СОДЕРЖАНИЕ

Виленский И. М. О нелинейных искажениях мощных радиоволн при их распространении в ионосфере (экспериментальное исследование). III . . . 649
Орлов Ю. И. О некоторых особенностях лучевой теории распространения цилиндрических и сферических волн в слабонеоднородной плазме II . . . 657
Мирошниченко В. И. Кинетическая теория отражения электромагнитной волны от движущейся плазмы 666
Литвак А. Г. О самофокусировке электромагнитных волн в изотропной плазме 675
Полищук В. К. Использование поверхностных волн для измерения диэлектрической проницаемости неоднородных сред 681
Вирко В. Ф. и Левитский С. М. Нелинейные явления в плазменном волноводе . 691
Ханин Я. И. К теории двухуровневого квантового генератора на твердом теле 697
Морозов В. Н., Ораевский А. Н. О синхронизации пичкового режима квантовых генераторов 710
Беспалов В. И., Богатырев Ю. К. К вопросу об удвоении частоты света, излучаемого ОКГ с переключением добротности резонатора 715
Клибанова И. М. Влияние флуктуаций параметров на работу двух связанных генераторов 720
Горбачев А. А., Данилов В. И. О влиянии амплитудного ограничения в приемниках шумовых сигналов на точность измерения шума при импульсных помехах 730
Воллернер Н. Ф. Выбор оптимальной длительности реализации при аппаратурном исследовании случайных процессов 737
Маркелов В. А. О выбросах и относительном времени пребывания периодически нестационарного случайного процесса 741
Тай М. Л. О марковских процессах с разрывными коэффициентами сноса и диффузии 747
Горшков А. С., Марченко В. Ф. Наблюдение нелинейных граничных эффектов в диапазоне радиочастот 757
Сухоруков А. П. О генерации второй гармоники пучками конечной апертуры . 765
Ломакин Б. А., Филимонов Г. Ф. Влияние нелинейных и релятивистских эффектов на излучение периодической последовательности электронных сгустков 778
Афанасов С. Г., Шмелев А. А. О возможности получения отрицательного сопротивления в триодах с закатодным управляющим электродом . . . 786
Баталова З. С. О приближенном исследовании кусочно-гладких точечных преобразований 794
Леонов Н. Н. О простейших экстремальных системах автоколебательного типа с инерционным объектом 799
Брусин В. А. Об абсолютной устойчивости одного класса систем регулирования с распределенным звеном 810
Арефьев Б. А. К задаче оптимизации процессов в объектах с замкнутыми циклами 817

Краткие сообщения и письма в редакцию

Крупнов А. Ф., Скворцов В. А. Увеличение длины пучка в молекулярных генераторах с разнесенными резонаторами 824
Крупнов А. Ф., Скворцов В. А. К вопросу о переориентации молекул в пучковом мазере на формальдегиде 827
Панченко Б. А. Проводимость излучения продольных щелей на цилиндре . . 829
Ванке В. А., Магалинский В. Б. О роли объемного заряда при усилении внутренних шумовых орбит отдельных электронов в высокочастотном квадрупольном поле 831
Берштейн И. Л. О возможном методе измерения инверсной температуры среды 835
Шаповалов А. С., Козлов И. Г. К вопросу о фокусирующих свойствах поля цилиндрического конденсатора 836

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. VI, № 1, 1966 841

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.371.3

О НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЯХ МОЩНЫХ РАДИОВОЛН ПРИ ИХ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ИОНОСФЕРЕ (ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ). III

И. М. Виленский

Приводятся дальнейшие результаты экспериментального исследования нелинейных искажений мощных радиоволн в ионосфере при наклонном падении Кроме искажений модуляции, исследовалась также зависимость напряженности поля в месте приема от излучаемой мощности. Анализ экспериментальных данных позволил установить заметное повышение электронной температуры в ионосфере под действием радиоволн. Обсуждаются некоторые вопросы методики экспериментального изучения нелинейных явлений в ионосфере.

В [1, 2] приведены результаты экспериментального исследования нелинейных искажений мощных радиоволн при их распространении в ионосфере. В частности, в [1] приведены результаты, полученные на трассах сравнительно большой протяженности (400 ÷ 2000 *км*) с помощью передатчика значительной мощности. В [2] приведены результаты, полученные на более коротких трассах с помощью передатчика средней мощности. Дальнейшие исследования производились с помощью более мощных, чем в [2], передатчиков. Изучалась не только демодуляция, но и зависимость напряженности поля в месте приема от излучаемой мощности.

В течение 1960—63 гг. было осуществлено 5 циклов исследования нелинейных искажений с использованием передатчиков средневолнового диапазона значительной мощности. В двух циклах использовались наиболее мощные передатчики; однако результаты измерений оказались неудачными: демодуляция слабо зависела от мощности, незакономерно (с точки зрения теории нелинейных эффектов) изменялась с изменением частоты модуляции и т. п., а напряженность поля весьма хаотично менялась как во время одного сеанса, так и от одного сеанса к другому. В этих условиях для выяснения зависимости напряженности поля от мощности понадобилось бы значительное количество специальных передач, что практически оказалось неосуществимым. По-видимому, в двух рассматриваемых циклах измерений имели место более сильные, чем в других случаях (см. ниже), интерференционные искажения из-за значительной пересеченности места расположения антенн передатчиков. Заметим, что аналогичное явление наблюдалось и раньше [2].

Три цикла измерений были выполнены на том же передатчике, что и в [1]. Передатчик и пункты приема были расположены в равнинной местности. Для измерений были выбраны трассы, расположенные примерно вдоль меридиана. Для уменьшения интерференционных искажений протяженность трассы была выбрана более короткой, чем в [1]. Результаты этих измерений приводятся ниже.

Первый из рассматриваемых циклов измерений происходил в октяб-

ре—ноябре 1960 г. (9 сеансов передач в ночное время по 28—30 *мин* каждый). Программа сеанса была следующей: при мощности передатчика $P = 100\%$ передавались поочередно 4 значения модулирующей частоты — 60, 80, 160 и 600 *гц*. Затем при $P = 50\%$ передавались частоты 80, 160 и 600 *гц*. Глубина модуляции на передатчике поддерживалась постоянной (80%). Прием передач производился непосредственно вблизи передатчика (для дополнительного контроля глубины модуляции у излучаемых волн) и на расстоянии 300 *км* от передатчика. Измерения глубины модуляции производились по методике, описанной в [1].

Полученные при измерениях значения демодуляции $\Delta M/M$ ($\Delta M = M - M'$, M — начальная глубина модуляции, M' — глубина модуляции после прохождения волнами ионосферы) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения демодуляции $\Delta M/M$ (%) по измерениям 1960 г. (1 цикл; $L = 300$ *км*, $\lambda \simeq 1300$ *м*)

	$F = 60$ *гц*	$F = 80$ *гц*		$F = 160$ *гц*		$F = 600$ *гц*	
	$P = 100\%$	$P = 100\%$	$P = 50\%$	$P = 100\%$	$P = 50\%$	$P = 100\%$	$P = 50\%$
$(\Delta M/M)_{ср}$	27	21,5	14	15	10	11	5
σ	0,98	1,42	0,83	1,35	1,35	0,75	2,09

Здесь и ниже через σ обозначена дисперсия измеряемой величины, вычисленная по известной формуле:

$$\sigma^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2\right]/(n-1), \qquad (1)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{ср}$, n — число наблюдений. За единичное значение x_i принималось среднее значение измеряемой величины, полученное во время одного сеанса. Поэтому σ в нашем случае характеризует лишь степень изменчивости ионосферы при переходе от одной ночи к другой.

Второй цикл измерений, состоящий из 13 сеансов, происходил в декабре 1962 г. Изучалась зависимость демодуляции и напряженности поля от мощности.

Программа каждого сеанса была следующей: в течение 30 *мин* ночью передавалась несущая, модулированная по амплитуде звуковой частотой $F = 125$ *гц* с постоянной глубиной модуляции $M = 60\%$. Мощность во время сеанса менялась дискретно ($P = 100$, 80, 60, 40% — по 7 *мин* на каждое значение мощности). В пунктах приема, удаленных от передатчика на расстояния 160 и 600 *км*, измерялась глубина модуляции и напряженность поля (последняя измерялась только в 1 пункте). Результаты измерений приведены в таблицах 2 и 3.

Третий цикл измерений, состоящий из 20 сеансов, происходил летом 1963 г. Длительность каждого сеанса — 30 *мин*. Первые 15 сеансов происходили по такой же программе, как и во втором цикле, а остальные 5 сеансов — по следующей программе: при каждом из четырех значений мощности передавалось 3 звуковых частоты — 80, 160 и 400 *гц* с глубиной модуляции 60% (по 2 *мин* на каждую частоту). Пункты приема были удалены от передатчика на расстояния 160, 300 и 600 *км*. В этих

пунктах производились измерения демодуляции и напряженности поля. Результаты приведены в таблицах 4—6.

Таблица 2

Значения демодуляции $\Delta M/M$ (%) по измерениям 1962 г. (2 цикл; $F=125$ *гц*)

P(%)	L = 160 *км*				L = 600 *км*			
	100	80	60	40	100	80	60	40
$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)_{ср}$	15,5	12	7	4	27	28	28	24
σ	4,82	4,72	3,36	2,62	8,80	8,71	8,85	8,15

Таблица 3

Зависимость квадрата напряженности поля $(E^2)_{ср}$ от мощности P по измерениям 1962 г. (2 цикл; $L=160$ *км*)

P (%)	100	80	60	40
$(E^2)_{ср}$	100	95	76	54
σ	48	41	27	14

Таблица 4

Значения демодуляции $\Delta M/M$ (%) по измерениям 1963 г. (3 цикл; $F=125$ *гц*)

P(%)	L = 160 *км*				L = 300 *км*				L=600 *км*			
	100	80	60	40	100	80	60	40	100	80	60	40
$(\Delta M/M)_{ср}$	14,4	9,0	6,1	2,7	11,3	8,0	4,0	1,5	27,9	28,3	29,4	24,9
σ	2,5	2,1	0,95	0,91	1,7	1,4	0,84	0,46	1,4	1,5	1,3	1,6

Таблица 5

Значения демодуляции $\Delta M/M$ (%) по измерениям 1963 г. (3 цикл) при разных частотах модуляции

P(%) / F(*гц*)	L = 160 *км*				L=300 *км*			
	100	80	60	40	100	80	60	40
80	16	12	8	5	14	12	8	4,5
160	11	6	4,5	2,5	10	7	4	2
400	3,5	2	1,5	0,8	3	2	1	0,6

Таблица 6

Зависимость квадрата напряженности поля $(E^2)_{ср}$ от мощности по измерениям 1963 г. (3 цикл)

$P(\%)$	$L=160$ км				$L=300$ км				$L=600$ км			
	100	80	60	40	100	80	60	40	100	80	60	40
$(E^2)_{ср}$	100	81	46	25	100	86	72	36	100	61	79	32
σ	15	6,0	4,5	1,5	5,5	9,8	6,6	5,6	30	8,9	8,1	10

Значения E^2 в таблицах 3 и 6 даны в процентах, причем за 100% принято среднее значение $(E^2)_{ср}$ в каждом из пунктов при $P = 100\%$.

1. ИСКАЖЕНИЯ МОДУЛЯЦИИ

Прежде всего следует отметить сравнительно небольшую величину дисперсии измеренных значений демодуляции, особенно в первом и третьем циклах. Как уже указывалось, в нашем случае дисперсия характеризует лишь степень изменчивости ионосферы при переходе от одной ночи к другой. Что касается поведения модуляции во время одного сеанса, то здесь имели место совсем небольшие (как правило, в пределах 1%) изменения ее. В отличие от [1] во всех случаях наблюдалось уменьшение модуляции.

Обращает на себя внимание значительная, практически не зависящая от мощности демодуляция в пункте $L = 600$ км (таблицы 2 и 4). По-видимому, в этом пункте мы имели дело, главным образом, с интерференционными искажениями модуляции, которые, естественно, усиливаются с увеличением расстояния и не зависят от мощности. Однако элементарные оценки показывают, что объяснить столь значительную демодуляцию интерференцией двух или нескольких лучей, пришедших в приемник одним или несколькими (но небольшим числом) скачками, нельзя. Возможно, что большая демодуляция при $L = 600$ км связана с более сложным (например, с волноводным) механизмом распространения радиоволн рассматриваемого диапазона. Это обстоятельство, по нашему мнению, заслуживает дальнейшего внимательного изучения.

В пунктах, удаленных от передатчика на расстояния 160 и 300 км, демодуляция, в соответствии с теорией нелинейных эффектов [3, 4], уменьшается с ростом частоты модуляции (см. таблицы 1 и 3), с увеличением расстояния (таблицы 4 и 5)* и с уменьшением мощности (см. рис. 1—3).

Остановимся более подробно на зависимости демодуляции от величины модулирующей частоты.

Как известно, используя формулу [2]

$$(\delta\nu_{эфф})^2 = 4\pi^2 \frac{(\Delta M/M)_1 F_1^2 - (\Delta M/M)_2 F_2^2}{(\Delta M/M)_2 - (\Delta M/M)_1}, \qquad (2)$$

можно по экспериментальным значениям демодуляции $(\Delta M/M)_1$ и $(\Delta M/M)_2$, соответствующим частотам модуляции F_1, F_2, определить ве-

* Тот факт, что во втором цикле (таблица 2) демодуляция при $L = 160$ км несколько меньше, чем в первом цикле (таблица 1) при $L = 300$ км, не нарушает этого вывода, так как зависимость $\Delta M/M$ от расстояния может быть выяснена только при одновременных измерениях в нескольких пунктах.

личину $\delta\nu_{эфф}$ (здесь δ — средняя доля энергии, теряемой электроном при соударении с тяжелыми частицами ионосферы, $\nu_{эфф}$ — эффективное число соударений).

Формула (2) справедлива, строго говоря, лишь при условии $E \ll E_p$, где E — поле, созданное в ионосфере передатчиком, $E_p = \sqrt{\frac{3mkT\delta}{e^2}(\omega^2 + \nu_0^2)}$ — характерное плазменное поле [3]. В нашем случае, как показывают оценки, $E \gtrsim E_p$. Однако, поскольку пригодное для численных оценок выражение зависимости глубины модуляции от частоты модуляции при произвольных E не получено, мы воспользуемся для расчетов формулой (2).

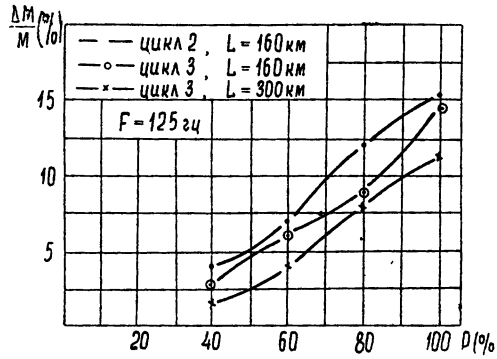


Рис. 1.

Полученные таким образом результаты для третьего цикла приведены в таблице 7.

Таблица 7

Значения величины $\delta\nu_{эфф}$ для 3 цикла

$P(\%)$	$L=160$ км		$L=300$ км	
	$F_1=80$ гц, $F_2=160$ гц	$F_1=160$ гц, $F_2=400$ гц	$F_1=80$ гц, $F_2=160$ гц	$F_1=160$ гц, $F_2=400$ гц
100	1200	1200	1280	1120
80	720	1300	900	1050
60	850	1100	710	870
40	710	1200	600	1120

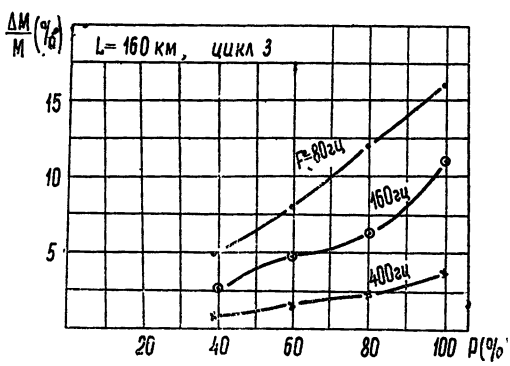


Рис. 2.

Из таблицы видно, что полученные значения $\delta\nu_{эфф}$ изменяются в сравнительно небольших пределах ($6\cdot10^2 \div 1{,}3\cdot10^3$ *сек*$^{-1}$) и величина их хорошо согласуется с полученными в других измерениях результатами (см., например, [2, 3]).

Наибольшие различия в значениях $\delta\nu_{эфф}$ для разных частот имеют место при $P < 100\%$. Например, при $P = 40\%$ величина $\delta\nu_{эфф}$ изменяется примерно в 2 раза при переходе от частот $80 \div 160$ *гц* к частотам $160 \div 400$ *гц* (см. последнюю строку таблицы 7), тогда как при $P = 100\%$ (первая строка той же таблицы) эти изменения совсем малы.

По-видимому, основная причина заметных изменений величины $\delta\nu_{эфф}$ при $P < 100\%$ — неточность в измерениях M/M при $F = 400$ *гц*. Действительно, значения $\Delta M/M$ при этой частоте достигают долей процента (см. таблицу 5), точность модулометров — того же порядка. Оче-

видно, что значения $\delta\nu_{эфф}$, относящиеся к частотам $80 \div 60$ *гц*, являются более надежными.

То же самое можно утверждать в отношении всех значений $\delta\nu_{эфф}$ при $P = 100\%$.

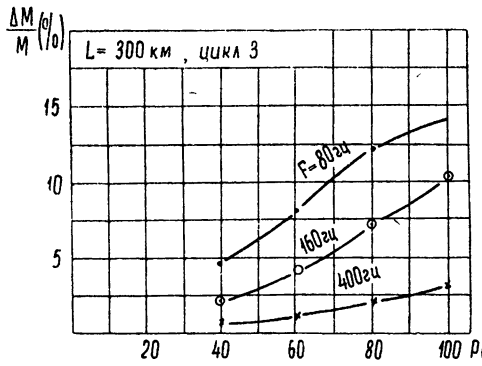


Рис. 3.

Сравнительно небольшой разброс значений $\delta\nu_{эфф}$ при $P = 100\%$ свидетельствует о том, что для анализа зависимости $\Delta M/M$ от частоты модуляции можно и в нашем случае с достаточной точностью пользоваться формулой (2) (см. по этому поводу также [2]).

Интересно выглядит для частот $80 \div 160$ *гц* зависимость $\delta\nu_{эфф}$ от мощности передатчика. Из таблицы 7 (см. также рис. 4) видно, что в пункте $L = 300$ *км* величина $\delta\nu_{эфф}$ плавно изменяется с изменением мощности, уменьшаясь примерно в 2 раза при уменьшении P от 100% до 40%. Оценки изменений температуры ионосферных электронов, произведенные по формуле [3]

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \frac{\omega^2 + \nu^2_{эфф,\,0}}{2\nu^2_{эфф,\,0}}\left(\sqrt{1 + \frac{4\nu^2_{эфф,\,0}}{\omega^2 + \nu^2_{эфф,\,0}}\left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2} - 1\right),$$

дали значение $T_e/T \sim 2$. Конечно, отсюда нельзя еще сделать вывод о линейной зависимости между величиной T_e и величиной $\delta\nu_{эфф}$; однако сам факт заметного «нагревания» ионосферных электронов мощными радиоволнами, очевидно, можно считать экспериментально установленным (см. также [2]).

В пункте $L = 160$ *км* значения $\delta\nu_{эфф}$ для частот $80 \div 160$ *гц* также изменяются с изменением мощности, хотя и не так плавно. В целом, однако, можно считать, что и здесь существует значительное (примерно в 1,7 раза) уменьшение величины $\delta\nu_{эфф}$ при изменении P от 100% до 40%.

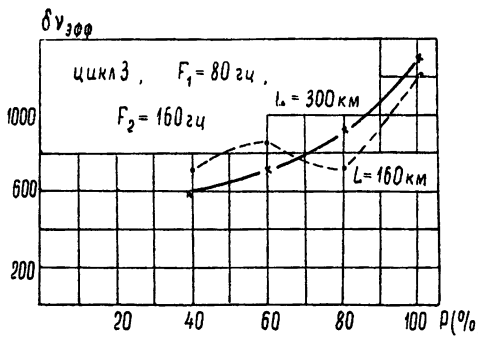


Рис. 4.

Вопрос о зависимости $\nu_{эфф}$ от температуры в ионосфере обсуждался в ряде работ (см., например, [5]); однако в настоящее время он еще остается недостаточно ясным. Можно утверждать, что дальнейшее осуществление измерений величины $\Delta M/M$ при разных F и при различных значениях мощности (но при большем наборе значений мощности и частоты модуляции) поможет экспериментально выяснить зависимость $\nu_{эфф}$ от температуры.

Перейдем теперь к рассмотрению зависимости демодуляции от мощности передатчика. Характер этой зависимости виден из рис. 1—3,

построенных по таблицам 2, 4, 5*. Из рисунков видно, что зависимость $\Delta M/M$ от P явно нелинейна, причем от $P = 40\%$ до $P = 100\%$ демодуляция возрастает быстрее, чем в среднем от 0 до 40% (ясно, что при $P = 0$ величина $\Delta M/M = 0$).

Приближенная оценка величины $\Delta M/M$ по соответствующим формулам [4] приводит к значениям $\Delta M/M \sim 15 \div 20\%$ при $P = 100\%$; что же касается зависимости $\Delta M/M$ от P, то построение теоретической кривой, которую можно было бы сопоставить с экспериментальной, затруднено главным образом из-за отсутствия достаточно подробных сведений о параметрах нижней ионосферы ночью.

2. ЗАВИСИМОСТЬ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ ОТ МОЩНОСТИ ПЕРЕДАТЧИКА

Из рис. 5 видно, что зависимость квадрата напряженности поля от мощности передатчика, как и зависимость демодуляции, нелинейна**. Можно утверждать, что E^2 при измерениях третьего цикла возрастало несколько быстрее, чем это было бы в случае линейной зависимости, а в случае второго цикла — медленнее. Следует, однако, отметить, что данные второго цикла по измерениям напряженности поля не являются достаточно надежными, так как дисперсия в этом случае была довольно большой (до $\sim 50\%$; см. таблицу 3), а число сеансов невелико.

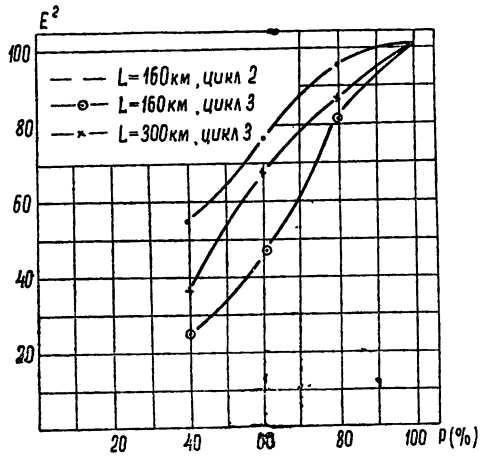


Рис. 5.

Более быстрый рост E^2 при изменении мощности по сравнению с линейной зависимостью качественно согласуется с теорией [3, 4], так как в нашем случае выполнено условие $\omega^2 < \nu^2\tau$ (здесь $\tau = \sqrt{T_e/T}$).

К сожалению, по не зависящим от нас причинам отсутствуют данные о E^2 при $P < 40\%$, в силу чего трудно подробнее сопоставить экспериментальные результаты с теоретическими. Вместе с тем знание зависимости $E^2(P)$ может, вообще говоря, оказаться важным не только для теории, но и для решения некоторых практических вопросов. К числу таких вопросов относится, например, вопрос о выборе оптимальной мощности передатчика. Поэтому дальнейшее тщательное изучение зависимости $E^2(P)$ нам представляется весьма желательным. Следует иметь в виду, что при таких измерениях необходимо достаточно большое число специальных передач.

Хотелось бы в заключение сделать некоторые общие выводы о проведенных измерениях нелинейных искажений радиоволн в ионосфере при наклонном падении.

1) Можно считать экспериментально установленным, что нелинейные искажения модуляции могут быть весьма заметными, достигая значений $\sim 20 \div 30\%$. Экспериментальное изучение этих искажений позво-

* График зависимости $\Delta M/M$ от P для первого цикла не приведен, поскольку измерения в этом цикле производились лишь при двух значениях мощности.

** На рис 5 отсутствует график $E^2(P)$ для $L = 600$ *км* по причинам, указанным выше.

лило оценить некоторые параметры нижней ионосферы ($\delta\nu_{эфф}$), позволило установить наличие заметного изменения электронной температуры под действием распространяющихся радиоволн. Показано, что дальнейшее экспериментальное изучение искажений модуляции может дать более подробные сведения о зависимости $\nu_{эфф}$ от температуры.

Следует заметить, что искажения модуляции, обусловленные нелинейностью ионосферы, вряд ли имеют непосредственное практическое значение, так как в наиболее интересном для практики интервале звуковых частот и расстояний, видимо, значительно большее значение имеют интерференционные искажения. Заметим, что тщательное изучение интерференционных искажений модуляции в диапазоне средних волн было бы также весьма полезным для выяснения механизма распространения этих волн.

2) Экспериментально установлена нелинейная зависимость между квадратом напряженности поля радиоволн, отраженных от ионосферы, и мощностью передатчика, излучающего эти волны. Однако проведенные эксперименты следует рассматривать лишь как начало подобных измерений, так как мы имели ограниченные возможности в числе сеансов и в наборе значений мощности.

3) При экспериментальном изучении нелинейных искажений радиоволн в ионосфере следует обращать особое внимание на выбор трасс. Так, например, желательно, чтобы трассы были не очень протяженными (не длиннее 500 ÷ 600 *км*) и не были сильно пересеченными (в особенности места расположения передатчиков).

Особое внимание следует обращать на качество отстройки от поверхностной волны.

Автор выражает благодарность С. И. Волосникову, В. А. Кочергину, Б. И. Подлипалину, Л. Н. Ручкану, Л. И. Семенову, В. П. Хорошилову, принимавшим участие в подготовке и проведении измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виленский, В. П. Чернышев, Д. И. Шейнман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 367 (1960).
2. И. М. Виленский, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **5**, 221 (1962)
3. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, **70**, 201, 393 (1960).
4. А. В. Гуревич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 4, 21 (1958).
5. R. W. Crompton, L. G. H. Huxley, D. J. Sutton, Proc Roy. Soc., **A218**, 507 (1953).

Поступила в редакцию
28 октября 1965 г.

ON NONLINEAR DISTORTIONS OF POWER RADIO WAVES WHEN PROPAGATING IN IONOSPHERE (EXPERIMENTAL INVESTIGATION). III

I. M. Vilensky

The further results are given of the experimental investigation of nonlinear distortions of power radio waves in the ionosphere at an oblique incidence. In addition to modulation distortions, there investigated also the dependence of the field intensity at the receiving point upon the radiated power. The analysis of experimental data permits to detect a noticable increasing of the electron temperature in the ionosphere under the influence of radio waves. Some questions are discussed concerning the experimental procedure in the investigation of the nonlinear phenomena in the ionosphere.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.371.18

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЛУЧЕВОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ. II

Ю. И. Орлов

Методами лучевой оптики рассмотрена задача о падении цилиндрической (сферической) электромагнитной волны на неоднородный плазменный цилиндр (шар). Показано, что учет конечной кривизны фронта волны и границы приводит к особенностям в поведении лучей, каустической поверхности и поля. Для гиперболических и параболических законов изменения электронной концентрации N исследованы и определены особые точки каустики. Оценивается эволюция каустической поверхности при изменении положения источника и величины градиента N. Проведено разбиение плоскости параметров задачи на характеристические области.

Рассмотрим задачу о падении цилиндрической (сферической) электромагнитной волны на неоднородный плазменный цилиндр (шар) радиуса R. При этом будем предполагать, что электронная концентрация N меняется только по радиусу r, а соударения отсутствуют ($\nu = 0$). Тогда выражение для диэлектрической проницаемости плазмы имеет следующий вид:

$$\varepsilon(\omega, r) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N(r). \qquad (1)$$

Плазму будем считать слабонеоднородной $\left(\frac{1}{k_0\varepsilon^{3/2}}\left|\frac{d\varepsilon}{dr}\right| \ll 1,\ k_0 = \frac{\omega}{c}\right)$, а падающий волновой фронт и границу плазмы — локально-плоскими.

В [1] для плоских границ раздела показано, что учет конечной расходимости падающего волнового фронта приводит к весьма сложной лучевой картине, к особенностям каустики и поля волны. Однако реальные поверхности раздела обладают конечной кривизной и только при условии $k_0 R_{1,2} \gg 1$ ($R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны поверхности) могут считаться локально-плоскими. Для плоских волн с бесконечно широким фронтом можно показать, что учет конечной кривизны границы раздела приводит к особенностям в поведении поля электромагнитной волны и к особенностям на каустике. В общем случае локально-плоских фронтов и границ особенности у каустики и поля могут появиться и внутри неоднородной среды; при этом важное значение имеет относительная кривизна фронта и границы. В частности, в неоднородной среде в этом случае нарушается принцип локальности, а каустическая поверхность становится многозначной (возникают петли) и особой (появляются узлы и острия).

Пусть на поверхность кругового неоднородного плазменного цилиндра с осевой симметрией падает цилиндрический волновой фронт $r = r_\Phi(\psi, t)$, образующая которого параллельна образующей границы и направлена по оси y (рис. 1). Угол ψ цилиндрической системы координат y, r, ψ будем отсчитывать от точки касания цилиндрического фронта

с границей $r = R$, т. е. от точки, где $dr_\Phi/d\psi = 0$. В случае $dr_\Phi/d\psi \neq 0$ начало отсчета угла ψ может быть выбрано произвольно. Уравнение семейства лучей в неоднородной среде с осевой симметрией при $\varepsilon(R) = 1$ имеет вид [2]

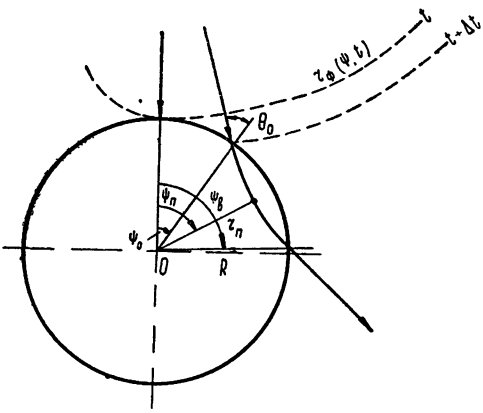


Рис. 1. Падение локально-плоского волнового фронта на неоднородный плазменный цилиндр.

$$\psi = \begin{cases} \psi_0 + \int\limits_r^R P(r, \alpha_0)dr & (\psi \leqslant \psi_n) \\ \psi_n + \int\limits_{r_n}^r P(r, \alpha_0)dr & (\psi > \psi_n) \end{cases},$$

где

$$P(r, \alpha_0) = \frac{R\alpha_0}{r\sqrt{r^2\varepsilon(r) - R^2\alpha_0^2}},$$

$$\psi_n = \psi_0 + \int\limits_{r_n}^R P(r, \alpha_0)dr, \qquad (2)$$

$$\alpha_0 = \sin\theta_0,$$

θ_0 — угол между лучом (нормалью к волновому фронту) в точке падения и внешней нормалью к поверхности плазмы, ψ_0 — угловая координата точки входа луча в плазму; величина r_n определяется уравнением $\varepsilon(r_n) r_n^2 = R^2 \sin^2\theta_0$ и совместно с ψ_n характеризует положение точки поворота луча.

Будем далее считать, что электронная концентрация N монотонно убывает в окрестности границы $r = R$, а для r, близких к r_n, выполняются условия Коши абсолютной сходимости несобственных интегралов в (2):

$$P(r, \alpha_0) < \frac{A}{(r_n - r)^q}, \quad q < 1, \quad A = \text{const}.$$

В этом случае лучи могут образовать каустическую поверхность, уравнения которой имеют вид

$$\psi = \psi_0 + \int\limits_{r_n}^R P(r, \alpha_0)dr + \int\limits_{r_n}^r P(r, \alpha_0)dr;$$

$$2\frac{d\theta_0}{d\psi_0} R\cos\theta_0 \left[\int\limits_{r_n}^R S(r, \alpha_0)\,dr + \int\limits_{r_n}^r S(r, \alpha_0)dr\right] +$$

$$+ 2\frac{d\theta_0}{d\psi_0}\left\{\cos(2\theta_0)\left[R\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)_{r=R} + 2\right]^{-1} + R\cos\theta_0(r^2\varepsilon - 2R^2\alpha_0^2) \times \right. \qquad (3)$$

$$\left. \times \left[r^2\left(r\frac{d\varepsilon}{dr} + 2\right)\sqrt{r^2\varepsilon - R^2\alpha_0^2}\right]^{-1}\right\} + 1 = 0,$$

где

$$S(r, \alpha_0) = \left(r^2\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} + 5r\frac{d\varepsilon}{dr} + 4\varepsilon\right)\left[r^3\left(r\frac{d\varepsilon}{dr} + 2\varepsilon\right)^2\right]^{-1} \times$$
$$\times (r^2\varepsilon - 2R^2\alpha_0^2)\,(r^2\varepsilon - R^2\alpha_0^2)^{-1/2},$$

а зависимость $\theta_0(\psi_0)$ и значения $d\theta_0/d\psi_0$ определяются конкретным видом падающего волнового фронта.

Исследуем особенности каустики (3). При этом, как и в [1], большое значение имеет характер зависимости координат $\psi_в$ точек выхода лучей из плазмы от координат их точек входа ψ_0:

$$\psi_в = \psi_0 + 2\int_{r_п}^{R} P(r, \alpha_0')dr. \tag{4}$$

Экстремальные значения этой функции определяют координаты точек выхода каустики (3) из неоднородной плазмы. Число экстремумов и их положение находятся после дифференцирования (4) из уравнения

$$4\frac{d\theta_0}{d\psi_0}\left[R\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)_{r=R} + 2\right]R\cos\theta_0\int_{r_п}^{R} S(r, \alpha_0)dr +$$
$$+ 4\frac{d\theta_0}{d\psi_0}\cos(2\theta_0) + R\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)_{r=R} + 2 = 0. \tag{5}$$

Каустическая поверхность внутри плазменного цилиндра может существовать только при условии $d\psi_в/d\psi_0 \geqslant 0$. При $d\psi_в/d\psi_0 < 0$ каустика может образоваться только во внешнем пространстве $r > R$. Однако при этом в силу конечной кривизны поверхности плазмы некоторая часть лучей может вообще не иметь каустики.

Действительно, уравнение семейства лучей после выхода их из плазмы имеет вид

$$r = \frac{R\sin\theta_0}{\sin(\beta - \psi)} \qquad (r \geqslant R,\ \psi \geqslant \psi_в), \tag{6}$$

где $\beta = \psi_в + \theta_0$ — угол между лучом в точке его выхода и линией отсчета угла ψ. Отсюда легко получить параметрические уравнения каустики лучей (6):

$$r = R\cos\theta_0\left[\left(\frac{d\theta_0}{d\beta}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\theta_0\right]^{1/2};$$
$$\psi = \beta - \operatorname{arctg}\left(\frac{d\beta}{d\theta_0}\operatorname{tg}\theta_0\right). \tag{7}$$

Из формул (7) следует, что каустика в свободном пространстве $r \geqslant R$ может существовать только при одновременном выполнении двух неравенств: $d\psi_в/d\psi_0 \leqslant 0$ и $d\beta/d\psi_0 \geqslant 0$. При $d\beta/d\psi_0 < 0$ лучи не имеют каустики ни при каких r.

Экстремальные значения функции $\beta(\psi_0)$ характеризуют положение асимптот внешней каустики (7). Координаты и число этих экстремумов определяются из условия $d\beta/d\psi_0 = 0$. Откуда с учетом (5) получаем

$$4\frac{d\theta_0}{d\psi_0}\left[R\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)_{r=R}+2\right]R\cos\theta_0\int_{r_\text{п}}^{R}S(r,\alpha_0)\,dr+\frac{d\theta_0}{d\psi_0}\left[1+4\cos(2\theta_0)\right]+$$
$$+R\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)_{r=R}+2=0. \tag{8}$$

В случае, когда $d\beta/d\psi_0>0$ для всех допустимых ψ_0, поверхность (7) может иметь линии возврата 1 рода, на которых внешняя каустика (7) меняет свое направление на обратное. Их положение определяется из (7) при условии $dr/d\psi_0=0$ $(d\psi/d\psi_0=0)$, откуда

$$\operatorname{tg}\theta_0\left(\frac{d\psi_\text{в}}{d\psi_0}\right)^3+\frac{d\theta_0}{d\psi_0}\left[3\operatorname{tg}\theta_0\left(\frac{d\psi_\text{в}}{d\psi_0}\right)^2+\frac{d^2\psi_\text{в}}{d\psi_0^2}\right]+\frac{d\psi_\text{в}}{d\psi_0}\left[2\operatorname{tg}\theta_0\left(\frac{d\theta_0}{d\psi_0}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{d^2\theta_0}{d\psi_0^2}\right]=0. \tag{9}$$

По аналогии с (9) линии возврата внутренней каустики (3) определяются из (3) точками, где $dr/d\psi_0=0$ $(d\psi/d\psi_0=0)$. При этом в зависимости от числа корней уравнения (9) и уравнения, определяющего число линий возврата внутренней каустики (3), совокупная каустика либо образует петли внутри плазменной среды, либо замыкает их в свободном пространстве.

Следует также заметить, что совокупная каустика, помимо точек выхода на границу, определяемых из уравнений (4), (5), всегда имеет также общие точки с границей на линии касания лучей с поверхностью плазмы.

Пусть теперь на поверхность неоднородного цилиндра радиуса падает круговой цилиндрический фронт, создаваемый линейным источником, расположенным в точке с координатами $r=p+R$, $\psi=0$. В этом случае

$$\theta_0=\operatorname{arctg}\frac{\sin\psi_0}{\cos\psi_0-u},\quad \frac{d\theta_0}{d\psi_0}=\frac{1-u\cos\psi_0}{1+u^2-2u\cos\psi_0}\quad(\psi_0\leqslant\psi_{0\max}=\arccos u), \tag{10}$$

где $u=R/(p+R)\leqslant 1$, а p — расстояние от источника до поверхности цилиндра.

Для волнового фронта такого вида рассмотрим подробно гиперболические и параболический законы изменения электронной концентрации, для которых, как известно, удается записать в явном виде уравнение траектории луча (2). При этом в силу симметрии лучевой картины относительно плоскости $\psi=0$ достаточно рассмотреть только $\psi_0\geqslant 0$. Существенно также, что для рассмотренных законов $(d\varepsilon/dr)_{r=R}\neq 0$ [1].

При гиперболическом законе изменения электронной концентрации

$$\varepsilon(r)=1+b\left(1-\frac{R}{r}\right)(r\leqslant R),\quad b=\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\left|\frac{d}{dr}(rN)\right|=\text{const} \tag{11}$$

уравнение луча имеет вид

$$r=\frac{2R\sin^2\theta_0}{\cos(\psi-\psi_\text{п})\sqrt{b^2+4(1+b)\sin^2\theta_0}-b}, \tag{12}$$

где

$$\psi_\text{п}=\psi_0+\arcsin\frac{\sin(2\theta_0)}{\sqrt{b^2+4(1+b)\sin^2\theta_0}}.$$

Координаты точек выхода лучей из плазмы в этом случае определяются из (12):

$$\psi_в = \psi_0 + 2\arcsin\frac{\sin(2\theta_0)}{\sqrt{b^2 + 4(1+b)\sin^2\theta_0}}. \qquad (13)$$

Из (5) или (13) можно найти положение экстремальных точек функции $\psi_в(\psi_0)$:

$$\cos\psi_{0;1,2} = \frac{bu[u^2(1+b)+(3+b)] \pm (1-u^2)\sqrt{u^2b^2(b+2)+(1+b)(4-b^2)}}{2[u^2(b^2+b-1)+(1+b)]}, \qquad (14)$$

$$u \geqslant \sqrt{(b+1)(b-2)}/b, \quad b \geqslant 2.$$

Формулы (10), (13) и (14) позволяют определить при $\frac{\sqrt{(b+1)(b-2)}}{b} < u < 1$ и $b > 2$ координаты двух линий выхода каустики из плазменного цилиндра. Напомним, что существует еще одна общая линия каустики и границы — линия касания лучей с поверхностью плазмы при $\psi_0 = \psi_{0\,max} = \arccos u$.

При $u = \sqrt{(b+1)(b-2)}/b$ обе линии, определяемые (14), сливаются в одну . Если $u < \sqrt{(b+1)(b-2)}/b$ и $b > 2$, функция $\psi_в(\psi_0)$ является монотонной, и каустическая поверхность в этом случае целиком расположена внутри плазменной среды $r < R$.

Характерно, что при $\sqrt{(b+1)(b-2)}/b < u < 1$ и $b > 2$ существует участок границы раздела, в каждой точке которой через поверхность плазмы выходят три луча [1]. При $b = 2$ и любом u: $\cos\psi_{0\,2} = u$, и каустика имеет всего две общие линии с границей. В случае $b < 2$ функция $\psi_в(\psi_0)$ при любом u имеет только один экстремум (максимум) в точке $\psi_0 = \psi_{01}$, определяемой формулой (14). Этот экстремум соответствует единственной линии выхода внутренней каустики из неоднородной плазмы.

Каустика во внешней среде $r > R$ определяется выражением (7), где

$$\frac{d\beta}{d\theta_0} = \frac{1+u^2-2u\cos\psi_0}{1-u\cos\psi_0} + \frac{b(b+4)(u^2+1-2u\cos\psi_0)-4(1+b)\sin^2\psi_0}{b^2(u^2+1-2u\cos\psi_0)+4(1+b)\sin^2\psi_0}. \qquad (15)$$

Она образуется лучами, для которых одновременно $d\psi_в/d\psi_0 < 0$ и $d\beta/d\psi_0 > 0$.

Анализ зависимости $\beta(\psi_0)$ показывает, что при $b \leqslant 2$ существует некоторая область D^b_{21} значений параметра u (рис. 2), при которых функция $\beta(\psi_0)$ имеет два экстремума, определяющих, как указывалось выше, положения асимптот внешней каустики. При этом для лучей, соответствующих $d\beta/d\psi_0 < 0$, каустическая поверхность не образуется ни при каких r.

При $b > 2$ функция $\beta(\psi_0)$ является монотонно возрастающей для любого u. Внешняя каустика может иметь в этом случае одну линию возврата (линию заострения) и может замыкать таким образом петлю в свободном пространстве.

Разбиение плоскости независимых параметров задачи на характеристические области (рис. 2) позволяет проследить эволюцию совокупной каустической поверхности при изменении либо положения источника u, либо градиента b электронной концентрации плазмы (рис. 3). Рис. 3 показывает, что особый характер каустики, а следовательно, и поля, исчезает при некоторых значениях параметров, которые могут быть

найдены, например, графическим решением трансцендентных уравнений, определяющих положение и число линий возврата внутренней каустики (3).

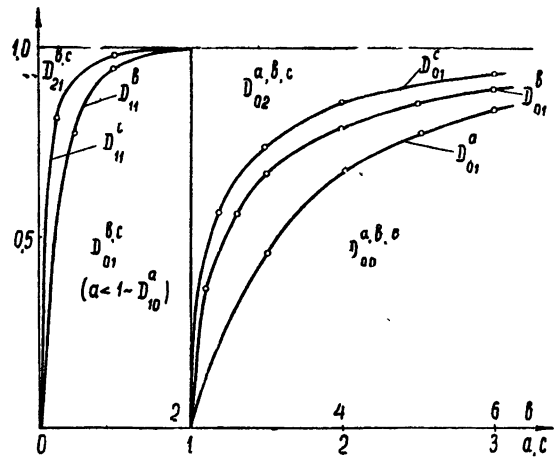


Рис. 2. Разбиение плоскостей независимых параметров u, a (b, c) на характеристические области $D^{a,b,c}_{ij}$; $i(j)$— число стационарных точек функции $\beta(\psi_0)$ ($\psi_в(\psi_0)$).

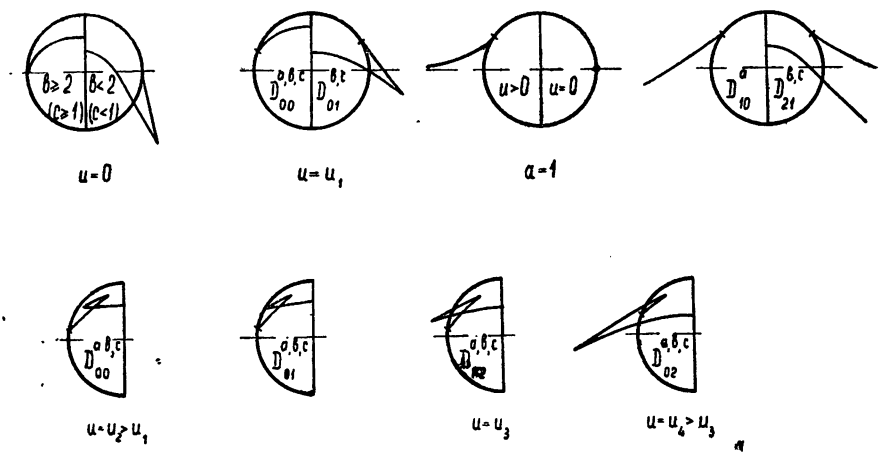


Рис. 3. Зависимость вида каустики от положения источника и величины градиента N.

Количественный анализ внешней и внутренней каустики проводится в соответствии с общим методом, изложенным выше. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 4.

В случае квадратичного гиперболического закона

$$\varepsilon(r) = 1 + c\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \quad (r \leqslant R), \quad c = \frac{2\pi e^2}{m\omega^2}\left|\frac{d^2}{dr^2}(r^2 N)\right| = \text{const} \qquad (16)$$

исследование проводится аналогично, а результаты отличаются от приведенных выше для (11) только количественно. Здесь

$$\psi_в = \psi_0 + \frac{2\sin\theta_0}{\sqrt{c + \sin^2\theta_0}} \arcsin\frac{\cos\theta_0}{\sqrt{1+c}}, \qquad (17)$$

а положение и число экстремумов функции $\psi_в(\psi_0)$ определяются из решения трансцендентного уравнения:

$$\frac{1+u^2-2u\sin^2\theta_0-2u\cos\theta_0\sqrt{1-u^2\sin^2\theta_0}}{2-2u\sin^2\theta_0-2u\cos\theta_0\sqrt{1-u^2\sin^2\theta_0}}= \\ =\frac{\sin^2\theta_0}{c+\sin^2\theta_0}-\frac{c\cos\theta_0}{(c+\sin^2\theta_0)^{3/2}}\arcsin\frac{\cos\theta_0}{\sqrt{c+1}}, \tag{18}$$

где

$$\theta_0=\operatorname{arctg}\frac{\sin\psi_0}{\cos\psi_0-u}\quad(\psi_0\leqslant\arccos u).$$

Легко показать, что при $c<1$ функция $\psi_в(\psi_0)$ имеет только один экстремум. Каустика поэтому выходит из плазменного цилиндра только через одну линию. Корни θ_0 уравнения (18) представлены на рис. 5.

Не останавливаясь более на дальнейшем анализе, отметим, что плоскость независимых параметров задачи u и c может быть также разбита на характеристические области D^c_{ij} (рис. 2), с каждой из которых можно сопоставить определенный вид каустики из серии, изображенной на рис. 3.

Пусть теперь электронная концентрация N изменяется по параболическому закону. Тогда

$$\varepsilon(r)=1-a\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\quad(r\leqslant R), \\ a=\frac{2\pi e^2R^2}{m\omega^2}\left|\frac{d^2N}{dr^2}\right|=\text{const} \tag{19}$$

и $\varepsilon(0)=1-a$ является конечной величиной. Как будет ясно из дальнейшего, это приводит к появлению дополнительных особенностей в поведении каустики.

Координаты точек выхода лучей из плазменного цилиндра определяются в этом случае по формуле

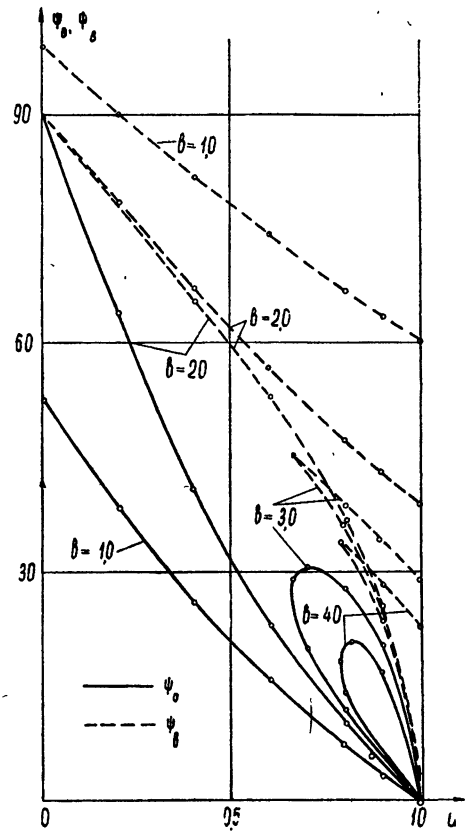


Рис. 4. Зависимость координат выхода каустики из плазмы $\psi_в$ и соответствующих им координат точек входа лучей ψ_0 от положения источника u для $\varepsilon(r)=1+b\left(1-\frac{R}{r}\right)$.

$$\psi_в=\psi_0+\arccos\frac{a-1+2\sin^2\theta_0}{\sqrt{(a-1)^2+4a^2\sin^2\theta_0}}. \tag{20}$$

При $0<a\leqslant 1$, когда $\varepsilon(0)\geqslant 0$, функция $\psi_в(\psi_0)$ монотонно убывает при всех $\psi_0\leqslant\arccos u$, причем

$$\psi_в(0) = \begin{cases} \pi, & 0 \leqslant a < 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & a = 1 \end{cases}.$$

В этом случае лучи не образуют каустики внутри плазменного цилиндра.

Анализ функции $\beta(\psi_0)$ показывает, что при $0 < a < 1$ она имеет один экстремум. Следовательно, существует участок ψ_0, на котором $d\beta/d\psi_0 > 0$. (При $a = 1$ $d\beta/d\psi_0 > 0$ при всех $\psi_0 \leqslant \psi_{0\,max}$.) Часть лучей при этом образует каустику во внешней среде: она исходит из точек касания лучей с границей плазмы ($\psi_0 = \psi_{0\,max}$) и плавно уходит на бесконечность (рис. 3).

Если $a = 1$, а $u \to 0$ ($p \to \infty$), каустика стягивается к двум фокальным прямым $r = R$, $\psi = \pm \pi/2$ (некоторая модификация цилиндрической линзы Люнеберга [3]).

При $a > 1$ происходит существенная перестройка лучевой картины: появляется внутренняя каустика, совокупная каустика может образовывать петли, появляются описанные выше и в [1] особые точки. Действительно, хотя при $a > 1$ функция $\beta(\psi_0)$ становится монотонно возрастающей при всех $\psi_0 \leqslant \psi_{0\,max}$, появляются экстремумы у функции $\psi_в(\psi_0)$, которые и определяют положение точек выхода каустики на границу плазмы. Анализ зависимости $\psi_в(\psi_0)$ также позволяет указать на плоскости параметров $\{u, a\}$ характеристические области D^a_{ij} (рис. 2). Эволюция лучевой картины и каустической поверхности при этом полностью отвечает рис. 3.

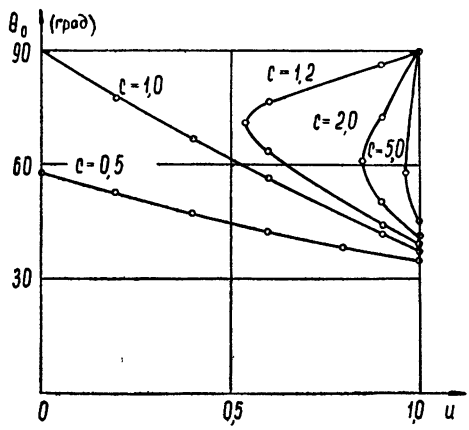


Рис. 5. Зависимость угла падения θ_0 лучей, проходящих через точки выхода каустики из плазмы, от положения источника для $\varepsilon(r) = 1 + c\,(1 - R^2/r^2)$.

Рассмотрим теперь падение сферической электромагнитной волны на неоднородный плазменный шар, электронная концентрация которого изменяется только по радиусу.

В силу центральной симметрии плазменной среды и фронта волны на этот случай легко переносятся результаты предыдущей задачи. Так, каустикой здесь является поверхность вращения двумерной каустической кривой, представляющей собой нормальное сечение цилиндрической каустической поверхности, вокруг прямой, проходящей через источник и центр шара. Естественно, что при этом сохраняются все описанные выше особенности каустики и поля. В частности, остаются прежними характерные оценки положения источника u и величины градиентов электронной концентрации a, b, c, а также разбиение плоскостей этих параметров на характеристические области $D^{a,b,c}_{ij}$ (рис. 2).

В заключение следует отметить, что описанные в настоящей работе и в [1] особенности каустических поверхностей можно представить, как результат «лучевого взаимодействия» расходящегося волнового фронта электромагнитной волны с неоднородной плазмой. Аналогичный эффект возникает при падении цилиндрической электромагнитной волны на

плоскую поверхность клиновидно-слоистой плазменной среды [4], электронная концентрация которой зависит только от полярного угла ψ:

$$\varepsilon(\omega, \psi) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N(\psi).$$

Уравнение эйконала $(\nabla L)^2 = \varepsilon$ в этом случае подстановкой $L = r\sqrt{\varepsilon}\sin\theta$ может быть сведено к уравнению Абеля для угла преломления θ:

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \pm 1 - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\psi}\operatorname{tg}\theta.$$

Для некоторых законов $\varepsilon(\psi)$ это уравнение может быть проинтегрировано. Анализ и расчеты этих случаев также дают описанные выше особенности [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 497 (1966).
2. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
3. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. II, изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, М., 1959.
4. Ю. И. Орлов, Радиотехника и электроника, **11**, 1157 (1966).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
22 сентября 1965 г.

ON SOME PECULIARITIES OF THE RAY THEORY OF CYLINDRICAL AND SPHERICAL WAVE PROPAGATION IN A WEAK NONHOMOGENEOUS PLASMA. II

Yu. I. Orlov

By the ray-optics methods the problem has been considered of the incidence of a cylindrical (spherical) electromagnetic wave on a nonhomogeneous plasma cylinder (sphere). It is shown that the finite curvature of a wave front and boundaries lead to peculiarities in the behaviour of rays, the caustical surface and field. The peculiar caustic points have been investigated and determined for hyperbolic and parabolic changes of the electron density N. The evolution of caustic surface is estimated when changing the position of source and the magnitude of gradient N. The plane of the problem parameters has been devided into characteristical regions.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 РАДИОФИЗИКА 1966

УДК 533.925 : 621.371.162

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

В. И. Мирошниченко

Рассматривается отражение электромагнитной волны при наклонном падении на полупространство, заполненное плазмой. Плазма движется в среде, где могут распространяться медленные волны ($V_ф < c$). В предположении чисто зеркального и чисто диффузного отражения электронов от границы найдены общие выражения для полей, проникающих в плазму. Получены выражения для импедансов и коэффициентов отражения. В предельных случаях слабой и сильной пространственной дисперсии вычислены приближенные значения коэффициентов отражения и поглощательной способности.

1. Взаимодействие электромагнитной волны с движущимися телами привлекает к себе внимание из-за возникающего при этом умножения частоты и увеличения амплитуды отраженной волны (так называемый двухкратный эффект Допплера). При нормальном падении на идеально проводящее полупространство, движущееся в вакууме, частота и амплитуда падающей (ω_1, E_1) и отраженной (ω_2, E_2) волн связаны известными формулами [1]:

$$\omega_2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}\omega_1, \quad E_2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}E_1, \quad \beta = \frac{V}{c}. \tag{1}$$

Как видно из этих формул, значительного эффекта умножения частоты и увеличения амплитуды отраженной волны при отражении в вакууме можно достичь только при релятивистских скоростях отражающего тела, что возможно, например, если в качестве отражателя использовать релятивистские электронные пучки [2] либо плазменные сгустки.

Имеется, однако, и другая возможность увеличения этого эффекта [3, 4], связанная с тем, что при отражении электромагнитных волн в пространстве, в котором фазовая скорость волн $V_ф < c$, роль скорости света в формулах (1) играет фазовая скорость волны, которая может быть значительно меньше скорости света. На опыте такая возможность может быть реализована при отражении электромагнитных волн от плазменных сгустков в волноводе медленных волн. В этом случае отпадает необходимость сообщать отражателю релятивистские скорости для достижения заметного эффекта умножения частоты и увеличения амплитуды.

Теории отражения электромагнитных волн от движущейся плазмы, находящейся в магнитном поле, посвящены работы [3–6], в которых изучалось отражение электромагнитных волн круговой поляризации от движущегося плазменного полупространства.

Представляет интерес исследование отражения электромагнитной волны при наклонном падении на плазму, движущуюся в пространстве, в котором фазовая скорость волн замедленна.

Как и в работах [3–6], для изучения основных свойств этого явления мы будем предполагать, что существование медленных волн обеспечивается наличием заполняющего все пространство диэлектрика

с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ, частотной дисперсией которых будем в дальнейшем пренебрегать.

Рассмотрим простейший случай, когда электрический вектор падающей волны перпендикулярен плоскости падения (s — поляризация). Как и в [3–6], будем предполагать, что отражатель представляет собой полупространство, заполненное плазмой и движущееся со скоростью $-V$ вдоль оси z, нормальной к плоской границе плазмы. Граница плазменного полупространства предполагается резкой, а закон отражения электронов от этой границы будет принят ниже.

Решение задачи удобнее проводить в системе координат, связанной с движущейся плазмой. В такой системе диэлектрик будет двигаться и, следовательно, напряженности электрического и магнитного полей и их индукции связаны между собой соотношениями Минковского, которые для рассматриваемого нами случая можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\varepsilon(1-\beta^2)}{1-\varepsilon\mu\beta^2}E_x - \frac{(\varepsilon\mu-1)\beta}{1-\varepsilon\mu\beta^2}H_y, \\ B_y &= \frac{\mu(1-\beta^2)}{1-\varepsilon\mu\beta^2}H_y + \frac{(\varepsilon\mu-1)\beta}{1-\varepsilon\mu\beta^2}E_x, \\ B_z &= \mu H_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Исходными уравнениями при решении этой задачи являются уравнения Максвелла и кинетическое уравнение для высокочастотной добавки к равновесной функции распределения:

$$\begin{aligned} ik_y H_z - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -ikD_x + \frac{4\pi}{c}j_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= ikB_y, \quad -ik_y E_x = ikB_z, \\ v_z\frac{\partial f}{\partial z} - i(\omega + i0 - k_y v_y)f &= -eE_x v_x\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \\ j_x &= -e\int\limits_{(v)} v_x f dv, \end{aligned} \tag{3}$$

где $f_0 = n_0(m/2\pi T)^{3/2}e^{-\varepsilon/T}$, $\varepsilon = mv^2/2$. В системе уравнений (3) принято во внимание, что вследствие непрерывности тангенциальных составляющих $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ на границе плазменного полупространства зависимость всех величин от поперечной координаты y и времени t должна иметь вид

$$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B} \sim \exp\left[i(k_y y - \omega t)\right],$$

где k_y — поперечная составляющая волнового вектора, ω — частота падающей волны в системе координат, где плазма покоится.

Кинетическое уравнение для функции распределения будем решать с граничным условием для f на границе плазменного полупространства $z = 0$:

$$f(0, v_z > 0) = pf(0, v_z < 0) \qquad (0 \leqslant p \leqslant 1) \tag{4}$$

и условием исчезновения при $z \to \infty$. Коэффициент p указывает, какая доля электронов, летящих к границе плазмы, отражается зеркально, меняя z-составляющую скорости на обратную.

Решение кинетического уравнения совместно с граничным условием (4) приводит к следующему выражению для электронного тока:

$$j_x(z) = \int_0^\infty \sigma_{xx}(|z - z'|)\,E_x(z')dz' + p\int_0^\infty \sigma_{xx}(z + z')E_x(z')dz', \qquad (5)$$

где ядро $\sigma_{xx}(z)$ имеет вид

$$\sigma_{xx}(z) = \frac{\omega_0^2}{4\pi\sqrt{\pi}\,v_T}\int_0^\infty \exp\left(-y^2 + \frac{i\delta z}{y}\right)\frac{dy}{y},$$

$$\delta = \frac{\omega + i0 - k_y v_T y}{v_T}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}, \quad v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}.$$

Систему уравнений (3) с током (5) можно привести к одному интегродифференциальному уравнению для напряженности электрического поля $E_x(z)$:

$$-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - 2ika_1\frac{\partial E_x}{\partial z} - a_2k^2E_x = \frac{4\pi ik}{c}\Big[\int_0^\infty \sigma_{xx}(|z - z'|)\times$$
$$\times E_x(z')dz' + p\int_0^\infty \sigma_{xx}(z + z')E_x(z')dz'\Big], \qquad (6)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\frac{(\varepsilon\mu - 1)\beta}{1 - \varepsilon\mu\beta^2} = a_1, \quad \frac{\varepsilon\mu - \beta^2}{1 - \varepsilon\mu\beta^2} - \frac{(1 - \beta^2)n_y^2}{1 - \varepsilon\mu\beta^2} = a_2, \quad \frac{\mu(1 - \beta^2)}{1 - \varepsilon\mu\beta^2} = a_3,$$

$$n_y = \frac{k_y}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

Решение уравнения (6) различно для чисто зеркального отражения электронов от границы плазменного полупространства ($p = 1$) и чисто диффузного ($p = 0$).

При $p = 0$ уравнение (6) представляет собой уравнение типа Винера—Хопфа, которое легко решается сведением его к граничной задаче Гильберта для преобразования Фурье от напряженности электрического поля. Для этого продолжим электрическое поле на левую полуось [7]:

$$E_x(z) = 0 \qquad \text{при } z < 0. \qquad (7)$$

Решение уравнения ищем в виде

$$E_x(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_x(t)\,e^{itz}\,dt. \qquad (8)$$

Тогда из (6) и (7) получим следующие условия, которым должно удовлетворять преобразование Фурье от напряженности электрического поля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[t^2 + 2a_1kt - k^2(a_2 + (\varepsilon - 1)a_3)\right]\mathcal{E}_x(t) + P(t)\right\}e^{itz}\,dt = 0 \quad (z \geqslant 0),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_x(t)\,e^{itz}\,dt = 0 \quad (z < 0), \qquad (9)$$

где

$$P(t) = i(t+2ia_1k)E_x(0) - tE'_x(0),$$

$E_x(0)$, $E'_x(0)$ — значения поля и его производной на границе $z = 0$, ε — поперечная диэлектрическая постоянная безграничной плазмы [8–10]:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left\{\varphi(z) - i\sqrt{\pi}\,ze^{-z^2}\right\}, \quad z = \frac{\omega}{v_T\sqrt{k_y^2+t^2}},$$
$$\varphi(z) = 2ze^{-z^2}\int_0^z e^{y^2}dy = \frac{z}{\sqrt{\pi}}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-y^2}dy}{z-y} \tag{10}$$

(P — символ главного значения интеграла).

Из условий (9) следует, что подынтегральные выражения (9) представляют собой предельные значения функций на действительной оси, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного t:

$$\{t^2 + 2a_1kt - k^2[a_2 + (\varepsilon - 1)a_3]\}\mathcal{E}_x(t) = \Phi^+(t),$$
$$\mathcal{E}_x(t) = \Phi^-(t) \qquad (-\infty < t < +\infty). \tag{11}$$

Исключая $\mathcal{E}_x(t)$ из уравнений (11), мы приходим к следующей граничной задаче Гильберта для функций $\Phi^{\pm}(t)$:

$$\Phi^+(t) = \{t^2 + 2a_1kt + k^2[a_2 + (\varepsilon - 1)a_3]\}\Phi^-(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{12}$$

Решение граничной задачи (12) стандартно [11, 12] и может быть записано в виде

$$\Phi^-(z) = \frac{P(z)H(z)}{(z - i\alpha)}, \quad \Phi^+(z) = P(z)(z + i\alpha)H(z),$$
$$H(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log W(\tau)d\tau}{\tau - z}\right], \quad W(\tau) = \frac{t^2+2a_1kt-k^2[a_2+(\varepsilon-1)a_3]}{t^2 + \alpha^2}, \tag{13}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, который необходимо определить $\alpha > 0$. Пользуясь формулами Сохоцкого [11, 12], легко найти предельные значения функции $\Phi^-(t)$ на действительной оси:

$$\Phi^{\pm}(t) = \frac{P(t)}{(t-i\alpha)\sqrt{W(t)}}\exp\left[\frac{1}{2\pi i}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log W(\tau)d\tau}{\tau - t}\right]. \tag{14}$$

Полином $P(t)$ определим, сравнивая асимптотику $\Phi^-(t)$ при $t \to \infty$, следующую из (14), и асимптотику $\Phi^-(t)$, следующую из ее определения через $\mathcal{E}_x(t)$:

$$\Phi^-(t) = -\frac{iE_x(0)}{t} - \frac{E'_x(0)}{t^2} + \ldots \quad (t \to \infty). \tag{15}$$

Сравнивая эти асимптотики, получаем

$$P(t) = \text{const} = -iE_x(0). \tag{16}$$

Учитывая второе из соотношений (11) и (16), находим явное выражение для преобразования Фурье поля:

$$\mathcal{E}_x(t) = -\frac{iE_x(0)H(t)}{(t-i\alpha)\sqrt{W(t)}}, \quad H(t) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log W(\tau)\,d\tau}{\tau - t}\right]. \tag{17}$$

Подставляя это значение $\mathcal{E}_x(t)$ в (8), найдем окончательное выражение для поля, проникающего вглубь плазменного полупространства.

Сравнивая асимптотику левой и правой частей (17) с точностью до членов порядка t^{-2}, можно определить соотношение между значениями поля и его производной на границе $z = 0$:

$$\frac{E_x'(0) + ia_1kE_x(0)}{E_x(0)k} = -(\alpha + A),\ A = \frac{1}{2\pi k}\int_{-\infty}^{+\infty} \log W(t)\,dt. \tag{18}$$

Принимая во внимание связь между E_x и H_y, следующую из уравнений Максвелла, определим поверхностный импеданс Z плазменного полупространства в рассматриваемом случае диффузного отражения электронов от границы:

$$\frac{1}{Z} = \frac{H_y(0)}{E_x(0)} = \frac{i(\alpha + A)}{a_3}. \tag{19}$$

Решим уравнение (6) при чисто зеркальном отражении электронов от границы ($p = 1$). В отличие от (7) электрическое поле $E_x(z)$ в этом случае продолжим четным образом на левую полуось:

$$E_x(-z) = E_x(z). \tag{20}$$

Тогда уравнение для напряженности электрического поля приобретает вид

$$-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - 2ia_1k\frac{\partial E_x}{\partial z}\operatorname{sgn} z - a_2k^2E_x = \frac{4\pi ik}{c}a_3\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{xx}\times$$
$$\times(|z - z'|)E_x(z')dz'. \tag{21}$$

Так же, как и в случае $p = 0$, решение ищем в виде (8). Тогда уравнение (21) приводит к следующим двум условиям, которым должно удовлетворять преобразование Фурье напряженности электрического поля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Delta_+(t)\mathcal{E}_x(t) + 2E_x'(0)\right]e^{itz}\,dt = 0 \qquad (z>0),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Delta_-(t)\mathcal{E}_x(t) + 2E_x'(0)\right]e^{itz}\,dt = 0 \qquad (z<0), \tag{22}$$

$$\Delta_\pm(t) = t^2 + 2a_1kt - k^2[a_2 + (\varepsilon - 1)a_3]. \tag{23}$$

Из этих условий следует [7], что подынтегральные выражения, стоящие в квадратных скобках (22)—(23), представляют собой предельные значения функций $\Phi^\pm$, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного t:

$$\Delta_+(t)\mathcal{E}_x(t) = \Phi^+(t),$$
$$\Delta_-(t)\mathcal{E}_x(t) = \Phi^-(t). \tag{24}$$

Исключая $\mathcal{E}_x(t)$ из уравнений (24), приходим к однородной граничной задаче Гильберта для функций $\Phi^\pm(t)$:

$$\Phi^+(t) = \frac{\Delta_+(t)}{\Delta_-(t)}\Phi^-(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{25}$$

Решение этой задачи имеет вид [11]

$$\Phi(z) = P(z)\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log W(\tau)d\tau}{\tau - z}\right], \tag{26}$$

где $W(t) = \Delta_+(t)/\Delta_-(t)$, а $P(z)$ — произвольный полином. Используя аналогично предыдущему формулы Сохоцкого, получаем следующие значения для предельных значений функций $\Phi^{\pm}(t)$ на действительной оси:

$$\Phi^+(t) = P(t)\sqrt{W(t)}\,H(t), \quad \Phi^-(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{W(t)}}\,H(t),$$
$$H(t) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log W(\tau)d\tau}{\tau - t}\right] \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{27}$$

Сравнивая асимптотики $\Phi^{\pm}(t)$ при $t \to \infty$ с асимптотикой компоненты Фурье $\mathcal{E}_x(t)$:

$$\mathcal{E}_x(t) = -\frac{2E_x'(0)}{t^2} + \ldots, \tag{28}$$

определим полином $P(t)$ и, значит, явное выражение $\mathcal{E}_x(t)$:

$$\mathcal{E}_x(t) = -\frac{2E_x'(0)}{\sqrt{\Delta_+\Delta_-}}\,H(t). \tag{29}$$

Полученная формула с учетом (8) характеризует поле внутри плазмы при зеркальном отражении электронов от границы.

Принимая во внимание, что значение поля на границе можно представить в виде

$$E_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}_x(t)dt, \tag{30}$$

определим связь между значением поля и его производной на границе:

$$\nu = \frac{E_x(0)}{E_x'(0)} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(t)dt}{\sqrt{\Delta_+\Delta_-}}. \tag{31}$$

Учитывая это соотношение и уравнения Максвелла, можно получить выражение для импеданса:

$$Z = \frac{ika_3\nu}{1 + ika_1\nu}. \tag{32}$$

Заметим, что значение ν, имея размерность длины, определяет эффективную глубину проникновения электрического поля. Используя свойства Δ_+, Δ_-, $H(t)$, придадим выражению для ν другой вид, более удобный для вычислений в некоторых предельных случаях:

$$\nu = -\frac{i(B-1)}{2a_1k}, \quad B = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log[\Delta_+(t)/\Delta_-(t)]\,dt}{t}\right]. \tag{33}$$

Отметим также, что уравнение (6) при $p = 1$ по виду совпадает с аналогичным уравнением, исследованным в [6]. Решение уравнения (6), приведенное в работе [6], получено другим способом и приводит к более сложному выражению для преобразования Фурье поля. Однако путем довольно громоздких выкладок можно доказать совпадение результатов работы [6] с результатами решения, проведенного выше (см. (29), (32)).

Определив выражение для импеданса, легко получить вид коэффициента отражения R электромагнитной волны в системе координат, где плазма покоится:

$$R = \frac{E_{x2}}{E_{x1}} = -\frac{(n_z + a_1) - \zeta}{(n_z + a_1) + \zeta}, \quad \zeta = \frac{a_3 H_y(0)}{E_x(0)} = \frac{a_3}{Z},$$
$$n_z + a_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu(1-\beta^2)^2}{(1-\varepsilon\mu\beta^2)^2} - \frac{(1-\beta^2)n_y^2}{1-\varepsilon\mu\beta^2}}. \tag{34}$$

Используя преобразования Лоренца для напряженностей поля падающей и отраженной волн, можно определить и коэффициент отражения электромагнитной волны в лабораторной системе координат R_0 через найденный выше коэффициент отражения в движущейся системе R:

$$R_0 = \frac{1 + \beta\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\theta_1}{1 - \beta\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\theta_2} R \tag{35}$$

(θ_1 и θ_2 — углы падения и отражения).

Выражения для коэффициента отражения R и импеданса Z в общем случае довольно сложны. Рассмотрим предельные случаи (нормального и сверхнормального скин-эффекта) при чисто диффузном отражении электронов от границы ($p = 0$). Предполагая тепловую скорость электронов плазмы незначительной (смещение электрона за период высокочастотного поля мало по сравнению с глубиной скин-слоя волны), для величины A в (18) можно получить следующее значение:

$$A = -\alpha - i\sqrt{a_1^2 + a_2 + (\varepsilon_0 - 1)a_3} - \frac{ia_3}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \beta_{Te},$$
$$\varepsilon_0 = 1 - \omega_0^2/\omega^2. \tag{36}$$

Зная A, легко определить импеданс и коэффициент отражения R. Наличие теплового движения у электронов среды приводит к поглощению части энергии падающей электромагнитной волны:

$$S = 1 - |R|^2 = \frac{4\zeta'(n_z + a_1)}{(n_z + a_1)^2 + \zeta''^2},$$
$$\zeta'' = \sqrt{-[a_1^2 + a_2 + (\varepsilon_0 - 1)a_3]}, \quad \zeta' = \frac{a_3}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \beta_{Te}. \tag{37}$$

Условие применимости формул (36)—(37)

$$\left| a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2 + (\varepsilon_0 - 1)a_3} \right| \beta_{Te} \ll 1. \tag{38}$$

При рассмотрении сверханомального скин-эффекта, когда пробег электрона за период высокочастотного поля велик по сравнению с эффективной глубиной скин-слоя, выражение для A путем интегрирования по частям удобнее представить в виде

$$A = -\alpha - \frac{1}{2\pi k} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2a_1 kt + 2k^2 [a_2 + (\varepsilon - 1)a_3] - a_3 k^2 t\, \partial\varepsilon/\partial t}{t^2 + 2a_1 kt - k^2[a_2 + (\varepsilon - 1)a_3]}\, dt. \quad (39)$$

Если предположить, что основной вклад в этот интеграл вносят такие t, при которых для диэлектрической проницаемости можно воспользоваться ее асимптотическим значением $\varepsilon \simeq i\sqrt{\pi}\frac{\omega_0^2}{\omega^2\beta_T}\frac{k}{|t|}$, удается вычислить этот интеграл и получить для A следующее значение:

$$A \simeq -\alpha + \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)b, \quad b = \left(\sqrt{\pi}\, a_3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \beta_{Te}}\right)^{1/3}. \quad (40)$$

Отсюда легко определить выражение для коэффициента отражения R и мощности, поглощаемой плазменным полупространством в этом случае:

$$S = 1 - |R|^2 = \frac{(n_z + a_1)\sqrt{3}}{b}. \quad (41)$$

Условие применимости формул (40), (41)

$$b \gg a_1 \quad (42)$$

имеет место при низких частотах и скоростях движения плазмы, не очень близких к фазовой скорости волны в неподвижном диэлектрике.

При рассмотрении нормального скин-эффекта в случае зеркального отражения электронов от границы разобьем интеграл (33) на действительную и мнимую часть:

$$B = B' + iB'',$$

где

$$B'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t} \operatorname{arctg} \frac{4a_1 a_3 k^3 t \varepsilon''}{\Delta'_+ \Delta'_- + (a_3 k^2 \varepsilon'')^2},$$
$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \qquad \Delta'_\pm = t^2 + 2a_1 kt - k^2[a_2 + (\varepsilon' - 1)a_3]. \quad (43)$$

Учитывая, что главный вклад в выражении для B'' дают большие t, легко найти

$$B'' \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} a_1 a_3 \beta_{1e}^3. \quad (44)$$

При вычислении B' берем его гидродинамическое значение. В результате получаем следующее выражение для обратного импеданса:

$$\zeta' + i\zeta'' = \sqrt{a_1^2 + a_2 + (\varepsilon_0 - 1)a_3} - \bar{\varepsilon}\beta,$$
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} a_3 \beta_{Te}, \qquad \bar{\varepsilon} = a_2 + (\varepsilon_0 - 1)a_3 < 0. \quad (45)$$

Мощность, поглощаемая полупространством, в этом случае оказывается равной

$$S = 1 - |R|^2 = \frac{-4\bar{\varepsilon}\beta(n_z + a_1)}{(n_z + a_1)^2 + |a_1^2 + \bar{\varepsilon}|}. \quad (46)$$

Как видно из формул (46) и (37), в случае диффузного отражения электронов от границы величина энергии электромагнитной волны, поглощаемая плазмой, пропорциональна тепловой скорости электронов, а при зеркальном отражении — кубу тепловой скорости.

Вычисление интеграла (31) в случае сверханомального скин-эффекта проводится так же, как и при $p = 0$, и приводит к следующим значениям импеданса и коэффициента поглощения:

$$\zeta' + i\zeta'' = \frac{3\sqrt{3}}{8b}(1 + i\sqrt{3}),$$
$$S = 1 - |R|^2 = \frac{8(n_z + a_1)}{3\sqrt{3}b}. \qquad (47)$$

Различие в коэффициентах поглощения при зеркальном и диффузном отражении электронов от границы незначительно (численный множитель 8/9). Пределы применимости формул (47) те же, что и в диффузном случае, и состоят в выполнении неравенства (42).

В заключение выражаю благодарность Я. Б. Файнбергу за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Паули, Теория относительности, М.—Л., ГИТТЛ, 1947
2. K. Landecker, Phys. Rev., **97**, 849 (1955).
3. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, **29**, 491 (1959).
4. M. Lampert, Phys. Rev., **102**, 299 (1956).
5. В. И. Курилко, ЖТФ, **31**, 70 (1961).
6. В. И. Курилко, В. И. Мирошниченко, ЖТФ, **32**, 603 (1962).
7. И. М. Рапопорт, ДАН СССР, **59**, 1403 (1948).
8. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
9. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, 1965.
10. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
11. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, ГИТТЛ, М., 1951.
12. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, ГИФМЛ, М., 1962.

Поступила в редакцию
20 ноября 1965 г.

THE KINETIC THEORY OF EM-WAVE REFLECTION FROM MOVING PLASMA

V. I. Miroshnichenko

An oblique incident reflection of an electromagnetic wave is considered from a half-space filled with plasma. The plasma is moving in a medium where a slow wave may propagate ($V_\Phi < c$). Under the assumption of a pure mirror and pure diffusion reflection of electrons from the boundary, general expressions have been obtained for fields penetrating into plasma. The expressions for impedances and reflection factors have been derived. The approximate values of reflection and absorption factors have been calculated for limit cases of weak and strong spatial dispersion.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 533.951 : 621.371.18

О САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Г. Литвак

Изучается распространение двухмерных электромагнитных волн ТМ-типа в изотропной нелинейной плазме. Показана возможность самофокусировки таких волн, сопровождающейся образованием стационарного самоподдерживающегося волноводного канала. Рассчитана структура самосогласованных полей. Если в отсутствие поля диэлектрическая проницаемость плазмы ε отрицательна, самофокусировка возможна лишь при мощности волны, больше критической (когда на оси $\varepsilon>0$); в самосогласованном решении переход через точку $\varepsilon=0$ осуществляется скачком.

Как известно [3–5] , при распространении в изотропной среде сильных электромагнитных волн возможно явление самофокусировки поля, сопровождающееся образованием волноводного канала в среде. В работах [4,5] найдены самосогласованные стационарные нелинейные решения для цилиндрических волновых пучков ТЕ-типа, а в работе [6] обсуждаются некоторые вопросы квазиоптики параксиальных пучков в слабонелинейной изотропной среде. Самофокусировка волн в одноосном кристалле исследовалась в [7]. Предлагаемая работа посвящена изучению самоподдерживающихся волноводных каналов, образующихся в изотропной плазме при распространении сильных волн ТМ-типа*. Рассмотрение может быть легко обобщено на случай произвольной изотропной среды.

В стационарном состоянии диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной изотропной плазмы зависит от напряженности поля $\tilde{E}$ по закону [1,2,8,9]

$$\varepsilon = 1 - qe^{-|E|^2}, \qquad (1)$$

где

$$q = \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2}, \quad \omega_{p0}^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m}, \quad E = \frac{\tilde{E}}{E_p}, \quad E_p^2 = 8\varkappa T\omega^2 m/e^2,$$

N_0 — концентрация электронов в отсутствие поля, T — температура электронов, e и m — заряд и масса электрона, $\varkappa$ — постоянная Больцмана, ω — частота поля.

Рассмотрим бегущие двумерные волны ТМ-типа в среде с диэлектрической проницаемостью (1):

$$E_x = E_x(x)e^{i\omega t - ihz}; \quad E_z = iE_z(x)e^{i\omega t - ihz}. \qquad (2)$$

Здесь $E_x(x)$ и $E_z(x)$ — действительные амплитуды компонент поля**. Соответствующая система уравнений имеет вид

* На возможность самофокусировки волн ТМ-типа указал В. И. Таланов [4].

** Между компонентами выбран сдвиг фаз, равный $\pi/2$. Можно показать, что только при такой разности фаз существует решение уравнений поля, локализованное в x-направлении (поле и его производные убывают до нуля при $x\to\pm\infty$, а x — составляющая вектора Пойнтинга тождественно равна нулю).

$$k_0^2[\varepsilon(E^2)-\gamma^2]\,E_x - h\frac{dE_z}{dx}=0; \tag{3а}$$

$$\frac{d^2E_z}{dx^2}+k_0^2\varepsilon(E^2)E_z+h\frac{dE_x}{dx}=0, \tag{3б}$$

где $E^2=E_x^2+E_z^2$; $\gamma=h/k_0$; $k_0=\omega/c$. Эта система имеет первый интеграл

$$E_z^2=h^2E_x^2-k_0^2E^2-k_0^2q\,(e^{-E^2}-1)+C. \tag{4}$$

Здесь C — постоянная интегрирования, определяемая либо из граничных условий, либо из условий на бесконечности.

Рассматривая совместно уравнения (3а) и (4), получим

$$E_x^2=\frac{\gamma^2[q(1-e^{-E^2})-E^2]+C}{(1-qe^{-E^2})\,(1-qe^{-E^2}-2\gamma^2)}. \tag{5}$$

Уравнение (5) позволяет свести решение исходной системы (3) к построению траекторий на фазовой плоскости E_x, E_z и интегрированию на них уравнения (3а). Вместо (3а), однако, удобнее пользоваться уравнением $\mathrm{div}\,(\varepsilon E)=0$ *, из которого можно получить уравнение, описывающее поведение квадрата модуля амплитуды электрического поля:

$$\frac{\gamma}{k_0}\frac{dE^2}{dx}=\left[\frac{2q(\gamma^2-1+qe^{-E^2})\,e^{-E^2}E_x^2-\gamma^2(1-qe^{-E^2})}{1-qe^{-E^2}(1-2E_x^2)}+1-qe^{-E^2}-\gamma^2\right]E_xE_z. \tag{6}$$

Совместное исследование уравнений (5) и (6) с учетом соотношения $E_x^2+E_z^2=E^2$ позволяет полностью выяснить поведение функции $E^2(x)$. При анализе необходимо различать два случая: когда диэлектрическая проницаемость плазмы положительна во всем пространстве $\varepsilon(x)>0$ и когда $\varepsilon(x)$ — знакопеременная функция. Мы в основном будем исследовать случай $\varepsilon(x)>0$, который реализуется, если в точке, где поле равно нулю, $\varepsilon=1-q>0$, т. е. $q<1$.

Соответствующая структура фазовых плоскостей E_x, E_z и dE^2/dx, E^2 приведена на рис. 1, 2. Точка (0,0) на этих плоскостях является особой точкой типа «седло». Сепаратриса, идущая из седла в седло и охватывающая особую точку A типа «центр», соответствует локализованному решению—поле убывает при $x\to\pm\infty$. В самом деле, время движения (координата x) изображающей точки по фазовой траектории в состояние равновесия (0, 0) бесконечно велико. Следовательно, эта точка соответствует в пространстве $x=\pm\infty$.

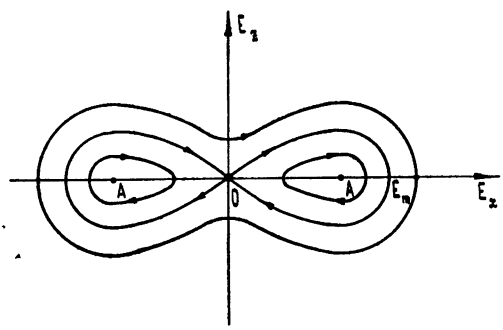


Рис. 1. Структура фазовой плоскости E_z, E_x.

Для выяснения зависимости от x амплитуд E_x и E_z удобно воспользоваться уравнением

$$\frac{\gamma}{k_0}\frac{dE_x}{dx}=\frac{2q(\gamma^2-1+qe^{-E^2})\,E_x^2-\gamma^2(1-qe^{-E^2})}{1-qe^{-E^2}(1-2E_x^2)}(E^2-E_x^2)^{1/2}. \tag{7}$$

* Нетрудно показать, что это уравнение является следствием системы (3).

Структура фазовой плоскости dE_x/dx, E_x качественно совершенно аналогична приведенной на рис. 2. Решение, соответствующее самофокусировке, также изображается сепаратрисой и получается из уравнений (5), (7), если в (5) положить $C = 0$. Фазовые траектории, получающиеся при других значениях C, соответствуют нелокализованным стационарным волнам, пространственный период которых зависит от амплитуды. Траектории, заключенные внутри сепаратрисы, отвечают волнам, являющимся нелинейным аналогом неоднородных плоских волн в свободном пространстве. Точка A (рис. 2) соответствует однородной плоской волне $E_x = E_0 e^{i\omega t - ihz}$, $E_z = 0$. Фазовые траектории, охватывающие сепаратрису, изображают нелинейные собственные волны плоского волновода. В линейном случае эти траектории переходят в эллипсы.

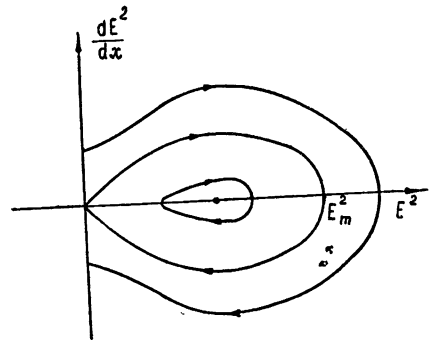


Рис. 2. Структура фазовой плоскости dE^2/dx, E^2.

Таким образом, анализ уравнений поля позволяет сделать вывод, что при распространении в изотропной плазме сильной волны возможна самофокусировка поля, сопровождающаяся вытеснением плазмы и образованием самоподдерживающегося волноводного канала. В дальнейшем речь будет идти только об этом локализованном решении. К сожалению, зависимость амплитуд E_x, E_z и концентрации N от x может быть найдена лишь с помощью численных методов: решить уравнения (5)—(7) аналитически не удается. Результаты численного расчета с помощью электронной вычислительной машины приведены на рис. 3 для нескольких значений параметров. Структура найденного локализованного решения такова, что на оси образующегося

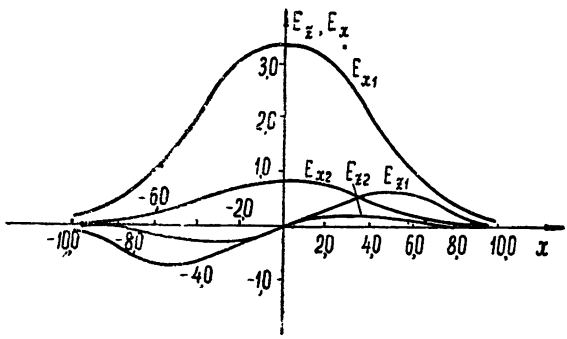


Рис. 3. Поперечное распределение поля $E_z(x)$, $E_x(x)$. Индекс 1 соответствует q=0,6; γ^2=0,8; индекс 2—q=0,6; γ^2=0,6.

волноводного канала продольная составляющая поля $E_z = 0$, а поперечная E_x принимает максимальное значение. При стремлении амплитуды поля E^2 к нулю самофокусирующееся решение переходит в однородную плоскую волну.

Постоянная распространения γ и, следовательно, ширина электромагнитного пучка зависит от максимальной амплитуды поля E_m (или точнее от величины электромагнитной мощности пучка P). Характери-

стическое уравнение легко может быть получено из (5), если в нем положить $C=0$, $E_x=E_m$ и $E_z=0$ при $x=0$:

$$\gamma^2 = \frac{(1-qe^{-E_m^2})^2}{1-2qe^{-E_m^2}+qE_m^{-2}(1-e^{-E_m^2})}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что γ^2 с изменением E_m^2 от нуля до бесконечности меняется от значения ε_∞, соответствующего постоянной распространения однородной плоской волны в плазме в линейном случае, до единицы. Следовательно, максимально достижимое замедление волны из-за нелинейности равно $1/\varepsilon_\infty$, а минимальная фазовая скорость равна скорости света в вакууме c. Таким образом, при любой амплитуде волна является замедленной по сравнению с однородной плоской волной в плазме. Интересно, что в случае слабой нелинейности $E_m^2 \ll 1$ характеристическое уравнение для ТМ-волны точно совпадает с уравнением для ТЕ-волны:

$$\gamma_{\text{ТМ}}^2 = 1-q+\frac{q}{2}E_m^2 = \gamma_{\text{ТЕ}}^2. \tag{9}$$

Можно показать, что при $\varepsilon_\infty > 0$ самофокусировка возможна при любом уровне мощности волны (при любой малой амплитуде E_m). Совершенно другая ситуация имеет место в случае $\varepsilon_\infty < 0$ $(q > 1)$. Как видно из дисперсионного уравнения (8), (9), при $q > 1$ величина $\gamma^2 > 0$, если амплитуда поля на оси больше некоторой критической аплитуды $E_{\text{кр}}$, получаемой из условия $\gamma^2=0$. В частности, когда $(q-1)/q \ll 1$, можно пользоваться приближением слабого поля

$$E_m^2 > E_{\text{кр}}^2 = \frac{2(q-1)}{q}. \tag{10}$$

Тогда диэлектрическая проницаемость на оси $(x = 0)$

$$\varepsilon = 1 - q + qE_m^2 > q - 1 > 0. \tag{11}$$

Следовательно, $\varepsilon(x)$ является знакопеременной функцией и в некоторой точке $x = x_0$ обращается в нуль, а поперечная составляющая поля E_x в этой точке имеет особенность, что существенно усложняет задачу. Для отыскания решения в этом случае необходимо проведение довольно сложных численных расчетов. Мы здесь ограничимся лишь некоторыми качественными соображениями о характере решения.

Из линейной теории известно, что в неоднородной плазме вблизи точки плазменного резонанса $\varepsilon(x)=0$ составляющая поля E_x, направленная вдоль градиента $\varepsilon(x)$ имеет особенность $E_x \sim 1/\varepsilon$, причем характер резонансного нарастания поля в этой области существенно зависит от величины производной $d\varepsilon/dx$. В двух предельных случаях, когда точка $\varepsilon(x)=0$ лежит либо на резком перепаде $(d\varepsilon/dx = \infty)$, либо на «плато» $(d\varepsilon/dx=0)$, особенность поля исчезает. Ясно, что нелинейные эффекты должны играть особенно существенную роль в области резонансного нарастания поля. Как показано в [11], нелинейные эффекты приводят к тому, что в неоднородной плазме, взаимодействующей с высокочастотным полем, распределение концентрации вблизи точки $x = x_0$ приобретает форму ступеньки, причем сама точка оказывается либо на крутом, либо на пологом участке ступеньки в зависимости от направления предшествующего изменения поля (гистерезис).

Можно ожидать, что в нашей задаче, где переход через точку $\varepsilon = 0$ происходит из-за нелинейных эффектов, будет реализоваться аналогичная ситуация. Однако, чтобы провести корректный анализ, нужно учесть какой-либо механизм диссипации. Это приводит к существенному усложнению задачи. Так, при учете столкновений* приходится иметь дело с нелинейными уравнениями в частных производных с неразделяющимися переменными, а учет пространственной дисперсии повышает порядок системы уравнений (3). Все-таки, оставаясь даже в рамках исходной системы уравнений (3), можно показать, что существует локализованное решение, в котором переход через точку $\varepsilon=0$ осуществляется скачком.

Заметим, что задачу о распространении в плазме волны большой мощности можно решить как линейную кусочно-однородную, считая, что поле создает в плазме канал с $\varepsilon=1$; на границе канала диэлектрическая проницаемость скачком меняется до значения ε_∞. Ширина канала может быть определена, если приравнять на резкой границе плазма—вакуум электромагнитное и газокинетическое давление. Аналогично находится критическая мощность, необходимая для самофокусировки симметричной цилиндрической волны ТЕ-типа [5].

Представляет также интерес учет влияния нелинейных эффектов на распространение поверхностных волн вдоль неоднородных плазменных слоев, когда в переходной области плазма — вакуум имеется точка плазменного резонанса. Как известно [12], в этой области возможно сильное поглощение энергии поля, приводящее к затуханию поверхностных волн. Рассмотрение может быть проведено на квазистатической модели совершенно аналогично [11]. По-видимому, и в этом случае нелинейные эффекты должны привести к образованию скачков концентраций и существенному уменьшению затухания поверхностных волн.

В заключение следует заметить, что нелинейные эффекты могут привести к заметному изменению дисперсионных характеристик волн, распространяющихся в ограниченной плазме (плазменных слоях и волноводах, заполненных плазмой).

Автор признателен М. А. Миллеру, В. И. Таланову и В. Б. Гильденбургу за полезные дискуссии и ценные замечания, а также Г. М. Жислину и М. Н. Оржеховской за проведение вычислений на БЭСМ-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. A. H. Boot, S. A. Self, R. Harvie, J El. Control, **4**, 434 (1958).
2. Е. И. Якубович, Дипломная работа, Горьковский университет, 1958.
3. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, **42**, 1567 (1962).
4. В. И. Таланов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **7**, 564 (1964)
5. R. Y. Chiao, E. Garmire, C H Townes, Phys. Rev. Lett., **13**, 479 (1964).
6. В. И. Таланов. Письма в ЖЭТФ, **2**, 222 (1965).
7. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч зав—Радиофизика, **8**, 1148 (1965).
8. А. В .Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, **34**, 242 (1958).
9. А. Г Литвак, М. И Петелин, Е И. Якубович, ЖТФ, **35**, 108 (1965).
10. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
11. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, **46**, 2156 (1964).
12. К. Н Степанов, ЖТФ, **35**, 1002 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 30 ноября 1965 г.

* Учет влияния слабого поглощения на самофокусировку поля может быть проведен обычным энергетическим методом.

ON ELECTROMAGNETIC WAVE SELF-FOCUSING IN ISOTROPIC PLASMA

A. G. Litvak

Propagation is studied of two-dimensional electromagnetic waves of *TM*-type in an isotropic nonlinear plasma. The posibility of self-focusing of these waves has been shown, followed by formation of a stationary self-maintaining waveguide channel. The structure of self-consistent fields has been calculated. If in the absence of field the plasma permittivity ε is negative, self-focusing is possible only when the wave power is greater than a critical one (for $\varepsilon>0$ on the axis). In a self-consistent solution, the transition through the point $\varepsilon=0$ is realized through discontinuity.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.317.335.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В. К. Полищук

Исследуется возможность измерения диэлектрической проницаемости ионизированной среды с учетом ее неоднородности В качестве датчика предлагается линия с поверхностной волной Приводятся результаты расчетов зависимости постоянной распространения поверхностной волны в линии от параметров среды и скорости их изменения.

ВВЕДЕНИЕ

На практике иногда требуется измерить параметры неоднородной среды (в частности, плазмы) вблизи некоторой поверхности. Локальные измерения в этом случае могут быть проведены с помощью линии с поверхностной волной. Действительно, основная часть энергии поверхностной волны переносится в поддерживающей ее линии (для некоторых типов линий) и в пограничном плазменном слое. Ширину области, в которой распространяется энергия, можно сделать достаточно малой соответствующим выбором параметров линии. Поэтому поведение функции, описывающей зависимость эффективной диэлектрической проницаемости от координат, именно в этой области оказывает основное влияние на скорость распространения поверхностной волны. Измеряя набег фазы между двумя точками, расположенными на пути распространения волны, можно судить о характере указанной функции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, состоящую из плоской поверхности, направляющей поверхностную волну, и неоднородного изотропного полупространства, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon_2(x)$ изменяется в направлении нормали к направляющей поверхности (рис. 1). В качестве поверхности, поддерживающей поверхностную волну, можно взять, например, плоский слой однородного диэлектрика на металлической подложке или ребристую структуру.

Пусть функция $\varepsilon_2(x)$ вблизи границы неоднородной среды с измерительной линией (плоскость $x = 0$) может быть представлена рядом Тейлора. Тогда поведение $\varepsilon_2(x)$ в окрестности точки $x = 0$ определяется, главным образом, величинами $\varepsilon_2(0)$ и $\varepsilon_2'(0) = d\varepsilon_2(x)/dx|_{x=0}$. В связи с этим истинный закон $\varepsilon_2(x)$ мы будем заменять некоторой эталонной функцией $f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $f(0)$ и $f'(0)$ определяются равенствами

$$f(0) = \varepsilon_2(0),$$

$$f'(0) = \varepsilon_2'(0);$$

2) для $f(x)$ можно найти связь между $f(0)$, $f'(0)$ и скоростью распространения поверхностной волны.

Если условие 2 выполняется, то с помощью двух независимых измерений набега фазы между передающей (в) и приемной (а) щелевыми

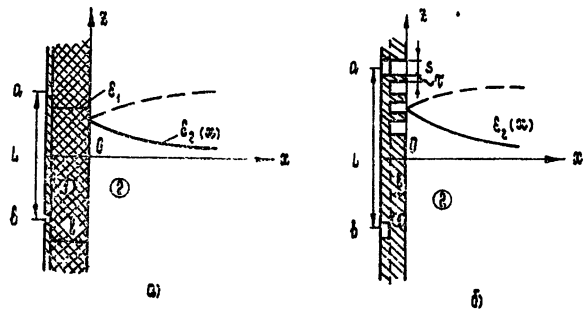


Рис. 1. Постановка задачи:

а) неоднородная среда над слоем однородного диэлектрика, б) неоднородная среда над ребристой структурой.

антеннами можно определить $f(0)$ и $f'(0)$, а следовательно, $\varepsilon(0)$ и $\varepsilon'(0)$. Выявление же полного закона $\varepsilon_2(x)$ (даже если бы удалось установить связь между скоростью распространения поверхностной волны и всеми коэффициентами разложения $\varepsilon_2(x)$ в ряд Тейлора) потребовало бы бесконечно большого числа независимых измерений.

Наконец, для простоты мы будем решать задачу о распространении поверхностной волны в системе импедансная поверхность — неоднородный слой вместо задачи о возбуждении данной системы с помощью щели. Будем считать также, что в исследуемой неоднородной среде отсутствует поглощение.

2. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, при распространении электромагнитных волн в неоднородной среде (в частности, в плазме) векторы электрического ($\boldsymbol{E}$) и магнитного ($\boldsymbol{H}$) полей удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\begin{aligned} &\Delta \boldsymbol{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + k_0^2 \varepsilon \boldsymbol{E} = 0, \\ &\Delta \boldsymbol{H} + \frac{1}{\varepsilon} [\operatorname{grad} \varepsilon, \operatorname{rot} \boldsymbol{H}] + k_0^2 \varepsilon \boldsymbol{H} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ $ф \cdot м^{-1}$, $\mu_0 = \dfrac{4\pi}{10^7}$ $гн \cdot м^{-1}$, ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды. Принято также, что поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ зависят от времени по закону $e^{i\omega t}$. Достаточно решить одно из уравнений (1), находя другое поле с помощью уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= i \omega \varepsilon \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -i \omega \mu_0 \mu \boldsymbol{H}. \end{aligned}$$

Так как в качестве источника электромагнитных волн мы берем щель, возбуждающую поперечные магнитные волны, удобно пользоваться вторым из уравнений (1). Дело в том, что $\boldsymbol{H}$ в этом случае сохраняет направление, и можно выбрать систему координат, в которой поле $\boldsymbol{H}$ будет иметь лишь одну компоненту. В координатах рис. 1 поле

H ТМ-волны имеет лишь составляющую H_y, для которой векторное волновое уравнение превращается в скалярное:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}-\frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}\frac{\partial H_y}{\partial x}+k_0^2\varepsilon(x)\,H_y=0.$$

Считая, что поверхностная волна распространяется вдоль оси z, представим функцию H_y в виде

$$H_y=e^{-ihz}v\,(x)\,.$$

Тогда для $v(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$v''(x)-\frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}\,v'(x)+[k_0^2\varepsilon(x)-h^2]\,v(x)=0. \tag{2}$$

Компоненты электрического поля найдутся из соотношений

$$\begin{aligned} E_x&=-\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)}\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{h}{\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)}\,v(x)\,e^{-ihz},\\ E_z&=\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)}\frac{\partial H_y}{\partial x}=\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)}\,v'(x)\,e^{-ihz}. \end{aligned} \tag{3}$$

В дальнейшем индексы 1 или 2 будут относиться к величинам, связанным с соответствующей средой согласно рис. 1.

В качестве граничного условия на поверхности $x=0$ возьмем равенство

$$Z_{\tau 1}(0)=Z_{\tau 2}(0), \tag{4}$$

где

$$Z_\tau=\frac{E_z}{H_y}\,.$$

Для случая, когда в качестве линии с поверхностной волной взят однородный диэлектрический слой на металлической подложке (рис. 1а) [1]

$$Z_{\tau 1}=-\frac{q}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}\operatorname{tg}[q(x+l)],$$

где

$$q^2+h^2=k_0^2\varepsilon_1.$$

В случае ребристой поверхности (рис. 1б) [2]

$$Z_{\tau 1}=-\frac{s}{s+\tau}\,\frac{k_0}{i\omega\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1}}\operatorname{tg}[k_0\sqrt{\varepsilon_1}\,(x+l)];$$

$Z_{\tau 2}$ при произвольном законе $\varepsilon_2(x)$ имеет вид

$$Z_{\tau 2}=\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2(x)}\,\frac{v_2'(x)}{v_2(x)}\,.$$

Граничное условие (4) приводит к следующим характеристическим уравнениям для случая однородного диэлектрика и ребристой структуры соответственно:

$$\frac{\varepsilon_2(0)}{\varepsilon_1} ql \operatorname{tg}(ql) = -l \frac{v_2'(0)}{v_2(0)}, \quad q^2+h^2=k_0^2\varepsilon_1; \tag{5}$$

$$\frac{s}{s+\tau} \frac{k_0 l\, \varepsilon_2(0)}{\sqrt{\varepsilon_1}} \operatorname{tg}(k_0 \sqrt{\varepsilon_1}\, l) = -l \frac{v_2'(0)}{v_2(0)}. \tag{5a}$$

Приведем несколько функций $f(x)$, при подстановке которых вместо $\varepsilon(x)$ в уравнение (2) решения последнего выражаются через известные специальные функции:

1) функции $A^2e^{-2x/a}$ и $A^2(1+x/a)^{-2}$ приводят к уравнению Бесселя;

2) функции $A^2(1+2x/a)^{-1}$ и $A^2(1-x/a)^2$ приводят к уравнениям Уиттекера;

3) функция $A^2[1+\alpha(1-e^{-2x/a\alpha})]$ приводит к гипергеометрическому уравнению.

Последняя функция содержит три свободных параметра и потому с ее помощью можно аппроксимировать истинный закон $\varepsilon_2(x)$ в точке $x=0$ с точностью до третьей производной. У всех приведенных функций

$$f(0)=A^2, \quad f'(0)=-\frac{2}{a}A^2$$

и

$$\lim_{|a|\to\infty} f(x) = A^2.$$

Однако при $\varepsilon_2(x)=A^2$, т. е. для однородной среды 2, решением уравнения (2), убывающим на бесконечности, является функция [1]

$$v_2(x) = Ce^{-px},$$

где

$$p^2 + (k_0A)^2 = h^2.$$

Поэтому равенство

$$\lim_{|a|\to\infty} v_2(x) = Ce^{-px} \tag{6}$$

будет служить для нас одним из критериев правильности выбора линейной комбинации решений уравнения (2).

Остановимся подробнее на функции $f(x)=A^2e^{-2x/a}$. Подставив ее в (2) вместо $\varepsilon_2(x)$, получим уравнение

$$v_2'' + \frac{2}{a}v_2' + [(k_0A)^2 e^{-2x/a} - h^2]v_2 = 0, \tag{7}$$

которое заменой переменных

$$\zeta = k_0Aae^{-x/a}, \quad v_2(x)=\zeta\, u(\zeta)$$

приводится к уравнению Бесселя для функции $u(\zeta)$:

$$u''(\zeta) + \frac{1}{\zeta}u'(\zeta) + \left(1 - \frac{1+(ka)^2}{\zeta^2}\right)u(\zeta) = 0.$$

Выберем в качестве решения уравнения (7) функцию

$$v_2(x)=H_2e^{-x/a}\begin{cases} J_\nu\,(k_0aAe^{-x/a}) & (a>0)\\ N_\nu\,(k_0|a|\,Ae^{-x/a}) & (a<0)\end{cases}, \qquad (8)$$

$$\nu=\sqrt{1+(ah)^2}$$

Для обоснования такого выбора следует рассмотреть поведение функции (8) при больших значениях $|a|$, а также при $x\gg|a|$. Прежде всего заметим, что в случае однородной среды $2(\varepsilon_2(x)=A^2)$ для существования поверхностной волны необходимо выполнение неравенства

$$h^2>(k_0A)^2$$

(поверхностная волна является замедленной), которое должно выполняться также и при слабой неоднородности ($|a|\to\infty$). Поэтому при достаточно больших значениях $|a|$ верны неравенства

$$\zeta=k_0|a|\,Ae^{-x/a}<|a|\,h<\sqrt{1+(ah^2)}=\nu,$$

т. е. аргумент функции (8) в этом случае меньше индекса и оба они велики. Но при таких условиях для $J_\nu(\zeta)$ и $N_\nu(\zeta)$ справедливы «приближения тангенсами» [3], из которых можно получить разложение для $v_2(x)$ по обратным степеням параметра a. Главным членом разложения является функция Ce^{-px} как при положительных, так и при отрицательных значениях a. Однако младшие члены этого разложения проще находить непосредственно из дифференциального уравнения (7) (см. конец раздела).

Рассмотрим теперь поведение функции $v_2(x)$, определяемой формулой (8), на бесконечности ($|x/a|\gg1$).

Пусть $a>0$. Тогда при достаточно больших значениях xa^{-1} аргумент функции Бесселя в (8) может быть сделан столь малым, что будут верны приближенные выражения

$$J_\nu\,(k_0\,aAe^{-x/a})\simeq\frac{(k_0Aae^{-x/a})^\nu}{2^\nu\,\Gamma\,(1+\nu)}\;;$$

$$v_2(x)=H_2e^{-x/a}\,J_\nu\,(k_0aAe^{-x/a})\simeq Ce^{-x(\nu+1)/a}\,.$$

Таким образом, при убывающем законе $\varepsilon_2(x)$ выбранная функция $v_2(x)$ на бесконечности экспоненциально убывает.

Пусть теперь $a<0$. Тогда при достаточно больших значениях $x|a|^{-1}$ аргумент функции Неймана в (8) может стать сколь угодно большим. При этом

$$N_\nu\,(k_0A|a|\,e^{x/|a|})\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(k_0A|a|e^{x/|a|})^{-1/2}\,\sin\,(k_0A|a|\times$$

$$\times e^{x/|a|}-\frac{2\nu+1}{4}\,\pi\,);$$

$$v_2(x)=H_2e^{\nu/|a|}\,N_\nu\,(k_0A|a|\,e^{x/|a|})\simeq Ce^{x/2|a|}\times$$

$$\times\sin\,(k_0A|a|\,e^{\nu/|a|}-\frac{2\nu+1}{4}\,\pi)\,.$$

Отсюда видно, что при растущем законе $\varepsilon_2(x)$ функция (8) на бесконечности растет. Оказывается, что в этом случае любое решение уравнения (7) растет на бесконечности, что связано с выбором физически не реализуемой функции

$$\varepsilon_2(x) = A^2 e^{2x|a|^{-1}}.$$

Выбранное же нами решение обладает тем преимуществом, что

$$\lim_{|a|\to\infty} H_{-}e^{x|a|^{-1}} N_{\nu}(k_0|a| A e^{x|a|^{-1}}) = Ce^{-px}.$$

Равенство (6), таким образом, определяет здесь выбор решения уравнения (7).

Итак, магнитное поле поверхностной волны в неоднородном пространстве может оказаться нарастающим. Однако вектор Пойнтинга $\Pi = [E, H^*]$ всегда остается экспоненциально убывающей функцией на бесконечности. При $a < 0$ это происходит за счет быстрого убывания определяемых формулами (3) компонент электрического поля. Отсюда видно, что в неоднородной среде волну можно считать поверхностной только в энергетическом смысле. Именно ограниченность области, в которой распространяется энергия поверхностной волны, и позволяет использовать физически не реализуемые функции типа $A^2 e^{2x|a|^{-1}}$ для расчетов.

В заключение данного раздела найдем асимптотическое разложение $v_2(x)$ при слабой неоднородности исследуемой среды. Положим $|a| \gg 1$ и представим $v_2(x)$ в виде

$$v_2(x) = C \exp\left(-\int_0^x F(\xi)\, d\xi\right).$$

Подставляя это выражение в (7), получим уравнение для $F(x)$:

$$F' - F^2 + \frac{2}{a} F + [h^2 - (k_0 A)^2 e^{-2x/a}] = 0. \tag{9}$$

Представим далее $F(x)$ в виде разложения

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(x)}{a^k}.$$

Подставляя его в (9) и приравнивая к нулю члены при одинаковых степенях параметра a, получим рекурентную систему уравнений

$$F_0' - F_0^2 + h^2 - (k_0 A)^2 = 0,$$

$$F_1' + 2F_0 - 2F_0 F_1 + 2(k_0 A)^2 x = 0,$$

$$F_2' + 2F_1 - F_1^2 - 2F_0 F_2 - 2(k_0 A)^2 x^2 = 0,$$

. . . . . ,

из которой найдем последовательно

$$F_0 = \sqrt{h^2 - (k_0 A)^2} = p,$$

$$F_1 = 1 + \frac{(k_0 A)^2}{2p^2} + \frac{(k_0 A)^2}{p} x,$$

$$F_2=\frac{1}{2p}-\frac{(k_0A)^2}{2p^3}-\frac{5(k_0A)^4}{8p^5}-\left[\frac{(k_0A)^2}{p^2}+\frac{(k_0A)^4}{p^4}\right]x-$$

$$-\left[\frac{(k_0A)^2}{p}+\frac{(k_0A)^4}{2p^3}\right]x^2,$$

. . . . . ,

Если теперь подставить выражение

$$v_2(x)=C\exp\left[-\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(\xi)}{a^k}\right)d\xi\right],$$

например, в первое из характеристических уравнений (5), то оно примет вид

$$\frac{A^2}{\varepsilon_1}\,q\,l\,\mathrm{tg}\,(ql)=lF(0)=pl+l\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k(0)}{a^k}=$$

$$=pl+\frac{l}{a}\left(1+\frac{(k_0A)^2}{2p^2}\right)+\left(\frac{l}{a}\right)^2\frac{1}{2pl}\left[1-\frac{k_0A}{p^2}-\frac{5(k_0A)^4}{4p^4}\right]+\ldots$$

и очевидным образом перейдет в известное уравнение:

$$\frac{A^2}{\varepsilon_1}ql\,\mathrm{tg}\,(ql)=pl$$

при стремлении $|a|$ к бесконечности.

Итак, найден вид функции $v_2(x)$ и ее асимптотическое разложение при слабой неоднородности исследуемой среды, когда $\varepsilon_2(x)$ в точке $x=0$ аппроксимирована функцией

$$f(x)=A^2e^{-2x/a}.$$

Такие же операции можно проделать и при использовании других эталонных функций. Однако, если $\varepsilon_2(x)$ монотонна и не обращается в нуль на конечном интервале изменения x, то в качестве эталонных наиболее удобны функции

$$A^2e^{-2x/a},\quad A^2(1+x/a)^{-2},$$

так как для них $v_2(x)$ выражается через хорошо изученные цилиндрические функции. Составление программ для вычисления цилиндрических функций на электронных вычислительных машинах при произвольных значениях аргумента и индекса также не представляет большого труда благодаря простоте их степенных рядов.

3. РЕШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для функции $v_2(x)$, определяемой формулой (8), характеристические уравнения (5) принимают вид

$$\frac{A^2}{\varepsilon_1}ql\,\mathrm{tg}\,(ql)=R(a,\,l,\,k_0,\,A)\qquad(10)$$

в случае диэлектрического слоя и

$$\frac{s}{s+\tau} A^2 \frac{k_0 l}{\sqrt{\varepsilon_1}} \operatorname{tg}(k_0 \sqrt{\varepsilon_1} l) = R(a, l, k_0, A) \qquad (11)$$

в случае ребристой структуры. Здесь

$$R(a, l, k_0, A) = \frac{l}{a} + \frac{k_0 l A}{2} \begin{cases} \dfrac{J_{\nu-1}(k_0 a A) - J_{\nu+1}(k_0 a A)}{J_\nu(k_0 a A)} & (a>0) \\ -\dfrac{N_{\nu-1}(k_0|a|A) - N_{\nu+1}(k_0|a|A)}{N_\nu(k_0|a|A)} & (a<0) \end{cases}$$

Уравнения (10) и (11) определяют волновые числа h поверхностных волн, распространяющихся над соответствующей замедляющей поверхностью. В них входят величины

$$A = \sqrt{\varepsilon_2(0)}, \quad a = -2\frac{\varepsilon_2(0)}{\varepsilon_2'(0)},$$

характеризующие неоднородный слой. Это дает принципиальную возможность по двум независимо измеренным значениям волнового числа h определять $\varepsilon_2(0)$ и $\varepsilon_2'(0)$, если, конечно, замедляющая поверхность допускает распространение только одного типа волны. Два независимых измерения волнового числа h удобно проводить на двух линиях с различным значением поверхностного импеданса $Z_{\tau 1}(0)$. В случае, когда $\varepsilon_2(x)$ не зависит от частоты, такие измерения можно сделать и на одной и той же линии на двух частотах.

Характеристические уравнения (10) и (11) (так же, как для предельного случая $a \to \infty$) можно решать графически. Однако для этого нужны достаточно подробные по индексу таблицы функций Бесселя и Неймана. Мы приводим здесь решения уравнения (10), выполненные на электронной вычислительной машине при следующих значениях параметров:

$$\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 10 \text{ см}; \quad l = 1{,}3 \text{ см}; \quad s = 1{,}0 \text{ см}; \quad \tau = 0{,}2 \text{ см};$$

$$0{,}2 \leqslant A^2 \leqslant 1{,}0; \quad 0{,}5 \leqslant k_0|a|A \ll 20.$$

Решения представлены в виде семейства функций $h(a)$ с параметром A^2. Сплошные и пунктирные линии соответствуют двум значениям поверхностного импеданса ребристой структуры. Штрих-пунктирной линией ограничены области, в которых при 10% точности измерения волнового числа неоднородная среда воспринимается как однородная.

Если неоднородность задана в виде $\varepsilon_2(x) = A^2 e^{-2x/a}$, то параметр a определяет расстояние, на котором диэлектрическая проницаемость изменяется в e^2 раз. Из графиков видно, что если $\varepsilon_2(x)$ изменяется в e^2 раз на расстоянии, большем одной-двух длин волн генератора, то такая неоднородность оказывает незначительное влияние на скорость распространения поверхностной волны и потому не может быть замечена при принятой точности измерений.

Особенностью кривых рис. 3 является то, что в области малых значений параметра a они идут в бесконечность. Такое поведение связано с приближенным характером равенства

$$Z_{\tau 1} = -\frac{s}{s+\tau} \frac{k_0}{i\omega\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1}} \operatorname{tg} k_0\sqrt{\varepsilon_1}(x+l).$$

На рис. 2, напротив, при малых значениях параметра a функция $h(a)$ сбращается в нуль. В этом случае рассматриваемую среду можно сравнить с запредельным волноводом: энергия поверхностной волны распространяется в пространстве, ограниченном с одной стороны идеально проводящей плоскостью, а с другой стороны — той частью неоднородной среды, в которой диэлектрическая проницаемость близка к нулю. При достаточной близости этих двух границ происходит срыв поверхностной волны.

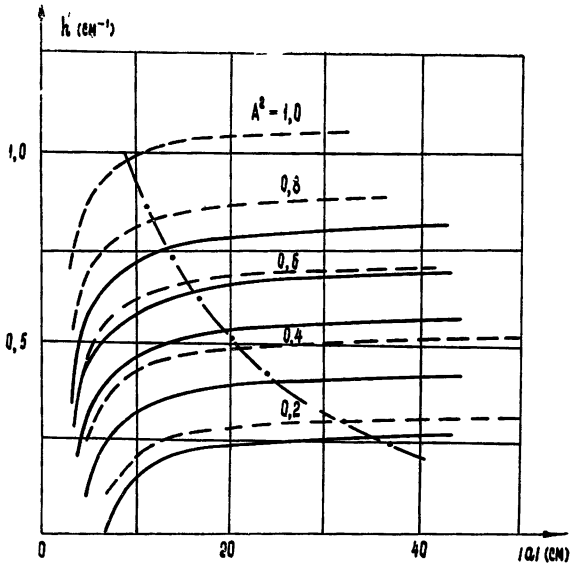


Рис. 2. Решение характеристического уравнения ($a > 0$):
$\varepsilon_1 = 2.2$ (пунктир); $\varepsilon_1 = 1{,}0$ (сплошные кривые).

Определение параметров неоднородной среды A^2 и a по двум измеренным значениям волнового числа h_1 и h_2 может быть проведено следующим образом (например, при $a > 0$). На рис. 2 приведем две прямые, параллельные оси абсцисс, с ординатами h_1 и h_2. В пересечении с соответствующими семействами кривых $h(a, A^2)$ они зададут функции $A_1^2(a)$, $A_2^2(a)$. Решая уравнение $A_1^2(a) - A_2^2(a) = 0$, получим интересующие нас числа.

Для экспериментальной проверки развитой здесь теории был создан макет, принципиально не отличающийся от описанного в [4]. Исследуемая среда с $\varepsilon < 1$ реализовалась так же, как и в [4], в виде сетки из металлических стержней, причем диаметр стержней увеличивался с удалением от ребристой структуры, что создавало необходимую неоднородность. На волне $\lambda_0 = 10$ *см* для создания искусственного диэлектрика с $0{,}5 \leqslant \varepsilon_2(0) \leqslant 1{,}0$ потребовалось бы брать металлические стержни диаметром $d < 0{,}1$ *мм*, что сильно затруднило бы изготовление такого диэлектрика. Поэтому изготовлялась среда с $0{,}25 \leqslant \varepsilon_2(0) \leqslant 0{,}5$. При таких значениях $\varepsilon_2(0)$ наибольшую ошибку в результат измерения вносит пространственная волна, создаваемая источником. В итоге были получены значения

параметров среды, отличающиеся от расчетных для A^2 на 8% и для a — на 18%.

В заключение автор благодарит Е. Н. Васильева за предложенную тему и помощь в работе.

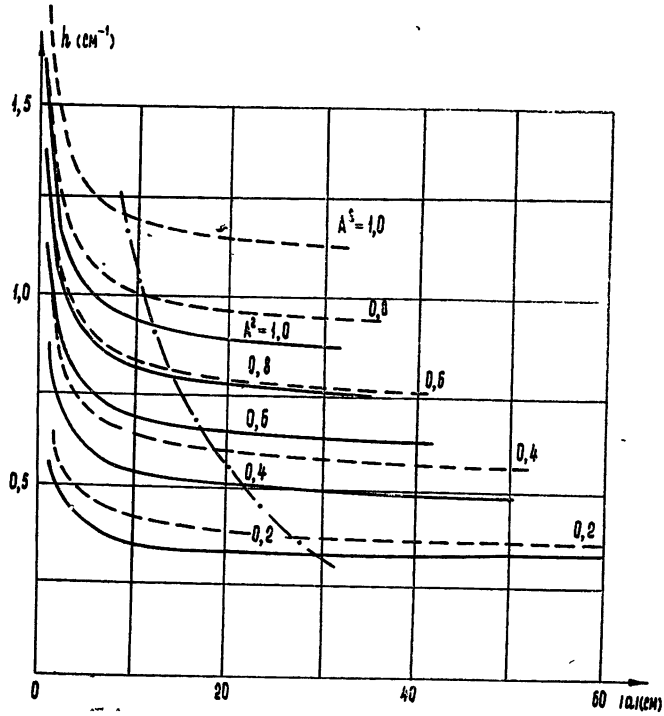


Рис. 3. Решение характеристического уравнения ($a<0$):
$\varepsilon_1=2{,}2$ (пунктир); $\varepsilon_1=1{,}0$ (сплошные кривые).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М, 1957.
2. Г. Т. Марков, Антенны, Госэнергоиздат, М., 1950.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963
4. Н. С. Орлова, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 8, 1047 (1965).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
29 ноября 1965 г.

APPLICATION OF SURFACE WAVES IN MEASURING INHOMOGENEOUS MEDIA PERMITTIVITY

V. K. Polishchouk

The possibility is investigated of measuring the permittivity of an ionized medium with taking into account its inhomogeneity. The line with a surface wave is assumed as a sensor. The calculation results are given of the dependence of a constant of the surface wave propagation in the line upon the medium parameters and the rate of their change.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.372.853 32

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

В. Ф. Вирко и С. М. Левитский

Исследуются изменения параметров плазменного волновода в зависимости от мощности СВЧ сигнала, обусловленные увеличением концентрации электронов в плазме за счет дополнительной ионизации газа СВЧ полем. Показано, что с увеличением мощности сигнала фазовая скорость плазменно-волноводных волн увеличивается, а их затухание уменьшается. Подобная нелинейность плазменного волновода обладает заметной инерционностью.

Поскольку плазменный волновод представляет собой передающую линию, содержащую такой заведомо нелинейный элемент, как плазму, следует ожидать, что по мере увеличения мощности сигнала в подобном волноводе должны проявляться нелинейные свойства.

Нелинейные свойства плазменных волноводов рассматривались в работах [1, 2]. Там было показано, что при соизмеримости фазовой скорости волны с переменной составляющей скорости электронов в плазменном волноводе имеют место нелинейные явления, приводящие к появлению зависимости фазовой скорости от амплитуды сигнала, искажению формы сигнала, появлению комбинационных частот и т. п. Приведенные в работах [3, 4, 10] экспериментальные данные, полученные на частотах порядка $10^4 \div 10^6$ *гц*, подтверждают выводы теории. Однако, используя критерий [1]

$$\frac{v_e}{v_\phi} = \frac{eE_m\lambda}{2\pi mcv_\phi} \simeq 1,$$

можно подсчитать, что в диапазоне сверхвысоких частот подобные нелинейные явления будут иметь место, если напряженность электрического поля волны составит $10^3 \div 10^5$ *в·см*$^{-1}$.

Следует ожидать, что уже при значительно меньших напряженностях электрического поля должен проявляться другой тип нелинейных явлений, обусловленных изменением параметров плазмы за счет воздействия на нее электрического поля волны.

Нелинейные явления подобного типа наблюдаются при распространении радиоволн в ионосфере [5]. Экспериментально они были исследованы в ряде работ [6] для случая, когда плазма частично или целиком заполняла сечение металлического трубчатого волновода. В частности, в работе [7] показано, что повышение мощности СВЧ сигнала в такой системе приводит к увеличению фазовой скорости волны за счет дополнительной ионизации газа сверхвысокочастотным полем сигнала.

Нелинейные явления в плазменном волноводе, обусловленные возмущением параметров плазмы, рассматривались в работе [8], где был описан эффект кросс-модуляции при одновременном распространении в плазменном волноводе двух волн.

Критерием появления подобного рода эффектов может служить условие $p_{\text{вч}}/p_0 \simeq 1$, где p_0 — мощность, затрачиваемая на поддержа-

ние плазмы, а $p_{вч}$ — мощность потерь сигнала, распространяющегося вдоль плазменного столба, отнесенные к единице длины этого столба. Действительно, и та, и другая мощность расходуется в конечном счете на нагрев электронного газа, а при их соизмеримости следует ожидать существенного воздействия СВЧ поля на параметры плазмы. К этому критерию может быть сведен также критерий, используемый в работе [7].

Известно, что в режимах плазменного волновода, близких к предельному, незначительное изменение концентрации электронов вызывает сильное изменение фазовой скорости и затухание сигнала. С другой стороны, в этих режимах затухание и определяемая им мощность потерь на единицу длины плазменного столба также весьма велики [9]. Поэтому следует ожидать, что в режимах, близких к предельному, нелинейные эффекты в плазменных волноводах могут быть вызваны даже сигналами малой мощности.

Добавка мощности, вводимой в плазму сигналом, должна приводить к некоторому увеличению концентрации электронов. Поскольку же с повышением концентрации электронов замедление и затухание в плазменном волноводе уменьшается, то следует ожидать, что увеличение мощности СВЧ сигнала должно приводить к возрастанию фазовой скорости и к уменьшению затухания.

1. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Блок-схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. Она аналогична установке, описанной в работе [9], и отличается от нее тем, что в ней предусмотрена возможность измерения мощности СВЧ сигнала, вводимого в плазменный волновод.

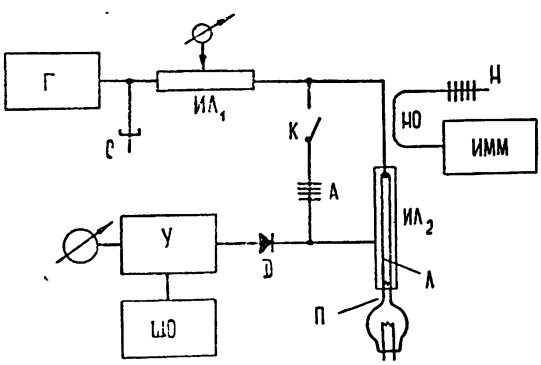


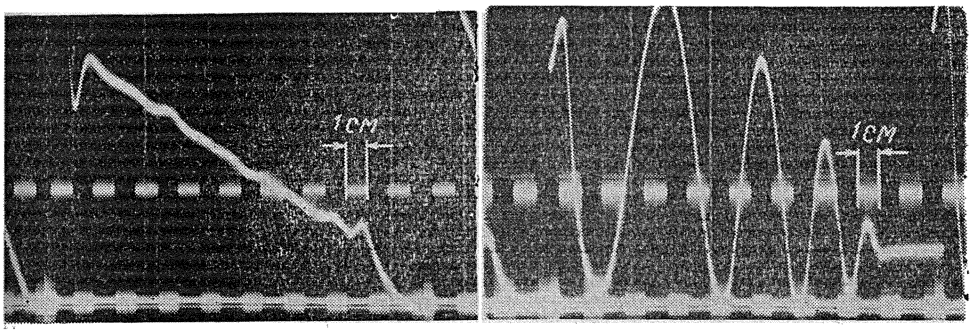
Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

Г—генератор, С—шлейф-согласователь, $ИЛ_1$—коаксиальная измерительная линия, НО—направленный ответвитель, Н—нагрузка, ИММ—измеритель малой мощности, $ИЛ_2$—коаксиальная измерительная линия, в которую вместо внутреннего проводника вставлена экспериментальная лампа Л, П—поглотитель, нанесенный на лампу, А—аттенюатор, К—ключ, Д—детектор, У—усилитель, ШО—шлейфный осциллограф.

Экспериментальная лампа Л представляла собой газоразрядную трубку с накаленным катодом, наполненную парами ртути, давление которых фиксировалось путем термостатирования баллона лампы. Рабочей частью лампы была стеклянная трубка длиной 25 ÷ 30 *см* с внутренним диаметром 10 *мм*. Прикатодная часть трубки покрывалась слоем поглотителя П.

Вдоль плазменного волновода перемещался зонд измерительной линии $ИЛ_2$. Кривая распределения интенсивности СВЧ сигнала вдоль волновода записывалась на ленте шлейфного осциллографа ШО, перемещавшейся синхронно с зондом. Типичное распределение такого рода представлено на рис. 2а. Поскольку детектор Д работал в квадратичном режиме, можно считать, что отклонение шлейфного осциллографа пропорционально мощности СВЧ сигнала в соответствующем сечении плазменного волновода.

В тех случаях, когда требовалось измерить фазовую скорость, собиралась схема интерференционного фазометра. Для этого через ключ К и аттенюатор А на вход детектора подавался небольшой опорный сигнал, который складывался с сигналом, уловленным зондом линии $ИЛ_2$. Типичная эпюра получающихся биений изображена на рис. 2б. По расстоянию между точками минимумов (или максимумов) можно было определить длину волны в плазменном волноводе.



а *б*

Рис. 2. а) Типичная зависимость величины СВЧ сигнала вдоль плазменного волновода; б) типичная фазово-интерференционная картина. Плазма создается самим высокочастотным сигналом; f=500 *Мгц*, $P_{вч}$=2,0 *вт*, $T_{балл}$=40°С.

В процессе измерений было обнаружено, что СВЧ сигнал, мощность которого $P_{вч}$ соизмерима с P_0 — мощностью питания разряда постоянным током, существенно изменяет режим последнего и оказывает, таким образом, на параметры плазмы не только прямое, но и косвенное воздействие. Поэтому для определенности мы поддерживали неизменной величину P_0 путем соответствующего регулирования тока разряда.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Трудности, связанные с необходимостью поддерживать постоянство P_0, отпадают, если разряд вообще не питать постоянным током. Чисто высокочастотный разряд, плазма которого образуется полями самого СВЧ сигнала, оказывается наиболее простым объектом для исследований. Результаты измерений для подобного разряда представлены на рис. 2.

Обычно свечение такого разряда, наиболее яркое около анода лампы, с удалением от него постепенно ослабевает, а затем на некотором расстоянии (не доходя до поглотителя П) внезапно обрывается. Здесь же происходит обрыв СВЧ сигнала, улавливаемого зондом линии (рис. 2а).

В опытах с лампой, у которой внутренний диаметр рабочей части 7 *мм* и на которую вместо поглотителя П была надета отражающая втулка, можно было заметить периодическое изменение яркости свечения вдоль трубки. Подобное же явление было отмечено в работе [10], где оно объясняется образованием стоячих волн в плазменном волноводе.

Наибольший интерес представляет рис. 2б, где видно, как изменяется длина волны вдоль плазменного волновода. Большая в начале, она быстро уменьшается к месту обрыва плазмы, где фазовая скорость должна обращаться в нуль. Следует полагать, что хорошо известное свойство высокочастотного разряда распространяться в стеклянных трубках на значительные расстояния от места возбуждения обусловлено образованием плазменных волноводов.

Аналогичные распределения мощности сигнала вдоль трубки и интерференционные картины были получены также в случае питания разряда постоянным током при различных комбинациях $P_{вч}$ и P_0.

Для нахождения погонного затухания сигнала кривые, аналогичные изображенным на рис. 2а, строились в полулогарифмическом масштабе (рис. 3). Некоторую получающуюся здесь искривленность линий можно объяснить тем, что затухание вдоль трубки не остается неизменным — оно меньше в начале, где поглощаемая мощность $p_{вч}$ велика, и возра-

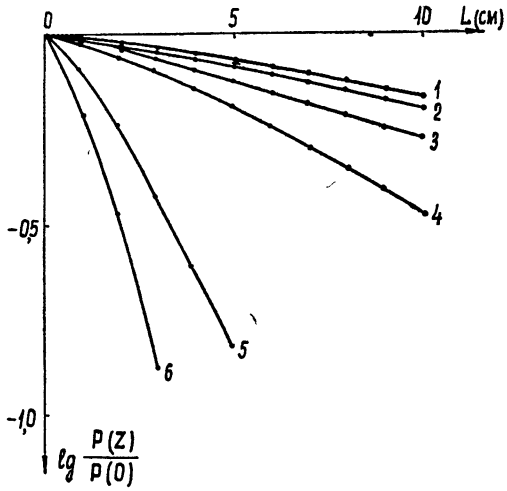


Рис. 3. Зависимость логарифма относительной величины СВЧ сигнала от координаты (f=780 *Мгц*, P_0=3 *вт*, $T_{балл}$=10°С):

1—$P_{вч}$=5,5 *вт*; 2—$P_{вч}$=4,6 *вт*; 3—$P_{вч}$=3,8 *вт*, 4—$P_{вч}$=3,2 *вт*; 5—$P_{вч}$ = 2,0 *вт*; 6—$P_{вч}$=1,0 *вт*.

стает к концу плазменного волновода, где концентрация плазмы слабее возмущена СВЧ полем. По среднему наклону линий можно было определить некоторое усредненное погонное затухание, соответствующее данному режиму. Эти величины представлены на рис. 4 в виде сплошных линий. Как видно, при заданном P_0 затухание уменьшается по мере увеличения мощности СВЧ сигнала. Изменение затухания получается тем сильнее, чем больше отношение $P_{вч}/P_0$.

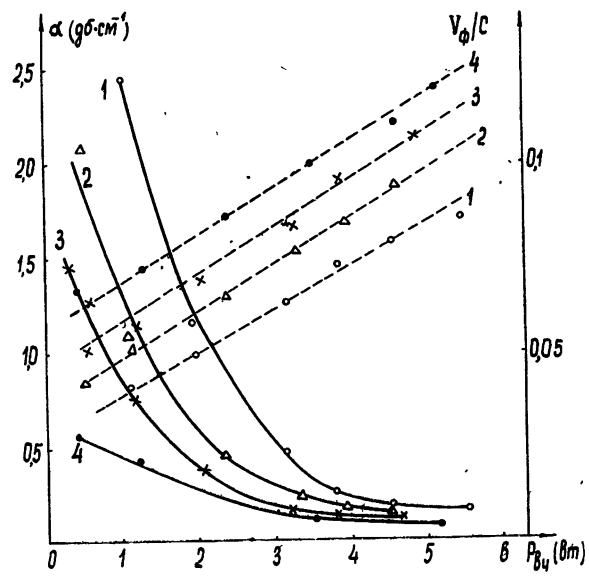


Рис. 4. Зависимость усредненной величины погонного затухания (сплошные линии) и фазовой скорости (пунктир) в плазменном волноводе от входной мощности СВЧ сигнала (f=780 *Мгц*, $T_{балл}$=40°С):

1—P_0=3 *вт*; 2—P_0=4 *вт*; 3—P_0=5 *вт*; 4—P_0=6 *вт*.

При обработке кривых, изображающих интерференционные картины, было обнаружено, что и при питании разряда постоянным током длина волны несколько уменьшается по мере удаления от места возбуждения плазменного волновода. Правда, теперь этот эффект был выражен в значительно меньшей степени, нежели на рис. 2б, так что можно было говорить о некоторой средней фазовой скорости. Семейство кривых, изображающих пропорциональную ей величину, представлено на рис. 4 в виде пунктирных линий. Видно, как по мере увеличения мощности сигнала фазовая скорость волн, в соответствии с ранее высказанными соображениями, возрастает.

3. РАЗВИТИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ ВО ВРЕМЕНИ

Рассматриваемая нами нелинейность плазменного волновода является инерционной нелинейностью. Для того, чтобы после подачи СВЧ сигнала концентрация электронов в плазме успела заметно измениться, должно пройти время порядка среднего времени ионизации. По приближенному расчету, в условиях наших опытов эта величина должна быть порядка нескольких микросекунд. Такого же порядка будет время установления новых значений фазовой скорости и затухания в плазменном волноводе.

Для проверки этих соображений генератор Г модулировался прямоугольными импульсами длительностью в 10 *мксек*. Сигнал снимался с зонда линии $ИЛ_2$, расположенного на расстоянии l от начала плазменного волновода. Далее сигнал детектировался, усиливался и наблюдался с помощью импульсного осциллографа, развертка которого запускалась передним фронтом модулирующего импульса.

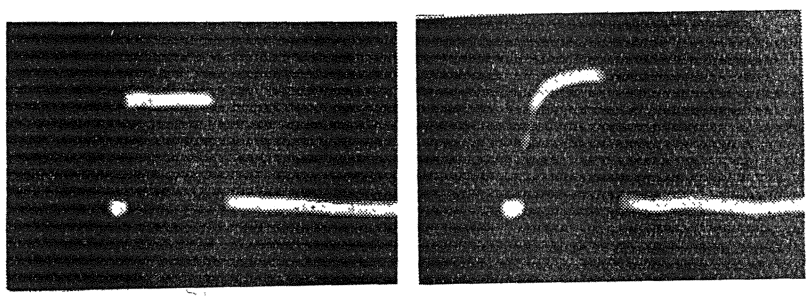


Рис. 5. Форма огибающей радиоимпульса, подаваемого на вход плазменного волновода (а) и уловленного зондом, находящимся на расстоянии 8 *см* от начала плазменного волновода (б):
f=520 *Мгц*, $T_{балл}$=30°С, i_0=0,1 *а*.

На рис. 5б изображена типичная осциллограмма импульса, прошедшего по плазменному волноводу. Высота его переднего фронта соответствует тому начальному затуханию, которое определяется концентрацией электронов в плазме в отсутствие СВЧ сигнала. Далее по мере роста концентрации электронов и уменьшения затухания величина сигнала, дошедшего до зонда, возрастает, стремясь к некоторому конечному значению. Время этого роста составляет несколько микросекунд. Для сравнения на рис. 5а изображена осциллограмма огибающей радиоимпульса, подаваемого на вход плазменного волновода.

Если концентрация электронов в плазме, создаваемой разрядом постоянного тока, была меньше предельной, то начало импульса, улавливаемого зондом, отставало от начала импульса генератора. Это отстава-

ние получалось тем больше, чем дальше находился зонд от анода лампы. По-видимому, сверхвысокочастотный сигнал, вызывая дополнительную ионизацию газа, как бы «прокладывал» сам себе путь вдоль плазменного столба.

Подобный эффект перемещения фронта импульса вдоль разрядной трубы для случая чисто высокочастотного разряда наблюдался и был описан в работе [11]. Измеренная нами скорость перемещения фронта импульса была $3 \div 5 \cdot 10^6$ *см·сек*$^{-1}$ и совпадает с величинами, указанными в этой работе.

Показано, что параметры волны, распространяющейся по плазменному волноводу, существенно зависят от мощности этой волны. При мощности СВЧ сигнала, соизмеримой с мощностью, затрачиваемой на поддержание плазмы, наблюдается заметное изменение затухания и фазовой скорости в плазменном волноводе. С увеличением мощности сигнала затухание уменьшается, а фазовая скорость возрастает. При этом указанные величины могут изменяться по длине волновода.

При подаче СВЧ сигнала все эти нелинейные эффекты проявляются не сразу, а развиваются за время порядка нескольких микросекунд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я Б. Файнберг, Атомная энергия, **6**, 431 (1959).
2. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия, **6**, 447 (1959).
3. О. Г. Загороднов, Я. Б. Файнберг, Б. И. Иванов, В С. Ус, Л. И. Болотин, ЖТФ, **31**, 574 (1961).
4. Б. И. Иванов, Физика плазмы и проблемы упр. термояд. синтеза, вып. 3, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 54.
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960, гл. VII.
6. L. Goldstein, J. M. Anderson, G. L. Clarc, Phys. Rev., **90**, 151 (1953); **90**, 486 (1953); J. M. Anderson, L Goldstein, Phys. Rev., **100**, 1037 (1955); **102**, 933 (1956); A. Gougal, L. Goldstein, Phys. Rev., **109**, 615 (1958); L. Goldstein, T. Sekiguchi, Phys. Rev., **109**, 3, 615 (1958)
7. В. Е. Голант, А. П. Жилинский, М. В. Кривошеев, Л. И. Чернова, ЖТФ, **31**, 63 (1961).
8. С. М. Левитский, В. Ф. Вирко, Радиотехника и электроника, **9**, 1518 (1964).
9. С. М. Левитский, Н. С. Баранчук, Изв. высш. уч зав — Радиофизика, **4**, 1078 (1961).
10. О. Г. Загороднов, Я. Б. Файнберг, А. М Егоров, А. Ф. Кившик, Физика плазмы и проблемы упр. термояд. синтеза, вып 1, изд. АН УССР, Киев, 1962, стр. 16.
11. М. Я. Мандельштамм, ЖТФ, **32**, 48 (1962).

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
4 июля 1965 г.

NONLINEAR PHENOMENA IN PLASMA WAVEGUIDE

V. F. Virko, S. M. Levitsky

The parameter changes of plasma waveguide are investigated with respect to the power of UHF-signal, caused by electron density increase in plasma due to an additional gas ionization by UHF-field. It is shown that the phase velocity of plasma-waveguide waves increases with the growth of the signal power but their damping decreases. The nonlinearity of plasma waveguide possesses a marked inertness.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.378 32

К ТЕОРИИ ДВУХУРОВНЕВОГО КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА НА ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Я. И. Ханин

Рассматриваются процессы, которые могут быть ответственны за наблюдаемую на опыте амплитудную модуляцию импульсов излучения двухуровневых парамагнитных мазеров. Показано, что в реальных условиях эксперимента модуляция, как правило, не связана с нутацией вектора намагниченности вещества. Существенное влияние на форму излучаемого сигнала могут оказывать такие факторы, как неоднородное уширение линии парамагнитного резонанса и свипирование линии. Качественные выводы теории, учитывающей эти факторы, находятся в согласии с экспериментальными результатами. Количественные оценки, хотя они и весьма приблизительны, также свидетельствуют в пользу развиваемой точки зрения.

ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью квантовых генераторов на твердом теле, будь то генераторы оптического диапазона или СВЧ, является пульсация амплитуды их излучения. Впервые этот эффект был отмечен в экспериментах с двухуровневыми парамагнитными мазерами сантиметрового диапазона [1,2] и неизменно подтверждался в последующих публикациях [3–6], касающихся устройств такого типа. Попытки теоретического объяснения наблюдаемых пульсаций излучения двухуровневого мазера можно найти в работах ряда авторов [7–10]. Однако все они ограничиваются обсуждением только одного механизма, связанного с нутациями вектора намагниченности, хотя в большинстве случаев этот путь не обеспечивает даже качественного соответствия теории с экспериментом. Целью настоящей статьи является дискуссия иных механизмов пульсаций, приводящих к результатам, лучше согласующимся с экспериментальными данными.

«Нутационный» механизм модуляции, упомянутый выше, может быть пояснен следующим образом. Парамагнетик, помещенный в постоянное поле $\boldsymbol{H}_0$, имеет единственное состояние равновесия, в котором вектор намагниченности $\boldsymbol{M}$ параллелен $\boldsymbol{H}_0$. Будучи отклоненным от этого направления на некоторый угол θ_0, вектор $\boldsymbol{M}$, благодаря релаксационным процессам и взаимодействию с полем излучения, стремится к нему вернуться. Если выполнены условия самовозбуждения, то доминирует последний фактор, и величина θ может совершить несколько колебаний (нутаций), в процессе которых происходит последовательная перекачка энергии от спиновой системы к полю и обратно. Таким образом, интенсивность поля излучения оказывается модулированной. Как следует из теории [9–11], глубина модуляции составляет 100%, а длительность всего процесса излучения ограничена величинами порядка поперечного времени релаксации T_2 или времени затухания поля в резонаторе $T_3=2Q/\omega_c$ (точнее, меньшего из них).

Указанные выводы теории находятся в противоречии с данными многих экспериментов [1, –6], устанавливающих, что глубина модуляции

не обязательно достигает 100%, а длительность сигнала значительно превышает теоретическую. Причина расхождения состоит в том, что теория не учитывает весьма существенного обстоятельства: при использовании для инверсии техники адиабатического быстрого прохождения (АБП) частота перехода рабочего вещества $\omega_0=\gamma H_0$ не остается постоянной и во время генерации. На это упущение впервые обратил внимание Кемп [5], экспериментально установивший наличие зависимости формы сигнала мазера от скорости свипирования поля dH_0/dt. Однако предлагаемая в [5] линейная теория мазера с учетом свипирования поля не представляется достаточно убедительной и опровергается непосредственным расчетом на электронной вычислительной машине. Интерпретации результатов такого расчета посвящен раздел 4 настоящей статьи. В разделе 5 обсуждается модель мазера при наличии неоднородного уширения линии парамагнитного резонанса. Разделы 2 и отчасти 3 содержат вывод исходных уравнений как в общем виде, так и в предельных случаях Раздел 3 содержит также краткое обсуждение вопросов, связанных с явлением нутации в мазере.

Разделы 2 и 3 в основном не содержат оригинальных результатов. Исключение составляет обобщение скоростных уравнений на случай ненулевых расстроек. Тем не менее, включение их в статью представляется оправданным по ряду причин. Во-первых, материал этих разделов существенно облегчает чтение последующих. Во-вторых, последовательное изложение затронутых вопросов имеет смысл с методической точки зрения, поскольку в литературе по ним имеется много нутаницы.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Самосогласованная система уравнений двухуровневого мазера содержит уравнения для матрицы плотности и уравнения Максвелла (см., например, [11]) и может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= -\frac{1}{T_2}\rho - i\omega_0\rho - \frac{i}{\hbar}\mu HR;\\
\dot{R} &= -\frac{1}{T_1}(R-R_0) - \frac{2i}{\hbar}\mu H(\rho-\rho^*),\\
\ddot{H} &+ \frac{2}{T_3}\dot{H} + \omega_c^2 H = 4\pi\xi\omega_c^2 M.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\rho = \rho_{21}$ и $\rho^* = \rho_{12}$ — недиагональные элементы матрицы плотности, $R = \rho_{22} - \rho_{11}$, H — напряженность магнитного поля, которое мы полагаем линейно поляризованным, μ — проекция матричности элемента дипольного момента на направление поля, ξ — коэффициент заполнения резонатора. Матрица плотности нормирована на единицу, т. е. $\rho_{11}+\rho_{22}=1$. Намагниченность M определяется соотношением

$$M = N\mu\int_0^\infty (\rho+\rho^*) f(\omega_0)\, d\omega_0, \tag{2}$$

в котором N — плотность спинов, $f(\omega_0)$ — функция распределения парамагнитных частиц по резонансным частотам, имеющая максимум на частоте $\bar{\omega}$. Функция распределения нормирована таким образом, что

$\int_0^\infty f(\omega_0)\,d\omega_0=1$. Если $f(\omega_0)=\delta(\omega_0-\bar{\omega})$ (так называемое однородное уширение спектральной линии), то

$$M = N\mu(\rho+\rho^*)\,. \tag{3}$$

Скорости релаксационных процессов T_1^{-1}, T_2^{-1}, T_3^{-1}, расстройка $|\omega_0-\omega_c|$ и нелинейные члены $\mu H/\hbar$ малы по сравнению с частотами и могут рассматриваться как малые параметры. Поэтому к системе (1) применим метод усреднений [12], если только выполнено условие $d\omega_0/dt\ll\omega_0^2$. Осуществив замену переменных

$$\begin{gathered}\rho=\sigma(t)\exp\Big[-i\int_0^t\omega_m(t')\,dt'\Big]\,;\\ H=\frac{1}{2}\Big[h(t)\exp\Big(-i\int_0^t\omega_m(t')dt'\Big)+h^*(t)\exp\Big(i\int_0^t\omega_m(t')dt'\Big)\Big]\,,\end{gathered} \tag{4}$$

усредняя затем уравнение (1) по периоду высокой частоты и пренебрегая членами, содержащими малые параметры в степени выше первой, получаем систему укороченных уравнений. В безразмерных величинах

$$\begin{gathered}\tau=t/\bar{t};\quad n=R/\bar{R};\quad v=\sigma/\bar{R};\quad x=\bar{t}\,\mu h/2\hbar;\quad \gamma_i=\bar{t}/T_i\,(i=1,2,3);\\ \Omega=\omega\bar{t};\quad \Delta_{m0}=(\omega_m-\omega_0)\bar{t};\quad \Delta_{mc}=(\omega_m-\omega_c)\bar{t};\quad (\bar{R}=\hbar/2\pi\xi\omega_c\mu^2T_2T_3N)\end{gathered} \tag{5}$$

и при выполнении условия $d\omega_0/dt\ll\omega_0^2/Q$ укороченные уравнения имеют вид

$$\frac{dv}{d\tau}=-\gamma_2 v+i\Delta_{m0}v-ixn; \tag{6а}$$

$$\frac{dn}{d\tau}=-\gamma_1(n-n_0)-2i(vx^*-v^*x); \tag{6б}$$

$$\frac{dx}{d\tau}=-\gamma_3 x+i\Delta_{mc}x+i\gamma_2\gamma_3\int_0^\infty vf(\Omega_0)d\Omega_0. \tag{6в}$$

Уравнение (6в) является интегродифференциальным и лишь в случае $f(\Omega_0)=\delta(\Omega_0-\bar{\Omega})$, т. е. в отсутствие неоднородных механизмов уширения, система (6) сводится к конечному числу обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом случае уравнение (6в) сводится к

$$\frac{dx}{d\tau}=-\gamma_3 x+i\Delta_{mc}x+i\gamma_2\gamma_3 v \tag{6г}$$

и действительные переменные можно ввести двумя способами.

1 способ. Положим

$$\begin{gathered}w=4\gamma_2^{-1}vv^*;\quad m=4\gamma_2^{-1}xx^*;\quad u=2i\gamma_2^{-1}(x^*v-xv^*);\\ s=2\gamma_2^{-1}(x^*v+xv^*).\end{gathered} \tag{7}$$

Тогда уравнения (6) переходят в

$$\frac{dw}{d\tau} = -2\gamma_2 w + 2nu; \tag{8а}$$

$$\frac{dn}{d\tau} = -\gamma_1(n - n_0) - \gamma_2 u; \tag{8б}$$

$$\frac{dm}{d\tau} = -2\gamma_3 m + 2\gamma_2\gamma_3 u; \tag{8в}$$

$$\frac{du}{d\tau} = -(\gamma_2+\gamma_3)u - \Delta_{0c}s + mn + \gamma_2\gamma_3 w; \tag{8г}$$

$$\frac{ds}{d\tau} = -(\gamma_2+\gamma_3)s + \Delta_{0c}u, \tag{8д}$$

где

$$\Delta_{0c} = (\omega_0 - \omega_c)\,\bar{t}.$$

2 способ. Пусть

$$v = Ve^{-i\psi}; \quad x = Xe^{-i\varphi}; \quad \Phi = \psi - \varphi. \tag{9}$$

Новыми переменными являются амплитуды и фазы, подчиняющиеся, как легко видеть [11, 17], уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{d\tau} &= -\gamma_2 V + X n \sin\Phi;\\
\frac{dn}{d\tau} &= -\gamma_1(n - n_0) - 4XV\sin\Phi;\\
\frac{dX}{d\tau} &= -\gamma_3 X + \gamma_2\gamma_3 V \sin\Phi;\\
\frac{d\Phi}{d\tau} &= -\Delta_{0c} + \left(\frac{Xn}{V} + \gamma_2\gamma_3\frac{V}{X}\right)\cos\Phi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Система уравнений в форме (8) хороша тем, что не содержит трансцедентных функций, тогда как преимущество (10) — в меньшем числе уравнений. Заметим, что время T_1 обычно очень велико по сравнению с длительностью процесса генерации и членом с γ_1 в уравнениях (8) и (10) можно пренебречь.

Условие самовозбуждения мазера, описываемого уравнениями типа (8), имеет вид

$$n > \frac{(\gamma_2+\gamma_3)^2 + \Delta_{0c}^2}{(\gamma_2+\gamma_3)^2} \tag{11}$$

и при $\Delta_{0c}=0$ переходит в $n > 1$.

2. НУТАЦИИ И СКОРОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сначала несколько замечаний относительно скоростных уравнений. Известны два случая, когда общая система уравнений сводится к двум

нелинейным уравнениям первого порядка, именуемым скоростными. Это, во-первых, случай $\gamma_2 \gg \gamma_1, \gamma_3$, и во-вторых, случай $\gamma_3 \gg \gamma_1, \gamma_2$[13]. Однако выполнение этих неравенств еще не гарантирует применимости скоростных уравнений. Для выяснения недостающих условий можно воспользоваться методом, изложенным в главе X книги Андронова, Витта и Хайкина [14]*.

а) Пусть

$$\gamma_2 \gg \gamma_1, \gamma_3. \tag{12}$$

Разделив на γ_2 равенства (8а), (8г) и (8д), убеждаемся, что малый параметр γ_2^{-1} стоит в качестве сомножителя перед производными $\dot{w}$, $\dot{u}$, $\dot{s}$. Как следует из [14], указанными членами можно пренебречь, если характеристическое уравнение

$$\lambda^3+4\gamma_2\lambda^2+(5\gamma_2^2+\Delta_{0c}^2-2\gamma_2\gamma_3 n)\lambda+2\gamma_2(\gamma_2^2+\Delta_{0c}^2)-2\gamma_2^2\gamma_3 n=0 \tag{13}$$

не имеет корней с положительной реальной частью. Воспользовавшись критерием Рауса—Гурвица, получаем, что $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, если

$$n < (\gamma_2^2+\Delta_{0c}^2)/\gamma_2\gamma_3. \tag{14}$$

Полагая неравенство (13) выполненным, нетрудно получить, что система (8) эквивалентна уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\tau} &= -\gamma_1(n-n_0)-\gamma_2^2 mn/(\gamma_2^2+\Delta_{0c}^2); \\ \frac{dm}{d\tau} &= -2\gamma_3 m+2\gamma_2^2\gamma_3 mn/(\gamma_2^2+\Delta_{0c}^2). \end{aligned} \tag{15}$$

В случае $\Delta_{0c} \neq 0$ уравнения (15) упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\tau} &= -\gamma_1(n-n_0)-mn; \\ \frac{dm}{d\tau} &= -2\gamma_3 m+2\gamma_3 mn. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения (16) часто фигурируют под названием уравнений Штатца—Демарса.

б) Пусть теперь

$$\gamma_3 \gg \gamma_1, \gamma_2. \tag{17}$$

В этом случае малым параметром является γ_3^{-1}. Характеристическое уравнение получается из (13) перестановкой местами γ_2 и γ_3. При выполнении неравенства

$$n < (\gamma_3^2+\Delta_{0c}^2)/\gamma_2\gamma_3 \tag{18}$$

---

* В работе [13] делается утверждение о невозможности априорного нахождения всех условий, обеспечивающих справедливость перехода к скоростным уравнениям. В рамках метода, использованного в [13], такое утверждение имеет смысл; однако при ином подходе возможна достаточно конкретная формулировка полной системы условий.

справедливы уравнения

$$\frac{dw}{d\tau}=-2\gamma_2 w+2\gamma_2\gamma_3^2 nw/(\gamma_3^2+\Delta_{0c}^2);$$
$$\frac{dn}{d\tau}=-\gamma_1(n-n_0)-\gamma_2^2\gamma_3^2 w/(\gamma_3^2+\Delta_{0c}^2). \tag{19}$$

При нулевой расстройке эти уравнения могут быть приведены к виду

$$\frac{dm}{d\tau}=-2\gamma_2 m+2\gamma_2 mn;$$
$$\frac{dn}{d\tau}=-\gamma_1(n-n_0)-m. \tag{20}$$

Перейдем к вопросу об условиях возникновения нутаций в мазере. Для мазера специфичен начальный угол между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}_0$, равный π. Однако определенную качественную информацию можно извлечь и из рассмотрения линейного случая малых отклонений ($0\ll\pi/2$), когда изменения n пренебрежимо малы. В этом случае, разумеется, $n<0$, т. е. инверсия отсутствует. Для простоты положим $\Delta_{0c}=0$. Тогда $\Phi=\pi$ и (10) сводится к уравнению второго порядка:

$$\ddot{X}+(\gamma_2+\gamma_3)\dot{X}+\gamma_2\gamma_3(1-n)X=0. \tag{21}$$

Очевидно, что при

$$|n|<(\gamma_2^2+\gamma_3^2)/2\gamma_2\gamma_3 \tag{22}$$

уравнение (21) описывает апериодический процесс, т. е. нутации при этом условии отсутствуют. Для случая мазера линейное уравнение (21) несправедливо; однако условие отсутствия нутации не будет и здесь существенно отличаться от (22), что подтверждается непосредственными расчетами [10,11]. В предельных случаях неравенство (22) принимает вид

$$|n|<\frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\quad(\gamma_2\gg\gamma_3);$$
$$|n|<\frac{1}{2}\frac{\gamma_3}{\gamma_2}\quad(\gamma_3\gg\gamma_2). \tag{23}$$

Из сравнения (23) и ранее полученных критериев применимости скоростных уравнений (14) и (18) видно, что они совпадают.

Уравнение (21) позволяет оценить частоту осцилляций амплитуды поля в случае, когда время затухания значительно больше периода, т. е. при $|n|\gg(\gamma_2^2+\gamma_3^2)/2\gamma_2\gamma_3$:

$$\nu=\frac{\mu}{2\pi\hbar}\sqrt{2\pi\xi\hbar\omega_0 RN}\ \ сек^{-1}. \tag{24}$$

Отметим, что (24) совпадает с формулой, приведенной в [15]. Существенно, что период колебаний, определяемый (24), в силу неравенства, обратного (22), не может превышать времен релаксации T_2 и T_3.

Основные выводы из сказанного в этом разделе сводятся к следующему. Осциллирующий характер интенсивность излучения мазера

с $\Delta_{0c}=\text{const}$ имеет не всегда, а лишь при определенном превышении порога генерации. В частности, осцилляции отсутствуют в системах, описываемых скоростными уравнениями. Период нутаций, если он имеет место, не превышает меньшего из релаксационных времен мазера. Последнее существенно расходится с данными эксперимента и поэтому объяснение экспериментальных результатов приходится искать, привлекая некоторые дополнительные соображения.

3. УЧЕТ СВИПИРОВАНИЯ ПОЛЯ (ОДНОРОДНОЕ УШИРЕНИЕ)

По завершении АБП разность ω_0 и ω_c неизбежно оказывается значительной. Для достижения порога генерации ее приходится уменьшать, что достигается при обратном свипировании поля H_0. Форма излучаемого сигнала при этом должна зависеть от скорости свипирования. Наличие такой зависимости было экспериментально установлено в [5].

Мазер, работающий в условиях непрерывно меняющейся расстройки, поддается теоретическому расчету. Для его описания пригодна, например, система уравнений (10), в которой следует задать закон изменения $\Delta_{0c}(\tau)$. Решение (10) было проведено на электронной вычислительной машине при линейном законе свипирования:

$$\Delta_{0c} = \alpha(\tau-\tau_0)\,. \tag{25}$$

При расчете параметр $\overline{t}$ был выбран равным T_2, т. е.

$$\tau=t/T_2;\quad \gamma_2=1;\quad \gamma_3=T_2/T_3;\quad \alpha=T_2^{-2}\,d\omega_0/dt.$$

Численные значения коэффициентов для удобства сопоставления с экспериментом взяты из работы [5]: $T_2 = 8\cdot10^{-7}$ *сек*; $T_3 = 6\cdot10^{-7}$ *сек*. Значения остальных параметров приведены в подрисуночных подписях.

На рис. 1, 2 приведены примеры решений. Уравнения (10), как видно из этих рисунков, описывают процесс излучения, состоящего из от-

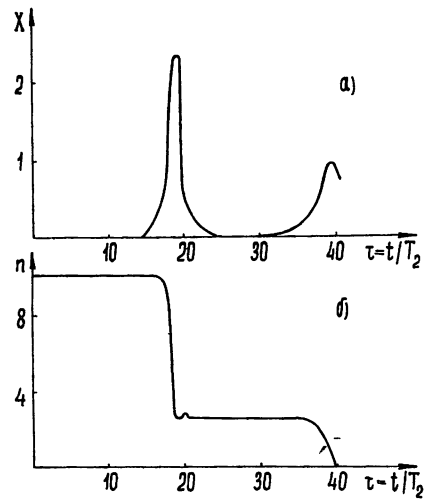


Рис. 1. Изменение амплитуды поля (а) и числа активных молекул (б) в процессе излучения мазера. Кривые являются решением системы (10) при $\alpha=0{,}23$; $n(0)=10$

дельных изолированных всплесков. Такой характер излучения имеет мало общего с моноимпульсным (хотя и модулированным) излучением, зафиксированным в [5], а также в [1–3] и [6]. В литературе описан лишь один случай, когда экспериментально наблюдался сигнал данного типа (речь идет о работе [4]).

Механизм возникновения всплесков сводится к следующему. При начальном значении расстройки Δ_{0c} условия самовозбуждения не выполняются. Далее в процессе свипирования достигается значение Δ_1, соответствующее порогу генерации, и с этого момента начинается рост амплитуды поля от начальной флуктуационной величины. Некоторое

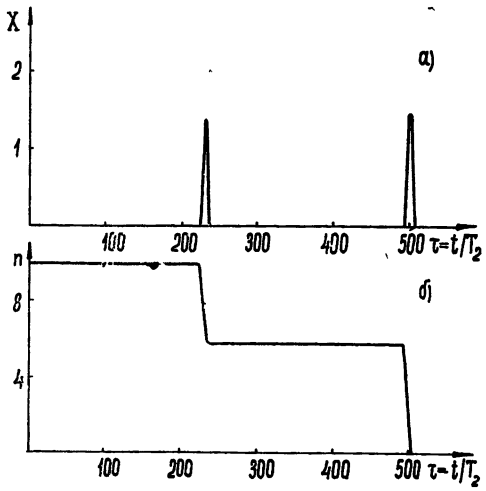


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но при $\alpha=9\cdot10^{-3}$; $n(0)=10$.

время τ_d (назовем его временем задержки) требуется для нарастания амплитуды колебаний до величины, при которой начинается заметное убывание n, т. е. до момента, который естественно принять за начало генерации. Время задержки можно определить из (10), приняв во внимание, что $n=\text{const}$ и

$$\sin^2\Phi=\frac{(\gamma_2+\gamma_3)^2}{(\gamma_2+\gamma_3)^2+\alpha^2(\tau-\tau_0)^2}. \tag{26}$$

В линейном приближении решения (10) имеет вид

$$X,\ V\sim\exp\left(\int_0^{\tau}\lambda(\tau')\,d\tau'\right), \tag{27}$$

где

$$\lambda=-\frac{\gamma_2+\gamma_3}{2}+\sqrt{\frac{(\gamma_2+\gamma_3)^2}{4}+(n\sin^2\Phi-1)} \tag{28}$$

является корнем характеристического уравнения. Искомое время задержки определяется из равенства

$$\int_0^{\tau_d}\lambda(\tau)\,d\tau=\ln\left(X/X_{\text{нач}}\right), \tag{29}$$

правая часть которого не превышает нескольких единиц. В течение τ_d расстройка Δ_{0c}, а вместе с ней и правая часть в неравенстве (11) продолжают убывать. Чем значительнее изменение Δ_{0c} за время задержки, тем интенсивнее всплеск. В процессе излучения n падает до величины, недостаточной для поддержания генерации и последняя прекращается. При последующем уменьшении Δ_{0c} достигает величины Δ_2, когда условия

самовозбуждения вновь оказываются выполненными, и через некоторое время излучается второй всплеск.

В дальнейшем все повторяется до тех пор, пока разность населенностей не упадет до значения $n \leqslant 1$, при котором генерация окончательно прекращается. Таким образом, при наличии свипирования процесс излучения мазера распадается на отдельные этапы, разделенные во времени. Заметим, что здесь мы не находим интервалов времени, когда происходит характерная для нутации обратная трансформация энергии поля в энергию спиновой системы. Излучение в виде изолированных всплесков имеет место и в случаях, когда применимы скоростные уравнения. Кстати, в этих случаях можно сравнительно просто получить приближенное аналитическое решение задачи.

4. УЧЕТ СВИПИРОВАНИЯ ПОЛЯ (НЕОДНОРОДНОЕ УШИРЕНИЕ)

Пусть функция распределения $f(\Omega_0)$ отлична от δ-функции. В этом случае (6а) и (6б) преобразуются в уравнения с частными производными. Действительно, величины $n(\Omega, \tau)$ и $v(\Omega, \tau)$ можно рассматривать как определенные в каждый момент времени спектральные плотности соответствующих элементов статистической матрицы*. Полные производные от этих величин, с одной стороны, определяются равенствами (6а) и (6б), а с другой стороны, равенствами

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\tau} &= \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{\partial n}{\partial \Omega}\alpha; \\ \frac{\partial v}{d\tau} &= \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial \Omega}\alpha. \end{aligned} \tag{30}$$

Подстановка (30) в (6а) и (6в) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \tau} &= -\alpha \frac{\partial n}{\partial \Omega} - 2i(vx^* - v^*x); \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\alpha \frac{\partial v}{\partial \Omega} - \gamma_2 v - i(\Omega - \Omega_m) - ixn. \end{aligned} \tag{31}$$

Параметр γ_1 полагаем равным нулю.

Сложность интегрирования системы уравнений (6в), (31) в общем виде очевидна. Однако в одном практически важном частном случае характер решений удается выяснить. Предположим, что зависимость от частоты величин $|v|$ и n в любой момент времени такова, как это показано на рис. 3, причем область существенных изменений указанных переменных ограничена $\delta\Omega_p \ll \Gamma$ (в пределе $\delta\Omega_p \simeq \gamma_2$).

Сделанные предположения позволяют существенно упростить уравнения. Прежде всего, интеграл в правой части (6в) заменим приближенным выражением:

$$\int_0^\infty v(\Omega, \tau) f(\Omega, \tau)\, d\Omega \simeq v(\Omega_p, \tau) f(\Omega_p, \tau)\, \delta\Omega_{\text{эфф}}, \tag{32}$$

в котором $\delta\Omega_{\text{эфф}} \leqslant \delta\Omega_p$. Далее заметим, что производная $\partial v/\partial\Omega$ на частоте Ω_p мала и можно считать $\alpha \partial v/\partial\Omega \ll \gamma_2 v$. Производную $\partial n/\partial\Omega$ естественно аппроксимировать выражением

* Аналог эйлеровского поля скоростей в гидродинамике.

$$\left.\frac{\partial n}{\partial \Omega}\right|_{\Omega=\Omega_p} \simeq \frac{n(\Omega_p)-n'}{\delta\Omega_p/2}. \tag{33}$$

Подставляя (32) в (6в) и (33) в (31), мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\gamma_2 v + i\Delta_{pm} v - ixn;\\
\frac{\partial n}{\partial \tau} &= -\gamma_\alpha (n-n') - 2i\,(vx^* - v^* x);\\
\frac{dx}{d\tau} &= -\gamma_3 x + i\Delta_{cm} x + i\gamma_2\gamma_3 f(\Omega_p)\,\delta\Omega_{\text{эфф}}\, v(\Omega_p).
\end{aligned} \tag{34}$$

Априори нельзя утверждать, что Δ_{pm} и Δ_{cm} не зависят от времени. Однако заранее отказавшись от анализа тонких эффектов, мы не бу-

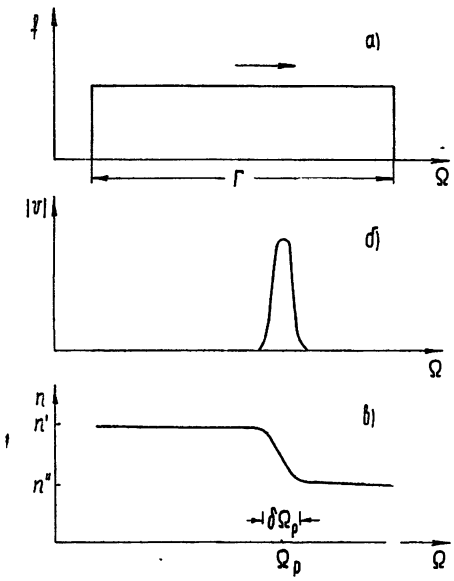


Рис. 3. а) Функция распределения (35) в некоторый момент времени τ; стрелкой показано направление смещения линии при свипировании.
б) Предполагаемый вид функции $|v(\Omega)|$ в момент τ.
в) Предполагаемый вид функции $n(\Omega)$ в момент τ.

дем принимать эту зависимость во внимание. По той же причине будем считать $\delta\Omega_{\text{эфф}} = \text{const}$ и зададим функцию распределения в виде

$$f(\Omega) = \begin{cases} 1/\Gamma & \text{при } |\Omega-\bar{\Omega}| \leqslant \Gamma/2 \\ 0 & \text{при } |\Omega-\bar{\Omega}| > \Gamma/2 \end{cases}. \tag{35}$$

С учетом сделанных замечаний уравнения (34) совпадают по форме с (6а), (6б) и (6г), причем $\gamma_\alpha = 2\alpha/\delta\Omega_p$ играет роль параметра продольной релаксации. Коэффициент $f(\Omega_p)\,\delta\Omega_{\text{эфф}}$ можно опустить, полагая его включенным в v и n.

Показанный на рис. 3 вид функций $|v|$ и n с физической точки зрения вполне реален, ибо при свипировании неоднородно уширенной линии в генерацию последовательно вовлекаются отдельные ее участки. Условие малости частотного интервала $\delta\Omega_p$, очевидно, будет обеспечено, если время задержки генерации τ_d ограничено неравенством

$$\alpha\tau_d \ll \Gamma,$$

причем для нахождения τ_d можно воспользоваться уравнением (29). Кроме этого, безусловно должно быть выполнено условие, запрещающее одновременное выполнение условий самовозбуждения на двух удаленных частях линии. Это второе условие удовлетворяется либо при $n''<1$ (см. рис. 3в), либо, как видно из (11), при

$$(\gamma_2+\gamma_3)(\sqrt{n'-1}-\sqrt{n''-1}) > \Gamma.$$

Существенно заметить, что $n' > 0$, т. е. свипирование при наличии неоднородного уширения приводит к эффекту, эквивалентному некогерентной накачке, включенной на время $\tau_m \simeq \Gamma/\alpha$. Отсюда можно сделать вывод, что пульсации в двухуровневом мазере имеют тот же характер, что и переходные процессы в мазере непрерывного действия при его включении и выключении.

Остановимся на двух предельных случаях, описываемых скоростными уравнениями.

а) Структура фазовой плоскости уравнений (19) подробно исследована в работе [16]. Если условие самовозбуждения

$$n' > \frac{\gamma_2^2+\Delta_{pc}^2}{\gamma_2^2} = \frac{1}{K_2} \tag{36}$$

выполнено, система (19) обладает устойчивым положением равновесия с координатами $n_2 = 1/K_2$, $m_2 = \gamma_2(n'K_2-1)$. Характеристическое уравнение, отвечающее линеаризации (19) в окрестности (n_2, m_2), обладает корнями

$$\lambda = -\frac{1}{2}\gamma_\alpha n'K_2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma_\alpha n'K_2)^2 - 2\gamma_2\gamma_3(n'K_2-1)}. \tag{37}$$

Поскольку $\gamma_3 \gg \gamma_\alpha$ слагаемым $(\gamma_\alpha n' K_2)^2/4$ можно пренебречь. При этом особая точка (n_2, m_2) оказывается фокусом, а фазовые траектории представляют собой спирали, вытянутые вдоль оси m фазовой плоскости. В работе [16] показано, что при увеличении параметра $T_\alpha/T_3 = \gamma_3/\gamma_\alpha$ отношение $m_{\max}/m_{\min}$, т. е. глубина модуляции, будет расти. В рассматриваемой модели мазера время T_α обратно пропорционально скорости свипирования и, значит, при увеличении последней должно наблюдаться уменьшение глубины модуляции.

Соотношение (37) определяет частоту и время затухания пульсаций интенсивности в линейном приближении:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{T_\alpha T_3}(n'K_2-1)}; \tag{38}$$

$$t_н = 2T_\alpha/n'K_2. \tag{39}$$

Из этих выражений видно, что с увеличением скорости свипирования частота осцилляций растет, а время затухания убывает.

б) Уравнения (23) можно рассмотреть совершенно таким же образом, как (19). При выполнении условия самовозбуждения

$$n' > \frac{\gamma_3^2+\Delta_{pc}^2}{\gamma_3^2} = \frac{1}{K_3} \tag{40}$$

система обладает устойчивым положением равновесия типа фокуса с координатами $n_2 = 1/K_3$; $m_2 = \gamma_\alpha (n'K_3 - 1)/K_3$. Частота осцилляций и время их затухания в линейном приближении даются формулами

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{T_\alpha T_2} (n'K_3 - 1)}\ ; \tag{41}$$

$$t_u = 2T_\alpha\ . \tag{42}$$

Что касается амплитуды осцилляций, то она, как и в предыдущем случае, является убывающей функцией скорости свипирования.

Рассмотренные предельные случаи позволяют сформулировать следующие общие закономерности. С ростом скорости свипирования частота пульсаций интенсивности излучения мазера должна возрастать, а время их затухания и глубина модуляции должны убывать. Этот вывод полностью согласуется с экспериментальными данными [5].

Для количественного примера рассмотрим мазер, описанный в [6]. Рабочим веществом мазера является кварц, облученный быстрыми нейтронами. Измеренная ширина линии парамагнитного резонанса составляет 5 *э*. Столь значительная величина может быть связана только с неоднородным уширением, поскольку другими авторами [10] для ширины линии парамагнитного резонанса в облученном нейтронами кварце приводится цифра 0,1 *э*, которой соответствует $T_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ *сек*. Численные значения других величин: $T_3 = 3{,}5 \cdot 10^{-7}$ *сек*, $\nu = 90$ *кгц*, $t_u \sim 2 \cdot 10^{-5}$ *сек*. Из (41), (42) при таких значениях величин нетрудно получить, что $T_\alpha \simeq 10^{-5}$ *сек*, $n'K_3 \simeq 3$. Эти результаты вполне реальны. Действительно, трехкратное превышение порога генерации в данном мазере вполне достижимо. Величину T_α можно оценить и другим способом, исходя из формулы $T_\alpha = \delta H_p \left[dH_0/dt\right]^{-1}$. Поскольку $\delta H_p \geqslant 0{,}1$ *э*, а $dH_0/dt \sim 10^5$ *э·сек*$^{-1}$, то $T_\alpha \geqslant 10^{-6}$ *сек*, что не противоречит полученному значению 10^{-5} *сек*.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить А. В. Гапонова за просмотр рукописи и ряд полезных замечаний, а также Е. Ф. Шишенкову за расчеты на электронно-вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Feher, J. P. Gordon, E. Buchler, E. A. Gere, C. D. Thurmond, Phys. Rev., **109**, 221 (1958).
2. P. F. Chester, P. E. Wagner, J. G. Castle, Phys. Rev., **110**, 281 (1958).
3. S. Foner, L. R. Momo, A. Mayer, R. A. Myers, Quantum Electronics, Columbia Univ. Press., New York, 1960.
4. I. M. Firth, D. Bijl, Nature, **192**, 860 (1961).
5. J. C. Kemp, Phys. Rev. Letters, **7**, 21 (1961).
6. Я. Л. Шамфаров, Т. А. Смирнова, Радиотехника и электроника, **8**, 1567 (1963).
7. J. C. Kemp, J. Appl. Phys., **30**, 1451 (1959).
8. A. Yariv, J. Appl. Phys., **31**, 740 (1960).
9. S. Wang, J. R. Singer, J. Appl. Phys., **32**, 1371 (1961).
10. I. M. Firth, Physica, **29**, 857 (1963).
11. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
12. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
13. C. L. Tang, J. Appl. Phys., **34**, 2935 (1963).
14. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

15. Дж. Зингер, С. Вэнг, Сб Лазеры, ИЛ, М., 1963
16. В. И. Беспалов, А. В Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 70 (1965)
17. В. В. Коробкин, А. В. Успенский, ЖЭТФ, 45, 1003 (1963)

Поступила в редакцию
9 ноября 1965 г

TO THE THEORY OF TWO-LEVEL SOLID MASER

Ya. I. Khanin

The processes are considered which may be responsible for an observed amplitude modulation of radiation impulses of two-level paramagnetic masers It shown that under real conditions of the experiment the modulation is not connected, as a rule, with vector nutation of matter magnetization Such factors as nonuniform narrowing of paramagnetic resonance line and line sweeping may have an essential effect on the form of a radiated signal. The qualitative results of the theory accounting these factors agree with experimental results. Qualitative estimations thouhg being too approximate, testify as well in favour of the developed point of view.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, выпуск 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621 378.3

О СИНХРОНИЗАЦИИ ПИЧКОВОГО РЕЖИМА КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский

Рассмотрены режимы квантового генератора, в котором добротность периодически зависит от времени. Показано, что если глубина модуляции добротности превышает пороговое значение, то в квантовом генераторе устанавливаются незатухающие пульсации мощности излучения.

С точки зрения практического использования квантовых генераторов интересна проблема управления процессом генерации. Экспериментально обнаружено, что путем периодической модуляции потерь в резонаторе удается получить регулярные пульсации мощности излучения с частотой внешней силы [1-3]. В нашей работе дается теоретический анализ этого явления.

Рассмотрим квантовый генератор, в котором добротность резонатора периодически изменяется управляющим элементом, например, ультразвуковой ячейкой или ячейкой Керра. Уравнения, описывающие такую систему, имеют вид

$$\dot{n}=G\left[\xi-m-\frac{\Delta}{h_p}\right]n;$$
$$\dot{m}=(1+\xi-m)\,n-m. \tag{1}$$

Здесь $\xi=4\pi R_0 d_{12}^2\hbar^{-1}T_2 Q-1$, $R_0=N(w-T_{1\text{эфф}}^{-1})(w+T_{1\text{эфф}}^{-1})^{-1}$, N — плотность атомов рабочего вещества, w — вероятность возбуждения под действием излучения накачки, T_1 — время жизни возбужденного состояния, T_2^{-1} — ширина линии излучения, d_{12} — матричный элемент дипольного момента, $T_{1\text{эфф}}=T_1(1+wT_1)^{-1}$, $\omega_л$ — частота линии излучения, $2h_p=Q^{-1}$, $G=\omega_л T_{1\text{эфф}}/Q$, Q — добротность резонатора; n пропорционально числу фотонов в резонаторе, m — плотности инверсной населенности; Δ/h_p представляет потери, зависящие от времени; дифференцирование производится по безразмерному времени $\theta'=t/T_{1\text{эфф}}$.

Исследование уравнений (1) проведем, сведя их к одному уравнению второго порядка. Если перейти к безразмерным переменным $x=n/n_0-1$ ($n_0=\zeta$), $\theta=\omega_k t$, то уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{x}+x(1+x)-\frac{\dot{x}^2}{1+x}=\varepsilon f_1(\theta)+\varepsilon^2 f_2(\theta), \tag{2}$$

где

$$f_1=-(1+x)\,\dot{v}-\dot{x}[1+n_0(1+x)];\quad f_2=-v(1+x)[1+n_0(1+x)];$$
$$\omega_k=\sqrt{\frac{\omega_л}{T_{1\text{эфф}}Q}\zeta};\quad v=\frac{\Delta\omega_л T_{1\text{эфф}}}{Q};\quad \varepsilon=\sqrt{Q/\omega_л T_{1\text{эфф}}\zeta};$$

ζ — превышение мощности накачки над пороговой. Для квантовых генераторов на люминесцентных кристаллах типа рубина $\varepsilon \ll 1$, так что решение (1) или (2) близко к решению консервативного уравнения. Впервые это обстоятельство было отмечено в [4]. Там же были исследованы некоторые характеристики решения (1) в консервативном приближении. Для наших целей удобнее запись (1) в виде (2); тогда уравнения (1) и (2) близки к нелинейному консервативному уравнению

$$\ddot{x}+x(1+x)-\frac{\dot{x}^2}{1+x}=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет интеграл движения

$$\dot{x}^2=(1+x)\,[C+2\ln(1+x)-2x],$$

который определяет фазовые траектории (3) и дает возможность найти решение при помощи квадратур.

Семейство периодических решений (3)

$$x_0=x_0(\theta+\tau, C)$$

зависит от двух произвольных постоянных. На рис. 1 построена фазовая плоскость уравнения (3). Точки пересечения с осью x являются корнями уравнения

$$C+2\ln(1+x)-2x=0, \tag{4}$$

которое решается либо численно, либо графически. Корни $\lambda_1<\lambda_2$ определяют предельные значения амплитуды периодического процесса, соответствующего какому-либо значению интеграла движения C.

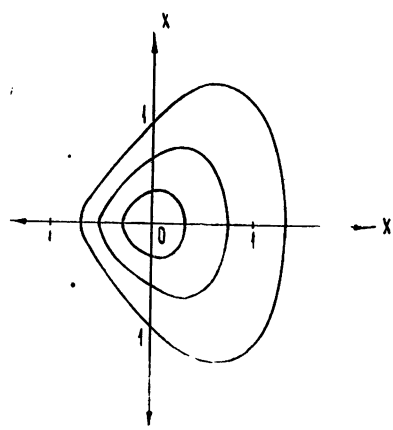


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (3). Интегральные кривые — для значений интеграла движения C=0,1; 0,4; 1. С ростом C $\lambda_1\to-1$, а λ_2 неограниченно увеличивается; глубина модуляции стремится к 100%.

При начальных условиях $x_0(0, C)=\lambda_1$, $\dot{x}_0(0, C)=0$ функция x_0 определяется уравнением

$$\int_{\lambda_1}^{x_0} dx/[\pm(1+x)\sqrt{C+2\ln(1+x)-2x}]=\theta+\tau, \tag{5}$$

а период равен

$$T_0=2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dx/[(1+x)\sqrt{C+2\ln(1+x)-2x}]. \tag{6}$$

Произвольные постоянные C и τ определяются видом правой части уравнения (2).

Если модуляции потерь нет ($\Delta=0$), то $C=0$ и устойчивым является стационарное состояние $n_0=\zeta$, $m_0=\zeta$. Процесс установления стационарного состояния носит пульсирующий характер. Вблизи стационарного состояния частота этих пульсаций $\omega_k=\sqrt{(\omega_л/QT_{1эфф})\zeta}$, время затухания $\tau_k=2T_{1эфф}(1+\zeta)^{-1}$, логарифмический декремент затухания $d=2\pi/\tau_k\omega_k\ll 1$.

Однако при введении в систему потерь, периодически зависящих от времени, уравнение (2) допускает периодическое решение, близкое к решению уравнения (3), описывающее незатухающие колебания интенсивности излучения. Пусть потери в резонаторе периодически меняются во времени с периодом T', т. е. $v(\theta)=v(\theta+T')$. Для нахождения периодических решений (2) необходимо найти все решения порождающей системы (3), имеющие период, совпадающий с периодом правой части системы (2). Для отыскания этих решений мы должны, оставляя τ произвольным, определить интеграл движения C из соотношения

$$T_0(C)=T'/s,$$

где s — произвольное целое число. Если ввести наименьший период правой части $T_0'=T'/p$, где p — также целое число, то интеграл C определяется из уравнения

$$T_0(C)=T_0'p/s. \tag{7}$$

Периодическое решение уравнения (2) будем искать в виде

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\dots, \tag{8}$$

где x_0 — решение уравнения (3) при C, определенном из (7), и некотором значении τ, которое предстоит найти.

Для того, чтобы порождающему решению x_0 соответствовало периодическое решение (8) системы (2), необходимо, чтобы постоянная τ была корнем уравнения [5,6]

$$P(\tau)=\int_0^{T'}[f_1(\theta, x_0, \dot{x}_0)+\varepsilon f_2(\theta, x_0, \dot{x}_0)]\frac{\partial C}{\partial \dot{x}_0}d\theta=0, \tag{9}$$

где частные производные функции C вычисляются для порождающего решения

Известно, что в нелинейных системах резонанс может наступить при условии

$$\omega_0'=\frac{l}{g}\omega_0,$$

где l и g — целые взаимно простые числа. Ограничимся рассмотрением того случая, когда реализуется резонанс на обертоне собственной частоты, т. е. $g=1$ и $l=p/s$ — целое число.

Предположим, что потери в резонаторе гармонически зависят от времени, т. е. $v=v_0\cos(\omega_0'\theta)$, и представим решение уравнения свободных колебаний тригонометрическим рядом

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos[n\omega_0(\theta+\tau)].$$

Тогда с точностью до ε

$$P(\tau)=-\frac{1}{2}v_0 A_l \cos(l\omega_0\tau)\, T'-\overline{x^2}\,(1+n_0)T'=0, \quad dP(\tau)/d\tau\neq 0, \tag{10}$$

где через $\overline{x^2}$ обозначено среднее значение x^2 за период колебаний T_0.

Уравнение (10) позволяет определить те значения сдвига фаз $\omega_0\tau$, при которых возможны колебания рассматриваемого вида. Уравнение (10) имеет $2l$ корней

$$\omega_0\tau_k^{(1)}=\alpha+\frac{2\pi(k-1)}{l}\,;$$
$$\omega_0\tau_k^{(2)}=-\alpha+\frac{2\pi(k-1)}{l}\,, \tag{11}$$

где $\alpha>0$ — наименьший из корней. При этом значениям $\omega_0\tau^{(1)}=\alpha$ и $\omega_0\tau^{(2)}=-\alpha$ соответствуют два существенно различных решения, тогда как остальным значениям фаз $\omega_0\tau$ соответствуют такие же решения, но сдвинутые на несколько периодов. Нетрудно найти и следующие приближения x_1, x_2....

Исследование устойчивости решения (8) уравнения (2) проводится стандартными методами [5,6] и приводит к условию

$$dP(\tau)/d\tau>0. \tag{12}$$

Из (12) следует, что из двух решений $\omega_0\tau_k^{(1)}$ и $\omega_0\tau_k^{(2)}$ устойчивым является лишь то, для которого $A_l\sin(\omega_0\tau)>0$.

Режим синхронизации автомодуляционных колебаний квантового генератора, соответствующий «главному» или обыкновенному резонансу ($l=1$), изучался экспериментально в [1–3].

Все характеристики незатухающих колебаний интенсивности излучения можно найти из (5) и (6). Из рис. 1 видно, что при малых C интенсивность излучения синусоидально зависит от времени, а с увеличением C глубина модуляции возрастает, приближаясь к 100%. Излучение в этом случае состоит из отдельных узких импульсов («пичков»), разделенных большими интервалами, во время которых амплитуда излучения мала. Период колебаний увеличивается с увеличением глубины модуляции.

Как видно из (4) и (7), глубина модуляции и частота следования пичков полностью определяется периодом внешней силой. Однако незатухающий пульсационный режим будет существовать лишь в том случае, если $v_0>2\overline{x^2}(1+n_0)\,|A_l|^{-1}$, т. е. относительное изменение потерь в резонаторе должно быть больше порогового значения, зависящего от частоты возбуждения. Как следует из (2), по порядку величины $\frac{\Delta_{\text{пор}}}{h_p}\sim\frac{Q}{\omega T_{1\text{эфф}}}\sim 10^{-4}$. Увеличение Δ выше $\Delta_{\text{пор}}$ приведет лишь к изменению фазового угла $\omega_0\tau$, но не изменит глубину модуляции выходного излучения.

С помощью уравнений (1) можно описывать только те системы, которые в отсутствие внешних сил после переходного процесса приходят к стационарному режиму колебаний с постоянной интенсивностью излучения (например, одномодовый квантовый генератор). Для описания систем, которые обнаруживают незатухающие колебания интенсивности излучения, необходим анализ более полных уравнений, учитывающих взаимодействие типов колебаний и содержащих устойчивые предельные циклы (3) [7–9].

За возникновение таких устойчивых предельных циклов ответственны малые нелинейные потери, зависящие от амплитуды колебаний и возникающие при учете взаимодействия колебаний разных типов [7–9]. В случае рубина нелинейные потери, составляющие $\sim 10^{-4}$ от потерь на излучение через зеркала, могут привести к образованию устойчивого предельного цикла (3). Возникающий предельный цикл можно трактовать как результат взаимной синхронизации типов колебаний, сдвинутых по фазе. В многомодовой модели в зависимости от связи типов колебаний может возникнуть несколько предельных циклов. При различных фазовых соотношениях между ними могут наблюдаться самые разнообразные зависимости интенсивности излучения от времени. Если фазовые соотношения случайны, то выходное излучение будет иметь нерегулярный характер.

Авторы благодарны Н. Г. Басову за полезные обсуждения и В. И. Беспалову за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. J. De' Maria, R. Gagosz, Proc. IRE, **50**, 1522 (1962).
2. A. J. De' Maria, R. Gagosz, G. Barnard, J. Appl. Phys., **34**, 453 (1963).
3. A. J. De'Maria, Optical Masers Polyt. Press., New-York, 1963, p. 253.
4. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 70 (1965).
5. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, М., 1956.
6. А. М. Кац, Прикладная математика и механика, **19**, 13 (1955).
7. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, ДАН СССР, **162**, 781 (1965).
8. J. A. Fleck, R. E. Kidder, J. Appl. Phys., **35**, 2825 (1964).
9. Л. А. Островский, ЖЭТФ, **49**, 1535 (1965).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
29 ноября 1965 г.

ON SYNCHRONIZATION OF LASER PEAK REGIME

V. N. Morozov, A. N. Oraevsky

Laser regimes have been investigated, in which the quality factor depends periodically on time. It is shown that if the modulation depth of the quality factor exceeds some threshold value in laser there take place continuous fluctuations of radiation power.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.378.325.001

К ВОПРОСУ ОБ УДВОЕНИИ ЧАСТОТЫ СВЕТА, ИЗЛУЧАЕМОГО ОКГ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ ДОБРОТНОСТИ РЕЗОНАТОРА

В. И. Беспалов, Ю. К. Богатырев

Приводятся результаты численного решения задачи об удвоении частоты света, излучаемого ОКГ с переменной добротностью резонатора, для случаев, когда нелинейный преобразователь частоты помещен как внутри резонатора, так и вне его.

1. Известно [1], что удвоение частоты света, генерируемого лазером, можно проводить как вне источника основной частоты, так и непосредственно в резонаторе ОКГ. В настоящей заметке проведено (по результатам расчета на электронной вычислительной машине) сравнение характеристик импульсов света удвоенной частоты, получаемых от лазера с переключением добротности тем и другим способом. Как и следовало ожидать, при малых значениях коэффициента преобразования $K_{\text{пр}}$ нелинейного элемента* удвоение идет эффективнее внутри резонатора, при больших — вне резонатора. Для нелинейного элемента, помещенного внутрь резонатора, имеется оптимальное значение $K_{\text{пр}}$, при котором выходная мощность удвоенной частоты максимальна. Очевидно, что для нелинейного элемента, находящегося вне резонатора, мощность излучения на удвоенной частоте с увеличением $K_{\text{пр}}$ пропорционально растет. Более детальное сравнение характеристик импульсов проведено ниже.

2. Расчет характеристик импульсов удвоенной частоты проводился для ОКГ, модуляция добротности резонатора в котором осуществлялась вращением одного зеркала, на основе той же системы уравнений и при тех же ограничениях, что и в работе [2]. Отличие состояло лишь в том, что здесь при расчете излучения система с нелинейным элементом располагалась внутри резонатора ОКГ (рис. 1), оба зеркала последнего предполагались полностью отражающими на основной частоте ($r_1 = r_2 = 1$) и полностью прозрачными на удвоенной частоте, а влияние нелинейного элемента на работу ОКГ учитывалось введением эффективного нелиней-

---

* Под коэффициентом преобразования нелинейного элемента здесь и ниже понимается величина $K_{\text{пр}} = P_{2\omega}/P_{\omega}^2$, где P_{ω} — поток энергии в волне основной частоты, падающей на нелинейный элемент, а $P_{2\omega}$ — поток энергии света удвоенной частоты на выходе нелинейного элемента. Предполагается, что $K_{\text{пр}}$ не зависит от P_{ω}, т. е $P_{2\omega} \ll P_{\omega}$. При этом условии коэффициент преобразования выражается через параметры нелинейного элемента (кристалла) известным соотношением [1]: $K_{\text{пр}} = \alpha(\omega\chi l)^2/(cn)^3$, где α — коэффициент, определяемый условиями преобразования (например, типом синхронизма), ω — преобразуемая частота, χ — параметр нелинейности, l — длина кристалла, n — показатель преломления. В частности, если $\lambda_{\omega} \simeq 1\,\mu$, $\chi \simeq 3 \cdot 10^{-9}$ ед. CGSE, $n = 1{,}5$, то при удвоении частоты в плоской волне в синхронизме типа $2K_{0\omega} = K_{l2\omega}$ коэффициент преобразования связан с длиной кристалла l (в *см*) соотношением $K_{\text{пр}} \simeq 10^{-28} l^2$.

ного поглотителя. Действие последнего, в свою очередь, учитывалось заменой полностью отражающего неподвижного зеркала другим зеркалом, коэффициент отражения которого зависит от энергии поля в резонаторе. Конкретный вид этой зависимости*

$$r_{1\,\text{эфф}} = (1 - 4\gamma_0 K_{\text{пр}} m)^{1/4}, \tag{1}$$

используемый ниже, имеет место в случае, если энергия поля в резонаторе m и эффективный коэффициент отражения связаны с P_ω соотношениями вида

$$m = (1 + r^2_{1\,\text{эфф}})\, P_\omega / 2\gamma_0; \tag{2}$$

$$r^2_{1\,\text{эфф}} = (1 - 2K_{\text{пр}} P_\omega), \tag{3}$$

где $K_{\text{пр}} = P_{2\omega}/P^2_\omega$.

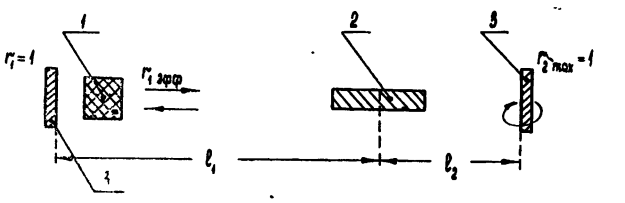


Рис. 1. Эквивалентная схема ОКГ:
1—нелинейный элемент; 2—активное вещество; 3—зеркала.

Выражение (2) достаточно точно описывает связь между m-и P_ω в ОКГ при $l_1 \gg l_2$ (см. рис. 1). В других случаях эта связь иная; однако при $r_{1\,\text{эфф}} \sim 1$, $r_2 \sim 1$ соответствующие выражения отличаются мало. Соотношение (3) учитывает потери энергии основной частоты, обусловленные преобразованием во вторую гармонику. Коэффициент 2 в (3) связан с тем, что в резонаторе преобразование осуществляется как при прямом, так и при обратном прохождении волной нелинейного элемента.

Из соотношений (1)—(3) нетрудно получить связь между $P_{2\omega}$ и m для ОКГ с нелинейным элементом внутри резонатора:

$$P_{2\omega}(\tau) = K_{\text{пр}} [2\gamma_0 m(\tau)]^2 / [1 + (1 - K_{\text{пр}} 4\gamma_0 m(\tau))^{1/2}]^2. \tag{4}$$

Та же связь для нелинейного элемента вне резонатора имеет вид

$$P_{2\omega}(\tau) = K_{\text{пр}} [m(\tau)]^2 / T^2_{\text{p max}} = K_{\text{пр}} [2\gamma_0 m(\tau)]^2 (\ln |r_1|)^2, \tag{5}$$

где $T_{\text{p max}}$ — время релаксации энергии в резонаторе, определяемое лишь потерями на полезное излучение.

3. Решение системы дифференциальных уравнений, описывающей процессы, происходящие в трехуровневом ОКГ (см. [2]) с нелинейным поглотителем в резонаторе, т. е. с учетом (1)—(3), проводилось для вариантов с значениями параметров: $n^0 = 10^{-2}$; $\mu_1 = 10^{+5}$; $\mu_2 = 10^{-2}$; $r_0 = 10^{-2}$; $q = 2 \cdot 10^4$; $N = 5 \cdot 10^{20}$; $\tau_{\text{п}} = 25$; 50; 75 и $K_{\text{пр}} \cdot 10^{28} = 0{,}5$; 1; 2; 4; 6; 10.

Результаты решения представлены на рис. 2, 3 и 4. Из рис. 2 следует, что чем больше коэффициент преобразования, тем медленнее и на

* Все обозначения те же, что и в работе [2]. Напомним лишь единицы измерения основных величин: m — число фотонов, P_ω — число фотонов в *сек*, $P_{2\omega}$ — удвоенное число фотонов в *сек*. Для $\lambda \sim 1\mu$ энергия в джоулях получается умножением значений m на $2 \cdot 10^{-19}$; потоки энергии в мегаваттах получаются умножением P_ω и $P_{2\omega}$ на $2 \cdot 10^{-26}$.

меньшую величину изменяется разность населенностей уровней и, как следствие, тем сильнее изменяется форма импульса основной частоты (рис. 2б). Так, при изменении $K_{пр}$ в 20 раз амплитуда импульса уменьшилась в 4 раза, а длительность увеличилась в 2,5 раза. Эти изменения объясняются тем, что с увеличением $K_{пр}$ уменьшается эффективный

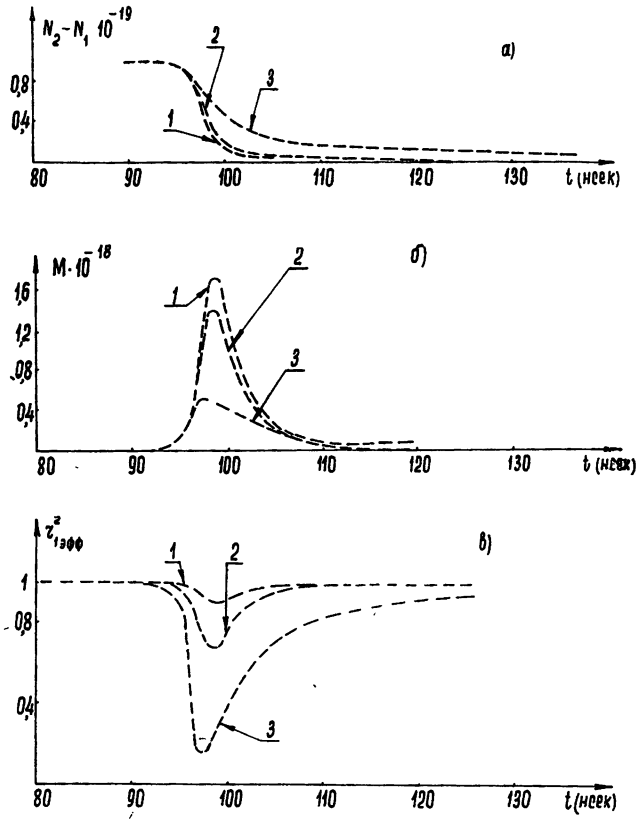


Рис. 2. Изменение во времени а) разности населенностей уровней N_2—N_1, б) среднего числа фотонов частоты ω в резонаторе M, в) эффективного коэффициента отражения от бокового зеркала $r_{1\,эфф}$ при различных значениях коэффициента преобразования $K_{пр}$:

1—$K_{пр} = 0{,}5\cdot10^{-28}$ ($l\sim0{,}7$ *см*); 2—$K_{пр} = 2\cdot10^{-28}$ ($l\sim1{,}5$ *см*); 3—$K_{пр} = 10\cdot10^{-28}$ ($l\sim3$ *см*).

коэффициент отражения неподвижного зеркала и высвечивание происходит при меньших значениях энергии поля в резонаторе. О форме импульсов удвоенной частоты при различных значениях коэффициента преобразования можно судить по рис. 3. Видно, что с ростом $K_{пр}$ длительность фронта импульса уменьшается, а длительность спада растет. В целом форма импульса становится все более асимметричной. На этом же рисунке приведен для сравнения импульс $P^{опт}_{2\omega}(\tau)$ (сплошная кривая), получающийся в том случае, когда преобразователь частоты установлен вне резонатора ОКГ, работающего в режиме максимальной выходной мощности $P^{опт}_{1\omega}$. Форма импульса при этом более симметрична и, естественно, не зависит от коэффициента преобразования.

Графики, показывающие зависимость относительной максимальной выходной мощности $P_{2\omega}$ от $K_{пр}$, для случаев, когда нелинейный пре-

образователь находится вне резонатора $P_{2\omega}^{опт}$ (при $\tau_п=75$) и внутри его $P_{2\omega}$ (при различных временах переключения добротности резонатора $\tau_п$), приведены на рис. 4. Видно, что преобразователь частоты целесообразно помещать внутри резонатора при сравнительно небольших коэффициентах преобразования (длинах кристалла $l\sim 2$ *см*) и малых временах переключения добротности резонатора. Так, например, при $\tau_п = 75$ равенство максимальных мощностей выходных импульсов, полученных тем и другим путем, наступает в рассматриваемом случае при $K_{пр} = \widetilde{K}_{пр} = 3\cdot 10^{-28}$. При этом из-за большей длительности энергия несколько больше в импульсе, излучаемом ОКГ с преобразователем внутри резонатора. Для $K_{пр}>3\cdot 10^{-28}$ предпочтительней режим с нелинейным поглотителем вне резонатора.

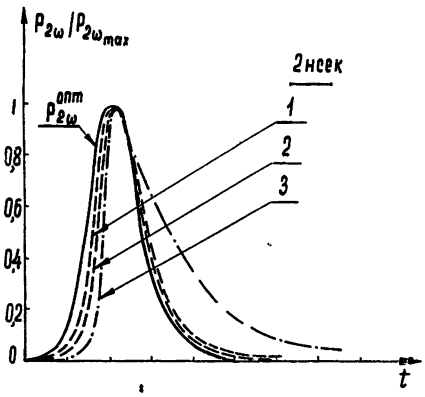


Рис. 3. Формула импульса излучения на частоте 2ω при различных $K_{пр}$:

1 — $K_{пр} = 0{,}5\cdot 10^{-28}$ (l=0,7 *см*); 2 — $K_{пр} = 2\cdot 10^{-28}$ (l=1,5 *см*); 3 — $K_{пр} = 10\cdot 10^{-28}$ (l=3 *см*).

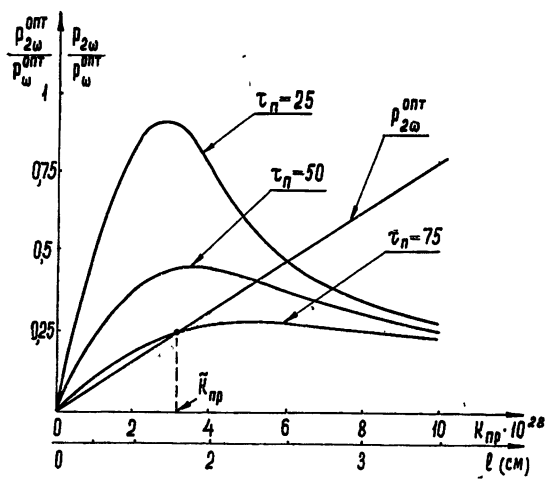


Рис. 4. Величина относительной максимальной выходной мощности $P_{2\omega}$ как функция коэффициента преобразования $K_{пр}$ (или длины нелинейного элемента l) при различных временах переключения добротности резонатора $\tau_п$.

Для значений $\tau_п = 50$; 25 прямые $P_{2\omega}^{опт} = f(K_{пр})$ пойдут лишь несколько круче прямой, приведенной на рис. 4. Поэтому максимумы $P_{2\omega}$ будут иметь место при значениях $K_{пр}$, меньших, чем значения $K_{пр}$ в точках пересечения, соответствующих прямой $P_{2\omega}^{опт}$ и кривой $P_{2\omega}$.

Из приведенных расчетов вытекает, что максимальные значения P_2 получаются при таких $K_{пр}$, для которых эффективный коэффициент отражения $r_{1\,эфф}$ (в максимуме импульса) примерно равен оптимальному значению r_1 в системе без нелинейного преобразователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1965.
2. В. И. Беспалов, Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, 525 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 ноября 1965 г

TO THE PROBLEM OF FREQUENCY DOUBLING OF LASER RADIATION WITH *Q*-SWITCHING OF RESONATOR

V. I. Bespalov, Yu. K. Bogatyryov

The results are given of numerical solution of the problem on frequency doubling of laser radiation with a variable quality factor of resonator for the cases when a nonlinear frequency transformator is placed both inside the resonator and outside it.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.373.072 9

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ НА РАБОТУ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

И. М. Клибанова

Рассмотрено влияние флуктуаций контурных емкостей на взаимную синхронизацию системы двух связанных генераторов. Для случая малых флуктуаций получены выражения спектров частотных и амплитудных флуктуаций, коэффициентов диффузии и ширины спектральной линии генераторов в зависимости от начальной расстройки частот автогенераторов и величины взаимной связи между ними.

В литературе довольно подробно рассмотрена динамическая задача о режимах работы двух и более связанных генераторов различного типа (обычных ламповых, клистронных, молекулярных) [1–6], однако вопрос о влиянии шумов на их взаимную синхронизацию изучен недостаточно. Автору известны лишь две работы на эту тему: статья [7], в которой рассматривается влияние естественных шумов на взаимную синхронизацию двух томсоновских генераторов, и сообщение [8] о результатах экспериментальной работы по измерению амплитудных флуктуаций в системе двух взаимно-синхронизованных клистронных генераторов.

В настоящей работе изучается воздействие малых флуктуаций контурных емкостей на взаимную синхронизацию двух томсоновских генераторов в случае малой связи между ними. Получены выражения для спектров частотных и амплитудных флуктуаций и ширины спектральной линии взаимно-синхронизованных генераторов, а также проведена их сравнительная оценка с соответствующими характеристиками свободных генераторов. Она показала, что предположение о повышении стабильности взаимно-синхронизованных генераторов [6] оказывается справедливым лишь при определенных условиях и только для захваченного генератора.

1. Рассмотрим систему слабо связанных генераторов, процессы в которой при наличии малых флуктуаций контурных емкостей $C_{1,2}=\langle C_{1,2}\rangle(1+\delta c_{1,2})$, где $\langle \delta c_{1,2}^2\rangle \ll 1$*, описываются следующими уравнениями относительно напряжений X и Y на сетках ламп генераторов (в пренебрежении сеточными токами) [2]:

$$\begin{aligned} \ddot{X}+\omega_{01}^2 X &= F_1(X,\dot{X})+f_1\ddot{Y}+E_1(X,\dot{X},X,\delta c_1,\delta\dot{c}_1,\delta\ddot{c}_1);\\ \ddot{Y}+\omega_{02}^2 Y &= F_2(Y,\dot{Y})+f_2\ddot{X}+E_2(Y,\dot{Y},\ddot{Y},\delta c_2,\delta\dot{c}_2,\delta\ddot{c}_2). \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь через $F_1(X,\dot{X})$ и $F_2(Y,\dot{Y})$ обозначены правые части уравнений свободных генераторов, включающие в себя потери и нелинейности схемы, а через $f_1\ddot{Y}$, $f_2\ddot{X}$ — члены, характеризующие связь между генераторами, $E_1(X,\dot{X},\ddot{X},\delta c_1,\delta\dot{c}_1,\delta\ddot{c}_1)$ и $E_2(Y,\dot{Y},\ddot{Y},\delta c_2,\delta\dot{c}_2,\delta\ddot{c}_2)$ — малые

* $\langle \ldots \rangle$ означает статистическое усреднение.

случайные функции, учитывающие воздействие флуктуаций контурных емкостей δc_1 и δc_2 на систему связанных генераторов.

Можно показать, что для генераторов с контуром в цепи сетки выражения для E_1 и E_2 будут следующими (после отбрасывания членов второго порядка малости вида $f_1\delta c_1$, $f_2\delta c_2$ и т. д.):

$$E_1 = -(\delta\ddot{c}_1 + \frac{\omega_{01}}{Q_1}\delta\dot{c}_1)X - \left(\frac{\omega_{01}\delta c_1}{Q_1} + 2\delta\dot{c}_1\right)\dot{X} - \delta c_1\ddot{X};$$

$$E_2 = -\left(\delta\ddot{c}_2 + \frac{\omega_{02}}{Q_2}\delta\dot{c}_2\right)Y - \left(\frac{\omega_{02}\delta c_2}{Q_2} + 2\delta\dot{c}_1\right)\dot{Y} - \delta c_2\ddot{Y}, \tag{1a}$$

где Q_1, Q_2 — добротности контуров генераторов.

Как известно [2–4], в динамической системе ($\delta c_1 = \delta c_2 \equiv 0$) в некоторой области начальных расстроек парциальных частот ω_{01} и ω_{02} имеет место режим синхронной работы генераторов на частоте ω с постоянными амплитудами $A_0(1 + \alpha_0)$, $B_0(1 + \beta_0)$ и с постоянными фазами φ_1^0, φ_2^0 (A_0, B_0 — амплитуды колебаний свободных генераторов, α_0 и β_0 — поправки к амплитудам свободных колебаний при взаимной синхронизации связанных генераторов, причем в случае слабой связи α_0, $\beta_0 \ll 1$). Выражения для α_0, β_0, $\varphi_0 = \varphi_2^0 - \varphi_1^0$, ω могут быть получены из следующих соотношений (см., например, [4]):

$$\alpha_0 = -\frac{\omega f_1 B_0}{2A_0 p_1}\sin\varphi_0; \quad \beta_0 = \frac{\omega f_2 A_0}{2B_0 p_2}\sin\varphi_0; \tag{2}$$

$$(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2) = \omega^4 f_1 f_2 \cos^2\varphi_0; \tag{3}$$

$$\Delta = (p - 2q\sin\varphi_0)\cos\varphi_0, \tag{4}$$

где $\Delta = \omega_{02} - \omega_{01}$ — начальная расстройка частот генераторов; p_1, p_2 — прочность предельных циклов свободных генераторов;

$$p = \frac{\omega}{2}\left(f_2\frac{A_0}{B_0} - f_1\frac{B_0}{A_0}\right);$$

$$q = \frac{\omega^2}{8}\left(f_2\frac{A_0}{B_0} + f_1\frac{B_0}{A_0}\right)\left(f_2\frac{A_0}{p_2 B_0} + f_1\frac{B_0}{p_1 A_0}\right).$$

Если мощности, вносимые в контур одного генератора от другого, неодинаковы ($f_2 A_0^2 \neq f_1 B_0^2$), то для достаточно слабой связи параметр q оказывается величиной второго порядка малости по сравнению с $|p|$. Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем, когда

$$|p| \gg q. \tag{5}$$

Тогда в соотношении (4) второй член можно отбросить и считать, что полоса синхронизации равна $|p|$.

Нестабильность контурных емкостей приводит к тому, что колебания взаимно-синхронизированных генераторов становятся не строго гармоническими, а оказываются промодулированными случайным образом по амплитуде и фазе.

Учитывая малость правых частей уравнений (1) и квазигармонический характер колебаний, определим амплитуду и фазу колебаний генераторов в этом случае соотношениями [9]

$$X = A_0[1 + \alpha_0 + \alpha(t)]\cos[\omega t + \varphi_1^0 + \varphi_1(t)];$$

$$\dot{X} = -\omega A_0[1 + \alpha_0 + \alpha(t)]\sin[\omega t + \varphi_1^0 + \varphi_1(t)];$$
$$Y = B_0[1 + \beta_0 + \beta(t)]\cos[\omega t + \varphi_2^0 + \varphi_2(t)]; \quad (6)$$
$$\dot{Y} = -\omega B_0[1 + \beta_0 + \beta(t)]\sin[\omega t + \varphi_2^0 + \varphi_2(t)],$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — флуктуационные поправки к амплитудам и фазам генераторов.

Далее, предполагая флуктуации емкости достаточно медленными (время корреляции их τ_1, $\tau_2 \gg 2\pi/\omega$), а амплитудные — малыми ($\langle\alpha^2\rangle$, $\langle\beta^2\rangle \ll 1$), перейдем, используя соотношения (6), от уравнений (1) для X и Y к укороченным уравнениям для флуктуационных амплитуд и фаз [10, 11]:

$$\dot{\alpha} = -p_1\alpha - p_1\alpha_0(1 - \cos\psi) - \varkappa_1\sin\psi - \left(\frac{\omega}{2Q_1}\delta c_1 + \delta\dot{c}_1\right);$$
$$\dot{\beta} = -p_2\beta - p_2\beta_0(1 - \cos\psi) + \varkappa_2\sin\psi - \left(\frac{\omega}{2Q_2}\delta c_2 + \delta\dot{c}_2\right); \quad (7)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -(\omega - \omega_{01})(1 - \cos\psi) - D_1\sin\psi - \frac{\omega}{2}\delta c_1;$$
$$\dot{\varphi}_2 = -(\omega - \omega_{02})(1 - \cos\psi) - D_2\sin\psi - \frac{\omega}{2}\delta c_2. \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\varkappa_1 = \frac{\omega}{2}f_1\frac{B_0}{A_0}\cos\varphi_0, \quad \varkappa_2 = \frac{\omega}{2}f_2\frac{A_0}{B_0}\cos\varphi_0,$$
$$D_1 = \frac{\omega}{2}f_1\frac{B_0}{A_0}\sin\varphi_0, \quad D_2 = \frac{\omega}{2}f_2\frac{A_0}{B_0}\sin\varphi_0,$$

$\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ — флуктуационная разность фаз колебаний генераторов.

Из (8) нетрудно получить уравнение для ψ:

$$\dot{\psi} = -\Delta(1 - \cos\psi) - D\sin\psi - \frac{\omega}{2}(\delta c_2 - \delta c_1), \quad (9)$$

где $D = D_2 - D_1 = p\sin\varphi_0$ или $D^2 = \Delta^2 + p^2$. Параметр D имеет смысл прочности предельного цикла по фазе. Отметим, что уравнение (9) совпадает с укороченным уравнением, полученным для фазовых флуктуаций в случае обычной синхронизации внешним гармоническим напряжением томсоновского генератора с флуктуирующей контурной емкостью [12, 13].

Как следует из анализа системы уравнений (7)—(9), устойчивые значения стационарной разности фаз, расположенные внутри полосы синхронизации, соответствуют положительным значениям параметра D и заключены в пределах $[k\pi, (k+1)\pi]$ при $p > 0$ и в пределах $[-(k+1)\pi, -k\pi]$ при $p < 0$ $(k = 0, 2, 4, \ldots)$.

Система нелинейных уравнений (7)—(9) в общем случае (для любых флуктуаций контурных емкостей) оказывается довольно сложной. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь достаточно малых флуктуаций, для которых $\langle\psi^2\rangle \ll 1$ и, следовательно, возможна линеаризация уравнений. Это соответствует случаю «сильной» синхронизации [7] и

физически означает, что фазовый сдвиг колебаний φ_1 и φ_2 мало меняется со временем, хотя фаза колебаний X, Y каждого генератора в отдельности может неограниченно расти. Условия на «малость» флуктуаций емкостей, при которых $\langle \psi^2 \rangle \ll 1$, будут получены ниже.

2. Заменяя $\cos\psi \sim 1$, а $\sin\psi \sim \psi$, запишем линеаризованную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -p_1\alpha - \varkappa_1\psi - \left(\frac{\omega}{2Q_1}\delta c_1 + \delta\dot{c}_1\right);\\
\dot{\beta} &= -p_2\beta + \varkappa_2\psi - \left(\frac{\omega}{2Q_2}\delta c_2 + \delta\dot{c}_2\right);\\
\nu_1 &= -D_1\psi - \frac{\omega}{2}\delta c_1;\\
\nu_2 &= -D_2\psi - \frac{\omega}{2}\delta c_2;\\
\dot{\psi} &= -D\psi - \frac{\omega}{2}(\delta c_2 - \delta c_1),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\nu_{1,2} \doteq \varphi_{1,2}$. Из уравнений (10), предполагая флуктуации емкостей δc_1 и δc_2 независимыми, получим основные статистические характеристики колебаний генераторов.

Рассмотрим спектры частотных флуктуаций $S_{\nu_1}(\Omega)$ и $S_{\nu_2}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
S_{\nu_1}(\Omega) &= \frac{(\Omega^2 + D_2^2)S_1(\Omega) + D_1^2 S_2(\Omega)}{\Omega^2 + D^2};\\
S_{\nu_2}(\Omega) &= \frac{(\Omega^2 + D_1^2)S_2(\Omega) + D_2^2 S_1(\Omega)}{\Omega^2 + D^2},
\end{aligned} \tag{11}$$

где $S_{1,2}(\Omega) = \frac{\omega^2}{4} S_{\delta c_{1,2}}(\Omega)$ — спектральная плотность частотных флуктуаций свободного генератора, а $S_{\delta c_{1,2}}(\Omega)$ — спектр флуктуаций емкости. Из анализа уравнений (11) следует, что наличие связи между генераторами оказывает существенное влияние на форму спектров частотных флуктуаций (в полосе синхронизации) в области сравнительно низких частот ($\Omega \sim D$); на высоких частотах она совпадает с формой спектров свободных генераторов.

Рассмотрим зависимость спектральной плотности частотных флуктуаций на нулевой частоте от значения начальной расстройки Δ и величины взаимной связи $K = f_2 A_0^2 / f_1 B_0^2$, определяемой отношением мощностей, вносимых в контур одного генератора от другого. При $\Omega = 0$ спектральные плотности обоих генераторов совпадают:

$$S_{\nu_1}(0) = S_{\nu_2}(0) = S_1(0)\frac{D_2^2}{D^2} + S_2(0)\frac{D_1^2}{D^2}. \tag{12}$$

Из выражений для коэффициентов D_1, D_2, D видно, что отношения D_1^2/D^2 D_2^2/D^2 не зависят от начальной расстройки и связаны с K соотношениями

$$\frac{D_1^2}{D^2} = \frac{1}{(K-1)^2}; \tag{13}$$

$$\frac{D_2^2}{D^2} = \frac{K^2}{(K-1)^2}. \tag{14}$$

На рис. 1 построена зависимость D_1^2/D^2 и D_2^2/D^2 от K.

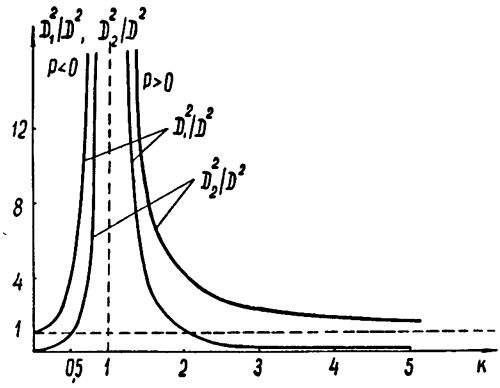


Рис. 1. Графики зависимости D_1^2/D^2 и D_2^2/D^2 от величины взаимной связи K.

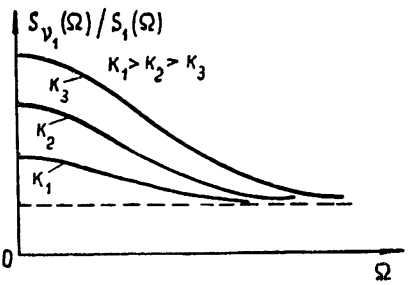


Рис. 2. Спектр флуктуаций частоты синхронизирующего генератора для случая $p > 0$.

Выделим случай, когда воздействие одного из генераторов становится преобладающим, т. е. $K \to 0$ или $K \to \infty$. Это равносильно обращению в нуль одной из связей и соответствует случаю обычной синхронизации автогенератора внешним сигналом. Отметим, что при $K > 1\,(p > 0)$ синхронизирующим является первый генератор, а при $K < 1\,(p < 0)$ — второй.

Из соотношений (12)—(14) и рис. 2 следует, что спектральные плотности частотных флуктуаций в нуле определяются в этом случае, как и следовало ожидать, лишь нестабильностью контурной емкости синхронизирующего генератора и совпадают с соответствующим значением спектральной интенсивности частотных флуктуаций свободного генератора $S_1(0)$ или $S_2(0)$. Интересен также другой предельный случай, когда воздействия генераторов друг на друга оказываются сравнимыми, т. е. $K \to 1$ (но из-за условия (5) $K \neq 1$). При этом получается, что $D_1^2/D^2 \simeq D_2^2/D^2 \gg 1$. Следовательно, спектральные плотности флуктуаций частоты в нуле становятся здесь значительно больше, чем в свободном генераторе и определяются в равной степени флуктуациями контурных емкостей обоих генераторов.

Для промежуточных значений K спектральная плотность частотных флуктуаций синхронизирующего генератора в области низких частот оказывается всегда больше, чем в свободном генераторе, так как при $K > 1 \sim D_2^2/D^2 > 1$, а при $K < 1 \sim D_1^2/D^2 > 1$. Аналогичная картина имеет место и для синхронизируемого генератора при значениях $0{,}5 < K < 1$ и $1 < K < 2 (D_1^2/D^2$ и $D_2^2/D^2 > 1)$. Если же величина взаимной связи $K > 2$ или $K < 0{,}5$, то в зависимости от соотношения $S_{\delta c_1}(0)$ и $S_{\delta c_2}(0)$ спектральная плотность частотных флуктуаций в нуле может быть как больше, так и меньше, чем в свободном генераторе (см. (12)—(14) и рис. 2).

Для наглядности на рис. 2, 3 в соответствии с (11) построены графики $S_{\nu_1}(\Omega)/S_1(\Omega)$ и $S_{\nu_2}(\Omega)/S_2(\Omega)$ при значениях $1 < K < \infty$ (т. е.

для $p > 0$) и $S_{\delta c_1}(\Omega) = NS_{\delta c_2}(\Omega)$. На рис. 4 приведены графики частотных флуктуаций генераторов для случая, когда время корреляции флуктуаций контурных емкостей τ_1, $\tau_2 \ll 1/D$.

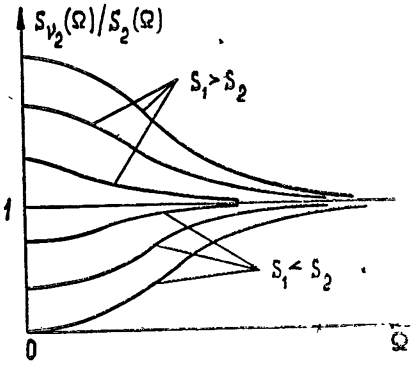


Рис. 3 Спектр флуктуаций частоты захваченного генератора для случая $p > 0$, $K \gg 1$.

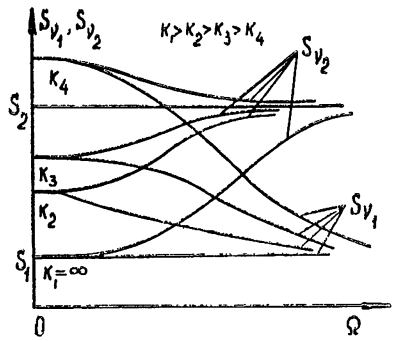


Рис 4. Спектры флуктуаций частоты генераторов для случая, когда синхронизирующим является первый генератор ($K > 1$) и τ_1, $\tau_2 \ll 1/D$.

Перейдем к рассмотрению спектров амплитудных флуктуаций $S_\alpha(\Omega)$ и $S_\beta(\Omega)$. Выражения для них имеют следующий вид (см. (10)):

$$S_\alpha(\Omega) = \frac{1}{(p_1^2 + \Omega^2)(D^2 + \Omega^2)} \left\{ \frac{\omega^2}{4} \varkappa_1^2 S_{\delta c_2}(\Omega) + \left[\frac{\omega}{2} \left(\varkappa_1 + \frac{D}{Q_1} \right) - \Omega^2 \right]^2 \times \right.$$

$$\left. \times S_{\delta c_1}(\Omega) + \Omega^2 \left(\frac{\omega}{2Q_1} + D \right)^2 S_{\delta c_1}(\Omega) \right\};$$

$$S_\beta(\Omega) = \frac{1}{(p_2^2 + \Omega^2)(D^2 + \Omega^2)} \left\{ \frac{\omega^2}{4} \varkappa_2^2 S_{\delta c_1}(\Omega) + \left[\frac{\omega}{2} \left(\varkappa_2 + \frac{D}{Q_2} \right) - \Omega^2 \right]^2 \times \right. \tag{15}$$

$$\left. \times S_{\delta c_2}(\Omega) + \Omega^2 \left(\frac{\omega}{2Q_2} + D \right)^2 S_{\delta c_2}(\Omega) \right\}.$$

Анализ соотношений (15) показывает, что в низкочастотном диапазоне связь между генераторами сказывается существенным образом на форме спектров амплитудных флуктуаций. На высоких частотах $S_\alpha(\Omega)$ и $S_\beta(\Omega)$ остаются такими же, как в свободном генераторе, совпадая со спектрами флуктуаций контурных емкостей. При нулевой начальной расстройке $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ и, как следует из соотношений (15), $S_\alpha(\Omega)$ и $S_\beta(\Omega)$ совпадают со спектрами амплитудных флуктуаций свободных генераторов.

В отличие от фазовых флуктуаций $S_\alpha(0) \neq S_\beta(0)$:

$$S_\alpha(0) = \frac{\omega^2}{4p_1^2} \left[\frac{\varkappa_1^2}{D^2} S_{\delta c_2}(0) + \left(\frac{\varkappa_1}{D} + \frac{1}{Q_1} \right)^2 S_{\delta c_1}(0) \right];$$

$$S_\beta(0) = \frac{\omega}{4p_2^2} \left[\frac{\varkappa_2^2}{D^2} S_{\delta c_1}(0) + \left(\frac{\varkappa_2}{D} + \frac{1}{Q_2} \right)^2 S_{\delta c_2}(0) \right]. \tag{16}$$

Отношения $\varkappa_1^2/D^2$ и $\varkappa_2^2/D^2$ связаны с величиной связи K и начальной расстройкой Δ зависимостью

$$\frac{x_1^2}{D^2} = \frac{1}{(K-1)^2(p^2/\Delta^2 - 1)};$$
$$\frac{x_2^2}{D^2} = \frac{K^2}{(K-1)^2(p^2/\Delta^2 - 1)}. \qquad (17)$$

Из сопоставления (16) и (17) видно, что при нулевой начальной расстройке $S_\alpha(0)$ и $S_\beta(0)$ минимальны. В предельных случаях, соответствующих режиму обычной синхронизации ($K = 0$ или $K = \infty$), как следует из (15), (17), спектральная плотность амплитудных флуктуаций синхронизирующего генератора не меняется, оставаясь, естественно, такой же, как в свободном генераторе.

Выше отмечалось, что характеристикой степени синхронной работы генераторов является значение дисперсии $\langle\psi^2\rangle$. Ее выражение может быть получено с помощью последнего уравнения системы (10):

$$\langle\psi^2\rangle = \frac{\omega^2}{8D}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_{\delta c_1}(x) + \Phi_{\delta c_2}(x)]\, e^{-D|x|}dx, \qquad (18)$$

где $\Phi_{\delta c_1}(x)$ и $\Phi_{\delta c_2}(x)$ — функции корреляции флуктуаций контурных емкостей первого и второго генераторов.

Из соотношения (18) видно, что $\langle\psi^2\rangle$ при стремлении начальной расстройки к границе полосы синхронизации ($D \to 0$) неограниченно возрастает. Как и в случае обычной синхронизации, линеаризованная система уравнений (10) справедлива лишь при $\langle\psi^2\rangle \ll 1$. Это требование может быть выполнено лишь для достаточно малых флуктуаций контурных емкостей, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_{\delta c_1}(x) + \Phi_{\delta c_2}(x)]e^{-D|x|}dx \ll \frac{8D}{\omega^2}. \qquad (19)$$

Если принять, что $\Phi_{\delta c_1}(x) = \langle \delta c_1^2 \rangle r(x)$, $\Phi_{\delta c_2}(x) = \langle \delta c_2^2 \rangle r(x)$, где $r(x)$ — коэффициент корреляции, то (19) примет вид

$$[\langle\delta c_1^2\rangle + \langle\delta c_2^2\rangle] \ll \frac{8D}{\omega^2\int_{-\infty}^{\infty} r(x)e^{-D|x|}dx}. \qquad (20)$$

Для квазистатических флуктуаций емкости, когда $\tau_1, \tau_2 \gg 1/D$, соотношение (20) запишется следующим образом:

$$[\langle\delta c_1^2\rangle + \langle\delta c_2^2\rangle] \ll \frac{4D^2}{\omega^2} = \frac{4(p^2 - \Delta^2)}{\omega^2}. \qquad (21)$$

Как следует из (19)—(21), увеличение начальной расстройки и уменьшение полосы синхронизации $|p|$ (за счет уменьшения коэффициентов связи f_1 и f_2 или стремления $K \to 1$) налагают вее более жесткие условия на малость флуктуаций контурных емкостей.

Отметим, что для некоторых качественных оценок характера фазовых флуктуаций в генераторах в случае больших флуктуаций емкостей, когда нельзя считать $\langle\psi^2\rangle \ll 1$ («слабая» синхронизация), можно использовать результаты работы [13]. В ней для шаговой модели флуктуаций емкости было проведено исследование нелинейного уравнения, аналогичного уравнению (9), описывающего фазовые флуктуации генератора, синхронизованного внешним монохроматическим напряжением. В част-

ности, было получено, что при больших флуктуациях параметров $\langle\dot{\psi}\rangle \neq 0$, если начальная расстройка отлична от нуля. В применении к рассматриваемой задаче это означает, что $\langle\nu_2\rangle \neq \langle\nu_1\rangle$ т. е. что внутри полосы синхронизации средние частоты связанных генераторов оказываются разными из-за больших флуктуаций параметров и отличаются от частоты синхронизации соответственно на $\langle\nu_1\rangle$ и $\langle\nu_2\rangle$.

Перейдем к рассмотрению среднеквадратичного набега фаз генераторов $\langle\Delta\varphi_1^2(\tau)\rangle$ и $\langle\Delta\varphi_2^2(\tau)\rangle$. Из уравнений (10) получаем для них следующие выражения:

$$\langle\Delta\varphi_1^2\rangle = \frac{\omega^2}{4}\left\{\int_{-\tau}^{\tau}(\tau - |z|)\,\Phi_{\delta c_1}(z)dz + \frac{1}{D}\int_{-\tau}^{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}[(D_2^2 - D^2)\Phi_{\delta c_1}(x-z) + D_1^2\Phi_{\delta c_2}(x-z)](\tau - |z|)e^{-D|x|}\,dx\,dz\right\}; \tag{22}$$

$$\langle\Delta\varphi_2^2\rangle = \frac{\omega^2}{4}\left\{\int_{-\tau}^{\tau}(\tau - |z|)\,\Phi_{\delta c_2}(z)dz + \frac{1}{D}\int_{-\tau}^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}[(D_1^2 - D^2)\,\Phi_{\delta c_2}(x-z) + D_2^2\Phi_{\delta c_1}(x-z)](\tau - |z|)e^{-D|x|}dxdz\right\}. \tag{23}$$

Из анализа уравнений (22) и (23) следует, что для больших значений временного интервала $\tau \gg \tau_1, \tau_2, 1/D$ среднеквадратичные набеги фаз обоих генераторов совпадают:

$$\langle\Delta\varphi_1^2\rangle \simeq \langle\Delta\varphi_2^2\rangle \simeq \frac{\omega^2}{4D^2}[D_2^2 S_{\delta c_1}(0) + D_1^2 S_{\delta c_2}(0)]\tau. \tag{24}$$

Из формулы (24) видно, что в этом случае среднеквадратичный набег фаз генераторов описывается диффузионным законом с коэффициентом диффузии $d_\infty = S_{\nu_1}(0) = S_{\nu_2}(0)$, который связан с коэффициентами диффузии свободных генераторов d_1^0 и d_2^0 соотношением

$$d_\infty = \frac{D_2^2}{D^2}d_1^0 + \frac{D_1^2}{D^2}d_2^0. \tag{25}$$

Учитывая (13), (14), отметим, что значение d_∞ не зависит от величины начальной расстройки (в пределах полосы синхронизации) и при $K \to \infty$ (или $K \to 0$) совпадает с коэффициентом диффузии синхронизирующего генератора d_1^0 (или d_2^0). При $K \to 1$ значение d_∞ возрастает и определяется примерно в равной степени и d_1^0, и d_2^0 (рис. 1).

Для значений $\tau \ll \tau_1, \tau_2, 1/D$ выражения среднеквадратичных набегов фаз генераторов будут различными:

$$\langle\Delta\varphi_1^2\rangle = \frac{\omega^2}{4}\left\{\langle\delta c_1^2\rangle + \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{\infty}[(D_2^2 - D^2)\Phi_{\delta c_1}(x) + D_1^2\,\Phi_{\delta c_2}(x)] \times e^{-D|x|}dx\right\}\tau^2; \tag{26}$$

$$\langle \Delta\varphi_2^2 \rangle = \frac{\omega^2}{4}\left\{ \langle \delta c_2^2 \rangle + \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{\infty} [(D_1^2 - D^2)\Phi_{\delta c_2}(x) + D_2^2 \Phi_{\delta c_1}(x)] \times \right.$$

$$\left. \times e^{-D|x|} dx \right\} \tau^2.$$

Коэффициенты диффузии $d_1 = \dfrac{d[\langle \Delta\varphi_1^2(\tau) \rangle]}{d\tau}$ и $d_2 = \dfrac{d[\langle \Delta\varphi_2^2(\tau) \rangle]}{d\tau}$ оказываются в этом случае пропорциональными τ. На рис. 5 приведена качественная картина зависимости коэффициентов диффузии d_1 и d_2 от τ.

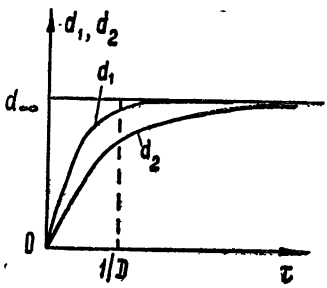


Рис. 5. Зависимость коэффициентов диффузии d_1, d_2 от τ

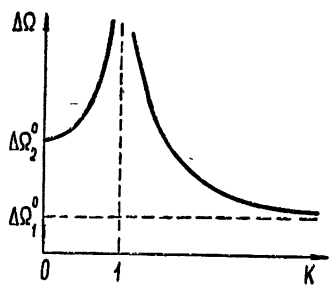


Рис 6. Зависимость ширины спектральной линии генераторов от величины взаимной связи K для случая, когда первый генератор является более стабильным. (При $K > 1$ синхронизирующий генератор первый, при $K < 1$ —второй.)

Если предположить, что флуктуации емкостей δc_1 и δc_2 распределены по нормальному закону, то на основании анализа коэффициентов диффузии d_1 и d_2 можно сделать следующее заключение о характере спектра колебаний генераторов, работающих в режиме взаимной синхронизации: их спектры различны на высоких частотах и совпадают в области низких частот, причем ширина спектральной линии генераторов

$$\Delta\Omega = d_\infty/2. \qquad (27)$$

Из зависимости $\Delta\Omega$ от K, приведенной на рис. 6, видно, что сужение спектральной линии захватываемого генератора имеет место лишь тогда, когда синхронизующий генератор является более узкополосным и K не близко к единице. Отметим и другое обстоятельство: наличие взаимной связи между генераторами приводит к обязательному уширению спектральной линии синхронизирующего генератора.

В заключение автор выражает признательность А. Н. Малахову за предложенную тему и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1 А Г. Майер, Уч. зап ГГУ, вып. 2, 3, (1935)
2 К. Ф Теодорчик, Радиотехника, 1, 3—4, 3 (1946).
3 Г Н. Рапопорт, Радиотехника, 6, 4, 53 (1951).
4 Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 1, 1, 88 (1956)
5. В Н Парыгин, Радиотехника и электроника, 1, 2, 197 (1956).
6 Н. К. Манешин, Р В. Хохлов, Науч. докл. высш школы, — Радиотехника и электроника, 3, 74 (1958).

7. А. Н Малахов, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **8**, 6 (1965).
8. С А Ахманов, К А Эннок, Радиотехника и электроника, **3**, 2, 279 (1958).
9 Р. Л Стратонович, Избранные вопросы флуктуаций в радиотехнике, М., изд. Сов. радио, 1961
10. Н. Н Боголюбов, Ю А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М, 1958
11. А Н. Малахов, Изв. высш уч зав.—Радиофизика, **6**, 495 (1963)
12 Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **8**, 924 (1965).
13 Л П Зачепицкая, И М Клибанова, А. Н Малахов, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, **9**, 102 (1966).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
19 октября 1965 г.

INFLUENCE OF PARAMETER FLUCTUATIONS ON OPERATION OF TWO COUPLED GENERATORS

I. M. Klibanova

The influence has been considered of circuit capacities fluctuations on mutua[1] synchronization of the system of two coupled generators. In the case of small fluctuations the expressions have been obtained for spectra of frequency and amplitude fluctuations, the diffusion coefficients and the width of the generators spectral line depending upon the finite detuning of auto-generator frequencies and the magnitude of mutual coupling between them.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.391.82 : 621 396.621

О ВЛИЯНИИ АМПЛИТУДНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ В ПРИЕМНИКАХ ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ШУМА ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХАХ

А. А. Горбачев, В. И. Данилов

Оценивается погрешность измерений шума на выходе приемника с линейным детектором и амплитудным ограничителем в зависимости от параметров импульсных помех и относительного уровня ограничения.

Наиболее известным примером приемников шумовых сигналов является радиоастрономическая приемная аппаратура. Известно также, что результаты радиоастрономических наблюдений могут быть существенно искажены вследствие воздействия на приемное устройство импульсных помех. Для ослабления их мешающего действия в приемниках нередко используется амплитудное ограничение.

Целью работы является рассмотрение влияния такого ограничения на точность измерений, когда в приемном тракте вместе с измеряемым равномерно распределенным в полосе пропускания приемника шумом действуют импульсные помехи. При этом имеется в виду, что схема построения приемного устройства и параметры помех таковы, что выполняются следующие условия. Ограничение осуществляется в низкочастотном тракте приемника непосредственно после линейного детектора. Полоса пропускания ΔF высокочастотного тракта приемного устройства настолько широка (или при данной ΔF интервалы $T_п$ между отдельными импульсами помехи достаточно велики), что переходные процессы на выходе детектора, вызванные каждым импульсом помехи, успевают затухать к моменту прихода последующего импульса. Длительность импульса помехи на выходе детектора определяется лишь величиной ΔF. На вход приемника действуют импульсные возмущения постоянной (или достаточно медленно меняющейся) амплитуды. Время наблюдения (измерения) $T_н$ и интервал между импульсами $T_п$ связаны соотношением

$$T_н \gg T_п. \qquad (1)$$

Перечисленные условия практически имеют место, например, при воздействии на приемник волн метрового диапазона таких активных помех, как радиолокационные сигналы, излучение систем зажигания двигателей внутреннего сгорания и т. п.*.

1. Рассмотрим влияние импульсных помех на результаты измерения интенсивности шума в случае, когда ограничитель в тракте приема отсутствует, или, что то же самое, когда уровень ограничения V_0 столь велик, что ограничения не происходит.

Огибающая $U_п(t)$ импульса помех на выходе высокочастотной ча-

* Необходимо отметить, что в дальнейшем не учитывается погрешность измерения интенсивности шума, обусловленная конечностью времени наблюдения.

сти приемного устройства с m избирательными контурами согласно [1] может быть представлена выражением

$$U_{\text{п}}(t)=\begin{cases}\dfrac{\delta(t/\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\,e^{-t/\tau} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}, \tag{2}$$

где τ — постоянная времени контура, δ — затухание контура.

Решение поставленной задачи в общем виде для приемника с m контурами связано с преодолением серьезных трудностей вычислительного характера. Поэтому в дальнейших расчетах использовано выражение

$$U_{\text{п}}(t)=\begin{cases}U_m\alpha t e^{1-\alpha t} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}, \tag{3}$$

где U_m — максимальное значение $U_{\text{п}}(t)$, $\alpha=\pi\Delta F_1$. Выражение (3) определяет огибающую помехи при прохождении достаточно короткого импульсного возмущения через приемник с двумя избирательными контурами, имеющими полосы пропускания $\Delta F_1=\Delta F/\alpha_\Delta$. (Значения $\alpha_\Delta(m)$ приведены в [1].) На рис. 1 для сравнения показана огибающая для $m=2$ (кривая 1) и для $m=5$ (кривая 2).

Совокупность импульсных помех на входе детектора может быть представлена в виде

$$u_{\text{п}}(t)=\sum_i U_{\text{п}}(t-t_i)\cos\left[\omega_0(t-t_i)-\varphi_{\text{п}}\right], \tag{4}$$

где ω_0 — резонансная частота высокочастотного тракта приемника, t_i — момент появления i-го импульса помехи, $\varphi_{\text{п}}$ — начальная фаза.

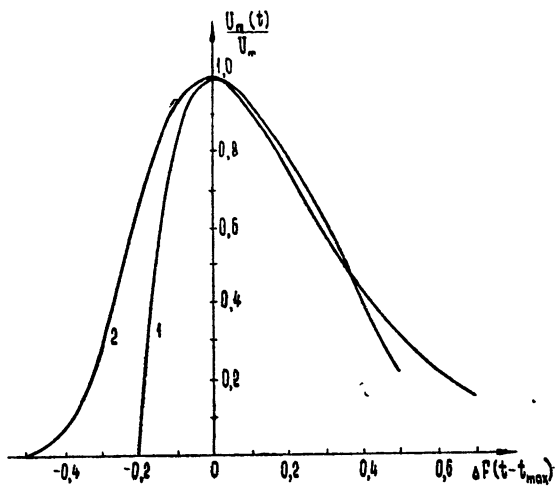


Рис. 1.

Напряжение измеряемого шума на входе детектора обозначим $u_{\text{ш}}$ и будем считать, что оно имеет гауссово распределение плотности вероятностей мгновенных значений с дисперсией σ^2.

При совместном воздействии $u_{\text{п}}$ и $u_{\text{ш}}$ низкочастотная составляющая $u_{\text{вых н}}(t)$ напряжения на выходе безынерционного детектора [2]

$$u_{\text{вых н}}(t)=\frac{k_{\text{д}}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{q^2(t)}{2}\right]\left\{I_0\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)+q^2(t)\times\right.$$
$$\left.\times\left[I_0\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)+I_1\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)\right]\right\}, \tag{5}$$

где

$q(t)=\left[\sum_i U_{\text{п}}(t-t_i)\right]/\sqrt{2}\,\sigma$, $I_0\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)$ и $I_1\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, $k_{\text{д}}$ — коэффициент передачи детектора. Постоянная составляющая напряжения продетектированной смеси $U_{=}$, как известно, может быть найдена путем усреднения $u_{\text{вых н}}(t)$ по времени.

Для облегчения расчетов в данном случае можно на интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$ аппроксимировать $q^2(t)$ следующим образом:

$$q^2(t)\simeq\begin{cases}k^2\{1-[\alpha(t-t_i)-1]^2\} & (0\leqslant t-t_i\leqslant 1/\alpha)\\ \frac{k^2}{9}[\alpha(t-t_i]-4]^2 & (1/\alpha\leqslant t-t_i\leqslant 4/\alpha)\\ 0 & (t<t_i,\ t>t_i+4/\alpha)\end{cases}, \tag{6}$$

где $k=U_m/\sigma\sqrt{2}$. На рис. 2 показаны функция $q^2(t)/k^2$ (кривая 1) и аппроксимирующие ее функции (кривая 2).

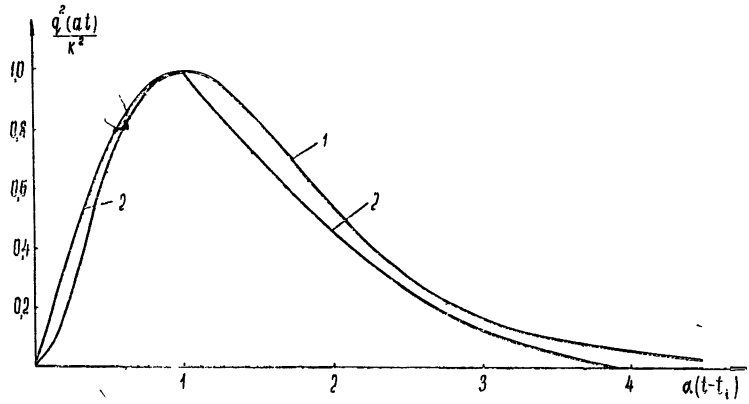


Рис. 2.

Пользуясь выражениями (5) и (6), а также соотношением 6.625.4 [3], приходим к выражению $U_{=}$ через обобщенные гипергеометрические ряды:

$$U_{=}=\frac{k_{\text{д}}\,\sigma\,F_{\text{п}}}{\sqrt{2\pi}\,\alpha}\left\{{}_1F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-k^2\right)+\frac{2}{3}k_2\,{}_2F_2\left(\frac{1}{2},2;1,\frac{5}{2};-k^2\right)+\right.$$
$$+\frac{2}{15}k^4\,{}_1F_1\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2},-k^2\right)+3\,{}_2F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};-k^2\right)+ \tag{7}$$
$$\left.+k^2\,{}_2F_2\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};1,\frac{5}{2},-k^2\right)+\frac{3}{20}k^4\,{}_2F_2\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2};3,\frac{7}{2};-k^2\right)+\frac{\alpha}{F_{\text{п}}}-4\right\},$$

где $F_п$ — средняя частота следования импульсов помехи. Выполняя преобразования над суммой гипергеометрических рядов, в конечном итоге получаем

$$U_{=} = \frac{k_д \sigma}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 + \frac{F_п}{4\alpha\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} k^{2n} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1) + 3\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)\,(n^2-0{,}25)} \right)\right\}, \qquad (8)$$

где $\Gamma(n+1)$ и $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ — гамма-функции

Из (8) можно определить погрешность $\delta U_{0ш}$ измерения постоянной составляющей шума $U_{0ш}$, обусловленную действием помех

$$\delta U_{0ш} = \frac{U_{=} - U_{0ш}}{U_{0ш}} = \frac{F_п}{4\alpha\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$$
$$\times k^{2n} \left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1) + 3\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)\,(n^2-0{,}25)} \right). \qquad (9)$$

Здесь $U_{0ш} = k_д\sigma/\sqrt{2\pi}$ [2].

Для иллюстрации полученного соотношения на рис. 3 показана (сплошной линией) зависимость $\delta U_{0ш}$ от k, вычисленная, согласно (9), с ошибкой, не превышающей 1%. Значение $F_п$ при этих расчетах принималось равным 250 *гц*, а $\alpha = 5 \cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$ ($\Delta F = 1$ *кгц*)*. Для проверки соотношения (9) с макетом приемника, имеющего указанную полосу, был проведен эксперимент. Результаты эксперимента отмечены на рис. 3 точками. Погрешность измерения при этом не превышала 5%.

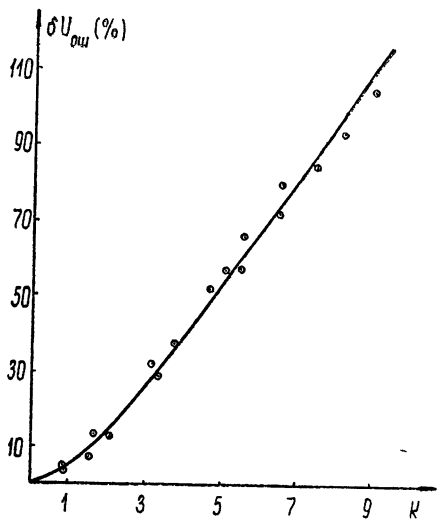


Рис. 3

Соотношение (9) показывает, что $\delta U_{0ш}$ линейно зависит от $F_п$, что хорошо было подтверждено экспериментально.

2. Рассмотрим случай воздействия суммы импульсной помехи $u_п$ и $u_ш$ на безынерционный ограничитель. Результирующая характеристика безынерционного детектора и одностороннего безынерционного ограничителя, очевидно, может быть представлена следующим образом:

* Более точные расчеты $\delta U_{0ш}$, выполненные на электронной вычислительной машине на основе выражений (5) и (3), отличаются от результатов вычислений, приведенных на рис. 3, не более, чем на 1%.

$$u_{\text{вых}}=\begin{cases} k_0 u_{\text{вх}} & (0\leqslant u_{\text{вх}}\leqslant V_0) \\ k_0 V_0 & (u_{\text{вх}}> V_0) \\ 0 & (u_{\text{вх}}<0) \end{cases}, \tag{10}$$

где $u_{\text{вх}}$ и $u_{\text{вых}}$ — соответственно входное и выходное напряжения системы детектор — ограничитель, k_0—общий коэффициент передачи системы.

Среднее по ансамблю напряжение на выходе ограничителя может быть выражено соотношением

$$\overline{u_{\text{вых}}(t, V_0)}=\frac{k_0\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-y}^{\infty}(x+y)e^{-x^2/2}\,dx-\int_{v_0-y}^{\infty}(x+y-v_0)e^{-x^2/2}\,dx\right]. \tag{11}$$

Здесь $x=u_{\text{ш}}/\sigma$, $y=u_{\text{п}}/\sigma$, $v_0=V_0/\sigma$, а черта сверху означает усреднение по ансамблю.

Используя [2], получим низкочастотную составляющую напряжения на выходе ограничителя:

$$u_{\text{вых н}}(t, V_0)=\frac{k_0\sigma}{\sqrt{2\pi}}\Bigg\langle \exp(-q^2(t)/2)\left\{I_0\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+q^2(t)\left[I_0\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)+I_1\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)\right]\right\}-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\exp\left[-(q\sqrt{2}\cos\varphi-v_0)^2/2\right]d\varphi+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}(\sqrt{2}q\cos\varphi-v_0)\int_{v_0-\sqrt{2}q\cos\varphi}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx\,d\varphi\right]\Bigg\rangle= \tag{12}$$

$$=\frac{k_0\sigma}{\sqrt{2\pi}}\Bigg\langle \exp\left(-\frac{q^2(t)}{2}\right)\left\{I_0\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)+q^2(t)\left[I_0\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+I_1\left(\frac{q^2(t)}{2}\right)\right]\right\}-\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\exp\left[-(q\sqrt{2}\cos\varphi-v_0)^2/2\right]d\varphi+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\pi}\int_0^{\pi}\left(q\cos\varphi-\frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}-q\cos\varphi\right)\right]d\varphi\right\}\Bigg\rangle.$$

Здесь φ— фаза высокочастотного колебания помехи на входе детектора. Постоянная составляющая $U_{=}(V_0)$ ограниченной смеси получается путем усреднения (12) по времени.

Погрешность измерения $\delta U_{0\text{ш}}$ в зависимости от уровня ограничения при заданных параметрах помехи определяется выражением

$$\delta U_{0\text{ш}}=\frac{U_{0\text{ш}}-U_{=}(V_0)}{U_{0\text{ш}}}. \tag{13}$$

Выразить $\delta U_{0\text{ш}}$ в общем виде из-за сложности интегралов, входящих в выражение (12), не представляется возможным. Для частных случаев $\delta U_{0\text{ш}}$ может быть найдено с помощью численного интегрирования. На

рис. 4 приведены результаты вычислений для $F_п=250$ *гц*, $U_m/\sigma=11{,}3$ (кривая 1). На этом же рисунке приведены экспериментальные результаты для тех же условий (точками).

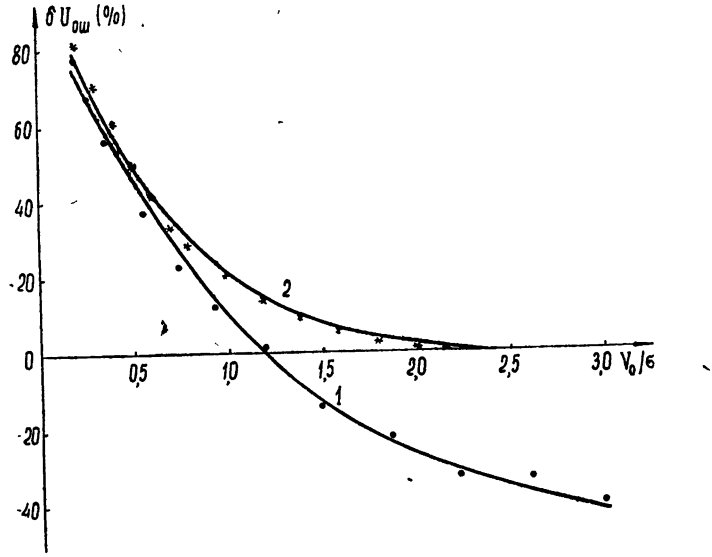


Рис. 4.

3. Легко видеть, что наличие в тракте приема эффективно работающего ограничителя с постоянным порогом ограничения неизбежно приведет к внесению погрешности в измерения шума даже при отсутствии помех. Это объясняется ограничением в той или иной мере $u_ш$.

В случае $u_п(t)\equiv 0$ выражение (12) сводится к

$$U_{=}(V_0)=\frac{k_0\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left\{1-e^{-v_0^2/2}+v_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\Phi\left(\frac{v_0}{2}\right)\right]\right\}; \qquad (14)$$

$$\delta U_{0ш}=\frac{U_{=}(\infty)-U_{=}(V_0)}{U_{=}(\infty)}=e^{-v_0^2/2}-v_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\Phi\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (15)$$

Зависимость (15) графически представлена на рис. 4 (кривая 2); здесь же приведены (звездочками) результаты эксперимента.

4. Из графика, приведенного на рис. 4, видно, что в отсутствие импульсных помех при уровне ограничения $V_0\geqslant 2{,}5\sigma$ погрешность $\delta U_{0ш}$ практически равна нулю.

В отсутствие в тракте приемника ограничителя измерение шума при появлении помех может стать невозможным не только вследствие значительного возрастания погрешности $\delta U_{0ш}$ (см. рис. 3), но и в связи с возможным возникновением перегрузки импульсами помех низкочастотного тракта приемника.

Необходимость вносить в процессе измерений (для повышения их точности) коррекцию в установку V_0 — существенный недостаток простого амплитудного ограничителя. В связи с этим, по-видимому, целесообразно применение ограничения с автоматически устанавливающимся порогом. Использованная в данной работе методика расчета и основные соотношения могут быть полезными при исследовании такого огра-

ничителя. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для определения $\delta U_{0ш}$ в тех случаях, когда известны основные параметры помех ($F_п$ и U_m).

Авторы благодарны М. М. Кобрину за критические замечания при подготовке рукописи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1 С И. Евтянов, Переходные процессы в приемно-усилительных схемах, Связьиздат, М., 1948.
2 В. И Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд Сов. радио, М., 1951.
3 И. С. Градштейн, И М Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М, 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 25 ноября 1965 г

ON INFLUENCE OF AMPLITUDE LIMITATION IN RECEIVERS OF NOISE SIGNALS UPON PRECISION OF THE NOISE MEASUREMENT AT IMPULSE INTERFERENCE

A. A. Gorbachyov, V. I. Danilov

The error is evaluated of noise measurements at the output of the receiver with a linear detector and an amplitude limiter depending on the impulse interference and the limitation relative level.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621 317 6 . 519 27

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИ АППАРАТУРНОМ ИССЛЕДОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Н. Ф. Воллернер

Находятся длительности участков, на которые нужно разделять реализации «медленного» нестационарного случайного процесса для получения минимальной погрешности при экспериментальном определении характеристик нестационарности Введено понятие об аппаратурной нестационарности при усреднении во времени На основании полученных соотношений рекомендована обработка экспериментальных данных методом последовательных приближений, обеспечивающая минимальную погрешность.

В результате аппаратурных исследований можно получить оценку характеристик случайного процесса. Отклонения полученных оценок от действительных характеристик (погрешности оценки) имеют вероятностный характер и уменьшаются лишь при увеличении объема статистического материала. При аппаратурных исследованиях нельзя для уменьшения погрешности оценки значительно увеличивать длительность реализаций, поскольку многие реальные случайные процессы нестационарны: все характеристики, либо часть их меняются во времени.

Погрешности оценки изучены для эргодических стационарных случайных процессов [1–5]. Воспользовавшись результатами этих работ, можно с заданной степенью точности определить (в вероятностном смысле) погрешности оценок характеристик, вызванные конечным объемом статистического материала. Измерительные приборы вносят дополнительные инструментальные погрешности, увеличивающие погрешности при аппаратурном исследовании случайных процессов.

Для уменьшения погрешностей при аппаратурном исследовании нестационарных случайных процессов необходим достаточно большой ансамбль реализаций, что обычно сопряжено с технико-экономическими трудностями. Так, не всегда возможно повторение статистически однородных опытов (наблюдений), проведение каждого опыта часто сопряжено со значительными материальными затратами и т. д. Приходится выбирать компромиссное решение; каждую реализацию нестационарного случайного процесса делят на несколько небольших участков длительностью T так, чтобы в пределах каждого участка можно было положить (с заданной степенью точности) все, либо часть характеристик процесса стационарными. При этом погрешности оценок характеристик процесса в момент t_0 будут определяться двумя факторами: изменением характеристик за время T вследствие нестационарности процесса и статистической погрешностью оценки из-за конечности T. При увеличении T первая составляющая погрешности оценки обычно растет, вторая падает. Можно для данного нестационарного случайного процесса подобрать оптимальную длительность участка реализации T_{opt} так, что суммарная погрешность оценки будет минимальной [6]. Определив оценки на отдельных участках реализации, можно найти закон изменения интересующих нас статистических характеристик нестационарного случайного процесса во времени.

Рассмотрим этот вопрос подробней для простейшего вида нестационарного случайного процесса $\xi(t) = [\Psi(t)]^{1/2}\varepsilon(t)$. Пусть нестационарность сводится лишь к относительно медленному изменению интенсивности процесса $J(t)=\Psi(t)\sigma^2$, а матрица коэффициентов корреляции не меняется во времени (здесь $\xi(t)$— нестационарный, а $\varepsilon(t)$— стационарный случайные процессы; $\Psi(t)$— неслучайная регулярная функция или реализация случайного процесса; σ^2— интенсивность стационарного процесса $\varepsilon(t)$. В этом случае общая относительная погрешность оценки интенсивности $\delta = \Delta J(t_0)/J(t_0)$ в момент времени t_0 определится суммой абсолютных значений* относительной погрешности $\Delta\Psi(t_0)/\Psi(t_0)$ из-за нестационарности (изменения измеряемой характеристики) на интервале T и дисперсии D^2 статистической оценки из-за конечности интервала T:

$$\delta = |\Delta\Psi(t_0)/\Psi(t_0)| + D.$$

Дисперсия статистической оценки характеристики D^2 при приемлемых погрешностях (менее $30 \div 50\%$) в большинстве случаев (при равномерном спектре) достаточно хорошо аппроксимируется простейшим соотношением [4]:

$$D = (\Delta F T)^{-1/2},$$

где ΔF — полоса пропускания.

Интенсивность процесса в момент t_0 есть $J(t_0)=\Psi(t_0)\sigma^2$. При измерениях, усредняя на интервале** T и полагая $\Psi(t)$ медленно изменяющейся функцией, фактически определяют не $J(t_0)$, а

$$J_1(t_0) = \frac{1}{T}\int_{t_0-0{,}5T}^{t_0+0{,}5T} J(t)\,dt = \frac{(\sigma^2)^*}{T}\int_{t_0-0{,}5T}^{t_0+0{,}5T}\Psi(t)\,dt = (\sigma^2)^*\,\Psi_T(t_0) \simeq \sigma^2\Psi_T(t_0),$$

где $(\sigma^2)^*$ — оценка σ^2, а $\Psi_T(t_0)$ — усредненное значение $\Psi(t)$ на интервале $(t_0-0{,}5T) \div (t_0+0{,}5T)$.

Абсолютная погрешность из-за нестационарности

$$\Delta\Psi(t_0) = \Psi_T(t_0) - \Psi(t_0) = \frac{1}{T}\int_{t_0-0{,}5T}^{t_0+0{,}5T}[\Psi(t) - \Psi(t_0)]\,dt.$$

Для вычисления $\Delta\Psi(t_0)$ представим $\Psi(t)$ на интервале T усеченной суммой членов ряда Тейлора. Это допустимо, поскольку в реальных условиях $\Psi(t)$ — медленно меняющаяся функция без разрывов и скачков; тогда

$$\Delta\Psi(t_0) = \frac{1}{T}\int_{-0{,}5T}^{+0{,}5T}\left[\Psi(t_0)+\Psi'(t_0)\tau+\Psi''(t_0)\frac{\tau^2}{2}+\Psi'''(t_0)\frac{\tau^3}{6}.....-\Psi(t_0)\right]d\tau,$$

где $\tau = t - t_0$.

Отбрасывая члены разложения выше третьего, получим

$$\Delta\Psi(t_0) = \frac{1}{2T}\int_{-0{,}5T}^{+0{,}5T}\Psi''(t_0)\,\tau^2\,d\tau = \Psi''(t_0)\,T^2/24.$$

---

* Для упрощения выкладок принято суммирование абсолютных величин, а не среднеквадратичных. Это допустимо, поскольку общая погрешность определяется суммой только двух разнородных погрешностей: случайной оценки и регулярной из-за изменения интенсивности процесса.

** Для уменьшения погрешностей оценки при неизвестной функции $\Psi(t)$ момент t_0 выбран в центре временного интервала T.

Суммарная погрешность

$$\delta = |\Delta\Psi(t_0)/\Psi(t_0)| + D = |\Psi''(t_0)T^2/24\,\Psi(t_0)| + |(\Delta FT)^{-1/2}|.$$

Найдем минимум δ:

$$d\delta/dT = |T\Psi''(t_0)/12\,\Psi(t_0)| + |\Delta F^{-1/2}\,T^{-3/2}/2| = 0.$$

Оптимальная длительность реализации

$$T_{\text{opt}} = [6\,\Delta F^{-1/2}\,\Psi(t_0)/\Psi''(t_0)]^{2/5};$$

минимальная суммарная ошибка

$$\delta_{\min} = |\Psi''(t_0)\,T_{\text{opt}}^2/24\,\Psi(t_0)| + (\Delta FT_{\text{opt}})^{-1/2} = [\Psi''(t_0)/6\Psi(t_0)\Delta F^2]^{1/5}(0{,}25+1).$$

Отношение нестационарной и статистической составляющих суммарной ошибки при оптимальной длительности реализации

$$\Delta\,\Psi(t_0)/\Psi(t_0)\,D = 0{,}25.$$

Это отношение при принятых ограничениях не зависит от вида функции $\Psi(t)$ и определяется разной зависимостью от T составляющих суммарной ошибки. Если при каком-либо методе измерения зависимость $\Delta\Psi(t_0)/\Psi(t_0)$ от T будет иной, это отношение соответственно изменится.

К сожалению, непосредственно воспользоваться полученными соотношениями в ряде случаев нельзя, так как неизвестны закон изменения измеряемой характеристики и численные коэффициенты. Однако даже в этом случае приведенные соображения представляют интерес, поскольку позволяют, пользуясь методом последовательных приближений, повысить точность измерений требуемых характеристик, например, после предварительной регистрации или запоминания реализаций случайного процесса.

Можно рекомендовать следующую методику обработки. Задавшись допустимой погрешностью $\delta = \frac{5}{4}D$ и зная корреляционную функцию (полосу пропускания ΔF) фильтра анализатора или процесса, можно по соотношению $D = (\Delta FT)^{-1/2}$ или соответствующим графикам [4] найти необходимое время усреднения — продолжительность обрабатываемого участка реализации T.

Воспроизводя участками длительностью T зафиксированную реализацию и измеряя искомую характеристику, можно на фоне случайных (создающих дисперсию D^2) изменений обнаружить регулярное изменение исследуемой характеристики из-за нестационарности случайного процесса, определяемое функцией $\Psi(t)$. Если разброс оценок характеристики на отдельных участках длительностью T не более $(2 \div 3)D^*$, то можно попытаться уменьшить суммарную (статистическую) погрешность, увеличив T. Увеличивать T для уменьшения δ можно до тех пор, пока разброс оценок не превзойдет $(2 \div 3)D$, где величина D уменьшена в соответствии с ростом T.

Если разброс оценок больше $(2 \div 3)D$, то на исследуемом участке реализации случайного процесса при заданных характере нестационарности $\Psi(t)$ и полосе ΔF нельзя получить ожидаемую малую погрешность. Приходится уменьшать T до тех пор, пока разброс оценки будет порядка $(2 \div 3)D$; при этом суммарная ошибка будет минимально возможной.

---

* D — среднеквадратичная статистическая ошибка. Максимальные отклонения в случае распределения, близкого к нормальному, могут быть в $2 \div 3$ раза больше.

Из сказанного ясно, что можно ввести полезное при аппаратурных исследованиях случайных процессов понятие аппаратурной (при усреднении на временном интервале) нестационарности случайных процессов. Аппаратурно-нестационарный случайный процесс — это такой случайный процесс, у которого при усреднении на временном интервале длительностью T и полосе пропускания ΔF разброс оценок больше $(2\div3)D$, где $D=(T\Delta F)^{-1/2}$. Для аппаратурно-стационарного процесса разброс оценок не превышает $(2\div3)D$.

Для уменьшения случайных погрешностей измерительной аппаратуры целесообразно одну и ту же реализацию обрабатывать несколько раз. Необходимое число повторений можно легко определить экспериментально по разбросу результатов измерений одного и того же участка реализации, либо по известным случайным погрешностям измерительной аппаратуры.

Если представляется возможным повторить опыт несколько раз, то это повышает достоверность результатов. Каждую реализацию целесообразно обрабатывать, подобрав по описанной выше методике оптимальную длительность участков реализации, и усреднить затем результат. Разброс результатов обработки отдельных реализаций случайного нестационарного процесса (при одинаковых условиях эксперимента) характеризуют достоверность результатов аппаратурных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. В Г. Давенпорт, В. Л Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, М., 1960.
2. В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1960
3. А А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, Судпромгиз, М, 1961
4. А А. Харкевич, Спектры и анализ, ГИТТЛ, М, 1957
5. В Б Давенпорт, Р А. Джонсон, Д. Мидлтон, Статистические ошибки при измерении случайных функций времени, Сб Определение параметров случайных процессов, Гостехиздат УССР, Киев, 1962
6. Н Ф Воллернер, В Г Криксунов, Приборы и техника эксперимента, № 1, 117 (1962).

Киевский политехнический институт

Поступила в редакцию
16 сентября 1964 г.

CHOICE OF OPTIMAL DURATION OF REALIZATION AT APPARATUS INVESTIGATION OF RANDOM PROCESSES

N. F. Vollerner

The interval durations are found into which the realization of „slow" non-stationary random process is necessary to be devided in order to obtain a minimum error in experimental determination of non-stationary characteristics The notion of apparatus non-stationaryty with time average is introduced. On the basis of relations obtained the experimental data processing has been recommended by the method of successive approximations, producing a minimum error

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 538.56 : 519.25

О ВЫБРОСАХ И ОТНОСИТЕЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В. А. Маркелов

Получены выражения для среднего числа выбросов и относительного времени пребывания нормального периодически нестационарного процесса.

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Относительное время пребывания стационарного эргодического случайного процесса в некотором интервале совпадает с соответствующей вероятностью; среднее число выбросов для ряда стационарных процессов (в том числе нормального и рэлеевского) также представляет в определенном масштабе одномерную функцию распределения [1]. Если же процесс нестационарный, то это не имеет места. В данной статье определяется относительное время пребывания и среднее число выбросов для случая нестационарного нормального процесса $\xi(t)$, ($\langle \xi(t) \rangle = 0$). имеющего функцию корреляции вида*

$$\langle \xi(t_1)\, \xi(t_2) \rangle = R_0(t_2-t_1) + R_2(t_2-t_1)\, e^{i2\omega_0 t_1} + R_2^*(t_2-t_1)\, e^{-i2\omega_0 t_1}, \qquad (1)$$

где для $R_0(\tau)$ и $R_2(\tau)$ в силу очевидных свойств функции корреляции справедливы соотношения: $R_0(-\tau)=R_0(\tau)$; $R_2(-\tau)=R_2(\tau)\, e^{-i2\omega_0\tau}$. Такой процесс получается, например, после прохождения стационарного шума через параметрический усилитель [2].

Представим исследуемый процесс в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, S(\omega)\, d\omega\,, \qquad (2)$$

причем, как следует из (1),

$$\langle S^*(\omega)\, S(\omega+\Omega) \rangle = G_0(\omega)\, \delta(\Omega) + G_2(\omega+\omega_0)\, \delta(\Omega-2\omega_0) + G_2^*(\omega-\omega_0)\, \delta(\Omega+2\omega_0), \qquad (3)$$

где

$$G_0(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau; \quad G_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_2(\tau)\, e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\, d\tau, \qquad (4)$$

$\delta(\Omega)$ — дельта-функция, $G_0(\omega)$ представляет собой спектральную плотность средней (по времени) мощности, а $G_2(\omega)$ связана с нестационарностью процесса: если процесс стационарный, то $G_2(\omega) \equiv 0$. Исходя из (2) ÷ (4) и учитывая чётность $G_0(\omega)$ и $G_2(\omega)$, запишем функцию корреляции (1). так:

* Скобки $\langle \ldots \rangle$ означают статистическое усреднение.

$$\langle \xi(t_1)\,\xi(t_2)\rangle = 2\int_0^\infty G_0(\omega)\cos\omega(t_2-t_1)\,d\omega + 2\Big\{e^{i\omega_0(t_1+t_2)}\times \times \int_0^\infty G_2(\omega)\cos\omega(t_2-t_1)\,d\omega + \text{к. с.}\Big\}. \tag{5}$$

Введем параметр γ, характеризующий степень нестационарности процесса:

$$\gamma = \frac{\left|\int_0^\infty G_2(\omega)\,d\omega\right|}{\int_0^\infty G_0(\omega)\,d\omega} \qquad (0\leqslant\gamma\leqslant 1). \tag{6}$$

Положив $t_1 = t_2 = t$, из (5) и (6) получим

$$\langle \xi^2(t)\rangle = \sigma^2[1+\gamma\cos(2\omega_0 t+\varphi)], \tag{7}$$

где $\sigma^2 = 2\int_0^\infty G_0(\omega)\,d\omega$ — средняя интенсивность процесса, а φ — некоторая несущественная в дальнейшем фаза, которую можно положить равной нулю.

Функция корреляции процесса и его производной (полагаем, что $\dot\xi(t)$ существует) находится из (5) путем дифференцирования (см. [3], гл. 2):

$$\langle \xi(t)\,\dot\xi(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t_2}\langle \xi(t_1)\,\xi(t_2)\rangle\Big|_{t_1=t_2=t} \approx -\omega_0\gamma\sigma^2\sin(2\omega_0 t);$$
$$\langle \dot\xi^2(t)\rangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\langle \xi(t_1)\,\xi(t_2)\rangle\Big|_{t_1=t_2=t} \approx \omega_0^2\sigma^2[1-\gamma\cos(2\omega_0 t)]. \tag{8}$$

При выводе последних приближенных выражений в (8) полагалось для простоты, что процесс узкополосный и его спектр сосредоточен вблизи частот $\pm\omega_0$, в результате чего функция $G_0(\omega)$ существенно отлична от нуля только около $\omega=\pm\omega_0$ (см. (3)), а $G_2(\omega)$ — около $\omega=0$.

Поскольку совместное распределение нормального процесса и его производной в совпадающие моменты времени является двумерным нормальным распределением ([3], гл. 8), то, используя (7) и (8), получим после некоторых преобразований

$$W(\xi,\dot\xi,t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}\exp-\left\{\frac{(\xi^2+\dot\xi^2/\omega_0^2)\,[1-\gamma\cos(2\omega_0 t+\theta)]}{2\sigma^2(1-\gamma^2)}\right\}, \tag{9}$$

где $\operatorname{tg}\theta = 2\xi\dot\xi/(\xi^2+\dot\xi^2/\omega_0^2)$. Это выражение будет использовано в дальнейшем.

2. СРЕДНЕЕ ЧИСЛО ВЫБРОСОВ ПРОЦЕССА

Как известно [1], среднее число выбросов процесса $\xi(t)$, превышающих уровень ξ_0, за единицу времени на интервале $[t_0, t_0+T]$ равно

$$N(\xi_0) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} dt\int_0^\infty \dot\xi\,W(\xi_0,\dot\xi,t)\,d\dot\xi. \tag{10}$$

Подставив (9) в (10) и проинтегрировав за период нестационарности π/ω_0, получим

$$N(\xi_0) = A \int_0^\infty \dot{\xi}\, e^{-a\left(\xi_0^2 + \dot{\xi}^2/\omega_0^2\right)} I_0[\gamma a(\xi_0^2 + \dot{\xi}^2/\omega_0^2)]\, d\dot{\xi}, \tag{11}$$

где

$$A = \frac{1}{2\pi\sigma^2\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}}; \quad a = \frac{1}{2\sigma^2(1-\gamma^2)},$$

$I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Используя теорему сложения для бесселевых функций $I_0(x+y) = I_0(x)\, I_0(y) + 2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(x)\, I_m(y)$ ([4], гл. 17) и учитывая, что $\int_0^\infty xe^{-x^2} I_m(\gamma x^2)\, dx = \left[\frac{1-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right]^m$ ([5], стр. 721), будем иметь

$$N(\xi_0) = \frac{\omega_0}{2\pi} e^{-a\xi_0^2}\left[I_0(\gamma a\,\xi_0^2) + 2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(\gamma\, a\,\xi_0^2)\left(\frac{1-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)^m\right]. \tag{12}$$

Отсюда видно, что среднее число пересечений процессом нулевого уровня не зависит от степени нестационарности процесса γ; для остальных же уровней это не имеет места.

Рассмотрим поведение $N(\xi_0)$ при достаточно больших ξ_0, когда $\gamma a\,\xi_0 \gg 1$ (т. е. $\xi_0 \gg \sigma\sqrt{2(1-\gamma)\,\gamma^{-1}}$). В этом случае, заменив в (11) функцию Бесселя ее асимптотическим выражением $I_0(x) \simeq \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}}$, будем иметь

$$N(\xi_0) \approx \frac{A}{\sqrt{2\pi\gamma a}} \exp\left[-a(1-\gamma)\,\xi_0^2\right] \int_0^\infty \dot{\xi}\, \frac{\exp\left[-a(1-\gamma)\,\omega_0^{-2}\dot{\xi}^2\right.}{\sqrt{\xi_0^2 + \dot{\xi}^2\,\omega_0^{-2}}}\, d\dot{\xi} =$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\gamma}}\left[1 - \Phi\left(\frac{\xi_0}{\sigma\sqrt{2(1+\gamma)}}\right)\right]; \tag{13}$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt$. Если $1-\gamma \ll 1$, то (13), как легко видеть, справедливо почти для всех ξ_0, за исключением небольшой области, примыкающей к нулю. При $\xi_0 \gg \sigma$ среднее число выбросов можно представить, учитывая асимптотическое поведение $\Phi(x)$, в виде

$$N(\xi_0) = \frac{\omega_0}{2\pi}\frac{\exp\left[-\xi_0^2/2\sigma^2(1+\gamma)\right]}{\sqrt{\pi\xi_0^2/\sigma^2}}, \tag{14}$$

откуда следует, что с увеличением нестационарности процесса спадание кривой $N(\xi_0)$ происходит медленнее.

Графики $N(\xi_0)$, соответствующие различным значениям γ, приведены на рис. 1. Там же изображена кривая, соответствующая стационарному процессу ($\gamma = 0$), для которого, как известно, $N(\xi_0) = (\omega_0/2\pi)\exp(-\xi_0^2/2\sigma^2)$.

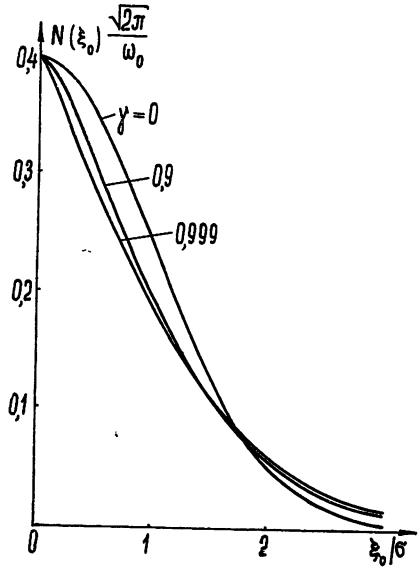


Рис. 1.

3. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ

Предположим, что функция корреляции (1) удовлетворяет введенному в [6] условию эргодичности, и вычислим среднее относительное время пребывания $\xi(t)$ в некотором интервале $[\xi_0;\ \xi_0 + d\xi_0]$. Согласно [6], оно равно

$$M(\xi_0)\,d\xi_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} W(\xi_0,\ t)\,dt\,d\xi_0, \tag{15}$$

где $W(\xi,\ t)$ — одномерная функция распределения процесса. Для нахождения $M(\xi_0)$ удобнее выразить $W(\xi,\ t)$ через характеристическую функцию, которая в данном случае равна

$$\theta(v,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv\xi}\,W(\xi,\ t)\,d\xi = \exp\left\{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}\,[1 + \gamma\cos(2\omega_0 t)]\right\}. \tag{16}$$

Следовательно, имеем, взяв $T = \pi/\omega_0$:

$$M(\xi_0) = \frac{\omega_0}{2\pi^2}\int_0^{\pi/\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\xi_0}\exp\left\{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}\,[1 + \gamma\cos(2\omega_0 t)]\right\} dv\,dt = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\sigma^2 v^2/2)\,I_0\left(\frac{\gamma\sigma^2 v^2}{2}\right)\cos(\xi_0 v)\,dv.$$

Отметим, что при выводе выражения для $M(\xi_0)$ не требуется налагать каких-либо ограничений на спектр процесса, в отличие от предыдущего раздела, где предполагалось, что он сосредоточен вблизи частоты ω_0.

Разлагая в (17) функцию Бесселя в ряд и интегрируя почленно, получим

$$M(\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\xi_0^2/2\sigma^2)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma/8)^{2n}}{(n!)^2} H_{4n}\left(\xi_0/\sqrt{2\sigma^2}\right)\right], \tag{18}$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита.

Таким образом, распределение относительного времени пребывания отличается от гауссового и тем сильнее, чем больше степень нестационарности процесса. Определим, например, значение $M(\xi_0)$ при $\xi_0=0$. Подставляя $H_{4n}(0) = 2^{2n}\,(4n-1)!!$ в (18), выразим $M(0)$ через гипергеометрическую функцию ([4], гл. 14):

$$M(0) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(n!)^2}\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{2n}\right] = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\, F\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ 1;\ \gamma^2\right). \tag{19}$$

Используя свойства гипергеометрической функции, преобразуем полученное выражение к виду

$$M(0) = [2\pi\sigma^2(1+\gamma)]^{-1/2} F\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{2\gamma}{1+\gamma}\right) = [2\pi\sigma^2(1+\gamma)]^{-1/2}\frac{2}{\pi} K\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}\right), \tag{20}$$

где $K(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\, d\varphi$. При $1-\gamma \ll 1$ (сильная нестационарность) можно записать

$$M(0) \simeq \frac{1}{4\pi^{3/2}\sigma} \ln\frac{16}{1-\gamma}. \tag{21}$$

Следовательно, с ростом нестационарности относительное время пребывания процесса вблизи нуля увеличивается.

Рассмотрим поведение функции $M(\xi_0)$ при больших значениях ξ_0. Для этого проще воспользоваться выражением (9)

$$M(\xi_0) = \frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{\pi/\omega_0} dt \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi_0,\ \dot\xi,\ t)\, d\dot\xi = 2Ae^{-a\xi_0^2}\int_0^{\infty} \exp(-a\dot\xi^2/\omega_0^2) \times$$
$$\times\, I_0\left[\gamma a\left(\xi_0^2 + \frac{\dot\xi^2}{\omega_0^2}\right)\right] d\dot\xi. \tag{22}$$

Отсюда при $\xi_0 \gg \sigma$ и $1-\gamma \ll 1$ получим

$$M(\xi_0) \simeq 2Ae^{-a\xi_0^2}\int_0^{\infty} \exp(-a\dot\xi^2/\omega_0^2)\exp[\gamma\, a(\xi_0^2+\dot\xi^2/\omega_0^2)]\,[2\pi\gamma\, a\,(\xi_0^2+\dot\xi^2/\omega_0^2)]^{-1/2}\, d\dot\xi =$$
$$= 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\exp -\,[\xi_0^2/2\sigma^2(1+\gamma)]\,[\pi\xi_0^2/\sigma^2]^{-1/2}. \tag{23}$$

Из сравнения (23) с (14) следует, что при больших значениях ξ_0

$$N(\xi_0) = \omega_0\sigma M(\xi_0)/\sqrt{2\pi}\,. \tag{24}$$

Заметим, что для стационарного процесса соотношение (24) справедливо при всех значениях аргумента.

В случае $\gamma=1$ (предельно нестационарный процесс) из (17) получим следующее выражение для $M(\xi_0)$:

$$M(\xi_0) = (2\pi)^{-3/2}\sigma^{-1}\exp(-\xi_0^2/8\sigma^2)K_0(\xi_0^2/8\sigma^2), \quad (25)$$

где $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

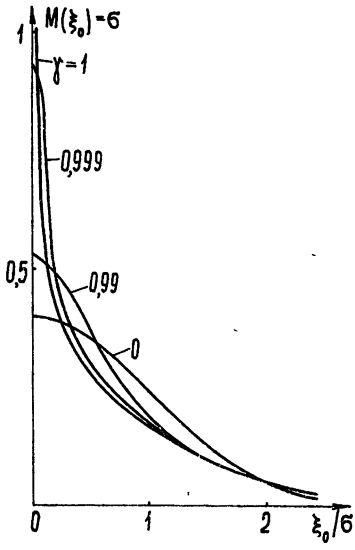


Рис. 2.

Кривые распределения относительного времени пребывания $M(\xi_0)$ изображены на рис. 2 (данные для $\gamma=0{,}9$ и $\gamma=0{,}999$ получены путем численных расчетов). Существенно отличаясь от гауссовой кривой (при $\gamma=0$), кривые $M(\xi_0)$ отличаются, как видим и от соответствующих кривых $N(\xi_0)$ (см. рис. 1), особенно при малых ξ_0. При больших значениях аргумента поведение обеих кривых (при равных γ) одинаково.

Выражаю благодарность И. Л. Берштейну и К. А. Горониной за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, **9**, 371 (1964).
2. В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 502 (1964).
3. Д. Мидлтон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, М., 1961.
4. Э. Уиттекер, Д. Ватсон, Курс современного анализа, **2**, ГИФМЛ, М, 1963.
5. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1963.
6. С. М. Рытов, Радиотехника и электроника, **4**, 1485 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 4 ноября 1965 г.

ON AXIS-CROSSINGS AND RELATIVE TIME OF EXISTING OF PERIODICALLY NON-STATIONARY RANDOM PROCESS

V. A. Markelov

The expressions have been derived for an average number of axis-crossings and relative time of existing of a normal periodically-nonstationary process.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621.391.8 : 519.27

О МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СНОСА И ДИФФУЗИИ

М. Л. Тай

Найдены условия, позволяющие использовать результаты работ [4, 5] для изучения влияния случайных воздействий на нелинейные динамические системы.

В [4] найдены условия, которым удовлетворяет плотность вероятности перехода однородного по времени одномерного марковского процесса с разрывными коэффициентами сноса и диффузии в предположении, что 1) плотность вероятности перехода $f(x, t, y)$ всюду ограничена вместе с производной по времени; 2) предел $C(x) = \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \times \times \int |y - x|^3 f(x, \tau, y)\, dy$ равен нулю; 3) в точке разрыва существуют ограниченные односторонние пределы коэффициентов сноса $A(x)$ и диффузии $B(x)$ вместе с односторонними производными $\partial A/\partial x$, $\partial B/\partial x$, $\partial^2 B/\partial x^2$; 4) коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ всюду ограничены, включая точку разрыва.

Полученные в [4] результаты обобщены для многомерных марковских процессов в [5]. Исследование многомерного случая выполнено также в [6], где специально рассмотрены марковские процессы, имеющие на поверхности разрыва дельта-образный выброс коэффициента сноса, и указано на необходимость дальнейшего изучения этого вопроса.

1. Рассмотрим однородные по времени случайные блуждания частицы на отрезке с отражающими (не поглощающими) границами. Пусть отрезок для определенности [0, 1] разбит на N равных частей точками $0, h, \ldots, Nh = 1$ (h — шаг, τ — длительность одного шага), в которые может попадать блуждающая частица. Предположим, что последовательные положения частицы образуют дискретную марковскую цепь с состояниями $0, h, \ldots, Nh = 1$.

Пусть вероятности перехода $p_{ik}^{(n)}$ зависят от i, k, n, причем $p_{ik}^{(1)} = 0$ при $|i - k| > 1$. Для краткости вероятности $p_{k\,k+1}^{(1)}$, $p_{k\,k}^{(1)}$ и $p_{k\,k-1}^{(1)}$ обозначим соответственно p_k, r_k, q_k. При сделанных предположениях равенство

$$p_k + q_k + r_k = 1 \tag{1.1}$$

справедливо для $k = 0, 1, \ldots, N$. В введенных обозначениях требование отражения (не поглощения) на границе запишется в виде

$$q_0 = p_N = 0, \quad q_N > 0, \quad p_0 > 0. \tag{1.2}$$

Все остальные вероятности q_k и p_k будем считать положительными, так как в противном случае блуждания происходят лишь на некоторой части отрезка [0, 1]. Описанную дискретную модель в дальнейшем будем называть просто случайными блужданиями.

Заметим, что все состояния описанной марковской цепи являются сообщающимися и образуют один существенный класс, если хоть одно $r_k > 0$ [2].

Известно [1], что стационарное распределение марковской цепи $y_k = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)}$, если оно существует, удовлетворяет системе уравнений

$$y_k = \sum_{i=0}^{N} p_{ki}^{(1)} y_i \quad (k = 0, 1, \ldots, N) \tag{1.3}$$

и условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{N} y_k = 1. \tag{1.4}$$

Учитывая (1.1) для стационарного распределения марковской цепи, описывающей случайные блуждания (1.3), запишем

$$(p_k + q_k)y_k = p_{k-1} y_{k-1} + p_{k+1} y_{k+1}, \tag{1.5}$$

где $p_{-1} = q_{N+1} = 0$, $k = 0,1, \ldots, N$. Решение системы уравнений (1.5), (1.4) есть

$$y_k = \Pi_k y_0, \quad y_0 = \Big(1 + \sum_{k=1}^{N} \Pi_k\Big)^{-1}, \quad \Pi_k = \frac{p_0}{q_k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i}{q_i}. \tag{1.6}$$

Переходом к пределу при $h \to 0$ с помощью дискретных марковских цепей можно изучать свойства непрерывных марковских процессов [1]. В разделе 2 описано построение последовательности дискретных случайных блужданий, пределом которой при h, стремящемся к нулю, является непрерывный марковский процесс с заданными коэффициентами сноса и диффузии, а в разделах 3 и 4 исследуется стационарное распределение непрерывных процессов при различных предположениях относительно коэффициентов сноса и диффузии.

2. Пусть $\eta(t)$ — непрерывный марковский процесс, удовлетворяющий условиям:

а) для всех реализаций $\eta^{(p)}(t)$

$$0 \leqslant \eta^{(p)}(t) \leqslant 1,$$

причем существует такое $T < \infty$, что вероятность выполнения неравенства $0 < \alpha \leqslant \eta(t) \leqslant \beta < 1$ при всех $t \geqslant T > 0$ равна нулю;

б) $C(x) = \lim\limits_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \int |y - x|^3 f(x, \tau, y)\, dy = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

в) коэффициент диффузии $B(x)$ ограничен и строго положителен:

$$0 < b \leqslant B(x) \leqslant B \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{2.1}$$

В дальнейшем будем рассматривать непрерывные марковские процессы, удовлетворяющие условиям а, б, в.

Предположим, что коэффициент сноса $A(x)$ ограничен внутри отрезка [0,1]*, т. е.

$$|A(x)| \leqslant A. \tag{2.2}$$

Разобьем отрезок [0, 1] точками 0, h, ..., $Nh = 1$ при условии, что

$$Ah < \frac{1}{2} b \tag{2.3}$$

и внутри каждого интервала $(kh, kh + h)$ $(k = 1, \ldots, N-1)$ выберем произвольную точку θ_k. Величины

$$p_k = \frac{B(\theta_k) + hA(\theta_k)}{2B}, \quad q_k = \frac{B(\theta_k) - hA(\theta_k)}{2B} \tag{2.4}$$

положительны, а

$$r_k = 1 - p_k - q_k \tag{2.5}$$

неотрицательны, так как в силу (2.1)—(2.3) $r_k = 1 - B(\theta_k)/B \geqslant 0$, $p_k > b/4B > 0$, $q_k \geqslant b/4B > 0$. Поэтому p_k, q_k, r_k можно считать вероятностями перехода дискретной марковской цепи. Определение вероятностей $p_0 = 1 - r_0$ и $q_N = 1 - r_N (q_0 = p_N = 0)$ связано с граничными условиями процесса $\eta(t)$, но для дальнейшего достаточно считать p_0 и q_N превышающими фиксированную положительную константу.

Полагая длительность одного шага

$$\tau = \frac{1}{B} h^2, \tag{2.6}$$

получаем марковскую цепь M_0 с состояниями $0, h, \ldots, Nh$, описывающую случайные блуждания. Для построения марковской цепи M_n из последовательности цепей

$$M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$$

выберем в качестве шага $h_n = 2^{-n}h$ и вычислим p_k, q_k, r_k, τ согласно (2.4)—(2.6). Тогда для смещения ξ_k блуждающей частицы за время одного шага из состояния kh для всех цепей имеем

$$\frac{1}{\tau} E\{\xi_k\} = A(\theta_k), \quad \frac{1}{\tau} E\{\xi_k^2\} = B(\theta_k), \quad \frac{1}{\tau} E\{|\xi_k|^3\} = h_n B(\theta_k). \tag{2.7}$$

Поэтому пределы левых частей первых двух равенств из (2.7) при $h \to 0$ совпадают с коэффициентами сноса и диффузии процесса $\eta(t)$ в точках их непрерывности, а предел левой части последнего равенства есть нуль, в соответствии с условием б**.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ — непрерывный марковский процесс, удовлетворяющий условиям а, б, в с непрерывными $A(x)$ и $B(x)$, причем $A(x)$ ограничено при $0 < x < 1$ и имеет ограниченные пределы в 0 и 1. Тогда стационарное распределение процесса $\xi(t)$ ограничено.

---

* В точках 0 и 1 коэффициент сноса бесконечен, поскольку, согласно неравенству Коши-Буняковского,

$$\left[\int f(x, \tau, y)(y - x)^2 dy\right]^2 \leqslant \int f(x, \tau, y) |y - x|^3 dy \int f(x, \tau, y) |y - x| dy$$

и после деления на τ^2 и перехода к пределу при $\tau \to 0$ в точках 0 и 1 в правой части получаем $A(0)$ $C(0)$, а слева $B(0)$.

** В силу определения p_k и q_k, $k = 0, 1, ., N$ предел последовательности удовлетворяет условиям а и в.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое h_1, что

$$|B(x_1) - B(x_2)| < \varepsilon_1 = \min\left\{B\varepsilon, \frac{b^2\varepsilon}{A}\right\}, \quad |A(x_1) - A(x_2)| < \frac{b\varepsilon}{2}, \tag{2.8}$$

как только $|x_1 - x_2| < h_1$. Пусть

$$h < \min\left\{\frac{b}{2A}, h_1\right\}. \tag{2.9}$$

Определяя p_k, q_k, r_k, τ по формулам (2.4)—(2.6), получаем марковскую цепь, описывающую случайные блуждания.

Поскольку

$$kh \leqslant 1, \quad \underline{c} = -\frac{A}{b} \leqslant c(\theta_k) = \frac{A(\theta_k)}{B(\theta_k)} \leqslant \frac{A}{b} = \overline{c}, \tag{2.10}$$

имеем

$$e^{2\underline{c}} \leqslant \left(\frac{1 + h\overline{c}}{1 - h\underline{c}}\right)^k \leqslant R_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q_i} \leqslant \left(\frac{1 + h\overline{c}}{1 - h\overline{c}}\right)^k \leqslant e^{2\overline{c}} \tag{2.11}$$

и

$$p_0 e^{2\underline{c}} \leqslant p_0\left(\frac{1 + h\overline{c}}{1 - h\overline{c}}\right)^k \leqslant \prod\nolimits_{k+1} = \frac{p_0}{q_{k+1}} R_k \leqslant \frac{2B}{b} p_0\left(\frac{1 + h\overline{c}}{1 - h\overline{c}}\right)^{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2B}{b} p_0 e^{2\overline{c}}. \tag{2.12}$$

В силу (2.8)—(2.9)

$$|\overline{c}_k - \underline{c}_k| < \varepsilon, \quad |\overline{p}_k - \underline{p}_k| < \varepsilon, \quad |\overline{q}_k - \underline{q}_k| < \varepsilon, \tag{2.13}$$

где чертой сверху и снизу (так же, как и всюду в дальнейшем) отмечена соответственно точная верхняя и нижняя грань величин ($c_k = c(\theta_k)$, $p_k = p(\theta_k)$, $q_k = q(\theta_k)$) в зависимости от выбора точек θ_k при фиксированном h.

По индукции доказывается, что

$$0 \leqslant \overline{R}_k - \underline{R}_k \leqslant 2h\varepsilon k(1 + h\overline{c})^{k-1}/(1 - h\overline{c})^{k+1} \leqslant 2\varepsilon e^{2\overline{c}} \tag{2.14}$$

и

$$0 \leqslant \overline{\Pi}_k - \underline{\Pi}_k \leqslant \frac{4B}{b}\varepsilon p_0(1 + h\overline{c})^k/(1 - h\overline{c})^{k+2}\left[\frac{B}{b} + hk \times\right.$$
$$\left. \times (1 - h\overline{c})^2(1 + h\overline{c})\right] \leqslant \frac{4B}{b^2}\varepsilon p_0 e^{2\overline{c}}(B + 2b). \tag{2.15}$$

Таким образом, при достаточно малом h разность $\overline{\Pi}_k - \underline{\Pi}_k$ можно сделать меньше любого наперед заданного числа независимо от выбора точек θ_k.

Теперь рассмотрим изменение Π_k при делении h пополам. Пусть

$$M_{\alpha,\beta}(h) = \prod_{i=\alpha_h}^{\beta_h} m_{i+1}(h), \tag{2.16}$$

где $m_i(h) = p_i(h)/q_i(h)$, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ и $\alpha_h = [\alpha/h]$ — целая часть числа α/h. Тогда аналогично (2.11) и (2.14)

$$e^{2\underline{c}(\beta-\alpha)} \leqslant \left(\frac{1+h\underline{c}}{1-h\underline{c}}\right)^{\beta-\alpha} \leqslant M_{\alpha,\beta}(h) \leqslant \left(\frac{1+h\overline{c}}{1-h\overline{c}}\right)^{\beta-\alpha} \leqslant e^{2\overline{c}(\beta-\alpha)}; \qquad (2.17)$$

$$0 \leqslant \overline{M}_{\alpha,\beta}(h) - \underline{M}_{\alpha,\beta}(h) \leqslant 2\varepsilon e^{2\overline{c}(\beta-\alpha)}. \qquad (2.18)$$

Сравнивая каждый множитель произведения $M_{\alpha,\beta}(h)$ с соответствующей парой множителей, входящих в $M_{\alpha,\beta}(h/2)$, получаем

$$\overline{M}_{\alpha,\beta}(h) \geqslant \overline{M}_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{2}\right), \text{ если } A(x) > 0 \text{ при } (1+\alpha_h)h < x < h\beta_h$$
$$\underline{M}_{\alpha,\beta}(h) \leqslant \underline{M}_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{2}\right), \text{ если } A(x) < 0 \text{ при } \alpha_h h < x < h(1+\beta_h). \qquad (2.19)$$

$$\overline{q}_{\alpha_h}(h) \geqslant \overline{q}_{\frac{2\alpha}{h}}\left(\frac{h}{2}\right), \quad \underline{q}_{\alpha_h}(h) \leqslant \underline{q}_{\frac{2\alpha}{h}}\left(\frac{h}{2}\right) \qquad (2.20)$$

и на тех интервалах, где $A(x) > 0$, существует предел последовательности $\{\overline{M}_{\alpha,\beta}(h)\} = \overline{M}_{\alpha,\beta}(h)$, $\overline{M}_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{2}\right), \ldots$. Обозначим этот предел через $M_{\alpha,\beta}$. Тогда, в согласии с (2.18), предел $\{\underline{M}_{\alpha,\beta}(h)\}$ также существует и равен $M_{\alpha,\beta}$ (аналогично и при $A(x) < 0$). Однако

$$\Pi_{\mu_h}(h) = \frac{p_0}{q_{1+\mu_h}} \prod_{i=1}^{\mu_h} m_i(h) = \frac{p_0}{q_{1+\mu_h}} M_{0,\alpha_1}(h) \prod_{i=1}^{n-1} M_{\alpha_i+h,\alpha_{i+1}}(h), \qquad (2.21)$$

где $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \mu - h$, $A(\alpha_i + h) = 0$ $(i < n)$. Следовательно, $\Pi_\mu = \lim\limits_{h\to 0} \Pi_{\mu_h}(h)$ существует и удовлетворяет (2.12).

Введем последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{1}{h_n} y_k^{(n)} \quad (kh_n \leqslant x < kh_n + h_n,\ k = 0,1,\ldots,N-1);$$
$$f_n(1) = \frac{1}{h_n} y_{N_n}^{(n)}, \qquad (2.22)$$

где $h_n = 2^{-n}h$, а $y_k^{(n)}$ — стационарное распределение M_n. С помощью оценок (2.12), (2.15) и равенства (1.6) существование $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ доказывается так же, как было доказано существование пределов $\Pi_k(x)$.

3. Непрерывный марковский процесс с разрывными коэффициентами сноса и диффузии естественно рассматривать как предел некоторой последовательности процессов с непрерывными коэффициентами. Поэтому условия, которым удовлетворяет плотность вероятности перехода в точке разрыва, в частности, плотность стационарного распределения, можно получить предельным переходом в такой последовательности. Однако существование предела требует доказательства. Может случиться, что предел зависит от выбора вспомогательной последовательности марковских процессов. В этом случае для определения условий, которые выполняются в точке разрыва, недостаточно знать коэффициенты сноса и диффузии: необходимы дополнительные характеристики поведения процесса.

Теорема 2. Пусть $\eta(t)$ — непрерывный марковский процесс, удовлетворяющий условиям а, б, в, и в точке $s\,(0<s<1)$ коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ разрывны. Предположим, что $A(x)$ ограничено при $0<x<1$ и имеет ограниченные односторонние пределы в точках 0, s, 1, а $B(x)$ — ограниченные односторонние пределы и производные в точке s. Тогда плотность стационарного распределения $f(x)$ процесса $\eta(t)$ ограничена и удовлетворяет в точке s условиям сопряжения:

$$\left[A(x)f(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{B(x)f(x)\}\right]=0; \tag{3.1}$$

$$[B(x)f(x)]=0, \tag{3.2}$$

где через $[F(x)]$ обозначена величина $F(s+0)-F(s-0)$.

Доказательство. Пусть $\omega(\nu)$ — произвольная непрерывная функция, определенная на отрезке $0\leqslant\nu\leqslant 1$, и δ — произвольное число, причем

$$0<\delta<\min(s,\,1-s),\quad 0\leqslant\omega(\nu)\leqslant 1,\quad \omega(0)=1-\omega(1)=0. \tag{3.3}$$

Построим марковский процесс с непрерывными коэффициентами

$$A_\delta(x)=\begin{cases}A(s-\delta)+[A_\delta]\omega\left(\dfrac{x-s+\delta}{2\delta}\right), & x\in[s-\delta,\,s+\delta]\\ A(x), & x\bar{\in}(s-\delta,\,s+\delta)\end{cases};$$
$$B_\delta(x)=\begin{cases}B(s-\delta)+[B_\delta]\omega\left(\dfrac{x-s+\delta}{2\delta}\right), & x\in[s-\delta,\,s+\delta]\\ B(x), & x\bar{\in}(s-\delta,\,s+\delta)\end{cases}, \tag{3.4}$$

где через $[A_\delta]$ обозначена разность $A(s+\delta)-A(s-\delta)$.

Возьмем $\varepsilon>0$. Поскольку $\omega(\nu)$ непрерывна на отрезке, существует такое h_2, что

$$|\omega(\nu_1)-\omega(\nu_2)|<\varepsilon_1=\min\left\{\frac{b\varepsilon}{A},\ \varepsilon,\ \frac{b^2\varepsilon}{2AB}\right\}, \tag{3.5}$$

как только $|\nu_1-\nu_2|<h_2$. Тогда все оценки, использованные при доказательстве теоремы 1, справедливы и не зависят от выбора $\omega(\nu)$, если

$$h<2\delta h_2. \tag{3.6}$$

Отсюда следует существование и ограниченность плотности стационарного распределения процесса $\eta(t)$.

Определим условия, которым удовлетворяет стационарное распределение процесса $\eta(t)$. Согласно (1.6),

$$\frac{1}{h^2}(q_{k+1}y_{k+1}-q_ky_k)=\frac{1}{h}y_k\frac{1}{h}(p_k-q_k). \tag{3.7}$$

В силу (1.6), (2.4) и (2.12) в точках непрерывности $A(x)$ и $B(x)$ существует предел правой части (3.7) при $h\to 0$. После перехода к пределу в точках непрерывности имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\{B(x)f(x)\}=2A(x)f(x). \tag{3.8}$$

Формула (3.8) представляет ссбой известное стационарное уравнение Фоккера—Планка.

По предположению в s существуют ограниченные односторонние пределы функций $A(x)$, $B(x)$, $\partial B/\partial x$, а по доказанному выше $f(x)$ ограничена; поэтому существуют односторонние пределы правой части (3.8) в точке s. В результате предельного перехода получаем (3.1).

Для вывода (3.2) заметим, что на основании (1.6) и (2.16)

$$\frac{1}{h} y_{\beta_h} = \frac{1}{h} y_{\alpha_h} \frac{p_{\alpha_h}}{p_{\beta_h}} M_{\alpha,\,\beta-h}(h). \tag{3.9}$$

В частности, при $\beta = s + \delta$ и $\alpha = s - \delta$

$$e^{\frac{2c}{}(2\delta-h)} \leqslant M_{s-\delta,\,s+\delta-h}(h) \leqslant e^{2\bar{c}\,(2\delta-h)} \tag{3.10}$$

и, последовательно переходя к пределу в равенстве (3.9), имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h} y_{(s+\delta)_h}\right\} = \lim_{\delta\to 0}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h} y_{(s-\delta)_h} \frac{p_{(s-\delta)_h}}{p_{(s+\delta-h)_h}} M_{s-\delta,\,s+\delta-h}(h)\right\};$$

$$f(s+0) = f(s-0)\,\frac{B(s-0)}{B(s+0)}, \tag{3.11}$$

что совпадает с (3.2).

4. Рассмотрим непрерывный марковский процесс с дельта-образным выбросом коэффициента сноса.

Теорема 3. Пусть $\zeta(t)$ — непрерывный марковский процесс, удовлетворяющий условиям а, б, в и в точке $s\,(0 < s < 1)$, коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ разрывны, причем $A(x)$ имеет в s дельта-образный выброс. Предположим, что $A(x)$ ограничено на интервалах $(0, s)$, $(s, 1)$ и имеет ограниченные односторонние пределы в точках $0, s, 1$, а $B(x)$ — ограниченные односторонние пределы и производные в точке s. Тогда для определения условий, которым удовлетворяет плотность вероятности перехода в точке s, недостаточно знать лишь коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ процесса $\zeta(t)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно доказать справедливость утверждения для плотности стационарного распределения процесса $\zeta(t)$. Пусть h удовлетворяет условию

$$A_1 h < \frac{1}{2} b, \tag{4.1}$$

где $|A(x)| < A_1$ при $x \in (0, s)$, $x \in (s, 1)$ и пусть $s_h = l$. Тогда p_l, q_l, r_l невозможно определить равенствами (2.4)—(2.6). Для того, чтобы определить эти вероятности, заметим, что для марковской цепи, описывающей случайные блуждания, величины

$$a_l = \frac{h}{\tau}(p_l - q_l), \quad b_l = \frac{h^2}{\tau}(p_l + q_l) \tag{4.2}$$

являются дискретными аналогами коэффициентов сноса и диффузии. Требование ограниченности коэффициента диффузии означает ограниченность $\lim\limits_{h\to 0}(h^2/\tau)$ и поэтому при достаточно малых h отношение $(p_l - q_l)\,h^{-1}$ сколь угодно мало отличается от a_l.

Поскольку коэффициент сноса процесса $\zeta(t)$ имеет дельта-образный выброс в точке s, $\lim\limits_{h\to 0}[(p_l - q_l)\,h^{-1}]$ не может быть ограниченным, если он существует.

Докажем, что условие сопряжения плотности стационарного распределения в точке s однозначно определяется заданием

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_l}{q_l} = k. \tag{4.3}$$

В силу (4.3) и определения (2.16) справедливо неравенство

$$(k - \varepsilon_2)e^{\frac{2c}{-}(2\delta-h)} \leqslant M_{s-\delta,\, s+\delta-h}(h) \leqslant (k + \varepsilon_1)e^{\overline{2c}\,(2\delta-h)}, \tag{4.4}$$

где $\varepsilon_1(h)$ и $\varepsilon_2(h)$ стремятся к нулю при $h \to 0$. Поэтому, последовательно переходя к пределу при $h\to 0$ и $\delta\to 0$ в равенстве (3.9), получаем

$$f(s+0) = kf(s-0)\frac{B(s-0)}{B(s+0)}. \tag{4.5}$$

Поскольку условия теоремы не накладывают никаких ограничений на величину k, утверждение теоремы доказано. Заметим, что равенство (3.8) не зависит от наличия дельта-образного выброса и справедливо для стационарного распределения процесса $\zeta(t)$.

5. В разделах 3 и 4 доказано, что непрерывный марковский процесс с ограниченными реализациями имеет ограниченное стационарное распределение, если коэффициент диффузии процесса ограничен и не обращается в нуль. При изучении условий, которым удовлетворяет плотность стационарного распределения, а следовательно, и плотность вероятности перехода в точке разрыва коэффициентов сноса и диффузии доказано, что в общем случае условия сопряжения зависят от характера поведения процесса в точке разрыва, для определения которого недостаточно знать лишь коэффициенты сноса и диффузии*. В частности, для определения условий сопряжения стационарного распределения достаточно иметь такую информацию о непрерывном марковском процессе, которая позволяет вычислить величину предела отношения вероятностей p_l и q_l при $h \to 0$ для дискретной модели случайных блужданий.

Заметим, что из предположения ограниченности коэффициента сноса в точке разрыва следует, что этот предел равен единице и результат совпадает с найденным в [4]. В то же время полученное в [6] условие сопряжения для марковских процессов с дельта-образным выбросом коэффициента сноса неверно.

Полученный в настоящей работе результат позволяет сформулировать условия, при которых результаты работ [4, 5] можно применять для исследования одномерных и многомерных марковских процессов, возникающих в динамических системах при наличии стохастических воздействий.

Исследование многомерных марковских процессов с разрывными коэффициентами сноса и диффузии связано с изучением поведения кусочно-линейных динамических систем под действием случайных возмущений.

Пусть

$$X(t) = \{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}, \quad Y(t) = \{y_1(t),\ldots,y_n(t)\}$$

— n-мерные марковские процессы, почти все реализации которых описываются соответственно системами дифференциальных уравнений

---

* Это справедливо также для процессов с конечным числом точек разрыва и для многомерных процессов, имеющих разрывы коэффициентов $A_i(x)$ и $B_{ij}(x)$ на конечном числе поверхностей.

$$\dot{x}_k = f_k(x) + \sum_{i=1}^{n} g_{ki}(x)\,\xi_i(t) \quad (k = 1,\ldots,n). \tag{5.1}$$

Здесь $f_k(x)$, $g_{ki}(x)$, $\dfrac{\partial g_{ki}(x)}{\partial x_\alpha}$ — непрерывные функции и

$$\dot{y}_k = \varphi_k(y) + \sum_{i=1}^{n} \chi_{ki}(y)\eta_i(t) \quad (k=1,\ldots,n), \tag{5.2}$$

где $\varphi_k(y)$ и $\chi_{ki}(y)$— разрывные функции y; случайные возмущения $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим марковость процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Процессы, описываемые системой уравнений (5.2), обычно представляют собой математическую идеализацию реальных процессов, описываемых системой (5.1). Использование такой разрывной идеализации в отсутствие возмущений очень часто позволяет правильно объяснить качественное поведение реального объекта и получить полезные количественные рекомендации. Однако и в детерминированнном случае по уравнениям (5.2), в отличие от (5.1), не всегда можно однозначно определить поведение процесса [3].

С помощью аппарата непрерывных марковских процессов успешно исследуются случайные процессы $X(t)$. Формулы, связывающие правые части системы (5.1) с коэффициентами сноса и диффузии процесса $X(t)$, выведены в [7] при условии, что существуют ограниченные производные $\partial g_{ki}/\partial x_\alpha$. Поскольку последнее условие не выполняется на поверхности разрыва функций $\chi_{kl}(y)$, эти формулы неприменимы для изучения процесса $Y(t)$. Как показано в данной статье, наличие дельтаобразного выброса связано с пропускающими свойствами поверхности разрыва, т. е. с отражающими или эластичными барьерами. Ясно, что в тех случаях, когда поверхность разрыва является барьером, необходимо изучить свойства такого барьера, т. е. выяснить поведение процесса на поверхности разрыва. В тех случаях, когда коэффициенты сноса и диффузии марковского процесса $X(t)$, для которого процесс $Y(t)$ является «разрывной» математической идеализацией, всюду ограничены, поверхность разрыва не является барьером и $Y(t)$ имеет на поверхности разрыва ограниченные коэффициенты сноса и диффузии.

Введение гипотезы ограниченности коэффициентов сноса и диффузии на поверхности разрыва позволяет использовать результаты работ [4, 5] для изучения влияния случайных возмущений на динамические системы, описываемые системой дифференциальных уравнений (5.1), с помощью кусочно-разрывной идеализации.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Ю. И. Неймарку за полезные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, изд. Мир, М., 1964.
2. Чжун Кай Лай, Однородные цепи Маркова, изд. Мир, М., 1964.
3. Ю. И. Неймарк, Труды ИФАК, 1, 1961, изд. АН СССР, стр. 706.
4. М. Л. Тай, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 341 (1965)
5. М. Л. Тай, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 834 (1965).
6. Р. Л. Стратонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 704 (1965)
7. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском государственном университете

Поступила в редакцию 18 декабря 1965 г.

ON MARKOV'S PROCESSES WITH TRANSFER AND DIFFUSION DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

M. L. Tay

Conditions have been found permitting to apply the resulss of papers [4, 5] in studying the influence of random actions on nonlinear dynamic systems.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621 371.134

НАБЛЮДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЭФФЕКТОВ В ДИАПАЗОНЕ РАДИОЧАСТОТ

А. С. Горшков, В. Ф. Марченко

На примере генерации второй гармоники и комбинационной частоты экспериментально изучены явления на границе раздела линейной и нелинейной сред, представляющих собой линии передачи типа фильтра низких частот. Проведено сравнение результатов эксперимента с выводами теории.

Существует известная аналогия, подтвержденная многочисленными экспериментальными данными, между процессами взаимодействия когерентных световых волн в нелинейных кристаллах и радиоволн в линиях передачи с нелинейными параметрами (см., например, [1]). В этой связи представляет интерес исследование на модели в диапазоне радиочастот так называемых поверхностных эффектов на границе раздела линейной и нелинейной сред, изучение которых в оптике по ряду причин (малости эффекта, трудности отделения от побочных явлений и т. п.) представляет сложную экспериментальную задачу. Пока можно сослаться лишь на одну-две работы, в которых проводилось качественное наблюдение этих эффектов в оптике (см., например, [2]). В то же время изучение поверхностных явлений, помимо чисто физического интереса, имеет некоторое прикладное значение, поскольку наблюдение отраженных волн является одним из методов оценки нелинейных свойств среды [3].

Обычно удается моделировать процессы лишь в одномерной изотропной среде. Этого оказывается вполне достаточно, чтобы проследить наиболее существенные стороны нелинейного взаимодействия волн. Применительно к нашему случаю можно также добавить, что в радиодиапазоне легко исследовать установление фазы, формирование отраженной волны, влияние дискретности среды и т. п., количественное изучение которых в оптическом диапазоне чрезвычайно затруднено. В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования таких поверхностных эффектов, как генерация второй гармоники и комбинационной частоты на границе слабо нелинейной «квадратичной» среды [1], представляющей собой линию передачи, емкость которой является линейной функцией приложенного напряжения.

1. Пусть на границу раздела линейной и нелинейной сред, каждая из которых представляет собой линию передачи с распределенными параметрами L', C' и L, $C = C_g(1 + \xi V)$, соответственно, падает со стороны линейной среды волна основной частоты $v = V_1 \cos[\omega t - \beta(\omega)x + \Phi_1]$.

Амплитуды отраженной и «преломленной» волны второй гармоники определяются из условий непрерывности напряжений и токов на границе раздела $x = 0$ [4, 5] и могут быть представлены в виде ($\xi^2 \ll 1$)

$$V_2^{\text{отр}} = \frac{\xi\beta^2(2\omega)\, V_1^2}{2[\beta(2\omega) + \beta'(2\omega)]\,[\beta(2\omega) + 2\beta(\omega)]} \qquad (x \leqslant 0); \qquad (1)$$

$$V_2 = \frac{\xi\beta^2(2\omega)\,V_1^2}{2[\beta(2\omega)+2\beta(\omega)]}\left\langle\left\{\frac{2\sin^2(\Delta\beta\, x/2)}{\Delta\beta}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,[\beta(2\omega)+\beta'(2\omega)]^{-1}\right\}^2+\{\sin[\Delta\beta\, x]/\Delta\beta\}^2\right\rangle^{1/2} \qquad (x\geqslant 0), \tag{2}$$

где $\Delta\beta=\beta(2\omega)-2\beta(\omega)$. Затухание в линиях не учитывается.

В том случае, если на границу раздела падают две волны с частотами ω_1 и ω_3, формулы (1), (2) сохраняют вид и для возникающей комбинационной частоты $\omega_2=\omega_1\pm\omega_3$, если произвести замену $(1/2)\xi V_1^2\to\xi V_1V_3$; $2\beta(\omega)\to\beta(\omega_1)\pm\beta(\omega_3)$; $\beta(2\omega)\to\beta(\omega_2)$. Очевидно, что при таком рассмотрении амплитуды всех следующих комбинационных частот $\omega_1\pm2\omega_3$, $2\omega_3\pm\omega_1$, а также третьей гармоники 3ω вблизи границы будут иметь порядок малости ξ^2 и т. д.

2. Исследование поверхностных эффектов проводилось в линиях типа фильтра нижних частот, изображенных на рис. 1. В качестве не-

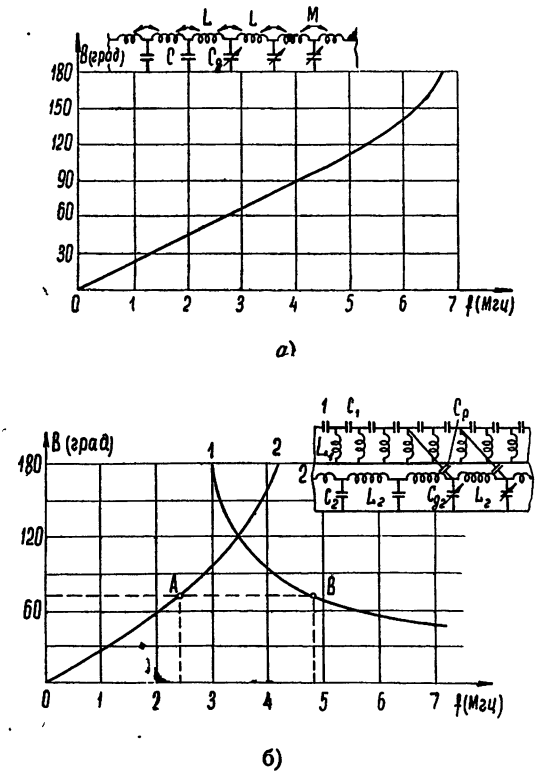


Рис. 1. Эквивалентные схемы систем, предназначенных для наблюдения отраженной волны второй гармоники (а) и комбинационной частоты (б). Экспериментальные дисперсионные характеристики систем изображены сплошными линиями ($L=10$ *мкгн*, $C_g=300$ *пкф*, $L_1=10$ *мкгн*, $C_1=86$ *пкф*, $C_p=10$ *пкф*, $L_2=40$ *мкгн*, $C_{g2}=170$ *пкф*).

линейных емкостей использовались емкости p—n перехода диодов. В окрестности постоянного рабочего смещения, равного — 3 *в*, зависимость емкостей диодов от приложенного напряжения близка к линейной. Диоды и индуктивности для линий отбирались резонансным методом с точностью $\pm2\%$. На входе и выходе систем использовались плавные аттенюаторы (12—15 ячеек), что позволяло устранить влияние отражений от концов линий. По этим же соображениям в большинстве экспериментов реализовался случай, когда $C'=C_g(-3\,в)$, т. е. для волны

основной частоты граница раздела являлась абсолютно прозрачной*. Измерения напряжений различных частот проводились с помощью высокоомного узкополосного зонда, который для системы а на рис. 1 мог механически передвигаться вдоль линии. Это позволяло наблюдать на экране осциллографа распределение амплитуд и фаз вдоль линии.

3. Типичны осциллограммы, снятые для входного сигнала с частотой $f = 1{,}95$ *Мгц* и амплитудой в сечении $x = 0$ $V_1 = 2{,}8$ *в* приведены на рис. 3. Граница раздела соответствует 19-ой ячейке, отсчитанной слева; начало выходного аттенюатора относится примерно к 6-му диоду. Амплитуда отраженной волны второй гармоники равнялась 0,12 *в*. Для сравнения этого результата с теоретическим необходимо определить параметр нелинейности ξ. Это определение проводилось по величине амплитуды гармоники в согласованной линии, последняя ячейка которой включала одиночный диод с емкостью $\frac{1}{2}C_g$. В результате для ξ было получено значение $\xi = 0{,}1\ в^{-1} \pm 10\%$. Подставляя это значение в формулу (1), найдем величину $V_2^{отр} = \xi V_1^2/8 = 0{,}1$ *в*. Ошибки при определении $V_2^{отр}$ связаны, в первую очередь, с небольшими отражениями быстро растущей вдоль линии волны гармоники от ячеек аттенюатора. Экспериментально было подтверждено, что зависимость $V_2^{отр}$ от амплитуды входного сигнала, как и следует из формулы (1), носит квадратичный характер.

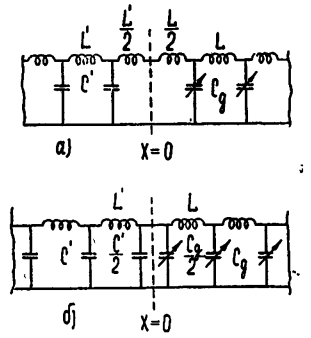


Рис. 2. Различные варианты соединения двух линий типа фильтра нижних частот.

Интересно проследить влияние границы на установление оптимальной фазы второй гармоники на входе нелинейной линии. В том случае, когда $\Delta\beta$ близко к 0, вращение фазы гармоники определяется только поверхностным эффектом (2), и для величины разности фаз сигнала и гармоники $\Delta\Phi = \Phi_2 - 2\Phi_1$ можно записать

$$\operatorname{tg}(\Delta\Phi) = \frac{[\beta(2\omega) + \beta'(2\omega)]\sin(\Delta\beta x)}{\Delta\beta + 2[\beta(2\omega)+\beta'(2\omega)]\sin^2(\Delta\beta x/2)} \simeq [\beta(2\omega)+\beta'(2\omega)]\,x = 2B(2\omega)N, \tag{3}$$

где N — текущий номер ячейки, $B(2\omega)$ — набег фазы на ячейку фильтра.

Таким образом, с увеличением N фаза гармоники поворачивается относительно входной фазы сигнала на 90° и принимает устойчивое положение, соответствующее максимальному росту амплитуды V_2. Для нашего случая, когда набег фазы на ячейку на частоте гармоники $B(2\omega) \simeq 90°$, уже на трех ячейках величина $\Delta\Phi$, как следует из (3), достигает $\simeq 80°$. На осциллограмме рис. 3г светящиеся точки соответствуют первому, второму и т. д. диодам. Длина радиус-вектора пропорциональна амплитуде основной волны, а угловая координата определяет

---

* Следует иметь в виду, что соединение двух дискретных линий возможно двумя способами: оконечные звенья представляют собой либо *Т*-, либо *П*-ячейки. Рассмотренной выше теории будет соответствовать соединение в виде *Т*-ячеек (рис. 2а). Действительно при переходе к пределу (распределенной линии) соединение *П*-ячейками (рис. 2б) эквивалентно образованию бесконечно тонкого граничного слоя, в котором значение нелинейной емкости вдвое меньше, чем внутри среды при $x > 0$. Из физических соображений следует, что амплитуда отраженной волны второй гармоники от такой границы должна быть близка к нулю. Этот вывод хорошо подтверждается экспериментом.

разность фаз $\frac{1}{2}\Delta\Phi$. Отчетливо видно, что на первых трех-четырех ячейках $\Delta\Phi$ поворачивается от величины, близкой к 90°, до нуля; это положение сохраняется при возрастании N (дальнейшее вращение разности фаз связано с действием аттенюатора). Отмеченный характер поведения фазы гармоники практически не зависит от амплитуды входного сигнала.

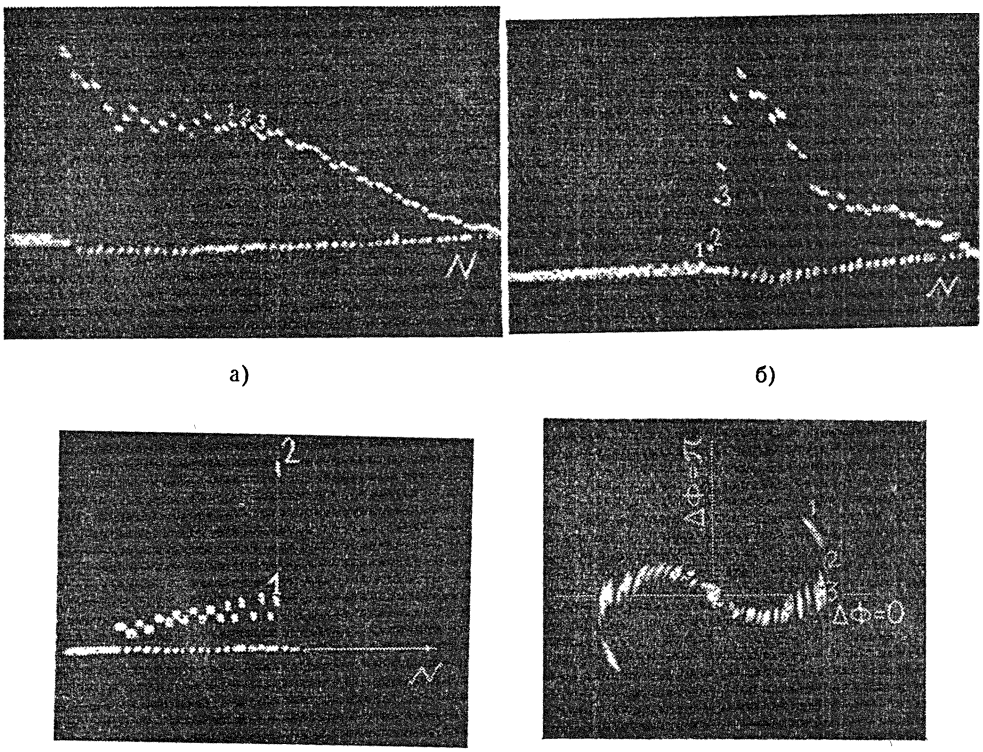


Рис. 3. Распределение амплитуд и фаз волн основной частоты и второй гармоники вдоль системы, изображенной на рис. 1а. Осциллограмма а изображает распределение амплитуды основной частоты; б—общую картину распределения амплитуды гармоники; в—отраженную волну гармоники; г—вращение разности фаз в нелинейной линии.

Как отмечено в работе [6], физический смысл появления отраженной волны удвоенной частоты можно весьма наглядно раскрыть, наблюдая процесс генерации гармоники в нелинейном слое, прозрачном для основной волны ($\beta'(\omega) = \beta(\omega)$). Отраженная волна, являющаяся результатом суперпозиции волн гармоники, излучаемых в соответствующей фазе каждым диодом (диполем), будет иметь в этом случае амплитуду, зависящую от длины слоя L по закону

$$V_2^{\text{отр}}(L) = 2V_2^{\text{отр}} \sin \frac{\beta(2\omega) + 2\beta(\omega)}{2} L$$

($V_2^{\text{отр}}$ определяется формулой (1)).

На рис. 4 представлены распределения напряжений гармоники для различных толщин слоя ($N = 1, 2, 3$). Поскольку в нашем случае $B(2\omega)$

близок к углу 90°, и дисперсия в линии отсутствует, величина $|V_2^{\text{отр}}(L)|$ меняется при увеличении слоя на ячейку от минимального нулевого значения до своего максимума, равного $2V_2^{\text{отр}}$, и наоборот. Хорошее соответствие экспериментальных данных с теоретическими (сплошная кривая) имеет место вплоть до значений $N = 8 \div 9$. При бо́льших N отражения от аттенюатора становятся соизмеримыми с величиной $V_2^{\text{отр}}$ и искажают результат. Данные на рис. 4 наглядно показывают, что отраженная волна гармоники формируется слоем толщиной порядка одной ячейки, т. е. удовлетворяющим условию $L \ll \lambda$. Здесь имеется полная аналогия с линейным случаем, где формирующий слой (слой Друде) также значительно меньше длины волны [7].

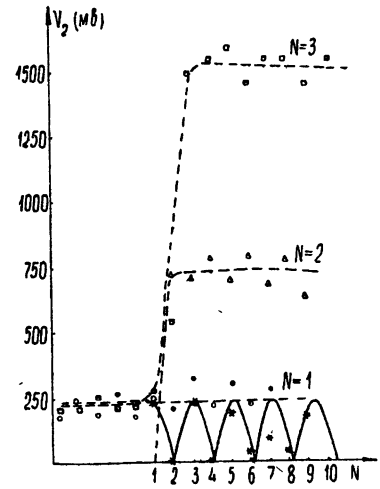


Рис. 4. Распределение амплитуд волны гармоники V_2 в нелинейном прозрачном слое различной толщины и вне слоя. Положение диодов обозначено точками вдоль оси абсцисс с номерами 1, 2, 3 и т. д. Сплошная кривая соответствует теоретической зависимости модуля амплитуды отраженной волны гармоники от числа диодов, образующих слой; результаты эксперимента отмечены звездочками.

Для наблюдения комбинационных частот использовалась система, изображенная на рис. 1б. Сигнал с частотой f_1 распространялся в линии 1, сигнал с частотой f_3 и комбинационная частота f_2 — в линии 2. Наличие дополнительной линии 1, слабо связанной с основной, позволяло снимать распределение напряжений комбинационных частот во всей полосе пропускания фильтра. Для разностной частоты $f_2 = f_1 - f_3$ изучалась зависимость амплитуды отраженной волны от величины расстройки взаимодействующих волн $\Delta\beta = \beta_2 - (2\beta_1 - \beta_3)$. Отметим, что при частотах f_3 и f_1, соответствующих точкам дисперсионных кривых A и B (рис. 1б), имеет место синхронный режим генерации $\Delta\beta = 0$. При этом волна сигнала f_1 распространяется навстречу сигналу f_3, поскольку линия 1 обладает аномальной дисперсией. Меняя в этом случае частоту f_3, можно изменять расстройку $\Delta\beta$ в пределах примерно $\pm 0{,}2$. (Теоретическая зависимость $V_2^{\text{отр}}$ от частоты f_2 представлена на рис. 5 кривой 1). Сильным расстройкам $\Delta\beta \sim 3$ соответствует режим, при котором направления волн f_1 и f_3 совпадают (кривая 2 на рис. 5). Амплитуды напряжений волн f_1 и f_3 на первых граничных диодах в обоих случаях поддерживаются одинаковыми. Экспериментальные данные, приведенные на рис. 5, хорошо подтверждают (вплоть до значений $B(2\omega) \sim 100°$) вывод о том, что величина $V_2^{\text{отр}}$ не зависит от расстройки $\Delta\beta$, характеризующей степень взаимодействия волн в нелинейной среде [1].

Измерения амплитуд отраженных волн комбинационных частот более высокого порядка ($\pm f_1 \mp 2f_3$) показали, что их величины примерно

на порядок меньше, чем $V_2^{отр}$. Характер нарастания этих волн при $x>0$ вблизи границы близок к экспоненциальному.

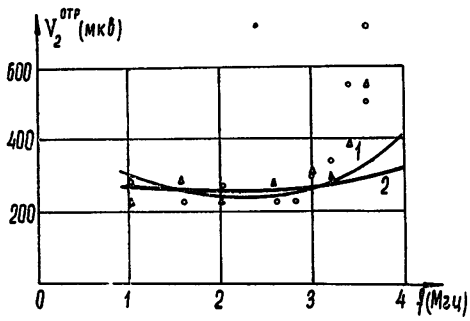


Рис. 5. Зависимость амплитуды отраженной волны комбинационной частоты от величины f_2. Экспериментальные данные, обозначенные кружками, соответствуют случаю, когда волны f_1 и f_3 имеют противоположное направление (расчетная зависимость представлена кривой 1); данные, обозначенные треугольниками, соответствуют случаю, когда направления волн f_1 и f_3 совпадают (кривая 2).

5. Как следует из рис. 5, в области частот f_2, близких к критической частоте фильтра, наблюдается резкое возрастание величины отраженного сигнала $V_2^{отр}$, не объяснимое с точки зрения рассмотренной выше теории. Роль активных потерь в линии и в этом случае остается несущественной, поскольку даже вблизи критической частоты ($B=150°$) затухание на ячейку не превосходит величину ~0,04. Очевидно, что обнаруженный эффект связан с возрастающей ролью пространственной дисперсии в линии.

Поскольку теория нелинейных поверхностных эффектов для сред с пространственной дисперсией отсутствует, представляет интерес провести качественное наблюдение этих эффектов на модели и дать практический критерий применимости теории, развитой для распределенной линии. С этой целью была создана специальная линия типа фильтра нижних частот с параметрами $L = 40$ *мкгн*, $C_g(-3в) = 3000$ *пкф*, в которой измерение напряжений осуществлялось на длинах, существенно меньших размера ячейки. Это позволяло экспериментально оценивать величину пространственных гармоник. Линия, моделирующая линейную среду, представляла собой фильтр нижних частот с параметрами $L = 10$ *мкгн*, $C = 300$ *пкф*, в котором пространственной дисперсией в области исследуемых частот (до 1 *Мгц*) можно пренебречь.

Амплитуды волн удвоенной частоты вблизи границы нелинейной среды для различных частот представлены на рис. 6 (пунктирные ли-

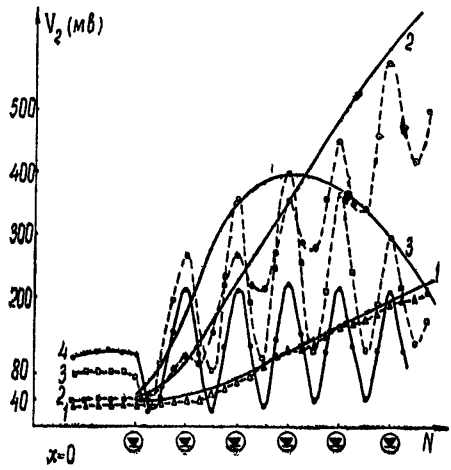


Рис. 6. Экспериментальные распределения амплитуд волны удвоенной частоты (пунктирные кривые 1, 2, 3 и сплошная кривая 4) в линии с пространственной дисперсией для различных частот $2f$. Теоретическая зависимость (2) представлена сплошными кривыми 1, 2. 3. Кривые 1 соответствуют удвоенной частоте $2f=450$ *кгц*, кривые 2—$2f=680$ *кгц*, кривые 3—$2f=800$ *кгц*. Кривая 4 соответствует частоте $2f=940$ *кгц*. Слева от границы нелинейной линии $x=0$, положение диодов в которой отмечено на оси абсцисс, значения V_2 соответствуют отраженному сигналу.

нии 1, 2, 3). С приближением частоты второй гармоники $2f$ к критической частоте фильтра $f_{кр} \simeq 900$ *кгц* амплитуды нарастающих волн приобретают характерные осцилляции, обусловленные появлением минус первой пространственной гармоники. Обработка этих кривых позволяет сделать вывод, что в любом сечении при $x>0$ соотношение между амплитудами минус первой и нулевой пространственных гармоник для волны удвоенной частоты точно соответствует соотношению между ними в линии с линейными параметрами для соответствующей частоты $2f$ Причем, как видно из рис. 6, этот вывод справедлив как для малых расстроек ($\Delta\beta \sim 0{,}2$; кривая 2), так и для больших ($\Delta\beta \sim 1$; кривая 3).

В области, где существенную роль начинает играть пространственная дисперсия, применимость формулы (2) становится ограниченной. она хорошо описывает напряжение второй гармоники лишь в дискретных точках, соответствующих местоположению диодов (см. сплошные кривые 1, 2, 3 на рис. 6). Что же касается формулы (1) для амплитуды отраженной волны, то она дает сильно заниженный результат (ср. данные на рис. 5 и 6), поскольку не учитывает вклад в отраженную волну, обусловленный наличием минус первой гармоники. Подчеркнем, что возбуждение отраженной волны минус первой гармоникой происходит весьма эффективно, поскольку направления фазовых скоростей этих волн совпадают. Максимальное значение $V_2^{отр}$ соответствует случаю, когда $2f$ несколько превышает критическую частоту $f_{кр}$. При этом напряжение удвоенной частоты в нелинейной линии имеет вид осциллирующей кривой с минимумами, близкими к 0 (амплитуды нулевой и минус первой гармоник мало отличаются друг от друга — см. кривую 4 на рис. 6). В этой же области частот становится заметной также и следующая — плюс первая пространственная гармоника, однако ее амплитуда не превышала $10 \div 15\%$ от амплитуды нулевой гармоники.

В результате можно весьма просто оценить границы применимости формулы (1) для дискретной среды. Приближенно отношение амплитуд минус первой и нулевой гармоник определяется формулой [8]

$$\frac{a_{-1}}{a_0} \simeq \left\{ \frac{2(1-\cos B) - B^2}{2(1-\cos B) - (B-2\pi)^2} \right\}^{1/2}.$$

Можно считать, что при значениях $a_{-1}/a_0 \leqslant 0{,}1$ (это соответствует довольно значительному набегу фазы гармоники на ячейку $B(2\omega) \leqslant 100°$) влиянием пространственной дисперсии на величину поверхностного эффекта можно пренебречь. Экспериментальные результаты подтверждают этот вывод. В заключение отметим, что после соответствующего теоретического рассмотрения измерение нелинейного поверхностного эффекта, который в данном случае не является, вообще говоря, малым, может служить одним из методов количественной оценки величины пространственной дисперсии (например, у кристаллов).

Авторы выражают свою признательность С. Д. Гвоздоверу за внимание к работе и В. Г. Титову за помощь при выполнении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
2. J. Ducuing, N. Bloembergen, Phys. Rev. Letters, 10, 474 (1963).
3. R. Chang, J. Ducuing, N. Bloembergen, Phys. Rev. Letters, 15, 415 (1965).
4. N. Bloembergen, P. Pershan, Phys. Rev., 128, 606 (1962).
5. В. Ф. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 405 (1965).

6. В. Ф. Марченко, Оптика и спектроскопия (в печати).
7. Д. В Сивухин, Диссертация, МГУ, 1944.
8. E. Cassedy, A. Oliner, Proc. IEE, **51**, 1330 (1963).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
14 октября 1965 г.

ON OBSERVATION OF NONLINEAR BOUNDARY EFFECTS IN RADIO-FREQUENCY BAND

A. S. Gorshkov, V. F. Marchenko

By the example of the second harmonic and combinational frequency the phenomena were experimentally studied on the interface of linear and nonlinear media representing the transmission lines of the low-pass filter type. The experimental results have been compared with the theoretical conclusions

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621 378.33

О ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПУЧКАМИ КОНЕЧНОЙ АПЕРТУРЫ

А. П. Сухоруков

Рассматривается генерация второй гармоники ограниченными пучками в квазиоптическом приближении (на основе параболических уравнений). При таком подходе удается учесть в первом приближении анизотропные свойства нелинейного кристалла и дифракционные эффекты. Получены и проанализированы выражения для мощности и углового спектра гармоники в трех случаях: для гауссова пучка с дифракционной расходимостью, при фокусировании пучка сферической линзой и при фокусировании пучка цилиндрической линзой. Отмечено удовлетворительное согласие теории с экспериментом.

ВВЕДЕНИЕ

В нелинейной оптике, в частности, при генерации оптических гармоник большой интерес представляет изучение взаимодействия пучков конечных размеров. В [1] развита теория генерации второй гармоники при учете простейшего апертурного эффекта, связанного только с анизотропными свойствами кристалла (наличием углового расхождения между лучевым и волновым векторами необыкновенной волны гармоники). Для сфокусированных и достаточно узких пучков, кроме указанных апертурных явлений, необходимо учитывать дифракционные эффекты. Такого рода задача может быть решена с достаточной степенью точности в квазиоптическом приближении на основе параболических уравнений для медленно меняющихся амплитуд взимодействующих волн. Обобщение метода параболического уравнения на нелинейную оптику сделано в работе [2], где в качестве примера проанализирована генерация второй гармоники цилиндрической сходящейся волной. В приближении заданного поля задача о генерации второй гармоники в сфокусированных пучках может быть также решена на основе импульсного представления [3]. Дебаевская волна, рассмотренная в [2, 3], является хорошей моделью излучения рубинового лазера. В отличие от последнего, излучение газового лазера на основной моде имеет дифракционную расходимость и гауссово распределение амплитуды по сечению пучка. Для гауссовых пучков исследованы зависимость мощности второй гармоники при отклонении кристалла от угла синхронизма [4] и простейшие апертурные эффекты с учетом затухания [1] в случае, когда длина кристалла меньше характерной дифракционной длины пучка, так что амплитуда основного излучения вдоль кристалла остается постоянной (в приближении заданного поля).

В настоящей работе развита теория генерации второй гармоники в кристаллах произвольной длины для гауссового пучка с дифракционной расходимостью и для пучков, сфокусированных сферической и цилиндрической линзами. Следует отметить, что анализ генерации второй гармоники значительно проще (и поэтому является более полным) для гауссового пучка, нежели для дебаевской волны. Однако основные результаты, полученные для гауссового пучка, справедливы и для дебаевской волны рубинового лазера.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Процесс генерации второй гармоники в квазиоптическом приближении описывается параболическими уравнениями [2] для медленно меняющихся комплексных амплитуд основной частоты A_1 и гармоники A_2:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{1}{2ik_1^0}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{1}{2ik_2^e}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) - \beta\frac{\partial A_2}{\partial x} - i\gamma A_1^2, \tag{2}$$

где ось z ориентирована вдоль направления синхронизма $\boldsymbol{k}_2^e = 2\boldsymbol{k}_1^0$, β — угол анизотропии между лучевыми векторами обыкновенной волны $\boldsymbol{s}_1^0$ и необыкновенной волны гармоники $\boldsymbol{s}_2^e$, лежащими в одной плоскости с осью x. Коэффициент нелинейности γ связан с тензором $\hat{\chi}$ квадратичной поляризации:

$$\gamma = \frac{8\pi\omega^2(\boldsymbol{e}_2^e\hat{\chi}^{2\omega}\boldsymbol{e}_1^0\boldsymbol{e}_1^0)}{c^2k_2^e}.$$

Уравнение (1) соответствует приближению заданного поля, так как в нем не учтен нелинейный член $\sim\gamma A_1^* A_2$.

Параболические уравнения (1)—(2) описывают как дифракционные, так и апертурные эффекты при генерации второй гармоники. Если дифракционные явления не играют существенной роли, то в уравнениях (1)—(2) можно пренебречь вторыми производными (переход к геометрической оптике плоских волн [5]). Общее решение уравнения первого порядка

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta\frac{\partial A_2}{\partial x} = -i\gamma A_1^2 \tag{3}$$

с граничным условием $A_2(x, y, 0) = 0$ имеет следующий вид:

$$A_2(x, y, z) = -i\gamma\int_0^z A_1^2[x - \beta(z - \tau), y, \tau]\,d\tau. \tag{4}$$

Для гауссового пучка формула (4) дает выражение амплитуды второй гармоники, полученное в [1] другим методом.

Пусть на выходе газового лазера излучение представляет собой плоскую волну с гауссовым распределением амплитуды. Если пучок лазера проходит через линзу, расположенную в ближней зоне излучения лазера, то

$$A_1(x, y, 0) = \sqrt{\frac{16P_1}{ca^2}}\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{ik_0x^2}{2R_1^{(л)}} + \frac{ik_0y^2}{2R_2^{(л)}}\right), \tag{5}$$

где

$$P_1 = \frac{c}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_1A_1^*dxdy$$

— полная мощность пучка. Для сферической линзы фокусное расстояние $R_1^{(л)} = R_2^{(л)}$; для цилиндрической $R_1^{(л)} = \infty$ или $R_2^{(л)} = \infty$; для пучка

с дифракционной расходимостью $R_1^{(л)} = R_2^{(л)} = \infty$. Отношение $a/R^{(л)} = \alpha_л$ будем считать половиной угла схождения фокусированного пучка.

Решая задачу Коши для уравнения типа (1) с граничным условием (5), находим амплитуду пучка лазера на расстоянии z:

$$A_1(x, y, z) = \left\{\frac{16P_1R_1^{(л)}R_2^{(л)}L_д^2}{ca^2[(R_1^{(л)} - z)L_д - izR_1^{(л)}]\,[(R_2^{(л)} - z)L_д - izR_2^{(л)}]}\right\}^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{k_0(R_1^{(л)} - iL_д)x^2}{2[(R_1^{(л)} - z)L_д - izR_1^{(л)}]} - \frac{k_0(R_2^{(л)} - iL_д)y^2}{2[(R_2^{(л)} - z)L_д - izR_2^{(л)}]}\right\}, \tag{6}$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновой вектор в свободном пространстве, $L_д = \frac{1}{2}k_0a^2$ — — дифракционная длина пучка. Внутри кристалла вследствие преломления на его передней грани $z = L_1$ амплитуда пучка, ось которого совпадает с направлением синхронизма, несколько меняется. Поэтому в (6) необходимо сделать следующую замену:

$$R_{1,2}^{(л)} \to \frac{k_0}{k_1^0}R_{1,2};\ z \to z - L_1 + \frac{k_1^0}{k_0}L_1;\ k_0 \to k_1^0. \tag{7}$$

Амплитуда второй гармоники находится как решение задачи Коши для уравнения (2) с граничным условием $A_2(x, y, L_1) = 0$ при учете соотношений (6)—(7). Если длина кристалла $L = L_2 - L_1$, это решение имеет вид

$$A_2(x, y, L_2) = \frac{-16i\gamma P_1R_1R_2l_д^2}{ca^2[(R_1 - l_2)l_д - il_2R_1]^{1/2}[(R_2 - l_2)l_д - il_2R_2]^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{-k_1^0(R_2 - il_д)y^2}{[(R_2 - l_2)l_д - il_2R_2]}\right\} \int_{l_1}^{l_2} \{[(R_1 - \tau)l_д - i\tau R_1]^{1/2} \times \tag{8}$$
$$\times [(R_2 - \tau)l_д - i\tau R_2]^{1/2}\}^{-1}d\tau \exp\left\{-\frac{k_1^0(R_1 - il_д)[x - \beta(l_2 - \tau)]^2}{[(R_1 - l_2)l_д - il_2R_1]}\right\},$$

где

$$l_1 = \frac{k_1^0}{k_0}L_1;\ l_2 = L + l_1;\ l_д = \frac{1}{2}k_1^0a^2.$$

В общем случае анализ выражения (8) удобнее проводить, перейдя к угловому спектру:

$$A_2(k_{2x}, k_{2y}, L_2) = \frac{-2i\gamma P_1R_1R_2l_д}{\pi c(R_1 - il_д)^{1/2}(R_2 - il_д)^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{[(R_2 - l_2)l_д - il_2R_2]k_{2y}^2}{4k_1^0(R_2 - il_д)} - \frac{[(R_1 - l_2)l_д - il_2R_1]\,k_{2x}^2}{4k_1^0(R_1 - il_д)} + \right. \tag{9}$$
$$\left. + ik_{2x}\beta l_2\right\} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\exp(-ik_{2x}\beta\tau)d\tau}{[(R_1 - \tau)l_д - i\tau R_1]^{1/2}[(R_2 - \tau)l_д - i\tau R_2]^{1/2}},$$

который описывает распределение интенсивности на достаточно больших расстояниях или в фокальной плоскости собирающей линзы в за-

висимости от углов наблюдения $\theta = k_{2x}/2k_0$ и $\varphi = k_{2y}/2k_0$ (ср. с дифракцией Фраунгофера).

Полная мощность второй гармоники, возбуждаемой на длине всего кристалла, дается выражением

$$P_2 = \frac{8\gamma^2 P_1^2 R_1 R_2 l_д^2}{ca^2} \int_{l_1}^{l_2} \{[(R_1 - \tau) l_д - i\tau R_1]^{1/2}[(R_2 - \tau) l_д - i\tau R_2]^{1/2}\}^{-1} \times$$

$$\times d\tau \int_{l_1}^{l_2} \{[(R_1 - \eta) l_д + i\eta R_1]^{1/2}[(R_2 - \eta) l_д + i\eta R_2]^{1/2}\}^{-1} d\eta \times \quad (10)$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\beta^2}{a^2}\left[1 + \frac{l_д^2}{R_1^2}\right](\tau - \eta)^2\right\}.$$

Перейдем теперь к подробному рассмотрению (9)—(10) при разных соотношениях параметров пучка, линзы и кристалла.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПУЧКОМ С ДИФРАКЦИОННОЙ РАСХОДИМОСТЬЮ

В рассматриваемом случае в (9) надо положить $R_1 = R_2 = \infty$, что приводит к следующему выражению для интенсивности второй гармоники:

$$|A_2(\theta, \varphi, L_2)|^2 = \frac{4\gamma^2 P_1^2 l_д^2}{\pi^2 c^2} \exp(-k_0^2 a^2 \varphi^2) F_2(\theta). \quad (11)$$

Функция распределения второй гармоники $F_2(\theta) = F_1(\theta) F_\beta(\theta)$ по углу $\theta = k_{2x}/2k_0$ определяется как угловым распределением первой гармоники:

$$F_1(\theta) = \exp(-k_0^2 a^2 \theta^2), \quad (12)$$

так и угловым распределением, обусловленным анизотропией кристалла $\beta = s_2^e \wedge k_2^e$:

$$F_\beta(\theta) = \left| \int_{l_1}^{l_2} \frac{\exp(-i2k_0\beta\theta\tau)}{\tau + il_д} d\tau \right|^2. \quad (13)$$

Таким образом, задача о генерации второй гармоники гауссовым пучком сводится к вычислению апертурной угловой функции $F_\beta(\theta)$, определяемой выражением (13). Рассмотрим несколько конкретных случаев.

Если, например [1, 4], длина кристалла меньше дифракционной длины пучка: $L \ll l_д \left(l_д = \frac{1}{2} k_1^0 a^2\right)$, то амплитуда волны основного излучения не успевает заметно измениться на длине кристалла вследствие дифракционной расходимости пучка, и в интеграле (13) знаменатель можно считать постоянной величиной, взятой при $\tau = l_0 = \sqrt{l_1 l_2}$. Тогда апертурная угловая функция имеет вид

$$F_\beta(\theta) = \frac{L^2}{l_0^2 + l_д^2} \left\{\frac{\sin(k_0\beta\theta L)}{k_0\beta\theta L}\right\}^2, \quad (14)$$

а полная мощность второй гармоники равна

$$P_2 = \frac{8\gamma^2 P_1^2 l_д^2 L L_\beta}{ca^2(l_0^2 + l_д^2)}\left[\sqrt{\pi}\Phi(\xi) + \frac{\exp(-\xi^2) - 1}{\xi}\right], \qquad (15)$$

где $\Phi(\xi)$ — интеграл ошибок, $\xi = \beta L/a$ — отношение длины кристалла L к длине когерентного взаимодействия $L_\beta = a/\beta$. Пока $L < L_\beta$, снос энергии второй гармоники незначителен. Мощность гармоники в этом случае нарастает пропорционально L^2:

$$P_2 = \frac{8\gamma^2 P_1^2 l_д^2 L^2}{ca^2(l_0^2 + l_д^2)}, \qquad (16)$$

а ее угловой спектр определяется основным излучением $F_2(\theta) = F_1(\theta)$ (так как $F_\beta(\theta) \simeq 1$). Если же длина кристалла превышает L_β, то вследствие апертурного эффекта мощность гармоники пропорциональна L:

$$P_{2,\beta} = \frac{8\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2 l_д^2 L L_\beta}{ca^2(l_0^2 + l_д^2)}, \qquad (17)$$

а угловое распределение интенсивности определяется апертурной функцией $F_2(\theta) = F_\beta(\theta)$. В обоих случаях интенсивность и мощность гармоники уменьшаются по мере удаления кристалла от лазера (l_0 увеличивается).

Выше приведенный случай $L \ll l_д$ мог быть рассмотрен и в рамках геометрической оптики на основе выражения (4). Однако этого нельзя сделать при генерации гармоники в сильно расходящемся пучке, когда амплитуда основного излучения вдоль кристалла существенно меняется. Здесь необходимо учитывать дифракционные эффекты.

При расположении кристалла произвольной длины в дальней зоне ($l_1 \gg l_д$), где основное излучение представляет собой сферическую волну с расходимостью $\alpha_p = 2/k_1^0 a$, апертурная угловая функция определяется выражением (рис. 1а)

$$F_\beta(\theta) = [\mathrm{ci}(2k_0\beta\,|\,\theta\,|\,l_2) - \mathrm{ci}(2k_0\beta\,|\,\theta\,|\,l_1)]^2 + [\mathrm{si}(2k_0\beta\,|\,\theta\,|\,l_2) - \mathrm{si}(2k_0\beta\,|\,\theta\,|\,l_1)]^2, \qquad (18)$$

которое переходит в (14) при $L \ll l_д$, $L = l_2 - l_1$. Симметрия функции свидетельствует о том, что в генерацию гармоники существенный вклад дают только одномерные взаимодействия. Главный максимум (в центре пучка $\theta = 0$) имеет логарифмический рост:

$$F_\beta(0) = (\ln l_2/l_1)^2, \qquad (19)$$

а побочные максимумы размываются с увеличением отношения l_2/l_1. Выражения для мощности с учетом (18) совпадают с (16) и (17). Подставив в них $a = 2/k_1^0\alpha_p$, получим формулы для пучка с расходимостью α_p. Например, выражение для мощности при $\frac{1}{2}k_1^0\alpha_p\beta L \gg 1$ и $l_1 \gg 2/k_1^0\alpha_p^2$

$$P_{2,\beta} = \frac{16\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2 L}{c\beta l_1(l_1 + L)k_1^0\alpha_p^3} \qquad (20)$$

показывает, что мощность гармоники падает с увеличением расходимости пучка α_p. При $L \gg l_1$ мощность достигает предельной величины:

$$P'_{2,\beta} = \frac{16\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2}{c\beta l_1 k_1^0 \alpha_p^3}. \qquad (21)$$

Рассмотрим генерацию гармоники в кристалле, передняя грань которого находится в ближней зоне $l_1 = 0$, а задняя — в дальней зоне $l_2 = L \gg l_д$ (длина кристалла больше протяженности дифракционного пятна). Для самого лазерного пучка это условие редко выполнимо, но оно имеет большое значение при телескопировании пучка или его фокусировке на переднюю грань кристалла ($a_ф = 2/k_1^0\alpha$; $l_ф = 2/k_1^0\alpha^2$). Интегрирование (13) с учетом указанных соотношений дает следующую апертурную функцию распределения (рис. 1б):

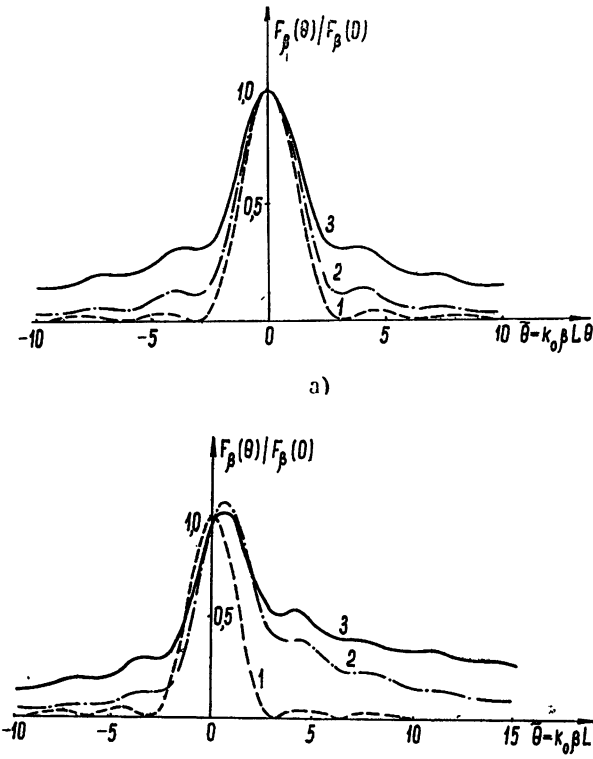


Рис. 1. Апертурная функция углового спектра второй гармоники $F_\beta(\theta)$ в зависимости от приведенного угла наблюдения $\tilde{\theta} = k_0\beta\theta L$ ($\theta = k_{2x}/2k_0$—угол наблюдения) для кристалла а) в дальней зоне основного излучения ($l_1 \gg l_д$); б) в ближней зоне ($l_1 \ll l_д$). Кривые соответствуют различным соотношениям между длиной кристалла L и дифракционной длиной пучка

$$l_д = \frac{1}{2} k_1^0 a^2:$$

$1 - L \ll l_д$; $2 - L = 10 l_д$; $3 - L = 100 l_д$.

При $\theta > 0$

$$F_\beta(\theta) = [-\exp(-2k_0\beta\theta l_д)\,\mathrm{Ei}^*(2k_0\beta\theta l_д) + \mathrm{ci}(2k_0\beta\theta L)]^2 + [\pi\exp(-2k_0\beta\theta l_д) + \mathrm{si}(2k_0\beta\theta L)]^2,$$

при $\theta < 0$

$$F_\beta(\theta) = [-\exp(-2k_0\beta|\theta|l_д)\,\mathrm{Ei}(-2k_0\beta|\theta|l_д) + \mathrm{ci}(2k_0\beta|\theta|L)]^2 + [\mathrm{si}(2k_0\beta|\theta|L)]^2. \quad (22)$$

Ассимметрия функции $F_\beta(\theta)$ означает, что во вторую гармонику существенный вклад дают двумерные взаимодействия, которые в силу дисперсионных свойств кристалла имеют синхронизм $k_1^{(0,1)} + k_1^{(0,2)} = k_2^e$ только в области положительных значений θ. Максимум интенсивности достигается в центре пучка, где $F_\beta(\theta) = (\ln L/l_д)^2 + (\pi/2)^2$.

Рассмотрим теперь выражение (10) для мощности второй гармоники в предположении, что длина кристалла больше длины когерентного взаимодействия $L \gg L_\beta$ (если $L \gg l_д$, то потребуем $l_д \gg L_\beta$). Величина мощности дается тогда формулой

$$P_{2,\beta} = \frac{8\sqrt{\pi}\,\gamma^2 P_1^2\, l_д L_\beta}{ca^2} \operatorname{arctg} \frac{Ll_д}{l_0^2 + l_д^2}, \tag{23}$$

которая при $L \ll l_д$ переходит в (17).

Пусть передняя грань кристалла расположена в ближней дифракционной зоне пучка ($l_1 \ll l_д$). Тогда при $L = 2l_д$ мощность достигает 70% от максимальной (в приближении заданного поля, без учета затухания) для заданного пучка:

$$P''_{2,\beta} = \frac{4\sqrt{\pi}\,\pi\gamma^2 P_1^2\, l_д L_\beta}{ca^2}. \tag{24}$$

Если кристалл расположен в дальней зоне излучения ($l_1 \gg l_д$), то максимально достижимая мощность уменьшается по сравнению с (24) в $l_д/l_1$ раз.

Если задана длина кристалла, мощность гармоники зависит от радиуса пучка. Существует оптимальный радиус пучка $a^2_{опт} = \sqrt{2}L/k_1^0$, $l_д = L/\sqrt{2}$ (или оптимальная степень фокусировки $\alpha^2_{опт} = 2\sqrt{2}/k_1^0 L$; $l_ф = L/\sqrt{2}$), при котором мощность достигает максимума:

$$P_{2,\beta} = \frac{8{,}1\gamma^2 P_1^2 (k_1^0 L)^{1/2}}{c\beta}. \tag{25}$$

3. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИКИ ПУЧКОМ, СФОКУСИРОВАННЫМ СФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗОЙ

Для выявления основных черт генерации гармоники сходящимся пучком ограничимся случаем фокусировки в центр кристалла (когда $l_1 = R - L/2$, $l_2 = R + L/2$), считая при этом $R \ll l_д$ (очевидно, и $L \ll l_д$) Это означает, что сходимость пучка вследствие фокусировки $\alpha = a/R$ больше его дифракционной расходимости $\alpha_д = 2/k_1^0 a$. При этом фокусное пятно пучка имеет форму цилиндра радиуса $a_ф = 2/k_1^0\alpha$ и длины $2l_ф = 4/k_1^0\alpha^2$, на границе которого интенсивность меньше максимальной в e^2 раз. По аналогии с предыдущим разделом выражение для интенсивности второй гармоники запишем в виде

$$|A_2(\theta, \varphi, L_2)|^2 = \frac{\gamma^2 P_1^2 (2l_ф)^2}{\pi^2 c^2} \exp\left\{-\left(\frac{2k_0\varphi}{k_1^0\alpha}\right)^2\right\} F_1(\theta) F_\beta(\theta), \tag{26}$$

где функция распределения, определяемая основным излучением,

$$F_1(\theta) = \exp\left\{-\left(\frac{2k_0\theta}{k_1^0\alpha}\right)^2\right\},$$

а апертурная функция распределения

$$F_\beta(\theta) = \left| \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\exp(-i2k_0\beta\theta\tau)}{\tau + il_\phi}\, d\tau \right|^2. \qquad (27)$$

Если длина кристалла меньше протяженности фокального пятна $L \ll 2l_\phi$ (длиннофокусная линза), то формулы, аналогичные (14)—(17), показывают, что вблизи фокальной плоскости пучка, где фронт волны плоский, происходят одномерные взаимодействия. В формулах (14)—(17) следует произвести замену $a = a_\phi$, $l_д = l_\phi$, $l_0 = 0$, что связано с изменением сечения пучка.

Пусть теперь длина кристалла больше размера фокусного пятна $L \gg 2l_\phi$ (короткофокусная линза). Тогда приближенное интегрирование (27) дает следующую апертурную функцию распределения (рис. 2).

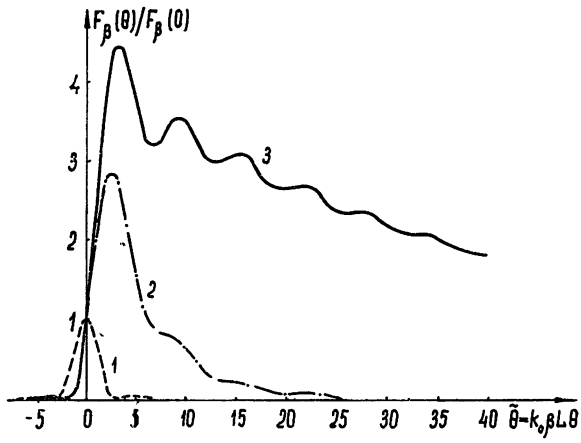


Рис 2. Апертурная функция второй гармоники $F_\beta(\theta)$ при фокусировании пучка сферической линзой в середину кристалла. Кривая 1—длиннофокусная линза $L \ll 2l_\phi$. ($l_\phi = 2/k_1^0\alpha^2$ — длина фокального пятна); кривая 2—короткофокусная линза $L = 20l_\phi$; кривая 3—то же при $L = 200l_\phi$.

$$F_\beta(\theta) = \left[2\mathrm{si}\,(k_0\beta\,|\,\theta\,|\,L) + \begin{cases} 2\pi \exp\left(-\dfrac{4k_0\beta\theta}{k_1^0\alpha^2}\right) & \text{при } \theta > 0 \\ 0 & \text{при } \theta < 0 \end{cases} \right]^2. \qquad (28)$$

Если $\frac{1}{2} k_1^0\alpha\beta L \ll 1$ или $L \ll a_\phi/\beta$ (для чего необходимо $\beta \ll \alpha$), то функцию $F_\beta(\theta)$ можно считать постоянной по сравнению с $F_1(\theta)$. В этом случае анизотропия среды не сказывается ($F_2(\theta) = F_1(\theta)$) и мощность гармоники

$$P_2 = 8\pi^2\gamma^2 P_1^2/c\alpha^2. \qquad (29)$$

Если $L \gg a_\phi/\beta$, то угловой спектр второй гармоники определяется апертурной функцией $F_2(\theta) = F_\beta(\theta)$. В области отрицательных θ, где двумерные взаимодействия невозможны, распределение интенсивности, как и следовало ожидать, носит характер одномерных взаимодействий (ср. с (14)). Для положительных θ существенную роль играют дву-

мерные взаимодействия. Здесь при больших значениях приведенного угла $\tilde{\theta} = k_0\beta\theta L$ интенсивность уменьшается как $\exp\{-(2k_0\theta/k_1^0\alpha)^2 - 8k_0\beta\theta/k_1^0\alpha^2\}$. В отличие от дебаевской волны [2], имеющей ограниченный набор плоских волн $|k_{1x}/k_1^0| < \alpha_0$, для гауссового пучка интенсивность уменьшается плавно, причем наличие анизотропии приводит к более быстрому уменьшению интенсивности. Эффективная ширина углового спектра излучения второй гармоники в области $\theta > 0$ определяется из условия уменьшения интенсивности в e^2 раз и равна

$$\theta_0 = \frac{k_1^0}{k_0}\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{2}\alpha^2}\right). \tag{30}$$

Мощность второй гармоники сфокусированного пучка ($L \gg a_\Phi/\beta$, $L \gg 2l_\Phi$)

$$P_{2,\beta} = \frac{16\pi\gamma^2 P_1^2}{c\alpha^2}\left[1 - \Phi\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)\right]\exp\left(\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right) \tag{31}$$

увеличивается при уменьшении угла схождения пучка (когда фокусное пятно стремится занять всю длину кристалла).

Чтобы проанализировать более детально этот вопрос, обратимся к выражению (10) для полной мощности гармоники. При условии $\beta \gg \alpha$, $L \gg a_\Phi/\beta$, когда существенную роль играет апертурный эффект, можно получить приближенную формулу:

$$P_{2,\beta} = \frac{16\sqrt{\pi}\,\gamma^2 P_1^2}{c\beta\alpha}\operatorname{arctg}(L/2l_\Phi), \tag{32}$$

которая при $L \gg 2l_\Phi$, $\beta \gg \alpha$ переходит в (31), а при $L \ll 2l_\Phi$ — в (17) (с учетом подстановки $a = a_\Phi$, $l_0 = 0$).

Если задана длина кристалла, то существует оптимальное условие фокусировки $\alpha^2_{\text{опт}} = 4\sqrt{2}/k_1^0 L$; $l_\Phi = L/2\sqrt{2}$, при котором мощность достигает максимальной величины:

$$P_{2,\beta} \simeq \frac{11{,}4\gamma^2 P_1^2 (k_1^0 L)^{1/2}}{c\beta}. \tag{33}$$

Сравнивая (33) с (25), легко показать, что максимальная мощность при фокусировке пучка в центр кристалла примерно в полтора, а $\alpha^2_{\text{опт}}$ — в два раза больше, чем при фокусировке на его переднюю грань.

4. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ ФОКУСИРОВАНИИ ПУЧКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛИНЗОЙ

Рассмотрим генерацию гармоники цилиндрическим сходящимся пучком при двух ориентациях цилиндрической линзы: $R_1 = \infty$ и $R_2 = \infty$. Как и в случае сферической линзы, будем полагать, что фокусировка пучка происходит в середину кристалла ($l_1 = R - L/2$, $l_2 = R + L/2$) линзой с фокусным расстоянием $R \ll l_д$. Так как $L/2 \leqslant R$, то последнее неравенство дает $L \ll 2l_д$, т. е. длина кристалла много меньше дифракционной длины пучка. Это означает, что амплитуда основного излучения меняется на длине кристалла только вследствие фокусировки. Используя указанные соотношения, из (9) находим следующие выражения для интенсивности второй гармоники:

$$|A_2(\theta, \varphi, L_2)|^2 = \frac{4\gamma^2 P_1^2 l_д l_\Phi}{\pi^2 c^2}\exp\left[-(k_0 a\varphi)^2 - \left(\frac{2k_0\theta}{k_1^0\alpha}\right)^2\right]F_\beta(\theta) \tag{34}$$

при фокусировке по углу θ в плоскости z_0x_0, т. е. $R_2 = \infty$,

$$|A_2(\theta, \varphi, L_2)|^2 = \frac{4\gamma^2 P_1^2 l_д l_ф}{\pi^2 c^2} \exp\left[-\left(\frac{2k_0\varphi}{k_1^0\alpha}\right)^2 - (k_0 a\theta)^2\right] F_\beta(\theta) \qquad (35)$$

при фокусировке по углу φ в плоскости z_0y_0, т. е. $R_1 = \infty$. Апертурная функция цилиндрического сфокусированного пучка для длиннофокусной линзы $L \ll 2l_ф$ равна (ср. с (14))

$$F_\beta(\theta) = \frac{L^2}{l_д l_ф} [\sin k_0\beta\theta L/k_0\beta\theta L]^2, \qquad (36)$$

а для короткофокусной линзы $L \gg 2l_ф$ (см. рис. 3)—

$$F_\beta(\theta) = \frac{\pi L}{2\eta l_ф}\left[C(\eta) + \operatorname{sign}\theta\, S(\eta) + \begin{cases}\left[\exp\left(-\frac{4k_0\beta\theta}{k_1^0\alpha^2}\right) - 1\right], & \theta > 0 \\ 0, & \theta < 0\end{cases}\right]^2, \qquad (37)$$

где $C(\eta)$ и $S(\eta)$— интегралы Френеля, $\eta = (k_0\beta|\theta|L)^{1/2}$.

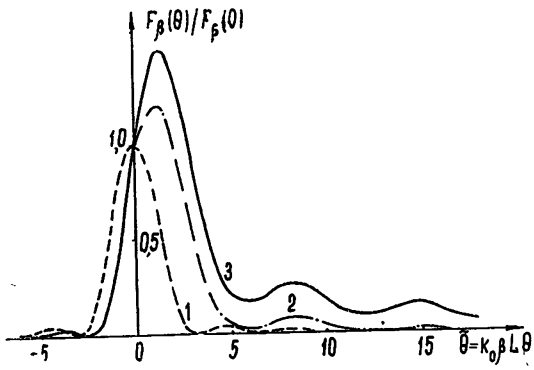


Рис. 3. Апертурная функция второй гармоники $F_\beta(\theta)$ для пучка, сфокусированного в середину кристалла цилиндрической линзой. Обозначения те же, что и на рис. 2.

Анализ формул (34)—(37) показывает, что анизотропия среды сказывается на фокусировке по углу θ в плоскости z_0x_0 для $L \gg a_ф/\beta$ и на фокусировке по углу φ в плоскости z_0y_0 для $L \gg a/\beta$. Если при этом $L \ll 2l_ф$, то существенный вклад в генерацию гармоники дают одномерные взаимодействия (36) и угловой спектр симметричен; если же $L \gg 2l_ф$, то проявляются двумерные взаимодействия и угловой спектр несимметричен по углу θ (37). Эффективный угловой раствор в области $\theta > 0$, как и для сферической линзы, определяется формулой (30). Следует отметить одну интересную особенность: если при генерации гармоники без линзы наблюдается апертурный эффект $L \gg a/\beta$ или $L \gg 1/k_1^0\alpha_p\beta$, то при фокусировании этого пучка короткофокусной линзой угловой спектр остается несимметричным (37) при любой ориентации линзы.

Выражение для мощности гармоники при апертурном эффекте, полученное из (10), имеет следующий вид:

$$P_{2,\beta}^{(\theta)} = \frac{16\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2 a_ф}{c\beta a\alpha} \ln\{L/2l_ф + [(L/2l_ф)^2 + 1)^{1/2}\} \qquad (38)$$

при фокусировке в плоскости z_0x_0 и условии $\beta \gg \alpha$, $L \gg a_ф/\beta$,

$$P_{2,\beta}^{(\varphi)} = \frac{16\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2}{c\beta\alpha} \ln\{L/2l_\phi + [(L/2l_\phi)^2 + 1]^{1/2}\} \quad (39)$$

при фокусировке в плоскости z_0y_0 и условии $L \gg a/\beta$. Очевидно, что более эффективным является последний способ ориентации линзы $P_{2,\beta}^{(\varphi)}/P_{2,\beta}^{(\theta)} = a/a_\phi$, так как $a \gg a_\phi$. Отметим, что логарифмический рост мощности ограничен условием $L \ll l_д$. При достаточно больших кристаллах $L \gg l_д$, фокусировка очень слабая ($R \gg l_д$), пучок становится дифракционным и для него справедливы соотношения раздела 2.

Для длиннофокусной линзы формулы (38)—(39) упрощаются; при фокусировке по углу θ мощность не зависит от угла схождения пучка:

$$P_{2,\beta}^{(\theta)} = \frac{8\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2 L}{c\beta a} \quad (L \ll 2l_\phi), \quad (40)$$

а при фокусировке по углу φ мощность увеличивается с увеличением α (или с уменьшением $a_\phi = 2/k_1^0\alpha$):

$$P_{2,\beta}^{(\varphi)} = \frac{8\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2 L}{c\beta a_\phi} \quad (L \ll 2l_\phi). \quad (41)$$

При генерации гармоники с помощью короткофокусной линзы величина мощности определяется формулами ($L \gg 2l_\phi$; $L \ll l_д$)

$$P_{2,\beta}^{(\theta)} = \frac{16\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2 l_\phi}{c\beta a} \ln L/l_\phi; \quad (42)$$

$$P_{2,\beta}^{(\varphi)} = \frac{16\sqrt{\pi}\gamma^2 P_1^2 l_\phi}{c\beta a_\phi} \ln L/l_\phi. \quad (43)$$

Анализ формул (38)—(39) для кристалла заданной длины L показывает, что при фокусировке по углу θ максимальная мощность достигается, если $L \ll 2l_\phi$ (см. (40)), а при фокусировке по углу φ — если $\alpha_{опт}^2 = 14/k_1^0 L$, $l_\phi = L/7$. Эта мощность равна

$$P_{2,\beta}^{(\varphi)} \simeq \frac{14\gamma^2 P_1^2 (k_1^0 L)^{1/2}}{c\beta} \quad (44)$$

и практически совпадает с оптимальной мощностью для сферической линзы (33) при наличии апертурного эффекта.

Рассмотрим теперь генерацию гармоники, когда апертурный эффект незначителен и угловое распределение гармоники определяется основным излучением $F_2(\theta) = F_1(\theta)$ (т. е. $L \ll a/\beta$, $L \ll a_\phi/\beta$). После соответствующего интегрирования (10) находим, что мощность гармоники не зависит от ориентации линзы:

$$P_2 = \frac{64\gamma^2 P_1^2 l_\phi}{ca\alpha} \{[1 + (L/2l_\phi)^2]^{1/2} - 1\}. \quad (45)$$

Максимальная мощность в отсутствие апертурного эффекта достигается при $\alpha_{опт}^2 = 7/k_1^0 L$, $l_\phi = L/3{,}5$ и равна

$$P_2 = \frac{7\gamma^2 P_1^2 L (k_1^0 L)^{1/2}}{ca}. \quad (46)$$

Практический интерес представляет случай $L \ll a/\beta = L_\beta$, $L \gg a_\phi/\beta$, когда анизотропия среды не сказывается на фокусировке цилиндрической линзой по углу φ, но при фокусировке сферической линзой апертурный эффект значителен. Сравнение формулы (46) с (33) показывает, что более выгодно фокусировать сферической линзой, причем выигрыш равен отношению когерентной длины пучка к длине кристалла L_β/L. Если же $L \gg L_\beta$ и $L \gg a_\phi/\beta$, то оптимальные мощности гармоники практически одинаковы.

В работе [2] рассмотрена генерация гармоники цилиндрической дебаевской волной. Сравнение формул этого раздела с аналогичными выражениями [2] покызывает почти полное их соответствие (с учетом эффективного углового раствора основного тона $\alpha = a/R$ и второй гармоники θ_0 (30)). Это дает основание предположить, что основные результаты, полученные в данной работе, справедливы и для дебаевской волны.

Таким образом, квазиоптическое рассмотрение позволяет выяснить существенные особенности генерации второй гармоники как пучками с дифракционной расходимостью, так и при фокусировании пучков сферическими и цилиндрическими линзами. Хотя для каждого из указанных случаев формулы для апертурной функции и мощности имеют свои особенности, можно указать общие закономерности генерации второй гармоники пучками конечной апертуры.

Если длина кристалла меньше длины когерентного взаимодействия, то картина поля гармоники определяется основным излучением. Если же длина кристалла больше указанной длины, то угловой спектр гармоники определяется апертурной функцией.

Апертурная функция углового спектра гармоники симметрична, если кристалл занимает малую часть дифракционной области пучка или расположен вне этой области. Если же внутри кристалла находится вся дифракционная область пучка (или фокальное пятно), то апертурная функция становится несимметричной (она уширяется в области векторного синхронизма).

При заданной длине кристалла максимальная мощность достигается, когда дифракционное пятно пучка занимает приблизительно всю длину кристалла ($l_\phi = L/3$).

Качественные закономерности, характерные для перехода от короткофокусной линзы к длиннофокусной, хорошо согласуются с экспериментальными данными [6, 7].

Автор признателен Р. В. Хохлову за весьма полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. D. Boyd, A. Askin, J. M. Dziedzic, D. A. Kleinman, Phys. Rev. **137**, A 1305 (1965).
2. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, **50**, 474 (1966).
3. Б. Я. Зельдович, ЖЭТФ, **50**, 680 (1966).
4. G. E. Francois, A. E. Siegman, Phys. Rev., **139**, A4 (1965).
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
6. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, Н. К. Кулакова, ЖЭТФ, **48**, 1545 (1965).
7. R. Miller, A. Savage, Phys. Rev., **128**, 2175 (1962).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
9 ноября 1965 г.

ON SECOND-HARMONIC GENERATION BY FINITE APERTURE BEAMS

A. P. Soukhorukov

The second harmonic generation by limited beams are considered in a quasi-optics approximation (on the basis of parabolic equations). With such an approach the anisotropic properties of a nonlinear crystal and diffraction losses are succeeded in taking into account in the first approximation. The expressions for power and angular harmonic spectrum have been obtained and examined for three cases: for Gauss beam with a diffraction divergence, then when focusing the beam by spheric and cylindrical lenses. The theory is in a satisfactory agreement with the experiment.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 537.533.79

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ

Б. А. Ломакин, Г. Ф. Филимонов

Рассмотрено влияние нелинейных и релятивистских эффектов на излучение периодической последовательности электронных сгустков. Получено аналитическое выражение для КПД как функции параметров системы и выполнены некоторые численные оценки.

1. В настоящей работе рассмотрено влияние нелинейных и релятивистских эффектов на излучение электронных потоков, движущихся в замедляющих линиях . В целях получения аналитических формул, позволяющих достичь наибольшей наглядности при интерпретации результатов, вычисления производились для упрощенной модели, в которой а) переменный ток задается в виде бесконечной последовательности бесконечно тонких пакетов заряженных частиц, поступающих на вход пространства взаимодействия с равными скоростями v_0 через равные промежутки времени T; б) рассматривается взаимодействие тока только с одной бегущей волной.

Задачи, близкие к поставленной, в литературе уже рассматривались. Так, в [1] сформулированная задача решалась в нерелятивистском приближении, а в [2] производился учет релятивистских эффектов в системе, в которой на вход поступал однородный во времени поток электронов и модулировавший его внешний ВЧ сигнал. Основной вывод работы [2] заключается в том, что КПД системы η (т. е. коэффициент преобразования кинетической энергии электронов в энергию ВЧ поля) и оптимальная длина взаимодействия ζ_m растут вместе с увеличением v_0. При этом ζ_m увеличивается до весьма больших значений, которые вряд ли могут быть реально осуществлены.

В связи с этими результатами представляет интерес рассмотреть, как увеличение скорости до релятивистских значений влияет на процесс взаимодействия с полем волны уже сильно промодулированного потока частиц. Если окажется, что здесь ζ_m слабее зависит от v_0, то это будет означать, что основное увеличение ζ_m, обнаруженное в [2], связано с процессом начальной модуляции потока релятивистских частиц и что эффективность именно этой части процесса взаимодействия тока с полем быстрее всего падает с ростом v_0. Рассмотрение этого вопроса и является целью настоящей работы наряду с выяснением особенностей механизма ограничения мощности излучения в релятивистской ЛБВ, которые, согласно [2], оказались более сложными, чем в нерелятивистской системе, и наглядно объяснить которые с помощью численных методов расчета авторы [2] не смогли.

2. Исходные уравнения задачи о взаимодействии периодической последовательности идеально сфокусированных релятивистских электронных сгустков с полем синхронно движущейся с ними волны могут

быть написаны в форме, аналогичной уравнениям (1)—(3) работы [1]:

$$-\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^3\left[1-\left(c\frac{\partial t}{\partial z}\right)^{-2}\right]^{3/2}\mathrm{Re}\,\frac{e}{m_0}E(z)\,e^{-i\omega t}, \tag{1}$$

$$\frac{dE(z)}{dz}-ih_0E(z)=-R_0 j, \tag{2}$$

$$j=\int_0^T\frac{dt_0}{T}\,j_0(t_0)\,e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Здесь $E(z)$ — комплексная амплитуда поля, действующая на электроны, h_0 — волновое число медленной волны, R_0 — коэффициент взаимодействия, T — период, $\omega=2\pi/T$ — частота, t_0 — время влета электрона в систему, z, $t=t(z,\,t_0)$ — текущая координата электрона и время, $j_0(t_0)$ — электронный ток на входе прибора. В случае идеальной фокусировки ток $j_0(t_0)$ пропорционален δ-функции:

$$j_0(t_0)=j_0\delta\,(t_0/T). \tag{4}$$

Система (1)—(4) отличается от уравнений (1)—(4) работы [1] только релятивистским фактором в уравнении движения (1).

Переходя в (1)—(4) к безразмерным величинам ζ, w, F, ξ_0, β_0, ε:

$$\omega t=\omega t_0+h_0 z+w(\zeta),\quad z=\frac{v_0\zeta}{\varepsilon\omega},\quad h_0=\frac{\omega}{v_0}(1+\varepsilon\xi_0),$$
$$\varepsilon^3=\frac{eR_0 j_0}{2\omega^2 m_0},\quad E=\frac{m_0}{e}v_0\,\omega\varepsilon^2 F(\zeta)\,e^{ih_0 z},\quad \beta_0=\frac{v_0}{c}, \tag{5}$$

смысл которых очевиден (ε — параметр взаимодействия, являющийся в данной задаче параметром малости), получаем систему безразмерных уравнений

$$-w''(\zeta)=\left[(1+\varepsilon\xi_0+\varepsilon\,w'(\zeta))^2-\beta_0^2\right]^{3/2}\mathrm{Re}\,F(\zeta)\,e^{-iw(\zeta)},\quad F'(\zeta)=-2e^{iw(\zeta)}. \tag{6}$$

Штрих в (6) означает дифференцирование по ζ.

3. Найдем решение уравнений (6). Введя амплитуду $A(\zeta)$ и фазу $\varphi(\zeta)$ поля согласно

$$F(\zeta)=A(\zeta)\,e^{i\varphi(\zeta)}$$

и вычислив первые интегралы уравнений (6), находим

$$1+\varepsilon\xi_0+\varepsilon w'=\frac{\beta_0^3(d_1-\eta_1)}{\left[\beta_0^4(d_1-\eta_1)^2-4\right]^{1/2}},$$
$$\varphi' A=\pm\sqrt{4-(A')^2}, \tag{7}$$
$$\varepsilon\varphi'\eta_1=\frac{1+\varepsilon\xi_0}{2}(d_1-\eta_1)-\left[\frac{\beta_0^2}{4}(d_1-\eta_1)^2-\frac{1}{\beta_0^2}\right]^{1/2}+d_2,$$

где

$$d_1=\frac{2}{\beta_0^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}+\varepsilon\frac{A_0^2}{2},$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{1+\varepsilon\xi_0}{\beta_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \varepsilon^2 A_0 \sin\varphi_0,$$

$$\eta_1 = \eta_1(\zeta) = \varepsilon\,\frac{A^2(\zeta)}{2}.$$

В (7) использованы следующие граничные условия:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = -\xi_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad A(0) = A_0. \tag{8}$$

4. Применим выражения (7)—(8) к анализу случая $A_0 = 0$, который соответствует генерации ВЧ поля заданным на входе системы ($\zeta = 0$) переменным током. Определив здесь КПД системы как отношение мощности ВЧ поля на выходе системы к мощности электронного потока на входе системы:

$$\eta(\zeta) = \frac{P_{\text{вых}}(\zeta)}{j_0 V_0}, \tag{9}$$

с помощью (1)—(3) находим, что

$$\eta(\zeta) = \frac{1-\beta_0^2+\sqrt{1-\beta_0^2}}{2}\,\eta_1(\zeta). \tag{10}$$

В (9) j_0 означает среднее значение тока частиц за период T, а V_0 — их эффективный потенциал, определяемый как

$$eV_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - m_0c^2. \tag{11}$$

Выражение для максимального значения $\eta(\zeta)$ ($\eta_m = \max\eta(\zeta)$) можно получить непосредственно из (7), положив там $A'(\zeta) = \eta'(\zeta) = 0$. Тогда, исключив из (7) φ', находим алгебраическое уравнение для η_m:

$$\sqrt{\frac{2\varepsilon^3}{\eta_{1m}}}\,\operatorname{sgn}\varphi' = \frac{1}{\eta_{1m}\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{1}{2\beta_0\eta_{1m}}\left[\beta_0^4(d_1-\eta_{1m})^2 - 4\right]^{1/2} - \frac{1+\varepsilon\xi_0}{2}. \tag{12}$$

Подстановкой $\eta_{1m} = x^2$ оно преобразуется в кубическое уравнение относительно x:

$$\frac{1}{4}\left[(1+\varepsilon\xi_0)^2 - \beta_0^2\right]\sqrt{1-\beta_0^2}\,x^3 + \varepsilon\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1-\beta_0^2}(1+\varepsilon\xi_0)\operatorname{sgn}\varphi'\,x^2 + \\ + \left(2\varepsilon^3\sqrt{1-\beta_0^2} - \varepsilon\xi_0\right)x - 2\varepsilon\sqrt{2\varepsilon}\operatorname{sgn}\varphi' = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) определяет η_m как функцию параметров β_0, ξ_0 и ε. В [1] было показано, что при $\beta_0=0$ и $\varepsilon=\text{const}$ функция $\eta_m=\eta_m(\xi_0)$ достигает максимума при значении ξ_0, соответствующем совпадению двух корней уравнения (13). Можно показать, что и в случае $\beta_0\neq 0$ это правило сохраняется. Действительно, налагая на коэффициенты уравнения (13) условие равенства двух корней, найдем, что оно приводит к следующему выражению для ξ_0:

$$\xi_0 \equiv \xi_{\text{опт}}(\varepsilon, \beta_0) \simeq \frac{3}{2^{1/3}}\sqrt{1-\beta_0^2} + 2^{1/3}\varepsilon + \left(\frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{2} - \frac{2}{3\sqrt{1-\beta_0^2}}\right)\varepsilon^2. \tag{14}$$

Решая теперь уравнение (12), легко убедиться, что при изменении ξ_0 от $\pm\infty$ до $\xi_{опт}$ КПД η_m действительно монотонно растет. Рис. 1 иллюстрирует этот факт. Здесь видно, в частности, что наибольших значений η_m достигает при ξ_0, лежащем в интервале $0 \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_{опт}$. Эти значения ξ_0 и следует считать оптимальной областью расстроек скоростей электронов и волны. Рис. 1 показывает, что с ростом β_0 (т. е. с ростом начальной скорости электронов v_0) область оптимальных расстроек скоростей сужается. Этот факт находится в согласии с формулой (14) и служит объяснением хода кривых рис. 2 (а также аналогичных результатов работы [2]).

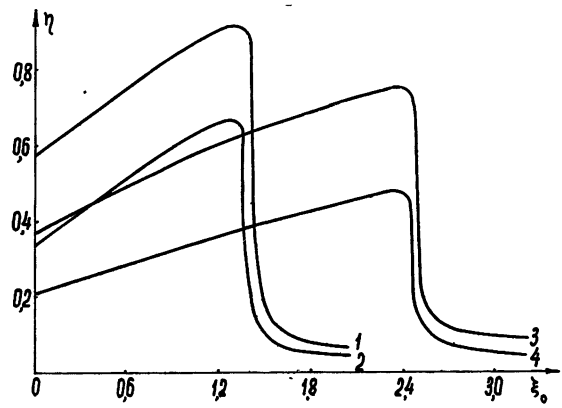


Рис. 1. Зависимость электронного КПД η_m от параметра начальной расстройки скоростей ξ_0:
1— $\beta_0=0{,}9$; $\varepsilon=0{,}1$; 2— $\beta_0=0{,}9$; $\varepsilon=0{,}05$; 3— $\beta_0=0$; $\varepsilon=0{,}1$; 4— $\beta_0=0$; $\varepsilon=0{,}05$.

Характерной особенностью кривых рис. 2 является их экстремальный характер. Интересно отметить, что в нерелятивистском случае (см. [1]) величина η_m зависит только от ε и ξ_0. Поэтому кривые, описывающие зависимость η_m от v_0 в нерелятивистском приближении, имеют вид прямых, параллельных оси абсцисс. Появление максимумов у кривых рис. 2 является следствием релятивистских эффектов.

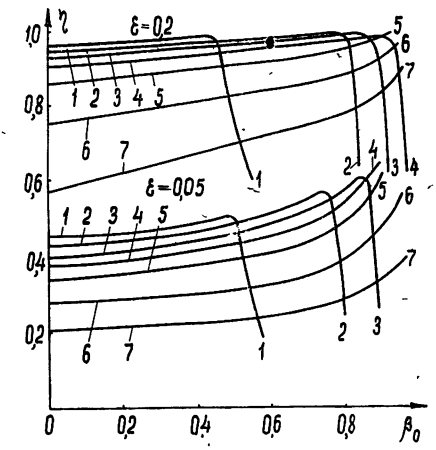


Рис. 2. Зависимость электронного КПД η_m от β_0 при $\varepsilon=\text{const}$ и $\xi_0=\text{const}$:
1— $\xi_0=2{,}0$; 2— $\xi_0=1{,}75$; 3— $\xi_0=1{,}5$; 4— $\xi_0=1{,}25$; 5— $\xi_0=1{,}0$; 6— $\xi_0=0{,}5$; 7— $\xi_0=0$.

Постараемся объяснить существование этих максимумов с помощью рис. 1 и формулы (14). Поскольку величина ε и ξ_0 вдоль каждой кривой рис. 2 остается постоянной, то вдоль каждой кривой меняется соотношение между ξ_0 и $\xi_{опт}$ (ε, β_0). Если в области малых β_0 имеет место

неравенство $\xi_0 < \xi_{опт}(\varepsilon, \beta_0)$ и функция $\xi_{опт}(\varepsilon, \beta_0)$ с ростом β_0 приближается к фиксированному значению ξ_0, то в области больших β_0 имеет место неравенство $\xi_0 > \xi_{опт}(\varepsilon, \beta_0)$ и функция $\xi_{опт}(\varepsilon, \beta_0)$ с ростом β_0 удаляется от ξ_0. При этом система оказывается вне области синхронизма (т. е. вне области «оптимальной расстройки скоростей»). В соответствии с рис. 1, при приближении ξ_0 к $\xi_{опт}(\varepsilon, \beta_0)$ оптимальный КПД η_m должен расти, а при удалении — падать. Этот факт и приводит к появлению максимумов на кривых рис. 2. Можно показать, что их положение в точности соответствует условию $\xi_0 = \xi_{опт}$.

Таким образом, ограничение мощности излучения и соответствующее этому падение η_m в области больших β_0 (см. рис. 2) связано с выходом системы за пределы области синхронизма.

Известный интерес представляет также выяснение вопроса о физических причинах, приводящих к увеличению КПД системы с ростом v_0 и, в частности, к повышению максимумов. В работе [1] отмечено, что основной причиной, ограничивающей рост мощности излучения в рассматриваемой системе, является нарушение синхронизации в движении волны и частиц, порождаемое потерей энергии частицами. При этом максимум излучения соответствует «отставанию» фазы тока от фазы волны на 90°.

Увеличение скоростей электронов до релятивистских значений приводит, как известно, к тому, что одинаковая потеря энергии в релятивистском случае соответствует меньшему изменению скоростей частиц, чем в нерелятивистском. По-видимому, именно этот эффект вызывает увеличение оптимальной длины взаимодействия ζ_m и соответствующее увеличение излученной мощности (что и отражается на увеличении КПД системы).

Из приведенных объяснений следует, что наибольшее из возможных в данной системе значений η_m соответствует наибольшему допустимому условиями синхронизма значению β_0. Данный вывод согласуется со всеми особенностями результатов, представленных на рис. 2.

Помимо изложенного, из рис. 2 видно, что для продвижения в сторону больших β_0 параметр ξ_0 должен быть взят достаточно малым. При этом для $\varepsilon = 0{,}05$ оптимальные значения η_m могут примерно в 1,5 раза превышать значения η_m, получающиеся в нерелятивистском случае ($\beta_0 = 0$). Вместе с тем рис. 2 показывает, что с ростом ε «релятивистское» увеличение η_m падает. По-видимому, это связано с тем, что с ростом ε происходит общее увеличение η_m, и все способы его дальнейшего повышения теряют свою эффективность.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии v_0 на величину оптимальной длины взаимодействия ζ_m, на которой $\eta(\zeta)$ достигает своего максимума η_m. Ее можно вычислить с помощью первых интегралов (7), выразив из них η_1' и записав решение уравнений (6) в виде

$$\zeta_m = \int_0^{\eta_{1m}} d\eta_1 \left\{ 8\varepsilon\eta_1 - 4\eta_1^2 \Big/ \frac{1}{\varepsilon\eta_1 \sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{1}{\varepsilon\eta_1} \left[\frac{\beta_0^2}{4} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\frac{2}{\beta_0^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \eta_1 \right)^2 - \frac{1}{\beta_0^2} \right]^{1/2} - \frac{1+\varepsilon\xi_0}{2\varepsilon} \Big)^2 \right\}^{-1/2}. \qquad (15)$$

Подстановкой

$$\left[\frac{\beta_0^2}{4} \left(\frac{2}{\beta_0^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \eta_1 \right)^2 - \frac{1}{\beta_0^2} \right]^{1/2} = \frac{\beta_0}{2} \eta_1 + u \qquad (16)$$

интеграл (15) сводится к полным эллиптическим интегралам Лежандра I и III родов. Их вычисление проводится по общим правилам. Результаты расчетов представлены на рис. 3. По оси ординат здесь отложено ζ_m, а на оси абсцисс — параметр начальной скорости β_0. Параметр расстройки скоростей ξ_0 для каждого ε и β_0 выбирается оптимальным $\xi_0 = \xi_{опт}(\varepsilon, \beta_0)$.

Из рис. 3 видно (см. сплошные линии), что с увеличением β_0 и уменьшением ε монотонно растет ζ_m, оставаясь, однако, в пределах $\zeta_m < 6 \div 7$. При изменении β_0 от 0 до 0,9 длина ζ_m увеличивается менее чем в два раза. Пунктирная кривая рис. 3 изображает аналогичные результаты работы [2], полученные для $\varepsilon = 0{,}3$, $\xi_0 = 0$. Очевидно, что рассмотренный в [2] вариант релятивистской ЛБВ даже при $\varepsilon = 0{,}3$ приводит к нереально большим значениям ζ_m. При этом относительное увеличение ζ_m, сопровождающее рост β_0, здесь оказывается почти в 2 раза большим, чем в рассмотренном выше случае. Отсюда ясно, что основное увеличение оптимальной длины взаимодействия, полученное в [2], действительно обусловлено увеличением длины участка начальной модуляции потока частиц.

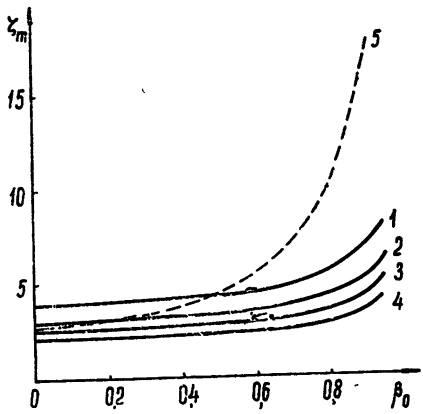


Рис. 3. Зависимость оптимальной длины замедляющей линии ζ_m от β_0:
1— $\varepsilon=0{,}05$; 2— $\varepsilon=0{,}1$; 3— $\varepsilon=0{,}15$; 4— $\varepsilon=0{,}2$—для всех сплошных линий $\xi_0=\xi_{опт}$; 5—$\varepsilon=0{,}3$, $\xi_0=0$.

5. Среди нелинейных эффектов, которые могут иметь место в данной задаче, интересно отметить случай «жесткого» возбуждения системы при $A_0 \neq 0$. Как следует из свойств кубических уравнений, при $\xi_0 > \xi_{опт}$ уравнение (13) для η_m имеет три действительных корня, из которых на рис. 1 взят только наименьший. Если начальный сигнал в области $\xi_0 > \xi_{опт}$ приведет рассматриваемую систему в состояние, в котором амплитуда волны $A(\zeta)$ будет колебаться не между нулем и меньшим из трех корней уравнений (13), как это имеет место в случае $A_0 = 0$, а между двумя другими корнями уравнения (13), то степень преобразования энергии частиц в энергию поля и КПД системы могут, вообще говоря, возрасти. Это обстоятельство и определяет интерес к данной задаче.

Для упрощения расчетов положим $\beta_0=0$. Так как одни и те же экстремальные значения $A(\zeta)$ (а, следовательно, и $\eta(\zeta)$) могут соответствовать разным A_0 и φ_0, целесообразно выбрать φ_0 так, чтобы A_0 было минимумом функции $A(\zeta)$. Очевидно, этому соответствует значение $\varphi_0=\pi/2$, которое и будет использовано ниже. В рассматриваемом случае КПД системы $\nu(\zeta)$ не совпадает с $\eta(\zeta)$ (см. (10)), а равен

$$\nu(\zeta) = \frac{\eta_1(\zeta)}{1+\eta_1(0)}. \qquad (17)$$

Как следует из уравнений (7) при фиксированном φ_0 максимальное значение $\nu(\zeta)$ является функцией трех параметров ε, ξ_0, A_0. Полное исследование этой функции представляет значительные трудности. Поэтому ограничимся рассмотрением максимальных значений ν_m, получаю-

щихся при оптимальном выборе параметров ξ_0 и A_0. Налагая на $\nu_m(\varepsilon, \xi_0, A_0)$ условия

$$d\nu_m/dA_0 = 0, \quad d\nu_m/d\xi_0 = 0, \tag{18}$$

в дополнение к (7) получаем два равенства для определения оптимальных значений ξ_0 и A_0:

$$1-\nu = \frac{2\sqrt{\eta_1(0)} - (1+\varepsilon\xi_0)\sqrt{\eta_1(0)} - 2\sqrt{2\varepsilon^3}}{(1+\varepsilon\xi_0)\sqrt{\eta_1(0)}\,(1+\eta_1(0)}, \tag{19}$$

$$1+\varepsilon\xi_0 = \frac{2\eta_1(0)\sqrt{\eta_1(0)} - 3\eta_1(0)\sqrt{2\varepsilon^3} - \sqrt{2\varepsilon^3}}{\eta_1(0)\sqrt{\eta_1(0)}}. \tag{20}$$

Результаты совместного решения (19), (20) и (7) представлены в таблице 1. Предпоследний ее столбец соответствует коэффициенту преобразования энергии электронов в энергию поля. Он связан с ν_m соотношением

$$\eta_m = \nu_m(1+\eta_1(0)) - \eta_1(0). \tag{21}$$

Таблица 1

A_0	$\eta_0(0)$	ξ_0	ε_0	ν_m	η_m	η_m при $A_0=0$
61,1	18,7	100	0,01	0,999991	0,9998	0,127
10,7	2,87	19,4	0,05	0,9984	0,9938	0,49
3,16	0,494	6,92	0,099	0,925	0,888	0,76

В последнем столбце приведены значения η_m для рассмотренного выше случая «мягкого возбуждения» в котором $A_0 = 0$. Данные таблицы 1 показывают, что путем введения внешнего поля можно повысить предельный КПД системы. При этом коэффициент преобразования энергии η_m становится величиной, весьма близкой к единице. Однако данный случай соответствует $v_\phi \simeq v_0/2$, и требует достаточно больших начальных сигналов A_0, энергия которых может во много раз превышать энергию потока частиц. Поэтому для целей усиления сигналов СВЧ данные режимы, по-видимому, интереса не представляют. Некоторым исключением является случай $\varepsilon \simeq 0{,}1$, который приводит к $\eta_1(0) < 1$. Однако коэффициент преобразования здесь довольно велик и при $A_0 = 0$; поэтому выигрыш в приращении КПД здесь получается небольшим.

При $\varepsilon > 0{,}1$ функция $\nu_m(\varepsilon, A_0, \xi_0)$ экстремумов по A_0 не имеет. Большая величина η_m, получающаяся здесь уже при «мягком» возбуждении, делает рассмотрение этого случая мало интересным.

6. Подводя итоги полученным выше результатам, можно сказать следующее.

Повышение скоростей частиц до релятивистских значений при малых ε ($\varepsilon \lesssim 0{,}1$) и при надлежащем выборе параметров системы приводит к повышению как выходной мощности излучения ($P(\zeta) \sim V_0$), так и КПД процесса. При этом увеличение β_0 может повысить η_m до 1,5 раза.

При $\varepsilon > 0{,}1$ увеличение скоростей вызывает в основном рост выходной мощности излучения, а не КПД системы, который в зависимости от β_0 меняется незначительно.

Интересно отметить, что для определенных значений параметров ε, ξ_0, β_0 величина η_m близка к единице, в то время как в эксперименте

она обычно мала. Это связано, конечно, с идеализацией, принятой в рассмотренной модели.

Была оценена относительная роль возможных механизмов излучения в данной системе. Тормозное излучение вычислялось аналогично работе [5] и по порядку величины оказалось много меньше значения, найденного в настоящей статье. Черенковское излучение, определенное по формулам работы [4] в приближении заданной скорости электронов v_0 и фазовой скорости электромагнитной волны, оказалось того же порядка величины, хотя и в несколько раз меньше. В данном случае, по-видимому, имеет место черенковское излучение в нелинейном режиме, большая величина которого объясняется большой длиной взаимодействия и нелинейным изменением v_0 и $v_ф$, обусловленным действием макроволны, образующейся в результате когерентного излучения сгустков.

Определенное влияние на величину η_{lm} оказывает также и периодичность процесса во времени. Для конкретных замедляющих систем величина коэффициента взаимодействия R_0 зависит от ω и достигает максимума лишь в некотором интервале частот. При взаимодействии с замедляющей системой одиночного сгустка частиц его излучение имеет широкий частотный спектр, соответствующий широкому интервалу значений R_0. При взаимодействии с системой длинного цуга сгустков все излучение сосредоточено на частоте следования сгустков. Это дает возможность применять в данном случае линии с максимумом параметра R_0 на выбранной частоте и приводит к большим значениям параметра взаимодействия ε ($\varepsilon \simeq 10^{-2} \div 10^{-1}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Филимонов, Радиотехника и электроника, **6**, 1508 (1961).
2. J. E. Rowe, Proc. IRE, **50**, 170 (1962).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
4. J. R. Pierce, J. Appl. Phys., **26**, 627 (1955); Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ИЛ, М., 1959, стр. 91.
5. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ДАН СССР, **106**, 807 (1956).

Поступила в редакцию
31 мая 1965 г.

INFLUENCE OF NONLINEAR AND RELATIVISTIC EFFECTS ON RADIATION OF PERIODIC SUCCESSION OF ELECTRON CLUSTERS

B. A. Lomakin, G. F. Filimonov

The influence of nonlinear and relativistic effects has been considered on radiation of a periodic succession of electron clusters. An analytical expression has been derived for the efficiency as the function of the system parameters and some numerical calculations have been made.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 621 385.399 . 537 533 2

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ТРИОДАХ С ЗАКАТОДНЫМ УПРАВЛЯЮЩИМ ЭЛЕКТРОДОМ

С. Г. Афанасов, А. А. Шмелев

В работе проведены расчеты тока катода сеточного и анодного токов платиона для малого радиуса катода. Показано, что если эмиссионная способность части поверхности катода, обращенной в сторону управляющего электрода мала, то такая система обладает статической падающей характеристикой.

Как известно, управление током катода в триодах может осуществляться изменением потенциала электродов, помещенных либо между катодом и анодом, либо с помощью электродов, расположенных позади катода, вне пространства анод — катод. Лампы, в которых используется последний способ управления, получили название платионов [1]. В платионе в отличие от триода при положительном потенциале управляющего электрода (когда существуют анодный и сеточный токи) можно говорить об отдельных областях катодной поверхности, участвующих в создании анодного и сеточного* токов. Благодаря этой особенности можно существенно уменьшить сеточные токи лампы (при положительном ее потенциале) снижением эмиссионной способности той части поверхности катода, которая участвует в создании сеточного тока. Например, для платиона, состоящего из плоского анода (1), управляющего электрода (2) и помещенного между ними цилиндрического катода (3) (см. рис. 1а), это может быть достигнуто путем активирования части поверхности катода, обращенной в сторону анода (4). Размеры активной поверхности катода определяют область положительных анодных

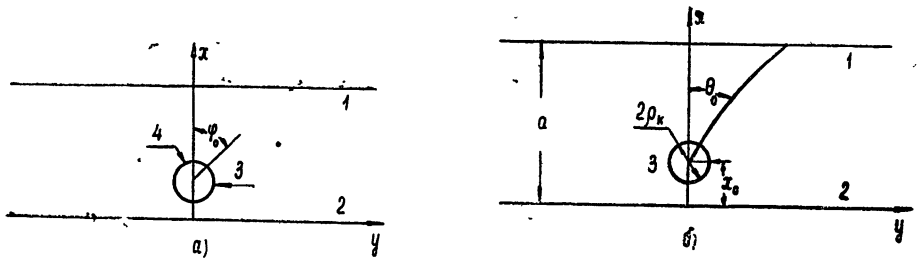


Рис. 1

и сеточных напряжений, в которой ток на управляющий электрод практически отсутствует.

Поскольку эффективность воздействия управляющего электрода на ток катода определяется геометрией системы и может значительно превышать воздействие анода, то при таких режимах можно говорить о существовании отрицательного сопротивления между анодом и управ-

* Сеточный ток по аналогии с обычными триодами — ток управляющего электрода.

ляющим электродом*. Этот эффект можно использовать для усиления и генерации электромагнитных колебаний как в статических, так и квазистатических системах.

1. РАСЧЕТ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Полный ток. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 1б. Катод (3) в виде тонкой проволочки радиуса $\rho_к$ помещен на расстоянии x_0 от управляющего электрода (2). Расстояние между управляющим электродом и анодом (1) обозначим a.

Распределение потенциала для линейного заряда q, помещенного в точку x_0, если плоскости не заземлены, дается реальной частью комплексной функции F [2]:

$$F = 2q \ln \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2a}(x_0 + z)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2a}(x_0 - z)\right]} + Bz + C, \qquad (1)$$

где $z = x + iy$ — комплексная координата. Постоянные B, C и $2q$ находятся из граничных условий на электродах

$$\operatorname{Re} F|_{x=0} = u_c, \quad \operatorname{Re} F|_{x=a} = u_a.$$

Граничное условие на катоде для случая $\rho_к \ll x_0$ можно записать в виде

$$\operatorname{Re} F = 0$$

при $z = z_к = x_0 + \rho_к e^{i\theta}$, где $z_к$ — комплексная координата катода. Отсюда после преобразований получаем

$$B = \frac{u_a - u_c}{a}, \quad C = u_c,$$

$$2q = -\left(\frac{u_a - u_c}{a} x_0 + u_c\right)\left[\ln \frac{\sin(\pi x_0/a)}{\pi\rho_к/2a}\right]^{-1}. \qquad (2)$$

Из формулы (1) с учетом (2) видно, что в области сильных полей у катода распределение потенциала такое же, как у эквивалентного несимметричного диода с потенциалом пластин

$$u_э = \frac{u_a - u_c}{a} x_0 + u_c. \qquad (3)$$

Полный ток в системе находится путем сведения эквивалентного диода к симметричному цилиндрическому диоду с потенциалом анода, равным $u_э$. Радиус катода принимается равным $\rho_к$ — радиусу катода системы, а радиус анода $r_{а\,э}$ определяется из равенства электростатических емкостей эквивалентного и цилиндрического диодов. Как показано в работе [3], этот метод приводит к результатам, которые хорошо согласуются с экспериментальными.

Емкость эквивалентного диода

---

* Понятие отрицательного сопротивления здесь вводится в обычном смысле, т. е. при одновременном противоположном по знаку изменении напряжений на аноде и управляющем электроде ток на анод возрастает при уменьшении напряжения на нем.

$$c = -\frac{q}{u_э} = \left[2 \ln \frac{\sin(\pi x_0/a)}{\pi \rho_к / 2a}\right]^{-1},$$

следовательно,

$$r_{аэ} = \frac{2a}{\pi} \sin \frac{\pi x_0}{a}. \tag{4}$$

Подставляя значения $r_{аэ}$ и $u_э$ в формулу полного тока для цилиндрического диода [4], получим

$$I = \frac{\pi \sqrt{2\eta}}{9a^{5/2}} \frac{x_0^{3/2}}{\beta^2 (r_{аэ}/\rho_к) \sin(\pi x_0/a)} \{u_а + k u_с\}^{3/2}, \tag{5}$$

где $\eta = |e|/m$ — удельный заряд, $\beta^2 (r_{аэ}/\rho_к)$ — табулированная функция, близкая к единице при $r_а/\rho_к \sim 10$, I — ток на единицу длины, $k = \partial u_а / \partial u_с |_{I=\text{const}} = \dfrac{a}{x_0} - 1$.

Токораспределение. В области положительных анодных и сеточных напряжений для вычисления токов на эти электроды нужно определить угол вылета электронов с катода, разделяющий электронный поток на анодный и сеточный.

Вблизи катода ($\rho \ll x_0$) распределение потенциала с точностью до постоянных членов дается формулой

$$u = 2q \ln \left[\frac{\sin(\pi x_0/a)}{\pi \rho / 2a}\right],$$

где ρ — полярный радиус-вектор, т. е. вблизи катода движение электронов будет радиальным. Форма траекторий

$$x = x_0 + \operatorname{ctg} \theta y,$$

где θ — угол вылета электронов (рис. 1б). Форма траекторий сохранится и при учете пространственного заряда, поскольку вид эквипотенциальных поверхностей при этом не меняется.

Запишем уравнение траекторий в виде

$$x = x_0 + \operatorname{ctg} \theta y + b(y), \tag{6}$$

где $b(y)$ содержит члены порядка не ниже y^2, так что при $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{b(y)}{y} = 0. \tag{7}$$

Дифференциальное уравнение траекторий можно получить из уравнений движения

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \eta \frac{\partial u}{\partial x} = \eta \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \ddot{y} &= \eta \frac{\partial u}{\partial y} = -\eta \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $u = \operatorname{Re} F$, $v = \operatorname{Im} F$.

Из (8), взяв за независимую переменную y и используя интеграл энергии $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -2\eta u$, получим

$$x'' + \frac{(1+x'^2)}{2u}\left[x'\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right] = 0,$$

где $x' = dx/dy$, $x'' = d^2x/dy^2$. Для точек пересечения траекторий с плоскостью $u = u_a$ $(x = a)$ решения этого уравнения получаются из уравнения [5]

$$x' = \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2u_a} - C_0\right). \tag{9}$$

При $x \to a$ и больших y

$$v = By.$$

Рассмотрим случай $u_a < u_c$. Для траектории, касающейся плоскости $x = a$, постоянная C_0 находится из выражения

$$\frac{By_m}{2u_a} - C_0 = 0,$$

где y_m — значение y при $x = a$.

Из (6) и (9) с учетом (7) получим

$$\operatorname{ctg}\theta_0 = -By_m/2u_a. \tag{10}$$

Здесь θ_0 — угол вылета, при котором траектория касается плоскости анода,

$$b(y) = \frac{B}{4u_a}y^2. \tag{11}$$

Таким образом, уравнение траектории, касающейся плоскости $x = a$, вблизи ее записывается в виде

$$x = x_0 + \operatorname{ctg}\theta_0 y + \frac{B}{4u_a}y^2. \tag{12}$$

Подставляя из (10) y_m в уравнение (12), легко найти связь между углом вылета θ_0 и потенциалами на электродах:

$$\operatorname{ctg}^2\theta_0 = \frac{a-x_0}{a}\,\frac{u_c-u_a}{u_a}. \tag{13}$$

Зная θ_0, легко написать выражения для сеточного и анодного токов*:

$$I_a = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{a-x_0}\,\dfrac{u_a}{u_c-u_a}}}{9a^{5/2}\sin\dfrac{\pi x_0}{a}\,\beta^2}\,x_0^{3/2}\{u_a + ku_c\}^{3/2};$$

$$I_c = \frac{\left\{\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{a-x_0}\,\dfrac{u_a}{u_c-u_a}}\right\}}{9a^{5/2}\sin\dfrac{\pi x_0}{a}\,\beta^2}\,x_0^{3/2}\{u_a + ku_c\}^{3/2}.$$

* При этом, естественно, предполагается, что вторичная эмиссия с анода отсутствует.

2. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Предположим, что эмиссия идет в угле $\theta = \varphi_0$ (активная поверхность катода составляет угол $2\varphi_0$). Тогда при $\theta > \varphi_0$ весь ток будет анодным (ток вторичной эмиссии не учитывается). Для этой области

$$I_a = \varphi_0 \frac{\sqrt{2\eta}}{9} \frac{x_0^{3/2}}{a^{5/2}} \frac{(u_a + ku_c)^{3/2}}{\beta^2 \sin \pi x_0/a}, \qquad I_c = 0.$$

Коэффициент k в этом случае равен коэффициенту усиления по напряжению.

Предположим, что потенциалы электродов меняются по закону

$$\begin{aligned} u_a &= u_{a0}(1 + \xi), \\ u_c &= u_{c0}(1 - \xi). \end{aligned} \tag{14}$$

Уравнение (13) для угла θ_0, определяющего режимы, при которых сеточных токов нет, перепишем в виде

$$\operatorname{ctg}^2 \theta_0 = \frac{k}{1+k} \frac{(u_{c0}/u_{a0} - 1) - 2\xi}{1 + \xi}.$$

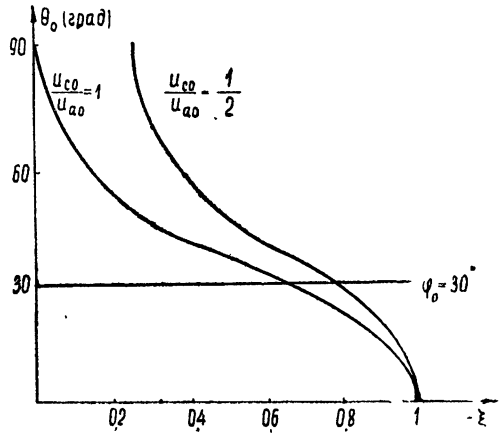


Рис. 2а

Зависимость $\theta_0(\xi)$ для $k = 5$, $u_{c0}/u_{a0} = 1/2$, 1 приведена на рис. 2а. Как видно из рисунка, область, где $I_c = 0$ при $\varphi \simeq 30°$, довольно значительна для симметричной рабочей точки ($u_{c0} = u_{a0}$). Для несимметричной рабочей точки ($u_{a0} > u_{c0}$) эта область значительно шире, особенно при больших углах эмиссии.

Перепишем формулу для тока с учетом (14):

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{\varphi_0}{\pi} I_0 \left[\left(1 + k\frac{u_{c0}}{u_{a0}}\right) - \xi(k-1)\right]^{3/2} \quad (\theta_0 > \varphi_0); \\ I_a &= \frac{\theta_0}{\pi} I_0 \left[\left(1 + k\frac{u_{c0}}{u_{a0}}\right) - \xi(k-1)\right]^{3/2} \quad (\theta_0 < \varphi_0), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$I_0 = \frac{\pi\sqrt{2\eta}}{9} \frac{u_{a0}^{3/2} x_0^{3/2}}{a^{5/2} \sin(\pi x_0 \beta^2/a)}. \tag{16}$$

Зависимость I_a от ξ приведена на рис. 2б. В точке $\xi = \xi_0 (\theta_0 = \varphi_0;$ $-1 < \xi_0 < 0)$

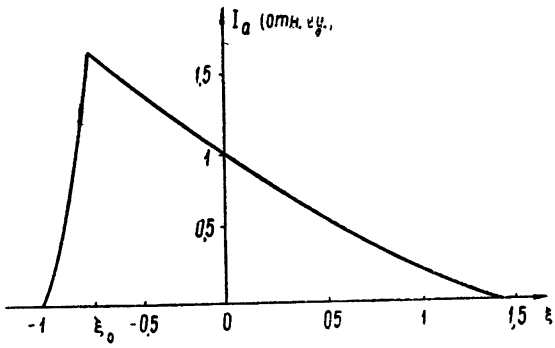


Рис. 2б

$$\left.\frac{\partial I_a}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0+0} = -\frac{\varphi_0}{\pi} I_0 [(1+k) - \xi_0 (k-1)]^{1/2} (k-1) < 0;$$
$$\left.\frac{\partial I_a}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0-0} = \frac{I_0}{\pi}[(1+k) - \xi_0 (k-1)]^{1/2} \left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{1+\xi_0} k - \frac{3}{2}(k-1)\varphi_0\right\} > 0. \quad (17)$$

Следовательно, точка ξ_0 является границей падающего участка характеристики. Величина отрицательного сопротивления в точке $\xi = 0$ равна

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{u_{a0}} \left.\frac{\partial I_a}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -\frac{3}{2}\frac{\varphi_0}{\pi}\frac{I_0}{u_{a0}}\left(1 + k\frac{u_{c0}}{u_{a0}}\right)^{1/2}(k-1).$$

Из этого выражения видно, что для одинаковых u_{a0} абсолютная величина отрицательного сопротивления с уменьшением u_{c0} возрастает:

Отрицательное сопротивление можно уменьшить, если ввести в систему еще один катод (рис. 3а). Активная часть поверхности катода K_1

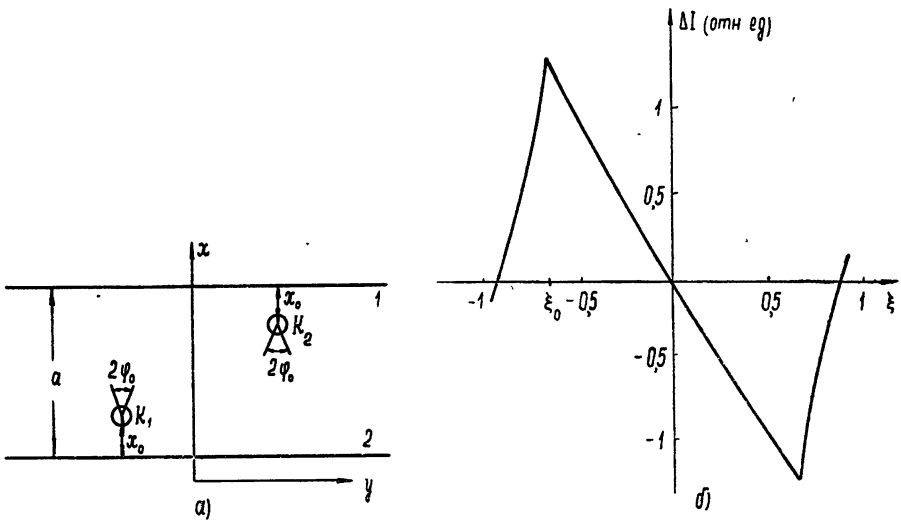


Рис. 3

обращена к плоскости 1, у второго катода K_2 — к плоскости 2, которые находятся под потенциалом u_0 по отношению к катодам. Разностная вольт-амперная характеристика для области $\theta_0 > \varphi_0$ будет представлять разность двух характеристик типа (15) при $u_{c0} = u_{a0} = u_0$:

$$\Delta I = I_1 - I_2 = \frac{\varphi_0}{\pi} I_0 \{[(1+k) - \xi(k-1)]^{3/2} - [(1+k) + \xi(k-1)]^{3/2}\}. \quad (18)$$

где I_1 — ток с катода K_1 на электрод 1, I_2 — ток с катода K_2 на электрод 2.

Разностная вольт-амперная характеристика приведена на рис. 3б. Величина ξ_0, как и раньше, определяется уравнением

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi_0 = \frac{k}{1+k} \frac{-2\xi_0}{1+\xi_0}.$$

Величина отрицательного сопротивления в точке $\xi = 0$

$$\frac{1}{R} = -\frac{3\varphi_0 I_0}{\pi u_0} (k-1)(k+1)^{1/2}. \quad (19)$$

Подставляя в (19) выражение для I_0, получим

$$R = -\frac{3a}{\varphi_0 \sqrt{2\eta u_0}} \frac{k+1}{(k-1)\sin[\pi(1+k)^{-1}]}.$$

Отрицательное сопротивление минимально при $k > 1$, удовлетворяющим уравнению $\partial R/\partial k = 0$, откуда

$$k \simeq 3{,}5; \quad (20)$$

$$R_{\min} = -\frac{1}{\varphi_0} \frac{9a}{\sqrt{2\eta u_0}}.$$

Электронный КПД системы можно определить как $\eta = |P_\sim / P_=|$, где

$$P_\sim = \frac{\Delta I(\xi)\, \xi_0 u_0}{2}$$

— колебательная мощность системы,

$$P_= = \frac{u_0 \int_{\xi_0}^{-\xi} I_a(\xi)\, d\xi}{|\xi_0|}$$

— мощность, потребляемая от источника.

Используя соотношения (15), (18), получим

$$P_\sim = \frac{I_0 \varphi_0}{2\pi} \xi_0 u_0 (1+k)^{3/2} \left\{ \left(1 - \xi_0 \frac{k-1}{k+1}\right)^{3/2} - \left(1 + \xi_0 \frac{k-1}{k+1}\right)^{3/2} \right\};$$
$$P_= = \frac{2 I_0 \varphi_0}{5\pi} \frac{u_0}{|\xi_0|} \frac{(1+k)^{1/2}}{1-k} \left\{ \left(1 - \xi_0 \frac{k-1}{k+1}\right)^{5/2} - \left(1 + \xi_0 \frac{k-1}{k+1}\right)^{5/2} \right\}. \quad (21)$$

Разлагая (21) в ряд по $\frac{k-1}{k+1}\xi_0$, получим с точностью до членов $\sim \left(\frac{k-1}{k+1}\xi_0\right)^3$,

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{k-1}{k+1} \xi_0^2.$$

Поскольку $p_{-} \sim \varphi_0 \xi_0^2$, то оптимальные параметры находятся из решения уравнений

$$\frac{d\varphi_0}{d\xi_0} \xi_0^2 + 2\xi_0 \varphi_0 = 0;$$

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi_0 = -\frac{2k}{1+k} \frac{\xi_0}{1+\xi_0}.$$

Эта система имеет решение ($k > 3$) для малых φ_0. После несложных вычислений получим: $\xi_{0\,опт} = 0{,}75$, $\varphi_{0\,опт} \sim 25°$, КПД с учетом (20) — около 25%.

В заключение следует отметить, что вторичная эмиссия с плоских электродов, не принятая во внимание в изложенных выше расчетах, может, особенно для случая малого угла падения первичного потока (φ_0 не мало), заметно изменить полученный результат. Кроме того, при определении активной части поверхности катода необходимо иметь в виду как процессы миграции активного вещества катода, так и увеличение активной части катода из-за существования вблизи его поверхности виртуального катода. Изучение влияния этих эффектов, а также анализ систем, в которых ими можно пренебречь, проводится в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Царев, Расчет и конструирование электронных ламп, Госэнергоиздат, М.—Л., 1961.
2. Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1960.
3. Henry F. Jvey, Appl. Phys., 24, 1466 (1953).
4. В. И. Гапонов, Электроника, 1, Физматгиз, М., 1960.
5. Э. Камке, Дифференциальные уравнения, ИЛ, М., 1951.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
13 декабря 1965 г.

ON POSSIBILITY OF OBTAINING A NEGATIVE RESISTANCE IN TRIODES WITH CONTROL ELECTRODE BEHIND THE GATHODE

S. G. Afanasov, A. A. Shmelyov

The calculations are given of the cathode current, grid and anode plation current for a small radius of the cathode. It is shown that if the emissivity of a part of the cathode surface faced to a control electrode is small, this system has a static dropping characteristic.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 РАДИОФИЗИКА 1966

УДК 531.391

О ПРИБЛИЖЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

З. С. Баталова

Изучается возможность исследования кусочно-гладкого точечного преобразования некоторого n-мерного множества в себя, исходя из приближенного задания преобразования.

В настоящей работе решается следующая задача: пусть T — точечное преобразование множества G_0 в себя, определяемое равенствами

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

и пусть с помощью формул

$$\tilde{x}_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

задано некоторое приближение $\tilde{T}$ преобразования T, такое, что для любых точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащих множеству $G_1 = G_0 \setminus E_1$, удовлетворяются условия

$$\rho(TM, \tilde{T}M) \leqslant L(\varepsilon), \tag{3}$$

$$\left| \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right| \leqslant S(\varepsilon) \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Здесь E_1 — множество $r(\varepsilon)$ — окрестностей точек разрыва непрерывности функций $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $L(\varepsilon)$ — ошибка преобразования T множества G_0 в себя, $S(\varepsilon)$ — наибольшая величина ошибки вычисления частных производных функций $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем при $\varepsilon \to 0$ $L(\varepsilon) \to 0$, $S(\varepsilon) \to 0$ и $r(\varepsilon) \to 0$.

Требуется определить число и характер неподвижных точек точечного преобразования T, если известны количество и устойчивость неподвижных точек приближенно преобразования $\tilde{T}$. Кроме того, необходимо найти величину отклонения каждой неподвижной точки преобразования T от соответствующей точки преобразования $\tilde{T}$.

Решение этой задачи представляет интерес при численном исследовании нелинейных и кусочно-линейных динамических систем, изучение которых сводится к исследованию точечного преобразования некоторого множества в себя (преобразования прямой в прямую [1–3], плоскости в плоскость [4–6] и т. д.).

Настоящее исследование представляет обобщение результатов работы [7], в которой рассматриваются вопросы приближенного исследования точечного преобразования прямой в прямую.

1. Пусть множество G_0 состоит из P непересекающихся подмножеств Q_p $(p = 1, 2, \ldots P)$, в каждом из которых функции $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны и имеют непрерывные производные по всем переменным.

Для любых точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$, принадлежащих одному множеству Q_p, имеют место неравенства

$$\rho(\tilde{T}M, \tilde{T}M') \leqslant K\rho(M, M'), \tag{5}$$

$$\left|\frac{\partial g_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial g_i(x_1', x_2', ..., x_n')}{\partial x_j'}\right| \leqslant N\rho(M, M'), \quad (i, j=1, 2, ..., n) \tag{6}$$

где K и N — положительные постоянные.

Применим преобразования T и $\tilde{T}$ последовательно k раз к точкам $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$, принадлежащим подмножеству Q_p $(p = 1, 2, ..., P)$, и оценим величину расстояния между полученными точками. При $k = 1$ с помощью соотношений (3), (5) и неравенства треугольника получаем

$$\rho(TM, \tilde{T}M') \leqslant \rho(TM, \tilde{T}M) + \rho(\tilde{T}M, \tilde{T}M') \leqslant L(\varepsilon) + K\rho(M, M').$$

Используя это соотношение, при $k = 2$ получаем неравенство

$$\begin{gathered}\rho(T^2M, \tilde{T}^2M') \leqslant \rho[T(TM), \tilde{T}(TM)] + \rho[\tilde{T}(TM), \\ \tilde{T}(\tilde{T}M')] \leqslant L(\varepsilon)(1+K) + K^2\rho(M, M'),\end{gathered} \tag{7}$$

которое остается справедливым, если точки $M_1 = TM$ и $M_1' = \tilde{T}M'$ принадлежат одному подмножеству Q_p $(p = 1, 2, ..., P)$. Объединим в подмножество E_2 точки множества G_0, для которых это неравенство не удовлетворяется, причем $E_1 \in E_2$. Тогда неравенство (7) будет иметь место для любых точек M и M', принадлежащих одновременно одному из подмножеств $Q_1, Q_2, ..., Q_P$ и множеству $G_2 = G_0 \setminus E_2$. Продолжая этот процесс, при $k = m$ получим неравенство

$$\rho(T^mM, \tilde{T}^mM') \leqslant \delta_m + K^m\rho(M, M'), \tag{8}$$

где

$$\delta_m = L(\varepsilon)(K^m - 1)(K - 1)^{-1} \qquad (m = 1, 2, ...). \tag{9}$$

Это неравенство выполняется, если точки M и M' одновременно принадлежат одному подмножеству $Q_p (p = 1, 2, ..., P)$ и множеству $G_m = G_0 \setminus E_m$, где подмножество E_m содержит все точки, в которых может нарушаться гладкость функций $g_i^{(1)} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i^{(2)} = g_i(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, ..., g_n^{(1)}), ...$, $g_i^{(m)} = g_i(g_1^{(m-1)}, g_2^{(m-1)}, ..., g_n^{(m-1)})$ $(i=1, 2, ..., n)$.

Оценим величину различия частных производных функций

$$f_i^{(m+1)} = f_i(f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, ..., f_n^{(m)}) \text{ и } g_i^{(m+1)} = g_i(g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, ..., g_n^{(m)})$$

$(m = 0, 1, 2, ..., i=1, 2, ..., n, f_i^{(0)} = g_i^{(0)} = x_i)$ по переменным $f_j^{(m)}$ и $g_j^{(m)}$ в точке $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ при применении к ней преобразований T и $\tilde{T}$ последовательно m раз. Используя неравенства (4) и (6), получаем соотношение

$$\left|\frac{\partial f_i(f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, ..., f_n^{(m)})}{\partial f_j^{(m)}} - \frac{\partial g_i(g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, ..., g_n^{(m)})}{\partial g_j^{(m)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial f_i(f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, ..., f_n^{(m)})}{\partial f_j^{(m)}} - \frac{\partial g_i(f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, ..., f_n^{(m)})}{\partial f_j^{(m)}}\right| +$$

$$+\left|\frac{\partial g_i\left(f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \ldots, f_n^{(m)}\right)}{\partial f_j^{(m)}} - \frac{\partial g_i\left(g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \ldots, g_n^{(m)}\right)}{\partial g_j^{(m)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant S(\varepsilon) + N\rho(T^m M, \tilde{T}^m M).$$

Отсюда, согласно (8), следует неравенство

$$\left|\frac{\partial f_i\left(f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \ldots, f_n^{(m)}\right)}{\partial f_j^{(m)}} - \frac{\partial g_i\left(g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \ldots, g_n^{(m)}\right)}{\partial g_j^{(m)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant S(\varepsilon) + N\delta_m \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n; \quad m=0, 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

которое удовлетворяется для точек $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$, принадлежащих множеству G_m.

2. Точечное преобразование $\tilde{T}$ может иметь неподвижные точки различной кратности [8], которые соответствуют периодическим движениям динамической системы. Кроме того, возможно существование областей, заполненных точками, устойчивыми по Пуассону [9], которые соответствуют непериодическим движениям системы. Обозначим через $A_{m_j k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_j)$ m_j-кратную неподвижную точку преобразования $\tilde{T}$, входящую в m_j-членный цикл, а через $B_{m_j k}$ $(k=1, 2, \ldots, m_j)$— соответствующую точку преобразования T. Область $\sigma_{m_j k}$, содержащую неподвижную точку $A_{m_j k}$, назовем правильной областью, если $\sigma_{m_j k} \in G_{m_j}$ и для любых точек M и M' из области $\sigma_{m_j k}$ удовлетворяется неравенство

$$\rho\left(\tilde{T}^{m_j} M, \tilde{T}^{m_j} M'\right) \leqslant q_{m_j}\rho(M, M') \tag{11}$$

(если точка $A_{m_j k}$ устойчива) или неравенство

$$\rho\left(\tilde{T}^{m_j} M, \tilde{T}^{m_j} M'\right) \geqslant q'_{m_j}\rho(M, M') \tag{12}$$

(если $A_{m_j k}$ неустойчива), причем

$$0 \leqslant q_{m_j} < 1 - n^2(2N\gamma + \gamma^2), \quad q'_{m_j} > 1 + n^2(2N\gamma + \gamma^2). \tag{13}$$

Здесь $\gamma = S(\varepsilon) + K\delta_{m_j-1}$, δ_{m_j-1} определяется равенством (9) при $m=m_j-1$ (см. рис. 1 для $n=2$, $m_j=m_{i+1}=2$).

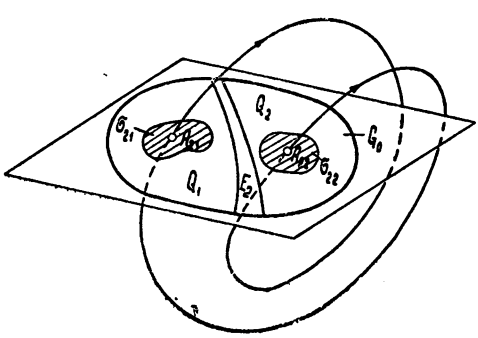


Рис. 1.

Теорема. Пусть точечное преобразование $\tilde{T}$, определяемое соотношениями (1)—(6), имеет J неподвижных точек $A_{m_j k}$ $(k=1,2, \ldots, m_j; \sum_j m_j = J)$, лежащих в правильных областях $\sigma_{m_j k}$, и для любых точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащих области $G_0 \mid U_{j,k}\sigma_{m_j k}$, удовлетворяется неравенство

$$\rho(\tilde{T}^k M, M) \geqslant \delta_k, \tag{14}$$

где $k = 1, 2, \ldots m$, $m = \max\limits_{j} \{m_j\}$.

Тогда точечное преобразование T имеет J неподвижных точек $B_{m_j k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_j)$. Устойчивость каждой неподвижной точки преобразования T совпадает с устойчивостью соответствующей неподвижной точки преобразования $\tilde{T}$, причем

$$\rho(A_{m_j k}, B_{m_j k}) \leqslant \frac{\delta_{m_j}}{1-q_{m_j}}, \quad \rho(A'_{m_j k}, B'_{m_j k}) \leqslant \frac{\delta_{m_j}}{q'_{m_j}-1} \tag{15}$$

для устойчивой и неустойчивой неподвижных точек соответственно.

Для доказательства теоремы рассмотрим область $\sigma_{m_j} = \bigcup\limits_{k=1}^{m_j} \sigma_{m_j k}$, состоящую из m_j правильных областей $\sigma_{m_j k}$ и содержащую m_j— членный цикл $\{A_{m_j k}\}$ $(k=1, 2, \ldots, m_j)$ преобразования $\tilde{T}$. Допустим, что этот цикл устойчив. Тогда, принимая во внимание неравенства (10) при $m = m_j$, (11) и (13), получаем, что для любых точек $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$ области $\sigma_{m_j 1}$ удовлетворяется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{e=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i\left(f_1^{(m_j-1)}, f_2^{(m_j-1)}, \ldots, f_n^{(m_j-1)}\right)}{\partial f_e^{(m_j-1)}} \right]^2 < 1 \quad (m_j=1, 2, \ldots),$$

которое представляет собой достаточное условие того, что преобразование T^{m_j} является сжатым. Поэтому на основании принципа сжатых отображений в области $\sigma_{m_j 1}$ существует единственная устойчивая неподвижная точка $B_{m_j 1}$ преобразования T^{m_j}. Если область $\sigma_{m_j 1}$ содержит m_j-кратную неустойчивую неподвижную точку $A'_{m_j 1}$, то, согласно (12), (13), в области $\sigma_{m_j 1}$ существует обратное преобразование T^{-m_j}, имеющее единственную устойчивую неподвижную точку $B'_{m_j 1}$, которая является неустойчивой неподвижной точкой преобразования T^{m_j}. Рассмотрев аналогично правильные области $\sigma_{m_j 2}, \sigma_{m_j 3}, \ldots, \sigma_{m_j m_j}$, получим, что в области σ_{m_j} существует единственный m_j-членный цикл преобразования T, характер которого совпадает с характером соответствующего цикла преобразования $\tilde{T}$. При рассмотрении всех m_j-членных циклов преобразования $\tilde{T}$ получим, что на множестве G_0 преобразование T имеет не менее J неподвижных точек. Новые неподвижные точки преобразования T могут находиться лишь в области $D = G_0 \setminus \bigcup\limits_{jk} \sigma_{m_j k}$.

Пусть M — произвольная точка области D; тогда с помощью неравенств (8), (14) и неравенства треугольника получаем

$$\rho(T^k M, M) \geqslant \rho(\tilde{T}^k M, M) - \rho(\tilde{T}^k M, T^k M) > 0 \quad (k=1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда следует, что преобразование T не может иметь неподвижных точек в области D. Значит, существует лишь J неподвижных точек преобразования T, причем устойчивости соответствующих неподвижных точек преобразования T и $\tilde{T}$ совпадают. Используя соотношения (8), (11)—(13), получаем, что для любых точек M и M' области $\sigma_{m_j k}$ удовлетворяется неравенство

$$\rho(T^{m_j}M,\ \tilde{T}^{m_j}M') \leqslant \delta_{m_j} + q_{m_j}\rho(M,\ M'),$$

если неподвижная точка $A_{m_j k}$, принадлежащая области $\sigma_{m_j k}$, устойчива, либо неравенство

$$\rho(T^{m_j}M,\ \tilde{T}^{m_j}M') + \delta_{m_j} \geqslant q'_{m_j}\rho(M,\ M'),$$

если точка $A_{m_j k}$ неустойчива. Полагая здесь $M = A_{m_j k}$, $M' = B_{m_j k}$ и принимая во внимание равенства $T^{m_j}B_{m_j k} = B_{m_j k}$, $\tilde{T}^{m_j}A_{m_j k} = A_{m_j k}$, получаем соотношения (15), что и требовалось.

При выполнении условий теоремы ошибка, возникающая при построении точечного преобразования, не влияет на число и характер простых и многократных неподвижных точек и, следовательно, не влияет на качественное поведение фазовых траекторий соответствующей динамической системы. Случай, когда условия теоремы не удовлетворяются, может иметь место для систем, близких к негрубым [10]. При этом, если для преобразования $\tilde{T}$ существует область D, состоящая из точек, устойчивых по Пуассону, то либо в области D преобразование T имеет многочленный устойчивый цикл, либо в самом деле область D заполнена точками, устойчивыми по Пуассону.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Ю. И. Неймарку за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. А. С. Алексеев, Труды ГИФТИ и радиофака ГГУ, 35, 105 (1957).
3. З. С. Баталова, Инж. ж., МТТ, № 2, 165 (1966).
4. А. А. Андронов и А. Г. Майер, ДАН СССР, 43, 58 (1944).
5. А. А. Андронов и Н. Н. Баутин, ДАН СССР, 43, 197 (1944).
6. А. А. Андронов и Н. Н. Баутин, ДАН СССР, 46, 158 (1945).
7. З. С. Баталова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1002 (1965).
8. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 93 (1958).
9. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
10. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 14, 247 (1937).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 ноября 1965 г.

ON APPROXIMATE INVESTIGATION OF SMOOTH PIECE-POINT TRANSFORMATIONS

Z. S. Batalova

The possibility is studied to investigate a smooth piece-point self-transformation of some n-set based on an approximate task of the transformation.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 531.391 : 62—505.7

О ПРОСТЕЙШИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ТИПА С ИНЕРЦИОННЫМ ОБЪЕКТОМ

Н. Н. Леонов

Рассматривается простейшая экстремальная система автоколебательного типа с инерционным звеном второго порядка. Показано, что обычный оптимизатор, формирующий управляющий сигнал на основе анализа знаков первых производных от входа и выхода объекта, не обеспечивает удовлетворительного качества работы системы. Предлагаются пути устранения обнаруженных недостатков.

1. Простейшие экстремальные системы автоколебательного типа (с одним входом и одним выходом) с объектом в виде последовательно соединенных нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена первого порядка рассматривались в ряде работ (см., например, [1–3]). При этом был выявлен ряд недостатков в работе управляющего устройства, приводящих либо к неустойчивой работе системы, либо к неудовлетворительному качеству процесса поиска экстремума выхода объекта. В результате проведенных исследований обнаружено, что одна из основных причин, вызывающих неустойчивость системы, связана с наличием в фазовом пространстве системы областей скользящих движений той же размерности, что и самое фазовое пространство.

В настоящей работе рассматривается простейшая экстремальная система автоколебательного типа с объектом в виде последовательно соединенных нелинейного безынерционного звена и линейного инерционного звена второго порядка. Структурная схема рассматриваемой системы изображена на рис. 1, а уравнения движения имеют следующий вид:

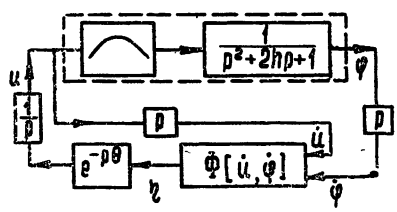


Рис. 1.

$$\ddot{\varphi}+2h\dot{\varphi}+\varphi = -u^2, \quad u(t) = \eta(t-\theta), \quad \eta = \Phi[\dot{u}, \dot{\varphi}], \tag{1}$$

$$\Phi[\dot{u}, \dot{\varphi}] = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{u}>0 \text{ и } \dot{\varphi}>-\Delta \text{ или } \dot{u}<0 \text{ и } \dot{\varphi}\leqslant-\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{u}<0 \text{ и } \dot{\varphi}>-\Delta \text{ или } \dot{u}>0 \text{ и } \dot{\varphi}\leqslant-\Delta \end{cases},$$

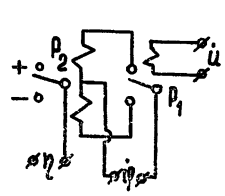


Рис. 2.

где h и Δ — положительные параметры системы, а θ — параметр, характеризующий временно́е запаздывание в оптимизаторе. Нелинейная функция $\Phi[\dot{u}, \dot{\varphi}]$ может быть реализована с помощью двух поляризованных реле (рис. 2).

В настоящей работе установлено, что в фазовом пространстве системы (1) также существует область скользящих движений той же раз-

мерности, что и самое фазовое пространство. В рассматриваемой системе это не только вызывает возможность неустойчивости поиска, но и приводит к существенному увеличению ошибки слежения за экстремумом выхода объекта. Указанные недостатки присущи всем экстремальным системам, имеющим инерционность порядка выше первого. Рассматриваемая система является простейшей из этого класса систем.

В работе рассматриваются пути устранения указанных недостатков.

2. При $\theta=0$ фазовое пространство системы (1) — трехмерное (u, φ, $\psi=\dot{\varphi}$), образованное двумя подпространствами Φ_{+1} и Φ_{-1}, такими, что в них величина η равна соответственно $+1$ и -1. Это фазовое пространство является трехмерным аналогом двулистного плоского фазового пространства [1–3].

Рассмотрим пространство Φ_{+1}. В этом пространстве система (1) состояний равновесия не имеет. Фазовая точка движется в Φ_{+1}, согласно (1), до тех пор, пока не нарушится условие $\psi>-\Delta$. Если фазовая точка попадает в область $\psi\leqslant-\Delta$ пространства Φ_{+1}, то она сразу же переходит в пространство Φ_{-1}. Обозначим плоскость $\psi=-\Delta$ через Π. Эта плоскость делит Φ_{+1} на две части: Φ_{+1}^{+}, где $\psi>-\Delta$, и Φ_{+1}^{-}, где $\psi<-\Delta$.

Из первого уравнения системы (1) следует, что $\dot{\psi}=-\varphi-2h\psi-u^2$. Поэтому величина $\dot{\psi}$ обращается в нуль на поверхности $\varphi+2h\psi+u^2=0$, которую обозначим через F. Область Φ_{+1}^{+} делится этой поверхностью на две части: Φ_{+1}^{++}, где $\dot{\psi}>0$, и Φ_{+1}^{+-}, где $\dot{\psi}<0$. Пересекаясь с плоскостью Π вдоль линии $L(\psi=-\Delta,\ \varphi=2h\Delta-u^2)$, поверхность F разделяет эту плоскость на две части: Π^{+}, где $\dot{\psi}>0$, и Π^{-}, где $\dot{\psi}<0$. Из области Π^{+} фазовая точка выходит в область Φ_{+1}^{+}, а из Π^{-} в Φ_{+1}^{-}.

Дифференцируя первое уравнение системы (1) по t и подставляя в полученное равенство выражение для $\dot{\psi}$, получим при $\eta=+1$, что $\ddot{\psi}=2h\varphi-\psi(1-4h^2)+2hu^2-2u$. Поверхность Ψ_{+1}, на которой $\ddot{\psi}=0$, пересекается с поверхностью F и делит ее на две части: F^{+}, где $\ddot{\psi}>0$, через которую фазовые траектории входят в Φ_{+1}^{++} из Φ_{+1}^{+-}, и F^{-}, где $\ddot{\psi}<0$, через которую фазовые траектории выходят из Φ_{+1}^{++} в Φ_{+1}^{+-}. С линией L поверхность Ψ_{+1} пересекается в точке $A\left(\frac{\Delta}{2},\ 2h\Delta-\frac{\Delta^2}{4},\ -\Delta\right)$.

Таким образом, фазовая точка, начав движение из области Π^{+} пространства Φ_{+1}, попадает в область Φ_{+1}^{+}, проходит через области Φ_{+1}^{++} и Φ_{+1}^{+-} и попадает в область Π^{-}, через которую уходит в Φ_{+1}^{-} (рис. 3).

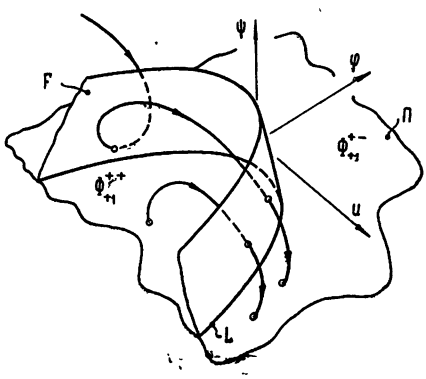


Рис 3.

Из вида системы (1) следует, что фазовые траектории пространства Φ_{-1} симметричны фазовым траекториям пространства Φ_{+1} относительно плоскости $u=0$. Уравнения плоскости Π и поверхности F не зависят от η. Поэтому эти плоскость и поверхность не меняются при переходе от пространства Φ_{+1} к пространству Φ_{-1}; плоскость Π делит пространство Φ_{-1} на две части: Φ_{-1}^{+} и Φ_{-1}^{-}, в которых $\psi>-\Delta$ и $\psi<-\Delta$ соответственно, а поверх-

ность F делит Φ_{-1}^{+} на Φ_{-1}^{++}, где $\dot{\psi}>0$, и Φ_{-1}^{+-}, где $\dot{\psi}<0$. Начав движение в области Π^{+} пространства Φ_{-1}, фазовая точка попадает в область Φ_{-1}^{+}, проходит через области Φ_{-1}^{++} и Φ_{-1}^{+-} и попадает в область Π^{-}, через которую уходит в Φ_{-1}^{-}.

Выше описано движение фазовой точки в той части фазового пространства, где $\psi>-\Delta$. В той его части, где $\psi<-\Delta$, фазовая точка не может перемещаться только в пространстве Φ_{+1} или только в пространстве Φ_{-1}, а движется, непрестанно переходя из Φ_{+1} в Φ_{-1} и обратно. Действительно, согласно уравнениям движения, фазовая точка, попав в пространство Φ_{+1} (или Φ_{-1}), сразу же должна перейти в пространство Φ_{-1} (или Φ_{+1} соответственно). Иными словами, фазовая точка движется по траектории режима скольжения в любом месте той части фазового пространства, где $\psi<-\Delta$. Следовательно, траектории режимов скольжения заполняют трехмерную область фазового пространства.

Если фазовая точка переходит из области $\psi>-\Delta$ в область $\psi<-\Delta$ фазового пространства, пересекая плоскость Π в точке с координатой $u=u_1$, то ее движение по траектории режима скольжения происходит согласно уравнению $\ddot{\varphi}+2h\dot{\varphi}+\varphi=-u_1^2$. Действительно, пусть реле P_1 и P_2 (рис. 2) имеют запаздывания θ_1 и θ_2, и фазовая точка в своем движении по траектории пространства Φ_η (т. е. Φ_{+1} или Φ_{-1}) пересекает при $t=0$ область Π^{-} плоскости Π в точке с координатой $u=u_1$. После пересечения плоскости Π фазовая точка θ_2 единиц времени движется по траектории пространства Φ_η, а через θ_2 единиц времени переходит в пространство $\Phi_{-\eta}$; при этом $u(\theta_2)=u_1+\eta\theta_2$. Затем θ единиц времени ($\theta=\theta_1+\theta_2$) фазовая точка движется по траектории пространства $\Phi_{-\eta}$, после чего вновь переходит в пространство Φ_η; при этом $u(\theta+\theta_2)=u(\theta_2)-\eta\theta=u_1-\eta\theta_1$. После этого фазовая точка движется θ единиц времени в пространстве $\Phi_{+\eta}$, затем θ единиц времени в пространстве $\Phi_{-\eta}$, и так далее до тех пор, пока вновь не попадет на плоскость Π. При этом $u(\theta_2+\theta+2n\theta)=u_1-\eta\theta_1$ и $u(\theta_2+2n\theta)=u_1+\eta\theta_2$ ($n=0,\ 1,\ldots$). Если устремить θ_1 и θ_2 к нулю, то в пределе получим, что для режима скольжения $u(t)=u_1$ всюду в области $\psi<-\Delta$ фазового пространства.

Нетрудно убедиться в том, что по траектории режима скольжения фазовая точка приходит в область Π^{+} плоскости Π. И здесь возникает вопрос — по траектории пространства Φ_{+1} или по траектории пространства Φ_{-1} она пойдет дальше. При $\theta_1=\theta_2=0$ на этот вопрос не может быть получен однозначный ответ, так как движение фазовой точки после пересечения ею области Π^{+} может происходить либо по траектории пространства Φ_{+1}, либо по траектории пространства Φ_{-1} с некоторой вероятностью.

Однозначный ответ может быть получен в том случае, когда величины запаздываний θ_1 и θ_2 отличны от нуля. В самом деле, выше было установлено, что при $\psi<-\Delta$ в случае $\theta\neq 0$ фазовая точка движется следующим образом: если при пересечении области Π^{-} она двигалась по траектории пространства Φ_η, то θ_2 единиц времени после пересечения области Π^{-} она движется по траектории пространства Φ_η, затем θ единиц времени — по траектории пространства $\Phi_{-\eta}$, опять θ единиц времени по траектории пространства Φ_η и так далее. Поэтому фазовая точка в этом случае приходит в область Π^{+} либо по траектории пространства Φ_{+1}, либо по траектории пространства Φ_{-1}. Если в течение промежутка времени, не превышающего θ, до пересечения области Π^{+}, ее движение происходило по траектории пространства Φ_η, то и после

пересечения области Π^+ ее движение будет происходить по траектории пространства Φ_η.

Время движения фазовой точки от области Π^- до области Π^+ существенно зависит от начального положения фазовой точки в области Π^-. Можно показать, что вся область Π^- разбивается на непересекающиеся линии, для каждой из которых это время постоянно. Аналогично разбивается и область Π^+ на линии, для каждой из которых время движения фазовой точки от Π^- до Π^+ постоянно. Те из линий области Π^+, для которых это время равно $2n\theta+\theta_2$ и $2n\theta+\theta+\theta_2$ $(n=0,1,...)$, разбивают всю область Π^+ на счетное множество областей. Через A_0 обозначим ту из них, для которой время движения фазовой точки от Π^- до Π^+ $t\in(0,\theta_2)$, через A_n $(n=1,2,...)$ — те области, для которых это время $t\in(2n\theta-\theta+\theta_2,\ 2n\theta+\theta_2)$, и через B_n $(n=0,1,2,...)$ — области, для которых $t\in(2n\theta+\theta_2,\ 2n\theta+\theta+\theta_2)$.

Если фазовая точка, пересекая область Π^-, движется по траектории пространства Φ_η, то в области A_n она приходит по траекториям пространства Φ_η, а в B_n — по траекториям пространства $\Phi_{-\eta}$, и дальше в области $\psi>-\Delta$ она движется по траекториям пространства Φ_η из A_n и по траекториям пространства $\Phi_{-\eta}$ из B_n.

Можно показать, что расстояние вдоль оси φ между границами каждой из областей A_n и B_n $(n=0,1,...)$ стремится к нулю при $\theta\to 0$, т. е. что при $\theta\to 0$ эти области вырождаются в линии. Отсюда и следует высказанное выше утверждение, что при $\theta=0$ не может быть получен однозначный ответ на вопрос о поведении фазовой точки после пересечения ею области Π^+.

В реальных устройствах величины запаздываний θ_1 и θ_2 отличны от нуля. Поэтому область Π^+ при $\theta\neq 0$ разбита на области A_n и B_n $(n=0,1,...)$. При достаточно малых θ_1 и θ_2 расстояния между границами этих областей вдоль оси φ также достаточно малы. Поэтому структура фазового пространства в этом случае достаточно сложна и не представляется возможным проследить поведение фазовой точки на достаточно большом промежутке времени. Остается, в частности, не выясненным вопрос о существовании, числе и устойчивости периодических режимов работы системы. Однако следует ожидать, что при малых значениях величин θ_1 и θ_2 режимы работы системы будут достаточно сложны и что система будет иметь низкую помехоустойчивость вследствие того, что область Π^+ разбивается на чередующиеся области A_n и B_n. Действительно, пусть через область A_k проходит замкнутая фазовая траектория Г, соответствующая устойчивому периодическому режиму работы системы, и пусть на систему действуют возмущения, которые не выводят фазовую точку из некоторой δ-окрестности кривой Г, которую обозначим через Ω_δ. Если Ω_δ имеет общую часть по крайней мере с одной из областей B_k, B_{k-1}, соседних с A_k (что имеет место при достаточно малых θ_1 и θ_2 для фиксированного δ), то в результате действия возмущений фазовая точка может выйти из Ω_δ. Если при этом общая часть Ω_δ и B_k или B_{k-1} принадлежит области притяжения предельного цикла Г, то фазовая точка возвращается в Ω_δ через некоторый промежуток времени. Если же общая часть Ω_δ и B_k или B_{k-1} не принадлежит области притяжения предельного цикла Г, то фазовая точка может покинуть область притяжения Г.

3. Электронная модель системы (1) изучалась М. Я. Штаерманом. Основные черты ее поведения можно выявить с помощью осциллограмм,

представленных на рис. 4. На этих осциллограммах изображены проекции фазовых траекторий системы на плоскость $u\varphi$ (ось u горизонтальна, φ вертикальна). Вертикальные прямолинейные участки осциллограмм соответствуют участкам режимов скольжения. На основе анализа осциллограмм становится очевидно, что модель системы (1) обладает теми особенностями, которые были описаны выше. Действительно, после выхода системы из режима скольжения координата u может как увеличиваться, так и уменьшаться, независимо от того, при положительном или отрицательном u имел место режим скольжения. Это подтверждает наличие в области Π^+ областей типа A_n и B_n. Далее, осциллограммы свидетельствуют о наличии в системе сложных режимов работы, что говорит о неудовлетворительном качестве процесса слежения за экстремумом выхода объекта, так как ошибка слежения для сложных режимов весьма велика. Простейшим режимом работы системы является режим с двумя отрезками скольжения — одним слева от оси φ, другим — справа. Если бы система могла устойчиво работать в таком режиме, то ошибка слежения была бы наименьшей из возможных.

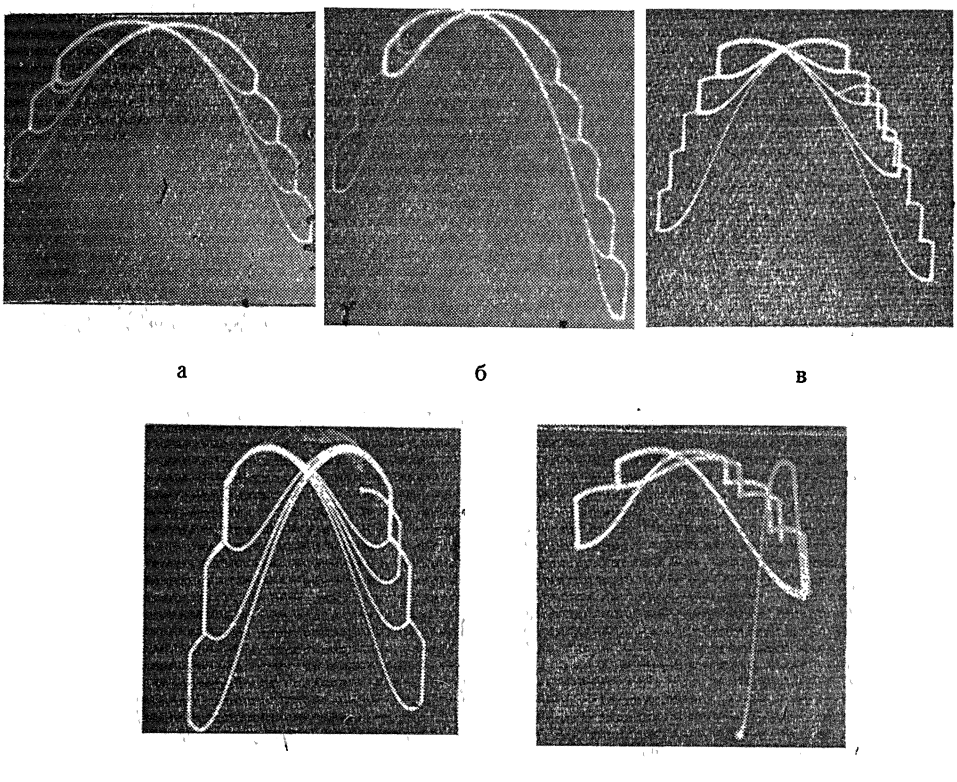


Рис. 4.

4. В рассматриваемой системе возможна также и неустойчивость поиска, порождаемая наличием режимов скольжения, траектории которых заполняют целую трехмерную область фазового пространства. Предположим, что скорость изменения величины u в сторону увеличения больше (на постоянную величину), чем в сторону уменьшения, или что характеристика нелинейного звена перемещается с постоянной скоростью вдоль оси u влево. Задача в этих случаях сводится к изучению следующей системы:

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u}(t) = \eta(t-\theta),$$
$$\eta = \begin{cases} 1+2\nu, & \text{если } \dot{u}>0, \ \dot{\varphi}>-\Delta \text{ или } \dot{u}<0, \ \dot{\varphi}\leqslant -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{u}<0, \ \dot{\varphi}>-\Delta \text{ или } \dot{u}>0, \ \dot{\varphi}\leqslant -\Delta \end{cases}, \tag{2}$$

где $h>0$, $\Delta>0$ и $\nu>0$.

Предположим, что $\theta=0$, и докажем существование в Π^- такой области Ω, что фазовая точка, начав в ней движение, никогда не достигнет области Π^+, удаляясь во время движения сколь угодно далеко от плоскости $u=0$. Тогда $\varphi(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, что и означает неустойчивость поиска. Рассмотрим часть фазового пространства, для которой $\psi\leqslant-\Delta$. При $\theta=0$ движение системы в этой части фазового пространства описывается следующими уравнениями:

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = \nu, \tag{3}$$

решение которых при $h<1$ имеет следующий вид:

$$u=u_0+\nu t, \quad \varphi = -(u_0-2h\nu+\nu t)^2+2\nu^2(1-2h^2)+e^{-ht}[A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)], \tag{4}$$

где $\omega^2=1-h^2$, а при $h>1$ — следующий вид:

$$u=u_0+\nu t, \quad \varphi=-(u_0-2h\nu+\nu t)^2+2\nu^2(1-2h^2)+e^{-ht}[A\,\mathrm{sh}(\omega t)+B\,\mathrm{ch}(\omega t)], \tag{5}$$

где $\omega^2=h^2-1$, $B=\varphi_0+u_0^2-2\nu^2-4h\nu(u_0-2h\nu)$, $A=(Bh+\psi_0+2\nu u_0-4h\nu^2)\,\omega^{-1}$. Если построить отображение T, ставящее в соответствие точке области Π^+ точку области Π^-, расположенную на той же траектории режима скольжения, что и начальная точка, то область Ω будет служить дополнением области $T\Pi^+$ до области Π^-.

Рассмотрим сначала случай $h>1$. Пусть в начальный момент времени $t=0$ фазовая точка $M_0(u_0, \varphi_0, -\Delta)$ принадлежит Π^+, а в некоторый момент $t=-\tau$, где $\tau>0$, она, согласно (5), попадает в точку $M_1(u_1, \varphi_1, -\Delta)$ области Π^-. Тогда отображение T, такое, что $M_1=TM_0$, описывается следующей системой:

$$\varphi_0 = h\Delta-u_0^2+2h\nu u_0+2\nu^2-4h^2\nu^2+\omega[(\Delta-2\nu u_0+4h\nu^2)\,\mathrm{ch}(\omega\tau) - (\Delta-2\nu u_0+4h\nu^2+2\nu^2\tau)\,e^{-h\tau}]\,\mathrm{sh}^{-1}(\omega\tau);$$
$$u_1 = u_0-\nu\tau; \tag{6}$$
$$\varphi_1 = h\Delta-u_1^2+2h\nu u_1+2\nu^2-4h^2\nu^2+\omega[(\Delta-2\nu u_1+4h\nu^2 - 2\nu^2\tau)\,e^{h\tau} - (\Delta-2\nu u_1+4h\nu^2)\,\mathrm{ch}\,\omega\tau]\,\mathrm{sh}^{-1}(\omega\tau).$$

Области Π^+ и Π^- плоскости Π разделены линией L. Вдоль линии L $u_0=\Delta/2\nu+2h\nu+\nu[\omega\tau e^{-h\tau}-\mathrm{sh}(\omega\tau)]\,[\omega e^{-h\tau}-\omega\,\mathrm{ch}(\omega\tau)+h\,\mathrm{sh}(\omega\tau)]^{-1}$. На той части L, где $u_0<\Delta/2\nu$, имеет место неравенство $\ddot{\psi}>0$. Поэтому эта часть L является инвариантной кривой отображения T.

Обозначим часть L, где $u_0>\Delta/2\nu$, через λ. Можно показать, что $\omega e^{-h\tau}-\omega\,\mathrm{ch}(\omega\tau)+h\,\mathrm{sh}(\omega\tau)>0$ для $\tau>0$. Поэтому u_0 является непрерывной функцией τ вдоль λ. Далее нетрудно показать, что $du_0/d\tau>0$ для $\tau>0$. Следовательно, u_0 является взаимно однозначной функцией τ. Но при $\tau\in(0,\infty)$ величина u_0 меняется в интервале $J\left(\frac{\Delta}{2\nu}, \frac{\Delta}{2\nu}+2h\nu-\frac{\nu}{h-\omega}\right)$.

Это свидетельствует о том, что отображение T определено не на всей линии λ, а лишь на ее части λ_0, для которой $u_0 \in J$.

Параметр τ является непрерывной функцией u_0, определенной в интервале J. Следовательно, u_1 и φ_1 также являются непрерывными функциями u_0, определенными в интервале J, причем $u_1 \to -\infty$ и $\varphi_1 \to \infty$ при $u_0 \to \frac{\Delta}{2\nu} + 2h\nu - \nu(h-\omega)^{-1}$. Поэтому $\Lambda_0 = T\lambda_0$ является непрерывной линией, разделяющей область Π^- на две части, одна из которых и есть Ω. При этом $du_1/d\tau < 0$ вдоль Λ_0.

Параметр τ постоянен вдоль линии l_τ в области Π^+ и вдоль соответствующей линии $L_\tau = Tl_\tau$ в области Π^-. Согласно (6), эти линии являются ветвями парабол, опирающимися своими правыми краями на линии λ_0 и Λ_0 соответственно. Поэтому отображение T определено не во всей области Π^+, а лишь в части, заштрихованной на рис. 5. Область Ω плоскости Π на этом рисунке также заштрихована.

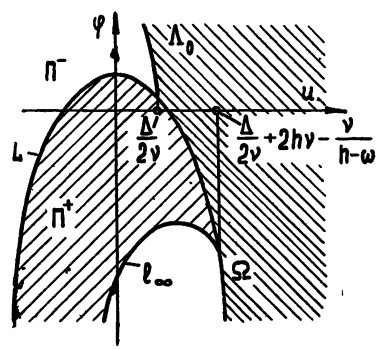


Рис. 5.

В случае $h < 1$ отображение T получается из (6) заменой ω на $i\omega$. Та часть линии L, где $u_0 < \Delta/2\nu$, и в этом случае является инвариантной кривой отображения T. Вдоль остальной части линии L $u_0 = \Delta/2\nu + 2h\nu + \nu[\omega\tau e^{-h\tau} - \sin(\omega\tau)][\omega e^{-h\tau} - \omega\cos(\omega\tau) + h\sin(\omega\tau)]^{-1}$. Можно показать, что выражение $\omega e^{-h\tau} - \omega\cos(\omega\tau) + h\sin(\omega\tau)$ обращается в нуль при некотором $\tau_1 \in \left(\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}\right)$ и положительно при $\tau \in (0, \tau_1)$. Кроме того, $du_0/d\tau > 0$ в интервале $(0, \tau_1)$ и $u_0 \to \infty$ при $\tau \to \tau_1$. Поэтому τ является непрерывной однозначной функцией u_0 вдоль всей линии λ, а линия $\Lambda = T\lambda$ является непрерывной линией, разделяющей область Π^- на две части, одна из которых и есть Ω.

5. Можно указать два пути устранения указанных недостатков в рассматриваемой экстремальной системе. Один из них связан с использованием при построении оптимизатора информации о динамических характеристиках объекта [3, 4]. В этом случае формируется и вводится в оптимизатор вместо φ сигнал $\sigma = \dot\varphi + 2h\ddot\varphi + \dddot\varphi$. Работа экстремальной системы при этом будет описываться следующими уравнениями:

$$\begin{gathered} \dddot\varphi + 2h\ddot\varphi + \dot\varphi + \varphi = -u^2, \qquad \dot u(t) = \eta(t-\theta), \\ \eta = \Phi[\dot u, \sigma], \qquad \sigma = \dot\varphi + 2h\ddot\varphi + \dddot\varphi, \\ \Phi[\dot u, \sigma] = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot u > 0,\ \sigma > -\Delta \text{ или } \dot u < 0,\ \sigma \leqslant -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot u < 0,\ \sigma > -\Delta \text{ или } \dot u > 0,\ \sigma \leqslant -\Delta \end{cases}. \end{gathered} \tag{7}$$

Фазовое пространство $\Phi(u, \varphi, \psi)$ системы (7) при $\theta = 0$ образовано двумя пространствами Φ_{+1} и Φ_{-1}. Из первого и четвертого равенств системы (7) следует, что $\sigma = -2\eta u$. Поэтому по траекториям пространства Φ_{+1} фазовая точка может двигаться лишь при $u < \Delta/2$, а по траекториям пространства Φ_{-1} лишь при $u > -\Delta/2$. Нетрудно убедиться в том, что фазовая точка, попав в ту часть фазового пространства, где $-\Delta/2 \leqslant$

$\leqslant u \leqslant \Delta/2$, выйти из нее уже не может и что из остальной части фазового пространства она приходит в указанный слой по траекториям пространства Φ_{+1} слева от этого слоя и по траекториям пространства Φ_{-1} справа от него. Поэтому все траектории стационарных режимов системы (7) расположены в слое $\Sigma\,(-\Delta/2 \leqslant u \leqslant \Delta/2)$.

Из вида системы (7) следует, что фазовые траектории пространства Φ_{+1} симметричны относительно плоскости $u = 0$ фазовым траекториям пространства Φ_{-1}. Следовательно, изучение поведения траекторий в слое Σ сводится к изучению точечного отображения T плоскости $u = -\Delta/2$ в себя. Отображение $T = S\Pi$, где S — отображение симметрии, ставящее в соответствие точке M плоскости $u = \Delta/2$ симметричную ей относительно плоскости $u = 0$ точку $M_1 = SM$ плоскости $u = -\Delta/2$. Отображение Π ставит в соответствие точке M_0 плоскости $u = -\Delta/2$ точку $M = \Pi M_0$ плоскости $u = \Delta/2$; при этом точки M_0 и M расположены на одной и той же траектории пространства Φ_{+1}.

Движение фазовой точки в пространстве Φ_η описывается равенствами (4) и (5) (величину ν следует в этих равенствах заменить на η). Рассмотрим сначала случай $h < 1$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ фазовая точка находится в точке $M_0\left(-\frac{\Delta}{2}, \varphi_0, \psi_0\right)$ и через $t = \tau$ приходит в точку $M\left(\frac{\Delta}{2}, \varphi_1, \psi_1\right)$. Тогда можно показать, что $\tau = \Delta$ и что отображение T описывается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1\varphi_0 + b_1\psi_0 + c_1; \\ \psi_1 &= a_2\varphi_0 + b_2\psi_0 + c_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $a_1 = e^{-h\Delta}[\omega\cos(\omega\Delta) + h\sin(\omega\Delta)]\,\omega^{-1}$, $a_2 = -e^{-h\Delta}\omega^{-1}\sin(\omega\Delta)$, $b_1 = e^{-h\Delta}\omega^{-1}\sin(\omega\Delta)$, $b_2 = e^{-h\Delta}\omega^{-1}[\omega\cos(\omega\Delta) - h\sin(\omega\Delta)]$, $c_1 = -\left(\frac{\Delta}{2} - 2h\right)^2 + 2 - 4h^2 + e^{-h\Delta}\omega^{-1}\left\{\left[4h^2 - \Delta - 6h + \left(\frac{\Delta}{2} + 2h\right)^2 h\right]\sin(\omega\Delta) + \omega\left[4h^2 - 2 + \left(\frac{\Delta}{2} + 2h\right)^2\right]\cos(\omega\Delta)\right\}$, $c_2 = 4h - \Delta + e^{-h\Delta}\omega^{-1}\left\{\left[2 + h\Delta - \left(\frac{\Delta}{2} + 2h\right)^2\right]\sin(\omega\Delta) - \omega(\Delta + 4h)\cos(\omega\Delta)\right\}$, $\omega^2 = 1 - h^2$.

Нетрудно убедиться в том, что отображение T имеет единственную простую неподвижную точку $M^*(-\Delta/2, \varphi^*, \psi^*)$, где $\varphi^* = 4h - \Delta\left[1 - e^{-2h\Delta} + \frac{2h}{\omega}e^{-h\Delta}\sin(\omega\Delta)\right][1 + e^{-2h\Delta} - 2e^{-h\Delta}\cos(\omega\Delta)]^{-1}$, $\psi^* = (a_2\varphi^* + c_2)(1 - b_2)^{-1}$. Отображение T имеет характеристические корни $\lambda_1 = \exp[-(h + i\omega)\Delta]$ и $\lambda_2 = \exp[-(h - i\omega)\Delta]$. Если вместо φ и ψ ввести новые переменные $\xi = \varphi - \varphi^*$ и $\zeta = \psi - \psi^*$, то в переменных ξ, ζ отображение T является линейным, а так как характеристические корни его по модулю меньше единицы, то оно сжимающее. Следовательно, отображение T имеет единственную неподвижную точку M^*, устойчивую в большом.

Аналогичный результат справедлив и для $h > 1$. В случае $h > 1$ все аналитические выражения получаются из соответствующих аналитических выражений для $h < 1$ заменой ω на $i\omega$, где $\omega^2 = h^2 - 1$.

Таким образом, в системе (7) слежение за экстремумом выхода объекта происходит в автоколебательном режиме простейшего вида. Если фазовая точка находится в части фазового пространства, где $|u|>\Delta/2$, то в системе происходит поиск, при котором координата u со скоростью $|\dot{u}|=1$ стремится к значению, соответствующему экстремуму выхода объекта.

Основные недостатки, присущие системам (1) и (2), в системе (7) отсутствуют. Возможность неустойчивости поиска в этой системе полностью устранена, если скорость смещения характеристики нелинейного безынерционного звена объекта вдоль оси u по модулю меньше единицы. Однако этот путь улучшения качества процессов поиска и слежения за экстремумом выхода объекта осложняется необходимостью периодического уточнения динамических характеристик объекта и необходимостью измерения производных высших порядков от выхода объекта.

6. Другой, более простой путь заключается в следующем. Управляющее устройство системы — оптимизатор — строится таким образом, чтобы в системе при $\psi<-\Delta$ отсутствовали режимы скольжения. Это имеет место, если в области $\psi<-\Delta$ фазового пространства $\eta=0$. Кроме того, необходимо, чтобы фазовая точка после выхода из области $\psi<-\Delta$ двигалась по траектории пространства $\Phi_{-\eta}$, если в область $\psi<-\Delta$ она попала по траектории пространства Φ_{η}.

Уравнения движения экстремальной системы с таким оптимизатором имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\ddot{\varphi}+2h\dot{\varphi}+\varphi=-\dot{u}^2, \quad \dot{u}=\eta,\\ \eta(t,\ t_{2s+1}<t<t_{2s+2})=0, \quad \eta(t,\ t_{2s+2}<t<t_{2s+3})=\\ =-\eta(t,\ t_{2s}<t<t_{2s+1}) \qquad (s=\ldots,\ -1,\ 0;\ 1,\ \ldots),\end{gathered} \tag{9}$$

где t_i $(i=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ldots)$ таково, что $\dot{\varphi}(t_i)=-\Delta$; $\dot{\varphi}>-\Delta$ при $t\in(t_{2s},\ t_{2s+1})$; $\eta(t)$ постоянно на интервале $(t_{2s},\ t_{2s+1})$ и равно либо $+1$, либо -1.

Оптимизатор, реализующий описанный порядок работы системы, может быть выполнен, например, по схеме, изображенной на рис. 6. Эта схема предложена М. Я. Штаерманом. Оптимизатор имеет один вход φ и один выход η. Работа его происходит следующим образом. Пусть $\dot{\varphi}>-\Delta$. В этом случае контакты P_1^1 и P_1^2 реле P_1 замкнуты, а P_1^3 разомкнут. Величина η при этом равна либо $+1$, либо -1, в зависимости от положения якоря P_2^1 реле P_2. Пусть для определенности реле P_2 находится в положении, соответствующем $\eta=+1$ (как на рис. 6). Цепь реле P_2 разомкнута и оно сохраняет свое положение до тех пор, пока реле P_1 не изменит своего положения. Конденсатор C заряжается от положительного полюса источника питания.

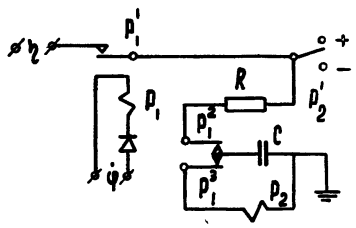


Рис. 6.

Значение $\eta=+1$ сохраняется до тех пор, пока $\dot{\varphi}$, уменьшаясь, не примет значения, равного $-\Delta$. В этот момент происходит изменение положения реле P_1, контакты P_1^1 и P_1^2 размыкаются, а P_1^3 замыкает цепь реле P_2. Величина η в результате переключения реле P_1 становится равной нулю. Конденсатор C разряжается через реле P_2, в результате чего происходит переключение якоря P_2^1 в положение, соответствующее $\eta=-1$.

Значение $\eta=0$ сохраняется все время, пока $\dot{\varphi}\leqslant-\Delta$. Как только $\dot{\varphi}$ станет больше, чем $-\Delta$, реле P_1 вернется в прежнее положение, разомкнув цепь реле P_2 и замкнув контакты P_1^1 и P_1^2. Величина η становится равной -1, а конденсатор C заряжается от минусового полюса источника питания. Затем весь цикл работы оптимизатора повторяется с той лишь разницей, что в начале нового цикла $\eta=-1$, а в конце его $\eta=+1$.

Фазовое пространство системы (9) образовано тремя пространствами Φ_{+1}, Φ_0 и Φ_{-1}, в которых величина η принимает соответственно значения $+1{,}0$ и -1. По траекториям пространств Φ_{+1} и Φ_{-1} фазовая точка движется в области $\psi>-\Delta$, а по траекториям пространства Φ_0 — в области $\psi<-\Delta$. Фазовые траектории пространств Φ_{+1} и Φ_{-1} систем (9) и (1) полностью совпадают, и движение фазовой точки по ним происходит по одному и тому же закону. Фазовые траектории пространства Φ_0 в системе (9) описываются теми же уравнениями, что и траектории режимов скольжения в системе (1); законы движения фазовой точки по ним одинаковы. Следовательно, поведение фазовой точки в областях $\psi>-\Delta$ и $\psi<-\Delta$ системы (9) совпадает с поведением фазовой точки в этих областях в системе (1). Законы перехода фазовой точки через поверхность $\psi=-\Delta$ из области $\psi>-\Delta$ в область $\psi<-\Delta$ также совпадают.

Отличие начинается с законов перехода фазовой точки через поверхность $\psi=-\Delta$ из области $\psi<-\Delta$ в область $\psi>-\Delta$. В системе (1) при $\theta=0$, как показано выше, этот закон является вероятностным, а именно — фазовая точка с некоторой вероятностью может выйти в область $\psi>-\Delta$ из области $\psi<-\Delta$ по траектории пространства Φ_{+1} и с соответствующей вероятностью — по траектории пространства Φ_{-1}. Это вызывает появление сложных режимов работы системы в процессе слежения, низкую помехоустойчивость, существенное увеличение ошибки слежения и ухудшение качества процесса поиска.

В системе (9) фазовая точка выходит из области $\psi<-\Delta$ в область $\psi>-\Delta$ по траектории пространства $\Phi_{-\eta}$, если из области $\psi>-\Delta$ в область $\psi<-\Delta$ она попала по траектории пространства Φ_η. Установление такой упорядоченности позволяет избавиться от указанных недостатков в работе системы.

Далее, различие скоростей изменения входа объекта в сторону увеличения и в сторону уменьшения в системе с «обычным» оптимизатором, рассмотренной в начале статьи (система (2)), приводит к появлению в фазовом пространстве системы области неустойчивого поиска. Основная вина за это ложится на режимы скольжения. При отсутствии различия скоростей изменения входа объекта (система (1)) фазовая точка из любого начального положения в области $\psi<-\Delta$ приходит на плоскость $\psi=-\Delta$ и выходит затем в область $\psi>-\Delta$. Различие скоростей изменения входа объекта в сторону увеличения и в сторону уменьшения вызывает искажение траекторий режимов скольжения, приводящее к образованию области неустойчивого поиска. Фазовая точка из любого начального положения в этой области уходит сколь угодно далеко от точки (0, 0, 0), не попадая никогда на плоскость $\psi=-\Delta$.

В системе (9) различие этих скоростей не вызывает искажения траекторий пространства Φ_0. Поэтому введение в экстремальную систему нового оптимизатора устраняет возможность неустойчивого поиска, связанную с различием скоростей изменения входа объекта в разные стороны.

Рассмотренный в этом разделе оптимизатор с равным успехом может быть применен для управления объектом с линейным инерционным звеном любого порядка, предшествующим нелинейному безынерционному звену, в отличие от оптимизатора, использующего информацию

о динамических характеристиках объекта. Такие трудности, как необходимость периодического уточнения динамических характеристик объекта и необходимость измерения производных от выхода объекта от первого порядка до порядка, превышающего на единицу порядок инерционности объекта, ставят весьма существенные преграды на пути применения оптимизаторов, использующих информацию о динамических характеристиках объекта, для управления объектами с инерционным звеном порядка выше первого. Для оптимизатора, рассмотренного в этом разделе, указанные трудности отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 566 (1961).
2. Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 1249 (1963).
3. Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, **26**, 1720 (1965).
4. В. В. Казакевич, Труды I конгресса ИФАК, **2**, изд. АН СССР, М., 1961.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском государственном университете

Поступила в редакцию
9 ноября 1965 г.

ON SIMPLEST EXTREME SYSTEMS OF AUTO-OSCILLATION TYPE WITH INERTIAL OBJECT

N. N. Leonov

The simplest extreme system of auto-oscillation type with an inertial second-order component is considered. It is shown that an ordinary optimizer forming a control signal on the basis of analyzing the signs of the first derivatives from the object input and output do not produce a satisfactory quality of the system operation. The ways are proposed to eliminate the observed defects.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 62—501.32

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗВЕНОМ

В. А. Брусин

Рассматривается класс нелинейных регулируемых систем с устойчивым распределенным звеном. Показано, что на этот класс распространяются результаты работ [11, 13] по абсолютной устойчивости систем с сосредоточенными параметрами.

В системах автоматического регулирования часто встречаются звенья с распределенными параметрами. Такими звеньями могут быть как элементы управляющей части, так и объект регулирования [1,2]. Распределенные звенья описываются либо дифференциально-разностными уравнениями, либо уравнениями в частных производных. При этом величины, представляющие собой входные воздействия, являются функциями только от одной переменной (времени) и в случае, когда элемент описывается уравнениями в частных производных, они входят в краевые условия.

Как известно, коэффициент передачи дискретных звеньев представляет собой частное от деления двух комплексных полиномов. В отличие от этого коэффициент передачи распределенных звеньев, встречающихся на практике, может быть даже не мероморфной функцией [3].

Проблеме устойчивости линейных систем с распределенными звеньями было посвящено большое число работ ([1,2,4,5] и др.). В результате для практически наиболее важных случаев удалось распространить известные методы расчета устойчивости систем регулирования с сосредоточенными параметрами. В дальнейшем в работах [6,7] были доказаны теоремы, позволяющие судить об устойчивости нелинейных систем с распределенными параметрами по их линейным приближениям.

В последнее время в связи с появлением нового метода исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем (метода В. М. Попова) появился ряд работ, обобщающих этот метод на системы с распределенными звеньями для случая, когда характеристика нелинейности расположена в некотором секторе первого и третьего квадрантов [8—10].

В настоящей работе рассматривается задача об абсолютной устойчивости распределенных регулируемых систем с нелинейными элементами, не удовлетворяющими этому условию (к таким элементам относится, например, люфт). Полученные результаты представляют собой распространение результатов работ [11,13] по абсолютной устойчивости систем с сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим систему регулирования, которая состоит из линейного и нелинейного звеньев, связанных замкнутой цепью воздействия и описываемых уравнениями

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)[u(\tau)-y(\tau)]\,d\tau,$$
$$y(t) = \varphi_t(x(\tau), \tau \ll t), \qquad (1)$$

где $u(t)$, $y(t)$ — соответственно значения входа и выхода системы регулирования в момент t, $x(t)$ — значение выхода линейного звена.

Мы будем предполагать, что линейное звено, определяемое функцией $G(t)$, и нелинейное звено, определяемое нелинейным оператором φ, удовлетворяют следующим условиям.

A. Существует преобразование Лапласа от функции $G(t)$. Изображение $K(p)=L(G(t))$ является аналитическим в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\sigma$ $(\sigma > 0)$ и удовлетворяет условию

$$\sup_{\sigma' < \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(-\sigma' + j\omega)|^2 \, d\omega < \infty. \tag{2}$$

B. 1) Существует такое число $\bar{k}$, что для любой непрерывной функции $x(t)$, имеющей почти всюду производную, справедливо почти при всех $t > 0$ соотношение

$$\frac{d}{dt} \varphi_t = k(t)\, \dot{x}(t) \quad (0 \leqslant k(t) \leqslant \bar{k}), \tag{3}$$

где $k(t)$ — функция, зависящая от $x(t)$ и времени t.

2) Пусть $x(t) \to x_0$ при $t \to \infty$, и существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(x(\tau), t \geqslant \tau)$. Тогда этот предел равен $\varphi_\infty(x_0) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(x(\tau) \equiv x_0, t \geqslant \tau)$.

Обозначим через S_α множество функций $\{x(t), y(t), u(t)\}$, $-\infty < t < +\infty$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

C. Функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (1).

D. Существует изображение по Лапласу от $\dot{u}(t)$ и функция $\dot{U}(p) = L(\dot{u}(t))$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\alpha$, $\alpha > 0$. При $t \to \infty$ $|u(t) - u(\infty)| \infty e^{-\alpha t}$.

E. Функция $\dot{y}(t)$ локально суммируема с квадратом и равна нулю при всех t, меньших некоторого отрицательного числа $-\theta$ (зависящего от данного элемента множества S_α).

Мы будем предполагать, что множество S_α не пусто и содержит континуум элементов. (Условиями C — E определяются процессы $x(t)$, $y(t)$, физически реализуемые в рассматриваемой системе регулирования при входном сигнале, стремящемся к некоторому стационарному значению по экспоненциальному закону.)

Замечание 1. На практике [3] могут встретиться коэффициенты передачи такого вида:*

$$K_1(p) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-\lambda_i p}(a_i p^{m_i} + \ldots + a_0)}{\sum\limits_{i=0}^{N} e^{-\tau_i p}(b_i p^{n_i} + \ldots + b_0)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i p} g_i(p)}{\sum\limits_{i=1}^{N} e^{-\tau_i p} f_i(p)};$$

$$K_2(p) = \frac{G(p)}{F(p)} \exp\left\{-\sqrt{ap^2 + bp + c}\right\}, \tag{4}$$

где $m_0 > m_i$, $n_0 > n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$; $f_i(p)$, $g_i(p)$, $G(p)$, $F(p)$ — полиномы, $\lambda_i > 0$, $\tau_i > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

* В случае, когда коэффициент передачи выражается в виде многозначной функции от p, вопрос о выборе ветви, соответствующей изображению $G(t)$, решается теоремой 5 работы [14].

Легко показать, что $K_1(p)$ будет удовлетворять условию А, если нули знаменателя лежат в левой полуплоскости и $m_0 < n_0$, а $K_2(p)$ будет удовлетворять условию А, если нули $F(p)$ лежат в левой полуплоскости.

Замечание 2. Легко показать, что если множество $(x(t),\ y(t),\ u(t))$ удовлетворяет условиям С — Е, то $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $y(t)$ — непрерывные функции.

Теорема. Пусть выполнено условие

$$\operatorname{Re} K(j\omega-\lambda)+\frac{1}{\bar{k}}>0,\quad -\infty\leqslant\omega\leqslant+\infty,\quad 0<\lambda<\min[\bar{\sigma},\alpha] \tag{5}$$

и пусть $\{x(t),\ y(t),\ u(t)\}\in S_\alpha$. Тогда

1) существуют $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=y_\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=x_\infty$;

2) существует такое $C>0$, что при $t>0$

$$|y(t)-y_\infty|\leqslant Ce^{-\lambda t},\quad |x(t)-x_\infty|\leqslant Ce^{-\lambda t}.$$

Доказательство. Обозначим $p(t)=\dot{x}(t)e^{\lambda t}$, $q(t)=\dot{y}(t)e^{\lambda t}$ и рассмотрим выражение $\rho(T)=\int\limits_0^T k_+^{-1}(t)\,[\xi k_+(t)p(t)-\eta q(t)]q(t)\,dt$ $(\xi>\eta>0)$, где $k_+(t)$ — некоторая функция, определяемая ниже (3а).

Разобьем отрезок $[0,\ T]$ на непересекающиеся множества Δ_0, Δ', Δ_+; момент $t\in[0,\ T]$ будем относить к множеству Δ_0 в том и только в том случае, если найдется такое $\varepsilon>0$, что $\dot{y}\equiv 0$ на интервале $(t-\varepsilon,\ t+\varepsilon)$. Когда такое $\varepsilon>0$ не существует, то момент t будем относить к множеству Δ_+, если в момент t справедливо (3), и к множеству Δ' в противном случае. Множество Δ' по предположению имеет нулевую меру.

Положим

$$k_+(t)=\begin{cases} k(t) & \text{при } t\in\Delta_+ \\ \bar{k} & \text{при } t\ \bar{\in}\ \Delta_+ \end{cases} \tag{3а}$$

Тогда

$$\rho(T)=\int\limits_{\Delta_+}\bar{k}^1(t)\,(\xi\,k(t)\,p(t)-\eta\,q(t))\,q(t)\,dt. \tag{6}$$

Интеграл (6) — несобственный (ибо $k(t)$ может обратиться в нуль), но сходящийся, так как в силу (3) его подынтегральное выражение равно $(\xi-\eta)\,k(t)p^2(t)$.

Используя (3), (3а), (6), получаем

$$\frac{\xi-\eta}{\bar{k}}\int\limits_0^T q^2(t)\,dt\leqslant(\xi-\eta)\int\limits_{\Delta_+}\frac{1}{k(t)}\,q^2dt\leqslant\int\limits_0^T\left[\xi p(t)\,q(t)-\frac{\eta}{\bar{k}}q^2(t)\right]dt. \tag{7}$$

Функции $p(t)$ и $q(t)$, согласно (1) и условию, наложенному на $\dot{y}(t)$ в пункте Е, связаны при $t>0$ соотношением

$$p(t)=-\int\limits_0^t\bar{G}(\tau)\,q(t-\tau)\,d\tau-\bar{\psi}(t)+\bar{F}(t), \tag{8}$$

где

$$\bar{G}(t)=G(t)\,e^{\lambda t},\quad \bar{\psi}(t)=\int_{t}^{t+\theta}\bar{G}(\tau)\,q(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\bar{F}(t)=\int_{0}^{t}\bar{G}(\tau)\,e^{\lambda(t-\tau)}\,\dot{u}(t-\tau)\,d\tau. \tag{8a}$$

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$q_T(t)=\begin{cases} q(t), & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & t<0,\ t>T\end{cases},$$

$\dot{p}_T(t)=-\int_0^t \bar{G}(\tau)\,q_T(t-\tau)\,d\tau-\bar{\psi}(t)+\bar{F}(t)$, $Q_T(j\omega)=\Phi(q_T(t))$—фурье-изображение $q_T(t)$, которое существует в силу условия E (Φ — оператор Фурье). Согласно (8), (8a)

$$\Phi(z_T(t))\equiv\Phi(p_T(t)+\bar{\psi}(t)-\bar{F}(t))=-K(j\omega-\lambda)\,Q_T(j\omega). \tag{9}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int_0^T\left[\xi p(t)\,q(t)-\frac{\eta}{\bar{k}}q^2(t)\right]dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\xi p_T(t)\,q_T(t)-\frac{\eta}{\bar{k}}q_T^2(t)\right]dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\xi z_T(t)\,q_T(t)-\frac{\eta}{\bar{k}}q_T^2(t)\right]dt+\xi\int_0^T\left[\bar{F}(t)-\bar{\varphi}(t)\right]q_T(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left[\xi K(j\omega-\lambda)+\frac{\eta}{\bar{k}}\right]|Q_T(j\omega)|^2\,d\omega+$$

$$+\xi\int_0^T\left[\bar{F}(t)-\bar{\psi}(t)\right]q_T(t)dt.$$

Подставляя это выражение в (7) и учитывая (5), получим

$$\frac{\xi-\eta}{\xi\bar{k}}\int_0^T q^2dt\leqslant\int_0^T\left(|\bar{F}(t)|+|\bar{\psi}(t)|\right)|q(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sqrt{\int_0^T\bar{F}^2dt}+\sqrt{\int_0^T\bar{\psi}^2dt}\right)\sqrt{\int_0^T q^2dt},$$

откуда

$$\frac{\xi-\eta}{\xi\bar{k}}\sqrt{\int_0^{\infty}q^2dt}\leqslant\sqrt{\int_0^{\infty}\bar{F}^2\,dt}+\sqrt{\int_0^{\infty}\bar{\psi}^2\,dt}. \tag{10}$$

Покажем, что интегралы в правой части неравенства (10) сходятся. Из условий A и D следует, что функция $K(p)\dot{U}(p)$ — аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant -\lambda$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega-\lambda')\dot{U}(j\omega-\lambda')|^2 d\omega$ ограничен равномерно по всем $\lambda' \leqslant \lambda$. Отсюда [14] следует ограниченность интеграла

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t G(\tau)\,\dot{u}(t-\tau)\,d\tau\right)^2 e^{2\lambda t}\,dt = \int\limits_0^\infty \bar{F}^2\,dt.$$

Далее в силу тех же условий

$$\int\limits_0^\infty \bar{\psi}^2\,dt = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_{-\theta}^0 \bar{G}(t-\tau)\,q(\tau)\,d\tau\right]^2 dt \leqslant \int\limits_{-\theta}^0 q^2(\xi)\,d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\theta}^0 \bar{G}^2(t-\tau)\,d\tau dt \leqslant C_1\theta \int\limits_0^\infty \bar{G}^2(\tau)\,d\tau \qquad \left(C_1 = \int\limits_{-\theta}^0 q^2(\xi)\,d\xi\right).$$

Однако $\int\limits_0^\infty \bar{G}^2\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega-\lambda)|^2\,d\omega$, а последний интеграл ограничен в силу (2); следовательно $\int\limits_0^\infty \bar{\psi}^2\,dt < \infty$.

Итак, мы показали, что правая часть (10) конечна, т. е.

$$\int\limits_0^\infty \dot{y}^2 e^{2\lambda t}\,dt \leqslant C_2 < \infty. \tag{11}$$

Из (11) легко следуют утверждения 1 и 2 теоремы. Действительно, для произвольного $T > 0$

$$|y(t+T)-y(t)| \leqslant \int\limits_t^{t+T} |\dot{y}(s)|\,ds \leqslant \sqrt{\int\limits_t^{t+T} \dot{y}^2(\xi)\,e^{2\lambda\xi}\,d\xi} \times$$

$$\times \sqrt{\int\limits_t^{t+T} e^{-2\lambda\xi}\,d\xi} \leqslant \frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{e^{-2\lambda t}(1-e^{-2\lambda T})} \leqslant C_3 e^{-\lambda t}.$$

По критерию Коши отсюда следует, что существует предел $y(t)$ при $t \to \infty$. Устремляя в последнем неравенстве T в бесконечность, получим: $|y(t)-y_\infty| \leqslant C_3 e^{-\lambda t}$.

Из факта существования предела $y(t)$ следует, что существует предел и $x(t)$ при $t \to \infty$, причем $x_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = [u(\infty)-y_\infty]\int\limits_0^\infty G(\tau)\,d\tau$.

Далее, согласно D, существует такая константа C_4, что $|u(t) - u(\infty)| \leqslant C_4 e^{-\lambda t}$. Следовательно,

$$|x(t)-x_\infty| \leqslant \int\limits_0^\infty |G(\tau)|\,|u(t-\tau)-u(\infty)|\,d\tau + \int\limits_0^\infty |G(\tau)|\,|y(t-\tau)-$$

$$-y_\infty|\,d\tau \leqslant (C_3+C_4)\,e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty |\bar{G}(\tau)|\,d\tau = C_5 e^{-\lambda t}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть параметры системы (1) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} K(j\omega)+\frac{1}{k}>0 \quad (0\leqslant\omega\leqslant\infty). \tag{5а}$$

Тогда найдется такое $\varepsilon>0$ (зависящее от этих параметров), что для всех $x(t), y(t)$, таких, что $\{x(t), y(t), u(t)\}\in S_\varepsilon$, справедливы соотношения

$$|y(t)-y_\infty|\leqslant Ce^{-\varepsilon t}, \quad |x(t)-x_\infty|\leqslant Ce^{-\varepsilon t} \quad (t>0).$$

Действительно, в силу непрерывности $K(p)$ в точке $p=j\omega$ всегда можно найти такое достаточно малое $\varepsilon>0$, чтобы при тех же значениях параметров удовлетворялось и условие (5) при $\lambda=\varepsilon$.

Следствие 2. Пусть система

$$x=K(H-y), \quad y=\varphi_\infty(x), \tag{12}$$

где $K=\int_0^\infty G(t)\,dt$, имеет единственное решение $x^*(H), y^*(H)$ и пусть выполняется условие (5а). Тогда при всех входных сигналах $u(t)$, стремящихся по экспоненте к H, выходной сигнал будет стремиться к значению $y^*(H)$, причем это стремление будет также экспоненциальным. Это утверждение вытекает из следствия 1 и условия В.2.

Систему регулирования, для которой имеет место последнее утверждение, естественно назвать абсолютно устойчивой по отношению к экспоненциально убывающим входным возмущениям.

Из хода доказательства теоремы легко вытекает также

Следствие 3. Константа C, входящая в утверждение теоремы, есть функция только от параметров системы и от констант C_1 и L, где

$$C_1=\int_{-\theta}^{0}\dot{y}^2(t)\,e^{2\lambda t}\,dt, \quad L=\int_0^\infty|\dot{u}(t)|\,e^{\lambda t}\,dt,$$

причем $C\to 0$ при $C_1\to 0$ и $L\to 0$.

Замечание 3. Учитывая следствия 1 и 2, нетрудно убедиться, что введенное выше определение абсолютной устойчивости является частным случаем общего определения абсолютной устойчивости динамических систем, данного в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Ю. И. Городецкий, Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 2, 967 (1959).
2. Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 7, 107 (1946).
3. Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, М., 1960.
4. Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман, Проблема Раута—Гурвица для полиномов и целых функций, изд. АН СССР, М.—Л., 1949.
5. Ю. И. Неймарк, ПММ, 8, 349 (1949).
6. Ю. И. Неймарк, Уч. зап. ГГУ, серия физ-мат., вып. 16, 191 (1950).
7. Ю. И. Неймарк, ДАН СССР, 127, 961 (1959).
8. В. Попов, А. Халанай, Автоматика и телемеханика, 23, 7 (1962).
9. А. Халанай, Автоматика и телемеханика, 25, 290 (1964).
10. А. Х. Гелиг, Автоматика и телемеханика, 26, 311 (1965).
11. В. А. Брусин, ДАН СССР, 157, 294 (1964).

12. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 539 (1964).
13. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 206 (1965).
14. В. А. Диткин, А. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском государственном университете

Поступила в редакцию 16 ноября 1965 г.

ON ABSOLUTE STABILITY OF ONE CLASS OF CONTROL SYSTEM WITH A DISTRIBUTED COMPONENT

V. A. Brousin

A class of nonlinear controlled system with a stable distributed component is considered. It is shown that the results of papers [11,13] on an absolute stability of lumpedparameter systems can be applicable to this class.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

УДК 62 — 505.7

К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ В ОБЪЕКТАХ С ЗАМКНУТЫМИ ЦИКЛАМИ

Б. А. Арефьев

Показано, что для оптимизации процессов в объектах, имеющих замкнутые циклы, целесообразно применять комбинированные системы управления.

В [1] поставлена задача оптимизации процессов в объектах с замкнутыми циклами в смысле получения максимума полезного продукта и предложено ее решение, основанное на управлении исполнительным устройством регулятора в зависимости от изменения рецикла.

Экстремальный регулятор с алгоритмом действия, указанным в упомянутой статье, будет выполнять поставленную перед ним задачу, но работа его не будет отличаться быстродействием. Петлеобразные движения изображающей точки около статической характеристики рецикла с попеременно чередующимися движениями в нужном направлении и обратном ему, не могут обеспечить значительных результирующих скоростей выхода к экстремуму — локальный характер поиска не способствует этому. Без труда устанавливается, что в объектах с замкнутым циклом, так же, как и в объектах с открытым циклом (являющихся частным случаем первых), скорость нарастания выходной координаты увеличивается, когда входная приближается к оптимальной и убывает при подходе изображающей точки к статической характеристике [2]. В этом смысле системы с «локальным» поиском всегда оказываются менее оптимальными.

В то же время мы напомним, что регулятор, работающий по изменению рецикла, не дает расходящихся движений при любых начальных условиях, чего не могут обеспечить в объектах с замкнутыми циклами «обычные» системы управления, работающие по изменению выходной величины объекта.

В настоящем сообщении показывается, что комбинируя известную систему управления автоколебательного типа, предназначенную для оптимизации объектов, не имеющих замкнутых циклов, с указанным в [1] регулятором, работающим по изменению рецикла, можно получить достаточно быстродействующую устойчивую систему. Указывается также на связь между хорошо изученными процессами в экстремальных системах, имеющих в своем составе объекты с открытыми циклами, и процессами в рециркуляционных системах.

1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

Состояние в объекте с открытым циклом можно характеризовать двумя координатами: X — входной величиной и Y — выходной. Процессы в соответствующих системах изображаются на плоскости. Объект с замкнутым циклом характеризуется тремя величинами: теми же величинами X и Y и величиной рецикла Z; вместо одной из этих величин, например, X может быть взята вспомогательная переменная $X_\Sigma = X + Z$. Конечно, когда возврат на вход непереработанного материала отсутст-

вует (объект работает с открытым циклом), $X_\Sigma = X$. Теперь состояние объекта целесообразно представлять точкой в пространстве состояний $X_\Sigma YZ$.

Уравнения для рабочей части объекта $Y = f(X_\Sigma)$ и для цепи рецикла $Z = \varphi(X_\Sigma)$, указанные в [1], описывают в пространстве состояний $X_\Sigma YZ$ две цилиндрические поверхности, расположенные так, как это указано на рис. 1. Эти поверхности могут быть названы соответственно поверхностью характеристик полезного продукта (ПП) и поверхностью характеристик рецикла (ПР). Поскольку любая из переменных X_Σ, Y, Z не может быть отрицательной [1], указанные выше поверхности имеют смысл только в части пространства, ограниченного плоскостями $Y = 0$, $X_\Sigma = Z$, $Z = 0$.

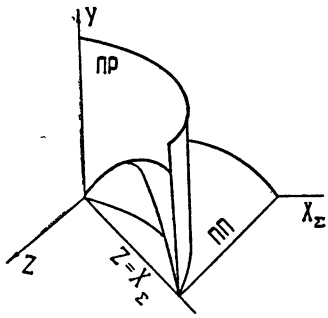


Рис. 1. Поверхности характеристик (ПП — поверхность характеристики полезного продукта; ПР—поверхность характеристик рецикла).

Установившиеся состояния в объекте по всем трем координатам могут быть только в точках пересечения указанных поверхностей. Ниспадающий участок образованной таким образом линии, как это следует из рассуждений, приведенных в [1], соответствует неустойчивым режимам, восходящий — устойчивым. Наивысшая точка отвечает оптимальному режиму, который должен определяться и поддерживаться системой управления.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Будем считать, что оптимизатор имеет исполнительное устройство постоянной скорости. При тех же предположениях, которые сделаны были в [1], следуя ранее указанному порядку рассуждений, получим уравнения, описывающие пространственные фазовые траектории изображающей точки пока еще неуправляемой системы.

Рассматривая вначале шаговую систему, скачкообразно изменяющую подачу исходного материала в объект, получаем уравнения для переменных Y и Z на каждом такте с номером k:

$$T\dot{Y} + Y = f(X_{\Sigma k} + \Delta X); \tag{2.1}$$

$$T\dot{Z} + Z = \varphi(X_{\Sigma k} + \Delta X), \tag{2.2}$$

где T — постоянная времени объекта, ΔX — изменение подачи, происшедшее в начале такта.

Вычислив значения Y и Z в конце такта длительности τ далее можем без труда найти приращения указанных величин за время между моментами срабатывания исполнительного устройства:

$$\Delta Y = [f(X_{\Sigma k}) - Y_k]\, D + f'(X_{\Sigma k})\, D\Delta X; \tag{2.3}$$

$$\Delta Z = [\varphi(X_{\Sigma k}) - Z_k]\, D + \varphi'(X_{\Sigma k})\, D\Delta X. \tag{2.4}$$

Здесь $D = 1 - e^{-\tau/T}$; членами, содержащими множителями ΔX в квадрате и высших степенях, пренебрегаем.

Переходя к пределу при длительности такта $\tau \to 0$, получим из шаговой системы непрерывную систему со скоростью исполнительного устройства, определяемой формулой

$$q = \sigma \frac{dX}{d\tau} \qquad (\sigma = \pm 1). \tag{2.5}$$

При предельном переходе, как показано в [1], D следует заменить на $(dX_\Sigma - dZ)/\sigma qT$. Подставив это выражение в (2.3) и (2.4), после пренебрежения членами высшего порядка малости получим уравнения

$$dY = [f(X_\Sigma) - Y]\frac{dX_\Sigma - dZ}{\sigma qT}; \tag{2.6}$$

$$dZ = [\varphi(X_\Sigma) - Z]\frac{dX_\Sigma - dZ}{\sigma qT}, \tag{2.7}$$

из которых следует запись уравнений движения в симметричной форме*:

$$\frac{dX_\Sigma}{\sigma qT + \varphi(X_\Sigma) - Z} = \frac{dY}{f(X_\Sigma) - Y} = \frac{dZ}{\varphi(X_\Sigma) - Z}. \tag{2.8}$$

3. «ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ» НЕАВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Используя полученные уравнения, постараемся представить себе картину возможных движений в системе в том случае, когда алгоритм управляющего устройства еще не установлен. При этом могут представиться три случая: $\sigma = 1$, $\sigma = -1$ и $\sigma = 0$.

К сожалению, уравнения (2.8) не интегрируются в элементарных функциях даже тогда, когда $f(X)$ представима многочленом второй степени. Однако в общем случае уравнения в симметричной форме (2.8), в которых знаменатели пропорциональны направляющим косинусам касательной к траектории в точках пространства $X_\Sigma YZ$, позволяют дать качественную картину процесса и построить траектории, используя, например, метод изоклин.

На рис. 2 и 3 изображены проекции фазовых траекторий, построенных по уравнениям (2.8) на плоскости $X_\Sigma Z$ и $X_\Sigma Y$, причем для $f(X)$

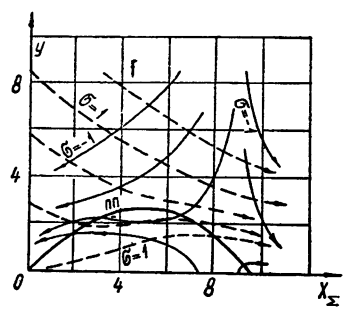


Рис. 2. Проекции фазовых траекторий на плоскость $X_\Sigma Y$ (ПП — проекция поверхности характеристик полезного продукта).

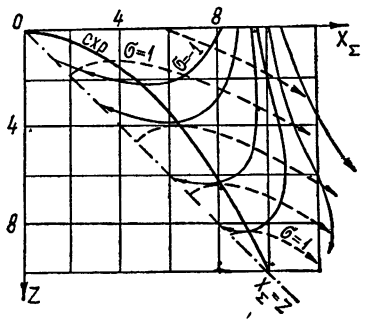


Рис. 3. Проекции фазовых траекторий на плоскость $X_\Sigma Z$ (СХР — проекция статических характеристик рецикла).

принято выражение [1] $f(X) = bX - cX^2$ при следующих значениях постоянных: $b = 0{,}98$, $c = 0{,}1$, $qT = 7$. Рис. 2 строился для $Y = 0$, рис. 3 — для $Z = 0$. Сплошными линиями на этих рисунках показаны проекции траекторий при $\sigma = -1$, пунктиром — при $\sigma = +1$. Штрих-пунктирная линия $X_\Sigma = Z$ отделяет рабочую часть плоскости от области физически

* Основное уравнение (3.5) в [1] является частным случаем полученной системы (2.8).

неосуществимых режимов. Сама статическая характеристика рецикла СХР представляет собой изоклину $dZ/dX_\Sigma = 0$.

При построении алгоритма управления большой интерес для нас представит поле траекторий при неподвижном состоянии исполнительного устройства ($\sigma = 0$). Именно здесь вскрывается основная причина невозможности использования «обычных» экстремальных регуляторов для управления процессами в рециркуляционных системах.

Как следует из самого определения величины X_Σ, при $\sigma = 0$ будем иметь

$$X_\Sigma = Z + C, \tag{3.1}$$

где C — положительная постоянная, зависящая от фиксированного положения исполнительного устройства. В частности,

$$X_\Sigma = Z \tag{3.2}$$

при отсутствии исходного питания.

Из (2.8) получаем уравнение

$$\frac{dY}{dX_\Sigma} = \frac{f(X_\Sigma) - Y}{\sigma qT + \varphi(X_\Sigma) - Z}, \tag{3.3}$$

интегрирование которого при $\sigma = 0$ с учетом (3.1) должно давать уравнения траекторий в плоскостях, определяемых уравнениями (3.1) при различных C.

В наших задачах $f(X_\Sigma)$ — положительная выпуклая функция в рабочем диапазоне изменения X_Σ, часто представимая многочленом второй степени типа $f(X) = bX - cX^2$. Следовательно, знаменатель правой части в (3.3) дважды обращается в нуль, если $0 < C < X_\Sigma^*$, где X_Σ^* — то значение X_Σ, которое обеспечивает максимум $f(X_\Sigma)$. Траектории имеют при этом две вертикальные асимптоты и имеют характер кривых, показанных на рис. 4 в сечении $б$—$б'$. При $C = 0$ и $C > X_\Sigma^*$ знаменатель правой части (3.3) отличен от нуля, но характер поведения интегральных

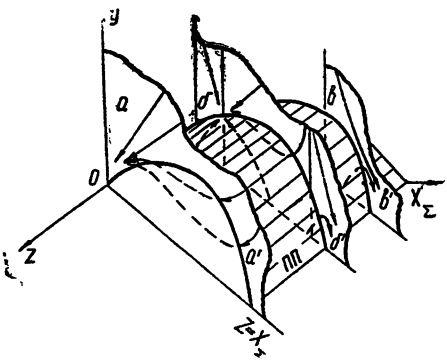


Рис. 4. Фазовые траектории при неподвижном состоянии исполнительного устройства.

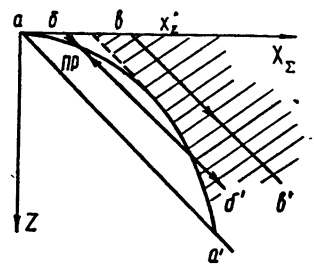


Рис. 5. Проекции фазовых траекторий при $\sigma = 0$ на плоскость $X_\Sigma Z$ (ПР — проекция поверхности характеристик рецикла).

кривых в известном смысле различен (сечения a — a' и $в$ — $в'$). В первом случае все траектории сходятся к началу координат, во втором X_Σ и Z монотонно возрастают со временем.

Вид со стороны оси Y на указанные семейства траекторий показан на рис. 5. Проекция поверхности статических характеристик рецикла обозначена здесь через ПР. Легко заметить, что при неподвижном состоянии исполнительного устройства все процессы, начинающиеся из области, отмеченной штриховкой, приводят к прогрессирующему росту рецикла.

Общим для траекторий во всех сечениях является то, что над поверхностью характеристик полезного выхода $Y=f(X_\Sigma)$, обозначенной на рис. 4 через ПП, Y убывает, под поверхностью возрастает. В этом смысле рассматриваемые системы сохраняют свойства «обычных» экстремальных систем с объектами, не имеющих замкнутых циклов [3,4].

4. ВЫБОР АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАТОРА

Ранее мы отмечали, что большинство оптимизаторов, разработанных для экстремального регулирования процессов в объектах, не имеющих замкнутых циклов, не подходит для решения нашей задачи. Теперь это утверждение становится более очевидным, если принять во внимание присущее им всем качество удерживать координату исполнительного устройства практически неизменной при уменьшении выходной координаты объекта или, что еще хуже, совершать при этом периодические колебания. Такие движения с практически постоянным значением исходного питания окажутся совершенно недопустимыми, если они начинаются из любой точки области неустойчивости, отмеченной на рис. 5 перекрестной штриховкой.

Проблема формализации процесса оптимизации и построения алгоритма регулятора распадается на две части, соответствующие областям пространства, лежащим выше поверхности характеристик полезного продукта и ниже ее.

В первой части задачи нужно установить вид алгоритма системы оптимизации, хотя бы удерживающей изображающую точку примерно в одной и той же небольшой части плоскости $X_\Sigma Z$, пока она, двигаясь в направлении оси Y, не достигнет поверхности характеристик полезного продукта; во второй части задачи следует удерживать каким-либо способом изображающую точку под этой поверхностью, где процесс всегда развивается в направлении увеличения полезного выхода*.

Мы уже отмечали, что для решения первой части задачи не могут быть использованы известные оптимизаторы с запоминающими устройствами или работающие по производной dY/dX. Легко видеть, что в верхней части пространства $X_\Sigma YZ$ нельзя строить алгоритм с использованием только приращений или производных от Y, поскольку в некоторых частях плоскости $X_\Sigma Z$ он может давать движения в ложном направлении.

Здесь может быть использован алгоритм [1], учитывающий приращения от рецикла. Оптимизатор, действующий по этому закону, не только ограничит рост рецикла при любой комбинации начальных значений X_Σ Y, Z, но будет выводить свободным движением изображающую точку на поверхность характеристик рецикла, а затем уже в более медленном темпе (скользящим движением) к экстремуму. В какой-то момент времени во время свободных или скользящих движений изображающая точка пересечет поверхность характеристик полезного продукта.

Вторая часть задачи сводится к тому, чтобы удержать попавшую под поверхность $Y=f(X_\Sigma)$ изображающую точку в этой части прост-

* Как мы видим, обе стороны задачи напоминают такие же две части решения проблемы оптимизации процессов в объектах, не имеющих рециркуляционных потоков [3], и являются их обобщением.

ранства. Это могут выполнить обычные системы экстремального регулирования с управлением по производной dY/dX или ее знаку или даже, что еще проще, с запоминанием значений Y. Примем далее, что в системе используется исполнительное устройство постоянной скорости.

Движения под поверхностью характеристик $Y=f(X_\Sigma)$ будут происходить по некоторым кускам траекторий семейств, описываемых уравнениями (2.8), проекции которых на плоскость $X_\Sigma Z$ (построенные для указанной выше системы параметров) представлены на рис. 2 ($\sigma=1$ и $\sigma=-1$), и по части некоторых траекторий в плоскости $X_\Sigma=Z$ ($\sigma=0$). Разумеется, общая траектория, собранная из частей траекторий отдельных семейств, должна быть непрерывной кривой.

Проследим подробнее за движением изображающей точки, начиная с того момента, когда она пересекла поверхность характеристик полезного продукта, перейдя из верхней части пространства в нижнюю (точка 1 на рис. 6). Здесь могут представиться два случая: в точке 1 может оказаться как $\sigma=1$, так и $\sigma=-1$.

Допустим, что там оказалось $\sigma=1$ и точка 1 лежит правее максимума поверхности $Y=f(X_\Sigma)$, имеющего место при $X_\Sigma=X_\Sigma^*$ (случай а). Тогда сразу же изображающая точка попадет обратно на поверхность характеристик полезного продукта, где должно произойти переключение, после чего $\sigma=-1$ и точка переходит на траекторию другого семейства.

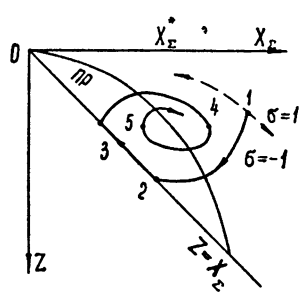


Рис. 6. Проекции фазовых траекторий на плоскость $X_\Sigma Z$ при комбинированном управлении.

Если в начальный момент $\sigma=1$, но точка 1 имеет абсциссу меньшую, чем X_Σ^* (случай б), то изображающая точка идет по траектории семейства $\sigma=1$ с одного ската поверхности к другому, точки которого имеют абсциссы, бо́льшие X_Σ^*; при этом движении Y возрастает, ордината второй точки пересечения траектории с поверхностью $Y=f(X_\Sigma)$ оказывается больше первой — режим несколько приблизится к экстремальному. И в случае а, и в случае б последующие движения будут идентичными: изображающая точка движется по траектории семейства $\sigma=-1$ и попадает на плоскость $X_\Sigma=Z$, если режим в объекте еще далек от экстремального. Иными словами, при достаточно большом значении суммарного питания и рецикла, и режимах, далеких от оптимальных, регулятор уменьшает подачу исходного материала до нуля и делает некоторую паузу (в течение которой изображающая точка находится на плоскости $X_\Sigma=Z$). Известное время уменьшение питания «идет на пользу» объекту: выход продукта увеличивается, а излишнее количество рецикла, поданного на вход, перерабатывается объектом. Изображающая точка по одной из траекторий семейства $\sigma=0$ которое изображено на рис. 4 в сечении $a-a'$, достигает поверхности характеристик полезного продукта, идя снизу вверх. Начавшееся вслед за тем уменьшение полезного выхода отмечается регулятором, переключающим направление движения исполнительного устройства. По траектории семейства $\sigma=1$ точка идет к другому скату поверхности $Y=f(X_\Sigma)$ (при $X_\Sigma>X_\Sigma^*$), оставаясь под ней, и достигает ее в точке 4, и т. д. Во время движения изображающая точка остается под поверхностью $Y=f(X_\Sigma)$ (кроме моментов переключений) и процесс развивается в направлении увеличения выхода полезного продукта; точки переключений будут иметь

все большие и большие ординаты — процесс сходится к экстремальному, амплитуды колебаний уменьшаются.

С некоторого момента амплитуды становятся уже настолько малыми, что траектория не достигает плоскости $X_\Sigma = Z$ (регулятор уже не прекращает полностью подачу сырья) и состоит только из участков траекторий семейств $\sigma=1$ и $\sigma=-1$ (3—4, 4—5 и т. д. на рис. 6), образующих спираль, сходящуюся к экстремальной точке. Проекция последних участков траектории на плоскость $X_\Sigma Y$ напоминает аналогичные кривые, возникающие при экстремальном регулировании объектов без рецикла.

ЛИТЕРАТУРА

1 Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 807 (1965).
2 Ю. И. Бобров, Р. В. Корнилов, В. П. Пуцилло, Автоматика и телемеханика, **24**, 183 (1963).
3. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 566 (1961).
4 В П. Пуцилло, В В. Петров, Р. В. Корнилов, Е. Е. Володин, Принципы построения одного класса экстремальных систем, Тр. I конгресса ИФАК, 6, изд. АН СССР, М., 1961.

Ленинградский институт
точной механики и оптики

Поступила в редакцию
27 октября 1965 г.

TO THE PPOBLEM OF OPTIMIZATION OF PROCESSES IN OBJECTS WITH LOCKED CYCLES

B. A. Arefiev

It is shown that it is reasonable to apply complex control systems for the process optimization in objects having the locked cycles.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том IX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1966*

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.378.33

УВЕЛИЧЕНИЕ ДЛИНЫ ПУЧКА В МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГЕНЕРАТОРАХ С РАЗНЕСЕННЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов

Одним из направлений развития молекулярных генераторов является сужение исходной спектральной линии в них за счет увеличения длины пучка. Обычно используется схема Рамзея с двумя разнесенными резонаторами, которая изучалась как теоретически, так и экспериментально в ряде работ [1–5]. Успех этого направления во многом зависит от того, удастся ли существенно (скажем, на порядок по сравнению с общепринятым резонатором длиной $8 \div 10$ *см*) увеличить длину пучка активных молекул при сохранении достаточной для возбуждения колебаний интенсивности. Пока характерное расстояние между резонаторами, достигнутое в [3–5], порядка 15 *см*.

В настоящей работе исследуется ряд практических способов существенного увеличения длины пучка (т. е повышения добротности линии).

1. Исследовались различные варианты схем формирования длинного пучка активных молекул. Естественным критерием эффективности при этом являлось максимальное расстояние между сортирующей системой и одиночным резонатором, при котором еще возможно было достичь режима самовозбуждения. В опытах использовался молекулярный генератор на переходе $J = 3$, $K = 3$ $N^{14}H_3$. Источником пучка служил канал диаметром 0,15 *мм* и длиной, равной диаметру. Была предусмотрена возможность перемещения источника пучка по всем трем осям непосредственно при работе генератора. Аммиак очищался перемораживанием под вакуумом. Наилучшей оказалась кольцевая сортирующая система длиной 100 *мм*, диаметром 6 *мм* и с расстоянием между соседними кольцами 3 *мм*. Между сортирующей системой и резонатором помещалась холодная диафрагма, диаметр отверстия которой был равен диаметру кольца сортирующей системы. Резонатор на тип колебания E_{010} имел длину 100 *мм* и добротность около 9000. На такой установке была получена генерация при расстоянии семьдесят сантиметров между сортирующей системой и одиночным резонатором. Оптимальное расстояние между источником пучка и сортирующей системой при этом оказалось равным 19 *мм*, причем уменьшение этого расстояния уменьшало параметр возбуждения резче, нежели увеличение. Отклонение источника пучка от оси сортирующей системы на 0,5 *мм* уменьшало параметр возбуждения примерно вдвое. Это свидетельствует о невыгодности увеличения диаметра пучка, так как молекулы, вылетающие с периферии широкого источника, не попадут в резонатор, а лишь увеличат соударения в пучке.

Полученные результаты подтверждают выводы работы [6] о выгоде применения точечных источников пучка и кольцевых сортирующих систем, поле которых не зависит от азимута, что обеспечивает отсутствие «азимутальных аберраций» при формировании пучка активных молекул. Квадрупольные системы показали худшие результаты, и подробное исследование их не проводилось. Зависимость параметра возбуждения от размеров сортирующей системы оказалась довольно слабой, и рекомендации [6] о пользе уменьшения диаметра и длины систем не подтвердились. Так, с кольцевой сортирующей системой диаметром 3,5 *мм* и длиной 40 *мм* была получена генерация при расстоянии 50 *см* между сортирующей системой и резонатором с соотношением сигнал/шум около 50, а с кольцевой системой диаметром 2 *мм* и длиной 17 *мм* — на расстоянии 42 *см*. Расстояние между соседними кольцами в этих системах было равно радиусу кольца.

Наблюдалась также линия излучения молекул рамзеевской формы. Для этого непосредственно за сортирующей системой помещался резонатор (на тип колебания E_{010}) длиной 1 *см*, который волноводом связывался со вторым резонатором, и в них обычным способом наблюдалась линия излучения. На рис 1 а, б приведены фотографии спектральной линии при расстоянии между резонаторами 50 и 100 *см*, с шириной отдельного максимума порядка 700 *гц* и 350 *гц* соответственно. При сравнении рас-

четной формы линии для максвелловского распределения по скоростям в [7] с рис 1 а, б видно, что нами наблюдалось значительно большее число интерференционных максимумов. Это может быть объяснено как фокусировкой в удаленный резонатор молекул в узком интервале скоростей, так и наложением интерференционных картин от двух компонент линии 3—3.

Первое предположение не подтверждается данными работы [14], где примерно при тех же параметрах экспериментальной установки форма одиночной спектральной линии близка к расчетной. С другой стороны, второе предположение согласуется с результатами этой работы, где для разрешения спутников линии $J = 3$, $K = 2$ аммиака, отстоящих по частоте на 3000 *гц* и имеющих почти одинаковую интенсивность, необходимо было разнести резонаторы на 1 метр; ширина отдельного рамзеевского максимума при этом равнялась 350 *гц*. В нашем случае, по данным [8], линия $J = 3$, $K = 3$ аммиака в отсортированном пучке практически состоит из двух компонент примерно одинаковой интенсивности, разнесенных по частоте почти вдвое меньше, нежели спутники линии $J = 3$, $K = 2$, а именно на 1600 ± 400 *гц*. Пользуясь экспериментальной формой

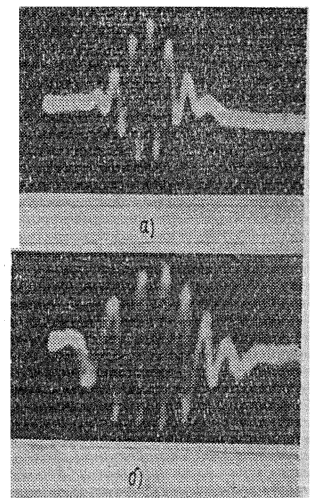


Рис. 1. Линия излучения рамзеевской формы в двухрезонаторном молекулярном генераторе. Частотный масштаб снимков различен; а) расстояние между резонаторами 0,5 *м*, ширина каждого максимума 700 *гц*; б) расстояние между резонаторами 1 *м*, ширина каждого максимума 350 *гц*.

линии, полученной в [14], можно построить ожидающийся профиль линии $J = 3$, $K = 3$, при расстоянии между резонаторами 1 *м*. Построенный таким образом профиль удовлетворительно совпадает с наблюдавшейся формой линии (рис. 1). Для полного разрешения компонент линии следовало бы увеличить расстояние между резонаторами примерно до двух метров.

Нам представляется преждевременным вывод [1] о частичном разрешении структуры при расстоянии между резонаторами около 30 *см*, основанный на некоторой асимметрии амплитудно-частотных характеристик генератора. Указанная асимметрия могла быть обусловлена и техническими причинами.

При расстоянии между резонаторами 50 *см* можно было примерно с одинаковой легкостью возбудить автоколебания либо только в первом, либо только во втором по пучку резонаторе, соответственно настраивая их. Добротности резонаторов были примерно равны, а длина первого резонатора в 10 раз меньше, нежели второго резонатора, удаленного от сортирующей системы. Следовательно, для самовозбуждения первого резонатора нужно было в 10 раз больше активных молекул, что дает величину коэффициента ослабления пучка между резонаторами $\chi = 0{,}1$.

2. Для увеличения разрешающей силы пучкового мазера по схеме Рамзея можно применить принцип переноса фазы колебания СВЧ с одного молекулярного пучка на другой [10]. В связи с этим мы провели опыт, в котором в рамзеевской схеме в качестве первого по пучку резонатора использовался обычный длинный резонатор на тип колебания E_{010}, поставленный «поперек пучка». Пучок пропускался через отверстия связи имевшегося резонатора; поэтому можно было быть уверенным в сохранении исходного типа колебания. Полем такого резонатора успешно индуцировались переходы; в такой системе при расстоянии между резонаторами 42 *см* наблюдалась рамзеевская форма линии с примерно той же мощностью индуцирующего сигнала, что и с описанным выше коротким резонатором на тип колебания E_{010}. В [9] описан опыт, в котором в качестве первого по пучку резонатора использовался резонатор на тип колебания E_{010}, а в качестве второго — на тип колебания H_{011}, причем колебания в первом резонаторе не индуцировали «звона» во втором. Наш результат показывает, что это не является следствием перпендикулярности полей E в резонаторах. Вместе с этим следует отметить, что примерно одинаковое взаимодействие пучка со скрещенными полями резонаторов имеет место только из-за большого набора чисел M у аммиака. В случае формальдегида следует ожидать резко отличного взаимодействия [11].

Установление возможности такого двойного использования резонаторов дает удобную конструкцию четырехпучкового мазера (см. рис. 2). Данные настоящей работы дают возможность полагать, что в такой системе можно получить эффективную длину пучка порядка $2 \div 3$ *м*, что соответствует ширине линии около 150 *гц*.

3. Максимальная длина пучка в молекулярных генераторах по схеме Рамзея ограничивается расстоянием, на котором возможно выполнить условие самовозбуждения. Можно снять это ограничение, включив в схему пучкового мазера усилитель (как показано на рис. 3) и использовав явление «молекулярного звона» для передачи сигнала обратной связи с выхода на вход усилителя. Такая схема аналогична предложенной в [12], различие состоит в том, что в [12] предлагается использовать ее для инверсии населенностей в лазере, а в данном случае уже отсортированный пучок, связывающий два резонатора, играет роль селективного элемента обратной связи Источником нестабильности в такой схеме будут являться флуктуации фазы в тракте усилителя. При уходе фазы усиленного сигнала на $\Delta\varphi$ изменение частоты колебаний $\Delta\nu$ будет порядка $\Delta\nu \simeq \Delta F\Delta\varphi/\pi$, где $\Delta F \simeq 0{,}6/T$ — ширина спектральной линии. Набег фазы в усилителе (ширина полосы которого практически всегда много больше ширины линии) можно стабилизировать, например, с помощью вспомогательного сигнала, отнесенного по частоте за пределы спектральной линии. Пропущенный через усилитель вспомогательный сигнал следует сбить с переданным по волноводу опорным, и продетектированное напряжение, зависящее от разности фаз сигналов, использовать для управления набегом фазы в тракте усилителя.

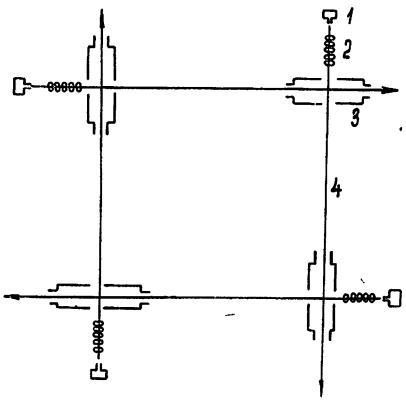


Рис. 2. Схема четырехпучкового мазера:
1—источник пучка, 2—сортирующая система, 3—резонатор, 4—молекулярный пучок.

Нами испытывалась подобная система, в которой для получения усиленных колебаний «молекулярного звона» применялась фазовая автоподстройка клистрона по «молекулярному звону» (использовалась готовая схема, описанная в [13]) Наличие значительных фазовых уходов в схеме ФАП сильно ограничивает долговременную стабильность частоты колебаний в такой системе. Поэтому она применялась лишь для проверки принципиальной работоспособности системы и снятия некоторых ее характеристик. Был получен надежный захват схемы и наблюдались синусоидальные биения с сигналом вспомогательного молекулярного генератора. Снималась зависимость частоты колебаний от перестройки резонатора, в котором получался «молекулярный звон»*. Крутизна перестройки настроечным стержнем в зависимости от расстояния между резонаторами приведена в таблице 1. Крутизна перестройки обычного молекулярного генератора с тем же резонатором была равна 200 *гц* на 0,01 *мм*.

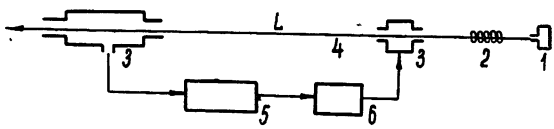


Рис. 3. Схема генератора с использованием узкой линии „молекулярного звона" в качестве элемента обратной связи:
1—источник пучка, 2—сортирующая система, 3—резонатор, 4—пучок, 5—усилитель, 6—фазовращатель.

Таблица 1

Расстояние между резонаторами L (*см*)	1	10	50
Крутизна перестройки (*гц* на 0,01 *мм*)	50	14	5,5

* При наличии усилителя первый по пучку резонатор может быть коротким и малодобротным, так что влияние изменения его параметров на частоту колебаний может быть сделано весьма малым.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Holuj, H. Daams, S. N. Kalra, J. Appl. Phys., **33**, 2370 (1962).
2. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, **8**, 158 (1963).
3. А. Ф. Мухамедгалиева, Г. М. Страховский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 824 (1965).
4. А. Ф. Мухамедгалиева, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, Письма в редакцию ЖЭТФ, **1**, 22 (1965).
5. В. С. Казачок, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **9**, 620 (1966).
6. G. Becker, Zs. angew. Phys., **15**, 281 (1963).
7. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
8. K. Shimoda, J. Phys. Soc. Japan, **12**, 1006 (1957); J. P. Gordon, Phys. Rev., **99**, 1253 (1955).
9. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
10. Г. Л. Сучкин, авторское свидетельство № 155240, приоритет, 1960.
11. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Радиотехника и электроника, **10**, 378 (1965).
12. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, Письма в редакцию ЖЭТФ, **2**, 6 (1965).
13. И. Л. Берштейн, Ю. А. Дрягин, В. Л. Сибиряков, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **2**, 130 (1959).
14. S. G. Kukolich, Phys. Rev., **138**, A1322 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 24 января 1966 г.

Примечания при корректуре. В настоящее время нами наблюдалась линия излучения при расстоянии два метра между резонаторами, которая полностью разрешилась на две компоненты, отстоящие на 1586 ± 80 *гц*.

УДК 621.378.33

К ВОПРОСУ О ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ МОЛЕКУЛ В ПУЧКОВОМ МАЗЕРЕ НА ФОРМАЛЬДЕГИДЕ

А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов

В работе [1] обнаружено влияние слабых постоянных электрического и магнитного полей на отсортированный пучок молекул, приводящее к изменению частоты и амплитуды колебаний аммиачного молекулярного генератора. Полученные зависимости были объяснены переориентацией в пространстве молекул, «выстроенных» в определенном порядке полем сортирующей системы. В связи с этим представляет интерес снятие характеристик процесса переориентации для формальдегидного мазера.

Были исследованы процессы переориентации в молекулярном генераторе на переходе $1_{01} - 0_{00}$ формальдегида CH_2O. Ранее из опытов на формальдегидном мазере с резонатором типа Фабри—Перо было выяснено, что из сортирующей системы вылетают молекулы с $M = 0$ и $M = \pm 1$ с соотношением численности 3 : 1 (ось квантования совпадает с осью пучка) [2]. При влете в резонатор с полем E_{010} взаимодействуют лишь молекулы, у которых $M = 0$. При наложении переориентирующего поля с равной вероятностью будут происходить переходы $M = 0 \to M = \pm 1$ и $M = \pm 1 \to M = 0$ и параметр возбуждения должен уменьшаться. При 100% переориентации параметр возбуждения должен быть втрое меньше исходного. При дальнейшем увеличении возмущения изменения параметра возбуждения будут иметь характер колебаний, затухающих из-за разброса молекул по скоростям.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Электродом, создающим слабое поле, служило колечко, охватывающее пучок молекул между кольцевой сортирующей системой и резонатором на тип колебания E_{010} на расстояниях 14 и 4 *мм* соответственно. Мазер работал в режиме усиления; измерялась зависимость параметра возбуждения (т. е. вероятность перехода молекул при неизменном пучке и сортирующем напряжении) от напряжения на кольце. Этот эффект является первичным: им обусловлено изменение частоты и амплитуды колебаний генератора. Полученные зависимости изображены на рис. 2*. Оказалось, что помещение даже незаряженного колечка уменьшало параметр возбуждения. При различных знаках напряжения на сортирующей системе (одна половина которой была заземлена) и колечке зависимость параметра возбуждения от напряжения на колечке согласуется с ожидавшейся. Пара-

* С квадрупольной системой зависимости имели тот же характер, но были менее регулярными благодаря асимметрии поля рассеяния.

метр возбуждения изменяется примерно втрое, что говорит о почти 100% переориентации. При одинаковых знаках напряжения параметр возбуждения меняется слабее и монотонно, что можно объяснить значительно менее резким изменением характера поля вблизи колечка в этом случае. Действительно, переориентирующее влияние кольца можно даже полностью устранить, подав на него потенциал, равный потенциалу, который создавался полем рассеяния в точке помещения кольца

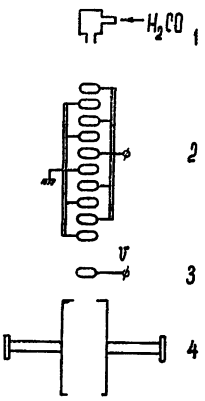


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1—источник пучка; 2—кольцевая сортирующая система; 3—дополнительный электрод; 4—резонатор.

С той же сортирующей системой, источником пучка и переориентирующим колечком проводились опыты с аммиачным молекулярным генератором на переходе $J = 3$, $K = 3$ $N^{14}H_3$ Для сохранения характера полей перед резонатором помещалась диафрагма с отверстием того же диаметра, что и предельные волноводы 4-*мм* резонатора. Генератор на аммиаке при этом легко запускался. Однако зависимость параметра возбуждения от напряжения на кольце была на аммиачном генераторе весьма слабой ($\sim 1\%$) и не содержала ряда осцилляций. После этого были проведены опыты на установке, копирующей установку [1], которые дали хорошо согласующиеся с [1] результаты. При этом была измерена величина максимального изменения параметра возбуждения на аммиаке, отсутствующая в [1]. Она оказалась порядка 20%, что существенно меньше, нежели в случае формальдегида. Интересно отметить, что масштабная модель конденсатора, использовавшегося для переориентации в [1], установленная в мазере на формальдегиде, в свою очередь, почти не влияла на вероятность перехода молекул формальдегида.

В аммиачном мазере переориентация молекул могла быть также вызвана магнитным полем порядка 1 *э*. Аналогичные опыты на формальдегидном мазере показали отсутствие переориентации магнитным полем до 50 *э*.

Были проведены контрольные опыты при выключенном сортирующем напряжении, когда в резонаторе мазера наблюдалась линия поглощения молекул в пучке. При этом подача напряжения на колечко никак не влияла на интенсивность линии поглощения, как и следовало ожидать, исходя из равновероятного распределения молекул по M в несортированном пучке. Этот опыт служит добавочным подтверждением того, что в эксперименте отсутствовали побочные явления и наблюдались именно эффекты переориентации молекул.

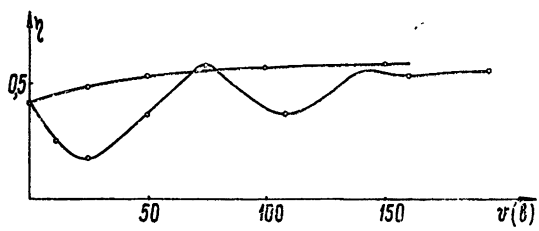


Рис. 2.

При работе с формальдегидным мазером было обнаружено, что слой намерзающего на вымороженные детали формальдегида сильно электризуется. Появление в связи с этим добавочных неконтролируемых полей в установке мазера изменяло степень переориентации молекул и приводило к медленным изменениям амплитуды и частоты генерации мазера. По-видимому, такой эффект может наблюдаться и в аммиачном мазере. Для улучшения долговременной стабильности частоты молекулярного генератора следует принимать меры, предохраняющие от «пролезания» полей намерзшего рабочего вещества в пространство между сортирующей системой и резонатором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, ЖЭТФ, **45**, 1768 (1963).
2. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Радиотехника и электроника, **10**, 378 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 24 января 1966 г.

УДК 621.396.677.7 : 621.3.011.2

ПРОВОДИМОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ЩЕЛЕЙ НА ЦИЛИНДРЕ

Б. А. Панченко

Известные результаты о проводимости продольных щелей, прорезанных на поверхности проводящего цилиндра, относятся в основном к активной составляющей полуволновых щелей [1, 2] и получены методом интегрирования вектора Умова—Пойтинга в волновой зоне.

Ниже приводятся формулы и результаты расчета для активной и реактивной составляющих полной проводимости продольной щели на поверхности кругового проводящего цилиндра, полученные методом наводимых МДС. Если в известной математической формулировке метода наводимых МДС выразить напряженность магнитного поля через функцию Грина, то собственная проводимость продольной щели S с распределением напряженности электрического поля в щели $E(r)$ может быть записана в виде функционала следующего вида:

$$Y = \int_S E(r)\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\int_S G(r, r')\,E(r')\,dS'dS, \tag{1}$$

где

$$G = \frac{j}{\pi^3 a^2 \omega\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos\left[m(\varphi-\varphi')\right]\int_0^{\infty}\frac{1}{\varkappa\left|H_m'(\varkappa a)\right|^2}\times$$
$$\times\exp\left(-\sqrt{\varkappa^2-k^2}\,|z-z'|\right)(\varkappa^2-k^2)^{-1/2}\,d\varkappa, \tag{2}$$

a — радиус цилиндра, $k = 2\pi/\lambda$, $\varkappa$ — волновое число, $H_m'(\varkappa a)$ — производная функция Ганкеля.

Расчеты производились для синусоидального распределения поля вдоль щели:

$$E(z) = \frac{1}{t}\sin\left(\frac{\pi}{l}z\right), \tag{3}$$

где z — текущая координата вдоль щели, l — длина щели, t — ширина щели.

После подстановки (2), (3) в (1) и интегрирования по φ и z получим

$$Y = j\frac{2}{\pi^3 a^2\omega\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left[\frac{\sin(mt/2a)}{(mt/2a)}\right]^2\int_0^{\infty}\left[\varkappa\left|H_m'(\varkappa a)\right|^2\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\,l\,\frac{k^2-(\pi/l)^2}{(\pi/l)^2+\varkappa^2-k^2}+\frac{\varkappa^2(\pi/l)^2}{[(\pi/l)^2+\varkappa^2-k^2]^2}\,\frac{1+\exp\left(-\sqrt{\varkappa^2-k^2}\,l\right)}{\sqrt{\varkappa^2-k^2}}\right]d\varkappa. \tag{4}$$

Выражение (4) удобно разбить на активную часть G и реактивную часть B полной проводимости и ввести новую безразмерную переменную интегрирования $\alpha = \varkappa/k$:

$$G = \frac{2}{\pi^3(ka)^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left[\frac{\sin(mt/2a)}{mt/2a}\right]^2\int_0^1\frac{1}{\alpha\left|H_m'(ka\alpha)\right|^2}\times$$
$$\times\alpha^2(\pi/kl)^2\left[(\pi/kl)^2-1+\alpha^2\right]^{-2}\left[1+\cos\left(\sqrt{1-\alpha^2}\,kl\right)\right](1-\alpha^2)^{-1/2}\,d\alpha; \tag{5}$$

$$B = \frac{2}{\pi^3(ka)^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left[\frac{\sin(mt/2a)}{mt/2a}\right]^2\left\{-\int_0^1\left[\alpha\left|H_m'(ka\alpha)\right|^2\right]^{-1}\times\right.$$
$$\times\left\langle\alpha^2(\pi/kl)^2\left[(\pi/kl)^2-1+\alpha^2\right]^{-2}\sin\left(\sqrt{1-\alpha^2}\,kl\right)(1-\alpha^2)^{-1/2}-\right.$$
$$\left.-\frac{kl}{2}\,\frac{1-(\pi/kl)^2}{(\pi/kl)^2-1+\alpha^2}\right\rangle d\alpha+\int_1^{\infty}\left[\alpha\left|H_m'(ka\alpha)\right|^2\right]^{-1}\left\langle\alpha^2(\pi/kl)^2\times\right. \tag{6}$$

$$\times [(\pi/kl)^2 - 1 + \alpha^2]^{-2} \left[1 + \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 - 1}\, kl\right)\right](\alpha^2 - 1)^{-1/2} + \frac{kl}{2} \frac{1 - (\pi/kl)^2}{(\pi/kl)^2 - 1 + \alpha^2} \Big\rangle d\alpha \Big\}.$$

Конкретные результаты получены путем численного интегрирования и учета конечного числа членов ряда в (5) и (6). Предварительно полученные выражения были несколько преобразованы — выделена особенность подынтегральных функций при $\alpha = 1$, второй интеграл в (6) был разбит на два с пределами интегрирования $1 - A$ и $A - \infty$. При вычислении последнего интеграла использовалось асимптотическое представление функций Ганкеля. Выбор величины A зависит от ka и m.

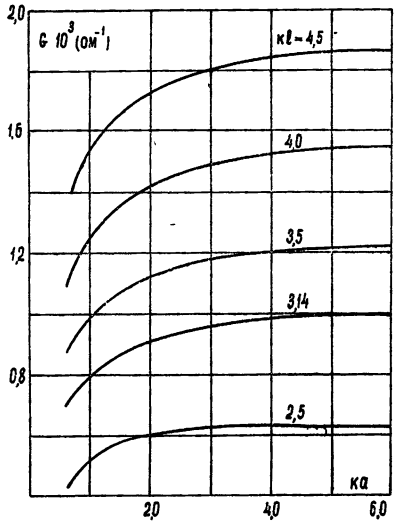


Рис. 1.

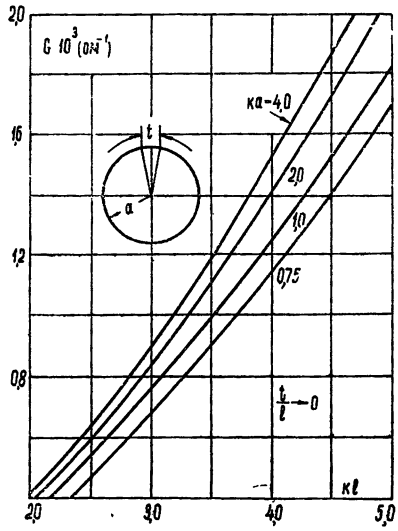


Рис. 2.

В виде графиков представлены результаты численных расчетов. На рис. 1—3 приводятся графики зависимости G и B от ka (kl = const) или kl (ka = const) для узких щелей ($t/l = 0{,}1$; 0,2). На рис. 4—5 для сравнительно толстого цилиндра $ka = 4{,}0$ приводятся проводимости широких щелей ($t/l = 0{,}1 \div 1{,}0$).

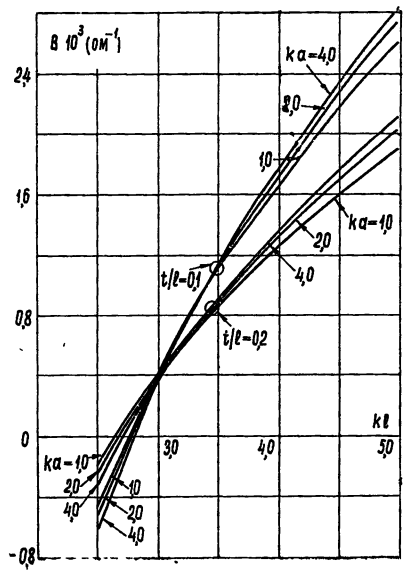


Рис. 3.

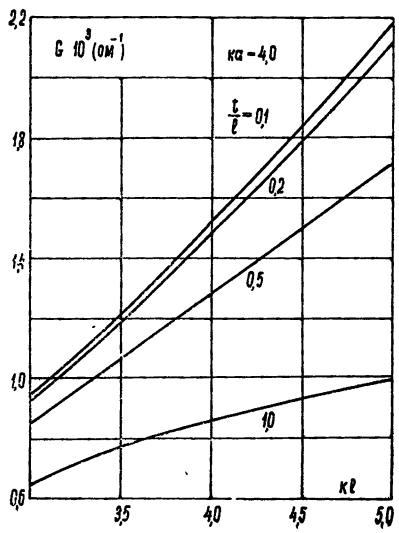


Рис 4.

Анализируя результаты, следует отметить слабую зависимость активной составляющей проводимости узких щелей от ширины щели. Резонансная длина щели уменьшается не только с увеличением ширины щели, но и с уменьшением радиуса цилиндра. Из рис. 3 видно также, что реактивная составляющая проводимости в большей мере зависит от ширины щели, чем от радиуса цилиндра. Отмеченное обстоятельство связано с локальным характером реактивной энергии, которая определяет реактивную часть проводимости. Очевидно, при инженерных расчетах для $ka \geqslant 4{,}0$ можно пользоваться величиной B для щели в плоском экране.

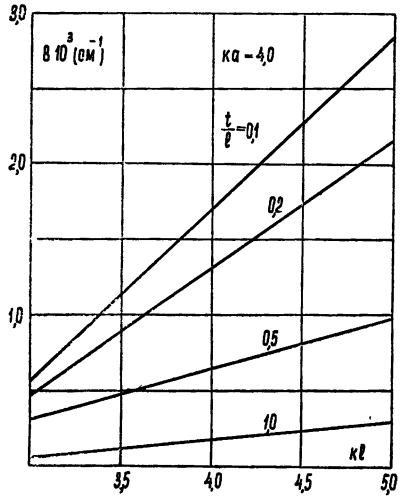


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1 М. Л Левин, ЖТФ, **21**, 772 (1951).
2. Д. Уэйт, Электромагнитное излучение из цилиндрических систем, изд. Сов. радио, М, 1963.

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
21 января 1966 г.

УДК 537.525.92 : 538.569

О РОЛИ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА ПРИ УСИЛЕНИИ ВНУТРЕННИХ ШУМОВЫХ ОРБИТ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ КВАДРУПОЛЬНОМ ПОЛЕ

В. А. Ванке, В. Б. Магалинский

Адлером, Ашкиным и Гордоном [1] рассмотрено действие объемного заряда на движение потока в целом и на поведение внутренних орбит отдельных электронов. Было показано, что однородные электрические поля входного и выходного устройств связи Кучча возбуждают движение потока в целом и не влияют на распределение отдельных электронов внутри потока. Неоднородное поле, возбуждаемое квадрупольной структурой, изменяется по интенсивности и направлению от точки к точке, вследствие чего «усиление шумовых орбит» отдельных электронов (по терминологии [1]) и движение центра масс сечения пучка (сигнала) существенно различно Было отмечено, что центр масс при наличии объемного заряда движется подобно одному электрону, не испытывающему кулоновского взаимодействия. Максимум усиления движения центра масс соответствует $\omega_{pe} = 2\omega_c$ (ω_{pe} — эффективная частота квадрупольного поля, ω_c — циклотронная частота). Для внутренних шумовых орбит отдельных электронов роль объемного заряда значительна. Теоретически и экспериментально показано, что резонансное усиление внутренних орбит, в отличие от усиления движения центра масс,

наступает при $\omega_{pe} = 2\omega_c''$, где $\omega_c'' = (\omega_c/2)\left[1 + \left(1 - \omega_q^2/\omega_c^2\right)^{1/2}\right]$ (ω_q — плазменная частота). Делается вывод о положительной роли объемного заряда, приводящего к ограничению усиления внутренних электронных орбит и, следовательно, к ограничению уширения диаметра пучка в квадрупольном поле.

Однако влияние величины объемного заряда на характер движения отдельного электрона оставался неясным. Отсутствовали также какие-либо рекомендации по выбору оптимального (или минимального) ω_q, при котором еще возможны большие значения коэффициента усиления прибора без уширения диаметра и преждевременного перехвата потока.

Ниже сделана попытка в той или иной мере ответить на эти вопросы.

Уравнение движения электрона внутри равномерно заряженного круглого цилиндрического пучка электронов, дрейфующего в постоянном и однородном магнитном поле при воздействии на него поперечного высокочастотного квадрупольного поля, получено в [1] и имеет вид

$$\ddot{\zeta}_{tt} - j\omega_c\dot{\zeta}_t - \frac{\omega_q^2}{2}\zeta = \Omega^2\zeta^* \exp\{j[\omega_{pe}(t - t_0) + \omega_p t_0]\}. \qquad (1)$$

Здесь ζ — комплексная координата электрона, описывающая его положение относительно центра масс сечения пучка, Ω^2 — параметр, характеризующий интенсивность высокочастотного квадрупольного поля, ω_p, ω_{pe} — соответственно частота и эффективная частота квадрупольного поля накачки, t_0 — момент влета электрона в квадруполь. (Подробнее об обозначениях и о модели электронного пучка см. в [1].).

Удобнее за начало отсчета времени выбрать $t_0 = 0$ и ввести обозначения

$$2\omega_0 = \omega_{pe},\ \theta = \omega_0 t,\ \mu = \frac{\omega_q^2}{2\Omega^2},\ \varepsilon = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2},\ \Delta = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\omega_0 - \omega_c}{\omega_0}\right). \qquad (2)$$

Тогда уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\zeta}_{\theta\theta} - j\dot{\zeta}_\theta = \varepsilon\left(\zeta^* e^{2j\theta} + \mu\zeta - j\Delta\dot{\zeta}_\theta\right). \qquad (3)$$

Теперь, когда уравнение (1) приведено к стандартному виду уравнения с малым параметром ε, целесообразно воспользоваться методом усреднения по времени в той форме, которую ему придал Капица [2], и искать решение в виде*

$$\zeta = \alpha(\theta) + \beta(\theta)e^{j\theta}. \qquad (4)$$

Укороченные уравнения для α и β, согласно [2], получаются в этом случае следующими**:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\tau &= j\mu\alpha, \\ \dot{\beta}_\tau &= -j\beta^* - js\beta, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $\tau = \varepsilon\theta$, $s = \mu + \Delta$. Если положить $\alpha = Re^{j\Theta}$, $\beta = \rho e^{j\varphi}$, то из (5) находим

$$\begin{aligned} \dot{R}_\tau &= 0, \quad \dot{\rho}_\tau = -\rho\sin 2\varphi, \\ \dot{\Theta}_\tau &= \mu, \quad \dot{\varphi}_\tau = -\cos 2\varphi - s. \end{aligned} \qquad (6)$$

Таким образом, синхронный радиус вращения электрона R остается неизменным в квадрупольном поле и при наличии кулоновских сил объемного заряда, однако фаза синхронного движения Θ испытывает дрейф с постоянной угловой скоростью $\mu\varepsilon\omega_0$, независимо от характера циклотронного движения. Поскольку эта скорость едина для всех электронов, расположенных внутри пучка, пучок в целом приобретает азимутальное вращение вокруг своей оси с угловой скоростью $\mu\varepsilon\omega_0$.

---

* Нормированная расстройка Δ отнесена в (3) к возмущающей «силе» (правая часть (3)); тем самым подчеркивается, что речь идет о резонансном случае, когда $|1 - \omega_c/\omega_0| \lesssim \varepsilon$, в силу чего решение (3) удобно искать в форме колебаний на второй субгармонике внешней силы.

** Усреднение по периоду $2\pi/\omega_0$, проведенное в (5), соответствует учету эффектов первого порядка малости по ε, а также введению сглаженных функций α и β (т. е. исключению малых высокочастотных вибраций относительно основного движения; подробнее см. в [2]).

Влияние кулоновских сил на циклотронное движение (ρ, φ) полностью эквивалентно наличию некоторой расстройки $\Delta > 0$ (в уравнения для ρ и φ входит лишь $\mu+\Delta$), причем при $s = 0$ эффекты взаимно компенсируются, а усиление внутренних орбит электронного пучка происходит точно так же, как и при отсутствии объемного заряда и расстройки ($\mu = 0$, $\Delta = 0$). Случай $s=0$ соответствует значению циклотронной частоты

$$\omega_c = \omega_0 + \omega_q^2/2\omega_0, \tag{7}$$

при которой, согласно [1], имеет место параметрический резонанс $\omega_{pe} = 2\omega_c''$ и происходит экспоненциальное усиление внутреннего орбитального движения.

Из последних двух уравнений системы (6) следует, что возможно положение равновесия $\varphi_\tau = 0$, $\rho_\tau = 0$ (при этом $|s| = 1$); однако несложно убедиться, что это равновесие оказывается неустойчивым. Кроме того, как это видно из последнего уравнения системы (6), состояние $\varphi_\tau = 0$ невозможно при $|s| > 1$. Это соответствует, очевидно, случаю, когда силы, вызванные объемным зарядом и расстройкой, превалируют над силой, действующей на электрон со стороны высокочастотного квадрупольного поля, и захват электрона последним оказывается невозможным.

Для более детального анализа циклотронного движения удобно перейти в прямоугольную систему отсчета ξ, η, z, вращающуюся в плоскости XY с угловой частотой ω_0, ось z которой совмещена с осью циклотронной спирали. Полагая для этого $\beta = \xi + j\eta$, из системы (5) находим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{\tau'} &= -p\,\eta, \\ \dot{\eta}_{\tau'} &= -p^{-1}\,\xi, \end{aligned} \tag{8}$$

где $p = \sqrt{\dfrac{1-s}{1+s}}$, $\tau' = \tau\sqrt{1-s^2}$. Деля почленно в (8) первое уравнение на второе и интегрируя, получим траектории движения электрона в выбранной системе отсчета:

$$\xi^2 - p^2\eta^2 = \text{const}. \tag{9}$$

Решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \operatorname{ch}\tau' - p\,\eta_0 \operatorname{sh}\tau', \\ \eta &= -p^{-1}\,\xi_0 \operatorname{sh}\tau' + \eta_0 \operatorname{ch}\tau'. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\xi_0 = \rho_0 \cos\varphi_0$, $\eta_0 = \rho_0 \sin\varphi_0$ — координаты электрона в момент влета в квадруполь.

Поскольку в основном интерес представляет расширение поперечных размеров пучка в целом, а отдельные электроны в пучке имеют, вообще говоря, произвольное распределение начальных фаз φ_{0i}, удобно ввести средний по фазе φ_0 коэффициент усиления электронных орбит, который из (10) получается равным

$$g(\tau, s) = \overline{(\rho/\rho_0)^2}^{\varphi_0} = \operatorname{ch}^2\tau' + \frac{1+s^2}{1-s^2}\operatorname{sh}\tau'. \tag{11}$$

Формулы (9), (11) позволяют судить как о характере траекторий движения электрона, так и об изменении среднего размера его орбиты при различных значениях параметров s и τ. Рассмотрим наиболее характерные области, производя градацию по параметру s.

1. $|s|<1$. Траектории движения электронов—гиперболы, однако в отличие от случая $s = 0$ они становятся неравнобочными при $s \neq 0$. Имеет место фазовая фокусировка — все электроны приобретают с ростом τ одну из двух устойчивых фаз. Коэффициент усиления $g(\tau, |s| < 1)$, определяемый выражением (11), монотонно падает с ростом s и растет с увеличением τ.

2. $|s|>1$. Траектории движения — эллипсы, приведенные к осям ξ, η. Направление движения и положение большой полуоси определяется знаком s. Силы объемного заряда и расстройки превалируют над силой, действующей со стороны высокочастотного квадрупольного поля; последняя оказывает лишь периодическое возмущающее воздействие. Фазовая фокусировка отсутствует полностью. Коэффициент усиления

$$g(\tau, |s| > 1) = \cos^2\tau'' + \frac{s^2+1}{s^2-1}\sin^2\tau'', \tag{12}$$

где $\tau'' = \tau\sqrt{s^2-1}$, является периодической функцией τ.

3. $|s| = 1$. Точка перехода от режима монотонного усиления по τ к периодическому. Траектории движения — прямые $\xi = \text{const}$ либо $\eta = \text{const}$; направление движечия и вид прямых определяется знаком s. Имеет место слабая фазовая фокусировка. Усиление монотонно по τ, коэффициент усиления равен

$$g(\tau, |s| = 1) = 1 + 2\tau^2. \tag{13}$$

4. $|s| \gg 1$. Траектории движения близки к окружностям. Высокочастотное квадрупольное поле практически не влияет на внутренние движения отдельных электронов в пучке. Усиление и фазовая фокусировка отсутствуют; коэффициент усиления, согласно (12), равен

$$g(\tau, |s| \gg 1) \simeq 1. \tag{14}$$

На рис. 1 показаны траектории движения электронов в системе отсчета ξ, η для некоторых конкретных значений параметра s.

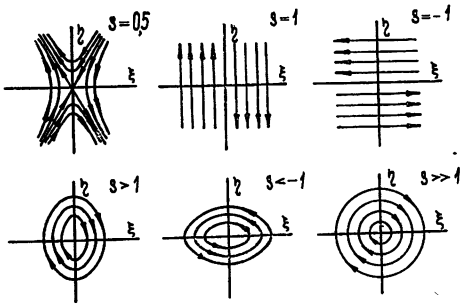


Рис. 1.

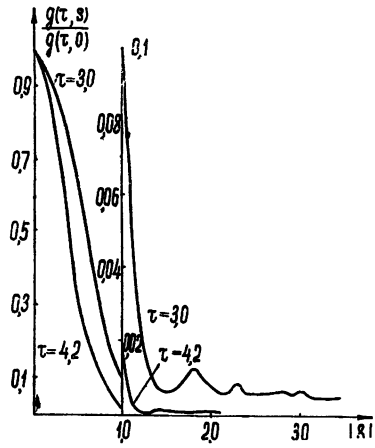


Рис. 2.

Рис. 1. Траектории движения электрона в системе координат ξ, η для некоторых значений параметра s.

Рис. 2. Вид функции $g(\tau, s)/g(\tau, 0)$ (для значений $|s| \geqslant 1$ масштаб по оси ординат увеличен в десять раз).

Рис. 2 иллюстрирует вид функции $g(\tau, s)/g(\tau, 0)$ в зависимости от параметра s для двух значений τ, равных 3,0 и 4,2 и соответствующих коэффициенту усиления волны сигнала по мощности приблизительно 20 и 30 *дб*. Как это видно из последнего рисунка, при значениях $|s| \gtrsim 2 \div 3$ усиление внутренних шумовых орбит исчезает практически полностью. Поэтому при разработке усилительных устройств подобного типа разумно выбирать $\omega_q^2 \gtrsim (4 \div 6)\,\Omega^2$ при заданной ω_q^2, снижая для этого Ω^2 и увеличивая время взаимодействия пучка с квадрупольным полем для сохранения коэффициента усиления прибора. Тогда в обычном режиме $\Delta = 0$ для внутренних шумовых орбит $g(\tau, \mu \gtrsim 2 \div 3) \simeq 1$ и возможны большие значения коэффициента усиления волны сигнала $g_s(\tau) \simeq g(\tau, 0)/2$ без расширения диаметра потока и его преждевременного перехвата.

Авторы выражают свою признательность В. М. Лопухину и С. П. Кантюку за внимание к работе и ее полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Adler, A. Ashkin, E. I. Gordon, J. Appl. Phys., **32**, 672 (1961).
2. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, **1**, гл. 1, изд. АН СССР, М., 1962.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
3 ноября 1965 г.,
после исправления
21 февраля 1966 г.

УДК 536 55

О ВОЗМОЖНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ИНВЕРСНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ СРЕДЫ

И. Л. Берштейн

При исследовании сред, в которых может иметь место инверсия, желательно знать степень инверсии, точнее говоря, значение величины $x=\dfrac{N_n/g_n}{N_m/g_m}$, где n и m—соответственно верхний и нижний уровни энергии молекулы, переход между которыми рассматривается, а N_i и g_i — населенность и кратность вырождения уровня $i=n,\ m$. Величина x связана с эффективной температурой среды (для перехода $n \to m$) соотношением $\exp(-\hbar\omega/kT)=x$, где ω — частота, соответствующая этому переходу. При $x<1$ $T>0$, а при $x>1$ $T<0$.

В статье [1] указывается метод определения из опытных данных значения x для возбужденной электрическим разрядом гелий-неоновой смеси (рассматривался переход $3S_2$—$3P_4$ неона, соответствующий длине волны 3,39 *микрона*). Для определения величины x измерялись (сбоку разрядной трубки) интенсивности спонтанного излучения с уровня $3S_2$ и с уровня $3P_4$. Затем разрядная трубка при помощи внешних зеркал (образующих интерферометр Фабри — Перо) генерировала лазерное излучение на волне 3,39 *микрона*; при этом вновь наблюдались интенсивности указанных спонтанных излучений. По изменению отношения этих интенсивностей и в предположении, что при генерации $x \simeq 1$, авторы нашли значение $x(x-1)^{-1}$ в отсутствие генерации.

Нам представляется такое определение значения x некорректным по следующим причинам. В общем случае при генерации x не близок к единице. Кроме того, весьма существенно, что в газовой среде из-за эффекта Допплера имеет место явление неоднородного уширения. Это приводит к тому, что в спектральной линии перехода при лазерной генерации появляются «провалы» (по терминологии Беннета [2]), причем отношение ширины «провала» ко всей ширине линии зависит, грубо говоря, от соотношения естественной и допплеровской ширин линии. Наличие «провалов» приводит к тому, что количество молекул на том или ином уровне является функцией скорости молекул. Если даже принять, что при генерации в середине «провала» $x \simeq 1$, то это не может быть отнесено ко всей линии перехода. Поэтому практически невозможно сравнить в общем случае населенности уровней при наличии и в отсутствие генерации.

Основная цель настоящей заметки — обратить внимание на сравнительно простую возможность экспериментального определения степени инверсии (величины x) в среде без перехода в режим генерации. Основой метода является то обстоятельство, что при изменении величины параметра, приводящего систему к инверсии, населенности уровней обычно меняются не пропорционально друг другу. Для иллюстрации обратимся к рис. 1 работы [3]. Здесь по оси абсцисс отложена величина разрядного тока через гелий-неоновую смесь. Кривые B, C и D характеризуют интенсивности спонтанного излучения соответственно с уровней $3S_2$, $2P_4$ и $3P_4$ неона, определяя (в разных масштабах) населенности этих уровней. Из хода кривых B, C и D легко видеть, что с изменением фактора возбуждения (тока разряда) населенности уровней $2P_4$ и $3P_4$ изменяются существенно не пропорционально изменению населенности уровня $3S_2$. Это и позволяет определить x для переходов $3S_2$—$2P_4$ и $3S_2$—$3P_4$.

Пусть наблюдается спонтанное излучение с интересующих нас уровней n и m, и результаты измерений дают значения I_n и I_m при некотором значении параметра возбуждения. Изменим этот параметр, и новые значения будем отмечать штрихом сверху. Запишем

$$I_n = \alpha N_n; \qquad I'_n = \alpha N'_n;$$
$$I_m = \beta N_m; \qquad I'_m = \beta N'_m, \tag{1}$$

где α и β — неизвестные коэффициенты*. Для определения значений x и x' следует еще определить величину усиления на частоте перехода $n \to m$, даваемую системой в линейном режиме (т. е. при достаточно малом сигнале на входе) Обозначим соответствующие коэффициенты усиления G и G'. Тогда имеем

$$\ln G = \gamma\left[N_n - \frac{g_n}{g_m} N_m\right]; \quad \ln G' = \gamma\left[N'_n - \frac{g_n}{g_m} N'_m\right], \tag{2}$$

где γ — некоторый коэффициент.

---

* Такая запись предполагает, разумеется, достаточную малость оптической толщины среды вдоль направления спонтанного излучения. Это, например, всегда имеет место при наблюдении сбоку разрядной трубки.

Из (1) и (2) легко находим

$$\frac{x'}{x}=\frac{I_n'}{I_n}\frac{I_m}{I_m'};\quad \frac{x'-1}{x-1}=\frac{I_m}{I_m'}\frac{\ln G'}{\ln G}, \tag{3}$$

откуда следует, что

$$x=\left(1-\frac{I_m}{I_m'}\frac{\ln G'}{\ln G}\right)\left(\frac{I_n'}{I_n}-\frac{\ln G'}{\ln G}\right)^{-1}\frac{I_m'}{I_m},$$
$$x'=\left(1-\frac{I_m}{I_m'}\frac{\ln G'}{\ln G}\right)\left(1-\frac{I_n}{I_n'}\frac{\ln G'}{\ln G}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Если бы населенности уровней изменялись строго пропорционально, то $\frac{I_n'}{I_n}=\frac{I_m'}{I_m}=\frac{\ln G'}{\ln G}$; при этом формулы (4) не дают определенного решения.

Определение x и x' по формулам (4) может быть выполнено и при отсутствии инверсии, т. е. в случае, если значения x или x' (одно из них или оба вместе) меньше единицы. Заметим также, что при малом усилении значения G и G' близки к единице, и отношение $\ln G'/\ln G$ с достаточной точностью может быть определено с помощью периодической модуляции параметра возбуждения; то же относится, разумеется, и к отношениям I_n'/I_n, I_m'/I_m.

Для иллюстрации применения развитых соображений воспользуемся также рис. 2 работы [3]. На этом рисунке дается $\lg G$ для слабого сигнала на волне 3,39 *микрона* в функции тока разряда. С помощью кривых B и D рис. 1 и рис. 2 легко найти по формулам (4), что при токе разряда 20 *ма* значение $x=4{,}8$, чему соответствует $kT/\hbar\omega\simeq -0{,}64$, а при токе разряда 50 *ма* $x=3{,}36$, чему соответствует $kT/\hbar\omega\simeq -0{,}83$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Paananen, H. Statz, D. L. Bobroff, A. Adams, J. Appl. Phys. Letters, **4**, N 8, 149 (1964).
2. W. R. Bennet, J. Phys. Rev., **126**, N 2, 580 (1962);
См. перевод в сб. Лазеры, ИЛ., М., 1963, стр 207.
3. A. D. White, E. I. Gordon, Appl. Phys. Letters, **3**, N 11, 197 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 4 марта 1966 г.

УДК 621.319.41 — 2

К ВОПРОСУ О ФОКУСИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

А. С. Шаповалов, И. Г. Козлов

Теоретическая оценка фокусирующих свойств поля. В работе [1] были рассмотрены фокусирующие и дисперсионные свойства электростатического поля цилиндрического конденсатора в случае, когда слаборасходящийся поток заряженных частиц вводится под острым углом к оси цилиндров (см. рис. 1). Однако в указанной работе не было получено аналитическое выражение для величины изображения точечного источника электронов, весьма удобное при анализе фокусирующих свойств, сферической аберрации и удельной дисперсии поля по энергии, а также при оценке разрешающей способности спектрометра, где в качестве диспергирующего элемента использовано поле цилиндрического конденсатора [2].

Определение величины изображения Δx_0 при заданных угле раствора пучка частиц α, параметре

$$\xi = \left[-\frac{y}{U_0}\frac{dU}{dy}\right]^{-1/2} = \left[\frac{U_0}{\Delta U_m}\ln\frac{R_0}{r_0}\right]^{1/2}, \tag{1}$$

характеризующем неоднородность поля, и соответствующем данному ξ угле фокусировки θ_Φ можно произвести непосредственным вычислением разности дальностей полета x_0 электронов, введенных в поле под углами θ_Φ и $\theta_\Phi \pm \alpha/2$ (здесь U_0 — потенциал внутреннего цилиндра конденсатора, ΔU_m — тормозящая разность потенциалов между обкладками конденсатора, U — функция распределения потенциала поля конденсатора, R_0, r_0 — радиусы соответственно внешнего и внутреннего цилиндров) Однако подобная операция весьма затруднительна из-за сложности выражения для x_0/r_0 [1]

$$x_0/r_0 = 4\xi \exp(\xi^2 \sin^2\theta)\cos\theta \int_0^{\xi\sin\theta} e^{-z^2}\,dz, \tag{2}$$

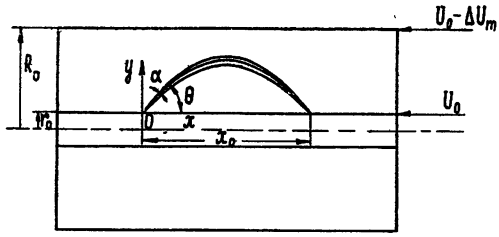


Рис. 1.

где θ — угол ввода пучка в конденсатор. Поэтому упростим выражение (2) при $\theta = \theta_\Phi \pm \alpha/2$, разложив входящие в него косинус, показательную функцию и интеграл с переменным верхним пределом в точке $\theta = \theta_\Phi$ в ряды по степеням α. Ограничившись при разложении членами с α в степени не выше третьей и перемножив полученные выражения, найдем соотношение для $x_0(\theta_\Phi \pm \alpha/2)/r_0$:

$$\frac{x_0(\theta_\Phi \pm \alpha/2)}{r_0} = \frac{x_0(\theta_\Phi)}{r_0}(1 - C_2\alpha^2 \mp C_3\alpha^3), \tag{3}$$

где

$$C_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}p + \frac{1}{2}\xi^2\sin^2\theta - \frac{1}{4}\xi^2\cos^2\theta, \tag{4}$$

$$C_3 = \frac{\xi^2\sin 2\theta}{24}\left[3 + p + \xi^2\sin^2\theta + (3p-2)\xi^2\cos^2\theta\right] +$$

$$+ (\operatorname{tg}\theta - p\operatorname{ctg}\theta)\left[\frac{(\xi^2\sin 2\theta)^2}{16} + \frac{\xi^2\cos 2\theta}{12} - \frac{1}{48}\right] - \tag{5}$$

$$- \frac{p\operatorname{ctg}\theta}{16}(\operatorname{tg}^2\theta - 1) + \frac{\xi^2\operatorname{ctg}\theta}{24}(p + \sin^2\theta),$$

$$p = 2k - 1 - 2\xi^2\sin^2\theta,$$

$$2k = 1 + 2\xi^2\sin^2\theta + \xi\sin\theta\exp(-\xi^2\sin^2\theta)\left(\int_0^{\xi\sin\theta} e^{-z^2}\,dz\right)^{-1}.$$

Используя выражение (3), можно определить величину изображений источника Δx_0, образованных электронами, введенными в поле в пределах углов θ_Φ, $\theta_\Phi + \alpha/2$ и θ_Φ, $\theta_\Phi - \alpha/2$:

$$\Delta x_0 = x_0(C_2\alpha^2 \pm C_3\alpha^3). \tag{6}$$

Коэффициент C_1, который должен стоять в выражениях (3) и (6) перед α, отличается постоянным множителем от соотношения, выражающего условие фокусировки [1]; следовательно, при $\theta = \theta_\Phi$ он равен нулю, а фокусировка частиц по углу ввода является фокусировкой первого порядка. Верхний знак в выражении (6) берется при определении изображения, образованного электронами, введенными в конденсатор в пре-

делах углов θ_Φ, $\theta_\Phi + \alpha/2$, нижний знак — при определении изображения, соответствующего углам ввода в пределах θ_Φ, $\theta_\Phi - \alpha/2$. Из выражения (6) следует, что величина изображения, соответствующего «верхнему» углу полураствора пучка частиц (θ_Φ, $\theta_\Phi + \alpha/2$), несколько больше, чем для «нижнего» угла полураствора (θ_Φ, $\theta_\Phi - \alpha/2$). Численно это было показано в работе [1]. Угол ввода пучка можно уменьшить по сравнению с углом фокусировки на такую величину $\delta \ll 1$, что коэффициент C_1 будет очень близок к нулю, а коэффициент C_3 обратится в нуль. При таком оптимальном угле ввода $\theta_{opt} = \theta_\Phi - \delta$ выражение для Δx_0 примет вид

$$\Delta x_0 = x_0 C_2 \alpha^2. \qquad (7)$$

Величины коэффициентов C_2 и C_3 определяются, как это видно из выражений (4) и (5), углом ввода пучка θ и величиной параметра ξ. На рис. 2 представлена зависимость коэффициентов C_2 (кривая I) и C_3 (кривая II) от величины параметра ξ при угле ввода пучка частиц θ, равном углу фокусировки θ_Φ. При $\xi \to 0$ (случай вырождения поля цилиндрического конденсатора в однородное поле плоского конденсатора) коэффициенты C_2 и C_3 равны соответственно 1/2 и 0, и выражение для Δx_0 совпадает с соответствующим выражением для плоского конденсатора [1, 3, 4]. При увеличении параметра ξ коэффициенты C_2 и C_3 растут, и величина изображения, соответствующая заданным значениям угла α, увеличивается.

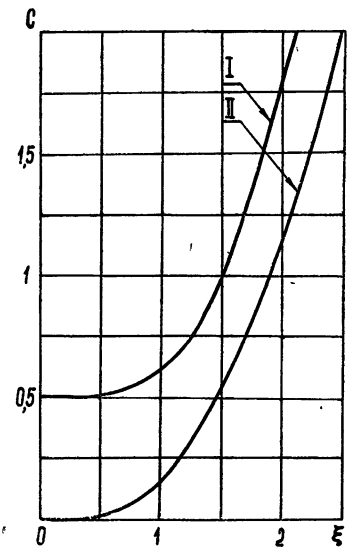


Рис. 2. Зависимость коэффициентов C_2 (кривая I) и C_3 (кривая II) от параметра ξ при $\theta = \theta_\Phi$.

Задавая значения параметра ξ и определяя из графиков рис. 2 или с помощью выражений (4) и (5) коэффициенты C_2 и C_3, входящие в соотношение (6), можно получить простое выражение для величины изображения источника электронов Δx_0, подобное тем, которые существуют для поля плоского конденсатора, конденсатора Юза—Рожанского [5, 6], сферического конденсатора [7, 8]. Величины Δx_0, вычисленные численным методом [1] и с помощью выражений (6), (7) для $\theta = \theta_\Phi$ и $\theta = \theta_{opt}$, хорошо совпадают.

Зная выражение для Δx_0, можно определить влияние величины угла раствора исследуемого пучка частиц α на разрешающую способность спектрометра, использующего в качестве анализирующего элемента рассматриваемое поле цилиндрического конденсатора. Соответствующее выражение с учетом технологических погрешностей, допущенных при изготовлении спектрометра, имеет вид

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + p_x}{k x_0} + \frac{C_2 \alpha^2}{k} + \frac{\Delta d}{2 R_0 r_0 \ln R_0/r_0}\left[R_0 \left| 1 - \frac{\ln R_0/r_0}{k} \right| + r_0\right], \qquad (8)$$

где ΔU — интервал неразрешимых спектрометром значений энергии, Δx_1, Δx_2 — ширина соответственно входной и выходной щелей спектрометра [2], $p_x = l_1 \cos(l_1 \widehat{\ } x) + l_2 \cos(l_2 \widehat{\ } x)$ — величина, вызванная непараллельностью щелей спектрометра, l_1, l_2 — длины соответственно входной и выходной щелей, $(l_1 \widehat{\ } x)$ и $(l_2 \widehat{\ } x)$ — углы, образуемые соответственно входной и выходной щелями с осью цилиндров конденсатора, k — коэффициент увеличения дисперсии по энергии в поле цилиндрического конденсатора при вводе частиц под острым углом к оси цилиндров [1] по сравнению с дисперсией в поле плоского конденсатора и конденсатора Юза — Рожанского, $\Delta d/2$ — максимальная неоднородность поверхностей внутреннего и внешнего цилиндров, вызванная несовершенством технологии.

При $\xi \to 0$ из соотношения (8) получается соответствующее выражение для разрешения плоского конденсатора. Сравнение соотношения (8) с выражениями для разрешающей способности плоского конденсатора и конденсатора Юза—Рожанского показывает, что использование рассматриваемого поля в качестве анализирующего элемента спектрометра для исследования слаборасходящихся пучков заряженных частиц обеспечивает более высокую разрешающую силу прибора благодаря достаточно хорошей фокусировке и высокой дисперсии частиц по энергии.

Экспериментальное определение угла фокусировки. Известно [1], что установка угла фокусировки в цилиндрическом анализаторе оказывает существенное влияние на его работу. В связи с этим было экспериментально проверено полученное теоретически в [1] условие фокусировки по направлению в цилиндрическом конденсаторе с осевым

вводом частиц для параметра неоднородности поля $\xi=1{,}2$. Значение $\xi=1{,}2$ наиболее интересно, так как при этом величина удельной дисперсии по энергии максимальна [1]. Проверка состояла в экспериментальном определении угла фокусировки $\theta_ф$.

Экспериментальная конструкция, использованная для этого исследования, точно повторяла конструкцию, описанную в работе [2], отличаясь от нее только размерами щелей ($\Delta x_1=\Delta x_2=0{,}3$ *мм*) и тем, что угол ввода пучка в анализатор мог меняться в пределах от 35° до 80°. Это было достигнуто тем, что конструкция анализатора с помощью стеклянных изоляторов жестко крепилась на дне коварового стакана. В дно стакана был впаян перемещающий механизм сильфонного типа (см. рис. 3). Подвижный щток сильфонного узла под давлением микрометрического винта мог поступательно перемещаться на 8 *мм*. Для увеличения линейного перемещения и перевода его

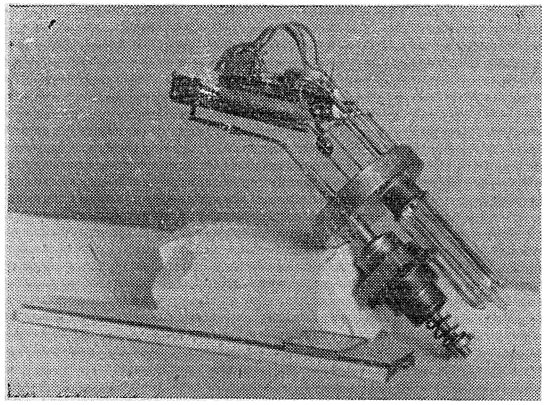


Рис. 3 Анализатор с подвижной электронной пушкой.

.в угловое конец штока соединялся с системой рычагов, которые приводили в движение электронный прожектор (такой же, как и в [2]). Электронный прожектор крепился на двух подвижных траверзах, ось вращения которых находилась на уровне входной щели анализатора. Для определения угла ввода пучка рядом с электронным прожектором на внутренней обкладке конденсатора была помещена угловая шкала. Угол ввода определялся положением на этой шкале тонкой указательной стрелки, соединенной с прожектором. Получающееся значение угла ввода контролировалось и уточнялось переводом линейных перемещений штока подвижного механизма, фиксируемых микрометром, в угловые перемещения При этом ошибка в установке и определении угла ввода была меньше 1°. Электрическое питание к подвижному электронному прожектору подводилось с помощью гибких полос ленточного тантала. Общий вид экспериментальной конструкции с подвижным электронным прожектором представлен на рис. 3. После того, как на коваровый стакан напаивалась стеклянная колба, конструкция приобретала вид электровакуумного прибора.

Исследование было проведено при непрерывной откачке геттерноинным насосом при высоком вакууме ($P=5\cdot10^{-8}$ тор). Проверка правильности угла $\theta_ф$, найденного из условия фокусировки [1], осуществлялась путем определения коэффициентов связи ускоряющего U_0 и тормозящего ΔU_m напряжений, при которых максимальное число

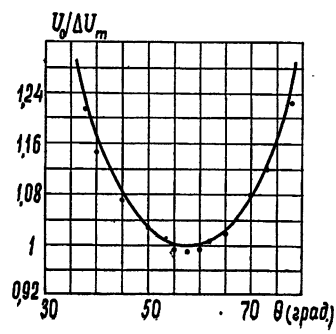


Рис. 4. Теоретическая кривая и экспериментальные точки, показывающие зависимость коэффициента связи от угла ввода электронного пучка в анализатор.

частиц данной энергии проходит на коллектор, в зависимости от угла ввода θ. При $\theta = \theta_ф$ коэффициент связи минимален. Рассчитанная кривая зависимости коэффициента от угла ввода электронов представлена на рис. 4. Минимум кривой соответствует $\theta = \theta_ф = 58°$. Экспериментальное значение коэффициента связи для каждого угла ввода определялось как среднее значение пяти коэффициентов, определенных при изменении ускоряющего напряжения от 100 *в* до 500 *в*. Экспериментальные значения коэффициента связи указаны точками рядом с теоретической кривой на рис, 4. Как видно из рисунка, экспериментальные значения коэффициента весьма близки к теоретической кривой: их отклонение находится в пределах точности измерения коэффициента связи (1%). Минимальное экспериментальное значение коэффициента соответствует $\theta = 58°$, что с точностью, равной точности установки угла ввода в данной конструкции, подтверждает правильность условия фокусировки и величины угла $\theta_ф$ при $\xi = 1{,}2$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность П. В. Голубкову за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Козлов, А. С. Шаповалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 531 (1964).
2. А. С. Шаповалов, И. Г. Козлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 775 (1965).
3. G. D. Yarnold, H. C. Bolton, J. Sci. Instr., **26**, 38 (1949).
4. G. A. Harrower, Rev. Sci. Instr., **26**, 850 (1955).
5. A. L. Hughes, V. Rojansky, Phys. Rev., **34**, 284 (1929).
6. A. L. Hughes, J. H. McMillen, Phys. Rev., **34**, 291 (1929).
7. E. M. Purcell, Phys. Rev., **54**, 818 (1938).
8. C. P. Browne, D. S. Craig R. M. Williamson, Rev. Sci. Instr., **22**, 952 (1951).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
22 октября 1965 г.