

СОДЕРЖАНИЕ

Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П., Муратова Б. Л. О возможной структуре поверхности слоя Луны	849
Рядов В. Я., Фурашов Н. И. Измерение атмосферного поглощения электромагнитных волн в диапазоне $0,76 \div 1,15 \text{ мкм}$	859
Каневский М. Б. О распространении миллиметровых и сантиметровых радиоволн в приводных тропосферных волноводах	867
Фукс И. М. К теории рассеяния радиоволн на взволнованной поверхности моря	876
Кравцов Ю. А., Фейзуллин З. И. Разрешающая способность антенн в турбулентной среде	888
Литвак А. Г. О самофокусировке электромагнитных волн в магнитоактивной плазме	900
Кондратьев И. Г., Миллер М. А. Об использовании решений некоторых нелинейных уравнений для изучения волн в линейных неоднородных средах	910
Сущик М. М., Фрейдман Г. И. О ширине углового и частотного спектра излучения ОКГ с нелинейным поглотителем	919
Никитин А. И., Страховский Г. М. Характеристики квантового генератора на пучке атомов водорода	923
Григорьев Ю. В., Руденко В. К., Хохлов Р. В. К теории параметрического генератора света	932
Андронова И. А., Зайцев Ю. И. Экспериментальное исследование дисперсионных характеристик усилителя света на волну $3,39 \text{ мкм}$	942
Маркелов В. А. Выбросы огибающей и фазы периодически нестационарного процесса	950
Бочков Г. Н. Статистическая устойчивость осцилляторного движения системы с одной степенью свободы. II	958
Марков Г. Т., Коваленко А. Н. Возбуждение металлического шара большого электрического диаметра произвольным распределением источников	967
Горонина К. А., Белов Р. К., Сорокина Э. П. Определение диэлектрической проницаемости по изменению поляризации волны при отражении	975
Курилко В. И. Рассеяние электромагнитных волн прямоугольным диэлектрическим клином	980
Рабинович М. И., Якубович Е. И. О применении метода усреднения к исследованию распределенных систем с малой нелинейностью	987
Грошков Л. М., Кузнецов М. И. Влияние предосцилляционных флуктуаций на распределение пространственного заряда в магнетроне	998
Лисицкая И. Н. Исследование электрической цепи с нелинейным отрицательным сопротивлением при кусочно-линейной аппроксимации	1006
Казанцев Э. Н. Об одном методе построения алгоритмов для решения некоторых задач оптимизации	1016
Эйнгорин М. Я., Эйнгорина Т. Н. Некоторые вопросы теории построения многомерных запоминающих устройств	1020
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Алексеев В. А., Кротиков В. Д., Матвеев Ю. Г., Михайлова Н. Б., Порфириев В. А., Рязанов В. П., Сергеева А. И., Стрежнева К. М., Троицкий В. С., Шмулевич С. А. Результаты измерений радиоизлучения Луны на волнах $7,93; 11,0; 14,2$ и $20,8 \text{ см}$	1030
Шишкин И. Ф. Поляриметрия излучения с меняющейся интенсивностью	1033
Орлов Ю. И. К вопросу о просачивании волн через каустику в параболическом плазменном слое	1036
Сурамлишвили Г. И. О взаимодействии фотонов в плазме	1038
Казаков Г. Т., Советов Н. М. Особенности рекуперации электронных потоков в ЛБВ большой мощности	1040
Златкин В. И., Ликерман Д. И. О максимальном быстродействии одного класса систем управления	1041

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. VI, № 2, 1966

1044

УДК 536.2 : 523.3

О ВОЗМОЖНОЙ СТРУКТУРЕ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ЛУНЫ

Г. Н. Дульнев, Ю. П. Заричняк, Б. Л. Муратова

Установлено аналитическое выражение для эффективной теплопроводности тел различной структуры. Рассматривается решение обратной задачи — определения структуры тела по эффективному коэффициенту теплопроводности. Приводятся соображения о возможной структуре поверхности слоя Луны, основанные на анализе радиоастрономических данных о величине параметра $\gamma = (\lambda \rho c)^{-1/2}$ и некоторых дополнительных предположениях.

Изучение обобщенной проводимости (теплопроводности, электропроводности и др.) двухфазных систем проводилось многими исследователями. Для отдельных видов структур двухфазных систем (зернистой структуры, твердого тела с замкнутыми и сообщающимися порами) предложены аналитические зависимости, связывающие физические и структурные параметры с эффективным коэффициентом переноса данной системы [1—4]. Представляет интерес решение обратной задачи: по эффективному коэффициенту переноса (например, эффективной теплопроводности двухфазной системы) определить ее структуру. Такая задача возникла, в частности, при изучении структуры поверхностного слоя Луны. По прецизионным измерениям температуры во время лунаций получено значение параметра $\gamma = (\lambda \rho c)^{-1/2} \approx 400$ [5]. Если считать плотность вещества поверхностного слоя Луны $\rho > 0,4 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, что соответствует плотности земных вулканических пород (например, туфа), а теплопроводность вещества Луны $c \sim 0,2 \text{ кал} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} = 840 \text{ дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$, то по значению γ находим эффективную теплопроводность вещества поверхностного слоя Луны:

$$\lambda \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ кал} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} = 0,035 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}.$$

Сопоставим полученное значение эффективной теплопроводности с теплопроводностью различных структур в условиях глубокого вакуума. Коэффициент теплопроводности минеральной пыли в глубоком вакууме колеблется при нормальной температуре в пределах от 0,003 до 0,01 $\text{вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$ [8,9]; коэффициент теплопроводности высокопористого твердого тела в вакууме при плотности $\rho \approx 0,4 \div 0,6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ изменяется в пределах от $0,07 \div 0,7 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$. Следовательно, коэффициент теплопроводности поверхностного слоя Луны занимает промежуточное положение между коэффициентами теплопроводности минеральной пыли и твердого пористого тела минерального происхождения в условиях глубокого вакуума. Эти результаты позволяют предположить существование промежуточных структур, которые в дальнейшем будем называть «дendритными». Схематическое изображение такой структуры дано на рис. 1б, т. е. dendritную структуру представим в виде твердого тела с сообщающимися порами (рис. 1а), скелет которого состоит из брусьев переменного сечения.

Дендритные структуры можно получать искусственным путем. В работе [6] приведено описание опытов, в которых наблюдается «спекание» отдельных частиц зернистых систем в конгломераты в условиях глубо-

кого вакуума при температурах порядка 500°К. При этом площадь контакта, по которой происходит «спекание» отдельных частиц, в $10^2 \div 10^4$ раз меньше площади их максимального сечения.

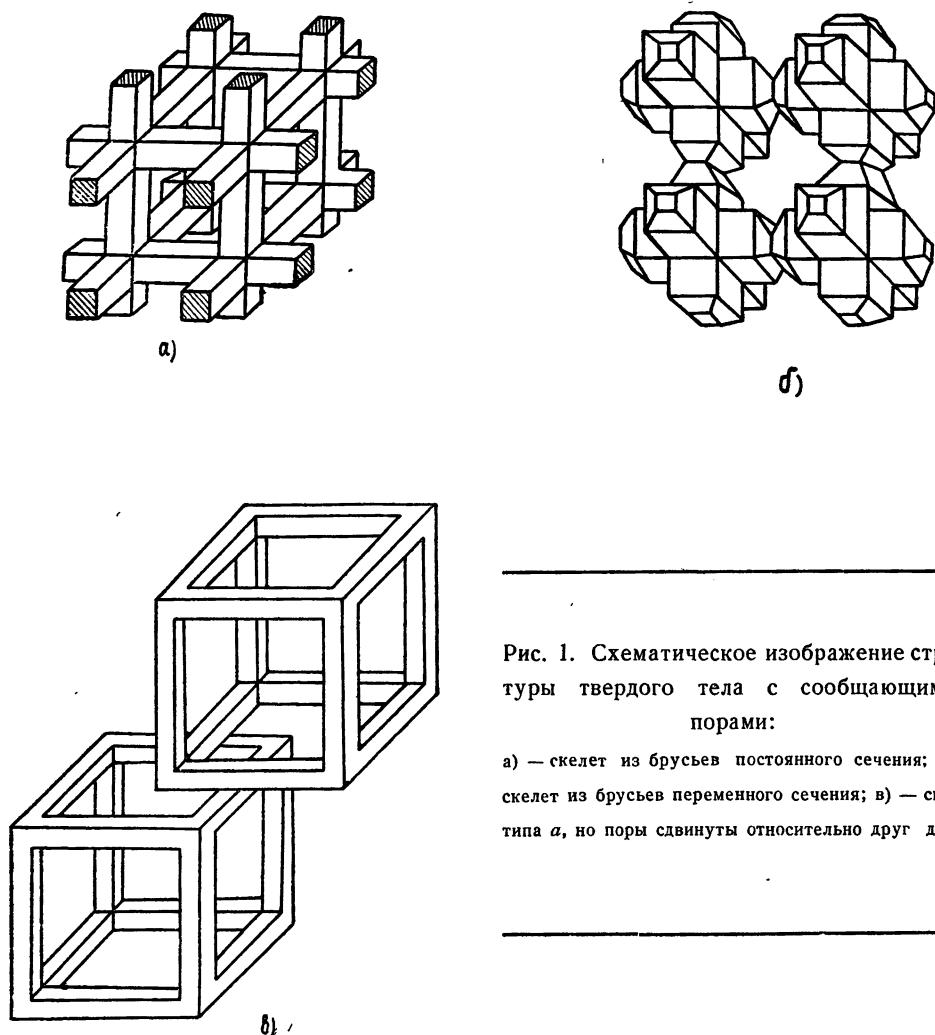


Рис. 1. Схематическое изображение структуры твердого тела с сообщающимися порами:

а) — скелет из брусьев постоянного сечения; б) — скелет из брусьев переменного сечения; в) — скелет типа а, но поры сдвинуты относительно друг друга.

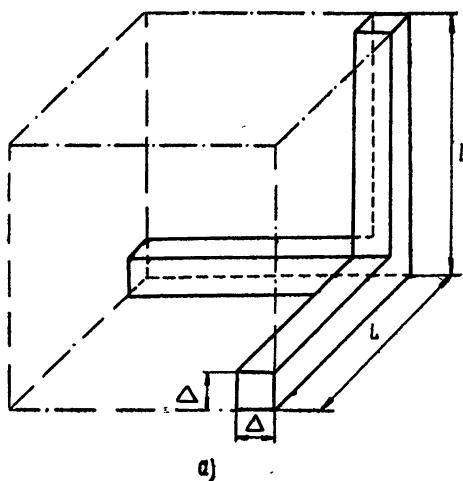
Найдем эффективную теплопроводность дендритной структуры в условиях глубокого вакуума (давление газа-наполнителя в порах менее $1 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.) при температурах от 0° до 300°К. В этом случае лучистый и молекулярный перенос тепла пренебрежимо мал по сравнению с переносом тепла через твердый скелет. Для удобства расчетов используем понятие «элементарной ячейки» (минимального объема, сохраняющего все свойства дендритной структуры), многократным повторением которой можно получить систему с дендритной структурой [3].

Рассмотрим вначале эффективную теплопроводность твердого тела

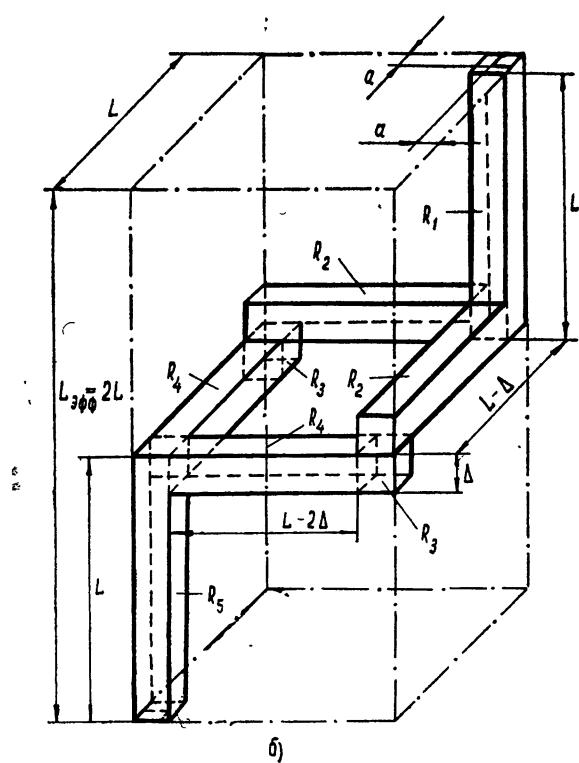
с сообщающимися порами, скелет которого состоит из брусьев постоянного сечения (рис. 1а). Вид элементарной ячейки показан на рис. 2а. Эффективная теплопроводность таких структур в условиях глубокого вакуума может быть определена по формуле [3]

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_1 x^2, \quad x = \Delta/L, \quad (1)$$

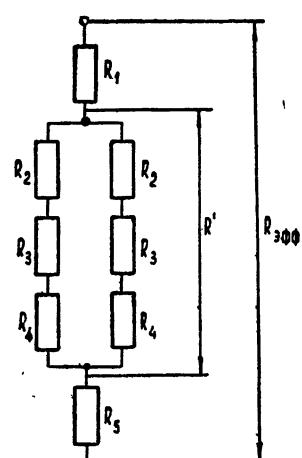
где λ_1 — теплопроводность материала скелета, Δ — размер поперечного сечения бруса, L — размер элементарной ячейки (см. рис. 1в). Параметр



a)



б)



в)

Рис. 2. Элементарная ячейка для различных структур твердого тела:
а) — структура рис. 1а; б) — структура рис. 1в; в) — схема соединения тепловых сопротивлений в элементарной ячейке.

x однозначно зависит от пористости материала; эта зависимость приведена ниже (см. (8)).

В реальных двухфазных системах поры хаотически распределены по объему. Такая система схематически может быть представлена в виде сдвинутых относительно друг друга кубических каркасов (рис. 1в). Элементарная ячейка такой структуры изображена на рис. 2б. Тепловой поток входит в элементарную ячейку через полное сечение бруса с площадью $S_{\text{вх}} = \Delta^2$. Сдвиг пор увеличивает длину пути теплового потока по проводящей фазе (твердому скелету), увеличивая тем самым тепловое сопротивление элементарной ячейки.

Разобъем условно брусья в элементарной ячейке на отдельные части (1—5) (рис. 2б) и вычислим их тепловые сопротивления, предполагая, что линии теплового потока в отдельных брусьях ячейки параллельны между собой. В этом случае тепловое сопротивление отдельных частей ячейки можно определять по формуле для плоской стенки:

$$R_i = L_i / \lambda_1 S_i, \quad (2)$$

где L_i и S_i — длина и площадь поперечного сечения i -ой части ячейки, λ_1 — теплопроводность скелета. Из рис. 2б и формулы (2) видно, что

$$R_1 = L / \lambda_1 \Delta^2, \quad R_2 = \frac{L - \Delta}{\lambda_1 \Delta^2}, \quad R_3 = \Delta / \lambda_1 \Delta^2, \quad R_4 = \frac{L - 2\Delta}{\lambda_1 \Delta^2}. \quad (3)$$

Схема соединения тепловых сопротивлений отдельных частей R_i , входящих в элементарную ячейку, представлена на рис. 2в. Нетрудно определить общее (эффективное) $R_{\text{эфф}}$ сопротивление элементарной ячейки:

$$R_{\text{эфф}} = 2R_1 + R', \quad R' = \frac{1}{\sigma'}, \quad \sigma' = 2(\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4), \quad \sigma_i = \frac{1}{R_i}. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) получаем

$$R_{\text{эфф}} = \frac{3L - \Delta}{\lambda_1 S_{\text{вх}}} = \frac{3L - \Delta}{\lambda_1 \Delta^2}. \quad (5)$$

Если использовать понятие эффективного коэффициента теплопроводности ($\lambda_{\text{эфф}}$) элементарной ячейки, то ее тепловое сопротивление можно представить в виде

$$R_{\text{эфф}} = \frac{L_{\text{эфф}}}{\lambda_{\text{эфф}} S_{\text{эфф}}} = \frac{2}{\lambda_{\text{эфф}} L}, \quad (6)$$

где $L_{\text{эфф}}$ и $S_{\text{эфф}}$ — длина и площадь элементарной ячейки.

Приравняв уравнения (5) и (6), получим выражение для эффективной теплопроводности скелета из брусьев постоянного сечения со сдвинутыми порами:

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_1 x^2 f(x), \quad f(x) = \frac{2}{3-x}. \quad (7)$$

При этом параметр x в формулах (1) и (7) связан с пористостью p зависимостью [3].

$$p = 1 + 2x^3 - 3x^2, \quad p = \frac{V_{\text{пор}}}{V} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho}, \quad (8)$$

где $V_{\text{пор}}$ и V — объем пор в теле и общий объем тела; ρ_1 и ρ — объемные плотности пористого тела и скелета.

Учет сдвига пор в твердом теле с сообщающимися порами уменьшает эффективную теплопроводность; значения $\lambda_{\text{эфф}}$, рассчитанные по формулам (1) и (7), отличаются менее, чем на 30 %. Следовательно, такие структуры еще не являются промежуточными между зернистой системой и твердым пористым телом.

Рассмотренные случаи относятся к структурам с брусьями постоянного сечения. В дендритных структурах площадь поперечного сечения проводящей фазы резко меняется, образуя своеобразные сужения — шейки. Пусть тепловой поток входит в элементарную ячейку и выходит из нее только через шейку с площадью поперечного сечения $S_{\text{вх}} = S_{\text{ш}} = a^2$, меньшей, чем площадь поперечного сечения $S_6 = \Delta^2$ (рис. 2б). Заменим скелет элементарной ячейки, состоящий из брусьев постоянного сечения, цилиндром приведенной длины l , причем тепловое сопротивление такого цилиндра R_u равно эффективному тепловому сопротивлению $R_{\text{эфф}}$ элементарной ячейки:

$$R_u = \frac{l}{\lambda_u S_u} = R_{\text{эфф}} = \frac{3L - \Delta}{\lambda_1 \Delta^2} \quad (9)$$

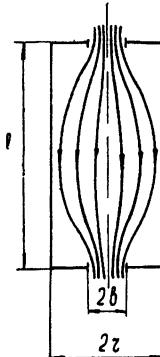
(будем считать, что $S_u = \Delta^2$, $\lambda_u = \lambda_1$). Из формулы (9) получим выражение для приведенной длины цилиндра l :

$$l = 3L - \Delta. \quad (10)$$

В этом случае тепловой поток входит в торец цилиндра через поверхность, площадь которой $S_{\text{ш}} = a^2$, и выходит из противоположного конца через поверхность той же площади; остальные поверхности будем считать адиабатическими (рис. 3). Искривление линий теплового тока приводит к изменению теплового сопротивления цилиндра. Если среднеповерхностные температуры шейки на входе и выходе \bar{t}_1 и \bar{t}_2 , а мощность теплового потока P , то тепловое сопротивление R цилиндра по определению равно

$$R = \frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_2}{P}. \quad (11)$$

Рис. 3. Линии теплового тока в части цилиндрического бруса переменного сечения.



Разность температур $\bar{t}_1 - \bar{t}_2$ при этом связана с геометрическими и физическими параметрами цилиндра зависимостью [7]:

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{Pl}{\lambda_1 S} \left\{ 1 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(n\pi b/l)}{n^2 J_1(n\pi r/l)} [J_1(n\pi r/l) K_1(n\pi b/l) - K_1(n\pi r/l) J_1(n\pi b/l)] \right\}, \quad (12)$$

где $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, P — полный тепловой поток, S — площадь шейки, l, r, b — длина и радиус цилиндра, радиус шейки, λ_1 — коэффициент теплопроводности цилиндра, J_1 — функция Бесселя первого

порядка, мнимого аргумента, K_1 — функция Макдональда первого порядка.

Из выражений (11) и (12) следует, что

$$R = R_0 \Phi(b/r, r/l), \quad R_0 = l/\lambda_1 S, \quad (13)$$

где R_0 — тепловое сопротивление цилиндра с площадью $S = \pi b^2$,

$$\begin{aligned} \Phi(b/r, r/l) = & 1 - 16/\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [J_1(n\pi b/l)] / [n^2 J_1(n\pi r/l)] \times \\ & \times [J_1(n\pi r/l) K_1(n\pi b/l) - K_1(n\pi r/l) J_1(n\pi b/l)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Значения функции $\Phi(b/r, r/l)$, рассчитанные по формуле (11) для ряда соотношений b/r и r/l , представлены на рис. 4.

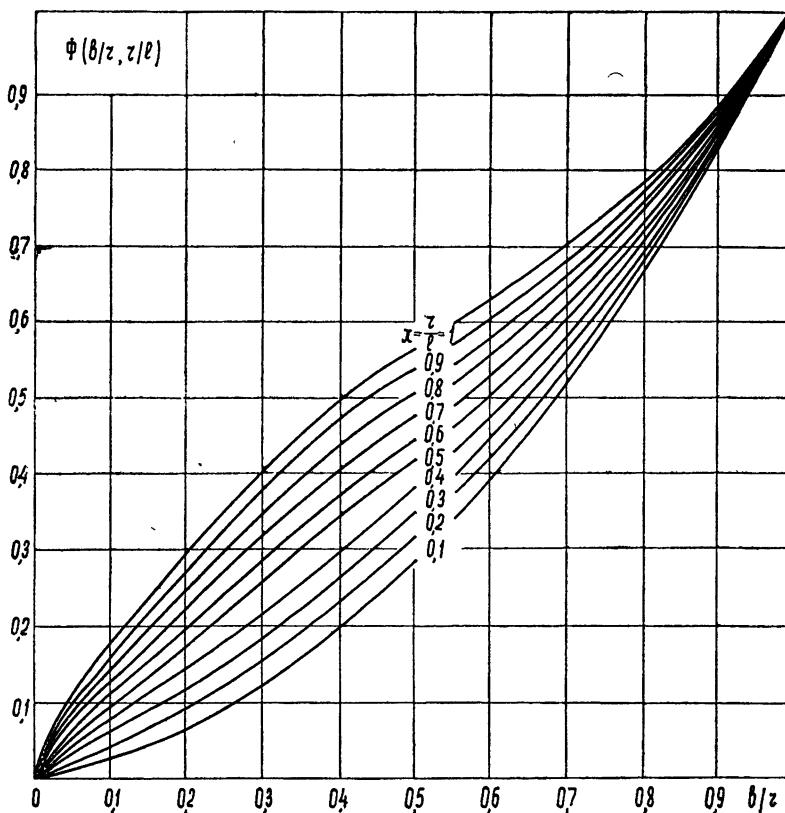


Рис. 4. График функции $\Phi(r/l, b/r)$.

Заменим цилиндр на брус прямоугольного сечения, в основании которого лежит квадрат со стороной Δ , и будем считать, что тепловой поток входит и выходит из него через поперечное сечение квадрата со стороной a . При этом $\pi b^2 = a^2$, $\pi r^2 = \Delta^2$. Тогда функция $\Phi(b/r, r/l) = \Phi(a/\Delta, \Delta/l)$ характеризует изменение сопротивления бруса за счет изменения поперечного сечения.

Величина теплового сопротивления R_0 бруса постоянного сечения может быть определена по формуле (5):

$$R_0 = l/\lambda_1 S_{\text{вх}} = l/\lambda_1 a^2. \quad (15)$$

Величина теплового сопротивления бруса переменного сечения определяется из выражений (13) и (15):

$$R = \frac{l}{\lambda_1 a^2} \Phi \left(\frac{a}{\Delta}, \frac{\Delta}{l} \right). \quad (16)$$

Эффективное сопротивление элементарной ячейки для системы со сдвигом пор и брусьями переменного сечения можно выразить в виде (см. рис. 2б)

$$R_{\text{эфф}} = 2/\lambda_{\text{эфф}} L. \quad (17)$$

Как и в случае со сдвигом ячеек, приравняв уравнения (16) и (17), получим выражение для эффективной теплопроводности дендритной структуры:

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_1 x^2 y^2 \frac{f(x)}{\Phi(y, \Delta/l)}, \quad y = a/\Delta. \quad (18)$$

При малых значениях y (начиная с $y \leq 5 \cdot 10^{-2}$) определение функции $\Phi(y, \Delta/l)$ из графика приводит к большой погрешности. Для уменьшения погрешности зависимость между $\Phi(y, \Delta/l)$ и y можно аппроксимировать линейной функцией вида

$$\Phi(y, \Delta/l) = 2,22 y \Delta/l \quad (y \leq 5 \cdot 10^{-2}). \quad (19)$$

Из уравнений (18) и (19) следует, что

$$\lambda_{\text{эфф}} = 0,9 \lambda_1 x y. \quad (20)$$

Все вышеприведенные аналитические зависимости относятся к модели дендритной структуры с монолитным скелетом.

Рассмотрим теперь дендритную структуру, имеющую пористый скелет с сообщающимися порами второго порядка малости (структура, близкая природному вулканическому туфу). Разделим общую пористость двухфазной системы p на внешнюю p_1 и внутреннюю p_2 :

$$p = p_1 + p_2, \quad (21)$$

где

$$p = V_{\text{пор}}/V, \quad p_1 = V_{\text{пор}1}/V, \quad p_2 = V_{\text{пор}2}/V,$$

$V_{\text{пор}}$ — объем всех пор, $V_{\text{пор}1}$ — объем пор вне скелета, $V_{\text{пор}2}$ — объем пор внутри скелета, V — общий объем элементарной ячейки.

Введем понятие пористости скелета.

$$p_{\text{ск}} = V_{\text{пор}2}/V_{\text{ск}}, \quad (22)$$

где $V_{\text{ск}}$ — общий объем скелета. Можно показать, что

$$p_{\text{ск}} = \frac{p - p_1}{1 - p}. \quad (23)$$

Тогда расчет эффективной теплопроводности проводится в два этапа. На первом этапе по формулам (7) и (8) определяется теплопроводность пористого скелета $\lambda_{\text{ск}}$ как функция его пористости $p_{\text{ск}}$. Полученное значение теплопроводности твердого скелета $\lambda_{\text{ск}}$ подставляется в формулу (18) вместо λ_1 , и определяется эффективная теплопроводность

дendритной структуры в целом. При этом уравнение (7) можно записать в виде

$$\lambda_{\text{ск}} = \lambda_1 x_2^2 f(x_2), \quad (24)$$

а эффективную теплопроводность (18) выразить следующим образом:

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_1 x_1^2 x_2^2 y^2 \frac{f(x_1) f(x_2)}{\Phi(y, \Delta/l)}, \quad (25)$$

где x_1 — корень уравнения (8), составленного для $p = p_1$, x_2 — корень уравнения (8), составленного для $p = p_{\text{ск}}$.

Различное деление общей пористости ρ на внешнюю пористость p_1 и внутреннюю пористость скелета p_2 приводит к различным значениям эффективной теплопроводности $\lambda_{\text{эфф}}$ дендритной системы. Можно показать, что минимальное значение эффективной теплопроводности $\lambda_{\text{эфф min}}$ получается при $p_1 = p_{\text{ск}}$. Тогда уравнение (23) принимает вид

$$p_1^2 - 2p_1 + p = 0,$$

откуда следует, что

$$p_1 = 1 - \sqrt{1-p}. \quad (26)$$

Принимая во внимание условие $p_1 = p_{\text{ск}}$, из формулы (25) получим минимальное значение эффективной теплопроводности:

$$\lambda_{\text{эфф min}} = \lambda_1 x^4 y^2 [f(x)]^2 / \Phi(y, \Delta/l). \quad (27)$$

Проведем по предложенной методике расчет эффективной теплопроводности вулканического туфа в вакууме. Непосредственное рассмотрение вулканического туфа с помощью стереомикроскопа показало, что туф имеет дендритную структуру и пористый скелет. Теплопроводность скелета вулканического туфа $\lambda_1 = 2,5 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$, объемная плотность скелета без пор $\rho_1 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ [10]. Наиболее вероятная плотность туфа в «лунных условиях» $\rho = 400 \div 800 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ [5]. Расчет $\lambda_{\text{эфф}}$ проводится по формулам (8) и (18) для различных значений y . Результаты расчета $\lambda_{\text{эфф}} = \lambda(\rho)$ приведены на рис. 5.

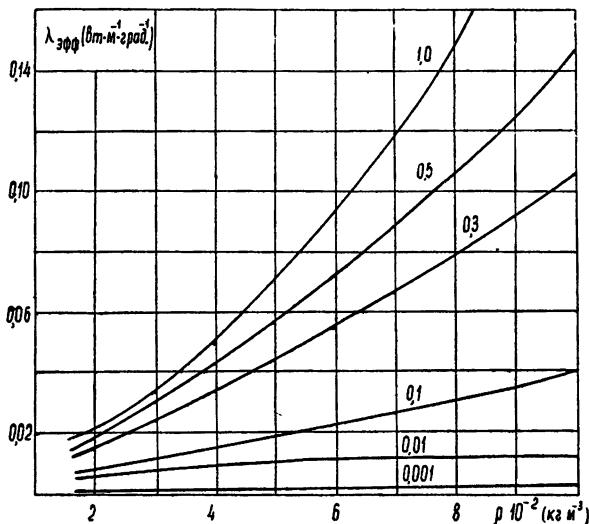


Рис. 5. График зависимости эффективной теплопроводности туфа от плотности и вида структуры.

В качестве примера рассмотрим расчет зависимости $\lambda_{\text{эфф}} = \lambda(\rho)$ для случая $\rho = 600 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $y = 0,3$. По формуле (10) определим общую пористость туфа:

$$p = 0,76.$$

Полагая $p_1 = p_{\text{ск}}$, найдем по формуле (23) внешнюю пористость:

$$p_1 = 0,51.$$

Из уравнения (8) находим величину $x = 0,49$, соответствующую пористости p_1 , а по формулам (1) и (10) — значение $\Delta/l = 0,195$. Задаем относительную величину сужений $y = 0,3$; тогда по графику рис. 4 находим значение $\Phi(y, \Delta/l) = 0,15$ для $y = 0,3$ и $\Delta/l = 0,195$.

По формуле (7) находим $f(x) = 0,8$ и по формуле (27) определим минимальное значение эффективной теплопроводности выбранной структуры:

$$\lambda_{\text{эфф}} = 0,055 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}.$$

Как упоминалось выше, результаты астрофизических измерений величины γ и предположение относительно плотности и теплоемкости вещества поверхностного слоя Луны приведут к значениям эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{эфф}} = 0,04 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$. Выбирая другие значения относительного сужения y , можно получить различные величины $\lambda_{\text{эфф}}$ (например, при $y = 1$ $\lambda_{\text{эфф}} = 0,09$; при $y = 0,1^*$ $\lambda_{\text{эфф}} = 0,02$; при $y = 0,01$ $\lambda_{\text{эфф}} = 0,01$; при $y = 0,001$ $\lambda_{\text{эфф}} = 0,001$), т. е. охватить все промежуточные значения эффективного коэффициента теплопроводности от твердого тела с сообщающимися порами и скелетом с брусьями постоянного сечения до зернистых систем.

Решение обратной задачи (определение структуры тела по ее эффективной теплопроводности) требует дополнительных сведений о строении тела: необходимо сделать предположения о пористости тела, относительной величине сужения скелета и т. д. Следовательно, по значению только одного параметра $\lambda_{\text{эфф}}$ нельзя вынести однозначного суждения о структуре тела. Тем не менее рассмотренный выше метод определения структуры тела по его теплофизическим свойствам может оказаться полезным при комплексном изучении проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Одесевский, ЖТФ, 21, 667 (1951).
2. А. Ф. Чудновский, Теплофизические характеристики дисперсных материалов, ГИФМЛ, М., 1962.
3. Г. Н. Дульнев, ИФЖ, 9, № 3, 399 (1965).
4. Г. Н. Дульнев, З. В. Сигалова, ИФЖ, 7, № 10, 49 (1964).
5. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 885 (1962).
6. J. D. Halajian, Grumman Research Department Report, RE—197J., 1965.
7. Г. Карслон, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, изд. Наука, М., 1964.
8. М. Г. Каганер, А. И. Глебова, Кислород, № 1, 1961.
9. Вопросы глубокого охлаждения, сб. статей под ред. проф. Маликова, ИЛ, М., 1961.
10. Фр. Бёрч, Ж. Шерер, Г. Спайсер, Справочник для геологов по физическим константам, ИЛ, М., 1949.

Ленинградский институт
точной механики и оптики

Поступила в редакцию
20 января 1966 г.

* Значение $y = 0,1 \div 0,01$ соответствует площади контакта, по которой происходит «спекание» отдельных частиц, в $10^2 \div 10^4$ раз меньшей площади их максимального сечения.

ON POSSIBLE STRUCTURE OF SURFACE LAYER OF THE MOON

G. N. Doul'nev, Yu. P. Zarichnyak, B. L. Mouratova

An analytical expression has been derived for an effective thermal conductivity of different-structure bodies. The solution of an inverse problem (i. e. the determination of a body structure by an effective coefficient of thermal conductivity) is considered. Considerations are given on a possible structure of a lunar surface layer, based on the analysis of radio astronomy data concerning the parameter $\gamma = (\lambda \rho c)^{-1/2}$ and some additional suggestions.

УДК 551.510 : 621.317.029.66

ИЗМЕРЕНИЕ АТМОСФЕРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДИАПАЗОНЕ 0,76 \div 1,15 мм

В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов

Приводятся экспериментальные данные о коэффициенте поглощения атмосферного водяного пара в длинноволновом участке субмиллиметрового диапазона. Измерения выполнены в натурных условиях методами измеряющейся влажности и изменения расстояния с использованием источника монохроматического излучения. Наименьшее поглощение в исследованном диапазоне соответствует интервалу $\lambda = 1 \div 1,15$ мм, в котором при нормальных атмосферных условиях ($p = 760$ мм рт. ст., $T = 293^\circ\text{K}$, $p_0 = 7,5$ г. \cdot м $^{-3}$) оно изменяется от 5,5 до 3,5 $\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}$. В другом окне относительной прозрачности атмосферы $\lambda = 0,87$ мм коэффициент поглощения равен 10,8 $\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}$. Результаты эксперимента сопоставлены с теоретическим расчетом.

В предыдущих работах [1-3] были изложены результаты экспериментальных исследований поглощения субмиллиметровых волн в атмосфере в широкой области спектра от 0,06 до 0,87 мм. Измерения выполнялись как в лабораторных условиях (с помощью вакуумного спектрометра), так и в полевых — при использовании больших (до 250 м) базовых расстояний. Достаточно хорошее совпадение результатов, полученных в различных условиях и с различной аппаратурой, дает основания считать, что приведенные в [1-3] данные о поглощении в указанном диапазоне свободны от значительных систематических ошибок. В более длинноволновой области субмиллиметровых волн ($\lambda > 0,87$ мм) сколько-нибудь надежные измерения коэффициента поглощения до настоящего времени отсутствуют*. Между тем, в области $\lambda \sim 1$ мм поглощение (согласно теоретическому расчету [6]) должно быть существенно меньше, чем в каком-либо другом окне прозрачности атмосферы для субмиллиметрового диапазона. В связи с этим получение экспериментальных данных о поглощении в указанном участке спектра представляет несомненный интерес.

В настоящей работе проведено исследование коэффициента поглощения в интервале волн 0,76 \div 1,15 мм.

1. АППАРАТУРА.

Передающее устройство. В качестве источника электромагнитного излучения в передатчике использовалась лампа обратной волны (ЛОВ) с максимальной выходной мощностью порядка нескольких милливатт. Антенна передатчика представляла собой параболическое зеркало З₁ (рис. 1) диаметром 900 мм с фокусным расстоянием 365 мм. Облучателем антенны служил эллиптический отражатель З₂ диаметром 100 мм с фокусными расстояниями 40 и 840 мм.

Передача высокочастотной энергии от ЛОВ к антенной системе осуществлялась при помощи волноводного тракта, состоящего из плавного

* Данные, содержащиеся в работах [4,5], как уже отмечалось в [3,6], не могут считаться надежными.

перехода от сечения $3,6 \times 1,8 \text{ мм}^2$ (сечения выходного волновода ЛОВ) к сечению $0,7 \times 0,35 \text{ мм}^2$ и отрезка волновода сечением $0,7 \times 0,35 \text{ мм}^2$,

обеспечивающего работу на основном типе волны. Линия оканчивалась пирамидальным рупором, диаграмма которого рассчитывалась с учетом геометрических размеров облучателя. При оптической юстировке антенной системы один из фокусов облучателя совмещался с фазовым центром рупора, а другой — с фокусом параболического отражателя. Ориентация антенной системы в нужном направлении производилась при помощи оптического искателя.

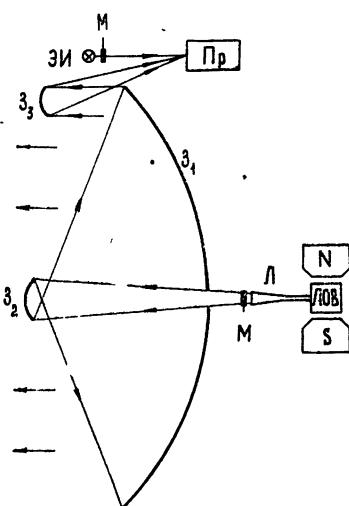


Рис. 1. Оптическая схема передающего устройства:

3_1 — антenna передатчика, 3_2 — облучатель антенны, 3_3 — входное зеркало измерителя мощности, L — волноводная линия, M — модулятор, ЭИ — эталонный источник, Пр — приемник излучения.

При проведении измерений, требующих продолжительного времени, одним из основных условий получения надежных экспериментальных результатов является контроль уровня излучаемой передатчиком мощности. Необходимость измерения уровня выходной мощности обусловлена еще и тем специфическим обстоятельством, что зависимость выходной мощности применявшихся ЛОВ от анодного напряжения представляет собой ряд очень острых, различных по величине пиков (зон генерации), между которыми мощность падает практически до нуля. Поскольку ширина пиков, выраженная в анодном напряжении, составляет всего $5 \div 10 \text{ в}$ (т. е. $0,15 \div 0,3\%$ от величины анодного напряжения), а разность напряжений для соседних пиков также мала, то «опознать» данный пик генерации, а тем более «удерживаться» на его вершине в течение длительного времени (что необходимо при работе на фиксированной волне) в отсутствие контроля весьма затруднительно.

В описываемом передающем устройстве был применен измеритель относительного уровня мощности, позволяющий непрерывно контролировать и поддерживать постоянной величину излучаемой мощности. В качестве индикатора излучения в нем использовался неселективный пневматический детектор типа ОАП-1, что обеспечивало широкий рабочий диапазон измерителя. Отвод части излучаемой мощности ($\sim 1\%$) к приемнику осуществлялся сферическим зеркалом 3_3 (рис. 1) диаметром 80 мм с фокусным расстоянием 500 мм.

Для исключения ошибок в определении уровня мощности, вносимых возможными изменениями чувствительности ОАП и усилительной аппаратуры, была предусмотрена калибровка чувствительности измерителя мощности по эталонному источнику. Калибровочный сигнал представлял собой инфракрасное излучение лампы накаливания, выделенное в участке спектра $1 \div 2,5 \text{ мк}$ с помощью пропускающих фильтров. Ток лампы контролировался по стрелочному прибору с точностью, позволяющей устанавливать уровень калибровочного сигнала с отклонением не более 1,5%.

Для предотвращения медленных изменений излучательной способности эталонного источника, обусловленных распылением нити лампы, ток через нее устанавливался в 3 раза меньше номинального. Калибровочный сигнал (как и излучение ЛОВ) модулировался с частотой

10 гц резонансным механическим прерывателем. Конструктивно измеритель мощности был жестко связан с передатчиком, благодаря чему юстировка всей передающей системы в целом сохранялась и при изменении ориентации антенны.

Для иллюстрации работы измерителя на рис. 2 показана запись уровня мощности передатчика при изменении анодного напряжения

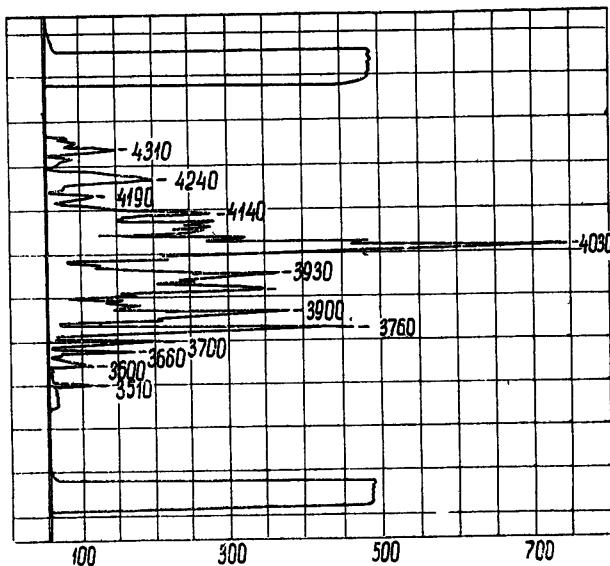


Рис. 2. Запись уровня излучаемой мощности при плавной перестройке частоты генератора. Цифрами отмечены анодные напряжения ЛОВ (в вольтах). Здесь же показаны калибровочные сигналы измерителя.

ЛОВ (длины волны излучения), а также запись сигналов от эталонного источника. С целью проверки пропорциональности показаний выходного прибора измерителя уровню излучаемой мощности были зарегистрированы сигналы в пункте приема и на выходе измерителя при различных уровнях мощности передатчика. Сопоставление сигналов показало их линейную зависимость. Следует отметить, что контрольные измерения излучаемой мощности могут не учитывать полностью изменений сигнала, связанных с такими явлениями, как коррозия отражающих поверхностей зеркал, их запыление и запотевание. Чтобы предотвратить эти эффекты, использовалась защитная полиэтиленовая пленка, загрязнение которой устранялось периодической чисткой или заменой самой пленки.

Длина волны передатчика измерялась интерференционным методом по схеме интерферометра Больцмана. Плоские зеркала интерферометра были установлены на компараторе ИЗА-2, что обеспечивало возможность определения разности хода с точностью не хуже 1 мк . Погрешность измерений длины волны не превышала $\pm 0,2\%$.

Для медленной перестройки частоты передатчика в высоковольтном выпрямителе имелось устройство, позволявшее автоматически изменять анодное напряжение ЛОВ с требуемой скоростью. Плавная регулировка анодного напряжения в выпрямителе (в пределах 30 в) давала возможность проводить длительные измерения на фиксированной волне.

Приемник. В качестве приемника сигналов при измерениях использовался модуляционный радиометр с пневматическим индикатором

излучения типа ОАП-2. Пневматический индикатор помещался в фокусе параболического отражателя диаметром 900 мм с фокусным расстоянием 365 мм. За отражателем, имевшим в центре небольшое отверстие, располагался эталонный источник с модулятором (аналогичный описанному выше), использовавшийся для калибровки чувствительности радиометра. Поскольку модуляция сигнала осуществлялась в передатчике, влияние паразитных излучений (фона) на ОАП было исключено. Опорное напряжение для синхронного детектора передавалось из пункта расположения передатчика при помощи рации. Напряжение частоты 10 гц с выхода приемной радиостанции использовалось также и для питания модулятора калибровочного устройства.

2. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Спецификой субмиллиметрового диапазона является то обстоятельство, что в незагрязненной атмосфере без гидрометеоров затухание электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda \gtrless 1 \text{ мм}$ связано в основном с присутствием в ней водяных паров. Влияние кислорода на коэффициент поглощения существенно лишь для волн длиннее 2 мм и пренебрежимо мало в субмиллиметровом диапазоне. Другие же атмосферные примеси не дают заметного вклада даже на миллиметровых волнах [6]. В связи с этим исследование атмосферного поглощения субмиллиметровых волн можно проводить любым из известных методов: либо путем регистрации уровня сигнала в месте приема при различных значениях абсолютной влажности воздуха на пути между приемником и передатчиком (метод вариации влажности), либо путем изменения расстояния между приемником и передатчиком. В настоящей работе измерения были выполнены обоими методами, что при соответствующем сравнении результатов позволяет оценить величину возможных систематических ошибок.

При использовании метода изменяющейся влажности базовое расстояние составляло 1,35 км. Трасса сигнала проходила над водной поверхностью. Высота антенн передатчика и приемника над нею составляла 12,5 м. Поскольку ширина диаграммы направленности передающей антенны равнялась примерно 5°, то указанные высоты антенн и расстояние исключали возможность попадания на приемник излучения, отраженного от подстилающей водной поверхности.

Измерения проводились следующим образом. Запись сигнала осуществлялась при непрерывном автоматическом изменении частоты генератора; в результате в пункте приема регистрировались спектрограммы, подобные изображенной на рис. 2. Для получения такой спектрограммы требовалось около 15 минут. В течение этого времени влажность практически не изменялась, а запись информации осуществлялась для широкого участка спектра. Для некоторых точек диапазона (в частности, для $\lambda = 0,87 \text{ мм}$, соответствующей окну прозрачности атмосферы) с целью контроля выполнялись также измерения путем записи сигналов на фиксированных волнах (в отдельных пиках генерации). При обработке экспериментальных данных результаты, полученные тем и другим способом, совпадали.

Как уже отмечалось выше, одновременно с измерением сигнала в пункте приема регистрировался также и уровень излучаемой мощности (в пункте расположения передатчика). Благодаря этому влияние изменений мощности передатчика $P_{\text{и}}$ на измеряемую величину сигнала в пункте приема $P_{\text{пр}}$ могло быть легко учтено с помощью соотношения $P_{\text{с}} = P_{\text{пр}} P_{\text{и}0} / P_{\text{и}}$, где $P_{\text{с}}$ — сигнал, приведенный к постоянному уровню мощности передатчика $P_{\text{и}0}$. Для исключения ошибок при измерениях величин $P_{\text{пр}}$ и $P_{\text{и}}$, связанных с возможными изменениями чувствитель-

ности приемника и измерителя мощности, последние до и после каждой записи сигнала от передатчика калибровались при помощи описанных выше эталонных источников.

Для повышения точности экспериментальных результатов наряду с уменьшением погрешности в определении уровня принимаемого сигнала не менее важное значение имеют и точные сведения об абсолютной влажности воздуха на трассе распространения волн. Измерения абсолютной влажности проводились аспирационными психрометрами в моменты записи сигналов одновременно в двух пунктах — вблизи передатчика и приемника на высоте 12,5 м, равной высоте трассы сигнала, причем для повышения точности в каждом из пунктов измерения проводились двумя психрометрами. Как оказалось, наибольшее отклонение средних значений влажности в каждом из пунктов не превышало $\pm 10\%$ от общего среднего значения. Измерения поглощения выполнялись при средней температуре воздуха 20°C и давлении ~ 760 мм рт. ст. При этом за все время измерений температура изменялась не более, чем на $\pm 8^\circ\text{C}$, а колебания давления не превышали ± 10 мм рт. ст.

Обработка экспериментальных данных, полученных методом измеряющейся влажности в диапазоне 0,84–1,15 мкм, проводилась для 30 значений длин волн, соответствующих наиболее интенсивным «пикам» генерации ЛОВ. В качестве примера на рис. 3 приведена зависимость $\ln P_c$ от ρ — среднего значения влажности на трассе, полученная для волны 0,87 мкм (которой соответствует минимальное поглощение в окне прозрачности атмосферы). Коэффициент поглощения определялся по экспериментальным данным графическим способом и методом наименьших квадратов. Значения коэффициента поглощения γ , полученные методом вариации влажности и приведенные к стандартной влажности $\rho_0 = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, даны на рис. 4 (где они отмечены кружочками). Среднеквадратичная ошибка измерений на различных длинах волн составляет 3–5%.

Поглощение в диапазоне 0,84–1,15 мкм измерялось также методом изменения расстояния. Длина оптического пути при этом составляла 1,35 и 1,89 км. Для того, чтобы каждый из пунктов расположения приемника находился во фраунгоферовой зоне передатчика, перед облучателем антенны устанавливался поглощающий диск с отверстием, благодаря чему диаметр облучаемого участка передающей антенны был уменьшен до ~ 500 мкм. Процедура проведения измерений аналогична описанной выше. Соответствующие экспериментальные данные на рис. 4 отмечены знаками +. Достаточно хорошее совпадение результатов, полученных различными методами, указывает на то, что систематические ошибки, если они есть, не превышают случайных ошибок измерений.

Измерения поглощения в диапазоне $\lambda = 0,76 \div 0,84$ мкм выполнялись только методом изменения расстояния. Ввиду сильного атмосфер-

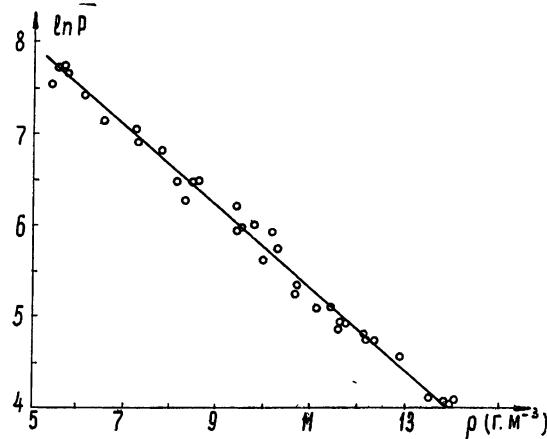


Рис. 3. Зависимость сигнала от абсолютной влажности воздуха на волне 0,87 мкм.

ного поглощения в указанной области спектра и недостаточной мощности генератора для работы пришлось использовать сравнительно

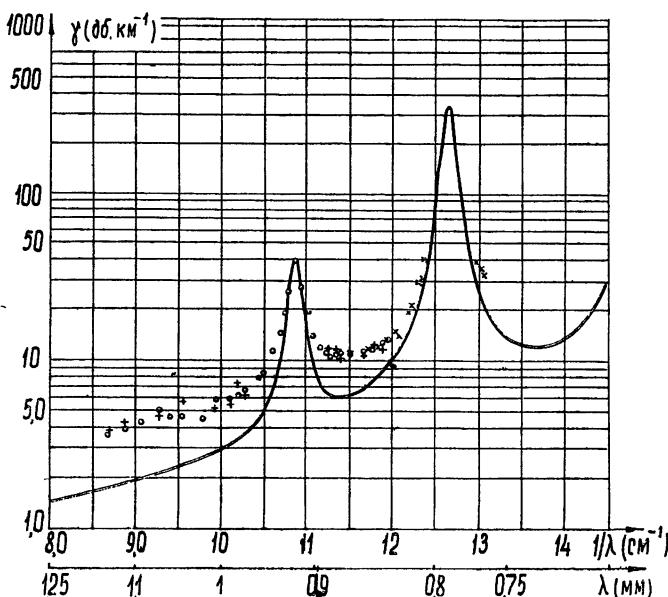


Рис. 4. Коэффициент поглощения атмосферных паров воды, приведенный к стандартной влажности $p_0 = 7,5 \text{ г.м}^{-3}$ ($p = 760 \text{ мм рт. ст.}, T = 293^\circ \text{К}$). Кривой представлены результаты теоретического расчета [6], кружками отмечены результаты измерений методом вариации влажности, значками — и \times — данные измерений методом изменения расстояния.

небольшие базовые расстояния и вместе с тем отказаться от диафрагмирования антенны передатчика. Расстояние между приемником и передатчиком изменялось в пределах 350 — 590 м. Поскольку в этих условиях пункты расположения приемника не находились во фраунгоферовой зоне, расчет ослабления сигнала из-за расходимости пучка излучения при изменении расстояния оказался затруднительным.

Чтобы установить величину ослабления из-за расходимости пучка, дополнительно были проведены измерения на нескольких волнах в окне прозрачности, центрированном к $\lambda = 0,87 \text{ мм}$, и результаты сопоставлены с данными, полученными методом вариации влажности. Выявленное при этом превышение значений коэффициента поглощения, измеренных методом изменения расстояния без учета геометрии пучка, над значениями γ , найденными по вариациям влажности, было отнесено на счет ослабления из-за расходимости пучка излучения. В дальнейшем при обработке экспериментальных данных полагалось, что во всем диапазоне $0,84 \div 0,76 \text{ мм}$ ослабление такое же, как и на волне $\lambda = 0,87 \text{ мм}$. На рис. 4 результаты измерений, выполненных методом изменения расстояния в интервале 350 — 590 м, отмечены значками \times .

Для сопоставления полученных экспериментальных данных с расчетными на рис. 4 приведена теоретическая кривая спектрального распределения коэффициента поглощения, заимствованная из работы [6]. Как видно из рисунка, в участках спектра, соответствующих крыльям линий поглощения, экспериментальные значения γ превышают теоретические в 1,8 — 2 раза. В частности, для наименьшего значения коэффициента поглощения в окне прозрачности $\lambda = 0,87 \text{ мм}$ получено

$\gamma = 10,8 \pm 0,5 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ (расчет дает $\gamma_{\text{теор}} = 6 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$). В диапазоне 1–1,15 мм коэффициент поглощения изменяется от 5,5 до 3,5 $\text{дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ (при $\gamma_{\text{теор}} = 2,8 \div 1,7 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$).

Значение γ на резонансной длине волны спектральной линии водяного пара ($\lambda = 0,92 \text{ мм}$) оказалось равным $39,2 \pm 2,5 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ ($\gamma_{\text{теор}} = 41,4 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$). Подробное обсуждение полученных данных о ширине и интенсивности этой линии содержится в работе [7].

Сравним теперь данные о поглощении в окне прозрачности $\lambda = 0,87 \text{ мм}$ с результатами наших предыдущих измерений [2,3]. Согласно измерениям [2], выполнявшимся также в полевых условиях, но с использованием теплового источника излучения, наименьшее поглощение в этом окне составляет $12,5 \pm 1,8 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, что в пределах указанных ошибок совпадает с результатом настоящей работы.

Радиоастрономические измерения поглощения [3] (по наблюдениям излучения Солнца) дали меньшую величину $\gamma = 8,5 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$. Однако в работе [3] отмечалась значительная неопределенность этого результата вследствие неточного знания характеристической высоты $H_{\text{H}_2\text{O}}$, использовавшейся при пересчете полного поглощения во всей толще атмосферы (которое непосредственно определялось из эксперимента) к погонному коэффициенту поглощения. Согласно [8] нами было принято $H_{\text{H}_2\text{O}} = 2,1 \text{ км}$. Но выполненные недавно расчеты [9], основанные на последних экспериментальных данных о распределении водяного пара по высоте, дали другое значение $H_{\text{H}_2\text{O}} = 1,5 \text{ км}$. Если пересчет данных [3] провести с использованием этого нового значения характеристической высоты, то коэффициент поглощения оказывается равным $11,9 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ (вместо прежнего значения $8,5 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$). Пересчитанная величина хорошо согласуется как с измерениями [2], так и с результатами описанного здесь эксперимента.

В заключение авторы выражают благодарность С. А. Жевакину за руководство работой. Авторы также признательны В. И. Аникину за большую помощь в организации эксперимента и всем сотрудникам, оказавшим содействие в проведении измерений и обработке результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия, 20, 427 (1966).
- В. Я. Рядов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, 11, 1037 (1966).
- В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, 9, 943 (1964).
- Н. Г. Ярославский, А. Е. Станевич, Оптика и спектроскопия, 7, 626 (1959).
- H. H. Theissing, R. J. Caplan, J. Appl. Phys., 27, 538 (1956).
- С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 674 (1963).
- В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
- С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
- С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 433 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 января 1966 г.

MEASUREMENT OF ATMOSPHERIC ABSORPTION OF ELECTRO-MAGNETIC WAVES IN THE 0.76–1.15 mm RANGE

V. Ya. Ryadov, N. I. Furashov

There are given the experimental data of the absorption coefficient of the atmospheric water vapour in a long-wave region of the submillimeter range. The measurements have been made under the natural conditions by the methods of the varying humidity and the distance change, using the source of monochromatic radiation. The least

absorption in the investigated range corresponds to the interval $\lambda = 1 \div 1.15$ mm, when it is changed from 5.5 to $35 \text{ db} \cdot \text{km}^{-1}$ under the normal atmospheric conditions ($p = 760 \text{ mm Hg}$, $T = 293^\circ\text{K}$, $\rho_0 = 7.5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$). In the other window of the relative atmospheric transparency ($-\lambda = 0.87 \text{ mm}$) the absorption coefficient is equal to $10.8 \text{ db} \cdot \text{km}^{-1}$.

The experimental results are compared with the theoretical calculation.

УДК 621.371.242.7.029.6

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МИЛЛИМЕТРОВЫХ И САНТИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В ПРИВОДНЫХ ТРОПОСФЕРНЫХ ВОЛНОВОДАХ

М. Б. Каневский

Для частного случая приводного тропосферного волновода проведен расчет среднего поля узконаправленного источника, расположенного ниже слоя инверсии. Влияние морского волнения учитывалось путем введения эффективной диэлектрической проницаемости, полученной по среднему коэффициенту отражения от моря. Рассчитаны кривые зависимости среднего поля в волноводе от высоты на различных расстояниях от источника.

Как известно, вблизи морской поверхности часто образуются низкие волноводы, в которых могут распространяться радиоволны миллиметрового диапазона и коротковолновой части сантиметрового диапазона. Отражаясь от моря, эти радиоволны заметно рассеиваются даже при слабом волнении, поэтому дальность их распространения в приводном волноводе может существенно отличаться от той, которая следует из теорий волноводного распространения над гладкой поверхностью раздела [1, 2].

Взволнованное море обычно рассматривается как поверхность со случайными неровностями. Метод учета влияния неровностей поверхности раздела был развит в работах [3, 4], где показано, что усредненную электромагнитную волну можно рассматривать как волну, распространяющуюся над поверхностью с некоторой эффективной диэлектрической проницаемостью. Однако результаты [3, 4] применимы лишь для весьма пологих неровностей и не могут быть использованы в случае морского волнения при малых длинах электромагнитных волн (см. [1], стр. 421).

В настоящей работе вычислено среднее поле радиоволн в волноводе над морем. Рассеяние морским волнением учитывалось путем использования полуэмпирической формулы для коэффициента отражения по среднему полю.

1. Рассмотрим вертикальный элементарный диполь, излучающий в сферически слоистой атмосфере над сферической землей. Зависимость процессов от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$. Поля в этом случае можно выразить через функцию Дебая, которая, в свою очередь, выражается следующей формулой [5]:

$$U(z, \rho) = i\pi \sum_m H_0^{(1)}(x_m \rho) u(z, x_m) u(z_{\text{ист}}, x_m) + U_{\text{пов}}. \quad (1)$$

Здесь $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка; z — высота точки наблюдения над поверхностью раздела; $z_{\text{ист}}$ — высота источника; ρ — расстояние точки наблюдения от источника, отсчитываемое вдоль поверхности раздела; $u(z, x_m)$ — высотный множитель, представляющий собой удовлетворяющее условию излучения нормированное решение уравнения

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 [N^2(z) - x_m^2/k^2] u = 0 \quad (2)$$

($N(z)$ — приведенный показатель преломления, $k = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор). Характеристическое число x_m определяется из уравнения

$$\frac{du}{dz}(0, x_m) + p(x_m^2)u(0, x_m) = 0. \quad (3)$$

Если источником является электрический диполь, то

$$p(x_m^2) = ik \frac{N^2(0)}{\epsilon} \sqrt{\epsilon - x_m^2/k^2}, \quad (4)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость поверхности раздела.

Каждый член ряда в формуле (1) представляет нормальную волну с постоянной распространения x_m . Величина $U_{\text{пов}}$ характеризует поверхностную волну, быстро затухающую с удалением от источника при $\text{Im}\epsilon \neq 0$. Если зависимость $N(z)$ такова, что распространение имеет волноводный характер, и мы интересуемся волнами, захваченными волноводом, то числа x_m будут иметь малую мнимую часть. Считая выполненные условия геометрической оптики, введем ψ_m — угол скольжения нормальной волны с номером m :

$$x_m^2/k^2 = N^2(z) \cos^2 \psi_m. \quad (5)$$

Для захваченных волн ψ_m можно считать действительным. Если принять упрощенное граничное условие

$$u(0, x_m) = 0, \quad (6)$$

которое в случае электрического диполя соответствует полному отражению нормальных волн от поверхности раздела за счет малости угла скольжения, то $U_{\text{пов}}$ обращается в нуль всюду.

2. На больших расстояниях от источника, где все определяется лишь захваченными волнами, поле можно рассматривать как суперпозицию плоских волн с действительными углами скольжения, претерпевших ряд последовательных отражений от границ волновода. Поэтому для нахождения среднего поля при распространении над взволнованным морем необходимо знать средний коэффициент отражения плоской волны от морской поверхности. Простая формула для среднего коэффициента отражения от статистически неровной поверхности, характеризуемой нормальным законом распределения неровностей, получена в ряде работ (см., например, [6, 7]):

$$r = r_0 \exp(-2k^2 h^2 \sin^2 \psi), \quad (7)$$

где r_0 — комплексный коэффициент отражения от гладкой поверхности, ψ — угол скольжения падающей волны, h — среднеквадратичная высота неровностей, $k = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор. Отличие r от r_0 обусловлено тем, что при отражении от неровной поверхности часть энергии падающей волны переходит во флуктуационную (некогерентную) компоненту.

Следует заметить, что (7) не учитывает взаимное затенение неровностей, которое характеризуется параметром $d = \psi/\gamma$ (γ — средняя крутизна неровностей) и может быть значительным ($d \ll 1$) в случае малых углов скольжения падающей волны. Однако измерения [8], проведенные на море в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн при малом угле скольжения ($\psi \sim 13$ миллирадиан), показывают, что эксперимен-

тальные значения среднего поля удовлетворительно согласуются с (7) в области $h\psi/\lambda \leq 100$ миллирадиан, причем расхождение экспериментальных данных с теоретическими при $h\psi/\lambda > 100$ миллирадиан, как отмечается в [8], не может быть объяснено затенением.

Нетрудно видеть, что часть точек, формирующих экспериментальную кривую в области $h\psi/\lambda \leq 100$ миллирадиан, где она согласуется с (7), получена при наличии затенения. Рассмотрим, например, точки $h\psi/\lambda \sim 70$ миллирадиан, полученные на волне $\lambda = 3,2$ см. Морские волны высотой $2h \sim 30$ см имеют крутизну $\gamma \sim 0,25$ рад (см. [1], стр. 421). Параметр d равен в данном случае 0,05, что свидетельствует о наличии значительного затенения. Поэтому можно ожидать, что учет затенения для таких сравнительно пологих, но не удовлетворяющих критерию метода [3, 4] неровностей, какими являются морские волны при слабом волнении*, не даст существенного отличия от (7) по крайней мере в области $h\psi/\lambda \leq 100$ миллирадиан.

Поскольку в случае падения плоской волны среднее рассеянное поле также представляет собой когерентно отраженную в зеркальном направлении плоскую волну, выражение (7) можно рассматривать как эффективный френелевский коэффициент отражения; взволнованная поверхность моря при этом предполагается гладкой, но обладающей эффективной диэлектрической проницаемостью ϵ .

Если вектор электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения, то, принимая условие $r_0 = -1$, нетрудно получить

$$\sqrt{\epsilon} = \frac{1}{\psi} \frac{1 - \exp(-2k^2 h^2 \psi^2)}{1 + \exp(-2k^2 h^2 \psi^2)}. \quad (8)$$

Здесь учтена малость угла ψ , а также тот факт, что $|\epsilon| \gg 1$. Далее задачу о среднем поле в приводном волноводе можно решать методом нормальных волн, причем вместо диэлектрической проницаемости воды следует взять величину ϵ , определяемую выражением (8).

3. Основным этапом метода нормальных волн является решение характеристического уравнения (3), определяющего числа x_m . Воспользовавшись решением уравнения (2), полученным в приближении геометрической оптики, уравнению (3) можно придать вид [5]

$$k \int_0^{z_1^{(m)}} s_m^{1/2}(z) dz = \left(m - \frac{1}{4} \right) \pi + \arcsin ks_m^{1/2}(0) (p^2 + k^2 s_m(0))^{-1/2}, \quad (9)$$

$$s_m(z_1^{(m)}) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где $s_m(z) = N^2(z) - (x_m^2/k^2)$, $z_1^{(m)}$ — корень второго уравнения системы (9), имеющий наименьшую реальную часть.

В дальнейшем будем интересоваться лишь захваченными волнами, для которых $\operatorname{Re} s_m(0) \gg \operatorname{Im} s_m(0)$. Учитывая это соотношение, а также соотношения (4) и (5), запишем

$$\frac{ks_m^{1/2}(0)}{\sqrt{p^2 + k^2 s_m(0)}} \simeq -i \frac{1 - \exp(-2k^2 h^2 \psi_m^2)}{2 \exp(-k^2 h^2 \psi_m^2)} = -i \delta_m.$$

Корень $z_1^{(m)}$ (высота поворота нормальной волны) есть, вообще говоря, комплексное число, т. е. $z_1^{(m)} = \eta_1^{(m)} + i\zeta_1^{(m)}$. Разделяя в (9) реальные и мнимые части уравнений, получим

* Учет затенения для случая крупных крутых неровностей впервые проведен в [9].

$$\begin{aligned}
 k \int_0^{\eta_1^{(m)}} \operatorname{Re} s_m^{1/2}(z) dz + k \operatorname{Re} I_m &= (m - 1/4)\pi, \\
 k \int_0^{\eta_1^{(m)}} \operatorname{Im} s_m^{1/2}(z) dz + k \operatorname{Im} I_m &= -\operatorname{arcsinh} \delta_m, \\
 \operatorname{Re} s_m(z_1^{(m)}) &= 0, \\
 \operatorname{Im} s_m(z_1^{(m)}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь через $\operatorname{Re} I_m$ и $\operatorname{Im} I_m$ обозначены реальная и мнимая части интеграла по отрезку пути от $\eta_1^{(m)}$ до $\eta_1^{(m)} + i\zeta_1^{(m)}$:

$$I_m = i \int_0^{\zeta_1^{(m)}} s_m^{1/2}(\eta_1^{(m)} + i\zeta) d\zeta.$$

Введем обозначения $\operatorname{Re} x_m^2 = v_m$, $\operatorname{Im} x_m^2 = \mu_m$. Поскольку μ_m и, следовательно, $\zeta_1^{(m)}$ предполагаются малыми, в качестве первого приближения положим $\mu_m = 0$, $\zeta_1^{(m)} = 0$. Подставив эти значения в (10), получим

$$\begin{aligned}
 k \int_0^{\eta_1^{(m)}} \sqrt{N^2(z) - (v_m/k^2)} dz &= (m - 1/4)\pi, \\
 N^2(\eta_1^{(m)}) - (v_m/k^2) &= 0 \quad (m = 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) обычно используется в случае гладкой подстилающей поверхности, если справедливо граничное условие (6). Найденные из (11) значения v_m и $\eta_1^{(m)}$ следует подставить во второе и четвертое уравнения системы (10) и решать эти уравнения относительно μ_m и $\zeta_1^{(m)}$.

Разложим $N^2(z)$ в ряд в точке $\eta_1^{(m)}$ и, пользуясь малостью $\zeta_1^{(m)}$, ограничимся линейным членом разложения:

$$N^2(z) = N^2(\eta_1^{(m)}) + i\zeta \frac{dN^2}{dz}(\eta_1^{(m)}).$$

Тогда, используя четвертое уравнение системы (10), находим

$$I_m = \frac{\sqrt{2}}{3} i(1-i) \frac{(\mu_m/k^2)^{3/2}}{dN^2(\eta_1^{(m)})/dz}$$

и для определения μ_m получаем

$$\begin{aligned}
 k \int_0^{\eta_1^{(m)}} \{[N^2(z) - (v_m/k^2)]^2 + (\mu_m/k^2)^2\}^{1/4} \sin \frac{1}{2} \times \\
 \times \operatorname{arctg} \frac{\mu_m/k^2}{N^2(z) - (v_m/k^2)} dz - k \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(\mu_m/k^2)^{3/2}}{dN^2(\eta_1^{(m)})/dz} = \operatorname{arcsinh} \delta_m.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнением (12) нельзя пользоваться, если величина $dN^2(\eta_1^{(m)})/dz$ близка к нулю. Однако отмеченная особенность не вносит дополнительных ограничений, поскольку сам метод фазовых интегралов, который

фактически был здесь использован, не применим в тех случаях, когда точка поворота нормальной волны близка к точке инверсии показателя преломления.

В приведенном ниже расчете реальные и мнимые части характеристических чисел x_m находились путем численного решения системы (11) и уравнения (12) с учетом соотношения (5).

4. Для того, чтобы рассчитать конкретный случай тропосферного волновода, необходимо задать $N^2(z)$ — зависимость квадрата приведенного показателя преломления от высоты. Введем безразмерную высоту $\xi = z/z_0$, где z_0 — высота слоя инверсии (высота волновода), и выберем $N^2(\xi)$ в следующем виде:

$$N^2(\xi) = A e^{-\alpha\xi} + B e^{\beta\xi} + C. \quad (13)$$

Результаты измерений (см., например, [10]) свидетельствуют о том, что профиль приведенного показателя преломления на высотах до 100 м над уровнем моря может существенно отличаться от линейного. Поскольку мы интересуемся значениями поля в ограниченной области высот, выражение (13) можно рассматривать как квадрат приведенного показателя преломления, хотя (13) и не переходит при $\xi \rightarrow \infty$ в линейную функцию высоты. Профиль вида (13) позволяет аппроксимировать довольно широкий класс экспериментальных кривых волноводного характера, имеющих один минимум на интересующих нас малых высотах.

Для расчета выберем следующие параметры волновода:

$$A = 0,3 \cdot 10^{-4}, \quad B = 0,54 \cdot 10^{-8}, \quad C = 1,0007, \quad \alpha = 4,8, \quad \beta = 4,0.$$

Соответствующая кривая изображена на рис. 1. Кроме того, необходимо задать соотношение между высотой волновода и длиной электромагнитной волны, а также параметр, характеризующий морское волнение. Положим $z_0/\lambda = 5 \cdot 10^3$, $h/\lambda = 20$. Для сравнения рассчитывалось также поле над гладким морем ($h/\lambda = 0$). В качестве источника был выбран квадрат со стороной $\Delta\xi = 0,08$ ($\Delta z = 400 \lambda$), равномерно заполненный вертикальным электрическим током. Высота центра квадрата $\xi^* = 0,3$. Такой источник обладает узкой диаграммой направленности и при выбранных выше параметрах волновода слабо возбуждает волны, не захватываемые волноводом. Высотные множители $u(\xi)$ были получены путем численного интегрирования уравнения (2) с использованием значений x_m^2/k^2 , найденных ранее из уравнений (11); (12)*. Можно было, конечно, взять полученные в приближении геометрической оптики решения** в аналитическом виде. Однако упомянутые решения, как известно, имеют асимптотический характер и не пригодны вблизи точек $z_1^{(m)}$ (или $\xi_1^{(m)}$), с чем связаны значительные неудобства в случае, если необходимо учесть большое число нормальных волн. Мы учитывали 18 нормальных волн, причем последняя из них на высоте $\xi = 0,3$ дает вклад в общее поле менее 0,5%.

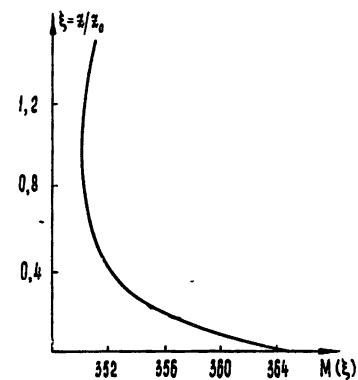


Рис. 1. Профиль $M(\xi)$, выбранный для расчета: $M(\xi) = \frac{1}{2} [N^2(\xi) - 1] \cdot 10^6$.

* Разумеется, в этих уравнениях необходимо перейти к безразмерной высоте ξ .

** Эти решения были использованы в [5] при получении системы (9),

5. В настоящей работе были рассчитаны вертикальные разрезы поля на различных расстояниях от источника в плоскости, проходящей через центр излучающего квадрата перпендикулярно его поверхности. Приведенные на рис. 2—7 результаты расчетов даны с точностью до постоянного множителя, определяемого мощностью источника.

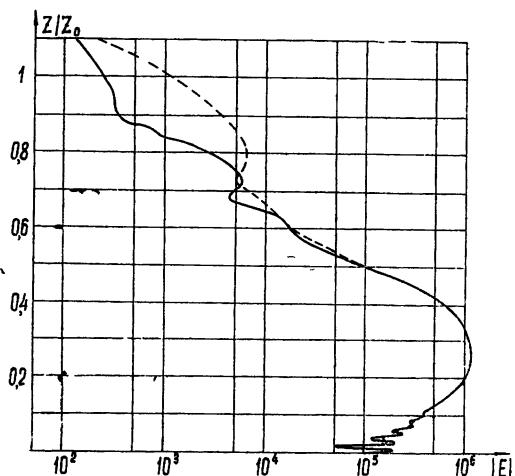


Рис. 2. Зависимость поля от высоты при $S = (kp/8\pi)10^5 = 1$ (ρ — расстояние от источника до точки наблюдения, отсчитываемое вдоль поверхности раздела). Сплошная линия — гладкое море, пунктир — волнистое море.

характеристического числа x_m , соответствующая просачивающаяся в область, лежащую выше точки поворота этой волны*. Именно этим явлением обусловлен тот факт, что, как показано на рис. 2—7, среднее поле захваченных волн над взволнованным морем ($h \neq 0$) на высотах, близких к высоте инверсии ($z/z_0 = 1$), становится больше, чем поле над гладким морем ($h = 0$).

В случае гладкой поверхности моря ($h = 0$) интенсивность поля в волноводе убывает с расстоянием от источника как $1/\rho$, что обусловлено просто геометрическим расходжением энергии (затухание, обусловленное слабым просачиванием за пределы волновода, не учитывалось вследствие его малости). Над взволнованным морем квадрат среднего поля убывает значительно быстрее, так как, помимо затухания из-за

Как видно из рис. 2—7, картина поля в волноводе обнаруживает сильную изрезанность, причем расстояния между минимумами увеличиваются по мере удаления от поверхности раздела. Наличие изрезанности обусловлено интерференцией волн, отраженных от поверхности раздела и «верхней стенки» волновода, а отмеченное изменение расстояний между минимумами объясняется тем, что вертикальная компонента волнового вектора каждой из этих волн уменьшается с высотой при отрицательном градиенте показателя преломления.

Исследование решений уравнения (2) показывает, что с ростом мнимой части

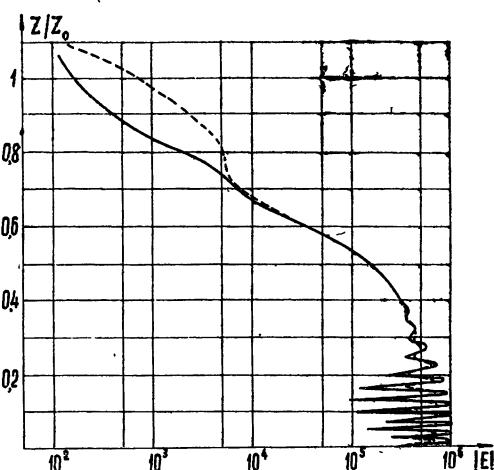


Рис. 3. Зависимость поля от высоты при $S=2$.

* Заметим, что согласно лучевой трактовке волноводного распространения поле захваченной волноводом волны вообще не может проникнуть в область выше соответствующей точки поворота.

геометрического расхождения, каждая нормальная волна убывает экспоненциально вследствие потерь когерентной энергии при отражении и более сильного просачивания через «верхнюю стенку» волновода.

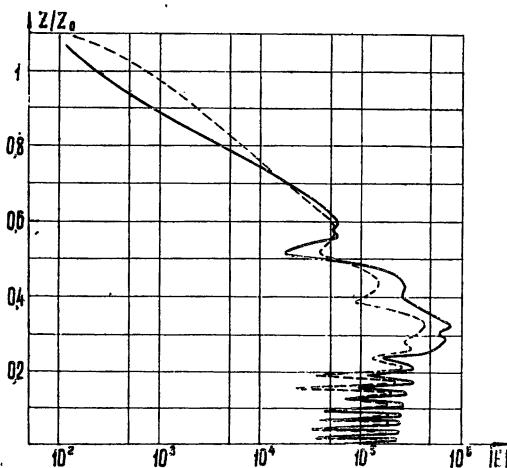


Рис. 4. Зависимость поля от высоты при $S = 4$.

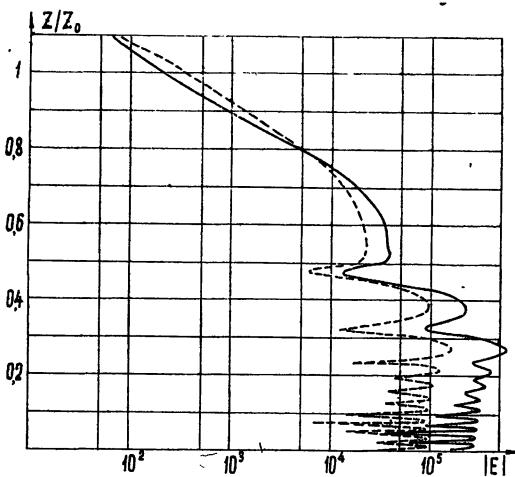


Рис. 5. Зависимость поля от высоты при $S = 8$.

Убывание квадрата среднего поля можно приближенно описать законом $e^{-a\rho}/\rho$, причем величина a меняется с высотой над поверхностью раздела. Так как флукуационная (некогерентная) компонента энергии при отражении от моря существенно рассеивается в направлениях, отличных от зеркального, волноводом захватывается лишь малая ее часть, отраженная под небольшими углами к поверхности раздела. Поэтому при оценках интенсивности поля в волноводе можно ограничиться лишь когерентной составляющей*. Величина отношения интенсивности поля в волноводе к интенсивности в свободном пространстве

* Оценки, выполненные по формулам работы [11], показывают, что для выбранных выше параметров некогерентная энергия, захватываемая волноводом при каждом отражении, составляет $\leq 0.5\%$ от отраженной когерентной энергии.

меняется по закону re^{-ap} , откуда видно, что при наличии морского волнения волновод может дать выигрыш по сравнению со свободным пространством лишь до определенного расстояния от источника. Интенсивность в свободном пространстве можно найти из рис. 2, поскольку здесь основные нормальные волны еще не успели отразиться от моря и картина поля представляет собой один лепесток, лишь слегка смещенный вниз из-за рефракции. Постоянную затухания a нетрудно определить

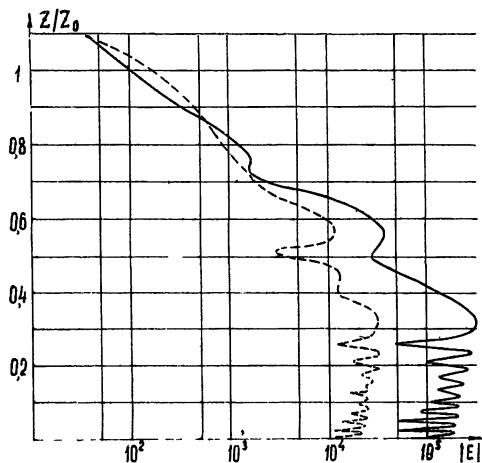


Рис. 6. Зависимость поля от высоты при $S = 16$

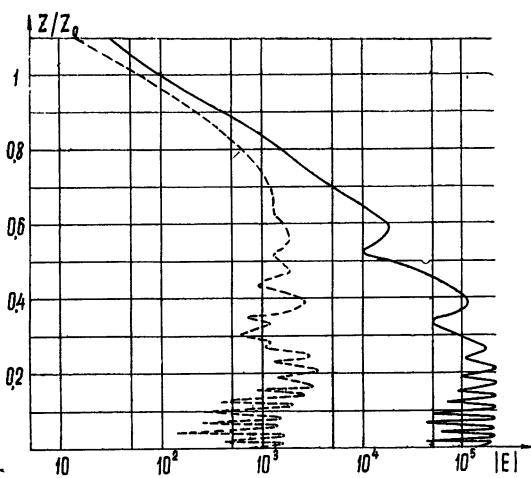


Рис. 7. Зависимость поля от высоты при $S = 32$.

листь из рис. 2—7, находя величину $e^{ap} = |E(h=0)|^2 |E(h \neq 0)|^{-2}$ на различных расстояниях от источника. Например, для электромагнитной волны $\lambda = 3 \text{ мм}$ при выбранных значениях параметров на высоте, равной высоте центра источника, постоянная затухания $a \approx 10 \text{ б} \cdot \text{км}^{-1}$, и волновод дает выигрыш до расстояния порядка 12 км.

Автор выражает благодарность С. А. Жевакину за постановку задачи, обсуждение результатов и замечания, сделанные при прочтении рукописи. Автор благодарит также С. Ф. Морозова, Г. М. Жислина, В. И. Алешина, Е. Ф. Жиженкову, О. Н. Зипалову, проводивших вычисления на электронной вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
2. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, М. Г. Белкина, Радиотехника и электроника, 3, 1411 (1958).
3. Е. Л. Фейнберг, Исследования по распространению радиоволн, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
4. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 72 (1960).
5. Сб. Распространение ультракоротких радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1954.
6. М. А. Исаакович, ЖЭТФ, 23, 305 (1952).
7. L. M. Sretner, IRE Trans., AP-6, 88 (1958).
8. C. I. Beard, IRE Trans., AP-9, 470 (1961).
9. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 101 (1964).
10. A. Takahira, H. Igrie, J. Radio Res. Labs., 7, 31 (1960).
11. R. H. Clarke, Proc. IEE, 110, 91 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 февраля 1966 г.

ON THE PROPAGATION OF MILLIMETER AND CENTIMETER RADIO WAVES
IN TROPOSPHERE WAVEGUIDES CLOSE TO THE SEA SURFACE

M. B. Kanevsky

The calculation is presented of an average field excited by a narrow-beam source in a troposphere waveguide close to the sea surface. It is assumed that the source is under the inversion layer. The sea roughness is taken into account by introducing an effective permittivity corresponding to the average reflection coefficient of the sea. The curves representing the dependence of the average field in the waveguide upon the height at different distances from the source are calculated.

УДК 621.371.222.5

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН НА ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ

И. М. Фукс

В приближении теории возмущений решена задача об отражении плоской монохроматической электромагнитной волны от статистически неровной границы диэлектрика с произвольным ϵ . Исследуются статистические характеристики радиолокационного сигнала, отраженного от взволнованной поверхности моря (сечение рассеяния, деполяризация, частотный спектр). Рассматриваемая модель поверхности — мелкая рябь на крупной волне — позволяет расширить область применимости теории возмущений на дециметровый и сантиметровый диапазоны волн.

Отражение плоской монохроматической электромагнитной волны от статистически неровной, но в среднем плоской площадки конечных размеров исследовалось методом теории возмущений в работе [1]. Поверхность при этом предполагалась идеально проводящей, а вектор поляризации находился либо в плоскости падения (вертикальная поляризация), либо был перпендикулярен к ней (горизонтальная поляризация). Обобщение результатов на случай произвольной диэлектрической проницаемости, полученное в [2] с помощью нелокальных граничных условий, приводит к очень сложным и громоздким вычислениям для отраженного поля. Преломленное поле (прошедшее в диэлектрик) при этом из рассмотрения вообще исключается.

В первой части данной работы мы получим более компактные, по сравнению с [2], формулы не только для отраженного, но и для преломленного поля при произвольной поляризации падающей волны. Инвариантная форма полученных результатов позволяет легко обобщить решение на тот случай [3, 4], когда мелкие неровности расположены на крупномасштабной гладкой поверхности, такой, что отражение от нее можно рассчитывать по методу Кирхгофа [5]. Отличие средней поверхности от плоскости, помимо поправок к теории возмущений, приводит к некоторым качественно новым явлениям: деполяризации радиолокационного сигнала и уширению частотного спектра.

Такая модель является, вероятно, удовлетворительным приближением при рассеянии дециметровых и сантиметровых волн на взволнованной поверхности моря.

1. РАССЕЯНИЕ НА ШЕРОХОВАТОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ*

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну

$$\mathbf{E}^l = \mathbf{p}_0 E^l e^{ikar}$$

(\mathbf{p}_0 — единичный вектор поляризации, $k = 2\pi/\lambda$, множитель $e^{-i\omega_0 t}$ опускаем), падающую на статистически неровную поверхность Σ — границу диэлектрика с проницаемостью ϵ (рис. 1). Вертикальные отклонения

* Так как ϵ , вообще говоря, комплексно, то в равной степени результаты этого раздела относятся и к рассеянию на поверхности металла.

поверхности Σ от средней плоскости S описываются стационарной и однородной случайной функцией $\zeta(r, t)$:

$$z = \zeta(r, t), \quad r = \{x, y\}, \quad \bar{\zeta} = 0, \quad \bar{\zeta}^2 = \sigma^2,$$

$$\bar{\zeta}(r_1, t) \bar{\zeta}(r_1 + r, t) = \sigma^2 K_\zeta(r/l),$$

K_ζ — пространственная автокорреляционная функция, убывающая при значениях аргумента порядка единицы; радиус корреляции l — характерный линейный размер шероховатостей, зависящий, вообще говоря, от направления r . Чертка означает статистическое усреднение по ансамблю реализаций $\zeta(r, t)$ или по переменным r, t для эргодических процессов. Нас будет интересовать отраженное (и в меньшей степени преломленное) поле.

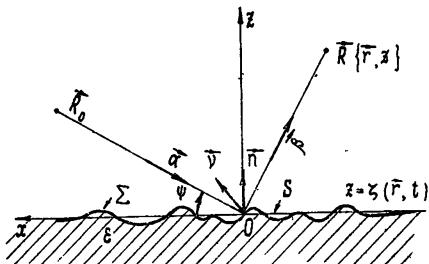


Рис. 1.

1. Векторы электрического e и магнитного h полей на поверхности Σ удовлетворяют граничным условиям:

$$[n, e - e_1]_S = 0, \quad [n, e - \epsilon e_1]_S = 0, \quad [h - h_1]_S = 0. \quad (1)$$

Здесь e_1, h_1 — поле внутри диэлектрика, n — внешняя нормаль к поверхности диэлектрика (рис. 1). Следуя теории возмущений [1], будем искать полное поле $e, h, (e_1, h_1)$ в виде суммы

$$e = E^0 + E; \quad h = H^0 + H; \quad e_1 = E_1^0 + E_1; \quad h_1 = H_1^0 + H_1.$$

Здесь $E^0, H^0, (E_1^0, H_1^0)$ — поле, отраженное (преломленное) от плоской границы S , а слагаемые $E, H, (E_1, H_1)$ — величины первого порядка малости по параметрам $k\sigma \ll 1$ и $(\nabla\zeta)^2 \sim (\sigma/l)^2 \ll 1$. Отделяя в (1) слагаемые разных порядков, приходим к системе граничных условий на плоскости S :

$$[n, E^0 - E_1^0]_S = 0; \quad [n, E^0 - \epsilon E_1^0]_S = 0; \quad [H^0 - H_1^0]_S = 0; \quad (2a)$$

$$[n, E - E_1]_S = -\frac{4\pi}{c} j_\mu; \quad [n, H - H_1]_S = \frac{4\pi}{c} j_e. \quad (2b)$$

Величины j_e, j_μ скачков тангенциальных компонент поля имеют смысл наведенных поверхностных и магнитных токов и связаны с полем нулевого приближения соотношениями [2]

$$j_e = \frac{c}{4\pi} ik(1-\epsilon)[n(E^0 n)]\zeta; \quad j_\mu = \frac{c}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{\epsilon} [n\nabla](nE^0)\zeta. \quad (3)$$

Поле E^0 на плоскости S в свою очередь можно выразить через падающее поле E^i , если воспользоваться граничными условиями (2a) и соответствующими им коэффициентами отражения Френеля:

$$E^0 = \frac{2a_0}{a_0 + b_0} E^i - \frac{2a_0(1-\epsilon)}{b_0 + \epsilon a_0} \left(n + \frac{\alpha}{a_0 + b_0} \right) (nE^i),$$

$$a_0 = \sin \phi = -n\alpha; \quad b_0 = \sqrt{\epsilon - \cos^2 \phi}. \quad (4)$$

Таким образом, задача о нахождении полей $E, H, (E_1, H_1)$ сводится к определению поля в пространстве по заданному распределению токов j_e, j_μ на поверхности диэлектрика.

2. Поле вне и внутри диэлектрика будем искать в виде разложения по неоднородным плоским волнам:

$$E(R) = \frac{1}{2\pi} \int E_x \exp [i(\kappa r + z\sqrt{k^2 - x^2})] dx, \quad z > 0, \quad (5a)$$

$$E_1(R) = \frac{1}{2\pi} \int E_{1x} \exp [i(\kappa r - z\sqrt{k^2\varepsilon - x^2})] dx, \quad z < 0, \quad (5b)$$

и аналогично для H, H_1 . Такое разложение заведомо неприменимо, если углы наклона ψ не малы и точка наблюдения находится между неровностями ($\zeta_{\min} < z < \zeta_{\max}$); тогда в разложение поля должны входить как уходящие, так и приходящие волны. В рамках же теории возмущений шероховатая граница оказывается эквивалентной плоскости со случайными токами j_e, j_μ , и разложением (5 а, б) можно воспользоваться для получения из уравнений Максвелла и граничных условий (2б) системы векторных алгебраических уравнений для величин E_x, E_{1x} (индекс x опускаем):

$$\begin{aligned} [H \beta] &= E, & [n, H - H_1] &= \frac{4\pi}{c} j_e, \\ [E \beta] &= -H, & [n, E - E_1] &= -\frac{4\pi}{c} j_\mu, \\ [H_1, \beta - (a + b)n] &= \varepsilon E_1, & \beta &= \frac{x}{k} + n \sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2}}, \\ [E_1, \beta - (a + b)n] &= -H_1, & a &= n\beta; \quad b = \sqrt{\varepsilon - 1 + a^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $j_{e, \mu}$ — также Фурье-компоненты токов:

$$j_{(e, \mu)x} = \frac{1}{2\pi} \int_S j_{e, \mu}(r) e^{-ixr} dr. \quad (5b)$$

Отметим, что не все уравнения в (6) независимы, однако предпочтительнее пользоваться именно такой симметричной формой записи. Путем несложных, но громоздких векторных операций, из (6) получаем следующие формулы для компонент Фурье отраженного и преломленного поля:

$$E_x = \frac{4\pi}{c(a\varepsilon + b)} \left\{ \frac{\varepsilon - 1}{a + b} \langle (\beta j_\mu) [n\beta] + [\beta [nj_e]] \rangle + \varepsilon [\beta j_\mu] + [\beta [\beta j_e]] \right\}, \quad (7a)$$

$$E_1 = E + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} n(nE) + \frac{4\pi}{c} [j_\mu n] + \frac{4\pi}{c} n \frac{(\beta j_e)}{\varepsilon}. \quad (7b)$$

3. В дальнейшем будем предполагать, что точка наблюдения R находится в зоне Фраунгофера относительно той части поверхности S , где $j_{e, \mu}(r) \neq 0$. Тем самым мы считаем, что либо шероховатости занимают площадь конечных размеров, либо падающая волна освещает ограниченный участок поверхности. (Например, за счет диаграммы направленности антенны источника или импульса конечной длительности.) Тогда

интеграл (5а) легко вычисляется методом стационарной фазы, и для поля E в точке наблюдения R получаем

$$\begin{aligned} E(R) = \frac{ak}{iR} e^{ikR} E_{\alpha} = [n[\beta n]] &= \frac{2k^2 a a_0 (1 - \varepsilon)}{(b + a\varepsilon)(b_0 + a_0\varepsilon)} \frac{\exp[ik(R + R_0)]}{RR_0} \times \\ &\times \left\{ \frac{\varepsilon - 1}{a + b} [\beta [np_0]] + \frac{(\varepsilon - 1)^2}{(a + b)(a_0 + b_0)} [\beta [n[n[\alpha p_0]]]] + \right. \\ &\left. + \frac{\varepsilon - 1}{a_0 + b_0} [\beta [\beta [n[\alpha p_0]]]] + (\varepsilon - 1)(np_0)[\beta [\beta n]] + [\beta [\beta p_0]] \right\} \zeta(q_{\perp}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\zeta(q_{\perp}) = \frac{1}{2\pi} \int_S \zeta(r) e^{-iqr} dr; \quad q = k(\beta - \alpha), \quad E^i = \frac{\exp(ikR_0)}{R_0},$$

R_0 — расстояние от источника до начала координат O (источник также в зоне Фраунгофера относительно S). Вектор β в этом случае имеет простой смысл — это единичный вектор, направленный в точку наблюдения R .

Формула (8) определяет рассеянное поле во всей верхней полусфере (β — произвольный единичный вектор) при любом угле скольжения ψ падающей волны. В радиолокационном случае ($\beta = -\alpha$ — обратное рассеяние) из (8) следует

$$Ep = \frac{2k^2 a^2 (\varepsilon - 1)}{a + b} \frac{\exp(2ikR)}{R^2} \left\{ \frac{p_0 p}{a + b} + \frac{2b(\varepsilon - 1)}{(b + a\varepsilon)^2} (np)(np_0) \right\} \zeta(q_{\perp}), \quad (9)$$

где p — единичный вектор поляризации приемной антенны. Формула (9) существенно упрощается, если поверхность можно считать идеально проводящей. Совершая в (9) предельный переход $\varepsilon \rightarrow \infty$, получаем для рассеянного назад поля

$$Ep = \frac{k^2}{\pi} \frac{\exp(2ikR)}{R^2} \left\{ (p_0 p) (n\beta)^2 + 2(np)(np_0) \right\} \int_S \zeta(r) \exp(-2ik\beta r) dr. \quad (10)$$

2. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ

Непосредственное применение полученных выше результатов для решения задачи об отражении радиоволн от взволнованной поверхности моря возможно только для сравнительно длинных радиоволн [6] (десятки и сотни метров). Применение метода Кирхгофа [5] для более коротких волн (декиметры, сантиметры) приводит к результатам, сравнимым с экспериментом только в малой области углов вблизи направления зеркального отражения и противоречащим опытным данным по обратному рассеянию: аномально большие сечения рассеяния, деполяризация, сдвиг и уширение частотного спектра сигнала. Мы используем предложенную в работе [3] модель поверхности (мелкая рябь на крупной волне), для которой метод теории возмущений сочетается с методом Кирхгофа.

1. Пусть поверхность Σ такова, что для нее возможно построить некоторую среднюю поверхность S , удовлетворяющую следующим условиям:

а) нормальные отклонения $\zeta(r)$ ($r \in S$) поверхности Σ от S и их относительные углы наклона достаточно малы ($k\sigma \ll 1$, $(\nabla\zeta)^2 \ll 1$);

б) поверхность S достаточно гладкая и крупномасштабная, так что отражение от нее можно рассчитывать по методу Кирхгофа.

Будем считать, что вертикальные отклонения поверхности S от средней плоскости S_0 (см. рис. 2) описываются стационарной и однородной случайной функцией $Z(\rho, t)$:

$$z = Z(\rho, t); \quad \langle Z \rangle = 0; \quad \langle Z^2 \rangle = h^2;$$

$$\langle Z(\rho_1 + \rho, t + \tau) Z(\rho_1, t) \rangle = h^2 K_z \left(\frac{\rho}{L}, \frac{\tau}{\tau_0} \right); \quad \rho \in S_0.$$

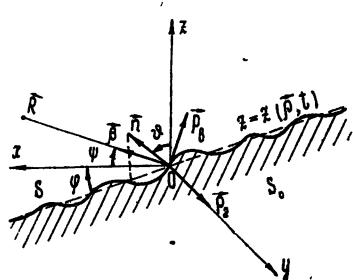


Рис. 2.

Косые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по всем реализациям $Z(\rho, t)$. Случайные функции Z и ζ можно считать независимыми. Имея в виду малость средних углов наклона морской поверхности и считая рябь достаточно мелкой, мы потребуем выполнения неравенств

$$\gamma^2 = \langle (\nabla Z)^2 \rangle \sim \left(\frac{h}{L} \right)^2 \ll 1, \quad (11)$$

$$L \gg \bar{\lambda}, l, \quad (\bar{\lambda} = \lambda/2\pi = 1/k),$$

которые заведомо обеспечивают* выполнение условия (6).

Неравенства (11) позволяют обобщить формулы (8) — (10) на тот случай, когда средняя поверхность S не является плоскостью. При этом медленно меняющиеся множители, зависящие от углов, оказываются под интегралом и, например, вместо формулы (9) мы получаем

$$E_p \equiv Ep = \frac{k^2(\epsilon - 1) \exp(2ikR)}{\pi R^2} \int_S \left\{ \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 pp_0 + \right. \\ \left. + 2(\epsilon - 1) \frac{a^2 b}{(b+a\epsilon)^2(a+b)} (np)(np_0) \right\} \zeta(r) \eta(r; \beta) \exp(-2ik\beta r) dr. \quad (12)$$

Множитель $\eta(r, \beta)$ учитывает возможные затенения поверхности S и принимает два значения — 1, 0 в зависимости от того, освещена точка $r \in S$ или нет. При $\epsilon \rightarrow \infty$ формула (12) переходит в выражение, полученное ранее в работе [7] при помощи функций Грина идеально проводящей плоскости.

2. Перейдем к вычислению статистических энергетических характеристик рассеянного поля. Нас будет интересовать матрица удельного дифференциального сечения рассеяния в радиолокационном случае:

$$J_{pp}^{(p_0)} = \langle E_{p_1}^{p_0} E_{p_2}^{*p_0} \rangle R^2 / S_0 |Ep_i|^2. \quad (13)$$

Диагональные элементы $J_{pp}^{(p_0)}$ этой матрицы имеют смысл отношения потока энергии поля (с вектором поляризации p), рассеянного с единицой площади плоскости S_0 в единицу телесного угла вокруг вектора β , к плотности потока энергии падающей волны с вектором поляризации p_0 .

Векторы p_0, p будем считать действительными, т. е. ограничимся случаями линейной поляризации приемной и передающей антенн. При

* Обычно требуют выполнения более слабого неравенства $(kL^2/h)^{1/3} \gg 1$ (величина L^2/h — порядка радиуса кривизны поверхности).

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ матричный элемент пропорционален мощности, принимаемой на одну приемно-передающую антенну; при $\mathbf{p} \perp \mathbf{p}_0$ передача и прием ведутся на антенах со скрещенными поляризациями. Ориентация главных осей и степень эллиптичности ортогональных составляющих поля \mathbf{E} также выражаются [8, 9] через матрицу $J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(\rho_0)}$. Для определенности будем считать, что \mathbf{p}_2 перпендикулярен к плоскости падения, т. е. соответствует горизонтальной (г) поляризации; $\mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$ — вертикальной (в) поляризации (см. рис. 2).

В дальнейшем мы будем считать поверхность Σ идеально проводящей, что значительно упрощает вычисления. Подставляя (12) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ в (13) и используя неравенства (11), получаем

$$J_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(\rho_0)} = \frac{2(kl)^2(k\sigma)^2}{\pi} F_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(\rho_0)}, \quad (14a)$$

$$F_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(\rho_0)} = \left\langle \left\{ (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_0) (n\beta)^2 + 2(n\mathbf{p}_1) (n\mathbf{p}_0) \right\} \left\{ (\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_0) (n\beta)^2 + 2(n\mathbf{p}_2) (n\mathbf{p}_0) \right\} \times \right. \\ \left. \times G_{\zeta}(q_{\perp}) \frac{\eta(\rho, \beta)}{n_z} \right\rangle. \quad (14b)$$

Здесь $G_{\zeta}(q_{\perp})$ — преобразование Фурье корреляционной функции ряби:

$$G_{\zeta}(q_{\perp}) = \frac{1}{2\pi} \int_S K_{\zeta}(r/l) \exp(-iqr) dr/l^2, \quad (15a)$$

q_{\perp} — проекция вектора q на плоскость, касательную к поверхности S в точке $r = \{\rho, Z(\rho)\}$. Мелкую рябь $\zeta(r, t)$ предполагаем изотропной*, т. е. $K_{\zeta}(r/l) = K_{\zeta}(r/l)$, и функцию корреляции зададим в виде

$$K_{\zeta}(r/l) = \exp(-r^2/2l^2), \quad G_{\zeta}(q_{\perp}) = \exp[-(klq_{\perp})^2/2]. \quad (15b)$$

Любое состояние морской поверхности может быть представлено в виде суперпозиции** одномерных волн с различными направлениями распространения. Поэтому рассмотрим сначала рассеяние на одномерной волне $Z(\rho, t)$, направление распространения которой составляет угол $-\pi/2 < \varphi \leq \pi/2$ с плоскостью падения (рис. 2). Переход к случаю изотропного волнения (длина гребня порядка длины волны) производится путем усреднения окончательных выражений по углу φ .

Усреднение в (14б) проведем в два этапа. Сначала усредним по всем реализациям случайной функции $Z(\rho)$, которые в заданной точке ρ имеют фиксированную нормаль \mathbf{n} (по значениям высоты Z в точке ρ также усредняем). Это усреднение затрагивает только множитель $\eta(\rho, \beta)$ и определяет вероятность того, что точка поверхности S с нормалью \mathbf{n} не затеняется другими участками поверхности. В результате усреднения*** получаем [10]

* Легко видеть, что в противоположном предельном случае (одномерная рябь) рассеяние назад будет только тогда, когда фронт ряби перпендикулярен к плоскости падения.

** Конечно, это справедливо только в линейном приближении, когда взаимодействием волн, распространяющихся в разных направлениях, можно пренебречь.

*** Формула (16) справедлива, строго говоря, только в предельных случаях $a \gg 1$ и $a \ll 1$. В промежуточной области углов ее можно рассматривать как интерполяционную. Отметим, что в рассматриваемых случаях результат усреднения не зависит от \mathbf{n} .

$$\langle \eta(\rho, \beta) \rangle_n \equiv P(\psi) = \frac{a}{\Psi(a)} (1 - \exp[-\Psi(a)/a]),$$

$$\Psi(a) = \int_a^{\infty} (\xi - a) W'(\xi) d\xi, \quad a = \operatorname{tg} \psi / \gamma_{\varphi}. \quad (16)$$

Здесь $W'(\xi)$ — плотность распределения нормированных на γ_{φ} производных случайной функции $Z(x)$, получающейся в сечении поверхности $Z(\rho)$ плоскостью падения $y = 0$; $\gamma_{\varphi} = \gamma \cos \varphi$ — дисперсия производных этой случайной функции. Графики $P(\psi)$ для двух законов распределения углов наклона приведены на рис. 3. Кривая 1 соответствует нормальному распределению

$$W'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\xi^2/2),$$

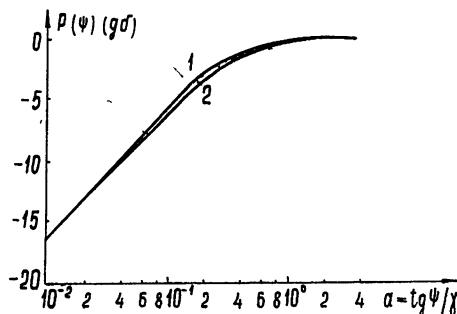


Рис. 3.

кривая 2 — распределению углов наклона в синусоидальной волне

$$W'(\xi) = 1/\pi \sqrt{2 - \xi^2}.$$

Теперь остается произвести окончательное усреднение в (14) по всем возможным направлениям нормали n , т. е. по углу θ : $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ между n и осью z (волнение одномерное и угол φ зафиксирован). В подавляющем большинстве случаев случайную функцию $Z(\rho)$ можно считать нормальной, и, следовательно, тангенсы углов наклона поверхности S также распределены по нормальному закону. Принимая во внимание малость γ^2 (11), зададим функцию распределения углов θ в виде

$$W_n(\theta) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\theta^2/2\gamma^2). \quad (17)$$

При усреднении мы, кроме того, будем предполагать, что величина kl не очень велика: $(kl)^2 \gamma^4 \ll 1$. В случае $kl \gg 1$ поверхность является достаточно гладкой и отражение от нее можно считать методом Кирхгофа. Наличие же неровностей двух типов приводит к тому, что в окончательных формулах работы [5] вместо γ^2 появляются эффективные тангенсы углов наклона поверхности [11]:

$$\gamma_{\text{эфф}}^2 = \gamma^2 + \overline{(\Delta \zeta)^2}.$$

Усредняя (14) с функцией распределения (17) и ограничиваясь

квадратичными членами по γ , получаем для элементов матрицы F следующие выражения в двух предельных случаях:

а) $\operatorname{tg}^2\psi \gg \gamma^2$ — область диффузного рассеяния, вероятность затенений мала:

$$\begin{aligned} F_{\text{BB}}^{(\text{B})} = & (1 + \cos^2\psi)^2 \exp [-2(kl)^2 \cos^2\psi] + \gamma^2 \{ \sin^2(2\psi) \cos^2\varphi \times \\ & \times [1 - 2(kl)^2(1 + \cos^2\psi)(2 - (kl)^2(1 + \cos^2\psi))] + 2(1 + \cos^2\psi) \times \\ & \times [(kl)^2 \cos^2\psi (\cos^2\psi \cos^2\varphi - \sin^2\psi) + ((kl)^2 \cos^2\psi + \sin^2\psi) \cos^2\varphi - \\ & - (kl)^2 \sin^2\psi - \cos^2\psi - \sin^2\varphi] \} \exp [-2(kl)^2 \cos^2\psi]; \end{aligned} \quad (18\text{a})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{rr}}^{(\text{r})} = & \sin^4\psi \exp [-2(kl)^2 \cos^2\psi] + \gamma^2 \{ \sin^2 2\psi \cos^2\varphi \times \\ & \times [1 + 2(kl)^2 \sin^2\psi (2 + (kl)^2 \sin^2\psi)] + 2 \sin^2\psi [(1 + (kl)^2 \times \\ & \times \sin^2\psi) (\cos^2\psi \cos^2\varphi - \sin^2\psi) + 2 \sin^2\varphi] \} \exp [-2(kl)^2 \cos^2\psi]; \end{aligned} \quad (18\text{б})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{rr}}^{(\text{B})} = F_{\text{BB}}^{(\text{r})} = & 4\gamma^2 \sin^2\varphi \{ \cos^2\psi + \gamma^2 [2(kl)^2 \sin^2 2\psi \cos^2\varphi (k^2 l^2 \cos^2\psi - 1) + \\ & + 2(kl)^2 \cos^2\psi (\cos^2\psi \cos^2\varphi - \sin^2\psi) + \sin^2\psi \cos^2\varphi - \cos^2\psi] \} \exp [-2(kl)^2 \cos^2\psi]; \end{aligned} \quad (18\text{в})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{Br}}^{(\text{B})} = & \gamma^2 \sin(2\varphi) \sin\psi \{ 4(kl)^2 \cos^2\psi (1 + \cos^2\psi) - \\ & - 3 \cos^2\psi - 1 \} \exp [-2(kl)^2 \cos^2\psi]; \end{aligned} \quad (18\text{г})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{Br}}^{(\text{r})} = & \gamma^2 \sin(2\varphi) \sin\psi \{ 4(kl)^2 \cos^2\psi \sin^2\psi + \\ & + 3 \cos^2\psi - 1 \} \exp [-2(kl)^2 \cos^2\psi]; \end{aligned} \quad (18\text{д})$$

б) $\operatorname{tg}^2\psi \ll \gamma^2$ — область малых скользящих углов, существенную роль играют затенения поверхности:

$$\begin{aligned} F_{\text{BB}}^{(\text{B})} = & 2 \{ 2 + 6\psi\gamma \cos\varphi [2(kl)^2 - 1] + \gamma^2 [2(kl)^2 \cos^2\varphi - \\ & - 1 - \sin^2\varphi] \} \exp [-2(kl)^2] P(\psi); \end{aligned} \quad (19\text{а})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{rr}}^{(\text{r})} = & \gamma^3 (1 + \sin^2\varphi) \left[4 \sqrt{2/\pi} \psi \cos\varphi + \frac{3}{2} \gamma (1 + \sin^2\varphi) \right] \times \\ & \times \exp [-2(kl)^2] P(\psi); \end{aligned} \quad (19\text{б})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{rr}}^{(\text{B})} = F_{\text{BB}}^{(\text{r})} = & 2\gamma^2 \sin^2\varphi \{ 1 + 4 \sqrt{2/\pi} \gamma \psi \cos\varphi [2(kl)^2 - 1] + \\ & + 3\gamma^2 [2(kl)^2 \cos^2\varphi - 1] \} \exp [-2(kl)^2] P(\psi); \end{aligned} \quad (19\text{в})$$

$$\begin{aligned} F_{\text{Br}}^{(\text{B})} = & 2 \sqrt{2/\pi} \gamma \sin\varphi \{ 1 + \gamma^2 [4(kl)^2 \cos^2\varphi - 2 - \sin^2\varphi] + \\ & + \sqrt{2\pi} \gamma \psi \cos\varphi [2(kl)^2 - 1] \} \exp [-2(kl)^2] P(\psi); \end{aligned} \quad (19\text{г})$$

$$F_{\text{Br}}^{(\text{r})} = 2\gamma^2 \sin\varphi \{ \sqrt{2/\pi} \gamma (1 + \sin^2\varphi) + \psi \cos\varphi \} \exp [-2(kl)^2] P(\psi). \quad (19\text{д})$$

Графики зависимости величин $F_{\text{BB}}^{(\text{B})}$, $F_{\text{rr}}^{(\text{r})}$ и $F_{\text{rr}}^{(\text{B})} = F_{\text{BB}}^{(\text{r})}$ от угла ψ , построенные по формулам (18а, б) при разных kl и изотропном волнении (после усреднения по φ), приведены на рис. 4, 5. В совокупности с сечениями рассеяния для полей нулевого (по Кирхгофу) приближения [5, 11] полученные зависимости дают возможность построить полную матрицу рассеяния во всей области углов $0 < \psi \leqslant \pi/2$.

На рис. 6 приведен типичный график зависимости от угла ψ трех матричных элементов — $J_{\text{BB}}^{(\text{B})}$, $J_{\text{rr}}^{(\text{r})}$ и $J_{\text{rr}}^{(\text{B})} = J_{\text{BB}}^{(\text{r})}$. Пунктирная линия со-

ответствует сечению рассеяния, рассчитанному по методу Кирхгофа и одинаковому для вертикальной и горизонтальной поляризации. Видно, что при углах, исключающих возможность зеркального отражения, основной вклад в рассеянное поле вносит мелкая резонансная рябь ($kl \approx 1$) и сечение рассеяния на вертикальной поляризации больше, чем на горизонтальной.

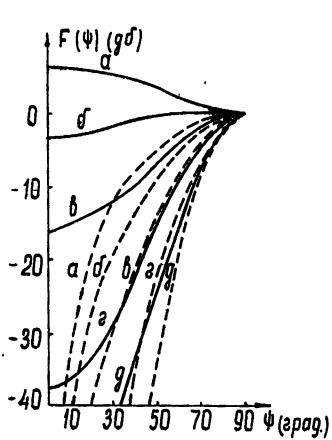


Рис. 4 Зависимость $F_{vv}^{(B)}$ (сплошные линии), $F_{rr}^{(R)}$ (пунктир) от угла скольжения ψ для $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} = 5^\circ$ ($\gamma \sim 1/12$) при а) $kl \ll 1$, б) $kl = 1$, в) $(kl)^2 = 2,5$, г) $(kl)^2 = 5$, д) $(kl)^2 = 7,5$.

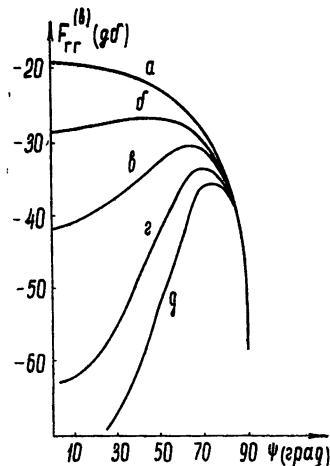


Рис. 5. Зависимость $F_{rr}^{(B)} = F_{vv}^{(R)}$ от ψ для $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} = 5^\circ$ ($\gamma \sim 1/12$) при
а) $kl \ll 1$, б) $kl = 2$, в) $(kl)^2 = 2,5$,
г) $(kl)^2 = 5$, д) $(kl)^2 = 7,5$.

Область малых углов скольжения, представляющая в некоторых случаях особый интерес, показана на рис. 7. Заметим, что при $\psi^2 \ll \gamma^2$ все сечения рассеяния убывают линейно с уменьшением угла скольжения ψ .

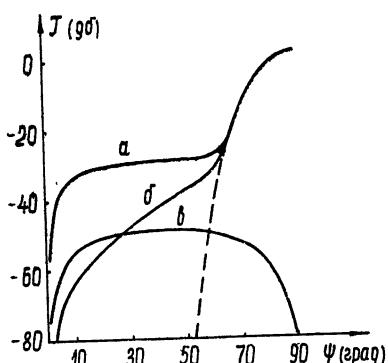


Рис. 6. Зависимость сечений рассеяния $J_{vv}^{(B)}$ (кривая а), $J_{rr}^{(R)}$ (кривая б) и $J_{vv}^{(B)} = J_{rr}^{(R)}$ (кривая в) от угла скольжения ψ при $kl = 1$, $k\sigma = 5 \cdot 10^{-2}$, $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} = 10^\circ$ ($\gamma \sim 1/6$).

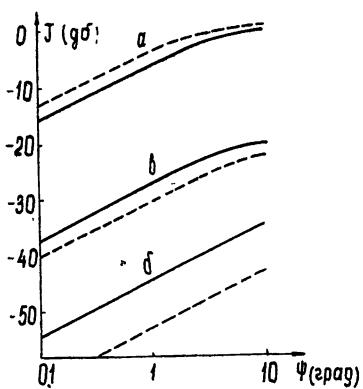


Рис. 7. То же, что на рис. 6, для $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} = 10^\circ$ ($\gamma \sim 1/6$) (сплошные линии) и $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} = 5^\circ$ ($\gamma \sim 1/12$) (пунктир).

Деполяризация радиолокационного сигнала зависит от угла между плоскостью падения и направлением движения морских волн. В случае одномерного волнения $J_{\text{rr}}^{(b)} = J_{\text{vv}}^{(r)} \sim \gamma^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$. При $\psi^2 < \gamma^2$ сечение рассеяния в ортогональную компоненту больше, чем для горизонтальной поляризации, и меньше, чем для вертикальной ($J_{\text{vv}}^{(b)} > J_{\text{rr}}^{(b)} > J_{\text{vv}}^{(r)} > J_{\text{rr}}^{(r)}$) в меру малости среднеквадратичных углов наклона поверхности. При крутых углах падения деполяризация диффузно рассеянного поля мала $-F_{\text{rr}}^{(b)} \sim \gamma^4$.

Полученные таким путем зависимости сечений рассеяния от угла скольжения качественно совпадают с наблюдаемыми на опыте [12], однако количественное сопоставление затруднительно ввиду отсутствия данных о состоянии моря во время измерений.

3. В заключение исследуем частотный спектр $S(\omega)$ сигнала, отраженного от взволнованной поверхности моря:

$$S(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{E(t)E^*(t+\tau)} \rangle \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (20)$$

При этом проницаемость ϵ можно считать произвольной и рассматривать общий случай несовмещенных передатчика и приемника ($\alpha \neq \beta$). При вычислении временной автокорреляционной функции поля $E(t)$ можно ограничиться достаточно малыми временами $\tau \ll \tau_0$ и $kL\gamma \ll \tau_0$. Это несущественно ограничивает область применимости полученного таким путем спектра $S(\omega)$ при малых $\omega - \omega_0$, но зато позволяет при усреднении не принимать во внимание медленно меняющихся предэкспоненциальных множителей в выражениях типа (12) (с $\alpha \neq \beta$):

$$\begin{aligned} \langle \overline{E(t)E^*(t+\tau)} \rangle \sim A_{\pm} \int_{z=0} d\rho \langle \exp \{ iq_z [Z(\rho, t) - \\ - Z(\rho, t+\tau)] - i [\omega_0 \pm \Omega(q_{\perp})] \tau \} \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\Omega(q_{\perp})$ — закон дисперсии волн малой амплитуды на поверхности жидкости [13]:

$$\Omega(q_{\perp}) = \sqrt{gq_{\perp} + (\alpha/\rho)q_{\perp}^2}, \quad (22)$$

g — постоянная ускорения силы тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, A_{\pm} — постоянные, зависящие от направления движения ряби. В радиолокационном случае, например, A_+ и A_- пропорциональны соответственно вероятности того, что проекция вектора направления движения ряби на ось x положительна или отрицательна.

Проведем окончательное усреднение в (21), считая, что возвышения $Z(\rho, t)$ распределены нормально, а углы наклона по-прежнему достаточно малы:

$$\langle \overline{E(t)E^*(t+\tau)} \rangle \sim A_{\pm} \exp \{ -q_z^2 h^2 [1 - K_z(\tau/\tau_0)] - i [\omega_0 \pm \Omega(q_{\perp}^0)] \tau \}, \quad (23)$$

где q_{\perp}^0 — проекция вектора q на плоскость $z = 0$. Накладываемое здесь ограничение $\left(\gamma \frac{\tau_0}{h} \frac{d\Omega(q_{\perp})}{dq_{\perp}} \right)^2 \ll 1$ в рассматриваемом диапазоне волн не сильнее, чем обычно подразумеваемое $\gamma^2 \ll 1$.

При выводе (23) мы предполагали, что мелкая рябь, находясь на крупной волне, перемещается только по вертикали за счет изменения

высоты волны в каждой точке и одновременно совершают поступательное движение со своей фазовой скоростью. Однако из линейной теории колебаний свободной поверхности жидкости следует, что каждая точка на поверхности движется по окружности [13]. Учет этого обстоятельства приводит к замене в (23) $q_z \rightarrow q$. Вычисляя интеграл (20) с подынтегральной функцией (23) при $q^2 h^2 \gg 1$, получаем для спектра $S(\omega)$ формулу

$$S(\omega) \sim A_{\pm} \exp \left\{ - \frac{[\omega - \omega_0 \mp \Omega(q_{\perp}^0)]^2}{(\Delta\omega)^2} \right\}, \quad (24)$$

$$\Delta\omega = \frac{2qh}{\tau_0}; \quad K_z \left(\frac{\tau}{\tau_0} \ll 1 \right) \simeq 1 - (\tau/\tau_0)^2.$$

Для гармонических волн $\tau_0 \simeq T/\pi\sqrt{2}$, где T — период морской волны.

Воспользовавшись законом дисперсии гравитационных волн, ширину спектра можно выразить и через другие параметры волнения, например, через среднеквадратичную высоту h и дисперсию углов наклона γ :

$$\Delta f(2q) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{qh}{\pi\tau_0} = \frac{q}{2} \sqrt{gh\gamma/\pi}. \quad (25)$$

Таким образом, частотный спектр рассеянного на море сигнала имеет, вообще говоря, два максимума при $\omega = \omega_0 \pm \Omega(q_{\perp}^0)$, положение которых не зависит от состояния поверхности моря и определяется только длиной волны излучения. Ширина этих максимумов ($\Delta f(2q)$ — полуширина одного максимума) зависит от состояния моря и растет по мере усиления степени волнения за счет увеличения высоты волн и их крутизны как $\sqrt{h\gamma}$ или как h/T , в зависимости от высоты и периода. Эти результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными по частотному спектру отраженного сигнала (см., например, [14, 15]). Ширина спектра, рассчитанная по формуле (25), составляет 40—60% наблюдаемой ширины в реальных условиях. Дополнительное уширение удовлетворительно объясняется [15] пульсациями скорости течения поверхностного слоя воды, которое мы здесь не рассматривали.

Автор благодарит Ф. Г. Басса за ценные советы и указания и И. Е. Островского, А. Д. Розенберга, А. И. Калмыкова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, 3, 180 (1958).
- Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 58 (1961).
- Б. Ф. Курьянов, Акуст. ж., 8, 325 (1962).
- K. M. Mizner, J. Math. Physics, 5, 1776 (1964).
- М. А. Исакович, ЖЭТФ, 23, 305 (1952).
- Радиоокеанографические исследования морского волнения, под ред. С. Я. Брауде, изд. АН УССР, Киев, 1962.
- А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1117 (1965).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.
- С. Чандraseкар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
- Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 101 (1964).
- Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН УССР, М., 1961.
- Распространение ультракоротких волн, пер. с английского под редакцией Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954.
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.

14. H. L. Hicks, N. Knable, J. J. Kovaly, G. S. Newell, J. P. Ruina' C. W. Sherwin, J. Geophys. Res., 65, 825 (1960).
15. А. Д. Розенберг, И. Е. Островский, А. И. Калмыков, Сдвиг частоты при рассеянии радиоизлучения взволнованной поверхностью моря, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, 9, 234 (1966).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
7 декабря 1965 г.

TO THE THEORY OF RADIO WAVE SCATTERING BY RUFFLED SEA SURFACE

I. M. Fouks

The reflection of a plane monochromatic EM-wave from a statistically rough dielectric boundary with arbitrary permittivity is studied in perturbation approximation. The statistical characteristics of the radio location signal, reflected from the ruffled sea surface (the scattering cross-section, depolarization, frequency spectrum) are investigated. The considered model of the surface (small ripples on a large wave) permits to broaden the application field of the perturbation theory to the decimeter and centimeter wave bands.

УДК 621.396.671

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ АНТЕНН В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Кравцов, З. И. Файзуллин

На основе линейной меры разрешающей способности вычислена разрешающая сила антенны с круглым раскрытием в случае, когда между антенной и точкой наблюдения находится плоский турбулентный слой. Получены формулы для радиуса освещенной зоны за слоем при произвольной форме диаграммы направленности и произвольных статистических свойствах флуктуаций комплексной фазы на выходе из слоя. В предположении о статистической однородности флуктуаций комплексной фазы детально проанализирован случай гауссовой диаграммы направленности антенны и турбулентной модели флуктуаций коэффициента преломления в слое.

Вопрос о разрешающей способности антенн в турбулентной среде приобретает в настоящее время важное значение, поскольку размеры строящихся или проектируемых антенных устройств с большим раскрытием (например, радиоастрономических антенн) приближаются к тому пределу, когда угловая ширина диаграммы направленности становится сравнимой с угловым уширением поля излучения антенны при прохождении через турбулентный слой. В этих условиях дальнейшее увеличение размеров антенн не может привести к повышению разрешающей способности радиоастрономических и других устройств.

Исследованию диаграмм направленности антенн, погруженных в турбулентный слой, посвящены работы [1-3]. В работе [1] на основе простых оценок, основанных на геометрической оптике, оценена максимально достижимая разрешающая способность антенны по углу для реальных параметров флуктуаций коэффициента преломления в ионосфере, в межпланетной и межзвездной среде. В работе [2] рассматривается уширение диаграммы направленности линейной антенны с использованием кирхгофовской дифракционной формулы для дальней зоны, но расчет флуктуаций параметров сферических волн, суперпозиция которых формирует поле в волновой зоне, проведен в приближении геометрической оптики. В работе [3] решена дифракционная задача о средней диаграмме направленности антенны с круглым раскрытием и равномерным распределением поля в апертуре. На основе полученных в [3] результатов можно сделать ряд выводов о разрешающей способности антенн в турбулентной среде, хотя в явном виде этот вопрос в [3] не затрагивался.

К рассматриваемому вопросу о разрешающей способности антенн близка задача о расширении лазерного пучка в турбулентной среде [4, 5]. Специфика этой задачи заключается в том, что лазерный пучок размывается уже в ближней зоне, где еще не проявляется дифракционное уширение, тогда как в антенных задачах наибольший интерес представляет уширение диаграммы излучения в дальней зоне. Определенные точки соприкосновения обнаруживаются также и с задачей о разрешающей способности антенн, имеющих случайные ошибки распределения поля в раскрытии [6].

В данной работе на основе последовательного дифракционного рассмотрения исследуется разрешающая способность аксиально симметричных антенн в случае, когда между точкой наблюдения и антенной находится плоский турбулентный слой, целиком расположенный в волновой зоне антенны (рис. 1).

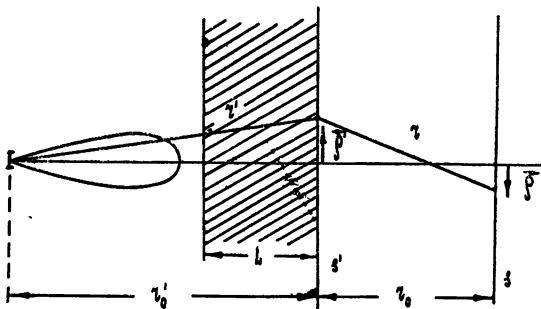


Рис. 1.

1. ЛИНЕЙНАЯ МЕРА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ АНТЕНН

Угловая разрешающая способность определяется как минимальный угол между двумя точечными объектами, при котором они могут наблюдаться раздельно. В качестве простейшей меры угловой разрешающей способности $\Delta\theta$ обычно берут ширину диаграммы направленности на уровне половинной мощности (релеевский критерий) или реже на уровне 0,1. В ряде случаев бывает удобным определить $\Delta\theta$ как среднеквадратичное значение θ : $\Delta\theta^2 = \int \theta^2 f(\theta)^2 d\Omega / \int f(\theta)^2 d\Omega$, где $f(\theta)$ — диаграмма направленности, а $d\Omega$ — элемент телесного угла. Если между объектами и антенной находится турбулентный слой и объекты находятся в ближней зоне по отношению к полю на выходе из этого слоя, то угловая мера является недостаточно полной характеристикой разрешающей способности, поскольку в этих условиях нарушается прямая пропорциональность между линейными размерами освещенной области $\Delta\rho$ и расстоянием до объектов r (такого рода пропорциональность справедлива только в дальней зоне, где $\Delta\rho = r\Delta\theta$).

В указанных случаях представляется целесообразным использовать не угловую, а линейную меру разрешающей способности, т. е. характеризовать разрешающую способность минимальным линейным расстоянием $\Delta\rho$ между двумя объектами, находящимися на одинаковом расстоянии от антенны, на котором цели могут быть разрешены.

Линейная мера разрешающей способности может быть определена, например, следующим образом. Пусть $I(\rho)$ — интенсивность поля в плоскости s , а ρ — вектор в этой плоскости. Тогда величина

$$\Delta\rho^2 = \frac{\int (\rho - \rho_c)^2 I(\rho) d\rho}{\int I(\rho) d\rho} = \frac{\int \rho^2 I(\rho) d\rho}{\int I(\rho) d\rho} - \rho_c^2 \equiv \langle \rho^2 \rangle - \rho_c^2, \quad (1)$$

где

$$\rho_c = \frac{\int \rho I(\rho) d\rho}{\int I(\rho) d\rho},$$

характеризует размер освещенной области, поскольку на круг радиусом Δp приходится основная часть потока энергии (величина p_c описывает смещение центра освещенной зоны). Следует подчеркнуть, что мера (1) не пригодна для антенн с равномерным распределением поля в раскрыве (идеализация, существенно упрощающая решение задач об излучении реальных антенн), так как величина Δp^2 оказывается при этом бесконечной.

При распространении волн в статистически неоднородных средах интенсивность $I(p)$ является случайной величиной. Усредняя (1) и учитывая, что при отсутствии поглощения и заметного рассеяния в стороны $\int I(p) dp = \int \bar{I}(p) dp = \text{const}$, получаем

$$\overline{\Delta p^2} = \langle p^2 \rangle - \bar{p}_c^2 = \frac{\int p^2 \bar{I}(p) dp}{\int \bar{I}(p) dp} - \frac{\int \int (p_1, p_2) \bar{I}(p_1) \bar{I}(p_2) dp_1 dp_2}{\left(\int \bar{I}(p) dp \right)^2}. \quad (2)$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ШИРИНЫ ОСВЕЩЕННОЙ ОБЛАСТИ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Рассмотрим турбулентный слой толщины L , простирающийся от $r'_0 - L$ до $r'_0 + L$ (рис. 1). Пусть на него падает сферическая направленная волна, которая на выходе из слоя (т. е. в плоскости s' , рис. 1) имеет вид

$$u_{s'}(p') = \frac{A_0}{r'_0} e^{ikr'} f(p') e^{\psi(p')} \equiv A_0 \exp(\psi_0 + \psi), \quad (3)$$

где r' — расстояние от антенны до точки p' на плоскости s' , $r' = \sqrt{r_0'^2 + p'^2}$, фактор $f(p')$ характеризует направленность излучения, а комплексная фаза $\psi = p + is$ описывает флуктуации уровня p и фазы s на выходе из слоя. Согласно принципу Гюйгенса—Кирхгофа, поле u_s в плоскости s , удаленной от слоя на расстояние r_0 , связано с $u_{s'}$ соотношением

$$u_s(p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{s'} u_{s'}(p') \frac{e^{ikr}}{r} dp', \quad (4)$$

где p — радиус-вектор в плоскости s , а $r = \sqrt{r_0^2 + (p - p')^2}$. Подставив (3) в (4) и воспользовавшись приближением френелевской дифракции, имеем

$$u_s(p) = \frac{k A_0 \exp[ik(r_0 + r'_0)]}{2\pi i r_0 r'_0} \int_{s'} \exp \left\{ i \frac{k}{2} \left[\frac{p'^2}{r'_0} + \frac{(p - p')^2}{r_0} \right] + \psi(p') \right\} f(p') dp'. \quad (5)$$

Средняя интенсивность $\bar{I}(p) = \bar{u}_s(p) u_s^*(p)$ выразится, в соответствии с (5), следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{I}(p) &= \frac{k^2 A_0^2}{(2\pi r_0 r'_0)^2} \int_{s'} \int \exp \left[-ik \frac{\alpha \beta}{L_0} + ik \frac{p \alpha}{r_0} \right] \times \\ &\quad \times \Gamma_2 \left(\beta - \frac{\alpha}{2}, \beta + \frac{\alpha}{2} \right) f \left(\left| \beta - \frac{\alpha}{2} \right| \right) f \left(\left| \beta + \frac{\alpha}{2} \right| \right) d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где $L_0 = r_0 r'_0 / (r_0 + r'_0)$, $\alpha = p'_2 - p'_1$, $2\beta = p'_1 + p'_2$ и

$$\Gamma_2(p'_1, p'_2) = \exp [\psi(p'_1) + \psi^*(p'_2)]. \quad (7)$$

Вычислим средний поток энергии через поверхность s , равный

$$J_0 = \int_s \overline{I(\rho)} d\rho. \quad (8)$$

Для этого подставим (6) в (8) и проведем сначала интегрирование по ρ . В силу того, что $\int_s \exp(ik\rho\alpha/r_0) d\rho = 4\pi^2\delta(k\alpha/r_0)$, последующее интегрирование по α осуществляется особенно просто и дает

$$J_0 = \frac{A_0^2}{r_0'^2} \int_{s'} f^2(\beta) \Gamma_2(\beta, \beta) d\beta. \quad (9)$$

Легко видеть, что $\frac{A_0^2}{r_0'^2} \Gamma_2(\beta, \beta) f^2(\beta)$ представляет собой среднюю интенсивность волны (3) на выходе из слоя. Поэтому (9) означает, что в среднем поток через поверхность s , удаленную от s' на произвольное расстояние r_0 , равен потоку через s' .

Аналогично вычисляется и интеграл

$$J_1 = \int_s \rho^2 \overline{I(\rho)} d\rho. \quad (10)$$

Подставив (6) в (10) и проведя интегрирование по ρ , получаем

$$\int_s \rho^2 \exp(ik\rho\alpha/r_0) d\rho = -4\pi^2 \Delta \delta\left(\frac{k\alpha}{r_0}\right). \quad (11)$$

Появление под знаком интеграла в (10) $\Delta \delta\left(\frac{k\alpha}{r_0}\right)$ — лапласиана от двумерной дельта-функции — упрощает интегрирование по α . В результате сравнительно несложных, но несколько громоздких выкладок находим

$$J_1 = \frac{A_0^2}{r_0'^2} \left(1 + \frac{r_0}{r_0'}\right)^2 \int_{s'} \beta^2 \Gamma_2(\beta, \beta) f^2(\beta) d\beta - \frac{A_0^2 r_0^2}{k^2 r_0'^2} \times \\ \times \int_{s'} \left[\left(\Delta_\alpha - \frac{2ik}{L_0} \beta \nabla_\alpha \right) \Gamma_2 \left(\beta - \frac{\alpha}{2}, \beta + \frac{\alpha}{2} \right) \right]_{\alpha=0} f^2(\beta) d\beta, \quad (12)$$

где $\nabla_\alpha = i_x \frac{\partial}{\partial \alpha_x} + i_y \frac{\partial}{\partial \alpha_y}$, $\Delta_\alpha = \nabla_\alpha^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_y^2}$. Под знаком первого интеграла в (12) отброшен член $m_2 = \frac{L_0^2}{2k^2} \Gamma_2(\beta, \beta) f^2(\beta) \Delta_\beta \ln f(\beta)$, который мал по сравнению с $m_1 = \beta^2 \Gamma_2(\beta, \beta) f^2(\beta)^*$.

Обратимся теперь к интегралу

$$J_2 = \iint_s (\rho_1, \rho_2) \overline{I(\rho_1) I(\rho_2)} d\rho_1 d\rho_2. \quad (13)$$

Функция корреляции интенсивности $\overline{I(\rho_1) I(\rho_2)} = \overline{u_s(\rho_1) u_s^*(\rho_1) u_s(\rho_2) u_s^*(\rho_2)}$ в соответствии с (5) записывается в виде

* Так как по порядку величины $m_2 \sim \frac{L_0^2}{k^2} \Gamma_2 f^2 \frac{1}{a'^2}$ (a' — ширина освещенной области в плоскости s') и в пределах освещенной зоны $m_1 \sim a'^2 \Gamma_2 f^2$, неравенство $m_2 \ll m_1$ эквивалентно условию $r_{\text{фр}}^4 \ll a'^4$ ($r_{\text{фр}} = \sqrt{L_0}$ — радиус первой зоны Френеля). Это условие всегда выполняется для направленной сферической волны в зоне Фраунгофера.

$$\begin{aligned} \overline{I(\rho_1)I(\rho_2)} = & \frac{k^4 A_0^4}{(2\pi r_0 r'_0)^4} \int \int \int \int \Gamma_4(\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4) f(\rho'_1) f(\rho'_2) \times \\ & \times f(\rho'_3) f(\rho'_4) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\frac{\rho'^2_1 - \rho'^2_2 + \rho'^2_3 - \rho'^2_4}{L_0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\rho_1(\rho'_2 - \rho'_1) + 2\rho_2(\rho'_4 - \rho'_3)}{r_0} \right] \right\} d\rho'_1 d\rho'_2 d\rho'_3 d\rho'_4, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Gamma_4(\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4) = \overline{\exp [\psi(\rho'_1) + \psi^*(\rho'_2) + \psi(\rho'_3) + \psi^*(\rho'_4)]}. \quad (15)$$

Введение новых переменных интегрирования $\alpha_1 = \rho'_2 - \rho'_1$, $2\beta_1 = \rho'_1 + \rho'_2$, $\alpha_2 = \rho'_4 - \rho'_3$, $2\beta_2 = \rho'_3 + \rho'_4$, подстановка (15) в (13) и последовательное интегрирование сначала по ρ_1 и ρ_2 (в результате которого появляются производные дельта-функций), а затем по α_1 и α_2 приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} J_2 = & - \frac{A_0^4 r_0^4}{k^4 r_0'^4} \int \int f^2(\beta_1) f^2(\beta_2) \left\{ \left[\nabla_{\alpha_1} \nabla_{\alpha_2} - \frac{k^2}{L_1^2} (\beta_1, \beta_2) \frac{ik}{L_0} (\beta_1 \nabla_{\alpha_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_2 \nabla_{\alpha_1}) \right] \Gamma_4 \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2}, \beta_1 + \frac{\alpha_1}{2}, \beta_2 - \frac{\alpha_2}{2}, \beta_2 + \frac{\alpha_2}{2} \right) \right\}_{\alpha_{1,2}=0} d\beta_1 d\beta_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, интегралы J_0, J_1, J_2 , через которые выражается линейная мера разрешающей способности

$$\Delta \bar{\rho}^2 = \langle \bar{\rho}^2 \rangle - \bar{\rho}_c^2 = \frac{J_1}{J_0} - \frac{J_2}{J_0^2} \quad (17)$$

(см. (2)), выражены через вторые и четвертые моменты (7) и (15) случайной величины e^ψ .

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ШИРИНЫ ОСВЕЩЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ФАЗЫ НА ВЫХОДЕ ИЗ СЛОЯ

Дальнейшее вычисление интегралов J_0, J_1, J_2 существенно упрощается в частном случае статистически однородных флуктуаций комплексной фазы на выходе из слоя. Выясним, при каких условиях случайное поле ψ можно считать статистически однородным в плоскости s' .

Прежде всего отметим, что в рамках метода плавных возмущений корреляционные моменты и среднее значение комплексной фазы ψ направленной сферической волны с точностью до членов порядка $g = r_{\Phi p}/a' \ll 1$ совпадают с соответствующими параметрами ненаправленной сферической волны $A_0 e^{ikr}/r$. В самом деле, в случае крупных (по сравнению с длиной волны) неоднородностей наибольший вклад в вносят неоднородности, заключенные внутри эллипсоида Френеля, большая ось которого вытянута вдоль линии, соединяющей точку наблюдения r' с антенной, и радиус которого на расстоянии r'' от антенны равен $r_{\Phi p}(r'') = \sqrt{\lambda} r'' (r' - r'')/r'$ (рис. 2). Так как, по предположению, турбу-

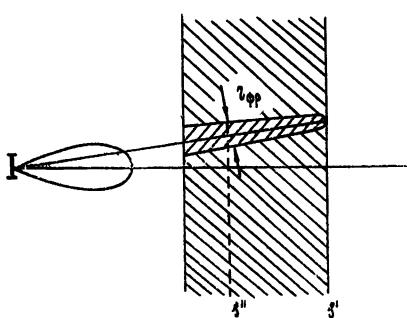


Рис. 2.

шная ось которого вытянута вдоль линии, соединяющей точку наблюдения r' с антенной, и радиус которого на расстоянии r'' от антенны равен $r_{\Phi p}(r'') = \sqrt{\lambda} r'' (r' - r'')/r'$ (рис. 2). Так как, по предположению, турбу-

лентный слой полностью расположен во фраунгоферовой зоне антенны, где диаграмма направленности уже сформировалась, на любых расстояниях r'' внутри слоя выполнено условие $r_{\text{Ф}}(r'') \ll a''$, где a'' — ширина освещенной зоны в плоскости s'' . Следовательно, внутри эллипсоида Френеля амплитуда направленной сферической волны практически постоянна, откуда и вытекает справедливость высказанного выше утверждения.

Комплексная фаза ψ удовлетворяет, как известно [7], уравнению

$$\Delta\psi + 2(\nabla\psi_0, \nabla\psi) + (\nabla\psi)^2 = -k^2\varepsilon_1, \quad \psi_0 = \ln\left[\frac{e^{ikr}}{r} f(r)\right],$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon - \bar{\varepsilon}$ — флуктуации диэлектрической проницаемости среды. Если разложить, как это делается в методе плавных возмущений, комплексную фазу ψ в ряд по степеням малой величины ε_1 и ограничиться в этом разложении членами порядка не выше ε_1^2 , $\psi \cong \psi^{(1)} + \psi^{(2)}$ [8, 9], то на сфере радиуса r'_0 , на которой случайное поле ψ сферической ненаправленной волны статистически однородно и изотропно, имеем

$$\begin{aligned} \bar{p} &\simeq \bar{p}^{(2)}, \quad \bar{s} \simeq \bar{s}^{(2)}, \\ D_s(|\rho_1 - \rho_2|) &\equiv [\bar{s}(\rho_1) - \bar{s}(\rho_2)]^2 \simeq [\bar{s}^{(1)}(\rho_1) - \bar{s}^{(1)}(\rho_2)]^2, \\ B_p(|\rho_1 - \rho_2|) &\equiv \bar{p}(\rho_1)\bar{p}(\rho_2) \simeq \bar{p}^{(1)}(\rho_1)\bar{p}^{(1)}(\rho_2), \\ B_{ps}(|\rho_1 - \rho_2|) &\equiv \bar{p}(\rho_1)\bar{s}(\rho_2) \simeq \bar{p}^{(1)}(\rho_1)\bar{s}^{(1)}(\rho_2), \end{aligned} \quad (18)$$

где $p^{(1,2)} = \operatorname{Re} \psi^{(1,2)}$, $s^{(1,2)} = \operatorname{Im} \psi^{(1,2)}$ и под $\rho_{1,2}$ следует понимать ориентированные отрезки дуг большого круга на сфере радиуса r'_0 .

В работах [8, 9] было показано, что при падении на плоский турбулентный слой плоской волны имеет место соотношение

$$\bar{p}^{(2)} = -\overline{(\bar{p}^{(1)})^2}. \quad (19)$$

Можно показать, что соотношение (19), которое обеспечивает сохранение средней интенсивности, выполняется и для сферической волны. Если волна прошла достаточно длинный путь в среде, то комплексную фазу ψ можно считать распределенной по нормальному закону. Используя соотношение $\bar{e}^\xi = \exp\left(\xi + \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})^2\right)$, которое выполняется для любой гауссовой случайной величины ξ , и принимая во внимание (18) и (19), для моментов Γ_2 и Γ_4 получаем следующие выражения:

$$\Gamma_2(\rho_1, \rho_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}D(|\rho_1 - \rho_2|)\right],$$

$$\Gamma_4(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \exp\left\{4\bar{p} + \frac{1}{2}[D(\alpha_{12}) + D(\alpha_{34}) + D(\alpha_{14}) + D(\alpha_{23}) - D(\alpha_{13}) - D(\alpha_{24})] + i[D_{ps}(\alpha_{24}) - D_{ps}(\alpha_{13})] - [D_p(\alpha_{24}) + D_p(\alpha_{13})]\right\}, \quad (20)$$

где $\alpha_{ik} = \rho_i - \rho_k$, а $D(\alpha) = D_s(\alpha) + D_p(\alpha)$ — структурная функция комплексной фазы.

Очевидно, выражениями (20), справедливыми на сфере радиуса r'_0 , можно пользоваться и на плоскости s' в пределах некоторого конуса $\theta < \theta_{\max}$ (рис. 3). Порядок величины θ_{\max} можно оценить из следующих простых соображений. Пусть δr — расстояние от точки наблюдения на плоскости s' до сферы радиуса r'_0 , а $\sqrt{\lambda\delta r}$ — радиус первой зоны Френеля на сфере. Если $\sqrt{\lambda\delta r}$ меньше характерного масштаба l флуктуаций

ций комплексной фазы ϕ на сфере, то случайные поля на сфере и плоскости s' будут сильно коррелированы. Так как $\delta r \simeq r_0'^{\theta^2}/2$, предельное значение $\theta = \theta_{\max}$ определится из условия $\sqrt{\lambda \delta r} = \sqrt{\lambda r_0'^2/2} \theta_{\max} \sim l$, откуда $\theta_{\max} \sim \sqrt{2l^2/\lambda r_0'}$. Таким образом, при

$$\theta < \theta_{\max} \sim \sqrt{2l^2/\lambda r_0'} \quad (21)$$

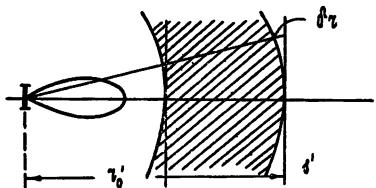


Рис. 3.

флуктуации параметров ненаправленной сферической волны (а следовательно, в соответствии со сказанным выше, и флуктуации параметров направленной волны) на плоскости s' можно считать статистически однородными и пользоваться выражениями (20). Интересуясь свойствами поля излучения остронаправленных антенн, в дальнейшем мы будем считать условие (21) выполненным.

Используя выражения (9), (12), (16) и (20), получаем следующие окончательные выражения для величин $\langle \rho^2 \rangle$ и ρ_c^2 , разность которых равна $\overline{\Delta \rho^2}$ (соответствующие выкладки хотя и просты, но довольно громоздки, и потому здесь не приводятся):

$$\langle \bar{\rho}^2 \rangle = \left(1 + \frac{r_0}{r_0'}\right)^2 a'^2 + \frac{r_0^2 \Delta D(0)}{2k^2}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_c^2 = \frac{r_0^2}{2k^2} \left[\iiint_{s'} \left\{ \Delta D(\Delta \beta) - \Delta D_p(\Delta \beta) - 2D_{ps}^2(\Delta \beta) \frac{k^2}{L_0^2} (\beta_1, \beta_2) - \frac{2k}{L_0} D_{ps}(\Delta \beta) \Delta \beta \right\} \times \right. \\ \left. \times \exp[4B_p(\Delta \beta)] f^2(\beta_1) f^2(\beta_2) d\beta_1 d\beta_2 \right] \left[\int_{s'} f^2(\beta) d\beta \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\Delta \beta = |\beta_1 - \beta_2|$,

$$a'^2 = \left[\int_{s'} \beta^2 f^2(\beta) d\beta \right] \left[\int_{s'} f^2(\beta) d\beta \right]^{-1} \quad (24)$$

(a' — размер освещенной области на выходе из слоя в отсутствие случайных неоднородностей). Величина $(1 + r_0/r_0')a'$ описывает просто сферическую расходимость волны (радиус освещенной области $(1 + r_0/r_0')a'$ возрастает пропорционально расстоянию $R_0 = r_0 + r_0'$ от антенны). Так как a'/r_0' есть угловая ширина диаграммы направленности θ_0 , первый член в (22) можно записать в виде

$$(1 + r_0/r_0')^2 a'^2 = \theta_0^2 (r_0 + r_0')^2.$$

Второй член в (22) описывает среднее уширение освещенной области относительно невозмущенного центра излучения. Это уширение характеризуется углом $\theta_1 = \sqrt{\Delta D(0)/2k^2} = \sqrt{D''(0)/k}$, который представляет собой не что иное, как среднеквадратичное значение угла выхода волны из слоя [7-9]. Наконец, член ρ_c^2 , который можно записать в виде $\bar{\rho}_c^2 = r_0'^{\theta_0^2}$, описывает смещение максимума излучения. Если флуктуации уровня малы, т. е. в пределах области интегрирования в (23) $D_p, D_{ps} \ll D$ и $B_p \ll 1$, то

$$\theta_2^2 = \frac{\bar{\rho}_c^2}{r_0^2} = \frac{1}{2k^2} \left[\int_s' \int_s' \Delta D(\Delta\beta) f^2(\beta_1) f^2(\beta_2) d\beta_1 d\beta_2 \right] \left[\int_s' f^2(\beta) d\beta \right]^{-2}. \quad (25)$$

Суммарная величина $\overline{\Delta\rho^2}$, равная

$$\overline{\Delta\rho^2} = \langle \bar{\rho}^2 \rangle - \bar{\rho}_c^2 = (r_0 + r'_0)^2 \theta_0^2 + r_0^2 (\theta_1^2 - \theta_2^2), \quad (26)$$

зависит от соотношения между θ_0 , θ_1 и θ_2 .

В случае, когда точка наблюдения находится в дальней зоне по отношению к освещенной области на выходе из слоя, т. е. когда $r_0 \gg r'_0$ (этот случай реализуется при радиоастрономических измерениях), имеет место сферическая расходимость вида

$$\overline{\Delta\rho^2} = r_0^2 (\theta_0^2 + \theta_1^2 - \theta_2^2). \quad (27)$$

Заметим, что общее выражение (17), при выводе которого не сделано предположения о статистической однородности комплексной фазы ϕ на выходе из слоя, также можно записать в виде (26) или (27), подразумевая под θ_0 , θ_1 и θ_2 несколько иные выражения, вытекающие из (9), (12) и (16).

4. ШИРИНА ОСВЕЩЕННОЙ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЯХ КРУПНО- И МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

В этих двух предельных случаях общее выражение для $\overline{\Delta\rho^2}$ можно упростить. Считая, что флуктуации уровня на выходе из слоя малы ($\bar{\rho}_c^2$ определяется из (25)), в случае мелкомасштабных флуктуаций, характеризуемых некоторым масштабом $l \ll a'$, можно принять, что величина $\Delta D(\Delta\beta)$ отлична от нуля при $\Delta\beta \leq l$ и стремится к нулю при $\Delta\beta \gg l$. В этом случае выражение для $\bar{\rho}_c^2$, записанное в виде

$$\bar{\rho}_c^2 = r_0^2 \theta_2^2 = \frac{r_0^2}{2k^2} \left[\int_s' \int_s' \Delta D(\delta) f^2\left(\left|\gamma + \frac{\delta}{2}\right|\right) f^2\left(\left|\gamma - \frac{\delta}{2}\right|\right) d\gamma d\delta \right] \left[\int_s' f^2(\beta) d\beta \right]^{-2}, \quad (28)$$

упрощается из-за того, что величина $f^2\left(\left|\gamma + \frac{\delta}{2}\right|\right) f^2\left(\left|\gamma - \frac{\delta}{2}\right|\right)$ мало изменяется при интегрировании по δ в области, где $\Delta D(\delta)$ отлично от нуля. В результате имеем

$$\bar{\rho}_c^2 \approx \frac{r_0^2}{2k^2} \int_s' f^4(\gamma) d\gamma \left[\int_s' f^2(\beta) d\beta \right]^{-2} \int_s' \Delta D(\delta) d\delta. \quad (29)$$

Так как по порядку величины $\int_s' \Delta D(\delta) d\delta \sim \Delta D(0) l^2$, $\int_s' f^4(\gamma) d\gamma \sim \frac{1}{a'^2} \left(\int_s' f^2(\beta) d\beta \right)^2$, то $\bar{\rho}_c^2 \sim \frac{r_0^2}{2k^2} \Delta D(0) (l/a')^2$. В силу сделанного пред-

положения о малости l по сравнению с a' величина $\bar{\rho}_c^2$ оказывается значительно меньшей, чем член $(r_0^2/2k^2)\Delta D(0)$ в (22), т. е. смещение центра освещенной области в случае мелкомасштабных флуктуаций незначительно и

$$\overline{\Delta\rho^2} \simeq \langle \bar{\rho}^2 \rangle = \left(1 + \frac{r_0}{r'_0} \right)^2 a'^2 + \frac{r_0^2 \Delta D(0)}{2k^2}. \quad (30)$$

В противоположном случае крупномасштабных флюктуаций фазы ($l \gg a'$) в пределах освещенной зоны на выходе из слоя можно считать постоянной величину $\Delta D(\Delta\theta) \simeq \Delta D(0)$. Вынося ее за знак интеграла в выражении (25), имеем

$$\bar{\rho}_c^2 \simeq \frac{r_0^2 \Delta D(0)}{2k^2}, \quad (31)$$

т. е. $\bar{\rho}_c^2$ в точности равно члену $r_0^2 \Delta D(0)/2k^2$ в выражении (22) для $\langle \bar{\rho}^2 \rangle$. Следовательно, при $l \gg a'$

$$\bar{\Delta\rho^2} \simeq \left(1 + \frac{r_0}{r_0'}\right)^2 a'^2. \quad (32)$$

Таким образом, в случае крупномасштабных неоднородностей уширения диаграммы направленности не происходит — диаграмма излучения смещается как целое, поскольку угол выхода θ_1 при $l \gg a'$ практически одинаков для всех точек в пределах освещенной области и равен углу θ_2 смещения максимума излучения. Конечно, компенсация членов $r_0^2 \Delta D(0)/2k^2$ и $\bar{\rho}_c^2$ в действительности не может быть полной, во-первых, из-за амплитудных флюктуаций, а во-вторых, из-за слабой статистической неоднородности комплексной фазы ψ на выходе из слоя, не учитываемых в выражении (25).

5. ШИРИНА ОСВЕЩЕННОЙ ЗОНЫ ДЛЯ ГАУССОВОЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОЙ МОДЕЛИ ФЛЮКТУАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

До сих пор мы не конкретизировали формы исходной диаграммы направленности $f(\beta)$ и вида структурной функции $D(\beta)$. Предположим теперь, что $f(\beta) = \exp(-\beta^2/2a'^2)$. В этом случае выражение (28) упрощается, так как удается провести интегрирование по $\gamma = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ и по углу в пространстве векторов $\delta = \Delta\beta \equiv \beta_1 - \beta_2$. В результате находим

$$\bar{\Delta\rho^2} = \left(1 + \frac{r_0}{r_0'}\right)^2 a'^2 + \frac{r_0^2 \Delta D(0)}{2k^2} - \frac{r_0^2}{2k^2 a'^2} \int_0^\infty \Delta D(\rho) \exp(-\rho^2/2a'^2) \rho d\rho. \quad (33)$$

Как известно [7], флюктуации коэффициента преломления в турбулентном слое описываются структурной функцией

$$D_n(\rho) = \begin{cases} C_n^2 l_0^{-4/3} \rho^2 & (\rho \ll l_0) \\ C_n^2 \rho^{2/3} & (\rho \gg l_0) \end{cases}$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности. Записав спектральную плотность флюктуаций коэффициента преломления в виде $\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-1/3} \exp(-x^2/x_m^2)$, где $x_m = 5,91/l_0$, и проведя вычисления, аналогичные описанным в [8], для структурной функции комплексной фазы сферической волны можно получить следующие предельные выражения:

$$D(\rho) = \begin{cases} D_1(\rho) = K_1 l_0^{-1/3} \rho^2 & (\rho \ll l_0) \\ D_2(\rho) = K_2 \rho^{5/3} & (\rho \gg l_0) \end{cases} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= 3,42 C_n^2 k^2 \left[\frac{1}{3} \frac{r_0'^3 - (r_0' - L)^3}{r_0'^2} \right], \\ K_2 &= 2,97 C_n^2 k^2 \left[\frac{3}{8} \frac{r_0'^{8/3} - (r_0' - L)^{8/3}}{r_0'^{5/3}} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

При $r_0' \gg L$ (тонкий турбулентный слой) выражения в квадратных скобках в (35) равны L ; при этом (34) переходит в структурную функцию комплексной фазы для плоской волны.

Пользуясь (34), для лапласиана $\Delta D(\rho) = D''(\rho) + \frac{1}{\rho} D'(\rho)$ находим

$$\Delta D(\rho) = \begin{cases} \Delta D_1(\rho) = 4K_1 l_0^{-1/3} & (\rho \ll l_0) \\ \Delta D_2(\rho) = \frac{25}{9} K_2 \rho^{-1/3} & (\rho \gg l_0) \end{cases}. \quad (36)$$

График функции $\Delta D(\rho)$ показан на рис. 4. Интерполируем гладкую функцию $\Delta D(\rho)$ непрерывной функцией, составленной из предельных выражений (36):

$$\Delta D(\rho) = \begin{cases} \Delta D_1(\rho) & (\rho \leq \rho_0) \\ \Delta D_2(\rho) & (\rho > \rho_0) \end{cases} \quad (37)$$

(пунктирные линии на рис. 4) и имеющей разрыв производной в точке $\rho_0 = (25K_2/36K_1)^{3/2}l_0$, где $\Delta D_1(\rho) = \Delta D_2(\rho)$ (при $r_0' \gg L$ $\rho_0 = 0,216l_0$).

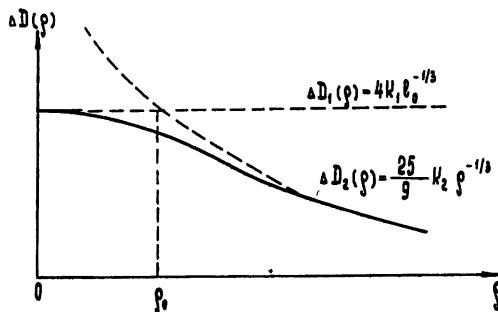


Рис. 4.

Подставив (37) в (33) и введя новую переменную интегрирования $t = \rho^2/2a'^2$, для $\overline{\Delta\rho^2}$ получаем

$$\overline{\Delta\rho^2} = \left(1 + \frac{r_0}{r_0'}\right)^2 a'^2 + \frac{r_0^2 2K_1 l_0^{-1/3}}{k^2} \Phi(x), \quad (38)$$

где

$$\Phi(x) = e^{-x} - x^{1/6} \int_x^\infty t^{-1/6} e^{-t} dt, \quad (39)$$

$$x = \frac{\rho_0^2}{2a'^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{25K_2}{36K_1} \right)^6 \left(\frac{l_0}{a'} \right)^2$$

(если $r'_0 \gg L$, $x = 0,023(l_0/a')^2$). При $x \ll 1$

$$\Phi(x) \simeq 1 - x^{-1/6} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{11}x^2 + \dots, \quad (40)$$

а при $x \gg 1$

$$\Phi(x) \simeq \frac{1}{6} e^{-x/x} + \dots \quad (41)$$

Графики приближенных выражений (40) и (41) приведены на рис. 5.

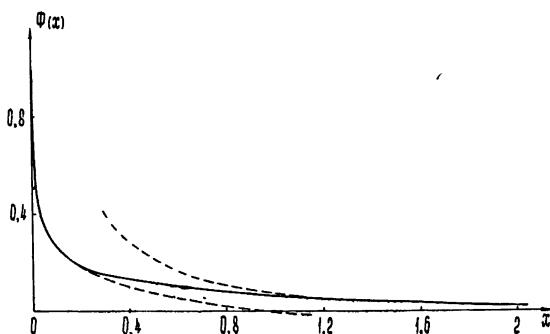


Рис. 5.

В согласии со сказанным в разделе 4, функция $\Phi(x)$ обращается в единицу при $x \rightarrow 0$ (это означает, что при $l_0 \ll a'$ качание центра освещенной области незначительно) и стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ (при $l_0 \gg a'$ член ρ_c^2 компенсирует член $r_0^2 \Delta D(0)/2k^2 = r_0^2 2K_1 l_0^{-1/3} k^{-2}$). Переход от значения $\Phi(0)=1$ к $\Phi(x) \ll 1$ происходит очень резко (см. рис. 5), что объясняется влиянием крупномасштабных образований, отчетливо представленных в спектре размеров турбулентности. Неоднородности больших размеров не приводят, как уже говорилось, к уширению освещенной зоны, а лишь смещают положение максимума излучения.

В заключение остановимся на вопросе об изменении относительной ширины освещенной области $\gamma = \sqrt{\Delta \rho^2 / (1 + r_0/r'_0)} a' = \sqrt{\Delta \rho^2 / (r_0 + r'_0)} \theta_1$. Из сказанного выше следует, что γ обращается в единицу в двух предельных случаях — когда начальная ширина освещенной области a' велика (первый член в (38) велик по сравнению со вторым) и когда $a' \ll l_0$. Зависимость γ от a' записывается в виде

$$\gamma(a') = \sqrt{1 + L_0^2 \theta_1^2 \Phi(x) / a'^2},$$

где $1/L_0 = 1/r_0 + 1/r'_0$, $\theta_1^2 = \Delta D(0)/2k^2 = 2K_1 l_0^{-1/3} k^{-2}$. Зависимость $\gamma(a')$ показана на рис. 6.

Из рис. 6 видно, что по мере уменьшения a' величина γ сначала растет, достигая наибольшего значения при $a' \sim l_0$, а при $a' \rightarrow 0$ стремится к единице. Однако это улучшение разрешающей способности в области очень узких диаграмм ($a' \ll l_0$) покупается дорогой ценой — потерей точности измерения координат исследуемых объектов. Неопределенность координат равна $\sqrt{\rho_c^2}$ в линейных единицах и $\sqrt{\rho_c^2 / (r_0 + r'_0)}$ в угловых единицах. Когда же точность определения координат несущественна и задача состоит только в разрешении точечных объек-

тов, нужно принимать во внимание изменение параметров среды во времени, а также способ обработки сигнала (способ обзора, наличие накопительных устройств в приемниках и т. д.). Предельную «невозмущенную» разрешающую способность можно реализовать только в том случае, если за время обзора заданного сектора пространства неоднородности в турбулентном слое можно считать «замороженными». В противном случае разрешаемые объекты могут быть просто не обнаружены в силу «неуправляемости» луча. Применительно к радиотелескопам и радиоинтерферометрам указанные эффекты были рассмотрены в работе [1].

В заключение авторы выражают благодарность С. М. Рытову за внимательное руководство работой, а также В. И. Татарскому и Н. Г. Денисову за полезные советы и предоставленную возможность ознакомиться с неопубликованными материалами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Л. Кайдановский, В. А. Смирнова, Радиотехника и электроника, 10, 1574 (1965).
2. J. P. Ruina, C. M. Angulo, IEEE Trans., AP-11, № 2, 153 (1963).
3. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, 9, 1944 (1964).
4. R. Beckman, Report to NBS, University of Colorado, Boulder, Colorado, I Sept., 1964. Перевод: Зарубежная радиоэлектроника, № 7, 116; № 8, 109 (1965).
5. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 870 (1965).
6. W. M. Brown, C. I. Palermo, Effects of phase errors on resolution, IEEE Trans., MIL-9, № 1, 4 (1965).
7. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
8. В. И. Татарский, Докторская диссертация, М., 1964.
9. Н. Г. Денисов, Докторская диссертация, Г., 1964.

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
20 января 1966 г.

RESOLUTION OF ANTENNA IN A TURBULENT MEDIUM

Yu. A. Kravtsov, Z. I. Feizoulin

The resolution of a circular-aperture antenna has been calculated in the case when there is a plane turbulent layer between the antenna and observation point by the method of linear measure of the resolving power. The formulas have been obtained for the radius of the illuminated zone behind the layer for the arbitrary radiation pattern and arbitrary statistical properties of complex phase fluctuations at the output of the layer. The case of Gaussian antenna pattern and turbulent model of reflection coefficient fluctuations in the layer has been examined in detail under the assumption of statistic homogeneity of complex phase fluctuations.

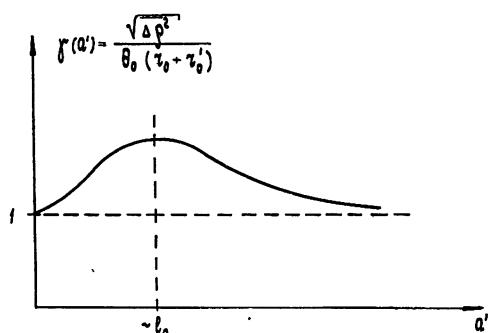


Рис. 6.

УДК 533.951 : 621.371.18

О САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Г. Литвак

Изучается явление самофокусировки двумерных электромагнитных волн в магнитоактивной плазме в случае поперечного распространения. Получено выражение для тензора нелинейной диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы. Проведено качественное исследование системы уравнений поля на фазовой плоскости. С помощью численных методов найдена структура автолокализованного поля при некоторых значениях параметров плазмы. Показано, что вблизи электронного гирорезонанса ($\omega_H \gtrapprox \omega$) самофокусировка поля сопровождается увеличением концентрации плазмы на оси (образованием плазменного волновода). В некоторых предельных случаях (по величине магнитного поля) получены приближенные решения уравнений поля в аналитическом виде.

Явление автоканализации электромагнитных волн в нелинейных изотропных средах исследовалось в работах [1–5]. В частности, показано, что при распространении в безграничной изотропной плазме двумерных волн TE- и TM-типа происходит самофокусировка поля, сопровождающаяся вытеснением плазмы с оси и образованием самоподдерживающегося волноводного канала [2, 3, 5]. Нахождение стационарных автолокализованных решений для волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме, может быть проведено аналогично [2, 5]. Однако такое исследование связано со значительными математическими трудностями — приходится исследовать громоздкую систему дифференциальных уравнений третьего порядка. Исключение представляет случай, когда разделяются волны TE- и TM-типа и их можно рассматривать независимо. Это происходит либо при поперечном распространении волн, либо при продольном распространении в сильном магнитном поле. Самофокусировка волн при продольном распространении в плазме в сильном магнитном поле (в одноосном кристалле) обсуждалась в работах [6, 7]. Ниже исследуются стационарные автолокализованные решения для случая поперечного распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме.

1. ТЕНЗОР НЕЛИНЕЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Для получения зависимости диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы от амплитуды электрического поля E воспользуемся выражением для усредненной силы, действующей на заряженную частицу в слабонеоднородном высокочастотном электромагнитном поле и однородном постоянном магнитном поле H_0 . В этом случае уравнение усредненного (по периоду поля) движения R имеет вид [8]

$$\ddot{R} - \omega_H [\dot{R} \tau_3] = -\nabla \Phi, \quad (1)$$

причем усредненный высокочастотный потенциал равен

$$\Phi = (\eta/2\omega)^2 \left\{ |E_{||}|^2 + \frac{\omega}{\omega + \omega_A} |E_1^{(+)}|^2 + \frac{\omega}{\omega - \omega_H} |E_{\perp}^{(-)}|^2 \right\}. \quad (2)$$

Здесь E_{\parallel} — составляющая высокочастотного поля вдоль постоянного магнитного поля H_0 , а поперечная составляющая поля E_{\perp} представлена в виде суммы векторов с правой и левой круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} E_{\perp}(R) &= E_{\perp}^{(+)}(R) + E_{\perp}^{(-)}(R); \quad E_{\perp}^{(+)}(R) = \frac{E^{(+)}}{\sqrt{2}} (\tau_1 - i\tau_2); \\ E_{\perp}^{(-)}(R) &= \frac{E^{(-)}}{\sqrt{2}} (\tau_1 + i\tau_2), \end{aligned} \quad (3)$$

τ_1, τ_2, τ_3 — правая ортогональная тройка единичных векторов, τ_3 направлен вдоль H_0 , $\omega_H = eH_0/mc$ — гирочастота электронов, $\eta = e/m$, e, m — заряд и масса частицы, ω — частота поля.

После соответствующих преобразований выражение (2) для высокочастотного потенциала Φ можно представить в следующем виде:

$$\Phi = \operatorname{Re} \left(\frac{e^2 \beta_{lk} E_l E_k^*}{4m(\omega^2 - \omega_H^2)} \right); \quad (4)$$

$$\beta_{lk} = \begin{vmatrix} 1; & i \frac{\omega_H}{\omega}; & 0 \\ -i \frac{\omega_H}{\omega}; & 1; & 0 \\ 0; & 0; & 1 - \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где E_k — составляющая поля вдоль τ_k , E_k^* — комплексно сопряженная ей величина.

Можно показать аналогично [9, 10], что, поскольку усредненная сила является потенциальной, в стационарном состоянии среднее распределение электронной концентрации полностью ионизованной изотермической плазмы описывается больцмановской функцией распределения:

$$N = N_0 \exp(-\Phi/2T), \quad (6)$$

где T — температура плазмы*. Соответствующий нелинейный тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы имеет такой же вид, как и в линейном случае:

$$\epsilon_{lk} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; & -i \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}; & 0 \\ i \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}; & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; & 0 \\ 0; & 0; & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

* Выражения (5) — (7), написанные здесь из микросообщений, совпадают с феноменологическими выражениями, полученными в [11].

с тем отличием, что электронная ленгмюровская частота является функцией амплитуды поля:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} = \omega_{p0}^2 \exp(-\Phi/2T). \quad (8)$$

Существенная особенность высокочастотного потенциала (4) заключается в том, что он меняет знак при $\omega_H > \omega$ и плазма втягивается уже не в минимум потенциала Φ , а в его максимум. Можно ожидать, что существует самосогласованное решение уравнений поля, в котором происходит одновременная автолокализация поля и плазмы. Ниже будет показано, что такое решение действительно существует.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОПЕРЕЧНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Рассмотрим двумерные электромагнитные волны, распространяющиеся поперек направления постоянного магнитного поля H_0 в плазме, характеризуемой нелинейным тензором диэлектрической проницаемости (7). Будем искать решение уравнений поля для волны типа ТМ* с компонентами

$$E_x = E_x(y) e^{i\omega t - ihx}; \quad E_y = iE_y(y) e^{i\omega t - ihx}; \quad H_z = H_z(y) e^{i\omega t - ihx}. \quad (9)$$

Здесь выбран сдвиг фаз между компонентами электрического поля, равный $\pi/2$. Это означает, что мы заранее ограничились отысканием локализованного (по y) решения. Можно доказать, что при любой другой разности фаз составляющая вектора Пойнтинга в направлении y отлична от нуля.

Система уравнений поля имеет вид

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_x}{dy^2} + k_0^2 \epsilon(\vartheta) \mathcal{E}_x + k_0^2 \epsilon_a(\vartheta) \mathcal{E}_y - h \frac{d\mathcal{E}_y}{dy} = 0; \quad (10)$$

$$h \frac{d\mathcal{E}_x}{dy} + k_0^2 \epsilon_a(\vartheta) \mathcal{E}_x + k_0^2 (\epsilon(\vartheta) - \gamma^2) \mathcal{E}_v = 0. \quad (11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{E} = E/E_p; \quad E_p^2 = 8Tm\omega^2/e^2; \quad \gamma = h/k_0; \quad k_0 = \omega/c; \quad \epsilon(\vartheta) = 1 - qe^{-\vartheta};$$

$$\epsilon_a = pe^{-\vartheta}; \quad q = \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad p = \frac{\omega_H \omega_{p0}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)};$$

$$\vartheta = t(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + 2 \frac{\omega_H}{\omega} \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y); \quad t = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}.$$

Система (10) — (11) имеет первый интеграл**

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_x}{dy} \right)^2 + k_0^2 (1 - \gamma^2) \mathcal{E}_y^2 + k_0^2 \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} (e^{-\vartheta} - 1) + k_0^2 \mathcal{E}_x^2 = C, \quad (12)$$

* Для волны ТЕ-типа решение полностью совпадает с решением для случая изотропной плазмы [2].

** Аналогично можно найти первый интеграл системы уравнений, описывающих распространение двумерных волн под произвольным углом к направлению постоянного магнитного поля.

где C — постоянная интегрирования. В дальнейшем мы будем интересоваться лишь решением, локализованным по y ($\mathcal{E}_x; \mathcal{E}_y; d\mathcal{E}_x/dy \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$), которому соответствует $C = 0$.

Рассматривая совместно (11) и (12), получим некоторое соотношение между амплитудами электрического поля \mathcal{E}_x и \mathcal{E}_y :

$$\frac{\gamma^2 [(\gamma^2 - 1)\mathcal{E}_y^2 - \mathcal{E}_x^2 + \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} (1 - e^{-\vartheta})]}{[(\epsilon(\vartheta) - \gamma^2)\mathcal{E}_y - \epsilon_a(\vartheta)\mathcal{E}_x]^2} = 1, \quad (13)$$

представляющее собой уравнение фазовой плоскости $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$ системы уравнений (10), (11). В принципе решение этой исходной системы, как и в случае изотропной плазмы [5], теперь может быть сведено к отысканию траекторий на фазовой плоскости $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$, соответствующих локализованному полю, и интегрированию уравнения первого порядка (11) на этих траекториях. Эта задача достаточно сложна и в большинстве случаев может быть решена только численно. Исследование траекторий на фазовой плоскости $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$ можно провести при любых значениях параметров.

Характеристическое уравнение получим из соотношения (13), если подставим в него значения амплитуд поля в какой-нибудь точке пространства (например, $y = 0$). Тогда

$$\gamma^2 = \frac{[\epsilon(\vartheta)\mathcal{E}_y - \epsilon_a(\vartheta)\mathcal{E}_x]^2}{\omega_{p0}^2\omega^{-2}(1 - e^{-\vartheta}) + 2\epsilon(\vartheta)\mathcal{E}_y^2 - 2\epsilon_a(\vartheta)\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y - \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2}. \quad (14)$$

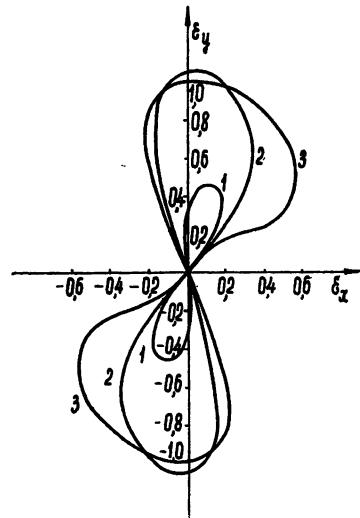
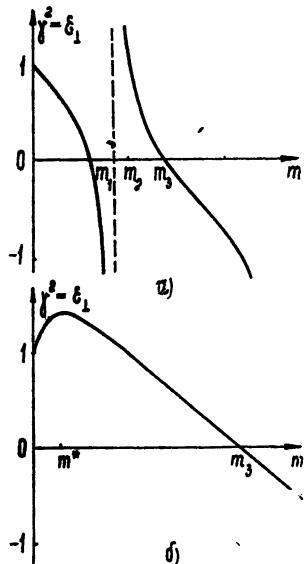
Можно показать, что при стремлении параметра нелинейности ϑ к нулю соотношение (14) переходит в обычное линейное дисперсионное уравнение для поперечного распространения однородных плоских волн:

$$\gamma^2 = \epsilon_{\perp} = \frac{(1-m)^2 - n}{1-m-n}. \quad (15)$$

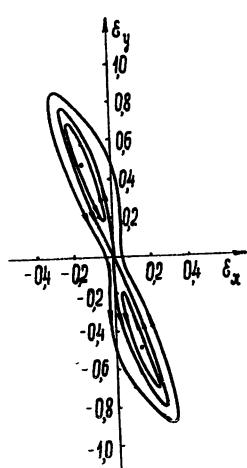
Здесь введены обозначения: $m = \omega_{p0}^2/\omega^2$; $n = \omega_H^2/\omega^2$; величина $\epsilon_{\perp} = \frac{\epsilon^2 - \epsilon_a^2}{\epsilon}$ — эффективная диэлектрическая проницаемость плазмы для необыкновенной волны.

Некоторые качественные соображения о возможности самофокусировки в различных областях параметров m, n могут быть высказаны на основе зависимости γ^2 от m в линейном случае. Эта зависимость приведена на рис. 1а и б соответственно для $n < 1$ и $n > 1$. Для существования локализованного решения необходимо, чтобы нелинейность приводила к уменьшению фазовой скорости волны, т. е. увеличению γ . С другой стороны, при $n < 1$ плазма выталкивается из области сильного поля, т. е. на оси величина m уменьшается. Следовательно, самофокусировка волны возможна в той области параметров, где $d\gamma^2/dm < 0$. В случае сильных магнитных полей ($n > 1$) возможно как уменьшение, так и увеличение концентрации плазмы на оси в зависимости от сдвига фаз ($\pm\pi/2$) между компонентами \mathcal{E}_x и \mathcal{E}_y . Второму случаю соответствует $d\gamma^2/dm > 0$, что выполняется лишь при $0 < m < m^* = 1 - n + \sqrt{n(n-1)}$. Заметим, что, если на бесконечности эффективная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{\perp} < 0$, самофокусировка волн произойдет лишь при амплитудах, больших, чем критическая, т. е. когда на оси $\epsilon_{\perp}(x=0) > 0$.

Приведенные качественные соображения хорошо подтверждаются поведением траекторий на фазовой плоскости $\varepsilon_x, \varepsilon_y$. Уравнение этих траекторий численно решалось на электронной вычислительной машине. На рис. 2, 3 изображены некоторые характерные кривые, соответствующие автолокализованному решению при разных значениях параметров*. Траектории на рис. 2 относятся к случаю $n < 1$, когда самофокусировка



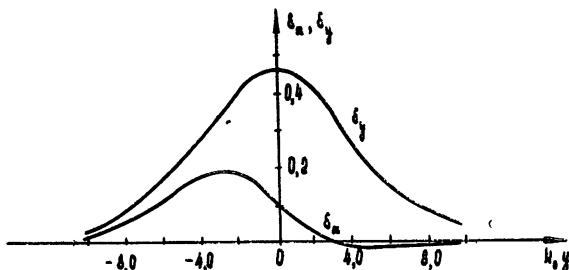
поля сопровождается образованием волноводного канала. Соответствующее распределение компонент поля $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ по поперечной коорди-



* При численном решении (13) не преследовалась цель исчерпывающего исследования области существования локализованных решений, а лишь ставилась задача проиллюстрировать возможность самофокусировки в разных областях параметров.

нате, полученное с помощью численного интегрирования системы уравнений (10), (11), приведено на рис. 4. Можно показать, что увеличение амплитуд поля на оси приводит к уменьшению поперечного размера локализованного поля. На рис. 3 приведено полное разбиение фазовой плоскости ξ_x, ξ_y для случая $n > 1$. Поперечное распределение поля и электронной концентрации в автолокализованном решении для этого

Рис. 4. Поперечное распределение поля $\xi_x(y), \xi_y(y)$ при $n=0,3; m=0,3; \gamma^2=0,6$.



случая приведено на рис. 5. Легко видеть, что при $n > 1$ происходит одновременная самофокусировка поля и плазмы (плазма втягивается в область сильного поля).

В некоторых предельных случаях (по величине магнитного поля) удается получить приближенные решения системы уравнений (11)–(13).

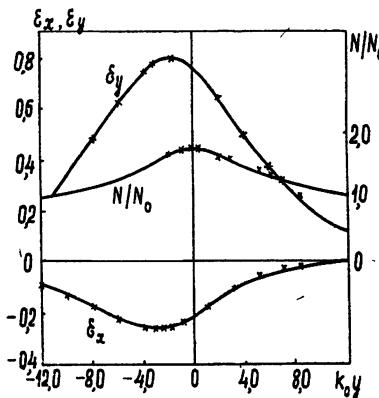


Рис. 5. Поперечное распределение поля $\xi_x(y), \xi_y(y)$ и концентрации $N(y)$ при $n=1,44; m=0,1; \gamma^2=1,3$.

Сюда в первую очередь следует отнести самофокусировку ТМ-волны в изотропной плазме, рассматривавшуюся в [5]. Соответствующие уравнения могут быть получены, если в (11)–(13) положить $\omega_H = 0$. Случай слабого магнитного поля ($n \ll 1, m < 1$) может быть исследован с помощью метода возмущений на основе результатов [5]. При этом получающиеся фазовые траектории хорошо совпадают по виду с численным решением (рис. 2). Ниже будет рассмотрена самофокусировка волн вблизи гирорезонанса ($n \approx 1$) и в сильном магнитном поле ($n \gg 1$).

3. САМОФОКУСИРОВКА В СИЛЬНОМ ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ($n \gg 1$)

В этом случае задача имеет малый параметр

$$1/n \ll 1 \quad (16)$$

и высокочастотный потенциал ϑ можно разложить в ряд:

$$\vartheta = -2 \frac{1}{n} \varepsilon_x \varepsilon_y + O(1/n^2). \quad (17)$$

Такая аппроксимация справедлива, если в полученном решении обе составляющие ε_x и ε_y либо не обращаются в нуль, либо обращаются в нуль одновременно. Кроме того, полученное решение должно удовлетворять неравенству

$$\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 \ll 2 \frac{\omega_H}{\omega} \varepsilon_x \varepsilon_y. \quad (18)$$

Решение будем искать в приближении слабой нелинейности

$$|\vartheta| \ll 1. \quad (19)$$

С учетом всех сделанных допущений в уравнении (11) удается произвести ряд упрощений и выделить явную зависимость ε_y от ε_x и $d\varepsilon_x/dy$:

$$\varepsilon_y = \frac{(\gamma/k_0) d\varepsilon_x/dy + p\varepsilon_x}{1 - \gamma^2 - q(1 + 2\varepsilon_x^2)}. \quad (20)$$

Подстановка (20) в первый интеграл (12) дает уравнение первого порядка для амплитуды ε_x :

$$\dot{\varepsilon}_x^2 = k_0^2 \frac{p^2 - (1-q)(1-\gamma^2 - q - 2q\varepsilon_x^2)}{1 - q - 2q\varepsilon_x^2} \varepsilon_x^2, \quad (21)$$

которое может быть проинтегрировано в явном виде. Из (19), в частности, можно получить характеристическое уравнение для постоянной распространения, если положить при $y=0$, $d\varepsilon_x/dy=0$, $\varepsilon_x=\varepsilon_{xm}$

$$\gamma^2 = -2q\varepsilon_{xm}^2. \quad (22)$$

Легко видеть, что нелинейность приводит к замедлению волны.

Решение уравнения (21) имеет вид

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xm} \operatorname{ch} k_0 y; \quad x = k_0 \sqrt{2|q|} \varepsilon_{xm}. \quad (23)$$

Соответственно, из (20) получим зависимость ε_y от y :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{xm} \frac{[p - \gamma \sqrt{2|q|} \varepsilon_{xm} \operatorname{th}(xy)]}{p^2 \operatorname{ch}(xy)}. \quad (24)$$

Обе амплитуды обращаются в нуль лишь при $y \rightarrow \pm \infty$, а их максимумы слегка сдвинуты относительно друг друга. Качественный вид распределения поля совпадает с распределением, приведенным на рис. 5. Кроме того, поскольку амплитуды имеют противоположные знаки ($p < 0$), эффективный потенциальный барьер всюду положителен:

$$\vartheta = -\frac{2}{n} \varepsilon_x \varepsilon_y. \quad (25)$$

Следовательно, в самосогласованном решении концентрация плазмы на оси меньше, чем на бесконечности, т. е. при самофокусировке поля в плазме образуется канал.

Наконец, остановимся на пределах применимости полученного решения. Нужно проверить, выполняется ли неравенство (18). В результате

подстановки (23), (24) в (18) оказывается, что эти решения справедливы, если

$$\omega_H \gg \omega_0 \gg \omega. \quad (26)$$

4. САМОФОКУСИРОВКА ВОЛН ВБЛИЗИ ГИРОРЕЗОНАНСА ($n \approx 1$)

Рассмотрим случай, когда

$$n = 1 + \Delta; \quad \Delta \ll 1. \quad (27)$$

В принципе, при гирорезонансе выражение (2) для усредненной силы, которым мы пользуемся, неверно. Однако всегда можно отойти достаточно далеко от гирорезонанса, чтобы не нарушались пределы применимости усредненного описания и в то же время выполнялось соотношение (27). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда расстройка $\Delta > 0$, так как ему соответствуют наиболее интересные физические результаты.

При решении воспользуемся несколько иной системой уравнений, нежели ранее: по-прежнему оставим уравнение (11), а вместо (10) запишем уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, которое фактически может быть получено из системы (10), (11):

$$-hqe^{-\vartheta} (\mathcal{E}_x + n\mathcal{E}_y) + h\mathcal{E}_x - \frac{d}{dy} [qe^{-\vartheta} (\mathcal{E}_x + n\mathcal{E}_y)] + \mathcal{E}_y = 0. \quad (28)$$

Введем новую переменную

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y. \quad (29)$$

Высокочастотный потенциал ϑ с учетом (27) тогда можно представить в виде

$$\vartheta = t\mathcal{E}^2. \quad (30)$$

После замены переменных (29) в системе уравнений (11), (28) и ряда довольно сложных преобразований удается получить одно уравнение второго порядка относительно \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} [1 - q(1 - 2t\mathcal{E}^2) e^{-t\mathcal{E}^2}] \frac{d^2\mathcal{E}}{dy^2} + 2tq\mathcal{E}(3 - 2t\mathcal{E}^2) \left(\frac{d\mathcal{E}}{dy} \right)^2 \times \\ \times e^{-t\mathcal{E}^2} + k_0^2 [1 - \gamma^2 - (2 - \gamma^2) q e^{-t\mathcal{E}^2}] \mathcal{E} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Процедура нахождения локализованного решения такого нелинейного уравнения второго порядка стандартна. Запишем первый интеграл (31) при условии, что поле и его производные на бесконечности стремятся к нулю:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dy} \right)^2 [qe^{-t\mathcal{E}^2} - 2t\mathcal{E}^2 q e^{-t\mathcal{E}^2} - 1]^2 + k_0^2 q^2 \mathcal{E}^2 e^{-2t\mathcal{E}^2} + \\ + \frac{k_0^2 q^2 (\gamma^2 - 1)}{2t} (e^{-2t\mathcal{E}^2} - 1) + 2k_0^2 q(\gamma^2 - 1) \mathcal{E}^2 e^{-t\mathcal{E}^2} + \\ + k_0^2 q/t (e^{-t\mathcal{E}^2} - 1) + k_0^2 (1 - \gamma^2) \mathcal{E}^2 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) получим характеристическое уравнение для постоянной распространения, если положим $\mathcal{E} = 0$ при $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max}$:

$$\gamma^2 = \frac{q^2/2(e^{-2t}\varepsilon_m^2 - 1) + 2qt\varepsilon_m^2 e^{-t\varepsilon_m^2} - t\varepsilon_m^2 - q^2t\varepsilon_m^2}{q^2/2(e^{-2t\varepsilon_m^2} - 1) + 2qt\varepsilon_m^2 e^{-t\varepsilon_m^2} - t\varepsilon_m^2}. \quad (33)$$

Вблизи гирорезонанса $\varepsilon_\perp = 2 - m$. Можно показать, что при $\Delta > 0$ всегда $\gamma^2 > \varepsilon_\perp$. Например, при $m \ll 1$ и $|t|\varepsilon_m^2 \gg 1$

$$\gamma^2 = 1 + 2|t|\varepsilon_m^2 \gg \varepsilon_\perp. \quad (34)$$

Наоборот, при слабой нелинейности $|t|\varepsilon_m^2 \ll 1$

$$\gamma^2 = 2 + |t|\varepsilon_m^2 > \varepsilon_\perp. \quad (35)$$

Таким образом, нелинейность приводит к замедлению волны. Как обычно, локализованное решение существует, если кривая, описываемая интегралом (32), на фазовой плоскости $d\varepsilon/dy$, ε представляет собой замкнутую сепаратрису, проходящую через особую точку $(0,0)$ типа «седло». Можно показать, что такая фазовая траектория существует при $\Delta > 0$ ($q < 0$; $p < 0$; $t < 0$) и не существует при $\Delta < 0$. Следовательно, самофокусировка вблизи гирорезонанса возможна лишь при $\omega_H \neq 0$. В этом случае, как уже говорилось выше, происходит увеличение концентрации плазмы в области сильного поля и образуется плазменный волновод.

Явление одновременной самофокусировки поля и вещества может наблюдаться также и в изотропной нелинейной среде. Например, если предположить, что под действием поля в среде происходит изотермическое изменение плотности среды ρ и считать, что изменение давления p пропорционально изменению ρ , то для усредненной по периоду поля зависимости $\varepsilon(E)$ такой среды можно записать соотношение [2]

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0 + \rho_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{T,\rho_0} (e^{-|E|^2/E_0^2} - 1), \quad (36)$$

где $E_0^2 = -4 / (\partial \varepsilon / \partial \rho)_{T,\rho_0} (\partial \rho / \partial p)_{T,\rho_0}$, а ρ_0 и ε_0 — равновесные параметры такой среды в отсутствие поля.

Легко показать, что в такой среде всегда выполняется необходимое условие самофокусировки волн $\partial \varepsilon / \partial |E|^2 > 0$, независимо от знака $(\partial \varepsilon / \partial \rho)_{T,\rho_0}$. Если $(\partial \varepsilon / \partial \rho)_{T,\rho_0} < 0$, при самофокусировке поля происходит вытеснение диэлектрика с оси (это, в частности, относится к изотропной плазме). Если же $(\partial \varepsilon / \partial \rho)_{T,\rho_0} > 0$, одновременно с автолокализацией поля происходит увеличение плотности вещества на оси. Простейшим примером такой среды является изотропный диэлектрик в поле, частота которого меньше собственной частоты электронов в атоме $\omega < \omega_0$ [1]. В магнитоактивной плазме уравнения несколько усложняются из-за анизотропии.

Зависимость $\varepsilon(y)$ может быть найдена в аналитическом виде лишь в случае слабой нелинейности $|t|\varepsilon_m^2 \ll 1$ и при дополнительном условии $q \gg 1$, когда уравнение (32) имеет вид

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dy} \right)^2 = k_0^2 (\gamma^2 - 2 - |t|\varepsilon^2) \varepsilon^2. \quad (37)$$

Решение (37) хорошо известно:

$$\varepsilon = \varepsilon_m [\operatorname{ch} \langle (\gamma^2 - 2)^{\frac{1}{2}} k_0 y \rangle]^{-1}, \quad (38)$$

где γ^2 находится из дисперсионного уравнения (35). Зависимость компонент поля E_x и E_y от координаты y может быть получена из (11) и (28) и имеет вид, аналогичный изображенному на рис. 5.

Автор благодарен М. А. Миллеру и В. И. Таланову за многочисленные обсуждения и полезные советы, а также Г. М. Жислину и М. Н. Оржеховской за проведение вычислений на БЭСМ-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
2. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 564 (1964).
3. R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
4. В. И. Таланов, Письма в редакцию ЖЭТФ, 2, 218 (1965).
5. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 675 (1966).
6. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1148 (1965).
7. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 629 (1966).
8. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, 242 (1958); М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 110 (1958).
9. Н. А. М. Boot, S. A. Self, R. B. R. Shersby-Harvie, J. El. and Control, 4, 434 (1958).
10. А. Г. Литвак, М. И. Петелин, Е. И. Якубович, ЖТФ, 35, 108 (1965).
11. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 45, 1243 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 декабря 1965 г

ON EM-WAVE SELF-FOCUSING IN MAGNETOACTIVE PLASMA

A. G. Litvak

The phenomena is studied of two-dimentional EM-wave self-focusing in a magnetoactive plasma in the case of a transverse propagation. The expression has been derived for the tensor of a nonlinear permittivity of magnetoactive plasma. A qualitative investigation of the field equation system on a phase plane has been carried out. The structure of an auto-localized field has been found by numerical methods for some values of plasma parameters. It is shown that the field self-focusing is accompanied by increase of plasma concentration on the axis (by plasma waveguide formation) near the electron gyro-resonance ($\omega_H \gtrsim \omega$). In some limit cases (for a magnetic field value) the approximate solutions of field equations have been obtained in an analytical form.

УДК 621.371.123 : 538.56

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВОЛН В ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер

Рассматривается метод решения линейных уравнений второго порядка (в частности, для электромагнитных полей E и H) с переменными коэффициентами $\epsilon(r)$, $\mu(r)$, основанный на «искусственной нелинейизации» этих уравнений путем введения зависимости коэффициентов от искомых функций: $\epsilon(E, H)$, $\mu(E, H)$. В результате оказывается возможным проинтегрировать уравнение в общем виде, а затем возвратиться к решению исходной линейной системы с фиксированными распределениями $\epsilon(E(r), H(r))$, $\mu(E(r), H(r))$. Метод является достаточно универсальным, но в данной работе он иллюстрируется только на примере задач о распространении двумерных электромагнитных волн вдоль неоднородных (в поперечном сечении) диэлектрических слоев. Поскольку решение нелинейного уравнения, как правило, содержит произвольные параметры, то, изменения их, можно реализовать достаточно широкий класс распределений параметров в линейной системе.

1. Волнам в линейных неоднородных средах посвящено значительное число работ (см., например, [1,2] и приведенную там библиографию). И все же точные решения волновых уравнений известны только для немногих удачных распределений. Поэтому любые новые возможности строгого подхода представляются интересными. Ниже излагается один из таких методов, опирающийся на известные решения соответствующих нелинейных уравнений. Метод иллюстрируется примерами распространения локализованных (двумерных) электромагнитных волн обеих поляризаций (TE и TM) в слоисто-неоднородных средах. Однако в принципе он может оказаться пригодным и для других волновых задач.

Суть этого метода состоит в следующем. Предположим, что диэлектрическая проницаемость среды ϵ^+ зависит только от амплитуды поля E (или H) и не зависит в явном виде от координат. В ряде случаев это обстоятельство существенно упрощает интегрирование волновых уравнений. В результате определяется амплитуда поля $E_0(r)$, а затем находится отвечающее ей распределение проницаемости $\epsilon(E_0(r))$. Отсюда любое решение нелинейной задачи можно рассматривать как решение линейной для соответствующего неоднородного распределения ϵ . Такой способ «замораживания» распределения $E_0(r)$, разумеется, приводит к заранее «непредвиденным» распределениям $\epsilon(r)$. Однако получаемые значения функций $\epsilon(r)$, как правило, содержат один или несколько произвольных параметров, с помощью которых можно перебрать достаточно большое количество разных распределений.

Итак, пусть речь идет о двумерных ($\partial/\partial y = 0$) волнах, распространяющихся в z -направлении ($e^{i\omega t - i k z}$) в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , зависящей в конечном счете от координаты x . Тогда, как хорошо известно, имеют место следующие уравнения:

* Магнитная проницаемость полагается равной μ_0 — проницаемости вакуума (используется практическая рационализированная система единиц).

для ТЕ-волн —

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 \epsilon - h^2) E_y = 0, \quad (1)$$

$$H_x = -\frac{h}{\omega \mu_0} E_y, \quad H_z = -\frac{1}{i \omega \mu_0} \frac{d E_y}{dx};$$

для ТМ-волн —

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \frac{d \epsilon / dx}{\epsilon} \frac{d H_y}{dx} + (k_0^2 \epsilon - h^2) H_y = 0, \quad (2)$$

$$E_x = \frac{h}{\omega \epsilon_0 \epsilon} H_y, \quad E_z = \frac{1}{i \omega \epsilon_0 \epsilon} \frac{d H_y}{dx}.$$

Здесь $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; $E_y(x)$, $H_y(x)$ будем считать безразмерными функциями (нормированными на единичную амплитуду); индекс y далее опускается.

Уравнения (1), (2) дополняются краевыми условиями на плоскостях $x = \text{const}$; в частности, в случае безграничных сред (с которыми для определенности мы далее будем иметь дело) для обеспечения локализации поля необходимо потребовать, чтобы при $x \rightarrow \pm \infty$

$$E, \frac{dE}{dx} \rightarrow 0; \quad H, \frac{dH}{dx} \rightarrow 0. \quad (3)$$

При действительном $\epsilon(x)$ $E(x)$ и $H(x)$ (в пределах принятых предположений) за редкими исключениями (волны с комплексными постоянными распространения) — также действительные функции, что мы и будем полагать.

Остановимся теперь отдельно на случаях ТЕ- и ТМ-волн.

2. Предположим, что в (1) ϵ зависит от $E^2(x)$, т. е. $\epsilon = \epsilon(E^2(x))$. С физической точки зрения это может противоречить условиям, при которых уравнение (1) вообще справедливо ($e^{i\omega t}$ -процессы)*. Впрочем, для наших целей вопрос о физической пригодности исходных уравнений не имеет значения: важна лишь корректность описания «замороженной» линейной системы на заключительном этапе рассмотрения.

Умножая уравнение (1) на dE/dx и интегрируя по x от бесконечности до x с учетом (3), получим

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)^2 = \int_0^{E^2} k_0^2 [\gamma^2 - \epsilon(E^2)] dE^2, \quad (4)$$

где $\gamma = h/k_0$. Эта процедура аналогична получению первого интеграла движения для консервативных механических систем, что, между прочим, может быть использовано для создания соответствующих моделирующих «механических» интеграторов.

Повторное интегрирование дает

$$\pm k_0 x = \int_{E_m}^E dE \left(\int_0^{E^2} [\gamma^2 - \epsilon(E^2)] dE^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

* Можно показать, однако, что в рамках метода Ван-дер-Поля уравнение (1) справедливо для медленно меняющихся амплитуд первых гармоник [3].

Здесь E_m^2 — экстремальное значение амплитуды поля (в большинстве случаев это максимум); предполагаем, что оно достигается в плоскости симметрии $x = 0$. Условие равенства нулю производной при $x = 0$ определяет характеристическое уравнение соответствующих волн:

$$\int_0^{E_m^2} [\gamma^2 - \epsilon(E^2)] dE^2 = 0. \quad (6)$$

До сих пор мы фактически следовали работе [4], где изучались вопросы самофокусировки электромагнитных волн в нелинейных средах. Теперь путем «замораживания» любого распределения $E^2(x)$, удовлетворяющего (5), можно получить различные системы с локализованными полями.

Рассмотрим для определенности конкретную зависимость $\epsilon(E^2)$:

$$\epsilon(E^2) = a_0 + a_1 E^2 + a_2 E^4. \quad (7)$$

Тогда из (5) после несложных преобразований получим

$$E^2 = \frac{4(\gamma^2 - a_0) A \exp(\mp 2\sqrt{\gamma^2 - a_0} k_0 x)}{\left[A \exp(\mp 2\sqrt{\gamma^2 - a_0} k_0 x) + \frac{1}{2} a_1 \right]^2 + \frac{4}{3} a_2 (\gamma^2 - a_0)}, \quad (8)$$

где $A = \frac{1}{2} a_1 + \frac{2}{3} a_2 E_m^2$. Соответственно характеристическое уравнение записывается в виде

$$\gamma^2 - a_0 = \frac{1}{2} a_1 E_m^2 + \frac{1}{3} a_2 E_m^4. \quad (9)$$

Как видно непосредственно из (8), условия на бесконечности (3) удовлетворяются, если $\gamma^2 - a_0 > 0$ (медленные волны). Критические значения параметров, при которых $\gamma^2 - a_0 = 0$, определяются из соотношения

$$\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} a_2 E_m^2 = 0.$$

Уравнение (7) содержит три параметра; однако в задачах о локализации поля средой, расположенной в вакууме, один из них (a_0) должен быть сразу же приравнен единице, так как при $|x| \rightarrow \infty \epsilon \rightarrow 1$. Два других параметра (a_1 и a_2) остаются до известной степени произвольными.

Ниже кратко рассмотрены некоторые частные случаи.

Случай $a_2 = 0$. Характеристическое уравнение (9) принимает вид

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{2} a_1 E_m^2. \quad (10)$$

Отсюда локализация поля достигается при $a_1 > 0$. Выражение для поля записывается в виде

$$E = E_m \operatorname{sch} \left(\sqrt{\frac{a_1}{2}} E_m k_0 x \right), \quad (11)$$

а для диэлектрической проницаемости имеем

$$\epsilon = 1 + a_1 E_m^2 \operatorname{sch}^2 \left(\sqrt{\frac{a_1}{2}} E_m k_0 x \right). \quad (12)$$

Случай $a_1 = 0$. В этом случае соответствующие формулы принимают вид: характеристическое уравнение (условие локализации поля $a_2 > 0$).

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{3} a_2 E_m^4; \quad (13)$$

уравнение для поля

$$E = E_m \operatorname{sch}^{1/2} \left(2 \sqrt{\frac{a_2}{3}} E_m^2 k_0 x \right); \quad (14)$$

диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon = 1 + a_2 E_m^4 \operatorname{sch}^2 \left(2 \sqrt{\frac{a_2}{3}} E_m^2 k_0 x \right). \quad (15)$$

Формулы (12), (15) описывают так называемый слой Эпштейна. «Прямое» решение соответствующей задачи дано в работе [5]; там же рассмотрены, помимо основного, еще и высшие типы волн, для получения

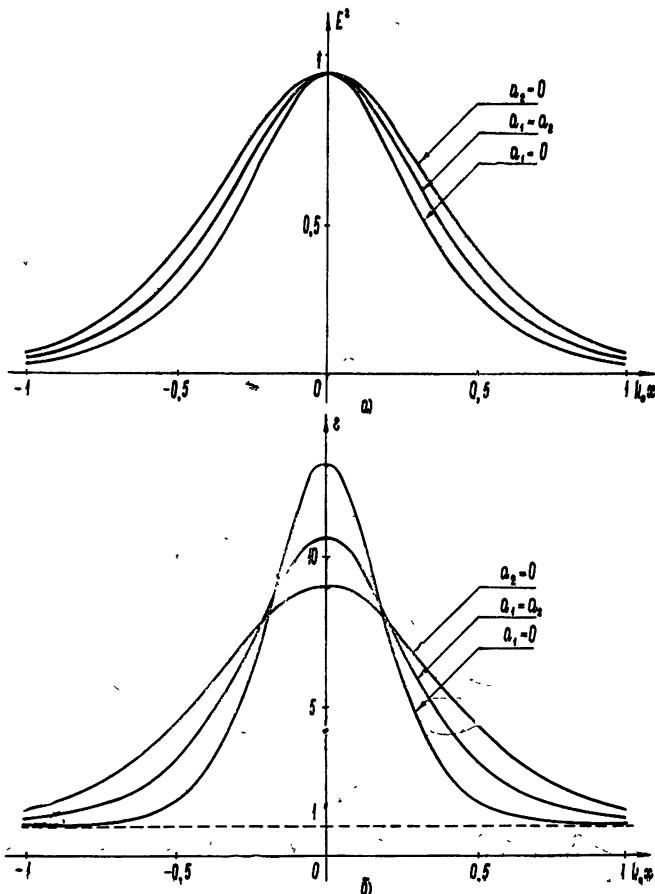


Рис. 1.

которых требуется существенная модификация предложенного выше способа*.

Случай $a_1 > 0, a_2 > 0$. Локализация поля имеет место при всех значениях параметров a_1, a_2 . Некоторые характерные распределения $E(x)$ и $\varepsilon(x)$, отвечающие этим трем случаям, приведены на рис. 1 для $E_m = 1$, $\gamma^2 = 5$.

Случай $a_1 < 0, a_2 > 0$. Локализация возможна при

$$-\frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} E_m^2 > 1. \quad (16)$$

Распределение проницаемости здесь уже не монотонное и имеет минимум, значение ε в котором определяется равенством

$$\varepsilon_{\min} = 1 - \frac{1}{4} \frac{a_1^2}{a_2}. \quad (17)$$

Отсюда, при $a_1^2 < 4a_2$ $\varepsilon_{\min} > 0$, при $a_1^2 = 4a_2$ $\varepsilon_{\min} = 0$, а при $a_1^2 > 4a_2$ $\varepsilon_{\min} < 0$. На рис. 2 представлены кривые, отвечающие каждому из этих соотношений; по-прежнему $E_m = 1$, $\gamma^2 = 5$.

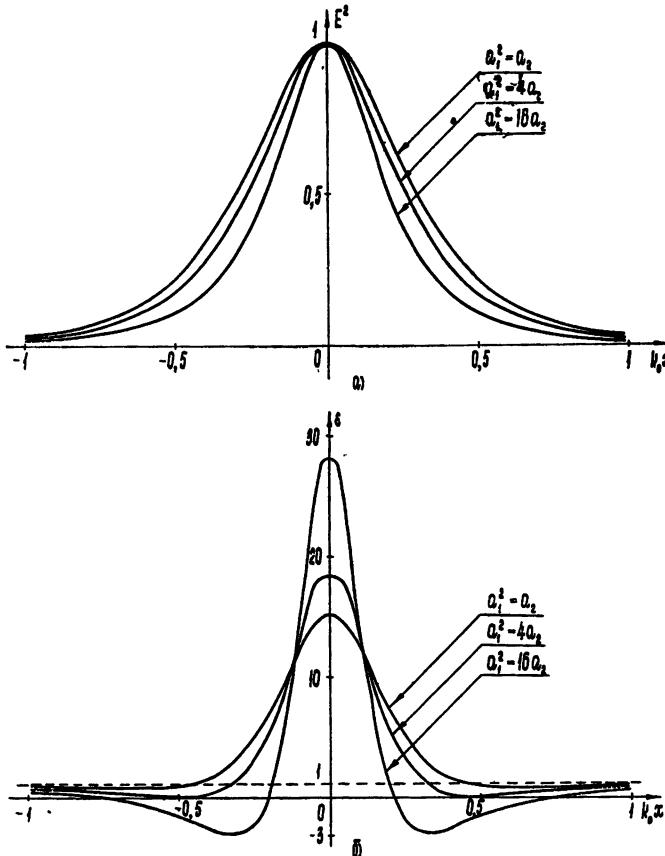


Рис. 2.

Случай $a_1 > 0, a_2 < 0$. Формально условия локализации обратны неравенству (16):

* Заметим попутно, что в работе [5] имеется неточность: параметр H (в обозначениях [5]) содержит лишний множитель $1/4$; правильные выражения приведены в [6].

$$1 > -\frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} E_m^2. \quad (18)$$

Однако только при выполнении условия

$$\frac{1}{2} > -\frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} E_m^2 \quad (19)$$

как поле, так и диэлектрическая проницаемость представляют из себя дифференцируемые функции координаты, тогда как при

$$1 > -\frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} E_m^2 > \frac{1}{2} \quad (20)$$

и поле, и диэлектрическая проницаемость обращаются в бесконечность. В результате такие «замороженные» распределения оказываются физически на реализуемыми*. На стыке этих двух областей при $-2/3 \times \frac{a_2}{a_1} E_m^2 = \frac{1}{2}$

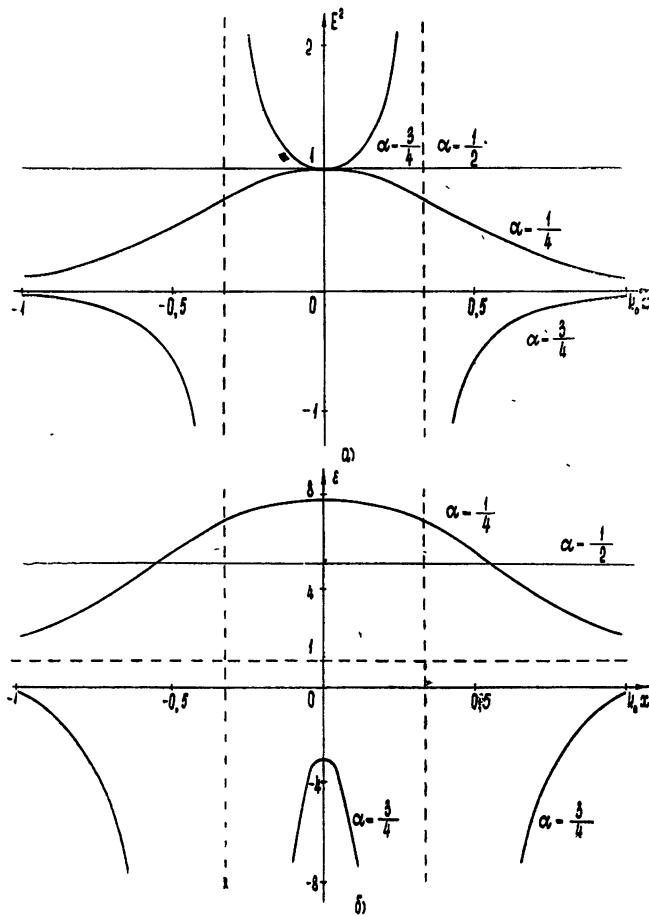


Рис. 3.

* Впрочем, в магнитоактивных средах полюса $\epsilon_{\text{эфф}}(x)$ могут в принципе быть «реализованы». Однако этот вопрос требует отдельного и более тщательного рассмотрения.

$$E^2 = E_m^2; \quad \epsilon = 1 + a_1 E_m^2 + a_2 E_m^4,$$

что соответствует однородной плоской волне в однородной среде. Кривые, отвечающие трем значениям параметра $\alpha = -\frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} E_m^2$ (а именно $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$) и $E_m = 1, \gamma^2 = 5$, даны на рис. 3. При переходе через бесконечность E^2 меняет знак; следовательно, E приобретает сдвиг по фазе, равный $\pi/2$.

3. Аналогичная процедура может быть проведена и для ТМ-полей. Приведем без повторных пояснений окончательные результаты. Распределение локализованных полей и их дисперсионные характеристики описываются соответственно следующими уравнениями:

$$\pm k_0 x = \int_{H_m}^H dH \left[\epsilon(H^2) \sqrt{\int_0^{H^2} \epsilon^{-}(H^2) [\gamma^2 - \epsilon(H^2)] dH^2} \right]^{-1}, \quad (21)$$

$$\int_0^{H_m^2} \epsilon^{-2}(H^2) [\gamma^2 - \epsilon(H^2)] dH^2 = 0. \quad (22)$$

Здесь мы предполагали, что диэлектрическая проницаемость зависит от $H^2(x)$, т. е. $\epsilon = \epsilon(H^2(x))$. Это предположение является физически неправдоподобным: оно имеет формальный смысл.

Рассмотрим более подробно один достаточно простой пример. Положим

$$\epsilon(H^2) = (a_0 + a_1 H^2)^{-1}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21) и (22), после ряда преобразований получим

$$\pm k_0 x = -\frac{1}{2} \frac{a_0}{\sqrt{A_0}} \ln \frac{2 \sqrt{A_0} \sqrt{A_0 + A_1 H^2 + A_2 H^4} + 2 A_0 + A_1 H^2}{(2 A_0 + A_1 H_m^2) H^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{a_1}{\sqrt{A_2}} \ln \frac{2 \sqrt{A_2} \sqrt{A_0 + A_1 H^2 + A_2 H^4} + A_1 + 2 A_2 H^2}{A_1 + 2 A_2 H_m^2};$$

$$\gamma^2 = \frac{1 + \frac{1}{2} a_1 H_m^2}{1 + a_1 H_m^2 + \frac{1}{3} a_1^2 H_m^4}, \quad (25)$$

где $A_0 = a_0(a_0\gamma^2 - 1)$, $A_1 = \frac{1}{2} a_1(2a_0\gamma^2 - 1)$, $A_2 = \frac{1}{3} a_1^2 \gamma^2$. Зависимость

поля от координаты в явном виде, как ясно непосредствено из (24), получить не удается. Будем всюду далее (так же, как в случае ТЕ-волн) считать $a_0 = 1$, откуда при $x \rightarrow \pm \infty \epsilon \rightarrow 1$.

Из (25) без труда определяется область значений параметров ($a_1 H_m^2$), в которой допустимо существование медленных волн ($\gamma^2 > 1$):

$$-\frac{3}{2} < a_1 H_m^2 < 0, \quad (26)$$

причем максимальное значение γ ($\gamma_{\max}^2 = 3/2$) достигается при $a_1 H_m^2 = -1$.

Однако, как легко проверить, действительное поле ($H^2(x)$ — действительная функция), удовлетворяющее условиям на бесконечности (3), может существовать лишь в ограниченной части интервала (26), а именно, при

$$-1 < a_1 H_m^2 < 0. \quad (27)$$

Соответствующие графики зависимости $H^2(x)$ и $\varepsilon(x)$ для $\gamma^2 = \frac{9}{7}$, $H_m^2 = 1$ (при этом $a_1 = -1/2$) даны на рис. 4. Там же приведены

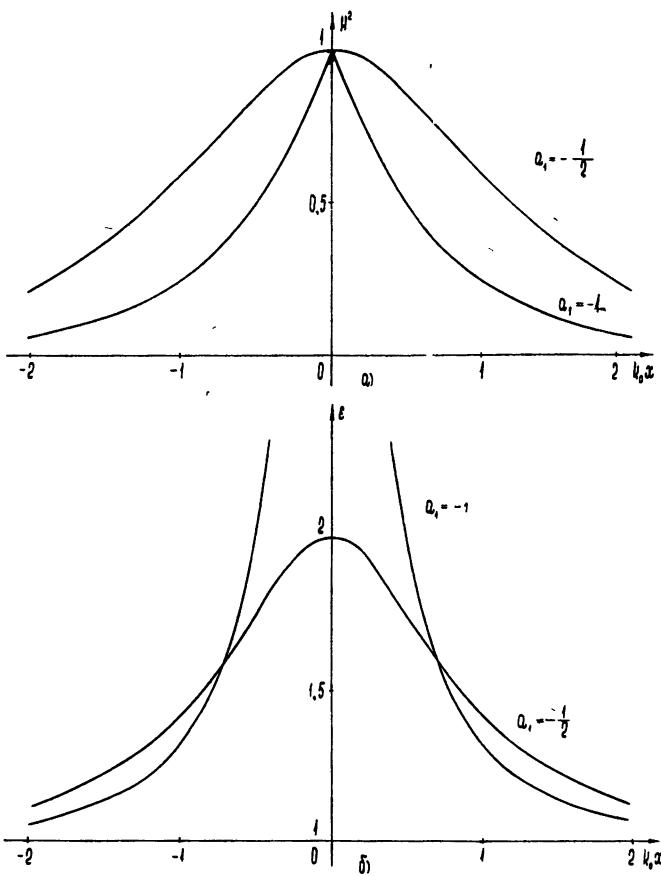


Рис. 4.

кривые, отвечающие предельному значению $a_1 = -1$ ($H_m^2 = 1$). В последнем случае, воспользовавшись непосредственно исходными уравнениями, можем записать

$$H = e\left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}} k_0 x\right), \quad \varepsilon = [1 - \exp(\mp \sqrt{2} k_0 x)]^{-1}, \quad (28)$$

причем знак минус отвечает значениям $x > 0$, а знак плюс — значениям $x < 0$. Области $x > 0$ и $x < 0$ электрически, по существу, развязаны, так как при $x = 0$, как нетрудно получить, $E_z = 0$.

4. В заключение следует еще раз подчеркнуть, что приведенные выше для иллюстрации примеры отнюдь не исчерпывают всех возможностей общего метода «искусственной нелинейизации» волновых задач (по крайней мере, скалярных). Фактически в любом случае, когда удается проинтегрировать нелинейное волновое уравнение, можно путем «замораживания» распределения амплитуд проанализировать решение для соответствующей линейной системы. Правда, иногда результат оказывается бесполезным из-за физически нереализуемых или трудно реализуемых материальных связей (неограниченное возрастание проницаемостей, неоднородное отрицательное поглощение и т. п.), а также из-за усложненных и редко встречающихся граничных условий. Однако почти всегда при переходе к «замороженной» линейной системе остаются произвольными один или несколько параметров, которыми можно распорядиться для устранения этих несуразностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бrehovских, Волны в слоистых средах, изд АН СССР, М., 1957.
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
3. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 929 (1962).
4. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 564 (1964).
5. J. E. Chin, IRE Internat. Convent. Rec., 10, 99 (1962).
6. I. G. Kondrat'ev, Proc. IEEE, 53, 1769 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 декабря 1965 г.

ON APPLICATION OF SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR EQUATIONS FOR INVESTIGATION OF WAVES IN LINEAR INHOMOGENEOUS MEDIA

I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller

The method of solving linear second-order equations (in particular, for electromagnetic fields E and H) with variable coefficients $\epsilon(r)$, $\mu(r)$ is considered, based on the „artificial nonlinearization“ of these equations by introducing the dependence of coefficients upon unknown functions $\epsilon(E, H)$, $\mu(E, H)$. As a result, it turns out possible to integrate the equation in a general form and then to return to the solution of the initial linear system with fixed distributions $\epsilon(E(r), H(r))$, $\mu(E(r), H(r))$. The method is sufficiently universal but in the given paper it is illustrated only by the example of problems on two-dimensional electromagnetic wave propagation along inhomogeneous (in a cross-section) dielectric layers. Since nonlinear equation solution contains, as a rule, arbitrary parameters it is possible to realize a wide class of parameter distribution in a linear system changing these parameters.

УДК 621.378.325.001

О ШИРИНЕ УГЛОВОГО И ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ ОКГ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОГЛОТИТЕЛЕМ

M. M. Сущик, Г. И. Фрейдман

С учетом спонтанного излучения найдено выражение для отношения числа фотонов в разных типах колебаний ОКГ с нелинейным фильтром в качестве затвора.

В работе [1] показано, что в ОКГ с нелинейным поглотителем в качестве затвора число одновременно возбуждающихся типов колебаний может быть значительно меньше, чем в ОКГ с активными затворами. Однако в этой работе предполагается, что поле начинает нарастать от некоторого значения, выбранного довольно произвольно, и не учитывается, что спонтанное излучение существенно влияет на процесс нарастания поля в резонаторе в течение некоторого конечного промежутка времени. Это приводит к ошибке при определении времени нарастания поля в ОКГ и, следовательно, ширины частотного и углового спектра его излучения, а также к некоторой неточности при определении зависимости этих величин от таких, например, параметров, как энергия накачки, добротность резонатора. Как следует из результатов настоящей работы и работы [2], в которой определены спектр и ширина диаграммы направленности излучения ОКГ с активным затвором при мгновенном переключении добротности, время нарастания поля излучения, полученное в работе [1], может отличаться от истинного в 2—4 раза.

Ограничимся случаем, когда молекулы активного вещества и молекулы нелинейного фильтра можно считать двухуровневыми, а подсветку однородной. Тогда аналогично тому, как это сделано в работе [2], можно показать, что пока разность населенностей не зависит от координат, изменение среднего квадрата амплитуд для мод, поле которых не выходит за пределы образца активного вещества в резонаторе ОКГ (только такие моды и возбуждаются), определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{m}_v - G \left[\frac{n}{1 + \delta_v^2} - \gamma_v n_1 - (1 + \Delta_v) \right] m_v &= G \epsilon_v \left[\frac{n + \bar{n}}{1 + \delta_v^2} - \gamma_v (n_1 - \bar{n}_1) \right]; \\ \dot{n} - [n_0(t) - n] &= -n \sum \frac{m_v}{1 + \delta_v^2}; \\ \dot{n}_1 - \gamma_1 (\bar{n}_1 - n_1) &= -n_1 \sum \gamma_v m_v. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $n = B_0 T_{p0} V N$, $n_1 = B_0 T_{p0} V N_1$ и $m_v = 2B_0 T_1 M_v$ — нормированные разность населенностей молекул активного вещества в единице объема, разность населенностей молекул нелинейного фильтра в единице объема с обратным знаком и число фотонов v -го типа колебаний резонатора соответственно; дифференцирование производится по безразмерному времени $\tau = t T_1^{-1}$; T_1 — эффективное время жизни возбужденного состояния молекул вещества; $G = T_1 T_{p0}^{-1} \gg 1$ — отношение

этого времени ко времени затухания поля наиболее добротного типа колебаний пустого резонатора ОКГ с собственной частотой, самой близкой к Ω_0 — частоте перехода активных молекул (типа колебаний с индексом нуль); $\Delta_v = (T_{p0} T_{p0}^{-1} - 1)$; $\delta_v = (\Omega_0 - \omega_v) T_2$, где время T_2 — величина обратная $\Delta\omega_v$ — ширине линии люминесценции активного вещества; соответствующая величина T_{21} для молекул нелинейного фильтра принята много меньше T_2 ; ϵ_v — малая (порядка 10^{-12}) величина, характеризующая спонтанное излучение в данную моду резонатора (в дальнейшем будем рассматривать случай, когда амплитуды собственных функций $e_v(r)$ различных типов колебаний внутри активного вещества одинаковы, а $\epsilon_v = \epsilon = 3c T_2 \lambda_0^2 / 16\pi V_{p0}$).

$$\text{Постоянная } \gamma_v = \frac{d_1^2}{d^2} \frac{T_{21}}{T_2} \frac{\int_V dV |d_{01} e_v(r)|^2}{\int_V dV |d_0 e_v(r)|^2} \text{ характеризует отношение}$$

квадратов дипольных моментов молекул нелинейного фильтра d_1 и молекул активного вещества d , объемов V_1 и V , занимаемых ими, и квадратов напряженности полей v -го типа колебаний резонатора в месте их расположения. Постоянная γ_1 равна отношению эффективных времен жизни молекул активного вещества и молекул нелинейного фильтра. Остальные обозначения такие же, как и в работе [2]. Постоянные γ_v будем считать в дальнейшем одинаковыми и равными $\gamma \gg 1$.

Через некоторое время после включения подсветки, когда $n_0(t)$ скачком меняется от \bar{n} до $n_0 > \gamma \bar{n}_1 + 1$, выполняется условие самовозбуждения моды резонатора с индексом нуль. Возьмем этот момент за начало отсчета времени. В начальный период нарастания поля, когда величины m_v достаточно малы, можно не учитывать влияния поля на изменение разностей населенностей \bar{n}_1 и \bar{n}_1 в течение интервала времени

$$|\tau| < [6G(n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1)]^{-1/3} \quad (2)$$

аппроксимировать зависимость $n(\tau)$ линейной функцией $n = \gamma \bar{n}_1 + 1 + (n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1)\tau$. Подставляя эту функцию в решение уравнения, описывающего изменение числа фотонов m_v , легко показать, что при существенном увеличении m_v по сравнению со значениями при $\tau=0$ их зависимость от времени можно записать в виде

$$m_v = m_0(\tau) \exp \left[-\frac{G}{2} (n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1) (2\tau \Delta\tau_v - \Delta\tau_v^2) \right]; \quad (3)$$

$$m_0(\tau) = \epsilon \sqrt{2\pi} (\bar{n} + \gamma \bar{n}_1) [n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1]^{-1/2} G^{1/2} \exp \left[\frac{G}{2} (n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1) \tau^2 \right].$$

Здесь время запаздывания момента выполнения условий самовозбуждения v -ой моды резонатора по сравнению с моментом $\tau=0$ определяется соотношением

$$\Delta\tau_v = \frac{(\gamma \bar{n}_1 + 1) \delta_v^2 + \Delta_v}{n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1}. \quad (4)$$

Соотношения (3) справедливы до момента времени τ_3 , когда изменение разности населенностей молекул нелинейного фильтра под действием нарастающего поля не станет настолько большим, что будет скрываться на скорости изменения поля, т. е. примерно до момента, когда $\gamma(\bar{n}_1 - n_1(\tau)) = \tau_3(n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1)$. Учитывая, что при $\tau \ll \tau_3$ $(\bar{n}_1 - n_1(\tau)) =$

$\bar{n}_1 \int_0^{\tau_s} m_v d\tau$, где $m_v(\tau)$ определяется выражениями (3), уравнение, определяющее значение τ_s , можно записать в виде

$$\gamma^2 \bar{n}_1 \int_0^{\tau_s} d\tau K(\tau) m_0(\tau) = \tau_s (n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1), \quad (5)$$

где величину $K(\tau) = m_0^{-1} \sum m_v$ естественно назвать эффективным числом возбуждающихся к моменту τ типов колебаний.

Поскольку $m_0(\tau)$ очень быстро растет со временем, а $K(\tau)$ меняется сравнительно медленно [2], основной вклад в интеграл, стоящий в левой части (5), будет давать область значений τ , мало отличающихся от τ_s . Учитывая это, легко показать, что при $[G(n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1) \tau_s^2]^{-1} \ll 1$ уравнение (5) с точностью до слагаемых, в $[G(n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1) \tau_s^2]$ раз меньших единицы, можно записать в виде

$$\exp \left[\frac{G}{2} (n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1) \tau_s^2 \right] = A \frac{G(n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1) \tau_s^2}{2K(\tau_s)}, \quad (5a)$$

где $A = G^{-1/2} (n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1)^{3/2} / \epsilon^2 \gamma^2 \bar{n}_1 (\bar{n} + \gamma \bar{n}_1)$ — большое (порядка $10^7 \div 10^9$) число. Как ясно из дальнейшего, в ОКГ с нелинейным фильтром число возбуждающихся мод не очень велико. Поэтому, решая уравнение (5a) методом последовательных приближений, получим

$$\tau_s = \left\{ \frac{2G^{-1/2}}{n_0 - \gamma \bar{n}_1 - 1} \left[\ln A + \ln \frac{\ln A}{K(\tau_s^0)} \right] \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где τ_s^0 равно правой части (6) без второго слагаемого в квадратной скобке.

При $\tau > \tau_s$ скорость изменения поля в ОКГ увеличивается, а разность населеностей нелинейного поглотителя быстро убывает, после чего начинает меняться и разность населеностей активного вещества — возникает гигантский импульс излучения. Его длительность порядка G^{-1} [3], т. е. много меньше τ_s . Поэтому, как легко показать, если предположить, что разность населеностей остается однородной, отношение между числами фотонов возбудившихся типов колебаний в процессе излучения гигантского импульса остается практически таким же, каким было к моменту τ_s , т. е. определяется соотношением

$$\frac{m_v}{m_0} = \exp \{-G \tau_s [(\gamma \bar{n}_1 + 1) \delta_v^2 + \Delta_v]\}. \quad (7)$$

Проведем оценки для резонатора с плоскими* квадратными зеркалами со стороной a , находящимися на расстоянии L друг от друга (средний коэффициент отражения зеркал R). В этом случае величины δ_{lmn} и Δ_{lmn} (l — продольное собственное число; m и n — поперечные собственные числа) приближенно равны [2].

$$\delta_{lmn} \simeq \left(T_2 \frac{\pi c}{L} \right) \Delta l; \quad \Delta_{lmn} \simeq \pi^2 \frac{k_0 L}{|\ln R|} M^{-1} \frac{m^2 + n^2}{2a^2 k_0^2}, \quad (8)$$

* В резонаторах со сферическими зеркалами частотный спектр будет такой же, как в рассмотренном нами случае, а угловой, благодаря равенству $\Delta_v = 0$, будет определяться номером колебания, каустика которого совпадает с границей активного вещества.

где $\Delta l = l_0 - l$; $M = 2\sqrt{a^2 k_0 / \Delta}$. Для генератора на рубине $T_2 \approx 10^{-12}$ сек, $T_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ сек. Если при этом $L = 50$ см, $R = 0,5$ см, $a = 0,5$ см, $\gamma = 10$, а $(n_0 - \gamma n_1 - 1) = 0,2$, то, как легко получить из формул (6) — (8), отношение числа фотонов в ближайшей неаксиальной моде к числу фотонов в наиболее интенсивно возбуждающемся типе колебаний резонатора меньше, чем e^{-1} . Однако при этом будет возбуждаться около десяти продольных типов колебаний.

Получение одномодового режима может быть достигнуто уменьшением превышения порога самовозбуждения, т. е. величины $n_0 - \gamma n_1 - 1$. Дополнительную селекцию можно осуществить введением в резонатор частотного фильтра. Пусть добротность продольных мод меняется при этом по закону $Q_l = Q_0 \left[1 + \left(T_\Phi \frac{\pi c}{l} \Delta l \right) \right]^{-1}$. Тогда $m_1/m_0 < e^{-1}$ при $T_\Phi > 10^{-11}$ сек и остальных параметрах, таких же, как в рассмотренном выше примере. Такая избирательность легко достигается применением резонансных отражателей [4].

Таким образом, в ОКГ с нелинейным поглотителем и зеркалами, близкими к плоским, сравнительно легко получить условия, когда возбуждается один тип колебаний резонатора. При этом нарушается предположение о том, что во время гигантского импульса разности населенностей активного вещества и нелинейного фильтра не зависят от координат. Поэтому результаты настоящей работы, относящиеся к угловому спектру, справедливы только при $t \ll t_g$ и определяют начальные условия для дальнейшего исследования гигантского импульса излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Sooy, Appl. Phys. Lett., 7, 37 (1965).
2. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 513 (1966).
3. В. И. Беспалов, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 909 (1965).
4. M. Heger, Appl. Phys. Lett., 7, 39 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 февраля 1966 г.

ON WIDTH OF ANGULAR AND FREQUENCY RADIATION SPECTRUM OF LASER WITH A NONLINEAR ABSORBER

M. M. Soushchik, G. I. Freidman

The ratio of numbers of photons corresponding to different modes of a laser with nonlinear filter as a lock is obtained. The spontaneous radiation is taken into account.

УДК 621.378.33

ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА НА ПУЧКЕ АТОМОВ ВОДОРОДА

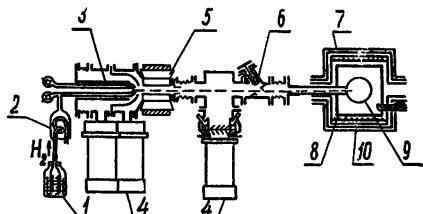
A. И. Никитин, Г. М. Страховский

Проведено исследование амплитудных и частотных характеристик квантового генератора на пучке атомов водорода.

В работе исследовались амплитудные и частотные характеристики квантового генератора на пучке атомов водорода [1–5]. Измерения проводились на установках, описанных в [6]. Схема установки изображена на рис. 1. Источником пучка служит разрядная трубка Вуда ($U = 3$ кв, $i = 100$ ма), пучок формируется отверстием $\varnothing 0,7$ мм. Фокусирующий шестиполюсный электромагнит имеет длину $l_2 = 15$ см, зазор между противоположными полюсами $2r_0$ равен 6 мм. Расстояние l_1 между отверстием

Рис. 1. Схема квантового генератора на пучке атомов водорода:

1—электролизер, 2—натекатель, 3—источник, 4—насосы, 5—фокусирующий электромагнит, 6—кран, 7—магнитные экраны, 8—резонатор, 9—колба, 10—соленоид.



ем источника и входом магнита равно 7 см, расстояние L от выхода магнита до отверстия накопительной колбы равно 86 см. Радиус накопительной колбы $R_k = 8$ см, диаметр входного отверстия $2d = 2$ мм, колба покрыта фторопластом. Водород получается электролизом раствора KOH и очищается никелевым натекателем. На резонатор намотан соленоид длиной 300 мм и диаметром 310 мм. Внутренние магнитные экраны изготовлены из листового супермаллоя толщиной 1 мм (размеры — диаметр 322 мм, длина 312 мм и диаметр 385 мм, длина 395 мм). Наружный экран — из армко толщиной 3 мм, диаметром 450 мм, длиной 460 мм. Откачка водорода производится тремя масляными насосами; между первой и второй секциями расположена диафрагма диаметром 3 мм, между второй и третьей — канал диаметром 5 мм и длиной 125 мм. Прием сигнала осуществляется супергетеродинным приемником с двойным преобразованием частоты с шириной полосы 2,5 кгц и чувствительностью лучше 10^{-14} вт.

На рис. 2 приведена зависимость мощности сигнала генерации от интенсивности атомного пучка I . Интенсивность I изменялась перемещением заслонки, расположенной между магнитом и входом колбы. По оси абсцисс отложена величина перемещения заслонки (в условных единицах). Кривая близка к теоретической, полученной при учете влияния спин-обменных столкновений атомов на ширину резонансной линии [5]. Несовпадение экспериментальной кривой с теоретической при пучке малой интенсивности (вблизи $I_{\text{пор}}$), по-видимому, связано с нелинейной

связью между перемещением заслонки и интенсивностью пучка при сильном перекрытии пучка. Модуляция интенсивности пучка заслонкой более удобна, чем модуляция изменением давления газа в источнике, так как в последнем случае из-за нарушения условий разряда изменяется процентное содержание атомарного водорода в пучке и, следовательно, от-

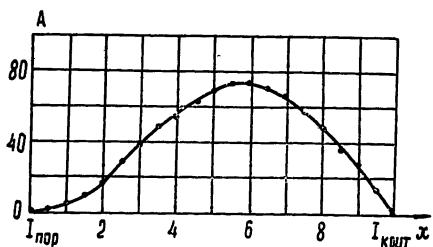


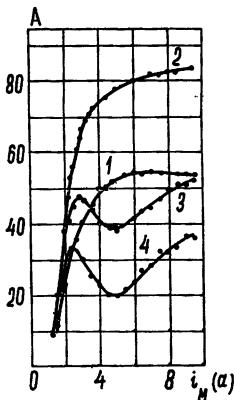
Рис. 2. Зависимость мощности сигнала генерации A от интенсивности атомного пучка. Деления по оси x соответствуют положению заслонки, перекрывающей пучок.

существует пропорциональность между давлением и интенсивностью атомного пучка. В связи с этим из снятой нами ранее зависимости [7] можно было сделать только качественные выводы.

Зависимость амплитуды сигнала от тока фокусирующего электромагнита показана на рис. 3. Цифры у кривых соответствуют различным значениям интенсивности пучка: 1—слабый (слегка превышающий $I_{\text{пор}}$), 2—средний (интенсивность пучка слегка превышает значение, при котором амплитуда максимальна), 3, 4—сильный пучок (несколько ниже $I_{\text{крит}}$).

Рис. 3. Зависимость мощности сигнала генерации A от тока i_m через обмотки фокусирующего шестиполюсного электромагнита (длина которого 15 см, зазор между противоположными полюсами 6 мм, число витков на каждом ноже—110):

1—пучок малой интенсивности, 2—средней, 3—большой, 4—очень большой интенсивности.



На рис. 4 показана полученная расчетным путем кривая зависимости эффективного угла захвата магнита $\Omega_{\text{эфф}}$ [6] от напряженности магнитного поля H_0 (для $l_1 = 7 \text{ см}$, $l_2 = 15 \text{ см}$, $L = 86 \text{ см}$, $2r_0 = 6 \text{ мм}$, $2d = 2 \text{ мм}$).

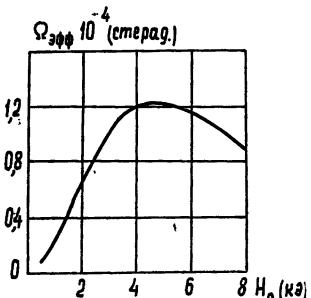
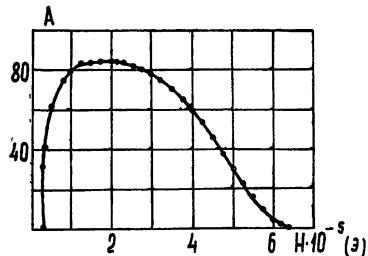


Рис. 4. Зависимость эффективного угла захвата фокусирующего шестиполюсного магнита $\Omega_{\text{эфф}}$ от величины напряженности поля на полюсе H_0 . Расстояние между источником и входом магнита $l_1 = 7 \text{ см}$, между магнитом и входным отверстием колбы $L = 86 \text{ см}$ ($l_2 = 15 \text{ см}$, $r_0 = 0,3 \text{ см}$).

Эффективный угол захвата максимален, если выполняется условие фокусировки на входное отверстие колбы атомов, обладающих наиболее вероятной в пучке скоростью; характер зависимости примерно отражает закон распределения атомов в пучке по скоростям. Сопоставив рис. 2 и 4, нетрудно объяснить ход кривых на рис. 3. При слабом пучке (кривая 1) амплитуду сигнала можно считать пропорциональной интенсивности пучка, т. е. кривая 1 должна приблизительно повторять ход кривой угла захвата $\Omega_{\text{эфф}}$, причем фокусировке атомов с наиболее вероятной скоростью (отвечающей $H_0 = 4,75 \cdot 10^3$ э) соответствует ток через обмотки электромагнита $i_m \approx 5$ а. Согласно кривой 2, при токе, большем 5 а, происходит не уменьшение, а увеличение мощности; следовательно, при этом $I > 6$ условных единиц на рис. 2. При пучке большой интенсивности (кривые 3 и 4) амплитуда сигнала быстро увеличивается с ростом тока, затем в области $i_m \approx 3 \div 5$ а начинает спадать, что связано с увеличением потока атомов в колбу, а при $i_m > 5$ а, когда поток ослабевает из-за уменьшения $\Omega_{\text{эфф}}$, амплитуда вновь возрастает.

Для обеспечения малой зависимости частоты генерации от магнитного поля желательно заставить работать генератор в области возможно меньших полей. С этой точки зрения интересна зависимость мощности сигнала от величины напряженности аксиального магнитного поля H_c (рис. 5). Значение напряженности аксиального поля, создаваемого соленоидом, определялось с помощью возбуждения переходов [4] $\Delta F=0$, $\Delta m_F=\pm 1$. При различных значениях напряженности поля H решающее воздействие на работу генератора оказывают различные процессы. В области малых полей ($0 \div 3$ мэ) существенным оказывается то, что вектор напряженности постоянного поля не направлен вдоль оси резонатора (вдоль вектора напряженности осциллирующего магнитного поля) и, следовательно, не выполнены правила отбора. Влияние тангенциальной (перпендикулярной оси) составляющей остаточного поля H_{t_0} можно

Рис. 5. Зависимость мощности A сигнала генерации от напряженности магнитного поля, созданного соленоидом.



учесть, умножив выражение для мощности сигнала $P(H_c)$ на $H_c^2(H_c^2 + H_{t_0}^2)^{-1}$ (т. е. на $\sin^2\beta$, где β — угол между вектором $H=H_c+H_{t_0}$ и перпендикуляром к оси).

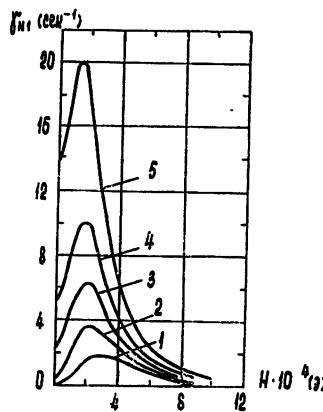
В области $10 \div 40$ мэ на работе генератора наиболее сильно сказывается обеднение рабочего уровня за счет индуцированных переходов $\Delta F=0$, $\Delta m_F=\pm 1$, возникающих из-за неоднородности поперечной составляющей магнитного поля [4]. Неоднородное поперечное поле создается остаточной намагниченностью экранов $\Delta H_{t_0} \equiv H'_{t_0}$ и соленоидом $\Delta H_{t_0} = bH_c$. Скорость релаксации атомов γ_{H_1} под воздействием этого механизма для определенной конфигурации неоднородного магнитного поля $H_p=2h\rho z D^{-2}$, $H_z=h a^{-2}(\rho^2-2z^2)$ равна [4]

$$\gamma_{H_1}=0,5 \gamma_F^2 (H'_{t_0} + bH_c)^2 t_0 [1 + (\gamma_F H_c t_0 / 2)^4]^{-1}, \quad (1)$$

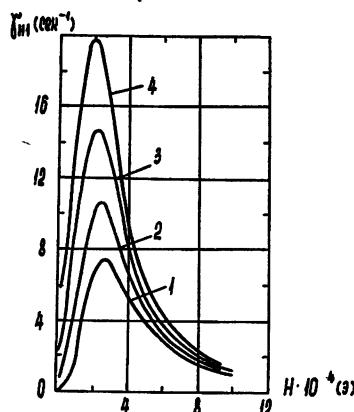
где t_0 — среднее время между двумя столкновениями атома со стенками, $t_0 = \bar{l}/v$, $\gamma_F = 1,4 \cdot 10^6 \text{ гц} \cdot \text{э}^{-1}$ — гиromагнитное отношение. Для сферической колбы $\bar{l} = (3/2) R_c = 12 \text{ см}$ (для колбы радиуса 8 см). и, следовательно, $t_0 = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$. Подставляя остальные величины в (1), получим, что

$$\gamma_{H_1} = 5,29 \cdot 10^7 (H'_{t_0} + bH_c)^2 \frac{1}{1 + 20,5 \cdot 10^6 H_c^4}.$$

Графики зависимости скорости релаксации γ_{H_1} от поля H_0 при различных значениях H'_{t_0} и b приведены на рис. 6.



а)



б)

Рис. 6. Зависимость скорости релаксации γ_{H_1} от величины напряженности осевого магнитного поля, создаваемого соленоидом, H_c для случая следующей неоднородности поля: $H_p = 2h\rho z D^{-2}$, $H_z = h\alpha^{-2}(\rho^2 - 2z^2)$ [4].

- Амплитуда изменения поперечной составляющей магнитного поля $H'_t = H'_{t_0} + 0,01 H_c$. Для кривой 1 $H'_{t_0} = 0$, 2 — $H'_{t_0} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ э}$, 3 — $H'_{t_0} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ э}$, 4 — $H'_{t_0} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ э}$, 5 — $H'_{t_0} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ э}$.
- Амплитуда изменения поперечной составляющей магнитного поля $H'_t = H'_{t_0} + 0,02 H_c$. Для кривой 1 $H'_{t_0} = 0$, 2 — $H'_{t_0} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ э}$, 3 — $H'_{t_0} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ э}$, 4 — $H'_{t_0} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ э}$.

В области больших полей ($H_c > 300 \text{ мэ}$) решающее влияние оказывает уширение линии за счет набега фазы излучающего атома из-за неоднородности магнитного поля в объеме колбы [4]:

$$\gamma_{H_2} = t_0 16\alpha^2 H_c^2 (\Delta H)^2 \quad (2)$$

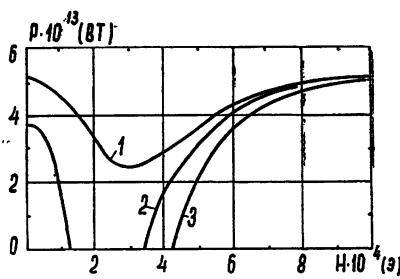
($\alpha = 2750 \text{ гц} \cdot \text{э}^{-2}$). Если учесть только неоднородность величины осевого поля H_c , то

$$\gamma_{H_2} = 6,52 \cdot 10^3 \alpha^2 H_c^4, \quad \Delta H / H_c \equiv a.$$

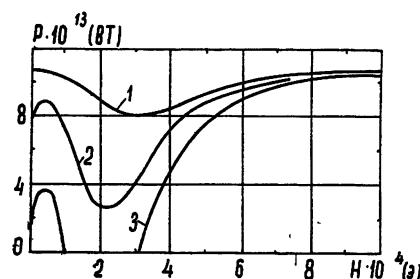
Зависимость мощности сигнала генерации P_0 от поля H_c выражается формулой

$$P_0 = \frac{H_c^2}{H_c^2 + H_{t_0}^2} \frac{\omega \hbar Q}{2Q_{cb}} \left\{ I - \frac{hV}{8\pi^2 \mu_0^2 Q \eta} [\gamma_0 + (\gamma_{H1} + \gamma_{H2})]^2 \right\}, \quad (3)$$

где ω — циклическая частота перехода, $\omega = 2\pi \cdot 1,42 \cdot 10^9 \text{ гц}$, Q — добротность резонатора, Q_{cb} — добротность связи, V — объем резонатора, η — параметр, характеризующий отношение квадрата среднего значения напряженности осевой составляющей магнитного поля (усредненного по объему колбы) к усредненному (по объему резонатора) значению квадрата напряженности поля, γ_0 — часть скорости релаксации, не зависящая от магнитного поля. Графики зависимости $P_0 (H_c)$ при $Q/Q_{cb} = 0,3$, $\eta = 3$, $V = 1,5 \cdot 10^4 \text{ см}^3$, $\gamma_0 = 1 \text{ сек}^{-1}$ для значений интенсивности пучка $I = 2 \cdot 10^{13} \text{ атом} \cdot \text{сек}^{-1}$ и $I = 4 \cdot 10^{13} \text{ атом} \cdot \text{сек}^{-1}$ и различных H_c , H'_{t_0} приведены на рис. 7.



а)



б)

Рис. 7. Зависимость мощности сигнала генерации от напряженности поля, создаваемого соленоидом.

- а) Интенсивность пучка $I = 2 \cdot 10^{13} \text{ атом} \cdot \text{сек}^{-1}$, $\gamma_0 = 1 \text{ сек}^{-1}$, $b = 0,01$. Для кривой 1 $H_{t_0} = H'_{t_0} = 0$; 2 — $H_{t_0} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ э}$, $H'_{t_0} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ э}$; 3 — $H_{t_0} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ э}$, $H'_{t_0} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ э}$.
- б) Интенсивность пучка $I = 4 \cdot 10^{13} \text{ атом} \cdot \text{сек}^{-1}$, $\gamma_0 = 1 \text{ сек}^{-1}$, $b = 0,01$. Для кривой 1 $H_{t_0} = H'_{t_0} = 0$; 2 — $H_{t_0} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ э}$, $H'_{t_0} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ э}$; 3 — $H_{t_0} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ э}$, $H'_{t_0} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ э}$.

При малых значениях неоднородности и величины остаточного поля должны существовать две области работы генератора — в области малых полей и в области более сильных полей. Первая область представляет наибольший практический интерес. Экраны исследованных установок имели большую остаточную намагниченность, поле соленоида (который оказался слишком коротким) обладало значительной неоднородностью, поэтому нам не удалось добиться работы генератора в области слабых полей.

В области сильных полей учет неоднородности осевого магнитного поля приводит к уменьшению мощности с ростом напряженности поля (см. рис. 8). Общий вид характеристики качественно согласуется с экспериментальной кривой.

Измерения разности частот двух водородных генераторов проводились по схеме, изображенной на рис. 9. Опорным генератором служил водородный генератор с суперинваровым резонатором [8]. Для увеличения точности измерений сигналы промежуточной частоты 405 кгц умножались в 5 раз. Разностная частота измерялась сравнением частоты биений с сигналом низкочастотного генератора. При измерениях

относительная стабильность частоты за время ~ 1 мин равнялась примерно 10^{-11} . При обработке результатов вводились поправки на уход частоты опорного генератора (вследствие изменения сопротивления соленоида из-за нагрева) и на изменение собственной частоты резонатора

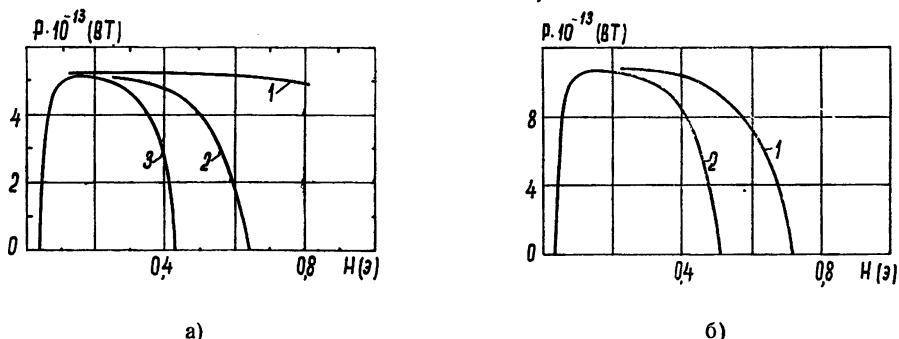


Рис. 8. Зависимость мощности сигнала генерации от напряженности магнитного поля в области больших полей.

- а) $I=2 \cdot 10^{13} \text{ атом}\cdot\text{сек}^{-1}$. Для кривой 1 относительная неоднородность осевого поля $\Delta H/H=0,01$, 2— $\Delta H/H=0,05$, 3— $\Delta H/H=0,1$.
- б) $I=4 \cdot 10^{13} \text{ атом}\cdot\text{сек}^{-1}$. Для кривой 1 $\Delta H/H=0,05$, 2— $\Delta H/H=0,1$.

рабочего генератора. Зависимость перестройки частоты генерации Δf_g от изменения частоты резонатора Δf_p выражается формулой [4]

$$\Delta f_g = \Delta f_p \frac{Q}{Q_L}, \quad (4)$$

где Q — добротность резонатора, Q_L — добротность линии:

$$Q_L = \frac{2\pi f}{\Delta\omega} = \frac{\pi \cdot 1,42 \cdot 10^9}{\gamma}.$$

При изменении добротности линии меняется наклон Q/Q_L прямой (4). Точка пересечения прямых, снятых при разных Q_L , отвечающей значению Δf_g , не зависящему от модуляции добротности линии, соответствует точке настройки частоты резонатора на частоту линии. На рис. 10

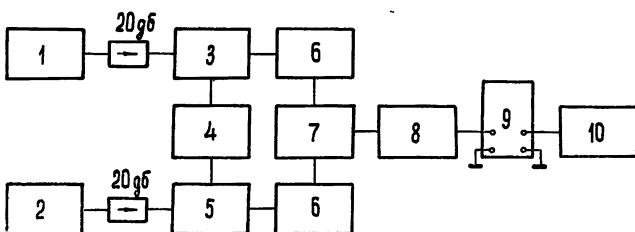


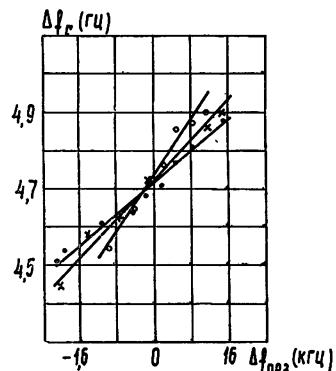
Рис. 9. Схема измерения разности частот двух водородных генераторов:

1—генератор № 1, 2—генератор № 2, 3—приемник № 1, 4—гетеродин, 5—приемник № 2, 6—умножитель, 7—смеситель, 8—усилитель низкой частоты, 9—осциллограф, 10—низкочастотный генератор.

показана экспериментальная зависимость сдвига частоты генерации от перестройки частоты резонатора при пучках различной интенсивности.

Прямая с малым наклоном соответствует слабому пучку, с большим — сильному (близкому к критическому). Изменение наклона прямых связано с уширением линии (уменьшением Q_L) за счет увеличения числа

Рис. 10. Зависимость частоты генерации от перестройки резонатора при различной интенсивности атомного пучка. Кружки соответствуют сильному пучку, точки — слабому.



спин-обменных столкновений при повышении плотности атомов в колбе. При отстройке частоты резонатора на величину порядка половины его полосы пропускания частота генерации при изменении интенсивности пучка от I_{\min} до $I_{\text{крит}}$ изменяется примерно на 0,1 гц. Разброс точек пересечения прямых (0,02 гц) объясняется малой стабильностью частоты генераторов; в принципе же возможна гораздо большая точность настройки резонатора [3]. На рис. 11 показано изменение частоты генерации при изменении интенсивности пучка при различных значениях расстройки резонатора. Градуировка интенсивности пучка соответствует приведенной на рис. 2.

Метод настройки резонатора по давлению прост и не требует дополнительного изменения конструкции генератора; поэтому он нашел

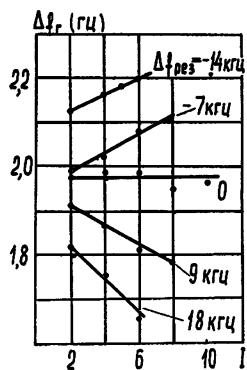


Рис. 11. Зависимость частоты генерации от интенсивности атомного пучка при различных значениях расстройки резонатора. Интенсивность пучка измеряется в относительных единицах (см. рис. 2).

широкое применение [5]. Однако для его осуществления необходимо иметь генератор с большим запасом по скорости откачки, что не всегда является желательным.

Ширину линии можно менять, изменяя величину напряженности неоднородного магнитного поля в области колбы [5]. Неоднородное поле для этой цели создавалось двумя включенными навстречу катушками диаметром 310 мм, длиной 15 мм, расположенными симметрично относительно колбы на расстоянии 150 мм друг от друга. Подобрав ток через каждую катушку, можно было свести к нулю изменение частоты

генератора при включении и выключении катушек. На рис. 12 прямая с меньшим наклоном соответствует отсутствию дополнительного неоднородного поля, с большим — наличию поля. Компенсация поля (достигнутая при одном значении тока) при изменении тока через катушки не сохраняется, что видно из рис. 13. На рисунке по оси абсцисс отло-

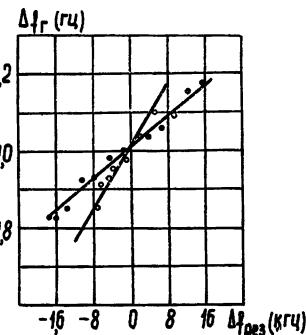
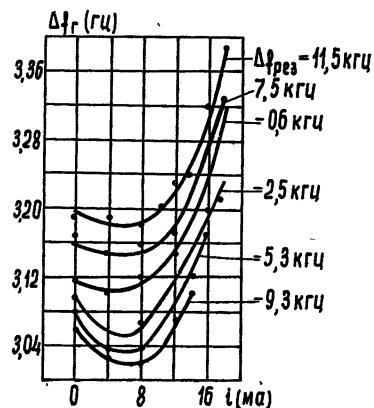


Рис. 12. Зависимость частоты генерации от перестройки резонатора при наличии неоднородного магнитного поля (кружки) и в отсутствие неоднородного поля (точки).

жены значения силы тока через катушки, по оси ординат — смещение частоты генерации. Значения расстройки резонатора для кривых (считая сверху вниз) составляют +11,5; 7,5; -0,6; -2,5; -5,3; -9,3 кГц.

Рис. 13. Зависимость частоты генерации от тока текущего через катушки, создающие неоднородное поле, при различных расстройках резонатора (приведенных справа от кривых в кГц).



Вероятно, подбором конфигурации поля можно уменьшить сдвиг частоты генерации при изменении тока.

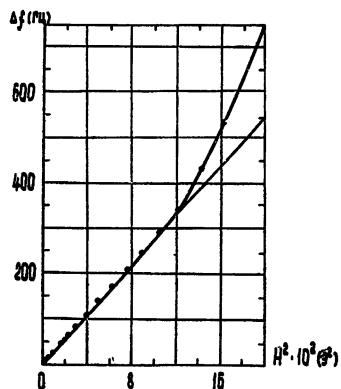
Наиболее сильное влияние на частоту генерации оказывает внешнее магнитное поле. Зависимость частоты генерации от поля выражается формулой [4]

$$f = f_0 + 2750 H^2. \quad (5)$$

На рис. 14 показана зависимость частоты генерации от квадрата напряженности магнитного поля. Напряженность измерялась с помощью возбуждения переходов $\Delta F = 0$, $\Delta m_F = \pm 1$. Из графика видно, что при $H > 350$ мэ $\Delta f(H)$ заметно отклоняется от закона (5). Это, по-видимому, связано с тем, что смещение частоты Δf пропорционально среднему квадрату напряженности поля (\bar{H}^2), а при индуцировании переходов между зеемановскими подуровнями измеряется квадрат средней вели-

чины напряженности поля $(\bar{H})^2$. При малых значениях напряженности поля совпадение (\bar{H}^2) и $(\bar{H})^2$ довольно хорошее.

Рис. 14. Зависимость частоты генерации от квадрата средней величины напряженности магнитного поля (измеренной индуцированием переходов $\Delta F=0$, $\Delta m_F = \pm 1$).



ЛИТЕРАТУРА

1. H. M. Goldenberg, D. Kleppner, N. F. Ramsey, Phys. Rev. Letters, 5, 361 (1960).
2. D. Kleppner, H. M. Goldenberg, N. F. Ramsey, Appl. Optics, 1, 55 (1962).
3. J. Vanier, R. F. C. Vessot, Appl. Phys. Letters, 4, 122 (1964).
4. D. Kleppner, H. M. Goldenberg, N. F. Ramsey, Phys. Rev., 126, 603 (1962).
5. D. Kleppner, H. C. Berg, S. B. Crampton, N. F. Ramsey, R. F. C. Vessot, H. E. Peters, J. Vanier, Phys. Rev., 138, A 972 (1965).
6. Н. Г. Басов, Г. М. Страховский, А. И. Никитин, Т. Ф. Никитина, В. М. Татаренков, А. В. Успенский, Труды ФИАН, 31, 139 (1965).
7. Н. Г. Басов, А. И. Никитин, Г. М. Страховский, А. В. Успенский, ЖЭТФ, 47, 2314 (1964).
8. А. И. Никитин, Г. М. Страховский, ПТЭ (в печати).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
18 января 1966 г.

CHARACTERISTICS OF MASER ON H ATOMS BEAM

A. I. Nikitin, G. M. Strakhovskiy

The investigation of amplitude and frequency characteristics of maser on H atoms beam has been made.

УДК 621.373.93 : 621 378.001 : 621.372.413

К ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА СВЕТА

Ю. В. Григорьев, В. К. Руденко, Р. В. Хохлов

В рамках одномодового приближения рассмотрено параметрическое возбуждение колебаний в резонаторе типа Фабри—Перо, заполненном нелинейной диспергирующей средой. Основное внимание уделено поведению системы при нарушении синхронизма взаимодействующих в резонаторе волн и отличии частоты резонатора от частоты параметрических колебаний. Получено условие самовозбуждения колебаний. Исследованы стационарные состояния и проанализирована их устойчивость. Проведено сравнение параметрического взаимодействия в указанной системе и системе с сосредоточенными параметрами.

В последнее время значительный интерес вызывает проблема параметрической генерации в оптическом диапазоне длин волн. Возможность такой генерации проанализирована рядом авторов [1—7] и недавно осуществлена экспериментально [8, 9]. В настоящее время наряду с получением параметрической генерации в других частотных диапазонах ведется работа по ее возбуждению с помощью лазеров непрерывного излучения [10].

До сих пор теоретическое рассмотрение параметрической генерации в основном ограничивалось изучением процесса возбуждения и стационарного режима при точном выполнении условий синхронизма взаимодействующих волн и настройки резонатора на частоту параметрических колебаний*. Вместе с тем в ряде случаев и особенно при возбуждении генератора газовым лазером существенным становится анализ стационарного режима параметрического генератора и его устойчивости при различных перестройках системы. Ниже такой анализ проведен для одномерного вырожденного параметрического генератора.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим резонатор типа интерферометра Фабри—Перо (рис. 1), заполненный оптически прозрачной нелинейной средой с квадратичной поляризуемостью. Пусть дисперсионные свойства среды позволяют

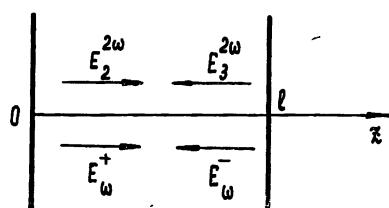


Рис. 1.

полагаться, что зеркала на частоте 2ω не отражают). В одномодо-

* В работе [7] методом численного интегрирования исследованы процессы установления и стационарные состояния при нарушении условия синхронизма.

эффективно взаимодействовать волнам с частотами ω и 2ω . Тогда под действием волны накачки с частотой 2ω в резонаторе могут возникать прямая и обратная волны параметрически возбужденных колебаний частоты ω , а также обратная волна частоты 2ω — вторая гармоника, появляющаяся в поле обратной волны параметрических колебаний (пред-

вом приближении прямую и обратную волны параметрических колебаний можно представить стоячей волной с медленно меняющимися во времени амплитудой и фазой. Поле в резонаторе, таким образом, имеет вид

$$E = E_1 \sin \left(\frac{n\pi}{l} z \right) \sin (\omega t + \varphi_1) + E_2 \cos (2\omega t - k_2 z + \varphi_2) + \\ + E_3 \cos (2\omega t + k_2 z + \varphi_3). \quad (1)$$

Здесь амплитуды E_2 , E_3 , и фазы φ_2 , φ_3 являются медленно меняющимися функциями координаты и времени, а E_1 и φ_1 — только функциями времени.

Подставляя выражение (1) в уравнения Максвелла, методом медленно меняющихся амплитуд (см. [5]) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2}{v} \frac{dE_1}{dt} + \sigma_1 E_1 \frac{1}{l} \int_0^l [E_2 \sin (\Phi + \Delta z) + E_3 \sin (\Phi_1 - \Delta z)] dz + 2\delta E_1 &= 0, \\ \frac{2}{v} \frac{d\varphi_1}{dt} + 2 \frac{\Delta_\omega}{v} + \sigma_1 \frac{1}{l} \int_0^l [E_2 \cos (\Phi + \Delta z) + E_3 \cos (\Phi_1 - \Delta z)] dz &= 0, \\ \frac{1}{v} \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial z} - \sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \sin (\Phi + \Delta z) &= 0, \\ \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\sigma_2}{E_2} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \cos (\Phi + \Delta z) &= 0, \\ - \frac{1}{v} \frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial z} + \sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \sin (\Phi_1 - \Delta z) &= 0, \\ - \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - \frac{\sigma_2}{E_3} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \cos (\Phi_1 - \Delta z) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) приняты следующие обозначения: $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ и $\Phi_1 = 2\varphi_1 - \varphi_3$ — разности фаз; $\Delta_\omega = \left(k_2 - \frac{n\pi}{l} \right) v$ — расстройка, характеризующая смещение частоты параметрических колебаний от резонанса нелинейного резонатора; n — номер продольной моды, возбуждающейся в резонаторе; $\Delta = k_2 - 2n\pi/l$ — расстройка волновых чисел от синхронизма; σ_1 и σ_2 — коэффициенты связи (см. [5]), δ — параметр потерь (см. [5]). Система уравнений (2) с определенными граничными условиями полностью описывает процессы в нелинейном резонаторе.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

В стационарном режиме четыре последних уравнения системы (2) допускают качественное интегрирование на фазовых плоскостях. С введением новых переменных

$$x = E_2 \sin (\Phi + \Delta z), \quad y = E_2 \cos (\Phi + \Delta z), \\ p = E_3 \sin (\Phi_1 - \Delta z), \quad q = E_3 \cos (\Phi_1 - \Delta z)$$

эти уравнения преобразуются к виду

$$\frac{dx}{dz} = \sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 + \Delta y, \quad \frac{dy}{dz} = -\Delta x, \quad (3)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 - \Delta q, \quad \frac{dq}{dz} = \Delta p. \quad (4)$$

Разделив в (3) и (4) первое уравнение на второе, получим уравнения, описывающие поведение интегральных кривых (см. рис. 2) на фазовых плоскостях (x, y) и (p, q) :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \frac{1}{x} - \frac{y}{x}; \quad \frac{dp}{dq} = -\frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \frac{1}{p} - \frac{q}{p}. \quad (5)$$

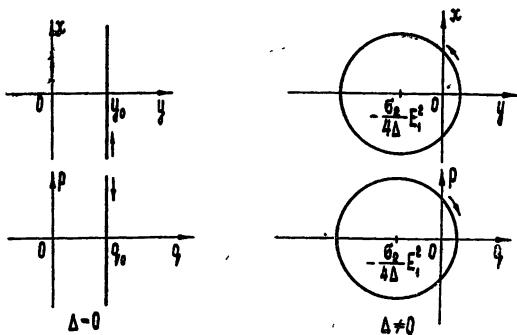


Рис. 2.

Рассмотрим следующие два случая: $\Delta=0$ и $\Delta \neq 0$.

1) Пусть $\Delta=0$; тогда система уравнений (3) и (4) легко разрешима:

$$x = \sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 z + x_0, \quad y = y_0, \quad (6)$$

$$p = -\sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 z + p_0, \quad q = q_0. \quad (7)$$

Здесь x_0 , y_0 , p_0 и q_0 — значения соответствующих переменных величин при $z = 0$. Из граничных условий, которые, очевидно, имеют вид

$$E_2|_{z=0} = E_{20}, \quad (8a)$$

$$E_3|_{z=l} = 0, \quad (8b)$$

следует, что

$$q_0 = 0, \quad p_0 = \sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 l. \quad (9)$$

Таким образом, для амплитуды второй гармоники параметрических колебаний получаем

$$E_3 = \sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 (l - z). \quad (10)$$

Первое, третье и пятое уравнения системы (2) при зеркалах, полностью отражающих на частоте ω , и при $\delta=0$ приводят к условию

$$\int_0^l \left(E_2 \frac{dE_2}{dz} - E_3 \frac{dE_3}{dz} \right) dz = \frac{1}{2} (E_2^2 - E_3^2)|_0^l = 0, \quad (11)$$

из которого следует, что

$$x_0 = -\sigma_2 \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 l. \quad (12)$$

Соотношения (6) и (12) позволяют найти зависимость амплитуды волны накачки от координаты z в пространстве между зеркалами нелинейного резонатора:

$$E_2 = E_{20} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_2 E_1^2}{4E_{20}} \right)^2 (2l-z)z}. \quad (13)$$

Интегрируя далее второе уравнение системы (2), имеем

$$2 \frac{\Delta_\omega}{v} = -\sigma_1 y_0 = -\sigma_1 \sqrt{E_{20}^2 - x_0^2}. \quad (14)$$

Подставляя (12) в (14), получаем зависимость амплитуды параметрических колебаний от частотной расстройки:

$$E_1^2 = E_{10}^2 \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (15)$$

где $E_{10}^2 = 4E_{20}/\sigma_2 l$; $\alpha = 2\Delta_\omega/v \sigma_1 E_{20}$ — приведенная расстройка.

Выражения (10) и (13) после исключения E_1^2 имеют вид

$$E_3 = E_{20} \sqrt{1 - \alpha^2} (1 - z/l), \quad (10a)$$

$$E_2 = E_{20} \sqrt{1 - (1 - \alpha^2) \left(2 - \frac{z}{l} \right) \frac{z}{l}}. \quad (13a)$$

Из соотношения $E_3 \cos \Phi_1 = q = q_0 = 0$ следует, что разность фаз Φ_1 постоянна и равна $\pi/2$. Разность фаз, Φ определяем, используя выражения (6), (12) и (14):

$$\Phi = \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2} (1 - z/l) \right]. \quad (16)$$

При $\Delta_\omega = 0$ имеем

$$\Phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \pi,$$

т. е. волна накачки и вторая гармоника находятся в противофазе, а их амплитуды по всей длине резонатора равны (см. (10a) и (13a)). Таким образом, при $\Delta_\omega = 0$ падающая на резонатор волна накачки полностью отражается.

Если $\Delta_\omega \neq 0$, возбуждение параметрических колебаний в резонаторе происходит лишь при амплитудах волн накачки, превышающих некоторое пороговое значение $E_{2n}^2 = (2\Delta_\omega/v \sigma_1)^2$. В этом случае амплитуда накачки на выходе резонатора ($z = l$) принимает значение, равное пороговому, и не меняется при дальнейшем увеличении амплитуды на входе. Происходит лишь частичное отражение волны накачки. Наличие потерь в системе приводит к тому, что порог возбуждения возникает и при

$\Delta_\omega = 0$. В результате на выходе резонатора также появляется волна накачки с амплитудой, равной пороговой, и отражение становится неполным.

На рис. 3 показаны амплитудные и фазовые зависимости для различных значений приведенной частотной расстройки α . Введение этой

расстройки позволяет свести семейство кривых, соответствующих различным значениям внешней силы, в одну кривую. Последнее, однако, возможно только для системы без потерь.

2) Пусть теперь расстройка волновых чисел Δ отлична от нуля. В этом случае решение уравнений (3) и (4) ищем в виде

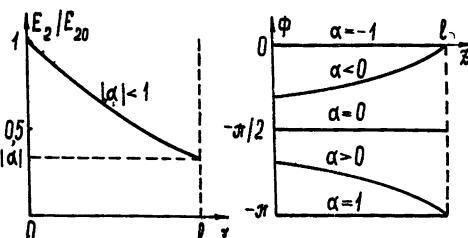


Рис. 3.

$$x = A \sin(\Delta z) + B \cos(\Delta z),$$

$$y = C \cos(\Delta z) + D \sin(\Delta z) - \frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2, \quad (17)$$

$$p = A_1 \sin(\Delta z) + B_1 \cos(\Delta z),$$

$$q = C_1 \cos(\Delta z) + D_1 \sin(\Delta z) - \frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2. \quad (18)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} A = C = y_0 + \frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2, \quad D = -B = -x_0, \\ A_1 = -C_1 = -q_0 - \frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2, \quad D_1 = B_1 = p_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Границное условие (8б) позволяет определить значения p_0 и q_0 :

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \sin(\Delta l), \\ q_0 &= -\frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 [1 - \cos(\Delta l)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (18) и (20) находим зависимость амплитуды второй гармоники E_3 от координаты z :

$$E_3 = \frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \sqrt{2[1 - \cos(\Delta(l-z))]} . \quad (21)$$

Первое уравнение системы (2) с учетом (19), (20) приводит при $\delta = 0$ к соотношению

$$(1 - \cos(\Delta l)) \left[y_0 + 2 \frac{\sigma_2}{\Delta} \left(\frac{E_1}{2} \right)^2 \right] + x_0 \sin(\Delta l) = 0. \quad (22)$$

Из второго уравнения этой системы имеем

$$x_0 = E_{20} \left(\frac{\Delta l}{2} \alpha - \frac{E_1^2}{E_{10}^2} \right), \quad (23)$$

где по-прежнему $E_{10}^2 = 4E_{20}/\sigma_2 l$. Соотношения (22) и (23) позволяют найти амплитуду стоячей волны параметрических колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{E_1^2}{E_{10}^2} &= \frac{\Delta l}{4} \left\langle \alpha \Delta l [\Delta l - \sin(\Delta l)] \pm \{\alpha^2 \Delta^2 l^2 [\Delta l - \sin(\Delta l)]^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4[1 - \cos(\Delta l) - \Delta l \sin(\Delta l) + \Delta^2 l^2/2][\Delta^2 l^2 \alpha^2/2 - 1 + \cos(\Delta l)]\}^{1/2} \right\rangle \times \\ &\quad \times [1 - \cos(\Delta l) - \Delta l \sin(\Delta l) + \Delta^2 l^2/2]^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

и условие их возбуждения*

$$(\sigma_1 E_{20})^2 > \frac{\Delta^2 l^2}{2[1 - \cos(\Delta l)]} \left[\left(2 \frac{\Delta_\omega}{v} \right)^2 + (2\delta)^2 \right]. \quad (24a)$$

Распределенные потери, а также небольшие потери за счет излучения через зеркала, здесь учтены в δ . Из (17), (22) и (23) получаем зависимость амплитуды волны накачки E_2 от координаты z в пространстве между зеркалами нелинейного резонатора:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_{20} \left\langle 1 + \frac{2}{\Delta l} \frac{E_1^2}{E_{10}^2} \left(\left(\frac{\Delta l}{2} \alpha - \frac{E_1^2}{E_{10}^2} \right) \sin(\Delta z) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[\frac{(\Delta l \alpha / 2 - E_1^2 / E_{10}^2) \sin(\Delta l)}{1 - \cos(\Delta l)} + \frac{1}{\Delta l} \frac{E_1^2}{E_{10}^2} \right] [1 - \cos(\Delta z)] \right) \right\rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Выражения (17) и (18) дают возможность определить фазовые соотношения в системе.

Рассмотрим поведение амплитудных кривых параметрических колебаний при различных перестройках системы. Кривые на рис. 4 соответствуют изменению приведенной частотной расстройки α при постоянной расстройке волновых чисел Δ . Появление $\Delta \neq 0$ приводит к тому, что амплитудные кривые принимают вид участков эллипсов, наклоненных в ту или другую сторону в соответствии со знаком Δ . В связи с этим возникают области расстроек α , где амплитуда колебаний неоднозначна. Анализ устойчивости (раздел 3) показывает, что устойчивым состояниям соответствуют верхние участки амплитудных кривых, ограниченные точкой с вертикальной касательной. Таким образом, в указанных областях расстроек возможно жесткое возбуждение параметрических колебаний. Интересно отметить, что при определенных расстройках амплитуды параметрических колебаний могут достигать больших значений, чем в системе без расстроек.

На рис. 5 приведены амплитудные кривые при постоянном α и изменяющемся Δ . Подобная перестройка системы возможна, например, при отклонении направления распространения волны накачки от оси резонатора. В этом случае возникают изолированные участки жесткого возбуждения, попасть на которые, изменяя только расстройку Δ , нельзя. Для того, чтобы попасть на эти участки, необходимо при какой-то расстройке

* Отметим, что условие самовозбуждения колебаний в резонаторе, заполненном периодически нестационарной средой, получено в [1].

Δ (и совпадающих знаках Δ и α) увеличить α до значения, большего по модулю единицы.

На рис. 4, 5 не указаны состояния системы, соответствующие расстройкам волновых чисел, большим 2π . При анализе таких состояний (как и состояний с Δ , близким к 2π) следует учитывать соседние моды

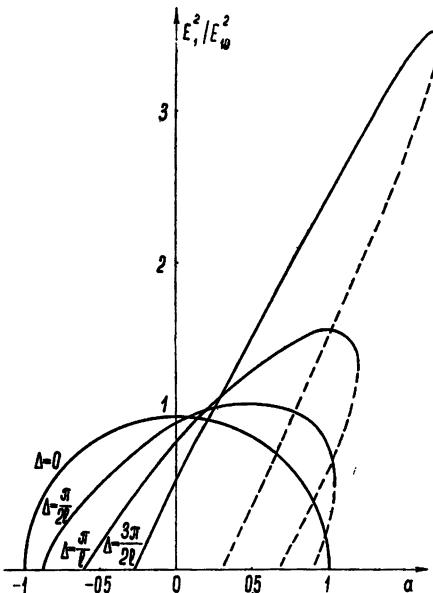


Рис. 4.

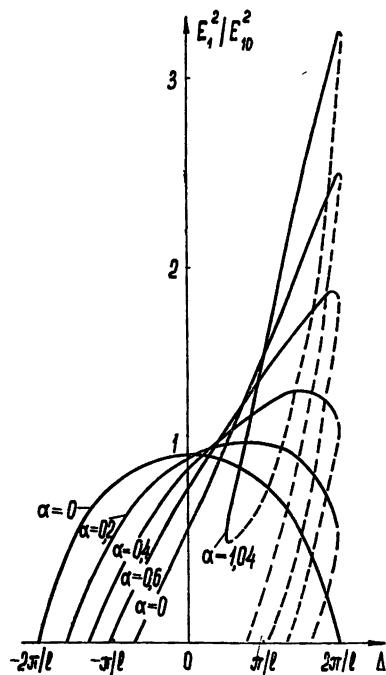


Рис. 5.

и потери резонатора, оказывающие в этом случае существенное влияние на поведение системы. Однако упомянутые режимы вряд ли могут представлять практический интерес из-за высокого порога возбуждения (см. (24a)). На рис. 6 показано также поведение амплитуд волны накачки и волны второй гармоники параметрических колебаний в пространстве между зеркалами нелинейного резонатора при $\Delta=\pi/2l$ и различных α .

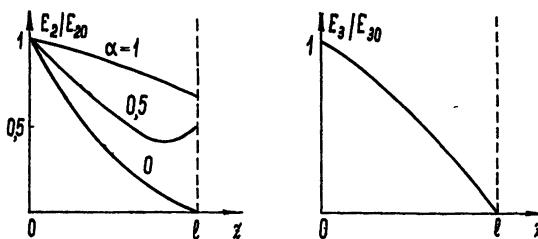


Рис. 6.

Значительный интерес представляет поведение системы в отсутствие дисперсии фазовых скоростей взаимодействующих волн. В этом случае при перестройке системы (например, изменением частоты волны накачки или длины резонатора) амплитудные кривые остаются симметричными (рис. 7). Однако их вид существенным образом зависит от коэффи-

циента $m = \sigma_1 E_{20}$, характеризующего модуляцию нелинейной среды волной накачки. Если этот коэффициент мал, амплитуда параметрических колебаний имеет максимум при нулевых расстройках (расстройки обращаются в нуль одновременно). Если же коэффициент модуляции выше некоторого критического значения ($\sigma_1 E_{20} l \approx \pi/2$), происходит качественное изменение характера амплитудных кривых: максимум при нулевых расстройках переходит в минимум и появляются два новых максимума при расстройках, отличных от нуля.

Ширина области мягкого возбуждения в системе без дисперсии определяется из соотношения $(\Delta l)^4 / 2 (\sigma_1 E_{20} l)^2 = 1 - \cos(\Delta l)$. До значений коэффициента модуляции порядка критического область мягкого возбуждения может быть определена из приближенного соотношения:

$$\Delta_m = 2\Delta \approx 2\sigma_1 E_{20} [1 + (\sigma_1 E_{20} l)^2 / 12]^{-1/2}.$$

Для нелинейного кристалла LiNbO_3 , использованного в работе [9], величина $\sigma_1 E_{20}$ порядка $0,4 \text{ см}^{-1}$ ($\sigma_1 E_{20} l \sim 0,2$) при интенсивности излучения накачки $1 \text{ Mвт} \cdot \text{см}^{-2}$. Это дает для интервала длин волн накачки, в котором возможно возбуждение параметрических колебаний, выражение $\Delta \lambda_n = n \Delta_m \lambda_n^2 / \pi \sim 0,15 \text{ \AA}$ (n — показатель преломления нелинейной среды). С появлением потерь указанный интервал сужается.

Необходимо заметить, что при коэффициентах модуляции порядка и выше критического относительные изменения амплитуд прямой и обратной волн параметрических колебаний на длине резонатора могут быть сравнимы с единицей. Допустимость одномодовой аппроксимации при таких условиях требует специального рассмотрения.

3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ

Выше найдены стационарные решения системы (2). Однако не всякое решение может реально осуществиться. Движение, реализующееся в системе, должно быть устойчивым. Иными словами, малые возмущения, неизбежно возникающие в системе, должны со временем затухать. Вопрос об устойчивости движения по отношению к бесконечно малым возмущениям исследуется следующим методом. На рассматриваемое стационарное движение накладывается нестационарное малое возмущение, определяемое таким образом, чтобы результирующее движение удовлетворяло исходным уравнениям (в нашем случае — системе (2)):

$$\begin{aligned} E_1 &= \bar{E}_1 + E'_1(t); \quad E_2 = \bar{E}_2 + E'_2(z, t); \quad E_3 = \bar{E}_3 + E'_3(z, t); \\ \varphi_1 &= \bar{\varphi}_1 + \varphi'_1(t); \quad \varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + \varphi'_2(z, t); \quad \varphi_3 = \bar{\varphi}_3 + \varphi'_3(z, t). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь стационарные значения отмечены чертой сверху, а возмущения — штрихом.

В результате для малых возмущений получаются линейные диффе-

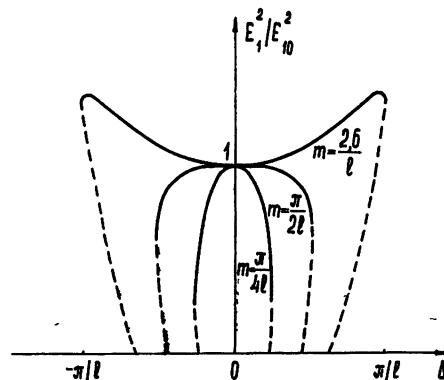


Рис. 7.

ренциальные уравнения с коэффициентами, зависящими от координаты z , но не от времени. Это позволяет изменение малых возмущений во времени представить множителем $e^{-i\omega t}$. «Частоты» возмущений ω (вообще говоря, комплексные) определяются в результате решений полученных уравнений для малых возмущений с определенными граничными условиями. Устойчивость движений определяется знаком мнимой части ω . Если найдутся решения, мнимая часть которых положительна, то множитель $e^{-i\omega t}$ неограниченно возрастает со временем и движение в системе неустойчиво.

В работе [12] указанным выше способом получены трансцендентные уравнения для ω при $\delta=0$. Решая их, можно найти необходимые и достаточные условия устойчивости движения в системе. Ввиду возникающих при анализе математических трудностей, «частоты» ω считались чисто мнимыми. В результате были получены лишь необходимые, но не достаточные условия устойчивости. Оказалось, что при $\Delta=0$ движение в системе устойчиво для любых изменений приведенной расстройки Δ в области возбуждения параметрических колебаний. При $\Delta \neq 0$ устойчивым состояниям соответствует верхняя ветвь зависимости амплитуды параметрических колебаний от расстройки. Нижняя ветвь, ограниченная точкой с вертикальной касательной, неустойчива.

В заключение сопоставим параметрическое взаимодействие волн в распределенном генераторе и параметрическое взаимодействие колебаний в системе с сосредоточенными параметрами. Нетрудно видеть, что поведение рассмотренной выше системы во многом аналогично поведению двухконтурной параметрически связанный системы с действующей в контуре накачки внешней силой [13–15] (вид «резонансных» кривых, существование критического значения коэффициента связи и т. д.). Отличия возникают из-за того, что одна из расстроек распределенной системы (расстройка волновых чисел Δ) не связана с какими-либо резонансными свойствами. Эта расстройка характеризует эффективность взаимодействия волн. В системе с сосредоточенными параметрами обе расстройки определяют резонансы в контурах и их влияние на амплитуду параметрических колебаний одинаково.

Существенная особенность распределенного параметрического генератора состоит также в том, что значительная часть энергии волны накачки преобразуется в энергию второй гармоники параметрических колебаний. В системе с сосредоточенными параметрами вся поступающая в контур накачки энергия (за исключением энергии, соответствующей пороговой амплитуде колебаний накачки) перекачивается в энергию параметрических колебаний.

Следует заметить, что в системе с сосредоточенными параметрами удается получить как необходимые, так и достаточные условия устойчивости [15]. Эти условия показывают, что при отличных от нуля расстройках стационарные колебания могут быть неустойчивыми. Колебания в системе при этом носят автомодуляционный характер. Подобная неустойчивость стационарного режима может, по-видимому, иметь место и в генераторе с распределенными параметрами.

Отметим также, что в одномерном нелинейном резонаторе типа Фабри—Перо могут быть возбуждены и невырожденные параметрические колебания. В этом случае появляется возможность изменять частоты генерируемых колебаний. Однако поведение системы в целом («резонансные» кривые, области неустойчивости и т. п.) не будет, по-видимому, существенно отличаться от вырожденного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 43, 351 (1962).
2. Н. М. Кроу, Phys. Rev., 127, 1207 (1962).
3. R. H. Kingston, Proc. IRE, 50, 472 (1962).
4. A. E. Siegman, Appl. Optics, 1, 739 (1962).
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
6. R. H. Kingston, A. L. McWhorter, Proc. IEEE, 53, 4 (1965).
7. С. А. Ахманов, В. Г. Дмитриев, В. П. Моденов, В. В. Фадеев, Радиотехника и электроника, 10, 2157 (1965).
8. S. Akhmanov, A. Kovrigin, V. Dmitriev, R. Khokhlov, в сб. Physics of Quantum Electronics Conf., McGraw-Hill, New York, 1965; С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, А. С. Пискарская, В. В. Фадеев, Р. В. Хохлов, Письма ЖЭТФ, 2, 300 (1965).
9. J. A. Giordmine, R. C. Miller, в сб. Physics of Quantum Electronics Conf., McGraw-Hill, New York, 1965; Phys. Rev. Letters, 14, 973 (1965).
10. A. Ashkin, G. Boyd, в сб. Physics of Quantum Electronics Conf., McGraw-Hill, New York, 1965.
11. В. Н. Луговой, Радиотехника и электроника, 9, 596 (1964).
12. В. К. Руденко, Дипломная работа, МГУ, 1964.
13. А. Н. Чарахчян, ЖТФ, 6, 1230 (1936).
14. В. М. Богачев, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1202 (1963).
15. Ю. В. Григорьев, Радиотехника и электроника, 9, 1886 (1964).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
17 января 1966 г.

TO THE THEORY OF PARAMETRIC LIGHT GENERATOR

Yu. V. Grigor'ev, V. K. Roudenko, R. V. Khokhlov

In the frames of one-mode approximation there considered a parametric oscillation excitation in Fabry-Perot type resonator filled with a nonlinear dispersing medium. A special attention is concentrated upon the system behaviour when breaking synchronism of wave interacting in the resonator and differing the resonator frequency from parametric oscillation one. The oscillation self-excitation condition has been obtained. The stationary states have been investigated and their stability has been analysed. The parametric excitation in the given system has been compared with that in the lumped-parameter system.

УДК 621.378.001.24

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УСИЛИТЕЛЯ СВЕТА НА ВОЛНУ 3,39 мк

И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев

Для разных уровней возбуждения исследованы зависимости от частоты показателя усиления линейного усилителя на волне 3,39 мк. Около центра рабочего перехода в полосе частот 400 Мгц эти зависимости оказалось возможным аппроксимировать гауссовыми кривыми. Фазочастотные характеристики усилителя вблизи рабочего перехода исследованы при помощи специально разработанной методики, состоящей в получении модулированных осциллограмм-интерферограмм. Эта методика позволяет обнаруживать изменения показателя преломления, активной среды $\sim 5 \cdot 10^{-8}$. В полосе частот 200 Мгц измеренные фазовые характеристики аппроксимируются линейной зависимостью. Оценка отношения естественной ширины перехода к допплеровской дает $\Delta\nu_N/\Delta\nu_D < 0,3$.

ВВЕДЕНИЕ

Возможность получения значительного усиления (до $10 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ и более) при электрическом разряде в Не—Не смеси на линии перехода $3s_2 - 3p_4$ позволяет использовать разряд в качестве однопроходного усилителя света на волну 3,39 мк. Сравнительная широкополосность такого усилителя (в отличие от систем с регенерацией) в сочетании с большим коэффициентом усиления в линейном режиме при малом уровне шумов представляет практический интерес для оптических систем связи при приеме слабых сигналов.

В связи с этим интересно провести исследование дисперсионных характеристик таких усилителей; попутно появляется возможность выяснения ряда физических обстоятельств, например, уточнения механизма уширения линии рабочего перехода, определения атомной температуры и т. д. Исследование дисперсионных характеристик усилителя (т. е. зависимости комплексного показателя преломления от частоты) представляет собой по существу исследование амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик усилителя.

Если на активную среду (в данном случае на разряд Не—Не) с комплексным показателем преломления $n(\nu) = n_1(\nu) + jn_2(\nu)$ падает монохроматическая плоская волна с амплитудой E_0 и частотой ν , то при прохождении пути l происходит изменение амплитуды и появляется дополнительный набег фазы волны, равный

$$2\pi\nu l(n_1 - 1)/c = \varphi \quad (1)$$

(измененная амплитуда дается выражением $E_0 \exp[2\pi\nu l n_2/c]$).

Поскольку на выходе усилительной трубки измеряется не поле, а интенсивность излучения, то в дальнейшем речь будет идти о коэффициенте усиления сигнала по мощности $K(\nu)$:

$$K(\nu) = \exp[G(\nu)l], \quad G(\nu) = \frac{4\pi\nu}{c} n_2(\nu). \quad (2)$$

В том случае, когда механизм уширения линии перехода чисто допплеровский, зависимость $G(v)$ дается кривой Гаусса [1]:

$$G(v) = G_0 \exp - [(v_D - v)/0,6\Delta v_D]^2, \quad (3)$$

где G_0 — показатель усиления на центральной частоте v_D' линии перехода, зависящий от степени инверсии населенности уровней в разряде; Δv_D — допплеровская ширина линии. При логарифмировании выражения (3) получаем линейную зависимость от квадрата отклонения частоты $(v_D - v)^2$. Тангенс угла наклона соответствующей прямой связан с шириной линии простым соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = (0,6\Delta v_D)^{-2}. \quad (4)$$

Если в уширении линии перехода помимо эффекта Доппеля существенную роль играет ее естественная ширина Δv_N , то $G(v)$ определяется выражением [1]

$$G(v) = G_0 \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{a^2 + [(v - v_D)/0,6\Delta v_D - y]^2}, \quad (5)$$

где параметр $a = \sqrt{\ln 2} \Delta v_N / \Delta v_D$. Пользуясь соотношениями между показателем усиления и фазой комплексного коэффициента усиления, аналогичными соотношениям Крамерса—Кронига*, можно рассчитать фазовую характеристику активной среды.

В соответствии с [3]

$$\varphi(v) = \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln K(v_1) dv_1}{v_1^2 - v^2}. \quad (6)$$

Для чисто гауссовой формы линии (6) приводится к выражению [4]

$$\varphi(v) = G_0 / \pi^{-1/2} \exp - \left(\frac{v_D - v}{0,6\Delta v_D} \right)^2 \int_0^{(v_D - v)/0,6\Delta v_D} e^{-x^2} dx. \quad (7)$$

Функция $\varphi(v)$ протабулирована. Используя таблицы, можно показать, что вблизи центральной частоты функция хорошо аппроксимируется прямой (при $v - v_D < 0,2\Delta v_D$ отклонение от линейной зависимости не превышает 4%), наклон которой может быть определен в соответствии с аппроксимацией, приводимой в [2]:

$$\left(\frac{d\varphi}{dv} \right)_{v=v_D} = 0,93 \frac{G_0}{\Delta v_D}. \quad (8)$$

Максимальное значение $\varphi(v)$ для гауссовой кривой имеет место при $v - v_D \approx 0,6\Delta v_D$ и равно $6 \cdot G_0 \cdot 10^{-3}$ радиан. Значения $\varphi(v)$ вблизи центральной частоты с учетом естественной ширины были рассчитаны на электронно-вычислительной машине по формуле (6) с использованием (5). Полученные зависимости представляют собою также прямые линии

* Предполагаем, следуя [2], что усиление является аналитической функцией в нижней полуплоскости комплексной переменной, что необходимо для использования соотношений Крамерса—Кронига.

(вблизи $\nu - \nu_D$), наклон которых уменьшается по мере увеличения отношения $\Delta\nu_N/\Delta\nu_D$.

1. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В проведенных экспериментах определялись зависимости от частоты коэффициента усиления по мощности (частотная характеристика) и фазового набега (фазовая характеристика) усилителя. Последний представлял из себя газоразрядную трубку с брюстеровскими окнами; разряд осуществлялся постоянным током, величина которого менялась для изменения уровня инверсии в системе. Опыты проводились с двумя трубками; длина разряда 90 см (первая трубка) и 60 см (вторая трубка). Характеристики снимались при линейном режиме работы усилителей.

В качестве источника сигнала использовалось излучение одномодового сканируемого по частоте лазерного генератора на волну 3,39 мк*. Сканирование осуществлялось с частотой 150 Гц.

Методика снятия частотных характеристик исследуемого усилителя света** состояла в получении и последующем анализе фотоосциллограмм сигнала фотоприемника при погашенной (входной сигнал усилителя) и зажженной (выходной сигнал усилителя) трубке и при различных величинах тока разряда, т. е. при различных уровнях возбуждения. Примеры таких осциллограмм приведены на рис. 1а, б. При получении осциллограмм развертка осциллографа производилась тем же напряжением, которое подавалось на пьезоцилиндр для сканирования частоты генератора. Это обеспечивало на экране осциллографа линейный масштаб по частоте и давало возможность определять величину отклонения частоты сигнала от ν_D .

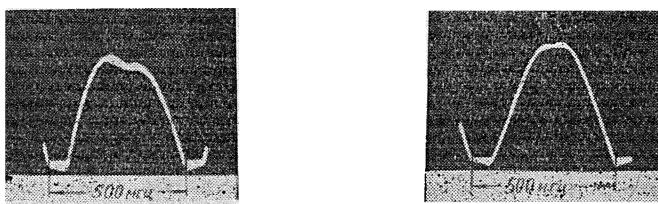


Рис. 1. Фотографии осциллограмм сигнала фотоприемника при погашенной (а) и при зажженной (б) усилительной трубке.

Соответствующей обработкой фотоосциллограмм были получены зависимости показателя усиления $\ln K(\nu)$ от частоты и от тока разряда. На рис. 2 приведены кривые $\ln K(\nu_D) = \ln K_0$ в зависимости от тока разряда для обеих усилительных трубок. Эти кривые отражают насыщение показателя усиления при больших токах разряда, причем, как показал опыт, имеет место небольшое различие при возрастании и убывании тока разряда***.

* В резонаторе генератора использовались плоские зеркала. Расстояние между зеркалами 30 см; это соответствовало расстоянию между продольными модами резонатора 500 МГц. Расстояние могло меняться в небольших пределах (порядка $\lambda/2$) подачей напряжения на пьезоэлектрический цилиндр, на котором было закреплено одно из зеркал. Генераторная трубка диаметром 3,5 мм с длиной разряда 20 см имела кварцевые окна, расположенные под углом Брюстера. Получение одномодового режима производилось введением в резонатор диафрагмы и уменьшением тока разряда.

** Аналогичная методика использовалась в работе [5] при снятии характеристик ксенонового усилителя на волну 2,026 мк.

*** Различие коэффициента усиления при возрастании и убывании тока связано в данном случае с тепловой инерцией газоразрядной плазмы.

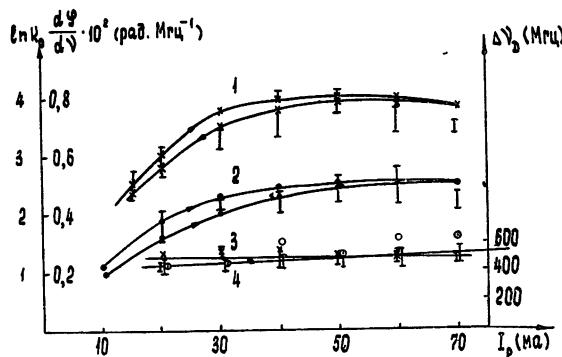


Рис. 2. Зависимость показателя усиления $\ln K_0 = G_0 I$, производной фазы $d\phi/dv$ при $v=v_D$ и ширины допплеровской кривой $\Delta\nu_D$ от тока разряда I_p :

1— $\ln K_0$ для трубки № 1; 2— $\ln K_0$ для трубки № 2; 3— $\Delta\nu_D$ для трубки № 1 ($\times \times \times$ —данные, полученные из кривой усиления); 4— $\Delta\nu_D$ для трубки № 2 ($\cdot \cdot \cdot$ —данные, полученные из кривой усиления). Вертикальные отрезки дают разброс полученных экспериментальных значений $d\phi/dv$ и значений $\Delta\nu_D$, вычисленных по формуле (8).

На рис. 3 приведены зависимости $\ln K(v)$ от $v - v_D$ для обеих усилительных трубок; зависимости хорошо аппроксимируются гауссовой кривой с шириной полосы $\Delta\nu_D$ соответственно 500 ± 40 Мгц и 450 ± 40 Мгц. Для более точного определения значений $\Delta\nu_D$ были построены зависимости $\ln \ln K(v)$ от $(v - v_D)$. Далее, согласно (4), по наклону прямых определялись значения $\Delta\nu_D$ для разных токов возбуждения. Полученные результаты приведены на рис. 2. Как видно из рисунка, значения $\Delta\nu_D$ слабо зависят от уровня возбуждения.

Точность определения коэффициента усиления связана с шириной трека осциллографа; при малых сигналах, что соответствует наибольшей расстройке от центра допплеровской кривой ($v - v_D = \pm 180$ Мгц), погрешность достигает примерно 15 %. Проверка линейности режима работы производилась путем сравнения сигналов на выходе усилителя при введении аттенюатора (стеклянной пластиинки под некоторым углом к лучу света) либо до, либо после усилительной трубки. Равенство выходных сигналов в этих двух случаях свидетельствует о линейном режиме работы усилителя.

Исследование фазовых характеристик усилителя проводилось на двухлучевой интерференционной установке, в одном плече которой находился исследуемый усилитель света. При быстром (по сравнению со скоростью изменения частоты генератора) периодическом изменении

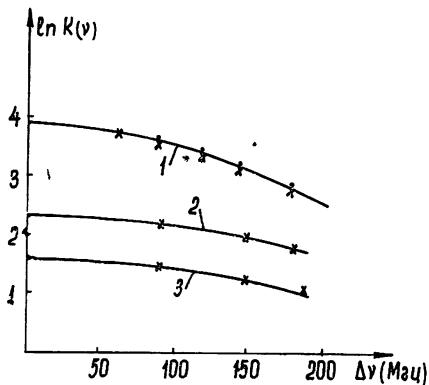


Рис. 3. Зависимость $\ln K_v$ от $v - v_D$: $\times \times \times$ —экспериментальные значения; $\cdot \cdot \cdot$ —результаты расчета по формуле (3). Кривая 1—ток разряда 50 мА (трубка № 1); 2, 3—ток разряда 30 мА и 15 мА (трубка № 2).

разности хода плеч интерферометра на величину, равную длине волны излучения, можно получить осциллограмму-интерферограмму специального вида. Указанная методика позволяет выделить и достаточно точно измерить полезный эффект на фоне всякого рода случайных изменений разности оптического хода в метровом интерферометре.

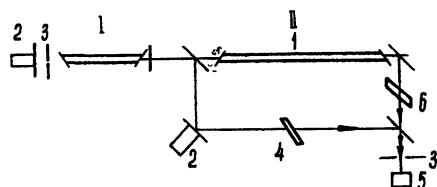


Рис. 4. Блок-схема интерферометра:
1—лазерный генератор, II—интерферометр
(I—усиливительная трубка, 2—сканируемые зеркала, 3—диафрагмы, 4—кварцевая пластина, 5—фотодиод, 6—аттенюатор).

Блок-схема установки приведена на рис. 4. Изменение оптического пути осуществлялось по гармоническому закону за счет периодического смещения зеркала 2, закрепленного на пьезоцилиндре, с частотой примерно 6 кгц. Среднее значение разности хода регулировалось поворотом кварцевой плоскопараллельной пластинки 4. Осциллограмма-интерферограмма, используемая в методике измерения фазовых характеристик, получается применением гармонической модуляции оптической разности хода плеч интерферометра с амплитудой $\lambda/2$. В этом случае интенсивность излучения на выходе интерферометра, как нетрудно видеть, меняется по закону

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \left[2\pi \frac{l_0}{\lambda} + 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} \sin(\Omega t) \right]. \quad (9)$$

Здесь I_1 и I_2 — интенсивности интерферирующих монохроматических волн, l_0 — среднее значение оптической разности хода, Δl — амплитудное значение изменения этой разности. При $\Delta l = \lambda/2$ аргумент косинуса в (9) равен $2\pi n + \psi + \pi \sin(\Omega t)$, где $n = 0, 1, 2, 3$. На рис. 5 приведена зависимость (9) для $V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = I_2/I_1 = 0,555$ и $\psi = \frac{1}{3}\pi$.

Характерно в этом графике то, что положение линии 3 промежуточных экстремумов интенсивности по отношению к линиям 1 и 2 максимальных и минимальных значений I определяется средним значением разности фаз ψ . Если воспользоваться обозначениями, введенными на рис. 5, то можно показать, что ψ связано с h и d соотношением

$$\psi = \frac{\pi}{2} \pm \arcsin \frac{h}{d}. \quad (10)$$

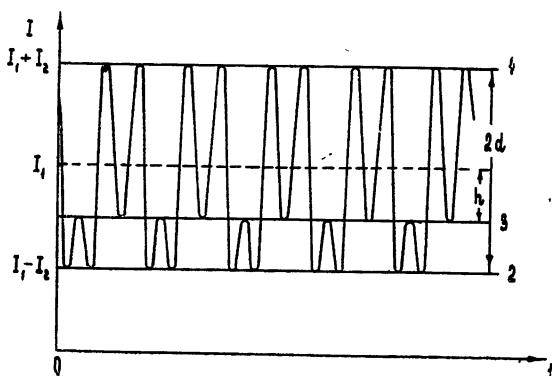


Рис. 5.

Выходной сигнал фотоприемника пропорционален интенсивности падающего излучения, поэтому его осциллограмма воспроизводит рассмотренный график*.

Предположим теперь, что частота ν излучения квазистатически меняется на величину $\Delta\nu \ll \nu$; тогда разность набега фазы в обоих плечах интерферометра практически не зависит от ν^{**} , и положение линии 3 не будет меняться. В противном случае (например, вследствие дисперсии среды, помещенной в одном из плеч интерферометра) разность фаз ϕ существенно меняется даже при малом изменении частоты ν и, следовательно, положение точек линии 3 для разных частот будет различным.

Это и должно иметь место в наших опытах при сканировании частоты лазерного генератора. Так как в этом случае происходит и изменение мощности (на входе и выходе усилителя), то осциллограмма фототока приобретает вид, изображенный на рис. 6. На рис. 6а показана фото-

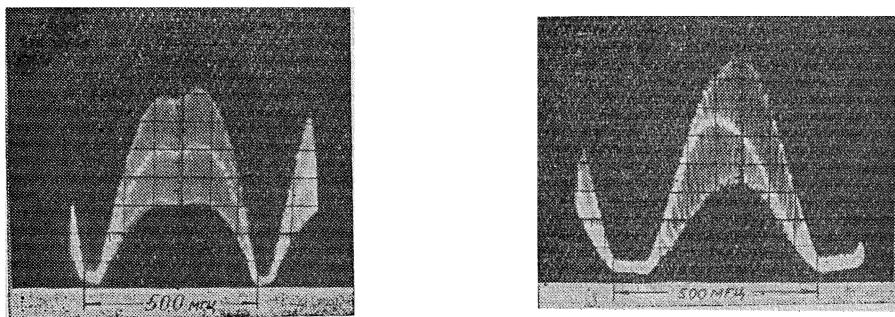


Рис. 6. Интерферограммы-осциллограммы: а—погашенная трубка; б—зажженная трубка.

осциллограмма при погашенной трубке усилителя, т. е. при отсутствии в плечах интерферометра дисперсии (аттенюатор 6 удален); рис. 6б соответствует случаю работы усилителя (аттенюатор при этом необходим для уравнивания интенсивностей обоих интерферирующих лучей). Пластиночка 4 в каждом случае устанавливалась так, чтобы в центре осциллограммы, т. е. при $\nu = \nu_D$, линия 3 была посередине между линиями экстремумов 1 и 2. В первом случае линия 3 практически оставалась посередине при всех значениях ν , во втором — линия 3 отклонялась от середины, что и говорит о наличии существенной дисперсии вблизи $\nu = \nu_D$.

Расчет значений набега фазы ϕ , обусловленного дисперсией, с учетом того, что при $\nu = \nu_D$ линия 3 проходит посередине между линиями 1 и 2 (это соответствует $\psi(\nu_D) = \pi/2$), может быть проведен с помощью соотношения

$$\varphi = \psi(\nu) - \psi(\nu_D) = \arcsin \frac{h}{d},$$

где h — отклонение от середины линии 3 на частоте ν (см. рис. 5).

Определение знака φ может производиться экспериментально путем введения дополнительного фазового сдвига, меньшего $\pi/2$, при помощи поворота пластиночки 4. Если окажется, что введение дополнительного

* Если ΔI не равна $\lambda/2$, то, как легко видеть, произойдет раздвоение линии 3; это и обеспечивает простоту установки разности хода $\Delta I = \lambda/2$.

** Например, при $l_0 = 1 \text{ см}$ и $\Delta\nu = 100 \text{ МГц}$ величина ψ меняется лишь на 0,02 радиана.

фазового сдвига уменьшает h на частоте ν (в частности, сводит к нулю), то этим самым будет произведена компенсация уменьшения фазового сдвига, введенного за счет дисперсии вещества.

После обработки интерферограмм была получена зависимость ϕ от частоты $\nu - \nu_D^*$, приведенная на рис. 7. Из рисунка видно, что во всех

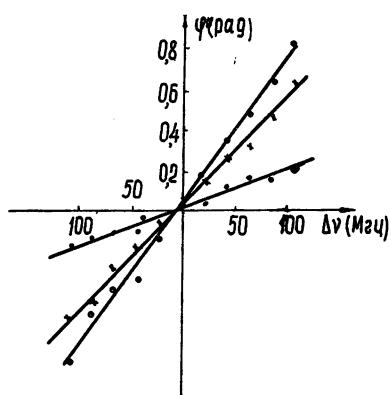


Рис. 7. Фазовые характеристики усилителя вблизи центра допплеровской кривой: кривая 1 — ток разряда $I_p = 40$ мА (трубка № 1); 2 — $I_p = 60$ мА; 3 — $I_p = 10$ мА (трубка № 2).

формуле (8). Напомним, что эта формула выведена в предположении о гауссовом законе зависимости $G(\nu)$ от $(\nu - \nu_D)^2$.

Как было указано выше (формула (1)), величина ϕ связана линейным соотношением с изменением показателя преломления n . Например, при легко определяемом в наших экспериментах фазовом сдвиге 0,1 радиана ($l = 90$ см) $\Delta n = 5 \cdot 10^{-8}$. Таким образом, использованная методика позволяет экспериментально определять отклонение n от единицы в восьмом знаке.

Заметное отличие чисто допплеровской кривой усиления от кривой усиления, в которой существенную роль играет естественная ширина, строго говоря, имеет место для частот $\Delta\nu > \Delta\nu_D/2$. Поскольку в описанных опытах измерение коэффициента усиления проводилось в области частот $\Delta\nu < \Delta\nu_D/2$, то дать точную оценку отношения $\Delta\nu_N/\Delta\nu_D$ оказалось невозможным из-за недостаточной точности измерений G_ν . Однако ряд обстоятельств, таких как совпадение кривой усиления с гауссовой кривой, а также совпадение значений $(d\phi/d\nu)(\nu = \nu_D)$, полученных из эксперимента и из расчета (с использованием выражения (8), справедливого для чисто гауссовой кривой усиления), при учете погрешности измерений позволяет произвести оценку $\Delta\nu_N \ll 0,3\Delta\nu_D$. С помощью этого неравенства по величине ширины линии гауссовой аппроксимации экспериментальной кривой усиления можно оценить границы истинной допплеровской ширины линии рабочего перехода $\Delta\nu_D^* : 340$ Мгц $\ll \Delta\nu_D^* \ll 475$ Мгц, что не противоречит результатам работ [6-8]. При повышении точности из-

* Для уменьшения ошибки при измерении ϕ фотографирование осциллограмм производилось 2-3 раза при каждом режиме работы усилителя.

исследованных режимах имеет место линейный характер зависимости ϕ от $\Delta\nu$ в диапазоне частот $\nu_D \pm 100$ Мгц. Зависимость $d\phi/d\nu$ от тока возбуждения показана на рис. 2 (вертикальные отрезки на графиках соответствуют разбросу экспериментальных значений). Согласно (7), $d\phi/d\nu$ пропорциональна $G_0 = \ln K_0$. Из рис. 2 можно видеть, что такая связь удовлетворительно согласуется с опытными данными (в пределах погрешностей наших опытов).

Из соотношения (8) для известных значений G_0 можно рассчитать $\Delta\nu$. Полученные отсюда значения $\Delta\nu_D$ приведены на рис. 2. В пределах точности измерений (15%) данные для $\Delta\nu_D$, найденные из частотных характеристик, совпадают с данными, полученными из фазовых характеристик по

мерений G , и увеличении диапазона частот, в котором производится измерение $G(v)$, можно надеяться на получение более определенных результатов.

Таким образом, результаты проведенной работы по измерению частотных характеристик двух усилительных трубок в линейном режиме работы позволяют аппроксимировать их гауссовыми кривыми в диапазоне частот $350 \div 400$ Мгц; фазовые характеристики в виде прямых удается измерить при различных уровнях возбуждения активной среды в диапазоне частот около 200 Мгц. Отметим, что разработанная методика определения фазового набега усилителя на волне $3,39 \mu$ может быть применена для измерения дисперсии на других длинах волн с соответствующими источниками когерентного излучения.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность Ю. К. Казарину за помощь в проведении экспериментов, а также И. Л. Берштейну за ряд ценных замечаний, сделанных при обсуждении результатов и просмотре рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Митчел, М. Земанский, Резонансное излучение и возбужденные атомы, Научтехиздат, М., 1937.
2. W. Bennett, Phys. Rev., **126**, 580 (1962).
3. И. С. Гоноровский, Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях, Связьиздат, М., 1954, стр. 115.
4. В. Беннет, Газовые лазеры, изд. Мир, М., 1964.
5. C. K. Patel, Phys. Rev., **181**, 1582 (1963).
6. E. I. Gordon, A. D. White, J. D. Rigden, Proc. Sympos. Opt. Masers, Brooklyn, New York, Polytech. Press, 1953, p. 301.
7. W. Bennett, Appl. Phys. Letters, **5**, 56 (1964).
8. D. Hotz, Appl. Phys. Letters, **6**, 62 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 января 1966 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF DISPERSION CHARACTERISTICS OF LIGHT AMPLIFIER AT WAVE OF $3,39\mu$

I. A. Andronova, Yu. I. Zaytsev

For a linear amplifier at the 3.39μ wave dependence of amplification index at the frequency at different levels of excitation has been investigated. It turns to be possible to approximate the dependence by Gaussian curves near the center of the action work transition in the frequency band of 400 Mc/s. Near the work transition, the phase-frequency characteristics of the amplifier have been investigated by the special method based upon the use of modulated oscillograms-interferograms. The method permits to detect the changes of the refractive index of an active medium up to $5 \cdot 10^{-8}$. In the frequency band of 200 Mc/s the measured phase characteristics have been approximated by the linear function. The ratio of the natural transition width to Doppler one may be estimated like that: $\Delta v_N / \Delta v_D < 0.3$.

УДК 538.56 : 519.25

ВЫБРОСЫ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

B. A. Маркелов

Получены выражения для среднего числа выбросов огибающей и фазы суммы нормального периодически нестационарного случайного процесса и гармонического сигнала. Приводятся также распределения производных огибающей и фазы.

В работах [1, 2] был рассмотрен ряд особенностей статистических свойств периодически нестационарного процесса, к которым относится, в частности, значительное отличие распределения огибающей от обычного релеевского и сильно неравномерное распределение фазы. Некоторые возможности использования этих особенностей обсуждались в [3, 4]. В данной статье находится среднее число выбросов огибающей и фазы суммы нормального периодически нестационарного процесса $\xi(t)$ и синусоидального сигнала $A \cos(\omega_0 t + \theta)$. При решении задачи будем исходить из совместного распределения огибающей, фазы и их первых производных в совпадающие моменты времени, которое может быть получено с помощью стандартной для теории стационарных процессов процедуры (см., например, [5], гл. 6).

Пусть исследуемый процесс $\xi(t)$ ($\langle \xi(t) \rangle = 0$) задан своей функцией корреляции

$$\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = R_0(\tau) + R_2(\tau) \exp(i2\omega_0 t) + R_2^*(\tau) \exp(-i2\omega_0 t), \quad (1)$$

где косые скобки означают статистическое усреднение. Такую функцию корреляции имеет, например, шум на выходе параметрического усилителя. Представим $\xi(t)$ в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S(\omega) d\omega, \quad (2)$$

причем согласно (1)

$$\begin{aligned} \langle S^*(\omega) S(\omega + \Omega) \rangle &= G_0(\omega) \delta(\Omega) + G_2(\omega + \omega_0) \delta(\Omega - 2\omega_0) + \\ &+ G_2^*(\omega - \omega_0) \delta(\Omega + 2\omega_0), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$G_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau; \quad G_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(\tau) \exp[i(\omega - \omega_0)\tau] d\tau,$$

$\delta(\Omega)$ — дельта-функция.

В силу очевидных свойств функции корреляции $(\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \langle \xi(t_2) \xi(t_1) \rangle)$ справедливо соотношение $R_n(-\tau) = R_n(\tau) \exp(-in\omega_0\tau)$, где $n = 0$ или 2 . Поэтому $G_n(\omega) = G_n(-\omega)$ и, кроме того, $G_0(\omega) = G_0^*(\omega)$. Учитывая это, из (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle &= 2 \int_0^\infty G_0(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega + 2 \left[\exp\{i\omega_0(2t+\tau)\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty G_2(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega + \text{к. с.} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем сопряженный по Гильберту процесс, который, как известно, равен (см. [6], гл. 5)

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} i \operatorname{sgn}(\omega) S(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Для функции корреляции сопряженного процесса согласно (5) и (3) имеем

$$\begin{aligned} \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle &= 2 \int_0^\infty G_0(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega - 2 \left[\exp[i\omega_0(2t+\tau)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\omega_0} G_2(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega - \int_{\omega_0}^\infty G_2(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \right] + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (6)$$

откуда следует, что функции корреляции процесса $\xi(t)$ и сопряженного с ним $\eta(t)$ отличаются только слагаемыми, зависящими от t .

Введем теперь случайные процессы $a(t)$ и $b(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) &= \xi(t) \cos(\omega_0 t) + \eta(t) \sin(\omega_0 t), \\ b(t) &= \xi(t) \sin(\omega_0 t) - \eta(t) \cos(\omega_0 t), \end{aligned} \quad (7)$$

функции корреляции которых нетрудно получить, исходя из (4), (6) и (7):

$$\begin{aligned} \langle a(t)a(t+\tau) \rangle &= 2 \int_0^\infty G_0(\omega) \cos[(\omega - \omega_0)\tau] d\omega + \\ &+ 4 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\omega_0} G_2(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega + \exp(i2\omega_0 t) \int_{\omega_0}^\infty G_2(\omega) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(i\omega\tau) d\omega \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle b(t)b(t+\tau) \rangle &= 2 \int_0^\infty G_0(\omega) \cos[(\omega - \omega_0)\tau] d\omega - 4 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\omega_0} G_2(\omega) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\omega\tau) d\omega + \exp(i2\omega_0 t) \int_{\omega_0}^\infty G_2(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle a(t)b(t+\tau) \rangle &= -2 \int_0^\infty G_0(\omega) \sin[(\omega - \omega_0)\tau] d\omega - \\ &- 4 \operatorname{Im} \left[\int_0^{\omega_0} G_2(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega + \exp(i2\omega_0 t) \int_{\omega_0}^\infty G_2(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Как видим, $a(t)$ и $b(t)$ так же, как и $\xi(t)$, являются, вообще говоря, пе-

периодически нестационарными процессами. Однако, если предположить, что процесс узкополосный и его спектральные компоненты сосредоточены вблизи частот $\pm \omega_0$, то функция $G_0(\omega)$ будет существенно отлична от нуля лишь около $\omega = \omega_0$, а $G_2(\omega)$ — около $\omega = 0$ (напомним, что $2\omega_0$ — частота нестационарности процесса). Поэтому в выражениях (8), (9), (10) можно пренебречь членами, содержащими зависимость от t ; следовательно, $a(t)$ и $b(t)$ при указанных выше ограничениях на $\xi(t)$ будут стационарными и стационарно-связанными медленно меняющимися случайными процессами. Однако в отличие от случая стационарного $\xi(t)$ функции корреляции $a(t)$ и $b(t)$ оказываются теперь не равными друг другу.

Рассмотрим сумму исследуемого нестационарного процесса $\xi(t)$ и синусоидального сигнала с частотой ω_0 :

$$x(t) = \xi(t) + A \cos(\omega_0 t - \theta). \quad (11)$$

Огибающую и фазу определим при помощи обычных соотношений

$$\begin{aligned} E(t) &= \{[a(t) + A \cos \theta]^2 + [b(t) + A \sin \theta]^2\}^{\frac{1}{2}}; \\ \varphi(t) &= \arctg \frac{b(t) + A \sin \theta}{a(t) + A \cos \theta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Совместное распределение огибающей, фазы и их первых производных найдем, исходя из четырехмерного распределения случайных величин $a_1 = a(t)$; $a_2 = b(t)$; $a_3 = \dot{a}(t)$; $a_4 = \dot{b}(t)$ (точка означает производную по времени). Поскольку $a(t)$ и $b(t)$ связаны с $\xi(t)$ и $\eta(t)$ линейным преобразованием, а $\eta(t)$ получается из $\xi(t)$ также при помощи линейного преобразования (преобразования Гильберта), то распределение $W(a_1, a_2, a_3, a_4)$ является четырехмерным нормальным распределением.

Корреляционная матрица этого распределения согласно (8), (9), (10) будет иметь вид

$$\|\langle a_i a_j \rangle\| = \begin{vmatrix} \sigma^2(1 + \gamma_1) & -\sigma^2 \gamma_2 & 0 & \sigma^2 \Omega_1 \\ -\sigma^2 \gamma_2 & \sigma^2(1 - \gamma_1) & -\sigma^2 \Omega_1 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \Omega_1 & \sigma^2 \Omega_2^2 & 0 \\ \sigma^2 \Omega_1 & 0 & 0 & \sigma^2 \Omega_2^2 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где $\sigma^2 = 2 \int_0^\infty G_0(\omega) d\omega$ — средняя интенсивность процесса $\xi(t)$, величины

$\gamma_1 = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty \operatorname{Re}[G_2(\omega)] d\omega$ и $\gamma_2 = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty \operatorname{Im}[G_2(\omega)] d\omega$ характеризуют степень его нестационарности, а

$$\Omega_1 = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty (\omega - \omega_0) G_0(\omega) d\omega; \quad \Omega_2^2 = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 G_0(\omega) d\omega.$$

Вычисляя обычным образом $W(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ([5], гл. 2), переходя затем к переменным E , \dot{E} , φ , $\dot{\varphi}$ и считая для простоты выкладок $\Omega_1 = 0$ (спектр расположен симметрично относительно частоты ω_0), получим искомое распределение.

$$W(E, \dot{E}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{E^2}{4\pi^2 \sqrt{1-\gamma^2} \Omega_2^2 \sigma^4} \times \\ \times \exp\{-[E^2[1-\gamma \cos 2\psi] - 2EA[\cos(\psi-\theta) - \gamma \cos(\psi+\theta)] + \\ + A^2[1-\gamma \cos 2\theta]]/2\sigma^2(1-\gamma^2) + (\dot{E}^2 + E^2\dot{\psi}^2)/2\sigma^2\Omega_2^2\}. \quad (14)$$

Здесь $\psi = \varphi - \arctg(\gamma_2/\gamma_1)$, $\gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$, причем, как следует из неравенства Коши—Буняковского $\langle ab \rangle^2 \leq \langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle$, $0 < \gamma < 1$. Стационарному процессу соответствует величина $\gamma = 0$, предельно нестационарному — $\gamma = 1$.

Полученное выражение будет использовано для нахождения среднего числа выбросов огибающей и фазы. Интегрируя (14) по ψ и $\dot{\psi}$, получим

$$W(E, \dot{E}) = \frac{E}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\gamma^2}} \exp\{-A^2[1-\gamma \cos 2\theta][2\sigma^2(1-\gamma^2)]^{-1}\} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \exp\{-[E^2[1-\gamma \cos 2\psi] - 2EA[\cos(\psi-\theta) - \gamma \cos(\psi+\theta)]]\} \times \quad (15) \\ \times [2\sigma^2(1-\gamma^2)]^{-1} d\psi (2\pi\sigma^2\Omega_2^2)^{-1/2} \exp[-\dot{E}^2/2\sigma^2\Omega_2^2] = W(E)W(\dot{E}).$$

Таким образом, как и в случае стационарного $\xi(t)$, E и \dot{E} независимы в совпадающие моменты времени, причем распределение (одномерное) \dot{E} нормально. Нестационарность процесса влияет здесь в основном на вид распределения огибающей*.

Среднее число выбросов огибающей за единицу времени над некоторым уровнем E_0 согласно [7] будет составлять

$$N(E_0) = \int_0^\infty \dot{E} W(\dot{E}_0, \dot{E}) d\dot{E} = \frac{\sigma\Omega_2}{\sqrt{2\pi}} W(E_0), \quad (16)$$

т. е. при указанных выше ограничениях среднее число выбросов пропорционально плотности вероятности.

При $A = 0$ (сигнал отсутствует) для $W(E)$ имеем из (15)

$$W(E) = \frac{E}{\sigma^2 \sqrt{1-\gamma^2}} \exp[-E^2/2\sigma^2(1-\gamma^2)] I_0[\gamma E^2/2\sigma^2(1-\gamma^2)]. \quad (17)$$

Здесь и в дальнейшем I_n — модифицированная функция Бесселя n -го порядка. Выражение для распределения огибающей при произвольных A и θ , ввиду его громоздкости, приводить не будем, а ограничимся лишь рассмотрением некоторых частных случаев**.

Рассмотрим поведение $W(E)$ вблизи нуля, где наиболее сильна деформация кривой распределения (следовательно, и среднего числа выбросов) под влиянием слабого сигнала ($A < \sigma$). Полагая $E < \sigma\sqrt{1-\gamma^2}$, из (15) получим

$$W(E) \simeq \frac{E}{\sigma^2 \sqrt{1-\gamma^2}} \exp[-A^2(1-\gamma \cos 2\theta)/2\sigma^2(1-\gamma^2)]. \quad (18)$$

* Заметим, что выражение (15) было получено в предположении $\Omega_1 = 0$. При $\Omega_1 \neq 0$ независимость E и \dot{E} уже не будет иметь места, в отличие от случая стационарного $\xi(t)$, когда в совпадающие моменты времени E и \dot{E} независимы при любых Ω_1 .

** Вопрос о распределении огибающей периодически нестационарного процесса был достаточно подробно рассмотрен в работе [1]; формулы (18) и (19) дополняют полученные там результаты.

Отсюда видно, что наличие сигнала уменьшает наклон начального участка кривых $W(E)$ и $N(E_0)$, причем существенную роль в этом играет фаза сигнала θ .

На практике наиболее интересен случай, когда $\theta = 0$; при этом для $W(E)$ получается сравнительно простое выражение, особенно если сигнал мал ($A < \sigma$):

$$W(E) = \frac{E}{\sigma^2 \sqrt{1 - \gamma^2}} \exp[-A^2/2\sigma^2(1 + \gamma)] \exp[-E^2/2\sigma^2(1 - \gamma^2)] \times \\ \times \left(I_0 \left[\frac{\gamma E^2}{2\sigma^2(1 - \gamma^2)} \right] + \frac{E^2 A^2}{4\sigma^4(1 + \gamma)^2} \left\{ I_0 \left[\frac{\gamma E^2}{2\sigma^2(1 - \gamma^2)} \right] + I_1 \left[\frac{\gamma E^2}{2\sigma^2(1 - \gamma^2)} \right] \right\} \right). \quad (19)$$

Перейдем теперь к рассмотрению фазы и ее производной. Из (14) после соответствующего интегрирования получаем

$$W(\psi, \dot{\psi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{1 - \gamma^2} \Omega_2 \sigma^3} \left\{ -\frac{v}{2\mu^2} + \sqrt{\frac{\pi}{\mu^5}} \frac{2v^2 + \mu}{4} \times \right. \\ \left. \times \exp(v^2/\mu) [1 - \Phi(v/\sqrt{\mu})] \right\}, \quad (20)$$

где

$$v = -A[\cos(\psi - \theta) - \gamma \cos(\psi + \theta)]/2\sigma^2(1 - \gamma^2),$$

$$\mu = [1 - \gamma \cos 2\psi + (1 - \gamma^2)\dot{\psi}^2/\Omega_2^2]/2\sigma^2(1 - \gamma^2), \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

В отсутствие сигнала ($A = 0$) формула (20) значительно упрощается:

$$W(\psi, \dot{\psi}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\Omega_2 \sqrt{1 - \gamma^2}} \left[\frac{1 - \gamma \cos 2\psi}{1 - \gamma^2} + \frac{\dot{\psi}^2}{\Omega_2^2} \right]^{-3/2}. \quad (21)$$

Поделив полученное выражение на величину $W(\psi) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(1 - \gamma^2)^{1/2}}{1 - \gamma \cos 2\psi} \right]^*$, найдем условное распределение $\dot{\psi}$:

$$W(\dot{\psi}/\psi) = \frac{1}{2\Omega_*} \left[1 + \frac{\dot{\psi}^2}{\Omega_*^2} \right]^{-3/2}, \quad (22)$$

где $\Omega_* = \Omega_2 \sqrt{(1 - \gamma \cos 2\psi)/(1 - \gamma^2)}$. При каждом фиксированном ψ распределение (22), как видим, совпадает с распределением $\dot{\psi}$ для стационарного случая (см., например, [5], гл. 8), причем параметром, соответствующим среднеквадратичной ширине спектра, вместо Ω_2 является Ω_* . Таким образом, в областях наибольшего сосредоточения фазы ($\psi = 0$ и π) скорость ее изменения наименьшая ($(|\dot{\psi}|)_{\psi=0,\pi} = \Omega_2 / \sqrt{1 + \gamma}$); на границе же между этими областями ($\psi = \pi/2$) фаза изменяется значительно быстрее ($(|\dot{\psi}|)_{\psi=\pi/2} = \Omega_2 / \sqrt{1 - \gamma}$). Из (21) нетрудно получить и безусловное распределение

$$W(\dot{\psi}) = \frac{1}{2\Omega_2} \frac{(1 - \gamma^2)}{v^2 - \gamma^2} \sqrt{v + \gamma} \frac{2}{\pi} E \left(\frac{2\gamma}{v + \gamma} \right), \quad (23)$$

* Формула для $W(\psi)$ и соответствующие графики приведены в [1].

где

$$v = \left[1 + \frac{\dot{\psi}^2(1 - \gamma^2)}{\Omega_2^2} \right]; \quad E(k^2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

На рис. 1 изображены кривые $W(\psi)$ для двух крайних значений γ : $\gamma=0$ и $\gamma=1$. Как видно из рисунка, на интервале порядка нескольких Ω_2 поведение $W(\psi)$ мало зависит от степени нестационарности процесса γ . Однако крылья $W(\psi)$ в случае нестационарного $\xi(t)$ ($\gamma \neq 0$) спадают несколько медленнее, чем при $\gamma = 0$; это приводит к тому, что среднее от абсолютных значений производной фазы

$$\langle |\dot{\psi}| \rangle = \frac{\Omega_2}{1 + \gamma} \frac{2}{\pi} K \left(\frac{2\gamma}{1 + \gamma} \right), \quad (24)$$

где

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi,$$

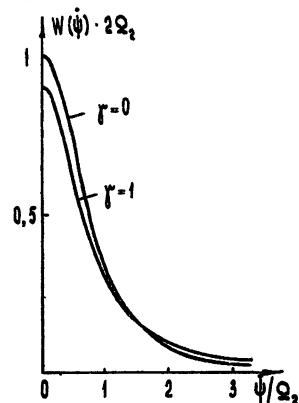


Рис. 1.

при $\gamma \rightarrow 1$ неограниченно возрастает (рост этот, правда, очень медленный)..

Найдем среднее число пересечений фазой некоторого уровня ψ_0 (в одну сторону). Учитывая (20), запишем

$$N(\psi_0) = \int_0^\infty \psi W(\psi_0, \psi) d\psi = \Omega_2 / 4\pi \sqrt{1 - \gamma \cos 2\psi_0} \times \\ \times \exp[-A^2(1 - \gamma \cos 2\theta)/2\sigma^2(1 - \gamma^2)] \exp(v^2/\mu_*^2) [1 - \Phi(v/\sqrt{\mu_*})], \quad (25)$$

где

$$\mu_* = (1 - \gamma \cos 2\psi_0) / 2\sigma^2(1 - \gamma^2),$$

$$v = -A[\cos(\psi - \theta) - \gamma \cos(\psi + \theta)] / 2\sigma^2(1 - \gamma^2).$$

При $A = 0$ из (25) получается

$$N(\psi_0) = \frac{\Omega_2}{4\pi} (1 - \gamma \cos 2\psi_0)^{-1/2}. \quad (26)$$

Таким образом, хотя по мере возрастания нестационарности процесса ($\gamma \rightarrow 1$) фаза все большее время находится вблизи точек $\psi = 0$ и $\psi = \pi$, среднее число пересечений границы между областями притяжения фазы $N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Omega_2}{4\pi} (1 + \gamma)^{-1/2}$ почти не изменяется. Присутствие сигнала с фазой $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ уменьшает величину $N(\pi/2)$. Так, если $\theta = 0$ или π , то из (25) имеем

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Omega_2}{4\pi \sqrt{1 + \gamma}} \exp[-A^2/2\sigma^2(1 + \gamma)], \quad (27)$$

при этом

$$N(0) = \frac{\Omega_2}{4\pi\sqrt{1-\gamma}} [1 \pm \Phi(A[2\sigma^2(1+\gamma)]^{-1/2})], \quad (28)$$

где верхний знак относится к $\theta = 0$, а нижний к $\theta = \pi$.

На рис. 2а, б в качестве примера изображены кривые $N(\psi_0)$ для некоторых значений A и θ при $\gamma = 0,99$. Из них видно, что при одной и той же амплитуде характер кривых существенно зависит от фазы сигнала. Для сравнения на рис. 2в приведены кривые для случая стационарного процесса ($\gamma = 0$).

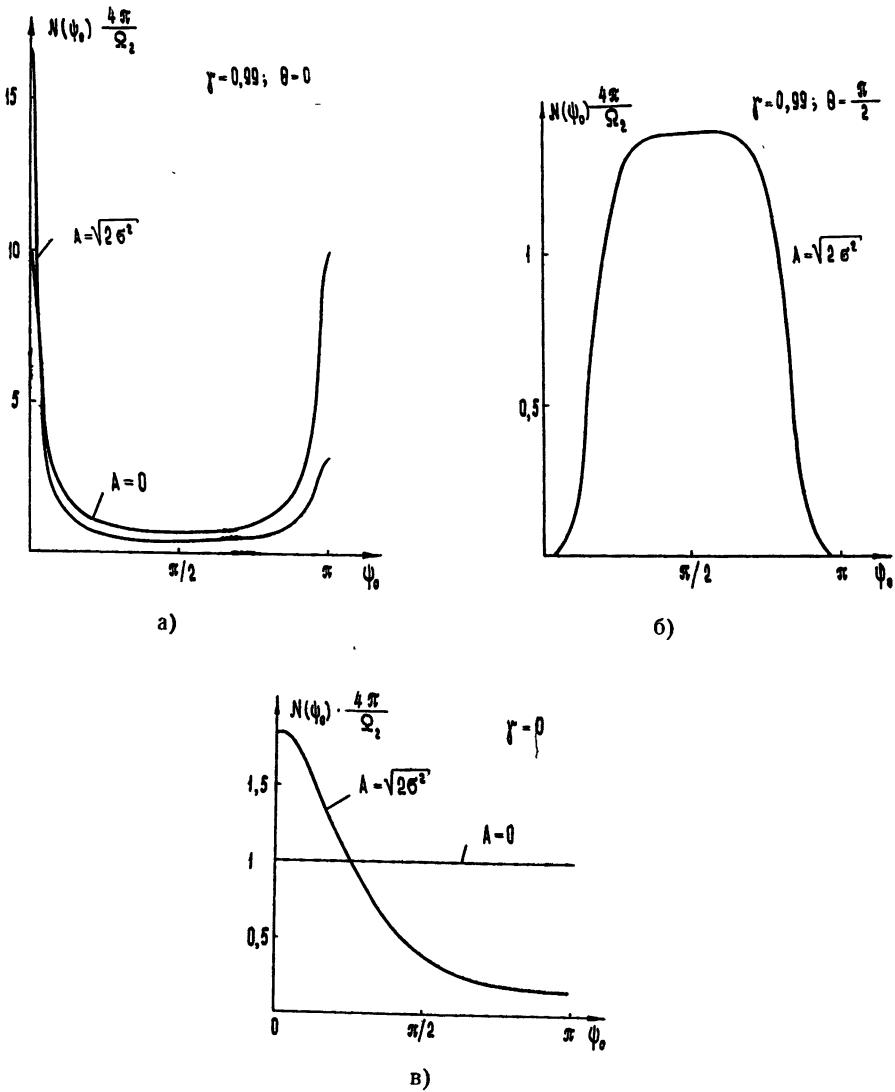


Рис. 2.

Полученные результаты о выбросах огибающей и фазы периодически нестационарного процесса могут представить интерес в задачах, связанных с выделением слабого сигнала при помощи систем с переменными параметрами.

В заключение выражают благодарность И. Л. Берштейну и К. А. Горониной за обсуждение результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, 8, 1812 (1963).
2. В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
3. С. А. Ахманов, Р. В. Хоклов, Радиотехника и электроника, 6, 1813 (1961).
4. Г. И. Рожкова, В. С. Эткин, Радиотехника и электроника, 7, 1451 (1962).
5. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1960.
6. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.
7. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 9, 371 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 февраля 1966 г.

AXIS-CROSSINGS OF AMPLITUDE AND PHASE OF NONSTATIONARY
RANDOM PROCESS

V. A. Markelov

The expressions have been derived for a mean number of axis-crossings of amplitude and phase of the sum of normal periodically nonstationary noise and the harmonic signal. The distributions of amplitude and phase derivatives are also given.

УДК 62—501.32

СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. II

Г. Н. Бочков

Рассматривается стохастическая осцилляторная система второго порядка и анализируются условия устойчивости амплитуды и фазы колебания при широкополосных флуктуациях параметров.

В работе [1] было рассмотрено линейное однородное уравнение второго порядка с флуктуирующими коэффициентами:

$$\ddot{x} + [2h + \Delta b(t)]\dot{x} + [\omega_0^2 + \Delta a(t)]x = 0; \\ x(0) = x_0 \neq 0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \quad Q = \omega_0/2h > 1, \quad (1)$$

где $\Delta a(t)$ и $\Delta b(t)$ — случайные стационарные стационарно связанные нормально распределенные процессы с нулевыми средними значениями и заданными функциями корреляции. Были получены следующие нелинейные уравнения, описывающие поведение амплитуды $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$ решения $x(t) = A(t) \cos [\omega_1 t + \varphi(t)]$:

$$\dot{A} = -hA - u_0 A + [u \cos(2\varphi) + v \sin(2\varphi)]A; \\ \dot{\varphi} = v_0 + [v \cos(2\varphi) - u \sin(2\varphi)]. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$u = \frac{1}{4} \left(b_{\parallel} - \frac{1}{\omega_1} a_{\perp} + \frac{h}{\omega_1} b_{\perp} \right), \quad u_0 = \frac{1}{4} b_{\parallel 0}, \quad (3)$$

$$v = \frac{1}{4} \left(b_{\perp} + \frac{1}{\omega_1} a_{\parallel} - \frac{h}{\omega_1} b_{\parallel} \right), \quad v_0 = \frac{1}{4\omega_1} (a_{\parallel 0} - hb_{\parallel 0}),$$

$$b_{\parallel} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\tau)}{\Delta b(\tau)} \cos(2\omega_1 \tau) d\tau; \quad b_{\perp} = -\frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\tau)}{\Delta b(\tau)} \sin(2\omega_1 \tau) d\tau; \quad (4)$$

$$b_{\parallel 0} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\tau)}{\Delta b(\tau)} d\tau; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - h^2.$$

Эти уравнения были получены при условии малости флуктуаций параметров, когда

$$\sqrt{\langle \Delta b^2 \rangle} \ll \omega_0, \quad \sqrt{\langle \Delta a^2 \rangle} \ll \omega_0^2. \quad (5)$$

Уравнения (2) справедливы при любых спектральных плотностях флуктуаций параметров Δa и Δb ; однако в общем случае произвольных флуктуаций точное решение уравнений (2) является весьма сложным.

В [1] рассматривался случай медленно меняющихся по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$ флуктуаций параметров Δa и Δb . В настоящей статье, которая является продолжением работы [1], мы будем исследовать статистическую устойчивость амплитуды и фазы в случае широкополосных флуктуаций параметров.

1. Рассмотрим некоторые характеристики случайных функций u, v, u_0, v_0 . Обратимся сначала к их функциям корреляции, которые определим следующим образом:

$$\Phi_u(\tau) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle u(t) u(t + \tau) \rangle dt;$$

$$\Phi_{uv}(\tau) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle u(t) v(t + \tau) \rangle dt,$$
(6)

($\langle u \rangle = \langle v \rangle = \langle u_0 \rangle = \langle v_0 \rangle = 0$, $\langle \dots \rangle$ — статистическое усреднение).

Функции корреляции u и v легко могут быть выражены (на основании соотношений (3)) через функции корреляции процессов $a_{\parallel}, a_{\perp}, a_{\parallel 0}, b_{\parallel}, b_{\perp}, b_{\parallel 0}$:

$$\Phi_u(\tau) = \Phi_v(\tau) = \frac{1}{16\omega_1^2} [\Phi_{a_{\parallel}}(\tau) + \omega_0^2 \Phi_{b_{\parallel}}(\tau) + 2\omega_1 \Phi_{a_{\parallel} b_{\perp}}^0(\tau) - 2h \Phi_{a_{\parallel} b_{\parallel}}^0(\tau)];$$

$$\Phi_{uv}(\tau) = -\Phi_{vu}(\tau) = \frac{1}{16\omega_1^2} [\Phi_{a_{\parallel} \perp}(\tau) + \omega_0^2 \Phi_{b_{\parallel} \perp}(\tau) - 2\omega_1 \Phi_{a_{\parallel} b_{\parallel}}^1(\tau) - 2h \Phi_{a_{\parallel} b_{\perp}}^1(\tau)];$$

$$\Phi_{u_0}(\tau) = \frac{1}{16} \Phi_{b_{\parallel 0}}(\tau); \quad \Phi_{v_0}(\tau) = \frac{1}{16\omega_1^2} [\Phi_{a_{\parallel 0}}(\tau) + h^2 \Phi_{b_{\parallel 0}}(\tau) - 2h \Phi_{a_{\parallel 0} b_{\parallel 0}}^0(\tau)];$$

$$\Phi_{u_0 v_0}(\tau) = \frac{1}{16\omega_1} [\Phi_{b_{\parallel 0} a_{\parallel 0}}(\tau) - h \Phi_{b_{\parallel 0}}(\tau)]; \quad \Phi_{uu_0} = \Phi_{uv_0} = \Phi_{vv_0} = \Phi_{vu_0} \equiv 0.$$
(7)

Вычисляя функции корреляции и спектры процессов a, b (см. Приложение) и переходя от (7) к спектральным плотностям параметров u и v , будем иметь

$$S_u(\Omega) = \frac{1}{8\omega_1^2} [\widetilde{S}_{\Delta a}^0(\Omega) + \omega_0^2 \widetilde{S}_{\Delta b}^0(\Omega) - 2\omega_1 \widetilde{S}_1^0(\Omega) - 2h \widetilde{S}_0^0(\Omega)] I(\Omega T);$$

$$S_{uv}(\Omega) = \frac{1}{8\omega_1^2} [\widetilde{S}_{\Delta a}^1(\Omega) + \omega_0^2 \widetilde{S}_{\Delta b}^1(\Omega) - 2\omega_1 \widetilde{S}_1^1(\Omega) - 2h \widetilde{S}_0^1(\Omega)] I(\Omega T);$$

$$S_{u_0}(\Omega) = \frac{1}{4} S_{\Delta b}(\Omega) I(\Omega T); \quad S_{v_0}(\Omega) = \frac{1}{4\omega_1^2} [S_{\Delta a}(\Omega) + h^2 S_{\Delta b}(\Omega) - 2h S_{\Delta a \Delta b}^0(\Omega)] I(\Omega T);$$

$$S_{u_0 v_0}^0(\Omega) = \frac{1}{4\omega_1} [S_{\Delta a \Delta b}^0(\Omega) - h S_{\Delta b}(\Omega)] I(\Omega T); \quad S_{u_0 v_0}^1(\Omega) = -\frac{1}{4\omega_1} S_{\Delta a \Delta b}^1(\Omega) I(\Omega T).$$
(8)

Здесь введены следующие обозначения:

$$I(\Omega T) = \frac{\sin^2 \Omega T / 2}{(\Omega T / 2)^2};$$

$$\begin{aligned}
 S_{\Delta a}(\Omega + 2\omega_1) &= \widetilde{S}_{\Delta a}(\Omega); \quad \widetilde{S}_{\Delta a}(\Omega) = \widetilde{S}_{\Delta a}^0(\Omega) + \widetilde{S}_{\Delta a}^1(\Omega); \\
 S_{\Delta b}(\Omega + 2\omega_1) &= \widetilde{S}_{\Delta b}(\Omega); \quad \widetilde{S}_{\Delta b}(\Omega) = \widetilde{S}_{\Delta b}^0(\Omega) + \widetilde{S}_{\Delta b}^1(\Omega); \\
 S_{\Delta a \Delta b}^0(\Omega + 2\omega_1) &= \widetilde{S}_0(\Omega); \quad \widetilde{S}_0(\Omega) = \widetilde{S}_0^0(\Omega) + \widetilde{S}_0^1(\Omega); \\
 S_{\Delta a \Delta b}^1(\Omega + 2\omega_1) &= \widetilde{S}_1(\Omega); \quad \widetilde{S}_1(\Omega) = \widetilde{S}_1^0(\Omega) + \widetilde{S}_1^1(\Omega)
 \end{aligned} \tag{8a}$$

(верхние индексы нуль и единица означают соответственно четную и нечетную функции аргумента, обозначение \widetilde{S} указывает на сдвиг спектра $S(\omega)$ по оси частот на $2\omega_1$).

2. Примененный при выводе уравнений (2) метод усреднения [1] уже предполагает, что спектры A и φ сосредоточены в некоторой узкой полосе $\Delta\Omega \ll \omega_1$ (A и φ — медленные функции времени по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$). Таким образом, все рассмотренное справедливо до частот $\Omega_{\max} \ll \omega_1$; поэтому целесообразно точные выражения (8) для спектральных плотностей параметров, входящих в уравнение (2), заменить следующими, положив в (8) множитель $I(\Omega T) = 1$:

$$\begin{aligned}
 S_u(\Omega) &= \frac{1}{8\omega_1^2} [\widetilde{S}_{\Delta a}^0(\Omega) + \omega_0^2 \widetilde{S}_{\Delta b}^0(\Omega) - 2h \widetilde{S}_0^0(\Omega) - 2\omega_1 \widetilde{S}_1^0(\Omega)]; \\
 S_{uv}(\Omega) &= \frac{1}{8\omega_1^2} [\widetilde{S}_{\Delta a}^1(\Omega) + \omega_0^2 \widetilde{S}_{\Delta b}^1(\Omega) - 2h \widetilde{S}_0^1(\Omega) - 2\omega_1 \widetilde{S}_1^1(\Omega)]; \\
 S_{u_0}(\Omega) &= \frac{1}{4} S_{\Delta b}(\Omega); \quad S_{v_0}(\Omega) = \frac{1}{4\omega_1^2} [S_{\Delta a}(\Omega) + h^2 S_{\Delta b}(\Omega) - 2h S_{\Delta a \Delta b}^0(\Omega)]; \\
 S_{u_0 v_0}^0(\Omega) &= \frac{1}{4\omega_1} [S_{\Delta a \Delta b}^0(\Omega) - h S_{\Delta b}(\Omega)]; \quad S_{u_0 v_0}^1(\Omega) = -\frac{1}{4\omega_1} S_{\Delta a \Delta b}^1(\Omega).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что эта замена практически никак не отразится на исходных уравнениях, если ширина спектров флуктуаций параметров $S_{\Delta a}$, $S_{\Delta b}$ на нулевой частоте и на частоте $2\omega_1$ сравнима с $\Delta\Omega$ или меньше $\Delta\Omega$. Если же ширина спектров $S_{\Delta a}$, $S_{\Delta b}$ много больше, чем $\Delta\Omega$, то эта замена эквивалентна замене флуктуаций параметров Δa и Δb , имеющих время корреляции, много меньшее ($\Delta\Omega$) $^{-1}$, дельта-коррелированными.

Пусть теперь флуктуации параметров Δa и Δb представляют собой достаточно широкополосные процессы, так чтобы соответствующие им параметры u , v и u_0 , v_0 в уравнениях (2) можно было считать δ -коррелированными со спектральными плотностями, определяемыми по формулам (9). В этом случае совокупность величин $\{A, \varphi\}$ образует марковский процесс, и для решения уравнения (2) можно применить метод уравнения Эйнштейна—Фоккера*.

* Широкополосность процессов u_0 и v_0 требуется здесь для упрощения дальнейших выкладок. В том случае, если u_0 и v_0 не являются широкополосными, мы можем считать их компонентами марковского процесса $\{A, \varphi, u_0, v_0\}$, дополнив систему (2) следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_0 &= -\beta_1 u_0 + \alpha_1; \\
 \dot{v}_0 &= -\beta_2 v_0 + \alpha_2,
 \end{aligned}$$

где α_1 и α_2 — достаточно широкополосные процессы. Расчет, проведенный в этом случае, полностью аналогичен упрощенному и приводит к тому же самому результату.

3. Для вероятности переходов $W(A_0, \varphi_0, t_0; A, \varphi, t)$ уравнение Эйнштейна—Фоккера имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A} [K_{10} W] - \frac{\partial}{\partial \varphi} [K_{01} W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} [K_{20} W] + \frac{\partial^2}{\partial A \partial \varphi} [K_{11} W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [K_{02} W], \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} K_{10} &= K_{10}(A, \varphi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta A \rangle, \\ K_{01} &= K_{01}(A, \varphi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta \varphi \rangle, \\ K_{20} &= K_{20}(A, \varphi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta A^2 \rangle, \\ K_{11} &= K_{11}(A, \varphi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta A \Delta \varphi \rangle, \\ K_{02} &= K_{02}(A, \varphi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta \varphi^2 \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Приращения $\Delta A = A(t + \tau) - A(t)$ и $\Delta \varphi = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$ для уравнения (2) равны соответственно

$$\begin{aligned} \Delta A &= \int_t^{t+\tau} \{ -hA - u_0 A + [u \cos(2\varphi) + v \sin(2\varphi)] A \} dt; \\ \Delta \varphi &= \int_t^{t+\tau} \{ v_0 + [v \cos(2\varphi) - u \sin(2\varphi)] \} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Для решения вопроса о статистической устойчивости амплитуды и фазы необходимо определить средние значения и средние квадраты $\xi(t) = [A(t) - A^0(t)]$ и $\eta(t) = [\varphi(t) - \varphi^0(t)]$, где $A^0(t)$ и $\varphi^0(t)$ — амплитуда и фаза решения в отсутствие флуктуаций параметров ($\Delta a \equiv 0$, $\Delta b \equiv 0$). Эти статистические характеристики можно найти известным образом из вероятности переходов $W(A_0, \varphi_0, t_0; A, \varphi, t)$, которая однозначно определяется, как решение (10) с определенными начальными условиями.

Вычисляя коэффициенты уравнения (10) с помощью (11), (12) и с учетом (9), будем иметь

$$\begin{aligned} K_{10} &= -hA, \quad K_{01} = 0, \quad K_{20} = 2\pi A^2 [S_{u_0}(0) + S_u(0)], \\ K_{11} &= -2\pi A S_{u_0 v_0}^0(0), \quad K_{02} = 2\pi [S_{v_0}(0) + S_v(0)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Записывая уравнение (10) с коэффициентами (13) и решая его, можно найти $W(A_0, \varphi_0, t_0; A, \varphi, t)$, а затем необходимые нам статистические характеристики $A(t)$ и $\varphi(t)$. Однако то обстоятельство, что вычисленные коэффициенты K_{ij} не зависят от фазы φ , позволяет нам записать более простую систему уравнений для A и φ , статистически эк-

вивалентную (2). Для этого в уравнениях (2) полагаем $\varphi = 0^*$. Тогда исходные уравнения примут вид

$$\dot{A} = -hA - u_0 A + uA; \quad (14a)$$

$$\dot{\varphi} = v_0 + v. \quad (14b)$$

Итак, уравнения (14) и (2) дают одинаковое значение вероятности переходов $W(A_0, \varphi_0, t_0; A, \varphi, t)$, а следовательно, одни и те же вероятностные характеристики переменных. Для нас существенно также и то, что невозмущенные уравнения (уравнения в отсутствие флюктуаций параметров: $\Delta a \equiv 0$, $\Delta b \equiv 0$) также одинаковы. Таким образом, искомые средние значения и средние квадраты $\xi(t)$ и $\eta(t)$ для уравнений (2) и (14) должны совпадать.

Все это позволяет исследование статистической устойчивости уравнений (2) заменить исследованием устойчивости эквивалентных им линейных уравнений первого порядка (14), не прибегая к решению уравнения Эйнштейна—Фоккера.

4. Статистическая устойчивость решения уравнения (14a) рассмотрена в работе [2], на основании которой можно утверждать, что независимо от значения начального условия $A_0 = A(0) \neq 0$ амплитуда $A(t)$ статистически устойчива, если

$$h > 2\pi [S_{u_0}(0) + S_u(0)], \quad (15)$$

и статистически не ограничена, если

$$h < 2\pi [S_{u_0}(0) + S_u(0)], \quad (16)$$

где $S_{u_0}(0)$ и $S_u(0)$ — значения в нуле спектральных плотностей $S_{u_0}(\Omega)$ и $S_u(\Omega)$.

Учитывая связь $S_{u_0}(\Omega)$, $S_u(\Omega)$ со спектральными плотностями флюктуаций параметров Δa и Δb (9), запишем условие (16) в виде

$$h < \frac{\pi}{4\omega_1^2} [2\omega_1^2 S_{\Delta b}(0) + \omega_0^2 S_{\Delta b}(2\omega_1) + S_{\Delta a}(2\omega_1) - 2h S_{\Delta a \Delta b}^0(2\omega_1) - 2\omega_1 S_{\Delta a \Delta b}^1(2\omega_1)]. \quad (17)$$

Статистическая устойчивость амплитуды имеет место при обратном знаке неравенства.

Таким образом, вопрос об условиях возникновения статистической неустойчивости (неограниченности амплитуды) решается соотношением (17). Это же соотношение вместе с тем указывает, каким условиям должно удовлетворять « затухание » системы, чтобы в ней при данных изменениях параметров могли возникнуть колебания. В этом случае имеет место своеобразная случайная параметрическая регенерация, т. е. при определенных условиях (17) в систему вносится отрицательное сопротивление — эффект, эквивалентный уменьшению затухания системы (коэффициента при члене, определяющем потери). Параллельно отметим, что при синусоидальном изменении параметра Δa имеются две основные предпосылки возникновения явления возбуждения: 1) определенная зависимость между частотой изменения параметра и «средней»

* Вычисленные коэффициенты (13) не изменяются, а следовательно, не изменится уравнение Эйнштейна—Фоккера, если в ΔA и $\Delta \varphi$ (т. е. в правых частях уравнений (2)) величина φ будет иметь какое-либо конкретное значение. Наиболее удобно взять значение $\varphi = 0$. Подробнее о методе статистически эквивалентных уравнений см. в работах [3, 4].

собственной частотой системы и 2) определенное соотношение между величиной относительного изменения параметра (глубиной модуляции) и величиной затухания.

При случайном изменении параметров существенными оказываются величины спектральных плотностей флюктуирующих параметров на $2\omega_1$ и на нулевой частотах (рис. 1). Средняя величина квадрата флюктуаций (мощность флюктуаций) не существенна. В этом суть статистически неустойчивого движения — даже малые флюктуации параметров Δa и Δb приводят к большому отличию амплитуды возмущенного колебания от невозмущенного («амплитуда» возмущенного колебания при любых не равных нулю начальных значениях неограниченно возрастает, пока справедливо уравнение (1)).

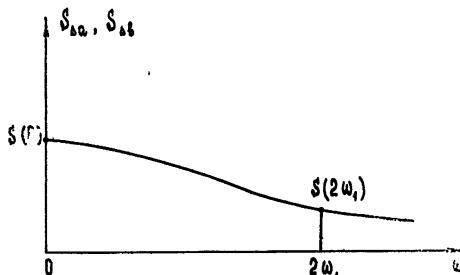


Рис. 1.

Присутствие спектральных плотностей Δb как факторов неустойчивости в условии (17) обусловлено тем, что мы нигде не требовали положительности коэффициента при члене, определяющем потери. Напротив, гауссово распределение параметра Δb постоянно обеспечивает возможность отрицательных значений «затухания» системы, что приводит при определенных условиях к неустойчивости.

Наличие $S_{\Delta a}(2\omega_1)$ в условии (17) говорит о возможности параметрического возбуждения данной системы присутствием в спектре флюктуаций Δa составляющих, близких к удвоенной частоте свободных колебаний системы. В сплошном спектре $S_{\Delta a}(\omega)$ около частоты $2\omega_1$ обязательно находятся составляющие с благоприятными для возбуждения фазами. Таким образом, здесь существенны для статистической неустойчивости сразу два фактора. Наконец, из (17) следует, что условие статистической устойчивости зависит от коррелированности флюктуаций Δa и Δb .

Обратимся к поведению фазы $\varphi(t)$, заданной уравнением (14б). Решение этого уравнения

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t [v_0(s) + v(s)] ds. \quad (18)$$

Согласно [2], рассмотрим флюктуацию движения

$$\eta(t) = \varphi(t) - \varphi^0(t) = \int_0^t [v_0(s) + v(s)] ds. \quad (19)$$

Нетрудно найти, что среднее значение и дисперсия $\eta(t)$

$$m_\eta(t) \equiv 0;$$

$$d_\eta(t) = 2 \int_0^t (t-s) [\Phi_{v_0}(s) + \Phi_v(s)] ds, \quad (20)$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [1], можно показать, что, если хотя бы одна из спектральных плотностей $S_{v_0}(0) > 0$ или $S_v(0) > 0$, то имеет место статистическая неограниченность фазы $\varphi(t)$ (φ — нестационарный процесс с расходящейся мощностью).

Учитывая связь $S_{v_0}(\Omega)$, $S_v(\Omega)$ со спектральными плотностями флуктуаций параметров Δa и Δb (9), запишем условие статистической неограниченности $\varphi(t)$ в виде

$$\begin{aligned} S_v(0) + S_{v_0}(0) = \frac{1}{8\omega_1^2} [S_{\Delta a}(2\omega_1) + \omega_0^2 S_{\Delta b}(2\omega_1) - 2hS_{\Delta a \Delta b}^0(2\omega_1) - \\ - 2\omega_1 S_{\Delta a \Delta b}^1(2\omega_1) + 2S_{\Delta a}(0) + 2h^2 S_{\Delta b}(0) - 4hS_{\Delta a \Delta b}^0(0)] > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В отличие от случая медленно меняющихся параметров $\Delta a(t)$ и $\Delta b(t)$ (см. [1]) в условии (21) появляются (как факторы статистической неограниченности фазы) спектральные плотности мощности на частоте $2\omega_1$ («параметрическая» неустойчивость фазы). Если флуктуации параметров Δa и Δb независимы, то условия статистической неограниченности записутся так: для амплитуды

$$h > \frac{\pi}{4\omega_1^2} [2\omega_1^2 S_{\Delta b}(0) + \omega_0^2 S_{\Delta b}(2\omega_1) + S_{\Delta a}(2\omega_1)]; \quad (22)$$

для фазы

$$2h^2 S_{\Delta b}(0) + \omega_0^2 S_{\Delta b}(2\omega_1) + S_{\Delta a}(2\omega_1) + 2S_{\Delta a}(0) > 0. \quad (23)$$

В таком случае для получения статистически неограниченной фазы достаточно, чтобы хотя бы одна из спектральных плотностей в (23) была отлична от нуля. Нетрудно видеть при этом (на основании (22) и (23)), что статистическая устойчивость по фазе приводит к статистической устойчивости по амплитуде, а статистическая неограниченность по амплитуде приводит к неограниченности по фазе.

Автор считает своим долгом выразить благодарность А. Н. Малахову за постановку задачи и ценные советы при выполнении работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим некоторые характеристики случайных функций a_{\parallel}, a_{\perp} , b_{\parallel}, b_{\perp} , заданных следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{\parallel} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\tau)}{\Delta b(\tau)} \cos(2\omega_1 \tau) d\tau; \quad b_{\perp} = -\frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\tau)}{\Delta b(\tau)} \sin(2\omega_1 \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Будем считать, что для случайных стационарных процессов $\Delta a(t)$ и $\Delta b(t)$ заданы их функции корреляции $\Phi_{\Delta a}(\tau)$, $\Phi_{\Delta b}(\tau)$, $\Phi_{\Delta a \Delta b}(\tau)$ и соответствующие спектральные плотности $S_{\Delta a}(\omega)$, $S_{\Delta b}(\omega)$, $S_{\Delta a \Delta b}^0(\omega)$, $S_{\Delta a \Delta b}^1(\omega)$. Вычислим функции корреляции процессов $a_{\parallel}, a_{\perp}, b_{\parallel}, b_{\perp}$, определив их следующим образом*:

$$\begin{aligned} \Phi_a(\tau) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle a(t) a(t + \tau) \rangle dt, \\ \Phi_{ab}(\tau) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \langle a(t) b(t + \tau) \rangle dt. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

* Знаки \parallel и \perp опущены здесь для сокращения записи.

Подставляя (П.1) в (П.2), производя вычисления и учитывая стационарность $\Delta a(t)$ и $\Delta b(t)$, можно получить

$$\begin{aligned}\Phi_{a\parallel}(\tau) &= \Phi_{a\perp}(\tau) = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi_{\Delta a}(\tau + y - x) \cos [2\omega_1(\tau + y - x)] dx dy; \\ \Phi_{a\parallel\perp}(\tau) &= -\Phi_{a\perp\parallel}(\tau) = -\frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi_{\Delta a}(\tau + y - x) \sin [2\omega_1(\tau + y - x)] dx dy; \\ \Phi_{a\parallel b\parallel}(\tau) &= \Phi_{a\perp b\perp}(\tau) = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi_{\Delta a\Delta b}(\tau + y - x) \cos [2\omega_1(\tau + y - x)] dx dy; \\ \Phi_{a\parallel b\perp}(\tau) &= -\Phi_{a\perp b\parallel}(\tau) = -\frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi_{\Delta a\Delta b}(\tau + y - x) \sin [2\omega_1(\tau + y - x)] dx dy.\end{aligned}\quad (\text{П.3})$$

Выражая $\Phi_{\Delta a}(\tau)$ и $\Phi_{\Delta a\Delta b}(\tau)$ в (П.3) через спектральные плотности $S_{\Delta a}(\omega)$, $S_{\Delta a\Delta b}(\omega)$ и выполняя интегрирование по x и y , будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi_{a\parallel}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\widetilde{S}_{\Delta a}^0(\Omega) I(\Omega T) \cos(\Omega T) d\Omega; \quad \Phi_{a\parallel\perp}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\widetilde{S}_{\Delta a}^1(\Omega) I(\Omega T) \sin(\Omega T) d\Omega; \\ \Phi_{a\parallel b\parallel}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\widetilde{S}_0^0(\Omega) I(\Omega T) \cos(\Omega \tau) d\Omega + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\widetilde{S}_1^0(\Omega) I(\Omega T) \sin(\Omega \tau) d\Omega; \\ \Phi_{a\parallel b\perp}(\tau) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} 2\widetilde{S}_1^0(\Omega) I(\Omega T) \cos(\Omega \tau) d\Omega + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\widetilde{S}_0^1(\Omega) I(\Omega T) \sin(\Omega \tau) d\Omega,\end{aligned}\quad (\text{П.4})$$

где $I(\Omega T)$, $\widetilde{S}_{0,1}^{0,1}$ даются соотношениями (8а) основного текста.

На основании (П.4) нетрудно видеть, что спектры процессов $a_{\parallel 0}$, $a_{\perp 0}$, $b_{\parallel 0}$, $b_{\perp 0}$ имеют вид

$$\begin{aligned}S_{a\parallel}(\Omega) &= 2\widetilde{S}_{\Delta a}^0(\Omega) I(\Omega T); \quad S_{a\parallel\perp}(\Omega) = 2\widetilde{S}_{\Delta a}^1(\Omega) I(\Omega T); \\ S_{a\parallel b\parallel}^0(\Omega) &= 2\widetilde{S}_0^0(\Omega) I(\Omega T); \quad S_{a\parallel b\parallel}^1(\Omega) = 2\widetilde{S}_1^0(\Omega) I(\Omega T); \\ S_{a\parallel b\perp}^0(\Omega) &= -2\widetilde{S}_1^0(\Omega) I(\Omega T); \quad S_{a\parallel b\perp}^1(\Omega) = 2\widetilde{S}_0^1(\Omega) I(\Omega T).\end{aligned}\quad (\text{П.5})$$

Вычисления функций корреляций и спектров процессов $a_{\parallel 0}$ и $b_{\parallel 0}$ совершенно аналогичны. Используя выражения для спектральных плотностей (П.5), легко получить формулы (8) основного текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Г. Н. Бочкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 314 (1966).
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 42 (1963).
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 710 (1964).
4. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

**STATISTICAL STABILITY OF OSCILLATOR MOTION FOR SYSTEM
WITH ONE DEGREE OF FREEDOM. II***G. N. Bochkov*

The statistical oscillator system of the second order is considered, and the conditions of the amplitude and phase stability of oscillation are analysed at wide-band fluctuations of the parameters.

УДК 538.3

ВОЗБУЖДЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ШАРА БОЛЬШОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИАМЕТРА ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ

Г. Т. Марков, А. Н. Коваленко

Решение задачи о возбуждении шара представлено в виде бесконечного спектра волн, распространяющихся в меридиональном направлении. Приведены выражения, определяющие возбуждение шара радиальными электрическими и магнитными сторонними токами; с помощью теоремы эквивалентности эти выражения распространяются на произвольное распределение сторонних токов. На примере возбуждения шара бесконечно узкой синфазной кольцевой щелью исследуется сходимость решения при больших значениях ka (a — радиус шара, k — волновое число).

ВВЕДЕНИЕ

Обычно при решении задачи о дифракции электромагнитных волн на шаре большого диаметра используется преобразование Ватсона [1]. Хорошо известны работы Фока [2], касающиеся симметричного возбуждения электромагнитных волн над сферической земной поверхностью. Краснушкиным [3] для исследования осесимметричного возбуждения волн над сферической земной поверхностью, окруженной анизотропной ионосферой, применялся метод нормальных волн.

Однако во всех этих и многих других работах основное внимание уделено вопросам распространения радиоволн, возбужденных точечным источником, и практически отсутствует расчет ближних полей различных комбинаций щелевых и преволочных антенн, необходимый для определения таких важных характеристик, как, например, входное сопротивление антенны.

В работе Маркова [4] получено решение задачи о возбуждении шара произвольным распределением сторонних электрических и магнитных токов, удобное для практических расчетов поля при небольшом электрическом диаметре шара. В настоящей работе используется другой способ построения общего решения задачи о возбуждении идеально проводящего шара большого электрического диаметра. Полученное решение легко распространяется также на возбуждение импедансного шара и шара, сопряженного с конусом или биконусом.

1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим идеально проводящий шар радиуса a , возбуждаемый произвольным распределением сторонних радиальных электрических $j_r^{\text{ст}}$ и магнитных $j_m^{\text{ст}}$ токов с временной зависимостью в форме $e^{i\omega t}$. Представим электромагнитное поле в виде суперпозиции электрических и магнитных волн, а составляющие поля — в виде разложения по полной системе собственных функций по координатам r и φ , подобно тому, как это сделано в работе [3].

В результате получим следующие выражения для компонент электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{1}{r} \sum_{v,m} v(v+1) U_{vm}^s(\theta) e^{-im\varphi} \xi_v^{(2)}(kr), \\
 E_\theta &= \frac{1}{r} \sum_{v,m} \frac{\partial U_{vm}^s(\theta)}{\partial \theta} e^{-im\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_v^{(2)}(kr)) - \frac{i \omega \mu'_a}{\sin \theta} \sum_{\mu,m} (-im) \times \\
 &\quad \times U_{\mu m}^u(\theta) e^{-im\varphi} \xi_\mu^{(2)}(kr), \\
 E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{v,m} (-im) U_{vm}^s(\theta) e^{-im\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_v^{(2)}(kr)) + i \omega \mu'_a \times \\
 &\quad \times \sum_{\mu,m} \frac{\partial U_{\mu m}^u(\theta)}{\partial \theta} e^{-im\varphi} \xi_\mu^{(2)}(kr), \\
 H_r &= \frac{1}{r} \sum_{\mu,m} \mu(\mu+1) U_{\mu m}^u(\theta) e^{-im\varphi} \xi_\mu^{(2)}(kr), \\
 H_\theta &= \frac{i \omega \epsilon'_a}{\sin \theta} \sum_{v,m} (-im) U_{vm}^s(\theta) e^{-im\varphi} \xi_v^{(2)}(kr) + \frac{1}{r} \sum_{\mu,m} \frac{\partial U_{\mu m}^u(\theta)}{\partial \theta} \times \\
 &\quad \times e^{-im\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_\mu^{(2)}(kr)), \\
 H_\varphi &= -i \omega \epsilon'_a \sum_{v,m} \frac{\partial U_{vm}^s(\theta)}{\partial \theta} e^{-im\varphi} \xi_v^{(2)}(kr) + \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{\mu,m} (-im) U_{\mu m}^u(\theta) \times \\
 &\quad \times e^{-im\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_\mu^{(2)}(kr)),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon'_a \mu'_a}$, ω — круговая частота, ϵ'_a и μ'_a — комплексные электрическая и магнитная проницаемости.

Индексы v и μ радиальных собственных функций выбираются так, чтобы выражения (1) удовлетворяли граничным условиям на поверхности идеально проводящего шара, и определяются из следующих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \xi_v^{(2)}(\rho)] \Big|_{\rho=ka} = 0, \tag{2}$$

$$\xi_\mu^{(2)}(\rho) \Big|_{\rho=ka} = 0. \tag{3}$$

Функции $U_{vm}^s(\theta)$ и $U_{\mu m}^u(\theta)$ являются решениями неоднородных дифференциальных уравнений для присоединенных функций Лежандра и представляются в виде

$$U_{vm}^s(\theta) = \frac{1}{2\pi i \omega \epsilon'_a N_v^s W_{vm}} \int_{r'=a}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{\pi} \left\{ P_v^m(-\cos \theta) \int_{\theta'=0}^{\theta} j_r^s P_v^m(\cos \theta') \times \right.$$

$$\times \sin \theta' d\theta' + P_v^m(\cos \theta) \int_{\theta'=0}^{\pi} j_r^v P_v^m(-\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \} \times \quad (4)$$

$$\times e^{im\varphi'} \xi_v^{(2)}(kr') r' dr' d\varphi' + A_{vm}^v P_v^m(-\cos \theta) + B_{vm}^v P_v^m(\cos \theta),$$

$$U_{\mu m}^v(\theta) = \frac{1}{2\pi i\omega \mu' N_\mu^m W_{\mu m}} \int_{r'=a}^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \left\{ P_\mu^m(-\cos \theta) \int_{\theta'=0}^{\theta} j_r^\mu P_\mu^m(\cos \theta') \times \right.$$

$$\times \sin \theta' d\theta' + P_\mu^m(\cos \theta) \int_{\theta'=0}^{\pi} j_r^\mu P_\mu^m(-\cos \theta') \times \quad (5)$$

$$\times \sin \theta' d\theta' \} e^{im\varphi'} \xi_\mu^{(2)}(kr') r' dr' d\varphi' +$$

$$+ A_{\mu m}^{\mu m} P_\mu^m(-\cos \theta) + B_{\mu m}^{\mu m} P_\mu^m(\cos \theta),$$

где

$$W_{vm} = -\sin[(v+m)\pi] \frac{\Gamma(1+v+m)}{\Gamma(1+v-m)},$$

$$W_{\mu m} = -\sin[(\mu+m)\pi] \frac{\Gamma(1+\mu+m)}{\Gamma(1+\mu-m)} \quad (\text{Г}(x)-\text{гамма-функция}),$$

$$N_v^v = -\frac{a}{2v+1} \xi_v^{(2)}(ka) \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial a \xi_v^{(2)}(ka)}{\partial a} \right],$$

$$N_\mu^m = \frac{a^2}{2\mu+1} \frac{\partial \xi_\mu^{(2)}(ka)}{\partial \mu} \frac{\partial \xi_\mu^{(2)}(ka)}{\partial a}.$$

Отметим, что функция $P_v^m(-\cos \theta)$ стремится к бесконечности при $\theta \rightarrow 0$, а функция $P_v^m(\cos \theta)$ стремится к бесконечности при $\theta \rightarrow \pi$. Но функция U_{vm}^v должна быть конечной всюду, поэтому в выражениях (4) и (5) мы должны положить постоянные A_{vm}^v и B_{vm}^v равными нулю*.

Если теперь воспользоваться теоремой эквивалентности и в качестве вспомогательного поля взять поле \bar{E}_v^v и \bar{H}_v^v радиального электрического диполя с единичным моментом $I^v l=1$, помещенного в точку наблюдения $P(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, и поле \bar{E}_μ^m и \bar{H}_μ^m радиального магнитного диполя с единичным моментом $I^m l=1$, помещенного в ту же точку $P(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, то радиальные составляющие искомого поля определяются по формулам

$$E_r = \int_v (\bar{E}_v^v \operatorname{ct} \bar{E}_v^v - \bar{j}_v^v \operatorname{ct} \bar{H}_v^v) dv, \quad (6)$$

$$H_r = \int_v (\bar{j}_\mu^m \operatorname{ct} \bar{H}_\mu^m - \bar{j}_v^v \operatorname{ct} \bar{E}_v^v) dv. \quad (7)$$

* Нетрудно убедиться, что полученное решение можно обобщить на задачу о возбуждении шара, сопряженного с биконусом или с конусом. В первом случае обе постоянные A_{vm}^v и B_{vm}^v будут иметь конечные значения, во втором — одна из этих постоянных будет конечной. Заметим также, что в случае шара с импедансными граничными условиями в полученном решении изменятся только наборы собственных значений v , μ и коэффициенты N_v^v , N_μ^m .

Вычисляя поле вспомогательного диполя ($j_r^{\text{в,м}} = [\delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \times \times \delta(\varphi - \varphi_0)] / r^2 \sin \theta$) по формуле (1) с учетом (4), (5) и подставляя его в формулы (6) и (7), получим окончательные выражения для радиальных составляющих искомого поля:

$$E_r(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \sum_{v,m} v(v+1) U_{vm}^{\text{в}}(\theta) e^{-im\varphi} \xi_v^{(2)}(kr),$$

$$\begin{aligned} U_{vm}^{\text{в}}(\theta) = & \frac{1}{2\pi i \omega \epsilon_a' N_v^{\text{в}} W_{vm}} \int_{\theta'} \left\{ j_{\theta}^{\text{в}} \frac{1}{r'} \xi_v^{(2)}(kr') Q_v^m(\theta', \theta) + \right. \\ & + j_{\theta}^{\text{в}} \frac{1}{v(v+1)} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \xi_v^{(2)}(kr')) \frac{\partial Q_v^m(\theta', \theta)}{\partial \theta'} - j_{\varphi}^{\text{в}} \frac{1}{v(v+1)} \times \quad (8) \\ & \times \frac{im}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \xi_v^{(2)}(kr')) \frac{Q_v^m(\theta', \theta)}{\sin \theta'} - j_{\theta}^{\text{в}} \frac{1}{v(v+1)} \omega \epsilon_a' m \xi_v^{(2)}(kr') \times \\ & \times \frac{Q_v^m(\theta', \theta)}{\sin \theta'} + j_{\varphi}^{\text{в}} \frac{1}{v(v+1)} i \omega \epsilon_a' \xi_v^{(2)}(kr') \frac{\partial Q_v^m(\theta', \theta)}{\partial \theta'} \Big\} e^{im\varphi'} \times \\ & \times r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' ; \\ H_r(r, \theta, \varphi) = & \frac{1}{r} \sum_{\mu,m} \mu(\mu+1) U_{\mu m}^{\text{в}}(\theta) e^{-im\varphi} \xi_{\mu}^{(2)}(kr), \\ U_{\mu m}^{\text{в}}(\theta) = & \frac{1}{2\pi i \omega \mu_a' N_{\mu}^{\text{в}} W_{\mu m}} \int_{\theta'} \left\{ j_{\theta}^{\text{в}} \frac{1}{r} \xi_{\mu}^{(2)}(kr') Q_{\mu}^m(\theta', \theta) + \quad (9) \right. \\ & + j_{\theta}^{\text{в}} \frac{1}{\mu(\mu+1)} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \xi_{\mu}^{(2)}(kr')) \frac{\partial Q_{\mu}^m(\theta', \theta)}{\partial \theta'} + j_{\varphi}^{\text{в}} \frac{1}{\mu(\mu+1)} \frac{im}{r'} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial r'} (r' \xi_{\mu}^{(2)}(kr')) \frac{Q_{\mu}^m(\theta', \theta)}{\sin \theta'} - j_{\theta}^{\text{в}} \frac{1}{\mu(\mu+1)} \omega \mu_a' m \xi_{\mu}^{(2)}(kr') \frac{Q_{\mu}^m(\theta', \theta)}{\sin \theta'} - \\ & \left. - j_{\varphi}^{\text{в}} \frac{1}{\mu(\mu+1)} i \omega \mu_a' \xi_{\mu}^{(2)}(kr') \frac{\partial Q_{\mu}^m(\theta', \theta)}{\partial \theta'} \right\} e^{im\varphi'} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi', \end{aligned}$$

где

$$Q_v^m(\theta', \theta) = \begin{cases} P_v^m(-\cos \theta') P_v^m(\cos \theta') & \text{при } \theta' \geq \theta \\ P_v^m(\cos \theta') P_v^m(-\cos \theta) & \text{при } \theta' \leq \theta \end{cases}. \quad (10)$$

Меридиональные и азимутальные составляющие напряженности электрического и магнитного полей определяются по формулам (1). Таким образом, выражения (1), (8) и (9) позволяют определить поле в любой точке пространства, окружающего идеально проводящий шар, при произвольном распределении сторонних электрических и магнитных токов.

На примере возбуждения шара бесконечно узкой щелью покажем, что полученное решение быстро сходится при $ka \gg 1$ в области геометрической тени источника.

2. ПОЛЕ КОЛЬЦЕВОЙ ЩЕЛИ НА ШАРЕ

Если электрическое поле в щели на шаре E_θ не зависит от координаты φ , то возбуждаются только электрические волны. Записав выражение для объемной плотности магнитного тока $j_\varphi^m = I_\varphi^m \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{r} \delta(r - a)$

и воспользовавшись формулами (1) и (8), нетрудно получить выражение для напряженности магнитного поля:

$$H_\varphi = i\omega \varepsilon_a' I_\varphi^m a \sin \theta_0 \times \\ \times \frac{\pi}{2} \sum_v \frac{\xi_v^{(2)}(ka) \xi_v^{(2)}(kr)}{(v+1) N_v^2 \sin v\pi} \begin{cases} \frac{\partial P_v(-\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_v(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0}, & \theta \geqslant \theta_0 \\ \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial P_v(-\cos \theta_0)}{\partial \theta_0}, & \theta \leqslant \theta_0 \end{cases}, \quad (11)$$

где суммирование производится по полной системе корней уравнения (2). Если воспользоваться тригонометрической аппроксимацией функции Ханкеля, то эти корни можно вычислить по следующей асимптотической формуле [5]:

$$v = \left(ka - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} (ka)^{1/3} \left[\frac{3\pi}{4} (4s+1)\right]^{2/3} e^{-i\pi/3}, \quad s=0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

При этом

$$\xi_v^{(2)}(ka) = 2(-1)^s e^{i\pi/3} \left[\frac{3\pi}{4\rho} (4s+1) \right]^{-1/6} / \rho, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial \rho \xi_v^{(2)}(\rho)}{\partial \rho} \right]_{|\rho=ka} = 2(-1)^{s+1} (4s+1)^{1/2} \left(\frac{3\pi}{4ka} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Так как при $ka \gg 1$ абсолютная величина корней v также велика, то функции Лежандра, входящие в формулу (11), могут быть заменены своими асимптотическими выражениями.

$$P_v(\cos \theta) = \sqrt{2/\pi v \sin \theta} \cos \left[\left(v + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad (15)$$

$$P_v(-\cos \theta) = \sqrt{2/\pi v \sin \theta} \cos \left[\left(v + \frac{1}{2}\right)(\pi - \theta) - \frac{\pi}{4} \right],$$

справедливыми при $|v \sin \theta| \gg 1^*$.

С учетом асимптотических формул (12), (14), (15) выражение для напряженности магнитного поля (11) сводится к следующему:

* При невыполнении этого условия при больших $|v|$ следует пользоваться другими асимптотическими формулами для функций Лежандра

$$P_v(\cos \theta) = J_0 \left[\left(v + \frac{1}{2}\right)\theta \right] \quad \text{вблизи } \theta = 0,$$

$$P_v(-\cos \theta) = J_0 \left[\left(v + \frac{1}{2}\right)(\pi - \theta) \right] \quad \text{вблизи } \theta = \pi.$$

$$\begin{aligned}
 H_\varphi = & \omega \epsilon_a' I_\varphi^M (3\pi)^{-1/2} (ka)^{1/2} (\sin \theta_0)^{1/2} (\sin \theta)^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \times \\
 & \times \xi^{(2)}(kr) (4s+1)^{-1/2} \left\{ \exp \left[-i \left(v + \frac{1}{2} \right) |\theta - \theta_0| \right] - \right. \\
 & - i \exp \left[-i \left(v + \frac{1}{2} \right) (\theta + \theta_0) \right] - \exp \left[-i \left(v + \frac{1}{2} \right) [2\pi - |\theta - \theta_0|] \right] - \quad (16) \\
 & \left. - i \exp \left[-i \left(v + \frac{1}{2} \right) [2\pi - (\theta + \theta_0)] \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы представили решение задачи в виде разложения по полной системе собственных функций $\xi^{(2)}(kr)$ и получили асимптотические выражения для коэффициентов разложения, которые вследствие наличия у корней v_s отрицательной мнимой части экспоненциально убывают с ростом номера s , за исключением точки $\theta = \theta_0$, где они убывают по закону $s^{-1/2}$.

Исследование сходимости ряда (16) мы проведем в двух важных для практики случаях: 1) $r = a$; 2) $r \gg a$.

В первом случае для сферической функции Ханкеля справедлива асимптотическая формула (13). Подставляя ее в ряд (16), получим выражение для напряженности магнитного поля на поверхности шара.

$$\begin{aligned}
 H_\varphi = & -\omega \epsilon_a' I_\varphi^M (3\pi)^{-2/3} 2^{4/3} (\sin \theta_0)^{1/2} (\sin \theta)^{-1/2} e^{i\pi/3} \sum_{s=0}^{\infty} (4s+1)^{-2/3} \times \\
 & \times \left[\exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) |\theta - \theta_0| \right\} - i \exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) (\theta + \theta_0) \right\} - \right. \\
 & \left. - \exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) [2\pi - |\theta - \theta_0|] \right\} - i \exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) [2\pi - (\theta + \theta_0)] \right\} \right]. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Для выяснения сходимости решения достаточно исследовать сходимость следующего ряда:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (4s+1)^{-2/3} \exp \left[-i \left(v_s + \frac{1}{2} \right) |\theta - \theta_0| \right]. \quad (18)$$

При $\theta = \theta_0$ этот ряд расходится, так как его члены положительны и убывают по закону $s^{-2/3}$. Расходимость обусловлена особенностью поля на бесконечно узкой щели. При $|\theta - \theta_0| > 0$ показатель экспоненты имеет отрицательную действительную часть, которая растет с ростом номера s и, следовательно, ряд сходится. Очевидно, чем больше величина $\Delta\theta = |\theta - \theta_0|$, т. е. чем дальше находится точка от возбуждающего источника, тем лучше в ней сходится ряд.

Чтобы при заданной точности расчета определить необходимое число членов разложения, представим ряд (18) в виде суммы первых M членов и остатка $Q = \sum_{s=M+1}^{\infty} (4s+1)^{-2/3} \exp \left[-i \left(v_s + \frac{1}{2} \right) \Delta\theta \right]$,

для которого нетрудно провести интегральную оценку сходимости. Приводя эту оценку, покажем, что всегда выполняется неравенство

$$Q < \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\beta \Delta\theta}} [1 - \Phi(\sqrt{\beta \Delta\theta} (4M+1)^{2/3})],$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, $\beta = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\sqrt{3}}{4} (ka)^{1/3}$. Действительно,

$$\begin{aligned} Q &\leq \sum_{s=M+1}^{\infty} \left| (4s+1)^{-2/3} \exp \left[-i \left(v_s + \frac{1}{2} \right) \Delta\theta \right] \right| = \sum_{s=M+1}^{\infty} (4s+1)^{-2/3} \times \\ &\times \exp [-\beta \Delta\theta (4s+1)^{2/3}] < \int_M^{\infty} (4s+1)^{-2/3} \exp [-\beta \Delta\theta (4s+1)^{2/3}] ds = \\ &= \frac{3}{8} \int_{(4M+1)^{2/3}}^{\infty} [\exp (-\beta \Delta\theta x) / \sqrt{x}] dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\beta \Delta\theta}} [1 - \Phi(\sqrt{\beta \Delta\theta (4M+1)^{2/3}})]. \end{aligned}$$

Следовательно, если задаться точностью расчета γ , то число требуемых членов разложения всегда меньше числа M , которое определяется из уравнения

$$\gamma = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\beta \Delta\theta}} [1 - \Phi(\sqrt{\beta \Delta\theta (4M+1)^{2/3}})].$$

Отсюда при $(ka)^{1/3} \Delta\theta \gg 1$ и $\gamma < 0,05$, полагая аргумент интеграла вероятности равным двум, находим, что $M < \frac{1}{4} \left[\left(\frac{4}{\beta \Delta\theta} \right)^{3/2} - 1 \right] < 2$, и, таким образом, при расчете поля на поверхности шара большого радиуса требуется не более трех членов разложения. При $\Delta\theta < (ka)^{-1}$ сходимость ухудшается, и при $\Delta\theta = (ka)^{-1}$ требуется порядка ka членов разложения.

При рассмотрении поля в зоне излучения ($r \gg a$) функцию Ханкеля заменяют первым членом асимптотического разложения при больших значениях аргумента:

$$\xi^{(2)}(kr) = \frac{e^{-ikr}}{kr} \exp \left(i(v+1) \frac{\pi}{2} \right), \quad (19)$$

что приводит к выражению для поля:

$$\begin{aligned} H_v &= A(\sin\theta)^{-1/2} \sum_{v_s} (4s+1)^{-1/2} (-1)^{s+1} \left[\exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) \left(|\theta - \theta_0| - \frac{\pi}{2} \right) \right\} - \right. \\ &- i \exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) \left[(\theta + \theta_0) - \frac{\pi}{2} \right] \right\} - \exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ &\left. \left. \left[\frac{3\pi}{2} - |\theta - \theta_0| \right] \right\} - i \exp \left\{ -i \left(v + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{3\pi}{2} - (\theta + \theta_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где через A обозначены все множители, не зависящие от θ и s .

Сходимость ряда (20) определяется в основном показателем экспоненты $\exp \left[-i \left(v + \frac{1}{2} \right) \left(|\theta - \theta_0| - \frac{\pi}{2} \right) \right]$, который в зависимости от $|\theta - \theta_0|$ может иметь положительную или отрицательную действительную часть. Значение $|\theta - \theta_0| = \frac{\pi}{2}$, при котором показатель обращается

в нуль, определяет границу между освещенной и теневой областями. При $|\theta - \theta_0| > \frac{\pi}{2}$ члены ряда экспоненциально затухают с ростом s , и он быстро сходится. Ориентировочное число членов разложения M можно определить по формуле $M = \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{\ln \gamma}{\beta(|\theta - \theta_0| - (\pi/2))} \right)^{3/2} - 1 \right]$, где γ — точность расчета, причем $\gamma M \ll 1$. На границе тени и света наш ряд сходится очень медленно ($M \approx \gamma^{-2}$), а в освещенной области он вообще расходится. Расходимость обусловлена тем, что при больших значениях s мы не можем уже пользоваться асимптотической формулой (19).

Итак, мы исследовали сходимость нашего решения в двух граничных случаях ($r = a$ и $r \gg a$). Можно показать, что при всех значениях r наше представление решения годится для практических расчетов поля в тех точках пространства, из которых не виден возбуждающий источник, т. е. в области геометрической тени.

Заметим, что при возбуждении шара щелью любая точка на его поверхности находится в тени, и поэтому при $r = a$ решение быстро сходится при любых θ , за исключением небольшой области в окрестности точки $\theta = \theta_0$, угловые размеры которой порядка $(ka)^{-1/3}$.

В заключение отметим, что практические расчеты поля в области геометрической тени источника при произвольном распределении сторонних токов можно проводить по формулам (1), (8) и (9), причем при расчете сферических функций Ханкеля, множителя $N_{\nu,m}^{\alpha,\beta}$ и корней уравнений (2), (3) следует пользоваться более точными формулами, приведенными в работе [6], так как тригонометрическая аппроксимация функций Ханкеля, используемая в настоящей работе, пригодна для расчета отдаленных членов ряда и была нами использована только для выяснения характера сходимости полученного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. N. Watson, Proc. Roy. Soc., 95, 83 (1918).
2. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М.—Л., 1946.
3. П. Е. Краснушкин и Н. А. Яблочкин, Теория распространения сверхдлинных волн, изд. Выч. центр АН СССР, М., 1963.
4. Г. Т. Марков, ЖТФ, 23, 839 (1953).
5. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
6. L. L. Bailin, R. I. Spelming, Trans. Inst. Radio Engrs., AP-5, 374 (1957).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
6 августа 1965 г.

ARBITRARY EXCITATION OF METALLIC SPHERE WITH LARGE ELECTRIC DIAMETER

G. T. Markov, A. N. Kovalenko

The solution of the problem of sphere excitation is represented in the form of an infinite spectrum of waves propagating in the meridional direction. The expressions are given determining the sphere excitation by the radial electric and magnetic external currents. The same expressions are generalized to arbitrary distribution of the external currents by the use of the equivalence theorem. By the example of the sphere excitation by a cophased ring slit of infinitesimal width, the solution convergence is investigated for the large values of ka (a^* is the radius of the sphere; k is the wave number).

УДК 621.317.335.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО ИЗМЕНЕНИЮ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВОЛНЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ

К. А. Горонина, Р. К. Белов, Э. П. Сорокина

Описаны метод измерения диэлектрической проницаемости ϵ , использующий изменение поляризации волны при отражении от исследуемой среды, и установка для измерения ϵ в миллиметровом диапазоне. Приводятся результаты измерения диэлектрической проницаемости воды на волнах $1,6 \div 1,2$ мм.

1. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Как известно [1], комплексные коэффициенты отражения и диэлектрическая проницаемость связаны формулами

$$f = \frac{\epsilon \cos \theta - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}}{\epsilon \cos \theta + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}},$$

$$F = \frac{\cos \theta - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}}. \quad (1)$$

Здесь f и F — коэффициенты отражения волн с электрическими векторами, направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно плоскости падения, $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ — комплексная диэлектрическая проницаемость отражающей среды, θ — угол падения. Алгебраические преобразования формул (1) позволяют выразить ϵ через отношение коэффициентов отражения:

$$\epsilon = \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \frac{(1 - f/F)^2}{(1 + f/F)^2}. \quad (2)$$

Комплексную величину f/F можно определить экспериментально, используя связь этой величины с поляризацией отраженной волны.

Пусть падающая волна линейно поляризована и электрический вектор направлен под углом α к плоскости падения, тогда компоненты вектора E_1 и E_2 , направленные параллельно и перпендикулярно плоскости падения, синфазны в каждой точке, а отношение E_1/E_2 равно $\operatorname{ctg} \alpha$. После отражения разность фаз между колебаниями обеих компонент в каждой точке равна аргументу комплексного числа f/F , который обозначим φ ; отношение амплитуд обеих компонент равно $d \operatorname{ctg} \alpha$, где через d обозначен модуль отношения f/F . Если среда с поглощением, то только при углах падения $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ отраженная волна линейно поляризована, при остальных углах падения $0 < \theta < \pi$ и, следовательно, отраженная волна эллиптически поляризована. Используя правила сложения взаимно перпендикулярных колебаний, по отношению главных осей эллипса поляризаций и углам между главными осями и плоскостью падения можно вычислить сдвиг фаз φ и отношение амплитуд $d \operatorname{ctg} \alpha$.

Для экспериментального определения отношения главных осей эллипса поляризации и их ориентации можно использовать приемник линейно поляризованной волны. Перестраивая приемник по направлению принимаемой поляризации, найдем направления, при которых сигналы минимальны и максимальны; это будут направления главных осей эллипса поляризации. Отношение максимального и минимального сигналов по напряжению равно отношению главных осей.

Чтобы измерения и вычисления были наиболее точны и удобны, надо подходящим образом выбрать угол падения. Вблизи угла Брюстера, т. е. вблизи угла минимального отражения волны с электрическим вектором в плоскости падения, есть угол падения, при котором сдвиг фаз φ равен $\pi/2$ и отношение $f/F = jd$ — мнимая величина. Этот угол называется главным углом. Удобно выбрать для измерений угол падения, совпадающий с главным углом. При этом угле измерения будут наиболее точными, так как он лежит в области, где величина f/F наиболее резко зависит от ϵ . Кроме того, при этом угле для определения f/F нужно только найти отношение главных осей эллипса поляризации d , тогда как при других углах нужно вычислять комплексное число f/F , используя углы между плоскостью падения и главными осями.

При главном угле $\theta = \theta_0$ формула (2) принимает вид

$$\epsilon = \sin^2 \theta_0 + \frac{\sin^4 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \frac{(1 - jd)^2}{(1 + jd)^2}. \quad (3)$$

В случае больших модулей ϵ , когда главные углы близки к $\pi/2$, и в случае малых потерь, когда d малы, формула (3) становится еще более простой:

$$\epsilon = \operatorname{tg}^2 \theta_0 e^{j\delta}, \quad (4)$$

где $\delta = 4 \operatorname{arctg} d$. В этом случае, как видно из формулы (4), модуль ϵ однозначно связан с θ_0 , а угол потерь δ определяется величиной d . При действительном ϵ величина $d = 0$ и формула (4) переходит в известное соотношение между ϵ и углом Брюстера $\epsilon = \operatorname{tg}^2 \theta_0$.

Экспериментально главный угол можно найти по двум признакам. Первый признак — одна из главных осей эллипса поляризации параллельна плоскости падения, другая перпендикулярна. Второй признак — ориентация главных осей эллипса поляризации не зависит от ориентации плоскости поляризации падающей волны. Каждого из этих признаков достаточно, чтобы отличить главный угол от других углов. Второй признак необходим, если нельзя определить точно положение плоскости падения. Первый удобен тем, что не требует поворота плоскости поляризации падающей волны.

Для определения значения d удобно, чтобы плоскость поляризации падающей волны была под углом 45° к вертикали. В этом случае в падающей волне амплитуды обеих компонент равны и d равно отношению малой и большой осей эллипса поляризации; последние измеряются по показаниям приемника при двух ориентациях, когда принимаются волны, поляризованные параллельно и перпендикулярно плоскости падения.

2. УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ϵ ВОДЫ В мм ДИАПАЗОНЕ

Схема установки изображена на рис. 1. Источником волн служит ЛОВ. Падающая волна формируется параболическим зеркалом S , которое облучается открытым концом прямоугольного волновода P с помощью отражателя O . Волна принимается рупорной антенной Q и передается по прямоугольному волноводу к детектору приемника. Размеры

волновода рассчитаны на передачу волн типа TE_{01} . Для исследований поляризации отраженной волны приемная антенна вместе с детектором поворачивалась вокруг оси рупора kL , и измерялись углы поворота и интенсивность принимаемого сигнала. Антенну передатчика можно поворачивать вокруг оси зеркала KM , чтобы изменять плоскость поляризации падающей волны. Для изменения угла падения излучающее и приемное устройства закреплены на штангах, которые поворачиваются вокруг общей горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно чертежу через точку « K » на поверхности воды. Поворотные устройства имеют лимбы для отсчета углов поворота.

Диаметр зеркала, формирующего волну, равен 14 см, фокусное расстояние — 4,85 см. Расстояние от зеркала до отражающей поверхности $r = 75$ см. Излучение было достаточно направленным, чтобы в пределах падающего пучка лучей коэффициент отражения заметно не менялся. Это контролировалось по совпадению диаграмм направленности падающей волны и отраженных волн обеих поляризаций.

Существенная часть настройки установки — совмещение трех направлений: направления отраженного луча, оси вращения приемной антенны и максимума диаграммы направленности приемной антенны. Измерения поляризации будут правильными, если совпадают только два из них — луч и ось вращения; отклонение максимума диаграммы от них уменьшает только величину сигнала и, следовательно, уменьшает точность. Если же совпадают только ось вращения и максимум диаграммы, то измерения будут правильными в том частном случае, когда диаграмма направленности приемной антенны симметрична. При несимметричной диаграмме необходимо совмещение оси вращения антенны с отраженным лучом; если эти направления не совпадают, то принятый сигнал будет меняться при вращении рупора из-за изменения угла между направлением максимума диаграммы и лучом, а это исказит сведения об эллипсе поляризации.

Недостаточно точное совмещение луча и оси вращения экспериментально обнаруживается по неравенству сигналов в двух положениях рупора, отличающихся поворотом на 180° . Чем больше раскрытие рупора, уже его диаграмма, тем более точно должны совпадать ось вращения и направление луча. Поэтому пришлось ограничиться размерами рупора в раскрытие $14 \times 10 \text{ mm}^2$, хотя с точки зрения увеличения мощности принятого сигнала полезно было бы этот размер увеличить до размера пучка лучей отраженной волны.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Измерена диэлектрическая проницаемость воды при температуре 16°C на нескольких длинах волн в интервале от 1,2 мм до 1,6 мм. Значения действительной ϵ' и мнимой ϵ'' частей ϵ приведены в таблице 1.

Таблица 1

λ (мм)	1,2	1,25	1,42	1,47	1,53	1,6
$\epsilon' \pm 0,5$	5,7	6,2	5,4	5,4	5,7	5,8
$\epsilon'' \pm 0,5$	5,5	6,4	6,9	6,9	7,4	7,4

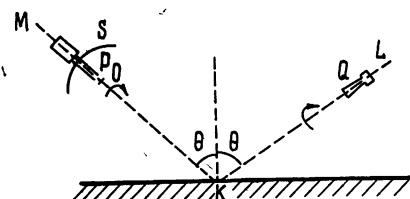


Рис. 1. Блок-схема установки.

На рис. 2 показана зависимость от длины волны тангенса угла потерь ϵ''/ϵ' и показателя преломления $n = \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}$. Имеющиеся в литературе результаты измерений диэлектрической проницаемости воды ϵ в широком интервале длин волн хорошо описываются формулой Дебая. Сопоставим наши измерения с этой формулой:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{1 + j\lambda_s/\lambda_0}.$$

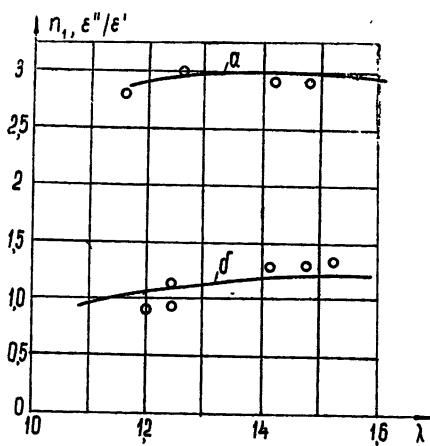


Рис. 2. Зависимость показателя преломления (а) и тангенса угла потерь (б) от длины волны (температура 16°C).

Параметры ϵ_0 , ϵ_s , λ_s определялись экспериментально в нескольких работах. Для параметров λ_s и ϵ_s данные разных авторов практически совпадают, для параметра ϵ_0 не совпадают. Так в работе [3] для температуры 20°C приводится значение $\epsilon_0 = 5,86 \pm 0,74$, а в работе [2] $\epsilon_0 = 4,16$. Наши измерения согласуются с работой [2]. Это видно из

рис. 2, где точками отмечены результаты наших измерений, а кривые построены по формуле Дебая при параметрах $\epsilon_s = 78,5$, $\lambda_s = 20$ мм, $\epsilon_0 = 4,1$.

2. На длине волны $\lambda = 1,6$ мм были проведены измерения при разных температурах от 0°C до 60°C. На рис. 3 изображена зависимость

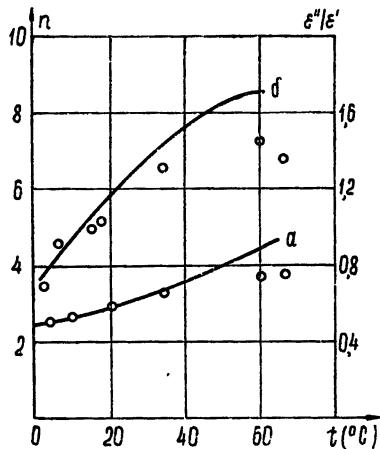


Рис. 3. Зависимость показателя преломления (а) и тангенса угла потерь (б) от температуры (длина волны 1,6 мм).

n и ϵ''/ϵ' от температуры; точки отмечают экспериментальные значения соответствующих величин, кривая построена по формуле Дебая. Тангенс угла потерь и n убывают при понижении температуры. Для льда вблизи 0°C получено $n = 1,6$,

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Вопросы распространения ультракоротких волн, Сов. радио, М., 1948.
2. I. B. Hasted, Progress in dielectrics, 3, 103, Heywood and company LTD, London, 1961.
3. Hill Nora E., Trans. Faraday Soc., 59, 344, 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 января 1966 г.

**DETERMINATION OF PERMITTIVITY ACCORDING TO THE CHANGE
OF WAVE POLARIZATION AT REFLECTION**

K. A. Goronina, R. K. Belov, E. P. Sorokina

A method for determination of permittivity is suggested, which is based on measuring of the change of wave polarization at reflection from investigated medium. The device for mm range is described. The results of measurement of the water permittivity at the wavelength of 1.6 \div 1.2 mm are given.

УДК 621.371.165

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КЛИНОМ*

B. I. Курилко

Рассматривается плоская задача о рассеянии поверхностной E -волны, распространяющейся вдоль грани прямоугольного диэлектрического клина, на ребре этого клина. Показано, что задача отыскания компонент Фурье рассеянного поля сводится в общем случае к системе из двух сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, которая эквивалентна системе из двух интегральных уравнений Фредгольма. Рассмотрен переход к случаю малой глубины скин-слоя; исследовано решение этой системы в электростатическом приближении.

Изучение рассеяния электромагнитных волн диэлектрическим клином представляет интерес для теории согласования диэлектрических волноводов, теории резонаторов для усилителей и генераторов оптического и радиочастотного диапазонов, а также для целого ряда других задач электродинамики и акустики. Однако до настоящего времени решение этой задачи найдено лишь в случае малой глубины скин-слоя, когда применимы граничные условия Леонтовича [1]. В этом предельном случае удается найти решение внешней задачи [2]. Кроме того, известно решение электростатической задачи для клина [3], которая позволяет определить картину поля вблизи его ребра.

В настоящей работе дифракционные характеристики диэлектрического клина исследуются для частного случая прямоугольной геометрии. При этом использование точных граничных условий равенства тангенциальных компонент электрических и магнитных полей на гранях клина позволяет рассмотреть общий случай произвольной глубины скин-слоя, найти коротковолновую асимптотику решения, определяющую поведение поля вблизи ребра клина, а также получить (по крайней мере, с помощью численного счета) решение не только внешней, но и внутренней задачи. Рассматривается задача о рассеянии поверхностной волны; случай возбуждения системы плоской волной отличается лишь характером возбуждающих сил и может быть рассмотрен аналогичным образом.

Итак, рассмотрим систему, характеризуемую следующей зависимостью тензора диэлектрических постоянных от координат:

$$\hat{\epsilon}(x, z) \equiv \begin{cases} \hat{\epsilon}^{(1)} & (x > 0, z < 0); \\ \hat{\epsilon}^{(2)} & (x > 0, z > 0); \\ \hat{\epsilon}^{(3)} & (x < 0, -\infty < z < +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

причем каждый тензор $\hat{\epsilon}^{(n)}$ предполагается диагональным: $\hat{\epsilon}_{xx}^{(n)} \equiv \hat{\epsilon}_{\perp}^{(n)}$; $\hat{\epsilon}_{zz}^{(n)} \equiv \hat{\epsilon}_{\parallel}^{(n)}$. Поверхностная E -волну распространяется вдоль общей гра-

* Работа доложена на VI ежегодной конференции ФТИ АН УССР по физике плазмы (сентябрь, 1965 г.).

ни клиньев 1 и 2 и характеризуется волновым числом $k_x = \gamma$, которое определяется из дисперсионного уравнения системы

$$\begin{aligned} \beta_1(\gamma)/\epsilon_{\perp}^{(1)} &= -\beta_2(\gamma)/\epsilon_{\perp}^{(2)}; \quad \beta_n^2(t) \equiv \frac{\epsilon_{\perp}^{(n)}}{\epsilon_{\perp}^{(1)}} [t^2 - k^2 \epsilon_{\perp}^{(n)}]; \\ \epsilon_{\perp}^{(1)}/\epsilon_{\perp}^{(2)} &< 0; \quad k \equiv \omega/c; \quad \operatorname{Im} \omega > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Требуется найти поля, возникающие при рассеянии этой поверхности волны на общем ребре клиньев $x = 0, z = 0, -\infty < y < +\infty$.

Будем искать решения для полей в рассматриваемой системе в виде суперпозиции плоских волн с неизвестными амплитудами, значения которых должны быть определены из граничных условий. Например, поле H_y в каждом из клиньев, где диэлектрические постоянные однородны, будем искать в виде

$$\begin{aligned} H_y^{(s)}(x, z) &= \exp [-i\gamma x - (-1)^s q_s z] + \int_{-\infty}^{+\infty} h_s(t) \times \\ &\times \exp [itz - \beta_s(t)x] dt \quad (\operatorname{Re} \beta_s > 0; \quad x > 0; \quad s = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Первое слагаемое в (3) соответствует падающей поверхности волне, а второе — рассеянным волнам. В полупространстве $x < 0$ падающая волна отсутствует; поэтому

$$H_y^{(3)}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(t) \exp [itz + \beta_3(t)x] dt. \quad (3a)$$

Остальные компоненты полей находятся из уравнений Максвелла; для простоты мы выпишем здесь лишь компоненты Фурье рассеянных полей:

$$\begin{aligned} e_z^{(s)}(t) &\equiv \frac{\beta_s(t)}{ik\epsilon_{\parallel}^{(s)}} h_s(t); \quad e_x^{(s)}(t) \equiv th_s(t)/k\epsilon_{\perp}^{(s)}; \\ s = 1, 2; \quad e_z^{(3)}(t) &\equiv -\beta_3(t) h_3(t)/ik\epsilon_{\parallel}^{(3)}; \\ e_x^{(3)}(t) &\equiv th_3(t)/k\epsilon_{\perp}^{(3)}. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве граничных условий используем равенство тангенциальных компонент полей на поверхности разрыва диэлектрических постоянных:

$$H_y^{(1)} = H_y^{(3)}, \quad E_z^{(1)} = E_z^{(3)} \quad (x = 0, z < 0); \quad (5a)$$

$$H_y^{(2)} = H_y^{(3)}, \quad E_z^{(2)} = E_z^{(3)} \quad (x = 0, z > 0); \quad (5b)$$

$$H_y^{(1)} = H_y^{(2)}, \quad E_x^{(1)} = E_x^{(2)} \quad (x > 0, z = 0). \quad (5c)$$

Подставляя поля, определяемые формулами (3) и (4), в граничные условия (5a) и (5b), с помощью леммы Винера—Пэли [4] получим следующие выражения для амплитуд Фурье неизвестных функций $h_n(t)$:

$$D_1 h_1(t) = \frac{Z_3 + n_1}{2\pi i(t + iq_1)} + Z_3 \eta^- - \xi^-; \quad D_s \equiv Z_3 + Z_s;$$

$$\begin{aligned} D_2 h_2(t) &= -\frac{Z_3 + n_2}{2\pi i(t - iq_2)} + Z_3 \psi^+ - \varphi^+; \quad Z_3 \equiv \beta_3 / i k e_{\perp}^{(n)}; \\ D_2 h_3(t) &= \frac{Z_2 - n_2}{2\pi i(t - iq_2)} - Z_2 \psi^+ - \varphi^+; \quad n_2 \equiv \gamma / i k e_{\perp}^{(s)}, \end{aligned} \quad (6)$$

причем индексами + и — обозначены функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной t . Четвертое соотношение, которое следует из граничных условий на плоскости $x = 0$, представляет собой граничную задачу для отыскания неизвестных функций ψ^+ , φ^+ , η^- и ξ^- :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_2} \left\{ \frac{Z_2 - n_2}{2\pi i(t - iq_2)} - Z_2 \psi^+ - \varphi^+ \right\} &= \\ = \frac{1}{D_1} \left\{ -\frac{Z_1 - n_1}{2\pi i(t + iq_1)} - Z_1 \eta^- - \xi^- \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Недостающие два соотношения между функциями, входящими в (7), могут быть найдены из граничных условий (5в) на полуплоскости $x > 0$, $z = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 (-1)^s \int_{-\infty}^{+\infty} h_s(t) \exp[-\beta_s(t)x] dt &= 0; \\ \sum_{s=1}^2 (-1)^s \int_{-\infty}^{+\infty} h_s(t) \exp[-\beta_s(t)x] \frac{t dt}{k e_{\perp}^{(s)}} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\exp[-\beta_s(t)x] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau \exp(i\tau x)}{\tau - i\beta_s(t)} \quad (x > 0)$$

и применяя к соотношениям (8) лемму Винера—Пэли, найдем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{(-1)^s h_s(t) dt}{\tau - i\beta_s(t)} &= U^+(\tau); \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{(-1)^s h_s(t) dt t}{[\tau - i\beta_s(t)] k e_{\perp}^{(s)}} &= V^+(\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где U и V — функции τ , аналитические в полуплоскости $\text{Im } \tau > 0$. Левые части соотношений (9) — аналитические в верхней полуплоскости τ всюду, за исключением разрезов, в которые на плоскость τ переводят ось $\text{Im } t = 0$ функции $i\beta_s(t)$ ($\text{Re } \beta_s(t) > 0$ по определению). На этих разрезах интегралы, входящие в (9), терпят разрывы, пропорциональные подынтегральным функциям. Для того, чтобы левые части (9) были аналитическими в полуплоскости $\text{Im } \tau > 0$, необходимо равенство нулю этих разрывов. Учитывая, что разным берегам разрезов соответствуют значения t , отличающиеся лишь знаком, из условий однозначности левых частей (9) при $\text{Im } \tau > 0$ найдем искомые соотношения между функ-

циями h_1 и h_2 . В общем виде для произвольных $\epsilon_{\perp}^{(s)}$ и $\epsilon_{\parallel}^{(s)}$ эти соотношения имеют вид

$$h_i(t) - h_i(-t) = \begin{cases} 0 & (t_{lm}^2(t) \leq 0) \\ \frac{\epsilon_{\parallel}^{(I)}}{\epsilon_{\perp}^{(m)}} \{h_m[t_{lm}(t)] - h_m[-t_{lm}(t)]\} & (t_{lm}^2(t) \geq 0) \end{cases};$$

$$h_i(t) + h_i(-t) = \frac{\alpha t}{t_{lm}} \{h_m[t_{lm}(t)] + h_m[-t_{lm}(t)]\} \quad (t_{lm}^2(t) \geq 0), \quad (10a)$$

где

$$t_{lm}^2(t) \equiv k^2 \epsilon_{\perp}^{(m)} \left[1 - \frac{\epsilon_{\parallel}^{(I)}}{\epsilon_{\perp}^{(m)}} \right] + \alpha t^2; \quad \alpha \equiv \epsilon_{\parallel}^{(I)} \epsilon_{\perp}^{(m)} / \epsilon_{\parallel}^{(m)} \epsilon_{\perp}^{(I)}. \quad (10b)$$

При $\alpha > 0$ одна из величин $t_{lm}^2(0)$ отрицательна, а другая положительна. Чтобы граничные условия (10а) и (10б) оставались непрерывными, необходимо использовать в (10а) то соотношение, для которого $t_{lm}^2(0) < 0$, а в (10б) — обратное (для которого $t_{lm}^2(0) > 0$).

Как и следует из этих выражений, в общем случае анизотропного клина граничные условия на полуплоскости $x > 0, z = 0$ с учетом соотношений (6), выражающих поля $h_n(t)$ через неизвестные функции ψ^+ , φ^+ , ξ^- и η^- , приводят к системе из трех граничных задач для отыскания этих функций. При этом, в отличие от проводящего торца, на котором граничные условия однородны [5], в случае свободного торца в граничные задачи входят не только значения неизвестных функций от аргумента t , но и их значения в точках $t_{lm}(t)$, т. е. имеет место сдвиг аргумента и изменение масштабов. Сдвиг аргумента отсутствует только в частном случае $\epsilon_{\parallel}^{(1)} = \epsilon_{\parallel}^{(2)}$. Ниже мы не будем предполагать выполненным последнее равенство и для простоты рассмотрим случай изотропного прямоугольного клина ($\epsilon_3 \equiv \epsilon_1 \equiv 1$; $\epsilon_{\perp}^{(2)} \equiv \epsilon_{\parallel}^{(2)} \equiv \epsilon < -1$). В этом случае масштаб сохраняется, и из (10а) и (10б) находим

$$h_1(t) - h_1(-t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq t_0) \\ \frac{1}{\epsilon} [h_2(t_-) - h_2(-t_-)] & (t \geq t_0) \end{cases}; \quad (10b)$$

$$h_2(t) + h_2(-t) = \frac{t}{t_+} [h_1(t_+) + h_1(-t_+)] \quad (t \geq 0), \quad (10c)$$

где

$$t_{\pm} \equiv + (t^2 \pm t_0^2)^{1/2}; \quad t_0^2 \equiv k^2 (1 - \epsilon); \quad \operatorname{Re}(1 - \epsilon) > 0.$$

Подставляя в (10) функции h_1 и h_2 из (6), с помощью формул Сохцкого—Племеля получим систему сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [6], определяющих неизвестные функции:

$$\tilde{\psi} \equiv \tilde{\psi}^+(t) - \tilde{\psi}^+(-t); \quad \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\varphi}^+(t) - \tilde{\varphi}^+(-t);$$

$$\tilde{\eta} \equiv \tilde{\eta}^-(t) - \tilde{\eta}^+(-t); \quad \tilde{\xi} \equiv \tilde{\xi}^-(t) - \tilde{\xi}^+(-t);$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\wedge}{\sigma} \left\{ \frac{Z_2 \tilde{\psi}' + \tilde{\varphi}'}{D_2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Z'_1}{Z_1} \right) \frac{Z'_2 \tilde{\psi}' + \tilde{\varphi}'}{D'_2} \right\} + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \stackrel{\wedge}{\sigma}_- \left[\left(1 - \frac{Z'_{1+}}{Z_1} \right) \frac{Z'_1 \tilde{\psi}' - \tilde{\varphi}'}{D'_2} \right] = F_1 \equiv \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^2 \times \\ & \times \frac{(-1)^s q_s (Z_s - n_s)}{D_s (t^2 + q_s^2)} ; \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\stackrel{\wedge}{\sigma} \left[\frac{Z_1 \tilde{\psi}' - \tilde{\varphi}'}{D_2} + \frac{Q}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{Z'_{1+}}{Z_{1+}} \right) \frac{Z'_1 \tilde{\psi}' - \tilde{\varphi}'}{D'_2} \right] + \frac{Q}{2} \stackrel{\wedge}{\sigma}_+ \times \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(1 - \frac{Z'_1}{Z_{2+}} \right) \frac{Z'_2 \tilde{\psi}' + \tilde{\varphi}'}{D'_2} \right] = F_2 \equiv \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^2 \frac{(-1)^s q_s (Z_1 + n_s)}{D_s (t^2 + q_s^2)} ; \\ & \tilde{\eta} \equiv - \frac{Z_2 \tilde{\psi} + \tilde{\varphi}}{D_2} - \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{Z_1 \tilde{\psi} - \tilde{\varphi}}{D_2} \right]_- ; \\ & \frac{1}{Z_1} \tilde{\xi} \equiv - \frac{Z_2 \tilde{\psi} + \tilde{\varphi}}{D_2} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{Z_1 \tilde{\psi} - \tilde{\varphi}}{D_2} \right]_- . \end{aligned} \quad (11b)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & \stackrel{\wedge}{\sigma}(\tau) f' \equiv \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{d\tau'}{\tau' - \tau} f(\tau') ; \quad t \equiv \sqrt{\tau} ; \quad t_\pm \equiv \sqrt{\tau_\pm} ; \\ & \tau_\pm \equiv \tau \pm \tau_0 ; \quad \tau_0 \equiv k^2(1 - \varepsilon) ; \quad Q \equiv \frac{t}{t_+} ; \\ & \tilde{\psi}^+ \equiv \psi^+ - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t + iq_2} ; \quad \tilde{\varphi}^+ \equiv \varphi^+ + \frac{n_2}{2\pi i} \frac{1}{t + iq_2} ; \\ & \tilde{\eta}^- \equiv \eta^- + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t - iq_1} ; \quad \tilde{\xi}^- \equiv \xi^- - \frac{n_1}{2\pi i} \frac{1}{t - iq_1} . \end{aligned}$$

При этом штрихами отмечены функции переменной τ' , по которой ведется интегрирование в операторе $\stackrel{\wedge}{\sigma}$; функции, зависящие от τ , не имеют индексов; нижними индексами \pm отмечены функции, зависящие от τ_\pm , причем в (11b) члены в правых частях, содержащие τ_- , равны нулю для $\tau_- \ll 0^*$, в соответствии с (10a).

Заметим, что неизвестные функции сдвинутых аргументов входят лишь в неособенные интегралы системы (11). Поскольку наиболее существенная характеристика системы сингулярных интегральных уравнений (ее индекс) определяется только ее особенной частью [6], то отсюда следует, что наличие сдвига в системе (11) не влияет на ее индекс. Кроме того, отсутствие сдвигов в особенной части системы (11) позволяет

* Надо отметить, что условие (10b) непрерывно в точке $\tau_- = 0$, поэтому и следующая из него система (11) не имеет разрыва в этой точке.

применить к ней стандартные методы регуляризации [6]. Так как индекс (11) равен нулю, то эта система эквивалентна системе из двух интегральных уравнений Фредгольма, которые можно получить, выделив в (11) особенную и неособенную части и разрешить полученные уравнения относительно $\tilde{\psi}'$ и $\tilde{\phi}'$. Таким путем найдем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}' + \overset{\wedge}{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} K_a'(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + \frac{1}{1+Q'\epsilon^{-1}} K_b'(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \right\} &= \overset{\wedge}{\sigma} \left(\frac{F_1'}{2} + \frac{F_2'}{1+Q'\epsilon^{-1}} \right); \\ \tilde{\varphi}' + \overset{\wedge}{\sigma} \left\{ \frac{Z'_1}{2} K_a'(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - \frac{Z'_2}{1+Q'\epsilon^{-1}} K_b'(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \right\} &= \overset{\wedge}{\sigma} \left(\frac{Z'_1 F_1'}{2} - \frac{Z'_2 F_2'}{1+Q'\epsilon^{-1}} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где операторами K_a' и K_b' обозначены неособенные интегралы (11a) и (11b) соответственно:

$$\begin{aligned} K_a'(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) &\equiv \frac{1}{2\epsilon} \overset{\wedge}{\sigma}_- \left[\left(1 - \frac{Z'_{1+}}{Z_1} \right) \frac{Z'_1 \tilde{\psi}' - \tilde{\varphi}'}{D'_2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \overset{\wedge}{\sigma} \left[\left(1 + \frac{Z'_1}{Z_1} \right) \frac{Z'_2 \tilde{\psi}' + \tilde{\varphi}'}{D'_2} - \frac{2}{D_2} (Z'_2 \tilde{\psi}' + \tilde{\varphi}') \right]; \\ K_b'(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) &\equiv \frac{Q}{2} \overset{\wedge}{\sigma}_+ \left[\left(1 - \frac{Z'_1}{Z_{1+}} \right) \frac{Z'_2 \tilde{\psi}' + \tilde{\varphi}'}{D'_2} \right] + \\ &+ \frac{Q}{2\epsilon} \overset{\wedge}{\sigma} \left[\left(1 + \frac{Z'_{1+}}{Z_{1+}} \right) \frac{Z'_1 \tilde{\psi}' - \tilde{\varphi}'}{D'_2} - \frac{2}{D_2} (Z'_1 \tilde{\psi}' - \tilde{\varphi}') \right]. \end{aligned}$$

Система интегральных уравнений Фредгольма (12) может быть решена численными методами; однако в настоящее время достаточно хорошо развиты методы численного интегрирования систем сингулярных интегральных уравнений [7], с помощью которых можно решать непосредственно систему (11).

Решение рассматриваемой задачи существенно упрощается при наличии малого параметра. Так, при $|\epsilon| \gg 1$, с точностью до величин порядка $|\epsilon|^{-1}$ импеданс клина Z_2 можно считать постоянным (импедансное приближение, см. [8]). В этом случае уравнение (11a) определяет функцию $\Phi \equiv \tilde{\psi} + Z'_2 \tilde{\psi}'$, причем вклад неособенного интеграла со смещением пропорционален $|\epsilon|^{-1}$, т. е. оказывается пренебрежимо малым. Так как, согласно (6) и (11b), амплитуды Фурье поля вне клина h_1 и h_3 выражаются в этом приближении только через функцию Φ , для отыскания решения внешней задачи в этом приближении достаточно найти эту функцию из уравнения (11a). Уравнение (11b) в этом случае позволяет найти распределение поля внутри клина. При не слишком больших $|\epsilon|$ можно найти следующие члены разложения по $|\epsilon|^{-1}$ методом последовательных приближений.

Однако полученное таким образом решение справедливо лишь в длинноволновой области значений $\tau \ll k^2 |\epsilon|$. В коротковолновой области ($\tau \gg k^2 |\epsilon|$, или $k \rightarrow 0$, электростатическое приближение) необходимо решать оба уравнения системы (11). В этом случае наличие сдвига также оказывается несущественным (хотя слагаемые σ_{\pm} при этом и не малы), а решение системы (11), в полном соответствии с результатами Гринберга [3], дает нарастание поля вблизи ребра клина, пропорциональ-

ное $r^{2\delta-1}$ ($r^2 \equiv x^2 + z^2$). Здесь δ определяется как наименьший положительный корень уравнения:

$$\operatorname{tg}^2(\pi\delta) = (3\epsilon+1)(\epsilon+3)(\epsilon-1)^{-2}.$$

В случае произвольных ϵ решение задачи может быть получено путем численного интегрирования систем (11) или (12).

Следует отметить, что задача о рассеянии H -волн в системе из четырех прямоугольных клиньев с общим ребром была рассмотрена методом двойного преобразования Лапласа в работе [9]. Основным результатом этой работы является система из четырех двумерных сингулярных интегральных уравнений для компонент Фурье искомых полей. Изложенный выше метод представляется нам более удобным, поскольку в аналогичной геометрии он, как легко показать, дает в общем случае четыре одномерных сингулярных интегральных уравнения, а при достаточно простых предположениях относительно диэлектрических постоянных — систему типа (11) — (12) из двух одномерных уравнений.

Автор благодарит Г. Я. Любарского и В. А. Марченко за обсуждение результатов работы, а также Я. Б. Файнберга и М. А. Миллера за ценные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтович, В. А. Фок, Г. А. Гринберг, Г. Л. Файнберг, сб. Исследования по распространению радиоволн, 2, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
2. Г. Д. Малюжинец, Акуст. ж., 1, №№ 2, 3, 144, 226 (1955).
3. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, М., 1948.
4. Н. Винер, Р. Пэлли, Преобразование Фурье в комплексной области, изд. Наука, М., 1964.
5. С. С. Калмыкова, В. И. Курилко, ДАН СССР, 154, 1066 (1964).
6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962; Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963; Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
7. В. Иванов, сб. Итоги науки. Математический анализ 1963, изд. АН СССР, М., 1965, стр. 125.
8. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 795 (1961).
9. E. Meister, N. Latz, ZAMM, 44, Sonderheft, 47 (1964).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
21 января 1966 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING BY RECTANGULAR DIELECTRIC WEDGE

V. I. Kurilko

Considers the scattering of the surface E -wave propagating along the facet of the rectangular dielectric wedge by the edge of it, the field being two-dimensional. The problem of finding Fourier components of the scattered field is shown to reduce, in the general case, to the system of two singular integral equations with a shift, this system being equivalent to that of two Fredholm integral equations. The solution of the system for the case of small skin depth has been investigated in the electrostatic approximation.

УДК 621.372.3

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

M. I. Рабинович, Е. И. Якубович

Для получения укороченных уравнений, описывающих нестационарные процессы в одномерных системах с малой нелинейностью, используется метод усреднения по квазигармоническим решениям, соответствующим встречным волнам. С помощью этого метода получены усредненные уравнения для амплитуд и фаз встречных волн, описывающие нестационарные процессы в безграничной и ограниченной линии передачи с активной и реактивной нелинейностью. Исследованы автоколебательные процессы в отрезке активной линии. Для безграничных систем найдены специфические решения нестационарных уравнений — стационарные волны огибающих (в частности, затухающие и нарастающие волны амплитуд, а также одиночные импульсы амплитуд). Рассмотрены решения, стационарные по времени или по координате. Показано также, что в кольцевой активной системе не могут существовать стоячие волны, поскольку соответствующее им решение неустойчиво.

Исследованию волновых процессов в слабонелинейных распределенных системах в литературе уделяется весьма большое внимание [1—4]. При этом обычно рассматриваются близкие к синусоидальным бегущие волны, распространяющиеся в безграничных пассивных средах. Такие волны описываются усредненными уравнениями для амплитуды и фазы волны, являющихся медленными функциями координат и времени. В ряде последних работ рассматриваются решения, которые представляют собой результат взаимодействия нескольких (обычно двух, трех) квазигармонических волн различных частот, распространяющихся в одном направлении [1]. При этом появляется возможность рассмотреть влияние нелинейности на изменение спектра решения и т. д.

Однако указанный подход не применим при рассмотрении весьма широкого круга нелинейных систем. Это в первую очередь относится к исследованию распределенных автоколебательных систем (например, плоского активного слоя или отрезка активной линии), поскольку в таких системах уже при рассмотрении простейшего случая — квазимонокроматических колебаний — необходимо учитывать нелинейное взаимодействие встречных волн. Следует отметить, что при рассмотрении ограниченных нелинейных систем пренебрежение взаимодействием встречных волн (присутствие которых обязательно для удовлетворения граничных условий соответствующей краевой задачи), вообще говоря, допустимо лишь в некоторых случаях (см., например, [2, 3]). Кроме того, в безграничных системах, обладающих сильной дисперсией, эффективность нелинейного взаимодействия встречных волн одной частоты может быть значительно больше, чем волн различных частот, бегущих в одну сторону.

В настоящей работе для исследования нестационарных процессов в одномерной слабонелинейной системе применяется и обосновывается метод усреднения по встречным квазигармоническим волнам (решениям). Отметим, что метод усреднения по встречным волнам использо-

вался в ряде работ, однако, лишь при рассмотрении стационарных по времени процессов [4–6].

В работе рассматривается одномерная система — линия передачи с малой активной и реактивной нелинейностью*, замкнутая в кольцо или отрезок линии. Уравнения для токов и напряжений в такой распределенной системе совпадают с уравнениями для полей, описывающих плоские электромагнитные волны в нелинейной однородной среде.

На основе анализа полученных укороченных уравнений для амплитуд и фаз встречных волн исследованы стационарные и некоторые нестационарные процессы в рассматриваемой нелинейной системе. В частности, для активной линии получены решения нестационарных уравнений, для которых амплитуды встречных волн зависят от одного аргумента. Эти решения представляют собой стационарные волны огибающих — бегущие волны амплитуд, скорость распространения которых определяется граничными и начальными условиями. Среди них могут быть, в частности, затухающие и нарастающие волны амплитуд, а также одиночные импульсы огибающих, аналогичные известным решениям в виде уединенных волн для полей [8].

Для кольцевой линии исследована устойчивость стационарного решения в виде стоячих волн. Показано, что такой режим неустойчив.

1. Рассмотрим нелинейную линию передачи, ток и напряжение в которой описываются системой уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial z} &= -[C + \mu C_1(u)] \frac{\partial u}{\partial t} - \mu f(u), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1a)$$

с граничными условиями

$$u(z, t)|_{z=0,l} = F_{0,l}\{I(z, t)\}|_{z=0,l} \quad (1.1b)$$

для отрезка линии и условиями

$$I(z, t), u(z, t) = I(z + lt), u(z + l, t)$$

для линии, замкнутой в кольцо. Здесь L и C — линейные дифференциальные операторы от I и u соответственно, $C_1(u)$ и $f(u)$ — нелинейные интегрируемые функции, $F_{0,l}$ — также линейные дифференциальные операторы в обычных производных (по времени), вид которых определяется характером нагрузки при $z = 0, l$, а $\mu \ll 1$ — малый безразмерный параметр.

Будем искать решение системы (1.1), представляющее собой результат взаимодействия встречных квазимохроматических волн. Существование квазимохроматических решений даже в слабонелинейной системе, как известно [1,7], возможно лишь в случае, когда система обладает достаточно сильной дисперсией. Считая, что рассматриваемая система, в которой L и C предполагаются зависящими от скорости изменения переменных, удовлетворяет указанному требованию, в дальнейшем положим, учитывая дискретность ряда частот, для которых выполнены граничные условия ($\omega = \omega_k$), что в полосе $\Delta\omega \ll \omega_k - \omega_{k-1}$ параметры L и C постоянны и равны L_k , C_k . Фазовые скорости v_k , соответствующие различным частотам, предполагаются существенно различными. Пусть решение (1.1) имеет вид

* Предполагается, что диссипация энергии в элементах линии может быть как положительной, так и отрицательной.

$$u = A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + kz + \varphi_2) + \mu W(z, t), \quad (1.2)$$

$$\omega = kv, \quad v^{-2} = L(\omega) C(\omega),$$

где $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ — медленно меняющиеся функции координаты z и времени t , $W(z, t)$ — ограниченная функция порядка $A_{1,2}$, а ω — частота решения, которая выбирается равной ω_k — частоте одного из собственных решений краевой задачи (1.1) при $\mu = 0$.

Остановимся на методе получения приближенных уравнений относительно медленных переменных $A_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$.

Подставив в полученное из (1.1) волновое уравнение с малой правой частью искомое решение в виде (1.2) и приравнивая затем члены первого порядка малости, находим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = H(z, t); \quad (1.3a)$$

$$H(z, t) = -2 \frac{\omega}{v^2} [(A_1' + vA_1) \sin \xi_- + (A_2' - vA_2) \sin \xi_+ +$$

$$+ (\dot{\varphi}_1 + v\varphi_1') A_1 \cos \xi_- + (\dot{\varphi}_2 - v\varphi_2') A_2 \cos \xi_+] +$$

$$+ L\omega\mu [\omega C_{1u}' (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) \cdot (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+)^2 +$$

$$+ \omega C_1 (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) \cdot (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) -$$

$$- f_u' (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) \cdot (A_1 \sin \xi_- + A_2 \sin \xi_+)]. \quad (1.3b)$$

Здесь точкой обозначена производная d/dt , штрихом — производная d/dz , $\xi_{\pm} = \omega t \pm kz + \varphi_{1,2}$. Искомое решение будет, очевидно, иметь вид (1.2) лишь в случае, если функция $\mu W(z, t)$ остается малой при любом t . Это условие накладывает известные ограничения на функцию $H(z, t)$, которые следует определить. Найденные соотношения являются исходными для получения укороченных (усредненных) уравнений относительно медленно меняющихся переменных*.

Рассмотрим вынужденное решение системы (1.3), (1.2). В изображениях при нулевых начальных условиях эта система имеет вид**

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{p^2}{v^2} W = H(z, p); \quad (1.4a)$$

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{z=0,l} = \pm \frac{Lp}{Z_{0,l}(p)} W(z, p) \Big|_{z=0,l}, \quad (1.4b)$$

где p — параметр преобразования Лапласа по времени, а $Z_{0,l}(p)$ — импедансы на концах $z = 0, l$. Нетрудно видеть, что решение краевой задачи (1.4) представляется в виде

$$W(z, p) = \int_0^l \frac{K(p, z, z')}{\Delta(p)} H(p, z') dz', \quad (1.5)$$

* Предлагаемый ниже метод получения укороченных уравнений, очевидно, обобщается и на неавтономные системы.

** Поскольку имеется необходимое условие, которому должна удовлетворять функция H , достаточно рассмотреть нулевые начальные условия.

где

$$\begin{aligned}
 K(p, z, z') = & \left(\frac{p}{v} + \frac{L^2 p v}{Z_0 Z_l} \right) \operatorname{ch} \frac{p}{v} (l + z - z') + \left(\frac{p}{v} - \frac{L^2 p v}{Z_0 Z_l} \right) \times \\
 & \times \operatorname{ch} \frac{p}{v} (l - z - z') + L p \frac{Z_0 + Z_l}{Z_0 Z_l} \operatorname{sh} \frac{p}{v} (l + z - z') - L p \frac{Z_0 - Z_l}{Z_0 Z_l} \times \\
 & \times \operatorname{sh} \frac{p}{v} (l - z - z'); \\
 \Delta(p) = & \left(\frac{L p}{Z_0} - \frac{p}{v} \right) \left(\frac{L p}{Z_l} - \frac{p}{v} \right) \exp \left(-\frac{p}{v} l \right) - \left(\frac{L p}{Z_0} + \frac{p}{v} \right) \left(\frac{L p}{Z_l} + \frac{p}{v} \right) \times \\
 & \times \exp \left(\frac{p}{v} l \right).
 \end{aligned}$$

С помощью вычетов легко находится оригинал $W(z, p)$:

$$W(z, p) = \int_0^t \int_0^l H(z', \tau) \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{res} \frac{K(p_i, z, z') \exp [p_i(t - \tau)]}{\Delta(p_i)} dz' d\tau. \quad (1.6)$$

Здесь $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ — собственные числа соответствующей (1.4) однородной краевой задачи, определяемые из характеристического уравнения $\Delta(p) = 0$. Необходимым условием малости $\mu W(z, t)$ является малость $\mu W_i(z, t)$.

Рассмотрим те слагаемые (1.6), которым соответствуют числа p_k , удовлетворяющие условию

$$\omega_k \gg \sigma_k \quad (1.7)$$

при $k > k_0$. Нетрудно показать, что при обычно встречающихся импедансах $Z_{0,l}(p)$ такие p_k существуют. Поскольку σ_k может быть как угодно мало, необходимым условием малости $\mu W_k(z, t)$ является ограниченность $W_k(z, t)$ при $\sigma_k \rightarrow 0$. Учитывая это, из (1.5), (1.6) находим, что функция $H(z, t)$ должна удовлетворять соотношениям*

$$\int_t^{t+2\pi/\omega_k} \int_0^l H(z', \tau) \sin \left(\omega_k \tau \mp \frac{\omega_k}{v} z' \right) dz' d\tau = 0 \quad (k_0 < k = k_1, k_2, \dots), \quad (1.8)$$

которые и являются основными при выводе укороченных уравнений.

Заметим, что на основе аналогии с сосредоточенными системами соотношения (1.8) могли быть написаны непосредственно. Однако применительно к ограниченным системам упомянутая аналогия часто приводит к неверным результатам. Ввиду этого данное выше обоснование является необходимым.

В общем случае, когда ищется решение, которое представляет результат взаимодействия n частот, функция $H(z, t)$ содержит n слагаемых, соответствующих различным частотам; согласно (1.8), для вывода укороченных уравнений имеется $4n$ соотношений для $4n$ переменных — амплитуд и фаз встречных волн на n частотах. Напомним, что в рассматриваемом случае квазимонохроматического решения ω в (1.2) равно одному из ω_k , а из (1.8) следуют четыре уравнения, которые находятся после подстановки в (1.8) $H(z, t)$ из (1.3б) и усреднения по явно входя-

* Рассматриваемая задача во многом аналогична задаче о резонансе в диссипативных системах с сосредоточенными параметрами.

шим z и t (двойной интеграл в (1.8), нормированный на $2\pi l/\omega_k$, представляет очевидно, среднее по z , t^*). Эти уравнения имеют вид

$$\dot{A}_{1,2} \pm v A'_{1,2} = -\frac{\mu}{C} \Phi_{1,2}(A_1, A_2), \quad (1.9)$$

$$\varphi_{1,2} \pm v \varphi'_{1,2} = \frac{\mu \omega}{CA_{1,2}} \bar{\Phi}_{1,2}(A_1, A_2), \quad (1.10)$$

где

$$\Phi_{1,2}(A_1, A_2) = \ll f'_u (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) A_{1,2} \sin^2 \xi_\mp \gg,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{1,2}(A_1, A_2) = & \ll C_1 (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) \times \\ & \times \cos \xi_\mp + C_{1u} (A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) (A_1 \sin \xi_- + A_2 \sin \xi_+)^2 \times \\ & \times \cos \xi_\mp \gg \end{aligned}$$

(двойные уголковые скобки означают усреднение по явно входящим z и t^{**}).

Полученные уравнения (1.9), (1.10) с точностью до величин порядка μ описывают нестационарные квазигармонические процессы в исследуемой нелинейной системе. Прежде чем перейти к их анализу, отметим некоторые особенности, присущие консервативным и неконсервативным системам, которые непосредственно следуют из вида уравнений.

Согласно (1.9), (1.10), в системе без потерь ($f = 0$), обладающей только реактивной нелинейностью, для амплитуд существуют лишь решения вида $\partial A_1 / \partial \xi_+ = \partial A_2 / \partial \xi_- = 0$, т. е. амплитуды встречных волн не зависят друг от друга и являются функцией чисто бегущей координаты — $A(\xi_-)$ и $A_2(\xi_+)$ соответственно. Взаимодействие между встречными волнами в консервативной нелинейной системе оказывается только на изменении фаз этих волн, что влечет за собой изменение их частот. При этом фазы, а следовательно, и частоты волн зависят от их амплитуд. При известном решении (1.9) эта зависимость легко находится интегрированием (1.10), поскольку их правые части не зависят от фаз..

В системах, обладающих лишь активной нелинейностью ($C_1 \equiv 0$), имеет место обратное — частота волн не зависит от характера решения, а амплитуды волн связаны нелинейной системой (1.9). Существенно отметить, что и в том и в другом случае уравнения для амплитуд не содержат переменных $\varphi_{1,2}$ и потому могут быть исследованы независимо от уравнений для фаз.

2. Рассмотрим некоторые классы решений (1.9). Пусть между искомыми переменными существует связь

$$m_1 = h(m_2), \quad (2.1)$$

где $m_{1,2} = A_{1,2}^2$. Уравнения для этих величин в бегущих координатах $\xi_\pm = vt \pm z$, согласно (1.9), представляются в виде

* В дальнейшем усреднение проводится по длине волны λ .

** При получении уравнений (1.9), (1.10) учтено, что

$$\ll F(A_1 \cos \xi_- + A_2 \cos \xi_+) \sin^n \xi_- \sin^m \xi_+ \gg = \ll F \sin \xi_\pm \cos \xi_\pm \gg = 0,$$

где n, m — нечетные целые, а F — дробно-рациональная функция своего аргумента.

$$\frac{\partial m_1}{\partial \xi_+} = F_1(m_1, m_2), \quad \frac{\partial m_2}{\partial \xi_-} = F_2(m_1, m_2), \quad (2.2)$$

где

$$F_1(0, m_2) = F_2(m_1, 0) = 0. \quad (2.3)$$

Воспользовавшись (2.1), (2.2), нетрудно найти, что $F_{1,2}$ и h связаны дифференциальным соотношением

$$\frac{d}{dm_2}(\ln F_1 - \ln F_2) = \frac{d}{dm_2} \ln h', \quad (2.4)$$

после интегрирования которого находим

$$\frac{dm_1}{dm_2} = R \frac{F_1(m_1, m_2)}{F_2(m_1, m_2)}, \quad (2.5)$$

где R — произвольная константа. Таким образом, переменные m_1 и m_2 связаны автономным дифференциальным уравнением первого порядка. Легко видеть, что связь (2.1) (или (2.5)) предполагает, по существу, зависимость m_1 и m_2 от одного и того же параметра (аргумента).

Действительно, поскольку на функции $m_1 = m_1(\xi_-, \xi_+)$, $m_2 = m_2(\xi_-, \xi_+)$ наложена связь, то якобиан $D(m_1, m_2)/D(\xi_-, \xi_+)$ равен нулю. Учитывая (2.2), при этом имеем

$$\frac{\partial m_1}{\partial \xi_-} \frac{\partial m_2}{\partial \xi_+} = F_1 F_2,$$

откуда, согласно (2.4), находим

$$\frac{\partial m_2}{\partial \xi_-} - R \frac{\partial m_2}{\partial \xi_+} = 0, \quad (2.6)$$

т. е.

$$m_{1,2} = m_{1,2}(x = \xi_+ + R\xi_-) \text{ или}$$

$$m_{1,2} = m_{1,2}[v(1 + R)t + (1 - R)z]. \quad (2.7)$$

Как следует из (2.7), огибающие встречных волн для рассматриваемого класса решений (1.4) (или (2.2)) представляют собой стационарные бегущие волны*. В отличие от заполнения, волны амплитуд m_1 и m_2 распространяются не в противоположных, а в одном и том же направлении. Скорость распространения этих волн

$$V = v \frac{1 + R}{1 - R} \quad (2.8)$$

может быть в безграничной системе произвольной, с тем лишь ограничением, что m_1 и m_2 остаются медленными функциями z и t по сравнению с гармоническим заполнением. В ограниченной системе интервал допустимых значений V определяется краевыми условиями.

Учитывая, что $m_{1,2}$ — однопараметрические зависимости, уравнение (2.5) можно рассматривать как уравнение интегральных кривых на плоскости m_1, m_2 и использовать для исследования решений вида (2.1) качественные методы.

Различным множествам решений (2.1) соответствуют различные значения скорости V , т. е. различные значения параметра R . Сущест-

* Заметим, что обратное утверждение — решения (2.2) в виде стационарных бегущих волн удовлетворяют связи вида (2.1) — очевидно.

венно отметить, что среди этих решений находятся и те, которые зависят лишь от одной из переменных z, t . Такие решения будем называть стационарными по времени (им соответствует $R = -1$) или по координате ($R = +1$) (однородные решения). Первые, если они устойчивы, описывают установившиеся процессы в системе, а рассмотрение последних позволяет определить устойчивость решений типа $m_{1,2} = \text{const}$ (чисто бегущие или стоячие волны) по отношению к возмущениям частоты

$$\Omega \sim \omega \quad (\Omega - \omega \sim \mu\omega).$$

Остановимся на значениях параметра $R = 0, \infty$. Нетрудно видеть, что при таких значениях R (им соответствуют значения $V = \mp v$) функции m_1 и m_2 связаны соотношением $F_i(m_i, m_k)$, где $i, k = 1, 2, i \neq k$. Система (2.2) при этом может быть представлена в интегрируемом виде

$$\begin{aligned} \frac{dm_i}{d\xi_k} &= F_i[m_i, m_k(m_i)], \\ F_k(m_i, m_k) &= 0, \quad \xi_1 = \xi_-, \quad \xi_2 = \xi_+, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $m_k(m_i)$ — функция F_k , разрешенная относительно m_i . Таким образом, решение исходной системы при $R = 0, \infty$ выражается в форме*

$$u = H[A_2(\xi_{\pm})] \cos(k\xi_{\mp} + \varphi_1) + A_2(\xi_{\pm}) \cos(k\xi_{\pm} + \varphi_2). \quad (2.10)$$

Здесь $H(A_2)$ и $A_2(\xi_{\pm})$ — известные функции, определяемые из (2.9). Если одна из встречных волн отсутствует, то, согласно (2.3), (2.9), это решение принимает вид

$$u = A_{1,2}(\xi_{\pm}) \cos(k\xi_{\mp} - \varphi_{1,2}). \quad (2.11)$$

Напомним, что поскольку стационарные волны амплитуд распространяются в одном направлении, рассмотренные решения, для которых $m_1 = h(m_2)$, могут существовать только в безграничной или, если выполнены условия периодичности, в кольцевой системах.

3. Конкретизируем нелинейные зависимости $f(u)$ и $C_1(u)$. Во многих практически интересных случаях [1, 4, 7] они могут быть представлены в виде полиномов третьей степени

$$\begin{aligned} f(u) &= -g(u + \beta u^2 - \alpha u^3), \\ C_1(u) &= C_0 u + C_1 u^2 + C_2 u^3 \quad (g, \alpha, C_1 > 0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

При этом укороченные уравнения (1.4), (1.5) в переменных $m_{1,2}, \varphi_{1,2}$ будут иметь вид

$$\dot{m}_{1,2} \pm v \dot{m}'_{1,2} = \frac{\mu g}{C} m_{1,2} \left[1 - \frac{3}{4} \alpha (m_{1,2} + 2m_{2,1}) \right], \quad (3.2)$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} \pm v \dot{\varphi}'_{1,2} = \frac{\mu \omega}{C/C_1} \frac{3}{8} (m_{1,2} + 2m_{2,1}). \quad (3.3)$$

Рассмотрим в первую очередь решения (3.2), (3.3), стационарные по времени. Фазовый портрет системы (3.2) при $m_{1,2} = 0$ представлен на рис. 1. На плоскости $m_{1,2}$ имеются четыре состояния равновесия, три из которых, а именно: $O(0, 0)$, $a(4/3\alpha, 0)$ и $b(0, 4/3\alpha)$ — седла, а одно: $M(m_1 =$

* Легко показать, что найденные решения представляют собой простые волны амплитуд.

$= m_2 = 4/9\alpha$) — центр. Точки a и b соответствуют стационарным волнам постоянной амплитуды, распространяющимся в $+z$ (m_1) и в $-z$ (m_2) направлениях, а точка M — стоячим волнам.

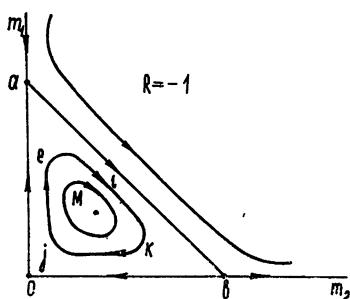


Рис. 1. Плоскость m_1, m_2 для стационарного во времени режима ($R = -1$).

В общем случае в исходной системе (1.1) стационарные бегущие волны могут и не существовать; полученный же результат означает, что в системе рассматриваемого вида всегда существуют решения, соответствующие таким волнам с точностью до поправок порядка μ . Среди ограниченных систем такие волны могут быть реализованы лишь в кольце. В кольцевых системах возможны также волны с периодически меняющейся в пространстве амплитудой. На фазовой плоскости m_1, m_2 они представляются замкнутой траекторией (например, $ijkl$); период Λ движения по этой траектории должен, очевидно, удовлетворять условию $\Lambda = l/n$ ($n = 1, 2, \dots$), где l — длина кольца.

Для рассмотрения решений в отрезке линии длины l введем граничные условия $m_1 = r_1 m_2$ в точке $z = 0$ и $m_1 = m_2/r_2$ в точке $z = l$, где r_1 и r_2 — модули коэффициентов отражения по мощности на концах $0, l$ соответственно. На плоскости m_1, m_2 эти условия изображаются двумя прямыми. Фазовые траектории, представляющие решения, которые могут существовать в отрезке с данными граничными условиями, должны начинаться на первой из этих прямых и заканчиваться на второй, причем величина изменения z при движении по траектории должна быть равна длине отрезка.

Легко видеть, что для существования траектории, удовлетворяющей указанным ограничениям, необходимо, чтобы произведение $r_1 r_2 < 1$ превышало некоторую критическую величину r_0 . С ростом l эта величина, очевидно, убывает. Такое условие, по существу, является выражением требования, чтобы рассматриваемая система была близка к консервативной.

Интересно отметить, что решения, качественно аналогичные рассмотренным (см. рис. 1), получены и при исследовании стационарных колебаний активного плоского слоя (одномерной модели лазера [6]).

Определим частоту колебаний в отрезке нелинейной линии. Проинтегрировав (3.2), (3.3) ($m_{1,2} = \varphi_{1,2} = 0$), находим, что амплитуды и фазы волн связаны в каждой точке пространства соотношением

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \frac{5}{6} \omega \frac{\rho C_1}{\alpha} \left(\frac{1}{\rho g} \ln \frac{m_1}{m_2} - 2\mu z \right) = D, \quad (3.4)$$

где D — произвольная константа, а $\rho = (L/C)^{1/2}$. Учитывая малость нелинейности в рассматриваемой системе, запишем граничные условия для фаз $\varphi_{1,2}$ в виде

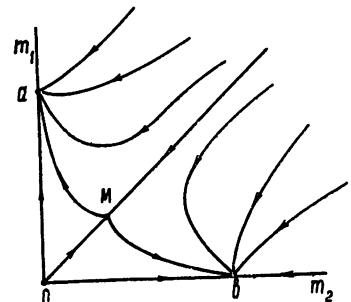


Рис. 2. Плоскость m_1, m_2 для стационарного по координате режима ($R = +1$).

$$(\varphi_1 - \varphi_2 - 2kz)|_{z=0,l} = 2\pi n_{0,l} + \Delta_{0,l}, \quad (3.5)$$

где $\Delta_{0,l}$ — фазу коэффициента отражения по мощности в точке — будем считать не зависящей от характера решения. Из (3.4), (3.5) легко найти частоту колебаний нелинейного резонатора:

$$\omega_n = (2\pi n + \Delta)/2l \left\{ \rho C \left[1 + \frac{5}{6} \frac{C_1}{\alpha C} (\mu - \ln r_1 r_2 / 2l \rho g) \right] \right\}^{-1} \quad (3.6)$$

$$(\Delta = \Delta_0 - \Delta_l; n = n_0 - n_l).$$

Согласно полученному выражению, при отсутствии реактивной нелинейности ($C_1 = 0$) частоты ω_n совпадают с собственными частотами линейного резонатора. В системе с реактивной нелинейностью из (3.6) может быть получено ограничение на коэффициенты отражения, аналогичное указанному выше. Действительно, поскольку усреднение имеет смысл лишь при выполнении условия $\lambda \ll l$ или $k \gg 2\pi/l$, из (3.6) получаем

$$\frac{\ln r_1 r_2}{l \rho g} \sim \mu. \quad (3.7)$$

Если коэффициенты отражения r_1, r_2 существенно отличны от единицы, то проведенное рассмотрение справедливо лишь по отношению к достаточно длинной системе.

4. Найденные выше стационарные решения могут существовать в исходной системе лишь в том случае, если они устойчивы. Исследование устойчивости стационарных решений выходит за рамки настоящей работы, однако некоторые выводы относительно устойчивости решений, амплитуда которых не зависит от координаты, могут быть сделаны на основе анализа уравнений (3.2).

Стационарные по координате решения удовлетворяют, согласно (3.2), системе вида

$$\dot{m}_{1,2} = \frac{\mu g}{C} m_{1,2} \left[1 - \frac{3}{4} \alpha (m_{1,2} + 2m_{2,1}) \right]. \quad (4.1)$$

Фазовый портрет этой системы представлен на рис. 2. На плоскости имеется четыре состояния равновесия. Два из них — $a(4/3\alpha, 0)$ и $b(0, 4/3\alpha)$ — устойчивые узлы, одно — $0(0, 0)$ — неустойчивый узел и последнее — $M(m_1 = m_2 = 4/9\alpha)$ — седло.

Непосредственно из вида построенной фазовой плоскости следует, что в кольцевой линии* стационарный режим, которому соответствует состояние равновесия M , неустойчив по отношению к возмущениям вида $G(\mu t) \cos(\omega t \pm kz)$. Следовательно, в кольцевой системе стационарный режим в виде стоячих волн реализован быть не может.

5. Для исследуемого вида нелинейностей (3.1) рассмотрим подробнее стационарные волны амплитуд (см. раздел 2).

Согласно (2.7), стационарные волны амплитуд в системе (3.2) описываются двумя уравнениями первого порядка в обычных производных:

$$\frac{dm_1}{dx} = \frac{\mu g}{Cv} m_1 \left[1 - \frac{3}{4} \alpha (m_1 + 2m_2) \right], \quad (5.1)$$

* Произвольные решения, представляемые на фазовой плоскости системы (4.1), могут существовать лишь в кольце.

$$\frac{dm_2}{dx} = \frac{1}{R} \frac{\mu g}{Cv} m_2 \left[1 - \frac{3}{4} \alpha (m_2 + 2m_1) \right].$$

Фазовые портреты этой системы при различных значениях параметра R представлены на рис. 3. Анализ этих фазовых портретов показывает,

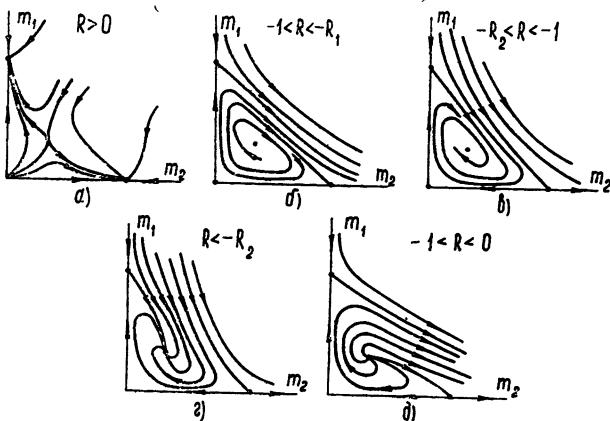


Рис. 3. Плоскость m_1, m_2 для различных значений параметра R .

что в безграничной системе возможны четыре типа качественно различных стационарных волн огибающих: стационарные перепады, нарастающие волны амплитуд, затухающие волны амплитуд и одиночные импульсы амплитуд*. Примеры волн каждого из этих типов даны на рис. 4.

На этом же рисунке приведены соответствующие зависимости плотности энергии $W = m_1 + m_2$ от бегущей координаты $x = vt - z$. Заметим, что в случае затухающих волн огибающая может убывать (с ростом x) как от бесконечного значения до конечного, так и от конечного значения до меньшего. От стационарного перепада такие решения отличаются осцилляторным характером асимптотического поведения при $x \rightarrow \infty$ (рис. 4). Интересно отметить также, что в отличие от аналогичных решений для полей, амплитуда одиночного импульса огибающей может принимать не единственное определенное значение, а произвольное — от нуля до некоторого максимального.

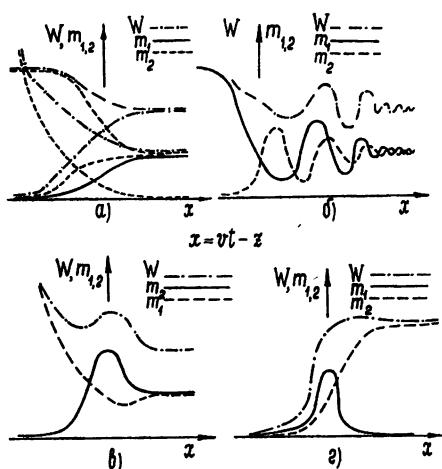


Рис. 4. Зависимость плотности энергии W и квадратов амплитуд m_1, m_2 от бегущей координаты $x = vt - z$ для различных типов стационарных волн огибающих.

Авторы благодарны А. В. Гапонову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

* Аналогичные волны тока или напряжения (или поля) в литературе часто называют уединенными волнами [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
2. С. А. Ахманов, В. Г. Дмитриев, В. П. Моденов, Радиотехника и электроника, 10, 648 (1965).
3. С. А. Ахманов, В. Г. Дмитриев, В. П. Моденов, В. В. Фадеев, Радиотехника и электроника, 10, 2157(1965).
4. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, 46, 963 (1964).
5. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 682 (1964).
6. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 8, 91 (1965).
7. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 9, 173 (1966).
8. Р. З. Сагдеев, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Госатомиздат, 1964.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 февраля 1966 г.

APPLICATION OF AVERAGING METHOD TO THE INVESTIGATION OF
DISTRIBUTED SYSTEMS WITH SMALL NONLINEARITY

M. I. Rabinovich, E. I. Yakubovich

In order to obtain the shortened equations, describing the nonstationary processes in unidimensional systems with small nonlinearity, the averaging method is applied to quasiharmonic solutions, corresponding to the opposite waves. The averaged equations for amplitudes and the phases of the opposite waves in finite and infinite transmission lines with active and reactive nonlinearities are derived. The autooscillation processes in a finite active line are investigated. For the infinite systems the specific solutions of the nonstationary equations are found—stationary waves of envelopes (in particular, single amplitude impulses as well as damping and growing amplitude waves). Solutions stationary in time or coordinate are considered. The standing waves are shown to be unable to exist in the active ring system, since the solution is unstable.

УДК 621.385.64 : 537.525.92

ВЛИЯНИЕ ПРЕДОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В МАГНЕТРОНЕ

Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов

Проведен расчет связанных с предосцилляционными шумами закритического анодного тока и распределения плотности пространственного заряда на участке между границей электронного облака и анодом плоского магнетрона. Показано, что под действием флюктуационных полей пространственный заряд распространяется до самого анода, хотя граница облака сохраняется как резкое изменение плотности заряда. Расчет флюктуационных полей по полученному соотношению для анодного тока дает результаты, совпадающие с экспериментом.

Теория статического состояния магнетрона, имеющая дело со стационарными траекториями электронов, не в состоянии объяснить ряд явлений, наблюдавшихся в магнетроне в предосцилляционном режиме. К ним относятся, в первую очередь, наличие пространственного заряда в области между критическим радиусом и анодом и протекание анодного тока при магнитном поле, большем критического. Объяснить эти явления влиянием эмиссионных скоростей электронов, перекосом магнитного поля, неэквипотенциальностью катода, краевыми полями или эксцентризитетом электродов оказалось невозможным [1]. Не объясняет их и учет взаимных столкновений электронов [2-4] или столкновений электронов с ионами остаточного газа [5]. По-видимому, невозможно рассматривать указанные явления вне связи с теми нерегулярными колебательными процессами, которые имеют место в магнетроне при напряжениях ниже порогового. На это указывают в последнее время многие авторы.

В настоящей работе предпринята попытка рассчитать закритический анодный ток и распределение пространственного заряда на участке между границей электронного облака и анодом плоского магнетрона с учетом предосцилляционных некогерентных колебаний его пространственного заряда. Данные об этих колебаниях содержатся в работах [6-8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИДЕАЛИЗАЦИИ

Согласно работам [6-8], в предосцилляционном режиме облако пространственного заряда магнетрона является резонатором, собственные колебания которого имеют характер вращающихся по азимуту волн. Частота этих колебаний ω с точностью до $10 \div 20\%$ определяется соотношением Хартри. Добротность резонатора Q порядка $20 \div 50$ в зависимости от режима и геометрии лампы. Предосцилляционные колебания пространственного заряда магнетрона, согласно цитированным работам, представляют его собственные колебания, некогерентно возбуждаемые флюктуационными токами.

Стационарное состояние этого резонатора, т. е. то состояние, которое имело бы место при бесконечно малой амплитуде возбуждающих флюктуационных токов, близко к так называемому бидромическому состоянию

с двухпетлевыми траекториями электронов [9–11]. Аналитическое описание этого состояния для плоского случая содержится в работах [12, 13].

Согласно работам [9–11], электронное облако магнетрона делится на две примерно равные по толщине области — нижнюю (прикатодную) и верхнюю (см. рис. 1). В каждой из этих областей электроны движутся по петлеобразным траекториям.

Вершины нижних и верхних петель электронных траекторий образуют два слоя пространственного заряда большой плотности. Согласно работам [14, 15], собственные колебания пространственного заряда магнетрона обусловлены волнами, распространяющимися в этих слоях с фазовой скоростью v_ϕ , близкой к скорости электронов v_e . Волны, связанные с тем слоем, который лежит ближе к катоду, должны быть относительно слабыми, так как они сильно затухают из-за возвращения электронов из этого слоя на катод. Поэтому их влияние на движение электронов в верхней части облака учитывать не будем*.

Волны, связанные с верхним слоем, обусловливают дрейф электронов из статического облака по направлению к аноду. Будем считать, что искомые анодный ток и пространственный заряд создаются этими электронами.

Стационарное движение электрона по верхней петле можно представить как вращение его по кругу радиуса $h/4$ (геометрические величины и выбранная система координат указаны на рис. 1), центр которого движется параллельно катоду со скоростью

$$v_{e0} = E_{x0}/B,$$

где E_{x0} — напряженность статического электрического поля в плоскости центров ($x = 0$), а B — индукция внешнего магнитного поля.

В адиабатическом приближении усредненное (по периоду циклотронной частоты ω_H) движение электронов под действием ВЧ поля можно рассматривать как движение центров электронных орбит неизменного радиуса.

Скорость движения центров вдоль катода v_e определяется выражением

$$v_e = E_x/B. \quad (1)$$

Так как средняя азимутальная скорость, обусловленная радиальной составляющей флуктуационного поля, из-за случайных изменений фазы поля равна нулю, под E_x следует понимать напряженность статического поля в точке, где находится центр электронной орбиты.

Для определения зависимости $v_e(x)$ внутри статического облака воспользуемся соотношениями теории бидромического состояния [13]:

$$E_x = \frac{j_0}{\epsilon_0 \omega_H} \frac{\psi}{e}; \quad x' = \frac{j_0 e}{\epsilon_0 m} \frac{\psi - \sin \psi}{\omega_H^3}. \quad (2)$$

* Это соображение подтверждается экспериментально. В спектре азимутальных шумов анодного тока, измеренных, например, в [6], не наблюдается частот, соответствующих волнам, распространяющимся в нижнем слое электронного облака.

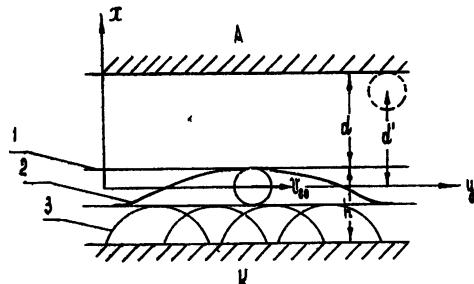


Рис. 1. Электронное облако магнетрона:
1 — граница облака, 2 — траектория электрона в верхней части облака, 3 — траектория электрона в нижней части облака, h — толщина облака, d — расстояние от границы облака до анода.

Здесь $x' = x + \frac{3}{4}h$ — координата, отсчитываемая от катода; $\psi = \omega_H t$

(в верхней половине облака величина ψ лежит в интервале $2\pi \leq \psi \leq 4\pi$); e/m — удельный заряд электрона. Величина j_0 находится из того условия, что при $\psi = 2\pi$ $x' = h/2$ (виртуальный катод). Для нее находим следующее выражение:

$$j_0 = \frac{m}{e} \epsilon_0 \omega_H^3 \frac{h}{4\pi}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и используя (1), получаем зависимость $v_e(x)$ в параметрической форме:

$$\begin{aligned} v_e &= \omega_H \frac{h}{4\pi} \psi, \\ x' &= \frac{h}{4\pi} (\psi - \sin \psi). \end{aligned} \quad (4)$$

Скорость дрейфа электрона (центра его орбиты) по направлению к аноду x определяется выражением

$$\dot{x} = E_y/B,$$

где E_y — тангенциальная составляющая напряженности электрического поля бегущей волны в точке, где находится центр электронной орбиты. Для E_y имеем следующее выражение:

$$E_y = E_1 \exp [i(\omega t - \beta y) - \alpha t].$$

Здесь α — показатель затухания электронного резонатора, равный $\omega/2Q$, β — постоянная распространения волн, определяемая периодом системы по y , E_1 — комплексная амплитуда, модуль которой регулярно зависит от x и случайным образом зависит от времени. Он максимальен при $x = h/4$ и убывает по гиперболическому синусу в обе стороны от границы облака, обращаясь в нуль на аноде и катоде ($x = -3h/4$). Поскольку в квазиплоском случае $\beta d, \beta 3h/4 \ll 1$, зависимость по гиперболическому синусу можно заменить линейной зависимостью, и для $|E_1|$ будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} |E_1| &= E_0 \left(\frac{x}{h} + \frac{3}{4} \right) \left(-\frac{3h}{4} \leq x \leq \frac{h}{4} \right); \\ |E_1| &= E_0 \left(1 + \frac{h}{4d} - \frac{x}{d} \right) \left(\frac{h}{4} \leq x \leq d + \frac{h}{4} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

E_0 — амплитуда волны на границе облака ($x = h/4$). Амплитуда бегущей волны зависит от азимутальной координаты y . Под E_0 будем понимать величину, усредненную по пространственному полупериоду $L/2 = \pi/\beta$ и равную $(2/\pi) E_{0 \text{ max}}$.

Будем вначале решать задачу в одноволновом приближении, т. е. будем учитывать только основную гармонику Хартри, на которую приходится максимум интенсивности колебаний [6]. Амплитуда и фаза колебаний меняются случайным образом, но медленно по сравнению с ω_H и ω . Поэтому скорость дрейфа \dot{x} меняется также случайно. Время, в течение которого амплитуда и фаза не претерпевают случайного изменения, равно; очевидно, времени корреляции т. функцii E_1 . За это время электрон, дрейфующий со скоростью \dot{x} , получит некоторое смещение, равное

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int_0^t \frac{E_y}{B} dt \simeq \int_0^\infty \frac{E_1}{B} \exp \left[i\omega \left(1 - \frac{v_e}{v_\Phi} \right) t - at \right] dt = \\ &= \frac{E_1}{B} \left[a - i\omega \left(1 - \frac{v_e}{v_\Phi} \right) \right]^{-1},\end{aligned}\quad (6)$$

где $v_\Phi = \omega_H h$ — фазовая скорость волны. Здесь принято, что в пределах смещения Δx скорость x остается постоянной.

Направление смещения с равной вероятностью может быть как положительным, так и отрицательным.

В такой идеализации движение центра электронной орбиты вдоль оси x можно рассматривать как случайное блуждание частицы или как движение абсолютно пьяного человека. Только величина шага Δx здесь не остается одинаковой во всех точках оси, а зависит от смещения частицы от исходной точки (т. е. Δx зависит от x).

Кроме того, необходимо учесть поглощение электронов на аноде (точнее, в плоскости $x = d'$, отстоящей от анода на расстоянии радиуса орбиты $h/4$), где плотность блуждающих частиц равна нулю, и наличие некоторого источника блуждающих частиц в плоскости $x = 0$, где плотность частиц остается постоянной, равной некоторой величине n_0 .

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Случайное блуждание частиц можно описать, как известно, с помощью уравнения диффузии:

$$j = - \frac{d}{dx} [D(x) n(x)] e. \quad (7)$$

Здесь j — плотность тока, n — концентрация электронов (центров их орбит), $D(x) = \frac{\Delta x^2}{2\pi} = \frac{E_1^2}{2\pi B^2} \frac{1}{a^2 + \omega^2 (1 - v_e/v_\Phi)^2}$ — коэффициент диффузии. Так как в стационарном случае плотность тока j не зависит от x , решение уравнения (7) с учетом граничных условий на аноде и в плоскости $x = 0$ находится элементарно и имеет следующий вид:

$$n(x) = n_0 \frac{D_0}{D(x)} \left(1 - \frac{x}{d'} \right), \quad (8)$$

где

$$D_0 = \frac{9E_0^2}{16} \left\{ 2\pi B^2 \left[a^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{v_{e0}}{v_\Phi} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (9)$$

— коэффициент диффузии при $x = 0$; v_{e0} — тангенциальная скорость электронов в плоскости $x = 0$.

Если подставить в (8) выражения для D_0 и $D(x)$ с учетом (5), то для плотности $n(x)$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}n &= n_0 \left(1 - \frac{x}{d'} \right) \left[a^2 + \omega^2 (1 - v_e/v_\Phi)^2 \right] \left\{ \frac{16}{9} [a^2 + \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 (1 - v_{e0}/v_\Phi)^2] \right\}^{-1} \begin{cases} \left(\frac{x}{h} + \frac{3}{4} \right)^{-2} \left(0 \leq x \leq \frac{h}{4} \right) \\ \left(1 + \frac{h}{4d} - \frac{x}{d} \right)^{-2} \left(\frac{h}{4} \leq x \leq d' \right). \end{cases}\end{aligned}\quad (10)$$

Используя (4), можно аппроксимировать множитель $(1 - v_e/v_\phi)$, стоящий в (10), выражением, содержащим зависимость от x в явном виде. Это выражение таково:

$$1 - \frac{v_e}{v_\phi} \simeq \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{4x}{h}}. \quad (11)$$

Соотношение (11) имеет место при $0 \leq x \leq h/4$ (до границы электронного облака). На участке выше границы, где пространственный заряд мал (ниже мы убедимся в этом), скорость перемещения центров орбит в азимутальном направлении не зависит от x . Здесь имеет место синхронизм азимутального движения электрона и собственных колебаний резонатора. Следовательно,

$$1 - v_e/v_\phi = 0$$

при $h/4 \leq x \leq d + h/4$. Если это учесть и заменить в (10) показатель затухания электронного резонатора α его выражением через частоту и добротность, то выражение для распределения центров электронных орбит примет следующий вид:

$$n = n_0 \left[\frac{Q^2}{4} \left(1 - \frac{4x}{h} \right) + 1 \right] \left(\frac{Q^2}{4} + 1 \right)^{-1} \left(1 + \frac{4x}{3h} \right)^{-2} \left(1 - \frac{x}{d'} \right) \quad (12)$$

$$(0 \leq x \leq h/4);$$

$$n = n_0 \left[9 \left(1 - \frac{x}{d'} \right) \right] \left[16 \left(\frac{Q^2}{4} + 1 \right) \left(1 + \frac{h}{4d} - \frac{x}{d} \right)^2 \right]^{-1} \quad (h/4 \leq x \leq d'). \quad (13)$$

Величину n_0 найдем из того условия, что полное число центров траекторий в промежутке x от нуля до d' , умноженное на заряд электрона e , равно заряду q , втекающему в верхнюю половину электронного облака (выше виртуального катода) за время движения электрона по стационарной орбите. Это время $T = 4\pi/\omega_H$ ($\psi = \omega_H T = 4\pi$), так что

$$q = j_0 \frac{4\pi}{\omega_H} = \frac{m \epsilon_0 \omega_H^2 h}{e} = e \int_0^{d'} n dx. \quad (14)$$

Разбивая область интегрирования от нуля до d' на две в соответствии с выражениями для n (12) и (13) и производя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{d'} n dx &= n_0 \left\{ \frac{3h}{16} - \frac{9h^2}{16} \left(\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{d} + \frac{4Q^2}{h(Q^2+4)} \right) + \right. \\ &+ \frac{27h^3}{16} \frac{Q^2}{hd(Q^2+4)} \left(\frac{7}{12} - 2 \ln \frac{4}{3} \right) + \frac{9d}{4(Q^2+4)} \left(\frac{h}{4d} - \right. \\ &\left. - 1 + \ln \frac{4d}{h} \right) \Big\} = n_0 h \left\{ \frac{3}{16} - \frac{9}{16} \left(\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{h}{d} + \frac{4Q^2}{Q^2+4} \right) + \right. \\ &+ \frac{h}{d} \frac{27Q^2}{16(Q^2+4)} \left(\frac{7}{12} - 2 \ln \frac{4}{3} \right) + \frac{d}{h} \frac{9}{4(Q^2+4)} \left(\frac{h}{4d} - 1 + \right. \\ &\left. + \ln \frac{4d}{h} \right) \Big\} = n_0 h A, \end{aligned} \quad (15)$$

где через A обозначено выражение, стоящее в фигурных скобках.

Из (14) и (15) находим величину n_0 :

$$n_0 = m \epsilon_0 \omega_H^2 / e^2 A. \quad (16)$$

Плотность центров n_0 определяет плотность траекторий электронов на границе облака. Поэтому выражение (16) дает нам плотность пространственного заряда на границе:

$$\rho_0 = en_0 = m \epsilon_0 \omega_H^2 / eA = \rho_{Бр} / A,$$

где $\rho_{Бр}$ — плотность заряда для бриллюэновского состояния. Вычисление величины A для случая $B/B_{kp} = 1,5$ приводит к значению $A = 0,13$.

Таким образом, пространственный заряд, плотность которого на границе облака в исходном статическом состоянии теоретически равна бесконечности, под действием флюктуационного поля размывается. Его плотность на границе ρ_0 оказывается равной нескольким $\rho_{Бр}$. На участке от границы облака до $h/4$

при $B/B_{kp} = 1,5$ плотность падает от ρ_0 примерно до $0,01 \rho_0$ (формула (12)) и дальше остается на уровне $(0,01 \div 0,03) \rho_0$ (формула (13)). Получающееся распределение плотности пространственного заряда изображено на рис. 2 (сплошная кривая, участок abc). На том же рисунке нанесена пунктирная кривая распределения для исходного статического состояния. Ясно, что флюктуационные поля размывают и максимум в середине облака, так что получающееся распределение плотности внутри облака может быть качественно изображено сплошной кривой $ab'c'$.

Найденная плотность пространственного заряда на участке между границей электронного облака и анодом весьма мала. Поэтому положенное в основу расчета исходное состояние возмущается незначительно.

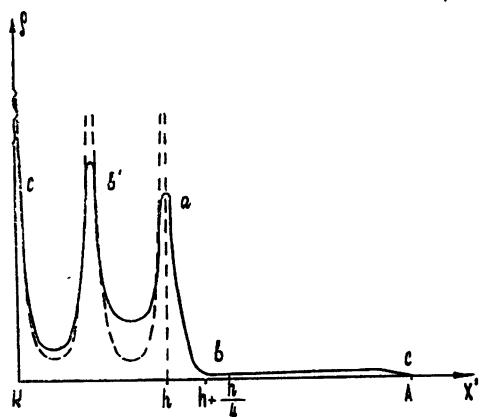


Рис. 2. Распределение плотности пространственного заряда:

— распределение плотности в исходном статическом состоянии, — распределение, устанавливающееся под влиянием флюктуационных полей.

3. АНОДНЫЙ ТОК

Из решения уравнения диффузии (7) находим анодный ток

$$j_a = en_0 D_0 / d. \quad (17)$$

Используя (16) и (9), где вместо τ , α и $(1 - v_{e0}/v_\Phi)^2$ подставляем их соответствующие выражения, получаем

$$j_a = 9Qe\epsilon_0 E_{0 \max}^2 / 2\pi (Q^2 + 4) mAd\omega. \quad (18)$$

Соотношение для анодного тока (18) относительно просто может быть подвергнуто экспериментальной проверке. Если измерить вольт-амперную характеристику магнетрона квазиплоской конструкции при магнитном поле $B > B_{kp}$ и подставить в (18) измеренные значения тока и магнитной индукции, а также рассчитанные значения ω (первая гармоника Хартри), d и A , то, задавшись известным из экспериментов зна-

чением Q , можно вычислить величину $E_{0\max}$ и сравнить ее с величинами, измеренными в известных экспериментах (например, в [6]). Такие измерения и расчеты были сделаны. Были сняты характеристики двух ламп с отношением радиуса анода к радиусу катода, равным 2 и 1,5. Для устранения краевого эффекта анод каждой лампы был секционирован, и ток снимался на средний анод.

Результаты расчета $E_{0\max}$ для различных значений анодного напряжения V_a и соответствующих им отношений B и B_{kp} при $Q = 20$ приведены в таблице 1 (лампа № 1; $r_a = 18 \text{ мм}$, $r_k = 9 \text{ мм}$, $H = 100 \text{ э}$) и в таблице 2 (лампа № 2; $r_a = 18 \text{ мм}$, $r_k = 12 \text{ мм}$). В таблицах величина $E_{0\max}$ указана в процентах по отношению к средней напряженности постоянного поля в лампе $E_{cp} = V_a(r_a - r_k)^{-1}$.

Таблица 1

$V_a (\text{в})$	B/B_{kp}	$E_{0\max}/E_{cp} (\%)$
100	2	0,7
175	1,57	0,8
235	1,31	1,3
298	1,18	1,8
330	1,1	3,9

Таблица 2

$H = 100 \text{ э}$			$H = 150 \text{ э}$		
$V_a (\text{в})$	B/B_{kp}	$\frac{E_{0\max}}{E_{cp}} (\%)$	$V_a (\text{в})$	B/B_{kp}	$\frac{E_{0\max}}{E_{cp}} (\%)$
56	2	2,9	122	2	2,7
75	1,72	2,9	168	1,72	2,5
105	1,5	2,8	235	1,5	2,6
130	1,3	2,9	293	1,3	2,7
152	1,2	3,1	343	1,2	2,9
170	1,13	3,9	385	1,13	3,3

Величина среднеквадратичной напряженности флюктуационного поля, измеренная в работе [6], составляет около 2% от среднего поля в междуэлектродном пространстве. Таким образом, расчет по формуле (18) дает неплохое совпадение с экспериментальными значениями напряженности флюктуационного поля. Следовательно, можно утверждать, что расплывание электронного облака до анода в предосцилляционном режиме магнетрона и анодный ток в основном обусловлены собственными колебаниями его пространственного заряда.

Более строгая проверка соотношения (18) может быть произведена с помощью специального эксперимента, аналогичного описанному в [6] и позволяющего измерить не только j_a , но и $E_{0\max}$, ω и Q . В настоящее время ведется подготовка к такому эксперименту.

Обобщение расчета с учетом остальных шумовых гармоник Хартри не представляет существенных трудностей. Для этого необходимо вместо рассчитанного нами коэффициента диффузии для одной волны взять $\sum D_k(x)$, где D_k — коэффициент диффузии для k -го вида волны. Одна-

ко расчеты показывают, что $D_k \sim E_k^2/k^2$. Кроме того, из экспериментов [6] следует, что E_k быстро убывает с ростом k . Отсюда очевидно, что учет второго, третьего и всех остальных слагаемых в выражении для коэффициента диффузии может дать поправку не более 20–30%.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Ф. Харвей, Высокочастотные электронные лампы, ИЛ, М., 1948.
2. Г. Д. Симс, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 157.
3. О. Банеман, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 181.
4. А. А. Янкина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 244 (1959).
5. А. С. Бородкин, ЖТФ, 29, 778 (1959).
6. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 290 (1960).
7. В. П. Тычинский, Ю. Т. Деркач, Радиотехника и электроника, 1, 344 (1956).
8. R. C. Glass, G. D. Sims, A. G. Stainsby, Proc. IEE, 102 B, 81 (1955).
9. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1104 (1961).
10. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1917 (1964).
11. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 167 (1966).
12. J. C. Slater, Microwave Electronics, New York, 1950.
13. L. Brillon, Advances in Electronics, 3, Academic Press, New York, 1951.
14. P. Fechner, Ann. de Radioelectricite, 7, 200 (1952),
15. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 343 (1962).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию

27 января 1966 г.

INFLUENCE OF PRE-OSCILLATION FLUCTUATIONS ON SPACE CHARGE DISTRIBUTION IN MACNETRON

L. M. Groshkov, M. I. Kuznetsov

The pre-oscillational current and space charge distribution between the electron cloud and the anode of the plane cut-off magnetron are calculated, subjected to the fluctuation fields, the space charge is shown to reach the very anode, though the boundary of the cloud remains as the sharp change of the charge density. The magnitude of fluctuation fields corresponding to the calculated anode current is in good agreement with the experiment.

УДК 621.372.061

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПРИ КУСОЧНО- ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

И. Н. Лисицкая

Анализируются возможные режимы в электрической схеме с двумя реактивными элементами и полупроводниковым сопротивлением, которое имеет падающий участок статической вольтамперной характеристики. Устанавливаются условия их существования в зависимости от параметров цепи.

В связи с широким применением полупроводниковых двухполюсников с падающим участком статической вольтамперной характеристики в различных устройствах радиотехники и вычислительной техники важное значение приобретает задача исследования возможных режимов в электрической схеме с такими элементами.

При перенесении начала координат вольтамперной характеристики нелинейного сопротивления в точку равновесия на падающем участке (рис. 1б) исследуемая схема может быть представлена в виде, показанном на рис. 1а, где операторное сопротивление линейной части схемы

$$Z(p) = \frac{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}, \quad (1)$$

а x и y — соответственно ток и напряжение нелинейного сопротивления, отсчитываемые от точки равновесия на падающем участке.

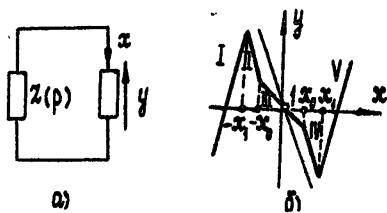


Рис. 1.

где $y = f(x)$ — уравнение вольтамперной характеристики нелинейного сопротивления, $p = d/dt$ — оператор дифференцирования.

Качественная картина процессов в схеме при различных соотношениях между ее параметрами может быть получена, если применить кусочно-линейную аппроксимацию зависимости $y=f(x)$. При этом уравнение (2) распадается на ряд линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих процессы в схеме в пределах каждого из аппроксимирующих участков. Согласование решений при переходе с одного участка на другой производится на основании условий скачков [1].

Применяя метод точечных преобразований, можно определить наличие на фазовой плоскости предельных циклов, их число, расположение и устойчивость [2].

Уравнение схемы имеет вид

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x + (b_0 p^2 + b_1 p + b_2) y = 0, \quad (2)$$

$$y = f(x),$$

При наименее простой аппроксимации характеристики $y=f(x)$ трёмя прямолинейными отрезками результаты исследования опубликованы в [3]. Однако режим жесткого возбуждения при этом обнаружить не удалось. Это заставило более строго подойти к аппроксимации реальной нелинейной зависимости (учесть нелинейность ее падающего участка; рис. 1б), что позволило обнаружить новые режимы работы электрической цепи и установить условия их существования. Эти режимы могут оказаться полезными при создании многостабильных схем, особенно в устройствах вычислительной техники.

При исследовании характеристика нелинейного элемента предполагалась симметричной относительно средней точки падающего участка. Рассматривались два случая (рис. 1б): первый, когда положение равновесия на падающем участке совпадает со средней точкой характеристики, и второй, когда положение равновесия смешено относительно нее.

Характер движений в схеме (разрывные или непрерывные) определяется знаком соотношения $a_0 - b_0\rho$ и $a_0 - b_0\rho_1$, где ρ — модуль отрицательного дифференциального сопротивления третьего участка характеристики, ρ_1 — модуль отрицательного дифференциального сопротивления второго (четвертого) участка характеристики. Для возникновения разрывных движений необходимо, чтобы хотя бы одно из этих соотношений было отрицательно [4].

В данной статье анализируются режимы работы схемы при непрерывных движениях, которые реализуются, если соотношения $a_0 - b_0\rho$ и $a_0 - b_0\rho_1$ положительны.

Установлено, что возможные режимы в цепи зависят в основном от знаков величин $a_0 - b_0\rho$, $a_1 - b_1\rho$, $a_2 - b_2\rho$ и $a_0 - b_0\rho_1$, $a_1 - b_1\rho_1$, $a_2 - b_2\rho_1$, определяющих характер движений изображающей точки на третьем и втором (четвертом) участках характеристики нелинейного сопротивления. Полученные результаты анализа приведены в таблицах рис. 2 и 3, на которых во втором столбце даны знаки выражений $a_0 - b_0\rho$, $a_1 - b_1\rho$, $a_2 - b_2\rho$, в четвертом столбце указаны возможные соотношения величин $a_0 - b_0\rho_1$, $a_1 - b_1\rho_1$, $a_2 - b_2\rho_1$, в пятом столбце — характеристика нелинейного сопротивления и возможные положения равновесия на ней при указанных во втором и четвертом столбцах соотношениях параметров: в шестом столбце приведены картины на фазовой плоскости, иллюстрирующие характер движений в схеме.

В качестве примера рассмотрим случай I. 2 на рис. 2 (вторая строка), при котором $a_0 - b_0\rho > 0$, $a_1 - b_1\rho > 0$, $a_2 - b_2\rho > 0$, $a_0 - b_0\rho_1 > 0$, $a_1 - b_1\rho_1 < 0$, $a_2 - b_2\rho_1 > 0$ ($a_2 - b_2\rho_1 < 0$) и наряду с устойчивым положением равновесия в схеме возможен один неустойчивый и один устойчивый периодические режимы.

Как и в других случаях, исследуем условия существования этих режимов методом точечных преобразований. Устойчивому положению равновесия в схеме соответствует точка 1 рис. 4а фазовой плоскости x , $z = dx/dt$, разделенной вертикальными прямыми. Абсциссы прямых соответствуют точкам излома характеристики рис. 1б и разделяют плоскость x , z на пять областей (I, II, III, IV, V), в каждой из которых процессы в схеме описываются линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Периодическому режиму должен соответствовать предельный цикл на фазовой плоскости. Очевидно, предельный цикл не может целиком лежать в области III фазовой плоскости, так как в этой области уравнение схемы линейно. Следовательно, в данном случае при симметричной характеристике нелинейного элемента можно предположить существование двух предельных циклов, схватывающих точку 1 фазовой плоскости, — одного, проходящего в областях II—III—IV, и второго в областях I—II—III—IV—V.

Для нахождения первого предельного цикла в случае симметрии фазовой плоскости достаточно построить функцию соответствия второй области, связывающую значения ординат z_3 и z_6 на прямой $x = -x_0$

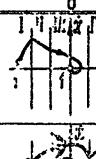
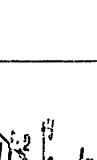
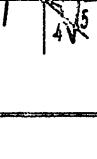
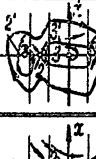
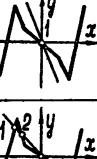
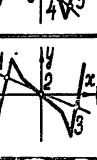
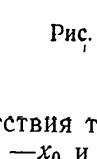
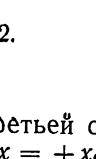
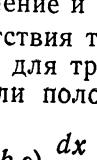
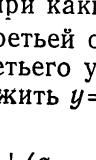
1	2	3	4	5	6	7
I $a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho > 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho > 0$	1	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho > 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho > 0$ ($a_0 - b_{0\rho} \rho_1 < 0$)				Существует единственное устойчивое положение равновесия (1).
	2	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho > 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho > 0$ ($a_0 - b_{0\rho} \rho_1 < 0$)				Наряду с устойчивым положением равновесия (1) возможен устойчивый предельный цикл (1').
	3	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho > 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho > 0$				Существуют три устойчивых положения равновесия (1, 3, 5).
	4	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho < 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho < 0$				Наряду с тремя устойчивыми положениями равновесия (1, 3, 5) возможен устойчивый предельный цикл (1').
II $a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho > 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho < 0$	1	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho > 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho < 0$				Существуют два устойчивых положения равновесия (1, 3)
	2	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho < 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho < 0$				Наряду с двумя устойчивыми положениями равновесия (1, 3) возможны один (5') или два (1', 2') устойчивых предельных цикла.
III $a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho < 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho > 0$	1	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho < 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho > 0$ ($a_2 - b_{2\rho} \rho_1 < 0$)				Существует единственный устойчивый предельный цикл (1').
	2	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho < 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho < 0$				Наряду с двумя устойчивыми положениями равновесия (1, 5) возможен устойчивый предельный цикл (1').
IV $a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho < 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho < 0$	1	$a_0 - b_{0\rho} \rho > 0$ $a_1 - b_{1\rho} \rho < 0$ $a_2 - b_{2\rho} \rho < 0$				Наряду с двумя устойчивыми положениями равновесия (1, 3) возможны три (1', 2', 3') устойчивых предельных цикла.

Рис. 2.

(рис. 4а), и функцию соответствия третьей области, связывающую значения z_3 и z_4 на прямых $x = -x_0$ и $x = +x_0$ соответственно, и определить, возможно ли их пересечение и при каких условиях.

Найдем функцию соответствия третьей области $z_4 = f(z_3)$. Для этого запишем уравнение схемы для третьего участка характеристики, которое получается из (2), если положить $y = -\rho x$:

$$(a_0 - b_{0\rho}) \frac{d^2x}{dt^2} + (a_1 - b_{1\rho}) \frac{dx}{dt} + (a_2 - b_{2\rho}) x = 0. \quad (3)$$

В (3), по предположению,

$$a_0 - b_{0\rho} > 0, \quad a_1 - b_{1\rho} > 0, \quad a_2 - b_{2\rho} > 0.$$

Считая, что состояние равновесия 1 — устойчивый фокус, напишем уравнение траектории, выходящей в момент времени $t = 0$ из точки $x = -x_0$, $z = z_3$ (рис. 4а):

$$x = e^{-\alpha t} \left[-x_0 \cos(\omega t) + \frac{z_3 - \alpha x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right], \quad (4)$$

$$z = e^{-\alpha t} \left[z_3 \cos(\omega t) - \frac{\alpha z_3 - x_0 (\alpha^2 + \omega^2)}{\omega} \sin(\omega t) \right],$$

	1	2	3	4	5	6	7
I $a_0 - b_{0\rho} > 0$ $a_1 - b_{1\rho} > 0$ $a_2 - b_{2\rho} > 0$	1 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} > 0 \\ a_2 - b_{2\rho} > 0 \\ (a_2 - b_{2\rho}) < 0 \end{cases}$						Существует единственное устойчивое положение равновесия (1).
	2 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} < 0 \\ a_2 - b_{2\rho} > 0 \\ (a_2 - b_{2\rho}) < 0 \end{cases}$						Наряду с устойчивым положением равновесия (1) возможны два устойчивых предельных цикла (1', 2').
	3 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} > 0 \\ a_2 - b_{2\rho} < 0 \end{cases}$						Существуют три устойчивых положения равновесия (1, 3, 5).
	4 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} < 0 \\ a_2 - b_{2\rho} < 0 \end{cases}$						Наряду с тремя устойчивыми положениями равновесия (1, 3, 5) возможны два устойчивых предельных цикла (1', 2').
II $a_0 - b_{0\rho} > 0$ $a_1 - b_{1\rho} > 0$ $a_2 - b_{2\rho} < 0$	1 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} > 0 \\ a_2 - b_{2\rho} < 0 \end{cases}$						Существуют два устойчивых положения равновесия (1, 3)
	2 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} < 0 \\ a_2 - b_{2\rho} < 0 \end{cases}$						Наряду с двумя устойчивыми положениями равновесия (1, 3) возможны один (5) или оба (2') устойчивых предельных цикла.
III $a_0 - b_{0\rho} > 0$ $a_1 - b_{1\rho} < 0$ $a_2 - b_{2\rho} > 0$	1 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} < 0 \\ a_2 - b_{2\rho} > 0 \\ (a_2 - b_{2\rho}) < 0 \end{cases}$						Возможны два устойчивых предельных цикла (1', 2').
	2 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} < 0 \\ a_2 - b_{2\rho} < 0 \end{cases}$						Наряду с двумя устойчивыми положениями равновесия (1, 3) возможны два устойчивых предельных цикла (1', 2').
IV $a_0 - b_{0\rho} > 0$ $a_1 - b_{1\rho} < 0$ $a_2 - b_{2\rho} < 0$	1 $\begin{cases} a_0 - b_{0\rho} > 0 \\ a_1 - b_{1\rho} < 0 \\ a_2 - b_{2\rho} < 0 \end{cases}$						Наряду с двумя устойчивыми положениями равновесия (1, 3) возможны три устойчивых предельных цикла (1', 2', 3').

Рис. 3.

где

$$\omega = \sqrt{\frac{a_2 - b_2 \rho}{a_0 - b_0 \rho} - \frac{(a_1 - b_1 \rho)^2}{4(a_0 - b_0 \rho)^2}},$$

$$\alpha = \frac{a_1 - b_1 \rho}{2(a_0 - b_0 \rho)}.$$

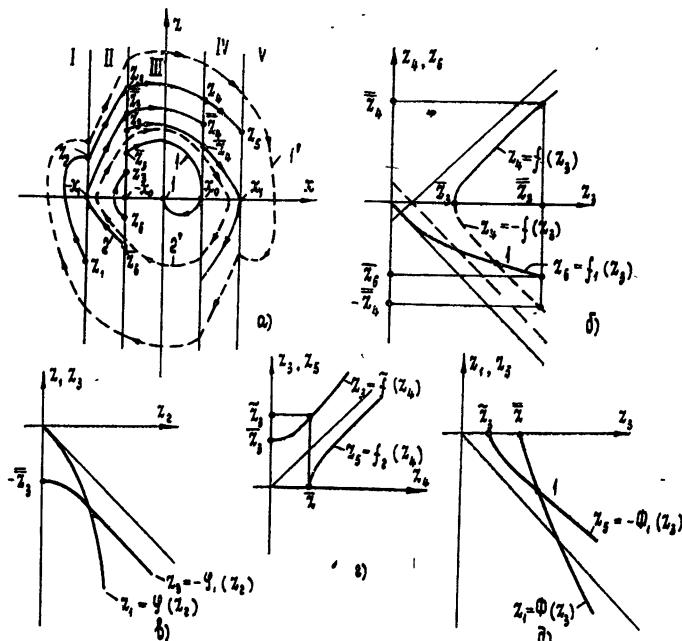


Рис. 4.

Пусть в момент времени $t = t_0$ изображающая точка траектории (4) приходит на прямую $x = x_0$ в точке $z = z_4$. Подставляя эти данные в уравнения (4) и разрешая их относительно z_3 и z_4 , получим

$$\begin{aligned} z_3 &= x_0 \left(\gamma + \frac{\cos \tau + e^{i\tau}}{\sin \tau} \right), \\ z_4 &= x_0 \left(-\gamma + \frac{\cos \tau + e^{-i\tau}}{\sin \tau} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\tau = \omega t_0, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\omega}, \quad z = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d(\omega t_0)}.$$

Выражения (5) определяют функцию соответствия третьей области, записанную в параметрической форме. Для получения всей совокупности значений $z_3 \leq z_3 \rightarrow +\infty$ (см. рис. 4а) и $0 \leq z_4 \rightarrow +\infty$ параметр τ в уравнениях (5) необходимо изменять от $\tau = \tau_0$ до нуля; где τ_0 — время движения изображающей точки по траектории 1 рис. 4а, для которой $z_3 = z_3^-, z_4 = 0$. При $\tau \rightarrow \tau_0$ $z_4 \rightarrow 0$, $z_3 \rightarrow z_3^-$; при $\tau \rightarrow 0$ $z_3 \rightarrow +\infty$, $z_4 \rightarrow +\infty$.

Продифференцировав (5) по τ дважды, нетрудно убедиться, что зависимость $z_4 = f(z_3)$ является монотонно возрастающей функцией (dz_4/dz_3 в интервале $0 < \tau < \tau_0$ положительно), а значение dz_4/dz_3 монотонно убывает ($d^2z_4/dz_3^2 < 0$) от $(dz_4/dz_3 = \infty)$ при $\tau \rightarrow 0$ до $dz_4/dz_3 = 1$ при $\tau \rightarrow 0$. Кривая $z_4 = f(z_3)$ качественно показана на рис. 4б. При $\tau \rightarrow 0$ ($z_3 \rightarrow +\infty$, $z_4 \rightarrow +\infty$) она имеет асимптоту, уравнение которой

$$z_4 = z_3 - 4\gamma x_0.$$

Найдем теперь функцию соответствия $z_6 = f_1(z_3)$ второй области, предположив, что $a_0 - b_0\rho_1 > 0$, $a_1 - b_1\rho_1 < 0$, $a_2 - b_2\rho_1 < 0$. Тогда состояние равновесия, определяющее характер фазовых траекторий во второй области, находится в первой области и является седлом, так как $a_2/b_2 = Z(0) < \rho_1$. Уравнение схемы после подстановки в (2) выражения $y = -y_{II} - \rho_1 x$ имеет вид

$$(a_0 - b_0\rho_1) \frac{d^2x}{dt^2} + (a_1 - b_1\rho_1) \frac{dx}{dt} + (a_2 - b_2\rho_1)x = b_2 y_{II}; \quad (6)$$

корни характеристического уравнения, полученного для (6), равны

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= |\lambda_1| = \frac{a_1 - b_1\rho_1}{2(a_0 - b_0\rho_1)} + \sqrt{\frac{(a_1 - b_1\rho_1)^2}{4(a_0 - b_0\rho_1)^2} - \frac{a_2 - b_2\rho_1}{a_0 - b_0\rho_1}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{a_1 - b_1\rho_1}{2(a_0 - b_0\rho_1)} + \sqrt{\frac{(a_1 - b_1\rho_1)^2}{4(a_0 - b_0\rho_1)^2} - \frac{a_2 - b_2\rho_1}{a_0 - b_0\rho_1}}, \end{aligned}$$

причем $|\lambda_1| < \lambda_2$.

Запишем уравнение траектории второй области, выходящей в момент времени $t = 0$ из точки $x = -x_0$, $z = z_6$ (рис. 4а):

$$\begin{aligned} x &= -x_{II} + \frac{\lambda_2(x_{II} - x_0) - z_6}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{z_6 + \lambda_1(x_{II} - x_0)}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{+\lambda_2 t}, \\ z &= \frac{\lambda_1[z_6 - \lambda_2(x_{II} - x_0)]}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2[z_6 + \lambda_1(x_{II} - x_0)]}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{+\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть в момент времени $t = t_0$ изображающая точка этой траектории приходит на прямую $x = -x_0$ в точке $z = z_3$. Подставляя эти данные в уравнения (7) и разрешая их относительно z_3 и z_6 , получим

$$\begin{aligned} z_3 &= (x_{II} - x_0) \frac{\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t_0) + \lambda_2 \exp(+\lambda_2 t_0) - (\lambda_1 + \lambda_2) \exp[(\lambda_2 - \lambda_1) t_0]}{\exp(+\lambda_2 t_0) - \exp(-\lambda_1 t_0)}, \\ z_6 &= (x_{II} - x_0) \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_2 \exp(-\lambda_1 t_0) - \lambda_1 \exp(+\lambda_2 t_0)}{\exp(+\lambda_2 t_0) - \exp(-\lambda_1 t_0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что уравнения (8) справедливы лишь для фазовых траекторий, целиком лежащих во второй области. Для получения значений $0 \leq |z_6| \leq |z_3|$ параметр t_0 в уравнениях (8) следует изменять от $t_0 = 0$ до $t_0 = \bar{t}_0$, где \bar{t}_0 — время движения изображающей точки по траектории 2 рис. 4а. При $t_0 \rightarrow 0$ $z_3 \rightarrow 0$, $z_6 \rightarrow 0$; при $t_0 \rightarrow \bar{t}_0$ $z_3 \rightarrow \underline{z}_3$, $z_6 \rightarrow \bar{z}_6$, причем $\underline{z}_3 > \bar{z}_6$. Продифференцировав (8) по t_0 дважды, нетрудно убедиться, что функция $z_6 = f_1(z_3)$ монотонно убывает от $\underline{z}_6 = 0$, $z_6 = 0$ до $\bar{z}_6 = \underline{z}_3$.

$z_6 = \bar{z}_6$, а dz_6/dz_3 монотонно возрастает от $dz_6/dz_3 = -1$ при $t_0 \rightarrow 0$ до $dz_6/dz_3 > -1$ при $t_0 \rightarrow \bar{t}_0$. Зависимость $z_6 = f_1(z_3)$ качественно показана на рис. 4б.

Для определения возможности существования предельных циклов в областях I—III—IV необходимо построить кривые $z_4 = -f(z_3)$ и $z_6 = f_1(z_3)$. Очевидно, что, если при $z_3 = z_3$ $\bar{z}_4 > \bar{z}_6$, то кривые $z_4 = -f(z_3)$ и $z_6 = f_1(z_3)$ пересекаются в одной точке. Следовательно, в этом случае на фазовой плоскости x, z имеется предельный цикл, лежащий в областях II—III—IV; этот предельный цикл неустойчив, так как в неподвижной точке преобразования $|dz_4/dz_6| > 1$.

Для нахождения предельных циклов, лежащих в областях I—II—III—IV—V, необходимо построить зависимости $z_1 = \Phi(z_3)$ и $z_5 = \Phi_1(z_3)$, связывающие значения ординат z_1 и z_3 на прямых $x = -x_1$ и $x = -x_0$ и z_5 и z_3 на прямых $x = +x_1$ и $x = -x_0$. Кривая $z_1 = \Phi(z_3)$ может быть построена на основании функций соответствия $z_1 = \varphi(z_2)$ первой области и $z_3 = \varphi_1(z_2)$ второй области. Если точка, определяющая характер фазовых траекторий первой области, типа устойчивого фокуса, то выражения для z_1 и z_2 в параметрическом виде, как нетрудно убедиться, имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1 - x_1) \left(\gamma_0 - \frac{\exp(\gamma_0 \tau) - \cos \tau}{\sin \tau} \right), \\ z_2 &= (x_1 - x_1) \left(\gamma_0 + \frac{\exp(-\gamma_0 \tau) - \cos \tau}{\sin \tau} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь x_1 — координата положения равновесия для первой области, определенная из (2) путем подстановки выражения для первого участка характеристики $y = y_1 + rx$; $\gamma_0 = \alpha_0/\omega_0$, а α_0 и ω_0 определены из соответствующего первой области характеристического уравнения, корни которого равны $-\alpha_0 \pm j\omega_0$; $\tau = \omega_0 t$ — параметр преобразования.

Для получения значений $z_1 \leq 0$ и $z_2 \geq 0$ параметр τ в уравнениях (10) необходимо изменять от $\tau = 0$ до $\tau = \pi - 0$. При $\tau \rightarrow 0$ $z_1 \rightarrow 0$, $z_2 \rightarrow 0$, а $dz_1/dz_2 \rightarrow -1$; при $\tau \rightarrow \pi - 0$, $z_1 \rightarrow -\infty$, $z_2 \rightarrow +\infty$, а $\lim_{\tau \rightarrow \pi - 0} dz_1/dz_2 = -e^{\gamma_0 \pi}$.

Продифференцировав (9) два раза, нетрудно убедиться, что зависимость $z_1 = \varphi(z_2)$ и ее производная — монотонно убывающие функции. Кривая $z_1 = \varphi(z_2)$ качественно изображена на рис. 4в.

Функция соответствия второй области $z_3 = \varphi_1(z_2)$ определяется аналогично (8) на основании условий, что при $t = 0$ $x = -x_1$, $z = z_2$, а при $t = t_0$ $x = -x_0$, $z = z_3$:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(x_{11} - x_0)(\lambda_1 + \lambda_2) - (x_{11} - x_1)[\lambda_2 \exp(-\lambda_1 t_0) + \lambda_1 \exp(+\lambda_2 t_0)]}{\exp(+\lambda_2 t_0) - \exp(-\lambda_1 t_0)}; \\ z_3 &= [(x_{11} - x_0)(\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t_0) + \lambda_2 \exp(+\lambda_2 t_0)) - (x_{11} - x_1) \times \\ &\quad \times (\lambda_1 + \lambda_2) \exp(\lambda_2 - \lambda_1) t_0]/[\exp(+\lambda_2 t_0) - \exp(-\lambda_1 t_0)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Изменяя параметр t_0 в уравнениях (10) от $t_0 = \bar{t}_0$ до $t_0 = 0$, где \bar{t}_0 — время движения изображающей точки по траектории 2 второй области от $x = -x_1$, $z_2 = 0$ до $x = -x_0$, $z = z_3$, определяемое из (10) при $z_2 = 0$,

получим значения z_2 в интервале $0 \leq z_2 \rightarrow +\infty$ и z_3 в интервале $\bar{z}_3 \leq z_3 \rightarrow +\infty$. При этом $\lim_{t_0 \rightarrow \bar{t}_0} dz_3/dz_2 = 0$, $\lim_{t_0 \rightarrow 0} dz_3/dz_2 = +1$. Зависимость

$z_3 = -\varphi_1(z_2)$ качественно показана на рис. 4в. Заметим, что $z_1 = \varphi_1(z_2)$ и ее производная являются также монотонно изменяющимися функциями. Кривые $z_1 = \varphi(z_2)$ и $z_3 = -\varphi_1(z_2)$ рис. 4в позволяют легко построить функцию $z_1 = \Phi(z_3)$, изображенную на рис. 4д. Очевидно, кривая $z_1 = \Phi(z_3)$ начинается в точке $z_1 = 0$, $z_3 = z_3$, причем в этой точке $dz_1/dz_3 = \infty$; при $z_1 \rightarrow -\infty$ $z_3 \rightarrow +\infty$, причем $dz_1/dz_3 = (dz_1/dz_2) \times \times (dz_2/dz_3)^{-1} = -\exp(\gamma_0 \pi)$.

Для построения кривой $z_5 = \Phi_1(z_3)$ нанесем на рис. 4г кривую $z_3 = \tilde{f}(z_4)$, определенную уравнениями (5), и кривую $z_5 = f_2(z_4)$ четвертой области. Аналитическое выражение для последней легко получить из уравнений (10), в которых следует заменить $-x_{II}$ на $+x_{IV}$, $-x_0$ на $+x_1$, $-x_1$ на $+x_0$, z_2 на z_4 , z_3 на z_5 .

Естественно, что кривая $z_5 = f_2(z_4)$ будет подобна кривой $z_1 = \varphi_1(z_2)$; она начинается в точке $z_5 = 0$, $z_4 = \bar{z}_4$, причем в этой точке $dz_5/dz_4 = \infty$, $t_0 = \bar{t}_0$, которое определяется из $z_4 = 0$. При $t_0 \rightarrow 0$ $z_4 \rightarrow +\infty$, $z_5 \rightarrow +\infty$, а $\lim_{t_0 \rightarrow 0} dz_5/dz_4 = 1$. Кривая $z_5 = f_2(z_4)$ качественно показана на рис. 4г.

Функция $z_5 = \Phi_1(z_3)$, построенная на основании кривых рис. 4г, показана на рис. 4д. Она начинается в точке $z_3 = \tilde{z}_3$ (на рис. 4г при этом $z_4 = \bar{z}_4$), причем $\tilde{z}_3 < \bar{z}_3$, а $|dz_5/dz_3|$ в этой точке равен бесконечности; при $z_3 \rightarrow +\infty$ $|dz_5/dz_3| \rightarrow 1$, причем из рис. 4г видно, что для всех значений t_0 (для всех значений z_4 рис. 4г) $z_3 > z_5$. Следовательно, кривая $z_5 = -\Phi_1(z_3)$ рис. 4д лежит выше прямой $z_5 = -z_3$ и пересекается с кривой $z_1 = \Phi(z_3)$ в одной точке. Точка пересечения кривых рис. 4д на фазовой плоскости соответствует устойчивый предельный цикл, так как в точке пересечения $|dz_5/dz_1| < 1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае при параметрах, указанных во втором и четвертом столбцах (случай I. 2) рис. 2, в схеме наряду с устойчивым положением равновесия (точка 1 рис. 4а) возможны неустойчивый и устойчивый периодические режимы, которым соответствуют неустойчивый (2') и устойчивый (1') предельные циклы на фазовой плоскости рис. 4а. Заметим, что картины на фазовых плоскостях рис. 2, 3, 4 выполнены без учета возможных скачков величин z при переходе из одной области в другую. Этот режим работы схемы соответствует жесткому возбуждению, при котором установление автоколебаний происходит при достаточно большом отклонении от положения равновесия (начальные условия должны быть заданы вне цикла 2').

Аналогично исследуются указанные на рис. 2 и 3 возможные режимы в остальных случаях. На рис. 3 показаны возможные режимы в схеме при смещении рабочей точки относительно середины третьего участка характеристики. Для рассмотренного примера в этом случае наряду с устойчивым положением равновесия возможно существование двух устойчивых периодических режимов, если положение равновесия — типа фокуса. Картина на фазовой плоскости для этого случая показана на рис. 3 (I. 2), где устойчивые предельные циклы обозначены цифрами 1', 2', неустойчивые — цифрами 3', 4'. Схема может быть использована как трехстабильный элемент, обладающий тремя качественными признаками — одним устойчивым положением равновесия и двумя устойчивыми периодическими режимами.

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось, что диффе-

ренциальное сопротивление второго (четвертого) участка характеристики по модулю больше дифференциального сопротивления третьего участка, т. е. $\rho_1 > \rho$. При $\rho_1 < \rho$ в случае $a_0 - b_0\rho > 0, a_1 - b_1\rho > 0, a_2 - b_2\rho > 0$ (при этом, очевидно, $a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 > 0, a_2 - b_2\rho_1 > 0$) вывод о возможных режимах полностью совпадает с выводом, полученным в случае I.1 на таблицах рис. 2, 3; при $a_0 - b_0\rho > 0, a_1 - b_1\rho > 0, a_2 - b_2\rho < 0$ (при этом $a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 > 0, a_2 - b_2\rho_1 < 0$ или $a_2 - b_2\rho_1 > 0$) совпадает с выводом II.1 таблиц рис. 2, 3; при $a_0 - b_0\rho > 0, a_1 - b_1\rho < 0, a_2 - b_2\rho > 0, a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 < 0, a_2 - b_2\rho_1 > 0$ режимы такие же, как и в случае III.1 рис. 2, 3, но при $a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 > 0, a_2 - b_2\rho_1 > 0$ в схеме возможен лишь один устойчивый периодический режим вне зависимости от расположения рабочей точки на падающем участке. И, наконец, при $a_0 - b_0\rho > 0, a_1 - b_1\rho < 0, a_2 - b_2\rho < 0$ возможны такие варианты: если $a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 < 0, a_2 - b_2\rho_1 < 0$ или $a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 < 0, a_2 - b_2\rho_1 > 0$, то возможные режимы аналогичны режимам, исследованным в случае IV.1 таблиц рис. 2, 3; однако при $a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 > 0, a_2 - b_2\rho_1 > 0$ или $a_0 - b_0\rho_1 > 0, a_1 - b_1\rho_1 > 0, a_2 - b_2\rho_1 < 0$ в схеме наряду с двумя устойчивыми положениями равновесия возможен лишь один устойчивый периодический режим, которому соответствует устойчивый предельный цикл З' на рис. 2 (IV.1), охватывающий все положения равновесия.

Выводы, полученные для схемы с нелинейным сопротивлением, управляемым током, остаются справедливыми и для схем, содержащих нелинейное сопротивление, управляемое напряжением, и произвольный двухполюсник с двумя реактивными элементами, операторная проводимость которого $Y = \frac{a_0p^2 + a_1p + a_2}{b_0p^2 + b_1p + b_2}$. Заметим также, что изменение на-
клона одного из восходящих участков характеристики (первого или пятого) или участков с дифференциальным сопротивлением ρ_1 (второго, четвертого) не приводит к нарушению результатов анализа.

Таким образом, применение кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления, учитывающей нелинейность его падающего участка, позволило проанализировать возможные режимы в электрической цепи с двумя реактивными элементами и установить необходимые условия их существования. Полученные результаты могут быть использованы для создания усилительных, триггерных, генераторных схем и схем с несколькими качественными признаками, которые могут найти применение в устройствах вычислительной техники для выполнения логических операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, ПММ, 20, 639 (1956).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. И. Н. Лисицкая, сб. Автоматический контроль и измерительная техника, изд. АН УССР, Киев, вып. 8, 1964, стр. 19.
4. И. Н. Лисицкая, Л. А. Синицкий, сб. Автоматический контроль и измерительная техника, изд. АН УССР, вып. 7, Киев, 1963, стр. 24.

INVESTIGATION OF ELECTRIC CIRCUIT WITH A NONLINEAR NEGATIVE
RESISTANCE WITH PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION

I. N. Lisitskaya

Possible regimes of an electric circuit consisting of two reactive elements and a semiconductor resistance with the static current-voltage characteristic (in the negative slope section) are analyzed. The conditions of their existence depending on circuit parameters have been found.

УДК 62—505.7

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Э. Н. Казанцев

Изложен алгебраический метод построения алгоритмов для задач о назначениях и о «бродячем торговце». Даны асимптотические оценки числа букв в минимальных формулах, построенных для этих задач.

Существует большое количество математических задач, которые можно описать следующим образом. Задано некоторое конечное множество $\chi(n)$ с числом элементов $p(n)$, где n — параметр, принимающий значения из множества натуральных чисел. Каждому элементу $x_i \in \chi(n)$ поставлена в соответствие некоторая функция $f_{ni}(y_{1i}, \dots, y_{ni})$ ($i = 1, 2, \dots, p(n)$); при этом все переменные и сама функция принимают значения из некоторого множества G . На множестве G задано рефлексивное и транзитивное отношение порядка, такое, что для любых двух элементов $g_1 \in G$ и $g_2 \in G$ либо $g_1 \leq g_2$, либо $g_2 \leq g_1$, либо то и другое.

Задача I. Построить такой алгоритм, который для любого набора значений переменных из множества G позволял бы найти такую функцию $f_{ni}(y_{1i}, \dots, y_{ni})$, чье значение на этом наборе не превосходит значений остальных функций на том же наборе.

Таким способом можно описать многие известные задачи (например, задачи, когда $\chi(n)$ есть некоторое подмножество всех перестановок из n элементов, в частности, задачу о бродячем торговце, задачу о назначениях и др.).

Вообще говоря, поставленная задача имеет решение. Существует алгоритм, заключающийся в вычислении всех функций и выборе наименьшего значения (все функции предполагаются алгоритмически вычислимыми). Если сложность вычисления функции f_{ni} равна $a_i(n)$, а сложность операции сравнения двух элементов из G равна Δ , то сложность такого алгоритма

$$B(n) = \sum_{i=1}^{p(n)} a_i(n) + \Delta[p(n) - 1]. \quad (1)$$

Таким образом, речь идет о нахождении более простых алгоритмов. Алгоритм A_1 считается более простым, чем алгоритм A_2 , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(A_1, n)}{B(A_2, n)} = 0$. Здесь $B(A_1, n)$ — сложность алгоритма A_1 на $\chi(n)$, а $B(A_2, n)$ — сложность алгоритма A_2 на $\chi(n)$.

Еще заманчивее было бы найти функцию

$$L(n) = \inf_{A' \in \{A\}} B(A', n) \quad (2)$$

и такой алгоритм A , если он существует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(A, n)}{L(n)} < +\infty$. Здесь $\{A\}$ — множество всех алгоритмов, удовлетворяющих задаче 1.

Задача 2. Требуется построить алгоритм, который бы для любого набора значений переменных из множества G находил не функцию, принимающую наименьшее значение, а только это значение.

Для задачи 2 имеют место те же проблемы, которые возникают при решении задачи 1. В некотором смысле задача 2 более проста, чем задача 1, так как любой алгоритм A , решающий задачу 1, решает и задачу 2, причем, если $B_1(A, n)$ — сложность этого алгоритма для задачи 1, а $B_2(A, n)$ — для задачи 2, то

$$B_2(A, n) \leq B_1(A, n) + \max_i \alpha_i(n). \quad (3)$$

Если $L_1(n)$ — функция для задачи 2, аналогичная функции (2), то из (3) следует.

$$L(n) \geq L_1(n) = \max_i \alpha_i(n).$$

Пусть существует конечный набор функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ и любая функция f_{nl} выражается в виде суперпозиции функций из этого набора. Можно построить следующую алгебру:

$$\langle G, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \min(x, y) \rangle, \quad (4)$$

где

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq y \\ y, & \text{если } x \geq y \end{cases}.$$

Алгоритм полного перебора для задачи 2 можно записать в виде формулы $F(n)$ в данной алгебре:

$$F(n) \asymp \min_i F_i(n),$$

где $F_i(n)$ — запись функций f_{nl} в виде суперпозиции элементарных функций алгебры. Символ \asymp означает графическое тождество.

Любая формула $Q(n)$, эквивалентная формуле $F(n)$ в данной алгебре, очевидно, определяет некоторый алгоритм, решающий задачу 2. Каждой формуле F ставится в соответствие число $\mu(F)$, которое называется сложностью формулы.

Задача 3. Найти формулу $Q(n)$, такую, что $Q(n) = F(n)$ и $\mu(Q(n)) = \min_{\{F(n)\}} \mu(F(n))$, где $\{F(n)\}$ — множество всех формул, эквивалентных $F(n)$.

Можно ограничиться более слабым требованием: найти такую формулу (если она существует) $Q^0(n)$, что $Q^0(n) = F(n)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(Q^0(n))}{\mu(F(n))} = 0.$$

Таким образом, решение задачи 3 дает некоторое решение задачи 2. Однако может оказаться, что задача 3 будет сложнее задачи 2: все зависит от вида получившейся алгебры (4). Может также оказаться, что множество всех алгоритмов $\{F(n)\}$ существенно беднее множества всех решений задачи 2. Вопрос о целесообразности решения задачи 3 для решения задачи 2 требует серьезного исследования.

Однако для задачи 2, которая допускает простую алгебру (4) и для которой еще не найдены алгоритмы, отличающиеся от алгоритма полного перебора, изложенный метод может дать более простой алгоритм и даже оптимальный в некотором классе алгоритмов.

Для примера рассмотрим задачу о бродячем торговце и задачу о назначениях, поставленных в форме задачи 2.

Задача о бродячем торговце [2]. Пусть $\chi(n)$ — множество всех подстановок из n элементов одноциклических с циклом длины n ; G — множество действительных, рациональных или целых чисел; $f_{nl} = \sum_{j=1}^n x_{js_l(j)}$,

где s_l — некоторая подстановка из множества $\chi(n)$, $p(n) = (n-1)!$. Если считать, что $\Delta = 1$, то из (1) следует: $B(n) = n! - 1$.

Задача о назначениях [1]. Пусть $\chi(n)$ — множество всех подстановок из n элементов. Все остальное определяется так же, как и в задаче о бродячем торговце; $p(n) = n!$, $B(n) = n \cdot n! - 1$.

Рассмотрим следующую алгебру:

$$\langle G, x + y, \min(x, y) \rangle, \quad (5)$$

где G — множество целых чисел. Для удобства переобозначим операции. Операцию $x+y$ будем обозначать через $x \circ y$, а операцию $\min(x, y)$ как $x \tilde{+} y$. Нетрудно проверить, что алгебра (5) коммутативна и ассоциативна для обеих операций. Кроме этого, $x \circ (z \tilde{+} y) = (x \circ z) \tilde{+} (x \circ y)$ и $x \tilde{+} x = x$.

Определение. Пусть N — некоторое конечное подмножество различных натуральных чисел; $\{N!\}$ — множество всех перестановок из N максимальной длины, α и β — натуральные числа, не принадлежащие N .

Тогда формулу $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \{N\}} x_{\alpha i_1} \circ x_{i_1 i_2} \circ \dots \circ x_{i_k \beta}$ сокращенно можно обозначить

через $F(\alpha, \beta, N)$. Если N_1 тоже некоторое подмножество k различных натуральных чисел и $\{\varphi\}$ — множество всех взаимно однозначных отображений N на N_1 , то можно ввести следующее обозначение:

$$F(N, N_1) \asymp \sum_{\varphi \in \{\varphi\}} x_{i_1 \varphi(i_1)} \circ x_{i_2 \varphi(i_2)} \circ \dots \circ x_{i_k \varphi(i_k)}.$$

Очевидно, что алгоритм перебора для задачи о бродячем торговце записывается формулой $F(1, 1, \langle 2, 3, \dots, n \rangle) \asymp P_1(n)$. Соответствующий алгоритм для задачи о назначениях записывается в виде формулы $F(\langle 1, 2, \dots, n \rangle, \langle 1, 2, \dots, n \rangle) \asymp P_0(n)$.

Под $\mu(F)$ мы будем понимать число букв в формуле F , а $\mu_0(F)$ — число букв в минимальной формуле, эквивалентной формуле F .

Определение. Обозначим через $F_1(n, k) \asymp \sum F(1, \alpha, N_1) \circ F(\alpha, 1, N_2)$, где «сумма» берется по всем α , N_1 и N_2 , таким, что $\alpha \cup N_1 \cup N_2 = \langle 2, \dots, n \rangle$, $\alpha \cap N_1 = 0$, $\alpha \cap N_2 = 0$, $N_1 \cap N_2 = 0$ и N_1 имеет $k-1$ элемент. Далее, обозначим через

$$F_0(n, k) \asymp \sum F(N_1, N_2) \circ F(N_3, N_4),$$

где «сумма» берется по всем N_2 и N_4 , таким, что $N_2 \cup N_4 = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$, $N_2 \cap N_4 = 0$, $N_1 = \langle 1, 2, \dots, k \rangle$, $N_3 = \langle k+1, \dots, n \rangle$. Обозначим через \tilde{F} минимальную по числу букв формулу, получающуюся из формулы F многократным применением операции вынесения за скобки общего «множителя».

Теорема 1. Если $k = [n/2]$ и $k_1 = \begin{cases} 1 & (n \leq 5) \\ [n/2] & (n > 5) \end{cases}$, то

$$\mu(\tilde{F}_1(n, k_1)) = \mu_0(P_1(n)), \quad \mu(\tilde{F}_0(n, k)) = \mu_0(P_0(n)).$$

Следствие. Имеет место равенство

$$\mu_0(P_1(n)) = (n-1) C_{n-2}^{k-1} [\mu_0(P_1(k)) + \mu_0(P_1(n-k))],$$

где

$$k = \begin{cases} 1 & (2 \leq n \leq 5) \\ [n/2] & (n > 5) \end{cases};$$

$$\mu_0(P_1(1)) = 1;$$

$$\mu_0(P_0(n)) = C_n^k [\mu_0(P_0(k)) + \mu_0(P_0(n-k))].$$

Здесь $k = [n/2]$, $n \geq 2$ и $\mu_0(P_0(1)) = 1$.

Теорема 2. Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} s_0 [n^{(\log_2 n - 1)/2} (2\pi)^{(\log_2 n)/2}]^{-1} 4^n [1 + O_1(n)] &\leq \mu_0(P_0(n)) \leq \\ &\leq \frac{s_0}{4} 4^n \log_2 n [n^{(\log_2 n - 1)/2} (2\pi)^{(\log_2 n)/2}]^{-1} [1 + O_2(n)], \end{aligned}$$

где s_0 — некоторое действительное число и $\lim_{n \rightarrow \infty} O_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O_2(n) = 0$;

$$\begin{aligned} s_1 n^{(\log_2 n - 1)/4} (2\pi)^{-(\log_2 n)/2} 4^n (1 + O_3(n)) &\leq \mu_0(P_1(n)) \leq \\ &\leq \frac{s_1}{4} n^{(\log_2 n - 1)/4} (2\pi)^{-(\log_2 n)/2} 4^n \log_2 n [1 + O_4(n)], \end{aligned}$$

где s_1 — постоянная, а $\lim_{n \rightarrow \infty} O_3(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O_4(n) = 0$.

Следует заметить, что фактически получились алгоритмы не только для решения задач о бродячем торговце и о назначениях, поставленных в форме задачи 2, но и алгоритмы для тех же задач в форме задачи 1.

Число операций, которое требует данный алгоритм, равно не числу букв в формуле, а числу различных подформул данной формулы. В этом смысле построенный алгоритм для задачи о бродячем торговце несколько лучше, чем алгоритм, предложенный Белманом [2]; однако, если $L(n)$ — его сложность, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L(n)} = 2$.

Автор благодарен Ю. В. Глебскому за замечания и советы, которые помогли написать эту статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей, ИЛ, М., 1963.
2. Р. Белман, Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере, Кибернетический сборник, изд. Мир, вып. 9, 219 (1964).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 апреля 1965 г.

ON ONE METHOD OF ALGORITHM CONSTRUCTION FOR SOLUTION OF SOME OPTIMIZATION PROBLEMS

E. N. Kazantsev

The algebraic method of algorithm construction is presented for the problem of assignments and for that of "travelling salesman". The asymptotic estimations of the number of letters in the minimizing formulae corresponding to the problems are given.

УДК 681.142.652.2

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ*

М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина

Рассматривается построение запоминающих устройств на ферритовых сердечниках или других аналогичных элементах с многократным совпадением токов. Доказывается теорема о наибольшем числе прошивок для устройства с заданными параметрами. Обсуждаются вопросы дешифрации и построения запоминающего устройства большого объема с повышенной надежностью.

Запоминающие устройства на магнитных сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, работающие по принципу многократного совпадения токов, находят некоторое применение в цифровых вычислительных машинах. К сожалению, этому типу запоминающих устройств в настоящее время не уделяется достаточного внимания, хотя при помощи их можно решить ряд серьезных проблем. Запоминающие устройства с многократным совпадением токов легко решают вопросы о максимальном отношении тока в избранном и неизбранном сердечнике, о наибольшем отношении полезного сигнала к помехе при считывании, о наибольшей надежности запоминающего устройства. Они обеспечивают также существенное снижение считающего тока в каждой шине, что особенно важно при использовании полупроводникового управления и создании запоминающего устройства большой емкости. В настоящей работе, основные результаты которой получены в 1960 г., рассматривается геометрическая интерпретация запоминающего устройства с многократным совпадением токов, вопрос о получении наибольшего из всех возможных избирающего отношения [1] в ферритовой матрице порядка n^N при простом n на основе нахождения размерности некоторого полного максимального множества $\{M\}_N - \rho_{\max} \{M\}_N$. Обсуждены вопросы о дешифрации, возможных конфигурациях прошивок, о запоминающем устройстве большого объема.

1. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим N -мерную матрицу, состоящую из n^N магнитных сердечников, работающую по принципу K -кратного совпадения токов, где N — размерность пространства, в котором рассматривается матрица, а n — простое число. Назовем элементом прошивки или просто элементом провод, проходящий через n сердечников. Для дешифрации сердечников матрица прошивается K группами элементов (прошивок), по n^{N-1} элементов в каждой прошивке, причем для однозначности дешифрации при чтении и записи мы будем в дальнейшем предполагать, что каждый элемент должен удовлетворять следующим двум условиям:

1) ни один сердечник не прошивается двумя элементами из одной и той же прошивки;

* Доклад на I Всесоюзном симпозиуме по оперативным и постоянным запоминающим устройствам, Ленинград, 1963.

2) ни одна пара элементов разных прошивок не пересекается более чем в одном сердечнике.

Учитывая, что точка в двумерном пространстве однозначно задается двумя пересекающимися прямыми, в трехмерном—тремя пересекающимися плоскостями и т. д., можно сказать, что для однозначной дешифрации какого-либо сердечника матрицы, расположенной в пространстве N -измерений, надо подать ток минимум в n^{N-2} элементов N различных прошивок, проходящих через этот сердечник. Например, чтобы однозначно дешифровать точку в трехмерном пространстве, достаточно подать ток только в те элементы, которые расположены в трех плоскостях, пересекающихся в этой точке. В частном случае это будут координатные плоскости или плоскости, параллельные координатным. Ток, который проходит через каждый элемент, достигает максимальной величины $i_{\max} = J^0/N$.

Нашей задачей будет стремление довести ток $i = J^0/K$ до некоторой минимальной величины i_{\min} при заданных n и N . Поскольку для данной матрицы $J^0 = \text{const}$, то необходимо найти максимальное число прошивок, элементы которых удовлетворяют условиям 1 и 2, т. е. найти K_{\max} . Для этого сопоставим каждому сердечнику матрицы точку a_{i_1, i_2, \dots, i_N} некоторого множества $\{M^*\}_N$ в N -мерном пространстве, каждому элементу прошивки — элемент некоторого множества $\{M\}_N$, состоящий из n точек множества $\{M^*\}_N$. При этом множество $\{L\}_N$, соответствующее всем элементам одной прошивки, состоит из n^{N-1} элементов.

Множество $\{M\}_N$ назовем полным, если в него входят все элементы K различных прошивок, где $N \leq K \leq K_{\max}$. Причем, если через $\{\bar{M}\}_N$ обозначить мощность множества $\{M\}_N$, то $\{\bar{M}\}_N = \sum_{i=1}^K \{\bar{L}_i\}_N$. Множество $\{M\}_N$ называется полным и максимальным, если оно состоит из элементов всех возможных прошивок, удовлетворяющих условиям 1 и 2, т. е. состоит из K_{\max} прошивок.

Число элементов множества $\{M\}_N$ назовем его размерностью и обозначим через $\rho \{M\}_N$, а размерность полного и максимального множества $\{M\}_N$ — через $\rho_{\max} \{M\}_N$.

2. ТЕОРЕМА О РАЗМЕРНОСТИ ПОЛНОГО МАКСИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Теорема. Для любого множества $\{M^*\}_N$, заданного в N -мерном пространстве для n , являющегося простым числом, существует (с точностью до нумерации его точек) единственное полное максимальное множество $\{M\}_N$ с размерностью

$$\rho_{\max} \{M\}_N = n^{2N-1} \sum_{i=1}^N n^{-i}. \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\{M^*\}_N$, состоящее из n^N точек. Чтобы определить $\rho_{\max} \{M\}_N$, надо перебрать все сочетания из n^N точек по n точек множества $\{M^*\}_N$ так, чтобы в каждом отдельном сочетании не было более одной точки, общей с точкой любого другого сочетания. Перенумеруем все точки множества $\{M^*\}_N$ следующим образом:

$$1, 2, 3, \dots, n^N.$$

Для доказательства формулы (1) используем способ «кручения», который заключается в следующем. Расположим точки с номерами 1, 2, 3, ..., n^N в A таблиц, где $A = n^{N-2} + \sum_{i=0}^{N-2} n^i$, и распределим эти таблицы по шагам сле-

дующим образом:

Все таблицы имеют n столбцов и разное количество строк. На первом шаге образуем одну таблицу из n^{N-1} строк. Если $n^{N-2} \neq n$, то каждый из столбцов предыдущей таблицы располагается в таблицу, состоящую из n^{N-2} строк. Ясно, что таких таблиц будет n . Это второй шаг. Затем, если $n^{N-3} \neq n$, то каждый из столбцов таблиц, полученных на втором шаге, располагается в таблицу, состоящую из n^{N-3} строк. Таких таблиц будет n^2 и т. д. Наконец, на $(N-1)$ -ом шаге мы получим, что число строк в каждой из n^{N-2} таблиц равно n . Всех полученных таким образом таблиц будет $\sum_{i=0}^{N-2} n^i$ штук. К ним мы будем

применять способ «кручения». На N -ом шаге образуем несколько таблиц из таблиц, полученных на $(N-1)$ -ом шаге, к которым не будет применен способ «кручения».

Каждый столбец таблицы, полученный на $(N-1)$ -ом шаге, будет строкой таблицы на N -ом шаге. Ясно, что таких таблиц будет n^{N-2} .

Интересующие нас элементы расположены в строках этих таблиц. «Кручение» в таблицах должно проводиться по следующему правилу: оставляя неизменным первый столбец, одновременно второй столбец будем циклически сдвигать вверх на один шаг, третий столбец — на два шага, четвертый столбец — на три шага и т. д. Наконец, n -ый столбец должен циклически сдвигаться вверх на $(n-1)$ шаг. При этом следует помнить, что, поскольку n является простым числом, то совпадений точек в столбцах при «кручении» не будет.

Подсчитаем число строк во всех полученных способом «кручения» таблицах и в таблицах, полученных на N -ом шаге. Это и будет $\rho_{\max}\{M\}_N$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\rho_{\max}\{M\}_N &= n^{N-1} \cdot n^{N-1} + (n^{N-2} \cdot n^{N-2}) \cdot n + \dots + n \cdot n^{N-2} = \\ &= n^{2N-1} \sum_{i=1}^N n^{-i}.\end{aligned}$$

С точностью до нумерации нельзя указать больше ни одного сочетания, состоящего из n точек, которое совпадало бы с любым из вышеуказанных только одной точкой; это следует из способа построения таблиц и способа «кручения». В самом деле, поскольку с каждой точкой первого столбца перебираются все точки второго столбца, любой новый набор точек α будет совпадать с одним из имеющихся, по крайней мере, двумя точками, входящими в эти два столбца. Это сразу же делает сочетание α недопустимым, так как оно не удовлетворяет основным условиям 1 и 2. Если при этом вспомнить, что серия таблиц на любом последующем шаге получена дроблением на n каждого из столбцов таблиц, полученных на предыдущем шаге, то станет ясно, что $\rho_{\max}\{M\}_N$

$$\text{строго равно } n^{2N-1} \sum_{i=1}^N n^{-i}.$$

Еще раз подчеркнем, что полное и максимальное множество $\{M\}_N$ будет единственным для выбранного способа прошивания в том смысле, что, увеличив его размерность на 1 (или более), мы получим элемент или элементы прошивки, совпадающие с уже имеющимися элементами прошивок $\{M\}_N$, или такие элементы, которые не удовлетворяют условиям 1 и 2 вместе или по отдельности. Если же мы уменьшим $\rho_{\max}\{M\}_N$ на единицу или несколько единиц, то, естественно, не получим максимального множества $\{M\}_N$.

Заметим, что для выражения $\rho_{\max}\{M\}_N$ может быть приведена другая формула, дающая тот же результат, что и формула (1):

$$\rho_{\max}\{M\}_N = n^{N-1} \sum_{i=1}^N C_N^i (n-1)^{i-1}. \quad (2)$$

Доказательство ее аналогично доказательству формулы (1) с той лишь разницей, что перебирать здесь мы будем не номера точек, а значения индексов у точек a_{i_1, i_2, \dots, i_N} . Для того, чтобы определить $\rho_{\max}\{M\}_N$, нужно перебрать все сочетания из n^N точек множества $\{M^*\}_N$ по n так, чтобы в каждом сочетании не было более одной точки, у которой не более чем $(N-1)$ индекс совпадает с $(N-1)$ -ым индексом точки в любом другом сочетании.

3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ

Следствие 1. Легко показать, что число K прошивок матрицы, состоящей из n^N сердечников, обеспечивающее однозначную дешифрацию, расположено в интервале

$$N \leq K \leq K_{\max} = \frac{\rho_{\max}\{M\}_N}{n^{N-1}}. \quad (3)$$

Следствие 2. Как уже было сказано выше, для однозначной дешифрации сердечника необходимо подать ток J^0/N минимум в n^{N-2} элементов N различных прошивок, проходящих через этот сердечник. Но тогда в Nn^{N-2} ($n-1$) сердечниках матрицы будем иметь ток помехи i , величина которого меняется в пределах

$$J^0/N \leq i \leq (N-1) J^0/N. \quad (4)$$

Так, если $N = 2$ или $N = 3$, то эти токи помехи достигают довольно большой величины $J^0/2$ или $2J^0/3$.

Из теоремы ясно, что для доведения помехи до минимума надо подать ток J^0/K_{\max} в n^{N-2} элементов K_{\max} различных прошивок, проходящих через выбранный сердечник. В таблице 1 приведены значения K_{\max} для некоторых значений n и N , лежащих в пределах $2 \leq n \leq 17$ и $2 \leq N \leq 6$.

Таблица 1

$n \backslash N$	2	3	4	5	6
2	3	7	15	31	63
3	4	13	40	121	364
5	6	31	156	781	3896
7	8	57	400	2801	19608
11	12	133	1464	16105	193260
13	14	183	2370	30931	402224
17	18	307	5220	88741	1508598

Например, в кубе из 125 сердечников ($n = 5$, $N = 3$) при однозначной дешифрации какого-либо сердечника помеха может меняться в пределах от $J^0/3$ до $2J^0/31$ в зависимости от того, сколько различных проши-

вок мы используем. Нулевая помеха исключается. Совершенно ясно, что, поскольку величина тока помехи i в матрице при дешифрации заключена в интервале

$$J^0/K \leq i \leq (N-1) J^0/K, \quad (5)$$

то во всех возможных случаях 1) $N = \text{const}$, $n \rightarrow \infty$; 2) $N \rightarrow \infty$, $n = \text{const}$; 3) $N \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ ток i стремится к нулю, только с разной скоростью. Таким образом, можно добиться сколько угодно малой помехи за счет увеличения n или N , или же n и N одновременно.

Следствие 3. Можно указать несколько различных способов прошивания N -мерного куба. Каждый новый способ дает возможность построить полное максимальное множество, отличающееся от предыдущего своей геометрической структурой, но обладающее той же размерностью, что и предыдущее полное максимальное множество, построенное по другому способу прошивания. Если через \tilde{S} обозначить число этих разных способов, то

$$S = \frac{n^N!}{n^N \cdot C_n^n}. \quad (6)$$

4. ЗАМЕЧАНИЯ О НОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ K ИЗМЕРЕНИЙ

До сих пор мы имели дело с множествами $\{M^*\}_N$ и $\{M\}_N$, расположеными в N -мерном пространстве. Было показано, что для $\{M^*\}_N$ можно найти множество $\{M\}_N$, размерность которого может достигать своей максимальной величины $\rho_{\max} \{M\}_N$, но, вообще говоря, согласно требованию однозначности дешифрации $\rho \{M\}_N$ может меняться в определенных пределах. Соответственно этому число прошивок K ферритовой матрицы, элементы которых удовлетворяют требованиям 1 и 2, может меняться в интервале

$$N \leq K \leq K_{\max} = \frac{\rho_{\max} \{M\}_N}{n^{N-1}}. \quad (7)$$

Теперь перейдем к новому пространству, число измерений которого задается величиной K . Таким образом, размерность нового пространства будет однозначно задана, если заданы множество $\{M^*\}_K$ и размерность $\rho \{M\}_K$. Величину измерения в новом K -мерном пространстве оставим такой же, как и в N -мерном пространстве, т. е. равной n . Множества, аналогичные $\{M^*\}_N$ и $\{M\}_N$, обозначим через $\{M^*\}_K$ и $\{M\}_K$. Множество $\{M^*\}_K$ будет, очевидно, состоять из n^K точек. Очевидно также, что соотношение объемов множеств $\{M^*\}_N$ и $\{M^*\}_K$ заключено в пределах

$$1 \leq \frac{n^K}{n^N} \leq \frac{n^{\rho_{\max} \{M\}_N / n^{N-1}}}{n^N}. \quad (8)$$

Предполагая, что задано множество $\{M^*\}_N$ и для него уже выбрано совершенно определенное множество $\{M\}_N$, т. е. число прошивок K выбрано для $\{M^*\}_N$, мы перенесем множества $\{M^*\}_N$ и $\{M\}_N$ в новое пространство K -измерений. Геометрическая структура множеств $\{M^*\}_N$ и $\{M\}_N$ в K -мерном пространстве будет иной, чем в N -мерном пространстве. Она будет, конечно, зависеть от способа обозначений точек

$\{M^*\}_N$, от обозначения системы координат нового пространства и выбранных K прошивок. Ясно, что при любом геометрическом расположении $\{M^*\}_N$ в новом K -мерном пространстве это множество $\{M^*\}_N$ не заполняет полностью множество $\{M^*\}_K$ при $K \neq N$. Поэтому, если мы будем дешифровать какой-либо сердечник матрицы, расположенный в N -мерном пространстве, при помощи n^{N-2} элементов из K различных прошивок, то в K -мерном пространстве этот же сердечник будет дешифроваться соответствующими этим элементам гиперплоскостями. Причем, так как множество $\{M^*\}_K$ неполностью заполнено точками множества $\{M^*\}_N$, то при дешифрации матрицы в K -мерном пространстве отсутствуют элементы, в которых совпадение токов будет более, чем $(N-1)^0/K$.

Рассмотрим пример. Перейдем от множества $\{3\}_2$ к множеству $\{3\}_3$ (см. рис. 1).

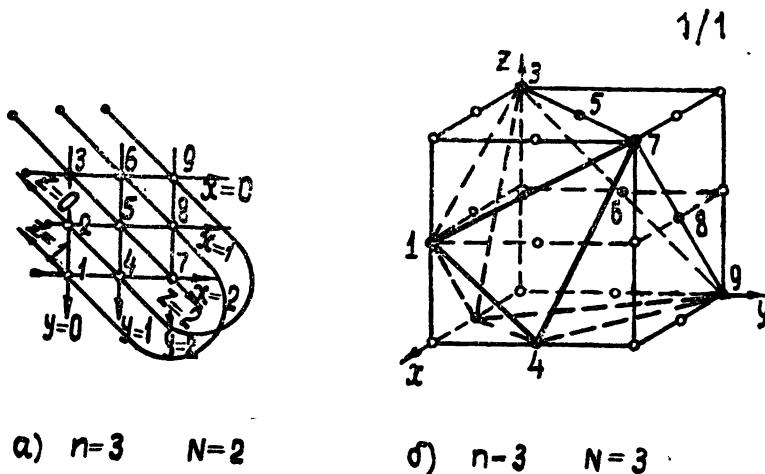


Рис. 1.

В новом трехмерном пространстве множества $\{M^*\}_2$ и $\{M\}_2$ имеют новую геометрическую структуру. Тёмными кружками отмечены точки множества $\{M^*\}_2$, а светлыми — остальные точки множества $\{M^*\}_3$. Мы исключим последние из рассмотрения. Одно множество 2^2 в трехмерном пространстве имеет форму треугольной пирамиды. Тогда для дешифрации точки 1 надо подать ток в плоскости, определяемые точками:

$$1 \cdot 3, 2, 1 \quad 2 \cdot 6, 8, 1 \quad 3 \cdot 1, 4, 7.$$

Ясно, что в какие бы элементы каждой из этих плоскостей ток ни подавался, ни в одной точке не будет двухкратного совпадения токов. В точке 1 будет трехкратное совпадение токов, а в остальных — однократное или нулевое. Такая же ситуация будет при дешифрации остальных точек $\{3\}_2$ в трехмерном пространстве.

Отметим еще, что от N -мерного пространства, в котором задана матрица из n^N сердечников, вышеописанным способом мы можем перейти к любому из пространств, размерность K которых заключена в пределах

$$N \leq K \leq K_{\max} = \frac{\rho_{\max} \{M\}_N}{n^{N-1}}.$$

Затем от этого пространства можно перейти к любому из пространств, размерность которых $K^1 > K$ заключена в пределах

$$K \leq K^1 \leq K_{\max}^1 = \frac{\rho_{\max}\{M\}_K}{n^{K-1}}$$

и т. д. Таким образом, от N -мерного пространства можно перейти к пространству любой большой размерности. При этом помеха i при дешифрации какого-либо сердечника будет меняться в интервале

$$\frac{J^0}{K^j} \leq i \leq \frac{(K^{j-1} - 1) J^0}{K^j},$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$

5. ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ С МНОГОКРАТНЫМ СОВПАДЕНИЕМ ТОКА

Запоминающее устройство, имеющее n разрядов в каждом измерении и N измерений с током в J^0/N , может быть представлено как N -мерный куб с ребром n . Переход к K прошивкам с током J^0/K ($K > N$) эквивалентен переходу к новому K -мерному пространству с тем же ребром n . При этом в новом пространстве может быть симметрично расположено n^{K-N} групп точек ферритов, объем каждой из которых совпадает с объемом старого множества n^N . В качестве простейшего примера может быть взята двумерная матрица, изображенная на рис. 2; для нее $N = 2$ и $n = 2$. Переход к пространству с $K = 3$ и $n = 2$ дает трехмерный куб, в котором занято ферритами $n^N = 4$ точки из $n^K = 8$. Это дает возможность в кубе разместить $n^{K-N} = 2$ набора ферритов по $n^N = 4$ в каждом, как это показано на рис. 2.

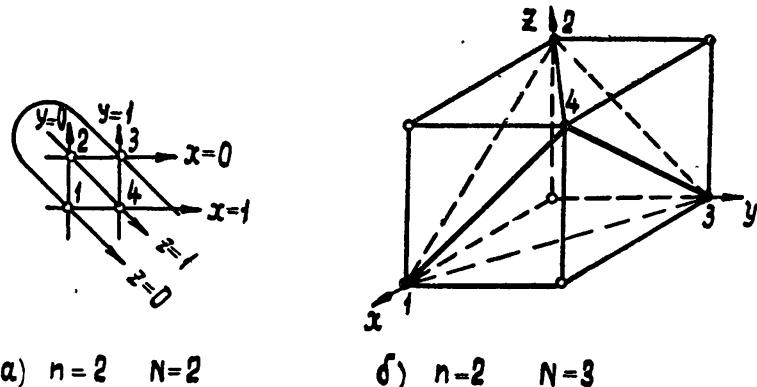


Рис. 2.

Основываясь на изложенном в предыдущих разделах, рассмотрим некоторые вопросы построения запоминающих устройств. В связи с тем, что количество шин, на которые должны быть поданы сигналы, обеспечивающие поиск того или иного сердечника памяти, увеличивается по сравнению с минимально необходимым на $(K - N)$ координат, возникает несколько вариантов выполнения таких запоминающих устройств.

1. Адрес для поиска слова представляет собой $M = K[\ln d_n]$ двоичных

разрядов*, если считать, что каждый разряд m -разрядного слова содержится в отдельном кубе, имеющем K измерений. Для однозначной же дешифрации вполне достаточно

$$M' = N[\ln] < K[\ln]$$

разрядов. При этом из 2^M кодов адреса всего лишь $2^{M'}$ определяют ячейку, содержащую информацию; эти коды совпадают с кодами первоначальной матрицы n^N . Остальные коды являются зависимыми и легко определяются из достаточно простых соотношений. Сказанное дает возможность существенно повысить надежность работы устройства, так как при выборе тока в шине J^0/N выход из строя до $(K - N)$ дешифраторов не повлияет на работу запоминающего устройства.

2. Код адреса содержит $N[\ln]$ разрядов. Дополнительные $(K - N)[\ln]$ кодов определяются каким-либо вычислительным устройством по кодам адреса.

3. Код адреса содержит $N[\ln]$ кодов, которые передешифруются на $K[\ln]$ кодов. При этом дешифратор имеет N входных координат по n разрядов в каждой и K выходных координат, также по n разрядов в каждой. Например, $N = 2$, $n = 2$; в этом случае K_{\max} (см. рис. 3).

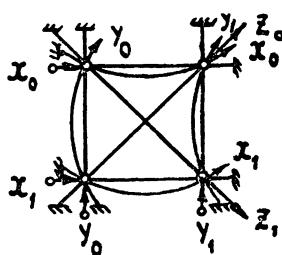


Рис. 3.

4. Код адреса содержит $K[\ln]$ разрядов. При этом объем памяти содержит n^K ячеек по m разрядов каждая. Вся память разбивается на n^{K-N} групп. В каждую группу входят элементы, образующие один набор из n^N ферритов. Все остальные $(n^{K-N} - 1)$ группы отключены. Группа, включенная в работу, определяется N n -разрядными координатами по достаточно простым соотношениям. Это дает возможность отключить все ферриты, вошедшие в остальные $(n^{K-N} - 1)$ группы, где ток помехи через феррит был бы более $(N - 1)J^0/K$.

В работающей группе ферритов ток помехи составляет величину не большую, чем это определяется формулой (5). Последний вариант выполнения дешифрации позволяет строить запоминающие устройства достаточно больших объемов порядка n^K с минимальными токами записи и чтения, а также хорошим отношением полезного сигнала к помехе при чтении. Для параллельного запоминающего устройства, имеющего m разрядов в слове, каждый K -мерный куб может содержать один разряд всех слов, т. е. для записи всего слова должно быть выполнено m K -мерных кубов по n^K разрядов в каждом. При этом в каждый момент времени, в зависимости от N координат, в работу включается по одному кубу n^N в каждом разряде m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. К. Ричардс, Элементы и схемы цифровых вычислительных машин, ИЛ, М., 1961 г.
2. R. C. Minnick, R. L. Achenhurst, J. Appl. Phys., 26, 575 (1955).
3. N. M. Blachman, Trans. JRS, EC-5, 19 (1956).
4. Ю. Л. Кетков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 173 (1961).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 декабря 1965 г.

* $[\ln] = \begin{cases} P \text{ при } n = 2^p \\ P + 1 \text{ при } 2^p < n < 2^{p+1} \end{cases}$

SOME PROBLEMS OF CONSTRUCTING MULTI—DIMENSIONAL MEMORY
DEVICES

M. Ya. Eingorin, T. N. Eingorina

The construction is considered of the memory devices using the ferrite cores and the other analogous elements with the multiple coincidence of currents. The theorem has been proved of the greatest number of perforations for the device with the given parameters. The problems are discussed both of decoding and constructing the memory device of a great capacity with improved reliability.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.34

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНАХ
7,93; 11,0; 14,2 и 20,8 см**

*В. А. Алексеев, В. Д. Кротиков, Ю. Г. Матвеев, Н. Б. Михайлова, В. А. Порфириев,
В. П. Рязанов, А. И. Сергеева, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, С. А. Шмулевич*

В 1964—65 гг. на загородном полигоне НИРФИ Зименки по методу «искусственной Луны» [1] проведены измерения средней по диску эффективной температуры на волнах 7,93, 11,0, 14,2 и 20,8 см. Измерения осуществлялись на вертикальной поляризации с помощью радиотелескопа, состоящего из четырехметрового параболического рефлектора, облучаемого полуволновым вибратором с контратрефлектором, и двух трансформируемых модуляционных приемников на диапазонах 7,5 \pm 15 см и 15 \pm 30 см. Флуктуационный порог чувствительности приемной аппаратуры составлял 0,4 \pm 0,7 при постоянной времени 16 сек. В качестве опорного эталона на всех волнах использовалась согласованная нагрузка, находящаяся при окружающей температуре. При компенсации сигнала, вызванного разницей температур согласованной нагрузки и антennы, использовался шумовой сигнал от газоразрядной трубы, вводимый через направленный ответвитель в тракт антennы.

Радиоизлучение Луны сравнивалось с излучением эталона — диска диаметром 380 см, покрытого поглощающим материалом и расположенного в зоне дифракции Фраунгофера на расстоянии 230 м от раскрыва зеркала радиотелескопа под углом места $h_d = 17^\circ$.

Методика измерений соответствует [2] и заключалась в следующем: вначале антenna наводилась на опорную область, расположенную на высоте Луны и отстоящую к востоку от ее центра на расстоянии, определяемом половиной ширины диаграммы Φ на уровне 0,005 по мощности. Эта область сопровождалась в течение двух минут по азимуту и высоте со скоростями движения Луны. Затем антenna наводилась на Луну, которая сопровождалась также в течение двух минут, после чего антenna смещалась по азимуту, но уже в западном направлении, и велось сопровождение с соответствующими скоростями.

После четырех записей Луны определялось приращение сигнала от эталона излучения (2 записи). В течение наблюдений производилась серия 5 \pm 6 чередующихся измерений (четыре записи Луны, две записи диска), которая подвергалась обработке по формуле

$$\bar{T}_e = T_0 \frac{n_L}{n_d} \alpha e^{-\Delta\gamma} (1 + \xi - \eta) \quad (1)$$

и последующему усреднению. Здесь $\bar{T}_e = \int_{\Omega_L} T(\Omega) F d\Omega / \int_{\Omega_L} F d\Omega$ — средняя по диску эффективная температура Луны, T_0 — температура диска, n_L — приращение сигнала от Луны, n_d — приращение сигнала от диска, $\alpha = \int_{\Omega_d} F d\Omega / \int_{\Omega_L} F d\Omega$ — коэффициент, учитывающий разницу в угловых размерах Луны и диска (угловые размеры Луны определялись на моменты наблюдений), $\Delta\gamma = \gamma_L - \gamma_d$ — разница коэффициентов поглощения в атмосфере на уровне Луны и диска, ξ — поправка, обусловленная дифракцией фона радиоизлучения Земли на диске, η — поправка на нечерноту материала «искусственной Луны».

Результаты измерений фазовой зависимости эффективной температуры Луны на волнах 7,93, 11 и 14,2 см приведены на рис. 1. Видно, что на волнах 7,93 и 11 см обнаруживается небольшое изменение средней по диску эффективной температуры в зависимости от фазы, которое может быть представлено в виде

Таблица 1

λ (см)	Флуктуационный порог ап- паратуры $\tau = 16$ сек	Время наблюдения	Число наблюден- ий	Число записей луны	Ширина диаграммы на уровне 0,5	Дифракционная поправка на нечесто- воту эталона η	Постоянная составля- ющая \bar{T}_{e0} ($^{\circ}\text{К}$)	Ошибка измерения $\Delta \bar{T}_{e0}$ ($^{\circ}\text{К}$)	Перемен- ная составля- ющая \bar{T}_{e1} ($^{\circ}\text{К}$)	Ошибка измерения $\Delta \bar{T}_{e1}$ ($^{\circ}\text{К}$)	Фаза φ (град.)	Ошибка измерения $\Delta \varphi$ (град.)		
7,93	0,5	18—19.VI 1—14.VII 12—16.VIII 17—30.X 1964 г.	31	660	390	1°13'	0,005	0,01	216	±7	7	±3	45	±15
11,0	0,45	24.VIII 10.IX 14—27.XI 1964 г.	24	420	260	1°50'	0,01	0,04	219	±7	6	±3	55	±15
14,2	0,4	21—26.IV 8—23.V 4—8.VI 20.IX 4.X 1964 г.	35	720	430	2°20'	0,015	0,01	221	±6	—	—	—	—
20,8	0,7	3.V 10.VII 1965 г.	19	220	200	3°20'	0,02	0,01	225	±6	—	—	—	—

$$\bar{T}_e = 216^\circ + 7^\circ \cos(\Omega t - 45^\circ)$$

на волне 7,93 см,

$$\bar{T}_e = 219^\circ + 6^\circ \cos(\Omega t - 55^\circ)$$

на волне 11 см.

Среднеквадратичный разброс экспериментальных точек относительно аппроксимирующих кривых, определяющий погрешность величин переменных составляющих на этих волнах, равен $\pm 3^\circ$.

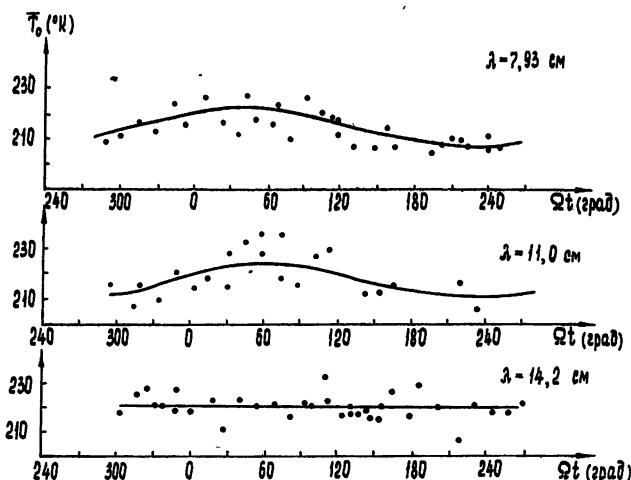


Рис. 1. Фазовая зависимость средней по диску эффективной температуры Луны на волнах 7,93; 11,0 и 14,2 см.

Полученные результаты подтверждают выводы существующей теории [3] о наличии фазового хода на этих волнах; однако они не позволяют достаточно надежно определить его величину. Согласно теории, на волне 14,2 см переменная часть радиоизлучения Луны должна составлять $3,5 - 4^\circ\text{K}$. Поскольку среднеквадратичный разброс экспериментальных точек примерно равен этой величине, на волне 14,2 см (см. рис. 1) приводится лишь значение постоянной составляющей средней по диску эффективной температуры, которое в результате усреднения экспериментальных точек оказалось равным 221°K .

На волне 20,8 см измерения проводились в течение неполного фазового цикла. Для средней по диску эффективной температуры на этой волне получено $\bar{T}_{e0} = 225^\circ\text{K}$.

Случайная ошибка в определении постоянной составляющей эффективной температуры, обусловленная шумами аппаратуры и уходами нуля на всех волнах, не превосходит $\pm 0,5\%$. Это означает, что погрешность измерения постоянной составляющей определяется в основном систематическими ошибками измерений.

В таблице 1 указаны условия эксперимента и результаты измерений с оценками ошибок измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1961).
2. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 242 (1963).
3. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 79 (1954).

УДК 621.371.11

ПОЛЯРИМЕТРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

И. Ф. Шашкин

Исследование поляризации принимаемого излучения позволяет получить информацию о его источниках, средах, в которых происходит распространение электромагнитных волн, и физических условиях на трассе. При этом в качестве параметров, подлежащих экспериментальному определению, обычно используются параметры Стокса, представляющие из себя линейные комбинации квадратичных и билинейных относительно напряженности электрического поля форм. Последнее обстоятельство не всегда благоприятно. В случае меняющейся интенсивности потока излучения зависимость параметров Стокса от энергетических характеристик поля приводит к целому ряду недобств, а в некоторых случаях делает измерения невозможными. В качестве примера можно указать на поляриметрию сигналов, диапазон изменения мощности которых выходит за пределы линейности усилителей в приемных устройствах современных поляриметров.

В этой связи целесообразно рассмотреть поляризационный анализ на приемнике с логарифмическим усилителем, примененным для сжатия динамического диапазона изменения мощности анализируемого излучения. Выражение для мощности сигнала на входе усилителя в модуляционном поляриметре с вращающейся пластинкой, задерживающей фазу одной из ортогональных составляющих поля на угол ξ , имеет вид

$$\begin{aligned} P(t) = \frac{1}{2} I - \frac{1}{4} (1 + \cos \xi) Q - \frac{1}{4} (1 - \cos \xi) Q \cos(4\Omega t) - \\ - \frac{1}{4} (1 - \cos \xi) U \sin(4\Omega t) - \sin \xi V \sin(2\Omega t), \end{aligned} \quad (1)$$

где I , Q , U и V — параметры Стокса, Ω — частота модуляции*. Выходной сигнал после логарифмического усиления и линейного детектирования можно представить формулой

$$\begin{aligned} u(t) = \ln \frac{I}{2} + \ln \left[1 - \frac{1 + \cos \xi}{2} q - \frac{1 - \cos \xi}{2} q \cos(4\Omega t) - \right. \\ \left. - \frac{1 - \cos \xi}{2} u \sin(4\Omega t) - \sin \xi v \sin(2\Omega t) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где q , u и v — не зависящие от интенсивности потока излучения нормированные параметры Стокса: $q = Q/I$; $u = U/I$; $v = V/I$.

При анализе излучения, содержащего линейно поляризованный компоненту, сигнал (2) имеет следующий спектральный состав [3]:

$$\begin{aligned} a_0 &= \ln \left[\frac{I}{2} \left(1 - \frac{1 + \cos \xi}{2} q \right) \cos^2 \vartheta \right], \\ a_k &= \begin{cases} -\frac{8}{k} \cos \frac{k}{2} \beta \operatorname{tg}^{k/4} \vartheta & \text{при } k = 4n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & \text{при всех остальных } k \end{cases} \\ b_k &= \begin{cases} -\frac{8}{k} \sin \frac{k}{2} \beta \operatorname{tg}^{k/4} \vartheta & \text{при } k = 4n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & \text{при всех остальных } k \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

где угол ϑ находится из условия

$$\sin 2\vartheta = \frac{1 - \cos \xi}{2 - (1 + \cos \xi)q} m \quad (4)$$

* Формула (1) не учитывает поглощения в пластинке и отражения при плохом согласовании. Она отличается от аналогичных формул в работах [1, 2] знаками, что связано с выбором системы координат и знака φ — разности начальных фаз ортогональных составляющих поля. Кроме того, в работе [2] в этой формуле допущена опечатка.

($m = \sqrt{q^2 + u^2}$ — нормированная мощность поляризованной составляющей излучения). Угол ориентации вектора напряженности электрического поля поляризованной компоненты β определяется сразу через отношение измеряемых величин:

$$\operatorname{tg}(2\beta) = b_4/a_4. \quad (5)$$

Для определения величины неполяризованной составляющей от измеренных значений амплитуд четвертых гармоник необходимо перейти к нормированным параметрам Стокса. Для этого нужно решить систему уравнений

$$a_4 = -2(q/m)\operatorname{tg}\vartheta; \quad (6)$$

$$b_4 = -2(u/m)\operatorname{tg}\vartheta,$$

после чего неполяризованная составляющая, выражаемая в безразмерных единицах, определяется как разность между единицей и корнем квадратным из суммы квадратов нормированных параметров.

Исследование выражения (4) на экстремум показывает, что при анализе частично линейно поляризованного излучения оптимальной для модулятора является полуволновая пластиинка, при которой амплитуды четвертых гармоник регистрируются с максимально возможным весом. На рисунках 1 и 2 показан характер изменения ве-

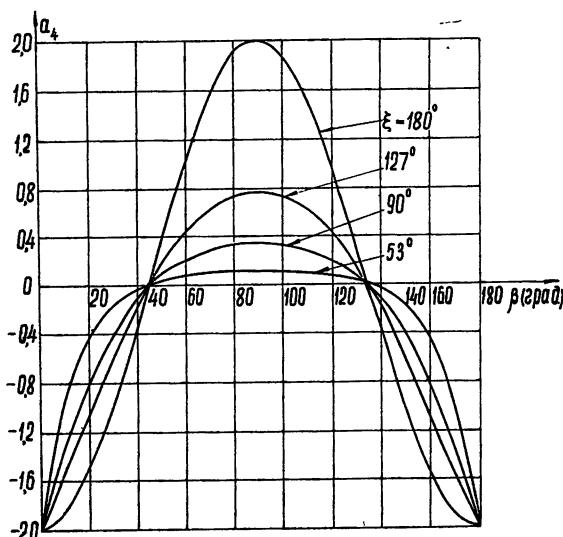


Рис. 1.

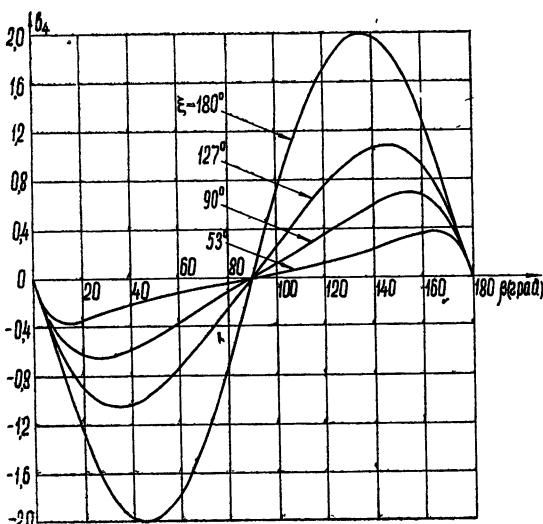


Рис. 2.

личин a_4 и b_4 в зависимости от ориентации вектора напряженности электрического поля при различных ξ и $m = 1$. Из графиков следует, что полуволновая пластинка является оптимальной еще и потому, что в случае ее применения регистрирующую аппаратуру можно градуировать не в значениях a_4 и b_4 , а сразу в значениях нормированных параметров Стокса, поскольку характер зависимости и тех и других от β одинаков.

С уменьшением степени поляризации излучения пределы изменения величин a_4 и b_4 сокращаются. Кроме того, как это видно из рисунков 3 и 4, меняется характер зависимости их от β . Влияние множителя $\operatorname{tg} \theta$ в формулах (6), приводящее к нелинейным искажениям формы кривых, уменьшается, и при анализе слабо поляризованных потоков эту зависимость можно приближенно считать гармонической. Из графика на рис. 4 также следует, что по расположению максимума функции $b_4(\beta)$ над осью абсцисс можно определять степень поляризации анализируемого излучения. Зависимости, показанные на рисунках, используются при наладке, калибровке и проверке точности поляриметра.

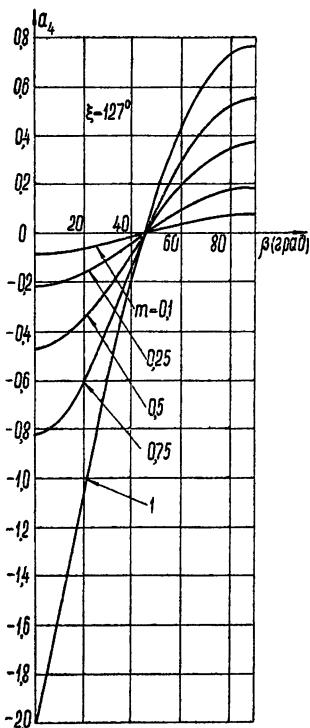


Рис. 3.

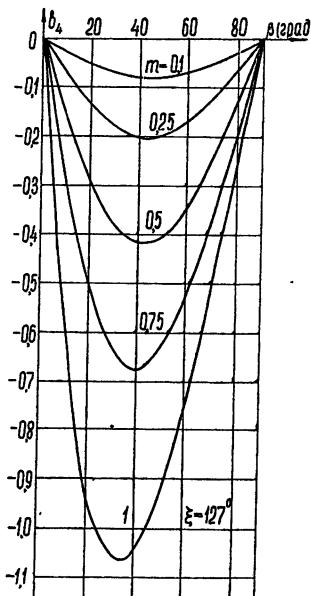


Рис. 4.

При анализе излучения, содержащего циркулярно поляризованную компоненту, спектральный состав сигнала (2) следующий [3]:

$$a_0 = \ln \left(\frac{I}{2} \cos^2 \psi \right),$$

$$a_k = \begin{cases} -\frac{4}{k} \operatorname{tg}^{k/2} \psi & \text{при } k = 8n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \frac{4}{k} \operatorname{tg}^{k/2} \psi & \text{при } k = 8n - 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & \text{при всех остальных } k \end{cases}$$
(7)

$$b_k = \begin{cases} -\frac{4}{k} \operatorname{tg}^{k/2} \psi & \text{при } k=8n+2 \\ \frac{4}{k} \operatorname{tg}^{k/2} \psi & \text{при } k=8n-2 \\ 0 & \text{при всех остальных } k \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

где угол ψ определяется из условия

$$\sin 2\psi = v \sin \xi. \quad (8)$$

Для получения полной информации о поляризации излучения достаточно регистрации одной второй гармоники

$$b_2 = -2 \operatorname{tg} \psi. \quad (9)$$

При $b_2 = 0$ поляризационная компонента может быть только линейной; появление сигнала на частоте 2Ω указывает на некоторую ее эллиптичность. Знак b_2 противоположен знаку поляризации. Наличие сигнала на четвертой гармонике

$$a_4 = \operatorname{tg}^2 \psi \quad (10)$$

служит дополнительным удобством при калибровке; $\xi_{\text{opt}} = \pi/2$.

В общем случае анализа произвольным образом поляризованного излучения аналитическое вычисление интегралов при исследовании спектра сигнала (2) затруднительно. Трудности заключаются в нахождении корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней с буквенными коэффициентами, представляющими из себя линейные комбинации нормированных параметров Стокса, значения которых заранее неизвестны. Вместе с тем при конкретных значениях q , u и v соответствующие интегралы берутся легко, и численными методами задача решается просто.

Перед началом численных расчетов нужно выбрать длину фазозадерживающей пластиинки в модуляторе. Из формулы (2) видно, что при $\xi = \pi$ невозможно определение нормированного параметра Стокса v . Оптимальной для его определения является четвертьволновая пластиинка ($\xi = \pi/2$). Компромиссное решение, обеспечивающее однаковую чувствительность поляриметра по всем каналам регистрации, находится между этими двумя значениями. Точная величина ξ_{opt} пока не найдена.

В настоящем кратком сообщении мы ограничились рассмотрением вопросов поляризационного анализа при одном только типе фазового модулятора. Однако метод применим и при других описанных в литературе схемах. Метод разработан для оптического и радиодиапазонов. Экспериментальная его проверка на волне 3 см подтвердила правильность теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Корольков, Н. С. Соболева, Г. Б. Гельфрейх, Изв. ГАО, Пулково, 21, 5, 164, 81 (1960).
2. Г. Б. Гельфрейх, Изв. ГАО, Пулково, 23, 3, 172, 203 (1964).
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Поступила в редакцию
30 апреля 1965 г.

УДК 621.371.18

К ВОПРОСУ О ПРОСАЧИВАНИИ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ КАУСТИКУ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ

Ю. И. Орлов

В недавно опубликованной работе [1] предложен метод расчета поля волны, просачивающейся через каустику. В качестве иллюстрации этого метода рассматривается двумерная задача о «радиовосходе» точечного источника радиоизлучения, расположенного над параболическим ионосферным слоем, для которого

$$N(z) = N_0 \left[1 - \left(\frac{z - z_0}{z_m} \right)^2 \right];$$

$$\epsilon(\omega, z) = 1 - \gamma^2 \left[1 - \left(\frac{z - z_0}{z_m} \right)^2 \right],$$

где

$$\gamma^2 = 4\pi e^2 N_0 / m \omega^2.$$

В разделе 2 статьи [1] содержатся, к сожалению, следующие ошибочные утверждения.

Во-первых, считается, что поле лучей, прошедших через параболический плазменный слой, имеет зону геометрической тени. Однако нетрудно показать, что центральный пучок лучей с $\theta_0 < \theta_{0 \min} = \arccos \gamma$ за счет прямого прохождения «освещает» всю поверхность Земли $z = 0$ (рис. 1). При этом в области $|x| \gg h \operatorname{tg} \theta_0$ поле проникает по так называемым «скользящим» траекториям [4]. Действительно, из уравнения луча можно получить, что координата x точки прихода луча на поверхность Земли определяется выражением

$$x_n = (h + z_0 - z_m) \operatorname{tg} \theta_0 + \frac{z_m}{\gamma} \sin \theta_0 \ln \frac{\cos \theta_0 + \gamma}{\cos \theta_0 - \gamma}.$$

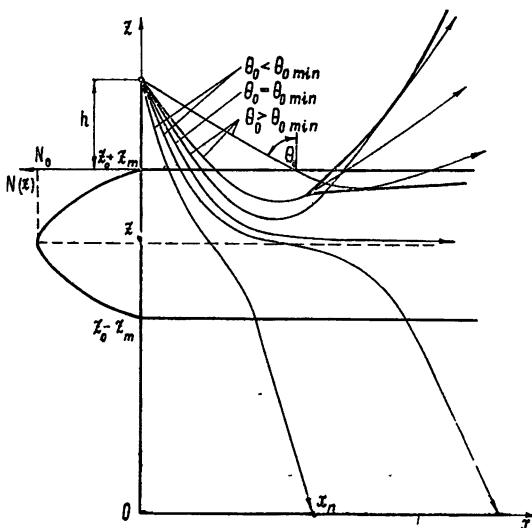


Рис. 1.

Отсюда следует, что при $\theta_0 = 0$ $x_n = 0$, а при $\theta_0 \rightarrow \theta_{0 \min} = \arccos \gamma$ $x_n \rightarrow \infty$, и лучевые траектории заполняют все пространство $z < z_0 - z_m$.

Во-вторых, в работе [1] предполагается, что лучи внутри плазменного слоя касаются каустики в точках наибольшего снижения (рис. 1 [1]), хотя, как правильно отмечает автор [1], «в действительности точка касания и точка наибольшего снижения не совпадают друг с другом». Естественно, что такое предположение допустимо только в случае близости указанных точек. Однако как раз в параболическом слое с $\gamma < 1$ геометрическое место точек «наибольшего снижения» лучей сильно отличается от каустической кривой. В действительности [2] каустика при $\gamma < 1$ имеет вид, показанный при некоторых значениях параметров задачи на рис. 1.

Следует заметить, что пример в разделе 2 статьи [1] для случая $\gamma < 1$ вообще не может служить иллюстрацией рассматриваемого метода. Это связано с тем, что при $\gamma < 1$ эффекты просачивания волн через параболический слой имеют другую природу [3], не связанную с просачиванием волн через каустику и область рефракционной тени, как это предполагалось в [1]. К тому же образующаяся здесь каустика (рис. 1) не является границей рефракционной тени, имеет особые точки [2] и, таким образом, не соответствует условиям применимости предложенного метода. В частности, можно показать [5, 6], что если вблизи источника поле имеет вид $f(\theta_0) e^{ikr/r}$ (r — расстояние от источника), то квадрат интенсивности поля в точке $\{z = 0, x\}$ на поверхности Земли следует вычислять не по формулам (15) [1], а, как обычно, по геометрико-оптической формуле

$$\Phi^2 = f^2(\theta_0) \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{x_n |dx_n/d\theta_0|},$$

где

$$\frac{dx_n}{d\theta_0} = \frac{z_m}{\gamma} \cos \theta_0 \ln \frac{\cos \theta_0 + \gamma}{\cos \theta_0 - \gamma} + \frac{2z_m \delta^2 \sin^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0 - \gamma^2} + \frac{h + z_0 - z_m}{\cos^2 \theta_0}.$$

Естественно, что теряют смысл и все количественные оценки, полученные в анализируемом примере. В связи с этим неверным является и утверждение в [1] о том, что полученные оценки могут «дополнить информацию об ионосфере, получаемую при изучении «радиовосходов» искусственных спутников Земли».

Однако метод, предложенный в [1], безусловно, может быть применен для парabolicкого слоя при $\gamma > 1$, когда существует область, где $\epsilon(\omega) < 0$. В этом случае при некоторых значениях параметров z_m , h образуется неособая каустика, являющаяся границей рефракционной тени [2]. Поле на поверхности $z = 0$ в приближении геометрической оптики равно нулю, и его значение может быть определено по формулам работы [1] как поле волны, просочившейся через каустику и область рефракционной тени.

В заключение автор выражает признательность Ю. А. Кравцову за дискуссию и за внимание к указанным замечаниям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 659 (1965).
2. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
4. E. Woyk, J. Atmos. and Terr. Phys., 16, 10 (1959).
5. J. M. Kelso, Radio ray propagation in the ionosphere, McGraw—Hill, Lnd., 1964.
6. O. E. H. Rydbeck, On the propagation of radio waves, Goteborg, 1944.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
17 марта 1966 г.

УДК 533.9.01

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФОТОНОВ В ПЛАЗМЕ

Г. И. Сурамишвили

В изотропной однородной плазме могут распространяться поперечные высокочастотные колебания (фотоны), подчиняющиеся закону дисперсии $\omega_f = (\Omega_0^2 + f^2 c^2)^{1/2}$, где $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 n/m$ — электронная плазменная частота, f — волновой вектор, c — скорость света. Возбуждение плазменных колебаний пучком фотонов было рассмотрено в работах [1, 2]. Это явление обусловлено распадом фотона на фотон и плазмон. Нас же интересуют волновые процессы внутри самого фотонного газа. Легко видеть, что распад фотона на два фотона в нелинейной части спектра, которой мы и ограничиваемся, запрещен законами сохранения. Поэтому здесь мы рассмотрим процесс следующего порядка теории возмущений — рассеяние одного фотона другим и найдем обусловленные этим процессом две характерные величины фотонного газа: плотность энергии четырехфотонного взаимодействия и частоту столкновения фотонов.

Для наших целей удобно использовать функцию Лагранжа бесстолкновительной плазмы [3]. Основанный на функции Лагранжа формализм вывода матричных элементов уже применялся в ряде работ [4—6]; поэтому, не излагая этого формализма здесь, мы сразу приведем лангранжиан четырехфотонного взаимодействия, записанный в представлении вторичного квантования:

$$L_4 = \sum_{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0} \Psi_{f_1 f_2 f_3 f_4} b_{f_1} b_{f_2} b_{f_3} b_{f_4}, \quad (1)$$

где $b_{-f_i} = b_{f_i}^+$, b_f — соответственно операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором f и частотой ω_f . Матричные элементы этих операторов суть

$$(N_f - 1 | b_f | N_f) = \sqrt{N_f} \exp(-i\omega_f t); \\ (N_f + 1 | b_f^\dagger | N_f) = \sqrt{N_f + 1} \exp(i\omega_f t). \quad (2)$$

Для $\Psi_{f_1 f_2; f_3 f_4}$ имеем выражение

$$\Psi_{f_1 f_2; f_3 f_4} = -\frac{\hbar^2}{4} \frac{\Omega_0^4}{m n} \Phi(f_1 f_2; f_3 f_4). \quad (3)$$

Функция $\Phi(f_1 f_2; f_3 f_4)$ состоит из двенадцати слагаемых и чрезмерно громоздка, поэтому ее мы здесь не выписываем. Заметим только, что все слагаемые имеют одинаковый порядок ($\sim f^2/\omega_f^4$) и для качественных оценок (которыми мы и интересуемся) достаточно взять один из них.

Вывод лагранжиана четырехфотонного взаимодействия (1) основан на разложении полной лагранжиевой функции плазмы по степеням амплитуд коллективных колебаний, поэтому предполагается, что $L_4 \ll L_2$, где L_2 описывает собственные колебания плазмы [6]. Тогда L_4 дает энергию четырехфотонного взаимодействия с обратным знаком. Оценим эту энергию. Естественно считать, что плотность фотонов в фазовом пространстве N_f достаточно велика, так что матричные элементы операторов $b_{f_1}^\dagger b_f$ пропорциональны $\sqrt{N_{f_1}}$. Подставляя далее в (1) вместо N_f его выражение через спектральную интенсивность поля $N_f = |E_f|^2/2\pi\hbar\omega_f$ и принимая, что энергия фотонного газа отлична от нуля и постоянна в узком интервале волновых векторов

$\left[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2} \right]$ (узкий спектр), получим

$$U_4 \sim 10^{-3} \left(\frac{\Omega_0}{\omega_{f_0}} \right)^4 \left(\frac{c\Delta f}{\omega_{f_0}} \right)^2 \left(\frac{E^2}{nm c^2} \right) E^2, \quad (4)$$

где $E^2 = \sum_f |E_f|^2$.

Рассматриваемое здесь четырехфотонное взаимодействие приведет к нелинейной деформации пакета поперечных волн, распространяющихся в плазме. Возникает вопрос об определении характерного времени деформации. Чтобы найти это время, мы будем исходить из кинетического уравнения для фотонов. С помощью лагранжиана (1) это уравнение составляется по обычной схеме и имеет вид

$$\frac{\partial N_f}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{f_1 f_2} |\Psi_{f f_1; f_2 f_3 + f_4 - f_2}|^2 [(N_f + 1)(N_{f_1} + 1) \times \\ \times N_{f_2} N_{f_3 + f_4 - f_2} - N_f N_{f_1} (N_{f_2} + 1)(N_{f_3 + f_4 - f_2} + 1)] \delta(\omega_f + \omega_{f_1} - \omega_{f_2} - \omega_{f_3 + f_4 - f_2}). \quad (5)$$

Отсюда, используя (3) и подставляя вместо N_f его выражение через спектральную интенсивность поля, по порядку величины получим

$$\frac{1}{N_f} \frac{\partial N_f}{\partial t} = \tau_4^{-1} \sim \omega_{f_0} \left(\frac{\Omega_0}{\omega_{f_0}} \right)^8 \left(\frac{c\Delta f}{\omega_{f_0}} \right)^4 \left(\frac{E^2}{nm c^2} \right)^2. \quad (6)$$

Величина τ_4 есть характерное время нелинейного деформирования (расплывания) пакета поперечных волн, связанное со спектральным перераспределением энергии.

Следует заметить, что распадные процессы превалируют над четырехфотонными процессами. Последние, однако, являются единственными возможными в области частот $\Omega_0 < \omega_f < 2\Omega_0$, где распад фотона на фотон и плазмон законом сохранения частоты запрещен.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ДАН СССР, 158, 1306 (1964).
- Л. М. Коврижных, ЖЭТФ, 49, 1332 (1965).
- F. E. Low, Proc. Roy. Soc., A248, 282 (1958).
- А. А. Веденов, Вопросы теории плазмы, Госатомиздат, М., вып. 3, 1963.
- Г. И. Сурэмлишвили, ДАН СССР, 153, 317 (1963).
- Г. И. Сурэмлишвили, ЖЭТФ, 48, 1732 (1965).

Г. Т. Казаков, Н. М. Советов

ОСОБЕННОСТИ РЕКУПЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ В ЛБВ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ

Подробное исследование процессов взаимодействия в ЛБВ большой мощности [2, 3] показало, что КПД сравнимых ламп с релятивистскими потоками мало отличается от КПД низковольтных приборов, в обоих случаях не превышая $30 \div 40\%$. Из-за невысоких значений КПД в мощных лампах значительные доли энергии бесполезно растратываются на коллекторе в виде тепла. Эффективным способом уменьшения этих затрат энергии источника является торможение отработанного электронного потока у коллектора (рекуперация) [1].

В данной работе приведены результаты расчета, которые иллюстрируют теоретически достижимые возможности уменьшения с помощью рекуперации мощности, потребляемой лампой от источника питания, и соответственного выигрыша в промышленном КПД. Расчеты проводились на основе решения системы нелинейных уравнений вида [3], эффективность торможения вычислялась по методике, описанной в [1, 4]. Зависимости КПД прибора от средней скорости электронов u_0/c при трех значениях параметра C представлены для режима максимального усиления на рис. 1. Сплошные кривые на этой фигуре соответствуют лампе без торможения, штриховые — лампе с одноступенчатым торможением и штрих-пунктирные — с двухступенчатым торможением. Как видно, рекуперация существенно увеличивает промышленный КПД прибора. Однако эффективность рекуперации понижается с ростом C . Особенно хорошо это заметно на рис. 2, где приведена зависимость КПД от параметра C для случаев без торможения (кривая 1), с одноступенчатым (2) и двухступенчатым (3) торможением (при $u_0/c = 0,6$). Видно, что при $C = 0,2$ одноступенчатое торможение уже не дает выигрыша в КПД. Это происходит потому, что при больших C в электронном потоке имеется значительное число электронов, скорость которых близка к нулю. Пониженное напряжение коллектора по-прежнему будет ускоряющим для этих электронов и на это ускорение будет тратиться дополнительная энергия. С другой стороны, слишком сильно снижать напряжение коллектора, чтобы согласовать его со скоростью медленных электронов, тоже нельзя, так как это поведет к росту обратного потока электронов и, следовательно, к снижению КПД. Поэтому при больших C выигрыш в КПД возможен лишь при многоступенчатом торможении.

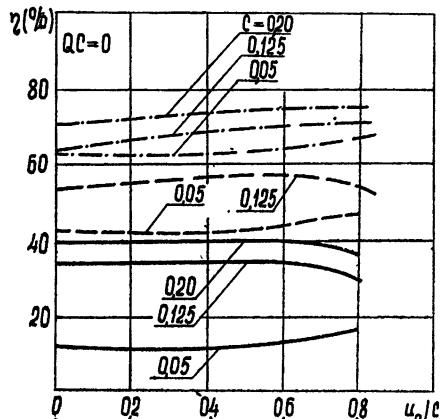


Рис. 1.

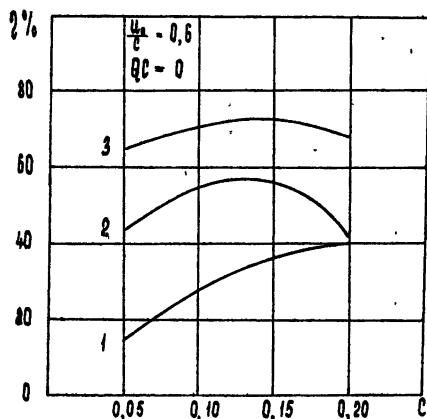


Рис. 2.

Из приведенных рассуждений следует, что относительно высокие значения КПД проще получить в высоковольтных лампах с малым C и рекуперацией, нежели стремиться увеличивать КПД лишь за счет увеличения параметра C .

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Р. Геккер, Труды НИИ МРТП, № 11, 31 (1957).
2. Н. М. Советов, Г. Т. Казаков, Радиотехника и электроника, 10, 302 (1965).
3. Н. М. Советов, А. Н. Шестоперов, Г. Т. Казаков, Радиотехника и электроника (в печати).
4. В. В. Муравьев, В. И. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 7, 517 (1964).

УДК 62—501.385

О МАКСИМАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В. И. Златкин, Д. И. Ликерман

Рассматривается задача отыскания кусочно-непрерывного и ограниченного ($|u| < 1$) управляющего воздействия $u(t)$, которое обеспечивает перевод системы управления, описываемой дифференциальным уравнением*

$$T_1 \ddot{y} + \dot{y} = T u + u \quad (T_1, T > 0), \quad (1.1)$$

из заданного начального состояния $y(-\infty) = y_0$, $\dot{y}(-\infty) = \dot{y}_0$ в заданное конечное состояние (y_1, \dot{y}_1) за минимальное время T_1 . В качестве следующей задачи дополнительно требуется еще и стабилизировать систему управления в конечном состоянии при $t > T_1$. Решение этой задачи, имеющей самостоятельное значение ввиду ее особой важности для систем автоматического управления производственными процессами, будет непосредственно следовать из решения первой задачи. В заключение при условиях предыдущих задач синтезируется оптимальная по быстродействию система управления.

Введем новые переменные x_1 и x_2 с помощью выражений

$$\dot{y} = -\frac{1}{T_1} x_2 + \frac{T}{T_1} u, \quad y = x_1 + x_2 \quad (1.2)$$

и получим систему уравнений первого порядка, эквивалентную исходному уравнению (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_1} x_2 + \frac{T - T_1}{T_1} u. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пересчет начальных данных к новым переменным осуществляется обратным преобразованием

$$x_1 = y + T_1 \dot{y} - Tu;$$

$$x_2 = -T_1 \dot{y} + Tu.$$

Фазовые координаты цели управления в плоскости (x_1, x_2) зависят от параметра $u_1 = u(T_1)$:

$$\begin{aligned} x_{11}(u_1) &= y_1 + T_1 \dot{y}_1 - Tu_1; \\ x_{21}(u_1) &= -T_1 \dot{y}_1 + Tu_1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Учитывая область изменения функций $x_{11}(u_1)$ и $x_{21}(u_1)$, определяемую условием $u \in [1, -1]$, из (1.4) получаем

$$\begin{aligned} x_{21} &= y_1 - x_{11}; \\ x_{11} &\in [y_1 + T_1 \dot{y}_1 - |T|, y_1 + T_1 \dot{y}_1 + |T|]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Итак, точке (y_1, \dot{y}_1) соответствует прямолинейный отрезок (1.5) в плоскости (x_1, x_2) , т. е. задача для объекта, описываемого системой (1.3), сведена к следующей: за минимальное время попасть из точки (x_{10}, x_{20}) на отрезок (1.5) при $|u(t)| < 1$.

Применение принципа максимума [2] позволяет полностью решить эту задачу. Не ограничивая общности, приведем решение для случая, когда целью управления является попадание в точку $(0, 0)$ фазовой плоскости (y, \dot{y}) , которой, согласно (1.5), в плоскости (x_1, x_2) соответствует отрезок MN (рис. 1). $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 \in [-T, T]$. Оптимальное управление состоит из одного или двух интервалов знакопостоянства управляющей функции, на которых $u = \pm 1$; в момент t_1 попадания на отрезок (1.5) величина управления должна быть установлена согласно (1.2):

$$u_1 = \frac{x_{21}}{T} = -\frac{x_{11}}{T} \leq 1. \quad (1.6)$$

* При управлениях, имеющих разрывы 1 рода, запись уравнения (1.1) является формальной. Однако мы будем пользоваться ею, имея в виду, что все преобразования легко узаконить с помощью теории обобщенных функций (см., например, [1]).

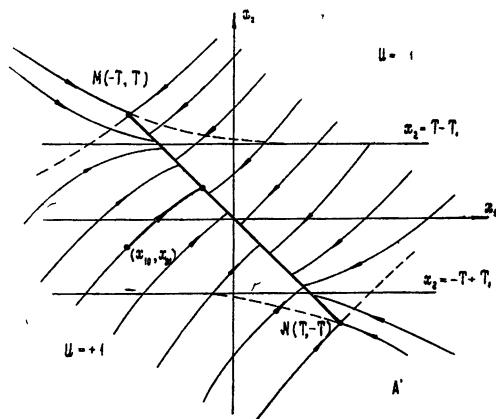


Рис. 1.

Фазовые траектории, представляющие собой экспоненты, показаны на рис. 1 для случая $T > T_1$ и на рис. 2 для $T < T_1$. Из рисунков видно, что в обоих случаях существует область, включающая в себя отрезок MN (в случае $T > T_1$ это вся плоскость (x_1, x_2) , кроме областей A и A' , а в случае $T < T_1$ это заштрихованная область), такая, что, если исходная точка (x_{10}, x_{20}) принадлежит этой области, то оптимальное управление имеет один интервал знакопостоянства $|u|=1$ с установлением в конце этого интервала (в момент t_1) управляющего воздействия в соответствии с (1.6). При этом переходный процесс протекает без перерегулирования. Если в случае $T < T_1$ исходная точка не принадлежит заштрихованной на рис. 2 области, то оптимальным будет переход из этой точки на концы отрезка MN ; управление в этом случае будет иметь два интервала знакопостоянства $|u|=1$ с последующим установлением согласно (1.6).

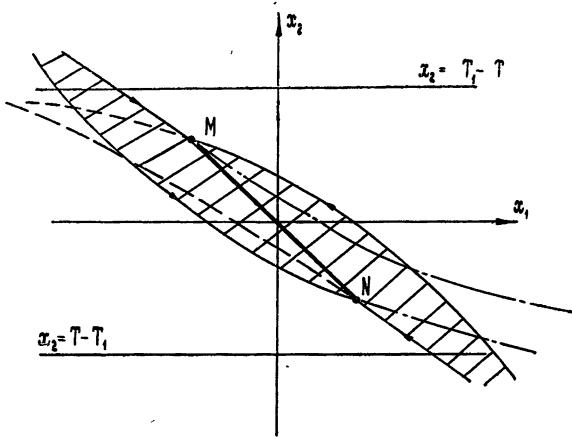


Рис. 2.

Можно показать, что для стабилизации системы (1.1) в точке $(0, 0)$ достаточно подать на ее вход управление

$$u_{\text{ст}} = -\frac{x_{11}}{T} \exp[-(t - t_1)/T] \quad (t \geq t_1). \quad (1.7)$$

Таким образом, оптимальное управление, являющееся решением второй задачи, состоит из управления, полученного при решении первой задачи и действующего при $0 < t \leq t_1$, и управления $u_{\text{ст}}$ (1.7), действующего при $t \geq t_1$.

В качестве примера приведем возможные варианты синтеза оптимального управления для случая $T > T_1$ в условиях второй задачи. Они представлены в виде структурных схем на рис. 3, где 1 — идеальный релейный элемент, подающий на вход управляемого объекта 2 сигнал ± 1 , 3 и 4 — суммирующие элементы; 5 и 6 — функциональные элементы, 7 — множительные устройства; 8 — дифференцирующая цепь,

9 — RC -депь. Схема За обеспечивает строго оптимальное управление объектом. Схема же Зб представляет собой реализацию квазиоптимальной системы, которая после выхода точки на прямую (1.5) работает в скользящем режиме. При этом изображающая точка движется вдоль прямой (1.5) к началу координат, а выходная координата $y(t)$ совершает около установившегося состояния колебания бесконечно малой амплитуды и с бесконечно большой частотой.

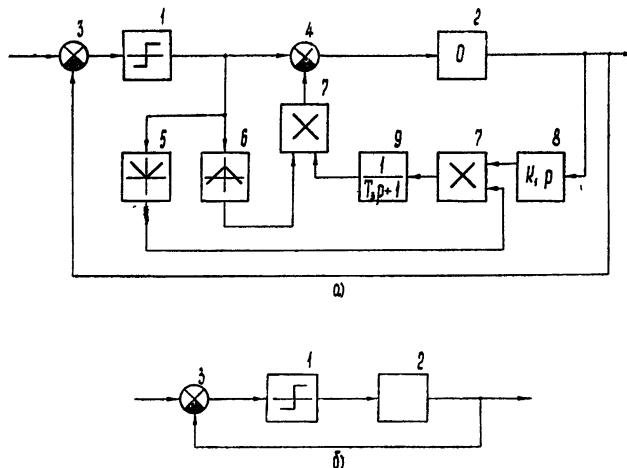


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Феллингер, Г. Шнайдер, Линейные системы передачи, изд. МИР, М., 1964.
2. Л. С. Понtryагин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
24 сентября 1965 г.