphi$  — угол между  $\mathbf{v}, \mathbf{d}$ . В противоположном случае  $\Omega_d \gg 1$   $U_{\Delta\Phi}$  равен удвоенному частотному спектру фазы и (17) принимает вид

$$U_{\Delta\Phi} = B \Omega_d^{-8/3} \quad (\Omega_d \gg 1), \quad (19)$$

где

$$B = 0,477 \int_0^\infty g(u) u^{5/3} du / \int_0^\infty g(u) du$$

не зависит от угла  $\varphi$ .

Следует отметить, что степенная зависимость (18) и (19) имеет место и для неподвижного источника. Отличие состоит в численных значениях коэффициентов  $A$  и  $B$ . Влияние движения источника на форму спектра  $U_{\Delta\Phi}$  наблюдается в области частот  $\Omega_d \simeq 1$ . В этом диапазоне частот  $U_{\Delta\Phi}$  существенно зависит как от угла  $\varphi$ , так и от вида функции  $g(u)$ . В качестве примера приведем выражение для частотного спектра, положив  $g(u) = \exp(-u)$ ,  $\varphi = 0$  ( $\Omega_\perp = 0$ ). Интегралы, определяющие (17), в данном случае выражаются через функцию Макдональда  $K_{8/3}$ \*:

\* Функция  $K_{8/3}(2\sqrt{i\Omega_d})$  рассчитывалась по табличным значениям  $K_{5/3}$  и  $K_3$  линейной интерполяцией по индексу [8].

$$U_{\Delta\Phi} = -0,975\Omega_d^{-8/3} \left[ 0,75 - \Omega_d^{4/3} \operatorname{Re} \left[ \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) K_{8/3}(2\sqrt{i\Omega_d}) \right] \right]. \quad (20)$$

Вид функции (20) в логарифмическом масштабе приведен на рис. 6. Частотный спектр, как это следует из рисунка, можно разбить на три области, в каждой из которых зависимость от частоты приблизительно логарифмически линейна. В области низких ( $\Omega_d \leq 0,18$ ) и высоких ( $\Omega_d \geq 3,3$ ) частот изменение происходит в соответствии с законом (18) и (19). В промежуточной области частотный спектр можно достаточно точно аппроксимировать степенной функцией

$$U_{\Delta\Phi} = 0,1\Omega_d^{-1,22} \quad (0,18 \leq \Omega_d \leq 3,3). \quad (21)$$

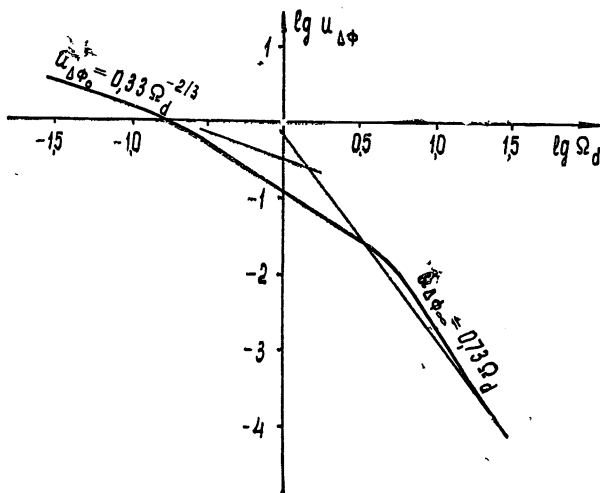


Рис. 6. Частотный спектр флуктуаций разности фаз.

Отметим, что частотный спектр  $U_{\Delta\Phi}$  от неподвижного источника при  $\Omega_d \simeq 1$  имеет быстроосциллирующий характер.

6. Из приведенного анализа можно заключить, что частотный спектр флуктуаций амплитуды, фазы и разности фаз от движущегося источника перемещается в область более высоких частот. Вследствие этого и отклонение спектра флуктуаций от колмогоровского наблюдается на более высоких частотах. Изменение формы спектра, амплитуды и фазы, проявляющееся в некотором его расширении и сглаживании осцилляций, происходит в зоне дифракции Френеля ( $\Omega \simeq 1$ ). Вне этой зоны частотный спектр изменяется по тому же закону, который имеет место в случае неподвижного источника. Частотный спектр флуктуаций разности фаз зависит от взаимной ориентации направлений движения источника и базы. Наиболее существенным образом это проявляется в диапазоне частот  $0,2 \leq \Omega_d \leq 3$ .

Движение источника, приводящее к временным изменениям флуктуаций, при  $t \leq \tau_0$  не вызывает изменения среднеквадратичных значений рассматриваемых параметров волны и приводит лишь к перераспределению частотного спектра флуктуаций. Однако его движение становится определяющим для флуктуаций величин, связанных временным оператором с основными параметрами волны (частотой  $\omega_1 = \partial\Phi_1/\partial t$ , пространственной разностью частот  $\omega_1(0) - \omega_1(\mathbf{d})$  и т. д.). В этом случае уже не только частотный спектр, но и среднеквадратичное значение в фиксированной точке пространства зависит от скорости движения источника.

рованный момент времени ( $t \leq \tau_0$ ) зависит от скорости движения источника.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. И. Татарскому за обсуждение результатов и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 551 (1960).
3. J. W. Jlerbstreit, M. C. Thompson, Proc. IRE, **43**, 1391 (1955).
4. A. P. Deam, B. M. Pannin, Proc. IRE, **43**, 1402 (1955).
5. K. A. Norton, J. Atm. Terr. Phys., **15**, 205 (1959).
6. А. С. Гурвич, Г. С. Голицын, В. И. Татарский, Акуст. ж., **6**, 187 (1960).
7. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М., 1964.
8. F. Tölke, Besselsche und Hankelsche Zylinder-funktionen, Stuttgart, 1936.

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию  
3 января 1966 г.

#### ON INFLUENCE OF COSMIC SOURCE MOTION UPON FREQUENCY SPECTRUM OF AMPLITUDE AND PHASE FLUCTUATIONS IN TURBULENT ATMOSPHERE

*G. I. Skrypnik*

By the method of the perturbation theory the frequency spectra are calculated of fluctuations of the amplitude, phase and spatial phase difference in a turbulent layer, the source motion being taken into account. The problem is considered in the approximation of Fresnel diffraction for the Kolmogorov's turbulent model and when the „frozen principle“ is observed. The statistical properties of a medium are supposed to vary smoothly with the height. The spectra of the amplitude fluctuations are compared for the stationary and moving sources. Within the applicability of the geometrical optics the deviation of a phase fluctuation spectrum the from Kolmogorov's one is analysed.

---

УДК 621.371.222.5.029.64

## ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ САНТИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ МОРЯ ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

*А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс*

Приводятся результаты измерений интенсивности радиолокационного отражения при малых углах скольжения, полученные с помощью трехсантиметрового локатора с высокой разрешающей способностью. Показано, что наблюдаемое резкое падение интенсивности принятого сигнала с уменьшением угла скольжения связано с конечностью значений диэлектрической проницаемости морской воды. Указанный эффект приводит к тому, что в ряде случаев для малых углов скольжения практически отражают только передние склоны морских волн.

Экспериментальные исследования рассеяния радиоволн сантиметрового диапазона взволнованной поверхностью моря показали существенную зависимость интенсивности обратного рассеяния от угла скольжения  $\psi$  радиолокатора [1]. Характер такой зависимости в области больших ( $\psi > 50^\circ$ ) значений углов скольжения объясняется рассеянием от крупных морских волн; в области углов  $\psi < 50^\circ$  определяющим является рассеяние от неоднородностей, сравнимых с длиной волны. Резкое падение интенсивности рассеянного сигнала  $I$  с уменьшением угла при скользящем распространении ( $\psi < 15^\circ$ ) качественно объяснялось затенением одних участков рассеивающей поверхности другими [2,3].

Приведенные ниже результаты измерений  $I = f(\psi)$  при малых  $\psi$  в отсутствие затенения показывают, что наблюдаемая зависимость может быть объяснена конечностью электрических параметров рассеивающей поверхности.

Измерения производились на волне 3,2 см с помощью радиолокационной аппаратуры, обеспечивающей высокую разрешающую способность по дистанции (лучше 5 м) [4]. Аппаратура располагалась на берегу на высоте 50 м; расстояние до облучаемых участков моря менялось в пределах от 150 до 600 м. Применение локатора с высокой разрешающей способностью как в продольном, так и поперечном направлениях (ширина диаграммы направленности антенн в азимутальном направлении не превышала  $1^\circ$ ) позволило уменьшить размеры рассеивающего участка ( $5 \times 5 \div 10$  м) до величины, существенно меньшей характерного размера крупных волн на море. Следует подчеркнуть, что такая методика позволяет получить правильные данные об истинном угле скольжения  $\psi$ ; в случае, когда в рассеивающий объем попадают оба склона морской волны, интегральный эффект искажает картину.

На рис. 1 приведены примеры записи мгновенной пространственной структуры сигнала для дистанции 450 м (длина исследуемого участка 30 м). Из записей хорошо видна «импульсная» структура сигнала — изменение величины сигнала вдоль дистанции составляет  $20 \div 30$  дБ.

Данные измерений параметров волнения показывают, что для приведенных примеров эффект затенения одних участков морской поверхности другими не имел места.

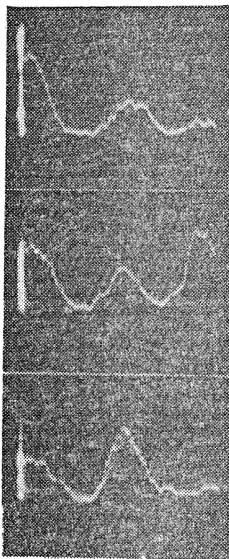


Рис. 1. Пространственная структура рассеянного морем сигнала ( $l = 30$  м,  $t = 3 \cdot 10^{-2}$  сек).

Для объяснения импульсной структуры сигнала представим рассеивающую поверхность как совокупность неровностей двух различных масштабов — крупных волн и ряби, соизмеримой с длиной радиоволны (рис. 2). При этом рябь, расположенная на переднем склоне волны, облучается под углом  $\psi + \gamma_1$ ; на заднем склоне — под углом  $\psi - \gamma_2$  ( $\psi$  — угол скольжения луча радиолокатора,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — углы наклонов переднего и заднего склонов крупной волны). Расчеты [2] на основе такой модели рассеяния в предположении бесконечно большого значения диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  позволяют объяснить изменение интенсивности рассеянного сигнала не более чем на 10 дБ при изменении угла  $\psi$  от 0,5 до 10°.

Более резкую зависимость  $I = f(\psi)$  можно получить, если учесть, что диэлектрическая проницаемость воды имеет конечное значение. Воспользуемся выражением (9) работы [2] для зависимости поля  $E$  от угла скольжения  $\psi$  в случае  $\sin \psi \ll \sqrt{\epsilon - 1}$  и вертикальной поляризации:

$$E_v = 2k^2 E_0 \frac{e^{2ikd}}{d} \sin^2 \psi \left\{ 1 + 2 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right)^2 \frac{\cos^2 \psi}{(\epsilon^{-1} \sqrt{\epsilon - 1} + \sin^2 \psi)^2} \right\} \zeta(q_{\perp}), \quad (1)$$

где  $\epsilon$  — комплексная диэлектрическая проницаемость;  $d$  — дистанция;  $E_0$  — амплитуда падающего поля;  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина радиоволны;  $\zeta(q_{\perp}) = \frac{1}{2\pi} \int \zeta(r) \exp(-iqr) dr$  — фурье-преобразование высоты ряби  $\zeta(r)$ ;  $q = 2k\beta$  (так что  $q_{\perp} = 2k \cos \psi$ );  $\beta$  — единичный вектор, направленный в точку наблюдения.

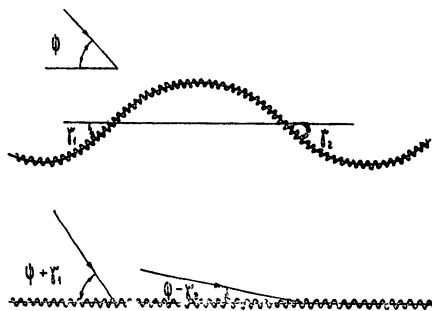


Рис. 2. Модель рассеивающей поверхности.

При  $\epsilon = \infty$  зависимость в (1) от угла скольжения  $\psi$  совпадает с полученной в работе [5] для идеально проводящей неровной поверхности:  $E_v \sim (1 + \cos^2 \psi) \zeta(q_{\perp})$ . Учет конечных значений  $\epsilon$  становится

существенным лишь при малых углах скольжения  $\sin \psi \ll 1/\sqrt{\epsilon}$ . Это приводит к тому, что при скользящем распространении ( $\sin \psi \ll 1/\sqrt{\epsilon}$ ) отраженное назад поле стремится к нулю по закону  $E_{\text{в}} \sim \sin^2 \psi \zeta(q_{\perp})$ . Так как для морской воды в сантиметровом диапазоне радиоволн все еще можно считать  $|\epsilon| \gg 1$ , то из (1) для эффективного сечения обратного рассеяния  $I_{\text{в}}$  получим

$$I_{\text{в}} = \frac{|E_{\text{в}}|^2 d^2}{S_0 |E_0|^2} = \frac{2k^4 \sigma^2}{\pi} \sin^4 \psi \left\{ 1 + \frac{4 \cos^2 \psi [(\eta_1 + \sin \psi)^2 - \eta_2^2 + \cos^2 \psi]}{[(\eta_1 + \sin \psi)^2 + \eta_2^2]^2} \right\} \times \\ \times S(q_{\perp}) = \frac{2k^4 \sigma^2}{\pi} B(\psi) S(q_{\perp}); \quad \sigma^2 = \overline{\zeta^2}. \quad (2)$$

Здесь

$$S(q_{\perp}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \overline{\zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})} e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho}; \quad \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \eta_1 + i\eta_2;$$

$S_0$  — облучаемая площадь.

Воспользуемся феноменологическим выражением для энергетического спектра морских волн [6]:

$$S_{\omega}(\omega) = a\omega^{-n} \exp[-b\omega^{-m}]. \quad (3)$$

Полагая  $\omega^2 = g\kappa$  ( $\kappa = \frac{2\pi}{\Lambda}$ ,  $\Lambda$  — длина морской волны) и учитывая, что

для сантиметровых радиоволн  $k\Lambda_{\text{хар}} \gg 1$  ( $\Lambda_{\text{хар}}$  — длина видимых волн), из энергетического спектра (3) можно получить качественное соотношение для пространственного спектра ряби  $S(q_{\perp})$ . Считая  $n = 6$  (наиболее употребительное значение в океанографии), из (2) и (3) получаем\*

$$I_{\text{в}} = \frac{ak\sigma^2}{\pi^2 \cos^{3,5} \psi} B(\psi). \quad (4)$$

Для иллюстрации полученных соотношений на рис. 3 приведены кривые зависимости интенсивности обратного рассеяния в области малых углов  $\psi$  ( $\lambda = 3,2$  см), подсчитанные для  $\epsilon = \infty$  (кривая 1) и по формуле (6) для  $\epsilon = 65 + i30,8$  (кривая 2). Из сравнения кривых видно, что для углов  $\psi < 1,5^\circ$  учет конечности значений  $\epsilon$  дает резкое уменьшение интенсивности сигнала.

Таким образом, изменение  $I = f(\psi)$  с учетом конечности  $\epsilon$  (кривая 2 рис. 3) позволяет объяснить импульсную структуру сигнала; при этом следует иметь в виду, что наиболее резкое отличие сигналов, рассеянных под углами  $\psi + \gamma_1$  и  $\psi - \gamma_2$  (от передних и задних склонов морских волн), будет тогда,

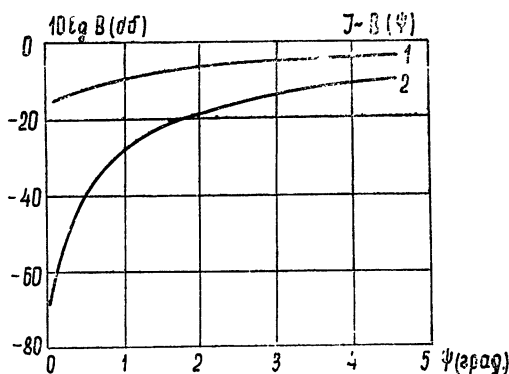


Рис. 3. Распределения мощности сигналов, рассеянных под разными углами.

\* Отметим, что получающаяся в этом случае зависимость от длины волны  $I \sim \lambda^{-1}$  согласуется с результатами экспериментальных работ [7,8].

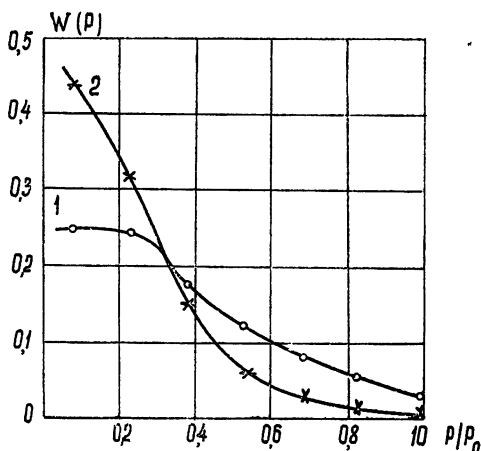


Рис. 4. Угловая зависимость интенсивности обратного рассеяния при малых углах.

когда  $\phi - \gamma_2 < 1^\circ$  (точка перегиба на кривой 2 рис. 3). На рис. 4 приведены два распределения мощности сигналов, принятых в одно и то же время с различных удалений (200 и 600 м). Условия наблюдения были таковы, что углы облучения передних и задних склонов волны составляли в первом случае  $18^\circ$  и  $10^\circ$ , а во втором —  $8^\circ$  и  $0,5^\circ$  соответственно. Из рассмотрения рис. 4 видно, что при одинаковых максимальных значениях сигналов (с поправкой на ослабление с дистанцией) вероятность малых сигналов для 2 случая (кривая 2) выше.

Из указанного следует, что в случае облучения задних склонов волн под углами, меньшими  $1^\circ$ , имеет место резкое отличие в амплитудах сигналов, рассеянных разными склонами волны, или, другими словами, пространственное распределение радиосигнала соответствует волновой структуре морской поверхности.

Возможность идентификации сигналов, рассеянных различными элементами крупных волн (передним и задним склонами), позволяет в ряде случаев определять параметры морских волн. В качестве примера такого определения на рис. 5 приведено распределение положений

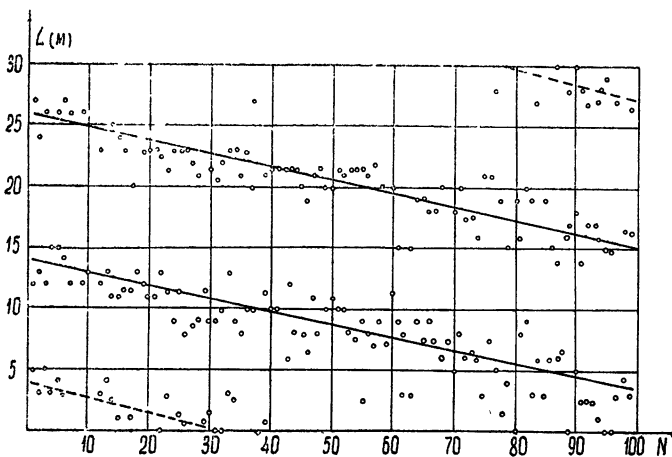


Рис. 5. Траектории движений передних склонов морских волн.

максимумов (отражения от передних склонов волны), полученных из обработки 100 последовательностей пространственных регистраций сигналов (за время 3 сек).

Для каждой группы точек проведена линия среднего положения максимумов, полученная методом наименьших квадратов. Расстояние между линиями соответствует длине морской волны; наклон линий позволяет определить скорость перемещения переднего склона волны.

Следует отметить, однако, что четкая группировка положений максимумов в пространстве наблюдается только в случаях, когда поперечный размер рассеивающего пятна меньше длины гребня (случай двумерной волны).

В заключение авторы благодарят В. И. Зельдиса за помощь в измерениях и Ф. Г. Басса за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Распространение ультракоротких волн, пер. с англ. под редакцией Б. Л. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954.
2. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
3. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 101 (1964).
4. А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1117 (1965).
5. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, 3, 180 (1958).
6. Ю. М. Крылов, Труды Гос. океанографического ин-та, вып. 67, 15 (1962).
7. M. W. Long, IEEE Trans., AP-13, 749 (1965)
8. R. M. Richter, J. Acoust. Soc. Amer., 36, 864 (1964).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
17 февраля 1966 г.

BACK SCATTERING OF CM RADIO WAVES AT SMALL SLIDE ANGLES  
BY RUFFLED SEA SURFACE

A. . Kalmykov, I. E. Ostrovskii, A. D. Rosenberg, I. M. Fouks

The results of measurement of the intensity of radio location reflection at the small slide angles are given. This is obtained by means of a 3 cm locator with the high resolution. The observed sharp decrease of the received signal intensity with the decrease of the slide angle is shown to be due to the finite magnitude of the sea water permittivity. The effect is that in some cases for small slide angles practically, only the front slopes of the sea waves reflect.

---



УДК 535.3 : 551 51

## ФЛУКТУАЦИИ УГЛА ПРИХОДА СВЕТОВЫХ ВОЛН ОТ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

*М. А. Каллистратова, А. И. Кон*

Рассматривается задача о флуктуациях направления распространения волн от протяженного источника света в атмосфере с турбулентными пульсациями показателя преломления. В качестве протяженного источника принимается светящаяся нить, расположенная на достаточном удалении от преломляющей атмосферы, что позволяет ограничиться рассмотрением плоских волн. Вычислена корреляционная функция флуктуаций разности фаз от различных точек протяженного источника в случае, когда атмосфера представляет собой однородный изотропный турбулентный слой, примыкающий к приемному объективу. Проведен расчет дисперсии и частотного спектра флуктуаций «центра тяжести» изображения протяженного источника в зависимости от размера источника и высоты преломляющего турбулентного слоя. Результаты расчета сравниваются с данными измерений дисперсии и частотного спектра флуктуаций направления световой волны от участков края солнечного диска протяженностью от  $6''$  до  $4'$ .

При прохождении световых волн через земную атмосферу, в которой существуют турбулентные пульсации коэффициента преломления, возникают флуктуации направления распространения волн, приводящие к смещениям положения изображения источника волн в фокальной плоскости приемного объектива. Можно, как это делается в [1], рассчитать дисперсию и частотный спектр флуктуаций направления распространения волн от точечного источника, если известно значение структурной постоянной флуктуаций показателя преломления света на пути распространения. Эксперименты, проведенные с искусственным источником света [2], а также измерения флуктуаций направления световых волн от края солнечного диска [3] показали удовлетворительное совпадение измеренных величин с расчетными.

При исследовании астрономических протяженных объектов и решении некоторых других практических задач встает вопрос о том, какова корреляция между флуктуациями направления распространения света от различных частей протяженного источника и в какой степени влияет усреднение по протяженному источнику на величину дисперсии и форму частотного спектра флуктуаций угла прихода, измеряемых в фокальной плоскости приемного объектива. Пусть излучение светящейся нити с угловым размером  $\gamma$  принимается объективом диаметра  $b$ . Будем считать, что эта бесконечно тонкая нить представляет собой набор большого числа некогерентных точечных источников. Пусть далее интересующий нас светящийся объект находится за пределами преломляющей атмосферы, так что волны, распространяющиеся от него, можно считать на границе турбулентного слоя плоскими. Каждая из этих волн дает изображение соответствующего ей источника в фокальной плоскости объектива. Вследствие флуктуаций направления распространения волн из-за турбулентности, точки, образующие изображение, перемещаются в фокальной плоскости. Будем считать, что мы располагаем измери-

тельным устройством, регистрирующим среднее смещение линии изображения. Выберем систему координат так, чтобы плоскость  $XU$  была параллельна фокальной плоскости объектива и расположена на границе преломляющей атмосферы. Светящейся нити в этой плоскости соответствует линия длины  $\gamma L$  ( $\gamma$  — угловой размер нити,  $L$  — эффективная толщина преломляющей атмосферы). Направим ось  $X$  вдоль этой линии, совместив начало координат с одним из ее концов.

Как известно, случайная флуктуация угла прихода в фокусе объектива  $\Delta\alpha$  для плоской волны, порождаемой точечным источником с координатой  $X$ , дается формулой [1]\*:

$$\Delta\alpha(x, t) = \frac{\Delta S(x, b, t)}{kb}, \tag{1}$$

где  $\Delta S(x, b, t)$  — разность фаз, создаваемая источником на краях объектива диаметра  $b$ ,  $k$  — волновое число. Средняя по всем некогерентным источникам величина флуктуаций угла прихода в момент  $t$ , очевидно, равна

$$\overline{\Delta\alpha(t)} = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{\Delta S(x, b, t)}{kb} dx \quad (d = \gamma L).$$

(Здесь и в дальнейшем чертой сверху мы будем обозначать усреднение по совокупности некогерентных источников, а угловыми скобками  $\langle \rangle$  — усреднение по времени.) Интересующая нас величина дисперсии флуктуаций  $\langle (\overline{\Delta\alpha})^2 \rangle$  дается формулой

$$\langle (\overline{\Delta\alpha})^2 \rangle = \frac{1}{d^2} \int_0^d \int_0^d \frac{\langle \Delta S(x_1, b) \Delta S(x_2, b) \rangle}{k^2 b^2} dx_1 dx_2. \tag{2}$$

Входящая в (2) корреляционная функция  $B_{\Delta S}(x_1, x_2, b) = \langle \Delta S(x_1, b) \Delta S(x_2, b) \rangle$  может быть выражена через структурные функции флуктуаций фазы в плоской волне, если воспользоваться следующими соображениями. Лучи  $S_1$  и  $S_2$  от источника  $x_1$  можно считать параллельными, так как он находится далеко за пределами преломляющей атмосферы; то же самое можно сказать и о лучах  $S_3, S_4$ , но плоскости, в которых лежат эти лучи, образуют между собой некоторый угол.

Пользуясь рис. 1, можно написать для корреляционной функции  $B_{\Delta S}$

$$\begin{aligned} B_{\Delta S} &= k^2 \int_0^L \int_0^L \left\langle \left[ n_1\left(\xi_1, \frac{x_1}{L} \xi_1, \frac{b}{2}\right) - n_1\left(\xi_1, \frac{x_1}{L} \xi_1, -\frac{b}{2}\right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ n_1\left(\xi_2, \frac{x_2}{L} \xi_2, \frac{b}{2}\right) - n_1\left(\xi_2, \frac{x_2}{L} \xi_2, -\frac{b}{2}\right) \right] \right\rangle d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= k^2 \int_0^L \int_0^L \left[ D_n \left( \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + \left(\frac{x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2}{L}\right)^2 + b^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - D_n \left( \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + \left(\frac{x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2}{L}\right)^2} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \tag{3}$$

\* Соотношение (1) верно, вообще говоря, в пределе при  $b \rightarrow 0$ , однако в [1] показано, что применение этого соотношения для конечных  $b$  приводит к очень значительной ошибке.

где флуктуации коэффициента преломления  $n_1 = n - 1$ . Сравнивая (3) с соответствующим выражением для параллельных лучей  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , получаем

$$B_{\Delta S} = \frac{1}{x_1 - x_2} \int_0^{x_1 - x_2} B_{\Delta S}^{nn}(\xi) d\xi. \quad (4)$$

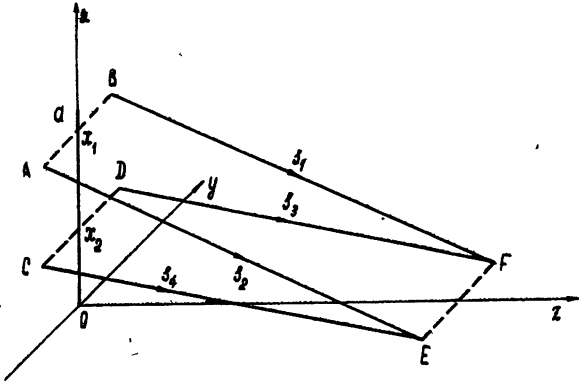


Рис. 1. К выводу формулы (4) ( $AB = CD = EF = b$ ).

Здесь корреляционная функция разности фаз в плоской волне

$$B_{\Delta S}^{nn}(x) = D_S(\sqrt{x^2 + b^2}) - D_S(|x|). \quad (5)$$

Объединяя (5), (4) и (2), получим\*:

$$\langle \overline{(\Delta\alpha)^2} \rangle = \frac{1}{d^2 k^2 b^2} \int_0^d \int_0^d \frac{dx_1 dx_2}{x_1 - x_2} \int_0^{x_1 - x_2} [D_S(\sqrt{\xi^2 + b^2}) - D_S(\xi)] d\xi. \quad (6)$$

Пронормировав (6) на средний квадрат флуктуаций угла прихода плоской волны от удаленного точечного источника  $\langle (\Delta\alpha)^2 \rangle_0 = D_S(b)/k^2 b^2$ , мы получим величину  $\beta^2$ , характеризующую уменьшение интенсивности флуктуаций угла прихода из-за конечных размеров излучателя:

$$\beta^2 = \frac{\langle \overline{(\Delta\alpha)^2} \rangle_\gamma}{\langle (\Delta\alpha)^2 \rangle_0} = \frac{1}{d^2 D_S(b)} \int_0^d \int_0^d \frac{dx_1 dx_2}{x_1 - x_2} \int_0^{x_1 - x_2} [D_S(\sqrt{\xi^2 + b^2}) - D_S(\xi)] d\xi. \quad (7)$$

Учитывая далее, что  $D_S(\rho) = 2,91 C_n^2 k^2 x \rho^{5/3}$  ( $C_n$  — структурная постоянная флуктуаций показателя преломления,  $x$  — расстояние, пройденное волной в турбулентной среде), нетрудно свести (7) к следующему виду:

$$\beta^2 = \frac{2}{b^{5/3}} \int_0^1 [(\xi^2 d^2 + b^2)^{5/6} - [\xi d]^{5/3} (\xi - \ln \xi - 1)] d\xi. \quad (8)$$

Интеграл (8) не вычисляется в элементарных функциях, но не представляет труда получить его асимптотики при малых и больших значениях параметра  $d/b = \gamma L/b$ .

1) Если  $\gamma L/b \ll 1$ , то

$$\beta^2 \approx 1 - 0,08 (\gamma L/b)^{5/3}. \quad (9)$$

\* Во всех рассуждениях предполагалась изотропность турбулентности.

Соотношение (9), в котором выписаны два главных члена асимптотического разложения, демонстрирует тот физически очевидный факт, что, когда размер объектива значительно больше  $\gamma L$ , влияние размера источника мало, так как лучи, идущие от различных участков светящейся нити, проходят по практически совпадающим путям. Флуктуации угла прихода света от отдельных точек сильно коррелированы, и изображение всей нити в фокальной плоскости смещается как единое целое и, следовательно, как изображение любого из составляющих нить точечных источников.

2) Если  $\gamma L/b \gg 1$ , то

$$\beta^2 \simeq 2,2 (\gamma L/b)^{-1/3}; \quad (10)$$

эффект ослабления дрожания в этом случае значителен. Значения величины  $\beta^2$  для промежуточных значений параметра  $\gamma L/b$  могут быть легко получены из (8) путем численного интегрирования. Результаты такого расчета представлены на рис. 2.

Выясним теперь, как влияет конечный размер источника на частотный спектр флуктуаций угла прихода световых волн. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным, и пользуясь гипотезой о замороженной турбулентности, можно получить для автокорреляционной функции флуктуаций угла прихода следующее выражение:

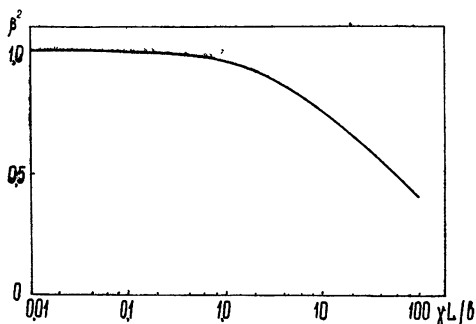


Рис. 2. Зависимость дисперсии флуктуаций угла прихода от размеров источника.

$$R_{\Delta\alpha}(\tau) = \langle \overline{\Delta\alpha}(t) \overline{\Delta\alpha}(t + \tau) \rangle = \frac{1}{d^2 k^2 b^2} \int_0^d \int_0^d \frac{dx_1 dx_2}{x_1 - x_2} \times \\ \times \int_0^{x_1 - x_2} [D_S(\sqrt{(V_n \tau + \xi)^2 + b^2}) - D_S(|V_n \tau + \xi|)] d\xi,$$

где  $d = \gamma L$ ,  $b$  — диаметр объектива,  $V_n$  — составляющая скорости ветра в плоскости, нормальной к направлению распространения, ориентированная вдоль светящейся нити (введение произвольного угла между нитью и нормальной составляющей ветра  $V_n$  не вносит никаких принципиальных изменений, но значительно усложняет расчет).

Частотный спектр величины  $\overline{\Delta\alpha}(t)$  будет даваться формулой

$$W_{\Delta\alpha}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi f\tau) P_{\Delta\alpha}(\tau) d\tau = \frac{2}{d^2 k^2 b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \times \\ \times \exp(-i2\pi f\tau) \int_0^d \int_0^d \frac{dx_1 dx_2}{x_1 - x_2} \int_0^{x_1 - x_2} [D_S(\sqrt{(V_n \tau + \xi)^2 + b^2}) - \\ - D_S(V_n \tau + \xi)] d\xi. \quad (11)$$

Воспользуемся далее спектральным разложением корреляционной функции  $B_{\Delta S}$ :

$$\begin{aligned} B_{\Delta S}(V_n \tau + \xi, b) &= D_S \left( \sqrt{(V_n \tau + \xi)^2 + b^2} \right) - D_S(|V_n \tau + \xi|) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix(V_n \tau + \xi)] A(x, b) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Обращая (12), имеем для  $A(x, b)$ :

$$A(x, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixx) B_{\Delta S}(x, b) dx. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (11), меняя порядок интегрирования по  $x$  и  $\tau$  и вычисляя интегралы по  $\tau$  и  $x$ , получим

$$\begin{aligned} W_{\Delta \alpha}^{-}(f) &= \frac{4\pi}{d^2 k^2 b^2} A\left(\frac{2\pi f}{V_n}, b\right) \int_0^d \int_0^d \frac{dx_1 dx_2}{x_1 - x_2} \times \\ &\times \int_0^{x_1 - x_2} \exp\left(i \frac{2\pi f}{V_n} \xi\right) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Проводя дальнейшие упрощения (14), получаем

$$W_{\Delta \alpha}^{-}(f) = \frac{4 V_n}{dk^2 b^2 f} A\left(\frac{2\pi f}{V_n}, b\right) \int_0^1 \frac{\sin 2\pi f d \xi / V_n}{\xi} (1 - \xi) d\xi. \quad (15)$$

Разделим (15) на величину  $W_{\Delta \alpha}(f)$  при  $d = 0$ ; полученная величина  $\beta_f^2 = [W_{\Delta \alpha}^{-}(f)]_{\gamma} / [W_{\Delta \alpha}(f)]_0$  характеризует изменение спектра флуктуаций угла прихода из-за усреднения флуктуаций по протяженному источнику:

$$\beta_f^2 = \frac{1}{\eta} \int_0^1 \frac{\sin \eta \xi}{\xi} (1 - \xi) d\xi. \quad (16)$$

Здесь безразмерный параметр  $\eta = \pi df / V_n = \pi \gamma L f / V_n$ . Вычисляя интеграл (16), мы окончательно получим

$$\beta_f^2 = [W_{\Delta \alpha}^{-}(f)]_{\gamma} / [W_{\Delta \alpha}(f)]_0 = \frac{1}{\eta} \sin(2\eta) - \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2}. \quad (17)$$

Функция  $\beta_f^2$  представлена на рис. 3.

Для проверки справедливости приведенных расчетов зависимости величин

$$\beta = \sqrt{\frac{\langle (\Delta \alpha)^2 \rangle_{\gamma}}{\langle (\Delta \alpha)^2 \rangle_0}}; \quad \beta_f^2 = \frac{[W_{\Delta \alpha}^{-}(f)]_{\gamma}}{[W_{\Delta \alpha}(f)]_0}$$

от размеров протяженного объекта  $\gamma$  были найдены экспериментально — по измерениям флуктуаций угла прихода волн от участка края солнечного диска.

Методика измерений и аппаратура, регистрирующая флуктуации положения изображения края солнечного диска, детально описаны в работах [3, 4]. Следящая система выдавала среднее смещение протяжен-

ного участка края в направлении, перпендикулярном к краю диска. Протяженность участка изменялась от измерения к измерению, но оставалась достаточно малой по сравнению с диаметром солнечного диска. Было проведено 15 серий измерений дисперсии флуктуаций угла прихода при угловом размере протяженного участка  $\gamma$  от 6" до 96", а затем 20 серий измерений дисперсии и частотного спектра флуктуаций сигнала при величине протяженного участка от 9" до 290".

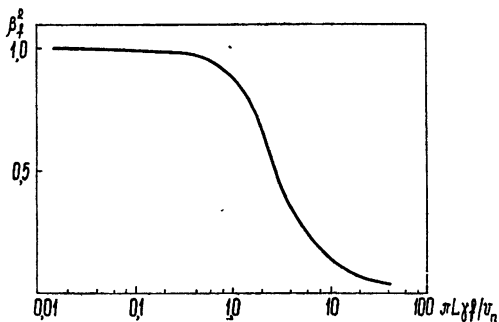


Рис. 3. Зависимость спектральной плотности флуктуаций угла прихода от размеров источника.

Результаты измерений зависимости  $\beta(\gamma)$  представлены на рис. 4. На этом графике нанесены теоретические значения  $\beta(\gamma)$  при различных

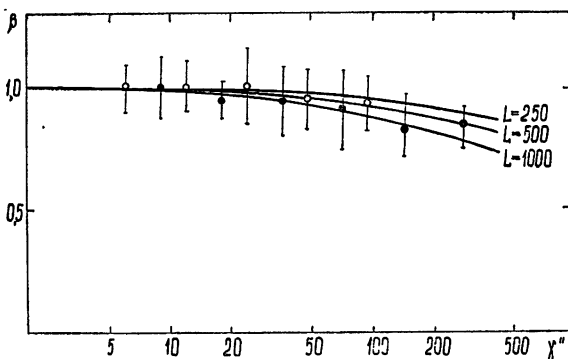


Рис. 4. Сравнение экспериментальной зависимости дисперсии флуктуаций угла прихода от протяженности источника с теоретической. Вертикальными линиями обозначены 20% доверительные интервалы.

величинах эффективной толщины преломляющей атмосферы (для объекта диаметром  $b = 5$  см, с которым проводились измерения). Точками нанесены отношения измеренных величин  $\sigma_{\Delta\alpha} = \sqrt{\langle \Delta\alpha^2 \rangle}_\gamma$  при данном угловом размере  $\gamma$  к значению  $\sigma_{\Delta\alpha}$  при  $\gamma = 6''^*$ . График показывает, что усреднение флуктуаций по участку протяженностью до 5' мало уменьшает величину флуктуаций, т. е. флуктуации угла прихода от различных точек источника происходят коррелированно. Такая слабая зависимость согласуется с теоретическим расчетом при эффективной толщине турбулентного слоя в несколько сот метров.

На рис. 5 приведено семейство расчетных частотных спектров флуктуаций угла прихода при различной протяженности участка для значений  $L = 500$  м и  $b = 5$  см. По оси абсцисс отложена безразмерная величина  $fb/V_n$ , по оси ординат — произведение спектральной плотности флуктуаций угла прихода для точечного источника [3]:

\* Нормировка не на точечный источник, а на источник с размером  $\gamma = 6''$  не вносит существенных изменений, так как зависимость от  $\gamma$  очень плавная и  $\beta_0$  noticeably отличается от  $\beta_0$ .

$$\frac{f \omega_{\Delta\alpha}(f)}{\langle (\Delta\alpha)^2 \rangle} = 0,045 \sin \frac{\pi f b}{V_n} \left( \frac{f b}{V_n} \right)^{-5/3}$$

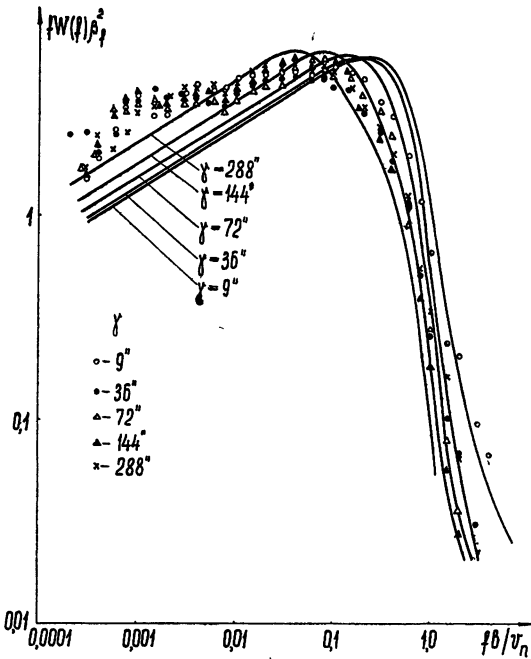


Рис. 5. Сравнение экспериментальных частотных спектров флуктуаций угла прихода от протяженного источника с теоретическими.

жленного источника являются сильно коррелированными в достаточно широком диапазоне угловых размеров источника и расстояний, проходимых светом в турбулентной среде.

В случае прохождения луча через атмосферу в дневных условиях путем сравнения измеренных величин с расчетными можно оценить величину  $L_{эф} \sim 500$  м.

В заключение авторы выражают благодарность А. С. Гурвичу и В. И. Татарскому за внимание к работе и ценные консультации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной среде, изд. АН СССР, М., 1959
2. В. М. Бовшеверов, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 886 (1961).
3. М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 50 (1966).
4. В. М. Бовшеверов, М. А. Каллистратова, Астрон. ж., 41, 550 (1964).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
9 февраля 1966 г.

#### FLUCTUATIONS OF ARRIVAL ANGLE OF LIGHT WAVES FROM EXTENDED SOURCE IN TURBULENT ATMOSPHERE

М. А. Kallistratova, А. I. Kon

The problem of fluctuations of the direction of plane light wave propagation from an extended light source in the atmosphere with the turbulent pulsations of a refraction index is considered. For the fluctuations of the phase differences from the different

на функцию  $\beta^2$ . На рисунке указаны значения измерений спектральной плотности флуктуаций при различной величине  $\gamma$ . Для каждого значения  $\gamma$  было получено от 10 до 19 частотных спектров. В качестве  $V_n$  бралась перпендикулярная к лучу компонента средней скорости ветра в нижнем 100-метровом слое атмосферы. График показывает, что форма спектральной плотности, в соответствии с теоретическим расчетом, обнаруживает слабую зависимость от углового размера участка протяженного объекта в диапазоне до нескольких угловых минут.

Таким образом, приведенные расчеты и измерения показывают, что в реальной атмосфере флуктуации фазы от разных частей протя-

points of the extended source, situated at the sufficient distance from the refracting atmosphere the correlation function is calculated in the case when the atmosphere is the uniform isotropic turbulent layer, adjacent to the receiving objective. The calculation is carried out of the dispersion and the frequency fluctuation spectrum for the source image „gravity center“ vs the source dimension and the height of the refracting turbulent layer. The results are compared with the measurement data of the dispersion and the frequency fluctuation spectrum of a light wave direction from the parts of the sun's disk with angular dimentions from  $6''$  to  $4'$ .

---



УДК 535 31 : 621.371.122

## О МЕТОДЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Ю. Я. Яшин

В приближении геометрической оптики рассмотрено распространение электромагнитных волн в гиротропной среде в предположении, что тензор диэлектрической проницаемости эрмитовский. Получены уравнения, определяющие закон сохранения потока энергии, а также вращение и деформацию эллипса (эллипсоида) поляризации.

Исследования распространения электромагнитных волн в гиротропных средах в приближении геометрической оптики проводились неоднократно. Большинство рассмотренных задач посвящено распространению волн в плоскостной среде [1, 2]. Исследовались также некоторые вопросы теории распространения электромагнитных волн в средах, свойства которых зависят более чем от одной координаты (см., например, [3-5]). Однако в этих работах не было уделено достаточного внимания вопросу о поляризации электромагнитных волн. В общей постановке вопрос о поляризации в рамках метода геометрической оптики впервые был рассмотрен Рытовым [6]. В его работе для случая изотропной среды наряду с законом сохранения потока энергии получен также и закон вращающихся векторов поля. Позднее метод, примененный в [6], был использован при исследовании распространения волн в анизотропном диэлектрике [7], а также для решения линеаризованных уравнений теории упругости [8]. Необходимо отметить, что математически аналогичные вопросы рассматривались также в квантовой механике [9].

Настоящая работа посвящена геометрико-оптическому описанию распространения электромагнитных волн в слабонеоднородной гиротропной среде. В ней рассматривается вопрос о поведении векторов поля в нулевом приближении метода геометрической оптики, когда свойства среды описываются эрмитовским тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ . Ниже предлагается, что свойства среды не зависят от времени. Для электрического и магнитного векторов поля принята гармоническая зависимость  $E \propto e^{i\omega t}$ ,  $H \propto e^{i\omega t}$  ( $\omega$  — циклическая частота).

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -i \frac{\omega}{c} H, & \operatorname{rot} H &= i \frac{\omega}{c} \hat{\epsilon} E, \\ \operatorname{rot} E^* &= i \frac{\omega}{c} H^*, & \operatorname{rot} H^* &= -i \frac{\omega}{c} \hat{\epsilon}^* E^*, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $E$  и  $H$  — электрический и магнитный векторы поля, а  $E^*$  и  $H^*$  —

комплексно сопряженные им векторы. Через  $\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij}$  обозначен тензор диэлектрической проницаемости. Предполагается, что он является медленно меняющейся функцией координат. Решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$E = \left( E_0 + \frac{1}{k_0} E_1 + \frac{1}{k_0^2} E_2 + \dots \right) e^{iS}, \quad (1.2)$$

$$E = \left( E_0^* + \frac{1}{k_0} E_1^* + \frac{1}{k_0^2} E_2^* + \dots \right) e^{-iS},$$

где  $S$  — фаза\*,  $E_0, E_1, \dots$  — амплитуды поля в нулевом, первом и последующих приближениях относительно  $1/k_0$ .

Считая, что фаза изменяется значительно быстрее, чем амплитуда, подставим (1.2) в (1.1) и, приравнявая нулю выражения одинакового порядка малости относительно  $1/k_0$ , получим систему уравнений, описывающих поле в различных приближениях. В нулевом приближении это уравнения

$$\begin{aligned} n \times E_0 &= -H_0, & n \times H_0 &= \hat{\varepsilon} E_0, \\ -n \times E_0^* &= H_0^*, & -n \times H_0^* &= -\hat{\varepsilon}^* E_0^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

(где  $n = \frac{c}{\omega} k = \frac{c}{\omega} \nabla S$ ), в первом приближении — уравнения

$$\begin{aligned} n \times E_1 + H_1 &= i \operatorname{rot} E_0 \equiv y, & n \times H_1 - \hat{\varepsilon} E_1 &= i \operatorname{rot} H_0 \equiv x; \\ n \times E_1^* + H_1^* &= -i \operatorname{rot} E_0^* \equiv y_1, & n \times H_1^* - \hat{\varepsilon}^* E_1^* &= -i \operatorname{rot} H_0^* \equiv x_1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.3) следует, что

$$n \times n \times E_0 + \hat{\varepsilon} E_0 = 0, \quad (1.5)$$

$$n \times n \times E_0^* + \hat{\varepsilon}^* E_0^* = 0. \quad (1.6)$$

Как известно, условием существования нетривиального решения систем (1.5) и (1.6) является равенство нулю их детерминантов:

$$\begin{aligned} \|\| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij} \|\| &= D_1(x_i, n_i, \omega) = 0, \\ \|\| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}^* \|\| &= D_2(x_i, n_i, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Однако, поскольку тензор  $\varepsilon_{ij}$  — эрмитовский, а  $n$  — вещественный вектор ( $S = S^*$ ), то детерминанты в обоих случаях совпадают, и мы получаем уравнение эйконала

$$D_1(x_i, n_i, \omega) = D_2(x_i, n_i, \omega) \equiv D(x_i, n_i, \omega) = 0. \quad (1.8)$$

Компоненты вектора  $n$ , определяемые из (1.8), должны удовлетворять условию  $\operatorname{rot} n \equiv 0$ , которое является необходимым и достаточным условием существования интегральной функции уравнения эйконала.

\* Здесь считается, что  $S = S^*$ , т. е. фаза вещественна, что является следствием эрмитовости тензора  $\varepsilon_{ij}$ . Из рассмотрения здесь исключаются неоднородные волны (если они могут иметь место) и затухание, т. е. мы не интересуемся поведением поля в областях непрозрачности.

Условия разрешимости уравнений (1.4) состоят в ортогональности их правых частей решениям транспонированной системы однородных уравнений нулевого приближения [10]. Но решение транспонированной системы для двух первых уравнений (1.4) в силу эрмитовости  $\epsilon_{ij}$  суть просто комплексно сопряженные векторы  $E_0^*$  и  $H_0^*$ , а для двух других уравнений комплексно сопряженные от сопряженных полей, т. е. сами векторы  $E_0$  и  $H_0$ . Следовательно, условия разрешимости запишутся в виде

$$\begin{aligned} -H_0^* y + E_0^* x &= 0, & E_0^* y + H_0^* x &= 0, \\ -H_0 y_1 + E_0 x_1 &= 0, & E_0 y_1 + H_0 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя в (1.9) вместо  $x$ ,  $y$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  правые части уравнений (1.4), получим

$$\begin{aligned} E_0^* \operatorname{rot} H_0 - H_0^* \operatorname{rot} E_0 &= 0, & E_0 \operatorname{rot} H_0^* - H_0 \operatorname{rot} E_0^* &= 0, \\ H_0^* \operatorname{rot} H_0 + E_0^* \operatorname{rot} E_0 &= 0, & H_0 \operatorname{rot} H_0^* + E_0 \operatorname{rot} E_0^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Складывая и вычитая попарно два первых и два последних уравнения системы (1.10), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(H_0 \times E_0^* + H_0^* \times E_0) &= 0, \\ H_0^* \operatorname{rot} H_0 + E_0^* \operatorname{rot} E_0 + H_0 \operatorname{rot} H_0^* + E_0 \operatorname{rot} E_0^* &= 0, \\ \operatorname{div}(H_0 \times H_0^* + E_0 \times E_0^*) &= 0, \\ E_0^* \operatorname{rot} H_0 + H_0 \operatorname{rot} E_0^* - H_0^* \operatorname{rot} E_0 - E_0 \operatorname{rot} H_0^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если положить далее

$$E_0 = E_0^{(1)} + iE_0^{(2)}, \quad H_0 = H_0^{(1)} + iH_0^{(2)}, \quad (1.12)$$

то система уравнений (1.11) запишется следующим образом:

$$\operatorname{div}[H_0^{(1)} \times E_0^{(1)} + H_0^{(2)} \times E_0^{(2)}] = 0, \quad (1.13)$$

$$E_0^{(1)} \operatorname{rot} E_0^{(1)} + H_0^{(1)} \operatorname{rot} H_0^{(1)} + E_0^{(2)} \operatorname{rot} E_0^{(2)} + H_0^{(2)} \operatorname{rot} H_0^{(2)} = 0, \quad (1.14)$$

$$\operatorname{div}[E_0^{(1)} \times E_0^{(2)} + H_0^{(1)} \times H_0^{(2)}] = 0, \quad (1.15)$$

$$E_0^{(1)} \operatorname{rot} H_0^{(2)} + H_0^{(2)} \operatorname{rot} E_0^{(1)} - E_0^{(2)} \operatorname{rot} H_0^{(1)} - H_0^{(1)} \operatorname{rot} E_0^{(2)} = 0. \quad (1.16)$$

Как нетрудно заметить, для негиротропной среды ( $E_0^{(2)} = H_0^{(2)} = 0$ ), уравнения (1.15) и (1.16) выполняются тождественно, а в уравнениях (1.13) и (1.14) исчезают соответственно один и два последних члена. В такой форме эти уравнения в точности совпадают с приведенными в работе [1]. Таким образом, появление указанных членов в (1.13) — (1.16) является следствием гиротропности среды\*.

## 2. ПОТОК ЭНЕРГИИ В ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Введем следующее обозначение:

$$E_0 = \frac{\Phi}{n} f, \quad (2.1)$$

\* Уравнения (1.15), (1.16) тождественно выполняются также, если  $E_0^{(1)} \parallel E_0^{(2)}$  и соответственно  $H_0^{(1)} \parallel H_0^{(2)}$ . Однако этот случай эквивалентен появлению постоянного сдвига фазы и поэтому в дальнейшем не рассматривается.

где  $\Phi$  — амплитуда в нулевом приближении ( $\Phi$  — вещественно), а  $\mathbf{f}$  — вектор поляризации, компоненты которого можно получить из любой пары уравнений системы (1.5) (при условии, что уравнение эйконала (1.8) проинтегрировано). Они определяются соотношениями

$$f_1/T_{1i} = f_2/T_{2i} = f_3/T_{3i}, \quad (2.2)$$

в которых  $T_{ij}$  — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы  $n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}$ . Из определения вектора поляризации  $\mathbf{f}$  следует, что всегда можно сделать одну из его компонент чисто вещественной. Из эрмитовости тензора  $\varepsilon_{ij}$  следует, что

$$\mathbf{E}_0^* = \frac{\Phi}{n} \mathbf{f}^*. \quad (2.3)$$

Вектор поляризации запишем следующим образом:

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{f}_1}{|\mathbf{f}_1|} \alpha + i \frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|} \beta = \alpha \boldsymbol{\mu} + i\beta \boldsymbol{\nu}, \quad (2.4)$$

где  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  — единичные векторы в направлениях  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$ , а  $\alpha = |\mathbf{f}_1|$ ,  $\beta = |\mathbf{f}_2|$ . Нормируем вектор  $\mathbf{f}$  так, чтобы  $\mathbf{f}\mathbf{f}^* = 1$ . Тогда получим, что

$$\alpha = \cos \chi, \quad \beta = \sin \chi, \quad (2.5)$$

где  $\chi$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\mathbf{f}_2|}{|\mathbf{f}_1|}$$

(угол  $\chi$  характеризует соотношение между вещественной и мнимой частями вектора поляризации). При  $\chi = 0, \pi, \dots$  отлична от нуля только вещественная часть  $\mathbf{f}$ , а при  $\chi = \pi/2, 3\pi/2, \dots$  — только мнимая часть.

Подставляя (2.1) и (2.3) в (1.13), с учетом (1.3) и (2.4), (2.5) получим

$$\operatorname{div} \left( \frac{\Phi^2}{n} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{s} \right) = 0, \quad (2.6)$$

где единичный вектор  $\mathbf{s}$  определяется соотношением

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{t} - \boldsymbol{\mu}(t\boldsymbol{\mu})\alpha^2 - \boldsymbol{\nu}(t\boldsymbol{\nu})\beta^2}{|\mathbf{t} - \boldsymbol{\mu}(t\boldsymbol{\mu})\alpha^2 - \boldsymbol{\nu}(t\boldsymbol{\nu})\beta^2|}; \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = |\mathbf{t} - \boldsymbol{\mu}(t\boldsymbol{\mu})\alpha^2 - \boldsymbol{\nu}(t\boldsymbol{\nu})\beta^2|, \quad (2.8)$$

а  $\mathbf{t} = \mathbf{n}/n$ . Из (2.6) видно, что поток энергии в гиротропной среде направлен вдоль лучей (линий  $\mathbf{s}$ ), которые, вообще говоря, не совпадают с лучами в анизотропной негиротропной среде. Нетрудно убедиться, что, когда гиротропия пропадает, т. е.  $\beta \equiv \sin \chi = 0$ , то уравнение (2.6) переходит в уравнение для потока энергии, полученное в работе [7].

Если обозначить через  $ds$  элемент длины луча и проинтегрировать уравнение (2.6), то получается выражение, определяющее амплитуду поля в приближении геометрической оптики:

$$\Phi = \Phi_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{n}{\boldsymbol{\gamma}} \operatorname{div} \left( \frac{\boldsymbol{\gamma} \mathbf{s}}{n} \right) ds \right\}, \quad (2.9)$$

где  $\Phi_0$  — значение функции  $\Phi$  в начальной точке  $s = s_0$ .

## 3. ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

Обратимся теперь к уравнениям (1.14)—(1.16). Подставив в них (2.1), (2.3) и выполнив ряд векторных операций, приведем эти уравнения к виду

$$\{\alpha^2 \boldsymbol{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{\mu} + \beta^2 \boldsymbol{\nu} \operatorname{rot} \boldsymbol{\nu}\} \frac{1}{n^2} + \alpha^2 (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\mu}) \operatorname{rot} (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\mu}) + \beta^2 (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\nu}) \operatorname{rot} (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\nu}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\mu} \operatorname{rot} (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\nu}) \operatorname{rot} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\nu} \operatorname{rot} (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\mu}) \times \quad (3.2)$$

$$\times \operatorname{rot} \boldsymbol{\nu} + \nabla \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} n \right) (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\mu}) - \nabla \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} n \right) (\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\nu}) = 0,$$

$$\operatorname{div} \left\{ \Phi^2 \alpha \beta \left[ \frac{\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}}{n^2} + \boldsymbol{t} (\boldsymbol{t} \times (\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu})) \right] \right\} = 0. \quad (3.3)$$

Введем обозначение

$$\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\Omega} \sin \eta, \quad (3.4)$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}) / |\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}|$  — единичный вектор, а  $\eta$  — угол между векторами  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\nu}$ . Используя (3.4), из (3.3) получим

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{R} \sin \eta) = 0, \quad (3.5)$$

где  $\boldsymbol{R} = \Phi^2 \alpha \beta [(\boldsymbol{\Omega} / n^2) + \boldsymbol{t} (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\Omega})]$ .

Уравнение (3.5) определяет закон изменения угла  $\eta$ , т. е. поворот в пространстве одного из векторов  $\boldsymbol{\mu}$  или  $\boldsymbol{\nu}$  относительно другого. Поскольку  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  определяют собой направления двух полуосей (вообще говоря, не главных) эллипса (эллипсоида) поляризации, то в конечном итоге угол  $\eta$  определяет собой деформацию эллипса поляризации (степень растяжения или сжатия) поля волны. Когда среда становится негиротропной, т. е. поляризация волны будет линейной, уравнение (3.3) выполняется тождественно, поскольку этому случаю отвечает условие  $\beta \equiv \sin \chi = 0$ . Физический смысл этого результата очевиден. Уравнения (3.1) и (3.3) в общем случае определяют закон вращения в пространстве векторов  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  при распространении волны. В дальнейшем нам удобнее рассматривать изменение ориентации векторов  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  относительно подвижной тройки, связанной с линией изменения фазы  $\boldsymbol{t}$  (один из ортов выбранного репера совпадает в каждой точке с вектором  $\boldsymbol{t}$ ), а не тройки, связанной с лучом  $\boldsymbol{s}$ , как это делается в работе [7] (если известны законы вращения векторов поля относительно ортов некоторой координатной системы, то они известны и относительно ортов любой другой системы координат; угол же между векторами  $\boldsymbol{s}$  и  $\boldsymbol{t}$  известен в каждой точке).

В соответствии с замечанием на стр. 4 выберем вектор поляризации  $\boldsymbol{f}$  так, чтобы его компонента вдоль  $\boldsymbol{t}$  была вещественна. Тогда, введя подвижный триэдр, связанный с линией  $\boldsymbol{t}$ , и воспользовавшись (2.4), можно представить векторы  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  следующим образом:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{t} \cos \theta + \sin \theta (N \cos \varphi + \boldsymbol{b} \sin \varphi), \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\nu} = N \cos \vartheta + \boldsymbol{b} \sin \vartheta, \quad (3.7)$$

где  $N$  — нормаль, а  $\boldsymbol{b}$  — бинормаль к кривой  $\boldsymbol{t}$ ,  $\theta$  — угол между  $\boldsymbol{t}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\varphi$  — угол между  $N$  и проекцией вектора  $\boldsymbol{\mu}$  на поверхность  $S = \text{const}$  в той же точке, а  $\vartheta$  — угол между  $\boldsymbol{\nu}$  и  $N$ .

Для дальнейшего получим ряд векторных соотношений. Введем вектор

$$\Gamma = At + BN + Cb$$

( $A, B$  и  $C$  — произвольные скаляры). Можно показать, что справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} K &= t \operatorname{rot} \Gamma = Cx + N \nabla C - b \nabla B; \\ L &= N \operatorname{rot} \Gamma = A \gamma_1 + B(-\sigma + \delta) + C \nu_1 - t \nabla C + b \nabla A; \\ M &= b \operatorname{rot} \Gamma = -A \gamma_2 - B \nu_2 - C(\sigma + \delta) + t \nabla B - N \nabla A, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $x$  — кривизна, а  $\sigma$  — кручение кривой, касательной к которой является вектор  $t$ ;  $\delta_1, \nu_1$  и  $\gamma_1$  — соответственно геодезическое кручение, нормальная и геодезическая кривизны линии, касательным к которой является вектор  $N$ , а  $\nu_2$  и  $\gamma_2$  — нормальная и геодезическая кривизны для линий, касательным к которой является вектор  $b$ . При получении соотношений (3.8) мы воспользовались следующими формулами:

$$\begin{aligned} t(t \nabla)N &= -x, & t(t \nabla)b &= 0, & t(b \nabla)N &= \delta, \\ t(N \nabla)b &= \delta, & t(b \nabla)t &= 0, & t(N \nabla)t &= 0, \\ N(b \nabla)N &= 0, & N(N \nabla)b &= -\gamma_1, & N(t \nabla)b &= -\sigma, \\ N(b \nabla)t &= -\delta, & N(N \nabla)t &= \nu_1, & N(t \nabla)N &= 0, \\ b(b \nabla)N &= -\gamma_2, & b(N \nabla)b &= 0, & b(t \nabla)b &= 0, \\ b(b \nabla)t &= \nu_2, & b(N \nabla)t &= -\delta, & b(t \nabla)N &= \sigma, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div} t = \operatorname{div} N = \operatorname{div} b = 0.$$

Соотношения (3.9) выведены с учетом формул Френе для кривой в пространстве, а также аналогичных формул для кривой на поверхности [11, 12]. Покажем, например, справедливость первого из соотношений (3.9). Для этого заметим справедливость равенства

$$t(t \nabla)N = t \frac{dN}{d\tau},$$

где  $\tau$  — параметр вдоль кривой  $t$ . С другой стороны, имеет место равенство

$$\frac{dN}{d\tau} = -xt + \sigma b$$

(см., например, [11], гл. II, § 2). Подставляя это выражение в предыдущее, получаем

$$t(t \nabla)N = t(-xt + \sigma b) = -x.$$

Аналогичным образом могут быть доказаны и остальные соотношения (3.9).

Нетрудно видеть, что справедливо следующее равенство:

$$\mu \operatorname{rot} \mu = \cos \theta K + \sin \theta \cos \varphi L + \sin \theta \sin \varphi M,$$

где  $K, L$  и  $M$  определяются из (3.8), а коэффициенты при  $t, N, b$  в векторе  $\Gamma$  в данном случае равны

$$A = \cos \theta, \quad B = \sin \theta \cos \varphi, \quad C = \sin \theta \sin \varphi.$$

Точно так же, как и  $\mu \operatorname{rot} \mu$ , могут быть записаны все остальные члены,

стоящие в (3.1) и (3.2), с той только разницей, что в каждом случае будут свои выражения для  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а также свои коэффициенты при  $K$ ,  $L$  и  $M$  в векторе  $\Gamma$  в выражениях для  $\nu \operatorname{rot} \nu$ ,  $(t \times \mu) \operatorname{rot} (t \times \mu)$  и т. д. Определяя также в каждом случае свои  $\nabla A$ ,  $\nabla B$  и  $\nabla C$ , подставляя их в (3.8), находим указанным выше способом различные члены в (3.1) и (3.2). Тогда эти уравнения с учетом полученных таким образом соотношений преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{n^2} \{ \sin \theta \cos \theta [x \sin \varphi + (\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi)] + \sin^2 \theta (\delta' - \sigma) + \nabla \theta (N \sin \varphi - \\ & - b \cos \varphi) + \nabla \varphi [\sin \theta \cos \theta (N \cos \varphi + b \sin \varphi)] - t \sin^2 \theta \} - \alpha^2 (\sigma + \delta' + t \nabla \varphi) + \\ & + \beta^2 \left\{ \frac{1}{n^2} (\delta'' - \sigma) + \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) t \nabla \theta - (\sigma + \delta'') \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & 2 \cos \theta \cos(\vartheta - \varphi) t \nabla \theta + \sin \theta \nabla \theta (N \cos \vartheta + b \sin \vartheta) + \\ & + \sin(\vartheta - \varphi) (1 + \cos \theta) t \nabla \varphi + 2 \sin \theta \sin(\vartheta - \varphi) t \nabla \vartheta + \\ & + \cos \theta \nabla \vartheta (-N \sin \vartheta + b \cos \vartheta) - \cos \theta \cos \vartheta x + \\ & + 4 \sin \theta \sin(\vartheta - \varphi) \sigma - \cos \theta (\gamma_1 \sin \vartheta + \gamma_2 \cos \vartheta) + \\ & + \nabla \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} n \right) (\nu \times t \times \mu) - \nabla \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} n \right) (\mu \times t \times \nu) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10), (3.11) совместно с (3.3) определяют законы изменения углов  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta$  при распространении волны (поскольку угол  $\eta$  выражается через  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ). Однако, как уже указывалось выше, удобнее представить (3.3) или (3.5), воспользовавшись рядом несложных векторных преобразований и соотношением  $\operatorname{div} t = 0$ , в форме

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \cos \theta \sin(\vartheta - \varphi) t \nabla \theta + \frac{\sin \theta}{n^2} \nabla \theta (N \sin \vartheta - b \cos \vartheta) + \\ & + \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \sin \theta \cos(\vartheta - \varphi) t \nabla(\vartheta - \varphi) - \frac{\cos \theta}{n^2} \nabla \vartheta (N \cos \vartheta + b \sin \vartheta) + \\ & + (\mu \times \nu) \nabla \left( \frac{1}{n^2} \right) + \nabla \ln(\Phi^2 \alpha \beta) \left\{ \frac{\mu \times \nu}{n^2} + t [t(\mu \times \nu)] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В (3.10) через

$$\delta' = \delta(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (\nu_1 - \nu_2) \sin \varphi \cos \varphi$$

обозначено геодезическое кручение проекции вектора  $\mu$  на поверхности  $S = \text{const}$ , а через

$$\delta'' = \delta(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + (\nu_1 - \nu_2) \sin \vartheta \cos \vartheta$$

— геодезическое кручение линий  $\nu$  на той же поверхности.

Если ввести параметры  $\xi$  и  $\zeta$  соответственно вдоль линий  $N$  и  $b$  на поверхности  $S = \text{const}$ , а также иметь в виду, что  $\tau$  — параметр вдоль линий  $t$ , то из (3.10) — (3.12) получим систему уравнений для определения углов  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \left\{ \frac{1}{n^2} \left( \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) - \left( \frac{\sin^2 \theta}{n^2} + 1 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \right. \\ & + \frac{\sin \theta \cos \theta}{n^2} \left( \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \left. \right\} - \beta^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \\ & + \frac{\alpha^2}{n^2} \sin \theta \cos \theta [x \sin \varphi + (\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi)] + \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$+ \alpha^2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1 \right) \delta' + \beta^2 \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) \delta'' - \left[ \alpha^2 \left( 1 + \frac{\sin^2 \theta}{n^2} \right) + \beta^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \right] \sigma = 0;$$

$$\begin{aligned} & 2 \cos \theta \cos(\vartheta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sin \theta \left( \cos \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + \sin(\vartheta - \varphi) (1 + \cos \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \\ & + 2 \sin \theta \sin(\vartheta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \cos \theta \left( - \sin \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \cos \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$+ 4 \sin \theta \sin(\vartheta - \varphi) \sigma - \cos \theta \cos \vartheta x - \cos \theta (\gamma_1 \sin \vartheta + \gamma_2 \cos \vartheta) +$$

$$+ \nabla \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} n \right) (\mathbf{v} \times \mathbf{t} \times \boldsymbol{\mu}) - \nabla \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} n \right) (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{t} \times \mathbf{v}) = 0;$$

$$\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \cos \theta \sin(\vartheta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\sin \theta}{n^2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \cos \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) +$$

$$+ \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \sin \theta \cos(\vartheta - \varphi) \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) - \frac{\cos \theta}{n^2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \sin \vartheta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + \quad (3.15)$$

$$+ (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v}) \nabla \left( \frac{1}{n^2} \right) + \nabla \ln (\Phi^2 \alpha \beta) \left\{ \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v}}{n^2} + \mathbf{t} [ \mathbf{t} (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v}) ] \right\} = 0.$$

Таким образом, уравнения (2.6) и (3.13)–(3.15) определяют как амплитуду поля  $\Phi$ , так и вращение и деформацию эллипсоида (эллипса) поляризации в приближении геометрической оптики при распространении электромагнитных волн в гиротропной слабонеоднородной среде.

Если теперь перейти в выражения (3.14)–(3.15) к случаю негиротропной среды, т. е. положить  $\beta \equiv \sin \chi = 0$ ,  $\alpha \equiv \cos \chi = 1$ , то соотношения (3.14) и (3.15) тождественно равны нулю, а (3.13) переходит в следующее равенство\*:

$$\begin{aligned} & (1 + \sin^2 \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \sin \theta \cos \theta \left( \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) = \\ & = (n^2 + \sin^2 \theta) \sigma + (n^2 - \sin^2 \theta) \delta' - \left( \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) - \\ & - \sin \theta \cos \theta [x \sin \varphi + (\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi)]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Соотношение (3.16) может быть без труда получено непосредственно из формулы (17) статьи [7], если связывать ортогональную систему координат с линией  $\mathbf{t}$ , как это делается в настоящей работе, а не с линией

\* Угол  $\theta$  в (3.16) известен, поскольку в случае негиротропной среды для него справедливо соотношение  $\theta + \nu = \pi/2$  ( $\nu$  — угол между векторами  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{s}$ ).



$s$ , как в [7]. С другой стороны, если использовать систему координат, связанную с лучом  $s$ , и получить из (3.1)—(3.3) уравнения, аналогичные (3.14)—(3.16) (которые, как мы указывали выше, здесь не приводятся ввиду их громоздкости), то полученные уравнения при переходе к негиротропной среде в точности переходят в выражение [7], определяющее закон вращения вектора поляризации вдоль луча.

В заключение автор благодарит Б. Н. Гершмана за всестороннее обсуждение результатов, а также Ю. А. Кравцова за ряд ценных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. K. G. Budden, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge, 1961.
3. H. Pöeverlein, *Phys. Rev.*, **128**, 956 (1962).
4. S. Veinberg, *Phys. Rev.*, **126**, 1899 (1962).
5. J. Vazer, J. Hurley, *J. Geoph. Res.*, **68**, 147' (1963).
6. С. М. Рытов, Докл. АН СССР, **43**, 263 (1938); Докторская диссертация, ФИАН, М., 1940.
7. Ю. А. Зайцев, *Радиотехника и электроника*, **7**, 1826 (1962).
8. М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Акуст. ж.*, **2**, 173 (1956).
9. A. D. Gala'nin, *J. Phys. USSR*, **6**, 35 (1942).
10. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, **1**, Гостехиздат, М., 1951.
11. М. Лагалли, *Векторное исчисление*, ОНТИ НКТП, 1936.
12. П. К. Рашевский, *Курс дифференциальной геометрии*, Гостехиздат, М., 1950.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
28 февраля 1966 г.

#### ON METHOD OF GEOMETRIC OPTICS IN THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN A GYROTROPIC MEDIUM

*Yu. Ya. Yashin*

In the approximation of geometric optics the propagation of electromagnetic waves in a gyrotropic medium is considered, assuming that the tensor of the dielectric permittivity is the Ermitov's one. The equations determining the flux energy conservation law as well as the rotation and deformation of the polarization ellipse (ellipsoid) are obtained.

УДК 548.0 : 535 : 621.378.4

## УДВОЕНИЕ ЧАСТОТЫ СВЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ\*

В. И. Беспалов

В приближении заданного поля основной частоты проведена оценка влияния случайных изменений направления оптической оси одноосного нелинейного кристалла на величину коэффициента преобразования в нем света во вторую гармонику. Показано, что случайные неоднородности приводят к уменьшению коэффициента преобразования. Влияние случайных неоднородностей может быть ослаблено примерно в два раза оптимальной ориентацией кристалла.

В ряде работ [1-6] оценивается влияние пространственной и временной структуры пучка света на эффективность его преобразования в нелинейных кристаллах во вторую гармонику. Так, например, наличие угловой расходимости в пучке света приводит к тому, что для части излучения нарушены условия синхронизма\*\*, следствием чего является уменьшение коэффициента преобразования по сравнению со случаем синхронного удвоения частоты света в плоской монохроматической волне.

К аналогичным последствиям — нарушению условий синхронного преобразования — приводит оптическая неоднородность используемых для удвоения частоты нелинейных кристаллов. В настоящей работе в предположении заданного поля основной частоты проведена количественная оценка этого эффекта. Для того чтобы акцентировать внимание на основном следствии неоднородности среды — рассинхронизации волн основной и удвоенной частот, — ниже мы ограничились рассмотрением простейшей одномерной задачи.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально к границе полубесконечной нелинейной среды, параметры которой случайно изменяются только вдоль координаты  $z$ , совпадающей с нормалью к границе (рис. 1). Примем далее, что нелинейная среда является одноосным кристаллом (для определенности КДР), направление оптической оси  $a$  которого случайно изменяется в зависимости от координаты  $z$ , оставаясь в плоско-

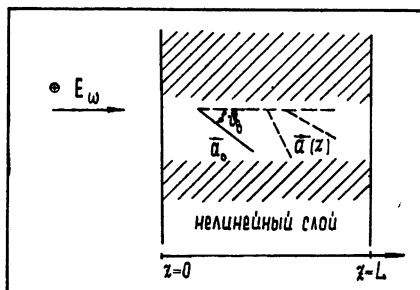


Рис. 1.

\* Основные результаты доложены на симпозиуме по нелинейной оптике (Минск, июнь 1965 г.).

\*\* См. соотношения (1) и (2) в разделе 1.

сти рисунка. Другие параметры среды остаются неизменными. Известно, что на длинах волн  $\sim 1\mu$  удвоение частоты в КДР может происходить эффективно при распространении основной (первой) гармоники под двумя углами с оптической осью  $a_0$ , для одного из которых выполнено соотношение

$$2k_{\omega 0} \simeq k_{2\omega e}, \quad (1)$$

а для другого — соотношение

$$k_{\omega 0} + k_{\omega e} \simeq k_{2\omega e}. \quad (2)$$

Индексом «0» здесь помечен волновой вектор обыкновенной волны, а индексом «e» — необыкновенной.

Ограничимся рассмотрением удвоения при выполнении соотношения (1). Будем считать, что падающая волна является обыкновенной — только эта волна и может в рассматриваемом случае эффективно преобразовываться в волну второй гармоники. Указанные выше колебания оптической оси не скажутся на распространении этой волны: для нее волновой и лучевой векторы направлены по оси  $z$  и с изменением координаты не меняются по величине. Волновой вектор возбуждающейся в среде необыкновенной волны удвоенной частоты также направлен вдоль оси  $z$ ; однако его величина зависит от направления оптической оси  $a(z)$ . Лучевой вектор волны второй гармоники  $v_{гр}(z)$  образует с осью  $z$  угол  $\alpha(z)$ . Ввиду малости последнего ( $\alpha \sim 2^\circ$ ) влиянием его изменения на рассматриваемые эффекты можно пренебречь. Таким образом, изменение направления оптической оси приводит к зависимости от координаты  $z$  величины

$$\Delta k(z) = 2k_{\omega 0} - k_{2\omega e} \quad (3)$$

и, как следствие, к изменению процесса преобразования (взаимодействия) волн.

Величину отклонения оптической оси от ее среднего направления можно считать (в практически интересных случаях) малой, а ее зависимость от координаты  $z$  — медленной. Следовательно,  $k_{2\omega e}$  можно представить в форме

$$k_{2\omega e} = k_{2\omega e}^0 (1 + f(z)), \quad |f(z)| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \ll |k_{2\omega e} f|. \quad (4)$$

Записывая поля волн первой  $E_1$  и второй  $E_2$  гармоник в виде

$$E_1 = A_1 \cos [\omega t - k_{\omega} z - \varphi_1(z)], \quad E_2 = A_2 \cos [2\omega t - \int_0^z k_{2\omega e} dz - \varphi_2(z)] \quad (5)$$

и используя обычную [7] методику получения укороченных уравнений, для нормированных значений амплитуд и разности фаз получим следующую систему уравнений\*:

$$\frac{du}{d\xi} = -uv \sin \theta, \quad \frac{dv}{d\xi} = u^2 \sin \theta, \quad (6)$$

\* При получении уравнений (6) наряду с изменением величины  $\alpha(z)$  было пренебрежено также и обычным изменением амплитуд волны порядка  $k_{2\omega}^{-1/2}$ , которое имеет место в приближении геометрической оптики. Кроме того, в (6) не учитываются случайные изменения величины  $\sigma$ , влияние которых на процесс удвоения частоты пренебрежимо мало по сравнению с эффектом рассинхронизации скоростей.

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \delta(\xi) + \cos \theta \left( \frac{1 - 3v^2}{v} \right),$$

где

$$\xi = z/l, \quad \theta = 2\varphi_1 - \varphi_2 + 2k_{\omega 0} z - \int_0^z k_{2\omega e}(u) du, \quad \delta = [2k_{\omega 0} - k_{2\omega e}(z)] l, \quad (7)$$

$$l = (\sigma A_0)^{-1}, \quad \sigma = \frac{2\pi\omega}{cn} \chi \sin \theta, \quad A_0^2 = \frac{8\pi}{cn} p_{\omega}(z=0),$$

$\chi$  — параметр нелинейности,  $u = A_1/A_0$ ,  $v = A_2/A_0$ ,  $p_{\omega}$  — поток мощности.

Так как выше было принято, что на входе в нелинейную среду ( $z=0$ )  $A_2=0$ , то, следовательно, величина  $v^2 = A_2^2/A_0^2$  равна коэффициенту преобразования мощности волны первой гармоники во вторую, а величина  $l$  является характерной длиной, на которой при  $\delta=0$  происходит почти полное преобразование энергии ( $v^2 \sim 1$ ).

В системе (6) влияние неоднородностей среды учитывается случайной функцией

$$\delta(\xi) = (2k_{\omega 0} - k_{2\omega e}^0) l - k_{2\omega e}^0 l f(\xi) = \delta_0 + \delta_1(\xi). \quad (8)$$

Аналитическое решение системы (6) в общем случае не представляется возможным. Поэтому упростим еще задачу, предположив, что коэффициент преобразования  $v^2$  невелик и поле первой гармоники можно считать неизменным (приближение заданного поля). В этом случае задача становится линейной и ее решение сводится к исследованию одного уравнения:

$$\frac{dV}{d\xi} = i \{ \delta(\xi) V + 1 \}, \quad (9)$$

где  $V = ve^{i\theta}$  и, следовательно,  $v^2 = VV^*$ . Решение (9) при начальном условии  $V(\xi=0) = 0$  имеет вид

$$V(\xi) = i \exp \left[ i \int_0^{\xi} \delta(u) du \right] \int_0^{\xi} \exp \left[ -i \int_0^u \delta(p) dp \right] du. \quad (10)$$

С помощью (10) нетрудно получить искомое выражение для коэффициента преобразования в неоднородной среде:

$$v^2 = VV^* = \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \exp [-i\delta_0(u-v) - i\psi(u) + i\psi(v)] dudv, \quad (11)$$

в котором введено обозначение

$$\psi(\xi) = \int_0^{\xi} \delta_1(u) du = -k_{2\omega e}^0 l \int_0^{\xi} f(u) du. \quad (12)$$

## 2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ограничимся определением величины  $\langle v^2 \rangle$  — среднего (по ансамблю) значения коэффициента преобразования. Из (11) следует:

$$\langle v^2(\xi) \rangle = \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \langle \exp [-i\delta_0(u-v) - i\psi(u) + i\psi(v)] \rangle dudv. \quad (13)$$

Для вычисления интегралов в (11) необходимо знать статистические свойства функции  $\psi(\xi)$ . Предполагая, что значения случайной величины

$f(\xi)$  распределены по нормальному закону со средним значением, равным нулю, найдем [8], что величина  $\psi(\xi)$  распределена также по нормальному закону. Следовательно, плотность вероятности величины  $\psi$  можно записать в виде

$$p\{\psi(\xi)\} = (2\pi\delta_s^2 \xi d)^{-1/2} \exp\{-\psi^2/2\delta_s^2 \xi d\}, \quad (14)$$

где

$$\delta_s^2 = \langle f^2(\xi) \rangle (k_{2\omega e}^0 l)^2, \quad d = D_l \quad (15)$$

( $D$  — размер области корреляции неоднородностей).

Величина  $\delta_0 = (2k_{\omega 0} - k_{2\omega e}^0) l$ , постоянная для каждой из реализаций ансамбля, может, вообще говоря, меняться от реализации к реализации. Так, например, если интересоваться значением коэффициента преобразования  $v^2$  при  $\xi = \xi_1$ , то можно каждый отдельный образец нелинейного кристалла ориентировать на максимум величины  $v^2(\xi_1)$  и затем усреднять получившиеся значения  $v^2$  по всем образцам (реализациям). При таком усреднении величина  $\delta_0$  является случайной функцией и находится из условия

$$\frac{\partial v^2(\xi_1, \delta_0)}{\partial \delta_0} = 0. \quad (16)$$

Если же все кристаллы ориентировать одинаковым образом независимо от величины и распределения неоднородностей в них, измерить в этом положении величину  $v^2(\xi_1)$  для каждого кристалла и потом ее усреднить, то в этом случае величина  $\delta_0$  будет одинаковой для всех реализаций. На исследовании зависимости  $\langle v^2(\xi_1) \rangle$  в этих двух случаях и остановимся ниже.

1. Пусть  $\delta_0 = \text{const}$  (одинаковая ориентация всех образцов). При этом условии выражение (13) с учетом (14) можно переписать в виде

$$\langle v^2(\xi_1) \rangle = \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} \exp[-i\delta_0(u-v)] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz} \frac{\exp(-z^2/2\delta_s^2 |u-v|d)}{(2\pi\delta_s^2 |u-v|d)^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times dz \right\} dudv, \quad (17)$$

где  $z = \psi(u) - \psi(v)$ . Выполняя в (17) интегрирование, получим

$$\langle v^2(\xi_1) \rangle = \frac{2p}{p^2 + \delta_0^2} \xi_1 - \frac{2(p^2 - \delta_0^2)}{(p^2 + \delta_0^2)^2} (1 - e^{-p\xi_1} \cos \delta_0 \xi_1) - \\ - \frac{4p\delta_0}{(p^2 + \delta_0^2)^2} e^{-p\xi_1} \sin \delta_0 \xi_1, \quad (18)$$

где  $p = \delta_s^2 d/2$ . На рис. 2 представлена величина  $\mu^2 \langle v^2(\xi_1) \rangle$  как функция  $\mu \xi_1$  для следующих значений  $\delta_0$  и  $p^*$ :

кривая 1 —  $\delta_0 = p = 0$ , удвоение в однородной среде без расстройки скоростей;

\* Введение нормирующего множителя  $\mu$  эквивалентно переходу в уравнении (18) к переменным  $\mu^2 \langle v^2 \rangle$ ,  $\mu \xi_1$ ,  $p/\mu$ ,  $\delta_0/\mu$ .

- кривая 2 —  $\delta_0 = 0$ ,  $p = \mu$ , удвоение в неоднородной среде (среднее значение расстройки равно нулю);
- кривая 3 —  $\delta_0 = p = \mu$ , удвоение в неоднородной среде (средняя расстройка скоростей отлична от нуля);
- кривая 4 —  $\delta_0 = \mu$ ,  $p = 0$ , удвоение в однородной среде с расстройкой скоростей.

Из приведенных кривых видно, что наличие неоднородностей в нелинейной среде уменьшает коэффициент преобразования в том случае, когда условия синхронизма в среднем выполнены (кривые 1 и 2). Иначе обстоит дело в том случае, когда расстройка отлична от нуля (кривые 3 и 4). Здесь в отсутствие случайных неоднородностей коэффициент преобразования есть периодическая функция  $\xi_1$ . Коэффициент преобразования при наличии случайных неоднородностей и при том же значении средней расстройки меньше его значения при  $p = 0$  только до некоторого  $\xi_1$  (при  $p = \delta_0$ ,  $\xi \simeq \pi/\delta_0$ ), а затем (при  $\xi_1 > \xi_1$ ) становится больше.

2. Пусть  $\delta_0$  — случайная функция  $\xi_1$ , такая, что  $\partial v^2(\xi_1, \delta_0)/\partial \delta_0 = 0$  (оптимальная расстройка средних скоростей волн).

Из условия максимума величины  $v^2(\xi_1)$  найдем

$$\int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} (u - v) \sin \{ \delta_{opt} (u - v) + \psi(u) - \psi(v) \} dudv = 0. \quad (19)$$

Так как оптимальные условия достигаются в том случае, когда выражение в фигурных скобках всюду не очень сильно отличается от нуля, то условие (19) можно приближенно переписать в виде

$$\int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} (u - v) \{ \delta_{opt} (u - v) + \psi(u) - \psi(v) \} dudv = 0. \quad (20)$$

Из (20) следует выражение для оптимального значения  $\delta_{opt}$ :

$$\delta_{opt} = \frac{6}{\xi_1^4} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} (u - v) \{ \psi(v) - \psi(u) \} dudv, \quad (21)$$

которое можно представить в виде

$$\delta_{opt} = \frac{6}{\xi_1^3} \left\{ 2 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} \psi(u) dudt - \xi_1 \int_0^{\xi_1} \psi(u) du \right\}. \quad (22)$$

Так как значения функции  $\psi(\xi)$  распределены по нормальному закону, то, следовательно, и величина  $\delta_{opt}$  распределена по нормальному закону. Используя выражение (22), для оптимального значения коэффициента преобразования получим соотношение

$$v_{opt}^2(\xi_1) = \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} \exp \{ iz(u, v) \} du dv, \quad (23)$$

где случайная величина

$$z(u, v) = \delta_{opt} (u - v) + \psi(u) - \psi(v) \quad (24)$$

распределена также по нормальному закону. Ее среднее значение равно нулю, а дисперсия, как нетрудно показать, определяется выражением

$$\langle z^2 \rangle = \delta_s^2 d \left\{ |u - v| + \frac{6(u - v)^2}{5\xi_1} - \frac{6(u - v)^2(u + v)}{\xi_1^2} + \frac{4(u^3 - v^3)(u - v)}{\xi_1^3} \right\}. \quad (25)$$

Усредняя (23) и используя (25), найдем среднее значение оптимального коэффициента преобразования:

$$\langle v_{\text{opt}}^2(\xi_1) \rangle = \xi_1^2 \left\{ (\pi/3p\xi_1)^{1/2} \int_0^1 x^{-1} \Phi[(6p\xi_1)^{1/2} x(1-x)] \times \right. \\ \left. \times \exp[-p\xi_1(x^4 - 9x^2/5 + x)] dx \right\}, \quad (26)$$

где

$$p = \delta_s^2 d/2, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du.$$

В (26) выражение в фигурных скобках дает поправочный множитель, обусловленный неоднородностями, к значению оптимального преобразования в однородной среде. На рис. 2 функция  $\mu^2 \langle v_{\text{opt}}^2(\xi_1) \rangle$  при-

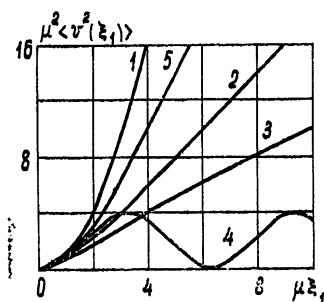


Рис. 2. Нормированный коэффициент преобразования  $\mu^2 \langle v^2 \rangle$  как функция  $\mu\xi$  для следующих значений  $\delta_0$  и  $p$ :

1 -  $\delta_0 = p = 0$ ; 2 -  $\delta_0 = 0, p = \mu$ ; 3 -  $\delta_0 = p = \mu$ ; 4 -  $\delta_0 = \mu, p = 0$ ; 5 -  $\delta_0 = \delta_{\text{opt}}, p = \mu$ .

ведена (кривая 5) в зависимости от величины  $\mu\xi_1$  при  $p = \mu$ . Из графика видно, что оптимальное значение коэффициента преобразования в неоднородной среде несколько меньше, чем его оптимальное ( $\delta_0 = 0$ ) значение в однородной среде и вместе с тем больше среднего значения в неоднородной среде при любом  $\delta_0 = \text{const}$ . Для иллюстрации в таблице 1 приведены соответствующие численные значения.

Таблица 1

$p\xi_1$	$v^2(\delta_0 = 0, p = 0)$	$\langle v^2(\delta_0 = 0, p) \rangle$	$\langle v^2(\delta_0 = \delta_{\text{opt}}, p) \rangle$
$p\xi_1 < 1$	$\xi_1^2$	$(1 - 2p\xi_1/6) \xi_1^2$	$(1 - 2p\xi_1/15) \xi_1^2$
1	$\xi_1^2$	$0,74 \xi_1^2$	$0,88 \xi_1^2$
10	$\xi_1^2$	$0,18 \xi_1^2$	$0,34 \xi_1^2$

### 3. ОЦЕНКИ

Оценим, каким значениям параметров нелинейного кристалла соответствуют приведенные в таблице значения  $p\xi_1$ . Из (7), (15) и (18) следует:

$$p\xi_1 = \langle \Delta k^2 \rangle \frac{DL}{2}, \quad (27)$$

где  $D$  — размер области корреляции неоднородностей (средняя протяженность неоднородностей),  $L$  — длина кристалла. Значения  $\Delta k(z)$  пропорциональны отклонениям оптической оси от синхронного направления:

$$\Delta k(z) = c\vartheta(z); \quad (28)$$

коэффициент  $c$  зависит как от параметров нелинейного кристалла, так и от частоты. Для КДР при  $\lambda_\omega \sim 1\mu$  из дисперсионных характеристик [9] нетрудно найти, что

$$\Delta k (cm^{-1}) \simeq \vartheta(z)'$$

Таким образом, в рассматриваемом случае среднеквадратичное отклонение  $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2}$  связано с  $p\xi_1$  соотношением

$$\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} \simeq [2p\xi_1/D(cm) L(cm)]^{1/2}. \quad (29)$$

Принимая, например,  $L = 2$  см,  $D = 0,1$  см, найдем, что при  $p\xi_1 = 1$  величина  $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} \simeq 3'$ , при  $p\xi_1 = 10$   $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} \simeq 10'$ . С увеличением протяженности неоднородностей или длины кристалла требования к допустимым колебаниям оптической оси становятся более жесткими. На той же длине волны допустимые колебания оптической оси в кристалле ниобата лития при тех же значениях  $p\xi_1$  больше примерно в 3 раза.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Kleinman, Phys. Rev., **128**, 1761 (1962).
2. Б. В. Бокунь, А. Г. Хаткевич, ЖПС, **1**, 97 (1964).
3. D. H. McMahon, A. R. Franklin, J. Appl. Phys. Letters, **6**, 14 (1965).
4. J. Ducuing, N. Bloembergen, Phys. Rev., **133**, 6a, A1493 (1964).
5. C. S. Wang, G. W. Rascete, J. Appl. Phys., **36**, 3281 (1965).
6. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
8. В. Л. Лебедев, Случайные процессы в электрических и механических системах, Физматгиз, М., 1958.
9. J. H. Dennis, R. H. Kingston, Appl. Opt., **2**, 1334 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
28 февраля 1966 г.

#### LIGHT FREQUENCY DOUBLING IN NONLINEAR MEDIUM WITH RANDOM NONHOMOGENEITIES

V. I. Bespalov

In the approximation of a given field of the fundamental frequency the estimation is made of the influence of the random variations of the direction of an optical axis of the one-axial nonlinear crystal on the value of the conversion factor of light into the 2nd harmonic in the crystal. The random nonhomogeneities are shown to decrease the conversion factor. The influence of random nonhomogeneities can be reduced by an optimal orientation of the crystal by the factor of two.



УДК 538.56 : 519.25

## О ВЛИЯНИИ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА

*В. В. Тамойкин*

Рассмотрено рассеяние электромагнитных волн гладким цилиндром конечной длины в слое со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Расчет проведен в приближении физической оптики. Показано, что при достаточно больших флуктуационных набегах фазы в слое сечение рассеяния и диаграмма рассеянного излучения существенно изменяются по сравнению со случаем, когда отсутствуют хаотические неоднородности в среде. Кроме того, рассмотрена задача о рассеянии волн шероховатым ограниченным цилиндром в регулярной среде, которая оказалась во многом аналогична задаче о рассеянии волн цилиндром в хаотически неоднородной среде.

Изучение рассеяния электромагнитных волн ограниченными объектами представляет интерес для целого ряда практических приложений, в частности, для локации метеорных следов, для исследования структуры поверхности планет и т. п. При этом во многих случаях поверхность отражающих тел можно считать идеально проводящей. Теоретическому рассмотрению вопросов рассеяния волн на идеально проводящих телах посвящено достаточно большое количество работ. В некоторых из них получены строгие решения дифракционных задач для тел простейшей геометрической формы (например, для бесконечно длинного цилиндра, сферы, диска и т. д.). Однако в большинстве работ даны приближенные решения задач о дифракции коротких волн на различных телах (см., например, [1, 2] и цитируемую там литературу). Следует заметить, что, как правило, в работах, посвященных изучению рассеяния волн ограниченными объектами, не учитывается влияние статистических факторов (например, случайных шероховатостей поверхности объекта, хаотических неоднородностей окружающей среды и т. д.) на дифракционную картину рассеянного поля. Как следует из рассмотрения некоторых задач, изложенных ниже (рассеяние волн шероховатым ограниченным цилиндром и цилиндром, помещенным в слой со случайными неоднородностями), это влияние в отдельных случаях может стать определяющим. В частности, оказывается, что выражения для среднего поля, а также для сечения и диаграммы рассеяния резко отличаются от соответствующих выражений, полученных без учета влияния статистических факторов, в условиях, когда достаточно велик случайный фазовый набег волны.

### 1. РАССЕЯНИЕ ВОЛН ЦИЛИНДРОМ, ПОМЕЩЕННЫМ В ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ

Пусть плоская волна вида  $E_0 \exp(-ikz + i\omega t)$  падает на цилиндр длиной  $L_0$  и радиуса  $a$ , помещенный в слой толщины  $L$  со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Диэлектрическую проницаемость слоя представим в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + \Delta\varepsilon(\mathbf{r}), \quad \Delta\varepsilon \ll 1, \quad \overline{\Delta\varepsilon} = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta\epsilon(\mathbf{r})$  — случайные отклонения  $\epsilon$  от своего среднего значения, равного единице; черта сверху означает статистическое усреднение (система координат и другие обозначения указаны на рис. 1).

Будем считать, что длина волны мала по сравнению с радиусом цилиндра:

$$\lambda \ll a. \quad (2)$$

В этом случае задачу о рассеянии волны можно решать в приближении физической оптики, представляя поверхностный ток, наводимый полем падающей волны на поверхности цилиндра, в виде [2]

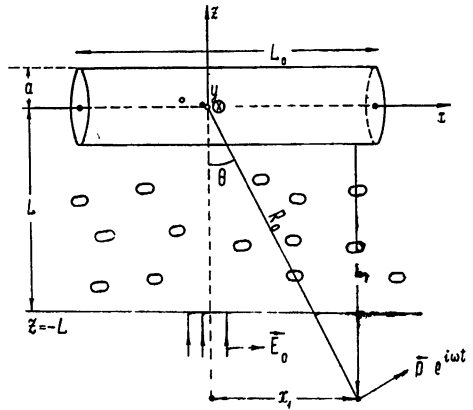


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{пов}} &= \frac{c}{2\pi} [nH_{\text{пад}}] \quad (\text{на освещенной части}), \\ \mathbf{j}_{\text{пов}} &= 0 \quad (\text{вне освещенной области}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $n$  — единичный вектор нормали к боковой поверхности цилиндра,  $H_{\text{пад}}$  — магнитное поле падающей волны.

Процесс распространения волны в слое с хаотическими неоднородностями будем описывать в приближении геометрической оптики, для чего должны быть выполнены следующие неравенства [3,4]:

$$\lambda \ll l, \quad \sqrt{\lambda L} \ll l, \quad (4)$$

где  $l$  — масштаб неоднородностей среды, а  $\sqrt{\lambda L}$  — радиус первой зоны Френеля. Выбор такого приближения обусловлен двумя причинами. Во-первых, относительной простотой последующих выкладок, и во-вторых, что наиболее важно, расчет с помощью геометрикооптического приближения фазовых флуктуаций, возникающих в падающей волне при ее распространении в слое, остается справедливым и при больших флуктуационных набегах фазы (при малых амплитудных). В этом случае, очевидно, неоднородный слой должен вносить наиболее существенные искажения в дифракционную картину рассеяния.

С учетом сказанного для поверхностного тока получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{пов}} &\simeq -\frac{c}{2\pi} \cos \varphi \mathbf{x}_0 \exp(-ikz + is_1(\mathbf{r})) \left( -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ \mathbf{j}_{\text{пов}} &= 0 \quad \left( \varphi < -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi > \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $z$ ,  $\mathbf{x}_0$  — единичный орт в направлении оси  $x$ , а случайный набег фазы  $s_1(\mathbf{r})$  имеет вид [3,4]

$$s_1(\mathbf{r}) \simeq \frac{k}{2} \int_{-L}^z \Delta\epsilon(x, y, z) dz. \quad (6)$$

Таким образом, задача о рассеянии волны на цилиндре сводится к задаче об излучении заданного случайного распределения токов (5) в хаотически неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\mathbf{r})$ , даваемой выражением (1). Последняя, в свою очередь, может быть сведена к уже известной задаче о распространении волны в случайно неоднородном слое, излучаемой диполем  $\mathbf{p} \exp(i\omega t)$  (см. рис. 1), если воспользоваться теоремой взаимности. Тогда, предполагая, что расстояние  $R$  от точки наблюдения до рассеивающего цилиндра велико по сравнению с размерами цилиндра, для поля рассеяния в плоскости  $xz$ , получим выражение

$$E_1(\mathbf{R}) = \frac{ik}{c} \frac{\mathbf{p} \cos \vartheta}{|\mathbf{p}|} \int_S j_{\text{нов}} \frac{\exp\{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|-is_2(\mathbf{r})\}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} dS. \quad (7)$$

Здесь интегрирование проводится по освещенной части боковой поверхности цилиндра; случайный набег фазы волны, излучаемой диполем  $\mathbf{p} \exp(i\omega t)$ , равен

$$s_2(\mathbf{r}) \approx \frac{k}{2\cos \vartheta} \int_{-L}^z \Delta\epsilon(x, y, z) dz. \quad (8)$$

После подстановки (5), (6) и (8) в (7) выражение для поля рассеяния принимает вид

$$E_1(\mathbf{R}) \approx -\frac{ik \cos \vartheta}{2\pi} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \int_S \cos \varphi \frac{\exp\{-ikz + ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}| + is(\mathbf{r})\}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} dS, \quad (9)$$

где

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k}{2} \frac{1 + \cos \vartheta}{\cos \vartheta} \int_{-L}^z \Delta\epsilon(x, y, z) dz. \quad (10)$$

Выясним сначала, как ведет себя среднее поле рассеяния. Для этого необходимо знать распределение вероятностей случайной фазы  $s(\mathbf{r})$ . Последнее известно, если путь, проходимый волной в слое, велик по сравнению с масштабом неоднородностей среды. Тогда, согласно (10),  $s(\mathbf{r})$  представляет собой сумму большого числа случайных величин, и в силу центральной предельной теоремы вероятностей случайная фаза  $s(\mathbf{r})$  распределена по нормальному закону:

$$W(s) \sim \exp(-s^2/2\bar{s}^2). \quad (11)$$

Используя этот факт, для среднего поля рассеяния имеем

$$\overline{E_1(\mathbf{R})} = -\frac{ik \cos \vartheta}{2\pi} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \int_S \cos \varphi \frac{\exp\{-ikz + ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}| - \bar{s}^2/2\}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} dS. \quad (12)$$

Следовательно, в случае, когда фазовые флуктуации велики ( $\bar{s}^2 \gg 1$ ), среднее поле рассеяния экспоненциально мало\*.

\* Выражение для  $\bar{s}^2$  легко вычисляется, например, для гауссового вида коэффициента корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\Gamma_\epsilon(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/l^2)$ .

В этом случае средний квадрат флуктуаций фазы равен

$$\bar{s}^2 = k^2(L+z) \sqrt{\pi} l (\Delta\epsilon)^2 (1 + \cos \vartheta)^2 / 4\cos^2 \vartheta.$$

Прежде чем перейти к вычислению поперечника рассеяния, упростим выражение (9), предполагая, что точка наблюдения расположена достаточно далеко от рассеивающего цилиндра, так что выполнены неравенства

$$R \gg L_0, \quad \lambda R \gg a^2. \quad (13)$$

При этом выражение для поля рассеяния примет вид

$$E_1(R) \simeq -\frac{ika \cos \vartheta}{2\pi} \frac{p}{|p|} \frac{\exp(ikR)}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \times \\ \times \exp \left\{ -ika \cos \varphi (1 + \cos \vartheta) - ikx \sin \vartheta + ik \frac{x^2}{2R} \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + is(\mathbf{r}) \right\} dx. \quad (14)$$

Здесь

$$K(x) = \begin{cases} 1 & (-L_0/2 \leq x \leq L_0/2) \\ 0 & (x < -L_0/2, x > L_0/2) \end{cases}$$

Возводя (14) в квадрат, усредняя и переходя к выражению для поперечника рассеяния, получим

$$\sigma(\vartheta) \simeq \frac{k^2 a^2 \cos^2 \vartheta}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \exp[-ika(1 + \cos \vartheta) \times \\ \times (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)] d\varphi_1 d\varphi_2 \iint_{-\infty}^{\infty} K(x') K(x'') \exp \left\{ -ik \sin \vartheta \times \right. \\ \left. \times (x' - x'') + ik \cos^2 \vartheta \frac{(x'^2 - x''^2)}{2R} \right\} \exp[-s^2 + B_s(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')] \times \\ \times dx' dx''. \quad (15)$$

Здесь  $B_s(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  — корреляционная функция флуктуаций фазы. Выражение для нее легко получить, используя (10) и условие  $L \gg l$ :

$$B_s(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \simeq \frac{k^2}{2} L(\overline{\Delta \varepsilon})^2 [(1 + \cos \vartheta)^2 / \cos^2 \vartheta] \left\{ \int_0^\infty \Gamma_s(\xi, \eta, \zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{z' + z''}{2L} \int_0^\infty \Gamma_s(\xi, \eta, \zeta) d\zeta - \right. \\ \left. - \frac{z' - z''}{2L} \int_0^{z' - z''} \Gamma_s(\xi, \eta, \zeta) d\zeta \right\}, \quad (16)$$

причем  $(z' + z'') = a(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$ ,  $\xi = x' - x''$ ,  $\eta = y' - y'' = a(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$ .

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено неравенство

$$\frac{k^2 a}{2} \overline{(\Delta \varepsilon)^2} [(1 + \cos \vartheta)^2 / \cos^2 \vartheta] \int_0^{\infty} \Gamma_{\varepsilon}(0, 0, \zeta) d\zeta \ll 1, \quad (17)$$

которое по существу означает малость случайного набега фазы на расстоянии порядка радиуса цилиндра  $a$ .

Используя (16) и (17), а также предполагая, что

$$\overline{s^2} = \frac{k^2}{2} L \overline{(\Delta \varepsilon)^2} [(1 + \cos \vartheta)^2 / \cos^2 \vartheta] \int_0^{\infty} \Gamma_{\varepsilon}(0, 0, \zeta) d\zeta \gg 1; \quad (18)$$

$$k L_0 l_E / 2R \ll 1,$$

где  $l_E = l / \sqrt{s^2}$  — масштаб неоднородностей поля на поверхности цилиндра,  $l = \sqrt{2} / (\Delta_{\perp} \Gamma_s) \xi_{-\eta-0}^{1/2}$  — масштаб неоднородностей слоя, запишем для  $\sigma(\vartheta)$  приближенное выражение\*

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) \simeq & \frac{k^2 a^2 \cos^2 \vartheta}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \exp \left\{ -ika(1 + \cos \vartheta) \times \right. \\ & \times (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \left. \right\} \exp \left\{ -\frac{a^2}{l_E^2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)^2 \right\} d\varphi_1 d\varphi_2 \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp [- (\xi^2 / l_E^2) - ik \sin \vartheta \xi] d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегрирование по переменным  $x$  и  $\xi$  не представляет труда, и в результате имеем

$$\sigma(\vartheta) \simeq \frac{k^2 a^2 \cos^2 \vartheta}{4 \sqrt{\pi}} L_0 l_E J \exp (-k^2 l_E^2 \sin^2 \vartheta / 4), \quad (20)$$

где  $J$  — остающийся в (19) интеграл по  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Последний легко подсчитать, если учесть, что  $ka \gg 1$ . При этом  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  в (19) можно разложить в ряд Тэйлора около точки  $\varphi = 0$  и ограничиться несколькими не исчезающими членами. Тогда при выполнении неравенства

$$k^2 l_E^2 (1 + \cos \vartheta)^2 \gg \left| 1 - i \frac{k l_E^2}{a} (1 + \cos \vartheta) \right| \quad (21)$$

интеграл

$$J \simeq \frac{\pi}{ka (1 + \cos \vartheta)}. \quad (22)$$

\* При получении (19) предполагалось, что выполнено неравенство  $L_0 \gg l_E$ . В этом случае фазовые флуктуации в падающей волне приводят к наиболее существенному искажению дифракционной картины рассеяния. В обратном предельном случае  $L_0 \ll l_E$   $\sigma(\vartheta)$  совпадает с известным выражением для поперечника рассеяния цилиндра в условиях однородной среды.

Интересно отметить, что, если  $\frac{kl_E^2}{a}(1 + \cos \vartheta) \gg 1$ , то неравенство (21) автоматически выполняется, поскольку оно эквивалентно условию  $ka \gg 1$ , которое было использовано выше. Однако, если  $\frac{kl_E^2}{a}(1 + \cos \vartheta) \ll 1$ , необходимо потребовать выполнения менее жесткого условия:

$$k^2 l_E^2 (1 + \cos \vartheta)^2 \gg 1. \tag{23}$$

Последнее можно выразить через значение среднего квадрата флуктуаций угла прихода волны (для гауссового вида коэффициента корреляции флуктуаций  $\varepsilon(\mathbf{r})$ ) в виде [3]

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{\sqrt{\pi} L (\Delta \varepsilon)^2}{l} \ll 1. \tag{24}$$

Следовательно, используемое приближение основано на предположении о малости флуктуаций угла прихода волны.

Окончательно поперечник рассеяния примет вид\*

$$\sigma(\vartheta) \simeq \frac{ka L_0 l_E}{8 \sqrt{\pi}} \exp(-\vartheta^2 / 4 \overline{\vartheta^2}). \tag{25}$$

Из (25) ясно, что  $\sigma(\vartheta) \sim L_0 l_E$  в отличие от случая однородной среды, когда  $\sigma(\vartheta) \sim L_0^2$ . Кроме того, ширина диаграммы рассеянного излучения по порядку величины равна

$$\vartheta \sim 2 \sqrt{\overline{\vartheta^2}}, \tag{26}$$

т. е. не зависит от длины волны падающего излучения и от длины цилиндра, а определяется лишь параметрами неоднородного слоя, в который помещен рассеивающий цилиндр\*\*.

## 2. КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯ РАССЕЯНИЯ

Как известно, в некоторых случаях определенную информацию о свойствах рассеивающего объекта можно получить путем корреляционной обработки поля рассеяния. Для этого рассмотрим корреляционную функцию

$$B_{E_1 E_1^*}(x, 0, -L_1) = \overline{E_1(x, 0, -L_1) E_1^*(0, 0, -L_1)}. \tag{27}$$

Используя (14) совместно с условиями  $\lambda L_1 \gg L_0 l_L$ ,  $L_0 \gg l_E$ ,  $\overline{s^2} \gg 1$ , можно показать, что функция корреляции представляет собой произведение двух функций:

$$B_{E_1 E_1^*} \sim \Phi_{E_1 E_1^*} \left( \frac{kl_E}{2L_1} x \right) \Phi_{K_2} \left( \frac{kL_0}{L_1} x \right), \tag{28}$$

\* Выражение (25) остается неизменным также в случае, когда электрическое поле падающей волны поляризовано вдоль оси  $y$ . Единственное отличие состоит в том, что поле рассеяния при этом поляризовано вдоль оси  $x$ .

\*\* В условиях однородной среды ширина основного лепестка диаграммы рассеяния  $\vartheta \sim \lambda / L_0$  [2].

где  $\Phi_{E_1 E_1^*}$  — пространственный спектр корреляционной функции поля на поверхности цилиндра, а  $\Phi_{K^*}$  — спектр регулярной освещенности [5]. Например, для равномерно освещенного цилиндра и гауссовой функции корреляции поля на его боковой поверхности  $B_{E_1 E_1^*}$  имеет вид

$$B_{E_1 E_1^*} \sim \frac{\sin [kL_0 x/L_1]}{kL_0 x/L_1} \exp\left(-\frac{k^2 l_E^2 x^2}{16L_1^2}\right). \quad (29)$$

Отсюда ясно, что функция  $\exp\left(-\frac{k^2 l_E^2 x^2}{16L_1^2}\right)$  является более плавной по сравнению с функцией  $\Phi_{K^*} \sim \frac{\sin [kL_0 x/L_1]}{kL_0 x/L_1}$ , характеризующей регулярную освещенность цилиндра. Следовательно, на расстояниях, удовлетворяющих неравенству  $\lambda L_1 \gg L_0 l_E$ , корреляция поля рассеяния, создаваемого ограниченным цилиндром, будет определяться функцией  $\Phi_{K^*}$ , не зависящей от масштаба неоднородностей среды.

### 3. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ШЕРОХОВАТЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ЦИЛИНДРОМ

Рассмотрим теперь несколько иную задачу. Пусть плоская волна  $E_0 \exp[-ik(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta) - i\omega t]$  падает под углом  $\vartheta$  на шероховатый идеально проводящий цилиндр радиусом  $a$  и длиной  $L_0$ , причем предполагается, что шероховатости цилиндра зависят лишь от одной координаты  $z$  (гофрированный цилиндр). Если считать, как и ранее, что длина волны мала по сравнению со всеми характерными радиусами кривизны, то поверхностный ток можно представить в виде (3)\*\*. Поле, создаваемое этим током, легко найти, если воспользоваться, например, уравнением для вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  совместно с условием калибровки Лорентца [8]. Опуская промежуточные выкладки, запишем выражение для поля рассеяния

$$\begin{aligned} E_1(R) \approx & \frac{ikH_{\text{пад}}}{2\pi} (x_0 - m \sin \vartheta_1) a \frac{\exp(ikR)}{R} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \times \\ & \times \exp\left[ ikx (\sin \vartheta + \sin \vartheta_1) + ik \cos^2 \vartheta_1 \frac{x^2}{2R} \right] dx \times \\ & \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \exp\{ik\rho(x) (\cos \vartheta + \cos \vartheta_1) \cos \varphi\} d\varphi, \end{aligned} \quad (30)$$

справедливое в условиях, когда магнитное поле падающей волны поляризовано вдоль оси  $y$  и выполнены неравенства

$$h \ll l, \quad R \gg L_0, \quad \lambda R \gg a^2. \quad (31)$$

\* Подобный результат был получен рядом авторов в задаче о прохождении флукуатирующего излучения через отверстие [5,6].

\*\* Для этого, в частности, кроме условия  $\lambda \ll a$  необходимо потребовать еще выполнения неравенства  $\lambda \ll l^2/h$ , где  $l$  — масштаб, а  $h$  — высота шероховатостей [7].

Здесь  $x_0$  — орт вдоль оси  $x$ ,  $m$  — единичный вектор в направлении на точку наблюдения,  $\vartheta_1$  — угол наблюдения,  $s(x) = a + h(x)$ ,

$$a \gg h(x), \quad \overline{h(x)} = 0.$$

Интеграл в (30) по переменной  $\varphi$  равен [9]

$$J = \pi [i\varepsilon_1(\alpha) - I_1(\alpha)], \quad (32)$$

где  $\alpha = kr(x) (\cos \vartheta + \cos \vartheta_1)$ ,  $\varepsilon_1(\alpha)$ ,  $I_1(\alpha)$  — функции Вебера и Ангера соответственно, имеющие простой аналитический вид при  $\alpha \gg 1$  [10]. С учетом этого факта выражение для поля рассеяния примет вид

$$\begin{aligned} E_{\perp}(R) \simeq & \frac{ika H_{\text{пад}}}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{ka(\cos \vartheta + \cos \vartheta_1)} \right]^{1/2} (x_0 - m \sin \vartheta_1) \times \\ & \times \left( \exp \left\{ ik[R + a(\cos \vartheta + \cos \vartheta_1)] - i \frac{3\pi}{4} \right\} / R \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \exp \left\{ ikx(\sin \vartheta + \sin \vartheta_1) + ik \cos^2 \vartheta_1 \frac{x^2}{2R} - ikh(x) \times \right. \\ & \left. \times (\cos \vartheta + \cos \vartheta_1) \right\} dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Из сравнения выражений (14) и (33) видно, что они имеют совершенно аналогичный вид, только в первом случае фазовые флуктуации  $s(r)$  вызваны наличием хаотических неоднородностей окружающей среды, а во втором — наличием случайных шероховатостей поверхности цилиндра. В частности, если считать, что шероховатости цилиндра  $h(x)$  распределены по нормальному закону, то для среднего поля рассеяния имеем

$$\overline{E_{\perp}(R)} \sim \exp [-k^2 \overline{h^2} (\cos \vartheta + \cos \vartheta_1)^2 / 2], \quad (34)$$

т. е. при  $k^2 \overline{h^2} \gg 1$  среднее поле экспоненциально мало.

Аналогично при выполнении неравенств

$$k^2 \overline{h^2} \gg 1, \quad L_0 \gg l_E, \quad \lambda R \gg L_0 l_E, \quad (35)$$

где  $l_E = l / \sqrt{k^2 \overline{h^2} (\cos \vartheta + \cos \vartheta_1)}$  — масштаб неоднородностей комплексного поля на поверхности цилиндра,  $l = \sqrt{2} \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} \Gamma_h(\zeta) \right)_{\zeta=0}^{-1/2}$  — масштаб, а  $\Gamma_h(\zeta)$  — коэффициент корреляции шероховатостей цилиндра, для сечения рассеяния получим следующее выражение:

$$\sigma(\vartheta, \vartheta_1) \simeq \frac{ka \cos \vartheta L_0 l_E}{8 \sqrt{\pi}} \exp [-k^2 l_E^2 (\sin \vartheta + \sin \vartheta_1)^2 / 4]. \quad (36)$$

Следовательно, так же, как в рассмотренном выше случае, рассеянное излучение сосредоточено в узкой области углов вблизи направления зеркального отражения ( $\vartheta_1 = 2\pi - \vartheta$ ) с шириной диаграммы рассеяния

$$\Delta \vartheta \simeq 4 \sqrt{\overline{h^2}} / l, \quad (37)$$



зависящей лишь от статистических параметров рассеивающей поверхности.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные выше результаты легко понять из простых соображений. Действительно, как в случае шероховатого цилиндра при  $k^2 \bar{h}^2 \gg 1$ , так и в случае цилиндра, помещенного в неоднородный слой, при  $\bar{s}^2 \gg 1$  возникает сильная хаотическая модуляция поля падающей волны по фазе (что эквивалентно действию сильного фазового экрана [1]). Следовательно, наводимые на боковой поверхности цилиндра токи, масштаб неоднородностей которых равен  $l_E$ , излучают независимо с участков поверхности длиной  $\sim l_E$ . Поэтому можно суммировать отдельные поперечники рассеяния, т. е.  $\sigma \sim N l_E^2$ , где  $N$  — число независимых излучателей. Кроме того,  $N = L_0/l_E$ , следовательно,  $\sigma \sim L_0 l_E$ . Далее, поскольку диаграмма излучения отдельного излучателя  $\Delta\vartheta \sim \lambda/l_E$ , то подобную диаграмму будет иметь весь цилиндр, на поверхности которого расположены  $N$  некогерентных излучателей. В частности, для шероховатого цилиндра  $\Delta\vartheta \sim \frac{\lambda}{l_E} \sim \sqrt{\bar{h}^2}/l$ , а для цилиндра в неоднородном

слое  $\Delta\vartheta \sim \sqrt{\bar{\vartheta}^2}$ . Кстати, и сама результирующая диаграмма формируется на расстояниях  $R$ , значительно больших тех, при которых угловые размеры цилиндра  $\vartheta \sim L_0/R$  малы по сравнению с шириной диаграммы рассеяния  $\Delta\vartheta \sim \lambda/l_E$ , т. е. при  $\lambda R \gg L_0 l_E$ .

В заключение заметим, что представляет интерес рассмотреть задачу о рассеянии электромагнитных волн сферой большого радиуса, а также произвольным выпуклым телом в хаотически неоднородной среде. В общем случае эта задача достаточно сложна. Однако ясно, что при выполнении неравенств\*

$$\sqrt{\frac{\lambda R_1}{2\pi}}, \quad \sqrt{\frac{\lambda R_2}{2\pi}} \ll l_E, \quad kR_1, \quad kR_2 \gg 1, \quad (38)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны выпуклого тела в «светящейся» точке [2], выражение для поперечника обратного рассеяния должно иметь вид

$$\sigma(0) \approx \pi R_1 R_2. \quad (39)$$

Следовательно, в этом предельном случае случайная нерегулярность поля  $E$  на поверхности тела не должна сказываться на величине поперечника рассеяния (39).

Выражаю благодарность М. А. Миллеру и Н. Г. Денисову за дискуссию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Кинг, У Тай Цзунь, Рассеяние и дифракция электромагнитных волн (перевод с английского под редакцией Э. Л. Бурштейна), ИЛ, М., 1962.
2. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, изд. Сов. радио, М., 1962.
3. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.

\* По существу  $\sqrt{\lambda R_1/2\pi}$  и  $\sqrt{\lambda R_2/2\pi}$  — это линейные размеры того участка на поверхности сферы, который дает основной вклад в рассеянное излучение в точке наблюдения в случае однородной среды.

4. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1958.
5. Н. Г. Денисов, Геомагнетизм и аэрономия, 4, 675 (1964).
6. В. Н. Briggs, Proc. Phys. Soc., 77, pt. 2, 305 (1961).
7. P. Beckmann, A. Spizzichino, The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces, Pergamon Press, 1963.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1958.
9. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
10. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949.
11. Н. Г. Денисов, Докторская диссертация, Горький, 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 марта 1966 г.

## ON INFLUENCE OF SOME STATISTICAL FACTORS UPON SCATTERING CHARACTERISTICS OF FINITE CYLINDER

*V. V. Tamoikin*

In the physical optics approximation the EM-wave scattering by a smooth cylinder of the finite length in a layer with random non-homogeneities of the permittivity has been considered. If fluctuational phase runs in the layer are sufficiently large, the scattering cross-section and the diagram of scattered radiation are shown to differ significantly from those for the case of uniform medium. In addition, the wave scattering by the cylinder with rough boundary in the uniform medium is considered, the problem being much analogous to the first one.

---

УДК 621.378.001.24

## О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЫ КАЛЛЕНА—ВЕЛТОНА ДЛЯ РАСЧЕТА ФЛУКТУАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАНТОВЫХ УСТРОЙСТВ

*В. Б. Цареградский*

Обобщенная теорема Каллена—Велтона применяется для расчета флуктуаций квантовых устройств в режиме усиления и генерации. Найдена спектральная энергия шумов в резонаторе квантового усилителя и уточнены условия применимости обобщенной формулы Каллена—Велтона. Оценена предельная ширина спектральной линии колебания молекулярного генератора. Проведено сравнение с ранее известными результатами.

1. В заметке [1] при определенных предположениях дан вывод формулы Каллена—Велтона для стационарно возбужденной среды с двумя уровнями. Одновременно эта формула была получена в [11]. В настоящей статье найденная в [1] формула используется для отыскания флуктуационных характеристик мазера и для вычисления ширины спектральной линии колебаний молекулярного генератора.

Рассмотрение этих задач преследует две цели. Во-первых, на примере расчета флуктуаций в мазере мы хотим уточнить, насколько реально упрощающие предположения, сделанные при выводе формулы [1]. Это достигается сравнением полученных здесь результатов с аналогичными результатами в [2], найденными путем прямого решения квантово-механических уравнений. Во втором случае интерес представляет сам конечный результат — предельная ширина линии колебания пучкового генератора. В настоящее время этот вопрос еще не получил окончательного решения. Из имеющихся здесь работ отметим [3,4]. В работе [4] сделана попытка строгого квантовомеханического расчета спектра флуктуаций частоты генератора под воздействием квантовых флуктуаций (спонтанного излучения). Однако приближение, которое было принято в [4], является, по нашему мнению, сильным и фактически сводит все результаты до уровня оценок. Для реально существующих молекулярных генераторов эти оценки совпадают по порядку величины с оценками Троицкого [3], найденными из наглядных физических соображений

В сложившейся ситуации нам кажется целесообразным вновь вернуться к этому вопросу и попытаться определить предельную ширину линии молекулярного генератора, используя для этой цели обобщенную теорему Каллена—Велтона. Следует упомянуть, что законность применения обобщенной формулы [1] к расчету шумов молекулярного пучка в автоколебательном режиме строго не доказана\*. Но тем не менее, как нам представляется, сделанные с ее помощью оценки ширины линии правильно определяют порядок величины, тем более, что они близки к оценкам [4] и совпадают с [3].

---

\* Именно поэтому найденный результат для ширины линии молекулярного генератора имеет оценочный характер.

2. Уравнения пучкового генератора и усилителя с учетом флуктуаций запишем в виде [2, 4, 5]

$$\dot{P} + \frac{2}{\tau_0} \dot{P} + \left( \omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau_0^2} \right) P = - \frac{2\omega_{21}}{\hbar} |d_{12}|^2 A_s N, \quad (1.a)$$

$$\dot{N} + \frac{1}{\tau_0} (N - N_0) = \frac{2}{\hbar\omega_{21}} A_s \left( \dot{P} + \frac{1}{\tau_0} P \right) + \varepsilon_n(t), \quad (1.б)$$

$$\ddot{A}_s + \frac{\omega_s}{Q_s} \dot{A}_s + \omega_s^2 A_s = -4\pi\chi\dot{P} + \xi_T(t) + \zeta_n(t), \quad (1.в)$$

$$\chi = \frac{V_n}{\int E_s^2 dV}. \quad (1.г)$$

Случайные функции в уравнениях (1.б), (1.в)  $\varepsilon_n(t)$ ,  $\xi_T(t)$ ,  $\zeta_n(t)$  описывают соответственно дробовой эффект потока молекул, тепловое электромагнитное излучение стенок резонатора и шумы пучка (спонтанное излучение). Как показано в [5,6], дробовой эффект не дает заметного вклада в интересующие нас величины и на этом основании функцией  $\varepsilon_n(t)$  ниже будем пренебрегать.

Для дальнейшего нам потребуются спектральные характеристики процессов  $\xi_T(t)$  и  $\zeta_n(t)$ . Спектральная плотность мощности функции  $\xi_T(t)$  определена в [5]. В наших обозначениях она запишется в виде

$$\overline{\xi_T^2}(\omega) = 8 \frac{\chi\omega_{21}^3}{V_n Q_s} \Theta(\omega_s, T), \quad (2)$$

где

$$\Theta(\omega_s, T) = \frac{\hbar\omega_s}{2} + \frac{\hbar\omega_s}{\exp(\hbar\omega_s/kT) - 1},$$

$T$  — температура стенок резонатора. Аналогичная величина для  $\zeta_n(t)$  определяется ниже.

3. Определим спектр мощности случайной функции  $\zeta_n(t)$ . Предположим, что на двухуровневую систему действует приложенная извне сила

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t) = \frac{A_0}{2} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}), \quad (3)$$

которая создает средний отклик системы  $\bar{Q}$ , так что энергия взаимодействия среды и поля равна

$$V = A(t) \bar{Q}. \quad (4)$$

С точностью до первого порядка теории возмущений отклик среды запишется в виде [7]

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} (\alpha A_0 e^{-i\omega t} + \alpha^* A_0 e^{i\omega t}), \quad (5)$$

где  $\alpha = \alpha' - i\alpha''$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий систему.

Тогда спектральная плотность мощности  $\overline{Q^2(\omega)}$  флуктуаций величины  $Q$  выразится через коэффициент  $\alpha$  следующей формулой [1].

$$\overline{Q^2(\omega)} = \frac{2\alpha''(\omega)}{\pi\omega} \left[ \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT_{\text{эфф}}) - 1} \right]. \quad (6)$$

В (6) эффективная температура двухуровневой среды определяется из соотношения

$$\frac{N_+}{N_-} = \exp(-\hbar\omega/kT_{\text{эфф}}), \quad (7)$$

где  $N_+$  и  $N_-$  — соответственно число частиц на верхнем и нижнем уровнях системы. Выражение (6) пригодно при любом распределении  $N_+$  и  $N_-$ .

Для пучковых квантовых устройств в предположениях, принятых при выводе системы (1.а)—(1.в), энергия взаимодействия пучка с полем резонатора равна

$$V = -PV_{\text{н}}A_s. \quad (8)$$

Сравнивая (8) с (4), находим

$$\overline{Q} = -PV_{\text{н}}. \quad (9)$$

Таким образом, если считать поле резонатора  $A_s$  вынуждающей силой, то откликом пучка на эту силу является величина, пропорциональная поляризации молекул.

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  определим из уравнения (1.а). Задавая поле  $A_s$  в виде (3), получаем

$$P = P_1 \cos(\omega t) + P_2 \sin(\omega t),$$

$$P_1 = -2\omega_{21}d_{12}^2NA_0\hbar^{-1} \left[ (\omega_{21}^2 - \omega^2) + \frac{1}{\tau_0^2} \right] \left\{ \left[ (\omega_{21}^2 - \omega^2) + \frac{1}{\tau_0^2} \right]^2 + \frac{4\omega^2}{\tau_0^2} \right\}^{-1}, \quad (10)$$

$$P_2 = -4\omega\omega_{21}d_{12}^2NA_0\hbar^{-1}\tau_0^{-1} \left\{ \left[ (\omega_{21}^2 - \omega^2) + \frac{1}{\tau_0^2} \right]^2 + \frac{4\omega^2}{\tau_0^2} \right\}^{-1}.$$

Сопоставляя (9) и (10) с (5), находим величину  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{P_1 + iP_2}{A_0} V_{\text{н}}. \quad (11)$$

Ниже нам понадобится только мнимая часть (11). С учетом (10) имеем

$$\alpha''(\omega) = -\frac{V_{\text{н}}\eta}{\pi Q_s \tau_0^2} \omega\omega_{21} \frac{N}{N_0} \left\{ \frac{4\omega^2}{\tau_0^2} + \left[ (\omega_{21}^2 - \omega^2) + \frac{1}{\tau_0^2} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (12)$$

где  $\eta = 4\pi Q_s N_0 d_{12}^2 \tau_0 / \hbar$  — параметр возбуждения.

Линейность отклика (5) предполагает, что

$$N/N_0 \simeq 1. \quad (13)$$

Подставим равенства (9), (12) в соотношение (6). В результате получим выражение для спектра мощности флуктуаций поляризации:

$$\overline{P^2(\omega)} = \frac{2\tau_0\omega_{21}N/N_0}{\pi^2 Q_s \tau_0^2 V_{\text{н}}} \left\{ \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT_{\text{эфф}}) - 1} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left[ (\omega_{21}^2 - \omega^2) + \frac{1}{\tau_0^2} \right]^2 + \frac{4\omega^2}{\tau_0^2} \right\}^{-1}. \quad (14)$$

Проведенное рассмотрение показывает, что поляризацию молекул можно представить в виде суммы динамической поляризации и эквивалентной фиктивной флуктуационной силы поляризации  $P_{\text{фл}}$ , спектр мощности которой определен формулой (14). Подразумевая в дальнейшем под  $P$  в системе (1.а)—(1.в) динамическую поляризацию, приходим к искомому соотношению

$$\zeta_n(t) = -4\pi\chi\ddot{P}_{\text{фл}}(t). \quad (15)$$

Спектр мощности  $\zeta_n(t)$  выразится согласно (14), (15) в виде

$$\overline{\zeta_n^2(\omega)} = 32\chi^2\eta\omega_{21}^5 \frac{N}{N_0} Q_s^{-1} \tau_0^{-2} V_n^{-1} \times \left\{ \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega \left/ \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_{\text{эфф}}}\right) - 1 \right] \right\} \left\{ \left[ (\omega_{21}^2 - \omega^2) + \frac{1}{\tau_0^2} \right]^2 + \frac{4\omega^2}{\tau_0^2} \right\}^{-1}. \quad (16)$$

4. Перейдем к отысканию флуктуаций лазера. В этой заметке мы ограничимся вычислением энергии шумов, запасенной в контуре лазера. Нетрудно видеть, что величина шумов в контуре является достаточно общей характеристикой флуктуаций усилителя. Такие характеристики, как шум-фактор, приведенная ко входу температура шумов и ряд других, часто используемых в практике различных усилителей, с точностью до коэффициента (зависящего от конструкции) определяются спектральной энергией шумов в контуре.

Решение системы (1.а)—(1.в) в усилительном режиме проведем известным методом Фурье. С этой целью введем в рассмотрение фурье-компоненты  $A_s(\omega)$ ,  $P(\omega)$ ,  $\xi_T(\omega)$  и  $\zeta_n(\omega)$ . Подставляя затем выражения для этих величин в систему (1.а)—(1.в), получаем

$$A_s(\omega) = [\xi_T(\omega) + \zeta_n(\omega)] \left\{ \omega_s^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_s\omega}{Q_s} + \left[ 4\pi\chi\eta\omega^2\omega_{21}/2\pi Q_s\tau_0 \left( \omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2} + i\frac{2\omega}{\tau_0} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (17)$$

При выводе (17) предполагалось выполненным равенство

$$\omega_{21} = \omega_s.$$

Спектр мощности  $A_s(t)$  определим для двух предельных случаев:

1) добротность линии  $Q_L = 2/\omega_{21}\tau_0$  много больше добротности резонатора  $Q_s$ ;

2) добротность линии  $Q_L$  много меньше добротности контура  $Q_s$ . Первый случай характерен для пучкового лазера; второй описывает ситуацию, имеющую место в парамагнитном усилителе на твердом теле [2].

Опуская вычисления, получим

$$\overline{A_s^2(\omega)} = \frac{8Q_s\chi}{V_n\omega_{21}} \frac{\Theta(\omega_s, T)}{[1 + Q_s^2 Q_L^{-2} (\omega_{21} - \omega)^2 \tau_0^2]} + \frac{8Q_s\chi\eta\chi}{\omega_{21}V_n} \frac{[(2 - \gamma\eta)\Theta(\omega_s, T) - \Theta(\omega_s, T_{\text{эфф}})]}{[(1 - \chi\eta)^2 + (\omega_{21} - \omega)^2 \tau_0^2]}. \quad (18)$$

для случая  $Q_n \gg Q_s$  и

$$A_s^2(\omega) = \frac{8Q_s\chi}{\omega_{21}V_\pi} [\Theta(\omega_s, T) - \chi\eta\Theta(\omega_s, T_{эфф})] [(1 - \chi\eta)^2 + \frac{Q_s^2}{Q_n^2}(\omega_{21} - \omega)^2 T_2^2]^{-1}, \quad (19)$$

если  $Q_n \ll Q_s$ .

В лазере на твердом теле роль  $\tau_0$  выполняет поперечное время релаксации  $T_2$  (см., например, [2]). Поэтому во всех выражениях, написанных для величины шумов парамагнитного усилителя, мы будем пользоваться обозначением времени релаксации через  $T_2$  вместо  $\tau_0$ .

Спектральное распределение запасенной энергии шумов в резонаторе найдем по формуле

$$W(\omega) = \frac{A_s^2(\omega)}{4\pi} \int_{V_p} E_s^2 dV.$$

Подставляя сюда (19), (18), соответственно получаем

$$W(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{Q_s}{\omega_{21}} \Theta(\omega_s, T) [1 + Q_s^2 Q_n^{-2} (\omega_{21} - \omega)^2 \tau_0^2]^{-1} + \frac{2}{\pi} \frac{Q_s}{\omega_{21}} \chi\eta \frac{(2 - \chi\eta)\Theta(\omega_s, T) - \Theta(\omega_s, T_{эфф})}{(1 - \chi\eta)^2 + (\omega_{21} - \omega)^2 \tau_0^2} \quad (20)$$

для пучкового лазера и

$$W(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{Q_s}{\omega_{21}} \frac{\Theta(\omega_s, T) - \chi\eta\Theta(\omega_s, T_{эфф})}{(1 - \chi\eta)^2 + Q_s^2 Q_n^{-2} (\omega_{21} - \omega)^2 T_2^2} \quad (21)$$

для парамагнитного лазера на твердом теле.

Представляет интерес сравнить выражения (20) и (21) с аналогичными им (50.46), (50.47) [2], найденными из решения полной квантовомеханической системы уравнений\*. Замечая, что фигурирующая в (50.46), (50.47) [2] величина  $N/4R_3^0$ , согласно (50.10) [2], равна  $-\Theta(\omega, T_{эфф})$ , убеждаемся в полном совпадении (20), (21) с (50.46), (50.47) [2].

Таким образом, применение обобщенной теоремы Каллена—Велтона для расчета шумов лазера приводит к результатам, совпадающим с результатами строгого анализа полной квантовомеханической системы уравнений [2]. Это свидетельствует о том, что в лазерах различного типа выполняются те предложения (некогерентность шумового излучения и ряд других), которые были сделаны в [1] при обобщении формулы Каллена—Велтона.

5. В последней части, используя результат раздела 3, вычислим предельную ширину спектральной линии колебания молекулярного генератора.

Решение системы (1.1)—(1.3) в автоколебательном режиме ( $\chi\eta > 1$  [3,5]) ищем в виде [5]

$$A(t) = A_0^c [1 + \alpha(t)] \cos(\omega_s t + \vartheta(t)), \quad (22)$$

\* Имеется в виду полная система уравнений для средних и среднеквадратичных динамических величин [2].

$$P(t) = P_0^c [1 + \beta(t)] \cos [\omega_r t + \Phi_c + \varphi(t)],$$

где  $A_0^c, P_0^c$  — соответственно стационарные амплитуды поля и поляризации, а  $\Phi_c$  — стационарная разность фаз. Воздействие на систему флуктуирующей силы

$$f(t) = \xi_T(t) + \zeta_n(t) \tag{23}$$

приводит к появлению амплитудных и фазовых флуктуаций  $\alpha, \beta, \vartheta, \varphi$ .

Подставим (22) в уравнение (1). Применяя метод Ван-дер-Поля и учитывая малость флуктуаций, приходим к следующей системе [5]:

$$\nu = \dot{\vartheta}(t) = -\frac{\mu_1 \omega_{21}}{2} \Phi - f_{\parallel}, \tag{24}$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) \omega_{21} \Phi - f_{\parallel}.$$

Здесь обозначено

$$\mu_1 = \frac{1}{Q_s}; \quad \mu_2 = \frac{1}{Q_L}; \quad \Phi = \vartheta(t) - \varphi(t); \tag{25}$$

$$f_{\parallel} = \frac{1}{2A_0^c \omega_{21}} f(t) \cos [\omega_r t + \vartheta(t)].$$

Поскольку нас в дальнейшем интересуют только флуктуации частоты генератора  $\nu$ , то остальные уравнения, связывающие амплитудные флуктуации с фазовыми, мы опускаем. Заметим лишь, что выпадение амплитудных флуктуаций  $\alpha, \beta$  из уравнений (24) возможно при условии точной настройки частоты резонатора  $\omega_s$  на частоту молекулярного перехода  $\omega_{21}$  [5]. А так как на практике всегда стремятся соблюсти это условие, то и мы предполагаем его выполненным.

Решение (24) находится элементарно. Поэтому сразу выпишем получающееся выражение для спектра мощности флуктуаций частоты:

$$\overline{\nu^2(\omega)} = \frac{4\omega^2 + \mu_2^2 \omega_{21}^2}{4\omega^2 + \mu_1^2 \omega_{21}^2} \overline{f_{\parallel}^2(\omega)}. \tag{26}$$

Спектральную мощность  $\overline{f_{\parallel}^2(\omega)}$  силы  $f_{\parallel}$  ищем методом Фурье. Учитывая, что процессы  $\zeta_n(t)$  и  $\xi_T(t)$  не коррелированы, получаем

$$\begin{aligned} \overline{f_{\parallel}^2(\omega)} = & \frac{1}{4(A_0^c)^2 \omega_{21}^2} [\overline{\zeta_n^2(\omega_r + \omega)} + \overline{\xi_T^2(\omega_r + \omega)} + \\ & + \overline{\zeta_n^2(\omega_r - \omega)} + \overline{\xi_T^2(\omega_r - \omega)}]. \end{aligned} \tag{27}$$

Подставив (2), (16), (27) в (26) и раскрыв значение стационарной амплитуды и частоты [5]

$$A_0^c = \frac{\hbar}{d_{12} \tau_0} \sqrt{(\chi\eta - 1)}, \quad \omega_r = \omega_{21},$$

приведем (26) к окончательному виду:

$$\overline{\nu^2(\omega)} = \frac{4\chi d_{12}^2 \tau_0^2 \omega_{21}}{V_n Q_s \hbar^2 (\chi\eta - 1)} \frac{4\omega^2 + \mu_2^2 \omega_{21}^2}{4\omega^2 + \mu_1^2 \omega_{21}^2} \left[ \Theta(\omega_r, T) - \right.$$



$$- \chi\eta \frac{N}{N_0} \frac{\Theta(\omega_r, T_{\text{эфф}})}{1 + \omega^2 \tau_0^2} \Big]. \quad (28)$$

Ширина спектральной линии колебания генератора определяется следующей формулой [8]:

$$\Delta F = \frac{\pi}{4} \sqrt{\nu^2(0)} \quad (\text{герц}). \quad (29)$$

Подставляя сюда выражение (28), находим ширину линии молекулярного генератора:

$$\Delta F = \frac{2\pi\chi d_{12}^2 \tau_0 \mu_2}{V_n \hbar^2 (\chi\eta - 1) \mu_1} \left[ \Theta(\omega_r, T) - \chi\eta \frac{N}{N_0} \Theta(\omega_r, T_{\text{эфф}}) \right]. \quad (30)$$

До сих пор мы связывали тепловой шум с полными потерями резонатора ( $Q_s$  — нагруженная добротность контура). Если в квантовом устройстве применяется необратимый элемент (ферритовый циркулятор), то необходимо относить тепловой шум к собственной добротности контура  $Q_0$ . Легко проследить, что в этом случае первый член в квадратных скобках (30) умножится на величину  $Q_s/Q_0$  (см. также [3]).

Представим (30) в более компактном виде. С этой целью введем в рассмотрение мощность генератора  $P_r$  [5].

С учетом этого, а также (7), формула (30) запишется в виде

$$\Delta F = \frac{Q_s}{Q_n} \frac{1}{P_r 2\tau_0^2} \left[ \frac{Q_s}{Q_0} \Theta(\omega_r, T) + \chi\eta \frac{\hbar\omega_r}{2} \right], \quad (31)$$

где  $Q_n$  — внешняя добротность, обусловленная нагрузкой. Происхождение обоих членов (31) очевидно: первый член обусловлен тепловыми флуктуациями контура, второй связан с шумами пучка (спонтанным излучением). Их отношение

$$\frac{\Delta F_{\text{сп}}}{\Delta F_{\text{тепл}}} = \frac{Q_0}{Q_s} \frac{\chi\eta}{2} \frac{\hbar\omega_r}{\Theta(\omega_r, T)}. \quad (32)$$

При охлаждении контура ( $kT \ll \hbar\omega_r$ ) фактор

$$\frac{\hbar\omega_r}{\Theta(\omega_r, T)} \simeq 1$$

и «тепловая» ширина линии молекулярного генератора становится сравнимой с шириной линии вследствие спонтанного излучения.

«Тепловая» ширина линии может быть еще уменьшена соответствующим выбором отношения  $Q_0/Q_s$ . Таким образом, предельная ширина спектральной линии колебания молекулярного генератора

$$\Delta F_{\text{пред}} = \Delta F_{\text{сп}} = \frac{Q_s}{4Q_n} \frac{\chi\eta \hbar\omega_r}{P_r \tau_0^2}. \quad (33)$$

Введем вероятность спонтанного излучения возбужденной молекулы в резонаторе [9,10]:

$$\Gamma_0 = 8\pi Q_s d_{12}^2 / \hbar V_p, \quad (34)$$

где  $V_p$  — объем резонатора. С помощью (34) выражение (33) преобразуется к виду

$$\Delta F_{\text{пред}} = \frac{Q_s}{8Q_H} \frac{\Gamma_0 \hbar \omega_{21} N_0 V_{\text{п}}}{P_r \tau_0}. \quad (35)$$

В пределе при сильном возбуждении  $\chi\eta \gg 1$  (практически достаточно  $\chi\eta \sim 5$ ) (35) можно упростить. Используя приведенное в [5] выражение для мощности  $P_r$  и  $\chi\eta$ , в этом случае получаем

$$\Delta F_{\text{пред}} = \frac{\Gamma_0}{4} (\text{герц}). \quad (36)$$

Выражение (35) совпадает\* с аналогичным ему, найденным в работе [3].

В монографии [4] для ширины линии вследствие квантовых флуктуаций (спонтанного излучения) дано следующее оценочное выражение:

$$\Delta F = \Gamma_0 [(\chi\eta)^{-1/2} + (\chi\eta)^{-1}].$$

Сравнивая его с нашим (36), видим, что для реально существующих генераторов ( $\chi\eta$  — порядка нескольких единиц) они совпадают по порядку величины.

Итак, все вышеупомянутые методы расчета (оценок) квантовых флуктуаций дают для ширины линии молекулярного генератора (обусловленной спонтанным излучением) примерно одно и то же значение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, В. Б. Цареградский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 508 (1961).
2. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
3. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 377 (1959).
4. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
5. В. Б. Цареградский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1075 (1964).
6. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
7. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1959.
8. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).
9. E. M. Purcell, Phys. Rev., 69, 681 (1946).
10. Ф. В. Бункин, А. Н. Ораевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 181 (1959).
11. Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 493 (1961).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
18 февраля 1966 г.

#### ON SOME APPLICATIONS OF GENERALIZED DISSIPATION THEOREM TO CALCULATION OF FLUCTUATION CHARACTERISTICS OF QUANTUM SYSTEMS

V. B. Tsaregradskiy

The generalized dissipation theorem is applied to fluctuations in quantum systems under amplification-generation regimes. In the first case the spectral noise energy in a resonator of quantum amplifier is found and the validity conditions are specified of the generalized Kallen—Velton formula. In the second case the limit width of spectral line oscillation of the molecular generator is estimated. The results obtained are compared with the earlier known ones.

\* Имеющееся несущественное различие обусловлено использованием в [3] иной формулы для связи ширины линии со спектром мощности флуктуаций частоты.

УДК 530.145:539.2.014

## ИЗЛУЧЕНИЕ МОЛЕКУЛЫ В РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТИ

В. М. Генкин, В. Н. Генкин

В пренебрежении эффектами запаздывания решена задача о релаксации двухуровневой молекулы в резонансной среде с большой плотностью для случая, когда размеры системы велики по сравнению с длиной волны.

В последнее время довольно интенсивно обсуждается вопрос о коллективных эффектах при взаимодействии двухуровневых молекул через поле излучения [1-7]. В частности, рассмотрен вопрос об излучении возбужденной молекулы в присутствии невозбужденных при размерах системы  $R$ , малых по сравнению с длиной волны  $\lambda$  [7]. Эта задача решена также для случая молекул, расположенных друг от друга на расстояниях  $a \gg \lambda$  [6]. Значительный интерес для оптики представляет случай  $R \gg \lambda \gg a$ , который и рассматривается ниже.

Гамильтониан системы молекул и поля может быть записан в виде [7]

$$\hat{H} = \sum_j \hat{H}_j + \sum_\lambda \hat{H}_\lambda + \hat{V}, \quad (1)$$

$\hat{H}_j$  — оператор энергии  $j$ -ой молекулы,  $E^+$  и  $E^-$  — его собственные значения соответственно для возбужденного и невозбужденного состояния,  $E^+ - E^- = \hbar\omega_0$ ;  $\hat{H}_\lambda$  — оператор энергии осциллятора поля с собственными значениями  $\hbar\omega_\lambda \left( n_\lambda + \frac{1}{2} \right)$ , где  $n_\lambda$  — число квантов поля,  $\hat{V}$  описывает взаимодействие молекул и поля. В дипольном приближении

$$\hat{V} = -\frac{1}{c} \sum_j \hat{A}_j \hat{d}_j, \quad (2)$$

где  $\hat{A}_j$  — оператор вектор-потенциала в точке расположения  $j$ -ой молекулы,  $\hat{d}_j$  — оператор ее дипольного момента. Сразу же отметим, что матричные элементы  $\hat{V}$  отличаются от нуля лишь для переходов с изменением числа квантов на единицу [7, 8]. Непосредственным диполь-дипольным взаимодействием между молекулами мы далее пренебрегаем.

Собственные состояния гамильтониана  $\hat{H} - \hat{V}$  будем описывать, указывая состояние каждой молекулы (+ или -) и число квантов в поле. Состояние, когда возбуждена 1-ая молекула, а в поле нет квантов (начальное состояние при  $t = 0$ ) имеет вид

$$b_1 = b_{+- \dots 0_\lambda}. \quad (3)$$

Если принимать во внимание только переходы, при которых энергия примерно сохраняется [7, 8], то при начальном условии (3) возможен переход системы в состояния

$$b_j = b_{- \dots + j - \dots \alpha_\lambda} \quad (4)$$

(возбуждена только  $j$ -ая молекула) и в состояния

$$b_\lambda = b_{- \dots - 1_\lambda} \quad (4a)$$

(все молекулы находятся на нижнем уровне, но в поле есть один квант с волновым вектором  $k_\lambda$ ).

Формальное решение уравнения Шредингера, с гамильтонианом (1) при начальном условии (3) может быть записано в виде [8]

$$b_1(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i\hbar^{-1}(E_1 - E)t\}}{E - E_1 + i\hbar\Gamma_{11}/2} dE; \quad (5)$$

$$b_{j(\lambda)}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{j(\lambda)1}(E)\zeta(E - E_{j(\lambda)})\exp\{i\hbar^{-1}(E_{j(\lambda)} - E)t\}dE}{E - E_1 + i\hbar\Gamma_{11}/2}, \quad (5a)$$

где  $E_{j(\lambda)}$  — энергия в состоянии  $b_{j(\lambda)}$ , а

$$\zeta(x) = \frac{P}{x} - i\pi\delta(x). \quad (6)$$

В свою очередь  $U_{j(\lambda)1}$  и  $\Gamma_{11}$  удовлетворяют системе уравнений

$$U_{\lambda|1} = V_{\lambda|1} + \sum_{l \neq 1} V_{\lambda|l}\zeta(E - E_j)U_{l|1}, \quad (7)$$

$$U_{j|1} = \sum_{\lambda} V_{j|\lambda}\zeta(E - E_\lambda)U_{\lambda|1}, \quad (7a)$$

$$\frac{1}{2} \hbar\Gamma_{11} = i \sum_{\lambda} V_{1|\lambda}\zeta(E - E_\lambda)U_{\lambda|1}. \quad (7b)$$

Исключая далее  $U_{\lambda|1}$  с помощью (7), (7a), находим

$$U_{j|1} = \sum_{j' \neq 1} \sum_{\lambda} V_{j|\lambda}\zeta(E - E_\lambda)V_{\lambda|j'}\zeta(E - E_{j'})U_{j'|1} = \sum_{\lambda} V_{j|\lambda}\zeta(E - E_\lambda)V_{\lambda|0}. \quad (8)$$

Остановимся несколько подробнее на двойной сумме в (8):

$$J_{jj'} = \sum_{\lambda} V_{j|\lambda}\zeta(E - E_\lambda)V_{\lambda|j'} = P \sum_{\lambda} \frac{V_{j|\lambda}V_{\lambda|j'}}{E - E_\lambda} - i\pi \sum_{\lambda} V_{j|\lambda}V_{\lambda|j'}\delta(E - E_\lambda). \quad (9)$$

Можно убедиться, что первое слагаемое в правой части (9) описывает консервативные процессы в системе молекул [7] и приводит в однородной\* системе (где сдвиг частот для всех молекул одинаков) в конечном итоге лишь к сдвигу частоты. Этот вывод справедлив для систем достаточно малых размеров, когда можно пренебречь временем запаздывания на размерах системы по сравнению с временами переходных

\* Заметим, что при хаотическом расположении молекул сдвиг частоты для различных молекул, вообще говоря, разный, и по существу предположение об однородности системы сводится к пренебрежению разницей в отбеге по сравнению с уширением, т. е. величинами  $\lambda/a$  по сравнению с  $N^{1/8}$ .

процессов\*. Далее мы опустим соответствующее слагаемое, считая, что оно учтено в  $\omega_0$ . Кроме того, предположим для простоты, что молекулы являются изотропными излучателями [1]. Тогда

$$V_{j|k} = V_{|k} \exp(i\mathbf{k}\lambda\mathbf{r}_j), \quad (10)$$

и для (9) получим

$$J_{j|j'} = -\frac{(i\hbar\gamma_0) \sin k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|}{2k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|}, \quad k = \frac{E}{\hbar c}, \quad (11)$$

где  $\gamma_0$  — естественная ширина линии излучения изолированной молекулы. Вводя плотность распределения молекул  $n$  и переходя от суммирования к интегрированию, из (8) при учете (11) получим при условии, если возбужденная молекула находится в центре сферы радиуса  $R^{**}$ , что

$$y(x) - \delta \int_0^R y(s) \sin(ks) \sin(kx) ds = B \sin(kx). \quad (12)$$

Здесь

$$r_j = x; \quad r_j U_{j|j} = y(x); \quad B = -i\hbar\gamma_0/2k; \quad \delta = -\frac{2\pi i}{k^2} \zeta(E - E_1) \hbar\gamma_0 n.$$

Решение уравнения (12) имеет вид

$$U(x) = -\frac{i\hbar\gamma_0}{2} \frac{E - E_1}{E - E_1 + i\hbar\Gamma/2} \frac{\sin(kx)}{kx}, \quad (13)$$

где  $\Gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{\lambda} \lambda^2 n \gamma_0 f$  — коллективная ширина линии излучения, и

$$f = 1 - \frac{\sin(2kR)}{2kR}. \quad (14)$$

В предельном случае малых  $R$  полученный результат совпадает с уширением, найденным в [7]: ширина линии пропорциональна полному числу молекул  $N$ . В случае  $R \gg \lambda$  ( $f \approx 1$ ) коллективная ширина линии есть  $\gamma_0 N^{1/3}$ , что качественно совпадает с результатом работы [2].

Для зависимости  $b_1$ ,  $b_j$  от времени имеем

$$b_1(t) = \frac{\Gamma}{\Gamma + \gamma_0} + \frac{\gamma_0}{\Gamma + \gamma_0} \exp\left\{-\frac{\Gamma + \gamma_0}{2} t\right\}, \quad (15)$$

$$b_j(t) = \frac{\sin kx}{kx} \frac{\gamma_0}{\Gamma + \gamma_0} \left( \exp\left\{-\frac{\Gamma + \gamma_0}{2} t\right\} - 1 \right). \quad (15a)$$

Вероятность появления фотона во времени

$$\sum_{\lambda} |b_{\lambda}(t)|^2 = \frac{\gamma_0}{\Gamma + \gamma_0} (1 - \exp\{-(\Gamma + \gamma_0)t\}). \quad (16)$$

\* Это предположение в системе больших размеров, с которой имеют дело на эксперименте, сводится к пренебрежению влиянием на затухание всех молекул, расстояние от которых до возбужденной молекулы велико по сравнению с  $c\Gamma^{-1}$ , где  $\Gamma^{-1}$  — время затухания,  $c$  — скорость света.

\*\* В системе больших по сравнению с  $R$  размеров это соответствует пренебрежению поверхностными эффектами.

Из (16) видно, что имеет место «пленение» излучения (своеобразное уменьшение квантового выхода) при одновременном укорочении времени свечения.

На эксперименте чаще всего приходится иметь дело с большими системами. Учитывая, что затухание данной молекулы определяется молекулами, расположенными в сфере радиуса  $R = c\Gamma^{-1}$ , получим

$$\Gamma = (\lambda^2 n \gamma_0 c / 2\pi)^{1/2}. \quad (17)$$

Выше всюду пренебрегалось столкновениями молекул, поскольку среднее время между столкновениями в области концентраций, где рассмотрение справедливо ( $10^{22} \text{ см}^{-3} \gg n \gg 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , верхняя граница определяется из условия  $-\Gamma \ll \omega_0$ ), много больше  $\Gamma^{-1}$ . Отметим, что в условиях [9, 10], когда максимальная концентрация соответствует границе применимости изложенной теории, экспериментальные значения ширины линий оказались близкими по порядку величины к значениям, следующим из формулы (17).

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить В. М. Файна за внимание к работе и помощь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Подгорецкий, И. И. Ройзен, ЖЭТФ, **39**, 1473 (1960).
2. Ч. Музикарж, ЖЭТФ, **41**, 1168 (1961).
3. М. К. F. Wong, Proc. Phys. Soc., **85**, 723 (1965).
4. А. П. Казанцев, В. С. Смирнов, ЖЭТФ, **46**, 182 (1964).
5. Ю. А. Вдовин, В. М. Галицкий, ЖЭТФ, **48**, 1352 (1965).
6. Ю. А. Вдовин, ДАН СССР, **163**, 1344 (1965).
7. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
8. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.
9. J. Tomiser, Acta Phys. Austr., **8**, 198 (1953); **8**, 276 (1954); **9**, 18 (1954); **8**, 323 (1954).
10. H. Moser and H. Schulz, Ann. Physik, **4**, 273 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
30 ноября 1965 г.

#### MOLECULAR RADIATION IN RESONANCE MEDIUM OF LARGE DENSITY

V. M. Genkin, V. N. Genkin

The problem of the relaxation of the two-level molecule in a large density resonance medium is solved for the case when dimensions of the system are great in comparison with the wave length. The effects of a delay are neglected.

УДК 621.371.11

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН БЕСКОНЕЧНЫМ ПАКЕТОМ ИМПЕДАНСНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ***В. В. Марцафей*

Рассматривается электромагнитное поле, создаваемое бесконечным пакетом импедансных полуплоскостей, возбужденных синфазными линейными источниками. Пластины предполагаются тонкими, а «физический импеданс» на различных сторонах пластин — одинаковым.

В настоящее время иногда возникает необходимость получения квазиплоских полей в ближней зоне. Так при создании лабораторной установки для измерения диаграмм направленности антенн применяют преобразователь сферической волны в плоскую — коллиматор. Однако использование таких коллиматоров встречается с большими трудностями. В случае линзовых коллиматоров эти трудности порождены значительными отклонениями поля за линзой от плоского, связанными с отражением от поверхности линзы, и, что весьма существенно, большой неоднородностью материала, применяемого для изготовления линз (пенополистирола). При изготовлении линз из однородных материалов типа полистирола, органического стекла и др., весьма остро стоит вопрос об их просветлении, так как применение линз без просветления невозможно из-за значительных переотражений.

В связи с этим возникает необходимость оценки возможностей различных решеток. Совершенно ясно, что однородность формируемого решеткой поля будет зависеть от распределения поля в излучателях. Оптимальным вариантом было бы возбуждение волны ТЕМ. Однако в реальных условиях формирование волны ТЕМ в решетках связано с большими трудностями.

При формировании поля излучения с помощью волноводных волн возникают осцилляции амплитуд, связанные со значительным изменением амплитуд поля на раскрыве. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением  $H$ -волн в решетке плоских волноводов. Не останавливаясь на вопросах формирования ближнего поля решеткой с идеально проводящими стенками, отметим следующие три пути улучшения распределения поля на раскрыве (в смысле приближения его к равномерному):

- 1) введение тонкого диэлектрика или магнетодиэлектрика;
- 2) формирование в волноводах замедленных волн типа поверхностных (для  $H$ -волн это возможно только при значительной толщине диэлектрика, накладываемого на пластины [1]);
- 3) применение поглощающих стенок.

В данной работе мы будем интересоваться полями, формируемыми с помощью тонких диэлектриков и поглощающих стенок, рассмотрев задачи об излучении волн бесконечным пакетом импедансных волноводов со стенками нулевой толщины\*.

\* Подобная идеализация стенок оправдана тем, что наиболее целесообразно применять разработанные в последнее время тонкие поглотители или краски (см. [2]).

Рассмотрим излучение электромагнитных волн бесконечным пакетом равноудаленных импедансных полуплоскостей, возбужденных синфазными линейными токами одинаковой амплитуды (см. рис. 1). Пред-

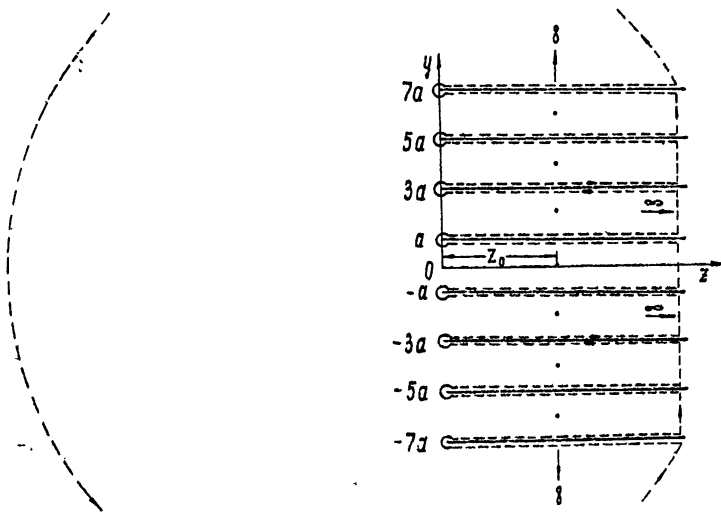


Рис. 1.

полагается, что толщина пластин исчезающе мала и на них заданы граничные условия

$$\frac{E_x}{H_z} \Big|_{y=(2m-1)a+0} = Z; \quad \frac{E_x}{H_z} \Big|_{y=(2m-1)a-0} = -Z \quad (m = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Легко установить, что при рассмотрении решетки с тонким слоем магнитодиэлектрика на пластинах импеданс  $Z$  является мнимым. В случае же применения сильно поглощающего материала можно в первом приближении считать  $Z$  чисто активным.

Вводя электрический вектор Герца

$$\bar{\Pi}_e = \varphi \bar{x}^0$$

и считая, что зависимость от времени задана в виде  $e^{-i\omega t}$ , получаем

$$H_y = -i\omega\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad H_z = i\omega\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad H_x = 0; \quad E_x = k^2 \varphi; \quad E_y = E_z = 0. \quad (2)$$

При этом граничные условия (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=(2m-1)a+0} &= p\varphi[(2m-1)a+0; z]; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=(2m-1)a-0} &= -p\varphi[(2m-1)a-0; z], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p = \omega\mu_0/iZ$ . Применяя к функциям  $\varphi(y; z)$  и  $H_0^{(1)}[k\{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2}]$  формулу Грина для плоской области, ограниченной контуром  $L$  (рис. 1), получим



$$\begin{aligned} \varphi(y; z) = & \frac{p}{2i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(a, \zeta) H_0^{(1)} [k\{(y-(2m-1)a)^2 + \\ & + (z-\zeta)^2\}^{1/2}] d\zeta + \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} [k\{(y-2ma)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2}]. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе (4) были учтены а) условия на бесконечности (мы предполагаем, что  $\text{Im } k > c > 0$ ) и условия на ребре; б) условия симметрии

$$\begin{aligned} \varphi[(2m-1)a+0; \zeta] &= \varphi[(2m-1)a-0; \zeta]; \quad \partial\varphi[(2m-1)a+0; \zeta]/\partial\eta = \\ &= -\partial\varphi[(2m-1)a-0; \zeta]/\partial\eta; \end{aligned}$$

в) условия периодичности

$$\begin{aligned} \varphi[(2m-1)a; \zeta] &= \varphi[(2n-1)a; \zeta]; \quad \partial\varphi[(2m-1)a+0; \zeta]/\partial\eta = \\ &= \partial\varphi[(2n-1)a+0; \zeta]/\partial\eta. \end{aligned}$$

При выводе выражения (4) также предполагалось, что амплитуда тока численно равна  $k/\rho$ .

Применяя формулу суммирования Пуассона [3] и полагая в (4)  $y = a$ ,  $z > 0$ , получаем основное интегральное уравнение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \varphi(a, z) = & \frac{p}{2i} \int_0^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k[(2ma)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}) \varphi(a, \zeta) d\zeta + \\ & + \exp[ik|z-z_0|]/ka + \sum_{q=1}^{\infty} 2(-1)^q a^{-1}(k^2 - q^2\pi^2/a^2)^{-1/2} \times \\ & \times \exp(i|z-z_0|)(k^2 - q^2\pi^2/a^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что в случае бесконечного пакета идеально проводящих плоскостей получается интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k[(2ma)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}) \frac{\partial\varphi(a+0; \zeta)}{\partial\eta} d\zeta = \\ & = \frac{2}{i} [\exp(ik|z-z_0|)/ka + \sum_{q=1}^{\infty} 2(-1)^q a^{-1}(k^2 - q^2\pi^2/a^2)^{-1/2} \times \\ & \times \exp(i|z-z_0|)(k^2 - q^2\pi^2/a^2)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение уравнений этого типа дано в [4]; факторизация функций, необходимых для решения, произведена в [4] и [5].

Решение интегрального уравнения типа (5) дано в [6,7]. Из этих работ следует, что

$$\varphi(a, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-luz} \Phi(a) da, \quad (7)$$

где

$$\Phi(\alpha) = \frac{\psi_1(\alpha)}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \psi_2(u) G(u) du / (u-\alpha) \quad (\operatorname{Im} \alpha > 0);$$

$$\Phi(\alpha) = \psi_1(\alpha) \psi_2(\alpha) G(\alpha) + \frac{\psi_1(\alpha)}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \psi_2(u) G(u) \times \\ \times du / (u-\alpha) \quad (\operatorname{Im} \alpha < c);$$

$$G(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha z} [\exp(ik|z-z_0|)/ka + \sum_{q=1}^{\infty} 2(-1)^q a^{-1} (k^2 - q^2\pi^2/a^2)^{-1/2} \times \\ \times \exp(i|z-z_0|)(k^2 - q^2\pi^2/a^2)^{1/2}] dz;$$

$$K(\alpha) = \frac{p}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k[(2ma)^2 + z^2]^{1/2}) dz = -\frac{p}{\gamma} \frac{\operatorname{ch}(\gamma a)}{\operatorname{sh}(\gamma a)}; \\ 1 - K(\alpha) = 1/\psi_1(\alpha) \psi_2(\alpha) = [\gamma \operatorname{sh}(\gamma a) + p \operatorname{ch}(\gamma a)]/\gamma \operatorname{sh}(\gamma a), \\ \gamma = (a^2 - k^2)^{1/2}.$$

Отметим, что функция  $K(\alpha)$  не обращается в единицу при действительных значениях  $\alpha$ ; поэтому мы имеем дело с наиболее простым из рассмотренных в [6] случаев. Свойства приведенных выше функций исследовались в [6,7].

Выражая отношение (10) через бесконечные произведения [8], получим

$$\psi_1(\alpha) \psi_2(\alpha) = -a(k+\alpha)(k-\alpha) \prod_{n=1}^{\infty} \{[1 - (ka/\pi n)^2]^{1/2} + \\ + i\alpha a/\pi n\} \prod_{n=1}^{\infty} \{[1 - (ka/\pi n)^2]^{1/2} - i\alpha a/\pi n\} \{p \prod_{q=0}^{\infty} [(1 - [ka/\pi \mu_q]^2)^{1/2} + \\ + i\alpha a/\pi \mu_q] \prod_{q=0}^{\infty} [(1 - [ka/\pi \mu_q]^2)^{1/2} - i\alpha a/\pi \mu_q]\}^{-1},$$

где  $\mu_q$  связано с корнями  $\chi_q$  характеристического уравнения

$$\chi \operatorname{tg}(\chi a) = p \quad (12)$$

зависимостью  $\chi_q = \pi \mu_q/a$ . Для улучшения сходимости можно умножать и делить отдельные члены в (11) на  $\exp(i\alpha a/n\pi)$ .

Корни уравнения (12) табулированы в [9]. Для случая  $\lambda/2 < a < \lambda$  решение основного уравнения принимает вид

$$\varphi(a, z) \simeq \sum_{\xi=1}^{\infty} \operatorname{Res} \psi_2(\alpha_{\xi}) \psi_1(\alpha_{\xi}) O \Big|_{\operatorname{при} z_0 < z} [2\exp(i\alpha_{\xi}(z-z_0)) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times a^{-1} (1/(\alpha_\xi^2 - k^2) - 2/(\alpha_\xi^2 - \Gamma_1^2))_{\text{при } z_0 > z}^{-1} + \\
& + \sum_{\psi=1}^{\infty} (\text{Res } \psi_1(\alpha_\psi)) \psi_2(\alpha_\psi) \left\{ \sum_{\xi=1}^{\infty} \text{Res } \psi_2(\alpha_\xi) \frac{G(\alpha_\xi)}{\psi_2(\alpha_\psi)} \frac{i \exp(-i \alpha_\psi z)}{\alpha_\psi - \alpha_\xi} + \right. \\
& + O \Big|_{\text{при } z_0 > z} \left\{ (2/a) \exp[-i \alpha_\psi (z - z_0)] [2/(\alpha_\psi^2 - \Gamma_1^2) - \right. \\
& \left. - 1/(\alpha_\psi^2 - k^2)] \right\}_{\text{при } z_0 < z}^{-1} + \exp(ikz_0)/ka(\alpha_\psi - k) - \\
& - \frac{2}{a\Gamma_1} \exp(i\Gamma_1 z_0) \exp(-i \alpha_\psi z)/(\alpha_\psi - \Gamma_1) \Big\} - 2 \exp(i\Gamma_1 |z - z_0|) \times \\
& \quad \times \psi_1(\Gamma_1) \psi_2(\Gamma_1)/a\Gamma_1.
\end{aligned} \tag{13}$$

В (13)  $\Gamma_1 = (k^2 - \pi^2/a^2)^{1/2}$ ,  $\alpha_\psi$  — полюс функции  $\psi_1(\alpha)$ ,  $\alpha_\xi$  — полюс функции  $\psi_2(\alpha)$ .

Зная решение основного интегрального уравнения, поле излучения можно найти с помощью простых квадратур:

$$\begin{aligned}
\varphi(y, z) \simeq & \frac{p}{2i} \int_0^{\infty} \varphi(a, \zeta) \left\{ \frac{\exp[ik(\zeta - z)]}{ka} + \frac{2\cos(\pi y/a)}{a\Gamma_1} \times \right. \\
& \times \exp[-i(z - \zeta)\Gamma_1] \Big\} d\zeta + \frac{\exp[ik(z_0 - z)]}{ka} + \frac{2\cos(\pi y/a)}{a\Gamma_1} \times \\
& \times \exp[i(z_0 - z)\Gamma_1].
\end{aligned} \tag{14}$$

При записи (14) мы ограничились двумя членами в формуле суммирования Пуассона так как при  $\lambda/2 < a < \lambda$  остальные члены экспоненциально убывают. Окончательное выражение не приводится из-за его громоздкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, 2, изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, М., 1959.
2. Я. А. Шнейдерман, Зарубежная радиоэлектроника, № 4, 115 (1965).
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 1, ИЛ, М., 1958, гл. 4.
4. Б. Нобл, Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962.
5. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, изд. Сов. радио, М., 1953.
6. В. А. Фок, Матем. сб., 14 (56), 3 (1944).
7. Г. А. Гринберг, В. А. Фок, сб. Исследования по распространению радиоволн, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
8. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1960, гл. 11.
9. A. E. Heins, H. Feshbach, J. Math. Phys., 26, 143 (1947).

Одесский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию  
15 июня 1965 г.,  
после переработки  
14 марта 1966 г.

#### ELECTROMAGNETIC WAVE RADIATION BY AN INFINITE PACKET OF IMPEDANCE HALF-PLANES

V. V. Martsafey

An electromagnetic field is considered of an infinite packet of the impedance half-planes excited by the cophased linear sources. The plates are supposed to be thin and the „physical impedance“ on the different sizes of the plates has to be the same,

УДК 538.3

## ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА В СРЕДЕ С КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ

Ю. В. Чугунов

Реакция излучения заряда, равномерно движущегося во взаимно-проникающих средах, найдена в результате решения задачи с нулевыми начальными условиями. Показано, что при скорости заряда, меньшей скорости потока, работа продольного поля над зарядом экспоненциально растет во времени.

Излучение электромагнитных волн источником, находящимся в неустойчивой среде, представляет значительный интерес для физики плазмы и астрофизики. Как указывалось в [1], в этом случае характер излучения может существенным образом измениться. Обычно в равновесных средах ограничиваются вынужденным полем, т. е. только частным решением неоднородных уравнений Максвелла, а решение однородного уравнения не учитывается, так как наличие слабого затухания приводит к тому, что собственные колебания системы при  $t \rightarrow \infty$  исчезают. Ситуация коренным образом меняется в неустойчивых средах, так как включение возмущения в бесконечно удаленном прошлом может привести к бесконечно большой величине поля в момент времени  $t$ , и, следовательно, существенен момент включения возмущения и учет начальных условий.

В данной работе рассматривается излучение электромагнитных волн зарядом, движущимся равномерно в среде с конвективной неустойчивостью. В качестве модели такой среды взят моноэнергетический пучок малой плотности, пронизывающий однородную плазму\*. Столкновения не учитываются, причем рассмотрение ведется в линейном приближении, т. е. для промежуточных времен  $t$ , удовлетворяющих соотношению  $t \lesssim 1/\gamma_k \ll 1/\nu_{эфф}$  ( $\gamma_k$  — инкремент нарастания  $k$ -ой гармоники,  $\nu_{эфф}$  — эффективная частота столкновений). Считается также, что применимо гидродинамическое описание, т. е. температура пучка и плазмы предполагается малой.

Разлагая все величины в интегралы Фурье ( $E(r, t) = \int E_k(t) e^{ikr} dk$ ), получим следующую систему уравнений для определения поля  $E_k(t)$ :

$$\frac{\partial v_{1k}}{\partial t} + i(ku) v_{1k} = \frac{e}{m} E_k + \frac{e}{mc} [u B_k],$$

$$\frac{\partial v_{2k}}{\partial t} = \frac{e}{m} E_k,$$

(1)

$$i[k B_k] = \frac{1}{c} \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} (n_1 v_{1k} + N_{1k} u + n_2 v_{2k}) + \frac{4\pi}{c} j_{ст},$$

\* Следует, однако, отметить, что приведенные ниже результаты, по-видимому, качественно отражают основные закономерности, присущие и произвольной системе с конвективной неустойчивостью.

$$i [k E_k] = - \frac{1}{c} \frac{\partial B_k}{\partial t},$$

$$\frac{\partial N_{1k}}{\partial t} + in_1 (k v_{1k}) + i N_{1k} (k u) = 0,$$

$$\frac{\partial N_{2k}}{\partial t} + in_2 (k v_{2k}) = 0,$$

где  $E_k$ ,  $B_k$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $n_1$ ,  $n_2$  — равновесные концентрации пучка и плазмы,  $u$  — скорость пучка,  $v_{1k}$ ,  $N_{1k}$ ,  $v_{2k}$ ,  $N_{2k}$  — отклонения значений скоростей и концентрации пучка и плазмы от равновесных значений,  $j_{ct}$  — сторонний ток. В нерелятивистском приближении и при  $n_1 u / n_2 c \ll 1$  легко получить из (1) дифференциальное уравнение для поля  $E_k$ :

$$\hat{L}_1 \hat{L}_2 E_k = - \frac{4\pi}{c} \hat{L}_2 \left( \frac{\partial j_{ct}}{\partial t} - \frac{i k}{k^2} \frac{\partial^2 \rho_{ct}}{\partial t^2} \right) - \frac{4\pi i k}{k^2} \hat{L}_1 \hat{L}_3 \frac{\partial^2 \rho_{ct}}{\partial t^2} \equiv F_k(t). \quad (2)$$

Здесь введены обозначения

$$\hat{L}_1 = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + k^2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{c^2}, \quad \hat{L}_3 = \left( \frac{\partial}{\partial t} + i k u \right)^2,$$

$$\hat{L}_2 = \hat{L}_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_2^2 \hat{L}_3, \quad \omega_1 = \frac{4\pi e^2 n_1}{m},$$

$$\omega_2 = \frac{4\pi e^2 n_2}{m}, \quad \frac{\partial \rho_{ct}}{\partial t} + \text{div } j_{ct} = 0.$$

Общее решение уравнения (2), удовлетворяющее в момент  $t = 0$  нулевым начальным условиям ( $E_k = 0$ ;  $\partial^i E_k / \partial t^i = 0$  при  $t = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , где  $n$  — число корней дисперсионного соотношения), запишется в виде [2]

$$E_k(t) = \sum_{\alpha=1}^n \exp(-i\omega_\alpha t) \left/ i \frac{\partial L_1(\omega)}{\partial \omega} L_2(\omega) \right|_{\omega=\omega_\alpha} \times \\ \times \int_0^t F_k(t') \exp(i\omega_\alpha t') dt', \quad (3)$$

где  $\hat{L}_\alpha e^{-i\omega t} \equiv L_\alpha(\omega) e^{-i\omega t}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\omega_\alpha$  — корни дисперсионного соотношения  $L_\alpha(\omega) = 0$ .

Пусть поток движется вдоль оси  $Oz$ , и сторонний ток задан в виде

$$j_{ct} = q v \delta(z - vt) \delta(x) \delta(y) \quad (t > 0), \\ j_{ct} = 0 \quad (t \leq 0). \quad (4)$$

Указанный ток отвечает заряду  $q$ , движущемуся со скоростью  $v$  вдоль оси  $Oz$ . Между тем, полученные результаты легко обобщаются на случай диполя  $p = ql$ , начавшего движение в момент времени  $t = 0$  ( $l \rightarrow 0$ ;  $q \rightarrow \infty$ ;  $p = \text{const}$ ;  $p \parallel Oz$ ). Тогда для потерь энергии заряженной частицы в единицу времени на возбуждение продольных колебаний\* получим

\* Поперечное поле не дает вклада в потери энергии заряженной частицы, так как соответствующее дисперсионное соотношение  $L_1(\omega, k) = k^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)/c^2 - \omega^2/c^2$  не имеет в данном случае корней.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= qvE(r, t) \Big|_{r=vt} = -\frac{q^2 i}{2\pi^2} \int dk \frac{(kv)^3 (kv - ku)^2}{k^2 L_2(kv, k)} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^4 \frac{iq^2}{2\pi^2} \int dk \frac{(kv)^3 (kv - ku)^2 \exp\{i(kv - \omega_\nu)t\}}{k^2 (kv - \omega_\nu) \prod_{\substack{\xi=1 \\ \xi \neq \nu}}^4 (\omega_\nu - \omega_\xi)} = \\ &= \frac{\partial A_b}{\partial t} + \frac{\partial A_0}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\omega_\nu$  — корни дисперсионного соотношения\*

$$(\omega - ku)^2 \omega^2 - \omega_1^2 \omega^2 - \omega_2^2 (\omega - ku)^2 = 0.$$

Решение этого уравнения при малой плотности пучка хорошо известно [3]. Выбирая цилиндрическую систему координат с осью вдоль направления движения заряда, проведем в (5) интегрирование по  $k$ . Тогда для вынужденного поля имеем следующую формулу:

$$\frac{\partial A_b}{\partial t} = -\frac{q^2 [\omega_1^2 + \omega_2^2 (1 - u/v)^2]}{2v (1 - u/v)^2} \ln \left[ \frac{v_0^2 v^2 (1 - u/v)^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 (1 - u/v)^2} + 1 \right]. \quad (6)$$

Интегрирование по  $x$  в (5) ( $k^2 = x^2 + k_z^2$ ) производится до некоторого значения  $x_0$ , так как на верхнем пределе интеграл расходится (см., например, [4]). Если  $u = 0$ , то (6) переходит в обычное выражение для потерь энергии заряженной частицы в изотропной покоящейся плазме с концентрацией  $n_2 + n_1$ , обусловленных далекими столкновениями\*\*:

$$\frac{\partial A_b}{\partial t} = -\frac{q^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)}{v} \ln \frac{vx_0}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}. \quad (7)$$

В случае, когда  $v = u$ ,

$$\frac{\partial A_b}{\partial t} = -\frac{q^2 x_0^2 v}{2}. \quad (8)$$

Из (6) и (8) видно, что в рассматриваемом случае знак потерь энергии заряженной частицы на возбуждение вынужденных колебаний соответствует трению, в отличие от случая сред с абсолютной неустойчивостью [1].

Рассмотрим потери энергии частицы на возбуждение собственных колебаний системы. Как легко видеть, второе слагаемое в (5) существенно зависит от параметра  $\beta = v/u$ . Интегрирование по  $k_z$  в (5) можно провести, замыкая путь интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в верхней (при  $\beta > 1$ ) или нижней (при  $\beta < 1$ ) полуплоскости комплексного переменного  $k_z$ .

При  $\beta > 1$  после интегрирования по  $k_z$  и  $x$  во втором слагаемом в (5) получаются члены, которые убывают с ростом времени. Таким образом, при  $\beta > 1$  ситуация аналогична той, которая имеет место в равновесной среде (см. выше).

\* Следует отметить, что в (5) имеются дополнительные слагаемые, связанные с «мгновенностью» включения источника в момент времени  $t = 0$ . Ниже эти слагаемые не рассматриваются.

\*\* Вопрос о потерях энергии частиц, связанных с «ближними» соударениями, здесь не касаемся.

Случай  $\beta < 1$  представляет наибольший интерес, так как здесь возможно взаимодействие заряженной частицы с пакетом неустойчивых собственных колебаний системы. Проведя интегрирование по  $k$  в (5), получим\*.

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} = - \frac{q^2 \omega_2^2 \ln x_0 u / \omega_2}{V^3 v (n_1 / 4n_2)^{1/3}} \beta^3 (1 - \beta) \exp(\beta \gamma_0 t) \sin \omega_2 (1 - \beta) t, \quad (9)$$

где  $\gamma_0 = \sqrt{3} \omega_2 (n_1 / 4n_2)^{1/3}$  — инкремент линейной теории. Таким образом, как видно из (9), определяющую роль играют собственные колебания, возбуждаемые на частоте  $\omega = k u \simeq \omega_2$ , с инкрементом  $\gamma_0 = \sqrt{3} \omega_2 (n_1 / 4n_2)^{1/3}$ . Групповая скорость этого пакета волн совпадает со скоростью потока  $v_{гр} = u$ .

Как известно [3], конвективная неустойчивость характерна тем, что возмущение  $E_z(z, t)$  при  $z = \text{const}$  и  $t \rightarrow \infty$  остается ограниченным. В данном случае в отсутствие затухания возмущения  $E_z(z, t)$  для неустойчивой гармоники ведет себя следующим образом:  $E_z(z, t) \simeq 0$  при  $z > ut$  и  $E_z(z, t) \sim \exp\{z\gamma_0/u + i\omega_2(t - z/u)\}$  при  $z < ut$ , т. е. при  $z = \text{const}$  амплитуда возмущения остается постоянной. Из сказанного ясно, что потери энергии заряженной частицы будут осциллировать с частотой  $\omega_2(1 - \beta)$  и расти с инкрементом  $\gamma = \beta\gamma_0 < \gamma_0$ . Последнее обстоятельство связано с тем, что частица в системе координат, связанной с потоком, смещается в область меньших амплитуд поля ( $v < u$ ).

Из (9) следует, что для сред с конвективной неустойчивостью в линейном приближении сила радиационного трения, вообще говоря, может осциллировать во времени, а амплитуда колебаний экспоненциально нарастать.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. Я. Эйдману за руководство работой и А. А. Андронову и В. Ю. Трахтенгерцу за дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 1865 (1962).
2. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд Наука, М., 1965.
3. А. И. Ахизер, И. А. Ахизер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
18 января 1966 г.

#### ON CHARGE RADIATION IN MEDIUM WITH CONVECTIVE INSTABILITY

Yu. V. Chugunov

The radiation reaction of a charge moving uniformly through the interpenetrating media is found as the result of solving the problem with zero initial conditions. The work of a longitudinal field on the charge is shown to increase exponentially in time if the charge velocity is less than the flux one.

\* Выписываем только ту часть (5), которая экспоненциально растет со временем.

УДК 538.3

## КВАДРАТИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

*И. А. Дерюгин, В. И. Воронцов*

Дано обобщение известных квадратичных соотношений макроскопической электродинамики (обобщенной теоремы Умова—Пойнтинга, леммы Лоренца, лемм для комплексно сопряженных величин) на электродинамику движущихся, в общем случае гиротропных сред. Установлена связь принципа взаимности с фундаментальными операциями пространственно-временной инверсии, зарядового и комплексного сопряжения и их комбинаций. В соответствии с типами симметрий произведена классификация типов взаимности движущихся материальных сред. В качестве приложений квадратичных соотношений в электродинамике движущихся сред представлены основные формулы для расчета изменения параметров волноводов и резонаторов на основе метода возмущений.

В макроскопической электродинамике известную роль играют квадратичные соотношения для напряженности электромагнитного поля. С их помощью устанавливаются, например, теорема Умова—Пойнтинга, лемма Лоренца, принцип взаимности, строится теория возмущений. В настоящей работе проводится рассмотрение этих вопросов в электродинамике движущихся сред.

### 1. ТЕОРЕМА УМОВА—ПОЙНТИНГА И УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ ДЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Для вывода квадратичных соотношений используем лоренц-ковариантные уравнения электромагнитного поля, в которые входят также фиктивные «магнитные» заряды и токи  $j_{\lambda\mu\nu}$  [1]:

$$\nabla_{\alpha} E^{\mu\alpha} = j^{\mu}; \quad 3\nabla_{[\lambda} E_{\mu\nu]} = j_{\lambda\mu\nu}; \quad E^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu, \alpha\beta} E_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

где связь между ковариантными и контрвариантными бивекторами (векторами индукции и напряженности электромагнитного поля) осуществляется с помощью тензоров проницаемости Тамма [2]. Эти тензоры проницаемости удобны для описания движущихся изотропных и анизотропных сред; однако для гиротропных сред они становятся громоздкими.

Есть возможность упростить уравнения связи, переходя к 6-мерному бивекторному пространству [3]:

$$E^A = \varepsilon^{A,B} E_B; \quad E_A = \varepsilon_{A,B} E^B; \quad \varepsilon^{A,B} \varepsilon_{B,C} = \delta_C^A; \quad (2)$$

$$E^A = \{E^{0k}; E^{mn}\} = \{D; \bar{H}\}; \quad E_A = \{E_{0k}; E_{mn}\} = \{-E; \bar{B}\}.$$

В лабораторной системе координат, относительно которой движется среда, 6-мерные тензоры проницаемости можно представить в виде блочных матриц



$${}_{(\varepsilon^{A,B})} = \begin{pmatrix} -(K); \beta(L) \\ -\beta(\overset{\vee}{L}); (\overset{\vee}{K}) \end{pmatrix}; \quad {}_{(\varepsilon_{A,B})} = \begin{pmatrix} -(\bar{K}); -\beta(\bar{L}) \\ \beta(\overset{\vee}{L}); (\overset{\vee}{K}) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

в блоках которых размещены 3-мерные матрицы. Если гиротропная среда, намагниченная по оси  $z$ , движется по оси  $x$ , 3-мерные тензоры принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (K) &= \begin{pmatrix} \varepsilon; & i\gamma\varepsilon_a; & 0 \\ -i\gamma\varepsilon_a; & \gamma^2(\varepsilon - \beta^2\bar{\mu}_{\parallel}); & 0 \\ 0; & 0; & \gamma^2(\varepsilon_{\parallel} - \beta^2\bar{\mu}) \end{pmatrix}; \\ (L) &= \begin{pmatrix} 0; & 0; & -i\gamma\varepsilon_a \\ 0; & 0; & -\gamma^2(\varepsilon - \bar{\mu}_{\parallel}) \\ i\gamma\bar{\mu}_a; & \gamma^2(\varepsilon_{\parallel} - \bar{\mu}); & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь используются обычные обозначения для элементов тензоров проницаемости неподвижных гиротропных сред [4],  $\beta = v/c$ ,  $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$ . Остальные 3-мерные тензоры могут быть получены с помощью симметричного принципа двойственности:

$$\varepsilon \leftrightarrow \bar{\varepsilon}; \quad \mu \leftrightarrow \bar{\mu}; \quad (K) \leftrightarrow (\bar{K}); \quad (\overset{\vee}{K}) \leftrightarrow (\overset{\vee}{\bar{K}}); \quad (L) \leftrightarrow (\bar{L}); \quad (\overset{\wedge}{L}) \leftrightarrow (\overset{\vee}{\bar{L}}) \quad (5)$$

и принципа двойственности Лармора:

$$\varepsilon \leftrightarrow -\mu; \quad (K) \leftrightarrow -(\bar{K}); \quad (\bar{K}) \leftrightarrow -(\overset{\vee}{\bar{K}}); \quad (L) \leftrightarrow (\bar{L}); \quad (\bar{L}) \leftrightarrow (\overset{\vee}{\bar{L}}). \quad (6)$$

Для продольно движущихся в направлении оси  $z$  гиротропных сред 6-мерные тензоры проницаемости также представляются через блочные 6-мерные матрицы типа (3), в которых для удобства коренные буквы у 3-мерных матриц  $K$  и  $L$  заменены на  $M$  и  $N$ . Последние имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (M) &= \begin{pmatrix} \gamma^2(\varepsilon - \beta^2\bar{\mu}); & i\gamma^2(\varepsilon_a - \beta^2\bar{\mu}_a); & 0 \\ -i\gamma^2(\varepsilon_a - \beta^2\bar{\mu}_a); & \gamma^2(\varepsilon - \beta^2\bar{\mu}); & 0 \\ 0; & 0; & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}; \\ (N) &= \gamma^2 \begin{pmatrix} i(\varepsilon_a - \bar{\mu}_a); & -(\varepsilon - \bar{\mu}); & 0 \\ (\varepsilon - \bar{\mu}); & i(\varepsilon_a - \bar{\mu}_a); & 0 \\ 0; & 0; & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Остальные 3-мерные тензоры можно вычислить с помощью двух принципов двойственности (5) и (6); кроме того, выполняется условие

$$(\overset{\vee}{\bar{M}}) = (N); \quad (\bar{N}) = (\bar{M}). \quad (8)$$

В дальнейшем квадратичные соотношения для напряженности электромагнитного поля будут записываться также в 3-мерных обозначениях. Поэтому имеет смысл расписать уравнения связи (2) в 3-мерной форме, используя (3)–(8):

$$\mathbf{D} = (K)\mathbf{E} + \beta(L)\bar{\mathbf{B}}; \quad \bar{\mathbf{H}} = (\bar{K})\bar{\mathbf{B}} + \beta(\bar{L})\mathbf{E}; \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = (\bar{K})\mathbf{D} + \beta(\bar{L})\bar{\mathbf{H}}; \quad \bar{\mathbf{B}} = (\overset{\vee}{K})\bar{\mathbf{H}} + \beta(\overset{\vee}{L})\mathbf{D}. \quad (10)$$

Учитывая свойства матриц (4) и (7)

$$(\overset{\vee}{K})^{-1}(\overset{\vee}{L}) = -(\overset{\vee}{L})(\overset{\vee}{K})^{-1}; \quad (\overset{\vee}{M})^{-1}(N) = -(\bar{N})(\bar{M})^{-1}, \quad (11)$$

где показатель отрицательной степени определяет обратную матрицу, получаем уравнения связи для векторов индукции и напряженности электромагнитного поля соответственно для поперечно и продольно движущихся гиротропных сред:

$$D = (\bar{K})^{-1} E - \beta (\bar{K})^{-1} (\bar{L}) \bar{H}; \quad \bar{B} = (\overset{\vee}{K})^{-1} \bar{H} + \beta (\overset{\vee}{L})(\bar{K})^{-1} E; \quad (12)$$

$$D = (\bar{M})^{-1} E - \beta (\bar{M})^{-1} (\bar{N}) \bar{H}; \quad \bar{B} = (\overset{\vee}{M})^{-1} \bar{H} + \beta (\bar{N})(\bar{M})^{-1} E. \quad (13)$$

Если ограничиться простейшими случаями изотропных сред, уравнения (12) и (13) переходят в известные уравнения связи [5].

Уравнения электромагнитного поля (1) являются лоренц-ковариантными относительно несобственных преобразований Лоренца  $L$ , операции «обращения» времени (временной инверсии)  $T$ , зеркального пространственного отражения (пространственной инверсии)  $P$ , а также зарядового сопряжения  $C$ . Кроме того, к ним можно применить операцию комплексного сопряжения  $K$ . Таким образом, можно считать, что уравнения (1) ковариантны относительно общей группы преобразований  $R$ , для которой  $L, T, P, C, K \in R$ , причем для сокращения записи действие операции  $R$  обозначим символом  $+$ , так что  $R A^\mu = +A^\mu$ . Уравнения (1) в новой, преобразованной системе координат принимают следующий вид:

$$+\nabla_\alpha +E^{\mu\alpha} = +j^\mu; \quad +E^{\mu\nu} = \frac{1}{2} +\varepsilon^{\mu\nu,\alpha\beta} +E_{\alpha\beta}; \quad (14)$$

$$3 +\nabla_{[\lambda} +E_{\mu\nu]} = +j_{\lambda\mu\nu}.$$

Из уравнений (1) и (14), записанных в общем случае в разных системах координат, составим квадратичное соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (j_{\lambda\alpha\beta} +E_{\alpha\beta} + j_{\lambda\alpha\beta} E_{\alpha\beta}) + (E_{\lambda\alpha} \nabla_\beta +E_{\alpha\beta} + \\ & + E_{\lambda\alpha} +\nabla_\beta E_{\alpha\beta}) = \{ \nabla_\beta (+E_{\alpha\beta} E_{\lambda\alpha}) + +\nabla_\beta (E_{\alpha\beta} +E_{\lambda\alpha}) \} + \\ & + \frac{1}{2} (+E_{\alpha\beta} \nabla_\lambda E_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta} +\nabla_\lambda +E_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (15)$$

где подстрочными индексами  $r$  и  $s$  обозначаются номера источников и соответствующих им полей. Очевидно, уравнение (15) ковариантно относительно преобразований  $R$ . В дальнейшем будет использоваться одно из четырех уравнений (15), когда  $\lambda = 0$ . В 3-мерной форме оно принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\overset{+}{j}_r \overset{+}{H}_s + \overset{+}{j}_s \overset{+}{H}_r) + (E_r \nabla \times \overset{+}{H}_s + \overset{+}{E}_s \nabla \times \overset{+}{H}_r) = \\ & = -c \{ \nabla [ \overset{+}{E}_r \times \overset{+}{H}_s ] + \nabla [ \overset{+}{E}_s \times \overset{+}{H}_r ] \} - \left( \overset{+}{H}_s \frac{\partial}{\partial t} \overset{+}{B}_r + \overset{+}{H}_r \frac{\partial}{\partial t} \overset{+}{B}_s \right). \end{aligned} \quad (16)$$

При исследовании квадратичных соотношений ограничимся частным случаем локальной теории с запаздывающими полями, когда можно пренебречь пространственной дисперсией для тензоров проницаемости.

Кроме того, примем непрерывное распределение зарядов и токов (т. е. не будем использовать описание дискретного распределения зарядов с помощью  $\delta$ -функций) для того, чтобы не осложнять результаты флуктуационными электромагнитными полями [6]. Эти ограничения исключают возможность использования аппарата корреляционных функций для изучения шумов, обязанных флуктуациям источников полей и скорости движения малых областей материальных сред. Однако такое упрощение позволяет более быстро простыми средствами исследовать принцип невзаимности в связи с фундаментальными группами симметрии пространства-времени и зарядов, чему и посвящена, в основном, настоящая работа.

В указанных рамках применимо разложение составляющих электромагнитного поля в ряд Фурье по частотам и использование монохроматических волн. Обобщенная теорема Умова—Пойнтинга [4] для монохроматических волн получается из (16), если определить уравнение электромагнитного поля (1) и (14) в одной и той же системе координат, используя тождественное преобразование  $L = I$ , где  $I$  — единичное тождественное преобразование:

$$\mathbf{j}_E + \mathbf{j}_E + \bar{\mathbf{j}}\bar{H} + \bar{\mathbf{j}}\bar{H} = -c\nabla \left[ \mathbf{E} \times \bar{H} + \mathbf{E} \times \bar{H} \right] - iV; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V = & \left[ \omega \mathbf{E} (\bar{K})^{-1} \mathbf{E} + \omega \mathbf{E} (\bar{K})^{-1} \mathbf{E} \right] + \left[ \omega \bar{H} (\bar{K})^{-1} \bar{H} + \right. \\ & \left. + \omega \bar{H} (\bar{K})^{-1} \bar{H} \right] - \beta \left\{ \left[ \omega \mathbf{E} (\bar{K})^{-1} (\bar{L}) \bar{H} + \omega \mathbf{E} (\bar{K})^{-1} (\bar{L}) \bar{H} \right] - \right. \\ & \left. - \left[ \omega \bar{H} (\bar{L}) (\bar{K})^{-1} \mathbf{E} + \omega \bar{H} (\bar{L}) (\bar{K})^{-1} \mathbf{E} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

При  $r = s$  теорему Умова—Пойнтинга для движущихся гиротропных сред удобнее записать в общем виде:

$$\mathbf{j}_E + \bar{\mathbf{j}}\bar{H} = -c\nabla \left[ \mathbf{E} \times \bar{H} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} W, \quad (19)$$

$$W = \left[ \mathbf{E} (\bar{K})^{-1} \mathbf{E} + \bar{H} (\bar{K})^{-1} \bar{H} \right] - \beta \left[ \mathbf{E} (\bar{K})^{-1} (\bar{L}) \bar{H} - \bar{H} (\bar{L}) (\bar{K})^{-1} \mathbf{E} \right]. \quad (20)$$

Для движущихся изотропных сред

$$W = \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \epsilon \mu)} (\epsilon E_{\perp}^2 + \mu H_{\perp}^2) + (\epsilon E_{\parallel}^2 + \mu H_{\parallel}^2) - 2 \frac{(\epsilon \mu - 1)}{(1 - \beta^2 \epsilon \mu)} \beta \left[ \mathbf{E} \times \bar{H} \right], \quad (21)$$

где значки  $\perp$  и  $\parallel$  указывают на поперечные и продольные составляющие напряженности электромагнитного поля по отношению к направлению движения среды. Если в (21) пренебречь  $\beta^2$ , приходим к известному результату [7].

## 2. СРТ-СИММЕТРИЯ И ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ

Как указывалось выше, квадратичные соотношения (15) и (16) ковариантны относительно несобственных преобразований Лоренца  $L$ , а также некоторых дополнительных групп преобразований, связанных со свойствами пространства-времени. Для сравнения заметим, что в физике элементарных частиц свойства пространства-времени определяются симметрией элементарных частиц, в гравитации — распределением гравитационных масс и их движением. В макроскопической электроди-

наиме имеют дело в основном с усредненными значениями электромагнитных величин. Однако и в них нашли соответствующее отображение свойства симметрии микроскопических объектов. Например, ясно, что гиротропные свойства гирромагнитных или гироэлектрических сред связаны с симметрией вращения (спинового или орбитального) заряженных частиц. В квантовой теории поля взаимодействие (в том числе взаимодействие, связанное с сохранением или нарушением четности) описывается, в основном, с помощью билинейных соотношений, составленных из волновых функций взаимодействующих полей. В макроскопической электродинамике вопросы, относящиеся к симметрии явлений, естественно исследовать с помощью квадратичных соотношений (15) или (16).

а) *T-симметрия и принцип взаимности.* Для получения из (16) леммы Лоренца достаточно воспользоваться операцией временного «обращения» [8] или временной инверсии  $T$ :

$$\begin{aligned} (\bar{j}\bar{H} - \bar{j}\bar{H}) + (jE - jE) = -c\nabla [E \times \bar{H} - E \times \bar{H}] - \\ - \left( E \frac{\partial}{\partial t} D - E \frac{\partial}{\partial t} D \right) - \left( \bar{H} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} - \bar{H} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

При этом уравнения связи для движущихся сред сохраняют прежний вид (4) — (13). Лемма Лоренца для монохроматических волн при  $\omega = \omega$  является исходной при определении принципа взаимности для неподвижных сред [9,10]:

$$\begin{aligned} (j\bar{H} - j\bar{H}) + (jE - jE) = -c\nabla [E \times \bar{H} - E \times \bar{H}] - i\omega Q; \\ Q = (ED - ED) + (\bar{H}\bar{B} - \bar{H}\bar{B}). \end{aligned} \quad (23)$$

Для неподвижных изотропных или анизотропных сред  $Q = 0$ , тогда из (23) интегрированием нетрудно получить теорему взаимности. Таким образом, взаимность неподвижных изотропных и анизотропных сред непосредственно связана с  $T$ -симметрией. Однако для движущихся сред такая взаимность нарушается. Например, для движущихся изотропных сред

$$Q = 2 \frac{(\epsilon\mu - 1)}{(1 - \beta^2\epsilon\mu)} \beta [E \times \bar{H} - E \times \bar{H}]. \quad (24)$$

Чтобы сохранить принцип взаимности, приходится вводить новую комбинированную симметрию.

б) *PT-симметрия.* При пространственно-временной инверсии квадратичное соотношение (16) приводит к той же лемме Лоренца (22) или (23), но уравнения связи (9), (10) или (12), (13) несколько изменяются. Очевидно, уравнения связи (2) или (9) и (10) сохраняют свой вид в любой системе координат, в том числе в левой и правой системах. Но при зеркальных отражениях следует изменить направление движения среды, если все электромагнитные процессы описывать в одной системе координат. В результате в (12) и (13) при пространственной инверсии потребуется изменить знак при относительной скорости  $\beta$ . Тогда нетрудно показать, что для движущихся изотропных и анизотропных сред принцип взаимности соблюдается,  $Q = 0$ , но он определяется теперь в новом смысле — в смысле комбинированной  $PT$ -симметрии.

в) *CPT-симметрия*. Неподвижные гиротропные среды являются взаимными [4] в смысле *T*-симметрии. Однако принцип взаимности можно сохранить и для неподвижных гиротропных сред [11], если дополнить *T*-симметрию операцией зарядового сопряжения [12] *C*. При операции зарядового сопряжения электрические и магнитные заряды и токи меняют знак. При этом существенно, что для гиротропных сред меняется также направление внешнего магнитного поля, так что для неподвижных гиротропных сред становятся справедливыми уравнения связи с транспонированными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости [11]. В результате нетрудно убедиться, что для неподвижных гиротропных сред справедлив принцип взаимности в смысле *CT*-симметрии.

Для движущихся гиротропных сред принцип взаимности в смысле *CT*-симметрии нарушается. Положение сохраняется, если ввести комбинированную *CPT*-симметрию. При операции *CPT*-симметрии основное квадратичное соотношение (16) приводится к лемме Лоренца (23), а преобразованные уравнения связи приобретают следующий вид:

$$\mathbf{D}_s = (K_r)^T \mathbf{E}_s - \beta C(L)_s \bar{\mathbf{B}}_s; \quad \bar{\mathbf{H}}_s = (\bar{K}_r)^T \bar{\mathbf{B}}_s - \beta C(\bar{L}_r)_s \mathbf{E}_s; \quad (25)$$

$$\mathbf{D}_s = (M_r)^T \mathbf{E}_s + \beta (N_r)^T \bar{\mathbf{B}}_s; \quad \bar{\mathbf{H}}_s = (\bar{M}_r)^T \bar{\mathbf{B}}_s + \beta (N_r)^T \mathbf{E}_s, \quad (26)$$

где индекс *r* относится к величинам в исходной системе координат, а *s* — к величинам электромагнитного поля, над которым совершается преобразование *CPT*; индекс *T* указывает на операцию транспонирования матриц соответствующих 3-мерных тензоров (4) — (7). Кроме того, непосредственное вычисление дает

$$C(L) = \begin{pmatrix} 0; & 0; & i\gamma\epsilon_a \\ 0; & 0; & -\gamma^2(\epsilon - \bar{\mu}_1) \\ -i\gamma\bar{\mu}_a; & \gamma^2(\epsilon_1 - \bar{\mu}); & 0 \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$C(\bar{L}) = \begin{pmatrix} 0; & 0; & -i\gamma\bar{\mu}_a \\ 0; & 0; & -\gamma^2(\epsilon_1 - \bar{\mu}) \\ i\gamma\epsilon_a; & \gamma^2(\epsilon - \bar{\mu}_1); & 0 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что операция зарядового сопряжения *C* является одной из фундаментальных операций, а операция транспонирования матриц для тензоров, описывающих макроскопические свойства гиротропных сред, является частным следствием, не всегда выполняющимся.

Подстановка (9), (10), (25), (26) в (23) приводит к лемме Лоренца, для которой выполняется принцип взаимности для движущихся гиротропных сред в смысле комбинированной *CPT*-симметрии:  $Q = 0$ .

г) *K*-симметрия. В макроскопической электродинамике находят применение квадратичные соотношения для комплексно сопряженных величин [4,8]. Их можно вывести из (15) или (16), включив в общую группу преобразований *R* операцию комплексного сопряжения *K* или комбинации ее с другими группами преобразований, принадлежащих *R*. Первая квадратичная лемма для комплексно сопряженных величин получается из (16) применением одной операции комплексного сопряжения *K*; для монохроматических волн она имеет следующий вид:

$$\left( \bar{j}_r^* \bar{H}_s + \bar{j}_s^* \bar{H}_r \right) + \left( j_r^* E_s + j_s^* E_r \right) = -c \nabla \left[ E_r \times \bar{H}_s + E_s \times \bar{H}_r \right] + i^* Q; \quad (28)$$

$${}^* Q = \left( {}^* \omega E_s D_r - \omega^* E_r D_s \right) + \left( {}^* \omega \bar{H}_s \bar{B}_r - \omega^* \bar{H}_r \bar{B}_s \right),$$

где звездочка определяет комплексно сопряженную величину.

В частном случае слабо поглощающих сред при  $\omega = {}^*_\omega = \omega$  уравнения связи для движущихся гиротропных сред с комплексно сопряженными величинами совпадают с уравнениями связи, подвергнутыми преобразованиям зарядового сопряжения  $C$ , т. е. (25) и (26), но  $\beta \rightarrow -\beta$ . В результате нетрудно доказать, что выполняется принцип взаимности в комплексно сопряженном смысле, т. е. в смысле  $K$ -симметрии, когда  ${}^*Q = 0$ . Принцип взаимности в смысле  $K$ -симметрии слабее принципа взаимности в смысле  $CPT$ -симметрии, так как применим только к слабо поглощающим средам. Однако это не исключает возможности его использования в своих пределах.

### 3. КВАДРАТИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В электродинамике неподвижных сред квадратичные соотношения находят применение в построении теории возмущений, используемой для приближенного и быстрого решения ряда волноводных и резонаторных задач [4]. Такого же типа задачи можно решать и в электродинамике движущихся сред. В качестве примера ниже излагается теория возмущений для двух общих задач с регулярным возмущением движущимися средами.

Определим волновые числа в волноводе с продольным регулярным возмущением и собственные частоты в резонаторе с регулярным возмущением движущимися средами. Пусть в невозмущенном состоянии, которое будем характеризовать индексом  $s = 0$ , найдено решение задачи для собственных функций, волновых чисел для волновода и собственных частот для резонатора. При этом заполняющую волновод или резонатор среду в невозмущенном состоянии будем считать однородной, изотропной и неподвижной:

$$\left( \overset{\vee}{K} \right)_0 = \overset{\vee}{\epsilon} (I); \quad \left( \overset{\vee}{K} \right)_0 = \overset{\vee}{\mu} (I); \quad \left( \overset{\vee}{L} \right)_0 = 0, \quad (29)$$

где  $(I)$  — единичный тензор. Область возмущения будем считать регулярной, занимающей достаточно малую часть волновода или резонатора. Далее для простоты индекс  $r$  у величин, характеризующих возмущенное состояние, опустим, а сторонние токи в обоих состояниях будем считать отсутствующими. Тогда квадратичное соотношение (28) распишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{сV} \left[ E \times \overset{*}{H}_0 + \overset{*}{E}_0 \times \bar{H} \right] = i \left\{ \left[ \overset{\vee}{\epsilon} (I) E - \overset{*}{E}_0 (\bar{K})^{-1} E \right] + \right. \\ \left. + \left[ \overset{*}{H}_0 \overset{\vee}{\mu} (I) \bar{H} - \overset{*}{H}_0 (\bar{K})^{-1} \bar{H} \right] + \beta \omega \left[ \overset{*}{E}_0 (\bar{K})^{-1} (\bar{L}) \bar{H} - \right. \right. \\ \left. \left. - \overset{*}{H}_0 (\bar{L}) (\bar{K})^{-1} E \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Полагая  ${}^*_\omega = \omega$  и интегрируя по сечению волновода  $S_0$ , получаем формулу для изменения продольного волнового числа в волноводе:

$$\xi - \overset{*}{\xi}_0 = \frac{\omega}{cA_1} \int_s W_1 dS; \quad (31)$$

$$W_1 = \left[ {}^*_0 E \Delta(\bar{K})^{-1} E + {}^*_0 \bar{H} \Delta(\bar{K})^{-1} \bar{H} \right] - \beta \left[ {}^*_0 E (\bar{K})^{-1} (\bar{L}) \bar{H} - \right. \quad (32)$$

$$\left. - {}^*_0 \bar{H} (\bar{L}) (\bar{K})^{-1} E \right]; \quad A_1 = \int_S \left[ {}^*_0 E \times \bar{H} + E \times {}^*_0 \bar{H} \right] n dS;$$

$$\Delta(\bar{K})^{-1} = (\bar{K})^{-1} - \varepsilon(L); \quad \Delta(\bar{K})^{-1} = (\bar{K})^{-1} - \mu(L), \quad (33)$$

где  $S$  — поперечное сечение регулярного волновода,  $n$  — нормаль к поперечному сечению волновода. В частном случае изотропной движущейся среды (32) приобретает простой вид:

$$W_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0) {}^*_0 E_{\parallel} E_{\parallel} + (\mu - \mu_0) {}^*_0 H_{\parallel} H_{\parallel} + \left[ \frac{\varepsilon(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \varepsilon \mu)} - \varepsilon_0 \right] {}^*_0 E_{\perp} E_{\perp} + \quad (34)$$

$$+ \left[ \frac{\mu(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \varepsilon \mu)} - \mu_0 \right] {}^*_0 H_{\perp} H_{\perp} - \frac{(\varepsilon \mu - 1)}{(1 - \beta^2 \varepsilon \mu)} \beta \left[ {}^*_0 E \times \bar{H} + E \times {}^*_0 \bar{H} \right].$$

Первые члены (34) в (31) соответствуют изменению продольного волнового числа при наличии в волноводе в качестве возмущения диэлектрического стержня (если еще пренебречь  $\beta^2$ ), последний член (34) в (31) — при движении его вдоль волновода.

В применении к резонатору квадратичное соотношение (30) после интегрирования по объему резонатора  $V$  приводит к следующей формуле для изменения частоты:

$$\frac{{}^*_0 \omega - \omega}{\omega} = \frac{1}{A_2} \int_V W_1 dV; \quad A_2 = \int_V \left( \varepsilon_0 {}^*_0 E E + \mu_0 {}^*_0 \bar{H} \bar{H} \right) dV, \quad (35)$$

где  $V$  — объем регулярного возмущения. Для изотропной движущейся среды подынтегральная функция  $W_1$  в (35) упрощается согласно (34). Знак относительного изменения частоты зависит от направления движения среды.

В качестве движущейся среды можно использовать пучок движущейся плазмы. Из формул (31) и (35) следует, что при достижимых скоростях движущейся плазмы  $v = 10^8$  см·сек<sup>-1</sup> эффект изменения волнового числа в волноводе или частоты в резонаторе в сантиметровом диапазоне находится в пределах экспериментальных возможностей. Результаты (31) и (35) получены без особых ограничений; лишь при вычислении возмущенного поля через невозмущенное приходится пользоваться приближенными способами, например, квазистатической аппроксимацией [4]. Только после этого метод возмущений, как обычно, становится приближенным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Левашев, В. И. Воронцов, ДАН БССР, 7, 83 (1963).
2. И. Е. Тамм, Ж. русского физ.-хим. об-ва, ч. физ., 56, 248 (1924).
3. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, Физматгиз, М., 1961.
4. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
5. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, М., 1947.
6. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, Харьков, 1965.
7. Р. Т. Сомптон, Jr. С. Т. Таи, IEEE Trans., AP-12, 238 (1964).
8. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС, Л., 1949.

9. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, изд. АН СССР, 1, 270 (1948).
10. М. П. Свешников, Ж. русского физ.-хим. об-ва, ч. физ., 59, 453 (1927).
11. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию  
29 мая 1965 г.

## QUADRATIC RELATIONSHIPS IN ELECTRODYNAMICS OF MOVING MEDIA

*I. A. Deryugin, V. I. Vorontsov*

In this paper the generalization is given of well-known quadratic relationships in macroscopic electrodynamics (Poynting's theorem, Lorentz' lemma, lemmas for complex conjugate values) for moving (in general case, gyrotropic) media. It is shown that the reciprocity principle is closely associated with fundamental groups of space-time inversion, charge and complex conjugation and of their combinations. The classification is given of the types of reciprocity for moving media according to the types of symmetry. It is shown that quadratic relationships in electrodynamics of moving media can be used for calculation of waveguides and resonant cavities parameters on the basis of the perturbation theory.

---



УДК 530.145

**КОМБИНАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ**

*Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов*

В работе рассмотрена задача о стационарных во времени процессах стоксова, антистоксова и двойного излучения в распределенных системах бегущей волны. Исследовано распределение поля в пространстве. Оценены длины преобразования.

**1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Пусть на материальную систему, разность уровней которой равна  $\hbar\omega_{21}$  ( $\hbar$  — постоянная Планка), падают электромагнитные поля, частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  удовлетворяют соотношению  $\omega_1 \pm \omega_2 \approx \omega_{21}$ . Будем предполагать, что в системе возможно возбуждение волн, распространяющихся лишь в одну сторону. Система уравнений для квадратов амплитуд электромагнитных полей  $m_{1,2} = |E_{1,2}|^2$  и разности населенностей рабочих уровней  $n$  при учете объемных потерь в системе имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial m_1}{\partial z} &= b_1 m_1 m_2 n - 2k_1' v_1 m_1, \\ \frac{\partial m_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial m_2}{\partial z} &= \pm b_2 m_1 m_2 n - 2k_2' v_2 m_2, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -am_1 m_2 n - \frac{n - n_0}{T}. \end{aligned} \tag{1}$$

В правой части второго уравнения системы (1) знак (+) берется в случае двойного излучения ( $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{21} + \Delta\omega$ ), а знак (—) — в случае стоксова и антистоксова процессов ( $\omega_1 - \omega_2 = \omega_{21} + \Delta\omega$ );  $v_{1,2}$  — групповые скорости соответственно первого и второго поля;  $k_{1,2}'$  — мнимые части волновых векторов, ответственные за затухание волн в веществе:

$$b_{1,2} = 4\pi\omega_{1,2}NK/\varepsilon\hbar^3; \quad a = 4K/\hbar^4;$$

$$K = T_{21} \left[ 1 + T_{21}^2 (\Delta\omega)^2 \right]^{-1} \left| \sum_k p_{1k} p_{k2} [(\omega_{k2} \pm \omega_2)^{-1} \cos \alpha_{1k}^{(1)} \times \right. \\ \left. \times \cos \alpha_{2k}^{(2)} + (\omega_{k2} + \omega_1)^{-1} \cos \alpha_{2k}^{(1)} \cos \alpha_{1k}^{(2)} \right|^2;$$

$p_{ik}$  — матричные элементы дипольного момента;  $\alpha_{ik}^{(l)} = \alpha_{ik}^{(l)}$  — угол между  $p_{ik}$  и  $E_i$ ;  $T_{21}^{-1}$  — ширина линии вещества [1].

В дальнейшем будем интересоваться стационарным режимом работы комбинационного лазера бегущей волны ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ). При этом система (1) упрощается:

$$c_1 \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{x}{1 + xy} (y\eta_0 - 1 - xy),$$

$$c_2 \frac{\partial y}{\partial s} = \pm \frac{y}{1 + xy} [x\eta_0 \mp (1 + xy)], \quad (2)$$

$$\eta = \eta_0 / (1 + xy).$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные:

$$x = m_1 \left( \frac{k_2'' v_2 b_1}{k_1'' v_1 b_2 a T} \right)^{-1/2}, \quad y = m_2 \left( \frac{k_1'' v_1 b_2}{k_2'' v_2 b_1 a T} \right)^{-1/2},$$

$$\eta = n \left( \frac{4k_1'' v_1 k_2'' v_2 a T}{b_1 b_2} \right)^{-1/2}, \quad s = z \left( \frac{k_1'' + k_2''}{4k_1'' k_2''} \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$c_{1,2} = \frac{1}{k_{1,2}''} \left( \frac{1}{2k_1''} + \frac{1}{2k_2''} \right)^{-1},$$

$\eta_0$  — безразмерная равновесная разность населенностей рабочих уровней, которая существует в системе при отсутствии комбинационных полей. Если поглощение на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одинаково,  $c_1 = c_2 = 1$ . Учитывая, что

$$\eta_0 \simeq \frac{bn_0}{2k'' v(aT)^{1/2}} = \pi \frac{\omega n_0 N}{\varepsilon k'' v \hbar} \left( \frac{K}{T} \right)^{1/2},$$

произведем оценку равновесной разности населенностей. При  $\omega = 10^{16}$  сек<sup>-1</sup>,  $\varepsilon \sim 1$ ,  $k'' \simeq 10^{-2}$  см<sup>-1</sup>,  $v = 3 \cdot 10^{10}$  см·сек<sup>-1</sup>,  $\hbar = 10^{-27}$  эрг·сек,  $K = 10^{-112} \div 10^{-114}$  CGSE получим  $\eta_0 = (10^{-22} \div 10^{-23}) n_0 N(T)^{-1/2}$ . Если в системе есть некогерентная накачка и второй уровень метастабильный ( $W_{13} \simeq 10^6$  сек<sup>-1</sup>;  $W_{21} = 10^3$  сек<sup>-1</sup>;  $W_{13} \gg W_{21}$ ), то  $n_0 \simeq 1$ ,  $T = 10^{-6}$  сек,  $\eta_0 = (10^{-19} \div 10^{-20}) N$ .

Если время жизни на втором уровне мало ( $W_{21} \geq 10^8$  сек<sup>-1</sup>) и некогерентная накачка отсутствует ( $W_{21} \gg W_{31}$ ), то  $n_0 \simeq -1$ ,  $T \leq 10^{-8}$  сек,  $\eta_0 \simeq -(10^{-18} \div 10^{-19}) N$ . Первый случай имеет место в двойном лазере и при антистоксовом процессе. Второй случай реализуется при возбуждении стоксовой компоненты комбинационного излучения. Из оценок видно, что величина  $|\eta_0|$  в зависимости от числа активных молекул в системе может колебаться в широких пределах (от  $|\eta_0| \sim 1$  при  $N \simeq 10^{18} \div 10^{19}$  см<sup>-3</sup> до  $|\eta_0| \simeq 10^2 \div 10^3$  при  $N = 10^{20} \div 10^{21}$  см<sup>-3</sup>).

Точное аналитическое решение системы (2) найти не представляется возможным, однако ее можно исследовать на фазовой плоскости и получить приближенные аналитические решения в различных частных случаях.

## 2. ПРОЦЕССЫ СТОКСОВА И АНТИСТОКСОВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Эволюция в пространстве стоксовых и антистоксовых компонент комбинационного излучения описывается системой уравнений (2)\*. В правой части второго уравнения системы (2) необходимо взять нижние знаки;  $\eta_0 > 0$  соответствует антистоксовым процессам;  $\eta_0 < 0$  — стоксовым процессам. Заметим, что, как видно из (2), при изменении знака

\* Задача о стоксовом преобразовании в пренебрежении объемными потерями и насыщением разности населенностей рабочих уровней вещества была рассмотрена в [2, 3].

$\eta_0$  уравнения остаются прежними, если везде поменять местами  $x$  и  $y$ . Поэтому в дальнейшем будем считать  $\eta_0 > 0$ . Фазовая картина, соответствующая этому случаю, изображена на рис. 1.

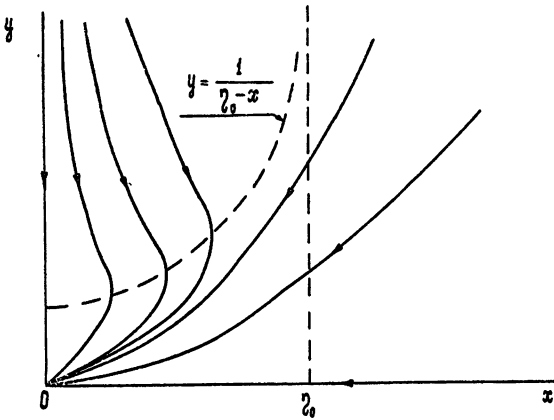


Рис. 1.

Анализ системы показывает, что она имеет одно устойчивое состояние равновесия типа узла в начале координат ( $x = y = 0$ ). Как видно из рис. 1, фазовая плоскость переменных  $x, y$  разделена кривой  $y = (\eta_0 - x)^{-1}$  на две области.

В области  $y > (\eta_0 - x)^{-1}$  происходит перекачка энергии из интенсивного поля  $y$  частоты  $\omega_2$  в слабое поле  $x$  частоты  $\omega_1$ . Кроме того, поле  $y$  уменьшается за счет поглощения на частоте  $\omega_2$ .

При  $y \gg (\eta_0 - x)^{-1}$  поглощение на частоте  $\omega_1$  играет незначительную роль из-за малости поля  $x$ . По мере увеличения поля  $x$  и уменьшения поля  $y$  потери на частоте  $\omega_1$  оказывают все более заметное влияние на распространение. Максимального значения поле  $x$  достигает на кривой  $y = (\eta_0 - x)^{-1}$ . В области  $y < (\eta_0 - x)^{-1}$  оба поля с увеличением расстояния  $s$  затухают к нулевым значениям.

Перейдем к аналитическому исследованию системы уравнений (2).

а) Рассмотрим сначала случай, когда влиянием насыщения вещества можно пренебречь. В этом случае комбинационные поля должны удовлетворять условию  $xy \ll 1$  или в размерном виде —

$$m_1 m_2 \ll (aT)^{-1}. \quad (4)$$

Населенность тогда остается практически постоянной ( $\eta \simeq \eta_0$ ), а величина произведения  $m_1 m_2$  не может быть больше, чем  $(m_1^0 + m_2^0)^2 / 4$  ( $m_{1,2}^0$  — граничные величины полей  $m_{1,2}$ ).

Условие (4) хорошо выполняется в стоксовых процессах, когда второй уровень лабильный (с малым временем жизни:  $W_{21} \gg 10^8 \text{ сек}^{-1}$ ). Если, например,  $K = 10^{-112} \div 10^{-114}$ ,  $T \leq 10^{-8} \text{ сек}$ , неравенство (4) может быть удовлетворено при достаточно интенсивных лазерных полях:

$$\frac{(m_1^0 + m_2^0)^2}{4} \ll 10^{12} \div 10^{14} \text{ CGSE}.$$

Уравнение интегральных кривых в этом приближении будет иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{c_1}{c_2} \frac{y(x\eta_0 + 1)}{x(y\eta_0 - 1)}. \quad (5)$$

Из (5) находим интегральные кривые уравнения

$$x = x_0 - \eta_0^{-1} \ln \frac{x}{x_0} - \frac{c_2}{c_1} \left[ (y - y_0) - \eta_0^{-1} \ln \frac{y}{y_0} \right], \quad (6)$$

где  $x_0, y_0$  — граничные значения полей  $x$  и  $y$ . Используя равенства (3), формулу (6) можно переписать в размерном виде:

$$m_1 = m_1^0 + \frac{v_2 b_1}{v_1 b_2} (m_2^0 - m_2) + \frac{2k_1'' v_2}{b_2 n_0} \ln \frac{m_2}{m_2^0} - \frac{2k_2'' v_2}{b_2 n_0} \ln \frac{m_1}{m_1^0}. \quad (7)$$

Максимальное значение  $m_1^{\max}$  в рассматриваемом случае, как легко видеть из (5), достигается на прямой

$$m_2 = \frac{2k_1'' v_1}{b_1 n_0}. \quad (8)$$

Если  $k_1'' = k_2'' = 0$ , из (7) получаем равенство

$$m_1 = m_1^0 + \frac{v_2 b_1}{v_1 b_2} (m_2^0 - m_2), \quad (9)$$

выражающее закон сохранения числа фотонов в лазере без потерь [2, 3]. В случае малых  $k_1'', k_2''$  и больших концентраций  $N$  величина  $m_1^{\max}$  будет мало отличаться от того значения, которое получается при отсутствии потерь. Если влиянием потерь пренебречь нельзя, то третий и четвертый члены в (7) будут играть существенную роль и величина  $m_1^{\max}$  будет значительно меньше соответствующей величины  $m_1^{\max} = (\omega_1/\omega_2)m_2^0$  в случае отсутствия потерь.

Остановимся более подробно на случае, когда поглощения на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны. При  $k_1'' = k_2'' = k''$  из системы уравнений (2) получаем следующие выражения для распределения поля в пространстве\*:

$$m_2 = m_2^0 e^{-2k''z} [1 - f(z)] [1 - (m_2^0 b_1/v_1 - m_1^0 b_2/v_2) \times \\ \times (m_2^0 b_1/v_1 + m_1^0 b_2/v_2)^{-1} f(z)]^{-1}, \quad (10)$$

$$m_1 = m_1^0 e^{-2k''z} [1 + f(z)] [1 - (m_2^0 b_1/v_1 - m_1^0 b_2/v_2) \times \\ \times (m_2^0 b_1/v_1 + m_1^0 b_2/v_2)^{-1} f(z)]^{-1}, \quad (11)$$

где

$$f(z) = \text{th} \left[ \frac{n_0}{4k''} (m_2^0 b_1/v_1 + m_1^0 b_2/v_2) (1 - e^{-2k''z}) \right].$$

Из (10) и (11) при  $k'' \rightarrow 0$  следуют формулы для распределения поля в пространстве в отсутствие поглощения [2, 3]. Складывая (10) и (11), находим\*\*

$$m_1 + \frac{v_2 b_1}{v_1 b_2} m_2 = \left( m_1^0 + \frac{v_2 b_1}{v_1 b_2} m_2^0 \right) e^{-2k''z}. \quad (12)$$

При  $z \rightarrow \infty$  энергия, заключенная в полях  $m_1$  и  $m_2$ , рассеивается в системе. Если затухание  $k'' \rightarrow 0$ , то формула (12) представляет собой закон сохранения числа фотонов (9). Используя (12), (7) и (8), имеем для длины преобразования следующую формулу:

$$L = -\frac{1}{2k''} \ln \left\{ 1 + \frac{2k'' v_1}{b_1 n_0 m_2^0} \ln \left( \frac{2k'' v_2}{b_1 n_0 m_1^{\max}} \frac{m_1^0}{m_2^0} \right) \right\}. \quad (13)$$

\* Если  $k''z \ll 1$ , формула (11) аналогична формуле (7) работы [4].

\*\* Формула (12) может быть получена из (2) и при наличии насыщения, если  $k_1'' = k_2''$ .

При  $2k''v_1/b_1n_0 \ll m_2^0$

$$L = - \frac{v_1}{b_1 n_0 m_2^0} \ln \left( \frac{2k''v_2}{b_1 n_0 m_1^{\max}} \frac{m_1^0}{m_2^0} \right), \quad (14)$$

где  $m_1^{\max}$  — максимальное значение поля  $m_1$ , определяемое из (7) и (8).

В некоторых частных случаях формулы для  $m_1^{\max}$  и  $L$  могут быть значительно упрощены. Если, например, потери в веществе достаточно малы, т. е.

$$2k''v_2/b_2n_0m_2^0 \ll 1, \quad (15)$$

в первом приближении теории возмущений из (7) и (8) для  $m_1^{\max}$  получаем следующее выражение:

$$m_1^{\max} = \frac{v_2 b_1}{v_1 b_2} m_2^0 - \frac{2k''v_2}{b_2 n_0} \left[ 1 - \ln \left( \frac{2k''v_1^2 b_2}{n_0 v_2 b_1^2} \frac{m_1^0}{(m_2^0)^2} \right) \right]. \quad (16)$$

Соответствующая длина преобразования

$$L = - \frac{v_1}{b_1 n_0 m_2^0} \ln \left( \frac{2k''v_1^2 b_2}{n_0 v_2 b_1^2} \frac{m_1^0}{(m_2^0)^2} \right). \quad (17)$$

Если же потери в веществе достаточно велики, так что выполнено неравенство

$$\frac{2k''v_2}{b_2 n_0} \gg \frac{m_1^{\max}}{\ln m_1^{\max}}, \quad (18)$$

значения  $m_1^{\max}$  и  $L$  определяются формулами

$$m_1^{\max} = \frac{2k''v_1}{b_1 n_0} \frac{m_1^0}{m_2^0} \exp \left( \frac{m_2^0 b_1 n_0}{2k''v_1} - 1 \right), \quad (19)$$

$$L = - \frac{1}{2k''} \ln \left\{ \frac{2k''v_1}{b_1 n_0 m_2^0} \left[ 1 + \frac{m_1^0}{m_2^0} \exp \left( \frac{m_2^0 b_1 n_0}{2k''v_1} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (20)$$

Неравенство (18) с учетом (19) можно переписать в несколько ином виде:

$$\frac{m_2^0 b_1 n_0}{2k''v_1} + \ln \left( \frac{2k''v_1}{b_1 n_0} \frac{m_1^0}{m_2^0} \right) \gg 1 + \frac{m_1^0}{m_2^0} \exp \left( \frac{m_2^0 b_1 n_0}{2k''v_1} - 1 \right). \quad (18a)$$

Из (17) и (20) следует, что длина преобразования  $L$  есть монотонная функция (при  $N = \text{const}$ ) потерь в веществе  $k''$ . В предельном случае  $2k'' \rightarrow 0$  длина  $L \rightarrow \infty$ , при  $2k'' \rightarrow b_1 n_0 m_2^0 / v_1$  длина  $L \rightarrow 0$ . Пусть теперь  $2k'' = \text{const}$ . Тогда  $L \simeq 0$ , если выполнено условие  $2k''v_1/b_1n_0m_2^0 = 1$ . С ростом  $N$  величина  $L$  возрастает, при некотором  $N_0$  она достигает максимума и затем стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Так как число активных ионов в веществе не может возрастать неограниченно ( $N \ll N_{\max} \simeq 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ), то существует минимальная длина преобразования.

В заключение этого раздела приведем некоторые численные оценки. Пусть  $N = 10^{21} \text{ см}^{-3}$ . В качестве граничного значения  $m_1^0$  возьмем амплитуду комбинационного спонтанного излучения, вычисленную по формулам (38), (41) работы [5]:  $m_1^0 = 10^{-10} \text{ CGSE}$ . При такой населен-

ности и указанных выше параметрах вещества неравенство (15) удовлетворяется и из формул (16) и (17) получаем  $m_1^{\max} = 9 \cdot 10^5$  CGSE,  $L \simeq 13$  см\*. Если  $N = 10^{20}$  см<sup>-3</sup>, имеет место другой предельный случай, при котором выполняется неравенство (18а), и из формул (19) и (20) находим  $m_1^{\max} = 330$  CGSE,  $L \simeq 3$  м.

Эти оценки показывают, что при малых концентрациях активных ионов объемные потери в веществе играют существенную роль — они приводят к заметному уменьшению  $m_1^{\max}$  по сравнению с  $m_1^{\max} \simeq m_2^0$  в отсутствие потерь. Из оценок также видно, что при концентрациях активных ионов  $N \leq 10^{20}$  см<sup>-3</sup> длина преобразования становится очень большой, в связи с чем рабочее вещество целесообразно помещать в резонатор.

б) В настоящем разделе мы рассмотрим случай, когда в процессе распространения существенную роль играет эффект насыщения разности населенностей рабочих уровней. Как уже указывалось выше (4), насыщение может быть существенно, если  $(m_1^0 + m_2^0)^2/4 \geq (aT)^{-1}$ . Последнее неравенство может выполняться, например, для антистоксова процесса, когда  $T < 10^{-6}$  сек. Остановимся только на случае равных поглощений на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Уравнение, определяющее интегральные кривые, имеет вид

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{y}{x} \frac{x\eta_0 + 1 + xy}{y\eta_0 - 1 - xy}. \quad (21)$$

Легко видеть, что фазовая плоскость  $x, y$  может быть разделена на области, в которых можно пренебречь единицей в числителе или в знаменателе правой части (21).

При  $y \gg (\eta_0 - x)^{-1}$  не существенна единица в знаменателе (область I), а при  $y \gg x^{-1} + \eta_0$  (область II) — в числителе формулы (21). Нетрудно убедиться, что есть область, где оба эти неравенства выполняются одновременно. Поэтому возможен следующий путь решения. Проинтегрировав приближенно уравнение (21) в I и II областях, можно считать эти решения в области III. В области I решение имеет вид

$$u = C_0 v - \eta_0^{-2} (1 + v \ln |1 - 1/v|). \quad (22)$$

Здесь для удобства приняты следующие обозначения:

$$u = 1 + y/\eta_0, \quad v = 1 - x/\eta_0, \quad (23)$$

$C_0$  — постоянная интегрирования, определяемая граничными значениями полей  $x$  и  $y$ :

$$C_0 = \frac{1}{v_0} \left[ u_0 + \eta_0^{-2} \left( 1 + v_0 \ln \left| 1 - \frac{1}{v_0} \right| \right) \right]. \quad (24)$$

Решение (22) не справедливо вблизи кривой  $y = (\eta_0 - x)^{-1}$ , где поле  $x$  достигает максимального значения. В области II решение имеет вид

$$v = C'_0 u - \eta_0^{-2} (1 + u \ln |1 - 1/u|). \quad (25)$$

Аналитическое выражение (25) справедливо и в окрестности кривой  $y = (\eta_0 - x)^{-1}$ , где  $x$  принимает максимальное значение.

\* В работе [6] кроме компоненты  $\omega_2 \simeq \omega_1 - \omega_{2,1}$  рассматривалось возбуждение высших комбинационных частот  $\omega_n \simeq \omega_1 - n\omega_{2,1}$  ( $n = 2, 3, 4$ ). Система из пяти дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям (1) для полей, решалась на электронно-вычислительной машине. Результат численного расчета для длины преобразования поля накачки в первую стоксову компоненту приближенно совпадает с нашими оценками.

В области III выполнены неравенства

$$C_0 v \gg |\eta_0^{-2} (1 + v \ln |1 - 1/v|)|, \quad (26)$$

$$C_0' u \gg |\eta_0^{-2} (1 + u \ln |1 - 1/u|)|, \quad (27)$$

поэтому решение дифференциального уравнения (21) запишется в следующем виде:

$$u = C_0 v, \quad v = C_0' u. \quad (28)$$

Заметим, что для тождественности решений должно выполняться условие

$$C_0 = (C_0')^{-1}. \quad (29)$$

Таким образом, зная аналитические выражения для интегральных кривых (22) и (25) и первый интеграл (12), можно оценить максимальное значение поля  $x^{\max}$  и длину преобразования. Поле  $x$  достигает максимального значения на кривой  $y = (\eta_0 - x)^{-1}$ . Подставляя это значение  $y$  в решение (25), получим связь между граничными значениями полей  $x_0$ ,  $y_0$  и  $x^{\max}$ :

$$C_0^{-1} = \left(1 - \frac{x^{\max}}{\eta_0}\right) - \eta_0^{-2} \ln \left|1 + \eta_0^2 \left(1 - \frac{x^{\max}}{\eta_0}\right)\right|. \quad (30)$$

Из выражения (12), которое в переменных  $x$ ,  $y$  имеет вид  $x + y = (x_0 + y_0) \exp(-s)$ , при  $x = x^{\max}$ ,  $y = (\eta_0 - x^{\max})^{-1}$  получим следующую формулу для длины преобразования:

$$L = \frac{1}{2k''} \ln \frac{y_0 \eta_0 [1 - (x^{\max}/\eta_0)]}{1 + \eta_0 [1 - (x^{\max}/\eta_0)] x^{\max}}. \quad (31)$$

Существуют, однако, такие граничные значения полей  $x_0$ ,  $y_0$ , для которых интегральные кривые не будут проходить через область «сшивания» решений (22) и (25). В этом случае не представляется возможным сопоставить произвольную постоянную  $C_0$  из (22) с произвольной постоянной  $C_0'$  из (25).

Оценим то значение  $C_{01}$ , при котором еще возможно «сшивание» кривых, описываемых уравнениями (22) и (25). Пусть величина  $A_0 \sim 10$  характеризует степень выполнения неравенств (26) и (27). Тогда из (26) — (28) легко найти постоянную  $C_{01}$ :

$$C_{01} = \frac{A_0 + \eta_0^2 B_0}{\eta_0^2 B_0^2},$$

где

$$B_0 = \frac{1}{2} [(\eta_0^2 + A_0)(\eta_0^2 + 3A_0)^{-1}] \{1 + [1 + 4A_0(\eta_0^2 + 3A_0)(\eta_0^2 + A_0)^{-2}]^{1/2}\}.$$

Для данного  $\eta_0$  при  $C_0 > C_{01}$  все интегральные кривые проходят через область «сшивания» решений (22) и (25).

Если  $m_2^0 \approx 10^6$  CGSE,  $\eta_0 \approx 1,4$ ,  $C_0 = 5$ ,  $(aT)^{-1/2} \approx 10^5$ , из формулы (30) находим  $x^{\max} \approx 0,5$  (или  $m_1^{\max} \approx 5 \cdot 10^4$  CGSE). Подставляя эту величину  $x^{\max}$  в формулу (31), получаем для длины преобразования  $L$  значение порядка 1 м.

## 3. ПРОЦЕССЫ ДВОЙНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Для описания процессов в распределенной системе бегущей волны (в которой частоты комбинационных полей удовлетворяют условию  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ ) воспользуемся уравнениями (2). В правой части второго уравнения (2) в данном случае необходимо взять верхние знаки. Как видно из (2), система уравнений совершенно симметрична относительно полей  $x$  и  $y$ .

Приравняв производные к нулю и решив алгебраическую систему уравнений, получим стационарные состояния системы:

$$1) \quad \bar{x}_1 = \bar{y}_1 = 0, \quad (32)$$

$$2) \quad \bar{x}_2 = \bar{y}_2 = \eta_0/2 - \sqrt{(\eta_0/2)^2 - 1}, \quad (33)$$

$$3) \quad \bar{x}_3 = \bar{y}_3 = \eta_0/2 + \sqrt{(\eta_0/2)^2 - 1}. \quad (34)$$

Из (33) и (34) видно, что, если  $\eta_0 < 2$ , стационарные состояния (33) и (34) не существуют. В размерном виде условие существования стационарных состояний запишется следующим образом:

$$\pi \frac{n_0 N}{\varepsilon \hbar} \left( \frac{\omega_1 \omega_2}{k_1' v_1 k_2' v_2} \frac{K}{T} \right)^{1/2} \geq 2. \quad (35)$$

Анализ системы уравнений (2) показывает, что первое и третье состояния равновесия ( $x_1, y_1$  и  $x_3, y_3$ ) всегда представляют собой устойчивый узел, тогда как второе состояние равновесия ( $x_2, y_2$ ) — седло.

Фазовая картина для случая  $\eta_0 < 2$  аналогична изображенной на рис. 1. Здесь имеются области  $[y > (\eta_0 - x)^{-1}, y < \eta_0 - 1/x]$ , где происходит перекачка энергии из одного поля в другое, и область  $[(\eta_0 - x)^{-1} < y < \eta_0 - 1/x]$ , в которой оба поля с увеличением расстояния  $s$  затухают до нуля. Максимальные значения коэффициентов преобразования полей и длины преобразования здесь могут быть оценены точно так же, как это делалось в разделе 2.

Фазовая картина при  $\eta_0 > 2$  изображена на рис. 2 (поглощение на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  предполагается для простоты одинаковым:  $c_1 = c_2 = 1$ ). В этом случае мы имеем систему с жестким возбуждением. Все интегральные кривые, начинающиеся выше сепаратрисы, идущей в седло, заканчиваются в третьем состоянии равновесия. Интегральные кривые, которые начинаются ниже сепаратрисы, заканчиваются в нулевом состоянии равновесия. Сепаратриса указывает граничные значения  $x_0^{\text{пор}}$  и  $y_0^{\text{пор}}$ , определяющие порог возбуждения.

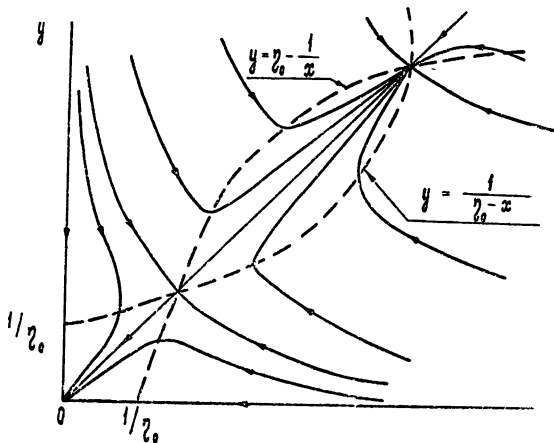


Рис. 2.

Обратимся к количественному исследованию системы уравнений (2). Ограничимся случаем, когда поглощения на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны:  $k_1' = k_2' = k''$  ( $c_1 = c_2 = 1$ ). Вычитая второе уравнение системы (2) из первого и производя интегрирование, получаем



$$x - y = (x_0 - y_0) e^{-s}, \quad (36)$$

где  $x_0, y_0$  — граничные значения полей  $x$  и  $y$ . В размерном виде вместо (36) получим

$$m_1 - \frac{b_1 v_2}{b_2 v_1} m_2 = \left( m_1^0 - \frac{b_1 v_2}{b_2 v_1} m_2^0 \right) e^{-2k''z}. \quad (36a)$$

При  $k'' = 0$  равенство (36a) отражает тот факт, что в системе без потерь разность числа фотонов на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  сохраняется. В системе с потерями эта разность затухает к нулевому значению.

Пусть  $x \equiv y$ . Это соответствует граничному условию  $x_0 = y_0$  (последнее имеет, например, место при так называемом «вырожденном» двойном излучении, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_2/2$ ). В рассматриваемом случае вместо двух дифференциальных уравнений (2) имеем одно

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{x}{1+x^2} (x\eta_0 - 1 - x^2). \quad (37)$$

В результате интегрирования уравнения (37) получим

$$s = \ln \left\{ \frac{x_{\text{гp}}}{x} \left[ \frac{(x - \bar{x}_2)(x_{\text{гp}} - \bar{x}_3)}{(x_{\text{гp}} - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_3)} \right]^{\eta_0(\eta_0^2 - 4)^{-1/2}} \right\} \quad (|\eta_0| > 2); \quad (38)$$

$$s = -\ln \frac{x}{x_{\text{гp}}} - \frac{4\eta_0}{\sqrt{4-\eta_0^2}} \left[ \arctg \left( \frac{2x-\eta_0}{\sqrt{4-\eta_0^2}} \right) - \arctg \left( \frac{2x_{\text{гp}}-\eta_0}{\sqrt{4-\eta_0^2}} \right) \right] \quad (39)$$

( $|\eta_0| < 2$ ).

Здесь  $x_{\text{гp}}$  — граничное значение поля  $x$ .

Из (38) легко видеть, что для  $\eta_0 > 2$  и в зависимости от  $x_{\text{гp}}$  величина  $x(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к одному из устойчивых стационарных состояний ( $\bar{x}_1$  или  $\bar{x}_3$ ):

$$\begin{aligned} x(s) &\rightarrow \bar{x}_1 & (x_{\text{гp}} < \bar{x}_2), \\ x(s) &\rightarrow \bar{x}_3 & (x_{\text{гp}} > \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Если  $\eta_0 < 2$ , из (38) и (39) получаем, что при любом  $x_{\text{гp}}$   $x(s)$  стремится к нулю при  $s \rightarrow \infty$ .

Формула (38) позволяет оценить длину, на которой происходит установление стационарного процесса. В качестве координат начальных и конечных точек подставим в (38) значения  $x_{\text{гp}} = \bar{x}_2 + \Delta_1$  и  $x = \bar{x}_3 - \Delta_2$  и примем  $\eta_0 \gg 2$ . Тогда для длины, на которой устанавливается стационарное значение поля, получим следующую формулу:

$$l_1 = -\frac{1}{2k''} \ln(\Delta_1 \Delta_2). \quad (40)$$

Если положить  $\Delta_1 = 0,1 \bar{x}_2 = 0,1 \eta_0^{-1}$ ;  $\Delta_2 = 0,1 \bar{x}_3 = 0,1 \eta_0$ ;  $2k'' \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ , то  $l_1 \simeq 2 \text{ м}$ .

Обратимся теперь к случаю  $x \neq y$ . Складывая уравнения (2) (при  $c_1 = c_2 = 1$ ), получим

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \eta_0 \frac{u^2 - v^2}{1 + u^2 - v^2} - u. \quad (41)$$

Здесь  $u = (x + y)/2$ ,  $v = (x - y)/2$ . Уравнение (41) линеаризуем вблизи прямой  $x = y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \eta_0 \frac{u^2}{1 + u^2} - u. \quad (42)$$

Из (42) видно, что около прямой  $x = y$  величина  $(x + y)/2$  изменяется независимо от  $(x - y)/2$  (последняя экспоненциально стремится к нулю при  $s \rightarrow \infty$ ). Уравнение (42) тождественно уравнению (37); поэтому при исследовании движения изображающей точки в окрестности прямой  $x = y$  можно полностью воспользоваться результатами, полученными выше.

В области  $xu \ll 1$  влиянием насыщения вещества можно пренебречь и описывать распределение поля в пространстве с помощью формул, которые получаются из (10) и (11) заменой  $b_2$  на  $-b_2$ . Уравнение интегральных кривых в этом приближении принимает вид

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x} \frac{x\eta_0 - 1}{y\eta_0 - 1} \quad (43)$$

и легко интегрируется:

$$y = y_0 - x_0 + x + \eta_0^{-1} \ln(yx_0/x_0y_0). \quad (44)$$

Как уже упоминалось выше, порог возбуждения определяется сепаратрисой, идущей в седло. При  $\eta_0 \gg 2$  второе состояние равновесия ( $\bar{x}_2 = \bar{y}_2 = \eta_0^{-1} \ll 1$ ) будет лежать в той области, где можно пренебречь насыщением. Подставляя в уравнение интегральных кривых (44) координаты  $\bar{x}_2$ ,  $\bar{y}_2$ , получаем уравнение сепаратрисы

$$y_0 - x_0 = \eta_0^{-1} \ln(y_0/x_0), \quad (45)$$

определяющее в неявном виде величину порога возбуждения. Если  $y_0 \gg x_0$ , вместо (45) можно записать

$$y_0^{\text{пор}} = \eta_0^{-1} \ln(y_0^{\text{пор}}/x_0^{\text{пор}}) \quad (46)$$

или приближенно

$$y_0^{\text{пор}} = -\eta_0^{-1} \ln x_0^{\text{пор}}. \quad (46a)$$

Длину установления стационарного процесса  $L$  удобно представить как сумму длин  $l_1$  и  $l_2$ . Величина  $l_1$  находится по формуле (40);  $l_2$  — расстояние, соответствующее прохождению изображающей точки по интегральной кривой вблизи сепаратрисы от граничных значений  $y_0^{\text{пор}} + \Delta y_0$ ,  $x_0^{\text{пор}}$  ( $\Delta y_0 \ll y_0^{\text{пор}}$ ) до точки  $x = \bar{x}_2$ ,  $y = \bar{y}_2 + \Delta y$  ( $\Delta y \ll \bar{y}_2$ ). Используя уравнение сепаратрисы (45) и формулу (12), получим следующее выражение для длины  $l_2$ :

$$l_2 = -(1/2k'') \ln(\Delta y/y_0^{\text{пор}}). \quad (47)$$

Длина установления стационарного процесса соответственно равна

$$L = -(1/2k'') \ln[(\Delta y)^2 \Delta_2 / \sqrt{2} y_0^{\text{пор}}]. \quad (48)$$

Из уравнения интегральной кривой легко получить

$$(\Delta y)^2 = 2\Delta y_0/\eta_0, \quad (49)$$

откуда следует, что

$$L = -(1/2k'') \ln(\sqrt{2} \Delta y_0 \Delta_2 / y_0^{\text{пор}} \eta_0). \quad (50)$$

Если  $\Delta y_0/y_0^{\text{пор}} = \Delta_2/\eta_0 = 0,1$ ;  $2k'' = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ , то  $L \simeq 2,5 \text{ м}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 493 (1965).
2. В. М. Файн, Э. Г. Ящин, ЖЭТФ, 46, 695 (1964).
3. В. Т. Платоненко, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 46, 555 (1964).
4. В. А. Зубов, М. М. Сушинский, И. К. Шувалов, ЖПС, 3, 336 (1965).
5. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
6. Y. R. Shen, N. Bloembergen, Phys. Rev., 137, A 1787 (1965).

Поступила в редакцию  
23 февраля 1966 г.

COMBINATIONAL PROCESSES IN CONTINUOUS TRAVELLING  
WAVE SYSTEMS

*G. L. Gurevich, Yu. A. Otmakhov*

In the paper the problem of stationary Stokes, anti-Stokes and double radiation processes in the systems with a travelling wave is considered. The space field distribution is investigated. The lengths of transformation are evaluated.

---

УДК 621.385.624

## О РОЛИ ПОПЕРЕЧНОЙ ГРУППИРОВКИ В КЛИСТРОНЕ С ШИРОКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

А. А. Шапошников

Рассмотрен клистрон с широким электронным потоком. Входной и выходной элементы связи выполнены в виде «плоских» систем, в которых могут возбуждаться бегущие или стоячие электромагнитные волны. Анализ группировки электронов проведен для бесконечно широкого электронного потока в кинематическом приближении без учета поля пространственного заряда. Рассматривается возбуждение «плоских» волноводных (резонаторных) систем модулированным потоком электронов.

В последнее время в литературе [1-7] появились сообщения о создании мощных многолучевых клистронов и клистронов с широкими ленточными электронными потоками. Такие клистроны позволяют при сравнительно невысоких напряжениях пучка за счет большого тока эмиссии получать мощности на выходе порядка десятков и сотен киловатт.

В работах [1-7] рассматривались клистроны, группировка электронов в которых производилась чисто продольным высокочастотным электрическим полем модулятора. Но, как правило, в любом модуляторе возможно существование и поперечных по отношению к направлению движения электронного потока компонент высокочастотного поля, которые, естественно, должны определенным образом повлиять на процесс группировки. Данная работа является в известном смысле обобщением работы [1] на случай группировки бесконечно широкого электронного потока произвольным высокочастотным полем, имеющим как продольные, так и поперечные компоненты.

### 1. ГРУППИРОВКА ЭЛЕКТРОНОВ В БЕСКОНЕЧНО ШИРОКОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим бесконечно широкий поток нерелятивистских электронов, движущихся в  $z$ -направлении с одинаковыми скоростями  $u_0 \ll c$ . Концентрацию электронов будем считать достаточно малой для того, чтобы в рассматриваемой задаче можно было пренебречь влиянием собственного (кулоновского и магнитного) поля электронов на их движение.

Допустим, что между сечениями  $z = -z_1$  и  $z = 0$  (модулятор) электроны движутся в высокочастотном поле с произвольной структурой  $E(x, y, z, t) = x_0 E_x(x, y, z, t) + y_0 E_y(x, y, z, t) + z_0 E_z(x, y, z, t)$  (рис. 1)\*. Если это поле, а также время пролета электронов через модулятор не слишком велики, то действие модулятора сводится, очевидно, лишь к изменению (модуляции) скоростей влета электронов в пространство дрейфа  $z > 0$ :

$$u = z_0 u_0 + v(x_B, y_B, 0, t_B), \quad (1)$$

\* Для нерелятивистских электронов действие высокочастотной силы Лорентца можно не учитывать.

где добавок к скорости ( $|\mathbf{v}| \ll u_0$ ) зависит от структуры высокочастотного поля в модуляторе, времени пролета через модулятор  $t_{\text{пр}}$  и от поперечных координат электрона  $x_{\text{в}}, y_{\text{в}}$  в момент влета в пространство дрейфа  $t_{\text{в}}$ .

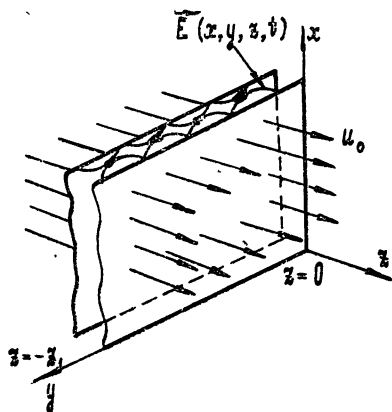


Рис. 1.

В пространстве дрейфа все электроны движутся прямолинейно и равномерно по закону

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{в}} + \mathbf{u}(t - t_{\text{в}}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}_{\text{в}} = x_0 \mathbf{x}_{\text{в}} + y_0 \mathbf{y}_{\text{в}}$  — радиус-вектор выделенного электрона в момент времени  $t = t_{\text{в}}$  в плоскости  $z = 0$ .

Проследив за деформацией элементарного объема  $dV_{\text{в}} = dx_{\text{в}} \times dy_{\text{в}} u_0 dt_{\text{в}}$ , заполненного электронами, вылетевшими с площадки  $dx_{\text{в}} dy_{\text{в}}$  за время  $dt_{\text{в}}$ , и записав закон сохранения заряда в этом объеме  $\rho dV = \rho_0(x_{\text{в}}, y_{\text{в}}, 0, t_{\text{в}}) dV_{\text{в}}$ , для плотности заряда  $\rho$  в любой точке пространства дрейфа получим

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(x_{\text{в}}, y_{\text{в}}, 0, t_{\text{в}}) u_0 \left| \left[ \frac{D(x, y, z)}{D(x_{\text{в}}, y_{\text{в}}, t_{\text{в}})} \right]^{-1} \right|. \quad (3)$$

Производные, входящие в якобиан (3), могут быть без труда вычислены в соответствии с (2). С учетом закона движения (2) и малости переменной скорости  $\mathbf{u}$  из (3) следует

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x_{\text{в}}, y_{\text{в}}, 0, t_{\text{в}}) \left\{ \left| 1 + \left[ u_0 \operatorname{div}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp}(x_{\text{в}}, y_{\text{в}}, 0, t_{\text{в}}) - \frac{\partial v_z(x_{\text{в}}, y_{\text{в}}, 0, t_{\text{в}})}{\partial t_{\text{в}}} \right] \frac{z}{u_0^2} \right|^{-1} \right\}, \quad (4)$$

где  $\operatorname{div}_{\perp} \mathbf{v}_{\perp} = \partial v_x / \partial x_{\text{в}} + \partial v_y / \partial y_{\text{в}}$  — дивергенция  $\mathbf{v}$ , взятая по поперечным координатам  $x_{\text{в}}, y_{\text{в}}$ ;  $z$  — текущая продольная координата, отсчитываемая от плоскости  $z = 0$ .

Основную трудность в нахождении  $\rho(\mathbf{r}, t)$  представляет, как обычно, выражение  $x_{\text{в}}, y_{\text{в}}, t_{\text{в}}$  через  $x, y, z, t$  в явном виде из (2). Однако, если модуляция электронного потока производится полем  $E$ , являющимся периодической функцией поперечных координат  $x, y$  и времени  $t$ , то плотность заряда можно представить в виде тройного ряда Фурье:

$$\rho = \sum_m \sum_p \sum_n \rho_{mpn} \exp \left[ i \left( m\omega t - p \frac{2\pi}{D_1} x - n \frac{2\pi}{D_2} y \right) \right] \quad (5)$$

с коэффициентами  $\rho_{mpn}$ :

$$\rho_{mpn} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho \exp \left[ -i \left( m\omega t - p \frac{2\pi}{D_1} x - n \frac{2\pi}{D_2} y \right) \right] \times \\ \times d\omega t d \left( \frac{2\pi}{D_1} x \right) d \left( \frac{2\pi}{D_2} y \right). \quad (6)$$

Переходя в (6) от переменных  $x, y, t$  к переменным  $x_B, y_B, t_B$ , согласно (2), и учитывая (3), получим\*

$$\begin{aligned} \rho_{mnl} = & \frac{\rho_0}{8\pi^3} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp \left\{ -i \left[ m\omega t(x_B, y_B, z, t_B) - \right. \right. \\ & \left. \left. - p \frac{2\pi}{D_1} x(x_B, y_B, z, t_B) - n \frac{2\pi}{D_2} y(x_B, y_B, z, t_B) \right] \right\} \times \\ \times d\omega t_B d \left( \frac{2\pi}{D_1} x_B \right) d \left( \frac{2\pi}{D_2} y_B \right) = & \frac{\rho_0}{8\pi^3} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp \left\{ -i \left[ m\omega t_B + \right. \right. \\ & + \frac{m\omega z}{v_{\parallel}(x_B, y_B, 0, t_B)} - p \left( \frac{2\pi}{D_1} x_B + \frac{v_x(x_B, y_B, 0, t_B)}{u_0} \frac{2\pi}{D_1} z \right) - \\ & \left. \left. - n \left( \frac{2\pi}{D_2} y_B + \frac{v_y(x_B, y_B, 0, t_B)}{u_0} \frac{2\pi}{D_2} z \right) \right] \right\} d\omega t_B d \left( \frac{2\pi}{D_1} x_B \right) d \left( \frac{2\pi}{D_2} y_B \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычисление интегралов в (7) не требует нахождения обратного преобразования  $x_B, y_B, t_B$  через  $x, y, t$ . Отметим, что выражение (7) для амплитуд гармоник справедливо при наличии обгона одних электронов другими и пересечения различных элементарных электронных пучков, вылетающих с элементов  $dx_B, dy_B$ , разнесенных на конечные расстояния. Действительно, в том случае, если при некоторых  $z$  имеет место обгон электронов и пересечение электронных пучков, в элементарный объем  $dx dy dz$  за интервал времени  $dt$  собираются электроны, пролетевшие модулятора в разные интервалы  $dt_B$  и через различные элементы  $dx_B, dy_B$  его поверхности. В (6) необходимо интегрировать тогда с учетом всех вышеупомянутых групп электронов. При переходе в (6) от переменных  $x, y, t$  к переменным  $x_B, y_B, t_B$  эта неоднозначность снимается, так как пределы интегрирования по времени и координатам влета охватывают все группы электронов, которые пролетают через область модулятора с площадью  $D_1 D_2$  в течение интервала времени, равного периоду колебаний на частоте  $\omega$ . Таким образом, выражение (7) автоматически учитывает возможный обгон одних электронов другими и пересечение различных электронных пучков.

В случае группировки электронов высокочастотным полем с  $E_x = 0$  ряд (5) переходит в двойной ряд Фурье

$$\rho = \sum_m \sum_n \rho_{mn} \exp \left[ i \left( m\omega t - n \frac{2\pi}{D} y \right) \right] \quad (5a)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \rho_{mn} = & \frac{\rho_0}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp \left\{ -i \left[ m\omega t_B + \frac{m\omega z}{v_{\parallel}(y_B, 0, t_B)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - n \left( \frac{2\pi}{D} y_B + \frac{v_y(y_B, 0, t_B)}{u_0} \frac{2\pi}{D} z \right) \right] \right\} d\omega t_B d \left( \frac{2\pi}{D} y_B \right). \end{aligned} \quad (7a)$$

\* Предполагаем, что в момент времени  $t = t_B$  электронный поток не модулирован по плотности ни во времени, ни в пространстве.

## 2. ГРУППИРОВКА ЭЛЕКТРОНОВ БЕГУЩИМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ

Особый интерес представляет анализ группировки электронов бегущим синусоидальным полем, поскольку любое произвольное периодическое поле может быть представлено как суперпозиция различных синусоидальных полей. В качестве примера возьмем поле вида

$$E = V^6 \operatorname{Re} \{ E_p(z) \exp [i(\omega t - h_p y)] \}, \quad (8)$$

где  $\omega$  — частота,  $h_p$  — постоянная распространения электромагнитной волны в  $y$ -направлении,  $V^6$  — амплитуда поля,  $E_p$  — собственная функция  $p$ -го типа волны модулятора:

$$E_p(z) = z_0 E_{pz}(z) - i y_0 E_{py}(z); \quad (9)$$

$E_{py}(z)$  и  $E_{pz}(z)$  — действительные функции  $z$ . Так как по предположению, сделанному в разделе 1, время пролета  $t_{\text{пр}}$  электронов через область, занятую высокочастотным полем, много меньше периода колебаний, то при модуляции электронного потока бегущим полем имеем

$$\begin{aligned} v_{\parallel}(y_b, 0, t_b) &= u_0 + \alpha_1 u_0 \cos(\omega t_b - h_p y_b), \\ v_{\perp}(y_b, 0, t_b) &= \beta_1 u_0 \sin(\omega t_b - h_p y_b), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{V^6}{2V_0} \int_{-z_1}^0 E_{pz}(z) dz \ll 1, \quad \beta_1 = \frac{V^6}{2V_0} \int_{-z_1}^0 E_{py}(z) dz \ll 1;$$

$V_0$  — напряжение пучка.

Согласно (4) и (10),

$$\rho(y, z, t) = \frac{\rho_0}{|1 + zV \alpha_1^2 h_e^2 + \beta_1^2 h_p^2 \sin(\omega t_b - h_p y_b - \varphi^{(1)})|^2}, \quad (11)$$

где  $h_e = \omega / u_0$  — постоянная распространения электронного пучка,

$\varphi^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{\beta_1 h_p}{\alpha_1 h_e}$  — сдвиг фаз, зависящий от параметров электронного потока и структуры поля модулятора,  $t_b = t_b(y, z, t)$  и  $y_b = y_b(y, z, t)$  — неявные функции  $y, z, t$ , определяемые из соотношений

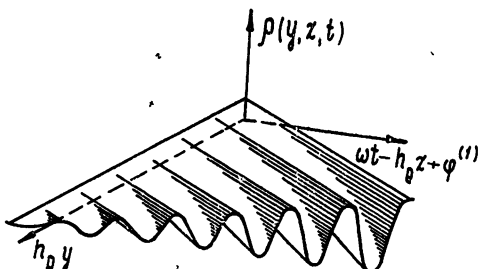
$$\begin{aligned} t &= t_b + \frac{z}{u_0} [1 - \alpha_1 \cos(\omega t_b - h_p y_b)], \\ y &= y_b + z \beta_1 \sin(\omega t_b - h_p y_b). \end{aligned} \quad (12)$$

При слабой группировке, когда  $\alpha_1 h_e z \ll 1$ ,  $\beta_1 h_p z \ll 1$ , из (12) следует,

что  $\omega t_b \approx \omega t - h_e z$ ,  $h_p y_b \approx h_p y$  и  $\rho(y, z, t)$  может быть получена как функция  $y, z, t$  в явном виде\*:

$$\rho(y, z, t) = \rho_0 - \rho_0 z \sqrt{\alpha_1^2 h_e^2 + \beta_1^2 h_p^2} \sin(\omega t - h_e z - h_p y - \varphi^{(1)}). \quad (13)$$

Рис. 2. Плотность пространственного заряда в пространстве дрейфа как функция переменных  $h_p y$  и  $\omega t - h_e z + \varphi^{(1)}$  при группировке электронов широкого электронного потока бегущим полем модулятора для фиксированного момента времени  $t$  ( $X^0 \ll 1$ ).



Для произвольных значений параметра  $X^0 = z \sqrt{\alpha_1^2 h_e^2 + \beta_1^2 h_p^2}$  функция  $\rho(y, z, t)$  может быть записана в виде двойного ряда Фурье:

$$\rho = \sum_m \sum_n \rho_{mn} \exp[i(m\omega t - nh_p y)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho_0 \exp\left[im\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{mm}^{(1)}\right)\right] \times J_m(h_{mm}^{(1)} z) \exp[i(m\omega t - mh_e z - mh_p y)]. \quad (14)$$

Суммирование по  $m$  и  $n$  в (14) заменено суммированием только по  $m$ , так как

$$\rho_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq n, \\ \rho_0 J_m(h_{mm}^{(1)} z) \exp\left[im\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{mm}^{(1)} - h_e z\right)\right] & \text{для } m = n; \end{cases}$$

$J_m(h_{mm}^{(1)} z)$  — функция Бесселя  $m$ -го порядка от аргумента  $h_{mm}^{(1)} z$ ;

$$h_{mm}^{(1)} = \sqrt{m^2 \alpha_1^2 h_e^2 + m^2 \beta_1^2 h_p^2}, \quad \text{tg } \varphi_{mm}^{(1)} = \beta_1 h_p / \alpha_1 h_e.$$

Учитывая, что  $\varphi_{mm}^{(1)} = \varphi_{-m, -m}^{(1)}$  и  $J_{-m}(-mX^0) = J_m(mX^0)$ , можно записать

$$\rho = \rho_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_0 J_m(h_{mm}^{(1)} z) \cos[m\omega t - mh_p y - mh_e z + m(\pi/2 - \varphi_{mm}^{(1)})]. \quad (15)$$

Как видно из (15),  $\rho(y, z, t)$  представляет суперпозицию бесконечного числа «плоских» волн заряда частот  $m\omega$ , бегущих под углом  $\varphi^{(1)} = \text{arctg}(h_p/h_e)$  к оси  $z$ . Амплитуды этих волн зависят от  $z$  как  $J_m(h_{mm}^{(1)} z)$  и достигают наибольших значений при  $z$ , соответствующем максимумам  $J_m(h_{mm}^{(1)} z)$ .

Рассмотрим первую гармонику плотности заряда

$$\rho_{11} = -2\rho_0 J_1(h_{11}^{(1)} z) \sin(\omega t - h_p y - h_e z - \varphi_{11}^{(1)}). \quad (16)$$

\* Разность  $\rho(y, z, t) - \rho_0$  представляет в таком случае «плоскую» волну заряда, амплитуда которой линейно растет с ростом  $z$  (рис. 2).



Аргумент функции Бесселя  $h_{11}^{(1)}z = \sqrt{\alpha_1^2 h_e^2 + \beta_1^2 h_p^2} z = X^6$  естественно называть обобщенным параметром группировки по аналогии с обычным продольным параметром  $X$ . Как известно,  $J_1(X^6)$ , а значит, и амплитуда гармоники  $\rho_{11}$  достигает максимума при  $X^6 = 1,84$ . Это оптимальное значение параметра группировки, обеспечивающее максимальное значение амплитуды первой гармоники

$$|\rho_{11}^{\max}| = 1,16 |\rho_0|.$$

Заметим, что при  $X^6 > 1$   $\rho(y, z, t)$  имеет резко выраженные раздвоенные максимумы по  $y$  и  $t$ . Раздвоение максимумов происходит как за счет обгона одних электронов другими, так и за счет фокусировки электронов, пролетающих модуляторов в различных точках. Наличие поперечных модулирующих полей увеличивает не максимальное значение амплитуды  $\rho_{11}$  (то же относится и к  $\rho_{mn}$ ), а параметр группировки  $X^6$ , ускоряя тем самым процесс образования плотных электронных сгустков. Действительно, если, например,  $\alpha_1 \sim \beta_1$  и  $h_p \sim h_e$ , то время, необходимое для формирования плотного сгустка, сократится в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с группировкой только продольным полем.

Интересным является факт возможности образования плотных электронных сгустков в отсутствие продольного поля ( $\alpha_1 \simeq 0$ ) за счет переменной во времени фокусировки электронов поперечными неоднородными электрическими полями.

### 3. ГРУППИРОВКА ЭЛЕКТРОНОВ СТОЯЧИМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ

В качестве второго важного примера рассмотрим группировку электронов бесконечно широкого электронного потока стоячим полем «плоского» модулятора:

$$\begin{aligned} E_z &= V^{\text{ст}} E_{pz} \cos(h_p y_B) \cos(\omega t_B), \\ E_y &= -V^{\text{ст}} E_{py} \sin(h_p y_B) \cos(\omega t_B), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $V^{\text{ст}}$  — значение поля в пучностях стоячей волны. При модуляции электронного потока стоячим полем (17) полные продольная и поперечная скорости равны

$$\begin{aligned} v_{\parallel}(y_B, 0, t_B) &= u_0 + \alpha_2 u_0 \cos(h_p y_B) \cos(\omega t_B), \\ v_{\perp}(y_B, 0, t_B) &= -\beta_2 u_0 \sin(h_p y_B) \cos(\omega t_B), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{V^{\text{ст}}}{2V_0} \int_{-z_1}^0 E_{pz}(z) dz, \quad \beta_2 = \frac{V^{\text{ст}}}{2V_0} \int_{-z_1}^0 E_{py}(z) dz.$$

Согласно (4) и (18),

$$\begin{aligned} \rho(y, z, t) &= \rho_0 |1 + z \sqrt{\alpha_2^2 h_e^2 + \beta_2^2 h_p^2} \cos(h_p y_B) \times \\ &\times \sin(\omega t_B - \varphi^{(2)})|^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

где, как и ранее в (11),  $\sqrt{\alpha_2^2 h_e^2 + \beta_2^2 h_p^2} z = X^{\text{ст}}$  — обобщенный параметр группировки,  $\varphi^{(2)} = \arctg(\beta_2 h_p / \alpha_2 h_e)$  — начальная фаза, зависящая от

структуры поля и параметров электронного потока, а  $t_b = \hat{t}_b(y, z, t)$  и  $y_b = y_b(y, z, t)$  определяются из соотношений

$$t = t_b + \frac{z}{u_0} [1 - \alpha_2 \cos(h_p y_b) \cos(\omega t_b)],$$

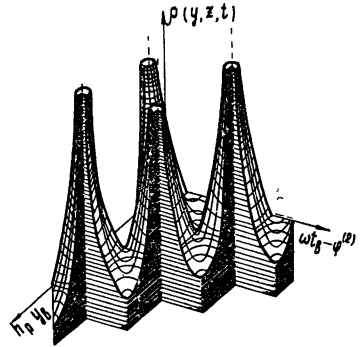
$$y = y_b - z \beta_2 \sin(h_p y_b) \cos(\omega t_b). \tag{20}$$

Качественный вид  $\rho(y, z, t)$  как функции переменных  $h_p y_b$  и  $\omega t_b - \varphi^{(2)}$  изображен на рис. 3, 4а, 4б для различных значений параметра группировки  $X^{ст}$ . Если  $X^{ст} \ll 1$ , то

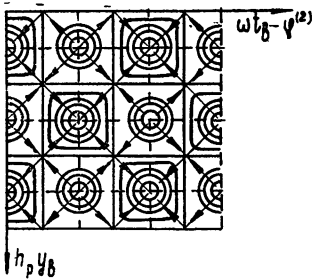
$$\rho(y, z, t) - \rho_0 = -z \rho_0 \sqrt{\alpha_2^2 h_e^2 + \beta_2^2 h_p^2} \cos(h_p y) \times$$

$$\times \sin(\omega t - h_e z - \varphi^{(2)}) \tag{21}$$

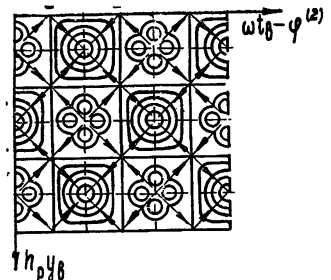
Рис. 3. Плотность пространственного заряда в пространстве дрейфа как функция переменных  $h_p y_b$  и  $\omega t_b - \varphi^{(2)}$  при группировке электронов широкого электронного потока стоячим полем модулятора ( $X^{ст} \sim 1$ ).



есть волна с линейно нарастающей амплитудой, бегущая в  $z$ -направлении. При малых значениях параметра группировки распределение пере-



а)



б)

Рис. 4. а) Распределение плотности пространственного заряда в электронном потоке, модулированном стоячей электромагнитной волной, при  $X^{ст} \sim 1$ . Сплошные линии-уровни постоянных значений  $\rho(y, z, t)$ ; стрелки показывают направление убывания и возрастания функции (к центру квадратов—убывание, от центра—возрастание).

б) Распределение плотности пространственного заряда в электронном потоке, модулированном стоячей электромагнитной волной, при  $X^{ст} > 1$ .

менной составляющей плотности заряда в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , имеет вид стоячей волны с максимумами и минимумами, соответ-

ствующими пучностям и узлам переменной продольной скорости\*. Возможность группировки электронов поперечными неоднородными полями (случай  $\beta_2 h_p \gg \alpha_2 h_e$ ) особенно хорошо иллюстрируется на примере стоячей волны (рис. 5).

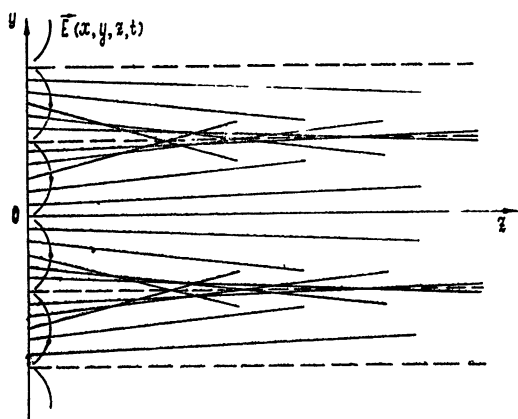


Рис. 5. Фокусировка электронов широкого электронного потока поперечным неоднородным полем модулятора (стоячая волна поля).

Для произвольных значений параметра группировки  $\rho(y, z, t)$  с учетом (7) и (18) может быть представлена в виде двойного ряда Фурье:

$$\rho = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_0 J_{\frac{m+n}{2}} \left( \frac{1}{2} h_{mn}^{(2)} z \right) J_{\frac{m-n}{2}} \left( \frac{1}{2} h_{mn}^{(2)} z \right) \times \exp \left\{ i \left[ m \left( \omega t - h_e z + \frac{\pi}{2} \right) - n h_p y - n \varphi_{mn}^{(2)} \right] \right\}, \quad (22)$$

где

$$\varphi_{mn}^{(2)} = \arctg \frac{n \beta_2 h_p}{m \alpha_2 h_e}, \quad h_{mn}^{(2)} = \sqrt{m^2 \alpha_2^2 h_e^2 + n^2 \beta_2^2 h_p^2},$$

$J_{\frac{m+n}{2}}$  и  $J_{\frac{m-n}{2}}$  — функции Бесселя соответствующих порядков. Члены ряда (22) с индексами  $m$  и  $n$  разной четности равны нулю.

Гармоника плотности заряда  $\rho(y, z, t)$  основной частоты  $\omega$  является суперпозицией пространственных гармоник с индексами  $m = \pm 1$ , т. е.

$$\rho_{ст}^{\omega} = -4 \rho_0 \sum_{n=1}^{+\infty} J_{\frac{1+n}{2}} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} z \right) J_{\frac{1-n}{2}} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} z \right) \times \cos(n h_p y) \sin(\omega t - h_e z - n \varphi_{1n}^{(2)}). \quad (23)$$

Сумма пространственно-временных гармоник с  $n = \pm 1$ :

\* При слабой группировке стоячим полем плотность пространственного заряда в каждой точке  $y, z$  представляет из себя суперпозицию двух бегущих под углами  $\arctg(h_p/h_e)$  и  $-\arctg(h_p/h_e)$  к оси  $z$  волн плотности вида (13).

$$\rho_{ст 1,1}^{\omega} = -4\rho_0 J_1 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} z \right) J_0 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} z \right) \cos(h_p y) \times \sin(\omega t - h_e z - \varphi_{11}^{(2)}) \quad (24)$$

дает волну, бегущую в  $z$ -направлении со «стоячим» вдоль  $y$  распределением плотности заряда. Пространственный период изменения амплитуды  $\rho_{ст 1,1}^{\omega}$  вдоль  $y$  равен периоду модулирующего поля. При значениях параметра группировки  $X^{ст}$ , близких к 2, 2, в пучностях стоячей волны плотности достигается максимальное значение первой гармоники

$$|\rho_{ст 1,1}^{\omega}|^{max} = 1,36 |\rho_0|.$$

#### 4. ВОЗБУЖДЕНИЕ «ПЛОСКИХ» ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ШИРОКИМИ МОДУЛИРОВАННЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ (НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА)

Выше мы рассматривали группировку электронов в бесконечно широком электронном потоке бегущим и стоячим полем «плоского» модулятора. Отбор мощности от электронного потока также может осуществляться «плоскими» выходными устройствами, в которых возбуждаются бегущие или стоячие электромагнитные поля. Возможность эффективной группировки электронов в пространстве дрейфа при модуляции их по продольным и поперечным скоростям позволяет построить приборы клистронного типа с «плоскими» входным и выходным элементами связи.

Задачу о возбуждении «плоских» электродинамических систем модулированным по плотности широким электронным потоком рассмотрим в приближении заданного тока.

1. Предположим, что модулированный электронный поток пролетает через область пространства, ограниченную сечениями  $z_2 = D$  и  $z_3 = D + l$  (рис. 6), в которой может возбуждаться высокочастотное поле (волновод, образованный двумя параллельными металлическими плоскостями, или пространство над «плоской» двумерной замедляющей системой). Пусть в выходном устройстве, нагруженном на согласованные нагрузки, могут существовать волны, распространяющиеся только в  $\pm y$ -направлении. Время пролета электронов между сечениями  $z_2 = D$  и  $z_3 = D + l$  считаем много меньшим периода колебаний на частоте  $\omega$ .

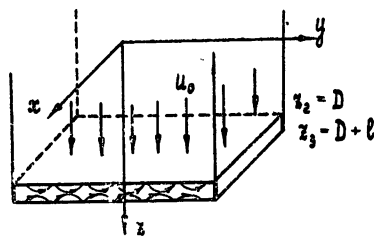


Рис. 6.

При этих предположениях поле, возбужденное широким пучком электронов в такой системе на частоте  $\omega$ , равно [8]

$$E(y, z, t) = \left\{ \sum_s C_s(y) E_s(z) e^{-ih_s y} + \sum_{-s} C_{-s}(y) E_{-s}(z) e^{ih_s y} \right\} e^{i\omega t}, \quad (25)$$

где  $C_s(y)$  и  $C_{-s}(y)$  — амплитуды,  $E_{\pm s}(z)$  — собственные функции,  $h_{\pm s}$  — постоянные распространения волны  $s$ -го типа. Как следует из [8],

$$C_{\pm s}(y) = \mp \frac{1}{N_s} \int_{y_1, y_2}^y \int_D^{D+l} I_z^\omega(\xi, \eta) E_{\mp sz}(\eta) e^{\pm i h_s \xi} d\eta d\xi, \quad (26)$$

где  $I_z^\omega(y, z) = j_z^\omega(y, z) |x_2 - x_1|$  — комплексная амплитуда возбуждающего тока на единицу длины вдоль  $y$ ,  $N_s$  — норма волны ( $N_s > 0$ ).

Мощности, отдаваемые электронным потоком в волны  $s$ -го типа, равны

$$P_{\pm s}(y) = \frac{C_{\pm s}(y) C_{\pm s}^*(y) N_s}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{y_1, y_2}^y \int_D^{D+l} I_z^\omega(\xi, \eta) \times \right. \\ \left. \times C_{\pm s}^*(\xi) E_{\mp sz}(\eta) e^{\pm i h_s \eta} d\eta d\xi \right\}. \quad (27)$$

Величина  $C_{\pm s}^*(y) E_{\mp sz}(z)$  под знаком интеграла в (27) — поле, возбужденное заданным током.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

а) Электронный поток модулирован бегущим высокочастотным полем. Тогда с учетом (15) составляющая тока частоты  $\omega$  будет равна

$$(I_z^\omega)^6(y, z) = -2 |j_0| J_1(h_{11}^{(1)} z) \exp \left[ -i \left( h_p y + h_e z - \frac{\pi}{2} + \varphi_{11}^{(1)} \right) \right],$$

где  $j_0$  — постоянная составляющая тока на единицу длины вдоль  $y^*$ . Ток  $(I_z^\omega)^6(y, z)$  возбудит волны, бегущие в  $\pm u$ -направлении, с амплитудами

$$C_s^6(y) = \frac{2 |j_0| J_1(h_{11}^{(1)} D) e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(1)} - h_e D)}}{N_s} \frac{e^{i(h_s - h_p)y} - e^{-i(h_s - h_p)y}}{i(h_s - h_p)} M_s, \quad (28)$$

$$C_{-s}^6(y) = \frac{2 |j_0| J_1(h_{11}^{(1)} D) e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(1)} - h_e D)}}{N_s} \frac{e^{-i(h_s + h_p)y} - e^{-i(h_s + h_p)y}}{-i(h_s + h_p)} M_s,$$

где  $M_s = \int_D^{D+l} E_{sz}(z) dz$ . В силу того, что расстояние между сечениями  $z_2 = D$  и  $z_3 = D + l$  пренебрежимо мало, значение функции  $J_1(h_{11}^{(1)} z)$  в (28) взято в точке  $z_2 = D$ .

При выполнении условия синхронизма  $h_s = h_p$  амплитуда волны

$$C_s^6(y) = \frac{2 |j_0| J_1(h_{11}^{(1)} D) (y - y_1) e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(1)} - h_e D)}}{N_s} M_s \quad (28a)$$

линейно растет с ростом  $y$  и достигает максимального значения  $2 I_0 J_1(h_{11}^{(1)} D) N_s^{-1} e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(1)} - h_e D)} M_s$  на краю потока при  $y = y_2$ ;  $I_0 = |j_0| (y_2 - y_1)$  — полный ток пучка. Амплитуды волн с  $h_s \neq h_p$  являются осциллирующими функциями  $y$  и пренебрежимо малы по сравнению с  $C_s^6(y)$ , если ширина потока  $y_2 - y_1$  много больше длины волны в волноводе

\* Мы не учитываем краевых эффектов, связанных с конечными размерами электронного потока (ток на краях пучка отличается от тока, полученного выше).

$\lambda_s = 2\pi/h_s$ . Полная мощность, отдаваемая электронным потоком в волну, бегущую в  $y$ -направлении, может быть определена с помощью (27):

$$P_s^6 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} (I_z^\omega)^6 (\xi, D) C_s^* (\xi) e^{ih_s \xi} d\xi M_s \right\} = \frac{I_0^2 J_1^2 (h_{11}^{(1)} D) M_s^2}{N_s} \quad (29)$$

Выражение (29) справедливо для амплитуд  $|(C_s^6)^{\max}| M_s < V_0$  ( $V_0$  — напряжение пучка), так как при значениях  $|(C_s^6)^{\max}| M_s \simeq V_0$  возбуждающий ток нельзя считать заданным. Поэтому можно оценить то предельное значение выходной мощности, ниже которой еще можно пользоваться приближением заданного тока. Для этого необходимо в (29) положить  $|(C_s^6)^{\max}| M_s \simeq V_0^*$ ; тогда

$$(P_s^6)_{\text{пред}} \sim \frac{I_0 V_0}{2} J_1 (h_{11}^{(1)} D).$$

Если взять расстояние между модулятором и выходным волноводом, а также амплитуду поля такой, чтобы  $h_{11}^{(1)} D = 1,84$ , то

$$J_1^{\max}(1,84) = 0,58; \quad (P_s^6)_{\text{пред}}^{\max} \simeq 0,29 I_0 V_0.$$

б) Электронный поток модулирован стоячим высокочастотным полем. Возбуждающий ток в этом случае — сумма бесконечного числа пространственных гармоник частоты  $\omega$ :

$$(I_z^\omega)^{\text{ст}} = -4 |j_0| \sum_{n=1}^{+\infty} J_{1+n} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} z \right) J_{1-n} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} z \right) \cos(nh_p y) \times \\ \times \exp[-i(h_e z + n\varphi_{1n}^{(2)} - \pi/2)].$$

Следовательно,

$$C_{\pm s}^{\text{ст}}(y) = \pm \frac{4|j_0|}{N_s} \int_{y_1}^{y_2} \int_D^{D+l} \sum_{n=1}^{+\infty} J_{1+n} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} z \right) J_{1-n} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} z \right) \cos(nh_p y) \times \\ \times e^{i(\pi/2 - n\varphi_{1n}^{(2)} - h_e D)} E_{\mp s_2}(z) e^{-ih_e z} e^{\pm ih_s y} dz dy = \pm \frac{4|j_0|}{N_s} \sum_{n=1}^{+\infty} J_{1+n} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} D \right) \times (30) \\ \times J_{1-n} \left( \frac{1}{2} h_{1n}^{(2)} D \right) e^{i(\pi/2 - n\varphi_{1n}^{(2)} - h_e D)} \int_{y_1}^{y_2} \cos(nh_p y) e^{\pm ih_s y} dy M_s.$$

\* Такая оценка дает мощность, близкую к реальной предельной мощности.

Если выполняются условия синхронизма  $h_p = h_s$  и  $-h_p = -h_s$  и ширина потока много больше длины волны  $\lambda_s^*$ , то в выходном элементе связи возбуждаются бегущие волны частоты  $\omega$  с линейно нарастающей в  $\pm y$ -направлениях амплитудой:

$$C_s^{\text{ст}}(y) = \frac{2}{N_s} |j_0| J_1 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) J_0 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) (y - y_1) e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(2)} - h_e D)} M_s, \quad (30a)$$

$$C_{-s}^{\text{ст}}(y) = \frac{2}{N_s} |j_0| J_1 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) J_0 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) (y_2 - y) e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(2)} - h_e D)} M_s.$$

Мощности, отдаваемые электронным потоком в бегущие волны (согласованные с волноводом нагрузки), легко находятся с учетом (27), (30a):

$$P_s^{\text{ст}} = P_{-s}^{\text{ст}} = \frac{1}{2} I_0 J_1 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) J_0 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) |C_s^{\text{ст}}|^{\text{max}} M_s, \quad (31)$$

где

$$|C_s^{\text{ст}}|^{\text{max}} = (2I_0/N_s) J_1 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) J_0 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) M_s.$$

Таким образом, полная мощность, отдаваемая в нагрузки «плоского» волновода током  $(I_2^{\omega})^{\text{ст}}$ , равна

$$P^{\text{ст}} = P_s^{\text{ст}} + P_{-s}^{\text{ст}} = N_s^{-1} 2I_0^2 J_1^2 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) J_0^2 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) M_s^2.$$

Оценка максимальной предельной мощности, при которой нельзя пользоваться приближением заданного тока, дает

$$(P^{\text{ст}})_{\text{пред}}^{\text{max}} \sim I_0 V_0 \left\{ J_1 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) J_0 \left( \frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D \right) \right\}^{\text{max}} \sim 0,34 I_0 V_0.$$

2. а) Если выходное устройство является «плоским» резонатором, собственная функция которого на частоте  $\omega = \omega_s$  (собственная частота резонатора)  $\text{Re} \left\{ \frac{E_s(z) e^{-ih_s y} + E_s^*(z) e^{ih_s y}}{2} e^{i\omega_s t} \right\}$ , то «бегущий» и «стоячий» токи возбуждают в нем колебания с амплитудами поля в пучностях, равными, согласно [8],

$$C_s^6 \text{ рез} = - \frac{Q_s}{\omega_s N_s \text{ рез}} \int_{y_1}^{y_2} \int_D^{D+l} (I_2^{\omega})^6(y, z) E_{sz}(z) \cos h_s y \, dz \, dy =$$

$$= \frac{Q_s I_0 J_1(h_{11}^{(1)} D) M_s e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(1)} - h_e D)}}{\omega_s N_s \text{ рез}},$$

\* При  $|y_2 - y_1| \gg \lambda_s$  можно пренебречь излучением назад гармоник тока с  $n = \pm 1$  и пренебречь полями, возбуждаемыми в волноводе пространственными гармониками тока с  $|n| > 1$ , так как для  $|n| > 1$

$$\left| \frac{C_{\mp sn}^{\text{ст}}}{C_{\pm s1}^{\text{ст}}} \right| \sim \left| \frac{C_{\mp sn}^{\text{ст}}}{C_{\pm s1}^{\text{ст}}} \right| \sim \frac{\lambda_s}{|n(y_2 - y_1)|} \ll 1.$$

$$C_{s \text{ рез}}^{\text{ст}} = -\frac{Q_s}{\omega_s N_{s \text{ рез}}} \int_{y_1}^{y_2} \int_D^{D+l} (I_z^\omega)^{\text{ст}}(y, z) E_{sz}(z) \cos h_s y \, dz \, dy =$$

$$= \frac{2Q_s I_0 J_1\left(\frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D\right) J_0\left(\frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D\right) M_s e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(2)} - h_e D)}}{\omega_s N_{s \text{ рез}}}$$
(32)

Здесь  $N_{s \text{ рез}}$  — норма колебания,  $Q_s$  — добротность резонатора\*.

Активная (средняя) мощность, выделяющаяся в стенках резонатора и нагрузке на частоте  $\omega = \omega_s$ , равна

$$P_{s \text{ рез}} = \omega_s Q_s^{-1} W_{s \text{ рез}}, \tag{33}$$

где  $W_{s \text{ рез}} = \frac{1}{2} |C_{s \text{ рез}}|^2 |N_{s \text{ рез}}|$  определяет запас электромагнитной энергии в резонаторе. При возбуждении резонатора «бегущим» током

$$P_{s \text{ рез}}^6 = \frac{I_0^2 J_1^2(h_{11}^{(1)} D) Q_s M_s^2}{|2\omega_s N_{s \text{ рез}}|}; \tag{34}$$

при возбуждении «стоячим» током

$$P_{s \text{ рез}}^{\text{ст}} = \frac{2I_0^2 J_1^2\left(\frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D\right) J_0^2\left(\frac{1}{2} h_{11}^{(2)} D\right) Q_s M_s^2}{\omega_s |N_{s \text{ рез}}|}. \tag{35}$$

Приближение заданного тока справедливо, если  $|C_{s \text{ рез}}^6|^{\max} = \frac{0,58 Q_s I_0 M_s}{\omega_s |N_{s \text{ рез}}|} < V_0$  для «бегущего» и  $|C_{s \text{ рез}}^{\text{ст}}|^{\max} \approx \frac{0,68 Q_s I_0 M_s}{\omega_s |N_{s \text{ рез}}|} < V_0$  для «стоячего» токов, т. е. если

$$(P_{s \text{ рез}}^6)_{\text{пред}}^{\max} < 0,29 I_0 V_0; \quad (P_{s \text{ рез}}^{\text{ст}})_{\text{пред}}^{\max} < 0,34 I_0 V_0.$$

б) Интересен случай возбуждения «бегущим» током «плоского» резонатора, собственными функциями которого на частоте  $\omega = \omega_s$  являются бегущие волны\*\*

$$E = \text{Re}\{E_s(z) e^{\pm i h_s y} e^{i \omega_s t}\}.$$

Если ширина потока равна целому числу полувольт поля резонатора (или  $|y_2 - y_1| \gg \lambda_s$ ), то ток  $(I_z^\omega)^6 = -2 |j_0| J_1(h_{11}^{(1)} D) \exp[-i(h_p y + h_e z - \pi/2 + \varphi_{11}^{(1)})]$  возбуждает только одну волну в резонаторе, бегущую в  $y$ -направлении с амплитудой

\* Здесь предположено для простоты, что ширина электронного потока равна ширине резонатора и  $h_s = h_p$ .

\*\* «Плоская» волноводная система, замкнутая сама на себя вне пределов электронного потока.



$$C_{\text{рез}}^6 = - \frac{Q_s}{\omega_s N_s \text{рез}} \int_{y_1}^{y_2} \int_D^{D+1} (I_z^\omega)^6(y, z) E_{sz}(z) e^{i h_s y} dz dy = \frac{2 Q_s I_0 J_1 (h_{11}^{(1)} D) M}{\omega_s N_s \text{рез}} \times \quad (36)$$

$$\times e^{i(\pi/2 - \varphi_{11}^{(1)} - h_e D)},$$

если  $h_s = h_p$ . Мощность, выделяющаяся тогда в стенках и нагрузке резонатора, равна

$$P_{\text{рез}}^6 = \frac{2 I_0^2 J_1^2 (h_{11}^{(1)} D) Q_s M_s^2}{\omega_s |N_s \text{рез}|}. \quad (37)$$

Оценка максимальной предельной мощности дает в этом случае\*

$$(P_{s \text{рез}}^6)_{\text{пред}}^{\text{max}} \sim 0,58 I_0 V_0.$$

Таким образом, при конструировании мощных клистронных усилителей с широкими электронными потоками можно выбирать любой «плоский» модулятор, в котором возбуждалось бы любое поле типа ТМ или ТЕ. В качестве входного и выходного элементов связи могут быть использованы, например, двумерные замедляющие системы. Наличие ортогональных к направлению движения электронного потока компонент поля не только не ухудшает группировку, а напротив, может увеличить параметр группировки, ускорив тем самым процесс образования плотных электронных сгустков по сравнению с группировкой только продольными полями ( $\alpha \sim \beta$ ).<sup>†</sup>

Возможно построение прибора клистронного типа, в котором группировка электронов производилась бы только поперечными неоднородными полями за счет переменной во времени фокусировки электронного пучка. Автор признателен А. В. Галонову за предложенную тему и обсуждение настоящей статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Т. G. Mihran, Proc. IRE, **40**, 308 (1952).
2. M. R. Boyd, R. A. Dehn, J. S. Hickey, T. G. Mihran, Trans. IRE, **ED-9**, 247 (1962).
3. M. R. Boyd, R. A. Dehn, J. S. Hickey, T. G. Mihran, IRE Internat. Conv. Rec., **10**, 62 (1962).
4. J. S. Hickey, Electron Inds., **21**, 92 (1962).
5. R. A. Dehn, J. J. Hamilton, J. S. Hickey, Microwave J., **6**, 68 (1963).
6. Electron News, **10**, 490, sec. 1, 5 (1965).
7. E. Leslie, Radio Electr., **35**, 40 (1964).
8. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 февраля 1966 г.

\* В работе [1] аналогичный результат получен при возбуждении «бегущим» током волновода с переменным характеристическим импедансом. Импеданс меняется таким образом, что амплитуда волны остается постоянной в пределах электронного потока.

---

**ON ROLE OF TRANSVERSE BUNCHING IN KLYSTRON WITH  
WIDE ELECTRON FLOW***A. A. Shaposhnikov*

A klystron with a wide electron flow has been considered. The input and output couplers are represented in the form of the „plane“ systems, in which the travelling or standing electromagnetic waves can be excited. The analysis of electrons bunching has been made for the case of the infinite wide electron flow in the kinematic approximation, without taking into account the field of a space charge. The excitation of the „plane“ waveguide (resonator) systems is being considered by the modulated flow of electrons.

---

УДК 621.385.7

## ОБ ОСТРОВНОМ ЭФФЕКТЕ В ПЛАТИОНАХ

С. Г. Афанасов, И. Я. Ашбель, Ю. Е. Красильников

Проведен расчет действующей площади катода для различных режимов работы платионов. Рассмотрены особенности работы платиона, связанные с изменением действующей площади катода.

Существенной особенностью платионов (трехэлектродных ламп, образуемых двумя плоскостями и катодом, помещенным между ними [1]) является изменение действующей площади катода при изменении потенциалов электродов в любом режиме работы и при любой геометрии катода (так называемый «островной эффект»). Под действующей площадью катода здесь и далее понимается часть его поверхности, которая участвует в образовании анодного тока. «Островной эффект» определяет вид вольт-амперных характеристик платионов.

### 1. ДЕЙСТВУЮЩАЯ ПЛОЩАДЬ КАТОДА ПРИ $u_c < 0$

Рассмотрим платион с катодом, образованным бесконечной эквидистантной\* решеткой, и с бесконечными плоскими электродами. Распределение потенциала в такой системе при условиях  $\rho/s \ll 1$ ,  $s/d_{ка}$ ,  $s/d_{ка} \ll 1$  (рис. 1) описывается формулой

$$u = -A \ln\{\exp[(4\pi r/s) \cos \varphi] + 1 - 2 \exp[(2\pi r/s) \cos \varphi] \times \cos[(2\pi r/s) \sin \varphi]\} - 2B(2\pi r/s) \cos \varphi + C, \quad (1)$$

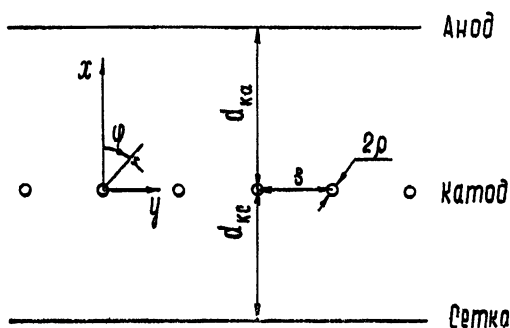


Рис. 1.

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты, а коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяются из граничных условий на аноде, катоде и управляющем электроде. Обозначая через  $u_a = u|_{x=d_{ка}}$ ,  $u_k = u|_{x=0}$ ,  $u_c = u|_{x=-d_{кc}}$  соответственно потенциалы анода, катода и сетки\*\*, получим

$$A = \frac{s - u_c/d_{кc} - u_a/d_{ка}}{4\pi [1 + \gamma/d_{ка} + \gamma/d_{кc}]},$$

$$B = -\frac{s}{4\pi d_{кc}} \frac{-u_c [1 + (\gamma/d_{ка})] + u_a \gamma/d_{ка}}{1 + \gamma/d_{ка} + \gamma/d_{кc}}, \quad (2)$$

\* Эквидистантная решетка — решетка, образованная равноотстоящими друг от друга цилиндрами.

\*\* По аналогии с обычными триодами под сеткой подразумевается управляющий электрод.

$$C = \frac{u_c \gamma / d_{kc} + u_a \gamma / d_{ka}}{1 + \gamma / d_{ka} + \gamma / d_{kc}},$$

где  $\gamma = s \ln(s/2\pi r) / 2\pi$ .

Поле на катоде имеет вид

$$E|_{r=r_0} = -\frac{\partial u}{\partial r|_{r=r_0}} = -\frac{4\pi}{s} \left\{ -\frac{A \exp(\alpha \cos \varphi) \sin(\alpha \sin \varphi)}{v} \sin \varphi - \right. \\ \left. - [(A+B) \exp(2\alpha \cos \varphi) + (A+2B) \exp(\alpha \cos \varphi) \cos(\alpha \sin \varphi) - B] v^{-1} \cos \varphi \right\}, \quad (3)$$

где

$$v = \exp(2\alpha \cos \varphi) + 1 - 2 \exp(\alpha \cos \varphi) \cos(\alpha \sin \varphi)$$

и  $\alpha = 2\pi r / s$ . Подставляя в (3)  $A$  и  $B$  из (2) и учитывая здесь и в дальнейшем, что  $(\gamma / d_{kc}), (\gamma / d_{ka}) \ll 1$ , получим

$$E|_{r=r_0} = -\frac{u_a}{d_{ka} v} \{ [\exp(2\alpha \cos \varphi) + (\beta - i) \exp(\alpha \cos \varphi) \times \\ \times \cos(\alpha \sin \varphi) - \beta] \cos \varphi + (\beta + 1) \exp(\alpha \cos \varphi) \sin(\alpha \sin \varphi) \sin \varphi \}, \quad (4)$$

где  $\beta = (u_c / u_a) (d_{ka} / d_{kc})$ . Полагая для малых  $\alpha$

$$\exp(2\alpha \cos \varphi) = 1 + 2\alpha \cos \varphi + 2\alpha^2 \cos^2 \varphi,$$

$$\exp(\alpha \cos \varphi) = 1 + \alpha \cos \varphi + (\alpha^2 \cos^2 \varphi) / 2,$$

$$\sin(\alpha \sin \varphi) = \alpha \sin \varphi,$$

$$\cos(\alpha \sin \varphi) = 1 - (\alpha^2 \sin^2 \varphi) / 2,$$

нетрудно найти

$$E|_{r=r_0} = -\frac{u_a}{d_{ka}} \left[ \frac{1}{\alpha} (1 + \beta) + \frac{1}{2} (3 + \beta) \cos \varphi \right]. \quad (4a)$$

Из (4) видно, что при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$  поверхность катода разделяется на два участка, на одном из которых  $E|_{r=r_0} > 0$ , а на другом  $E|_{r=r_0} < 0$ .

В образовании тока участвует поверхность катода, где поле уско-ряющее (при этом предполагается, что начальная скорость электронов равна нулю). В рассматриваемом режиме ( $u_c < 0$ ) эта поверхность равна действующей площади катода.

Граница действующей площади катода  $\varphi_0$  определяется корнем уравнения

$$E|_{r=r_0} = 0,$$

который для  $\alpha \geq 0,3$  имеет вид

$$\beta = \frac{-\exp(2\alpha \cos \varphi_0) \cos \varphi_0 + \exp(\alpha \cos \varphi_0) \cos(\alpha \sin \varphi_0 + \varphi_0)}{\exp(\alpha \cos \varphi_0) \cos(\alpha \sin \varphi_0 - \varphi_0) - \cos \varphi_0}, \quad (5)$$

а для  $\alpha < 0,3^*$

$$\beta = -1 - \frac{\alpha \cos \varphi_0}{1 + \frac{\alpha}{2} \cos \varphi_0}. \quad (6)$$

\* Для  $\alpha = 0,3$  погрешность определения  $\beta$  не превосходит 10%.

На рис. 2 представлена зависимость  $\varphi_0$  от  $-\beta$  для различных  $\alpha$  (кривые 1÷6). Пересечения кривых  $\varphi_0=f(-\beta)$  с прямыми  $\varphi_0=0$  и  $\varphi_0=\pi$  определяют интервал значений  $\beta$ , в котором действующая площадь катода при изменении потенциалов электродов меняется от нуля ( $|\beta|>1$ ) до его полной геометрической поверхности ( $|\beta|<1$ ). Из рисунка видно, что чем больше величина  $\alpha$  (т. е. чем больше радиус катода), тем шире область значений  $\beta$ , соответствующих совместному существованию на катоде тормозящего и ускоряющего полей.

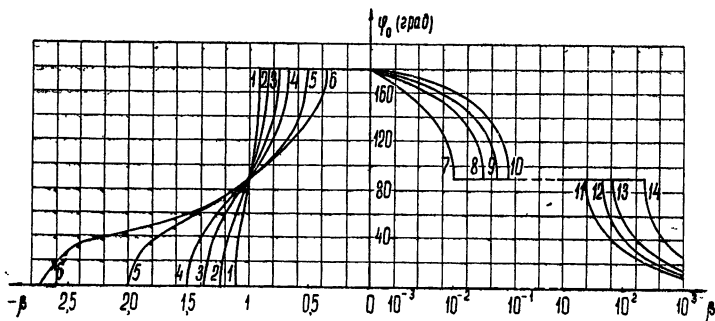


Рис. 2. Кривые для расчета действующей площади катода: 1— $\alpha = 0,1$ ; 2— $\alpha = 0,2$ ; 3— $\alpha = 0,3$ ; 4— $\alpha = 0,4$ ; 5— $\alpha = 0,7$ ; 6— $\alpha = 1$ ; 7— $\gamma/d_{к с} = 0,01$ ; 8— $\gamma/d_{к с} = 0,03$ ; 9— $\gamma/d_{к с} = 0,05$ ; 10— $\gamma/d_{к с} = 0,08$ ; 11— $\gamma/d_{к а} = 0,04$ ; 12— $\gamma/d_{к а} = 0,025$ ; 13— $\gamma/d_{к а} = 0,015$ ; 14— $\gamma/d_{к а} = 0,005$ .

## 2. ДЕЙСТВУЮЩАЯ ПЛОЩАДЬ КАТОДА ПРИ $u_c > 0$

При положительных потенциалах анода и сетки на всей поверхности катода существует ускоряющее поле, т. е. вся поверхность является эмиттирующей. В этом режиме в платионе (в отличие от обыкновенных триодов) можно строго разграничить части катодной поверхности, участвующие в образовании анодного и сеточного токов.

Действующую площадь катода можно найти, определив угол вылета электронов с катода  $\varphi_0$ , который разделяет электронный поток на анодный и сеточный.

Вблизи катода движение электронов можно считать радиальным; на больших расстояниях ( $|x| \gg \rho$ ) траектории электронов определяются однородными полями. Как показано в работе [2], уравнение траектории, касающейся электрода, отстоящего от катода на расстояние  $l$  ( $|x| = l$ ), вблизи него может быть записано в следующем виде:

$$x = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial |x|} \frac{1}{u_l} \left( \frac{y}{2} - y_m \right), \quad (7)$$

где  $u$  — потенциал в точке  $x$  при  $|x| \gg \rho$ ,  $y_m$  — значение  $y$  при  $|x| = l$ ,  $u_l$  — потенциал в точке  $|x| = l$ . Величина  $\varphi_0$  связана с  $y_m$  соотношением

$$y_m = - \frac{2u_l}{\partial u / \partial |x|} \operatorname{ctg} \varphi_0.$$

Подставляя в уравнение (7) координаты точки касания  $|x| = l$ ,  $y = y_m$ , нетрудно найти связь между углом вылета  $\varphi_0$  и потенциалами электродов:

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi_0 = - \frac{l}{u_l} \frac{\partial u}{\partial |x|}. \quad (8)$$

Для траектории, касающейся сетки,

$$l = d_{кс}, \quad u_l = u_c, \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} = \frac{4\pi}{s} B, \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi_0 = \frac{1}{\beta} \frac{\gamma}{d_{кс}} - 1.$$

Для траектории, касающейся анода,

$$l = d_{ка}, \quad u_l = u_a, \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} = -\frac{4\pi}{s} (A+B), \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi_0 = \beta \frac{\gamma}{d_{ка}} - 1.$$

На рис. 2 представлена зависимость  $\varphi_0$  от  $\beta$  для различных значений  $\gamma/d_{кс}$  и  $\gamma/d_{ка}$  (кривые 7÷14).

При  $\beta < \gamma/d_{кс}$  в пространстве катод—сетка существует тормозящее поле. Это означает, что для электронов, вылетевших с поверхности катода в сторону сетки ( $\varphi > \pi/2$ ), существует режим возврата на анод (рис. 3а).

Аналогично при  $\beta > d_{ка}/\gamma$  для электронов, вылетевших с поверхности катода в сторону анода ( $\varphi < \pi/2$ ), существует режим возврата на сетку (рис. 3б).

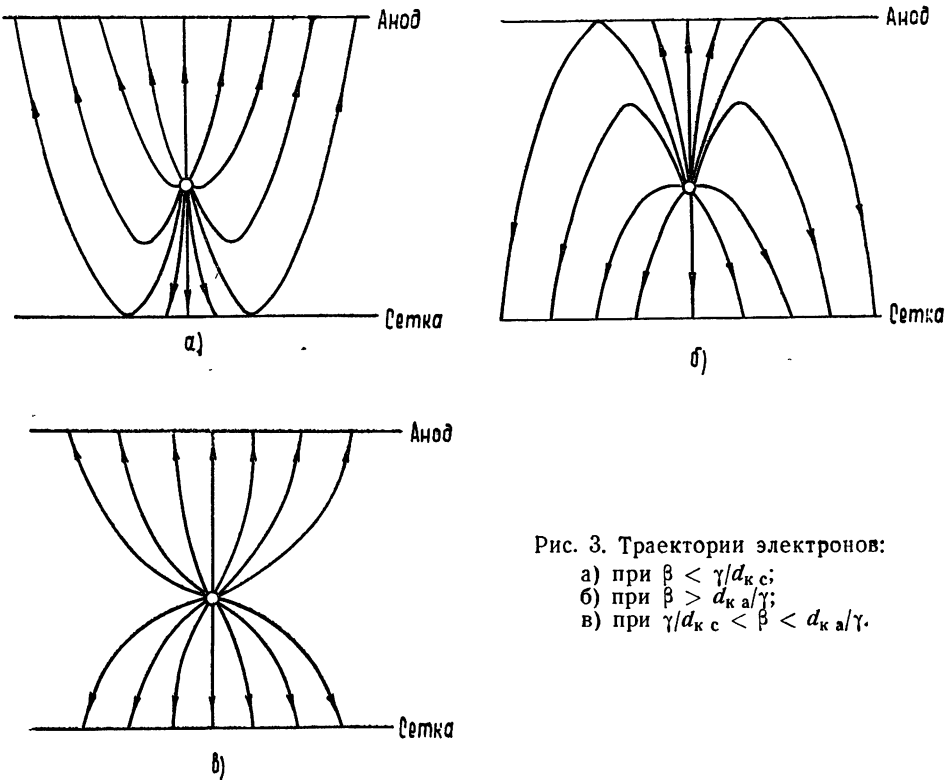


Рис. 3. Траектории электронов:

- а) при  $\beta < \gamma/d_{кс}$ ;
- б) при  $\beta > d_{ка}/\gamma$ ;
- в) при  $\gamma/d_{кс} < \beta < d_{ка}/\gamma$ .

Если  $\gamma/d_{кс} < \beta < d_{ка}/\gamma$ , то в пространстве катод—анод (как и в пространстве катод—сетка) существуют ускоряющие поля. Действующая площадь катода в этом случае равна половине геометрической

площади катода ( $\varphi_0 = \pi/2$ ). Соответствующие траектории электронов представлены на рис. 3в.

Следует заметить, что диапазон изменения  $\beta$ , в котором действующая площадь катода равна половине его геометрической поверхности, увеличивается с уменьшением проникаемости решетки катода (т. е. с уменьшением  $\gamma/d_{к с}$ ,  $\gamma/d_{к а}$ , см. рис. 2).

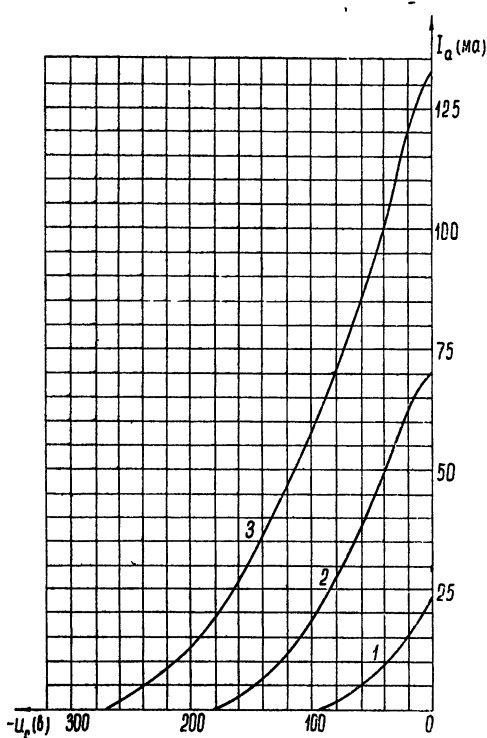


Рис. 4. Вольт-амперные характеристики образца № 2: 1— $u_a = 100$  в; 2— $u_a = 200$  в; 3— $u_a = 300$  в.

несколько образцов лампы плоской конструкции (см. таблицу 1). Вольт-амперные характеристики образца № 2 (таблица 1) представлены на рис. 4.

Четкое разграничение частей катодной поверхности, участвующих в образовании анодного и сеточного токов, дает возможность значительно уменьшить сеточный ток при положительном потенциале управляющего электрода путем, например, нанесения эмиттирующего покрытия на поверхность катода, соответствующую его действующей площади. В этом смысле островной эффект играет положительную роль и может оказаться полезным при конструировании мощных ламп или ламп с правыми характеристиками. Известно, что если  $u_c > 0$ , сеточные токи в лампах существенно снижают их КПД. Поэтому в некоторых типах ламп (см., например, [3]) для уменьшения токов сетки используют специальные конструкции. С этой точки зрения платион с неоднородной эмиссионной способностью катода является весьма перспективной лампой.

Для выяснения других особенностей платиона было экспериментально исследовано не-

Таблица 1

№ образца	Число и материал катодов	$\rho$ (Мк)	$s$ (ММ)	$d_{к а}$ (ММ)	$d_{к с}$ (ММ)	Раб. точка		$C_{вх}$ (пФ)	$\frac{a}{(ма \cdot в^{-1} \cdot пФ^{-1})}$
						$u_a$ (в)	$-u_c$ (в)		
1	6 оксидный	100	1	10	5	400	60	0,36	0,61
2	6 W-Th	40	1,15	4,25	2,15	300	80	0,45	1,95
3	1 W-Th	50	—	10	1	300	20	0,15	1,83

Указанные в таблице 1 значения емкостей рассчитаны теоретически, а крутизна каждой лампы определялась из экспериментального семейства характеристик.

Входные емкости экспериментальных ламп оказались весьма ма-

лыми из-за достаточно больших расстояний  $d_{кс}$ ,  $s$  и малых радиусов катодов  $\rho$ . Коэффициент широкополосности  $a = S/C_{вх}$  достигает тех же значений, что и у специально сконструированных для широкополосных усилителей пентодов 6Ж4, 6Ж1П и 6Ж9П (имеющих соответственно  $d_{кс} = 100, 80, 40$  мк и  $a = 0,56; 0,76; 1,59$  ма  $\cdot$  в $^{-1} \cdot$  пф $^{-1}$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Царев, Расчет и конструирование электронных ламп, М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
2. С. Г. Афанасов, А. А. Шмелев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 786 (1966).
3. W. E. Harbough, Commun. and Electron., № 62, 308 (1962).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
25 февраля 1966 г.

## ON ISLAND EFFECT IN PLATIONS

*S. G. Afanasov, I. Ya. Ashbel', Yu. E. Krasil'nikov*

The calculation of the effective cathode area for the different working conditions of plations is presented. The features of the plation operation due to the variation of the effective cathode area is considered.

---



УДК 621.317.39 : 531.7

## ОБ ОДНОМ РАДИОФИЗИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ МАЛЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В. Б. Брагинский, А. Б. Манукин

Обсуждается влияние естественной ширины линии автогенераторов на минимальные амплитуды механических колебаний, которые можно обнаружить с помощью механоэлектрических преобразователей. Приведено описание методики измерения механических колебаний, позволяющей различать амплитуды колебаний до  $2 \cdot 10^{-8}$  см на частоте 0,1 гц и до  $3 \cdot 10^{-11}$  см на частоте 400 гц с достоверностью 0,95. Описанная методика позволяет измерять спектральную плотность девиации частоты автогенераторов при малых расстройках относительно средней частоты.

Измерение малых механических колебаний необходимо в ряде физических экспериментов, в которых наблюдение ожидаемого эффекта связано с регистрацией малого переменного изменения расстояния между двумя телами. В частности, такого рода задачи возникают при постановке некоторых гравитационных и ядерных экспериментов, где амплитуда изменения расстояния может быть порядка  $10^{-16}$  см и меньше (см., например, [1, 2]). Для измерения малых колебаний можно использовать радио- и оптические интерферометры, а также различные виды механоэлектрических датчиков. В настоящей работе обсуждаются предельные возможности одного радиофизического метода измерения малых механических колебаний и приводятся экспериментальные результаты измерений колебаний в звуковом и инфразвуковом диапазоне с использованием этого метода. Разработанная методика позволяет измерять спектральную плотность девиации частоты автогенераторов вблизи средней частоты генерации.

Обсуждаемый метод измерения малых смещений иногда называют методом емкостного датчика. Пластины электрического конденсатора, изменение расстояния  $d$  между которыми желательно измерить, вместе с индуктивностью образуют электрический контур. Этот контур либо входит в состав радиочастотного генератора, либо в контуре возбуждаются электрические колебания с помощью дополнительного автогенератора. При изменении  $d$  в первом случае изменяется частота генератора, во втором изменяется амплитуда колебаний в контуре (в этом случае обычно частота автогенератора настраивается на «склон» резонансной кривой). Несложные радиотехнические устройства регистрируют эти изменения.

Возможности метода ограничены прежде всего частотными и амплитудными флуктуациями автогенератора. Амплитудные флуктуации можно существенно ослабить (см., например, [3]). Для того, чтобы зарегистрировать  $x(t)$  — изменение расстояния между пластинами, необходимо, чтобы вызванное этим смещением изменение собственной частоты контура  $\delta f$  было больше флуктуационного ухода частоты генератора:

$$\delta f = \alpha f_0 \frac{x(t)}{d} \geq A \sqrt{W(f) \Delta f}. \quad (1)$$

В этом выражении  $\alpha \ll 0,5$  (для реальных контуров, обладающих паразитной емкостью,  $\alpha \simeq 0,3 \div 0,4$ ),  $W(f)$  — спектральная плотность девиации частоты автогенератора,  $\Delta f$  — полоса частот, характерных для  $x(t)$ , и  $A$  — величина порядка нескольких единиц, определяемая выбранным уровнем достоверности обнаружения. Если предположить, что ширину линии автогенератора определяет только дробовой эффект, то, воспользовавшись известными аналитическими выражениями для  $W(f)$  (см., например, [4, 5]), можно получить оценку для минимальной обнаружимой величины  $x(t)$ :

$$x(t) = dA \alpha^{-1} (eI_0 r \Delta f / 2P)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $I_0$  — постоянная составляющая анодного тока в лампе,  $e$  — заряд электрона,  $r$  — активное сопротивление в контуре генератора,  $P$  — мощность генератора.

Оценим минимально различимое смещение  $x(t)$  для некоторых конкретных значений параметров, входящих в (2):  $A \simeq 2$  (для уровня достоверности 0,95),  $r \simeq 10^{-3}$  ом, что можно ожидать для «сверхпроводящих» сплавов при температуре жидкого гелия  $T = 4^\circ\text{K}$  и частоте  $f_0 \simeq 10^6$  гц [6],  $d = 10^{-2}$  см,  $I_0 = 10^{-4}$  а,  $P = 10^{-4}$  вт,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  кулона. Тогда

$$[x(t)]_{0,95} \simeq 3,6 \cdot 10^{-13} \sqrt{\Delta f} \text{ см.}$$

Однако приведенную оценку для  $[x(t)]_{0,95}$ , по-видимому, не следует считать предельной. Если имеется возможность с помощью одного генератора возбуждать колебания в двух контурах, а расстояние между пластинами изменяется только в одном из них, то, используя обычный компенсационный метод, можно снизить величину  $[x(t)]_{0,95}$  в  $10^{+3} \div \div 10^{+4}$  раз (это обычная цифра для схем с компенсацией). При этом компенсироваться будут не только частотные, но и амплитудные флуктуации. В такого рода устройствах на уровне обнаружимых  $x(t)$  могут сказаться некогерентные тепловые колебания в контурах.

Если предположить, что достигнута полная компенсация, то  $x(t)$  определится соотношением

$$x(t) = A \frac{d}{U_0} \sqrt{4\pi T r \Delta f}, \quad (3)$$

где  $r$  — потери в контуре,  $k$  — постоянная Больцмана,  $U_0$  — амплитуда электрических колебаний. Если положить  $U_0/d = 10^4$  в·см<sup>-1</sup> (для этого датчик необходимо поместить в вакуум) и так же, как и раньше, считать, что  $d = 10^{-2}$  см,  $r = 10^{-3}$  ом,  $T = 4^\circ\text{K}$ , то  $[x(t)]_{0,95} \simeq 1 \cdot 10^{-16} \sqrt{\Delta f}$  см. В том случае, если имеется возможность производить длительные измерения и  $\Delta f \ll f_{\text{средн}}$ , то в выражениях (2) и (3) следует заменить  $\Delta f$  на  $\sqrt{\Delta f/\tau}$ , где  $\tau$  — затраченное на выделение сигнала время (см., например, [7]). При этом также несколько изменится множитель  $A$ .

Приведенные оценки, которые, по-видимому, следует рассматривать как предельные, по нашему мнению, указывают на большие возможности радиофизических методов измерения малых механических колебаний.

Отметим, что в обсуждаемом методе играют существенную роль шумы аппаратуры, которые определяют нижний предел измеряемых флуктуаций девиации частоты и соответственно малых механических смещений. Однако уровень шумов аппаратуры зависит от «культуры» эксперимента (т. е. от того, насколько удалось снизить фликкер-эффект, микрофонные шумы, уровень шумов смесителей и т. п.), в то время как

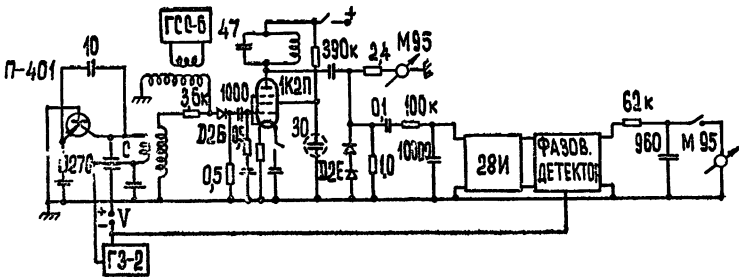
флуктуации частоты генератора, вызванные дробовым эффектом, принципиально не устранимы. Уровень последних и определяют минимальные различимые смещения. Влияние амплитудных флуктуаций на  $[x(t)]_{\min}$ , как нетрудно убедиться, меньше, чем частотных.

Ниже приведены краткое описание установки и результаты измерения малых механических колебаний, которые иллюстрируют возможности обсуждаемого метода.

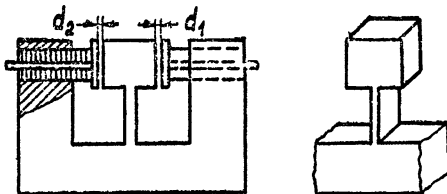
На рис. 1а изображена принципиальная схема установки. Емкость  $C$ , изменение расстояния между обкладками которой измеряется, входит в состав автогенератора на триоде П-401. Сигнал от этого генератора, имеющий среднюю частоту  $f_0 \approx 5 \cdot 10^6$  гц и модулированный по частоте колебаниями емкости, смешивается с немодулированным сигналом от стандартного генератора ( $f_{\text{см}} \approx 1 \cdot 10^5$  гц). После смешения резонансный усилитель, немного расстроенный относительно разностной частоты, преобразует частотно-модулированные колебания в амплитудно-модулированные, которые после детектирования могут либо непосредственно регистрироваться гальванометром, либо после усиления выделяться с помощью синхронного детектора. Емкость  $C$  (рис. 1б) образована пластиной язычка камертона и специальным электродом (зазор  $d_1$ ). Известны эквивалентная жесткость язычка камертона ( $K_{\text{эвк}} \approx 1,3 \cdot 10^8$  дн·см<sup>-1</sup>) и собственная частота его колебаний ( $f_{\text{кам}} = 200$  гц). Вторая (калибровочная) емкость образуется другой стороной пластины язычка и вторым электродом (зазор  $d_2$ ). Если на этот электрод подавать переменное электрическое напряжение  $U \sin(2\pi f_m t)$  и постоянное напряжение  $V$ , то язычок камертона будет раскачиваться силой

$$F = S(8\pi d_2^2)^{-1} \left[ V^2 + \frac{U^2}{2} - \frac{U^2}{2} \cos(2\pi f_m t) + 2VU \sin(2\pi f_m t) \right],$$

где  $S$  — площадь второго электрода.



а)



б)

Рис. 1.

Зная механические параметры камертона  $S$ ,  $V$ ,  $U$  и  $f_m$ , нетрудно рассчитать величину  $x(t)$ , на которую изменяются зазоры  $d_1$  и  $d_2^*$ . Измерения проводились на частотах  $f_m = 0,1$  гц и 400 гц. В обоих случаях применялось узкополосное регистрирующее устройство: в первом случае использовался гальванометр с полосой  $\Delta f \approx 3 \cdot 10^{-2}$  гц, во втором случае постоянная времени синхронного детектора составляла около 1 мин. Использование узкополосных регистрирующих систем позволяло измерять только одну частотную компоненту силы  $F$ :  $\Delta F = S(4\pi d_2^2)^{-1} \times VU \sin(2\pi f_m t)$ . Амплитуда этой силы и соответственно амплитуда измерявшегося колебания изменялись только путем изменения постоянного смещения  $V$ , что исключало влияние прямых электрических наводок на регистрирующее устройство от генератора, использованного для калибровки.

На рис. 2 и 3 приведены результаты измерения амплитуд колебаний на частотах  $f_m = 0,1$  гц и 400 гц. По осям абсцисс отложены рассчитанные указанным выше способом амплитуды колебаний, по осям ординат — показания регистрирующих приборов. Доверительные интервалы построены по критерию Стьюдента для уровня достоверности 0,95. Как видно из приведенных данных, минимальная обнаружимая амплитуда колебаний, зарегистрированных указанным выше способом, на частоте 0,1 гц

соответствовала  $(x)_{0,95} \approx 2 \cdot 10^{-8}$  см, а на частоте 400 гц —  $(x)_{0,95} \approx 3 \cdot 10^{-11}$  см.

С помощью формулы (2) можно оценить минимальную разрешимую амплитуду механических колебаний в наших условиях, если предположить, что оба генератора вносят примерно одинаковый флуктуационный вклад и что девиация частоты вызвана лишь дробовым эффектом. Полагая в (2)  $I_0 = 4$  ма,  $r \approx 15$  ом,  $d = 10^{-2}$  см,  $P = 1,3 \cdot 10^{-3}$  вт,  $\alpha \approx 0,5$

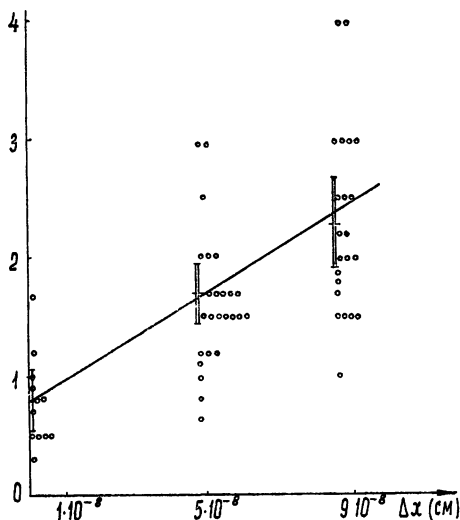


Рис. 2.

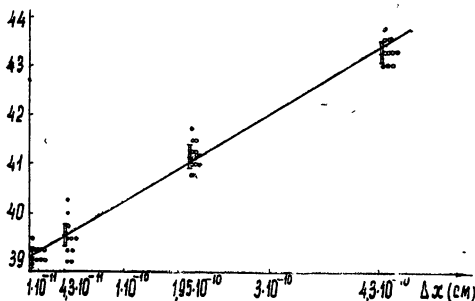


Рис. 3.

\* Механические параметры камертона можно либо определять по самой низкой из его собственных частот, которая легко измеряется на этой же установке, либо с помощью простых соотношений из теории упругости, в которые входят геометрические размеры камертона и модули упругости.

(это параметры автогенератора на триоде П-401), получим, учитывая число повторений измерений и полосу регистрирующего устройства, что  $(x)_{0,95} = 1 \cdot 10^{-12}$  см (на частоте 0,1 гц) и  $(x)_{0,95} = 1 \cdot 10^{-11}$  см (для частоты 400 гц). Такое превышение минимально разрешимых на опыте смещений по сравнению с расчетными, по-видимому, следует приписать тому, что соотношение (2) не учитывает фликкер-эффекта\*.

Отметим одну интересную особенность описанной выше методики измерений. Если применять приведенную систему калибровки малых периодических смещений или, что то же самое, калибровки малых периодических измерений емкости, можно с помощью формулы (1), используя доверительные интервалы для  $(x)_{0,95}$ , полученные при измерениях, рассчитать спектральную плотность девиации частоты автогенераторов на малых расстояниях от средней частоты. В частности, по двум полученным значениям  $(x)_{0,95} = 2 \cdot 10^{-8}$  см и  $(x)_{0,95} = 3 \cdot 10^{-11}$  см на частотах 0,1 гц и 400 гц нетрудно рассчитать величины спектральной плотности девиации частоты, используя формулу (1) и предполагая близость флуктуационных характеристик двух использованных автогенераторов. Они оказываются равными соответственно  $4 \cdot 10^3$  сек<sup>-1</sup> и  $1,7$  сек<sup>-1</sup>.

По-видимому, такая методика может быть применена и в сантиметровом и оптическом диапазоне, если в последнем случае также использовать оптические резонаторы. Указанная методика может быть применена также для калибровки случайных девиаций частоты в демодуляционном методе Берштейна [4] в том случае, если необходимо получить значение спектральной плотности девиации частоты автогенератора вблизи от его средней частоты.

Резюмируя приведенные соображения об этом радиофизическом методе измерения малых механических колебаний, следует отметить, что, по-видимому, существует существенный «резерв» возможностей в повышении чувствительности таких методов, что важно при планировании некоторых тонких экспериментов. В частности, использование вместо автогенераторов источников радиосигналов на основе магнитных подвесов [8] по крайней мере в принципе позволяет существенно снизить величину  $W(f)$  и соответственно величину минимальных обнаружимых смещений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. Kraft, J. Mathews, J. Greenstein, *Astroph. J.*, 136, 312 (1962).
2. В. Б. Брагинский, *ЖЭТФ*, 44, 1562 (1963); *УФН*, 86, № 3, 433 (1965).
3. J. T. Ho, A. E. Siegman, *Trans. IRE, MTT-9*, 459 (1961).
4. И. Л. Берштейн, *Изв. АН СССР*, 24, № 2, 145 (1950).
5. В. С. Троицкий, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 5, 20 (1952).
6. Дж. Бремер, *Сверхпроводящие устройства*, изд. Мир, М., 1964.
7. D. Slepian, *Bell Syst. Tech. J.*, 15, 163 (1958).
8. В. Б. Брагинский, *Радиотехника и электроника*, 10, 1535 (1965).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
27 сентября 1965 г.

\* Отметим, что при настройке резонансного усилителя точно на разностную частоту двух генераторов доверительный интервал показаний регистрирующих приборов уменьшается больше чем на порядок, если камертон неподвижен. Это указывает на то, что основной величиной, определяющей минимальные регистрируемые механические колебания, являются флуктуации частоты генераторов и что шумы детектора, усилителя и т. п. играют второстепенную роль в данных условиях.

ON ONE RADIOPHYSICAL METHOD OF MEASUREMENT OF SMALL  
MECHANICAL OSCILLATIONS*V. B. Braginskiy, A. B. Manoukin*

The influence of a natural width of a self-oscillators' line is discussed upon the minimum amplitudes of mechanical oscillations detected by the mechano-electrical transducers. There is given the description of the measurement method of the mechanical oscillations permitting to distinguish the amplitudes of oscillations up to  $2 \cdot 10^{-8}$  cm at the frequency of 0.1 cps and up to  $3 \cdot 10^{-11}$  cm at the frequency of 400 cps with 0.95 confidence. The method described permits to measure the spectral density of a frequency deviation of the self-oscillators at the small separations relative to the center frequency.

---

УДК 518.43

## ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДАХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Ю. Л. Кетков

Рассматриваются методы оптимальной кусочно-линейной аппроксимации произвольных плоских кривых. Аппроксимирующая ломаная считается оптимальной, если она приближает кривую с наперед заданной точностью и содержит минимальное количество звеньев. Предлагаемая методика позволяет строить ломаные, достаточно близкие к оптимальным, и получить оценки сверху и снизу для количества звеньев оптимальной ломаной при достаточно высокой точности аппроксимации.

Решение многих задач связано с аппроксимацией различных кривых — нелинейных характеристик систем автоматического регулирования [1], траекторий движения режущего инструмента при обработке деталей на станках с цифровым программным управлением [2], контуров сложных криволинейных поверхностей при проектировании в судостроении [3] и т. п. В настоящее время хорошо разработаны методы теории и практики приближения [4] в тех случаях, когда аппроксимирующие функции образуют линейное подпространство в общем пространстве приближаемых функций. Однако эти методы нельзя использовать тогда, когда подпространство аппроксимирующих функций нелинейно. В частности, к такой нелинейной задаче приводит замена кривых малыми прямолинейными или криволинейными отрезками, концы которых заранее не фиксируются.

При решении такой задачи возможны два подхода. В первом случае при заданной точности аппроксимации требуется построить приближающую функцию, состоящую из минимального числа звеньев. Во втором случае при заданном числе звеньев требуется достичь наилучшей точности. В настоящей статье рассматриваются методы оптимальной кусочно-линейной аппроксимации, приводятся оценки сверху и снизу минимального числа звеньев и алгоритмы построения ломаных, достаточно близких к оптимальным.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наибольшее распространение при кусочно-линейной аппроксимации кривых имеет замена их хордами, касательными или секущими, проведенными через соответствующие точки заменяемой кривой. Мы будем исследовать, в основном, приближение кривых хордами и при достаточно высокой точности аппроксимации используем полученные результаты для приближения кривых касательными или секущими.

Пусть  $F$  — отрезок кривой, не содержащей точек перегиба и для определенности обращенной вогнутостью вниз (рис. 1). Заданный отрезок кривой аппроксимируется вписанной ломаной линией  $L_n$  ( $n$  — число звеньев ломаной) таким образом, чтобы стрелка прогиба для каждого звена не превышала наперед заданную точность. Очевидно,

что при достаточно большом числе звеньев ломаной заданная точность может быть достигнута. Но при этом возникает два вопроса: а) как оценить минимальное число  $n_0$  звеньев ломаной, аппроксимирующей отрезок кривой  $F$  с заданной точностью, и б) как построить ломаную линию с числом звеньев, достаточно близким к  $n_0$ .

Для решения поставленных задач рассмотрим почти эквивалентную задачу. Пусть  $(x_0, y_0)$  — точка на кривой  $F$  (рис. 2). Требуется выбрать вторую точку  $(x_1, y_1)$  на кривой, такую, чтобы хорда, проходящая через эти две точки, отклонялась от кривой  $F$  не более чем на  $\epsilon$ .

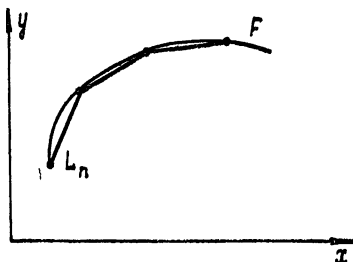


Рис. 1. Аппроксимация кривой хордами.

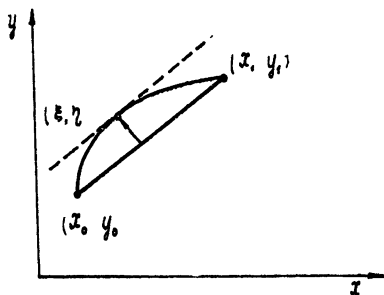


Рис. 2.

Обозначим через  $(\xi, \eta)$  точку кривой  $F$ , максимально удаленную от хорды, соединяющей точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ . Так как кривая  $F$  не содержит точек перегиба, то касательная к кривой в точке  $(\xi, \eta)$  должна быть параллельна хорде.

Пусть уравнение хорды и указанной касательной соответственно

$$y = kx + b; \tag{1}$$

$$Y = kX + B. \tag{2}$$

Здесь

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad b = y_0 - kx_0, \quad B = \eta - k\xi.$$

Такая форма задания хорды и касательной не ограничивает общности, так как в случае вертикальных прямых ( $k=b=\infty$ ) этого ограничения можно избежать заменой координатных осей.

Расстояние между хордой (1) и касательной (2) выражается формулой

$$d = \frac{B - b}{\sqrt{1 + k^2}}. \tag{3}$$

Так как эта величина и является максимальным отклонением кривой  $F$  от хорды, то для решения сформулированной задачи надо решить уравнение

$$d = \frac{B - b}{\sqrt{1 + k^2}} = \epsilon. \tag{4}$$

Сейчас мы приступим к приближенному решению уравнения (4), с помощью которого и будут получены ответы на поставленные вопросы. Затем эти результаты будут использованы для кусочно-линейной аппроксимации кривых второго порядка.



2. АППРОКСИМАЦИЯ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ В ЯВНОМ ВИДЕ  $y=f(x)$ 

Пусть  $x_1 = x_0 + h$ , где  $h$  — пока неизвестная величина, которую надо определить. Тогда

$$k(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h},$$

$$b(h) = f(x_0) - x_0 k(h),$$

$$f'(\xi) = k(h),$$

$$B(h) = f(\xi) - \xi k(h),$$

$$d(x_0+h) = \frac{B(h) - b(h)}{(1+k^2(h))^{1/2}}.$$

Для приближенного решения уравнения (4) разложим функцию  $d(h)$  в ряд Тейлора в окрестности  $h=0$ . Опуская довольно громоздкие промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$d(x_0+h) = \frac{1}{2!} d''(0) h^2 + \frac{1}{3!} d'''(0) h^3 + \dots, \quad (5)$$

где

$$d''(0) = -f''(x_0)/4 \{1 + [f'(x_0)]^2\}^{1/2},$$

$$d'''(0) = -\frac{3\{f'''(x_0)(1+[f'(x_0)]^2) - f'(x_0)[f''(x_0)]^2\}}{8(1+[f'(x_0)]^2)^{3/2}}.$$

Если  $\epsilon$  достаточно мало, то соответственно мало и  $h$ . Поэтому в качестве приближенного решения уравнения (4) можно взять

$$h_1 = (2\epsilon/|d''(0)|)^{1/2} = [8\epsilon(1+[f'(x_0)]^2)^{1/2}/|f''(x_0)|]^{1/2}. \quad (6)$$

Таким образом, при достаточно малом  $\epsilon$  стрелка прогиба выражается следующей приближенной формулой:

$$d(x_0 \pm h_1) \approx \epsilon \pm \frac{1}{3!} d'''(0) h_1^3.$$

Предположим далее, что на заданном отрезке кривой выражение  $d'''(0)$  не меняет знака (геометрический смысл этого предположения будет объяснен ниже) и для определенности положительно. Тогда при аппроксимации «вперед»

$$x_{n+1} = x_n + h_1,$$

$$h_1 = [8\epsilon(1+[f'(x_n)]^2)^{1/2}/|f''(x_n)|]^{1/2}$$

уклонение ломаной от кривой всегда будет превосходить  $\epsilon$ , а при аппроксимации «назад»

$$x_{n+1}^- = x_n - h_1,$$

$$h_1 = [8\epsilon(1+[f'(x_n)]^2)^{1/2}/|f''(x_n)|]^{1/2}$$

уклонение никогда не будет превышать  $\epsilon$ .

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

Будем решать аналогичную задачу. Пусть  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $x_1 = x(t_0 + h)$ ,  $y_1 = y(t_0 + h)$ . Как далеко можно шагнуть по  $t$ , чтобы максимальное отклонение кривой от хорды не превысило  $\varepsilon$ ?

Максимальное отклонение кривой от хорды достигается в точке  $(x(t_0 + \xi), y(t_0 + \xi))$ , для которой

$$y'(t_0 + \xi)/x'(t_0 + \xi) = k(h) = [y(t_0 + h) - y(t_0)]/[x(t_0 + h) - x(t_0)].$$

Это отклонение выражается формулой

$$d(t_0 + h) = [B(h) - b(h)]/(1 + k^2(h))^{1/2}.$$

Здесь

$$b(h) = y(t_0) - x(t_0) k(h),$$

$$B(h) = y(t_0 + \xi) - x(t_0 + \xi) k(h).$$

Разложение функции  $d(h)$  в ряд Тейлора в окрестности  $h = 0$  имеет вид

$$d(h) = \frac{1}{2!} d''(0) h^2 + \frac{1}{3!} d'''(0) h^3 + \dots, \quad (7)$$

где

$$d''(0) = - (x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0) / 4 ([x'_0]^2 + [y'_0]^2)^{1/2},$$

$$d'''(0) = - 3 \{ (x'_0 y'''_0 - x'''_0 y'_0) [(x'_0)^2 + (y'_0)^2] - (x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0) \times \\ \times (x'_0 x''_0 + y'_0 y''_0) \} 8^{-1} ([x'_0]^2 + [y'_0]^2)^{-3/2}.$$

Индекс «0» внизу здесь означает, что все производные берутся в точке  $t = t_0$ .

Итак, при достаточно малом  $\varepsilon$  в качестве приближенного решения уравнения (4) можно взять

$$h_2 = (2\varepsilon/|d''(0)|)^{1/2} = [8\varepsilon [(x'_0)^2 + (y'_0)^2]^{1/2} |x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|^{-1}]^{1/2}. \quad (8)$$

Наиболее простой смысл разложение (7) приобретает в том случае, когда в качестве параметра  $t$  выбирается длина дуги  $s$  кривой. В этом случае

$$(x')^2 + (y')^2 = 1,$$

$$d''(0) = \frac{1}{4} K(s),$$

$$d'''(0) = \frac{3}{8} K'(s),$$

( $K(s)$  — кривизна) и разложение (7) приобретает инвариантный характер:

$$d(s+h) = \frac{1}{8} K(s) h^2 + \frac{1}{16} K'(s) h^3 + \dots \quad (9)$$

Приближенное решение (8) тогда переписывается в форме

$$h_2 = (8\varepsilon/|K(s)|)^{1/2} = (8\varepsilon|R(s)|)^{1/2}, \quad (10)$$

где  $R(s)$  — радиус кривизны в данной точке кривой.

Заметим, что смысл постоянства знака  $d'''(0)$  эквивалентен монотонности изменения кривизны  $K(s)$  вдоль кривой.

#### 4. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Применим полученные результаты к кусочно-линейной аппроксимации кривых второго порядка.

*Пример 1.* Если рассматривать каноническое уравнение параболы  $y^2 = 2px$  и из соображений симметрии аппроксимировать только ее верхнюю ветвь ( $y \geq 0$ ), то максимальное уклонение хорды, проходящей через две точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  параболы, выражается формулой

$$d = (y_1 - y_0)^2 / 4[4p^2 + (y_1 + y_0)^2]^{1/2}$$

и достигается в точке  $(\xi, \eta)$  параболы

$$\xi = (y_0 + y_1)^2 / 8p, \quad \eta = (y_0 + y_1) / 2.$$

Отсюда видно, что смещение по параболе удобнее вести вдоль координаты  $y$  ( $y_1 = y_0 \pm h$ ). При этом приближенное решение уравнения (4)

$$d(y_0 \pm h) = h^2 / 4[4p^2 + (2y_0 \pm h)^2]^{1/2} = \varepsilon \quad (11)$$

может быть получено из общей формулы (6) в виде

$$h_1 = [8\varepsilon(p^2 + y_0^2)^{1/2}]^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом  $\varepsilon$  аппроксимация «вперед» с шагом  $h_1$  удовлетворяет требованиям точности, т. е.

$$d(y + h_1) < \varepsilon.$$

При аппроксимации «назад» с шагом  $h_1$  требования точности соблюдаются лишь при выполнении ограничения

$$\varepsilon < 2y/(p^2 + y^2)^{1/2},$$

т. е. в том случае, если приближаемый участок параболы не лежит слишком близко к ее вершине.

В связи с тем, что уравнение (4) для параболы имеет сравнительно простой вид, можно получить более точное решение методом неопределенных коэффициентов. Для этого решение уравнения (11) ищется в виде

$$\tilde{h}_k = a_1 \delta + a_2 \delta^2 + \dots + a_k \delta^k \quad (\delta = \sqrt{\varepsilon}).$$

Приведем без вывода несколько найденных таким способом решений:

$$\tilde{h}_1 = [8(p^2 + y^2)^{1/2}]^{1/2} \delta,$$

$$\tilde{h}_2 = \tilde{h}_1 + 2y(p^2 + y^2)^{-1/2} \delta^2,$$

$$\tilde{h}_3 = \tilde{h}_2 + (2p^2 + y^2)[2(p^2 + y^2)^{5/2}]^{-1/2} \delta^3.$$

*Пример 2.* Если рассматривать уравнение эллипса в параметрической форме  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  и из соображений симметрии ограничиться только одной его четвертью ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ), то максимальное уклонение хорды от эллипса на отрезке  $(t, t \pm h)$  выражается формулой

$$d(t \pm h) = ab(1 - \cos h/2) [a^2 \sin^2(t \pm h/2) + b^2 \cos^2(t \pm h/2)]^{-1/2}$$

и достигается в точке  $t \pm h/2$ . Приближенное решение уравнения (4) при этом получается в виде

$$h_2 = [8\epsilon(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}/ab]^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом  $\epsilon$  аппроксимация «вперед» с шагом  $h_2$  удовлетворяет требованиям точности. Это позволяет получить оценку числа звеньев оптимальной ломаной для эллипса сверху.

Оценка уклонения ломаной, построенной при аппроксимации эллипса «назад» с шагом  $h_2$ , в общем случае ( $\epsilon$  не мало) довольно затруднительна. Однако сразу можно заметить, что далеко не для каждого эллипса справедливо неравенство

$$d(t - h_2) > \epsilon.$$

Действительно, в частном случае для окружности ( $a = b = R$ )

$$d(t+h_2) = d(t-h_2) = R(1 - \cos h_2/2) < \epsilon;$$

это же справедливо по непрерывности для семейства эллипсов, достаточно близких к окружности.

*Пример 3.* По аналогии с эллипсом можно провести кусочно-линейную аппроксимацию гиперболы, заданной в параметрической форме  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = b \operatorname{sh} t$  ( $0 \leq t < \infty$ ). Для приближенного решения уравнения (4)

$$d(t \pm h) = ab[\operatorname{ch}(h/2) - 1] [a^2 \operatorname{sh}^2(t \pm h/2) + b^2 \operatorname{ch}^2(t \pm h/2)]^{-1/2} = \epsilon$$

здесь получено выражение

$$h_3 = [8\epsilon(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{1/2}/ab]^{1/2}.$$

Аппроксимация гиперболы «назад» с шагом  $h_3$  при любом  $\epsilon$  приводит к ломаной, уклоняющейся от гиперболы всегда на расстояние, большее  $\epsilon$ ; таким образом получается оценка снизу для количества звеньев оптимальной ломаной. Оценка поведения ломаной при аппроксимации гиперболы «вперед» с шагом  $h_3$  в общем случае ( $\epsilon$  не мало) довольно затруднительна.

### 5. АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ ХОРДАМИ

Если заданная точность аппроксимации  $\epsilon$  достаточно высока, то для построения вписанной ломаной, близкой к оптимальной (в смысле количества звеньев), может быть предложен следующий алгоритм.

Заданную кривую следует разбить на отрезки, не содержащие точек перегиба. Для построения ломаной, уклоняющейся от кривой не более чем на  $\epsilon$ , аппроксимация должна вестись на каждом из этих отрезков в направлении уменьшения кривизны, так как именно в этом случае знаки первых двух членов в разложениях (5), (7), (9) противоположны. Таким образом, на каждом из выделенных отрезков «направление» аппроксимации должно меняться на противоположное при каждом переходе через точку экстремума кривизны. Например, для эллипса

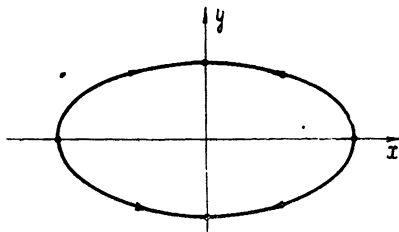


Рис. 3. „Направления“ аппроксимации для эллипса.

Например, для эллипса

са аппроксимация должна вестись от вершин, лежащих на большой полуоси, к вершинам, лежащим на малой полуоси (см. рис. 3).

«Шаг» аппроксимации, в зависимости от формы задания кривой, выбирается по одной из формул (6), (8) или (10). Получающееся при этом число звеньев аппроксимирующей ломаной дает оценку сверху для количества звеньев  $n_0$  оптимальной ломаной.

Если аппроксимацию на выделенных отрезках кривой вести в направлении увеличения кривизны с одним из найденных шагов (6), (8) или (10), то каждое звено получающейся ломаной всегда уклоняется от кривой более чем на  $\epsilon$ . Это позволяет получить оценку для оптимального значения  $n_0$  снизу.

## 6. АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ КАСАТЕЛЬНЫМИ ИЛИ СЕКУЩИМИ

При достаточно высокой заданной точности аппроксимации ( $\epsilon$  мало) предложенный выше алгоритм может быть использован для аппроксимации кривых касательными или секущими. Для этого достаточно построить ломаную, звенья которой параллельны найденным хордам и смещены в сторону кривой на расстояние  $d_i$  или  $0,5 d_i$  ( $d_i$  — стрелка прогиба для  $i$ -ой хорды). Если  $d_i = \epsilon$ , то построенные отрезки касательных почти везде будут уклоняться от кривой не более чем на  $\epsilon$ , за исключением стыков ломаной (см. заштрихованную область на рис. 4), в которых ширина «ленты аппроксимации» достигает максимальной величины:

$$\delta_i = \epsilon / \cos(\varphi_i/2).$$

Но так как при достаточно малой  $\epsilon$  величина  $\varphi_i$ , равная разности углов наклона двух смежных звеньев ломаной, близка к нулю, а изложенный алгоритм построения хорд всегда приводит к  $d_i < \epsilon$ , то указанным исключением можно пренебречь.

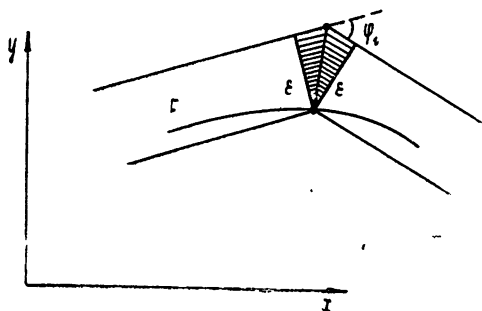


Рис. 4. Аппроксимация кривой касательными.

Предлагаемая методика кусочно-линейной аппроксимации произвольных кривых позволяет строить ломаные, достаточно близкие к оптимальным. Одновременно удается получить оценки сверху и снизу для количества звеньев  $n_0$  оптимальной ломаной при достаточно высокой точности аппроксимации ( $\epsilon$  мало). Применение указанных алгоритмов для аппроксимации наиболее широко используемых профилей (кривых второго порядка) позволяет получить некоторые оценки и в тех случаях, когда заданная точность не является достаточно малой. Предлагаемые алгоритмы описываются довольно простыми рекуррентными соотношениями и поэтому легко программируются при вычислениях на ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, Ю. И. Топчеев, Г. В. Крутикова, Частотный метод построения переходных процессов, Гостехиздат, М., 1955.
2. В. А. Барун, А. А. Будинский, Станки с программным управлением и программирование обработки, изд. Машиностроение, М.—Л., 1965.

3. М. Н. Рейнов, В. И. Брегман, В. М. Москаленко, Э. М. Нахимович, Е. Ю. Петров, Н. Л. Мошенский, Е. М. Аксенов, Судостроительные расчеты на электронных вычислительных машинах, изд. Судостроение, Л., 1964.
4. Н. И. Ахизер, Лекции по теории аппроксимации, изд. Наука, М., 1965.

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
15 февраля 1966 г.

## ON OPTIMUM METHODS OF PIECE-LINEAR APPROXIMATION

*Yu. L. Ketkov*

Methods of an optimum piece-linear approximation of the arbitrary plane curves are considered. An approximating curve is to be optimum if it gives the curve with predetermined accuracy and contains the minimum number of sections. The method presented in the article permits to plot the broken lines sufficiently close to the optimum ones and to obtain the estimations „above“ and „below“ for the number of sections of the optimum broken line at the sufficiently high accuracy of approximation.

---

УДК 517.91

## О ПОВЕДЕНИИ В ЦЕЛОМ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ\*

Ю. И. Неймарк и Л. З. Фишман

Показано, что изучение асимптотического поведения решений квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием сводится к исследованию решений некоторой вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Изучению дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами посвящено значительное число работ. Квазилинейные уравнения с запаздыванием, в частности, изучались в работах Эльсгольца [4], Шиманова [5, 6], Халаная [7], Рубаника [8], Фодчука [9] и др.\*\* В этих работах находятся условия существования и устойчивости периодических движений квазилинейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, обосновывается применимость метода усреднения к уравнениям с запаздыванием в так называемом приведенном виде и др. Вопросы же поведения решений квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием в целом, насколько известно авторам, не затрагивались.

В настоящей работе рассматривается поведение в целом фазовых траекторий динамической системы, описываемой квазилинейными дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами вида

$$\begin{aligned} \dot{x} = & A_0 x + A_1 x(t - \tau_1) + \dots + A_m x(t - \tau_m) + \\ & + \mu f(t; x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор,  $A_0, A_1, \dots, A_m$  — постоянные матрицы,  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < 2\pi$  — постоянные запаздывания,  $\mu$  — так называемый малый параметр,  $f(t; u_0, u_1, \dots, u_m)$  — непрерывная вместе с частными производными по  $u_0, u_1, \dots, u_m$  функция  $t, u_0, \dots, u_m$ , периодическая по  $t$  с периодом  $2\pi$ .

Оказывается, что если  $p_1, p_2, \dots, p_s$  являются чисто мнимыми корнями квазиполинома

$$\text{Det } \chi(p) = \text{Det } \{pE - A_0 - A_1 e^{-p\tau_1} - \dots - A_m e^{-p\tau_m}\} = 0, \quad (2)$$

а остальные его корни имеют отрицательные действительные части, то при некоторых общих предположениях в любой ограниченной области  $\|x\| < K$  при достаточно малом  $\mu$  асимптотическое поведение фазовых траекторий при  $t \rightarrow +\infty$  с точностью до величины порядка  $\mu$  описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений  $s$ -го порядка вида

\* Основные результаты работы докладывались в сентябре 1965 г. на Всесоюзной конференции по дифференциальным уравнениям с отклоняющимися аргументами [10].

\*\* См. обзоры [1-3].

$$\dot{\xi}_k = p_k \xi_k + \mu g_k(t; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s), \quad (3)$$

получаемой определенным образом из уравнений (1). Описанный случай, когда соответствующая уравнениям (1) линейная система допускает гармонические решения, т. е. когда квазиполином (2) имеет чисто мнимые корни, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, представляет особый интерес. Заметим, что при наличии у квазиполинома корней с положительной действительной частью почти все фазовые траектории при достаточно малом  $\mu$  покидают любую ограниченную область  $\|x\| < K$ .

К изучению решений вспомогательного уравнения (3) можно применить метод усреднения. Уравнения, получаемые усреднением по времени  $t$  уравнений (3), можно трактовать как «усредненные» уравнения, соответствующие уравнениям с запаздываниями (1). Эта усредненная система, представляющая собою автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений  $s$ -го порядка, с точностью до величин порядка  $\mu$  описывает асимптотическое поведение при  $t \rightarrow +\infty$  решений квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздываниями (1). В частном случае, когда  $A_1 = \dots = A_m = 0$ , некоторые результаты по обоснованию метода усреднения были получены в работах [7-9] и др.

### 1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Любое частное решение уравнения (1) для  $t \geq t_0$  однозначно определяется заданием функции  $x(t)$  на промежутке времени от  $t_0 - \tau_m$  до  $t_0$ . В силу этого фазовым пространством  $\Phi$  динамической системы, описываемой уравнениями (1), можно считать пространство непрерывных функций  $x(t)$ , определенных на промежутках  $[t_0 - \tau_m, t_0]$  для всевозможных  $t_0$ . При этом в случае автономной системы, когда правая часть уравнений (1) не зависит явно от времени  $t$ , состояние системы определяется заданием  $x(t)$  на промежутке длительности  $\tau_m$  вне зависимости от  $t_0$ , т. е. состояние системы определяется заданием функции  $\varphi(\tau) = x(t_0 + \tau)$  для  $-\tau_m \leq \tau \leq 0$ . Для неавтономной системы важно значение  $t_0$ , так что состояние неавтономной системы можно определить с помощью функции  $\varphi(\tau)$ , заданной на фиксированном промежутке  $[-\tau_m, 0]$ , и моментом времени  $t_0$ , который в силу периодичности по времени  $t$  с периодом  $2\pi$  правых частей уравнений (1) можно считать заключенным между 0 и  $2\pi$ .

В фазовом пространстве  $\Phi$  определим расстояние между любыми двумя его точками  $M^1(\varphi^1(\tau), t_0^1)$  и  $M^2(\varphi^2(\tau), t_0^2)$ :

$$\rho(M^1, M^2) = \max_{-\tau_m < \tau < 0} \|\varphi^1(\tau) - \varphi^2(\tau)\| + \min\{|t_0^1 - t_0^2|, 2\pi - |t_0^1 - t_0^2|\}, \quad (4)$$

после чего приобретают смысл обычные понятия сходимости, устойчивости и неустойчивости.

Обозначим через  $T_{2\pi}$  точечное отображение, которое каждой фазовой точке  $M(\varphi(\tau), t_0)$  ставит в соответствие точку  $\bar{M}(\varphi(\tau), t_0)$ , в которую она переходит согласно уравнениям (1) за время  $2\pi$ . Отображение  $T_{2\pi}$  вполне непрерывно. Это следует из того, что любое ограниченное множество преобразуется в силу сделанных предположений относительно правых частей уравнений (1) в ограниченное множество функций с ограниченными производными, которое согласно известному критерию Арчела является компактным множеством.

Непосредственно ясно, что исследование структуры разбиения фазового пространства  $\Phi$  на траектории может быть проведено путем изучения точечного отображения  $T_{2\pi}$ . Точечное отображение  $T_{2\pi}$  определено во всем фазовом пространстве  $\Phi$  и преобразует каждую из



гиперплоскостей  $t = t_0$  в себя. Неподвижным точкам точечного отображения гиперплоскости  $t = t_0$  в себя соответствуют периодические решения периода  $2\pi$  уравнений (1). При этом периодическое движение устойчиво или неустойчиво в зависимости от того, устойчива или неустойчива соответствующая ему неподвижная точка точечного отображения гиперплоскости  $t = t_0$  в себя.

## 2. О БЛИЗОСТИ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ИСХОДНОГО И ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ

а) Рассмотрим частный случай, когда  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0$ . В этом случае при  $\mu = 0$  система уравнений (1) обращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а соответствующее точечное отображение «вырождается» в отображение конечномерного фазового пространства соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений. При  $\mu \neq 0$  сопоставим системе дифференциальных уравнений с запаздываниями (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A_0 x + \mu f(t; x, e^{-A_0 \tau_1} x, \dots, e^{-A_0 \tau_m} x). \quad (5)$$

Соответствующее этой вспомогательной системе уравнений точечное отображение  $T_{2\pi}$   $(n+1)$ -мерного фазового пространства может быть естественным образом расширено на пространство  $\Phi$ . Именно, определяем расширение  $T_{2\pi}$ , которое обозначим через  $\tilde{T}_{2\pi}$ , как точечное отображение, ставящее в соответствие точке  $M(\varphi(\tau), t_0)$  фазового пространства  $\Phi$  точку  $M(x(t_0 + 2\pi + \tau), t_0)$  (здесь  $x(t)$  — решение уравнения (5), обращающееся в  $\varphi(0)$  при  $t = t_0$ ). Точечные отображения  $T_{2\pi}$ ,  $(T_{2\pi})_{\mu=0}$  и  $\tilde{T}_{2\pi}$  близки друг к другу. Обозначим через  $S$  шар  $\|\tilde{M}\| \leq K$  ( $0 < K < \infty$ ) в пространстве  $\Phi$ . Имеет место следующая почти очевидная лемма.

*Лемма 1.* На множестве  $S$  и соответственно компактном множестве  $T_{2\pi} S$  при некоторых постоянных  $K_1$  и  $K_2$  и достаточно малых  $\mu$

$$\|T_{2\pi} M - (T_{2\pi})_{\mu=0} M\| < \mu K_1 \quad (M \in S), \quad (6)$$

$$\|T_{2\pi} M - \tilde{T}_{2\pi} M\| < \mu^2 K_2 \quad (M \in T_{2\pi} S). \quad (7)$$

Действительно, решения уравнения (1) в рассматриваемом случае  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0$  удовлетворяют интегральному уравнению

$$x(t) = \exp[A_0(t - t_0)]x(t_0) + \mu \int_{t_0}^t \exp[A_0(t - t_0 - \nu)] \times \\ \times f(\nu; x(\nu), \dots, x(\nu - \tau_m)) d\nu. \quad (8)$$

Согласно уравнению (8), при достаточно малом  $\mu$  из неравенства  $\|\varphi(\tau)\| < K$  ( $-\tau_m \leq \tau \leq 0$ ) следует, что  $\|x(t)\| < C < \infty$  для всех  $t_0 \leq t \leq 2\pi + t_0$  и поэтому при некотором  $K_1 < \infty$  имеет место (6). Из (8) ясно, что  $x(t - \tau)$  отличается от  $e^{-A_0 \tau} x(t)$  на величину порядка  $\mu$ . Поэтому замена в уравнении (8) в подынтегральной функции величин  $x(\nu - \tau_j)$  на  $e^{-A_0 \tau_j} x(\nu)$  повлечет ошибку порядка  $\mu^2$ , что и обосновывает справедливость оценки (7).

б) Оценка (7) позволяет сделать довольно далеко идущие выводы о соответствии с точностью до величин порядка  $\mu$  фазовых траекторий квазилинейной системы с запаздываниями и соответствующей ей систе-

мы (5) без запаздываний. Действительно, поведение фазовых траекторий как системы дифференциальных уравнений с запаздываниями (1), так и системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) описывается соответствующими точечными отображениями сечений фазовых пространств этих систем.

Допустим, что у точечного отображения  $T_{2\pi}$  динамической системы (4) имеется элемент притяжения  $J$  (устойчивая неподвижная точка, устойчивая инвариантная кривая и т. п.) с областью притяжения  $\Pi$ , и пусть в окрестности  $J$

$$\rho(T_{2\pi} x, J) < (1 - q\mu)\rho(x, J) + M\mu^2 \quad (q > 0, M < \infty). \quad (9)$$

Согласно лемме пункта 3 работы [11] для любой строго внутренней относительно  $\Pi$  ограниченной замкнутой области  $\Pi'$  можно указать такое  $N(\epsilon)$ , что для любой точки  $x \in \Pi'$  при некотором  $j < N\mu^{-1}$  точка  $T_{2\pi}^j x$  принадлежит  $\epsilon$ -окрестности  $J$ . Обозначим через  $\tilde{J}$  и  $\tilde{\Pi}$  множества, состоящие из точек  $\tilde{M} \in T_{2\pi} S$ , для которых  $\varphi(\tau_m) \in J$  или  $\varphi(\tau_m) \in \Pi$  соответственно. Для точечного отображения  $\tilde{T}_{2\pi}$  и множества  $\tilde{J}$  имеет место в силу леммы 1 соотношение вида (8), и для любой точки компактной, строго внутренней относительно  $\tilde{\Pi}$  области  $\tilde{\Pi}'$  и любого  $\epsilon > 0$  существует такое  $N$ , что при всех  $j \geq N$  точки  $T_{2\pi}^j M$  лежат в  $\epsilon$ -окрестности  $\tilde{J}$ . Это позволяет высказать следующую теорему.

*Теорема 1.* При сформулированных выше предположениях о поведении фазовых траекторий системы (5) при достаточно малых  $\mu$  все фазовые точки любой компактной строго внутренней части области  $\tilde{\Pi}$  согласно уравнению (1) с  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0$ , приходят и остаются при  $t \rightarrow +\infty$  в  $\epsilon$ -окрестности  $J$ , причем  $\epsilon$  — порядка  $\mu$ .

в) Рассмотрим теперь общий случай.

Применим к уравнению (1) преобразование Лапласа и обычным образом найдем изображение  $x(p)$  решения  $x(t)$  в виде

$$x(p) = \chi^{-1}(p)\{\mu F(p) + \Phi(p)\}, \quad (10)$$

где  $\chi(p)$  — квадратная матрица, определение которой следует из (2),

$$\begin{aligned} \Phi(p) = & -x(0) - A_1 \int_{-\tau_1}^0 x(\nu) \exp[-p(\nu + \tau_1)] d\nu - \dots - \\ & - \int_{-\tau_m}^0 x(\nu) \exp[-p(\nu + \tau_m)] d\nu \end{aligned} \quad (11)$$

и  $F(p)$  — изображение  $f(t; x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m))$ .

Обращение матрицы  $\chi^{-1}(p)$  можно представить в виде.

$$\chi^{-1}(p) = \sum_{k=1}^s \frac{\psi(p_k)}{p - p_k} + \Omega(p), \quad (12)$$

где  $\psi(p_k)$  — матрицы единичного ранга, а полюса функции  $\Omega(p)$  лежат в полуплоскости  $\text{Re } p < -\sigma < 0$ . Представление вида (12) возможно в случае, когда корни  $p_k$  простые, что и предполагается. Единичность ранга матриц  $\psi(p_k)$  следует из равенств

$$\psi(p_k)\chi(p_k) = 0.$$

в которых ранг матриц  $\chi(p_k)$  равен  $n - 1$ . Действительно, каждая строка матрицы  $\psi(p_k)$  представляет собою решение одной и той же системы линейных однородных уравнений с рангом матрицы, равным  $n - 1$ , т. е. эти строки отличаются друг от друга постоянными множителями. В соответствии с (10) и (12) решение уравнений (1) можно представить в виде

$$(\xi) = \sum_{k=1}^s \xi_k(t) + \eta(t), \quad (13)$$

где изображения  $\xi_k(t)$  и  $\eta(t)$  равны соответственно

$$\xi_k(p) = \frac{\psi(p_k)}{p - p_k} \{\mu F(p) + \Phi(p)\}, \quad (14)$$

$$\eta(p) = \Omega(p) \{\mu F(p) + \Phi(p)\}. \quad (15)$$

Из соотношений (14) и (15) следует, что  $\xi_k(t)$  и  $\eta(t)$  удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\xi_k(t) = \psi(p_k) e^{p_k t} \int_0^{\tau_m} e^{-p_k v} \Phi(v) dv + \mu \psi(p_k) \times \quad (16)$$

$$\times \int_0^t \exp[p_k(t-v)] f(v; \dots) dv,$$

$$\eta(t) = \int_0^{\tau_m} \Omega(t-v) \Phi(v) dv + \mu \int_0^t \Omega(t-v) f(v; \dots) dv. \quad (17)$$

Среди  $ns$  уравнений (16) вследствие единичности рангов матриц  $\psi(p_k)$  только  $s$  независимых. В дифференциальной форме эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= p_k \xi_k + \mu \psi(p_k) f\left(t, \sum \xi_k(t) + \eta(t), \dots \right. \\ &\left. \dots, \sum \xi_k(t - \tau_m) + \eta(t - \tau_m) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Используя пропорциональность строк матриц  $\psi(p_k)$ , из которой следуют соотношения вида\*

$$\psi_{ij}(p_k) = \gamma_{ki} \psi_{1j}(p_k), \quad (\xi_k)_i = \gamma_{ki} (\xi_k)_1, \quad (19)$$

запишем систему уравнений (18) в виде  $s$  скалярных уравнений:

$$(\dot{\xi}_k)_1 = p_k (\xi_k)_1 + \mu \sum_{i=1}^n \psi_{1i}(p_k) f_i\left(t; \sum (\xi_k)_1 + \quad (20)$$

$$+ (\eta)_1, \sum \gamma_{k2} (\xi_k(t))_1 + (\eta(t))_2, \dots, \sum (\xi_k(t - \tau_m))_1 + (\eta(t - \tau_m))_1, \dots).$$

Здесь  $\psi_{ij}(p_k)$  — элементы  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\psi(p_k)$ ;  $(\xi_k)_i$  и  $(\eta)_i$  — компоненты векторов  $\xi_k$  и  $\eta$  соответственно. Опуская

\* Для определенности предполагается, что первые строчки матриц  $\psi(p_k)$  содержат отличные от нуля элементы.

в уравнениях (20) индекс компоненты, заменяя  $\xi_k(t-\tau)$  на  $\xi_k(t)\exp(-p_k\tau)$  и полагая  $\eta(t) = 0$ , придем к уравнениям (3).

Вследствие сделанных относительно нулей квазиполинома (2) предположений оригинал  $\Omega(t)$  изображения  $\Omega(p)$  допускает оценку вида [12-14]

$$\|\Omega(t)\| < Ce^{-\sigma't} \quad (C < \infty, 0 < \sigma' < \sigma). \quad (21)$$

Поэтому, согласно (17),

$$\|\eta(t)\| < Ae^{-\sigma't} + \mu \frac{C}{\sigma'} \max_{0 < \nu < t} \|f(\nu; \dots)\|, \quad (22)$$

где  $A$  — некоторая постоянная.

Система уравнений (18) или эквивалентная ей система (20) при  $\eta(t) = 0$  относятся к рассматриваемому выше частному виду; поэтому в указанном выше смысле изучение их решений при  $\eta(t) = 0$  сводится к изучению решений уравнений (3).

Допустим, что  $\eta(t)$  отлично от нуля, но при всех  $t > 0$  удовлетворяет неравенству

$$\|\eta(t)\| < \mu B. \quad (23)$$

Тогда правые части уравнений (20) отличаются от правых частей этих же уравнений с  $\eta = 0$  на величину порядка  $\mu^2$  и поэтому для точечных отображений  $T_{2\pi}$  и  $\tilde{T}_{2\pi}$ , составленных для уравнений (20) с функцией  $\eta(t)$ , удовлетворяющей условию (23), и соответственно уравнений (3), сохраняется оценка (7). Вследствие близости точечных отображений

$T_{2\pi}$  и  $\tilde{T}_{2\pi}$  для решений уравнений (20) и (3) справедливы утверждения, полностью аналогичные утверждениям теоремы 1 в отношении решений уравнений (1) с  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0$  и уравнений (5).

Если теперь  $\tilde{\Pi}$  — область притяжения некоторого устойчивого элемента  $\tilde{J}$  решений уравнений (3), удовлетворяющего условию (9), то до тех пор, пока выполняется неравенство (23), при достаточно малых  $\mu$  все фазовые точки любой внутренней компактной части  $\tilde{\Pi}$  фазового пространства системы (20) приходят в  $\varepsilon$ -окрестность  $\tilde{J}$  и в ней остаются. С другой стороны, при выполнении неравенства вида  $\|\xi\| < K < \infty$  из (22) следует, что

$$\|\eta(t)\| < Ae^{-\sigma't} + \mu D. \quad (24)$$

Выберем  $B = 3D$ ; тогда в предположении, что  $\|\xi\| < K$  для значений  $t > -\frac{1}{\sigma'} \ln \mu D$  следует справедливость (23).

Теперь для завершения доказательства теоремы 1 применительно к уравнениям (1) и (3) осталось заметить, что за время  $t = -\frac{1}{\sigma'} \ln \mu D$  решения уравнений (20) и (3) разойдутся на величину порядка  $-\mu \ln \mu$ , стремящуюся к нулю вместе с  $\mu$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Мышкис, С. Н. Шиманов, Л. Э. Эльсгольц, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 2, Киев, 1963, стр. 241.
2. А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норжин, С. Э. Эльсгольц, УМН, 17, 21 (1962).

3. А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норкин, Л. Э. Эльсгольц, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 2, М., 1963, стр. 3.
4. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, М., 1955.
5. С. Н. Шиманов, ПММ, 23, 836 (1959).
6. С. Н. Шиманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 456 (1960).
7. А. Кхалапау, Revue math. pures et appl. Acad. RPR, 4, 1959.
8. В. П. Рубаник, Укр. матем. ж., 9, 446 (1959).
9. В. И. Фодчук, Укр. матем. ж., 16, 273 (1964).
10. Ю. И. Неймарк, Л. З. Фишман, Тезисы докладов на Всесоюзной конференции по дифференциальным уравнениям с отклоняющимися аргументами, Черновицы, 1965.
11. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1021 (1963).
12. Ю. И. Неймарк, Ученые записки ГГУ, выпуск 17, серия физико-математическая (1950).
13. R. Bellman, Ann. of Math., 50, № 2, 347 (1949).
14. E. M. Wright, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 63, № 1, 18 (1950).

Научно-исследовательский институт прикладной математики  
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
13 января 1966 г.

## ON BEHAVIOUR AS A WHOLE OF PHASE TRAJECTORIES OF QUASI-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY ARGUMENTS

*Yu. I. Neimark, L. Z. Fishman*

The analysis of an asymptotic behaviour of the solutions of the quasi-linear differential equations with the delay is shown to reduce the problem to the investigation of the solutions of some additional system of the ordinary differential equations.

---



Считая, что линейное звено системы имеет  $n$ -й порядок, и вводя еще  $n - 1$  промежуточных координат  $x_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), можно написать аналогичные рекуррентные выражения для каждой из этих координат, определив соответствующие весовые функции  $w_i(t)$ . Таким образом, для произвольного  $m$  и  $i = 1, 2, \dots, n$  найдем

$$x_i^m = x_i^0 w_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j) w_i^{m-1} \equiv \varphi_i^m(\tau, x_1^0, x_i^0). \quad (2)$$

Полученные выражения представляют собой не что иное как изохронное (постоянное  $\tau$ ) точечное преобразование фазового пространства системы в себя, осуществляемое при движении рассматриваемой импульсной системы за время  $m\tau$ . Инвариантные точки этого преобразования определяются из условия  $x_i^m = x_i^0 = x_i^*$ , т. е.

$$x_i^* = \varphi_i^m(\tau, x_1^*, x_i^*) \equiv x_i^* w_i^m + \psi_i^m(\tau, x_1^*, x_i^*), \quad (3)$$

а их устойчивость — из условия, что уравнение

$$\det \left[ E(z - w_i^m) - \frac{\partial \psi_i^m}{\partial x_k} \Big|_{x_k = x_k^*} \right] = 0 \quad (4)$$

имеет корни внутри единичного круга.

Основным ограничением в рассмотренном случае была одноконтурность системы, а недостатком — рекуррентность точечных преобразований. Нетрудно снять это ограничение и по крайней мере формально избежать указанного недостатка. Действительно, пусть в общем случае автономная нелинейная идеальная импульсная система описывается следующим матричным уравнением:

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad (5)$$

в котором принято, что если  $F(x) \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F(x(j\tau)) \delta(t - j\tau). \quad (6)$$

Решение этой системы при  $x(0) = x^0$  может быть записано в виде [44, 45]

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \sum_{j=0}^{\infty} F(x(j\tau)) \delta(s - j\tau) ds = \\ &= e^{At} x^0 + \sum_{j=0}^{\infty} e^{A(t-j\tau)} F(x(j\tau)), \end{aligned} \quad (7)$$

где матрицу  $e^{At}$  можно получить как оригинал матрицы  $[\rho E - A]^{-1}$ . Кроме принятых, введем еще обозначение

$$\Phi(\tau, x) \equiv e^{A\tau}(x + F(x)). \quad (8)$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} x^1 &= \Phi(\tau, x^0), \\ x^2 &= \Phi(\tau, x^1), \\ &\dots \\ x^m &= \Phi(\tau, x^{m-1}), \\ &\dots \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначая далее

$$\underbrace{\Phi[\tau, \Phi(\tau, \dots, \Phi(\tau, x) \dots)]}_{m \text{ раз}} \equiv \Phi^m(\tau, x), \quad (10)$$

получим, что

$$x^m = \Phi^m(\tau, x^0). \quad (11)$$

Таким образом, движение рассматриваемой импульсной системы осуществляет с каждым тактом некоторое нелинейное изохронное точечное преобразование фазового пространства системы в себя, которое задается функцией последования

$$\bar{x} = \Phi(\tau, x), \quad (12)$$

определяемой (8). Простые инвариантные точки этого преобразования соответствуют периодическим движениям системы с периодом  $\tau$ , а  $m$ -кратные точки, т. е. инвариантные точки преобразования (11), соответствуют периодическим движениям системы с периодом  $m\tau$ . (Состояния равновесия при этом рассматриваются как периодические движения с любым периодом и могут быть отделены как решения (5) при  $x = 0$ .)

Инвариантные точки кратности  $k$  ( $x^k = x^0 = \bar{x}$ ), определяемые из уравнения

$$\bar{x} = \Phi^k(\tau, \bar{x}), \quad (13)$$

будут устойчивы, если корни уравнения

$$\det \left[ zE - \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^0} \Big|_{x^0 = \bar{x}} \right] = 0 \quad (14)$$

находятся внутри единичного круга.

Заметим, во-первых, что рассмотрение неавтономной системы не вносит в обоих случаях принципиальных трудностей. Нетрудно усмотреть, что при достаточно малых  $\tau$  и больших  $m$  предложенный алгоритм может служить для приближенного исследования обычной нелинейной системы.

В простейшем случае одноконтурной системы, у которой коэффициент передачи линейного звена  $k(p) = \sum_{i=1}^n c_i / (p + \lambda_i)$ , введем  $x = \sum_{i=1}^n x_i$ .

Тогда получим уравнение системы (5)

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i + c_i \sum_{j=0}^{\infty} f_1 \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \delta(t - j\tau). \quad (15)$$

Основная функция последования (12) примет вид

$$\bar{x}_i = e^{-\lambda_i \tau} \left[ x_i + c_i f_1 \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \right]; \quad (16)$$

она оказывается разрешенной относительно последующих координат и в случае  $n = 2$  может с успехом, как некоторое усложнение диаграммы Ламерея, исследоваться в трехмерном пространстве при различных  $f_1$ . Очевидно, исследование свойств основной функции последования (12) или (16) позволит судить и о свойствах функций кратных и сколь угодно кратных преобразований (11).



## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Я. З. Цыпкин, Теория импульсных систем, Физматгиз, М., 1958.
- 2 Л. Т. Кузин, Расчет и проектирование дискретных систем управления, Машгиз, М., 1962.
- 3 Юлиус Т. Ту, Цифровые и импульсные системы автоматического управления, изд. Машиностроение, М., 1964.
- 4 Сб. Приспосабливающиеся автоматические системы, ИЛ, М., 1963.
- 5 Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963.
- 6 Я. З. Цыпкин, ДАН СССР, 145, 52 (1962).
- 7 Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 23, № 12, 1565 (1962).
- 8 Я. З. Цыпкин, ДАН СССР, 152, 302 (1963).
- 9 Я. З. Цыпкин, Доклад на II Международном конгрессе ИФАК, 1963.
- 10 Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 24, № 12, 1601 (1963).
- 11 Я. З. Цыпкин, ДАН СССР, 155, № 5, 1029 (1964).
- 12 Я. З. Цыпкин, И. С. Эпельман, ДАН СССР, 165, № 1, 47 (1965).
- 13 Е. И. Джури, Труды I Международного конгресса ИФАК, М., 1960.
- 14 Ю. Г. Корнилов, Инженерный сб., 1, № 2 (1941).
- 15 W. Orrell, Elektrotechnik, 2, № 5 (1948).
- 16 Ю. В. Долголенко, Инженерный сб., 13, 161 (1952).
- 17 С. К. Chow, Trans. AIEE, 73, pt. II (1954).
- 18 F. A. Russell, Trans. AIEE, 73, pt. II (1954).
- 19 E. Mishkin, M. S. Coldstein, I. Truxal, Politech. Institute of Brooklyn, Ang. 20, 1956.
- 20 В. П. Казаков, Автоматика и телемеханика, 18, № 1, 34 (1957).
- 21 И. В. Пышкин, Сб. Теория и применение дискретных автоматических систем, изд. АН СССР, М., 1960.
- 22 Я. З. Цыпкин, Труды межвузовской конференции по теории и методам расчета нелинейных систем, Ташкент, 1960; Труды Ташкентского политехнического института, нов. сер. Энергетика, вып. 20, 184 (1961).
- 23 М. М. Симкин, ДАН СССР, 131, № 6, 1323 (1960); Автоматика и телемеханика, 22, № 11, 1482 (1961).
- 24 R. E. Kalman, Proseeding of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, 6, Politech. Institute of Brooklin, April, 1956; IRE Wescon Convection Record, pt. 4, 1957.
- 25 A. Lepschy, A. Ruberti, Alta Frequenza, 32, № 5 (1963).
- 26 F. J. Mullin, ERL Report, Serics 60, Issue 211, Univ. of Calif. Berkelly, Ang., 1958.
- 27 J. S. Mago, AIEE Proc. of the Computer in Control Systems, May, 1958.
- 28 F. I. Mullin, E. J. Jury, Trans. AIEE, 77, Jan. (1959).
- 29 Дж. Эйзелтайн, Труды I Международного конгресса ИФАК, М., 1960.
- 30 М. В. Востров, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 3, 31 (1961).
- 31 R. F. Nease, WADC Technical Note, 57—162, Servomechanism Lab. MIT, June, 1957.
- 32 A. Tustin, J. IEE, 94, pt. IIA (1947).
- 33 B. N. Naumov, Report of the Conferens on Automatic Control, Heidelberg, 1956.
- 34 T. M. Stout, Trans. AIEE, 75, pt. II (1956).
- 35 A. J. O. Cruickshenk, Proc. IEE, Monograph. № 256 M, vol. 105 c, October, 1957.
- 36 O. Hellman, J. Electron. Control, 6 (1959).
- 37 А. Дж. О. Крюкшенк, Труды I Международного конгресса ИФАК, М., 1960.
- 38 Б. Кондо, С. Иваи, Труды II Международного конгресса ИФАК, М., 1965.
- 39 R. C. Rooton, Proc. Symposium Nonlinear Circuit Analysis, 2 (1953).
- 40 Я. З. Цыпкин, Труды I Международного конгресса ИФАК, М., 1960; ДАН СССР, 124, 812 (1959).
- 41 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
- 42 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41; № 2, 95; № 5—6, 146 (1958),

43. А. С. Алексеев, Тр. по вопросам применения ЭВМ в народном хозяйстве, Горький, 1964, стр. 23.
44. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, ПИММ, 20, 639 (1956).
45. Р. Белман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, М., 1962.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 января 1966 г.

APPLICATION OF POINT TRANSFORMATION METHOD TO DYNAMICS  
INVESTIGATION OF NONLINEAR IMPULSE SYSTEMS

*A. S. Alekseev*

The general problems of the dynamics investigation of the nonlinear impulse systems with an ideal impulse element have been considered by the method of isochronous point transformations. The main attention are paid to the finding the periodical motions and to the investigation of their stability.

---

УДК 62—505

**ОБ ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И КОРРЕКТНОСТИ  
ПОСТАНОВКИ ОДНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ**

*И. П. Лыткин*

Изучается область управляемости и корректность постановки оптимальной задачи, рассмотренной в [2].

1. Пусть  $u_0(x)$  — управление системой

$$\dot{x} = f(x) + bu, |u(t)| \leq 1 \quad (0 \leq t \leq T), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, x_0 \in M, x(T) \in U(0, \epsilon), \tag{2}$$

оптимальное по минимуму функционала

$$J = \int_0^T \varphi(x(t)) dt. \tag{3}$$

Здесь  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — точка (или вектор)  $n$ -мерного фазового пространства  $X$ , характеризующая состояние системы (1);  $b = (b_1, \dots, b_n)$  —  $n$ -мерный постоянный вектор;  $u(t)$  — скалярная функция, называемая функцией управления;  $T$  — положительное число ( $T \geq T_{opt}$ ,  $T_{opt}$  — продолжительность оптимального по быстродействию переходного процесса в системе (1));  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  — векторная функция, непрерывная и дважды непрерывно дифференцируемая на всем пространстве  $X$ ;  $\varphi(x)$  — положительно определенная непрерывно дифференцируемая на  $X$  функция;  $U(0, \epsilon)$  —  $\epsilon$ -окрестность начала координат,  $M$  — область управляемости.

На практике всегда имеют место ошибки в определении значений фазовых координат. Это приводит к неточной реализации оптимальных законов управления. Ошибки вычислительного устройства, определяющего значение  $u(x)$ , также могут быть интерпретированы как ошибки в измерении фазовых координат при наличии идеального вычислительного устройства. В связи с этим представляет практический интерес следующая задача. Пусть оптимальное управление  $u_0$  за время  $T$  переводит  $x(t)$  по траектории системы (1) из  $x_0$  ( $x_0 \in M$ ) в  $U(0, \epsilon)$ , доставляя функционалу (3) наименьшее значение  $J(u_0)$ , а оптимальное управление  $u'_0(t)$  за то же время  $T$  переводит  $x(t)$  из  $x'_0$  ( $x'_0 \in M$ ) в  $U(0, \epsilon)$ , доставляя функционалу (3) значение  $J(u'_0)$ . Спрашивается, будет ли  $J(u'_0)$  сколько угодно мало отличаться от  $J(u_0)$ , если  $|x_0 - x'_0| < \delta$ , где  $\delta > 0$  — бесконечно малое число. Следующая теорема позволяет ответить на этот вопрос положительно.

*Теорема 1.* Пусть множество  $M$  наряду с  $U(0, \epsilon)$  содержит также и некоторую его окрестность. Тогда, если  $u_0(t)$  — оптимальное управление, переводящее  $x(t)$  из  $x_0$  ( $x_0 \in M$ ) в  $U(0, \epsilon)$ , а  $u'_0(t)$  — оптимальное управление, переводящее  $x'_0$  ( $x'_0 \in M$ ) в  $U(0, \epsilon)$ , то

$$\mu \{ |u_0(t) - u'_0(t)| > \sigma \} < \eta', \quad |J(u_0) - J(u'_0)| < \eta'',$$

где  $\sigma$  — любое вещественное положительное число,  $\eta', \eta'' > 0$  — сколь угодно малые вещественные числа.

Опуская пока доказательство, отметим, что из этой теоремы следует весьма важный практический вывод: наибольшие ошибки в измерении фазовых координат не могут привести к сколько-нибудь значительному отклонению от оптимального режима в системе (1). Заметим, что аналогичный вопрос для линейной оптимальной по быстродействию системы рассматривался в [1].

В следующей теореме, доказательство которой также будет приведено ниже, дана характеристика области управляемости, т. е. множества  $M$  тех точек фазового пространства  $X$ , из которых можно попасть в  $U(0, \varepsilon)$  каким-либо управлением  $u(t)$ ,  $|u(t)| \leq 1$ . Такое управление будем называть допустимым, а множество  $M$  — областью управляемости. Через  $M(C)$ ,  $C \geq 0$  обозначим множество точек фазового пространства  $X$ , из которых, двигаясь по траектории системы (1), можно попасть в  $U(0, \varepsilon)$  при помощи какого-либо допустимого управления, причем  $\int_0^T \varphi[x(t)] dt \leq C$ . Тогда  $M$  совпадает с объединением всех  $M(C)$

для  $C \geq 0$ . Заметим, что  $M(0)$  вырождается в  $U(0, \varepsilon)$ . В [3] множество  $M$  изучено для линейных оптимальных по быстродействию систем с постоянными коэффициентами.

**Теорема 2.** Множество  $M(C)$  замкнуто и выпукло. Из этой теоремы следует, что множество  $M$  не может иметь «пустот». Действительно, так как  $M$  совпадает с объединением всех  $M(C)$ ,  $C \geq 0$  и  $M(C)$  выпукло, то выпукло и  $M$ . А это равносильно утверждению, что  $M$  не имеет «пустот», т. е. таких областей, откуда система не может выйти и попасть в  $U(0, \varepsilon)$ . Перейдем к доказательству теорем.

**2. Доказательство теоремы 1.** Вначале покажем, что оптимальная задача (1) — (3) эквивалентна оптимальной по быстродействию задаче для системы

$$\dot{x} = -\frac{1}{\varphi(x)} [f(x) + bu]. \quad (4)$$

С этой целью произведем замену переменной

$$\tau = \int_0^t \varphi(x(t)) dt, \quad \tau^0 = \int_0^T \varphi(x(t)) dt. \quad (5)$$

Тогда  $d\tau = \varphi(x(t)) dt$ , и система (1) запишется в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(x)} [f(x) + bu].$$

Так как  $\varphi(x) \neq 0$  на  $M - U(0, \varepsilon)$ , то из (5) и из того, что траектории систем (4) и (1) совпадают на  $M - U(0, \varepsilon)$ , вытекает эквивалентность задачи (1) — (3) задаче на быстродействие для системы (4). Совпадение траекторий систем (1) и (4) следует в свою очередь из того, что обе эти системы, будучи записаны в симметричной форме, совпадают друг с другом и решение  $x(t)$  уравнения (1) при фиксированном допустимом управлении  $u(t)$  однозначно определяется начальными условиями (см. теорему 9, [5]). Отсюда и из теоремы 11 [5] следует, в частности, непрерывная зависимость  $x(t)$  от начальных данных. Иными словами, для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $x(0), x'(0) \in M$ ,  $|x(0) - x'(0)| < \delta$  выполняется неравенство  $|x(t) - x'(t)| < \varepsilon$ . Поскольку задача (1) — (3) эквивалентна задаче на быстродействие для системы (4), то

для доказательства неравенства  $|J(u_0) - J(u'_0)| < \eta$  (см. формулировку теоремы) достаточно доказать неравенство  $|\tau^0 - \tau^{0'}| < \eta$  (см. (5)) или  $|T^0 - T^{0'}| < \eta$ , где  $\tau^0 = T^0$ . Для простоты будем предполагать, что  $x(T) = 0$ , хотя теорема верна и для  $x(T) \in U(0, \epsilon)$ .

Пусть из точки  $x_0 (x_0 \in M)$  можно попасть в начало координат с помощью допустимого управления  $u(t)$ ,  $|u(t)| \leq 1$  за время  $T$ , двигаясь по траектории уравнения (4). Тогда, как известно [4], из  $x_0$  можно попасть в начало координат и при помощи оптимального управления  $u_0(t) = u_0(x(x_0, t))$  ( $x(x_0, t)$  — решение уравнения (1) при  $u = u_0(t)$  и  $x(0) = x_0$ ) за оптимальное время  $T^0$ . Как было отмечено выше, существует единственное и непрерывно зависящее от начальных условий решение уравнения (1) при любом допустимом управлении  $u(t)$ ,  $|u(t)| \leq 1$ . Поэтому в силу совпадения траекторий систем (1) и (4) такими же свойствами обладает и решение системы (4) при том же управлении  $u(t)$ , которое является допустимым и для системы (1). Отсюда вытекает существование такого  $\delta > 0$  при заданном  $\epsilon > 0$ , что то же самое управление  $u_0(t)$  (которое переводит  $x_0$  в 0 по траектории системы (1) за время  $T^0$ ) за время  $T^0$  переведет  $x(t)$  из  $x'_0$ ,  $x'_0 \in U(x_0, \delta)$ ,  $x'_0 \in M$  в точку  $x'(T^0)$ ,  $x'(T^0) \in U(0, \epsilon)$ .

Воспользуемся установленным фактом для доказательства непрерывной зависимости  $T^0$  и  $u_0(t)$  от начальных данных  $x_0$  (т. е. для доказательства теоремы). Так как начало координат является внутренней точкой множества  $M$ , то из точки  $x'(T)$  можно попасть в начало координат некоторым допустимым (и оптимальным) управлением  $\vartheta(t)$ ,  $|\vartheta(t)| \leq 1$  за время  $\tau$ . Соответствующая траектория запишется следующим образом:

$$x(t) = x'(T^0) + \int_{T^0}^{T^0+t} [f(x(t)) + b\vartheta(t)] \frac{dt}{\varphi(x(t))} \\ (0 \leq t \leq \tau).$$

При  $t = \tau$  имеем  $x(\tau) = 0$ , поэтому

$$x'(T^0) + \int_{T^0}^{T^0+\tau} [f(x(t)) + b\vartheta(t)] \frac{dt}{\varphi(x(t))} = 0.$$

Из последнего уравнения следует

$$|x'(T^0)| = \left| \int_{T^0}^{T^0+\tau} [f(x(t)) + b\vartheta(t)] \frac{dt}{\varphi(x(t))} \right|. \quad (6)$$

Так как  $|b| > 0$ ,  $\varphi(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$ ,  $|\vartheta(t)| = 1$  [3], то

$$\min_{t \in [0, \tau]} \left| [f(x(t)) + b\vartheta(t)] \frac{1}{\varphi(x(t))} \right| = C,$$

где  $C$  — некоторая постоянная ( $0 < C < \infty$ ). Из приведенных соотношений, а также из неравенства  $|x'(T^0)| < \epsilon$  благодаря произвольной малости  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) находим, что  $\tau < \eta''$ , где  $\eta''$  — сколь угодно малое положительное число.

Обозначим  $T^{0'} = T^0 + \tau$ ,  $u'_0(t) = u_0(t) + \vartheta(t)$ . По построению управление  $u'_0(t)$  является оптимальным, переводящим  $x(t)$  по траектории системы (4) из  $x'_0$ ,  $x'_0 \in U(0, \epsilon) \cap M$  в начало координат за время  $T^{0'}$ . При этом

$$|T^0 - T^0'| < \eta'', \quad \mu \{ |u_0(t) - u'_0(t)| > \sigma \} < \eta' \quad (\sigma > 0)$$

(где  $\mu$  — мера Лебега), как только  $|x_0 - x'_0| < \delta$ .

*Доказательство теоремы 2.* Так как траектории уравнений (1) и (4) совпадают, совпадают и области управляемости для этих систем. Поэтому вместо  $M(C)$  будем изучать  $M(\tau)$  или  $M(T)$ , где обозначено  $\tau = T$ . Здесь  $M(T)$  — множество тех точек фазового пространства  $X$ , из которых, двигаясь по траектории системы (4) при помощи какого-либо допустимого управления, можно попасть в начало координат (мы по-прежнему считаем для простоты изложения  $x(T) = 0$ , но не  $x(T) \in U(0, \epsilon)$ ) за время ( $t \leq T$ ).

Пусть имеется последовательность  $\{x_{m0}\}$ ,  $x_{m0} \in M(T)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), сходящаяся при  $m \rightarrow \infty$  к  $x_0$ . Покажем, что  $x_0 \in M(T)$ . Через  $u_m(t)$  обозначим допустимое управление, переводящее точку  $x_m(t)$  по траектории системы (4) из  $x_{m0}$  в 0 за время  $t_m \leq T$ . Эту же точку в 0 можно перевести и при помощи оптимального управления [4], причем соответствующее время  $t'_m$  не увеличится. Поэтому предел  $\bar{t}$  последовательности  $\{t'_m\}$  удовлетворяет условию  $\bar{t} \leq T$ . Существование  $\bar{t}$  соответствует возможности выбрать из ограниченной последовательности  $\{t'_m\}$  сходящуюся подпоследовательность. Предполагается, что такая выборка осуществлена и  $\{t'_m\}$  — искомая подпоследовательность.

Подпоследовательность  $\{u_m\}$  оптимальных управлений  $u_m$  можно рассматривать как ограниченное множество пространства  $L_2[0, T]$ . Поэтому из нее можно выделить слабо сходящуюся к некоторому пределу  $u(t)$  подпоследовательность ([6], стр. 260), а из последней можно образовать последовательность линейных комбинаций элементов  $u_m$ , которая будет сходиться к  $u(t)$  по норме пространства  $L_2[0, T]$  ([6], стр. 255), причем можно добиться, чтобы элементы вновь образованной последовательности удовлетворяли неравенству  $|u(t)| \leq 1$  ( $0 \leq t \leq T$ ). Наконец, из только что упомянутой последовательности можно выбрать подпоследовательность  $\{u_m(t)\}$  (которую обозначаем прежним символом), сходящуюся к  $u(t)$  почти всюду  $[0, T]$  ([7], стр. 210). Переходя к пределу в неравенстве  $|u_m(t)| \leq 1$  и изменяя в случае надобности значение  $u(t)$  на множество меры Лебега нуль (допустимость такой операции следует из свойств интеграла Лебега), получим  $|u(t)| \leq 1$ .

Итак, мы выяснили, что из  $\{u_m\}$  можно выделить сходящуюся к  $u(t)$  почти всюду на  $[0, T]$  подпоследовательность  $\{u_k\}$ , причем  $|u_k(t)| \leq 1$ ,  $|u(t)| \leq 1$  ( $0 \leq t \leq T$ ). Подпоследовательности  $\{t_k\}$  и  $\{x_{k0}\}$  при этом по-прежнему будут сходиться к  $\bar{t}$  и  $x_0$ . Траекторию, соответствующую  $u_k$ , запишем в виде

$$x_k(t) = x_{k0} + \int_0^t \bar{f}(x_k, u_k) dt.$$

Так как  $u_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — допустимое управление, то  $x_k(t) \in M(T)$  ( $0 \leq t \leq t_k$ ,  $t_k \leq T$ ) и, следовательно, функции  $\bar{f}(x_k, u_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) равномерно ограничены на  $[0, T]$ . Поэтому из непрерывности функции

$$\bar{f}(x, u) \{ \bar{f}(x, u) = [f(x) + bu] / \varphi(x) \}$$

следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k0} + \int_0^t \bar{f}(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \lim_{k \rightarrow \infty} u_k) dt = x_0 + \int_0^t \bar{f}(x, u) dt = x(t).$$

Очевидно, что  $x(t)$  есть решение уравнения (4) при  $u = u(t)$ .

Заметим, что при вычислении предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  использовался тот факт, что из последовательности  $\{x_k\}$  можно выделить равномерно сходящуюся на  $[0, T]$  к  $x(t)$  подпоследовательность (на промежутке  $[t_k, T]$  функции  $x_k(t)$  считаются равными нулю). Для простоты полагаем, что  $\{x_k(t)\}$  — искомая подпоследовательность. Отсюда следует, что, двигаясь по траектории системы (4), из  $x_0$  можно попасть в 0 при помощи допустимого управления  $u(t)$  за время  $\bar{t}$ ,  $\bar{t} \leq T$ , так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ x_{k0} + \int_0^{t_k} \bar{f}(x_k, u_k) dt \right\} = x_0 + \int_0^{\bar{t}} \bar{f}(x, u) dt = x(\bar{t}) = 0.$$

А это означает, что  $x_0 \in M(T)$ . Следовательно, мы доказали первую часть теоремы.

Докажем выпуклость множества  $M(T)$ . Пусть  $u_1, u_2$  — два допустимых управления, переводящих  $x(t)$  из  $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$  в 0 за время  $t_1, t_2$  ( $t_1, t_2 \leq T$ ). Соответствующие траектории обозначим через  $x_1(t), x_2(t)$ . Можно считать, что  $t_1 = t_2 = \bar{t} \leq T$  [3]. Тогда  $x(t)$  при помощи управления  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$  ( $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ;  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ) может быть переведено из  $\lambda_1 x_0^{(1)} + \lambda_2 x_0^{(2)}$  в 0. Действительно,

$$\begin{aligned} x(\bar{t}) &= (\lambda_1 x_0^{(1)} + \lambda_2 x_0^{(2)}) + \int_0^{\bar{t}} [f(x) + b(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)] dt = \\ &= \lambda_1 \left\{ x_0^{(1)} + \int_0^{\bar{t}} [f(x) + b u_1] dt \right\} + \lambda_2 \left\{ x_0^{(2)} + \int_0^{\bar{t}} [f(x) + b u_2] dt \right\} = 0. \end{aligned}$$

Управление  $u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)$  удовлетворяет условию  $|u(t)| \leq 1$  ( $0 \leq t \leq T$ ), так как  $|\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2| \leq \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Отсюда, по определению, множество  $M(T)$ , а следовательно, и  $M(C)$ , выпукло. Таким образом, теорема 2 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Кириллова, Изв. высш. уч. зав.—Математика, № 4, 113 (1958).
2. И. П. Лыткин, Сб. трудов Киевского семинара по автоматическому управлению, 1965.
3. Р. В. Гамкрелидзе, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, 443 (1958).
4. Е. П. Григорьев, ПММ, 28, 25 (1964).
5. А. Ф. Филиппов, Матем. сб., 51, 3 (1960).
6. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
7. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М., 1958.

Харьковский институт горного машиностроения,  
автоматики и вычислительной техники

Поступила в редакцию  
12 января 1966 г.

#### ON CONTROLLABILITY REGION AND CORRECT FORMULATION OF ONE OPTIMUM PROBLEM

I. P. Lytkin

The region of controllability and the correct formulation of the optimum problem, considered in [1] is being investigated.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.391.144

### ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРА ВИДЕОИМПУЛЬСОВ В КЛЮЧЕВОЙ ЛИНИИ

Б. А. Соломин

Для современной радиотехники значительный интерес представляет управляемое преобразование спектра сигналов. Один из методов такого преобразования связан с использованием распределенных систем, погонные параметры которых зависят от времени. Возможность такого преобразования показана в работах [1-4]. В статьях [5, 6] приводятся экспериментальные данные о «нерезонансном» параметрическом преобразовании синусоидальных радиочастотных сигналов (модуляция и преобразование частоты), а в [7-9] приведены данные о параметрических эффектах для видеоимпульсных сигналов (сокращение длительности и увеличение амплитуды). Для некоторых задач импульсной техники существенно, что «нерезонансные» параметрические системы позволяют в определенных случаях осуществлять «подобное» преобразование спектра импульсных сигналов, т. е. производить изменение их временной длительности без искажения формы. В частности, это возможно, когда в достаточно длинной недиспергирующей линии одновременно с импульсным сигналом распространяется с постоянной скоростью «скачок параметра».

Если скорость и длительность сигнала, бегущего в заданном направлении, до взаимодействия его со скачком параметра равны  $v_1$  и  $\Delta t_1$  соответственно, а после взаимодействия равны  $v_2$ ,  $\Delta t_2$ , то формулы доплер-эффекта дают

$$a = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{v_p/v_2 - 1}{v_p/v_1 - 1}, \quad (1)$$

где  $v_p$  — скорость движения скачка параметра. Если скорость распространения сигнала в линии зависит только от времени, т. е.  $v_p \rightarrow \infty$ , то  $a \rightarrow v_1/v_2$ .

Для наблюдения «подобного» преобразования спектра видеоимпульсов необходимо удовлетворить одновременно следующим требованиям: линейность системы относительно преобразуемых сигналов, отсутствие заметной дисперсии и потерь во всем частотном спектре сигнала, достаточно малая амплитуда паразитных наводок в цепь сигнала со стороны управляющего воздействия, заметное изменение скорости сигнала под воздействием скачка параметра и, наконец, достаточная длина системы для обеспечения полного взаимодействия сигнала со скачком параметра.

Некоторые из этих условий (в частности, линейность системы и отсутствие заметных наводок из управляющей цепи) трудно выполнить для простейших параметрических систем с нелинейными реактивностями [7,8]. Ряд преимуществ в этом отношении имеют линии передачи с постоянными, линейными реактивными элементами, если к этим элементам достаточно быстро подключаются или отключаются через активные ключи добавочные постоянные и линейные элементы. Такие линии можно назвать ключевыми. Ниже приведены результаты экспериментов с двумя такими линиями, схемы которых изображены на рис. 1а, б.

В каждой из линий 1а или 1б скачкообразно изменяются погонная емкость (1а) или погонная индуктивность (1б) при помощи ключей  $K_1, K_2, \dots, K_n$ . Линии 1а и 1б исследовались при  $v_p \rightarrow \infty$ , т. е. все ключи  $K_1, \dots, K_n$  замыкались в один и тот же момент времени. В этом случае для рис. 1а скорость движения сигнала уменьшится, а его длительность увеличится до значения

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \frac{v_1}{v_2} = \Delta t_1 \sqrt{(C_1 + C_2)/C_1}. \quad (2)$$



Для рис. 16 скорость движения сигнала в линии при замыкании ключей увеличится, а его длительность уменьшится до

$$\Delta t'_2 = \Delta t'_1 \sqrt{L_2 / (L_1 + L_2)}. \quad (2a)$$

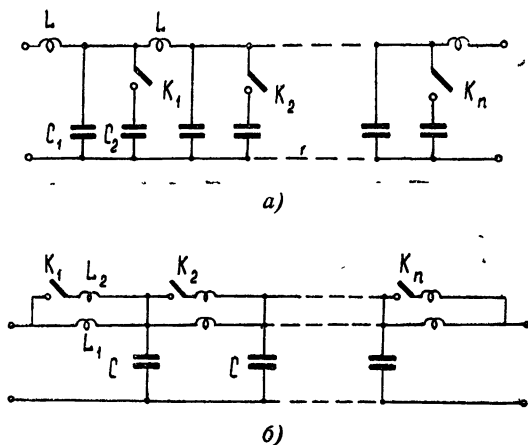
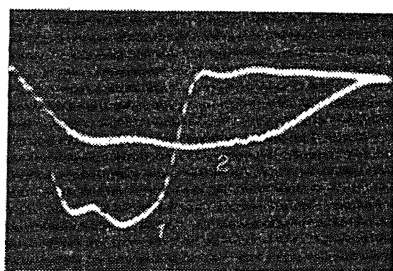


Рис. 1. Исследованные ключевые линии:

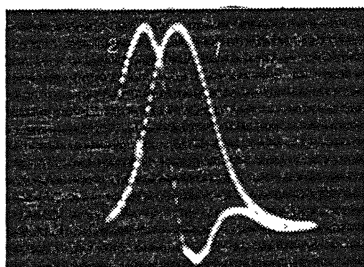
а) — с переключаемой емкостью, б) — с переключаемой индуктивностью.

Линии были выполнены из сосредоточенных элементов и имели полосу пропускания, достаточную для того, чтобы входные импульсные сигналы не искажались существенно при прохождении через эти линии. Волновое сопротивление линий — около 300 ом. В качестве активных ключей для линии на рис. 1а использовались импульсные полупроводниковые триоды по схеме с общим эмиттером. Емкость \$C\_1\$ при замыкании ключей изменялась в 4 раза. Для линии, изображенной на рис. 1б, использовались пальчиковые тиратроны, замыкающие накоротко дополнительную размагничивающую обмотку на каждой из индуктивностей линии. Таким путем достигалось четырехкратное изменение индуктивностей. Время коммутации ключей в обеих схемах (~100 нсек) было значительно меньше фронтов входных импульсов (0,4 — 1,5 мксек).

На рис. 2а, б приводятся совмещенные для удобства сравнения осциллограммы преобразования. Рис. 2а соответствует линии, изображенной на рис. 1а, а рис. 2б — линии, изображенной на рис. 1б. Масштабные метки на осциллограммах равны 50 нсек.



а)



б)

Рис. 2. а) Осциллограмма выходных сигналов линии с переключаемой емкостью (1—выходной импульс при отсутствии преобразования, 2—выходной импульс после преобразования).

б) Осциллограмма выходных сигналов линии с переключаемой индуктивностью (1—импульс при отсутствии преобразования, 2—импульс после преобразования). Масштабные метки 50 нсек.

Наблюдаемое преобразование сигналов по длительности совпадает с расчетным (формулы (2), (2а)), а искажения формы преобразованных сигналов относительно преобразованных мало заметны. Предварительные эксперименты показывают, что возможно «подобное» преобразование спектра и наносекундных импульсных сигналов.

Заметим, что уравнения амплитудного преобразования сигналов в ключевых ли-

ниях в общем случае не будут совпадать с аналогичными для параметрических систем с управляемыми реактивностями из-за диссипации энергии в активных ключах\*.

В заключение выражаю признательность Л. А. Островскому за внимание к работе и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. R. Morgenthaler, IRE Trans., МТТ-6, 167 (1958).
2. С. И. Аверков, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 46 (1958).
3. С. И. Аверков, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 203 (1959).
4. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 672 (1960).
5. Э. Я. Дауме, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 43, № 9, 1102 (1962).
6. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 752 (1963).
7. Б. А. Соломин, сб. Трудов Томского политехнического института (в печати).
8. М. Отыка, Тезисы доклада на XIII симпозиуме URSI, 1965, Голландия.
9. H. Weinstein, IEEE Trans., СТ-12, 157 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
28 февраля 1966 г.

УДК 537.291 : 538.3

### УСРЕДНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЙНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Г. Литвак

1. Движение заряженных частиц в быстропеременных пространственно неоднородных полях исследовалось различными методами в целом ряде работ. Отыскание общего решения уравнения движения в электромагнитных полях произвольной конфигурации, по-видимому, невозможно, но в слабо неоднородных полях это удается сделать с помощью метода усреднения. Согласно этому методу, движение частицы представляется в виде суперпозиции быстрых (с частотой внешнего поля) осцилляций  $\rho(t)$  и плавного (усредненного по периоду колебаний поля) движения  $R(t)$ :

$$r(t) = R(t) + \rho(t). \quad (1)$$

Такое представление справедливо, если движение нерелятивистское и поле достаточно плавно меняется в пространстве:

$$v/c \ll 1; \quad |\rho|/L_E \ll 1; \quad vT_e/L_E \ll 1. \quad (2)$$

Здесь  $L_E \sim |E/\nabla E|$ ;  $T_E \sim \left| E / \frac{\partial E}{\partial t} \right|$  — характерные размер и время, в пределах которых амплитуда поля претерпевает заметные изменения.

При выполнении всех ограничений (2) решение в виде (1) можно получить, если разложить точное решение уравнения движения одновременно по трем параметрам малости (2). В работах [1–6] было получено усредненное уравнение движения заряженной частицы в монохроматических и квазимонохроматических полях. Оказывается [1–3], усредненная сила является потенциальной, несмотря на вихревой характер электромагнитного поля. Большинство предложений по применению слабонеоднородных электромагнитных полей [1–4] основано именно на этом свойстве усредненной силы. Ниже будет получено усредненное уравнение движения заряженной частицы в случайном электромагнитном поле. Это уравнение позволяет в дальнейшем исследовать нелинейное взаимодействие заряженных частиц со случайным электромагнитным полем. Наибольший интерес представляет обобщение результатов работ [1–7] на частично когерентные поля (поля со случайными меняющимися амплитудой и фазой), в частности, исследование явления самофокусировки частично когерентных волновых пучков в нелинейной среде [8–12].

\* Эта диссипация приводит к уменьшению энергии преобразованного сигнала относительно входного, что также подтверждается проведенными экспериментами.

2. Рассмотрим движение заряженной частицы в слабонеоднородном электромагнитном поле  $E = E(r, t)$ ;  $H = H(r, t)$ , среднее по времени которого равно нулю:

$$\langle E(r, t) \rangle = 0; \quad \langle H(r, t) \rangle = 0. \quad (3)$$

Здесь знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени. Уравнение движения заряженной частицы имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{e}{m} E(r, t) + \frac{e}{mc} \left[ \frac{dr}{dt} H(r, t) \right]. \quad (4)$$

Будем считать, что поле  $E(r, t)$  удовлетворяет условиям слабой неоднородности (2). Для этого, в частности, необходимо, чтобы в спектральном разложении поля отсутствовали частоты  $\omega \lesssim v/L_E^*$ . Тогда после подстановки (1) в уравнение движения (4)

получим

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{e}{m} E(R, t) + \frac{e}{m} (\rho \nabla) E(R, t) + \frac{e}{mc} [\dot{\rho} + \dot{R}, H(R, t)]. \quad (5)$$

В нулевом приближении имеем уравнение осцилляций

$$\ddot{\rho} = \frac{e}{m} E(R, t), \quad (6)$$

решение которого легко может быть получено, если воспользоваться разложением поля  $E(R, t)$  в интеграл Фурье:

$$E(R, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(R, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (7)$$

В результате

$$\rho(t) = -\frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(R, \omega)}{\omega^2} e^{i\omega t} d\omega. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5) и усредняя по времени\*\* правую и левую части, получим

$$\ddot{R} = -\frac{e^2}{m^2} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\omega + \omega') t] \left( \frac{[E(\omega) \nabla] E(\omega')}{\omega^2} - \frac{[E(\omega) \text{rot} E(\omega')]}{\omega \omega'} \right) d\omega' \right\rangle. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой усредненное уравнение движения заряженной частицы в некогерентном быстропеременном поле, записанное в наиболее общем виде. Естественно, из него легко могут быть получены все частные случаи, исследованные ранее. Например, усредненное уравнение движения в монохроматическом поле

$$E(R, \omega) = \frac{1}{2} E(R) [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (10)$$

имеет вид

$$\ddot{R} = -\nabla \Phi_0; \quad \Phi_0(R) = \frac{e^2}{4m^2 \omega_0^2} |E(R)|^2, \quad (11)$$

\* Присутствие в спектральном разложении полей низких частот  $\omega \ll v/L_E$  не противоречит проводимой процедуре усреднения. Эти спектральные составляющие могут быть отнесены в усредненное уравнение движения.

\*\* Усреднение производится за период времени, равный времени пролета частицы через область неоднородного поля.

что совпадает с уравнением, полученным в [1-3]. Аналогично находятся выражения для усредненной силы, действующей на частицу в многочастотном поле с дискретным спектром [3,6]. Кроме того, уравнение (9) может быть использовано для исследования движения частицы под действием импульсов высокочастотного поля.

3. Перейдем к рассмотрению движения заряженной частицы в слабонеоднородном стационарном случайном поле, функция корреляции спектра которого представляется в виде

$$\overline{E(\mathbf{R}, \omega) E^*(\mathbf{R}, \omega')} = G(\mathbf{R}, \omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (12)$$

где  $G(\mathbf{R}, \omega)$  — энергетический спектр электромагнитного поля, а черта обозначает усреднение по ансамблю. Переходя в уравнении (9) от усреднения по времени к усреднению по ансамблю и подставляя в (9) функцию корреляции (12), получим

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\nabla\Phi; \quad \Phi = \frac{e^2}{2m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\mathbf{R}, \omega)}{\omega^2} d\omega. \quad (13)$$

Таким образом, как и в случае регулярного монохроматического поля, усредненная сила оказывается потенциальной, вследствие чего уравнение (13) имеет первый интеграл

$$|\dot{\mathbf{R}}|^2/2 + \Phi(\mathbf{R}) = \text{const}. \quad (14)$$

Этот факт позволяет обобщить ряд результатов [3] на стационарные случайные поля, в частности, на частично когерентные поля. Следует отметить возможность перехода от описания движения одной частицы к описанию поведения квазинейтральной плазмы, характеризуемой диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Потенциальность усредненной силы позволяет также написать стационарное распределение [7] концентрации плазмы  $N$  в частично когерентном поле:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{m\Phi}{T}\right). \quad (15)$$

Здесь  $N_0$  — концентрация плазмы в области, где поле отсутствует, а  $T$  — сумма температур электронов и ионов. Это выражение может быть использовано при исследовании явления самофокусировки частично когерентных волновых пучков в изотропной плазме [8-12]. Кроме того, представляет интерес получить с помощью (9) усредненное уравнение движения частицы в случайном поле с произвольной функцией корреляции.

Автор признателен Л. С. Долину и М. А. Миллеру за полезные советы и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, 242 (1958).
2. H. A. H. Boot, S. A. Self, R. B. R. Shersby-Harvie, J. El. and Control, 4, 434 (1958).
3. М. А. Миллер, Докторская диссертация, Горький, 1960.
4. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 929 (1962).
5. А. Г. Литвак, М. А. Миллер, Н. В. Шолохов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1160 (1960).
6. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 562 (1964).
7. А. Г. Литвак, М. И. Петелин, Е. И. Якубович, ЖТФ, 35, 108 (1964).
8. Г. А. Аскаръян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
9. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 564 (1964).
10. R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
11. В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ, 2, № 5, 222 (1965).
12. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1148 (1965).

## КЛАССИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ\*

Ю. Г. Павленко, Д. В. Гальцов

В ряде работ указывалось на возможность индуцированного излучения в различных классических системах [1-6]. Целью настоящей заметки является расчет индуцированного излучения нерелятивистского электрона в скрещенных полях в дипольном приближении.

Рассмотрим движение электрона (заряда  $e_- = -e_0$ ) в однородном магнитном поле, направленном по оси  $z$  с вектор-потенциалом

$$A_0 = \left( -\frac{1}{2} Hy, \frac{1}{2} Hx, 0 \right) \quad (1)$$

и в радиальном статическом с потенциалом

$$\varphi = \frac{a(x^2 + y^2)}{2}, \quad 0 < a < \frac{e_0 H^2}{4mc^2} \quad (2)$$

Электромагнитные поля такой конфигурации используются при анализе работы магнетрона [7]. Вводя, как обычно, комплексную координату  $\xi = x + iy$ , найдем решение уравнений движения в виде

$$\begin{aligned} \xi^{(0)} &= R_H \exp(i\Omega_H t - i\delta_H) + R_E \exp(i\Omega_E t - i\delta_E), \\ z^{(0)} &= z_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\Omega_{H,E} = \frac{\Omega}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4amc^2}{e_0 H^2}} \right), \quad \Omega = \frac{e_0 H}{mc}. \quad (4)$$

Траектория движения представляет собой эпитрохоиду.

Интенсивность спонтанного излучения в дипольном приближении в телесный угол  $d\Omega$  в направлении  $\mathbf{n}$  может быть найдена по известным формулам:

$$P_{\text{спонт}}(\mathbf{n}) = \frac{e_0^2}{8\pi c^3} \left( R_H^2 \Omega_H^4 + R_E^2 \Omega_E^4 \right) (1 + \cos^2 \theta). \quad (5)$$

Рассмотрим теперь индуцированное излучение  $N$  электронов, имеющих случайные фазы. Пусть в направлении оси  $x$  распространяется электромагнитная волна, поляризованная вдоль оси  $y$ . Решение уравнений движения электрона в полях (1), (2) и в поле волны будем искать в виде разложения по степеням заряда, т. е.  $\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \dots$ . Тогда для  $\xi^{(1)}$  получим уравнение

$$\ddot{\xi}^{(1)} - i\Omega \dot{\xi}^{(1)} - \frac{e_0 a}{m} \xi^{(1)} = -\frac{ie_0}{mc} \dot{A}_y, \quad (6)$$

где в дипольном приближении вектор-потенциал

$$A = \sum_k \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \left( a_k e^{i\omega t} + a_k^+ e^{-i\omega t} \right). \quad (7)$$

Мгновенная мощность индуцированного излучения, усредненная по фазам поля и электронов, определяется выражением [3,4]

$$P_{\text{инд}}(t) = -\frac{e_0 N}{c} \langle \mathbf{v}^{(1)} \dot{A} \rangle. \quad (8)$$

При усреднении по фазам поля удобно использовать соотношения

$$\langle a_k a_{k'} \rangle = 0, \quad \langle a_k a_{k'}^+ \rangle = \frac{(2\pi c)^3}{2\omega^4} u_n(\omega) \delta_{k, k'}, \quad (9)$$

где  $u_n(\omega)$  — спектральная плотность энергии падающей волны в интервале частот  $d\omega$  и углов  $d\Omega$  в направлении  $n$ .

Опуская нерезонансные члены, которые не дают вклада в окончательное выражение для интенсивности индуцированного излучения, найдем

$$\xi^{(1)} = v_x^{(1)} + i v_y^{(1)} = \sum_k \frac{e_0 \omega}{mc} \frac{a_y^+}{\Omega_H - \Omega_E} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \times \quad (10)$$

$$\times \left[ \Omega_E \frac{\exp [i(\omega - \Omega_E)t] - 1}{i(\omega - \Omega_E)} e^{i\Omega_E t} - \Omega_H \frac{\exp [i(\omega - \Omega_H)t] - 1}{i(\omega - \Omega_H)} e^{i\Omega_H t} \right].$$

Подставляя (10) и (7) в (8), получим

$$dP^{\text{инд}} = P^{\text{инд}}(t) d\omega d\Omega, \quad (11)$$

$$P^{\text{инд}}(t) = \frac{2\pi e_0^2 N}{m(\Omega_H - \Omega_E)} \left[ \Omega_E \frac{\sin(\omega - \Omega_E)t}{(\omega - \Omega_E)} - \right. \quad (12)$$

$$\left. - \Omega_H \frac{\sin(\omega - \Omega_H)t}{\omega - \Omega_H} \right] u(\omega).$$

Обычно интересуются усредненным по времени значением величины  $P^{\text{инд}}(t)$ . Это усреднение зависит от физических условий, в которых происходит излучение. В случае, когда доминирующим фактором являются столкновения с частотой  $\frac{1}{\tau_c} = \Delta\omega_L$ , средняя мощность может быть найдена по формуле [8]

$$P_{\text{ср}}^{\text{инд}} = \frac{1}{\tau_c} \int_{-\infty}^t P^{\text{инд}}(t-t_1) \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_c}\right) dt_1 = \quad (13)$$

$$= \frac{2\pi e_0^2 N \Delta\omega_L}{m(\Omega_H - \Omega_E)} \left[ \frac{\Omega_E}{(\omega - \Omega_E)^2 + \Delta\omega_L^2} - \frac{\Omega_H}{(\omega - \Omega_H)^2 + \Delta\omega_L^2} \right] u(\omega).$$

Если  $u(\omega)$  отлична от нуля только в окрестности частоты  $\Omega_E$ , то из (13) следует, что на этой частоте внешнее излучение усиливается. На частоте  $\Omega_H$  имеет место поглощение. Этот результат следует также из квантово-механического рассмотрения [5].

Отметим, что  $P^{\text{инд}}$  не зависит от начальных условий и, следовательно, индуцированное излучение возможно при нулевой начальной амплитуде колебаний электрона, когда спонтанное излучение отсутствует. Это обстоятельство связано с тем, что  $P^{\text{инд}}$  получено в нерелятивистском случае в дипольном приближении.

Следует подчеркнуть, что при  $a = 0$  поглощение на частоте  $\Omega = e_0 H / mc$  является нерелятивистским эффектом. В слаборелятивистском случае становится возможным нерезонансное усиление на частотах, близких к  $\Omega$  [1], а в ультрарелятивистском случае — резонансное усиление на частоте  $\Omega$  [6].

В заключение авторы благодарят А. А. Соколова за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schneider, Phys. Rev. Lett., 2, 504 (1959).
2. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
3. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 207 (1963).
4. И. И. Собельман, И. В. Тютин, УФН, 79, 596 (1963).
5. А. А. Соколов, Ю. Г. Павленко, Письма ЖЭТФ, 2, 449 (1965).
6. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН СССР, 166, 1332 (1966).
7. П. Л. Капица, УФН, 78, 181 (1962).
8. Витке, Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ИЛ, М., 1959, стр. 252.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
26 июля 1965 г,  
после переработки  
16 мая 1966 г.

## СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОДИНА С АВТОМАТИЧЕСКИМ РЕГУЛИРОВАНИЕМ АМПЛИТУДЫ

*Р. Кривицкас, В. Лесаускис*

В спектроскопии ядерного магнитного резонанса применение автодина для регистрации сигналов поглощения при больших временах релаксации ограничено искажениями, возникающими вследствие влияния дисперсионной компоненты на частоту [1, 2]. Для устранения этих искажений используется кварцевая стабилизация [3] или синхронизация автодина внешней гармонической силой [4, 5].

В настоящей работе рассмотрены свойства синхронизированного автодина с автоматическим регулированием амплитуды. Подобный анализ особо интересен, поскольку этот автодин обладает частотно-избирательным свойством в отношении сигнала модуляции [6]. В дальнейшем предполагается, что прохождение через резонансную линию медленное и переходными процессами в цепях синхронизированного автодина можно пренебречь.

**Основные уравнения.** Блок-схема исследуемого автодина представлена на рис. 1. Ток синхронизирующего генератора

$$i_s = I_s \cos(\omega_1 t). \quad (1)$$

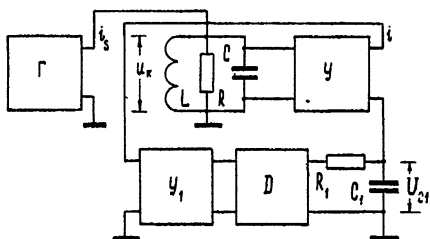


Рис. 1.  $Y$ —регенерирующий усилитель тока,  $Y_1$ — усилитель автоматического регулирования амплитуды,  $D$ —детектор,  $\Gamma$ —генератор синхронизирующего тока.

Напряжение автоматического регулирования амплитуды  $U_{c1}$  влияет на крутизну  $S$  усилителя  $Y$  [6]:

$$S = S_0(1 + aU_{c1}). \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений, описывающих автодин, имеет вид

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du_k}{dt} + \omega_0^2 u_k = \frac{2}{\tau} \left[ K_0(1 + aU_{c1}) \frac{du_k}{dt} - \omega_1 U_s \sin(\omega_1 t) \right], \quad (3)$$

$$\frac{dU_{c1}}{dt} = \frac{K_1}{\tau_1} U_c - \frac{1}{\tau_1} U_{c1},$$

где

$$\frac{2}{\tau} = \frac{1}{CR}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad K_0 = S_0 R; \quad U_s = I_s R;$$

$U_c$ — амплитуда колебаний напряжения  $u_k$ ;  $\tau_1 = R_1 C_1$ ;  $K_1$  — коэффициент передачи амплитуды  $u_k$  из входа  $Y_1$  на выход  $D$ .

Если напряжение на контуре задано в виде колебания синхронизирующей частоты

$$u_k = U_c \cos(\omega_1 t - \theta), \quad (4)$$

а расстройка частот

$$h = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\omega_1}, \quad (5)$$

то изменения со временем амплитуды  $U_c$  и фазы  $\theta$  описываются укороченными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dU_c}{dt} &= \frac{1}{\tau} (K_0 - 1 + aK_0 U_{c1}) U_c + \frac{1}{\tau} U_s \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= h - \frac{1}{\tau} \frac{U_s}{U_c} \sin \theta, \\ \frac{dU_{c1}}{dt} &= \frac{K_1}{\tau_1} U_c - \frac{1}{\tau_1} U_{c1}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Стационарные состояния.** Стационарные решения (6) в отсутствие синхронизации легко найти:

$$U_{c0} = \frac{1-K_0}{aK_0K_1}, \quad U_{c10} = \frac{1-K_0}{aK_0}. \quad (7)$$

При действии синхронизирующей силы стационарные состояния (6) описываются уравнениями

$$\begin{aligned} F \cos \theta_s - (K_0 - 1)(\rho - 1)\rho &= 0, \\ h - \frac{1}{\tau} \frac{F}{\rho} \sin \theta_s &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rho = \frac{U_{cs}}{U_{c0}}, \quad F = \frac{U_s}{U_{c0}}, \quad (9)$$

представленными графически на рис. 2.

Для установления полосы синхронизации методом Ляпунова исследовалась устойчивость стационарных решений  $\rho$ . Полученное условие устойчивого режима синхронизации выражается неравенством

$$\frac{1}{\tau_1} + \frac{2}{\tau} (K_0 - 1)(\rho - 1) > 0. \quad (10)$$

Обычно  $1/\tau_1 \ll 2(K_0 - 1)/\tau$ , поэтому вместо (10) можно написать

$$\rho > 1 \quad (11)$$

или

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_s < \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

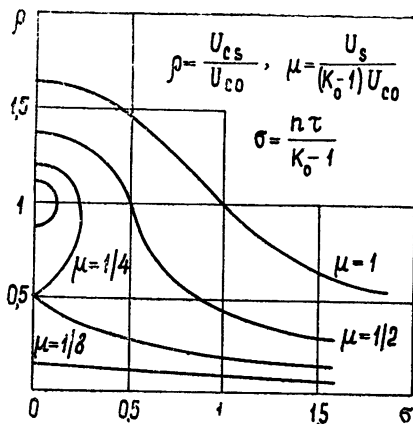


Рис. 2.

Приведенные неравенства совпадают с условиями для автогенератора с инерционной нелинейностью [7]. Ширина полосы синхронизации определяется при этом совместным решением (8) и (11), что дает

$$\Delta\omega_s = 2h_s = 2F/\tau. \quad (13)$$

**Чувствительность.** Сигнал абсорбции ядерного магнитного резонанса изменяет затухание контура автодина [1]. При модуляции внешнего магнитного поля частотой  $\Omega$  затухание контура автодина изменяется по закону [6]

$$d = d_0 [1 + m \sin(\Omega t)]. \quad (14)$$



С учетом (14) из (3) получаются укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dU_c}{dt} &= \frac{1}{\tau} [K_0 - 1 - m \sin(\Omega t) + aK_0 U_{c1}] U_c + \frac{1}{\tau} U_s \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= h - \frac{1}{\tau} \frac{U_s}{U_{c0}} \sin \theta, \\ \frac{dU_{c1}}{dt} &= \frac{K_1}{\tau_1} U_c - \frac{1}{\tau_1} U_{c1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Принимая во внимание, что  $m \ll 1$ , ищем решения для амплитуды модуляции огибающей высокочастотных колебаний  $u_R$  вблизи положения равновесия  $m = 0$ ,  $dU_c/dt = d\theta/dt = dU_{c1}/dt = 0$ . Линеаризованные уравнения для отклонений

$$x = U_c - U_{c0}, \quad y = \theta - \theta_0, \quad z = U_{c1} - U_{c10} \quad (16)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{\tau} (K_0 - 1)(\rho - 1) x - U_{c0} \rho h y - \frac{K_0 - 1}{\tau K_1} \rho z - \frac{1}{\tau} U_{c0} \rho m \sin(\Omega t), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{h}{U_{c0} \rho} x - \frac{1}{\tau} (K_0 - 1)(\rho - 1) y, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{K_1}{\tau_1} x - \frac{1}{\tau_1} z. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение системы (17) довольно громоздко, поэтому приводятся только конечные результаты.

Резонансная модуляционная частота в режиме синхронизации

$$\Omega_s^2 = \frac{K_0 - 1}{\tau \tau_1} (2\rho - 1) - \frac{1}{4\tau_1^2} \left[ 1 + \frac{\tau_1}{\tau} (K_0 - 1)(\rho - 1) \right]^2. \quad (18)$$

Для небольших  $\rho$

$$\Omega_s^2 \approx \frac{K_0 - 1}{\tau \tau_1} (2\rho - 1). \quad (19)$$

Амплитуда модуляции огибающей высокочастотных колебаний в отсутствие расстройки ( $h = 0$ ) на резонансной частоте модуляции  $\Omega = \Omega_r$  равна

$$A_{rs} = \frac{\tau_1 m U_{c0} \rho / \tau}{1 + \tau_1 (K_0 - 1)(\rho - 1) / \tau}. \quad (20)$$

Из выражения (20) следует, что чувствительность огибающей высокочастотных колебаний к изменению затухания контура в режиме синхронизации уменьшается.

При расстройках, удовлетворяющих неравенству  $h < \Omega_s$ ,

$$\begin{aligned} A_{rs} \approx & \frac{\tau_1 m U_{c0} \rho}{\tau} \left\{ 1 + \frac{\tau_1}{\tau} (K_0 - 1)(\rho - 1) + \frac{h^2}{\Omega_s^2} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{\tau_1}{\tau} (K_0 - 1)(\rho - 1) - 1 + \frac{h^2 \tau_1^2 / 2}{1 + \frac{\tau_1}{\tau} (K_0 - 1)(\rho - 1)} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

**Эксперимент.** На рис. 3 представлены частотные характеристики модуляции затухания контура автодина при разных  $F$ . Они получены в условиях  $h = 0$ ;  $U_{c0} \approx 50$  мВ;  $K_0 - 1 \approx 0,13$ ;  $\tau \approx 0,26 \cdot 10^{-4}$  сек;  $\tau_1 \approx 0,3 \cdot 10^{-2}$  сек; глубина амплитудной модуляции высокочастотных колебаний не превышала 0,1. Пунктирной кривой указаны резонансные частоты, вычисленные по (18).

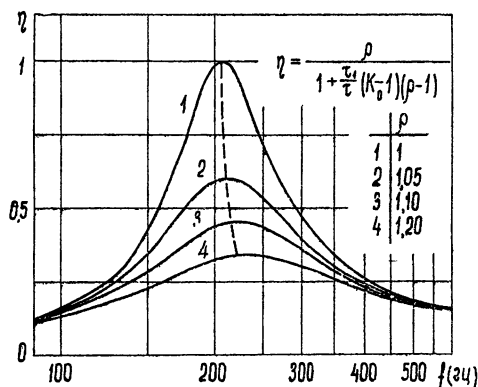


Рис. 3.

Измерялась также полоса синхронизации  $\Delta\omega_s$  и зависимость  $\rho$  от  $F$  при  $h = 0$ . Результаты измерений достаточно хорошо совпадают с расчетами в пределах точности измерений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Леше, Ядерная индукция, ИЛ, М., 1963.
2. Ю. С. Константинов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 4, 164 (1958).
3. Richard J. Blume, RSJ, 29, 574 (1958).
4. Ю. С. Константинов, ПТЭ, № 2, 105 (1958).
5. Von W. Müller-Warmuth, P. Servoz-Gavin., Zs. Naturforsch., 13a, 194 (1958).
6. В. Лесаускис, К. Баршаускас, Liet. Fiz. rinkinys, Лит. физ. сборник, 2, 371 (1962).
7. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М.—Л., 1952.

Каунасский политехнический институт

Поступила в редакцию  
12 апреля 1966 г.