

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Жевакин С. А., Наумов А. П. Поглощение электромагнитных волн в диапазоне 3 мм — 7,5 мм в земной атмосфере	433
Кисляков А. Г. Эффективная длина пути и средняя температура атмосферы	451
Богомолов Ю. В. О проникновении электромагнитного поля в магнитоактивную плазму	462
Липеровский В. А. и Цытович В. Н. Нелинейное взаимодействие волн в плазме при наличии интенсивных поперечных волн	469
Кормилицин Б. Т. К теории распространения электромагнитных волн в ограниченной плазме	479
Гиоргадзе Н. П., Хирсели Е. М., Цинцадзе Н. Л. О распадном взаимодействии волн в магнитоактивной плазме	489
Орлов Ю. И. О некоторых особенностях лучевой теории распространения цилиндрических и сферических волн в слабонеоднородной плазме I	497
Гречишкин В. С., Гордеев А. Д., Айнбиндер Н. Е. Квадрупольная релаксация в многоуровневой системе	507
Беспалов В. И., Фрейдман Г. И. Спектральные и энергетические характеристики гигантских импульсов	513
Беспалов В. И., Богатырев Ю. К. Оптический квантовый генератор в режиме переключения добротности резонатора	525
Бутылкин В. С., Гуревич Г. Л., Хейфец М. И., Хронопуло Ю. Г. О влиянии резонансного поля на работу двухфотонного лазера	538
Бутылкин В. С., Гуревич Г. Л., Хейфец М. И., Хронопуло Ю. Г. О генерации второй гармоники в резонансном лазере	545
Фрейдман Г. И. Об удвоении частоты сходящихся и частично когерентных пучков света	550
Иванов Е. А. О дифракции поля продольного дипольного излучателя на двух параллельных круговых цилиндрах	561
Брюховецкий А. С. К теории дифракции света на ультразвуке	576
Барегамян В. А. Дифракция электромагнитных волн на металлических решетках с анизотропным диэлектриком	588
Малахов А. Н. К спектрально-корреляционному анализу сигналов с неинтегрируемыми спектрами	595
Аптэк Ю. Э., Лебедев А. В. Предельные технические возможности измерения флуктуаций фазы (частоты) генераторов дискриминаторами СВЧ	608

Краткие сообщения и письма в редакцию

Орнатская О. И., Альбер Я. И. К вопросу о тепловой истории Луны	615
Виглин А. С., Довгопол С. П. К теории нестационарных явлений в ядерном магнитном резонансе	617
Казачок В. С. Линия излучения рамзеевского типа в молекулярном генераторе с разнесенными резонаторами	620
Малахов А. Н. О флуктуациях в кварцевом генераторе	622
Малахов А. Н. К вопросу о форме и ширине спектральной линии колебаний при нестационарных флуктуациях частоты	625
Бегиашвили Г. А., Монин Ю. С. Излучение заряда, движущегося в случайно-неоднородной анизотропной среде	627
Литвак А. Г. К вопросу о самофокусировке электромагнитных волн в анизотропных нелинейных средах	629
Столяров С. Н. Об одном выводе уравнений для потенциалов и векторов Герца в электродинамике движущихся сред	631
Кузнецов М. И., Яблоков Ю. А. К вопросу о корреляции шумов в магнетронах в предосцилляционном режиме	634
Сабаяев Е. Ф. Устойчивость в большом тривиального решения уравнений с отклоняющимся аргументом	637

И н ф о р м а ц и я

Этации статей, опубликованных в журнале «Геомagnetизм и аэрономия», т. V, № 6, 1965	640
---	-----

УДК 621 371.166.22

ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДИАПАЗОНЕ 3 мм ÷ 7,5 мм В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

С. А. Жевакин, А. П. Наумов

Выполнены расчеты коэффициентов поглощения мономеров водяного пара и кислорода в диапазоне $\lambda=3 \div 7,5$ мм для различных высот над уровнем моря, зимних и летних условий. Показано, что вне резонансов O_2 и H_2O сезонные вариации суммарного коэффициента поглощения достигают 30 ÷ 40%. С возрастанием высоты над уровнем моря вклад водяного пара в суммарный коэффициент поглощения падает достаточно быстро. Найдены характеристические высоты поглощения мономеров водяного пара (H_{H_2O}) и кислорода (H_{O_2}) вдали от резонанса: летом $H_{H_2O} = 1,56$ км, $H_{O_2} = 4,8$ км, зимой $H_{H_2O} = 1,48$ км, $H_{O_2} = 4,3$ км. В областях резонансов O_2 и H_2O величины H_{O_2} , H_{H_2O} существенно зависят от длины волны. Зависимость суммарного коэффициента поглощения от высоты имеет неэкспоненциальный характер.

ВВЕДЕНИЕ

Миллиметровые и сантиметровые радиоволны при распространении в атмосфере испытывают ослабление в гидрообразованиях (дождь, туман, снег, град и т. д.) и молекулярное поглощение в газах, обладающих электрическими или магнитными дипольными моментами. Ослабляющее влияние гидрообразований рассмотрено в статьях [1, 2, 10]. Молекулярное поглощение миллиметровых и сантиметровых радиоволн определяется кислородом O_2 и водяными парами (см., например, [3]). Можно ожидать, что вклад водяного пара в суммарный коэффициент поглощения складывается из двух частей — поглощения мономерами и поглощения димерами водяного пара [32]. Обе эти части, однако, могут быть сравнимы между собой по величине лишь на малых высотах над уровнем моря. Уже на высоте $h \approx 2$ км поглощение димерами должно стать на порядок меньше поглощения мономерами. В настоящей работе при рассмотрении коэффициента поглощения водяного пара учитывался лишь вклад его мономерной части, что, в силу сказанного, оправдано для высот $h > 2 \div 4$ км.

В работах [3–6] были вычислены коэффициенты поглощения основных поглощающих газовых компонент при некоторых средних атмосферных условиях. В [6] приведены также результаты расчетов эквивалентной длины пути радиоволн в кислороде для политропной модели атмосферы. Характеристическая высота коэффициента поглощения водяных паров ранее вычислялась в [7].

В случае экспоненциального уменьшения коэффициента поглощения γ_i с высотой h характеристическая высота H_i , определяемая выражением

$$\gamma_i(h) = \gamma_{i,0} e^{-hH_i} \quad (1)$$

($\gamma_{i,0}$ — коэффициент поглощения на уровне моря, $\gamma_i(h)$ — коэффициент

поглощения на высоте h), и эквивалентная длина пути радиоволн H_i^* , определяемая соотношением

$$H_i^* = \frac{1}{\gamma_{i,0}} \int_0^{\infty} \gamma_i(h) dh, \quad (2)$$

суть одно и то же. В этом легко убедиться, раскрыв равенство (2) с помощью выражения (1). Из дальнейшего будет видно, что понятие характеристической высоты поглощения, имеющее смысл лишь в случае экспоненциального закона изменения поглощения с высотой, для мономеров водяного пара хорошо применимо для высот $h < 16$ км. Что касается молекулярного кислорода, то, хотя соотношение (1) и нарушается для коэффициента поглощения кислорода γ_{O_2} на некоторых высотах h , все же с достаточной степенью точности (см. рис. 10) для γ_{O_2} можно пользоваться понятием характеристической высоты по крайней мере до высот $h \approx 10$ км, что только и представляет практический интерес в большинстве случаев. Для суммарного коэффициента поглощения атмосферы γ_A на высотах $h \approx 0 \div 2$ км и $h \approx 8 \div 12$ км (см. рис. 11) имеет место неэкспоненциальная зависимость γ_A от высоты. Понятие же эквивалентной длины пути радиоволн применимо, разумеется, для любого закона изменения $\gamma_i(h)$.

Согласно оценкам [8, 33], характеристические высоты поглощения мономеров водяного пара и кислорода H_{H_2O} и H_{O_2} проявляют некоторую зависимость от времени года, что является следствием сезонного изменения соответствующих коэффициентов поглощения на различных высотах.

Сезонные вариации коэффициентов поглощения O_2 , H_2O и характеристических высот поглощения представляют интерес для ряда геофизических задач. Особую актуальность приобретают эти вопросы в диапазоне $\lambda \approx 5$ мм. Дело в том, что практически не меняющееся от сезона к сезону и по высоте (до высот $h \leq 90$ км) процентное содержание кислорода в земной атмосфере (в отличие от водяного пара), а также наличие интенсивного спин-вращательного спектра поглощения O_2 могут быть использованы, в частности, для определения температурного режима атмосферы как с помощью метеорологических спутников, принимающих собственное излучение земной атмосферы [34], так и с помощью аналогичных наземных наблюдений [35]. Эти данные, в свою очередь, необходимы для составления точных прогнозов погоды. Однако качественные и достаточно полные расчеты сезонных вариаций коэффициентов поглощения O_2 , H_2O и соответствующих характеристических высот, несмотря на практические потребности (некоторые из них перечислены выше), отсутствуют в отечественной и зарубежной литературе. Стремясь восполнить указанный пробел, мы вычислили коэффициенты поглощения мономеров водяных паров и кислорода на различных высотах зимой и летом для временной стандартной атмосферы 1960 г. (ВСА-60) $50 \div 60^\circ$ с. ш. [9] в диапазоне $\lambda = 3 \div 7,5$ мм (частота $\nu = 40 \div 100$ Гц) и определили характеристические высоты как для поглощения отдельными газовыми компонентами, так и для суммарного коэффициента поглощения при тех же условиях.

1. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ МОНОМЕРОВ ВОДЯНОГО ПАРА

Расчет коэффициента поглощения мономеров водяного пара в диапазоне $\lambda = 3 \div 7,5$ мм выполнялся в настоящей работе по методике, описанной в [3-5]:

$$\begin{aligned} \gamma_{H_2O}(\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}) = & \frac{0,26085 \cdot 10^5}{G(T)} \rho \frac{1}{\lambda^2} \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_{ij}} \beta_{ij} |\exp(-2\pi\nu_i \hbar c/kT) - \\ & - \exp(-2\pi\nu_j \hbar c/kT)| \cdot 0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{H_2O-N_2} \left(\frac{T}{300}\right)^{-n_{ij}} \frac{P}{760} \times \\ & \times \left\{ \left[\left(\frac{1}{\lambda_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \right]^2 + 4 \left[0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{H_2O-N_2} \left(\frac{T}{300}\right)^{-n_{ij}} \frac{P}{760} \right]^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Таблица 1
Временная стандартная атмосфера 1960 г. (BCA-60) [9]

h (км)	Температура T (°K)		Плотность ρ _в (г · см ⁻³)	
	Зима, 50—60° с. ш.	Лето, 50—60° с. ш.	Зима (умер. широты)	Лето (умер. широты)
1	2	3	4	5
0	261,7	288,3	1,29 · 10 ⁻³	1,213 · 10 ⁻³
1	261,0	284	1,167	1,090 · 10 ⁻³
2	259,0	279,0	1,043 · 10 ⁻³	9,64 · 10 ⁻⁴
3	254,5	273,0	9,32 · 10 ⁻⁴	8,94
4	248,5	266,0	8,31	8,14
5	243,0	260,0	7,50	7,31
6	237,5	253,0	6,65	6,60
7	231,5	247,7	5,87	5,85
8	225,5	240,5	5,24	5,26
9	221,0	234,6	4,60	4,70
10	217,7	229,5	4,05	4,20
11	216,8	225,5	3,53	3,70
12	216,0	222,8	3,17	3,25
13	216,0	221,0	2,60	2,82
14	216,0	220,0	2,26	2,43
15	215,8	220,0	1,92	2,09
16	215,8	220,0	1,65	1,79
17	215,8	220,0	1,40	1,54
18	215,8	220,0	1,20	1,31
19	215,8	220,3	1,02 · 10 ⁻⁴	1,12 · 10 ⁻⁴
20	215,8	220,6	8,68 · 10 ⁻⁵	9,47 · 10 ⁻⁵
21	215,8	221,5	7,37	8,00
22	215,8	222,8	6,30	6,82
23	215,8	224,0	5,35	5,78
24	216,0	225,0	4,57	4,91
25	216,1	225,8	4,00	4,19
26	216,2	226,8	3,36	3,54
27	216,6	227,7	2,88	2,94
28	217,0	228,5	2,48	2,54
29	217,4	229,2	2,10	2,16
30	217,8	230,0	1,77 · 10 ⁻⁵	1,82 · 10 ⁻⁵
35	—	—	7,14 · 10 ⁻⁶	8,36 · 10 ⁻⁶
40	—	—	3,60	3,61
45	—	—	1,95 · 10 ⁻⁶	1,95 · 10 ⁻⁶

В формуле (3) сохранены все обозначения, формулы (15) работы [3]. Множитель 0,9 в формуле (3) учитывает относительный по сравнению

с соударениями $\text{H}_2\text{O}-\text{N}$ вклад соударений $\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}$ и $\text{H}_2\text{O}-\text{O}_2$ в уширение спектральных линий водяного пара в атмосфере (см. оценки в [3]). Выполненные недавно расчеты [11] полуширин линий $(\Delta\nu/c)_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}$ и $(\Delta\nu/c)_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{O}_2}$ по теории Андерсона подтвердили справедливость множителя 0,9, принятого в [3]. Отметим, что экспериментальные данные о полуширинах спектральных линий $\lambda_{ij} = 1,64 \text{ мм}$ [36] и $\lambda_{ij} = 0,92 \text{ мм}$ [37] удовлетворительно согласуются с полуширинами этих спектральных линий, вычисленными по теории Андерсона.

Расчеты коэффициента поглощения мономеров водяного пара выполнены для зимы и лета для высот $h = 0, 2, 4, \dots, 30 \text{ км}$. Мы использовали зависимости плотности воздуха $\rho_a (z \cdot \text{см}^{-3})$ и температуры $T (^\circ\text{K})$ от высоты, характеризующие ВСА-60 для $50^\circ \div 60^\circ$ широты [9] (см. таблицу 1). При этом давление P и абсолютная влажность ρ , входящие в формулы (3) и (8) (см. раздел 2), находились из соотношений [12]

$$P(\text{мм рт. ст.}) = 2,153 \cdot 10^3 \rho_a T, \quad (4)$$

$$\rho(z \cdot \text{м}^{-3}) = \frac{288,86 P q}{T(0,62197 + 0,37803 q)}, \quad (5)$$

где q — удельная влажность ($z \cdot z^{-1}$).

Расчеты коэффициента поглощения мономеров $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ выполнялись для двух случаев распределения удельной влажности с высотой.

Модель 1. Согласно [13], полагалось

$$q(h) = \begin{cases} q_0 \exp(-\alpha_0 h), & 0 \leq h \leq 16 \text{ км} \\ q_1 \exp[\alpha_1(h-h_1)], & 16 \text{ км} < h \leq 30 \text{ км} \end{cases}$$

где $\alpha_0 = 0,48 \text{ км}^{-1}$, $\alpha_1 = 0,24 \text{ км}^{-1}$, $h_1 = 16 \text{ км}$, $q_1 = 0,46197 \cdot 10^{-3} q_0$. Величина q_0 считалась равной $1,5 \cdot 10^{-3} z \cdot z^{-1}$ в зимних условиях и $9,4 \cdot 10^{-3} z \cdot z^{-1}$ в летних условиях [12].

Модель 2. Согласно [13], также полагалось

$$q(h) = \begin{cases} q_0 \exp(-\alpha_0 h), & 0 \leq h \leq 16 \text{ км} \\ q_1, & 16 \text{ км} < h < 75 \text{ км} \end{cases}$$

величины q_0 , q_1 , α_0 в модели 2 принимали те же значения, что и в модели 1.

Два-три года тому назад многие исследователи склонялись к предпочтительности модели 1 распределения удельной влажности с высотой [13], но сейчас, по-видимому, ситуация изменилась. Здесь мы отметим, что разница в описании зависимости $q(h)$ в моделях 1 и 2 проявляется лишь на больших высотах ($h > 16 \text{ км}$). Там абсолютная влажность столь мала, что коэффициенты поглощения паров воды для разных моделей $q(h)$, хотя и могут отличаться друг от друга даже на порядок, но эта разница не имеет практического значения, ибо $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} \approx 10^{-6} \div 10^{-8} \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ (см. таблицу 2).

Формула (3) справедлива лишь для случая, если уширение спектральных линий определяется молекулярными соударениями, а другими факторами уширения (эффектом Допплера, естественной шириной линии) можно пренебречь. Оценки, выполненные в разделе 2, показывают, что даже для кислорода на высотах $h \approx 30 \text{ км}$ с вполне достаточной степенью точности можно считать молекулярные соударения единственным источником уширения линий. В силу соотношения $\Delta\nu_{\text{O}_2} < \Delta\nu_{\text{H}_2\text{O}}$ сказанное и подавно справедливо для водяного пара.

На рис. 1 изображен коэффициент поглощения мономеров водяного пара, вычисленный для зимы и лета по формуле (3) в диапазоне

Таблица 2

Коэффициент поглощения водяного пара (γ_{H_2O}) в $dB \cdot км^{-1}$ на частотах 40 ГГц и 100 ГГц для моделей I и II распределения удельной влажности с высотой ($h=18-30 км$) в зимних и летних условиях (ВСА-60)

В Ы С О Т А (км)

ν (ГГц)	Модель $q(h)$	18		20		22		24	
		Зима	Лето	Зима	Лето	Зима	Лето	Зима	Лето
40	I	$0,8508 \cdot 10^{-7}$	$0,6216 \cdot 10^{-6}$	$0,7089 \cdot 10^{-7}$	$0,5170 \cdot 10^{-6}$	$0,6014 \cdot 10^{-7}$	$0,4228 \cdot 10^{-6}$	$0,5034 \cdot 10^{-7}$	
	II	$0,5264 \cdot 10^{-7}$	$0,3846 \cdot 10^{-6}$	$0,2714 \cdot 10^{-7}$	$0,1979 \cdot 10^{-6}$	$0,1425 \cdot 10^{-7}$	$0,1002 \cdot 10^{-6}$	$0,7376 \cdot 10^{-8}$	
100	I	$0,5148 \cdot 10^{-6}$	$0,3744 \cdot 10^{-5}$	$0,4287 \cdot 10^{-6}$	$0,3110 \cdot 10^{-5}$	$0,3636 \cdot 10^{-6}$	$0,2537 \cdot 10^{-5}$	$0,3039 \cdot 10^{-6}$	
	II	$0,3185 \cdot 10^{-6}$	$0,2317 \cdot 10^{-5}$	$0,1641 \cdot 10^{-6}$	$0,1191 \cdot 10^{-5}$	$0,8615 \cdot 10^{-7}$	$0,6010 \cdot 10^{-6}$	$0,4455 \cdot 10^{-7}$	

Продолжение табл. 2

В Ы С О Т А (км)

ν (ГГц)	Модель $q(h)$	24		26		28		30	
		Лето	Зима	Зима	Лето	Зима	Лето	Зима	Лето
40	I	$0,3464 \cdot 10^{-6}$	$0,4219 \cdot 10^{-7}$	$0,2787 \cdot 10^{-6}$	$0,3514 \cdot 10^{-7}$	$0,2152 \cdot 10^{-6}$	$0,2877 \cdot 10^{-7}$	$0,1770 \cdot 10^{-6}$	
	II	$0,5078 \cdot 10^{-7}$	$0,3820 \cdot 10^{-8}$	$0,2527 \cdot 10^{-7}$	$0,1965 \cdot 10^{-8}$	$0,1208 \cdot 10^{-7}$	$0,9956 \cdot 10^{-9}$	$0,6143 \cdot 10^{-8}$	
100	I	$0,2072 \cdot 10^{-5}$	$0,2585 \cdot 10^{-6}$	$0,1661 \cdot 10^{-5}$	$0,2112 \cdot 10^{-6}$	$0,1275 \cdot 10^{-5}$	$0,1728 \cdot 10^{-6}$	$0,1047 \cdot 10^{-5}$	
	II	$0,3038 \cdot 10^{-6}$	$0,2344 \cdot 10^{-7}$	$0,1507 \cdot 10^{-6}$	$0,1185 \cdot 10^{-7}$	$0,7159 \cdot 10^{-7}$	$0,5997 \cdot 10^{-8}$	$0,3655 \cdot 10^{-7}$	

$\nu = 40 \div 100$ ГГц ($\lambda \approx 3 \div 7,5$ мм) для ряда высот над уровнем моря (модель 1 распределения удельной влажности). Качественный ход величины $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ на частотах $\nu = 40 \div 100$ ГГц для распределения удельной влажности по высоте будет таким же, как и для модели 1 (см. рис. 1). Что касается количественных значений $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ для модели 2 во всем диапазоне $\nu = 40 \div 100$ ГГц, то о них можно судить по значениям коэффициента поглощения на частотах 40 ГГц и 100 ГГц, приведенным в таблице 2 для обеих моделей $q(h)$.

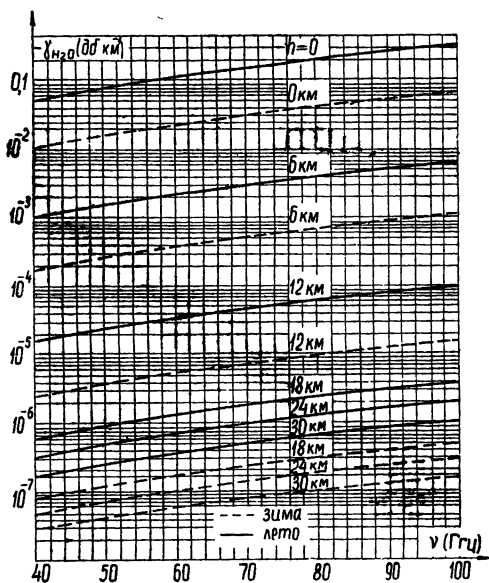


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения мономеров водяного пара $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ от частоты ν в диапазоне 40–100 ГГц, вычисленная для различных времен года и различных высот над уровнем моря (модель атмосферы ВСА-60; модель 1 распределения удельной влажности по высоте).

Так как в настоящее время надежно установлено, что результаты расчета по формуле (3) на миллиметровых волнах вне спектральных линий водяного пара меньше экспериментальных результатов на уровне моря ($h = 0$) примерно в 1,5–2 раза, то для нахождения истинного коэффициента поглощения водяного пара при принятых атмосферных условиях на высоте $h = 0$ нужно данные рис. 1 домножить на фактор 1,5–2 (см. рис. 5 в [5])*. Дискуссия полученных здесь результатов содержится в разделе 5 настоящей статьи.

2. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ КИСЛОРОДА

Расчет коэффициента поглощения кислорода γ_{O_2} выполнялся в настоящей работе по методике, данной в [6], за исключением описания нерезонансного поглощения. Поскольку выражение Дебая, которым обычно описывается нерезонансное поглощение $\gamma_{\text{нр}}$, на самом деле не имеет никакого отношения к упомянутому механизму поглощения (см. [6, 14, 15]), мы использовали полуэмпирическую формулу (7) для $\gamma_{\text{нр}}$. Исходными результатами для ее вывода служили измерения коэффициента поглощения O_2 на волнах $\lambda \geq 3,2$ см [14, 16–18] и $\lambda \approx 1,33$ мм и 2,18 мм [19]. Сопоставляя измеренные значения γ_{O_2} с вычисленной резо-

* Если расхождение экспериментальных и теоретических коэффициентов поглощения водяного пара связано с вкладом димеров водяного пара [32], то, из-за быстрого убывания концентрации димеров с высотой, введение поправочного фактора в вычисленный коэффициент поглощения мономеров паров H_2O (см. рис. 1 и табл. 2) на высотах $h \geq 6$ км не требуется.

нансной частью поглощения, можно убедиться, что на указанных длинах волн последняя является пренебрежимо малой и, следовательно, экспериментальные величины γ_{O_2} нужно связывать только с нерезонансным поглощением O_2 . Правда, в работе [19] содержатся сведения лишь о полном (т. е. обусловленном как водяным паром, так и молекулярным кислородом) вертикальным ослаблении на волнах $\lambda \approx 2,2$ мм и 1,33 мм. Однако из данных [19] легко определить величину γ_{O_2} , которую мы отождествляем с величиной $\gamma_{нр}$. Соответствующая обработка результатов [19] выполнена в [20].

Эмпирическая формула для нерезонансного поглощения $\gamma_{нр}^0$ при $P = 760$ мм рт. ст. и $T = 300^\circ K$ в диапазоне $\nu = 40 \div 100$ Гцц имеет вид*

$$\gamma_{нр}^0 (\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}) = 0,022 + 1,02 \cdot 10^{-3}(\nu - 40). \quad (6)$$

Из формулы (18) работы [15] следует, что в области резонанса $\gamma_{нр}(P) \sim P^2$, а вне резонанса $\gamma_{нр}(P) \sim P^{3**}$. Мы также полагали вне резонанса $\gamma_{нр} \sim (1/T)^{9/2}$ [15]. С учетом изложенного в спектральных областях $\nu = 40 \div 55$ Гцц и $\nu = 65 \div 100$ Гцц можно считать

$$\gamma_{нр}(P, T) = \gamma_{нр}^0 \left(\frac{P}{760} \right)^3 \left(\frac{300}{T} \right)^{9/2}. \quad (7)$$

Полный коэффициент поглощения кислорода

$$\gamma_{O_2} (\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}) = APT^{-3} \nu^2 \Sigma_K \{ F_{K+} \mu_{K+}^2 + F_{K-} \mu_{K-}^2 \} A_K + \gamma_{нр}(P, T), \quad (8)$$

где

$$A = 2,6742, \quad F_{K\pm} = \frac{4\nu_{K\pm}^2 \Delta\nu_{K\pm}}{(\nu_{K\pm}^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \Delta\nu_{K\pm}^2},$$

$$\mu_{K+}^2 = \frac{K(2K+3)}{K+1}, \quad \mu_{K-}^2 = \frac{(K+1)(2K-1)}{K},$$

$$A_K = \exp[-2\pi B \hbar c K(K+1)/kT],$$

ν — частота внешнего поля в Гцц, P и T — соответственно давление в мм рт. ст. и абсолютная температура, B — вращательная константа молекулы O_2 , равная $1,44$ см⁻¹, K — орбитальное квантовое число молекулы O_2 .

Полуширина спектральной линии атмосферного кислорода

$$\Delta\nu_{K\pm} = \alpha_{K\pm} P(0,21 + 0,78\beta) \left(\frac{T}{300} \right)^{-n_{K\pm}}. \quad (9)$$

Согласно [21-23], предполагалось $\beta = 0,90$, а $n_{K\pm} = 0,85$. Принимая во внимание перекрытие спектральных линий O_2 в области $\nu \approx 60$ Гцц, можно считать в среднем для этих линий [6], что

* Наибольшие отклонения от указанной зависимости следует ожидать в области $\nu \approx 60$ Гцц, но при нормальных атмосферных условиях на этих частотах нерезонансное поглощение составляет лишь около 0,1% от резонансного [6].

** Перекрытие спектральных линий, смещающихся по частоте во время соударений из-за зееман-расщепления в межмолекулярном магнитном поле (подробнее см. [15, 20]), приведет к тому, что, как и для резонансной части поглощения [6], величина $1/\tau_1$ (τ_1 — время между соударениями) будет пропорциональна P^N . Здесь N лишь приблизительно равно 1 и, следовательно, вне резонанса O_2 $\gamma_{нр} \sim P^{N+2}$. Оценки, выполненные нами с учетом формул (10), дали значение $N \approx 6/7$. В дальнейшем, однако, вне резонанса O_2 используется соотношение $\gamma_{нр} \sim P^3$, что дает погрешность в характеристических высотах H_{O_2} , не превышающую примерно 15%.

$$(\alpha_{K\pm})_{\text{cp}} = 0,00117 \text{ ГГц} (\text{мм рт. ст.})^{-1} \quad 270 \text{ мм рт. ст.} \leq P \leq 760 \text{ мм рт. ст.},$$

$$(\alpha_{K\pm})_{\text{cp}} = 0,00195 - 0,312 \cdot 10^{-5} (P - 20), \quad 20 \text{ мм рт. ст.} \leq P < 270 \text{ мм рт. ст.}, \quad (10)$$

$$(\alpha_{K\pm})_{\text{cp}} = 0,00195 \text{ ГГц} (\text{мм рт. ст.})^{-1} \quad P < 20 \text{ мм рт. ст.}$$

Исключение составляет $\alpha_{1-} = 0,00195 \text{ ГГц} \cdot (\text{мм рт. ст.})^{-1}$ для всех давлений P (перекрывание спектральных линий в области $\nu_{1-} \approx 118,7 \text{ ГГц}$ отсутствует — резонансные частоты остальных квантовых переходов O_2 расположены далеко от ν_{1-}). В расчете использовались резонансные частоты $\nu_{K\pm}$, заимствованные из [24] см. также таблицу 1 в [20]).

Расчетная формула (8) справедлива, как и формула (3), лишь тогда, когда молекулярные столкновения определяют уширение спектральных линий O_2 , а другими факторами уширения (эффектом Допплера, естественным уширением) можно пренебречь. Действительно, молекулярные столкновения в диапазоне $\lambda > 1 \text{ мм}$ вносят значительно больший вклад в уширение, чем эффект Допплера (и подавно больший, чем естественное уширение) даже на высотах $h \approx 30 \text{ км}$. Так, зимой на этой высоте полуширина линии, обусловленная столкновениями, составляет $\Delta\nu_{\text{ст}} = 1,44 \text{ МГц}$ (см. формулу (9)), а доплеровская полуширина $\Delta\nu_D = 0,054 \text{ МГц}$ (см. формулу (13.2) в [25]), т. е. отношение $\Delta\nu_D/\Delta\nu_{\text{ст}} \approx 3,7\%$. Еще меньше отношение $\Delta\nu_D/\Delta\nu_{\text{ст}}$ для водяных паров на этих волнах и высоте $\approx 30 \text{ км}$, ибо для водяного пара $\Delta\nu_{\text{ст}} \approx 30 \text{ МГц}$, а $\Delta\nu_D < 0,1 \text{ МГц}$. Интересно отметить, что в диапазоне $\lambda \approx 10 \div 20 \mu$ уже на высоте $h \approx 20 \text{ км}$ значения $\Delta\nu_{\text{ст}}$ и $\Delta\nu_D$ для линий водяного пара сравнимы между собой.

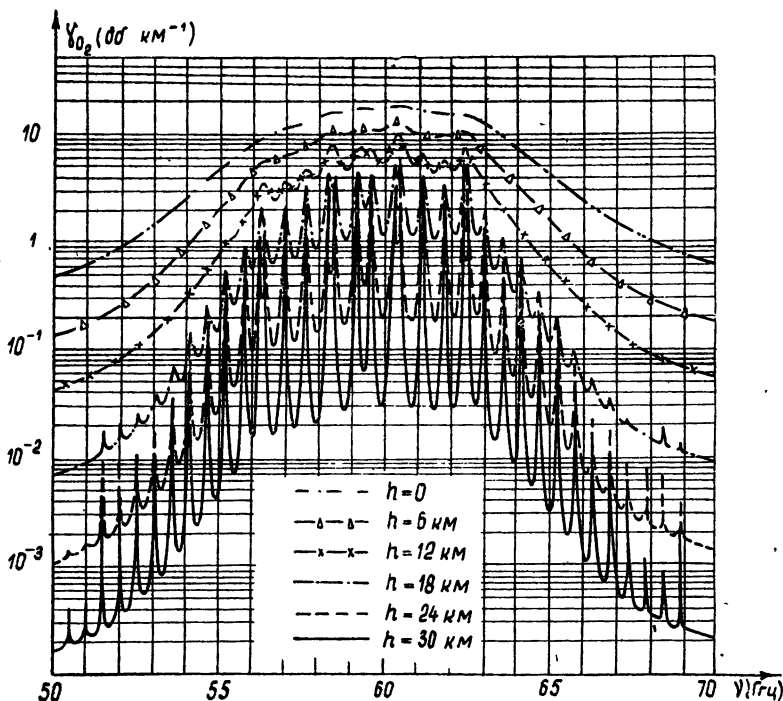


Рис. 2. Зависимость коэффициента поглощения кислорода γ_{O_2} от частоты ν в диапазоне $50 \div 70 \text{ ГГц}$, вычисленная для различных высот над уровнем моря в зимних условиях (модель атмосферы ВСА-60).

Результаты расчета коэффициента поглощения O_2 по формуле (8) для временной стандартной атмосферы 1960 г. представлены на рис. 2—6. Краткая дискуссия полученных результатов содержится в разделе 5.

3. КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

В [3] показано, что примесные атмосферные газы CO , NO , NO_2 , N_2O , O_3 , обладающие электрическими дипольными моментами и, следовательно, вращательными переходами на миллиметровых и сантиметровых волнах, дают вклад в суммарный коэффициент поглощения атмосферы на уровне моря, не превышающий 0,1%. Из перечисленных газов только концентрация озона растет с высотой до $h \approx 20 \div 30$ км. Но резонансные частоты O_3 приходятся лишь на концы спектральной области $\nu = 40 \div 100$ ГГц (1_0-2_{-2} , $\nu_{ij} = 42,833$ ГГц; $12_{-8}-13_{-2}$, $\nu_{ij} = 43,654$ ГГц; $2_{-2}-2_0$, $\nu_{ij} = 96,229$ ГГц), и поэтому на высотах $h \leq 30$ км суммарный коэффициент поглощения атмосферы γ_A полностью определяется поглощением в водяном паре и кислороде атмосферы.

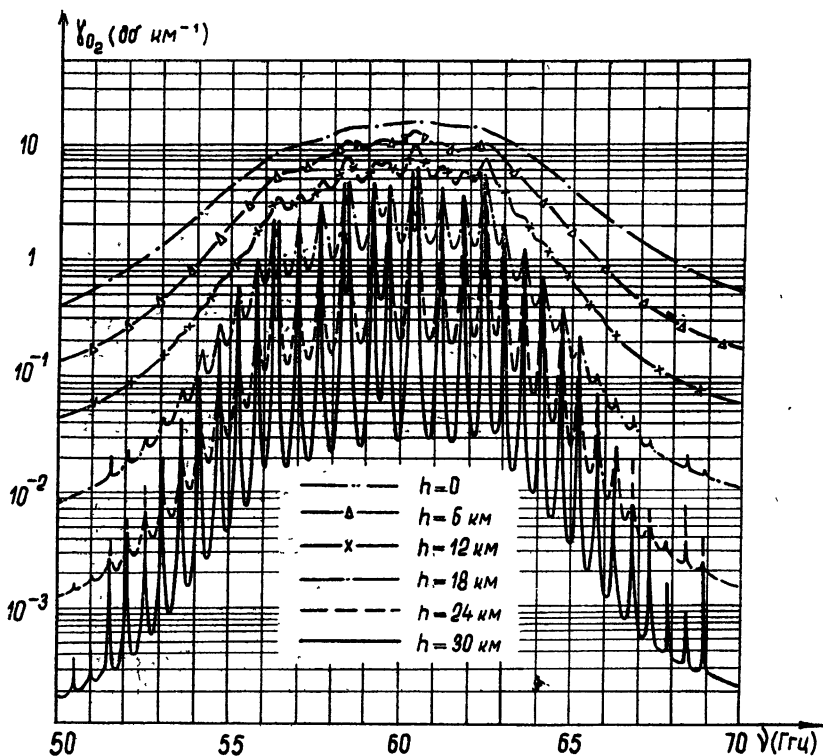


Рис. 3. Зависимость коэффициента поглощения кислорода γ_{O_2} от частоты ν в диапазоне $50 \div 70$ ГГц, вычисленная для различных высот над уровнем моря в летних условиях (модель атмосферы ВСА-60).

На рис. 7, 8 изображена величина γ_A для летних и зимних условий года (модель атмосферы ВСА-60), причем для устранения существующего на уровне моря расхождения между экспериментальными и теоретическими значениями γ_{H_2O} в диапазоне $\nu = 40 \div 100$ ГГц (см. [5]) полагалось, что при $h = 0$ $\gamma_A = 1,5 \gamma_{H_2O} + \gamma_{O_2}$, а при $h \geq 6$ км $\gamma_A = \gamma_{H_2O} + \gamma_{O_2}$,

(см. сноску на стр. 438). Дискуссия полученных результатов дана в разделе 5.

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЫСОТЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОГЛОЩЕНИЯ МОНОМЕРОВ ВОДЯНОГО ПАРА, КИСЛОРОДА И АТМОСФЕРЫ

Для оценки полного вертикального поглощения радиоволн необходимо знать величины характеристических высот как основных поглощающих компонент атмосферы—кислорода, мономеров и димеров водяного пара (H_{O_2} , H_{H_2O} , H_{2H_2O}), так и атмосферы в целом H_A . Для величины H_{H_2O} в предположении экспоненциальной зависимости влажности от высоты $\rho = \rho_0 e^{-h/2.5}$ в [7] получено вне резонансов водяного пара значение 2,1 км, а в [8] отмечается, что H_{H_2O} может меняться в зависимости от времени года в интервале $1,8 \div 2,2$ км. Отметим, что в [7] и в [8] использована зависимость коэффициента поглощения $\gamma_{H_2O} \sim P\rho/T^{3/2}$.

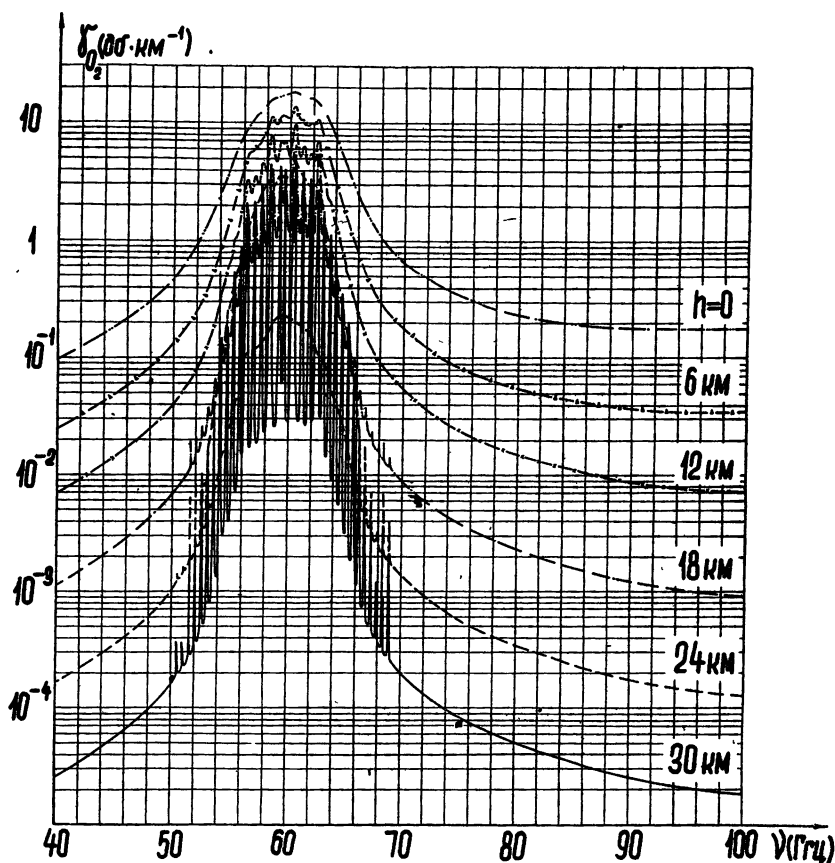


Рис. 4. Зависимость коэффициента поглощения кислорода γ_{O_2} от частоты ν в диапазоне 40–100 ГГц, вычисленная для различных высот над уровнем моря в зимних условиях (модель атмосферы ВСА-60). Пунктирная кривая ($-----$) вне области $\nu \approx 54 \div 66$ ГГц изображает коэффициент поглощения на высоте $h = 24$ км. В области $\nu = 54 \div 66$ ГГц она разделена на 2 кривые, нижняя из которых дает огибающую минимумов, а верхняя — огибающую максимумов поглощения на этой высоте.

На рис. 9 представлена зависимость $\gamma_{H_2O}(h)$ для некоторых частот диапазона $\nu = 40 \div 100$ ГГц, вычисленная по формуле (3) в зимний и

летний периоды года (модель 1 распределения влажности с высотой). То обстоятельство, что в логарифмическом масштабе рис. 9 зависимость $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}(h)$ на интервалах высот $h = 0 \div 16$ км и $h = 16 \div 30$ км изображается прямыми линиями, свидетельствует о выполнении соотношения (1) с вполне удовлетворительной степенью точности. Резкий переход от одного наклона прямой к другому при высотах $h = 16$ км объясняется принятой моделью распределения удельной влажности по высоте $q(h)$. Из рис. 9 следует, что до высот $h \approx 16$ км характеристическая высота коэффициента поглощения мономеров водяного пара практически постоянна и не зависит от частоты вне линий поглощения H_2O . Величина $N_{\text{H}_2\text{O}}$ для зимы мало отличается от соответствующего значения для лета (1,48 км и 1,56 км). Это связано с тем, что коэффициент α_0 в высотном распределении удельной влажности $q(h)$ слабо меняется от времени года [13], а отношение $\Gamma_{\text{H}_2\text{O}} / \gamma_{\text{H}_2\text{O}}(0)$ ($\Gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ — поглощение энергии водяным паром на фиксированной частоте ν во всем столбе атмосферы), прежде всего, определяется законом спадания q с высотой h ; кроме того, сезонная разница в давлениях и температурах влияет на это отношение весьма слабо.

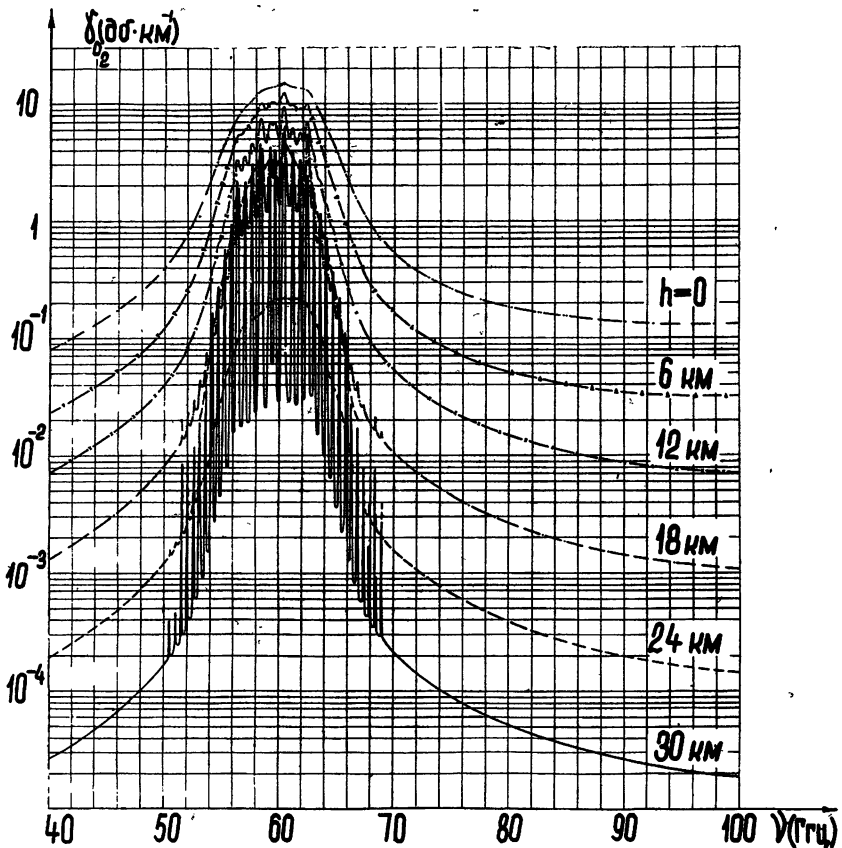


Рис. 5. Зависимость коэффициента поглощения кислорода γ_{O_2} от частоты ν в диапазоне $40 \div 100$ ГГц, вычисленная для различных высот над уровнем моря в летних условиях (модель атмосферы ВСА-60). Пунктирная кривая (— — —) вне области $\nu \approx 54 \div 66$ ГГц изображает коэффициент поглощения на высоте $h = 24$ км. В области $\nu \approx 54 \div 66$ ГГц она разделена на две кривые, нижняя из которых дает огибающую минимумов поглощения на этой высоте, а верхняя — огибающую максимумов.

Сказанное справедливо и для высот $h = 16 \div 30$ км, но там величина $H_{\text{H}_2\text{O}}$ равна $10 \div 11$ км. Впрочем, поглощение на высотах $h > 16$ км столь мало, что даже при измерении полного вертикального поглощения водяного пара с высоты $h \approx 10$ км вкладом слоев атмосферы $h > 16$ км можно пренебречь без заметной ошибки. Если принять иное распределение влажности с высотой при $h > 16$ км (например, модель II), то на высотах $16 \text{ км} < h < 30$ км характеристическая высота $H_{\text{H}_2\text{O}}$ будет меньше 10 км. Однако такая неопределенность в величинах $H_{\text{H}_2\text{O}}$, обусловленная неточным знанием распределения влажности на больших высотах, как уже отмечалось выше, совершенно не влияет на оценки полного вертикального поглощения водяного пара, если интересоваться таковым от высот $h = 0 \div 10$ км, что и представляет наибольшую практическую ценность.

В резонансе водяного пара ($\lambda_{ij} \approx 1,35$ см), лежащем, правда, вне рассматриваемого диапазона, величина $H_{\text{H}_2\text{O}}$ существенно зависит от длины волны и достигает значения $\approx 4,2$ км (см. также [33]).

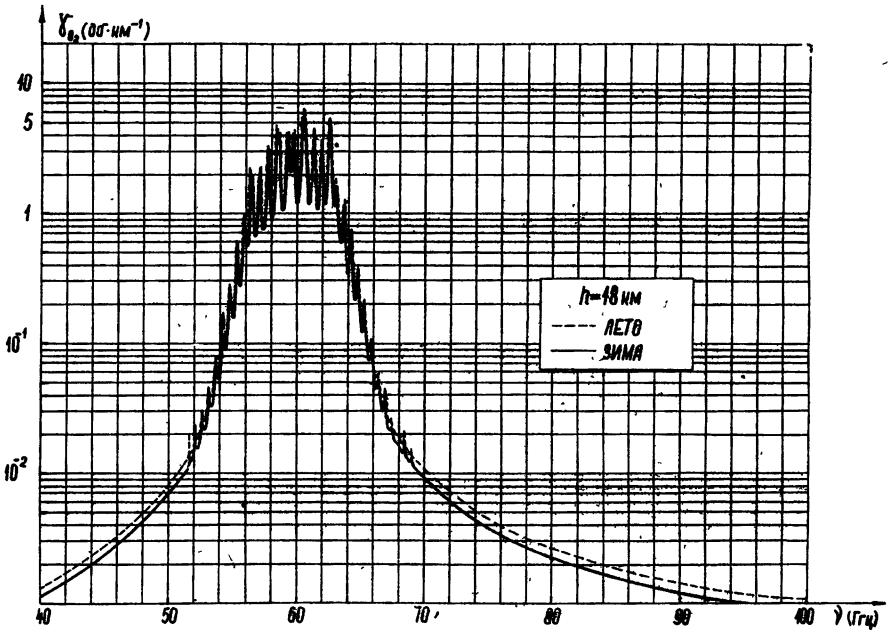


Рис. 6. Сравнение коэффициентов поглощения кислорода γ_{O_2} в диапазоне $\nu = 40 \div 100$ ГГц на высоте $h = 18$ км над уровнем моря, вычисленных для летней и зимней моделей атмосферы ВСА-60.

Вычисленная величина $H_{\text{H}_2\text{O}}$ на высотах $h > 2 \div 4$ км должна совпадать с характеристической высотой полного коэффициента поглощения водяного пара (т. е. суммарного коэффициента поглощения димеров и мономеров). Если отмеченное выше расхождение (см. раздел 3) экспериментальных и теоретических коэффициентов поглощения водяного пара объясняется вкладом димеров H_2O , то для высот $h < 2$ км величина $H_{\text{H}_2\text{O}}$ уже не будет характеризовать зависимость полного коэффициента поглощения водяного пара от высоты.

В [6] мы уже отмечали противоречивые данные ряда авторов о характеристических высотах кислорода. Так, в [7] получено значение $H_{\text{O}_2} = 5,3$ км. Авторы [26–28] считают $H_{\text{O}_2} \approx 10$ км, а в [29] дается значе-

ние $H_{O_2} \approx 1,516$ км. Ревизия результатов [7], предпринятая в [30], некорректна, ибо основана на недопустимом пренебрежении вкладом верхних слоев атмосферы (начиная с $h = 11$ км) в величину характеристической высоты. Концентрация O_2 в атмосфере почти постоянна до высот $h \approx 90$ км; поэтому слои атмосферы, лежащие между $h \approx 10 \div 30$ км, оказывают влияние на полное вертикальное поглощение кислородом.

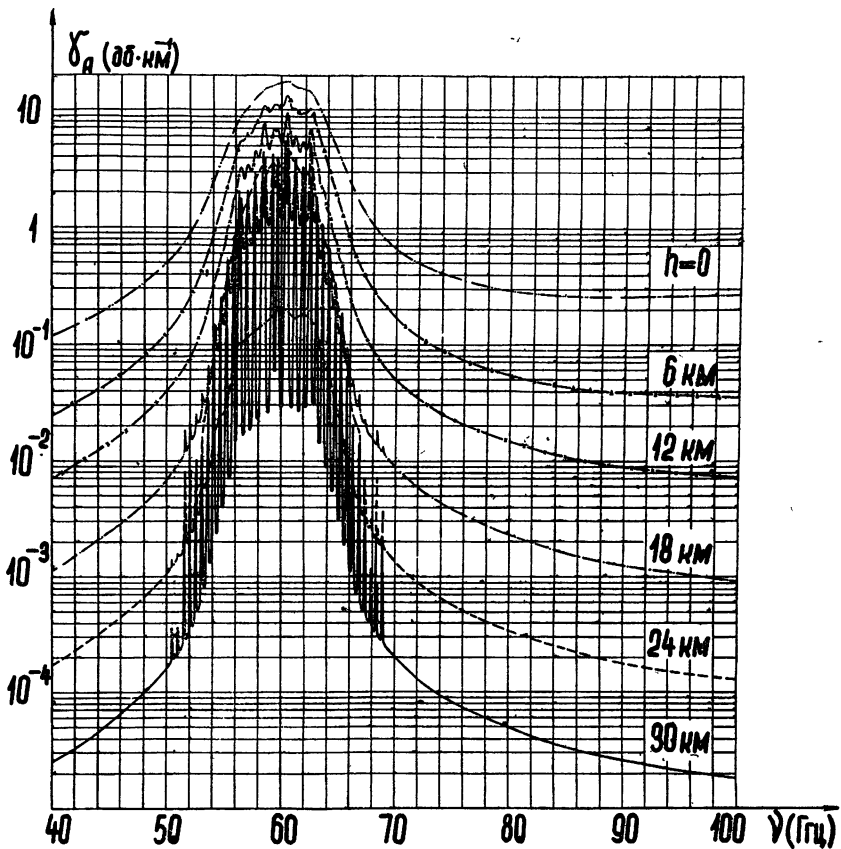


Рис. 7. Зависимость суммарного коэффициента поглощения атмосферы γ_A от частоты ν в диапазоне $40 \div 100$ ГГц, вычисленного для различных высот над уровнем моря в зимних условиях (модель ВСА-60). Нижняя пунктирная кривая (— —) в области $\nu \approx 54 \div 66$ ГГц изображает огибающую минимумов, а верхняя—огибающую максимумов коэффициента поглощения γ_A на высоте $h = 24$ км.

В [6] были выполнены расчеты величины H_{O_2} для политропной модели атмосферы как вдали от резонансов O_2 , так и в самих резонансных областях. При этом вне резонансов O_2 было получено $H_{O_2} = 5,1 \div 5,2$ км. Однако в [6] полагалось, что нерезонансная часть поглощения молекулярного кислорода зависит от давления и температуры так же, как и резонансная ($\gamma_{nr} \sim P^2/T^{5/2}$). Хотя в [15] зависимость $\gamma_{nr} \sim P^3/T^{9/2}$ получена лишь для сильных соударений (модель Ван Флека—Вайскопфа), близость различных форм спектральных линий в областях резонансов (см. рис. 1 в [5]) позволяет надеяться, что кинетическое рассмот-

рение этого вопроса мало изменит результаты [15] в интересующей нас спектральной области (частотное расстояние границ последней от соответствующих резонансов не превышает ≈ 20 Гц). Иная зависимость $\gamma_{\text{нр}}(P, T)$, нежели принятая в [6], приводит к несколько отличающимся значениям H_{O_2} (см. ниже) по сравнению с полученными вне резонанса O_2 значениями H_O в [6].

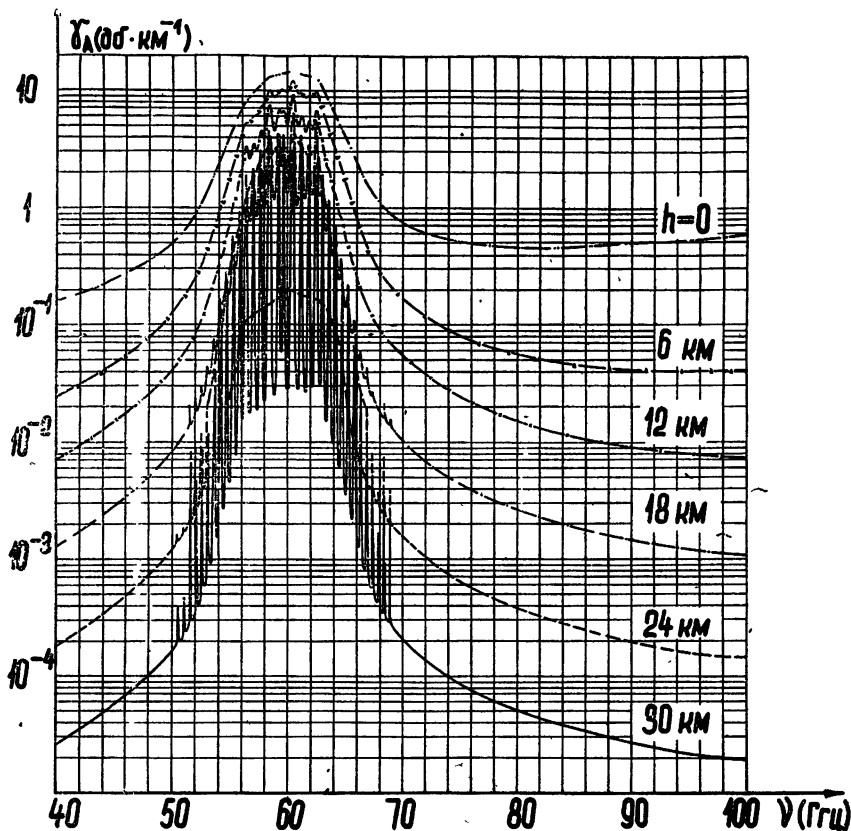


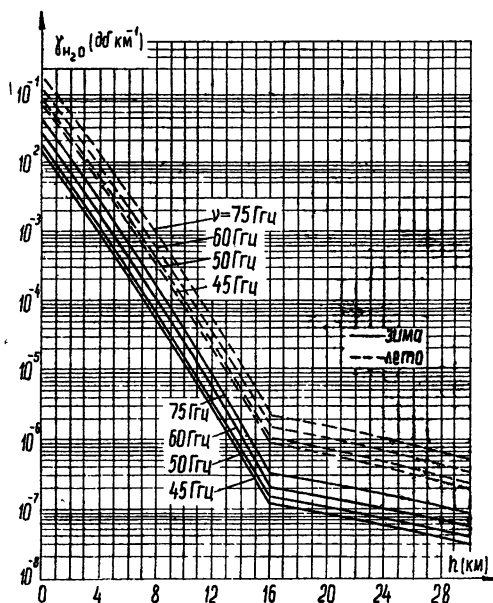
Рис. 8. Зависимость суммарного коэффициента поглощения атмосферы γ_A от частоты ν в диапазоне $40 \div 100$ Гц, вычисленного для различных высот над уровнем моря в летних условиях (модель ВСА-60). Нижняя пунктирная кривая (----) в области $\nu \approx 54 \div 66$ Гц изображает огибающую минимумов, а верхняя — огибающую максимумов коэффициента поглощения γ_A на высоте $h = 24$ км.

В резонансе O_2 характеристическая высота коэффициента поглощения кислорода, согласно [6], достигает величины $8 \div 21$ км. Для модели ВСА-60 величины H_{O_2} в резонансе молекулярного кислорода близки к полученным в [6], ибо, во-первых, нерезонансное поглощение здесь действительно примерно пропорционально P^2 [15], а во-вторых, нерезонансное поглощение мало по сравнению с резонансным.

Для модели атмосферы ВСА-60 зависимость коэффициента поглощения молекулярного кислорода от высоты на некоторых частотах приведена на рис. 10. Частоты, представленные на рис. 10, соответствуют как минимумам поглощения ($\nu = 45$ Гц, 75 Гц), так и максимумам ($\nu = 55$ Гц, 60 Гц). Из рис. 10 видно, что величины H_{O_2} зависят от частоты в области резонанса, но на фиксированной частоте они постоянны.

ны до высот $h \approx 10 \div 11$ км. Частотные вариации величин H_{O_2} вне резонанса достигают около 2%. Из рис. 10 следует, что вне резонанса O_2 $H_{O_2} \approx 4,3$ км зимой и $H_{O_2} \approx 4,8$ км летом*. Таким образом, величины $H_{O_2} = 5,1 \div 5,2$ км, найденные для политропной модели атмосферы в [6], близки к данным, полученным для ВСА-60 в летних условиях. Меньшие значения H_{O_2} для зимы обусловлены сжатием земной атмосферы в этот период года.

Рис. 9. Зависимость коэффициента поглощения мономеров водяного пара γ_{H_2O} от высоты h на некоторых частотах для летних и зимних условий (модель атмосферы ВСА-60). Распределение удельной влажности с высотой—модель 1.



Выше всюду речь шла о характеристических высотах коэффициента поглощения O_2 . Вычисление эквивалентной длины пути в кислороде $H_{O_2}^*$ по формуле (2) для ВСА-60 показывает, что на уровне моря значения H_{O_2} отличаются от соответствующих значений $H_{O_2}^*$ не более, чем на 2,5%. Полученный результат есть следствие почти экспоненциальной зависимости $\gamma_{O_2}(h)$. На рис. 11 изображен суммарный коэффициент поглощения атмосферы, вычисленный согласно замечаниям раздела 3: на высотах $h \leq 4$ км полагалось $\gamma_A = 1,5 \gamma_{H_2O} + \gamma_{O_2}$, а при $h \geq 6$ км $\gamma_A = \gamma_{H_2O} + \gamma_{O_2}$ (где γ_{H_2O} и γ_{O_2} — величины, рассчитанные по формулам (3), (8)). Таким образом, на рис. 11 грубо (через множитель 1,5) учтен возможный вклад димеров водяного пара в коэффициент поглощения атмосферы. Из рис. 11 видно, что суммарный коэффициент поглощения атмосферы γ_A неэкспоненциально убывает с высотой h на высотах $h \approx 0 \div 2$ км и $h \approx 8 \div 12$ км, т. е. характеристическая высота поглощения не может быть введена в этом случае согласно соотношению (1). Но мы определили высоту H_A , на которой суммарный коэффициент поглощения убывает в e раз по сравнению с значением γ_A на уровне моря (H_A') и на высоте $h \approx 4$ км (H_A''). При этом вне резонанса O_2 летом $H_A' \approx 3$ км, $H_A'' \approx 4,4$ км, зимой $H_A' \approx 4$ км, $H_A'' \approx 4,5$ км. Меньшие значения H_A' и H_A'' летом обусловлены тем, что характеристическая высота коэффициента поглощения водяного пара ($\approx 1,5$ км) снижает вели-

* См. также результаты работы [31].

чины H_A по сравнению с H_{O_2} , в то время как зимой из-за значительного вымерзания водяного пара величины H_A оказываются близкими к величинам H_{O_2} .

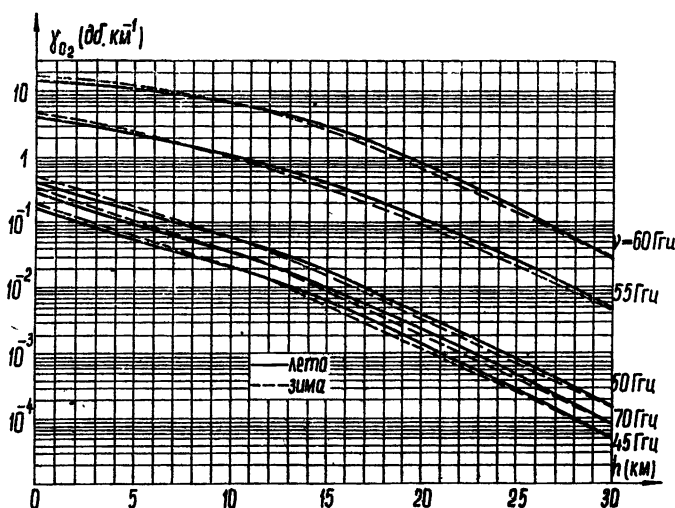


Рис. 10. Зависимость коэффициента поглощения кислорода γ_{O_2} от высоты h на некоторых частотах для летних и зимних условий (модель атмосферы ВСА-60)*.

В области кислородного резонанса величины H_{O_2} и H_A существенно зависят от частоты. Пример такой зависимости дан в таблице 3. Аналогичная картина для H_A будет наблюдаться и в линиях паров H_2O .

Следует отметить хорошее согласие результатов, полученных в резонансе O_2 для политропной модели атмосферы [6] и модели ВСА-60 (таблица 3). В резонансе O_2 величины H_A близки к величинам H_{O_2} , так как вклад молекулярного кислорода намного превышает в этих областях вклад водяного пара (см. ниже).

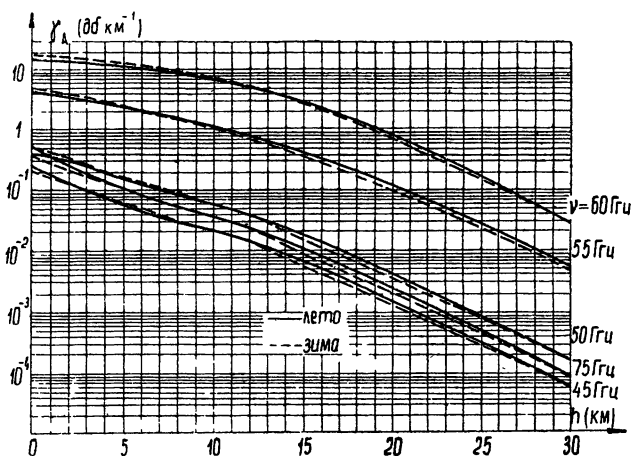


Рис. 11. Зависимость суммарного коэффициента поглощения атмосферы γ_A от высоты h на некоторых частотах для летних и зимних условий (модель атмосферы ВСА-60). Распределение удельной влажности с высотой—модель 1.

* На рисунке 10 вместо $\nu=70$ Гц следует читать $\nu=75$ Гц.

Таблица 3

Величины H_{O_2} и H'_A на частотах 55 Гц и 60 Гц для зимы и лета (модель ВСА-60)

ν (Гц)	Зима		Лето	
	H_{O_2} (км)	H'_A (км)	H_{O_2} (км)	H'_A (км)
55	6,9	6,6	7,4	7,3
60	10,9	10,8	10,3	10,2

5. КРАТКАЯ ДИСКУССИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

В диапазоне $\nu = 40 \div 100$ Гц ($\lambda = 3 \div 7,5$ мм) целесообразно выделить резонансную спектральную область O_2 ($\nu = 50 \div 70$ Гц) и области, лежащие вне резонанса ($\nu = 40 \div 50$ Гц; $70 \div 100$ Гц). В областях, где отсутствуют линии поглощения, суммарный коэффициент поглощения γ_A мал даже на уровне моря. Так, $\gamma_A \approx 0,1 \div 0,5$ дб·км⁻¹ для $\nu = 40 \div 50$ Гц и $\gamma_A \approx 0,4 \div 0,6$ дб·км⁻¹ для $\nu = 70 \div 100$ Гц. Сезонные вариации суммарного коэффициента поглощения в этих областях достигают 30 ÷ 40% (см. рис. 7, 8), в резонансе O_2 — 10 ÷ 20%. Вне резонанса O_2 обе газовые поглощающие компоненты атмосферы (пары H_2O и молекулярный кислород) летом дают сравнимый вклад в величину γ_A (см. рис. 1—3). При этом удельный вклад водяного пара возрастает в сторону коротких волн. Так, если на частоте 40 Гц при $h = 0$ летом отношение $\gamma_{H_2O}/\gamma_{O_2} \approx 0,6$, то для $\nu = 100$ Гц это же отношение составляет около 2,3 (зимой — соответственно 0,1 и 0,4). С подъемом по высоте вклад водяного пара в суммарный коэффициент поглощения падает довольно быстро. На высоте $h = 6$ км при $\nu = 40$ Гц летом $\gamma_{H_2O}/\gamma_{O_2} \approx 0,03$, а при $\nu = 100$ Гц отношение $\gamma_{H_2O}/\gamma_{O_2} \approx 0,12$ (зимой на той же высоте соответственно 0,007 и 0,02).

В области резонанса O_2 $\nu \approx 50 \div 70$ Гц суммарный коэффициент поглощения γ_A возрастает до значений 15 ÷ 18 дб·км⁻¹. На частотах $\nu \approx 58 \div 62$ Гц на уровне моря отношение $\gamma_{H_2O}/\gamma_{O_2}$ составляет лишь около 0,5%. С увеличением высоты над уровнем моря отдельные спектральные линии O_2 разрешаются и, хотя в пиках линий поглощение остается сравнительно большим (на высоте $h \approx 30$ км $\gamma_{O_2} \approx 2 \div 4$ дб·км⁻¹), образуются глубокие минимумы поглощения шириной $\sim 0,25$ Гц, в которых поглощение уменьшается до $0,01 \div 0,03$ дб·км⁻¹. На столь больших высотах поглощение электромагнитной энергии водяными парами пренебрежимо мало:

$$\gamma_{H_2O}(h = 30 \text{ км})/\gamma_{O_2}(h = 30 \text{ км}) < 10^{-3} \text{ \%}.$$

Краткая дискуссия вопроса о характеристических высотах коэффициентов поглощения водяного пара, кислорода и атмосферы уже проводилась в разделе 4. Здесь мы еще раз подчеркнем, что следующие величины характеристических высот представляются наиболее точными вне резонансов O_2 и H_2O в свете результатов данной работы:

$$H_{H_2O} = 1,48 \text{ км зимой; } H_{H_2O} = 1,56 \text{ км летом;}$$

$$H_{O_2} = 4,3 \text{ км зимой; } H_{O_2} = 4,8 \text{ км летом.}$$

Авторы признательны И. А. Раковой за выполнение расчетов на БЭСМ-II и за помощь при обработке результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. W. Ryde, J. IEE, **93**, 101 (1946).
2. О. Я Усиков, В. Л. Герман, И. Х. Ваксер, Укр. физический журнал, **6**, 618 (1961).
3. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 674 (1963).
4. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Геомagnetизм и аэрoнoмия, **3**, 666 (1963).
5. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **9**, 1327 (1964).
6. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, 987 (1965).
7. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, **4**, 21 (1959).
8. В. В. Кузовлев, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 175 (1964).
9. Приложение № 2 к временной стандартной атмосфере 1960 г. (BCA-60), изд. ЦАГИ, 1962.
10. R. G. Medhurst, IEEE Trans. Antennas and Propag., **13**, 550 (1965).
11. W. Benedict, J. Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer, **4**, 453 (1964).
12. А. Х. Хргиан, Физика атмосферы, ГИФМЛ, М., 1958.
13. М. С. Малкевич, Ю. В. Самсонов, Л. И. Копрова, УФН, **80**, 93 (1963).
14. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 1098 (1963).
15. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 98 (1965); Радиотехника и электроника, **11**, 445 (1966).
16. В. С. Троицкий, С. А. Жевакин, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 1, 19 (1958).
17. Л. Н. Бондарь, В. Д. Кротиков, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, **10**, 755 (1965).
18. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 984 (1964).
19. M. Cohn, F. L. Wentworth, J. C. Wiltse, Proc. IEEE, **51**, 1227 (1963).
20. А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 668 (1965).
21. J. O. Artman, J. P. Gordon, Phys. Rev., **96**, 1237 (1954).
22. L. F. Stafford, C. W. Tolbert, J. Geophys. Res., **68**, 3431 (1963).
23. R. M. Hill, W. Gordy, Phys. Rev., **93**, 1019 (1954).
24. A. H. Barrett, Memoires de la Societe Royale des Sciences de Liege, t. 7, fasc. unique, Liege Université, 1963.
25. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
26. G. R. Marner, IRE Conv. Rec., **3**, 68 (1955).
27. R. Whitehurst, J. Copeland, F. N. Mitchell, J. Appl. Phys., **28**, 295 (1957).
28. J. Aarons, W. R. Barron, J. R. Castelli, Proc. IRE, **46**, 325 (1958).
29. K. Rawer, J. Res. NBS, **66D**, 375 (1962).
30. С. С. Гремяченский, Вестник ЛГУ, сер. физ и химии, № 10, 69 (1962).
31. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 451 (1966).
32. А. А. Викторова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 415, 424 (1964).
33. E. J. Dutton, B. R. Bean, J. Res. NBS, **69D**, 885 (1965).
34. M. L. Meeks, A. E. Lilley, J. Geophys. Res., **68**, 1683 (1963).
35. E. R. Westwater, J. Res. NBS, **69D**, 1201 (1965).
36. J. R. Rusk, J. Chem Phys., **42**, 493 (1965).
37. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати)

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 июня 1965 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE ABSORPTION IN 3mm÷7.5mm BAND IN ATMOSPHERE OF THE EARTH

S. A. Zhevakin, A. P. Naumov

The calculations have been made of absorption coefficients for monomers of water vapours and oxygen in the band $\lambda=3\div 7.5$ mm for different altitude in winter and summer. The season variations of total absorption coefficient are shown to approach to 30–40% out of resonances O_2 and H_2O . The contribution of water vapour to the total absorption decreases quickly with the increasing of altitude. There have been found the characteristic heights of monomers of water vapour absorption (H_{H_2O}) and oxygen (H_{O_2}) far from resonance: in summer $H_{H_2O}=1.56$ km, $H_{O_2}=4.8$ km, in winter $H_{H_2O}=1.48$ km, $H_{O_2}=4.3$ km. In resonance regions of O_2 and H_2O the magnitudes H_{O_2} , H_{H_2O} depend considerably on the wavelength. The relation between the total absorption and height has a nonexponential character.

УДК 621.371.166 24

ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА ПУТИ И СРЕДНЯЯ ТЕМПЕРАТУРА
АТМОСФЕРЫ

А. Г. Кисляков

Рассчитаны коэффициенты поглощения радиоволн в атмосферных парах воды и кислороде (для некоторых средних условий) в зависимости от высоты над уровнем моря. Получены выражения для эффективной длины пути, средней температуры и полного вертикального поглощения атмосферы в зависимости от термодинамической температуры и высоты над уровнем моря. Даются некоторые рекомендации, полезные в практике радиоастрономических измерений.

ВВЕДЕНИЕ

При измерении интенсивности внеземного радиоизлучения необходимо знать полное поглощение в атмосфере и среднюю температуру атмосферы, так как излучение исследуемого объекта обычно сравнивается либо с излучением эталона, находящегося в атмосфере, либо с излучением земной атмосферы [1, 2]. Полное поглощение атмосферы γ определяется выражением

$$\gamma = \int_0^{\infty} \kappa(l) dl, \quad (1)$$

где $\kappa(l)$ — коэффициент поглощения, а l — длина пути. Полагая, что в лишенной гидрометеоров атмосфере коэффициент поглощения зависит только от высоты над уровнем моря h и что длина пути может быть записана как $l = h \sec \theta^*$, представим выражение (1) в виде

$$\gamma = \kappa \sec \theta \int_0^{\infty} \varphi(h) dh = \kappa H \sec \theta, \quad (2)$$

где κ — коэффициент поглощения атмосферы на уровне моря, $\varphi(h)$ — функция зависимости коэффициента поглощения от высоты (безразмерная), а $H = \int_0^{\infty} \varphi(h) dh$ — эффективная длина пути атмосферы. Величина $\gamma_0 = \kappa H$ в дальнейшем будет называться полным вертикальным поглощением атмосферы.

Таким образом, полное поглощение атмосферы на луче зрения определяется произведением эффективной длины пути на значение коэффициента поглощения на уровне моря. Значения коэффициентов поглощения на уровне моря измерены [4] и рассчитаны [5] в довольно широком диапазоне волн.

Эффективная длина пути атмосферы в поглощении вычислялась в работе [3] в предположении, что коэффициенты поглощения паров воды и кислорода убывают с высотой по экспоненциальному закону. Как будет показано ниже, это допущение является довольно сильной идеали-

* Это справедливо, как показано в [3], для $\theta \lesssim 85^\circ$, где θ — зенитный угол.

зацией. Автор [6] рассчитал эффективную длину пути для атмосферного кислорода; однако, как показано в [7], он получил заниженное значение, так как не учитывал поглощения в слоях атмосферы выше 11 км. При расчете эффективной длины пути для атмосферных паров воды в работах [3, 6] использовалось неточное выражение для зависимости коэффициента поглощения паров воды от давления и температуры. В [7] проведены расчеты эффективной длины пути кислорода и паров воды для области длин волн $2,2 \text{ мм} \div 10 \text{ см}$ (O_2), а также в диапазоне $3 \div 7,5 \text{ мм}$ (O_2 и H_2O). Результаты этого расчета трудно использовать в радиоастрономической практике, так как он выполнен методами численного интегрирования и не дает зависимости эффективной длины пути от температуры и высоты над уровнем моря. Между тем, как будет показано ниже, эффективная длина пути атмосферы может существенно зависеть от этих параметров.

Средняя температура атмосферы в направлении θ определяется выражением [8]

$$\tilde{T} = \frac{\int_0^{\infty} \varphi(h) T(h) \exp\left\{-\kappa \sec \theta \int_0^h \varphi(h) dh\right\} dh}{\int_0^{\infty} \varphi(h) \exp\left\{-\kappa \sec \theta \int_0^h \varphi(h) dh\right\} dh}, \quad (3)$$

где $T(h)$ — зависимость термодинамической температуры атмосферы от высоты. Таким образом, средняя температура атмосферы в направлении θ зависит от вида функций $\varphi(h)$ и $T(h)$, а также от величины коэффициента поглощения κ . Величина \tilde{T} рассчитывалась в [8] для случая, когда поглощение в атмосфере мало и падает с высотой по экспоненте, и $T(h) = T_0 - bh$, где b — градиент температуры в атмосфере, а T_0 — температура на уровне моря. В [2] получено выражение для \tilde{T} в тех же предположениях, но для произвольного значения коэффициента поглощения.

Как будет показано ниже, отличие зависимости коэффициента поглощения от экспоненциальной также оказывается существенным при расчете средней температуры атмосферы в зависимости от высоты над уровнем моря.

1. ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ ОТ ВЫСОТЫ

Атмосферное поглощение радиоволн складывается в основном из поглощения в молекулярном кислороде и парах воды, т. е. $\kappa = \kappa_{\text{к}} + \kappa_{\text{в}}$, где $\kappa_{\text{к}}$ — коэффициент поглощения в кислороде и $\kappa_{\text{в}}$ — коэффициент поглощения в парах воды. Вид функций $\kappa_{\text{к}}(h)$ и $\kappa_{\text{в}}(h)$ определяется характером зависимости этих величин от метеопараметров, являющихся, в свою очередь, функциями высоты. Коэффициент поглощения паров воды для диапазонов волн, соответствующих окнам прозрачности, зависит от метеопараметров следующим образом [5]:

$$\kappa_{\text{в}} \propto \rho P/T, \quad (4)$$

где ρ — абсолютная влажность, а P — атмосферное давление. Коэффициент поглощения молекулярного кислорода для диапазона волн, соответствующего склонам резонансной линии, связан с метеопараметрами соотношением [5, 7]

$$\kappa_{\text{к}} \propto P^2/T^{5/2}. \quad (5)$$

Для частот, далеких от резонанса, превалирующим становится нерезонансное поглощение молекулярного кислорода, связь которого с метеопараметрами дается выражением [9]

$$\kappa_k^* \propto P^3/T^{9/2}. \quad (6)$$

Нерезонансное поглощение существенно, по-видимому, на волнах дециметрового и миллиметрового диапазонов.

Как видно из формул (4) — (6), для определения зависимостей коэффициентов поглощения от высоты необходимо знать функции $\rho(h)$, $T(h)$ и $P(h)$.

Имеющиеся литературные данные о распределении паров воды с высотой довольно немногочисленны и противоречивы [10, 11]. Можно считать установленным, что удельная влажность воздуха Q падает с высотой в среднем по экспоненциальному закону:

$$Q = Q_0 e^{-a_0 h}, \quad (7)$$

что справедливо до высот $h \leq h_m$. Судя по результатам недавних экспериментальных работ, обзор которых имеется в [11], величины a_0 и h_m колеблются в пределах $a_0 = 0,42 \div 0,56 \text{ км}^{-1}$ и $h_m = 8 \div 16 \text{ км}$. На высотах $h > h_m$ наблюдались два различных типа распределений паров воды: один из них характеризуется резким (экспоненциальным) возрастанием удельной влажности, а второй — наличием постоянной, но сравнительно высокой ($0,01 \div 0,05 \text{ г} \cdot \text{кг}^{-1}$) удельной влажности.

Наконец, результаты наблюдений альпийских горных метеостанций, известные как формула Ганна и приведенные в [10], дают $a_0 = 0,23$, т. е. более медленное убывание удельной влажности с высотой, чем это следует из формулы (7). При расчетах эффективной длины пути атмосферы и ее средней температуры были приняты два варианта распределений удельной влажности с высотой: 1) $a_0 = 0,48$ и 2) $a_0 = 0,35^*$. Значение $a_0 = 0,35$ дает распределение паров воды, среднее между законом Ганна и законом с $a_0 = 0,48$. В обоих случаях предполагалось, что $h_m = 16 \text{ км}$. При этом условии оказалось, что дальнейшее поведение функции $Q(h)$ мало влияет на величины H и \bar{T} .

Распределение температуры воздуха в тропосфере и стратосфере изучено довольно хорошо [12, 13]. Характерными особенностями функции $T(h)$ являются убывание температуры с увеличением h до высоты $h = 12 \div 20 \text{ км}$ (тропопауза, высота ее зависит от широты места и времени года) и последующее увеличение температуры до высоты около $50 \div 80 \text{ км}$. Данные измерений распределений $T(h)$ в средних широтах имеются в работе [12]. Они представлены на графике рис. 1. Пунктирные кривые на рис. 1 — экспериментальные данные, полученные зимой (левая кривая) и летом. Там же представлена аппроксимация зависимости $T(h)$ в виде

$$T(h) = T_0 \left(1 - \frac{\alpha z}{1 + z^2} \right), \quad (8)$$

где $z = h/h_0$, а $h_0 = 16 \text{ км}$. Кривая рис. 1 построена при $T_0 = 300^\circ\text{К}$ и $\alpha = 0,5$. Как видно из графика, аппроксимация зави-

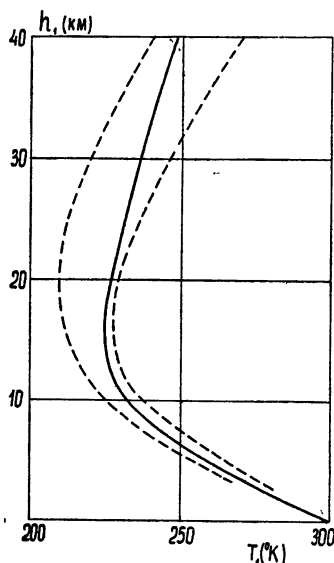


Рис. 1. Распределение температуры атмосферы с высотой.

* Считалось, что удельная и абсолютная влажности связаны соотношением $\rho \approx 348PQT^{-1}$ [10].

симости $T(h)$ формулой (8) является достаточно точной, особенно на высотах до 20 км, и наиболее близко соответствует летнему распределению температуры с высотой.

Перейдем теперь к рассмотрению зависимости $P(h)$. В изотермичной атмосфере давление падает с высотой по экспоненте [10]. В случае, если температура воздуха зависит от высоты, функция $P(h)$ должна быть найдена путем интегрирования уравнения [10]

$$\frac{dP}{P} = - \frac{g dh}{R_b T(h)},$$

где g — ускорение силы тяжести, а R_b — газовая постоянная. Поскольку в пределах тропосферы изменения g с высотой очень малы, то g можно полагать постоянным; тогда

$$P = P_0 \exp \left\{ - \frac{g}{R_b} \int_0^h \frac{dh}{T(h)} \right\}. \quad (9)$$

Подставив в (9) выражение (8) и выполнив интегрирование, получим

$$P = P_0 e^{-h/H_0} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 h_0}{4H_0} \left[\arctg \left(z - \frac{\alpha}{2} \right) + \arctg \frac{\alpha}{2} \right] \right\} (1 - \alpha z + z^2)^{-\alpha h_0 / 2H_0}, \quad (10)$$

где $H_0 = R_b T_0 / g$. Полагая $\alpha = 0$, можно перейти к случаю изотермичной атмосферы.

Используя теперь выражения (7), (8), (10) для распределений влажности, температуры и давления с высотой, а также формулы (4) — (6), связывающие коэффициенты поглощения с метеопараметрами, можно получить зависимости коэффициентов поглощения от высоты:

$$\begin{aligned} x(h) = x_0 e^{-\mu z} \left\{ 1 - \mu \left[\arctg \left(z - \frac{\alpha}{2} \right) + \arctg \frac{\alpha}{2} \right] \right\}^m \times \\ \times (1 + z^2)^n (1 - \alpha z + z^2)^{-q}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mu = \alpha^2 h_0 / 4H_0$.

Параметры p , m , n , q различны для паров воды и кислорода; значения их даны в таблице 1. На рис. 2 представлены зависимости коэффициентов поглощения от высоты. Там же проведены прямые, отвечающие экспонентам $e^{-\mu z}$. Как видно из рисунка, коэффициенты поглощения убывают с высотой сначала несколько медленнее, а затем (начиная с высоты около 16 км) быстрее экспоненты $e^{-\mu z}$. Для сравнения с результатами работы [3] на рис. 2 нанесена также прямая, соответствующая экспоненте $e^{-h/5.3}$. Из рис. 2 следует, что коэффициент поглощения кислорода можно рассчитывать методом [3] для высот не более 6 ÷ 8 км.

Таблица 1

Параметр	Тип поглощения	Пары воды	Кислород (рез.)	Кислород (нерез.)
m		2	2	3
n		2	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$
p		$2 \frac{h_0}{H_0} + h_0 a_0$	$2 \frac{h_0}{H_0}$	$3 \frac{h_0}{H_0}$
q		$\alpha \frac{h_0}{H_0} + 2$	$\alpha \frac{h_0}{H_0} + \frac{5}{2}$	$\frac{3\alpha h_0}{2H_0} + \frac{9}{2}$

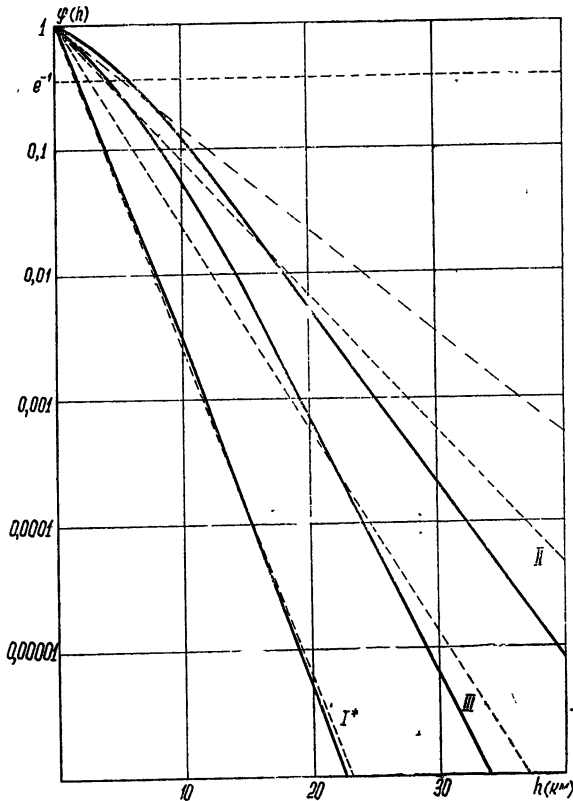


Рис. 2. Зависимости коэффициентов поглощения от высоты. Здесь и на других рисунках римскими цифрами отмечены кривые, относящиеся:

I*—к парам воды при $\alpha_1 = 0,35 \text{ км}^{-1}$; II—к кислороду (резонансное поглощение); III—к кислороду (нерезонансное поглощение). Пунктирные прямые — экспоненты $e^{-\rho z}$ ($T_0 = 270^\circ\text{K}$); штрих-пунктирная линия соответствует экспоненте $e^{-h/5,3}$.

2. ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА ПУТИ АТМОСФЕРЫ В ПОГЛОЩЕНИИ

Рассмотрим сначала случай, когда поглощение в атмосфере определяется практически одной из компонент. Используя выражение (11) и данные таблицы 1, можно получить значения эффективной длины пути для атмосферных паров воды и кислорода. Поскольку параметры ρ , q и μ в формуле (11) являются функциями температуры, значения H также зависят от T_0 . На рис. 3 представлены зависимости $H(T_0)$, рассчитанные с помощью электронной вычислительной машины. Как видно из рисунка, эффективные длины пути примерно линейно растут с температурой, что в основном объясняется тем, что давление в холодной атмосфере падает с высотой быстрее, чем в теплой (см. [10], а также соотношение (10)).

Аналогичная зависимость $H(T_0)$ получена в работе [14]. В этой статье приведены результаты численного расчета эффективных длин пути кислорода и паров воды по данным о давлении, температуре и влажности, полученным с помощью шаров-зондов. Эмпирическая зависимость эффективных длин пути кислорода при резонансном поглощении $H_k(T_0)$,

полученная в [14], хорошо аппроксимируется выражением $H_k = 2,6(T_0/100 - 1)$; эта прямая также нанесена на график рис. 3. Как видно из рис. 3, данные работы [14] приводят примерно к тому же характеру зависимости $H_k(T_0)$, что и в настоящей статье; однако в работе [14] для тех же значений T_0 получены заметно меньшие значения эффективной длины кислорода, чем вычисленные по формуле (11). Причина этого расхождения, возможно, заключается в том, что принятые здесь распределения метеопараметров с высотой отличаются от использовавшихся в [14]. Рассчитанные в [7] эффективные длины пути кислорода для диапазонов волн, соответствующих крыльям линий поглощения*, практически совпадают с данными настоящей статьи при $T_0 = 290^\circ\text{K}$. На график рис. 3 нанесено также (черным квадратиком) значение эффективной высоты кислорода, рассчитанное в [3]. Авторы [3] относят его к $T_0 = 293^\circ\text{K}$, однако принятое ими значение H_0 соответствует $T_0 = 273^\circ\text{K}$. Эффективная длина пути паров воды слабо зависит от T_0 ; величина ее находится в хорошем согласии с результатами расчетов [7].

Данные раздела 2 свидетельствуют о том, что коэффициенты поглощения падают с ростом высоты не по экспоненциальному закону. В связи с этим представляет интерес величина эффективной длины пути в зависимости от высоты над уровнем моря:

$$H_h = \frac{x}{x(h)} \int_h^\infty \varphi(h) dh. \quad (12)$$

На графиках рис. 4 представлены результаты расчетов H_h в функции высоты. Кривые на рис. 4 свидетельствуют о заметном уменьшении H_h^- кислорода с высотой. Эффективная длина пути для паров воды меняется незначительно.

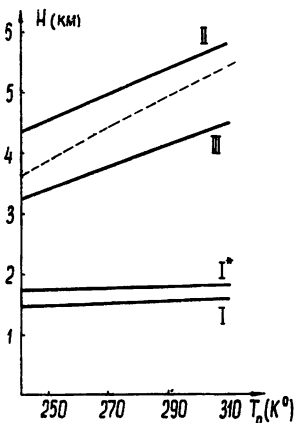


Рис. 3. Зависимость эффективной длины пути от температуры атмосферы. Пунктир—данные работы [14].

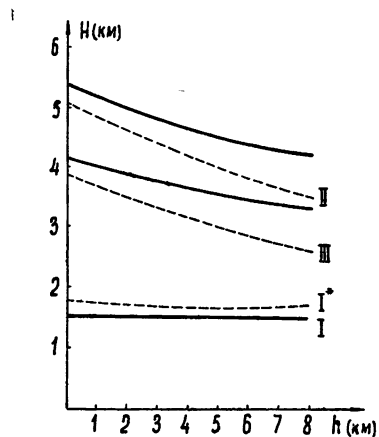


Рис. 4. Зависимость эффективной длины пути от высоты. Сплошные кривые соответствуют $T_0 = 290^\circ\text{K}$, а пунктирные— $T_0 = 270^\circ\text{K}$.

В случае, когда коэффициенты поглощения паров воды и кислорода сравнимы, необходимо вести некоторую приведенную эффективную длину пути в атмосфере, такую, что $\gamma_0 = (x_k + x_v)H_{пр}$. Нетрудно убедиться,

* Эффективные длины пути для кислорода при нерезонансном поглощении в работах [3, 7, 14] не рассчитывались.

что $H_{пр} = \kappa_k H_k (\kappa_k + \kappa_b)^{-1} + \kappa_b H_b (\kappa_k + \kappa_b)^{-1}$. Аналогичное выражение для $H_{пр}$ можно получить для случая, когда сравнимы величины κ_k и κ_k^* .

В заключение настоящего раздела рассмотрим рис. 5, на котором представлена зависимость полного вертикального поглощения паров воды и кислорода атмосферы от высоты над уровнем моря. На графике

даны нормированные кривые, т. е. величины $r = \int_h^\infty \varphi(h) dh / \int_0^\infty \varphi(h) dh$. Со-

поставив кривые рис. 2 и 5, нетрудно убедиться в том, что полное вертикальное поглощение атмосферы убывает с ростом h быстрее, чем коэффициенты поглощения. Это обстоятельство следует учитывать при сопоставлении данных об атмосферном поглощении, полученных радионастрономическими и другими методами. Отличие зависимости полного вертикального поглощения кислорода от экспоненциальной становится заметным при высотах $h = 4 \div 5$ км. Для наглядности на рис. 5 проведены прямые (сплошные линии), отвечающие экспонентам, а также прямая на уровне e^{-1} . Что касается паров воды, то полное вертикальное поглощение в них убывает с высотой почти по экспоненциальному закону. Учитывая данные рис. 2—5, можно во всех практических случаях считать, что коэффициент поглощения паров воды падает с ростом высоты по экспоненте (вплоть до высот около 8 км).

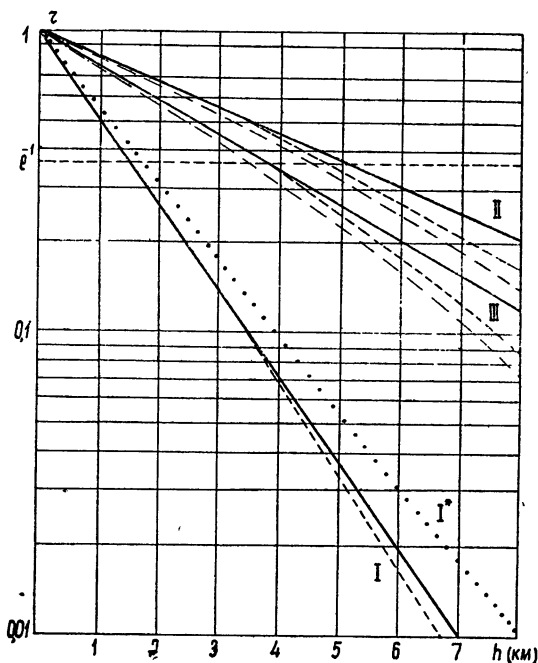


Рис. 5. Зависимость полного вертикального поглощения от высоты. Сплошные прямые—экспоненты. Пунктирные линии соответствуют $T_0 = 290^\circ\text{K}$, штрих-пунктирные— 270°K ; I*—прямая, соответствующая экспоненте $e^{-h/1,75}$.

3. СРЕДНЯЯ ТЕМПЕРАТУРА АТМОСФЕРЫ

Используя выражения (3), (8), (11) и данные таблицы 1, можно рассчитать среднюю температуру атмосферы. Результаты этого расчета, выполненного с помощью электронной вычислительной машины, пред-

$$\beta = \frac{\int_0^{\infty} \varphi_{\text{в}}(h) \exp \left\{ -\kappa_{\text{в}} \sec \theta \int_0^h \varphi_{\text{в}}(h) dh \right\} dh}{\int_0^{\infty} \varphi_{\text{к}}(h) \exp \left\{ -\kappa_{\text{к}} \sec \theta \int_0^h \varphi_{\text{к}}(h) dh \right\} dh} \quad (14)$$

Величину β можно найти из рис. 7, где построены числитель и знаменатель формулы (14). Пользуясь рис. 5, 7 и соотношением (13), можно найти \tilde{T} для любого соотношения коэффициентов поглощения в парах воды и кислороде.

Формула (3) существенно упрощается в том случае, если полное поглощение на луче зрения достаточно мало:

$$\tilde{T} = \frac{\int_0^{\infty} \varphi(h) T(h) dh}{\int_0^{\infty} \varphi(h) dh} \quad (15)$$

Выражение (15) справедливо при $\gamma = \kappa H \sec \theta \ll 1$. На рис. 8 представлены зависимости $\tilde{T}(h)$, рассчитанные по формуле (14) для случая, когда за поглощение в атмосфере ответственна только одна из двух газовых компонент (кислород или пары воды). Если коэффициенты поглощения в O_2 и H_2O сравнимы между собой, то среднюю температуру атмосферы можно также рассчитывать по формуле (13), причем в этом случае ($\gamma \ll 1$) можно положить $\beta \approx 0,3$. При $\gamma \gg 1$ величина $\beta \equiv 1$.

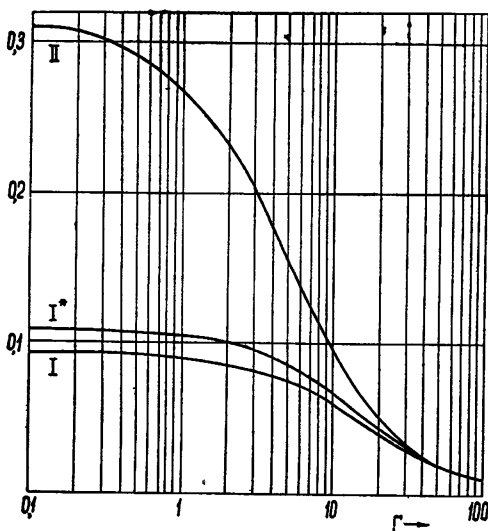


Рис. 7. Верхняя кривая дает знаменатель формулы (14), а две нижних — числитель (верхняя соответствует $a_0 = 0,35 \text{ км}^{-1}$, а нижняя — $a_0 = 0,48 \text{ км}^{-1}$).

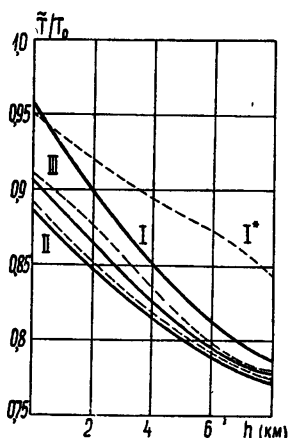


Рис. 8. Зависимость средней температуры атмосферы от высоты. Сплошные кривые соответствуют $T_0 = 290^\circ\text{K}$, а пунктирные — $T_0 = 270^\circ\text{K}$.

Результаты выполненных выше расчетов можно кратко суммировать следующим образом.

1) Эффективная длина пути паров воды атмосферы слабо зависит от температуры и высоты над уровнем моря при $h \lesssim 8$ км. Зависимость коэффициента поглощения в парах воды от высоты весьма близка к экспоненциальной и в большинстве практических случаев можно считать, что эффективная высота паров воды равна 1,5 км (для равнины). Эти результаты находятся в хорошем согласии с данными работ [7]. С поднятием в горы можно ожидать более медленного убывания коэффициента поглощения в парах воды. Необходимо отметить, что распределение паров воды может сильно отличаться от среднего; представление о величине возможных отклонений эффективной длины пути для паров воды от средней дают результаты работ [7, 14].

2) Эффективная длина пути кислорода (как в случае резонансного, так и нерезонансного поглощения) оказывается существенным образом зависящей от температуры атмосферы и высоты над уровнем моря, что необходимо учитывать в практике радиоастрономических измерений. Полное вертикальное поглощение кислорода атмосферы убывает с высотой заметно быстрее коэффициента поглощения в кислороде; это обстоятельство необходимо принимать во внимание при сопоставлении результатов радиоастрономических и других методов измерения поглощения.

3) Средняя температура атмосферы существенным образом зависит от величины поглощения на луче зрения. Разность $T_0 - \tilde{T}$ зависит от величины T_0 , в противоположность результатам работ [2, 6], где даны соотношения для $T_0 - \tilde{T}$, явным образом не зависящие от T_0 . С увеличением высоты места наблюдения над уровнем моря следует учитывать изменение средней температуры атмосферы.

Заметим в заключение, что результаты выполненных расчетов следует использовать в том или ином диапазоне волн с учетом тех механизмов поглощения, которые являются существенными. Коэффициенты поглощения O_2 и H_2O , соответствующие окнам прозрачности (т. е. наиболее интересным для радиоастрономии диапазонам волн), могут быть достаточно уверенно определены из работы [5]. Нерезонансное поглощение O_2 в дециметровом диапазоне рассчитано в [9], а для миллиметрового диапазона имеется пока только эмпирическая формула, выведенная в [7].

Автор весьма признателен С. А. Жевакину и А. П. Наумову за ряд критических замечаний, В. С. Троицкому и К. С. Станкевичу за обсуждение вопросов, затронутых в статье, а также Г. Г. Рогачевой и Т. Н. Алешиной, выполнившим большую часть вычислительной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 393 (1961).
2. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 433 (1961).
3. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 6, 21 (1959).
4. A. Straiton, C. Tolbert, Proc. IRE, 48, 898 (1960); 49, 220 (1961).
5. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 674 (1963).
6. С. С. Гремяченский, Вестник ЛГУ, сер. физ. и хим., 10, 69 (1962).
7. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, 987 (1965); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
8. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 19 (1958).
9. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 98 (1965).
10. А. Х. Хргиан, Физика атмосферы, Физматгиз, М., 1958.

11. М. С. Малкевич, Ю. Б. Самсонов, Л. И. Копрова, УФН, 80, 93 (1963).
12. Е. Г. Швидковский, Искусственные спутники Земли, вып. 2, 10 (1958).
13. Proceedings of the first international symposium on rocket and satellite meteorology, North-Holland publ. Co.-Amsterdam, 1963.
14. В. В. Кузовлев, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 175 (1964).
15. А. Е. Саломонович, О. М. Атаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 606 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 мая 1965г.

AN ATMOSPHERE EFFECTIVE LENGTH AND MEAN TEMPERATURE

A. G. Kislyakov

The radio wave absorption factors in atmosphere water vapours and oxygen (for some averaged conditions) have been calculated as a function of altitude. The expressions have been derived for the effective length, mean temperature and total vertical absorption in atmosphere depending on thermodynamic temperature and the altitude. Some recommendations are given, useful for radioastronomical measurement practice.

УДК 621 371.182

О ПРОНИКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНИТОАКТИВНУЮ ПЛАЗМУ

Ю. В. Богомолов

Методом Днестровского и Костомарова [4, 5] вычислен полный поверхностный импеданс магнитоактивной плазмы. Постоянное магнитное поле, давление которого велико по сравнению с газовым давлением, направлено вдоль поверхности плазмы. Граница плазмы моделируется условием зеркального отражения электронов.

Исследованием проникновения электромагнитной волны в полуограниченную магнитоактивную плазму занимались многие авторы [1-3]. В работах Силина [1], Степанова [2], Шафранова [3] эта задача решена при наличии постоянного магнитного поля H_0 , перпендикулярного границе.

В работах [4-8] рассматривался случай, когда H_0 параллельно границе плазмы. Днестровский и Костомаров исследовали проникновение обыкновенной [4] и необыкновенной [5] электромагнитных волн в полуограниченную плазму без стенки (электроны удерживались в области $x > 0$ неоднородным стационарным магнитным полем $H_0(x)$, переходящим в однородное на бесконечности). Для обыкновенной волны ими было получено решение в виде ряда по степеням малого параметра $\beta = 8\pi N T / H_0^2$ (N — плотность плазмы, T — электронная температура в энергетических единицах). Для необыкновенной волны эти авторы ограничились качественным анализом поведения решения при $T \rightarrow 0$.

В работе Канера и Белова [6] вычислен поверхностный импеданс при диффузном отражении электронов и ионов от границы и произвольном β . Арсенин [7] вычислил поверхностное поглощение обыкновенной электромагнитной волны при зеркальном отражении электронов и малом β . Результаты этой работы противоречат, однако, расчетам Джонса и Зондхаймера [8], которые вариационным методом решили аналогичную задачу для фермиевской плазмы. При этом они рассмотрели не только обыкновенную, но и необыкновенную электромагнитную волну (при диффузном и зеркальном отражении электронов от границы).

В настоящей работе методом Днестровского и Костомарова [4, 5] вычисляется поверхностный импеданс для обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн. Предполагается, что величина β мала, а магнитное поле H_0 параллельно поверхности. Граница плазмы моделируется условием зеркального отражения электронов.

Плазма занимает область $x > 0$. В плоскости $x = 0$ она ограничена стенкой, отражающей электроны. Движением ионов пренебрегаем. Вдоль оси z наложено постоянное магнитное поле H_0 .

Пусть на плазму падает нормально плоская электромагнитная волна произвольной поляризации. Фактически достаточно рассмотреть две поляризации: 1) $E \parallel Oz$ (обыкновенная волна); 2) $E \parallel Oy$ (необыкновенная волна). Поле произвольной поляризации разбивается на эти две нормальные моды. Требуется вычислить импеданс

$$Z_k = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{E_k(0)}{E'_k(0)} \quad (k = z, y). \quad (1)$$

Частоту волны ω мы считаем меньше ленгмюровской частоты $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$. Столкновениями электронов с ионами и током смещения пренебрегаем.

Будем описывать плазму системой уравнений, состоящей из уравнений Максвелла и кинетического уравнения с самосогласованным полем для электронов. Представим функцию распределения электронов в виде сумм $f_0 + f$, где f_0 — невозмущенная (максвелловская) функция распределения, а f — связанная с волной поправка к ней.

Введем обозначения: $\omega_H = eH_0/mc$ — ларморовская частота ($e > 0$); $r_H = (1/\omega_H) \sqrt{2T/m}$ — средний ларморовский радиус. Определим безразмерные переменные ξ, ω, δ и γ следующими соотношениями:

$$\xi = \frac{x}{r_H}, \quad v_x = \sqrt{\frac{2T}{m}} \omega \cos \delta, \quad v_y = \sqrt{\frac{2T}{m}} \omega \sin \delta, \quad v_z = \sqrt{\frac{2T}{m}} \gamma.$$

Детальные вычисления мы проведем только для необыкновенной волны.

Необыкновенная волна. Электромагнитная волна, падающая на плазму, поглощается даже в отсутствие соударений между частицами. Поглощение носит поверхностный характер и связано с тем, что электрическое поле волны производит работу над электроном, отражающимся от границы плазмы. Те электроны, которые не сталкиваются с поверхностью, непосредственного вклада в поглощение не дают. Обозначим через f_1 функцию распределения тех электронов, которые сталкиваются со стенкой, через f_2 — тех, которые не сталкиваются. Условие столкновения:

$$\xi \leq \xi_0, \tag{2}$$

где $\xi_0 = \omega(\sin \delta + 1)$.

Благодаря гиротропии в плазме возникает продольное поле E_x . В скрещенных полях H_0, E_y электроны дрейфуют в направлении оси x . Так как ионы неподвижны, то происходит разделение зарядов, приводящее к возникновению продольного поля.

Линеаризованное кинетическое уравнение для f имеет вид

$$-\frac{i\omega}{\omega_H} f + \omega \cos \delta \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \delta} = \frac{e}{m\omega_H} \sqrt{\frac{m}{2T}} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} (E_x \cos \delta + E_y \sin \delta). \tag{3}$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$f = e^{\mu \delta} \left\{ C + \frac{e}{m\omega_H} \sqrt{\frac{m}{2T}} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \int_0^\delta e^{-\mu \delta'} [E_x(\xi') \cos \delta' + E_y(\xi') \sin \delta'] d\delta' \right\}, \tag{4}$$

где $\mu = i\Omega = i\omega/\omega_H$; $\xi' = \xi + \omega(\sin \delta' - \sin \delta)$, а постоянная C определяется из граничных условий.

Граничное условие для $f_1(\xi, \delta)$ имеет вид

$$f_1(0, \delta_0) = f_1(0, \pi - \delta_0), \tag{5}$$

где $\delta_0 = \arcsin(\sin \delta' - \xi'/\omega)$. Используя это условие, получаем

$$f_1 = \frac{e}{m\omega_H} \sqrt{\frac{m}{2T}} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \left[(e^{\mu(2\delta_0 - \pi)} - 1)^{-1} \int_{\delta_0}^{\pi - \delta_0} + \int_{\delta_0}^\delta \right] \times \\ \times e^{\mu(\delta - \delta')} [E_x(\xi') \cos \delta' + E_y(\xi') \sin \delta'] d\delta'. \tag{6}$$

В этой формуле штрихи в выражении для δ_0 можно уже снять.

Функция f_1 неперiodична по δ . В литературе часто записывают f_1 в виде периодической (с периодом 2π) функции [6]. Можно показать, однако, что эти различные формы для функции f_1 совпадают, если δ изменяется от $-\pi/2$ до $3\pi/2$. Указанная область изменения δ очевидна для частицы, сталкивающейся со стенкой.

Граничным условием для f_2 является условие периодичности:

$$f_2(\delta) = f_2(\delta + 2\pi). \quad (7)$$

Используя его, находим

$$f_2 = \frac{e}{m\omega_H} \sqrt{\frac{m}{2T}} \frac{\partial f_0}{\partial w} (e^{-2\pi\mu} - 1)^{-1} \int_{\delta}^{\delta+2\pi} e^{\mu(\delta-\delta')} [E_x(\xi') \cos \delta' + E_y(\xi') \sin \delta'] d\delta'. \quad (8)$$

В этой формуле ξ удовлетворяет условию $\xi > \xi_0$. Функция распределения f является суммой f_1 и f_2 .

Электрическое поле определяется из волнового уравнения, компоненты которого записываются так:

$$\frac{d^2 E_y}{d\xi^2} = \frac{4\pi i e r_H^2}{c^2} \left(\frac{2T}{m}\right)^2 \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin \delta d\delta \int_{-\infty}^\infty f d\gamma, \quad (9)$$

$$\int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos \delta d\delta \int_{-\infty}^\infty f d\gamma = 0. \quad (10)$$

Решение этих уравнений ищем в виде

$$E_x = E_{x0} \left[\exp\left(-\frac{\omega}{c} |n| r_H \xi\right) + u_1(\xi) \right], \quad (11)$$

$$E_y = E_{y0} \left[\exp\left(-\frac{\omega}{c} |n| r_H \xi\right) + u_2(\xi) \right],$$

где E_{x0} , E_{y0} — неизвестные постоянные; $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ — неизвестные, быстро убывающие при $\xi \rightarrow \infty$ функции; n — показатель преломления для однородной плазмы:

$$n^2 = -\omega_0^2/\omega^2. \quad (12)$$

Пренебрежение током смещения означает, что

$$\omega^2 \ll \omega_0^2, \quad \omega_H^2 \ll \omega_0^2.$$

В этих условиях для отношения E_{x0}/E_{y0} можно принять следующее значение [9]:

$$E_{x0}/E_{y0} = -1/\mu. \quad (13)$$

Для показателя экспоненты в формуле (11) можно записать

$$(\omega/c) |n| r_H = \sqrt{\beta}.$$

Мы будем считать выполненным следующее неравенство:

$$\sqrt{\beta} \ll 1. \quad (14)$$

Подставим выражения (11) в уравнения (9), (10). Рассмотрим уравнение (9). Это интегродифференциальное уравнение можно преобразовать

зовать в интегральное, используя условия на бесконечности. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 u_2(\xi) = & -e^{-\sqrt{\beta}\xi} - \frac{2\mu\beta}{\pi} \int_{\xi}^{\infty} (\sigma - \xi) d\sigma \int_0^{\infty} \omega^3 e^{-\omega^2} d\omega \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin \delta d\delta \times \\
 & \times \left[(e^{\mu(2\delta_0 - \pi)} - 1)^{-1} \int_{\delta_0}^{\pi - \delta_0} + \int_{\delta_0}^{\delta} + (e^{-2\pi\mu} - 1)^{-1} \int_{\delta}^{\delta + 2\pi} \right] e^{\mu(\delta - \delta')} \times \\
 & \times \left\{ \left(\frac{E_{x0}}{E_{y0}} \cos \delta' + \sin \delta' \right) e^{-\sqrt{\beta}\xi'} + \left[\frac{E_{x0}}{E_{y0}} \cos \delta' u_1(\xi') + \sin \delta' u_2(\xi') \right] \right\} d\delta'.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В этой формуле величины δ_0 и ξ' определены прежними соотношениями, в которые, однако, вместо ξ надо поставить σ .

В работе [5] для полуограниченной плазмы без стенки выяснен характер поведения функций $u_1(\xi)$ и $u_2(\xi)$. При $T \rightarrow 0$ функция $u_2(\xi)$ стремится к нулю. Функция $u_1(\xi)$ заметно отлична от нуля лишь в слое шириной 1 (т. е. $x \simeq r_H$) и при $T \rightarrow 0$ терпит разрыв на границе. Все эти особенности сохраняются и при наличии стенки.

Будем искать $u_2(\xi)$ в виде ряда по степеням β . В линейном по β приближении мы можем отбросить u_2 в правой части формулы (15), так как перед интегралом стоит β . Функция u_1 входит под знак трех четырехкратных интегралов. Первые два обязаны столкновениям электронов со стенкой. Их величина в $1/\sqrt{\beta}$ раз меньше, чем соответствующий (т. е. содержащий $\cos \delta'$) свободный член; поэтому мы их отбрасываем. Третий интеграл обязан периодическому движению электронов, и в нем мы вынесем u_1 за знаки интегралов. Условием для осуществления такой операции является не малость функции u_1 , а медленность ее изменения по сравнению с ядром уравнения [6].

Величину u_1 вычислим из уравнения (10), которое предварительно преобразуем к виду

$$\int_{\xi}^{\infty} (\sigma - \xi) d\sigma \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos \delta d\delta \int_{-\infty}^{\infty} f d\gamma = 0. \tag{16}$$

В такой форме к нему применимы те оценки, которые проводились выше. Перепишем (16) более подробно с учетом этих оценок:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi}^{\infty} (\sigma - \xi) d\sigma \int_0^{\infty} \omega^3 e^{-\omega^2} d\omega \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos \delta d\delta \left[(e^{\mu(2\delta_0 - \pi)} - 1)^{-1} \times \right. \\
 & \times \int_{\delta_0}^{\pi - \delta_0} + \int_{\delta_0}^{\delta} + (e^{-2\pi\mu} - 1)^{-1} \int_{\delta}^{\delta + 2\pi} \left. \right] e^{\mu(\delta - \delta')} \left(\frac{E_{x0}}{E_{y0}} \cos \delta' + \right. \\
 & \left. + \sin \delta' \right) e^{-\sqrt{\beta}\xi'} d\delta' + \frac{u_1}{e^{-2\pi\mu} - 1} \frac{E_{x0}}{E_{y0}} \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \omega^3 e^{-\omega^2} d\omega \int_0^{2\pi} \cos \delta d\delta \int_{\xi}^{\infty} (\sigma - \xi) d\sigma \int_{\delta}^{\delta + 2\pi} e^{\mu(\delta - \delta')} \cos \delta' d\delta' = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим последний четырехкратный интеграл в этом выражении. При интегрировании по σ мы получаем бесконечность из-за верхнего предела; однако в окончательный результат для $u_2(\xi)$ войдет неопреде-

ленность типа $\frac{\infty}{\infty}$, которая легко раскрывается. Подставляя в (15) u_1 из (17), мы получаем $u_2(\xi)$. Вводя новую переменную интегрирования δ_0 вместо σ и проводя несложные тождественные преобразования, находим окончательные выражения для $u_2(0)$ и $u_2'(0)$:

$$u_2(0) = -1 - \frac{2\mu\beta}{\pi} \int_0^{\infty} w^5 dw \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\delta_0 \int_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} (\sin \delta - \sin \delta_0) \times \quad (18)$$

$$\times \Phi_1(w, \delta_0, \delta) d\delta - \frac{2\mu}{\pi} \int_0^{\infty} w^3 dw \int_0^{2\pi} (1 + \sqrt{\beta} w + \sqrt{\beta} w \sin \delta) \Phi_2(w, \delta) d\delta,$$

$$u_2'(0) = \sqrt{\beta} + \frac{2\mu\beta}{\pi} \int_0^{\infty} w^4 dw \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\delta_0 \int_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} \Phi_1(w, \delta_0, \delta) d\delta + \quad (19)$$

$$+ \frac{2\mu \sqrt{\beta}}{\pi} \int_0^{\infty} w^3 dw \int_0^{2\pi} \Phi_2(w, \delta) d\delta,$$

где

$$\Phi_1(w, \delta_0, \delta) = \cos \delta_0 \left(\sin \delta + \frac{\cos \delta}{\mu} \right) e^{-w^2} \times \quad (20)$$

$$\times \left[(e^{\mu(2\delta_0-\pi)} - 1)^{-1} \int_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} + \int_{\delta_0}^{\delta} \right] \left(\sin \delta' - \frac{\cos \delta'}{\mu} \right) \times$$

$$\times \exp [\mu(\delta - \delta') + \sqrt{\beta} w (\sin \delta_0 - \sin \delta')] d\delta',$$

$$\Phi_2(w, \delta) = \left(\sin \delta + \frac{\cos \delta}{\mu} \right) \frac{e^{-\sqrt{\beta} w - w^2}}{e^{-2\pi\mu} - 1} \times \quad (21)$$

$$\times \int_{\delta}^{\delta+2\pi} \left(\sin \delta' - \frac{\cos \delta'}{\mu} \right) \exp [\mu(\delta - \delta') - \sqrt{\beta} w \sin \delta'] d\delta'.$$

Разложим экспоненту в формулах (20), (21) в ряд по степеням $\sqrt{\beta}$. При этом в выражении для $\Phi_2(w, \delta)$ необходимо учитывать четыре члена разложения. Что касается $\Phi_1(w, \delta_0, \delta)$, то для нее в формуле (18) нужны два члена разложения, а в формуле (19) — три. В результате получаем

$$u_2(0) = \frac{\beta}{2(\mu^2+4)} + \frac{15\mu\beta\sqrt{\beta}}{4\sqrt{\pi}(\mu^2+4)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \delta_0 \cos^3 \delta_0 (e^{\mu(2\delta_0-\pi)} + \quad (22)$$

$$+ 1) (e^{\mu(2\delta_0-\pi)} - 1)^{-1} d\delta_0,$$

$$u_2'(0) = 0. \quad (23)$$

Теперь можно записать поверхностный импеданс:

$$Z = R + iX = \frac{4\pi i \omega r_H}{c^2} \frac{1 + u_2(0)}{-\sqrt{\beta} + u_2'(0)} = -\frac{4\pi i \omega}{c \omega_0} \left[1 + \frac{\beta}{2(\mu^2 + 4)} + \frac{15\mu\beta\sqrt{\beta}}{4\sqrt{\pi}(\mu^2 + 4)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \delta_0 \cos^3 \delta_0 (e^{\mu(2\delta_0 - \pi)} + 1) (e^{\mu(2\delta_0 - \pi)} - 1)^{-1} d\delta_0 \right]. \quad (24)$$

При вычислении X можно ограничиться членами порядка β , тогда как вычисление поглощения требует знания вещественной части интеграла в этой формуле. С помощью новой переменной $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta_0$ мы сведем этот интеграл к уже рассмотренному в работе [8]. Используя полученный там результат, находим коэффициент поглощения:

$$A = \frac{cR}{\pi} = \frac{15\beta\Omega}{c(4 - \Omega^2)^2} \sqrt{\frac{2\pi T}{m}} \sum_{n=1}^{[\Omega]} \cos^2 \frac{n\pi}{\Omega} \sin^3 \frac{n\pi}{\Omega}, \quad (25)$$

где $[\Omega]$ означает целую часть числа Ω . Для $\Omega \rightarrow \infty$ ($H_0 \rightarrow 0$) нетрудно получить

$$A = \frac{4\omega_0^2}{\sqrt{\pi}\omega^2 c^3} \left(\frac{2T}{m} \right)^{3/2}. \quad (26)$$

Обыкновенная волна. Опуская детали расчета, приведем окончательный результат:

$$Z = -\frac{4\pi i \omega}{c \omega_0} \left[1 + \frac{\beta}{2(\mu^2 + 1)} + \frac{3\mu\beta\sqrt{\beta}}{4\sqrt{\pi}(\mu^2 + 1)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \delta_0 \times \right. \\ \left. \times (e^{\mu(2\delta_0 - \pi)} + 1) (e^{\mu(2\delta_0 - \pi)} - 1)^{-1} d\delta_0 \right]. \quad (27)$$

Коэффициент поглощения

$$A = \frac{3\beta\Omega}{c(1 - \Omega^2)^2} \sqrt{\frac{2\pi T}{m}} \sum_{n=1}^{[\Omega]} \sin^3 \frac{n\pi}{\Omega}. \quad (28)$$

При $1 < \Omega < 2$ эта формула отличается от полученной в [7] отсутствием множителя Ω^3 и слагаемого $(\omega/c)^2$ в знаменателе. При $\Omega \rightarrow \infty$ она переходит в формулу (26).

Поглощение, описываемое формулами (25) и (28), имеет качественно одинаковый характер. Кривая поглощения начинается с частоты $\omega = \omega_H$ и имеет один максимум. Зависимость A от ω , ω_H в обоих случаях совпадает с той, которую мы имеем для вырожденной плазмы [8]. По сравнению со случаем диффузного отражения электронов [6] мы имеем здесь и качественное, и количественное различие. В частности,

$$A_{\text{зерк}} \sim \beta A_{\text{диф}}.$$

Это означает, что поглощение при зеркальном отражении электронов значительно меньше, чем при диффузном. Аналогичная ситуация возникает и для плазмы без магнитного поля [10].

Зная импеданс, легко вычислить глубину проникновения магнитного поля. Что касается электрического поля, то, как это следует из самого метода решения, глубина его проникновения равна c/ω_0 .

Автор выражает глубокую благодарность М. Л. Левину за внимание и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Труды ФИАН, 6, 199 (1955).
2. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 36, 1457 (1959).
3. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).
4. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 39, 845 (1960).
5. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Вестник МГУ, № 2, 3 (1963).
6. Э. Л. Канер, Ю. А. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 47 (1962).
7. В. В. Арсенин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 455 (1963).
8. M. C. Jones, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., 278, 256 (1964).
9. В. Д. Шафранов, Сб. «Вопросы теории плазмы» под ред. Леонтовича, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.
10. В. Л. Гинзбург, Г. П. Мотулевич, УФН, 55, 512 (1955).

Радиотехнический институт АН СССР

Поступила в редакцию
28 июля 1965 г.

ON ELECTROMAGNETIC FIELD PENETRATION INTO MAGNETO ACTIVE PLASMA

Yu. V. Bogomolov

By Dnestrovsky and Kostomarov's [4, 5] method a total surface impedance of magnetoactive plasma has been calculated. A constant magnetic field the pressure of which is greater as compared with a gas one is directed along the plasma surface. The plasma boundary is modelled under the condition of the mirror reflection of electrons.

УДК 533.951

**НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ПРИ
НАЛИЧИИ ИНТЕНСИВНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН***В. А. Липеровский и В. Н. Цытович*

В работе рассматриваются четырехплазменные процессы, приводящие в ряде случаев к нелинейной перекачке спектра продольных волн в сторону больших волновых чисел.

1. Как показано в [1,2], нелинейное взаимодействие продольных ленгмюровских волн в плазме между собой в случае максвелловской функции распределения частиц приводит к перекачке спектра продольных волн в сторону меньших волновых чисел и, следовательно, больших ν_{ϕ} . Поскольку ленгмюровские волны хорошо поглощаются лишь при $\nu_{\phi} \leq \nu_{Te}$, то такого рода нелинейная перекачка приводит к эффективному уменьшению поглощения Ландау продольных ленгмюровских волн. Иными словами, нелинейный механизм взаимодействия плазменных волн «отводит» их из области поглощения.

Наличие пучков частиц [3] может изменить направление перекачки в k -пространстве, что немаловажно с точки зрения возможности нагрева плазмы. В настоящей работе рассмотрены эффекты индуцированного рассеяния продольных волн в плазме при наличии интенсивных поперечных волн и показано, что перекачка в сторону больших k и, следовательно, меньших ν_{ϕ}' возможна также при наличии пучков поперечных волн в однородной изотропной плазме. Это демонстрирует наличие глубокой физической аналогии между пучками заряженных частиц и волн, отмеченной в [4]. В работе найдены условия, когда нелинейное рассеяние плазменных волн определяется поперечными волнами, а не частицами. Последнее представляет интерес в связи с тем, что экспериментальное создание мощных пучков поперечных волн в плазме является несложной задачей, а также в связи с астрофизическими приложениями. Дело в том, что имеется большое число космических объектов с весьма большой плотностью излучения (радиоисточник Лебедь-А, квазары и т. п.). Наличие интенсивных ВЧ полей в этих объектах может привести, согласно настоящей работе, к эффективному поглощению плазменных волн, что должно учитываться наряду с другими нелинейными процессами. В настоящей работе выявлено, что в процессе четырехплазменного взаимодействия возможны сильные компенсационные эффекты, аналогичные тем, которые были исследованы для рассеяния волн на частицах в [1,3]. Здесь эффекты компенсации возникают для процессов рассеяния волн на волнах. Следует заметить, что при графическом изображении процессов графики, приводящие к компенсации при рассеянии волн на волнах и волн на частицах, сходны друг с другом (см. ниже).

2. В процессе рассеяния плазменных волн на поперечных участвуют четыре волны: начальная поперечная, с волновым вектором и частотой

$k_1^t = \{k_1, \omega_1\}$; начальная продольная $k_2^t = \{k_2, \omega_2\}$; рассеянная продольная $k_3^t = \{k_3, \omega_3\}$ и рассеянная поперечная $k^t = \{k, \omega\}$.

Используя в настоящей работе полуквантовый метод рассмотрения кинетики распадных процессов [5-7], введем для всех четырех волн числа волн на единицу объема плазмы: $N^t(k_1)$, $N^t(k_2)$, $N^t(k_3)$ и $N^t(k)$. Эти числа волн определены через энергию соответствующих гармоник электрического поля в плазме:

$$\frac{1}{4\pi} |E_k^t|^2 \left. \frac{\partial \varepsilon^t(\omega, k)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega(k)} = \frac{1}{(2\pi)^3} N^t(k);$$

$$\frac{1}{4\pi} |E_k^t|^2 \left. \frac{\left| \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^t(\omega, k) \right|}{\omega^2} \right|_{\omega=\omega(k)} = \frac{1}{(2\pi)^3} N^t(k).$$

Рассматриваемый процесс является четырехплазмонным процессом распадного типа и интенсивность рассеяния зависит от всех четырех чисел волн, участвующих в процессе, причем инкремент процесса рассеяния будет пропорционален произведениям трех чисел волн (см. ниже).

Введем вероятность четырехплазмонного взаимодействия, приводящего к поглощению двух волн — продольной k_2^t и поперечной k_1^t и излучению двух волн — продольной k_3^t и поперечной k^t . При этом для излучаемых волн в выражении для вероятности перед k ставим знак минус:

$$w_{i'j'}^{ii}(-k^t, k_1^t, k_2^t, -k_3^t); \quad k = \{k, \omega\}.$$

Подчеркнем, что вероятности прямых и обратных процессов равны, что соответствует изменению всех знаков перед k :

$$w_{i'j'}^{ii}(-k^t, k_1^t, k_2^t, -k_3^t) = w_{i'j'}^{ii}(k^t, -k_1^t, -k_2^t, k_3^t).$$

Разумеется, также справедливы равенства

$$w_{i'j'}^{ii}(-k^t, k_1^t, k_2^t, -k_3^t) = w_{i'j'}^{ii}(-k^t, k_1^t, -k_3^t, k_2^t) = \\ = w_{i'j'}^{ii}(k_1^t, -k^t, k_2^t, -k_3^t),$$

являющиеся следствием неразличимости плазмонов. В выражениях для вероятностей подразумевается, что $\omega = +|\omega(k)|$.

Учтя, что любой процесс поглощения волн пропорционален N , а излучения $N + 1$, и используя введенную вероятность, напишем систему уравнений для волн:

$$\frac{\partial N^t(k_1)}{\partial t} = \int dk dk_2 dk_3 w_{i'j'}^{ii}(-k, k_1, k_2, -k_3) \Phi(k_1, k_2, k_3, k); \quad (1)$$

$$\frac{\partial N^t(k)}{\partial t} = - \int dk_1 dk_2 dk_3 w_{i'j'}^{ii}(-k, k_1, k_2, -k_3) \Phi(k_1, k_2, k_3, k); \quad (2)$$

$$\frac{\partial N^t(k_2)}{\partial t} = \int dk dk_1 dk_3 w_{i'j'}^{ii}(-k, k_1, k_2, -k_3) \Phi(k_1, k_2, k_3, k); \quad (3)$$

$$\frac{\partial N^t(k_3)}{\partial t} = - \int dk dk_1 dk_2 w_{i'j'}^{ii}(-k, k_1, k_2, -k_3) \Phi(k_1, k_2, k_3, k). \quad (4)$$

Здесь

$$\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}) = \{N^l(\mathbf{k}) N^l(\mathbf{k}_1) (N^l(\mathbf{k}_3) - N^l(\mathbf{k}_2)) + N^l(\mathbf{k}_2) N^l(\mathbf{k}) (N^l(\mathbf{k}) - N^l(\mathbf{k}_1))\}.$$

Система (1)–(4) соответствует прямому и обратному процессам, изображенным на рис. 1а. Она удобна для описания взаимодействия четырех узких пакетов волн*. Входящие в выражение для вероятностей в уравнениях (1)–(4) законы сохранения энергии и импульса взаимодействующих квантов имеют вид

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}; \quad \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_3(\mathbf{k}_3) + \omega(\mathbf{k}). \quad (5)$$

Заменяя индексы $2 \rightarrow 3$, легко написать уравнения, аналогичные (1)–(4), в которых входит вероятность $w_{l'l'}^{ll}$ ($-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$) для четырех узких пакетов, соответствующих законам сохранения (см., рис. 1б):

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_2; \quad \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_3(\mathbf{k}_3) = \omega(\mathbf{k}) + \omega_2(\mathbf{k}_2). \quad (6)$$

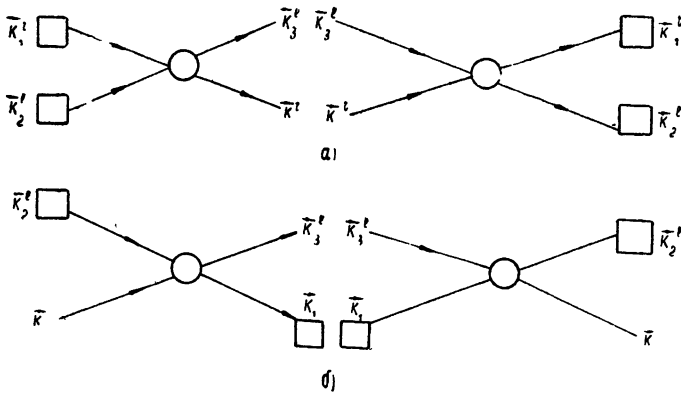


Рис. 1.

Отметим, что допускаемые области \mathbf{k} и \mathbf{k}_3 , определяемые из (5) и (6), не перекрываются; поэтому при рассмотрении взаимодействия узких пакетов используется либо $w_{l'l'}^{ll}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3)$, либо $w_{l'l'}^{ll}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$.

Если начальный спектр поперечных волн достаточно широк: $\Delta k^l \gg \omega_2 - \omega_3 \sim \omega_0 \mathcal{V}_{Te}^2 k^2 / \omega_0^2$, то при рассмотрении кинетики волн в плазме при наличии интенсивного пучка поперечных волн необходимо учесть процессы, описываемые как вероятностью $w_{l'l'}^{ll}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3)$, так и вероятностью $w_{l'l'}^{ll}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$.

Уравнения, соответствующие случаю широкого спектра, можно получить, если переобозначить в (2) $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_1$ и в (4) $\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}_2$, добавить полученные правые части (2) и (4) соответственно к (1) и (3) и использовать разложение:

* Легко видеть, что, если $N^l(\mathbf{k}_1)$ и $N^l(\mathbf{k}_2)$ — узкие пакеты $\Delta k \ll |\omega_2 - \omega_3|$, отличные от нуля в очень малых областях волновых векторов, то для определения шести неизвестных \mathbf{k} и \mathbf{k}_3 имеется 4 уравнения (см. рис. 1, где квадраты на концах стрелок соответствуют заданным значениям векторов). Таким образом, \mathbf{k} и \mathbf{k}_3 — волновые числа, при которых отличные от 0 $N^l(\mathbf{k})$ и $N^l(\mathbf{k}_3)$ полностью определяются лишь при задании $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ или $\frac{\mathbf{k}_3}{|\mathbf{k}_3|}$, либо $|\mathbf{k}|$ и $|\mathbf{k}_3|$.

$$N^l(\mathbf{k}) = N^l(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_1)}{\partial \mathbf{k}_1} + \dots \quad (7)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_1)}{\partial t} = & \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \left\{ N^l(\mathbf{k}_1) N^l(\mathbf{k}) (N^l(\mathbf{k}_3) - N^l(\mathbf{k}_2)) (\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) - \right. \\ & \left. - \omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)) + N^l(\mathbf{k}_2) N^l(\mathbf{k}_3) (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_1)}{\partial \mathbf{k}_1} \times \right. \\ & \left. \times (\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) + \omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)) \right\}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_2)}{\partial t} = & \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3 \left\{ N^l(\mathbf{k}_1) N^l(\mathbf{k}) (N^l(\mathbf{k}_3) - N^l(\mathbf{k}_2)) \times \right. \\ & \times (\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) + \omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)) + N^l(\mathbf{k}_2) N^l(\mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times \\ & \left. \times \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_1)}{\partial \mathbf{k}_1} (\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) + \omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как при $\omega \gg \omega_0$ обычно $N^l \gg N^l$ (поскольку фазовый объем l волн намного превышает фазовый объем l' волн), можно пренебречь членами, пропорциональными $N^l N^l N^l$, и получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_1)}{\partial t} = & \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 N^l(\mathbf{k}_2) N^l(\mathbf{k}_3) (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_1)}{\partial \mathbf{k}_1} \times \\ & \times [\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) + \omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_2)}{\partial t} = & \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3 N^l(\mathbf{k}_2) N^l(\mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_1)}{\partial \mathbf{k}_1} \times \\ & \times [\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) + \omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)]. \end{aligned} \quad (11)$$

3. Для отыскания вероятности $\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3)$ применим методику, использованную, например, в [7]. Исходим из кинетического уравнения для электронов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (12)$$

Будем считать, что $f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$, где f_0 — максвелловская функция распределения, а f_1 , f_2 и f_3 — нелинейные поправки к ней, пропорциональные соответственно первой, второй и третьей степеням полного поля E . Записывая f_1 , f_2 и f_3 в виде интегралов Фурье, из уравнений для поправок к функции распределения получим

$$f_{1k} = \frac{1}{\omega - k\mathbf{v}} \frac{e}{im} F_k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_{2k} = & \frac{1}{\omega - k\mathbf{v}} \left(\frac{e}{im} \right)^2 \int F_{k_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega_2 - k_2 \mathbf{v}} F_{k_2} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \times \\ & \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) d\mathbf{k}_1 d\omega_1 d\mathbf{k}_2 d\omega_2; \end{aligned} \quad (14)$$

$$f_{3k} = \frac{1}{\omega - k\mathbf{v}} \left(\frac{e}{im} \right)^3 \int F_{k_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (k_2 + k_3) \mathbf{v}} F_{k_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \quad (15)$$

$$\times \frac{1}{\omega_3 - k_3 \mathbf{v}} F_{k_3} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d\Lambda_{123};$$

$$d\Lambda_{123} = \delta(k_1 + k_2 + k_3 - k) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega) dk_1 dk_2 dk_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Здесь

$$F_k = \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right)_{k, \omega} = E_k \left(1 - \frac{k\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{k(E_k \mathbf{v})}{\omega}.$$

Для исключения $B_{k, \omega}$ мы воспользовались уравнением Максвелла

$$B_{k, \omega} = \frac{c}{\omega} [k E_{k, \omega}].$$

Найдем теперь ту часть нелинейного тока в плазме, которая учитывает эффекты $\sim E^3$. Заметим, что $j^{(3)} \sim E^3$ должно состоять из двух членов, которым соответствуют рис. 2а и рис. 2б и которые в значительной степени компенсируют друг друга:

$$j_i^{(3)} = e \int f_3 \mathbf{v} d\mathbf{v} \sim E^3 \quad \text{и} \quad j_{ii}^{(3)} = \Delta j^{(2)} = e \int \Delta f_2 \mathbf{v} d\mathbf{v} \sim E^3.$$

Здесь Δf_2 связана с частью ΔE_i полного поля, вызванной нелинейным током $j^{(2)}$, т. е. $\Delta E_i = \Pi_{ij} j_j^{(2)}$ (см. [9]); Π_{ij} —обратный максвелловский оператор:

$$\Pi_{ij}(k) = -\frac{4\pi i \omega}{k^2} \left\{ \frac{k_i k_j}{\omega^2 \epsilon^t(k)} - \frac{k^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 - \omega^2 \epsilon^t(k)} \right\}, \quad (16)$$

описывающий виртуальную линию рис. 2б.

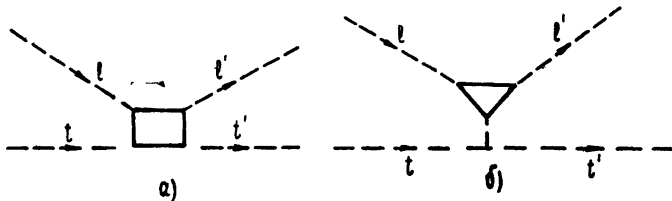


Рис. 2.

Для вычисления вероятности используем принцип соответствия, считая, что одно из полей E^t мало, и вычисляя изменение энергии этого поля благодаря интенсивным полям E_1^t, E_2^t, E_3^t , имеющим узкие спектры в окрестности k_1^t, k_2^t, k_3^t . Соответствующее выражение для нелинейного тока $j^{(3)} = j_i^{(3)} + j_{ii}^{(3)}$ может быть приведено к виду

$$j_i^{(3)} = \int (\Sigma_{ilmn}^I + \Sigma_{ilmn}^{II}) E_{i1} E_{m2} E_{n3} d\Lambda_{123} = e \int v_i (f_{3k} + \Delta f_{2k}) d\mathbf{v}, \quad (17)$$

* Поле $E^t \equiv \Delta E_i^{III}$ ($\Delta E_i^{III} = \Pi_{ij} j_j^{(3)}$) вызвано током $j^{(3)}$ в соответствии с уравнениями Максвелла и имеет смысл поля, вынуждающего линейные колебания с $\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ и $k = k_1 + k_2 - k_3$ в уравнении первого приближения. Действие «вынуждающей силы» $E_i^{III} \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}$ ($E_i^{III} \sim E_1^t E_2^t E_3^t$) в линейном уравнении учитывается при подсчете мощности излучения нелинейного тока в плазме

где $E_{1l} \equiv E_l(\mathbf{k}_1, \omega_1)$, $E_{m2} = E_m(\mathbf{k}_2, \omega_2)$, $E_{n3} = E_n(\mathbf{k}_3, \omega_3)$, индексы $1l$ соответствуют полю поперечной волны, $m2$ и $n3$ — продольных волн, рассеиваемой и рассеянной, так что

$$F_2 = E_2, \quad F_3 = E_3, \quad \omega_2 + \omega_3 \sim \frac{3}{2} \frac{v_{Te}^2 (k_2^2 - k_3^2)}{\omega_0} \ll \omega_0.$$

(Предположено, что $\omega_2 > 0$, $\omega_3 < 0$, поскольку лишь в этом случае эффект максимален.) Следует подчеркнуть, что пока здесь ω_2 и ω_3 — не реальные частоты волн, а переменные в интеграле Фурье. При этом

$$\Sigma_{ilmn}^I = -\frac{ie^4 n_0}{m^3} \int d\mathbf{v} \left\{ \frac{d}{dv_s} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left[\delta_{ls} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega_1} \right) + \frac{k_{1s} v_l}{\omega_1} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_m} \frac{1}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 \mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial v_n} \right\}; \quad (18)$$

$$\Sigma_{ilmn}^{II} = -\frac{ie^4 n_0}{m^3} \int d\mathbf{v} \left\{ \frac{d}{dv_s} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left[\delta_{ls} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega_1} \right) + \frac{k_{1s} v_l}{\omega_1} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v}} \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial f_0}{\partial v_a} \Pi_{qr}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \times \right. \\ \left. \times \int \frac{v_r d\mathbf{v}}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_m} \frac{1}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 \mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial v_m} \right\}. \quad (19)$$

Полный обобщенный тензор проводимости легко получить, сложив $\Sigma_{ilmn}^I + \Sigma_{ilmn}^{II}$ с выражениями, получаемыми при всех возможных перестановках взаимодействующих волн E_1, E_2, E_3 (симметризации). Учтем в выражении Π_{ij} сначала только виртуальную продольную волну.

При симметризации выражения для Σ_{ilmn} по индексам $1l, 2m, 3n$, соответствующим начальной поперечной и двум продольным волнам (рассеиваемой и рассеянной), возникают нерезонансные члены, не имеющие знаменателей типа $\frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v}}$. Вычисления показывают, что всеми нерезонансными членами можно пренебречь, если

$$\frac{\omega_0}{\omega} \ll \frac{\varepsilon_i^l(\mathbf{k}_+)}{\varepsilon^l(\mathbf{k}_+)} (1 - \varepsilon_e^l(\mathbf{k}_+)); \quad \mathbf{k}_+ = \{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3\},$$

что всегда выполняется при $\omega \gg \omega_0$ и $\omega_+ = \omega_2 + \omega_3 \ll \omega_0$.

Учет магнитных членов в выражении F_1 приводит к поправкам порядка v/c , которые мы также не учитываем. Если учесть в выражении Π_{ij} член, соответствующий виртуальной поперечной волне, то анализ показывает, что его роль в членах, содержащих резонансные знаменатели, пренебрежимо мала — порядка $(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \omega^{-2} \varepsilon^l(\mathbf{k}_+)/\varepsilon_i^l(\mathbf{k}_+)$ при $v_\phi^l \leq 1$ или $v_{Te}^2 \varepsilon^l(\mathbf{k}_+)/\varepsilon_i^l(\mathbf{k}_+)$ при $v_\phi^l \sim 1/v_{Te}$.

Учет виртуальной поперечной волны в нерезонансных членах может быть существенен за счет малости знаменателя в выражении Π_{ij} лишь при условиях $T_i \gg T_e$, $T_i \gg mc^2$. В этом случае

$$\Delta \Sigma_{ilmn} = \frac{ie^2 \omega_0^4}{m^2 \omega} \left[\delta_{jl} \frac{k_{3n}}{\omega_0^2 \omega_1} + \delta_{jn} \frac{1}{\omega_1 \omega_3} \left(\frac{k_{1l}}{\omega_1} + \frac{k_{3l}}{\omega_1 + \omega_3} \right) + \right. \\ \left. + \delta_{ln} \frac{k_{1j}}{\omega_1 \omega_3 (\omega_1 + \omega_3)} \right] \frac{1}{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)^2} \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)^2 \delta_{qj} - (\mathbf{k}_{1q} + \mathbf{k}_{3q})(k_{1j} + k_{3j})}{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)^2 - (\omega_1 + \omega_3)^2 \varepsilon^l(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)} \times$$

$$\times \left[\delta_{im} \frac{k_q}{\omega} + \frac{k_m}{\omega} \delta_{ql} + \delta_{im} \frac{k_{3q} + k_{1q}}{\omega_1 + \omega_3} \right] + (2 \leftrightarrow 3).$$

Не останавливаясь подробно на этом исключительном случае, приведем приближенное выражение для Σ_{ilmn} после всех сделанных пренебрежений:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ilmn} &= \frac{ie^4 n_0}{2m^3 v_{Te}^2} \int d\mathbf{v} \frac{d}{d v_s} \frac{v_i \left[\delta_{is} \left(1 - \frac{k_1 v}{\omega_1} \right) + \frac{k_{1s} v_l}{\omega_1} \right]}{\omega - k\mathbf{v}} \times \\ &\times \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_m} \frac{1}{\omega_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{v}} v_n f_0 + \frac{f_0(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v} \omega_0^2}{v_{Te}^2 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2 \varepsilon^l(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)} \right\} \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{v}}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_m} \frac{v_n f_0}{\omega_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{v}} \Big\} + \text{симметричные члены } (2 \leftrightarrow 3) = \\ &= \frac{ie^2}{m^3} \frac{\delta_{il}}{8\pi\omega\omega_0^2} \frac{\varepsilon_i^l(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)}{\varepsilon^l(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)} (1 - \varepsilon^l(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)) [k_{3m}(k_{2n} + k_{3n}) + k_{2n}(k_{2m} + k_{3m})]. \end{aligned} \quad (20)$$

Интенсивность излучения тока $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t)$ в плазме есть работа сил поля, создаваемого током, над самим током на единицу объема, усредненная за большой промежуток времени:

$$Q^t = - \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{1}{VT} \int_{-T/2}^{T/2} \int_V dt d\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

или, переходя к компонентам Фурье:

$$\begin{aligned} Q^t &= - \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{(2\pi)^4}{VT} \int d\mathbf{k} \mathbf{j}^*(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \\ &= - \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{(2\pi)^4}{TV} \int d\mathbf{k} j_i^*(\mathbf{k}) \Pi_{ij}(\mathbf{k}) j_j(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (21)$$

Следует заметить, что указанное усреднение сделано лишь в целях удобства, так как результирующее выражение после усреднения по случайным фазам взаимодействующих волн от времени не зависит. Вероятность, необходимая нам, может быть найдена, если, как было указано, воспользоваться принципом соответствия. Нелинейный ток $\mathbf{j}^{(3)}$, а следовательно, и $Q^{t(3)}$ нами найдены для случая, когда число излучаемых квантов мало. В соответствии с этим из уравнения (2) при $N^l(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} Q^{t(3)} &= \int \frac{\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\partial N^t(\mathbf{k})}{\partial t} = \int \frac{\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} N^t(\mathbf{k}_1) N^t(\mathbf{k}_2) N^t(\mathbf{k}_3) \times \\ &\times \omega_{l' l}^{t l'}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Из сравнения (21) и (22) получим выражение для искомой вероятности:

$$\omega_{l' l}^{t l'}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) = \frac{e^4}{32(2\pi)^3 m^4 \omega_0^2 \omega^2} \left(1 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \right) \times$$

$$\times \frac{(\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3)^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)^4}{k_2^2 k_3^2} \left| \frac{\varepsilon_i^l(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)}{\varepsilon^l(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)} (1 - \varepsilon_e^l(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)) \right|^2 \times \quad (23)$$

$$\times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) - \omega_3(\mathbf{k}_3) - \omega(\mathbf{k})).$$

Найденная вероятность (23) решает поставленную задачу об отыскании конкретных уравнений, описывающих четырехплазменные распадные процессы.

4. Рассмотрим пример взаимодействия ленгмюровских волн при наличии пучка поперечных волн. Пусть спектр рассматриваемых t -волн задается формулой

$$N^t(\mathbf{k}_1) = \frac{N_0^t}{(2\pi)^{3/2} (\Delta k)^3} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0)^2}{2(\Delta k)^2} \right\}. \quad (24)$$

Из уравнения для изменения числа волн $N^l(\mathbf{k}_2)$ в случае размытого пучка волн (24) видим, что инкремент нелинейной перекачки определяется выражением

$$\gamma^{ll} = \frac{1}{N^l(\mathbf{k}_2)} \frac{\partial N^l(\mathbf{k}_2)}{\partial t} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k} d\mathbf{k}_3 N^l(\mathbf{k}_3) N^t(\mathbf{k}_1) \times \quad (25)$$

$$\times (\Delta k)^{-2} (\mathbf{k}_- (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1)) [\omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) + \omega_{l'l'}^l(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)],$$

что при

$$\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_- \gg |\omega_2 - \omega_3| \frac{|\mathbf{k}_1|}{v_{Te}^l} \quad (26)$$

дает

$$\gamma^{ll} \approx \frac{1}{16} \frac{\omega_0^6}{\omega^2 c^2 (\Delta k)^4} \frac{W^t}{m^2 n_0^2 v_{Te}^2} \int d\mathbf{k}_3 N^l(\mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_-) \exp \left[-\frac{1}{2(\Delta k)^2} \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_-)^2}{(\mathbf{k}_-)^2} \right]; \quad (27)$$

$$\mathbf{k}_- = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3; \quad \omega_- = \omega_2 - \omega_3.$$

Из выражения (27) видно, что перекачка со стороны меньших $\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_2^l$ идет в сторону больших $\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_3^l$ ($\gamma^{ll}(\mathbf{k}_2) < 0$). Выражение (27) максимально при $\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_- / |\mathbf{k}_1| = \Delta k$ (что не противоречит (26) при $(\Delta k)^2 \gg |\mathbf{k}_1| \|\mathbf{k}_2\|^2 \lambda_{De} v_{Te} / c$):

$$\gamma_{\max}^{ll} \approx \frac{1}{16} \omega_0 \frac{W^l}{m_e n_0 v_{Te}^2} \frac{W^t}{m_e n_0 v_{Te}^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\omega_0^2}{c^2 (\Delta k)^2}. \quad (28)$$

При оценках мы учитывали, что всюду

$$\varepsilon_e^l(\mathbf{k}_-) - 1 = \frac{\omega_{0e}^2}{k_-^2 v_{Te}^2}, \quad \left| \frac{\varepsilon_i^l(\mathbf{k}_-)}{\varepsilon^l(\mathbf{k}_-)} \right| \approx 1$$

при любых \mathbf{k}_- , ω_- , за исключением резкого максимума при $|\mathbf{k}_-| \lambda_{De} \sim (m_e/m_i)^{1/4}$. Из сравнения (28) с инкрементом нелинейной перекачки продольных волн в сторону меньших $[\mathbf{k}_-]$

$$\gamma_{np}^{ll} = \omega_0 (\mathbf{k}^l \lambda_{De})^3 W^l (n m_e v_{Te})^{-1} \quad (29)$$

видим, что эффект перекачки продольных волн в сторону больших $\mathbf{k}^l \mathbf{k}_0^l$ (а так как частота ω^l монотонно зависит от проекций \mathbf{k}^l , то и в сторону больших ω^l) превалирует при

$$\frac{1}{16} \frac{W^l}{m_e n_e v_{Te}^2} \frac{\omega_0^2}{(c\Delta k)^2} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) > [k^l \lambda_{De}]^3. \quad (30)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведенным выше методом с учетом выявленных компенсационных эффектов была найдена вероятность четырехплазмонного распада двух плазменных волн на две плазменные $l+l' \rightarrow l''+l'''$:

$$\begin{aligned} \omega_{l''l'''}^{ll'}(-k, k_1, k_2, -k_3) &= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{e^4 \lambda_{De}^4}{m^4 v_{Te}^4} \left[\frac{\epsilon_l^i(k_2 - k_3, \omega_2 - \omega_3)}{\epsilon_l^i(k_2 - k_3, \omega_2 - \omega_3)} \times \right. \\ &\times \frac{(kk_1)(k_2^2 - k_2 k_3)}{|k_1| |k_2| |k_3| |k|} \frac{(k_2 k_3 - k_3^2)(k_2^2 - k_3^2)}{(k_2 - k_3)^4} + \text{члены } (1 \rightleftharpoons 2) \left. \right]^2 \times \\ &\times \frac{\delta(k_1 + k_2 - k_3 - k) \delta(\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) - \omega_3(k_3) - \omega(k))}{(4\pi)^3}. \end{aligned} \quad (П.1)$$

Найденная вероятность отличается от поправки [10] к работе [8] на множитель порядка $(k\lambda)^4$, кроме того, зависимость от углов существенно другая. Инкремент $l+l' \rightarrow l''+l'''$ распада при

$$N^l(k) = \frac{W^l (2\pi)^{3/2}}{(\Delta k)^3 \omega_0} \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2} \right]$$

по порядку величины оценивается формулой

$$\gamma_4^l \simeq \omega_0 \left(\frac{k}{\Delta k} \right)^2 (k\lambda)^2 \left(\frac{W^l}{m_e n_e v_{Te}^2} \right)^2; \quad \lambda \equiv \lambda_{De}. \quad (П.2)$$

Для изотермической плазмы, в которой невозможно возбуждение ионно-звуковых волн ленгмюровскими, выпишем условия, при которых четырехплазмонные $l+l' \rightarrow l''+l'''$ процессы доминируют над индуцированным рассеянием $\gamma_4^l \gg \gamma_{np}$, учитывая также, что всегда должно выполняться условие применимости приближения случайных фаз $\gamma_4^l \ll \Delta\omega = 3\lambda^2 k\Delta k\omega_0$.

В случае, когда преобладающим является рассеяние на ионах

$$k\lambda \ll (m_e/m_i)^{1/2} \quad \text{и} \quad \gamma_{np} = \omega_0 \Delta k \lambda (m_e/m_i)^{1/2} W^l (m_e n_e v_{Te}^2)^{-1},$$

имеем

$$\left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^3 \frac{1}{k\lambda} \ll \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^2} \ll \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^{3/2}.$$

Такой интервал существует, лишь если $\Delta k/k \ll (m_e/m_i)^{2/3}$ и $W^l/m_e n_e v_{Te}^2 \ll m_e/m_i$. Учтя, кроме того, условие несущественности соударений $= \omega_0/n\lambda^3 \ll \gamma_4^l$, сводящееся к

$$\frac{1}{\sqrt{n\lambda^3}} \frac{\Delta k}{k^2 \lambda} \ll \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^2},$$

получим, что, с другой стороны, интервал, когда существенны четырехплазмонные распады, существует при $\Delta k/k \gg (k\lambda)^{-2} (n\lambda^3)^{-1}$, что совместимо $|k| \ll (m_e/m_i)^{2/3}$ лишь при плотностях $n < (m_e/m_i)^{10/3} (T_e/4\pi e^2)^3$, т. е., например, при $T_e \sim 2 \text{ эВ}$ и $n < 10^7 \text{ см}^{-3}$ для водородной плазмы.

В случае, когда преобладающим является рассеяние на электронах

$$(m_e/m_i)^{1/3} \ll k\lambda \ll 1, \quad \gamma_{ip} = \omega_0(k\lambda)^3 W^l (nm_e v_{Te}^2)^{-1},$$

а столкновения практически всегда несущественны при $n\lambda^3(k\lambda)^2 \gg 1$ (для $\Delta k \ll k$), имеем неравенства

$$k\lambda \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^2 \ll \frac{W^l}{m_e n v_{Te}^2} \ll \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^{3/2}.$$

Интервал W^l , в котором справедливы последние неравенства, найдется всегда в силу $k\lambda \ll 1$ и $\Delta k \ll k$. Подчеркнем, что области волновых чисел k и энергий W^l , определяемые указанными неравенствами, сравнительно узки в отличие от рассмотренного нами рассеяния $t+l \rightarrow l'+t'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Гайлитис, В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1190 (1964).
2. W. E. Drummond, D. Pines, Nucl. Fusion Suppl, 3, 1049 (1962).
3. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 203 (1964).
4. Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ДАН СССР, 159, 1306 (1964)
5. Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 48, 1454 (1964).
6. В. А. Липеровский, В. Н. Цытович, ПМТФ, 5, 15 (1965).
7. В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ, 49, 797 (1965).
8. Л. М. Коврижных, ЖЭТФ, 49, 237 (1965).
9. К. А. Гайлитис, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 47, 1468 (1964).
10. Л. М. Коврижных, ЖЭТФ, 48, 1376 (1965).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
6 сентября 1965 г.

NONLINEAR WAVE INTERACTION IN PLASMA IN THE PRESENCE OF INTENSIVE TRANSVERSE WAVES

V. A. Liperovsky and V. N. Tsytovich

In the paper there considered four-plasma processes leading in some cases to the nonlinear pumping of the longitudinal wave spectrum towards the great wave numbers.

УДК 621.371.18

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Б. Т. Кормилицин

Получены условия для электромагнитного поля на границе плазмы, учитывающие столкновения электронов с границей в случае, когда тепловые скорости электронов много меньше фазовой скорости электромагнитной волны. Проведено сопоставление с известными из литературы результатами; предложены возможные эксперименты по исследованию характера отражений электронов от границы.

1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМЕ

Распространение в плазме электромагнитных волн достаточно малой амплитуды с учетом движения электронов описывается, как известно, системой уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$(-i\omega + \nu) f + \mathbf{v} \operatorname{grad} f + \frac{e}{m} \mathbf{E} \operatorname{grad}_v f_0 + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \operatorname{grad}_v f = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f(d\mathbf{v}), \quad (4)$$

где \mathbf{H}_0 — постоянное магнитное поле, f_0 — статическая функция распределения электронов, которую обычно принимают равной

$$f_0 = N \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2T}. \quad (5)$$

Вкладом в (4) от движения ионов мы пренебрегли.

На границе плазмы для высокочастотной функции распределения электронов f выполняются условия, зависящие от характера отражения электронов. Чаще всего рассматривают упругое отражение, при котором

$$f(v_n) = f(-v_n), \quad (6)$$

и диффузное, когда

$$f(v_n) = 0 \quad (v_n > 0). \quad (7)$$

В безграничной плазме система уравнений (1)–(4) сводится к

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{i\omega}{c} \parallel \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \parallel \mathbf{E} = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{H} = 0. \quad (9)$$

Вид выражений для $\|\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)\|$ и обсуждение свойств сред с пространственной дисперсией можно найти в [1]. Здесь отметим, что эти выражения отличаются от $\|\varepsilon(\omega)\|$, не учитывающего теплового движения электронов, на слагаемые порядка $((k/\omega)\sqrt{T/m})^2$.

Для изучения распространения электромагнитных волн в ограниченной плазме мы предлагаем представить поля \mathbf{E} , \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(\infty)} + \mathbf{e}, \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(\infty)} + \mathbf{h}, \quad (11)$$

где $\mathbf{E}^{(\infty)}$, $\mathbf{H}^{(\infty)}$ удовлетворяют уравнениям (8), (9), а \mathbf{e} , \mathbf{h} стремятся к нулю вдали от границы. Если на границе (пусть это будет плоскость $z = 0$) выполнены обычные условия непрерывности тангенциальных компонент полей

$$E_i(+0) = E_i(-0), \quad (12)$$

$$H_i(+0) = H_i(-0), \quad (13)$$

то $E_i^{(\infty)}(0)$, $H_i^{(\infty)}(0)$ окажутся связанными с $E_i(-0)$, $H_i(-0)$ условиями

$$E_i^{(\infty)}(+0) + a_{ij} E_j^{(\infty)}(+0) = E_i(-0), \quad (14)$$

$$H_i^{(\infty)}(+0) + b_{ij} H_j^{(\infty)}(+0) = H_i(-0), \quad (15)$$

в которых слагаемые $a_{ij} E_j^{(\infty)}(+0)$, $b_{ij} H_j^{(\infty)}(+0)$ определяются, если $\mathbf{e}_i(0)$, $\mathbf{h}_i(0)$ выразить через $\mathbf{E}^{(\infty)}(+0)$.

Уравнения (8), (9) с граничными условиями (14), (15) дают возможность рассматривать многие задачи распространения электромагнитных волн в ограниченной плазме, не обращаясь к уравнениям кинетической теории (1)–(4). При этом существенно, чтобы интерес представляли лишь поля $\mathbf{E}^{(\infty)}(x, y, z)$, $\mathbf{H}^{(\infty)}(x, y, z)$, как это, в частности, имеет место в случае выполнения неравенства $(k/\omega)\sqrt{T/m} \ll 1$, когда \mathbf{e} , \mathbf{h} экспоненциально убывают на малых по сравнению с длиной волны расстояниях $\sim \omega^{-1}\sqrt{T/m}$ от границы. Для формулировки самих граничных условий на $\mathbf{E}^{(\infty)}$, $\mathbf{H}^{(\infty)}$ (т. е. для определения в (14), (15) a_{ij} , b_{ij}) необходимо, конечно, провести вычисления $\mathbf{e}_i(0)$, $\mathbf{h}_i(0)$, используя систему уравнений (1)–(4) и условия отражения электронов (6) или (7).

Подставляя (10), (11) в (1), (2) и вычитая отсюда уравнения (8), (9), записанные для $\mathbf{E}^{(\infty)}$, $\mathbf{H}^{(\infty)}$, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} + \frac{i\omega}{c} \left(\mathbf{e} + (1 - \|\varepsilon\|) \mathbf{E}^{(\infty)} - \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{j} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{h} = 0. \quad (17)$$

Зависимость полей от тангенциальных к границе координат примем в виде

$$e^{i\mathbf{k}_t \mathbf{r}}. \quad (18)$$

Считая, что

$$\beta = \frac{k_t}{\omega} \sqrt{T/m} \quad (19)$$

— малый параметр, для производных e , h по нормали имеем: $\frac{\partial}{\partial z} \sim O(1/\beta)$.

Тогда из (16), (17) вытекает: $e_t, h \sim O(\beta)$; $e_n \sim O(\beta^0)$, причем с точностью до членов $\sim \beta^1$ выполняется равенство

$$e_n + (1 - \|\varepsilon\|) E^{(\infty)}|_n - \frac{4\pi}{i\omega} j_n = 0. \quad (20)$$

Из (3) и (4) для j может быть получено выражение

$$j = \int_{\xi=0}^{\infty} \|\sigma(k_t, \xi, z)\| E(\xi) d\xi, \quad (21)$$

из которого следует, что

$$j_n = \frac{i\omega}{4\pi} (1 - \|\varepsilon\|) E^{(\infty)}|_n + \|\sigma_1(k_t, z)\| E^{(\infty)}(0)|_n + \int_{\xi=0}^{\infty} \sigma_{nn} \times \\ \times (k_t, \xi, z) e_n(\xi) d\xi + O(\beta), \quad (22)$$

где

$$\|\sigma_1(k_t, z)\| = \int_{\xi=0}^{\infty} \|\sigma(k_t, \xi, z)\| d\xi. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (20), приходим к интегральному уравнению для $e_n(z)$:

$$e_n(z) - \frac{4\pi}{i\omega} \|\sigma_1(k_t, z)\| E^{(\infty)}(0)|_n - \frac{4\pi}{i\omega} \int_0^{\infty} \sigma_{nn}(\xi, z) e_n(\xi) d\xi = 0, \quad (24)$$

в силу линейности которого

$$e_n(z) = g(z) E^{(\infty)}(0). \quad (25)$$

Далее, из (16) и (17) следует

$$e_t(z) = -\text{grad}_t \int_z^{\infty} e_n(\xi) d\xi, \quad (26)$$

откуда

$$e_t(0) = -k_t \int_0^{\infty} e_n(z) dz = -k_t \left(E^{(\infty)}(0) \int_0^{\infty} g(z) dz \right); \quad (27)$$

таким образом a_{ij} в (14) будут найдены. Погрешность вычисления этих коэффициентов, как можно показать, будет $\sim \beta^2$.

Определение b_{ij} в (15) осуществляется проще, так как не требуется решать интегральное уравнение. Из (16), (17) можно получить

$$h_t(0) = \frac{i\omega}{c} \int_0^{\infty} \left[\left(e + (1 - \|\varepsilon\|) E^{(\infty)} - \frac{4\pi}{i\omega} j \right) \Big|_t \times n \right] dz. \quad (28)$$

С помощью (21) выражаем j_t в виде

$$j_t = \frac{i\omega}{4\pi} (1 - \|\varepsilon\|) E^{(\infty)}|_t + \|\sigma_1(k_t, z)\| E^{(\infty)}(0)|_t + O(\beta). \quad (29)$$

Отбрасывая в (28) $e_t \sim O(\beta)$, находим

$$h_t(0) = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} [\|\sigma_1(z)\| E^{(\infty)}(0)|_t \times n] dz, \quad (30)$$

получив таким образом b_{ij} .

Ядро $\|\sigma(\mathbf{k}_t, \xi, z)\|$, определяющее в (23) нелокальную связь тока с полем, выражаемые через это ядро величины $\|\sigma_1(z)\| = \int_0^{\infty} \|\sigma(\xi, z)\| d\xi$, решение интегрального уравнения (26) и a_{ij} , b_{ij} зависят от характера отражений электронов от границы, наличия и ориентации внешнего магнитного поля H_0 , статической функции распределения f_0 и т. п. Ниже будут рассмотрены некоторые частные случаи.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ УПРУГОМ ОТРАЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ И $H_0=0$

Решение кинетического уравнения (3) для $v=0$ с учетом (5), (18), удовлетворяющее при $z=0$ условию (6), а при $z \rightarrow \infty$ условию (7), запишется в виде

$$f(z, \mathbf{v}) = \frac{\omega}{4\pi e} \left(\frac{m}{T}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{v_z} e^{-v^2/2} \exp\left(i \frac{1-\beta v_x z}{v_z}\right) \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} [(E_t v_t) - E_z v_z] \exp\left(+i \frac{1-\beta v_x \xi}{v_z}\right) d\xi + \int_0^z (E\mathbf{v}) \times \\ \times \exp\left(-i \frac{1-\beta v_x \xi}{v_z}\right) d\xi \quad (v_z > 0), \\ \int_z^{\infty} (E\mathbf{v}) \exp\left(-i \frac{1-\beta v_x \xi}{v_z}\right) d\xi \quad (v_z < 0) \end{array} \right. \quad (31)$$

где ω_0 — плазменная частота, \mathbf{v} нормировано на $\sqrt{T/m}$, z нормировано на $\omega^{-1} \sqrt{T/m}$. Интегрируя в соответствии с (4) выражение (31) по скоростям, получим

$$J_t = \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega} \int_{\xi=0}^{\infty} [\psi_{-1}(|z-\xi|) + \psi_{-1}(|z+\xi|)] E_t(\xi) d\xi + O(\beta), \quad (32)$$

$$j_n = \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega} \int_{\xi=0}^{\infty} [\psi_{+1}(|z-\xi|) - \psi_{+1}(|z+\xi|)] E_n(\xi) d\xi + O(\beta), \quad (33)$$

где

$$\psi_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} s^p \exp\left(-\frac{s^2}{2} + \frac{iz}{s}\right) ds. \quad (34)$$

Некоторые свойства функций ψ_p исследованы в Приложении.

Интегральное уравнение для $e_n(z)$ имеет вид

$$e_n(z) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} E_n^{(\infty)}(0) 2\psi_1(z) + \frac{i\omega_0^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} [\psi_{+1}(|z-\xi|) - \psi_{+1}(|z+\xi|)] e_n(\xi) d\xi = 0. \quad (35)$$

Следуя методу работы [2], продолжим $e_n(z)$ в область отрицательных z по формуле

$$e_n(-z) = -e_n(z), \tag{36}$$

в результате чего сведем (35) к уравнению типа Фурье. Решением последнего будет

$$e_n(z) = \frac{-2E_n^{(\infty)}(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_2(x) e^{ixz}}{1 + \sqrt{2\pi} i \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Phi_1(x)} dx; \tag{37}$$

здесь $\Phi_1(x)$ — преобразование Фурье от $\psi_1(|z|)$, $\Phi_2(x)$ — преобразование Фурье от $\text{sgn } z \psi_2(|z|)$. Эти величины вычислены в Приложении.

Подставляя (37) в (27), определим $e_t(0)$. Пользуясь (30) и (32), можно показать, что $h_t(0)=0$, после чего легко придти к следующим граничным условиям:

$$(E^{(\infty)}(0) k_t) - \frac{k_t^2 \sqrt{T/m}}{\omega} 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \varphi \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) E_n^{(\infty)}(0) = (E(-0) k_t); \tag{38}$$

$$[E^{(\infty)}(0) k_t]_n = [E(-0) k_t]_n; \tag{39}$$

$$(H^{(\infty)}(0) k_t) = (H(-0) k_t); \tag{40}$$

$$[H^{(\infty)}(0) k_t]_n = [H(-0) k_t]_n. \tag{41}$$

Здесь $\varphi(\omega_0^2/\omega^2)$ определяется формулой

$$\varphi \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \frac{1}{2} \int_{s=0}^{\infty} \left\{ se^{-s^2/2} - i \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+1/s^2) - (2s/\sqrt{\pi}) F(s/\sqrt{2}) \right] \right\} \times \tag{42}$$

$$\times \{ 1 - (\omega_0^2/\omega^2) s^2 [-i \sqrt{2/\pi} se^{-s^2/2} - 1 + \sqrt{2} s F(s/\sqrt{2})] \}^{-1} s^2 ds,$$

$F(s)$ — табулированная в [3] функция

$$F(s) = e^{-s^2} \int_0^s e^{+q^2} dq. \tag{43}$$

Численные значения φ , полученные из (42) для некоторых ω_0^2/ω^2 , даны в таблице 1.

Таблица 1

ω_0^2/ω^2	Re φ	Im φ	Re φ_D	Im φ_D
0	1	0	1	0
0,25	1,17	-0,001	1,25	-0,003
0,5	1,46	-0,005	1,69	-0,02
0,75	2,10	-0,04	2,73	-0,08
0,85	2,11			
0,87	1,26			
0,9	0,14			
1	0	∞		
1,1	-0,06			
1,5	-0,14	-1,60	-1,52	-1,87
2	-0,16	-1,09	-1,09	-0,93

Одной из задач, к которым могут быть применены условия (38) — (41), является задача о наклонном падении плоской электромагнитной волны из вакуума на границу плазмы [4]. В этой работе определялась глубина проникновения поля в плазму λ . В наших обозначениях λ можно представить так:

$$\begin{aligned} \lambda = & -\frac{e_x(0)}{i(\omega/c)H_y(0)} = \frac{ic}{\omega} \left(\frac{T}{mc^2}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\operatorname{Re} \varphi\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \right. \\ & \left. + i \operatorname{Im} \varphi\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right) = \frac{ic}{\omega} \left(\frac{T}{mc^2}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (s^3 e^{-s^{2/2}} + i \alpha(s)) \times \\ & \times \left\{ \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} s^2 \left(1 - \sqrt{2} s F\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right) \right]^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \frac{\pi}{2} s^6 e^{-s^2} \right\}^{-1} ds. \end{aligned} \quad (44)$$

Функция $\alpha(s)$, выражение которой из-за громоздкости не приводится, учитывает $\operatorname{Im} \varphi\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$.

Окончательная формула [4] для λ при малых T/mc^2 не вполне точна; однако из предшествующей ей промежуточной формулы (37а), пользуясь выражением $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ из [1], легко придти к результату, совпадающему с (44), если принять там $\alpha(s) = 0$. Численное значение вклада $\alpha(s)$ в величину λ обычно мало (см. таблицу 1, где для $\omega_0^2/\omega^2 < 1$ $\operatorname{Im} \varphi$ мало по сравнению с $\operatorname{Re} \varphi$). Точное совпадение выражений λ из нашей работы и из [4] может быть достигнуто, если провести более точно вычисление интеграла (28) работы [4] с учетом полюса подынтегральной функции.

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ДИФФУЗНОМ ОТРАЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ И $H_0 = 0$

Приняв вместо (6) в качестве условия, налагаемого на f при $z = 0$ соотношение (7), получим

$$j_t = \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega} \int_{\xi=0}^{\infty} \psi_{-1}(|z-\xi|) E_t(\xi) d\xi + O(\beta), \quad (45)$$

$$j_n = \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega} \int_{\xi=0}^{\infty} \psi_{+1}(|z-\xi|) E_n(\xi) d\xi + O(\beta). \quad (46)$$

Последняя формула приводит для $e_n(\xi)$ к интегральному уравнению типа Винера-Хопфа:

$$e_n(z) + \frac{i\omega_0^2}{\omega^2} \int_0^\infty \psi_{+1}(|z-\xi|) e_n(\xi) d\xi = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} E_n^{(\infty)}(0) \psi_2(z). \quad (47)$$

Способ решения таких уравнений описан в [5]. Некоторого упрощения выкладок можно достичь заменой

$$E(z) = e_n(z) + E_n^{(\infty)}(0), \quad (48)$$

которая делает правую часть (47) постоянной; после этого $e_n(z)$ выражается через резольвентное ядро $\Gamma(\xi, z)$ в виде

$$e_n(\xi) = E_n^{(\infty)}(0) \left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \int_0^\infty \Gamma(\xi, z) dz - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right]. \quad (49)$$

При вычислении $\Gamma(\xi, z)$ используем формулы факторизации и приведенное в Приложении преобразование Фурье от $\psi_1(|z|)$. Подставляя (49) в (27), можно найти $e_t(0)$. Далее из (30) и (45) находим $h_t(0)$ (в отличие от случая упругого отражения здесь $h_t(0) \neq 0$) и записываем граничные условия для $E^{(\infty)}$, $H^{(\infty)}$ в виде

$$(E^{(\infty)}(0) \mathbf{k}_t) - \frac{k_t^2 \sqrt{T/m}}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \varphi_\partial \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) E_n^{(\infty)}(0) = (E(-0) \mathbf{k}_t), \quad (50)$$

$$[E^{(\infty)}(0) \mathbf{k}_t]_n = [E(-0) \mathbf{k}_t]_n, \quad (51)$$

$$(H^{(\infty)}(0) \mathbf{k}_t) + \frac{\sqrt{T/m}}{c} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} [E^{(\infty)}(0) \mathbf{k}_t]_n = (H(-0) \mathbf{k}_t), \quad (52)$$

$$[H^{(\infty)}(0) \mathbf{k}_t]_n - \frac{\sqrt{T/m}}{c} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (E^{(\infty)}(0) \mathbf{k}_t) = [H(-0) \mathbf{k}_t]_n, \quad (53)$$

где $\varphi_\partial \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ определяется формулой

$$\varphi_\partial \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \frac{1}{2} \int_{s=0}^\infty \left\{ (s^2-3) s e^{-s^2/2} - i \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} (s^2-2) - (s^2-3) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{2s}{\sqrt{\pi}} F \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\} \left\{ 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} s^2 \left[-i \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-s^2/2} - 1 + \sqrt{2} s F(s/\sqrt{2}) \right] \right\}^{-1} s^2 ds. \quad (54)$$

Численные значения $\varphi_\partial \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ приведены в таблице 1.

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ $H_0 \neq 0$

В этом случае для коэффициентов a_{ij} , b_{ij} в граничных условиях (14), (15) справедливы следующие выражения:

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_t}{\omega} \sqrt{\frac{T}{m}} \varphi_{ij} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \frac{\omega}{\omega_H} \right); \quad (55)$$

$$b_{ij} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_t}{\omega} \sqrt{\frac{T}{m}} \psi_{ij} \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right) \frac{\omega_0^2/\omega^2}{1 - \omega_H^2/\omega^2}. \quad (56)$$

Вычисление входящих сюда функций φ_{ij} , ψ_{ij} требует решения более сложных интегральных уравнений, чем те, с помощью которых вычислялись функции φ , φ_∂ для $H_0 = 0$. Без решения этих интегральных уравнений удастся определить φ_{ij} и ψ_{ij} лишь при условии

$$\frac{\omega_0^2/\omega^2}{|1 - \omega_H^2/\omega^2|} \ll 1; \quad (57)$$

при этом

$$\varphi_{ij} = \frac{\omega_0^2/\omega^2}{1 - \omega_H^2/\omega^2} \wedge \varphi_{ij} \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right). \quad (58)$$

Распространение электромагнитных волн в полубесконечной плазме с магнитным полем при выполнении неравенства (57) рассматривалось в работе [6]. Формулы (3.1) — (3.3) этой работы можно привести к форме, соответствующей нашим граничным условиям (14), (15); однако подробнее останавливаться на этом мы здесь не будем.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ

Пусть электромагнитная волна падает на тонкую прозрачную пластинку, находящуюся в плазме. Будем считать толщину пластинки δ настолько малой, что отражениями с $E_{\text{отр}} \sim (\epsilon - \epsilon_0)\pi\delta\lambda^{-1}$, возникающими из-за различия диэлектрических проницаемостей пластинки и плазмы, можно пренебречь. Тогда поле волны, отраженной в зеркальном направлении, определится в результате учета столкновений электронов плазмы с обеими границами пластинки. С помощью граничных условий (38) — (41) и (50) — (53) можно прийти к следующим выражениям для коэффициентов отражения $B = E_{\text{отр}}^{(\infty)}/E_{\text{пад}}^{(\infty)}$:

$$B = 2\sqrt{2/\pi} \frac{\sqrt{T/m}}{c} \sqrt{\epsilon} (1 - \epsilon) \varphi \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}, \quad (59)$$

$$B = 0 \quad (60)$$

для упругого отражения электронов от границ и поляризации \mathbf{E} в плоскости падения (59) и перпендикулярно последней (60). Для диффузного отражения электронов получаем соответственно формулы

$$B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{T/m}}{c} (1 - \epsilon) \left(\sqrt{\epsilon} \varphi_{\partial} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{2\sqrt{\epsilon}} \right), \quad (61)$$

$$B = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{T/m}}{c} \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{\epsilon} \cos \theta}. \quad (62)$$

Рассмотрим теперь распространение электромагнитных волн в плазме вдоль плоскости, характеризуемой волновым сопротивлением ω . Если при $z = 0$

$$E_x = -\omega H_y, \quad E_y = \omega H_x, \quad (63)$$

то для $E_t^{(\infty)}$ и $H_t^{(\infty)}$ получаем

$$E_x^{(\infty)}(0) = \left\{ -\omega - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_x^2}{\omega} c \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{\omega_0^2/\omega^2}{1 - \omega_0^2/\omega^2} \varphi \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right\} H_y^{(\infty)}(0), \quad (64)$$

$$E_y^{(\infty)}(0) = \omega H_x^{(\infty)}(0) \quad (65)$$

в случае упругого отражения и

$$E_x^{(\infty)}(0) = \left\{ -\omega - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_x^2}{\omega} c \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{\omega_0^2/\omega^2}{1 - \omega_0^2/\omega^2} \varphi_{\partial} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{T/m}}{c} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \omega^2 \right\} H_y^{(\infty)}(0), \quad (66)$$

$$E_y^{(\infty)}(0) = \left\{ \omega + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{T/m}}{c} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \omega^2 \right\} H_x^{(\infty)}(0) \quad (67)$$

в случае диффузного отражения.

Направление k_z при выводе этих формул совпадало с осью x . Пользуясь (63)–(67), легко определить постоянные распространения и затухания различных типов волн. Интересно отметить, что особую чувствительность к влиянию тепловых скоростей электронов проявляют медленные поверхностные волны, так как их электромагнитное поле сосредоточено вблизи границы, на которой происходит отражение электронов. При чисто мнимом ω (замедляющая система без потерь) для волны с компонентами полей E_y , H_x из (65), (67) следует

$$\text{Im } k = 0, \quad (68)$$

если отражение электронов при $z = 0$ упругое, и

$$\text{Im } k = \frac{\omega \sqrt{T/m}}{c^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|\omega|^3}{\sqrt{1 + |\omega|^2}}, \quad (69)$$

если отражение диффузное. Затухание, вычисляемое по формуле (69) для $T \geq 10^{10}$ К, обычно существенно превышает омические потери в замедляющей системе.

Полученные результаты указывают на возможность применения поверхностных волн для экспериментального изучения характера отражений электронов от границы плазмы. В связи с этим полезно также обратить внимание на работу [7], где описан эксперимент по применению поверхностных волн для изучения хода концентрации плазмы вблизи стенки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для функций $\psi_p(z)$, определяемых формулой (35), справедливы выражения

$$\psi_p(0) = 2^{(p-1)/2} \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{2\pi}} \quad (p \geq 0),$$

$$\psi_p(z) \sim \frac{(iz)^{p/3}}{\sqrt{3}} \exp \left[-\frac{3}{2} (iz)^{2/3} \right] \quad (z \rightarrow \infty).$$

Результаты интегрирования и дифференцирования функций ψ_p по z могут быть выражены через те же функции с другим индексом. Производя в (35) замену $s=1/x$, получаем

$$\psi_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{-p-2} e^{-1/2x^2} e^{izx} dx,$$

откуда для $\Phi^{(p)}(x)$ — преобразования Фурье от ψ_p — находим

$$\Phi^{(p)}(x) = \begin{cases} x^{-p-2} e^{-1/2x^2} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}. \quad (\text{П.1})$$

Преобразования Фурье от $\psi_1(|z|)$ и $\text{sgn } z \psi_2(|z|)$ выражаются через $\hat{\Phi}^{(p)}(x)$ — преобразование Фурье от функции

$$\hat{\psi}_p(z) = \begin{cases} \psi_p(z) & (z > 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}.$$

Наоборот, $\hat{\Phi}^{(p)}(x)$ выражается через $\Phi^{(p)}(x)$ следующим образом:

$$\hat{\Phi}^{(p)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{z=0}^{\infty} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Phi^{(p)}(\lambda) e^{i(\lambda-x)z} d\lambda dz = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi^{(p)}(\lambda)}{\lambda - x} d\lambda, \quad (\text{П.2})$$

причем в последнем интеграле полюс $\lambda = x$ обходится при $\text{Im } \lambda > 0$. Подставляя в (П.2) $\Phi^{(p)}(\lambda)$ из (П.1) и учитывая, что

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r^2/2} dr}{r^2 - a^2}$$

сводится (см. [8]) к $F(s)$, определенной формулой (44), получим для преобразования Фурье от $\psi_1(|z|)$ и $\text{sgn } z \psi_2(|z|)$ формулы

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2x^3} \left\{ \frac{1}{|x|} e^{-1/2x^2} - i \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{|x|} \frac{2}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right) \right] \right\},$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2x^3} \left\{ \frac{1}{|x|} e^{-1/2x^2} - i \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+x^2) - \frac{1}{|x|} \frac{2}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right) \right] \right\},$$

которые использованы при решении интегральных уравнений в разделах 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
3. Е. Янке, Ф. Емде, Таблицы функций, Физматгиз, М., 1959.
4. В. П. Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, 41, 159 (1961).
5. М. К. Крейн, Успехи мат. наук, 13, вып. 5 (83), 4 (1958).
6. Э. А. Канер, Ю. А. Белов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 47 (1962).
7. H. Wassink, A. Estin, J. Appl. Phys., 35, 2795 (1964).
8. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.

Поступила в редакцию
5 июня 1965 г.

TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN LIMITED PLASMA

B. T. Kormilitsin

The conditions have been obtained for an electromagnetic wave on plasma boundary, taking into account the electron collision with the boundary in the case when the thermal velocities of electrons are much less than the phase one of an electromagnetic wave. The comparison has been made with the results published elsewhere. Possible experiments have been proposed of investigation of the character of electron reflection from the boundary.

УДК 621.371.182

О РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Н. П. Гиоргадзе, Е. М. Хирсели, Н. Л. Цинцадзе

Рассмотрены распадные взаимодействия волн в магнитоактивной плазме при условии, что волновые векторы направлены вдоль магнитного поля. Вычислена средняя мощность распадной генерации.

1. В последнее время нелинейному взаимодействию волн в плазме уделяется большое внимание [1-3]. Это объясняется тем, что нелинейные эффекты играют существенную роль в динамике плазмы. Вместе с тем в большинстве работ (по крайней мере, когда речь идет о конкретных результатах) рассматривается изотропная плазма. На практике часто, однако, приходится иметь дело с плазмой, помещенной во внешнее магнитное поле. Поэтому не лишено интереса рассмотреть взаимодействие волн в магнитоактивной плазме.

В настоящей работе мы ограничимся простейшим случаем, когда все волновые процессы развиваются вдоль магнитного поля (одномерная задача). Нелинейное взаимодействие распространяющихся вдоль магнитного поля волн рассматривалось в работах [6, 7]. В этих работах были получены амплитуды нелинейных полей и установлены некоторые характерные черты взаимодействия. При этом основное внимание уделялось нераспадным процессам. Ниже будет рассмотрено распадное взаимодействие волн в магнитоактивной плазме, для описания которого будут использованы общие результаты, полученные в статье [8].

2. Известно, что волновые процессы линейного приближения, развивающиеся вдоль поля, сводятся к обыкновенной и необыкновенной поперечным волнам и продольной волне. Дисперсия этих волн определяется соответственно уравнениями

$$n^2 - \epsilon + g = 0, \quad n^2 - \epsilon - g = 0, \quad \epsilon_{zz} = 0,$$

где $n^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ — коэффициент преломления, а остальные величины будут определены ниже.

В дальнейшем будет предполагаться, что частоты линейных поперечных волн далеки от циклотронных, т. е. что имеет место неравенство $|\omega - \omega_\alpha| \gg kv_\alpha$. Тогда тепловое движение не оказывает заметного влияния на дисперсию поперечных волн, вследствие чего компоненты линейного тензора диэлектрической проницаемости могут быть взяты в виде

$$\epsilon = 1 - \sum \frac{\Omega_\alpha^2}{\omega^2 - \omega_\alpha^2}, \quad g = - \sum \frac{\omega_\alpha \Omega_\alpha^2}{\omega(\omega^2 - \omega_\alpha^2)}.$$

Здесь $\Omega_\alpha^2 = 4\pi e^2 n_{0,\alpha} / m_\alpha$ — ленгмюровская, а $\omega_\alpha = e_\alpha H_0 / m_\alpha c$ — гирочастота α -компоненты.

Уравнение поперечных волн в общем случае является алгебраическим уравнением четвертой степени относительно ω , вследствие чего точное аналитическое решение его не представляет практической ценности. Однако известны приближенные решения этих уравнений, спра-

ведливые в определенных интервалах частот, и в дальнейшем при рассмотрении распадного взаимодействия волн мы ограничимся этими приближенными решениями.

В частности, при $|\omega| \ll \omega_i$ и $\Omega_i^2/\omega_i^2 \gg 1$ поперечные волны, известные под названием альфвеновских, подчиняются простому закону дисперсии:

$$\omega = \pm kV_A, \quad (1)$$

где

$$V_A = H_0/\sqrt{4\pi Mn},$$

причем из приведенных выше неравенств следует, что $|k| \ll \Omega_i/c$.

Далее, в области частот $|\omega| \gg |\omega_e|$ существует приближенное решение

$$\omega = \pm \sqrt{\Omega_e^2 + k^2c^2} - \frac{|\omega_e|}{2} \frac{1}{1 + k^2c^2/\Omega_e^2}, \quad (2)$$

справедливое при условии $\sqrt{\Omega_e^2 + k^2c^2} \gg |\omega_e|$.

Наконец, в промежуточной области частот $\omega_i \ll |\omega| \ll |\omega_e|$ дисперсионное уравнение необыкновенной волны допускает приближенное решение

$$\omega_1 = \frac{\Omega_e^2}{2|\omega_e|} - \sqrt{\frac{\Omega_e^4}{4\omega_e^2} + k^2c^2} \quad (3)$$

для волновых чисел

$$100\omega_i^2 + 10\Omega_i^2 \leq k^2c^2 \leq \frac{0,01}{\mu^2} \omega_i^2 + \frac{0,1}{\mu} \Omega_i^2 \quad (\mu = m/M) \quad (3a)$$

и

$$\omega_2 = \frac{\Omega_e^2}{2|\omega_e|} + \sqrt{\frac{\Omega_e^4}{4\omega_e^2} + k^2c^2} \quad (4)$$

для волновых чисел

$$100\omega_i^2 - 10\Omega_i^2 \leq k^2c^2 \leq \frac{0,01}{\mu^2} \omega_i^2 - \frac{0,1}{\mu} \Omega_i^2$$

при $\Omega_e^2/\omega_e^2 < 20\mu$ и

$$0 \leq k^2c^2 \leq \frac{0,01}{\mu^2} \omega_i^2 - \frac{0,1}{\mu} \Omega_i^2$$

при $20\mu < \Omega_e^2/\omega_e^2 < 0,1$. Заметим, что при $\Omega_e^2/\omega_e^2 \gg 1$ первое из этих двух решений переходит в так называемый геликон:

$$\omega_1 \simeq -\frac{k^2c^2|\omega_e|}{\Omega_e^2},$$

с областью применимости $10\mu \leq k^2c^2/\Omega_e^2 \leq 0,1$.

Выше речь шла о ветвях колебаний необыкновенной волны. Ветви обыкновенной волны тривиально получаются из найденных в силу условия $\omega_{об}(k) = -\omega_{необ}(-k)$.

Дисперсионное уравнение продольных волн допускает, во-первых, существование высокочастотных колебаний

$$\omega = \pm \left(\Omega_e + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_e^2}{\Omega_e} \right), \quad |k| \ll k_{De}, \quad (5)$$

$$v_e = \sqrt{T_e/m}, \quad k_{De} = \sqrt{4\pi n_0 e^2/T}.$$

В сильно неизоотермической плазме ($T_e \gg T_i$) возможно также существование слабозатухающей ветви низкочастотных колебаний. Дисперсия этих колебаний для волновых чисел $|k| \ll k_{De}$ задается, как известно, линейным законом:

$$\omega = \pm k V_s, \quad V_s = \sqrt{T_e/M}, \quad (6)$$

где V_s — скорость ионного звука.

3. Нелинейный тензор электропроводности, определяемый соотношением $j_\alpha = \int dk' d\omega' (2\pi)^{-4} \sigma_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma$, найден в работе [8]. Если стационарная функция распределения частиц является максвелловской, то компоненты этого тензора удобно выразить через так называемую W -функцию, определенную соотношением

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-t^2}}{x-t}.$$

Эта функция хорошо изучена вместе с ее асимптотическими представлениями.

После простых, хотя и несколько громоздких вычислений для отличных от нуля компонент этого тензора получим*

$$\begin{aligned} \sigma_{zzz}(\Delta k k \Delta \omega \omega) &= - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \Omega_{\alpha}^2 \frac{\omega}{4\pi} I_3(\Delta k k \Delta \omega \omega); \\ \sigma_{z\mp\pm}(\Delta k k \Delta \omega \omega) &= 4 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \Omega_{\alpha}^2 \frac{\omega}{4\pi} I_4^{(\mp)}(\Delta k k \Delta \omega \omega) \frac{\Delta k}{2\Delta \omega}; \\ \sigma_{\mp\pm z}(\Delta k k \Delta \omega \omega) &= 2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \Omega_{\alpha} \frac{1}{4\pi} [I_1^{(\mp)}(\Delta k k \Delta \omega \omega) + \\ &+ I_5^{(\mp)}(\Delta k k \Delta \omega \omega) + I_6^{(\mp)}(\Delta k k \Delta \omega \omega)]; \\ \sigma_{\mp z \pm}(\Delta k k \Delta \omega \omega) &= 2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \Omega_{\alpha} \frac{1}{4\pi} I_2^{(\mp)}(\Delta k k \Delta \omega \omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{\omega \Delta k - \Delta \omega k} \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{\alpha}^3} \left\{ \frac{\omega}{k^2 v_{\alpha}} \left[\sqrt{2\pi} - \frac{\omega}{k v_{\alpha}} W \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k v_{\alpha}} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\Delta \omega [W(\Delta \omega / \sqrt{2} \Delta k v_{\alpha}) - W(\omega / \sqrt{2} k v_{\alpha})]}{\omega \Delta k - \Delta \omega k} \right\}; \end{aligned}$$

* Обозначения соответствуют принятым в работе [6]. Заметим, что

$$I_5^{(\pm)} = - \frac{k' \Delta k v_{\alpha}^2}{\omega'} \frac{\partial}{\partial \omega'} I_1.$$

$$I_4^{(\mp)}(\Delta k k \Delta \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_\alpha}} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{W[(\Delta \omega \pm \omega_\alpha)/\sqrt{2}\Delta k v_\alpha] - W(\omega/\sqrt{2}k v_\alpha)}{\Delta k \omega - (\Delta \omega \pm \omega_\alpha)k};$$

$$I_1^{(\pm)}(k' k \omega' \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_\alpha^3}} \times$$

$$\times \frac{(\omega'/k') W(\omega'/\sqrt{2}k' v_\alpha) - [(\omega \mp \omega_\alpha)/k] W[(\omega \mp \omega_\alpha)/\sqrt{2}k v_\alpha]}{k \omega' - k'(\omega \mp \omega_\alpha)};$$

$$I_2^{(\pm)}(\Delta k k \Delta \omega) = -\frac{k}{\sqrt{2\pi v_\alpha}} \frac{1}{(\omega \mp \omega_\alpha) \Delta k - (\Delta \omega \mp \omega_\alpha) k} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\Delta k W[(\Delta \omega \mp \omega_\alpha)/\sqrt{2}\Delta k v_\alpha] - W[(\omega \mp \omega_\alpha)/\sqrt{2}k v_\alpha]}{(\omega \mp \omega_\alpha) \Delta k - (\Delta \omega \mp \omega_\alpha) k} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{k v_\alpha} \left[\sqrt{\pi} - \frac{\omega \mp \omega_\alpha}{\sqrt{2}k v_\alpha} W\left(\frac{\omega \mp \omega_\alpha}{\sqrt{2}k v_\alpha}\right) \right] \right\};$$

$$I_5^{(\pm)}(k' k \omega' \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_\alpha^3} [k \omega' - (\omega \mp \omega_\alpha) k']} \left\{ \sqrt{2\pi v_\alpha} \frac{\Delta k \omega'}{\Delta \omega k'} - \frac{\Delta k \omega'^2}{\Delta \omega k'^2} W\left(\frac{\omega'}{\sqrt{2}k' v_\alpha}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\Delta k v_\alpha^2}{\Delta \omega} \left[\frac{k k'}{k \omega' - k'(\omega \mp \omega_\alpha)} \left(\frac{\omega'}{k'} W\left(\frac{\omega'}{\sqrt{2}k' v_\alpha}\right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\omega \mp \omega_\alpha}{k} W\left(\frac{\omega \mp \omega_\alpha}{\sqrt{2}k v_\alpha}\right) \right) \right] - W\left(\frac{\omega'}{\sqrt{2}k v_\alpha}\right) \right\};$$

$$I_6^{(\pm)}(k' k \omega' \omega) = -\frac{1}{2\pi v_\alpha^3} \frac{1}{k \omega' - k'(\omega \mp \omega_\alpha)} \frac{\Delta k v_\alpha^2}{\Delta \omega} \left[W\left(\frac{\omega'}{\sqrt{2}k' v_\alpha}\right) - W\left(\frac{\omega \mp \omega_\alpha}{\sqrt{2}k v_\alpha}\right) \right].$$

Заметим, что вклад члена $I_6^{(\pm)}$ опущен в выражении для амплитуды нелинейного поперечного поля, полученного в работе [6]. Для рассмотренных в этой работе вопросов, роль этого члена незначительна. Учет вклада от $I_6^{(\pm)}$ приводит к следующей добавке к амплитуде нелинейного поперечного поля:

$$\delta E_\pm^{(2)}(k \omega) = i \frac{\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} \frac{1}{\tilde{D}_\pm} \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Omega_\alpha^2 \int \frac{d k' d \omega'}{(2\pi)^4} \frac{k'}{\omega'} E_\pm^{(1)}(k' \omega') \times \\ \times E_L^{(1)}(\Delta k \Delta \omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi v_\alpha}} \frac{1}{\Delta \omega k - \Delta k(\omega \mp \omega_\alpha)} \left[W\left(\frac{\omega \mp \omega_\alpha}{\sqrt{2}k v_\alpha}\right) - W\left(\frac{\Delta \omega}{\sqrt{2}\Delta k v_\alpha}\right) \right].$$

Заметим еще, что в предельном случае низких температур из [7] с учетом асимптотического разложения

$$W(x) \cong \sqrt{\pi} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \dots \right) \quad (|x| \gg 1)$$

для компонент нелинейного тензора электропроводности холодной плазмы получим

$$\sigma_{zzz} = - \sum_\alpha n_{0\alpha} \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \frac{1}{\omega \Delta \omega} \left(\frac{\Delta k_z}{\Delta \omega} + \frac{2k_z}{\omega} \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z\pm\mp} &= -2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} n_{0\alpha} \frac{k'}{\omega\omega'(\Delta\omega \mp \omega_{\alpha})}, \\ \sigma_{\mp z\pm} &= -2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} n_{0\alpha} \frac{k}{(\omega \pm \omega_{\alpha})^2(\Delta\omega \pm \omega_{\alpha})}, \\ \sigma_{\mp\pm z} &= 2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} n_{0\alpha} \frac{1}{\Delta\omega(\omega \pm \omega_{\alpha})} \left[\frac{k'}{\omega'} - \frac{\Delta k}{\Delta\omega} - \frac{k}{\omega \pm \omega_{\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Эти формулы, естественно, совпадают с результатом работы [8].

4. Средняя мощность распадной генерации ω , характеризующая распадное взаимодействие волн, найдена в работе [8]. Учитывая, что в рассматриваемом случае распространения волн вдоль магнитного поля

$$\epsilon_{\nu\gamma}(k') = \epsilon_{\nu\gamma}(k') L^2 \delta(k'_x) \delta(k'_y),$$

а также используя (1) и (4), из приведенных в этой работе выражений после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \omega_T &= \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_k \sum_{k'} \sum_{\nu\nu'} \sum_{\mu} \frac{1}{(\omega_{\mu}^+(k))^2} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\partial[\omega(\epsilon-1)]}{\partial\omega} \right) \omega_{\mu}^+(k) \delta[\omega_{\nu}^L(k') + \\ &+ \omega_{\nu'}^+(k-k') - \omega_{\mu}^+(k)] \frac{|\tilde{\sigma}_{z+-}(kk'\omega_{\mu}^+(k)\omega_{\nu}^L(k'))|^2}{\left| \partial \left(n^2 - \frac{\epsilon_{+-}}{2} \right) / \partial\omega \right|_{\omega_{\mu}^+(k)}^2} \times \\ &\times |\epsilon_{\nu L}(k')|^2 |\epsilon_{\nu'+}(\Delta k)|^2; \\ \omega_L &= \frac{\pi^2}{L^4} \sum_k \sum_{k'} \sum_{\nu\nu'} \sum_{\mu} \frac{1}{(\omega_{\mu}^L(k))^2} \frac{\partial(\omega\epsilon_{zz})}{\partial\omega} \Big|_{\omega_{\mu}^L(k)} \delta(\omega_{\nu}^+(k') + \omega_{\nu'}(k-k') - \\ &- \omega_{\mu}^L(k)) \frac{|\tilde{\sigma}_{z+-}(kk'\omega_{\mu}^L(k)\omega_{\nu}^+(k'))|^2}{\left| \partial\epsilon_{zz} / \partial\omega \right|_{\omega_{\mu}^L(k)}^2} |\epsilon_{\nu-}(k')|^2 |\epsilon_{\nu'+}(\Delta k)|^2, \end{aligned}$$

где индексы L и T относятся к продольному и поперечному полям соответственно, а $\epsilon_{+-} = \epsilon + g$.

5. Рассмотрим сначала распадное рассеяние поперечной волны на продольной. Одним из возможных процессов такого рода является рассеяние геликона на ионном звуке:

$$(k - k_0) V_s + \frac{k_0^2 c^2 |\omega_e|}{\Omega_e^2} = \frac{k^2 c^2 |\omega_e|}{\Omega_e^2}. \quad (8)$$

Из (8) для распадного волнового числа, соответствующего конечной длине волны ионного звука, получим

$$k = -k_0 + \frac{V_s \Omega_e^2}{c^2 |\omega_e|}. \quad (8a)$$

Ограничимся случаем, когда $1 \ll \Omega_e^2 / \omega_e^2 \ll (c^2 / V_s^2) 100 \mu^2$. Тогда второе слагаемое в (8a) пренебрежимо мало. Полагая

$$|\varepsilon_+(k_0)|^2 = 8\pi\omega_0 \left[1 + \frac{k_0^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\partial[\omega(\varepsilon - 1)]}{\partial \omega} \right]^{-1}_{\omega_+(k_0)},$$

где ω_0 — мощность падающего поперечного излучения, и проводя необходимые вычисления, для средней мощности распадной генерации поперечного поля найдем выражение

$$\omega_T \simeq \frac{1}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{c}{v_e} \right)^4 \left(\frac{k_0 c}{\Omega_e} \right) \left(\frac{|\omega_e|}{\Omega_e} \right) \left| \frac{\varepsilon_L(2k_0)}{L^{1/2}} \right|^2 \omega_0.$$

Рассмотрим теперь рассеяние высокочастотной поперечной волны на ленгмюровских колебаниях, приводящее к образованию геликона:

$$-\Omega_e + \sqrt{\Omega_e^2 + k_0^2 c^2} - \frac{|\omega_e|}{2} \simeq \frac{\Omega_e^2}{2|\omega_e|} - \sqrt{\frac{\Omega_e^4}{4\omega_e^2} + k^2 c^2}. \quad (9)$$

В отличие от предыдущего случая этот процесс сопровождается существенным изменением частоты рассеиваемой волны. Полагая $\Omega_e^2/\omega_e^2 \gg 1$ и $(k_0^2 c^2/\Omega_e^2) \ll 1$, для распадного волнового числа из (9) получим

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_e}{c} \left(1 - \frac{k_0^2 c^2}{\Omega_e^2} \frac{\Omega_e}{|\omega_e|} \right)^{1/2}.$$

При этом, согласно (3а), должно иметь место условие

$$0,8 \frac{|\omega_e|}{\Omega_e} \frac{\Omega_e^2}{c^2} \leq k_0^2 \leq (1 - 20\mu) \frac{|\omega_e|}{\Omega_e} \frac{\Omega_e^2}{c^2}.$$

Используя полученные соотношения, после некоторых вычислений получим

$$\omega_T \simeq \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{|\omega_e|}{\Omega_e} \left(1 - \frac{k_0^2 c^2}{\Omega_e^2} \frac{\Omega_e}{|\omega_e|} \right)^{5/2} \left(\left| \frac{\varepsilon_L(k_1 - k_0)}{L^{1/2}} \right|^2 + \left| \frac{\varepsilon_L(k_2 + k_0)}{L^{1/2}} \right|^2 \right) \omega_0.$$

Другим процессом, сопровождающимся значительным изменением частоты рассеиваемого поперечного поля, является процесс

$$-\Omega_e - k_0 V_A = \frac{\Omega_e^2}{2|\omega_e|} - \sqrt{\frac{\Omega_e^4}{4\omega_e^2} + k^2 c^2}. \quad (10)$$

При условии $10\mu \leq \Omega_e^2/\omega_e^2 \leq 1/90$ из (10) для распадного волнового числа находим $k_p \simeq \pm \Omega_e/c$, что приводит к следующему выражению для средней мощности генерации:

$$\omega_T \simeq 3 \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{\Omega_e}{\omega_e} \right)^2 \omega_0 \left\{ \left| \frac{\varepsilon_L(k_1 - k_0)}{L^{1/2}} \right|^2 + \left| \frac{\varepsilon_L(k_2 + k_0)}{L^{1/2}} \right|^2 \right\}. \quad (11)$$

Наконец, заметим, что при условии $10\mu \leq \Omega_e^2/\omega_e^2 \leq 18\mu$ соотношение (11) определяет мощность генерации для процесса

$$\Omega_e - k_0 V_A = \frac{\Omega_e^2}{2|\omega_e|} + \sqrt{\frac{\Omega_e^4}{4\omega_e^2} + k^2 c^2}.$$

На основании полученных результатов можно сделать следующие заключения. Если для волнового числа $2k_0$ спектральная плотность ион-

но-звуковых колебаний не слишком мала, то сечение рассеяния геликона на ионном звуке из-за наличия множителя $(c/v_{Te})^4$ может оказаться чувствительным. Распадные волновые числа других процессов рассеяния, сопровождающихся заметным изменением частоты, лежат далеко от волнового числа центра тяжести спектра электронных колебаний, возбуждаемых пучком. Поэтому вклад в рассеяние вносят пропорциональные температуре тепловые флуктуации. Помимо этого, сечения соответствующих процессов содержат различные малые множители, вследствие чего эти сечения невелики,

6. Теперь рассмотрим распадную трансформацию поперечных волн в продольные. Одним из таких процессов является трансформация геликона в ионный звук:

$$-\frac{k'^2 c^2 |\omega_e|}{\Omega_e^2} + \frac{(k-k')^2 c^2 |\omega_e|}{\Omega_e^2} = k V_s.$$

При тех же ограничениях, что и в случае рассеяния геликона на ионном звуке, для распадного волнового числа, соответствующего этому процессу, получим $k_p = 2k'$. В результате найдем, что

$$\omega_L = \frac{1}{8\pi L^3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{\Omega_e}{|\omega_e|} \right) \sum_{k'} \frac{\Omega_e}{k' c} \left(\frac{V_s}{c} \right)^2 \left(\frac{\Omega_e}{k' v_e} \right)^2 |\varepsilon_-(k-k')|^2 |\varepsilon_+(k')|^2.$$

Другим процессом, сопровождающимся генерацией ионного звука, является поглощение высокочастотных поперечных волн:

$$\sqrt{\Omega_e^2 + k'^2 c^2} - \frac{|\omega_e|}{2} - \sqrt{\Omega_e^2 + (k-k')^2 c^2} + \frac{|\omega_e|}{2} = k V_s.$$

Если ограничиться условием $V_s/c \ll k'c/\Omega_e \ll 1$, то для распадного волнового числа и средней мощности нелинейной генерации получим соответственно

$$k_p \simeq 2k' \left(1 \mp \frac{V_s}{c} \frac{\Omega_e}{k'c} \right);$$

$$\omega_L \simeq \frac{1}{8\pi L^3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \sum_{k'} \left(\frac{k'c}{\Omega_e} \right) |\varepsilon_-(k')|^2 \{ |\varepsilon_+(k_1-k')|^2 + |\varepsilon_+(k_2+k')|^2 \}.$$

Заметим, что поскольку корни высокочастотных колебаний определены с точностью до квадратичных по $|\omega_e|^2/\Omega_e^2$ членов, полученные результаты имеют смысл до тех пор, пока частота генерированного ионного звука превышает эту поправку.

Наконец, рассмотрим генерацию ленгмюровских колебаний за счет распадного взаимодействия геликона с высокочастотной волной:

$$\frac{k'^2 c^2 |\omega_e|}{\Omega_e^2} + \sqrt{\Omega_e^2 + (k-k')^2 c^2} - \frac{|\omega_e|}{2} \left[1 + \frac{(k-k')^2 c^2}{\Omega_e^2} \right]^{-1} = \Omega_e. \quad (12)$$

Учитывая (12) и полагая $(\Omega_e/|\omega_e|) \gg 1$, $(k-k')^2 c^2/\Omega_e^2 \ll 1$, для распадного волнового числа находим $k = k_0 \pm (\Omega_e/c) \sqrt{|\omega_e|/\Omega_e}$. В предельном случае $k'c/\Omega_e \gg \sqrt{|\omega_e|/\Omega_e}$, которым здесь и ограничимся, для средней мощности распадной генерации получим

$$\omega_L \simeq \frac{1}{64\pi L^3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{\Omega_e}{|\omega_e|} \right)^{1/2} \sum_{k'} \left(\frac{k'c}{|\omega_e|} \right)^2 \left\{ \left[1 - \frac{\Omega_e^3}{k'^3 c^3} \sqrt{\frac{|\omega_e|}{\Omega_e}} \right]^2 \times \right. \\ \left. \times |\varepsilon_+(k_1 - k')|^2 + \left[1 + \frac{\Omega_e^3}{k'^3 c^3} \sqrt{\frac{|\omega_e|}{\Omega_e}} \right]^2 |\varepsilon_+(k_2 - k')|^2 \right\} |\varepsilon_-(k')|^2.$$

Существенно напомнить, что суммирование в полученных соотношениях следует проводить по интервалу волновых чисел, соответствующему рассматриваемым ветвям колебаний и принятым ограничениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 1437 (1964); Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 203 (1964).
2. И. А. Ахиезер, И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 46, 300 (1964).
3. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 47, 1552 (1964).
4. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, 43, 2234 (1962).
5. Л. М. Коврижных, В. Н. Цитович, ЖЭТФ, 47, 1454 (1964).
6. Н. П. Гиоргадзе, Н. Л. Цинцадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 262 (1964).
7. Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ, 34, 1807 (1964).
8. Н. П. Гиоргадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Институт физики АН Груз. ССР

Поступила в редакцию
22 мая 1965 г.

ON DESINTIGRATED WAVE INTERACTION IN MAGNETOACTIVE PLASMA

N. P. Giorgadze, E. M. Khirseli, N. L. Tsintsadze

The desintegrated wave interactions in a magnetoactive plasma have been considered under the condition when the wave vectors are directed along a magnetic field. An average power of desintegrated generation has been calculated.

УДК 621.371.18

**О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЛУЧЕВОЙ ТЕОРИИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ
ВОЛН В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ. I**

Ю. И. Орлов

Методами лучевой оптики рассмотрена задача о падении цилиндрической (сферической) локально-плоской электромагнитной волны на слабонеоднородную плоско-слоистую плазму без потерь. Показано, что учет конечной расходимости падающего волнового фронта приводит к особенностям в поведении лучевой картины, каустики, а следовательно, и к особенностям поля. В случае линейного и параболического законов изменения электронной концентрации определены и рассчитаны координаты особых точек каустики. Оценена деформация лучевой картины и каустической поверхности при изменении параметров задачи.

Рассмотрим задачу о падении цилиндрической (сферической) электромагнитной волны на плоскую поверхность неоднородной плазмы. При этом будем предполагать, что электронная концентрация N меняется только по нормали к поверхности раздела, а соударения в плазме отсутствуют ($\nu = 0$). Выражение для диэлектрической проницаемости плазмы тогда имеет следующий вид:

$$\epsilon(\omega, z) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N(z) \quad (z > 0). \quad (1)$$

Будем считать также, что плазма является слабонеоднородной $\left(\frac{1}{k_0} \left| \frac{d\epsilon}{dz} \right| \ll 1, k_0^* = \frac{\omega}{c} \right)$, а падающий волновой фронт — локально-плоским ($k_0 R_{1,2} \gg 1$, $R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны волнового фронта).

Как известно [1,4], при падении плоской волны на плоско-слоистую среду (1) каустика представляет собой плоскость, на которой $\epsilon(z) = \sin^2 \theta_0$ (θ_0 — угол падения). Однако плоские волны с бесконечно широким фронтом являются, в сущности, лишь идеализацией. Реальные электромагнитные волны всегда обладают некоторой конечной расходимостью и только в ограниченных областях пространства могут рассматриваться как плоские. Можно показать, что даже для локально-плоских волн учет конечной расходимости приводит к качественно новому поведению поля электромагнитной волны в неоднородной плазме. В частности, в неоднородной среде нарушается принцип локальности, благодаря этому каустическая поверхность приобретает ряд характерных особенностей. Появляются особые точки (узлы и точки возврата); каустика может образовывать петли внутри плазмы ($z \geq 0$) или может замыкать петли в свободном полупространстве ($z < 0$). Настоящая статья посвящена в основном анализу этих особенностей в случае плоско-слоистой плазмы (1).

Следует отметить, что указания на некоторые особенности поведения траекторий лучей в плоско-слоистых средах можно найти в работах [2,4-7], посвященных вопросам ионосферного распространения коротких

радиоволн. В работах [4, 6] и др. довольно подробно рассматривается ход лучей в симметричном параболическом слое, который хорошо аппроксимирует распределение электронной концентрации в ионосферных слоях (например, в слое F_2) в окрестности максимума электронной концентрации. При этом специфика постановки задачи в [2-6] — условия «физической реализуемости» параметров, интерес к исследованию волнового поля только в свободном пространстве (причем в случае «плоской Земли» только на уровне передатчика) и т. п. — не требовала детального исследования поля, лучевой картины и каустической поверхности в частности в неоднородной среде (плазме). Однако исследование поведения каустики весьма существенно, так как оно определяет характер волнового поля как в неоднородной плазме, так и в свободном пространстве. В частности, вид каустики объясняет появление на коротких волнах зоны молчания и интерференционных замираний в окрестности минимума первого скачка волны [2, 4]. Вид каустики важен также при определении поля в дальней зоне, например, при нахождении поперечника рассеяния тел, находящихся в неоднородной среде. В этом случае, если каустическая поверхность локализована в некоторой области около границы неоднородной среды и не имеет ветвей, асимптотически уходящих на бесконечность, геометрико-оптическое приближение для поля в дальней зоне конечно для всех направлений*.

Итак, пусть на плоскую поверхность неоднородной плазмы (1) падает цилиндрический волновой фронт $z = z_\Phi(x, t)$, образующая которого параллельна границе раздела (рис. 1). Начало координат O поместим в точку касания волнового фронта с границей $z = 0$, т. е. в точку, где $dz_\Phi/dx = 0$. При $dz_\Phi/dx \neq 0$ начало координат на оси x может быть выбрано произвольно.

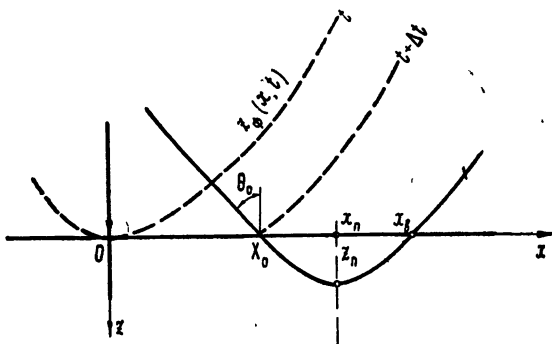


Рис. 1. Падение локально-плоского волнового фронта на плоскую поверхность неоднородной плазмы.

Как известно [1-5], уравнение семейства лучей при $x \geq 0$ в плоско-слоистой среде (1) с $\epsilon(0) = 1$ имеет следующий вид:

$$x = \begin{cases} x_0 + \int_0^z T(z, \alpha_0) dz & (x \leq x_n) \\ x_n + \int_z^{z_n} T(z, \alpha_0) dz & (x > x_n) \end{cases}, \quad (2)$$

* Пользуясь случаем, отметим, что в работе [3] содержится ошибка в формуле (38, 63), благодаря чему на рис. 162 [3] неправильно показан ход каустики в свободном пространстве (ср. ниже (2) и рис. 3).

где $T(z, \alpha_0) = \alpha_0 / \sqrt{\varepsilon(z) - \alpha_0^2}$, $\alpha_0 = \sin \theta_0$, $x_n = x_0 + \int_0^{z_n} T(z, \alpha_0) dz$, θ_0 — угол между лучом (нормалью к волновому фронту) и нормалью к поверхности плазмы, x_0 — координата точки входа луча в плазму; z_n определяется уравнением $\varepsilon(z_n) = \alpha_0^2$ и характеризует положение плоской каустики в случае падения на плазму плоской волны.

Для цилиндрического волнового фронта $z = z_\Phi(x, t)$ при $x \geq 0$ можно определить $\operatorname{tg} \theta_0 = |dz_\Phi/dx|$ и $x_0 = x + |z_\Phi dz_\Phi/dx|$. Откуда следует, что угол θ_0 зависит от величины x_0 , причем

$$\frac{d\theta_0}{dx_0} = \frac{\cos \theta_0(x_0)}{R_0(x_0)} = \frac{\cos^2 \theta_0(x_0)}{p(x_0)}, \quad p = R_0 \cos \theta_0, \quad (3)$$

где $R_0(x_0)$ — модуль радиуса кривизны волнового фронта в точке входа луча в плазму (при $z = 0$ и $x = x_0$), а $p(x_0)$ — расстояние по нормали от поверхности плазмы до центра кривизны фронта.

Далее считаем, что в окрестности границы $z = 0$ электронная концентрация N монотонно увеличивается с ростом z , а при z , близких к z_n , подынтегральная функция $T(z, \alpha_0)$ удовлетворяет принципу Коши, обеспечивающему абсолютную сходимость несобственных интегралов в выражении (2):

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z) - \varepsilon(z_n)}} < \frac{A}{(z_n - z)^q}, \quad q < 1, \quad A = \text{const}. \quad (4)$$

При этих условиях лучи выходят из плазмы через границу $z = 0$ при $x = x_n$:

$$x_n = x_0 + 2 \int_0^{z_n} T(z, \alpha_0) dz, \quad (5)$$

а семейство лучей (2) образует в плазме цилиндрическую каустическую поверхность, определяемую системой параметрических уравнений:

$$x = x_0 + \int_0^{z_n} T(z, \alpha_0) dz + \int_z^{z_n} T(z, \alpha_0) dz; \quad (6)$$

$$2 \frac{d\theta_0}{dx_0} \cos \theta_0 \left(\int_0^{z_n} F(z, \alpha_0) dz + \int_z^{z_n} F(z, \alpha_0) dz \right) - 2 \frac{d\theta_0}{dx_0} \frac{\cos(2\theta_0)}{(d\varepsilon/dz)_{z=0}} - 2 \frac{d\theta_0}{dx_0} \times \\ \times \frac{\cos \theta_0 (\varepsilon - 1 + \cos(2\theta_0))}{(d\varepsilon/dz) \sqrt{\varepsilon - \alpha_0^2}} + 1 = 0,$$

где

$$F(z, \alpha_0) = \frac{(d^2\varepsilon/dz^2) [\varepsilon - 1 + \cos(2\theta_0)]}{(d\varepsilon/dz)^2 \sqrt{\varepsilon - \alpha_0^2}}.$$

Из выражения (6) видно, что лучевая картина и каустика при прочих равных условиях определяется функцией $\theta_0(x_0)$, т. е. видом падающего волнового фронта. Не конкретизируя вида волнового фронта, исследуем особенности каустической поверхности (6).

Анализ показывает, что функция $x_n(x_0)$, определяемая формулой (5), при некоторых значениях параметров задачи не является монотонной (рис. 2) [2, 4, 5]. Можно показать, что экстремальные значения этой

функции определяют координаты точек выхода каустики на границу плазмы $z = 0$. Положение и число экстремумов $x_B(x_0)$ определяется условием $dx_B/dx_0 = 0$, откуда с учетом (5) получаем

$$4\cos\theta_0 \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right)_{z=0} \frac{d\theta_0}{dx_0} \int_0^{z_n} F(z, \alpha_0) dz - 4\cos(2\theta_0) \frac{d\theta_0}{dx_0} + \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right)_{z=0} = 0. \quad (7)$$

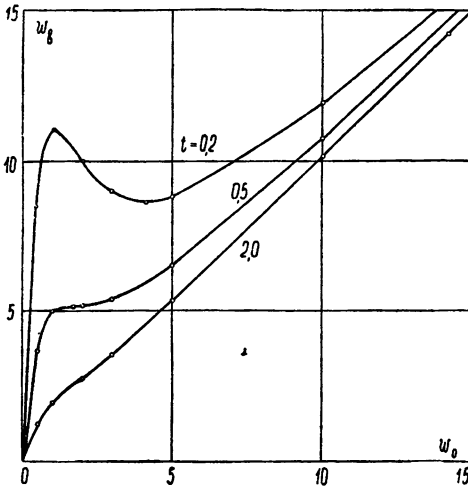


Рис. 2. Зависимость безразмерной координаты выхода луча $w_B = x_B/p$ от координаты его входа $w_0 = x_0/p$ для $\varepsilon(z) = 1 - az$.

а из (8) и (9)

$$x = x_B(x_0) - p(x_0) \frac{dx_B}{dx_0} \operatorname{tg} \theta_0(x_0). \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) являются параметрическими уравнениями каустики лучей (8). Из формулы (9), в частности, следует, что каустика в свободном полупространстве $z \leq 0$ может существовать только при $dx_B/dx_0 \leq 0$. Из (9) и (10) ясно, что $dz/dx_0 = 0$ ($dx/dx_0 = 0$), если

$$\frac{d}{dx_0} \left(p \frac{dx_B}{dx_0} \right) = 0. \quad (11)$$

Решения уравнения (11) совместно с формулами (9) и (10) определяют на каустике линии возврата 1 рода (линии заострения), на которых каустическая поверхность меняет свое направление на обратное. По аналогии с (11) линии возврата внутренней каустики (6) определяются из (6) точками, где $dz/dx_0 = 0$ ($dx/dx_0 = 0$).

Физически ясно, что если существуют решения уравнения (7) (при этом решения уравнения (11) могут и не существовать), то имеются и решения уравнения, определяющего положение линий возврата внутренней каустики.

Если падающий цилиндрический волновой фронт является круговым, то

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{x_0}{p}, \quad \frac{d\theta_0}{dx_0} = \frac{\cos^2 \theta_0}{p} = \frac{p}{p^2 + x_0^2}, \quad (12)$$

Анализируя лучевую картину, легко понять, что при $dx_B/dx_0 \geq 0$ соседние лучи пересекаются внутри неоднородной среды $z \geq 0$; поэтому каустическая поверхность образуется при $z \geq 0$. Если $dx_B/dx_0 < 0$, лучи пересекаются вне плазмы, и каустика располагается в однородном полупространстве $z < 0$.

Действительно, лучи, вышедшие из плазмы, описываются уравнением

$$x = x_B(x_0) - z \operatorname{tg} \theta_0(x_0). \quad (8)$$

Дифференцируя (8), из условия $dx/dx_0 = 0$ с учетом (3) получим

$$z = p(x_0) \frac{dx_B}{dx_0}, \quad (9)$$

где p — расстояние по нормали от источника цилиндрической волны до границы раздела, а x_0 — координата точки входа луча, отсчитываемая от основания нормали, проходящей через источник.

Для волнового фронта такого вида исследуем подробно линейный закон изменения электронной концентрации N . При этом

$$\epsilon(z) = 1 - az \quad (z > 0), \quad a = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \frac{dN}{dz} = \text{const} > 0. \quad (13)$$

Траектории лучей, согласно (2), представляют собой параболы [4]:

$$z = z_n - \frac{a(x - x_n)^2}{4\alpha_0^2},$$

где

$$\alpha_0 = \sin \theta_0 = \frac{x_0}{\sqrt{p^2 + x_0^2}}, \quad x_n = x_0 + \frac{2\alpha_0 \sqrt{1 - \alpha_0^2}}{a}, \quad z_n = \frac{1 - \alpha_0^2}{a}. \quad (14)$$

В силу симметрии задачи относительно плоскости zOy достаточно рассмотреть только область $x > 0$. Координата x_b точек выхода лучей из плазмы в этом случае определяется из (14):

$$x_b = x_0 + \frac{4\alpha_0 \sqrt{1 - \alpha_0^2}}{a} = x_0 + \frac{4px_0}{a(p^2 + x_0^2)}. \quad (15)$$

Пронормируем линейные размеры по расстоянию p и обозначим $w = x/p$, $v = z/p$, $t = ap$. Уравнение каустической поверхности (6) в относительных координатах w и v имеет вид

$$v = v_n - \frac{t}{4} \frac{1 + w_0^2}{w_0^2} (w - w_n)^2; \quad (16)$$

$$w = \frac{w_0(1 - w_0^2)}{2} + \frac{w_0}{t} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{(t+2)^2 + 2t(t-2)w_0^2 + t^2w_0^4} \right),$$

где

$$w_n = w_0 + \frac{2}{t} \frac{w_0}{1 + w_0^2}, \quad v_n = \frac{1}{t(1 + w_0^2)}.$$

Из соотношения (7) легко получить уравнение

$$1 + \frac{4}{t} \cos^2 \theta_0 \cos(2\theta_0) = 0,$$

откуда

$$\cos \theta_{0,1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 2t}}, \quad t \leq 1/2. \quad (17)$$

Учитывая, что $\cos \theta_0 = 1/\sqrt{1 + w_0^2}$, из (17) находим положение экстремальных точек функции $w_b(w_0)$ (рис. 2):

$$w_{0,1,2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{2 - t \mp 2\sqrt{1 - 2t}} \quad (t \leq 1/2), \quad (18)$$

а из (15) и (18) — координаты точек выхода каустики из плазмы:

$$\omega_{1,2} = \omega_{01,2} \frac{1}{t} (1 + t \pm \sqrt{1 - 2t}) \quad (t \leq 1/2). \quad (19)$$

В (17)–(19) верхний знак относится к точкам 1 выхода каустики, а нижний — к точкам 2 (рис. 3), причем $\theta_{01} < \theta_{02}$, $\omega_{01} < \omega_{02}$, $\omega_1 > \omega_2$.

Анализ зависимости $w_b(\omega_0)$ (рис. 2) показывает, что через точки на границе плазмы, определяемые неравенством $\omega_2 < \omega < \omega_1$, выходят три луча, а через точки $\omega = \omega_1$, ω_2 — два луча [4]. Через любую другую точку границы проходит только один луч.

Как следует из формул (17)–(19), каустика может пересекать границу $z = 0$ только при $t \leq 1/2$. При этом каустика может пересекать границу плазмы лучами, которые попадают на границу плазмы при $\omega_0 \leq \omega_{01}$ или при $\omega_0 \geq \omega_{02}$, расположена внутри неоднородной среды $z \geq 0$ (рис. 3).

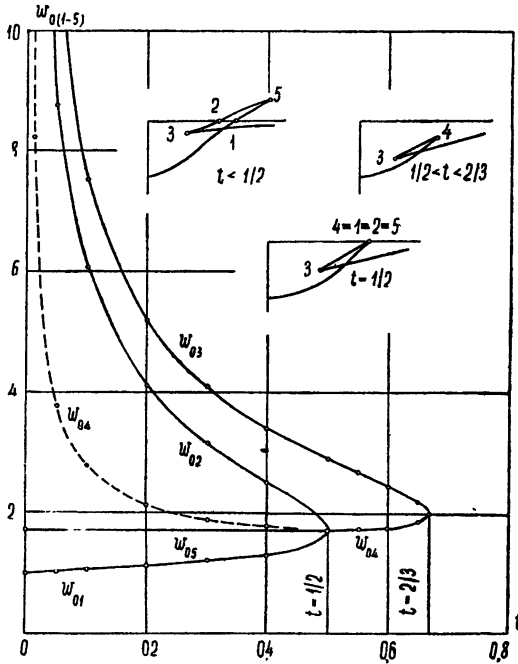


Рис. 3. Зависимость координат входа луча w_0 , особых точек каустики и вида каустики от обобщенного параметра задачи t для $\epsilon(z) = 1 - az$.

Лучи, для которых $\omega_{01} < \omega_0 < \omega_{02}$, образуют каустику при $z < 0$. Ее уравнение может быть получено из (9), (10) с учетом (15):

$$v = 1 + \frac{4}{t} \frac{1 - \omega_0^2}{(1 + \omega_0^2)^2}; \quad (20)$$

$$w = \frac{8}{t} \frac{\omega_0^3}{(1 + \omega_0^2)^2}.$$

Значения параметра ω_0 и координат w и v линии возврата каустики (20) легко могут быть определены из уравнения (11) или, что то же самое, из условия $dw/d\omega_0 = 0$ (ср. [3]):

$$\omega_{05} = \sqrt{3}; \quad v_5 = 1 - 1/2t; \quad w_5 = 3\sqrt{3}/2t; \quad t \leq 1/2. \quad (21)$$

Очевидно, что при $t = 1/2$ $\omega_{01} = \omega_{02} = \sqrt{3}$, $\theta_{01} = \theta_{02} = 60^\circ$, $\omega_1 = \omega_2 = 3\sqrt{3}$, и точки выхода 1 и 2 каустики на границу $z = 0$ сливаются в одну (рис. 3). Из (20) и (21) видно, что при $t \rightarrow 1/2$ каустика во внешней среде стягивается к той же точке с координатами $v = 0$, $\omega = 3\sqrt{3}$.

При $t > 1/2$ каустическая поверхность целиком расположена в неоднородной среде $z > 0$. Анализ уравнений каустики (16) показывает, что $d\omega/d\omega_0 = 0$ ($dv/d\omega_0 = 0$), если

$$\omega_{03,4} = \frac{1}{\sqrt{3t}} \sqrt{10 - 3t \pm 4\sqrt{4 - 6t}} \quad (t \leq 2/3). \quad (22)$$

Из (22) и (16) получаем

$$\begin{aligned} \omega_{3,4} &= \omega_{03,4} \frac{1}{3t} (3t + 2 \mp \sqrt{4 - 6t}); \\ v_{3,4} &= \frac{1}{5 \pm 2\sqrt{4 - 6t}} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3t} \mp \frac{1}{3t} \sqrt{4 - 6t} + 1 \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражения (22) и (23) определяют положение линии возврата внутренней каустики. В (22), (23) верхний знак относится к точкам линии возврата 3, а нижний — к точкам возврата 4: $\omega_{03} > \omega_{04}$, $\omega_3 < \omega_4$, $v_3 > v_4$ (рис. 3). Из (23) следует, что при $t \leq 1/2$ $v_4 \leq 0$. Это связано с тем, что при $t \leq 1/2$ петля каустики замыкается в свободном полупространстве $v < 0$, где линия возврата определяется не v_4 из (23), а v_5 из (21).

Как видно из формул (22), (23), внутренняя каустика имеет точки возврата только для $t < 2/3$. При этом для $t < 1/2$ указанные формулы определяют одну линию возврата (ω_3 , v_3), а для $1/2 \leq t < 2/3$ — две (ω_3 , v_3 ; ω_4 , v_4). Если $t \rightarrow 2/3$, петля на каустике стягивается к точке с координатами $\omega = 4$, $v = 1/6$; далее при $t > 2/3$ каустика (16) представляет собой поверхность без особых точек.

На рис. 3 и 4 приводятся рассчитанные по формулам (18), (19), (22) и (23) графики зависимостей обобщенных координат ω и v и параметра ω_0 характерных точек каустики от обобщенного параметра задачи $t = ap$. Зависимость координат от обобщенного параметра t указывает на значение конечной расходимости волнового фронта в описанных явлениях. Действительно, для любого, сколь угодно большого электрического расстояния до источника $k_0 p$ можно найти такой достаточно малый градиент диэлектрической проницаемости a/k_0 , что их произведение t станет меньше $2/3$, и каустика, а следовательно, и поле приобретут указанные выше особенности. Наоборот, если при фиксированном значении градиента a/k_0 менять положение источника $k_0 p$, то только при $k_0 p > 2k_0/3a$ каустика становится неособой (рис. 5). При дальнейшем увеличении $k_0 p$ анализируемая каустическая поверхность стремится к каустике от плоской волны ($z = 1/a$). Таким образом, задача о падении локально-плоского цилиндрического фронта на поверхность раздела с неоднородной средой (13) не содержит никаких особенностей по сравнению с задачей о падении плоской волны только при $k_0 p > 2k_0/3a$.

Выше подробно был рассмотрен случай линейного изменения электронной концентрации N . В соответствии с изложенным общим методом могут быть рассмотрены и другие законы $N(z)$. Остановимся кратко на исследовании параболических законов $N(z)$.

В случае иррационального параболического закона

$$\varepsilon(z) = 1 - bz^{1/2}, \quad b = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{dN^2}{dz} \right)^{1/2} = \text{const} > 0 \quad (24)$$

в точках выхода лучей из плазмы $v = 0$, $\omega = \omega_v$ и, согласно (5),

$$\omega_v = \omega_0 + \frac{16}{3s} \frac{\omega_0}{(1 + \omega_0^2)^2}; \quad s = b^2 p. \quad (25)$$

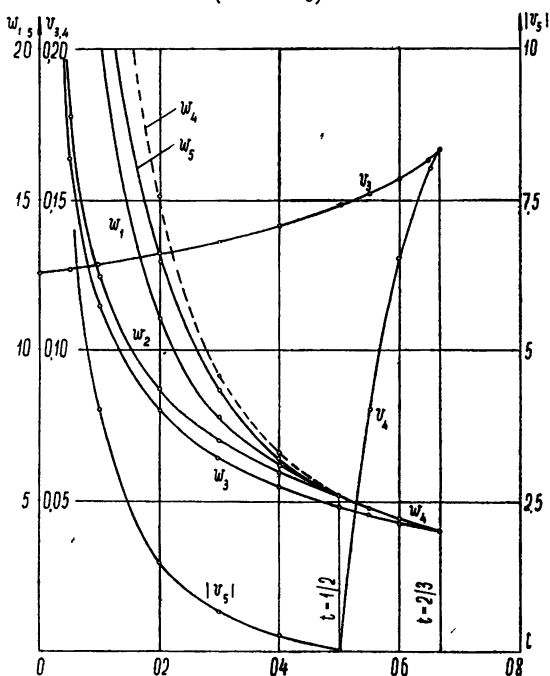


Рис. 4. Зависимость координат ω и v особых точек каустики от обобщенного параметра t для $\epsilon(z) = 1 - az$.

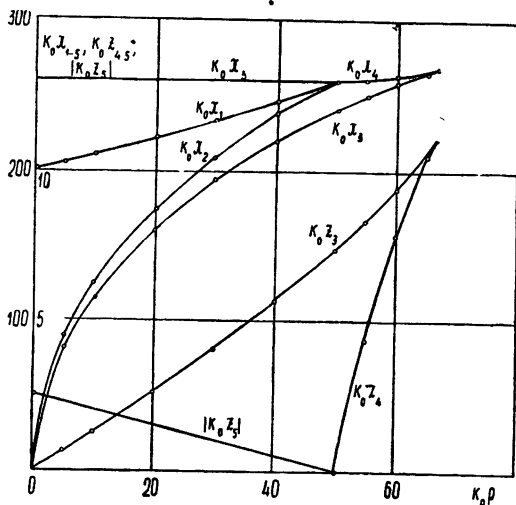


Рис. 5. Зависимость координат особых точек каустики от расстояния до источника при $a/k_0 = 0,01$.

Масштаб по оси ординат слева относится к величинам $k_0 z_{1-5}$, $|k_0 z_6|$, а масштаб справа — к величинам $k_0 z_{3,4}$.

Отметим, что параметр s , как и параметр t , можно представить в виде $s = p/z_0$, где z_0 — координата плоскости, на которой $\epsilon(z_0) = 0$. Положе-

ние экстремальных точек функции $\omega_b(\omega_0)$ определяется выражением

$$\omega_{01,2} = \sqrt{-1 + 8(3s)^{-1/2} \cos \alpha(s)}, \quad (26)$$

где

$$\alpha(s) = 60 \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{2} \sqrt{3s}.$$

Из (25) и (26) находим координаты точек выхода каустики (6) из плазмы:

$$\omega_{1,2} = \omega_{01,2} \left(1 + \frac{1}{4 \cos^2 \alpha(s)} \right). \quad (27)$$

В (26) и (27), как и ранее, верхний знак относится к точкам 1 выхода каустики, а нижний — к точкам 2: $\theta_1 = \arctg \omega_{01} < \theta_{02} = \arctg \omega_{02}$, $\omega_{01} < \omega_{02}$, $\omega_1 > \omega_2$. Из формул (26) и (27) видно, что при $s < 4/3$ каустика выходит из плазмы в свободное полупространство $z < 0$.

Уравнение каустики при $z < 0$ может быть получено из (9), (10) и (25):

$$v = 1 + \frac{16}{3s} \frac{1 - 3\omega_0^2}{(1 + \omega_0^2)^3};$$

$$\omega = \frac{64}{3s} \frac{\omega_0^3}{(1 + \omega_0^2)^3}. \quad (28)$$

Линия возврата каустики (28) определяется координатами

$$\omega_0 = 1, \quad v = 1 - 4/3s, \quad \omega = 8/3s, \quad s \leq 4/3. \quad (29)$$

Если $s = 4/3$, то из (26) и (27) следует, что $\omega_{01} = \omega_{02} = 1$, $\theta_{01} = \theta_{02} = 45^\circ$ и $\omega_1 = \omega_2 = 2$. При $s > 4/3$ каустика целиком расположена внутри неоднородной среды $z \geq 0$. Анализ внутренней каустики проводится аналогично.

Для параболического закона другого типа:

$$\varepsilon(z) = 1 - cz^2 (z > 0), \quad c = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \left(\frac{d\sqrt{N}}{dz} \right)^2 = \text{const} > 0 \quad (30)$$

уравнение луча в соответствии с (2) имеет вид

$$z = \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{c}} \sin \frac{\sqrt{c}(x - x_0)}{\sin \theta_0}.$$

Отсюда при $z = 0$ получаем: $x_b = x_0 + \pi \sin \theta_0 \sqrt{c}$ и $dx_b/dx_0 \neq 0$. Таким образом, для любых c и ρ каустика является неособой и целиком располагается внутри неоднородной среды (30). По всей видимости, этот факт связан с тем, что для (30) $(d\varepsilon/dz)_{z=0} = 0$.

Пусть теперь волновой фронт, падающий на плоскую границу неоднородной плазмы (1), представляет собой поверхность вращения вокруг оси z . Тогда в силу осевой симметрии задачи большинство соотношений, полученных выше, остаются справедливыми и в этом случае (если декартову координату x заменить на цилиндрическую $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). С учетом этого замечания предыдущие формулы верны и для сферического волнового фронта. В частности, каустика от сферического фронта имеет вид поверхности вращения двухмерной каустики (6) вокруг оси

з. Поэтому остаются верными также оценки, которые были получены выше, например, для линейного закона изменения электронной концентрации N .

Аналогичным методом могут быть исследованы важные задачи о падении локально-плоских волновых фронтов на криволинейные поверхности неоднородной плазмы с осевой и центральной симметрией. Этим задачам будет посвящена следующая статья II.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
3. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
4. K. G. Budden, Radio waves in the ionosphere, The University Press, Cambridge, 1961.
5. J. M. Kelso, Radio ray propagation in the ionosphere, Mc-Graw-Hill, 1964.
6. P. O. Pedersen, The propagation of radio waves, Danmarks, Naturvidenskabelige Samfund, Copenhagen, 1927.
7. K. Forsterling, H. Lassen, Hochfrequenz. und Elektroakust., 42, 158 (1933)

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
12 июня 1965 г.,
после переработки
5 ноября 1965 г.

ON SOME PECULIARITIES OF THE RAY THEORY OF CYLINDRICAL AND SPHERICAL WAVES PROPAGATING IN A WEAK NONHOMOGENEOUS PLASMA. I

Yu. I. Orlov

By ray-optics method the problem has been considered of the incidence of a cylindrical (spherical) local-plane electromagnetic wave on a weak nonhomogeneous plane-stratified plasma without losses. It is shown that the finite divergence of an incident wave front leads to the peculiarities of the ray picture, caustics, and, hence, to the field peculiarities. The coordinates of peculiar caustic points have been determined and calculated for the case of linear and nonlinear changes of the electron density. The deformation of the ray picture and caustic surface has been estimated when changing parameters of the problem.

УДК 539.285

КВАДРУПОЛЬНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ*

В. С. Гречишкин, А. Д. Гордеев, Н. Е. Айнбиндер

Рассмотрена квадрупольная релаксация для $J = 7/2$ методом кинетических уравнений. Показано, что процесс релаксации описывается суммой трех экспонент. Предложены способы определения отношения релаксационных вероятностей и воздействия на скорость изменения распределения населенностей. Произведено сравнение теории и эксперимента, выполненного на ядрах Sb^{123} методом спинового эхо.

Теория квадрупольной релаксации для спина $3/2$ была создана Байером [1]. В этом случае релаксация населенностей происходит между уровнями квадрупольной энергии. Если спин ядра полуцелый и больше $3/2$ (например, $5/2$; $7/2$; $9/2$), то число квадрупольных уровней энергии больше двух (3, 4 и 5 соответственно) и процесс релаксации имеет более сложный характер.

Кроме рассмотрения конкретного механизма релаксации, в этих случаях необходимо учесть связь между одноквантовым и двухквантовым механизмом релаксации путем решения кинетических уравнений. Многоуровневая квадрупольная система может применяться для построения квадрупольного мазера в нулевом поле; поэтому изучение процесса релаксации при одновременном воздействии радиочастотного поля на несколько переходов имеет большое практическое значение. Ранее в литературе этот вопрос не рассматривался. В настоящей работе квадрупольная релаксация изучена методом кинетических уравнений для $J = 7/2$, поскольку этот спин обеспечивает наиболее интересные возможности для исследования влияния начальных условий на скорость релаксации.

1. РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методика построения кинетических уравнений с учетом одноквантового и двухквантового механизмов релаксации хорошо известна из литературы [2]. В общем виде кинетическое уравнение для населенности N_m может быть записано в виде

$$\frac{dN_m}{dt} = \sum_n (W_{nm} N_n - W_{mn} N_m), \quad (1)$$

где W_{nm} , W_{mn} — вероятности прямого и обратного переходов между уровнями n и m . Для чисто-квадрупольного резонанса нужно рассматривать две вероятности переходов [3, 4]:

$$W(m \pm 1, m) = \frac{(2m \pm 1)^2 (J \mp m)(J \pm m + 1)}{2J^2 (2J - 1)^2} W_1; \quad (2)$$

* Доклад на 12 совещании по физике низких температур (Казань, 1965).

$$W(m \pm 2, m) = \frac{(J \mp m)(J \mp m - 1)(J \pm m + 1)(J \pm m + 2)}{2J^2(2J - 1)^2} W_2,$$

где W_1 — вероятность одноквантового механизма релаксации, W_2 — вероятность двухквантового механизма релаксации.

Отсюда для $J = 7/2$ получим (см. рис. 1)

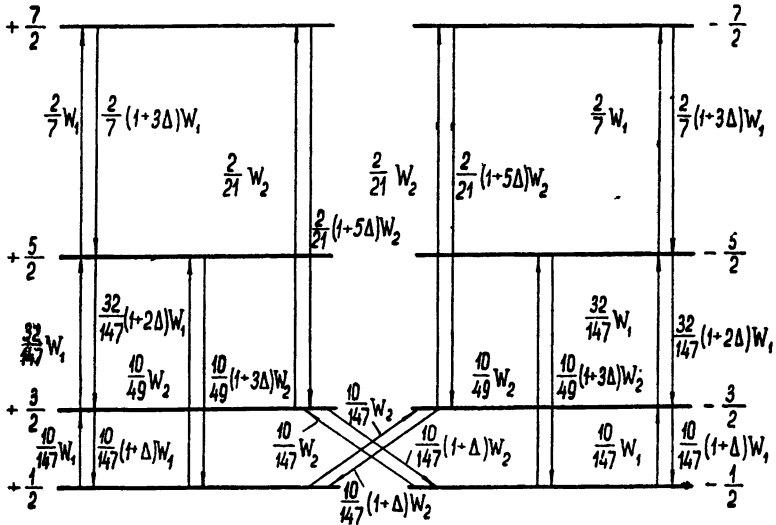


Рис. 1. Вероятности прямых и обратных переходов между чисто квадрупольными энергетическими уровнями в случае $J=7/2$.

$$\frac{dN_{\pm 7/2}}{dt} = - \left[\frac{2}{7} W_1(1 + 3\Delta) + \frac{2}{21} W_2(1 + 5\Delta) \right] N_{\pm 7/2} +$$

$$+ \frac{2}{7} W_1 N_{\pm 5/2} + \frac{2}{21} W_2 N_{\pm 3/2};$$

(3)

$$\frac{dN_{\pm 5/2}}{dt} = - \left[\frac{32}{147} W_1(1 + 2\Delta) + \frac{10}{49} W_2(1 + 3\Delta) + \frac{2}{7} W_1 \right] N_{\pm 5/2} +$$

$$+ \frac{32}{147} W_1 N_{\pm 3/2} + \frac{10}{49} W_2 N_{\pm 1/2} + \frac{2}{7} W_1(1 + 3\Delta) N_{\pm 7/2};$$

$$\frac{dN_{\pm 3/2}}{dt} = - \left[\frac{10}{147} W_1(1 + \Delta) + \frac{2}{21} W_2 + \frac{40}{147} W_2(1 + \Delta) + \frac{32}{147} W_1 \right] N_{\pm 3/2} +$$

$$+ \frac{10}{147} W_1 N_{\pm 1/2} + \frac{32}{147} W_1(1 + 2\Delta) N_{\pm 5/2} + \frac{2}{21} W_2(1 + 5\Delta) N_{\pm 7/2} + \frac{40}{147} W_2 N_{\mp 1/2};$$

$$\frac{dN_{\pm 1/2}}{dt} = - \left[\frac{10}{147} W_1 + \frac{10}{49} W_2 + \frac{40}{147} W_2 \right] N_{\pm 1/2} + \frac{10}{147} W_1(1 + \Delta) N_{\pm 3/2} +$$

$$+ \frac{10}{49} W_2(1 + 3\Delta) N_{\pm 5/2} + \frac{40}{147} W_2(1 + \Delta) N_{\mp 3/2},$$

где $\Delta = h\nu_Q/kT$, ν_Q — частота ЯКР для перехода $1/2 \leftrightarrow 3/2$, T — абсолютная температура.

Введем обозначения

$$n_{\pm l} = N_{\pm l \mp 1/2} - N_{\pm l \pm 1/2}; \quad n_{+l} = n_{-l}; \quad N_{+l} = N_{-l}. \quad (4)$$

Из четырех уравнений (3) для населенностей получаем три уравнения для разности заселенностей:

$$\begin{aligned} \dot{n}_3 + \frac{2}{21} (6W_1 + W_2)n_3 - \frac{16}{147} (2W_1 + W_2)n_2 - \frac{10}{49} W_2 n_1 = \\ = \frac{4}{147} (47W_1 - 5W_2)n_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_2 - \frac{2}{21} (3W_1 - W_2)n_3 + \frac{4}{147} (16W_1 + 11W_2)n_2 - \frac{10}{147} (W_1 + W_2)n_1 = \\ = \frac{8}{147} (-W_1 + 15W_2)n_0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 - \frac{2}{21} W_2 n_3 - \frac{16}{147} (2W_1 - W_2)n_2 + \frac{10}{147} (2W_1 + 11W_2)n_1 = \\ = \frac{4}{147} (-11W_1 + 25W_2)n_0, \end{aligned}$$

где $n_3 = N_{5/2} - N_{7/2}$, $n_2 = N_{3/2} - N_{5/2}$, $n_1 = N_{1/2} - N_{3/2}$, $n_0 = \Delta N/4$, $N_i = N/4$, N — полное число резонирующих ядер.

Если ввести обозначения $\gamma \equiv W_2/W_1$ и $W_1 t/147 = \tau$ (безразмерное время), то уравнения (5) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{n}_3 + 14(6 + \gamma)n_3 - 16(2 + \gamma)n_2 - 30\gamma n_1 = 4(47 - 5\gamma)n_0; \\ \dot{n}_2 - 14(3 - \gamma)n_3 + 4(16 + 11\gamma)n_2 - 10(1 + \gamma)n_1 = 8(-1 + 15\gamma)n_0; \quad (6) \\ \dot{n}_1 - 14\gamma n_3 - 16(2 - \gamma)n_2 + 10(2 + 11\gamma)n_1 = 4(-11 + 25\gamma)n_0. \end{aligned}$$

Применим для решения этой системы уравнений операционный метод Лапласа. Тогда получим решение по известной методике. Из определителя уравнения (6) можно получить соотношение между релаксационными константами (в данном случае $T_{ii} = 147/p_i W_1$). Попарное отношение корней этого уравнения для различных γ приведено на рис. 2. Из рисунка видно, что процесс релаксации носит сложный характер, и обычно описывается тремя релаксационными константами. Лишь при $\gamma = 1$ и $\gamma \approx 4 \div 8$ имеет место вырождение, когда два корня уравнения совпадают друг с другом.

Измерение отношения T_1''/T_1' позволяет, таким образом, оценить $\gamma = W_2/W_1$.

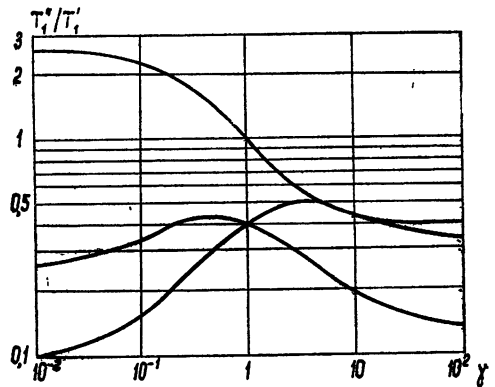


Рис. 2. Зависимость отношения времен спин-решеточной релаксации T_1''/T_1' от $\gamma = W_2/W_1$.

Мы рассмотрели 7 случаев различных начальных условий (см. рис. 3). В первом случае насыщающий радиочастотный импульс (или насыщающее радиочастотное поле) воздействует лишь на переход $1/2 \leftrightarrow 3/2$, а в случае 4 на систему воздействует уже 2 радиочастотных импульса (90°) с частотами заполнения для переходов $1/2 \leftrightarrow 3/2$ и $3/2 \leftrightarrow 5/2$ и т. д. Полное решение системы (6) было найдено для $\gamma=2$; 0,1; 5 (см. рис. 4, 5 и 6).

Случай 1	Случай 2	Случай 3
n_3 $3n_0$	n_3 $4n_0$	n_3 0
n_2 $25n_0$	n_2 0	n_2 $35n_0$
n_1 0	n_1 $2n_0$	n_1 n_0

Случай 4	Случай 5	Случай 6	Случай 7
n_3 $4n_0/3$	n_3 0	n_3 0	n_3 0
n_2 0	n_2 0	n_2 $4n_0$	n_2 0
n_1 0	n_1 $10n_0/3$	n_1 0	n_1 0

Рис. 3.

Рис. 3. Различные случаи начальных разностей населенностей уровней энергии для $J=7/2$.

Рис. 4. Изменение разности населенностей трех переходов в зависимости от величины $W_1 t$ при $\gamma=2$ для семи начальных условий, указанных на рис. 3.

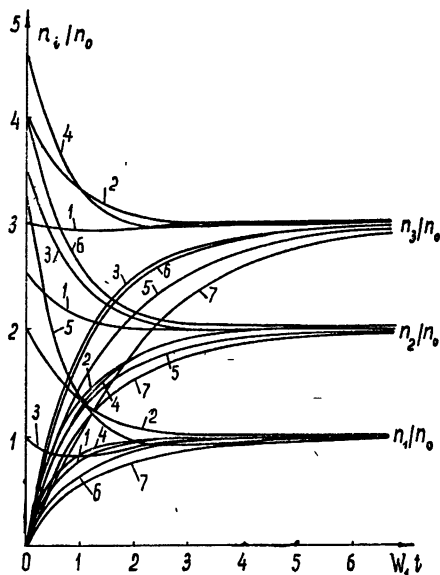
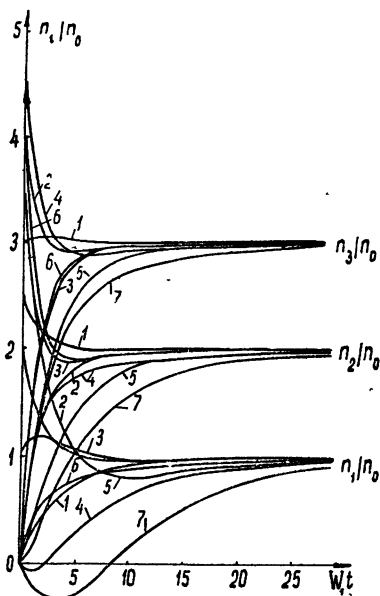
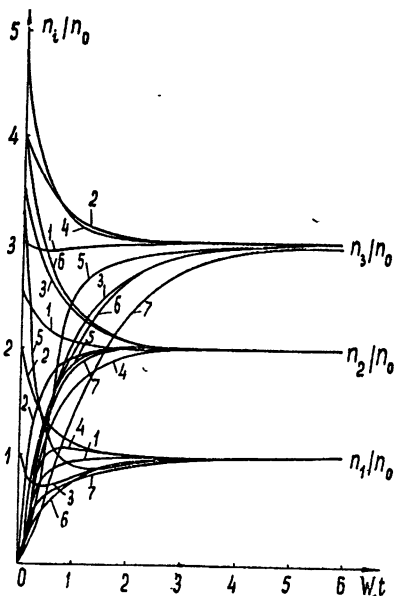


Рис. 4.

Рис. 5. То же при $\gamma=0,1$.Рис. 6. То же при $\gamma=5$.

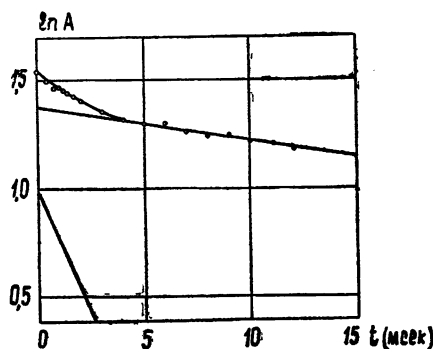
Из рисунков видно, что случаи 1 и 4 сильно отличаются друг от друга при $\gamma=0,1$, а при $\gamma=2$ отличие менее заметно. Таким образом, при малых γ , изменяя начальные условия (воздействуя одновременно несколькими радиочастотными полями), можно управлять скоростью приближения к равновесию в многоуровневой системе. При $\gamma=5$ положение второго 90° -импульса (нулевое начальное условие для перехода $3/2 \leftrightarrow 5/2$) ускоряет установление равновесия между уровнями $1/2 \leftrightarrow 3/2$. При $\gamma=0,1$ удается даже получить инверсию населенностей. Этот метод аналогичен известному методу двойного резонанса [5]; здесь, однако, эксперимент проводится на одном квадрупольном ядре, а не на двух, как это делалось ранее.

Очевидно, что изменение начальных условий не влияет на величину релаксационных констант, но существенно изменяет величину коэффициентов при экспонентах, приводя в некоторых случаях к быстрому приближению разностей населенностей к равновесному распределению.

2. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальная часть работы была выполнена с помощью установки квадрупольного спинового эхо [6], в которой использовано два импульсных радиочастотных генератора. Это позволяет осуществлять воздействие 90° -импульсами на переход $3/2 \leftrightarrow 5/2$ при одновременном наблюдении сигнала эхо от переходов $1/2 \leftrightarrow 3/2$. Исследовался резонанс ядра Sb^{123} ($J=7/2$) в ряде комплексов на основе $SbCl_3$ и $SbBr_3$ при $77^\circ K$. Результаты эксперимента приведены в таблице 1. Измерение T_2 производилось методом Хана [7], а для измерения T_1 применялся метод стимулированного эхо (см. рис. 7). Стимулированное квадрупольное эхо наблюдалось после третьего 90° -импульса (использовалась последовательность $90^\circ; 180^\circ; 90^\circ$). По спаду амплитуды стимулированного эхо определялось время релаксации T_1 .

Рис. 7. Изменение амплитуды стимулированного эхо в $2SbCl_3(C_6H_5)_2CH_2$ в зависимости от времени задержки третьего импульса (Sb^{123} ($J=7/2$), переход $1/2 \leftrightarrow 3/2$; $f=35,706$ МГц; $T_1=30$ мксек, $T_1^*=1,3$ мксек; $T_2=280$ мксек).



Эксперимент по двойному воздействию (случай 4) был проведен лишь для $SbCl_3$.

Рассмотрим релаксацию в комплексе $2SbCl_3C_6H_5OCH_3$. Из отношения релаксационных констант для Sb^{123} получаем: $W_2/W_1 \sim 2$ при $77^\circ K$. Таким образом, γ здесь значительно меньше, чем это следует из теории Байера [1]. Экспериментальное определение γ представляет значительный интерес для теории квадрупольной релаксации.

Если при $77^\circ K$ $\gamma = W_2/W_1$ в изученных соединениях оказывается больше единицы (~ 2), то при более низких температурах W_2 может стать сравнимым с W_1 или даже меньше. Поэтому при $4^\circ K$ следует ожидать более ярко выраженных эффектов.

Экспериментально изучены нами случаи 1, 2 и 4. Случаи 1 и 2 позволяют получить релаксационные константы для обоих переходов

(см. таблицу 1), а случай 4 демонстрирует возможность управления скоростью установления равновесия путем воздействия на более высокочастотный переход. К сожалению, при $\gamma \sim 2$ трудно было ожидать значительного эффекта. Однако качественное согласие с теорией было получено, а именно — воздействие 90° импульса (одновременно) на переходы $1/2 \leftrightarrow 3/2$ и $3/2 \leftrightarrow 5/2$ приводило к некоторому уменьшению сигнала стимулированного эхо. Этот метод позволяет, кроме того, изменять частоты переходов $3/2 \leftrightarrow 5/2$ без наблюдения сигнала эхо от высокочастотного перехода, которое часто трудно обнаружить.

Таблица 1

Соединение	Переход	Частота Sb^{123} (Мгц) при 77°K	T_2 (мксек)	T_1' (мсек)	T_1'' (мсек)
$2SbCl_3 \cdot C_6H_5OCH_3$	$1/2 \leftrightarrow 3/2$	38,521(1) 40,410(2)	260 260	13,7 8,4	— 0,8
	$3/2 \leftrightarrow 5/2$	72,432(1)	700	6,8	—
$2SbCl_3 \cdot (C_6H_5)_2CH_2$	$1/2 \leftrightarrow 3/2$	35,706	280	30	1,3
	$3/2 \leftrightarrow 5/2$	68,7	1500	4,7	—
$2SbCl_3 \cdot C_{10}H_8$	$1/2 \leftrightarrow 3/2$	36,058	250	18	—
	$3/2 \leftrightarrow 5/2$	72,151	2200	4,6	—
$SbCl_3$	$1/2 \leftrightarrow 3/2$	39,096	340	10,6	—
	$3/2 \leftrightarrow 5/2$	68,6	1600	13,7	—
$SbBr_3$	$1/2 \leftrightarrow 3/2$	31,1	130	3,4	—
	$3/2 \leftrightarrow 5/2$	59,9	700	4,25	—
$2SbBr_3 \cdot C_{10}H_8$	$3/2 \leftrightarrow 5/2$	60,8	700	5,2	—

В целом получено удовлетворительное согласие теории и эксперимента, а именно, показано, что процесс релаксации для каждого перехода описывается суперпозицией нескольких экспонент.

В заключение отметим, что предлагаемый метод измерения и воздействия на скорость установления равновесия может применяться и в электронном парамагнитном резонансе.

Авторы выражают благодарность А. Н. Осипенко и Е. М. Шишкину за помощь при выполнении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Waeger, Z. Phys., **130**, 227 (1951).
2. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1964.
3. T. P. Das, E. L. Hahn, Solid State. Phys. Suppl, **1** (1958).
4. A. Daniel, W. G. Moulton, J. Chem. Phys., **41**, 1833 (1964).
5. E. L. Hahn, V. Herzog, Phys. Rev., **93**, 639 (1954).
6. В. С. Гречишкин, А. Д. Гордеев, ФТТ, **6**, 2528 (1964)
7. M. J. Weber, E. L. Hahn, Phys. Rev., **120**, 365 (1960).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
8 сентября 1965 г.

QUADRUPOLE RELAXATION IN MULTI-LEVEL SYSTEMS

V. S. Grechishkin, A. D. Gordeev, N. E. Einbinder

The quadrupole relaxation has been considered for $J=7/2$ by the method of kinetic equations. The process of relaxation is shown to be described by the sum of three exponents. The ways have been proposed of determining the relation of relaxation probabilities and affecting the rate of popularities distribution change. The theory is compared with the experiment carried out on nuclei Sb^{123} by the method of spin echo.

УДК 621.378.325

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИГАНТСКИХ ИМПУЛЬСОВ

В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман

Показано, что частотный спектр импульса, излучаемого оптическим квантовым генератором в режиме переключения добротности, значительно шире спектра отдельного импульса, излучаемого генератором в обычном (многоимпульсном) режиме. Найдена ширина этого спектра как функция параметров генератора и оценена угловая расходимость светового пучка. Определено время установления колебаний в резонаторе (время задержки импульса) Оценено влияние многомодового характера излучения на форму импульса и его энергетические характеристики.

Одной из важных характеристик оптического квантового генератора (ОКГ) является его спектральный состав. Так, при использовании ОКГ как источника мощных колебаний, например, для умножения частоты или для измерения больших расстояний важно, чтобы ширина частотного спектра не выходила за определенные границы. В этих же (а также в ряде других) случаях предъявляются довольно жесткие требования к угловым характеристикам излучения. Представляет интерес получить теоретические оценки этих характеристик с целью возможной оптимизации параметров генератора. Очевидно, что большая протяженность частотного и углового спектров излучения ОКГ в режиме переключения добротности обусловлена практически одновременным выполнением условий самовозбуждения для большого числа мод. Рассмотрение процессов в ОКГ с учетом большого числа мод в общем случае связано со значительными трудностями [1, 2], обусловленными нелинейностью уравнений. Однако, как показано ниже, спектральные характеристики гигантских импульсов и время задержки излучения импульса от момента выполнения условий самовозбуждения могут быть достаточно точно оценены в линейном приближении. Вместе с тем рассмотрение процесса развития гигантского импульса, когда нелинейность существенна, приближенно сводится к анализу уравнений, близких к уравнениям для одномодового ОКГ, что и позволяет оценить влияние многомодовости на энергию и мощность в излучаемом гигантском импульсе.

1. ЧАСТОТНЫЙ И УГЛОВОЙ СПЕКТР ГИГАНТСКОГО ИМПУЛЬСА. ВРЕМЯ ЗАДЕРЖКИ ИМПУЛЬСА

На характеристики излучения ОКГ, в котором в качестве рабочего вещества используется твердое тело, активированное соответствующими присадками, оказывают существенное влияние флуктуации. Полные статические характеристики переходного процесса удается определить только для простейшей модели [3], в которой учитывается возбуждение лишь одного типа колебаний оптического резонатора. В то же время определенное представление о влиянии флуктуаций на характеристику излучения ОКГ может дать исследование уравнений для средних по ансамблю

значений квадратов поля, в которых автоматически учитываются флуктуации в системе*.

При учете возбуждения многих типов колебаний оптического резонатора эти уравнения можно получить аналогично тому, как это сделано в работе [4] при рассмотрении лишь одного типа колебаний. Считая, что характерное время изменения амплитуды поля много больше поперечного времени релаксации T_2 , а изменение структуры поля собственных типов колебаний резонатора, обусловленное нелинейной частью диэлектрической проницаемости активного вещества, пренебрежимо мало, эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dM_\nu}{dt} - M_\nu \left[\frac{B_0 V_{p\nu}^{-1} V_{p0}}{1 + \delta_\nu^2} \int dV \tilde{N}(\mathbf{r}) |d_0 e_\nu(\mathbf{r})|^2 - T_{p\nu}^{-1} \right] = \\ = \frac{B_0 V_{p\nu}^{-1} V_{p0}}{4(1 + \delta_\nu^2)} \int dV (\tilde{N} + \bar{N}) |d_0 e_\nu(\mathbf{r})|^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} + \frac{\tilde{N} - \tilde{N}_0}{T_1} = - \tilde{N} \sum_\nu M_\nu \frac{2B_0 V_{p\nu}^{-1} V_{p0}}{1 + \delta_\nu^2} |d_0 e_\nu(\mathbf{r})|^2.$$

Здесь \bar{N} — плотность активных ионов, \tilde{N} — разность населенностей рабочих уровней в единице объема, $\tilde{N}_0 < \bar{N}$ — ее равновесное значение, определяемое мощностью подсветки, T_1 — эффективное время жизни возбужденного состояния, по порядку величины равное времени спонтанного излучения $T_{сп}$, $B_0 = (3\pi c^3 T_2 / 2\omega_0^2 T_{сп}) V_{p0}^{-1}$ — коэффициент Эйнштейна для продольного типа колебаний резонатора с частотой, совпадающей с частотой перехода ω_0 , $\delta_\nu = T_2(\omega_0 - \omega_\nu)$, где ω_ν — собственная частота ν -го типа колебаний резонатора, M_ν — число фотонов в этом типе колебаний, $e_\nu(\mathbf{r})$ — соответствующие собственные функции, нормированные так, что $\int_{V_{p\nu}} dV |e_\nu(\mathbf{r})|^2 = V_{p\nu}$, где $V_{p\nu}$ — объем, в котором $e_\nu(\mathbf{r})$ существ-

венно отличен от нуля (например, ограниченный каустикой для данного типа колебаний), d_0 — единичный вектор, характеризующий направление дипольного момента активных ионов (предположено, что он у всех ионов направлен в одну сторону).

Времена затухания колебаний в пустом резонаторе $T_{p\nu}$ в режиме переключения добротности зависят от времени. Для определенности положим, что $T_{p\nu} = T_{p\nu}^0 f(t)$, где $f(t < 0) = f_0 \ll 1$ и $f(\infty) = 1$. Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением резонаторов с плоскими зеркалами, будем считать объемы $V_{p\nu}$ одинаковыми для всех возбуждающихся типов колебаний ($V_{p\nu} = V_{p0} = V_p$) и равными произведению длины резонатора L на площадь поперечного сечения образца активного вещества.

Поскольку в режиме переключения добротности возбуждается, как будет видно из дальнейшего, большое число типов колебаний, правая часть второго уравнения (1) слабо зависит от координат (см. Приложение) и разность населенностей можно считать практически однородной во всем объеме активного вещества. Это позволяет записать уравнения в виде

* В рассматриваемом случае флуктуации в ОКГ связаны, главным образом, со спонтанным излучением. В системе (1) эти флуктуации описываются членом в правой части первого уравнения.

$$\dot{m}_v - G \left[\frac{n}{1 + \delta_v^2} - (1 + \Delta_v) f^{-1}(\tau) \right] m_v = \frac{G\varepsilon}{1 + \delta_v^2} (n + \bar{n}), \quad (2)$$

$$\dot{n} - (n_0 - n) = -n \sum \frac{m_v}{1 + \delta_v^2}.$$

Здесь производные берутся по безразмерной переменной $\tau = tT_1^{-1}$; $G^{-1} = T_1^{-1} T_{p0}^0$, $n = B_0 T_{p0}^0 V \tilde{N}$, где V — объем образца, $m_v = 2B_0 T_1 M_v$, $\Delta_v = [T_{p0}^0 (T_{p0}^0)^{-1} - 1]$, $\varepsilon = B_0 T_1 / 2$.

Ширина генерируемого спектра излучения, как будет показано ниже, в несколько раз меньше ширины линии люминесценции. Поэтому решение уравнения для m_v после начала переключения добротности ($\tau > 0$) можно записать при $\delta_v^2 \ll 1$ в виде

$$m_v = \varepsilon G \int_0^\tau d\tau_1 [n(\tau_1) + \bar{n}] \exp \left\{ G \int_{\tau_1}^\tau [n(\tau_2) (1 - \delta_v^2) - (1 + \Delta_v) \times \right. \\ \left. \times f^{-1}(\tau_2)] d\tau_2 \right\} + m_{v0} \exp \left\{ G \int_0^\tau [n(\xi) (1 - \delta_v^2) - (1 + \Delta_v) f^{-1}(\xi)] d\xi \right\}, \quad (3)$$

где $m_{v0} \simeq \varepsilon (n_0 + \bar{n})^0 [(1 + \Delta_v) f_0^{-1} - n_0 (1 - \delta_v^2)]^{-1}$ — число фотонов до начала переключения добротности.

Из приводимых ниже результатов следует, что значительную часть времени после начала переключения добротности величина n практически не меняется. Интегрирование по этому интервалу и дает основной вклад (нарастание после n много порядков) в выражении (3). Поэтому для оценки структуры излучаемого поля (его частотного и углового спектров) с большой степенью точности можно положить в (3) $n(\tau) = n_0$. Дальнейшее вычисление интеграла (3) требует задания функции $f(\tau)$, описывающей закон изменения добротности резонатора, и конкретизации резонатора, т. е. задания величин δ_v , Δ_v . Очевидно, что наибольшая ширина углового и частотного спектров и минимальное время задержки будут иметь место при мгновенном переключении добротности. Этот, по существу, предельный случай мы рассмотрим более детально.

При мгновенном переключении добротности ($f(\tau < 0) = f_0$; $f(\tau > 0) = 1$) в случае, когда $f_0^{-1} \gg n_0$ (очень малая начальная добротность) вторым слагаемым в выражении (3) при $\tau \geq G^{-1}$, как легко видеть, можно пренебречь, а первое слагаемое при $n(\tau) = n_0$ можно записать в виде

$$m_v = m_0(\tau) \exp \{ - [n_0 \delta_v^2 + \Delta_v] G \tau \}, \\ m_0(\tau) = \varepsilon (n_0 + \bar{n}) G \tau \exp [(n_0 - 1) G \tau], \quad (4)$$

где $m_0(\tau)$ — число фотонов продольного типа колебаний резонатора с частотой, равной частоте перехода активных ионов ω_0 .

Для определения времени задержки τ_3 , при котором находятся спектральные характеристики импульса, подставим (4) в уравнение для n (система (2)) и проинтегрируем последнее. Соотношение для τ_3 с точностью до малых членов записывается в виде*

* Интегрирование по n проводилось от начального значения $n = n_0$ до значения $n - 1 = 0,7(n_0 - 1)$, т. е. до момента, когда начинается быстрое изменение населенностей уровней. Как видно из (5), изменение величины конечного значения n мало (логарифмически) сказывается на времени τ_3 и, следовательно, довольно произвольный выбор верхнего предела интегрирования существенно не влияет на последующие результаты.

$$1 = \frac{\varepsilon(n_0 + \bar{n})}{0,4(n_0 - 1)} \tau_3 K(G \tau_3) \exp [(n_0 - 1) G \tau_3], \quad (5)$$

где

$$K(G \tau_3) = m_0^{-1} \sum_{\nu} m_{\nu} = \sum_{\nu} \exp [-(n_0 \delta_{\nu}^2 + \Delta_{\nu}) G \tau_3].$$

Величина $K(G \tau_3)$ имеет смысл числа возбуждающихся мод. При конкретных ее вычислениях необходимо, как уже отмечалось, знать величины δ_{ν} и Δ_{ν} , как функции номера ν , т. е. знать свойства резонатора. Будем считать, что резонатор образован двумя плоскими квадратными зеркалами со стороной a , находящимися на расстоянии L друг от друга. Типы колебаний в таком резонаторе характеризуются числом l и числами m и n , определяющими структуру поля в поперечном сечении. Используя результаты работы [5], легко показать, что

$$\delta_{eml}^2 \simeq \left(T_2 \frac{\pi c}{L} \right)^2 \left[\Delta l + \frac{\lambda_0 L}{2a^2} (m^2 + n^2) \right]^2, \quad (6)$$

где

$$\Delta l = l_0 - l; \quad l_0 \simeq \omega_0 L / \pi c = 2L / \lambda_0.$$

Добротность, связанную с конечным значением $(1-R)$ (R — средний коэффициент отражения зеркал по мощности), можно считать равной $Q_R = k_0 L (1-R)^{-1}$. Добротность же, связанная с дифракционными потерями, определяется, согласно результатам работы [5], выражением

$$Q_{mn}^{-1} \simeq \frac{\pi^2}{2} M^{-1} (a k_0)^{-2} (m^2 + n^2), \quad M = 2 \sqrt{a^2 k_0 / L}.$$

Следовательно,

$$\Delta_{mn} = Q_R Q_{mn}^{-1} = \pi^2 \frac{k_0 L}{1-R} M^{-1} \frac{m^2 + n^2}{2a^2 k_0^2}. \quad (7)$$

Учитывая, что из-за увеличения дифракционных потерь типы колебаний с большими m и n не дают существенного вклада в величину $K(G \tau)$, можно считать, что

$$\delta_{eml}^2 \simeq \left(T_2 \frac{\pi c}{L} \right)^2 \Delta l^2. \quad (8)$$

Тогда, заменяя суммирование интегрированием, получим, что

$$K(G \tau_3) = K_0 (G \tau_3)^{-3/2}, \quad (9)$$

где

$$K_0 = (2 \sqrt{\pi n_0})^{-1} \left(T_2 \frac{\pi c}{L} \right)^{-1} \frac{a(1-R)}{L} (M k_0 a).$$

Как показывают приведенные ниже оценки, величина $G \tau_3 = t_3 / T_{p0}^2$ порядка нескольких единиц и, следовательно, ее достаточно точное значение можно найти из (5) методом возмущений, положив вначале $K(G \tau_3) = K_0$:

$$G \tau_3 = \frac{1}{n_0 - 1} \ln \left\{ A \left(\frac{\ln A}{n_0 - 1} \right)^{1/2} \right\}, \quad (10)$$

где

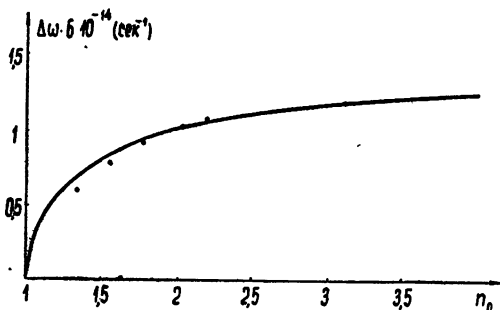
$$A = \frac{0,4(n_0 - 1)}{\varepsilon(n_0 + \bar{n})} G K_0^{-1}.$$

Таким образом, в ОКГ, имеющих резонаторы с плоскими зеркалами, распределение интенсивности излучения по типам колебаний в гигантской импульсе (даже при общей интенсивности, близкой к максимальной) определяется выражением (4), значения параметров δ_v , Δ_v и $(G\tau_3)$ в котором находятся из соотношений (7)–(10). Ширину частотного спектра по уровню e^{-1} можно, как следует из (4) и (8), найти по формуле

$$\Delta\omega T_2 = \Delta\omega/\Delta\omega_n = 2 \left[\frac{n_0}{n_0-1} \ln \left(A \left(\frac{\ln A}{n_0-1} \right)^{1/2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (11)$$

Из (11) ясно, что относительная ширина частотного спектра гигантских импульсов определяется главным образом величиной превышения разностью населенностей ее порогового значения n_0 . Изменение других параметров сказывается мало, поскольку оно приводит лишь к некоторому изменению большой величины, стоящей под знаком логарифма. Величина $\Delta\omega$ как функция n_0 приведена в относительных единицах на рис. 1.

Рис. 1. $\Delta\omega$ как функция n_0 . Сплошная кривая—результаты расчета, точки — экспериментальные значения, полученные с ОКГ на Nd-стекле ($\Delta\omega_n^{-1} = 2 \cdot 10^{-14}$ сек; длина резонатора $L=55$ см; коэффициент отражения неподвижного зеркала $R=0,3$). Добротность резонатора изменялась путем вращения отражающей призмы со скоростью $1,5 \cdot 10^4$ об·мин⁻¹.



Из графика видно, что $\Delta\omega$ быстро нарастает при увеличении n_0 от 1 до 3, тогда как изменение n_0 от 4 до 10 приводит к увеличению $\Delta\omega$ всего лишь на 10%. Такой характер изменения согласуется с результатами эксперимента, полученными с ОКГ на Nd-стекле (стержень длиной 12 см и диаметром 1 см) и приведенными на том же рисунке*.

Излучение неаксиального типа колебаний с индексами m и n происходит в основном в направлениях, образующих углы $\theta_x \simeq \pm \pi m/ak$, $\theta_y \simeq \pm \pi n/ak$ с плоскостями xz и yz соответственно (ось z направлена вдоль оси резонатора). Поэтому из (4) и (7) следует, что излучение будет сосредоточено в конусе с углом раствора

$$\Delta\theta \simeq 4 \sqrt{(G\tau_3)^{-1} (1-R) \frac{a}{L} (2k_0L)^{-1/2}}. \quad (12)$$

Нетрудно показать, что с ростом n_0 , вызванным увеличением коэффициентов отражения зеркал R , величина $\Delta\theta$ изменяется по тому же закону, что и $\Delta\omega$ (рис. 1). Вместе с тем при изменении n_0 за счет изменения энергии накачки зависимость $\Delta\theta(n_0)$ (рис. 2) несколько другая. Кроме того, ширина углового спектра, как видно из (12), существенно зависит от геометрии резонатора.

Увеличение $\Delta\theta$ при уменьшении длины резонатора и возрастании энергии накачки, которое следует из (12), хорошо согласуется с резуль-

* Рассчитанные значения $\Delta\omega$ на рис. 1 и $\Delta\theta$ на рис. 2 нормированы таким образом, чтобы результаты расчета и эксперимента совпадали в одной точке. Сравнение абсолютных значений $\Delta\omega$ и $\Delta\theta$, получающихся из расчета и эксперимента, проведено ниже

татами экспериментального исследования зависимости $\Delta\theta(W, L)$ для ОКГ на неодимовом стекле, добротность резонатора которого менялась за счет вращения призмы (рис. 2)*.

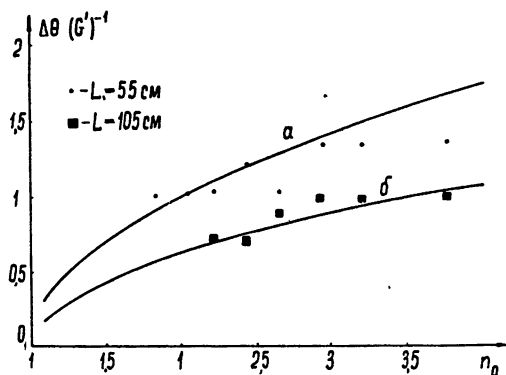


Рис. 2. $\Delta\theta$ как функция n_0 . Кривые а и б—результаты расчета при $L=55$ и 105 см соответственно; точки—экспериментальные значения, полученные при этих длинах резонатора ОКГ на Nd-стекле. Добротность резонатора изменялась путем вращения отражающей призмы со скоростью $1,5 \cdot 10^4$ об. мин⁻¹. Коэффициент отражения неподвижного зеркала $R = 0,3$ ($G' = 6'$).

В заключение этого раздела приведем численные значения рассмотренных выше величин (t_3 ; K ; $\Delta\omega$; $\Delta\theta$); для лазеров на рубине и Nd-стекле. Примем, что резонатор ОКГ имеет размеры $L = 50$ см, $a = 0,5$ (следовательно, $V_p = 12,5$ см³), а коэффициенты отражения (по интенсивности поля) его зеркал равны $R_1 = 1$ и $R_2 = 0,3$, т. е. $R = 0,3$. При этих значениях параметров время релаксации поля в нем $T_{p0}^0 = 3 \cdot 10^{-9}$ сек. Параметры розового рубина при $T = 300^\circ\text{K}$ можно взять следующие [6]. $T_2 = (\Delta\omega_n)^{-1} \approx 7 \cdot 10^{-13}$ сек, $T_{cn} = 5 \cdot 10^{-3}$ сек, $\bar{N} = 2 \cdot 10^{-19}$ см⁻³, $\lambda_0 = 7 \cdot 10^{-5}$ см; параметры Nd-стекла: $T_2 \approx (\Delta\omega_n)^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-14}$ сек, $T_{cn} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ сек, $\bar{N} = 5 \cdot 10^{20}$ см⁻³, $\lambda_0 = 1,06 \cdot 10^{-4}$ см. Предположим, кроме того, что в начальный момент разность населенностей уровней в том и другом случае превышает пороговое значение в 4 раза, т. е. $n_0 = 4$.

Подставляя эти величины в вышеприведенные формулы, найдем, что время задержки импульса, угловой спектр и относительная ширина частотного спектра примерно одинаковы для обоих веществ и соответственно равны

$$G\tau_s \approx 8; \quad t_3 \approx 24 \text{ нсек}; \quad \Delta\theta = 5'; \quad \Delta\omega/\Delta\omega_n = 0,3.$$

Как видно из данных, приведенных на рис. 1, 2, вычисленные значения $\Delta\theta$ и $\Delta\omega$ мало отличаются от измеренных для ОКГ на неодимовом стекле.

Число генерируемых типов колебаний пропорционально ширине линии люминесценции и различно для рубинового ОКГ и лазера на Nd-стекле: для рубина $K(G\tau_s) \approx 10^5$, для неодима $K(G\tau_s) \approx 2 \cdot 10^6$.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПУЛЬСА

Для определения формы импульса излучения, его максимальной интенсивности и общей энергии, очевидно, недостаточно исследования начальной стадий нарастания фотонной лавины после переключения добротности. Исследование следующей стадии процесса можно существенно упростить, заметив, что, согласно результатам предыдущего раз-

* Измерялась угловая расходимость $\Delta\theta$ излучения в плоскости, проходящей через ось вращения призмы, которая практически не зависела от скорости вращения при ее изменении от 10^4 до $5 \cdot 10^4$ об. мин⁻¹.

дела, интенсивно возбуждаются лишь колебания, для которых $\delta_s^2 \ll 1$ и $\Delta_s \ll 1$. Это позволяет считать, что изменение суммарного числа фотонов в резонаторе $m = m_0(\tau) \bar{K}(\tau) = \bar{m} \frac{\bar{K}(\tau)}{K(\tau_s)}$ при $\tau > \tau_s$ приближенно определяется уравнениями

$$\dot{n} = -n\bar{m} \frac{\bar{K}(\tau)}{K(\tau_s)}; \quad \dot{\bar{m}} = G[n - f^{-1}(\tau)] \bar{m}, \quad (13)$$

где $\bar{K}(\tau)$ — число генерируемых мод как функции времени. Здесь учтено, что при достаточно больших значениях \bar{m} можно пренебречь величиной $(n_0 - n)$ в первом уравнении и правой частью второго уравнения, связанной с шумами в системе. При $\tau = \tau_s$ решение уравнения (13) должно удовлетворять начальным условиям $n = n(\tau_s)$, $\bar{m} = m_0(\tau_s)$. Так как в процессе нарастания поля в резонаторе величина n уменьшается, $\bar{K}(\tau) K^{-1}(\tau_s)$ изменяется в пределах

$$1 \geq \frac{\bar{K}(\tau)}{K(\tau_s)} \geq \frac{K(\tau)}{K(\tau_s)},$$

где функция

$$\frac{K(\tau)}{K(\tau_s)} = \left(\frac{\tau}{\tau_s} \right)^{-3/2}$$

описывает изменение числа генерируемых мод при неизменной разности населенностей уровней. Для оценки влияния многомодовости излучения на форму импульса и его энергетические характеристики уравнения (13) были проинтегрированы на электронно-вычислительной машине для двух случаев:

а) число генерируемых мод не меняется (аналог одномодовой модели), т. е.

$$\frac{\bar{K}(\tau)}{K(\tau_s)} = 1;$$

б) число мод изменяется так же, как при $n \equiv n_0$, т. е.

$$\frac{K(\tau)}{K(\tau_s)} = \left(\frac{\tau}{\tau_s} \right)^{-3/2}.$$

Результаты решения уравнений при $n_0 = 1,5; 2,0; 3,5; 5; 10$ приведены на рис. 3. Из графиков следует, что импульсы, рассчитанные в приближении неизменного количества мод (сплошные кривые), мало отличаются от импульсов, рассчитанных с учетом завышенной поправки на изменение числа мод. Так, в случае учета завышенной поправки, для всех значений величина максимума импульса примерно на 10% меньше, чем в одномодовом случае; крутизна передних фотонов мало зависит от числа генерируемых мод, а длительность импульса (при учете изменения числа мод) несколько больше при $n < 3,5$ и меньше при $n_0 > 3,5$. При более точном учете многомодовости, очевидно, получим еще меньшее различие импульсов в многомодовом и одномодовом ОКГ.

На рис. 4 приведены графики длительности переднего фронта импульса (2) и длительности его спада (1) как функции n_0 . Из графиков видно, что при $n_0 \geq 4$ параметр n_0 сказывается главным образом на длительности переднего фронта. Затухание же поля (спад импульса) происходит со временем резонатора. Уменьшение n_0 от значения, равного 4,

приводит к увеличению длительности импульса (в единицах t/T_p) как за счет уменьшения скорости нарастания импульса, так и за счет уменьшения скорости затухания поля*.

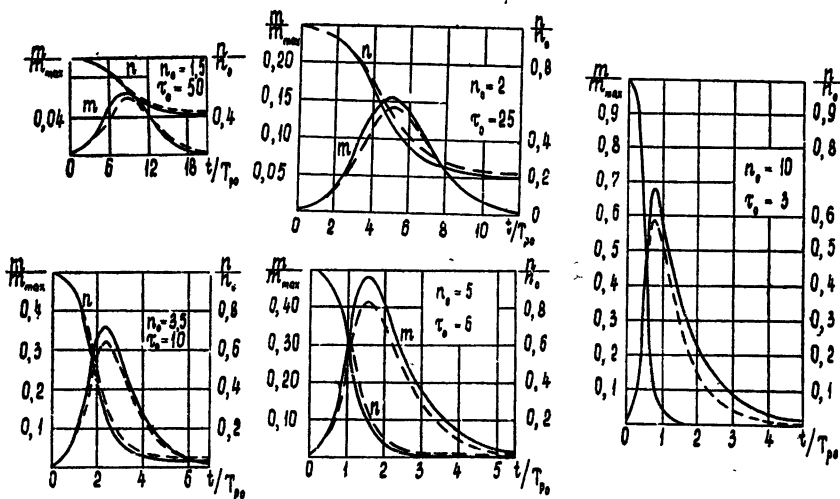


Рис. 3.

Несколько замечаний относительно мощности и энергии в импульсе. Известно, что при мгновенном переключении добротности одномодового резонатора максимальная энергия в резонаторе как функция начального превышения ее населенностью порогового значения представляется в виде

$$m_{\max} = G(n_0 - 1 - \ln n_0). \quad (14)$$

Из (14) легко получить, что полная мощность потерь в максимуме импульса как функция времени релаксации поля в резонаторе T_p (при неизменной начальной разности населенностей уровней) записывается в виде

$$P_{\max} = A_1 \frac{n_0 - 1 - \ln n_0}{n_0^2}, \quad (15)$$

где A_1 — не зависящий от T_{p0}^0 коэффициент, а величина n_0 прямо пропорциональна T_{p0} и в рассматриваемом случае является функцией только этой величины. Зависимость (15) имеет максимум при $n_0 = n_0^{(1)}$, определяемом из уравнения

$$n_0^{(1)} - 1 = \ln n_0^{(1)}, \quad (16)$$

т. е. при $n_0 \approx 3,5$; функция (15) изображена на рис. 5.

Учет поправки на многомодовость (см. сплошную кривую рис. 5)

* Подробное исследование формы импульса, получающегося при мгновенном переключении добротности одномодового резонатора ОКГ, содержится в работе [7]; исследование энергетических характеристик импульса, получающегося в той же модели ОКГ, приведено в работе [8].

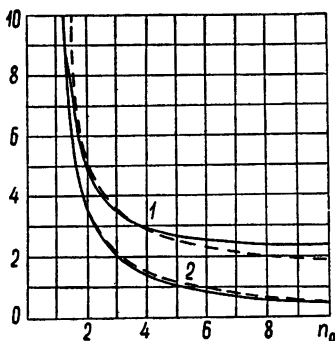


Рис. 4. Длительность переднего фронта и спада импульса (в единицах t/T_{p0}) в зависимости от n_0 .

приводит к некоторому смещению максимума в область меньших n_0 ; однако это смещение не очень значительно. Таким образом, при прочих равных условиях максимальная мощность потерь будет в том случае, когда T_p выбрано так, что начальная разность населенностей превышает пороговую примерно в 3 раза. Как видно из рис. 5, это значение n_0 является не очень критичным.

Так как всегда небольшая часть потерь в резонаторе не связана с полезным излучением (поглощение в резонаторе, рассеяние), то максимальная полезная мощность излучения будет, при несколько меньших значениях n_0 (меньше T_p) из-за того, что с ростом T_p (из-за уменьшения полезных потерь) все большая доля мощности будет уходить на потери в резонаторе. Оптимальное значение n_0 , полученное методом возмущений, в этом случае равно

$$n_{\text{опт}} = n_0^{(1)} \left(1 - \frac{\ln n_0^{(1)}}{n_0^{(1)} - 2} \frac{T_{p0}^0}{T_p^0 + T_n} \right), \quad (17)$$

где $n_0^{(1)}$ — максимальное значение n_0 , найденное из рис. 5, T_p^0 — соответствующее этому случаю значение времени релаксации поля в резонаторе, а T_n — эффективное (с учетом многомодовости) время релаксации поля в резонаторе, обусловленное лишь вредными потерями.

Величину энергии W , излучаемой в импульсе, в зависимости от n_0 можно найти интегрированием функций $m(t/T_p)$, приведенных на рис. 3. График функции W/W_{max} без учета изменения числа мод показан сплошной линией на рис. 6. Из него видно, что при $n_0 \geq 4$ энергия в импульсе остается практически постоянной. Наличие паразитных потерь приведет, очевидно, к тому, что, начиная с некоторых значений n_0 , энергия в импульсе будет с ростом n_0 уменьшаться. С этим, например, связано уменьшение при $n_0 > 4$ энергии в импульсе, имеющее место при учете поправки на уменьшение числа мод (пунктирная кривая на рис. 6).

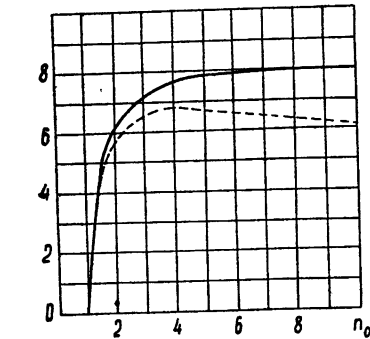


Рис. 6. Зависимость энергии в импульсе (в относительных единицах) от n_0 .

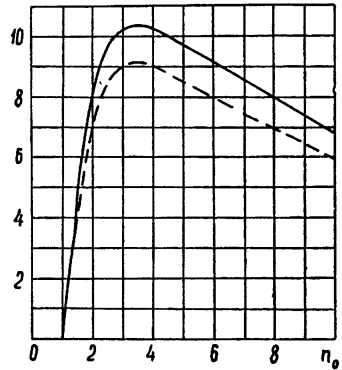


Рис. 5. Зависимость максимальной мощности (в относительных единицах) от n_0 .

Таким образом, значение T_p , соответствующее $n_0 \approx 3 \div 4$, с точки зрения энергетических характеристик импульса является оптимальным, так как в этом случае мощность в импульсе максимальна, а энергия близка к предельной.

Так как в реальных устройствах время переключения добротности резонатора отлично от нуля, полученные выше результаты являются предельными. Именно, при мгновенном переключении время задержки $\tau_3 = \tau_{3 \text{ min}}$ является минимальным, а ширина частотного спектра и угловая расходимость — максимальными. Рассмотрение, проведенное в предположении, что $f^{-1}(\tau)$ — кусочно линейная функция:

$$f^{-1}(\tau) = \begin{cases} 1 + n_0(1 - \tau/\tau_n) & (\tau \leq \tau_n) \\ 1 & (\tau \geq \tau_n) \end{cases},$$

показало, что при

$$\tau_{\text{п}} > \tau_{\text{лк}} \approx 2\tau_{\text{з min}}$$

излучение импульса происходит на участке с меняющейся добротностью. Время задержки импульса при этом равно

$$\tau_{\text{зл}} = (\tau_{\text{лк}} \tau_{\text{п}})^{1/2}.$$

Если $\tau_{\text{п}} < \tau_{\text{лк}}$, то излучение импульса происходит при максимальной добротности резонатора, а время задержки лежит в интервале

$$\tau_{\text{з min}} < \tau_{\text{зл}} < \tau_{\text{лк}}.$$

Следовательно, скорость переключения, близкая к оптимальной, имеет место при

$$\tau_{\text{п}} \approx \tau_{\text{лк}} \approx 2\tau_{\text{з min}},$$

так как в этом случае происходит излучение максимально возможной энергии, а угловой и частотный спектры уже, чем при мгновенном переключении. Форма импульса и мощность излучения при этом те же, что и при мгновенном переключении. Характеристики импульсов, получающихся при немгновенном переключении добротности одномодового резонатора, приведены в работе [9].

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБ УСЛОВИЯХ НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ КООРДИНАТ РАЗНОСТИ НАСЕЛЕННОСТЕЙ УРОВНЕЙ В ОКГ

Разность населенностей уровней в ОКГ, т. е. величина \tilde{N} , описываемая вторым уравнением системы (1), не будет зависеть от координат в том случае, когда не зависят от координат: 1) начальная разность населенностей; 2) интенсивность возбуждения вещества; 3) интенсивность индуцированных переходов, т. е. коэффициент, обозначаемый дальше через J , при \tilde{N} в правой части второго уравнения системы (1).

Первые два условия будем предполагать выполненными.

Покажем, что при возбуждении достаточно большого числа мод величина $J = B_0 \sum M_{\nu} e_{\nu}^2(\mathbf{r}) (1 - \delta_{\nu}^2)$ не зависит от координат в большей части резонатора с плоскими полностью отражающими квадратными зеркалами.

Функцию $(d_0 e_{\nu}(\mathbf{r})) = e_{\nu}(\mathbf{r})$ для резонатора длиной L и стороной квадрата a приближенно можно записать в виде

$$e_{\nu}(\mathbf{r}) = e_{l, m, n}(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi l}{L} z\right).$$

Для проводимых здесь оценок функцию M_{ν} можно аппроксимировать выражением

$$M_{\nu}(t) = M_{l, m, n}(t) = \begin{cases} M_0(t) & \text{при } l_0 - \frac{\Delta l}{2} \leq l \leq l_0 + \frac{\Delta l}{2}; 0 < m \leq m_0; 0 < n \leq n_0 \\ 0 & \text{вне указанной выше области} \end{cases}$$

а также пренебречь величиной δ_{ν}^2 по сравнению с единицей. Тогда

$$J(x, y, z, t) = 2B_0 M_0(t) \sum_{l_0 - \frac{\Delta l}{2}}^{l_0 + \frac{\Delta l}{2}} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=0}^{n_0} \sin^2 \left(\frac{\pi m x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi n y}{a} \right) \times \\ \times \sin^2 \left(\frac{\pi l z}{L} \right) = 2B_0 M_0(t) f(x, m_0) f(y, n_0) F(z, l_0, \Delta l),$$

где

$$f(\xi, p) = \frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{\sin \left(\frac{\pi p}{a} \xi \right) \cos \left[(p+1) \frac{\pi}{a} \xi \right]}{p \sin \left(\frac{\pi}{a} \xi \right)} \right\}, \\ F(z, l_0, \Delta l) = \frac{\Delta l}{2} \left\{ 1 - \frac{\cos^2 \left[\frac{\pi}{L} (l_0) z \right] \sin \left[\frac{\pi}{L} (\Delta l + 1) z \right]}{\Delta l \sin \left(\frac{\pi}{L} z \right)} \right\}.$$

Из приведенных выражений видно, что функции f и F отличаются от постоянных величин в окрестности центра резонатора на величину порядка m_0^{-1} , n_0^{-1} и Δl^{-1} в сравнении с единицей. Так как величины m_0 , n_0 и Δl в рассматриваемом в работе случае достаточно велики ($m_0 \approx n_0 \approx 30$ и $\Delta l \approx 300$ для рубина, $\Delta l \approx 6 \cdot 10^3$ для Nd-стекла), то, следовательно, при помещении рабочего образца в центральной части резонатора величину J можно считать независимой от координат.

Оценим величину этой области. Примем допустимым отличие от единицы 10^{-1} . Тогда границы области определяются условиями

$$\pi m_0 \frac{\Delta x}{a} = 10; \quad \pi n_0 \frac{\Delta y}{a} = 10; \quad \Delta l \frac{\Delta z}{L} = 10.$$

Для приведенных выше значений m_0 , n_0 и Δl получим

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{\Delta y}{a} = 10^{-1}; \quad \frac{\Delta z}{L} = \begin{cases} 10^{-2} & \text{для рубина} \\ 5 \cdot 10^{-4} & \text{для Nd-стекла} \end{cases},$$

т. е. расстояния от границ соответственно равны

$$\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ мм}, \quad \Delta z = \begin{cases} 5 \text{ мм} & \text{для рубина} \\ 0,25 \text{ мм} & \text{для Nd-стекла} \end{cases}.$$

Следовательно, часть объема резонатора, в котором величина J меняется слабо, в рассматриваемом выше случае составляет 0,65 от общего объема резонатора. С увеличением поперечных размеров резонатора относительная величина этой области растет. Кроме того, следует заметить, что при оценках (при написании $e_v(\mathbf{r})$) предполагалось, что боковые стенки резонатора металлизированы и зеркала полностью отражающие. Отказ от этих предположений, не имеющих место в реальных системах, также приведет к увеличению однородной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 48, 1087 (1965).
2. Н. Г. Басов, В. И. Морозов, А. Н. Ораевский, ДАН СССР, 162, 781 (1965).
3. А. В. Гапонов, В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 70 (1965).

4. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 207 (1963).
5. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
6. D. E. McCumber, M. D. Sturge, J. Appl. Phys., 34, 1682 (1963).
7. W. G. Wagner, B. A. Lendyel, J. Appl. Phys., 34, 2040 (1963).
8. М. Менат, J. Appl. Phys., 36, 73 (1965).
9. В. И. Беспалов, Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 525 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 августа 1965 г.

SPECTRAL AND ENERGY CHARACTERISTICS OF GIANT PULSES

V. I. Bespalov, G. I. Freidman

The frequency spectrum of the impulse radiated by laser in *Q*-switching regime is shown to be considerably wider than that of a single impulse radiated by laser in an ordinary (multi-pulsed) regime. This spectrum width has been found out as a function of laser parameters and the angular divergence of the light beam has been estimated. The setting time of oscillations in resonator (impulse delay time) has been determined. The influence has been estimated of the multi-mode character of radiation upon the impulse form and its energy characteristics.

УДК 621.378.325

ОПТИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ ГЕНЕРАТОР В РЕЖИМЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ДОБРОТНОСТИ РЕЗОНАТОРА

В. И. Беспалов, Ю. К. Богатырев

Приводятся результаты численного решения задачи об излучении оптического квантового генератора на твердом теле, работающего в режиме переключения добротности резонатора. Рассмотрены модели оптического квантового генератора с поляризационным затвором (типа ячейки Покельса) и с вращающимся зеркалом. Выяснено влияние конечной скорости переключения, расстройки частоты резонатора от средней частоты молекулярного перехода, конечности времен релаксации, величины коэффициентов пропускания зеркала резонатора и некоторых других факторов на основные параметры импульса излучения: форму импульса, его длительность, мощность и т. д.

Аналитическое исследование характеристик гигантских импульсов, излучаемых оптическим квантовым генератором (ОКГ) в режиме переключения добротности, встречается со значительными трудностями. По этому подробно исследована лишь простейшая модель ОКГ, описываемая уравнениями энергетического баланса. Так, в работах [1-6] рассмотрено влияние параметров ОКГ на форму импульса и величину максимальной мощности, а в [7], кроме того, найдены спектральные характеристики излучения.

Однако из-за ряда упрощающих предположений проведенные в отмеченных работах исследования недостаточно полны. Ряд вопросов, например, влияние расстройки частоты молекулярного перехода относительно собственной частоты резонатора, влияние соотношений времен релаксации и некоторых других факторов на характеристики импульсов излучения, остались невыясненными. В связи с этим было выполнено численное решение рассматриваемой задачи в более общей постановке, которое позволило, во-первых, выяснить границы применимости полученных ранее приближенных решений, во-вторых, дополнить их новой информацией о тех характеристиках процесса, которые не поддаются аналитическому исследованию и не были рассмотрены ранее численными методами. Результаты решения, проведенного на электронной вычислительной машине, обсуждаются в настоящей работе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система дифференциальных уравнений, описывающая процессы, происходящие в трехуровневом ОКГ, в предположении, что рабочее вещество сосредоточено в однородной части поля одномодового резонатора, в безразмерных переменных имеет вид*

$$\frac{dn}{d\tau} = \frac{u}{N} \frac{n - n^0}{\mu_1}; \quad \frac{dm}{d\tau} = -u - 2F(\tau)m;$$

* Система (1) при $\delta = 0$ приведена в [8]. Обобщение на случай $\delta \neq 0$ не связано с принципиальными трудностями и здесь опущено. В (1) пренебрежено флуктуациями, связанными с тепловыми шумами. Другие флуктуации (в частности, спонтанное излучение) описываются в (1) членом $q/2$ в последнем уравнении и членом $1/2$ в выражении, обозначенном через w .

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= -2n\mu - \frac{2\omega}{\mu_2}; & \frac{dv}{d\tau} &= -\delta \frac{u}{\mu_2} - \left\{ F(\tau) + \frac{1}{\mu_2} \right\} v; \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{\delta}{\mu_2} u - 2qnm - q\omega - q \frac{1+2n}{2} - \left\{ F(\tau) + \frac{1}{\mu_2} \right\} u, \end{aligned} \quad (1)$$

где $n = (N_2 - N_1)/2N$ — относительная разность населенностей рабочих (первого и второго) уровней; N — полное число активных молекул (предполагается, что $N_3 \equiv 0$);

$$\omega = \frac{R^2}{N} - \frac{1}{2}, \quad R^2 = R_+ R_-, \quad R_{\pm} = R_1 \pm iR_2,$$

R_1 и R_2 — поперечные компоненты энергетического спина, определяющие осциллирующую часть дипольного момента*; $m = a^+ a^- = M$ — среднее число фотонов в резонаторе;

$$u = ia(\overline{R_+ a^-} - \overline{R_- a^+})/2\gamma_0, \quad v = ia(\overline{R_+ a^-} + \overline{R_- a^+})/2\gamma_0,$$

$$n^0 = -\frac{1}{2} \frac{\exp(\hbar\omega_0/kT_n) - 1}{\exp(\hbar\omega_0/kT_n) + 1} \text{ — равновесное (в отсутствие поля) значение}$$

n , характеризующее интенсивность возбуждения вещества**, $\tau = \gamma_0 t$ — безразмерное время, $\gamma_0 = c/2L_p$, c — скорость света, L_p — длина резонатора; $\delta = (\omega_p - \omega_0)T_2$ — разность частот резонатора ω_p и молекулярного перехода ω_0 , нормированная на время релаксации T_2 осциллирующей части дипольного момента (поперечное время релаксации); $\mu_1 = \gamma_0 T_{\text{эфф}}$, $T_{\text{эфф}} = T_1(1 - 2n^0)/2$, T_1 — время релаксации вещества; $\mu_2 = \gamma_0 T_2$; $F(\tau) = \omega_p/2\gamma_0 Q(\tau)$, $Q(\tau)$ — добротность резонатора; $q = \alpha^2 N/2\gamma_0^2$, $\alpha^2 = 4\pi\omega_0 d^2 \xi^2/\hbar V_p$ — постоянная, характеризующая взаимодействие вещества с полем, d — абсолютная величина недиагонального матричного элемента дипольного момента молекулы активного вещества, d_0 — единичный вектор, определяющий его направление, $\xi^2 = \int_{V_p} \{A(\mathbf{r}) d_0\}^2 dV / \int_{V_p} \{A(\mathbf{r})\}^2 dV$, $A(\mathbf{r})$ — собственная функция рассматриваемого типа колебаний, V_p — объем резонатора.

Будем предполагать, что в начальный момент времени $\tau = 0$ система находится в равновесном состоянии, соответствующем начальному значению добротности резонатора, т. е. при $\tau = 0$

$$dn/d\tau = dm/d\tau = d\omega/d\tau = dv/d\tau = du/d\tau = 0, \quad F(0) = F_0. \quad (2)$$

Система (2) определяет начальные значения переменных n , m , ω , v , u . Физический смысл будут иметь только те решения системы (1), для которых начальные значения функции $u = u_0$ отрицательны, так как только в этом случае начальное число фотонов $m(0) = m_0 > 0$.

Решение исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) проводилось для ряда вариантов, набор постоянных величин μ_1 , μ_2 , q и т. д. в которых охватывал следующий диапазон изменения параметров рабочего вещества и резонатора: $T_1 = 5 \cdot 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-4}$ сек; $T_2 = 2 \cdot 10^{-11} \div 2 \cdot 10^{-9}$ сек; $N = 10^{19} \div 5 \cdot 10^{20}$; $L_p = 30$ см. Комбинации значений безразмерных параметров для каждого расчетного варианта

* Подробнее об энергетическом спине и обозначениях в (1) см. [9].

** В состоянии с инвертированными уровнями $n^0 > 0$, так как эффективная температура вещества $T_n < 0$.

(или группы вариантов) указаны ниже*. Вычисления проведены для двух законов изменения добротности резонатора (а следовательно, и функций $F(\tau)$), каждый из которых соответствовал одной из рассмотренных ниже моделей модулятора добротности. Программирование задачи выполнено С. В. Морозовым, Л. А. Пискуновой и Р. Э. Эрм. Решение проводилось методом Рунге—Кутты с автоматическим выбором шага. Погрешность вычислений составляла не более 10^{-2} .

2. МОДУЛЯТОР С КРИСТАЛЛОМ КДР

Предположим, что модуляция добротности резонатора ОКГ, имеющего плоские зеркала, осуществляется с помощью системы, состоящей из элемента, изменяющего поляризацию поля (кристалла КДР) и поляроида. Выражение для добротности резонатора (без учета влияния модулирующего устройства) приближенно записывается в виде

$$Q = \omega_p / 2\gamma_0 |\ln(r_1 r_2)|, \quad (3)$$

где r_1 и r_2 — коэффициенты отражения зеркал резонатора (по напряженности электромагнитного поля). Система, состоящая из описанного выше модулирующего устройства в совокупности с глухим ($r_1 \simeq 1$) зеркалом эквивалента, как нетрудно показать, зеркалу с коэффициентом отражения

$$r_2(\tau) = r_0 + (1 - r_0) \cos \{\pi [V(\tau) - 1] / 2\}, \quad (4)$$

где r_0 — величина, характеризующая неидеальность затвора (модулятора) и равная минимальному значению коэффициента отражения эквивалентного зеркала резонатора, а $[V(\tau) - 1]$ — безразмерное напряжение, приложенное к кристаллу КДР.

Таким образом, выражение для добротности резонатора ОКГ с учетом модулирующего устройства запишется в виде

$$Q(\tau) = \omega_p / 2\gamma_0 F(\tau), \quad F(\tau) = |\ln[r_1 r_2(\tau)]|. \quad (5)$$

Переключающее напряжение $V(\tau)$ при расчетах задавалось в виде $V(\tau) = 1 - \exp(-\tau/\tau_0)$, где постоянная τ_0 характеризует скорость изменения напряжения на его фронте и связана с безразмерной длительностью фронта $\tau_{фр} = \gamma_0 t_{фр}$, измеренной между уровнями $0,1 \div 0,9$ от амплитудного значения, соотношением $\tau_0 \simeq 0,46\tau_{фр}$.

* Параметры μ_1 , μ_2 , δ и т. д. задавались таким образом, чтобы в начальный момент времени условия самовозбуждения ОКГ не были выполнены. Приближенно это соответствует удовлетворению неравенства

$$\frac{F_0}{\mu_2 q} \{1 + [\delta / (1 + \mu_2 F_0)]^2\} - n^0 > 0.$$

Последнее следует из условия неустойчивости состояния равновесия системы уравнений, получающихся из (1) в результате пренебрежения в них членами, связанными с флуктуационными процессами (см. сноску на стр. 2). В дальнейшем благодаря изменению функции $F(\tau)$ условия самовозбуждения выполняются в некоторый момент времени $\tau = \tau_{кр}$. Очевидно, что последнее будет иметь место лишь в случае выполнения неравенства

$$\frac{F_{\min}}{\mu_2 q} \{1 + [\delta / (1 + \mu_2 F_{\min})]^2\} - n^0 < 0,$$

где F_{\min} — минимальное значение функции $F(\tau)$, соответствующее максимальному значению добротности резонатора $Q(\tau) = Q(\tau)_{\max}$. Решение уравнений (1) может быть найдено и в том случае, когда условие самовозбуждения при $\tau = 0$ выполнено; однако при этом начальному состоянию системы будет соответствовать состояние стационарной генерации.

Результаты решения системы уравнений (1) с учетом (5) приведены ниже.

а) Влияние времени переключения добротности резонатора на характеристики гигантского импульса. Время переключения добротности резонатора ОКГ зависит не только от параметра τ_0 характеризующего скорость изменения модулирующего напряжения, но и от величины коэффициентов отражения зеркал r_1 и r_2 . Поэтому для выяснения влияния скорости нарастания управляющего напряжения (изменения величины τ_0) на характеристики импульса излучения значения параметров r_1 и r_0 задавались фиксированными. Добротность резонатора (при $r_1 = 0,7$; $r_0 = 0,01$) как функция времени при различных τ_0 приведена на рис. 1а.

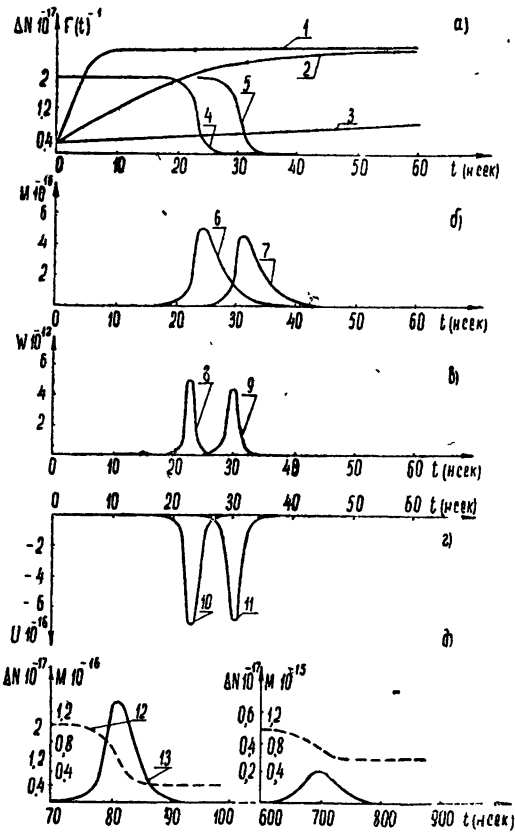


Рис. 1. Добротность резонатора Q , разность населенностей уровней ΔN , среднее число фотонов в резонаторе M , как функции времени для лазера с модулятором-кристаллом КДР с различными временем переключения τ_0 . Кривые 1, 2, 3, — $Q(t)$, кривые 4, 5, 12 — $\Delta N(t)$, кривые 6, 7, 13 — $M(t)$, при $\tau_0 = 2, 10$ и 100 $\mu\text{сек}$ соответственно. Функции $w(t)$ и $u(t)$ при $\tau_0 = 2$ и 10 $\mu\text{сек}$ изображены кривыми 8, 9 и 10, 11.

ством связаны (см. рис. 1б, д) уменьшение максимальной амплитуды поля в резонаторе и симметризация формы импульса излучения при

* Здесь и в дальнейшем соотношение между безразмерным временем τ и размерным t легко находится из равенства

$$t = 2\tau \cdot 10^{-9} \text{ сек} \quad (t = 2\tau \text{ нсек}).$$

Из графиков видно, что модулирующее устройство увеличивает скорость изменения добротности во времени по сравнению со скоростью изменения модулирующего напряжения. Так, например, если длительность фронта переключающего импульса $\tau_{\text{фр}} = 4,4; 22; 220$ ($\tau_0 = 2; 10; 100$), то соответствующее время переключения добротности резонатора $\tau_n = 2,5; 15; 150^*$.

Спустя некоторое время τ_0 после момента выполнения условий самовозбуждения лазера происходит излучение гигантского импульса. Форма импульса излучения, длительность его фронта, мощность и другие характеристики, как и следовало ожидать, зависят от величины времени переключения. Это иллюстрируют кривые, представленные на рис. 1б, д. Видно, что с увеличением времени переключения (ростом τ_0) время запаздывания импульса также увеличивается. Моменты времени, при которых происходит высвечивание импульсов, и величина добротности резонатора при этом отмечены на рис. 1а. Видно, что большим временам переключения соответствуют меньшие величины добротностей, при которых происходит излучение. С этим обстоятельством

увеличении времени переключения: при меньшей добротности скорость нарастания поля в резонаторе падает (передний фронт удлиняется), а затухание происходит быстрее (задний фронт укорачивается), что и приводит к симметризации формы импульса.

В том случае, когда изменение добротности весьма медленное, как это имеет место, например, при $\tau_0 = 100$, происходит высвечивание двух и более импульсов. Длительность последующих импульсов при этом больше, чем предыдущих, а амплитуда поля в них меньше (рис. 1д).

В целом описанная выше картина процесса излучения соответствует представлениям, полученным на основе приближенного аналитического рассмотрения, изложенного в [6, 7], и согласуется с результатами расчета, проведенного в [8] на основе уравнений баланса. Следовательно, при малых значениях параметра T_2/T_p (в рассматриваемом случае $T_2/T_p \sim 10^{-2}$) уравнения баланса достаточно точно описывают процессы в ОКГ. Более подробное сравнение будет проведено ниже. Численные значения параметров импульсов излучения (величина времени задержки t_3 , длительность импульса t_n и его фронта $t_{фр}$, мощность в импульсе) в зависимости от времени переключения t_n представлены на рис. 2.

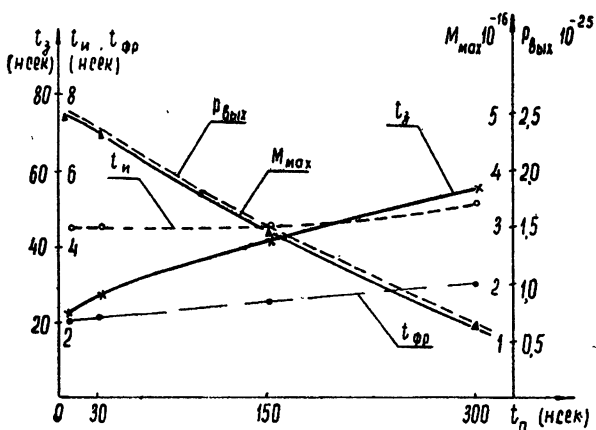


Рис. 2. Параметры импульса излучения лазера с модулятором на кристалле КДР как функции времени переключения ($n^0 = 10^{-2}$, $\mu_2 = 10^{-2}$, $r_1 = 0,7$, $\delta = 0$).

б) Влияние величины коэффициента отражения r_1 . Изменение коэффициента отражения выходного зеркала приводит к изменению максимального значения времени релаксации поля в резонаторе $T_{p \max} = (2\gamma_0 \ln r_1)^{-1}$ (максимальной добротности) и, как следствие, к изменению величины превышения разности населенностей уровней над пороговым значением $n_0 = n^0 \mu_2 q T_{p \max}$, которая в значительной мере определяет характеристики излучаемого импульса. О величине этого влияния можно судить по кривым $\Delta N(t)$ и $M(t)$, построенным на рис. 3 для значений параметров $n^0 = 10^{-2}$; $\mu_1 = 10^6$; $\mu_2 = 10^{-2}$; $r_0 = 10^{-2}$; $\delta = 0$; $q = 2 \cdot 10^4$; $N = 10^{19}$; $r_1 = 0,35; 0,5; 0,7; 0,9$ (что соответствует $n_0 \approx 2; 3; 6; 20$).

Как и следовало ожидать, время задержки t_3 и длительность фронта импульса $t_{фр}$ уменьшается (рис. 4) с увеличением r_1 (увеличением n_0), так как при этом увеличивается скорость нарастания электромагнитного поля в резонаторе. Что же касается длительности импульса, то она изменяется не монотонно: с уменьшением r_1 от его максимального значения она уменьшается, достигая минимального значения при

$r_1 \approx 0,5 \div 0,6 (n_0 = 3 \div 4)$, а затем снова увеличивается. Заметим, что выходная мощность излучения достигает максимального значения также в интервале $r_1 \approx 0,5 \div 0,6 (n_0 = 3 \div 4)^*$. Такой характер изменения длительности импульса τ_n и выходной мощности $P_{\text{вых}}$ объясняется тем, что при большой добротности резонатора (что имеет место при $r_1 \sim 1$)

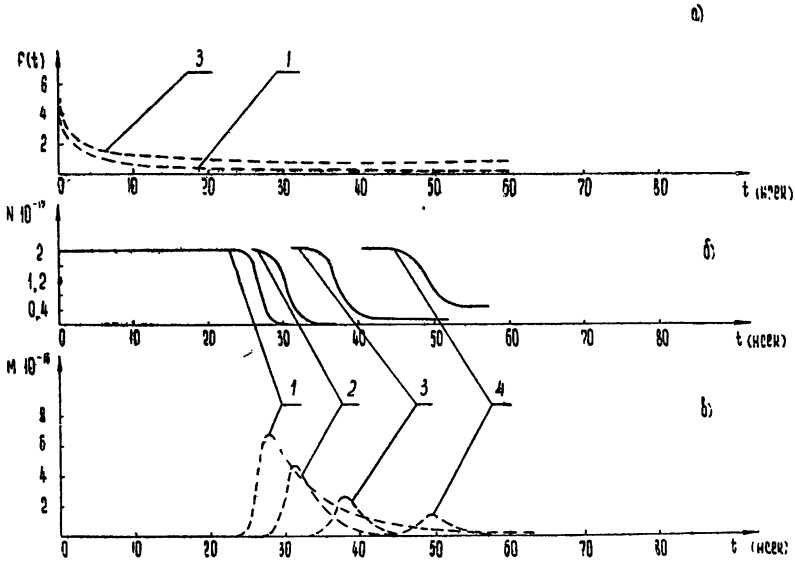


Рис. 3. Величины F , ΔN и M как функции времени при различных значениях коэффициента отражения зеркала r_1 (1— $r_1=0,9$, 2— $r_1=0,7$; 3— $r_1=0,5$; 4— $r_1=0,35$). Величины $\tau_0=10$, $n^0=10^{-2}$, $\mu_2=10^{-2}$, $\delta=0$ одинаковы для всех кривых.

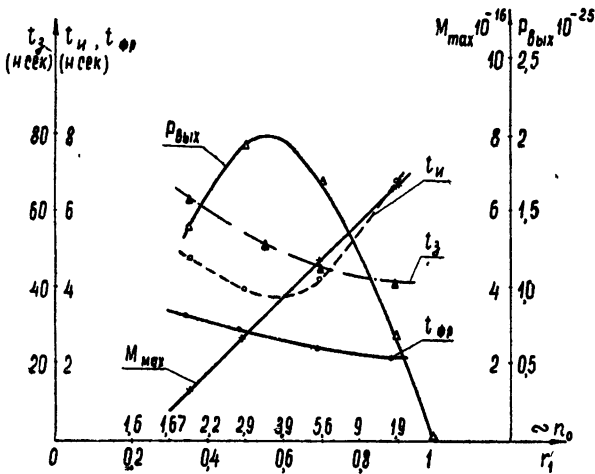


Рис. 4. Параметры импульса излучения как функции коэффициента отражения выходного зеркала резонатора (превышения разностью населенностей уровней ее порогового значения n_0) при $\tau_0=10$; $\mu_2=10^{-2}$; $\delta=0$.

хотя и происходит быстрое нарастание импульса, однако затухание поля в резонаторе происходит медленно (рис. 3в); за счет этого увеличивает-

* Аналитическое рассмотрение в предположении мгновенного переключения добротности [7] дает оптимальное значение $n_0 \approx 3,5$.

ся длительность импульса в целом. Выходная мощность, естественно, невелика, так как коэффициент пропускания зеркала $1 - r_1$ мал.

При малой добротности ($r_1 \leq 0,4$) поле в резонаторе как нарастает, так и спадает более медленно. Уменьшение скорости спада связано с неполным высвечиванием вещества (рис. 3б). В дальнейшем выходная мощность падает из-за увеличения длительности импульса и уменьшения амплитуды поля в резонаторе.

в) Влияние величины начальной разности населенностей уровней n^0 на характеристики гигантского импульса выяснялось при постоянном ее превышении над пороговым значением ($n_0 = \text{const} \approx 6$). Счет проводился для значений параметров $\mu_2 = 10^{-2}$; $\tau_0 = 10$; $r_1 = 0,7$; $r_0 = 10^{-2}$; $\delta = 0$; $N = 10^{19}$ и трех значений $n^0 = 10^{-2}$; 10^{-1} ; $4 \cdot 10^{-1}$ ($\mu_1 = 10^6$; $8 \cdot 10^5$; $2 \cdot 10^5$). Постоянство величины n_0 при изменении n^0 достигалось таким выбором параметра q , чтобы для всех значений n^0 соблюдалось равенство:

$$n_0 = n^0/n_{\text{порог}} = 2n^0\mu_2q\gamma_0T_{p \text{ max}} = \text{const}.$$

Как и следовало ожидать, с увеличением начальной разности населенностей происходит пропорциональное увеличение амплитуды поля в резонаторе и выходной мощности излучения (рис. 5). Временные характеристики импульса при этом остаются практически неизменными (рис. 5), лишь несколько возрастает время задержки импульса.

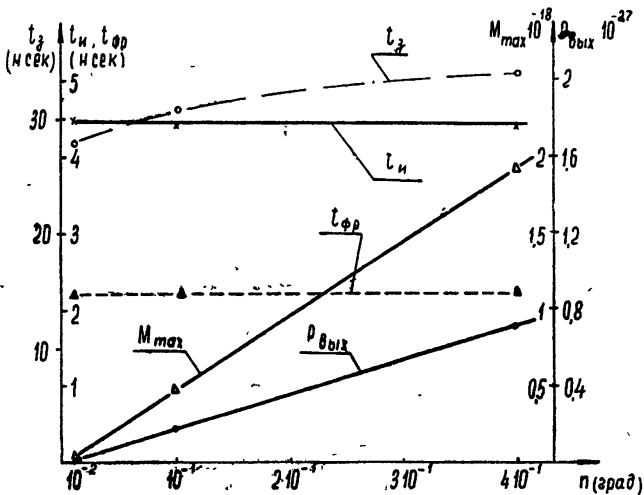


Рис. 5. Параметры импульса излучения как функции начальной разности населенностей уровней n^0 ($\tau_0 = 10$, $\mu_2 = 10^{-2}$; $r_1 = 0,7$; $\delta = 0$).

Такой характер изменения параметров импульса становится очевидным, если в уравнениях (1) провести перенормировку переменных $\bar{n} = n/n_{\text{порог}}$; $\bar{m} = m/m_{\text{порог}}$; $\bar{u} = u/u_{\text{порог}}$; $\bar{\omega} = \omega/n_{\text{порог}}^2$; $\bar{q} = qn_{\text{порог}}$; $\bar{n}^0/n_{\text{порог}} = n_0 \approx 6 = \text{const}$. Учитывая, что величина q выбиралась при расчете таким образом, что $qn^0 = \text{const}$ (и, следовательно, $q = qn^0/n_0 = \text{const}$), легко убедиться в том, что коэффициенты в системе (1), переписанной в новых переменных, не меняются с изменением n^0 , за исключением коэффициента при флуктуационном члене, который с ростом n^0 убывает обратно пропорционально $(n^0)^2$. Начальные условия также изменяются только в пределах влияния флуктуационных членов. Так как величина флуктуационных членов при достаточно быстром переключении добротности лишь логарифмически сказывается на величине времени задерж-

ки (см. [7]), наблюдаемое изменение последней невелико. В остальном процесс высвечивания развивается одинаково, следствием чего и является постоянство (в новых переменных) всех параметров импульса независимо от значения n^0 . При возврате к старым переменным получим зависимости от n^0 , приведенные на рис. 5.

г) *Влияние величины времени релаксации T_2* . Как и в предыдущем случае, влияние времени релаксации T_2 (точнее, соотношения между T_2 и $T_{p \max}$) на характеристики импульса излучения исследовалось при постоянном превышении разности населенностей уровней над ее пороговым значением. Это достигалось вариацией параметра q таким образом, чтобы произведение $\mu_2 q$ (а именно оно определяет величину n_0) оставалось постоянным при любых изменениях $\mu_2 = \gamma_0 T_2$. Значения параметров, при которых выполнен расчет, были следующими: $n^0 = 10^{-2}$; $\mu_1 = 10^6$; $\tau_0 = 10$; $r_1 = 0,7$; $\delta = 0$; $N = 10^{19}$, $n_0 \approx 6$ и $\mu_2 = 10^{-2}$ ($q = 2 \cdot 10^4$), 10^{-1} ($q = 2 \cdot 10^3$), 1 ($q = 2 \cdot 10^2$).

Графики функций $\Delta N = f(\tau)$ и $M = \varphi(\tau)$, построенные по результатам численного решения, для случая $\mu_2 = 10^{-1}$ и $\mu_2 = 1$ ($T_2/T_{p \max} \approx 0,07$ и $0,7$) приведены на рис. 6а, б. Видно, что при $\mu_2 \sim 1$, когда время релаксации T_2 соизмеримо с $T_{p \max}$, разность населенностей может стать отрицательной, т. е. в этом случае «высвечивается» большее число частиц, чем при малых T_2 . Следствием этого и является увеличение амплитуды поля (а значит, и мощности излучения) в резонаторе. То обстоятельство, что разность населенностей уровней остается и после окончания импульса отрицательной, свидетельствует о том, что в этом случае полная энергия в импульсе возрастает. Отрицательная разность населенностей в конце периода излучения приводит к увеличению скорости спада импульса (рис. 6).

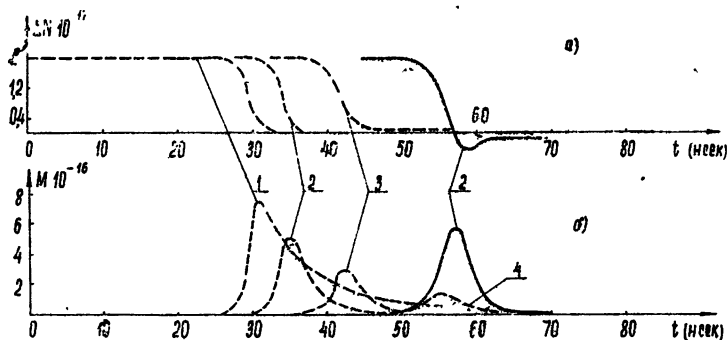


Рис. 6. Функции $\Delta N(t)$ и $M(t)$ при $\mu_2 = 10^{-1}$ (пунктирные кривые) и $\mu_2 = 1$ для различных значений r_1 : 1— $r_1 = 0,9$; 2— $r_1 = 0,7$; 3— $r_1 = 0,5$; 4— $r_1 = 0,35$ ($\tau_0 = 10$, $n^0 = 10^{-2}$; $\delta = 0$).

Из рис. 7 видно, что при $T_2/T_{p \max} \leq 0,1$ все характеристики импульса отличаются от случая $T_2/T_{p \max} = 0$ не более, чем на 10%. Следовательно, в этом интервале значений $T_2/T_{p \max}$ (с точностью $\sim T_2/T_{p \max}$) все расчеты можно проводить на основе уравнений баланса.

Интересно отметить, что наличие отрицательной разности населенностей противоречит четырехуровневой схеме ОКГ с незаселенным нижним рабочим уровнем. В этом случае расчет при $T_2 \neq 0$ необходимо проводить с учетом конечного времени жизни частиц на нижнем уровне, которое больше или порядка T_2 .

д) *Влияние расстройки δ* . Изменение расстройки частоты резонатора от средней частоты молекулярного перехода при постоянстве других параметров вызывает изменение пороговой населенности:

$$n_{\text{порог}} = \frac{|\ln r_1|}{\mu_2 q} \{ 1 + \delta^2 / (1 + \mu_2 |\ln r_1|)^2 \}$$

и, как следствие, изменение начального превышения над порогом при неизменном значении начальной разности населенностей; это само по себе влияет на характеристики импульса. Поэтому для выяснения влияния чисто фазовых соотношений в ОКГ при изменении расстройки δ влияние последней на пороговое значение населенности компенсировалось соответствующим подбором параметра q .

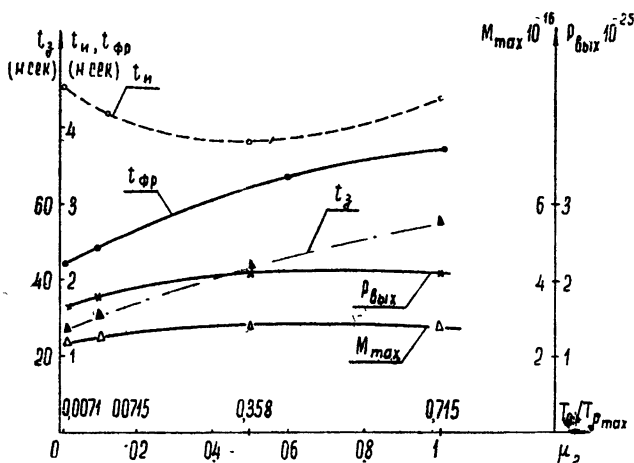
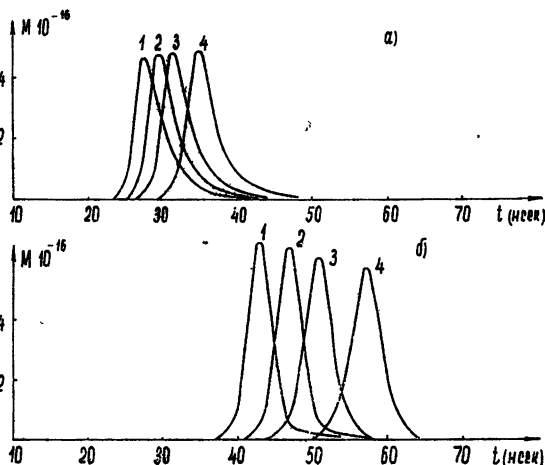


Рис. 7. Параметры импульса излучения как функции отношения времен релаксации $T_2/T_{p \text{ max}}$ ($\tau_0 = 10$; $n^0 = 10^{-2}$; $r_1 = 0,7$; $\delta = 0$).

Расчет производился для значений параметров $n^0 = 10^{-2}$; $\tau_0 = 10$; $r_1 = 0,7$; $\mu_1 = 10^{-1}$ и 1 при $\delta = 1 (q \approx 3,9 \cdot 10^4)$; $\delta = 0,8 (q \approx 3,2 \cdot 10^4)$; $\delta = 0,6 (q \approx 2,7 \cdot 10^4)$; $\delta = 0 (q \approx 2 \cdot 10^4)$ для $\mu_2 = 10^{-1}$ и при $\delta = 1 (q \approx 3,1 \cdot 10^3)$; $\delta = 0,8 (q \approx 2,7 \cdot 10^3)$; $\delta = 0,6 (q \approx 2,4 \cdot 10^3)$; $\delta = 0 (q \approx 2 \cdot 10^3)$ для $\mu_2 = 1$.

Влияние параметра δ на основные характеристики гигантского импульса иллюстрируют графики на рис. 8, где построены кривые зави-

Рис. 8. Влияние расстройки δ на форму импульса излучения, для случая $\mu_2 = 10^{-2}$ (а) и $\mu_2 = 1$ (б); кривые 1 соответствуют $\delta = 1$; 2 — $\delta = 0,8$; 3 — $\delta = 0,6$; 4 — $\delta = 0$.



симости числа фотонов в резонаторе от времени при различных δ . Из рисунков видно, что изменение величины δ от 0 до 1 практически мало влияет на форму импульса и лишь слегка (на 10 ÷ 15%) уменьшает время запаздывания. Амплитуда поля при этом незначительно уменьшается при $\mu_2 = 10^{-1}$ ($T_2/T_{p\max} = 0,07$) и увеличивается при $\mu_2 = 1$ ($T_2/T_{p\max} = 0,7$).

3. МОДУЛЯТОР В ВИДЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЗЕРКАЛА (ПРИЗМЫ)

Для резонатора ОКГ с плоскими зеркалами*, модуляция добротности которого осуществляется путем вращения одного из зеркал, приближенный закон изменения добротности во времени имеет вид [10]

$$Q = \omega_p / 2\gamma_0 (\beta_0 \alpha_1^2 - \ln r), \quad (6)$$

где $\alpha_1(\tau)$ — угол между зеркалами в момент времени τ , а постоянные r и β_0 определяют потери, связанные с прозрачностью зеркал и их переколом соответственно.

Предполагаем зеркало вращающимся, т. е. считая

$$\alpha_1 = 2\pi p(\tau - \tau_n) / 60\gamma_0, \quad (7)$$

где p — число оборотов в минуту, τ_n — время переключения добротности от некоторого начального значения до максимальной величины, получим выражения для функции $F(\tau)$:

$$F(\tau) = |\ln r_1 + (\tau/\tau_n - 1)^2 \ln r_0|. \quad (8)$$

Параметр r_0 равен коэффициенту отражения зеркала, при котором добротность резонатора с параллельным зеркалом равна добротности резонатора, глухое зеркало ($r_2 = 1$) которого перекошено на начальный угол $\alpha_n = 2\pi p \tau_n / 60\gamma_0$. Эта величина, как следует из (6) — (8), может быть выражена через постоянную β_0 и угол α_n (или τ_n и p).

Будем считать, как и в разделе 2, что коэффициент отражения одного (неподвижного) зеркала принимает значения $r_1 = 0,35; 0,5; 0,7; 0,9$, а потери, обусловленные начальным углом перекоса, равны потерям в зеркале, имеющем $r_0 = 10^{-2}$.

Функция $F(\tau)$ при $\tau_n = 75$ и $r_1 = 0,5; 0,7; 0,9$ изображена на рис. 9а.

Решение исходной системы уравнений (1) с учетом (8) проводилось для вариантов, характеризовавшихся набором параметров: $n^0 = 10^{-2}$; $\mu_1 = 10^5$; $\mu_2 = 10^{-2}$; 1 ; $q = 2 \cdot 10^4$; $N = 5 \cdot 10^{20}$. Время коммутации τ_n было взято равным 75, 150 и 300, что в случае выполнения условий самовозбуждения при угле $\alpha_c \simeq \alpha_n / 2 \simeq 3'$ соответствовало вращению зеркала со скоростью $\sim 100, 50$ и 25 тысяч об/мин.

Ниже результаты, полученные при расчетах указанных вариантов, сравниваются с данными предыдущего раздела.

а) *Время задержки и форма импульса.* Как и в рассмотренном выше случае, время задержки t_z импульса излучения относительно момента выполнения условий самовозбуждения, длительность импульса t_n и его фронта $t_{фр}$ (рис. 10, 11) возрастают с увеличением времени переключения (уменьшением скорости вращения зеркала) и уменьшением максимального значения добротности резонатора (уменьшением r_1). Увеличение длительности импульса в окрестность $r_1 \sim 1$ здесь выражено слабее. Последнее вызвано уменьшением времени задержки с ростом

* Всюду идет речь о модах резонатора, близких к аксиальным. Дифракционными потерями в отсутствие перекоса зеркал вследствие их относительной малости пренебрегается. Следует отметить, что в используемых резонаторах ОКГ с плоскими зеркалами закон изменения добротности может быть отличен от (6) из-за «линзовых» неоднородностей в рабочем веществе.

r_1 , приводящем к тому, что изменение добротности резонатора в момент излучения происходит не пропорционально r_1 .

Форма импульса излучения и характер ее деформации с уменьшением (или увеличением) скорости переключения добротности, естественно, остались такими же, как и в предыдущем случае (см. рис. 9). Од-

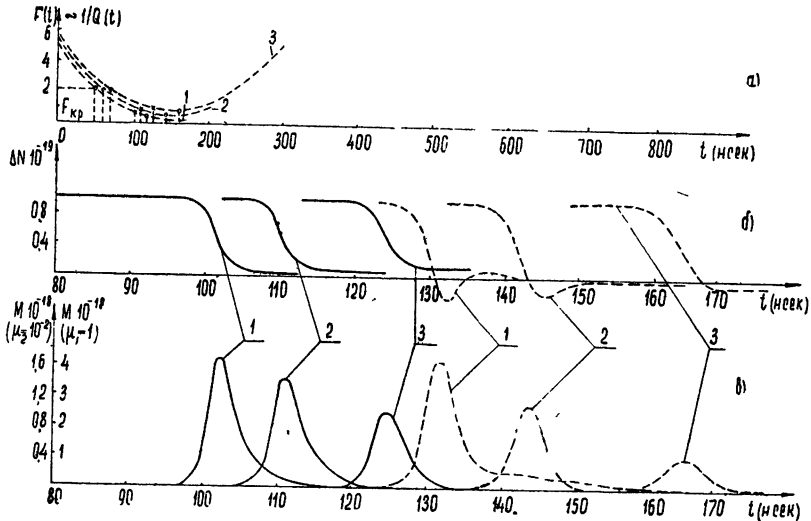


Рис. 9. Графики функций $F(t)$, $\Delta N(t)$, $M(t)$ для лазера с вращающимся зеркалом при $\mu_2=10^{-2}$ (сплошные кривые) и $\mu_2=1$ (пунктир). Параметры r_1 принимают значения: $r_1=0,9$ (кривые 1); $r_1=0,7$ (кривые 2); $r_1=0,5$ (кривые 3); величина $\tau_n=75$.

нако при малых скоростях переключения высвечивание первого импульса происходит при низкой добротности, благодаря чему верхний уровень обедняется не полностью (рис. 9б) и появляется возможность для

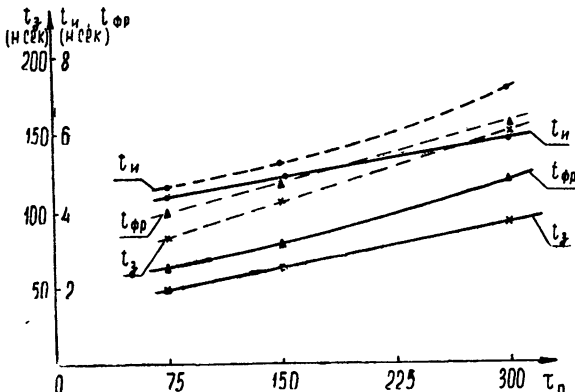


Рис. 10. Временные параметры импульса как функция времени переключения зеркалом (сплошные кривые — $\mu_2=10^{-2}$; пунктир — $\mu_2=1$). Величина $r_1=0,7$.

высвечивания второго импульса. Тем не менее следующего импульса излучения не наблюдается, так как вскоре после излучения первого импульса добротность резонатора начинает уменьшаться (функция $F(\tau)$ возрастает, см. рис. 9а) и выполнение условий самовозбуждения при оставшейся разности населенностей ΔN становится невозможным.

Более того, в некоторых случаях при повторном выполнении условия самовозбуждения мощного импульса может и не наблюдаться из-за конечного времени установления излучения (конечного времени задержки t_3). С этим же обстоятельством связан рост порогового значения населенности с ростом скорости переключения. Далее, как и в случае поляризационного затвора, при $\mu_2 = T_2/T_{p\max} \simeq 1$ и $r_1 = 0,9$ изменение разности населенностей уровней носит колебательный характер (рис. 9в). Из-за значительной релаксации поля колебания интенсивности излучения сглажены; однако указанный характер изменения населенности приводит к более медленному спадаанию поля (удлиняется «хвост» импульса).

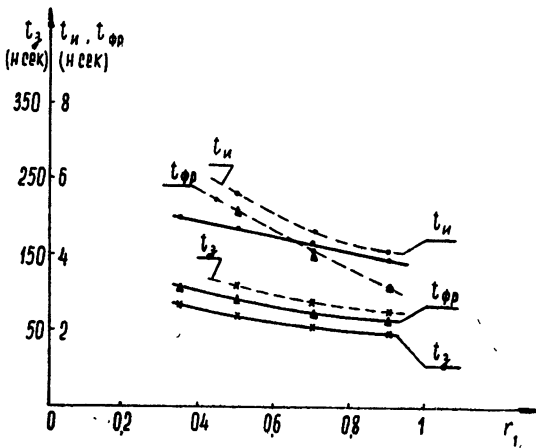
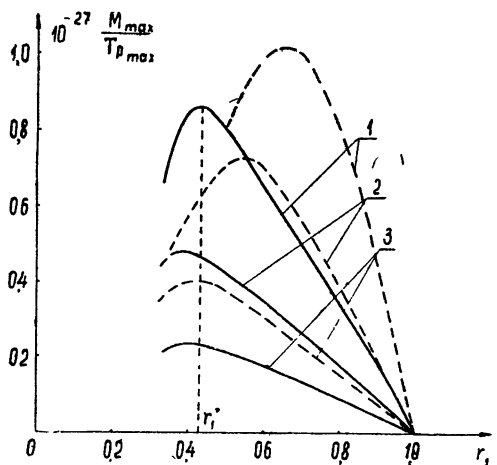


Рис. 11. Параметры импульса, излучаемого лазером с вращающимся зеркалом как функция коэффициента отражения выходного зеркала (сплошные кривые — $\mu_2 = 10^{-2}$; пунктир — $\mu_2 = 1$). Величина $\tau_n = 75$.

б) *Максимальная мощность в импульсе.* На рис. 12 построена максимальная мощность в импульсе на выходе ОКГ в зависимости от коэффициента отражения r_1 для разных времен переключения добротности

Рис. 12. Изменение максимальной выходной мощности в импульсе, излучаемой лазером с вращающимся зеркалом, как функция r_1 при различных временах переключения: 1— $\tau_n = 75$; 2— $\tau_n = 150$; 3— $\tau_n = 300$ (сплошные кривые— $\mu_2 = 10^{-2}$; пунктирные— $\mu_1 = 1$).



τ_n (разных r_1) при двух значениях параметра $\mu_2 = 10^{-2}$ и 1. Из графиков видно, что мощность в импульсе сравнительно мала при r_1 , близких к единице и монотонно нарастая с уменьшением r_1 , достигает максимума при некоторых значениях $r_1 = r_1^*$. При этом в случае, когда время релаксации T_2 много меньше максимального времени резонатора

$T_{p \max}(\mu_2 = 10^{-2})$, максимальное значение выходной мощности излучения наблюдается примерно при одном и том же значении $r_1^* \approx 0,4$.

Если же время T_2 соизмеримо с $T_{p \max}(\mu_2 \approx 1)$ величина $r_1 = r_1^*$ растет с уменьшением τ_n . Так при изменении величины τ_n в диапазоне $75 \div 300$ коэффициент r_1^* изменяется в пределах от 0,7 до 0,4 (рис. 12). Что же касается величины максимальной мощности P_{\max} при оптимальном значении коэффициента отражения $r_1 = r_1^*$, то (при одинаковых значениях параметра τ_n) она больше при $\mu_2 = 1$. Как и в рассмотренном выше случае переключения добротности с помощью КДР, это связано с возможностью отрицательных значений разности населенностей в конце импульса при $\mu_2 = 1$. Меньшие значения оптимального значения r_1 при $\mu_2 \approx 10^{-2}$ обусловлены тем, что излучение происходит при $Q < Q_{\max}$, что и приводит к более быстрому уменьшению «полезной» мощности излучения с ростом r_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. W. G. Wagner, B. A. Lengyel, J. Appl. Phys., **34**, 2040 (1963).
2. А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, **8**, 1073 (1963).
3. C. C. Wang, Proc. IEEE, **51**, 1767 (1963).
4. M. F. Lee, Appl. Optics, **3**, 417 (1964).
5. A. A. Vuylsteke, J. Appl. Phys., **34**, 1615 (1963).
6. А. Л. Микаэлян, Ю. Г. Турков, Радиотехника и электроника, **9**, 743 (1964).
7. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 513 (1966).
8. А. Л. Микаэлян, Ю. Г. Турков, Вопросы радиоэлектроники, сер. XII, вып. 10, **3** (1964).
9. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 207 (1963).
10. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, ЖТФ, **36**, 497 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 сентября 1965 г.

LASER WITH Q-SWITCHED RESONATOR

V. I. Bespalov, Yu. K. Bogatyryov

The results of numerical calculation of the problem are given on solid laser radiation operating in Q-switched resonator regime. The models of laser with polarized shutter (of the Pokelsa's cell type) and rotating mirror have been considered. The influence has been clarified of a finite rate of switching, detuning of the laser frequency from the mean frequency of molecular transition, the finity of relaxation time, the values of transmission coefficients of laser mirror and some other factors upon the main parameters of the radiation impulse: the form of the impulse its duration, power, etc.

УДК 621.378.325

О ВЛИЯНИИ РЕЗОНАНСНОГО ПОЛЯ НА РАБОТУ ДВУХФОТОННОГО ЛАЗЕРА

В. С. Бутылкин, Г. Л. Гуревич, М. И. Хейфец, Ю. Г. Хронопуло

Показано, что присутствие резонатора, настроенного на частоту перехода между рабочими уровнями вещества, может существенно ухудшить условия возбуждения двухфотонного лазера. Определены параметры системы, при которых возможен стационарный режим его работы.

1. В работах [1, 2] рассматривались двухфотонные процессы в веществе, помещенном в резонатор. Было показано [2], что при определенных условиях в такой системе возможна генерация полей на частотах ω_1 и ω_2 , удовлетворяющих условию $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{21} + \Delta$ ($\Delta < T_{21}^{-1}$), где ω_{21} — разность рабочих термов, $T_{21}^{-1} = T_{21}^{-1}$ — соответствующая ширина линии. При этом предполагалось, что отсутствует поле с частотой, близкой к ω_{21} . Представляет интерес рассмотреть влияние резонансного поля на работу двухфотонного лазера, поскольку практически всегда на частоте ω_{21} резонатор имеет конечную добротность.

Пусть в резонаторе с собственными частотами ω_1 , ω_2 и ω_3 помещено вещество, разность рабочих термов которого $\omega_{21} = \omega_3 - \delta$ ($\delta < T_{21}^{-1}$). Можно показать, что уравнения для материальной системы имеют тот же вид, что и уравнения (10) работы [3], если в них положить

$$R = \sum_k \left[\frac{V_{1k}^{(1)} V_{k2}^{(2)}}{\omega_{k2} + \omega_2} - \frac{V_{k2}^{(1)} V_{1k}^{(2)}}{\omega_{k2} + \omega_1} \right] e^{i\Delta t} - \hbar V_{12}^{(3)} e^{i\delta t}, \quad (1)$$

$$\Omega_{12} = \frac{2}{\hbar^2} \sum_{k,l} \left[\frac{\omega_{k1} |V_{1k}^{(l)}|^2}{\omega_{k1}^2 - \omega_l^2} + \frac{\omega_{k2} |V_{k2}^{(l)}|^2}{\omega_{k2}^2 - \omega_l^2} \right] + \frac{2 |V_{12}^{(3)}|^2}{\hbar^2 (\omega_{21} + \omega_3)} +$$

$$+ \frac{4\omega_{21}}{\hbar^2} \sum_{l=1,2} \frac{|V_{12}^{(l)}|^2}{(\omega_{21}^2 - \omega_l^2)}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{|V_{12}^{(3)}|^2}{2T_{21}(\omega_{21} + \omega_3)} +$$

$$+ \frac{1}{T_{21}} \sum_{l=1,2} \frac{\omega_{21}^2 + \omega_l^2}{(\omega_{21}^2 - \omega_l^2)^2} |V_{12}^{(l)}|^2.$$

Здесь $V = \sum_l V^{(l)} e^{i\omega_l t}$ — оператор энергии взаимодействия вещества с полем, V_{mk} — его матричные элементы, $\omega_l = -\omega_{-l}$.

К системе материальных уравнений необходимо присоединить уравнения для полей. Мы будем считать медленные амплитуды и фазы полей постоянными на размерах рассматриваемой системы. Тогда уравнения для комплексных медленных амплитуд $E_k(\mathbf{r})$ можно записать в виде

$$\dot{E}_k + (2\tau_k)^{-1} E_k = -2\pi i e_k^{-1} \omega_k \int_V (\mathbf{p}_k e_k^*) d\mathbf{v}, \quad (2)$$

где $2\tau_k$ — время релаксации k -ой моды, p_k , e_k и ϵ_k — соответственно комплексная амплитуда поляризации, собственная мода резонатора и диэлектрическая проницаемость на частоте ω_k .

Как и в [2, 4], будем предполагать, что выполнены условия, при которых можно пренебречь $\sigma_{1,2}$ в уравнениях (10) из [3], а также условие (24) работы [2], позволяющие пренебречь нерезонансным взаимодействием. Если, кроме того, в системе возбуждается по одной моде на каждой из частот ω_1 , ω_2 и ω_3 , то уравнения (10) работы [3] и (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1,2} + (2\tau_{1,2})^{-1} E_{1,2} &= \frac{1}{2} b_{1,2} |E_{2,1}|^2 E_{1,2} \int_V |e_1|^2 |e_2|^2 ndv + \\ &+ \frac{1}{2} B_{1,2} E_{2,1}^* E_3 e^{-ixt} \int_V e_1^* e_2^* e_3 ndv, \\ \dot{E}_3 + (2\tau_3)^{-1} E_3 &= \frac{1}{2} CE_3 \int_V |e_3|^2 ndv + \frac{1}{2} B_3 E_1 E_2 e^{ixt} \int_V e_1 e_2^* e_3^* ndv, \quad (3) \\ \dot{n} + (n - n_0) T^{-1} &= - [a_1 |E_1|^2 |E_2|^2 |e_1|^2 |e_2|^2 + a_2 |E_3|^2 |e_3|^2 + \\ &+ B_4 \operatorname{Re} (E_1^* E_2^* E_3 e_1^* e_2^* e_3 e^{-ixt})] n. \end{aligned}$$

Здесь n — разность населенностей рабочих уровней, W_{mn} — вероятности переходов между m -ым и n -ым уровнями в отсутствие полей, $x = \Delta - \delta$, $\alpha_{mn}^{(l)}$ — угол между e_l и p_{mn} ,

$$n_0 = \frac{W_{13} W_{32} - W_{21} (W_{31} + W_{32})}{W_{13} W_{32} + W_{21} (W_{31} + W_{32})}, \quad T = \frac{W_{31} + W_{32}}{W_{13} W_{32} + W_{21} (W_{31} + W_{32})}, \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{4K}{\hbar^4}, \quad a_2 = \frac{4}{\hbar^2} \frac{T_{21} |p_{12}|^2 \cos^2 \alpha_{12}^{(3)}}{1 + T_{21}^2 \Delta^2},$$

$$b_l = \frac{4\pi\omega_l N K}{\epsilon \hbar^3} (1 - iT_{21}\Delta), \quad B_l = \frac{4\pi\omega_l N |p_{12}| \sigma \cos \alpha_{12}^{(3)} T_{21}}{\epsilon \hbar^2 (1 + T_{21}^2 \delta^2)} (1 - iT_{21}\delta) \quad (l=1,2),$$

$$B_3 = \frac{4\pi\omega_3 N |p_{12}| \sigma \cos \alpha_{12}^{(3)} T_{21}}{\epsilon \hbar^2 (1 + T_{21}^2 \Delta^2)} (1 - iT_{21}\Delta),$$

$$B_4 = \frac{4}{\hbar^3} T_{21} |p_{12}| \sigma \cos \alpha_{12}^{(3)} \left(\frac{1}{1 + T_{21}^2 \Delta^2} + \frac{1}{1 + T_{21}^2 \delta^2} \right),$$

$$c = \frac{4\pi\omega_3 N |p_{12}|^2 \cos^2 \alpha_{12}^{(3)} T_{21}}{\epsilon \hbar (1 + T_{21}^2 \delta^2)} (1 - iT_{21}\delta),$$

$$K = T_{21} (1 + T_{21}^2 \Delta^2)^{-1} |\sigma|^2,$$

$$\begin{aligned} \sigma = \sum_k p_{1k} p_{k2} [(\omega_{k2} + \omega_2)^{-1} \cos \alpha_{1k}^{(1)} \cos \alpha_{2k}^{(2)} + (\omega_{k2} + \omega_1)^{-1} \times \\ \times \cos \alpha_{2k}^{(1)} \cos \alpha_{1k}^{(2)}], \end{aligned}$$

N — плотность числа частиц рабочего вещества.

Уравнения (3) могут быть сведены к системе

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1,2} + \tau_{1,2}^{-1} m_{1,2} &= b_{1,2} m_1 m_2 n, \\ \dot{m}_3 + \tau_3^{-1} m_3 &= C m_3 n, \\ \dot{n} + (n - n_0) T^{-1} &= -a_1 m_1 m_2 n - a_2 m_3 n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $m_l = |E_l|^2$ ($l = 1, 2, 3$), если существуют только бегущие волны, не выполняются условия пространственного синхронизма:

$$k_1 + k_2 - k_3 \neq 0 \left(k_l = \frac{\omega_l}{c\sqrt{\varepsilon_l}} \right) \text{ и } |k| = |\omega_1 + \omega_2 - \omega_3| \gg T^{-1}.$$

Аналогичный вид имеют уравнения, описывающие процессы при возбуждении большого числа мод вблизи каждой из частот ω_l^* . При этом размеры материальной системы должны быть значительно меньше длины резонатора. Кроме того, в системе должен отсутствовать пространственный синхронизм.

Во всех перечисленных выше случаях разность населенностей постоянна по объему рабочего вещества** и не существенны члены, пропорциональные произведению резонансного и комбинационных полей.

В дальнейшем мы будем рассматривать системы, описываемые уравнениями (5). После введения безразмерных переменных

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= m_{1,2} (\tau_{1,2} b_{1,2} / a_1 T \tau_{2,1} b_{2,1})^{-1/2}, \\ x_3 &= m_3 \frac{4T T_{12} |p_{12}|^2 \cos^2 \alpha_{12}^{(3)}}{\hbar^2 (1 + T_{21}^2 \delta^2)}, \\ z &= n (\tau_1 \tau_2 b_1 b_2 / a_1 T)^{1/2}, \\ \theta &= t T^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

система уравнений (5) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} \dot{x}_{1,2} + x_{1,2} &= x_1 x_2 z, \\ \alpha_3 \dot{x}_3 + x_3 &= A x_3 z, \\ \dot{z} + z - z_0 &= -x_1 x_2 z - x_3 z. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\alpha_l = \tau_l T^{-1}$,

$$A = \frac{2 |p_{12}|^2 \cos^2 \alpha_{12}^{(3)} T^{1/2} T_{21}^{1/2}}{|\sigma|} \frac{\tau_3 \omega_3}{(\tau_1 \omega_1 \tau_2 \omega_2)^{1/2}} \frac{(1 + T_{12}^2 \Delta^2)^{1/2}}{1 + T_{12}^2 \delta^2}. \quad (8)$$

2. Рассмотрим случай, когда одно из полей можно считать заданным ($x_2 = \text{const}$). Система уравнений тогда аналогична уравнениям (10) работы [5], описывающей взаимодействие двух мод в обычном лазере. В этом случае положения равновесия совпадают с положениями равновесия соответствующего резонансного и двухфотонного лазеров***:

* В этом случае $m_l = \sum_i |E_{li}|^2$, где E_{li} — амплитуда i -ой моды комбинационных ($l = 1, 2$) и резонансного ($l = 3$) полей. Предполагаем, что затухание на всех модах, близких к частоте ω_l , одинаково, а ширина спектра частот, возбуждаемых вблизи каждой из ω_l , много меньше ширины линии вещества.

** Для случая, когда возбуждается много мод, доказательство этого аналогично проведенному в [5] для резонансного лазера.

*** Мы исключаем из рассмотрения случай, когда $x_2 = A$.

- 1) $x_1 = 0, x_3 = 0, z = z_0,$
- 2) $x_1 = 0, x_3 = z_0 A - 1, z = A^{-1},$
- 3) $x_1 = z_0 - x_2^{-1}, x_3 = 0, z = x_2^{-1}.$

Второе и третье равновесные состояния существуют соответственно при

$$z_0 > A^{-1}, \quad (9)$$

$$z_0 > x_2^{-1}. \quad (10)$$

При выполнении хотя бы одного из этих условий первое положение равновесия неустойчиво. Если $x_2 > A$, второе положение равновесия неустойчиво, а третье — устойчиво. В области $x_2 < A$ характер устойчивости этих положений равновесия меняется на обратный. Следовательно, стационарное излучение на частоте комбинационного поля возможно лишь при выполнении условий (10) и

$$x_2 > A, \quad (11)$$

причем (10) совпадает с условием возбуждения комбинационного лазера в отсутствие резонансного поля. Легко видеть, что, если второе положение равновесия не существует, то при выполнении (10) автоматически выполняется и (11).

Рассмотрим теперь процесс установления стационарного режима в нашей системе для случая, когда выполняются условия (9)—(11).

Пусть заданное поле включается раньше, чем некогерентная накачка. Если в начальный момент изображающая точка имеет координаты $x_1 = 0, x_3 = 0, z < A^{-1}$, то, как только она окажется в области $z > x_2^{-1}$, выполнятся условия возбуждения комбинационного поля на частоте ω_1 и начнется процесс установления стационарных колебаний этого поля; резонансное поле в системе не возникнет. Если же при $t = 0$ изображающая точка имела координаты $x_1 = 0, x_3 = 0, z > A^{-1}$ (так может быть, например, при импульсной модуляции добротности), то на начальном участке траектории выполняется условие возбуждения для обеих величин x_1 и x_3 .

При $\tau_3/\tau_1 = \alpha_3/\alpha_1 \ll 1^+$ нарастание комбинационного поля происходит много медленнее, чем резонансного. С течением времени x_1 нарастает, средняя за время осцилляций величины x_3 населенность уменьшается и, наконец, прекращается генерация поля на частоте ω_3 . Система стремится к третьему положению равновесия, в котором резонансное поле отсутствует.

Аналогично проходит процесс и в случае, если поле на частоте ω_2 подается после включения некогерентной накачки к моменту, когда уже началась генерация резонансного поля. Качественный ход фазовой траектории для этого случая изображен на рис. 1.

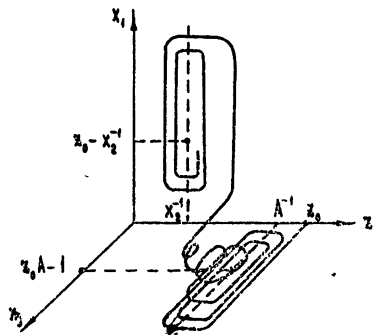


Рис. 1.

3. Пусть теперь ни одно из полей не является заданным. Прежде

* Мы увидим далее, что это неравенство необходимо для удовлетворения условию (10).

всего, мы рассмотрим случай $\omega_1 = \omega_2$. Тогда $x_1 = x_2 = x$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и уравнения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha \dot{x} + x &= x^2 z, \\ \alpha_3 \dot{x}_3 + x_3 &= A x_3 z, \\ \dot{z} + z - z_0 &= -(x^2 + x_3) z. \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь в системе имеется пять положений равновесия (рис. 2):

- 1) $x = 0, x_3 = 0, z = z_0$;
- 2) $x = \frac{z_0}{2} - \sqrt{\frac{z_0^2}{4} - 1}, x_3 = 0, z = \frac{z_0}{2} + \sqrt{\frac{z_0^2}{4} - 1}$;
- 3) $x = \frac{z_0}{2} + \sqrt{\frac{z_0^2}{4} - 1}, x_3 = 0, z = \frac{z_0}{2} - \sqrt{\frac{z_0^2}{4} - 1}$;
- 4) $x = 0, x_3 = z_0 A - 1, z = A^{-1}$;
- 5) $x = A, x_3 = z_0 A - A^2 - 1, z = A^{-1}$.

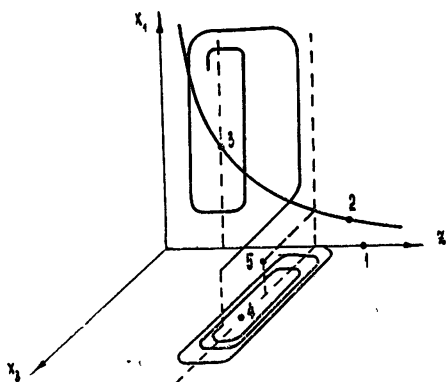


Рис. 2.

Второе и третье положения равновесия существуют при $z_0 > 2$, четвертое — при $z_0 > A^{-1}$, пятое — при $z_0 > A + A^{-1}$. Характер первых трех положений равновесия в плоскости $x_3 = 0$ исследован в работе [2]. Там было показано, что первое состояние равновесия является устойчивым узлом, второй — седлом, а третье стационарное состояние становится устойчивым при

$$z_0 > \alpha^{-1/2}. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь устойчивость этих положений равновесия в пространстве. Легко видеть, что при $z < A^{-1}$ траектории идут к плоскости $x_3 = 0$, а при $z > A^{-1}$ — от нее. Поэтому третье равновесное состояние будет устойчиво, если кроме условия (14) выполняется соотношение

$$A < z_0/2 + \sqrt{z_0^2/4 - 1}. \tag{15}$$

Нетрудно показать, что четвертое положение равновесия всегда устойчиво, пятое всегда неустойчиво.

Рассмотрим процесс установления колебаний в системе, когда условия (14) и (15) выполнены, т. е. возможна стационарная генерация комбинационного поля. Изображающая точка с начальными координатами $x = 0, x_3 = 0, z = 0$ при включении накачки начинает двигаться вдоль оси z ; после прохождения ею точки $z = A^{-1}$ происходит возбуждение резонансного поля и начинается процесс установления стационарных колебаний резонансного лазера.

Чтобы возбудить комбинационное поле, достаточно вывести изображающую точку над поверхностью $x = z^{-1}$. Для этого необходимо подать запускающее поле, величина которого

$$x_{\text{зан}} > A. \tag{16}$$

Тогда выполняется условие возбуждения комбинационного поля; изображающая точка быстро (так как $\alpha_3 \ll \alpha_1$) приближается к плоскости $x_3 = 0$ и дальнейший процесс происходит вблизи этой плоскости так, как это было рассмотрено в работе [2]. Таким образом, при выполнении условия (15) наличие резонатора на частоте резонансного поля приводит к тому, что перед запуском изображающая точка находится в области $z \simeq A^{-1}$, а не в области $z \simeq z_0$. В соответствии с этим величина поля, требуемого для запуска системы, возрастает.

Обратимся теперь к случаю, когда $\omega_1 \neq \omega_2$. По-прежнему будем предполагать $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Система (7) имеет пять положений равновесия, лежащих в плоскости $x_1 = x_2$; их координаты в этой плоскости определяются выражениями (13).

Из первых двух уравнений системы (7) видно, что разность $x_1 - x_2$ экспоненциально затухает со временем, т. е. плоскость $x_1 = x_2$ устойчива в четырехмерном фазовом пространстве x_1, x_2, x_3, z . Таким образом, исследование устойчивости положений равновесия системы (7) сводится к рассмотрению устойчивости в плоскости $x_1 = x_2$; эта задача была рассмотрена выше. Поэтому и в случае $\omega_1 \neq \omega_2$ для стационарной генерации комбинационного поля необходимо одновременное выполнение условий (14) и (15).

Прежде чем перейти к численным оценкам, запишем условия устойчивости третьего положения равновесия в случае заданного ((10), (11)) и самосогласованного ((14), (15)) полей в размерном виде:

$$m_2 > \frac{\varepsilon \hbar^3 (1 + T_{12}^2 \Delta^2)}{4\pi \omega_1 N n_0 T_{12} \tau_1 |\sigma|^2}, \quad (10a)$$

$$m_2 > \frac{\hbar^2 |p_{12}|^2 \cos^2 \alpha_{12}^{(3)} \tau_3 \omega_3}{|\sigma|^2 \tau_1 \omega_1} (1 + T_{12}^2 \Delta^2) \frac{1}{1 + T_{12}^2 \delta^2}, \quad (11a)$$

$$N n_0 > \frac{\varepsilon \hbar}{\sqrt{2\pi}} \frac{T T_{12}^{-1/2} (1 + T_{12}^2 \Delta^2)^{1/2}}{|\sigma| [(\tau_1 + \tau_2) \omega_1 \omega_2 \tau_1 \tau_2]^{1/2}}, \quad (14a)$$

$$N n_0 > \frac{\varepsilon \hbar}{\pi} \frac{|p_{12}|^2 \cos^2 \alpha_{12}^{(3)} \omega_3 \tau_3}{|\sigma|^2 \omega_1 \omega_2 \tau_1 \tau_2} T (1 + T_{12}^2 \Delta^2) \frac{1}{1 + T_{12}^2 \delta^2}. \quad (15a)$$

В (15a) учтено, что $z_0 > \alpha^{-1} \gg 1$.

Если $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_3 \simeq 10^{15}$ сек⁻¹, $T_{12} = 10^{-10}$ сек, $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-8}$ сек, $p_{12} = 10^{-20} \div 10^{-21}$ CGSE, $\sigma = 10^{-51}$ CGSE*, $n_0 N = 10^{20}$, $\delta = \Delta = 0$, $\alpha_{12} = 0$, $T = 10^{-6}$ сек, то из (11a) получаем

$$m_2 > (10^6 \div 10^8) \frac{\tau_3}{\tau_1} \text{ CGSE}. \quad (17)$$

Практически легко осуществить $\tau_3/\tau_1 \simeq 10^{-2}$. Тогда для возбуждения комбинационного лазера необходимо, чтобы $m_2 > 10^4 \div 10^6$ CGSE. Из (14a) и (15a) следует

$$N n_0 > 10^{20};$$

$$N n_0 > (10^{20} \div 10^{22}) \tau_3/\tau_1.$$

При $\tau_3/\tau_1 \simeq 10^{-2}$ число возбужденных молекул $N n_0$ не больше 10^{20} . Таким образом, наличие резонатора на частоте перехода между рабочими

* Величина $|\sigma| \sim 10^{-51}$ CGSE в случае, когда вклад всех уровней системы в $|\sigma|$ равноценен действию некоторого s -го эквивалентного уровня, отстоящего от рабочих уровней на $\omega \simeq 10^{15}$ сек⁻¹ и имеющего $|p_{1s}|, |p_{2s}| \simeq 10^{-18}$ CGSE.

уровнями вещества может привести к значительному ухудшению условий возбуждения двухфотонного лазера. Число же возбужденных частиц, необходимых для стационарной генерации комбинационного поля, существенно не изменяется. Вместе с тем, величины комбинационных полей в стационарном режиме при выполнении (14) и (15) те же, что и в отсутствие резонатора на частоте ω_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Garwin, I.V.M. J. Res. Development, 8, 338 (1964).
2. Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 493 (1965).
3. Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 674 (1964).
4. В. Н. Генкин, Я. И. Ханин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 423 (1962).
5. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 513 (1966).
6. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 48, 1087 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 августа 1965 г.

ON RESONANCE FIELD INFLUENCE UPON TWO-PHOTON LASER
OPERATION

V. S. Boutylkin, G. L. Gourevich, M. I. Kheifitz, Yu. G. Khronopulo

It is shown that the presence of the resonator tuned on the frequency of transition between the operating levels of matter considerably deteriorates the conditions of two-photon laser excitation. The system parameters have been determined, at which a stationary regime is possible for its operation.

УДК 621.378.325

О ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В РЕЗОНАНСНОМ ЛАЗЕРЕ

В. С. Бутылкин, Г. Л. Гуревич, М. И. Хейфец, Ю. Г. Хронопуло

Рассмотрен процесс удвоения частоты поля резонансного лазера за счет антистоксова процесса в самом рабочем веществе генератора. Найден условия, при которых в режиме гигантского импульса возможно получение достаточно сильного поля второй гармоники излучения ОКГ.

Поскольку в резонаторе обычного квантового генератора присутствует сильное поле частоты ω и населенности рабочих уровней инвертированы, можно ожидать возникновения поля удвоенной частоты за счет антистоксова процесса в самом рабочем веществе генератора*. Предположение о возможности удвоения частоты излучения лазера таким способом высказывалось в [1].

I. Уравнения, описывающие эти процессы, могут быть получены аналогично уравнениям (5) работы [2]

$$\dot{m}_1 + \tau_1^{-1} m_1 = -b_1 m_1 m_2 n + c m_1 n; \tag{1a}$$

$$\dot{m}_2 + \tau_2^{-1} m_2 = b_2 m_1 m_2 n; \tag{1б}$$

$$\dot{n} + T^{-1} (n - n_0) = -a_1 m_1 m_2 n - a_2 m_1 n, \tag{1в}$$

где $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, c , n_0 и T определяются выражениями (4) из [2], если положить $\omega_1 = \omega_3 = \omega$, $\omega_2 = 2\omega$, $\Delta = \delta$, $\tau_3 = \tau_1$, $\alpha^{(3)} = \alpha^{(1)}$, а в σ заменить ω_2 на -2ω .

Вводя безразмерные переменные

$$x_1 = a_2 T m_1, \quad x_2 = m_2 a_1 / a_2, \quad z = c \tau_1 n \tag{2}$$

и новое время $\theta = T^{-1} t$, получим

$$a_1 \dot{x}_1 + x_1 = x_1 z - x_1 x_2 z, \tag{3a}$$

$$a_2 \dot{x}_2 + x_2 = \beta x_1 x_2 z, \tag{3б}$$

$$\dot{z} + z - z_0 = -x_1 z - x_1 x_2 z, \tag{3в}$$

где

$$a_{1,2} = \tau_{1,2} T^{-1}; \quad \beta = 2 a_1 \tau_2 / a_2^2 T \tau_1, \tag{4}$$

а точка над $x_{1,2}$ и z означает дифференцирование по θ .

Из (4) и формулы (4) работы [2] видно, что при $T_{2,1} \simeq 10^{-11}$ сек, $T \simeq 10^{-6}$ сек, $|\sigma|^2 \simeq 10^{-102} \div 10^{-106}$ CGSE, $|p_{1,2}| \simeq 10^{-20} \div 10^{-21}$ CGSE, величина β меняется в очень широких пределах: от 10^{-1} до 10^{-11} .

В системе (3) имеются следующие положения равновесия:

$$1) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad z = z_0;$$

* Мы будем считать, что ω и 2ω являются собственными частотами резонатора.

$$2) \quad x_1 = z_0 - 1, \quad x_2 = 0, \quad z = 1;$$

$$3,4) \quad x_1 = \frac{(2 - \beta z_0) \pm [(2 - \beta z_0)^2 + 4\beta]^{1/2}}{2\beta}, \quad (5)$$

$$x_2 = \frac{\beta z_0 \mp [(2 - \beta z_0)^2 + 4\beta]^{1/2}}{2},$$

$$z = 2\{(2 - \beta z_0) \pm [(2 - \beta z_0)^2 + 4\beta]^{1/2}\}^{-1}.$$

Четвертое положение равновесия не имеет физического смысла, так как в нем $x_1 \sim |E_1|^2 < 0$ при всех значениях параметров системы. Третье стационарное состояние, в котором генерируются поля обеих частот ω и $2\omega^*$, существует (и устойчиво) при

$$z_0 \geq 1 + \beta^{-1}. \quad (6)$$

Легко показать, что значение равновесной населенности, при котором второе положение равновесия становится неустойчивым, также определяется соотношением (6). Условие неустойчивости первого стационарного состояния, естественно, совпадает с условием самовозбуждения системы на частоте ω при a_1 (или τ_2) = 0: $z_0 \geq 1$.

Приведем оценку величины разности населенностей, при которой может быть выполнено условие возбуждения второй гармоники. С помощью (2), (4) и (4) работы [2] условие (6) можно переписать в виде ($\beta \ll 1$):

$$Nn_0 \gtrsim \frac{\hbar |p_{12}|^2 T}{2\pi |\sigma|^2 \tau_2 \omega}. \quad (7)$$

Если $|p_{12}| \approx 10^{-20} \div 10^{-21}$ CGSE, $T \approx 10^{-6}$ сек, $|\sigma|^2 \approx 10^{-103}$ CGSE, $\omega \approx 10^{15}$ сек $^{-1}$, $\tau_2 \approx 10^{-8}$ сек, величина Nn_0 должна быть порядка $10^{19} \div 10^{21}$. Таким образом, стационарный режим генерации поля удвоенной частоты даже для самых благоприятных значений параметров системы может быть осуществлен лишь при достаточно большом числе возбужденных частиц.

Величину разности населенностей такого порядка удастся получить при работе лазера в режиме импульсной добротности. Представляет интерес рассмотреть возможность генерации второй гармоники в этом режиме.

2. Прежде всего заметим, что, как следует из (3), при $x_1 z < \beta^{-1}$ движение изображающей точки происходит в плоскости $x_2 = 0$ и является устойчивым по отношению к малым флуктуациям поля двойной частоты. Неустойчивость появляется при выполнении обратного неравенства. Поэтому генерация второй гармоники будет происходить на тех участках траекторий, проекции которых на плоскость $x_2 = 0$ лежат выше гиперболы $x_1 z = \beta^{-1}$ (см. рис. 1). При этом в уравнении (3в) можно пренебречь $|z - z_0|$ по сравнению с $x_1 z$, если для всех z , лежащих между точками пересечения этой гиперболы с соответствующей фазовой траекторией системы, удовлетворяется условие

$$\beta |z - z_0| \ll 1. \quad (8)$$

Как видно из (7), при $|p_{12}| \geq 10^{-20}$ CGSE и $n_0 N \leq 10^{20}$ выполняется более сильное условие $\beta z_0 \ll 1$ (это означает, что стационарное излучение поля

* Заметим, что в этом положении равновесия величина второго поля ограничена: $m_2 \leq a_2/a_1$, как это следует из (2) и (5).

частоты 2ω невозможно). Поэтому ниже мы будем предполагать, что условие (8) выполняется.

Рассмотрим поведение системы при $x_2 \ll 1$ ($m_2 \ll a_2/a_1$); тогда изменение величин x_1 и z можно приближенно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{x}_1 + x_1 &= x_1 z, \\ \dot{z} &= -x_1 z, \end{aligned} \quad (9)$$

а величину x_2 определить из (3б).

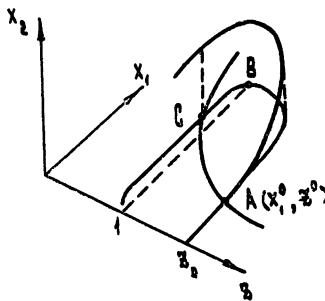


Рис. 1.

Уравнение невозмущенной траектории, проходящей через точку

$$x_1^0 = x_1(0), \quad z^0 = z(0), \quad (10)$$

имеет вид [3]

$$x_1 = x_1^0 + \alpha_1^{-1} \left(\ln \frac{z}{z^0} + z^0 - z \right). \quad (11)$$

Одна из таких фазовых траекторий, проходящая через интересующую нас область $x_1 z > \beta^{-1}$, изображена на рис. 1 (кривая ABC).

Решение уравнений (9) с начальными условиями (10) при $1 \leq z \leq z^0$ (участок AB) можно записать в виде

$$z = z^0 \left(1 + \frac{\alpha_1 x_1^0}{z^0} \right) \left\{ 1 + \frac{\alpha_1 x_1^0}{z^0} \exp \left[(z^0 + \alpha_1 x_1^0) \frac{\theta}{\alpha_1} \right] \right\}^{-1}. \quad (12)$$

При интегрировании на этом участке траектории в подынтегральной функции отброшена величина $\ln \frac{z}{z^0}$ по сравнению с $|z^0 - z|$. Для $z \leq 1$ (участок BC) можно считать $z \ll z^0$, поскольку мы предполагаем, что в режиме импульсной добротности $z^0 \gg 1$; в этом случае решение имеет вид

$$z = z^0 \exp \left[z^0 \left(e^{-\frac{\theta'}{\alpha_1}} - 1 \right) - e^{-\frac{\theta'}{\alpha_1}} \ln z^0 \right]. \quad (13)$$

Здесь θ' — время, через которое безразмерная населенность изменится от z^0 до единицы:

$$\theta' = \frac{\alpha_1}{z^0 + \alpha_1 x_1^0} \ln \left[z^0 (\alpha_1 x_1^0)^{-1} (z^0 + \alpha_1 x_1^0 - 1) \right]. \quad (14)$$

Воспользовавшись (36), (11) и (12), можно найти $x_2(\theta)$ при $\theta' \geq \theta \geq 0$:

$$x_2 = x_2(0) \exp \left\{ \beta \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^0 \left\langle \exp \left[(z^0 + \alpha_1 x_1^0) \frac{\theta}{\alpha_1} \right] - 1 \right\rangle \times \right. \\ \left. \times \left\langle 1 + \frac{\alpha_1 x_1^0}{z^0} \exp \left[(z^0 + \alpha_1 x_1^0) \frac{\theta}{\alpha_1} \right] \right\rangle^{-1} - \alpha_2^{-1} \theta \right\}. \quad (15)$$

Вычислим $x_2(\theta')/x_2(0)$ при условии

$$\frac{\alpha_1 x_1^0}{z^0} = \frac{\alpha_1}{\beta (z^0)^2} \ll 1. \quad (16)$$

Впоследствии мы убедимся, что только при выполнении этого неравенства в системе возможно существенное нарастание поля второй гармоники. С помощью (14)–(16) получим

$$\frac{x_2(\theta')}{x_2(0)} = \left[\frac{\alpha_1}{\beta (z^0)^3} \right]^{\alpha_1/\alpha_2 z^0} e^{\beta z^0/\alpha_2}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что заметное нарастание x_2 на участке AB имеет место при*

$$\beta z^0/\alpha_2 > 1. \quad (18)$$

Если α_1 и α_2 одного порядка, то условие (16) при выполнении (18) всегда имеет место (так как $z^0 \gg 1$). Отметим, что в этом случае (18) является также условием того, что рассматриваемая фазовая траектория пересекает гиперболу $x_1 z = \beta^{-1}$ при $z < 1$.

Оценим теперь нарастание x_2 на участке BC . Воспользовавшись (36), (11) и (13), при условии (16) получим

$$x_2(\theta) = x_2(\theta') \exp \left\{ \frac{\beta}{\alpha_2} \left[1 - \exp \left\langle \left[\exp \left(\frac{\theta' - \theta}{\alpha_1} \right) - 1 \right] (z^0 - \ln z^0) \right\rangle \right] + \frac{\theta' - \theta}{\alpha_2} \right\}. \quad (19)$$

Легко видеть, что первое слагаемое в показателе экспоненты, описывающее усиление на этом участке, всегда меньше $\beta \alpha_2^{-1} \approx 1$. Поэтому усиление x_2 на всем отрезке ABC можно вычислить по формуле (17).

Приведем некоторые численные оценки. Используя (4) из работы [2], а также формулы (2) и (4), условие (18) можно переписать в виде

$$n^0 N \geq \frac{\hbar |p_{12}|^2}{2\pi \omega |\sigma|^2}, \quad (20)$$

где $n^0 N$ есть полное число возбужденных частиц в момент $t = 0$. Приближенно можно считать $n^0 N$ равным разности населенностей рабочих уровней $n_0 N$ в начале гигантского импульса. Как следует из (20) и (7), число возбужденных частиц, необходимых для существенного усиления поля второй гармоники в импульсном режиме, меньше числа частиц, при котором возможна стационарная генерация этой гармоники, в τ_2/T раз. Для $|p_{12}| \approx 10^{-20}$ CGSE, $|\sigma|^2 \approx 10^{-102}$ CGSE, $\omega \approx 10^{15}$ сек $^{-1}$ величина $n^0 N$ из (20) должна быть порядка $2 \cdot 10^{19}$ частиц.

Определим при этих же значениях параметров населенность, необходимую для получения $m_2 \approx 10^6$ CGSE. Формула (17) в этом случае

* Коэффициент при экспоненте в (17) для $z^0 \gg 1$ мало отличается от единицы.

применима, так как x_2 становится равным единице при $m_2 \simeq 10^8$ CGSE; выполняются также условия (8) и (16). Примем, что величина $m_2(0)$ (соответственно, и $x_2(0)$) определяется энергией шумов на частоте 2ω в точке А. Тогда, согласно [4], а также (2), (4), $x_2(0) = \frac{2\omega |\sigma|^2}{\hbar |p_{12}|^2} \simeq 10^{-20}$

и искомая разность населенностей должна быть порядка $7 \cdot 10^{20}$; при $|p_{12}| \simeq 10^{-21}$ CGSE необходимо иметь $n^0 N = 7 \cdot 10^{18}$.

В заключение отметим, что удвоение частоты лазера и в режиме гигантского импульса возможно лишь при выполнении ряда жестких требований к веществу генератора: кроме большой величины $|\sigma|^2$ для выполнения (20) при практически достижимых значениях $n^0 N$ необходимо, чтобы переход 2—1 был сильно запрещен $|p_{12}| \ll 10^{-20}$ CGSE.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, Э. Т. Яшин, ЖЭТФ, **46**, 695 (1964).
2. В. С. Бутылкин, Г. Л. Гуревич, М. И. Хейфец, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, 539 (1966).
3. W. G. Wagner, B. A. Lengyel, J. Appl. Phys., **34**, 2040 (1963).
4. В. М. Файн, Я. И. Ханнин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 августа 1965г.

ON SECOND HARMONIC GENERATION IN RESONANT LASER

V. S. Butykin, G. L. Gourevich, M. I. Kheifitz, Yu. G. Khronopulo

The process has been considered of frequency doubling of a resonant laser field, caused by Antistokes process in the operating matter of the generator. The conditions have been estimated at which it is possible to obtain the sufficient strong field of the second harmonic of laser radiation.

УДК 621.378.001

ОБ УДВОЕНИИ ЧАСТОТЫ СХОДЯЩИХСЯ И ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ СВЕТА

Г. И. Фрейдман

В приближении заданного поля первичного пучка получено выражение для коэффициента преобразования и диаграммы направленности вторичного излучения при удвоении частоты сфокусированного когерентного светового пучка. Выяснена зависимость среднего коэффициента преобразования и ширины частотного спектра преобразованного излучения от ширины частотного и углового спектров частично когерентного первичного пучка.

При рассмотрении удвоения частоты световых пучков с конечной угловой расходимостью эти пучки обычно разбивают на расходящиеся лучевые трубки и считают, что взаимодействие колебаний разных частот в каждой трубке происходит так же, как и взаимодействие в плоских волнах с волновыми векторами, параллельными оси трубки [1, 2]. Такое представление процесса удвоения частоты довольно естественно для пучков, конечная расходимость которых связана со сферичностью падающей на нелинейный кристалл волны. Не совсем ясно, однако, как оно соответствует процессу удвоения частоты пучка, расходимость которого обусловлена присутствием в пучке колебаний с различной структурой поля в поперечном сечении (частично когерентный пучок). Кроме того, указанный выше способ рассмотрения, который естественно назвать рассмотрением в приближении геометрической оптики, не позволяет оценить точность полученных результатов и заведомо неудовлетворителен при рассмотрении процесса преобразования частоты в фокусе линзы, через которую проходит первичный пучок.

В то же время в приближении заданного поля первой гармоники для поля удвоенной частоты можно, как показано в разделе 1 настоящей работы, получить точные интегральные выражения*. Вычисляя полученные интегралы с известной степенью точности, для некоторых основных типов пучков легко получить сравнительно простые формулы для коэффициента преобразования, диаграммы направленности и частотного спектра вторичного излучения. Из результатов, полученных таким способом в разделах 2, 3, ясно следующее.

1) Влияние конечной угловой расходимости первичного пучка на коэффициент преобразования в простейших случаях практически не зависит от того, связана ли расходимость с частичной некогерентностью пучка или со сферичностью волны когерентного пучка. При этом, как и следовало ожидать, зависимость коэффициента преобразования от величины угловой расходимости получается такой же, как и в приближении геометрической оптики [2].

2) При фокусировке когерентного пучка (сферические волны) коэффициент преобразования при оптимальном выборе фокусного расстоя-

* Аналогичные выражения получены в работе [3]. Однако функция Грина в анизотропной среде выбрана в ней неточно [4].

ния линзы может быть увеличен на несколько порядков, в то время как при фокусировке частично когерентного пучка он может даже уменьшиться.

3) При довольно часто реализуемых в эксперименте условиях на величину коэффициента преобразования оказывает существенное влияние конечность ширины частотного спектра первичного пучка. При этом ширина линии спектра преобразованного излучения будет заметно меньше ширины линии первичного пучка.

1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ИСТОЧНИКАМИ, НАХОДЯЩИМИСЯ В ПЛАСТИНЕ С АНИЗОТРОПНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Поле первичного пучка света в кристалле с нелинейными свойствами (для определенности в дальнейшем будем говорить о кристалле КДР), помещенного в поле излучения оптического квантового генератора, генерирующего несколько типов колебаний, можно записать в виде

$$E_1 = \sum_{\nu} \sum_{j=0, e} e_{\nu j} A_{\nu j}(\eta) e^{i\varphi_{\nu j}} \psi_{\nu j}(r_{\perp}; z) \exp[-i(\omega_{\nu} t - k_{\nu} n_{\nu}^j z)] + \text{к. с.} \quad (1)$$

Здесь $\eta = t - (z_0 s_{\nu j}) z v_{\nu j}^{-1}$, $v_{\nu j}$ — групповая скорость нормальной волны с поляризацией $e_{\nu j}$ и частотой ω_{ν} , распространяющейся вдоль оси пучка (ось z), $s_{\nu j}$ и n_{ν}^j — ее лучевой вектор и показатель преломления соответственно, $A_{\nu j}(\eta)$ — настолько медленные функции, что их аргумент можно считать параметром*, они существенно отличаются от нуля только для частот ω_{ν} , близких к центральной частоте пучка ω_1 , $\psi_{\nu j}(r_{\perp}; z)$ — функции, мало меняющиеся на расстояниях порядка длины волны и характеризующие распределение поля излучения, соответствующее типу колебаний резонатора оптического квантового генератора с индексом ν и поляризацией $e_{\nu j}$, $\varphi_{\nu j}$ — фазы этих колебаний, $k_{\nu} = \omega_{\nu}/c$.

Если пренебречь обратным воздействием поля удвоенной частоты** на поле первичного пучка, то функции $\psi_{\nu j}(r_{\perp}; z)$ можно считать заданными и при отсутствии поглощения нормированными так, что $\int dr_{\perp} |\psi_{\nu j}|^2 = 1$. Тогда определение поля второй гармоники сводится, очевидно, к задаче об излучении заданного распределения поляризации P_2 , созданной первичным пучком в пластине вещества с нелинейными свойствами, или соответствующего стороннего тока J_2 , которые определяются выражениями

$$P_2 = \sum_{\nu j} \sum_{\mu k} P_{\nu j; \mu k} + \text{к. с.}; \quad J_2 = \sum_{\nu j} \sum_{\mu k} J_{\nu j; \mu k} + \text{к. с.}; \quad (1.2)$$

$$P_{\nu j; \mu k} = (\hat{\chi}_{\nu\mu} : e_{\nu j} e_{\mu k}) (A_{\nu j} A_{\mu k}) \psi_{\nu j} \psi_{\mu k} e^{i\varphi_{\nu\mu}} \times \\ \times \exp\{-i(\omega_{\nu\mu} t - z(k_{\nu} n_{\nu}^j + k_{\mu} n_{\mu}^k))\}; \quad J_{\nu j; \mu k} = -i\omega_{\nu\mu} P_{\nu j; \mu k},$$

где

$$\omega_{\nu\mu} = \omega_{\nu} + \omega_{\mu}; \quad \varphi_{\nu\mu} = \varphi_{\nu j} + \varphi_{\mu k}; \quad \hat{\chi}_{\nu\mu} = \hat{\chi}(\omega_{\nu}; \omega_{\mu})$$

— тензор нелинейной восприимчивости третьего ранга.

* Это справедливо, поскольку практически всегда выполняются условия [6] $L \left| \left(\frac{1}{v_{\nu j}} - \frac{1}{v_{\nu\mu j}} \right) \right|^{-1} \ll \tau$; $Lc^{-1} \ll \tau$, где τ — характерное время изменения амплитуд $A_{\nu}(t)$, L — толщина пластинки, $v_{\nu j}$ — групповая скорость волны с частотой $\omega_{\nu\mu} = \omega_{\nu} + \omega_{\mu}$.

** Это, по-видимому, справедливо [5] вплоть до коэффициентов преобразования $25 \div 30\%$.

Из выражения (2) для стороннего тока \mathbf{j}_2 видно, что на выходе пластинки кристалла КДР (плоскость $z = 0$) возбуждаемое за счет его нелинейных свойств поле \mathbf{E}_2 будет суперпозицией полей с частотами $\omega_{\nu\mu}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \sum_{\nu j} \sum_{\mu k} \mathbf{E}_{\nu j; \mu k}(\mathbf{r}; t) e^{-i\omega_{\nu\mu} t} + \text{к. с.}; \\ \mathbf{H}_2 &= \sum_{\nu j} \sum_{\mu k} \mathbf{H}_{\nu j; \mu k}(\mathbf{r}; t) e^{-i\omega_{\nu\mu} t} + \text{к. с.}; \\ \mathbf{E}_{\nu j; \mu k} &= \sum_{m=1}^2 \int d\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{e}_m(\mathbf{k}_{\nu\mu}) \mathcal{E}_{\nu\mu}^{(m)}(\mathbf{k}_{\perp}; t) e^{i\mathbf{k}_{\nu\mu} \mathbf{r}}; \\ \mathbf{H}_{\nu j; \mu k} &= + \sum_i \int_{m=1}^2 d\mathbf{k}_{\perp} \left[\frac{\mathbf{k}_{\nu\mu}}{k_{\nu\mu}} \mathbf{e}_m \right] \mathcal{E}_{\nu\mu}^{(m)}(\mathbf{k}_{\perp}; t) e^{i\mathbf{k}_{\nu\mu} \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$k_{\nu\mu} = |\mathbf{k}_{\nu\mu}|; [\mathbf{e}_m(\mathbf{k}_{\nu\mu}) \mathbf{k}_{\nu\mu}] = [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}_{\nu\mu}) \mathbf{e}_z(\mathbf{k}_{\nu\mu})] = 0; \mathbf{e}_m^2 = 1.$$

Амплитуды $\mathcal{E}_{\nu\mu}^{(m)}(\mathbf{k}_{\perp}; t)$ легко найти по теореме взаимности [7]:

$$\mathcal{E}_{\nu\mu}^m(\mathbf{k}_{\perp}; t) = - \frac{k_{\nu\mu}}{2\pi c \sqrt{k_{\nu\mu}^2 - k_{\perp}^2}} \sum_{i; k} \int_L^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_{\perp} (\mathbf{j}_{\nu j; \mu k} E_m^0(-\mathbf{k}_{\nu\mu}; z < 0)). \quad (1.4)$$

Здесь принято, что кристалл КДР ограничен плоскостями $z = -L$ и $z = 0$, а $\mathbf{E}_m^0(-\mathbf{k}_{\nu\mu}; z < 0)$ — поле в пластине КДР, созданное при падении на нее из области $z > 0$ плоской волны единичной амплитуды с частотой $\omega_{\nu\mu}$, волновым вектором $(-\mathbf{k}_{\nu\mu})$ и поляризацией $\mathbf{e}_m(\mathbf{k}_{\nu\mu})$.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда направление оси первичного пучка (оси z) близко к направлению синхронизма обыкновенной и необыкновенной волн с частотами ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$ соответственно. Оптическую ось кристалла будем считать лежащей в плоскости xz под углом θ_0 к оси z . Тогда, принимая во внимание, что угловой развор как первичного, так и вторичного пучка мал, в выражениях (1.1), (1.3) учтем только те волны, для которых $\mathbf{e}_{\nu j} \simeq \mathbf{y}_0$; $\mathbf{e}_m \simeq \mathbf{x}_0$, и в показателе экспоненты ограничимся линейными и квадратичными по \mathbf{k}_{\perp} слагаемыми. Кроме того, показатель преломления кристалла КДР для обыкновенной и необыкновенной волн близок к единице, а анизотропия мала. Поэтому с точностью до нескольких процентов можно пренебречь вторичными отражениями от пластинки и записать $\mathbf{E}_m^0(-\mathbf{k}_{\nu\mu}; z < 0)$ в виде поля преломленной волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m^0(-\mathbf{k}_{\nu\mu}; z < 0) &= \hat{\beta} \mathbf{x}_0 \exp \left\{ -i \left[k_{\nu\mu} n_{\nu\mu}^e - \alpha_{\nu\mu} k_x - \frac{n_{\nu\mu}^e}{2k_{\nu\mu}} \left(\frac{n_{\nu\mu}^e}{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}} k_x^2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \epsilon_{\parallel}^{-1} k_y^2 \right) \right] z - i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r} \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\hat{\beta} \mathbf{x}_0$ — амплитуда поля этой волны, соответствующая падающей волне единичной амплитуды, поляризованной вдоль оси \mathbf{x}_0^* ; $n_{\nu\mu}^e$ — пока-

* Вследствие малой анизотропии кристалла КДР ($\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel} \simeq 0,1$) с точностью до слагаемого порядка $(\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel})$ можно считать $\hat{\beta} \mathbf{x}_0 = \beta \mathbf{x}_0$, где β — скаляр, близкий к единице.

затель преломления необыкновенной волны с частотой $\omega_{\nu\mu}$, распространяющейся вдоль оси z , и коэффициент $\alpha_{\nu\mu}$, характеризующий анизотропию, определяются выражениями

$$n_{\nu\mu}^e = \left(\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta_0 + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta_0} \right)^{1/2}; \quad \alpha_{\nu\mu} = \frac{\sin 2\theta_0 (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})}{2(\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta_0 + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta_0)},$$

где ε_{\perp} и ε_{\parallel} — главные значения тензора диэлектрической проницаемости на частоте $\omega_{\nu\mu}$. Пренебрегая, кроме того, в предэкспоненциальных множителях слагаемыми порядка $(\omega_1 - \omega_{\nu\mu})\omega_1^{-1}$; $k_{\perp}^2 k_1^{-2}$, из (1.4), (1.5) получим

$$\varepsilon_{\nu\mu}(\mathbf{k}_{\perp}; t) = \frac{i\omega_2}{2\pi c} (\hat{\beta} x_0 p_{\nu\mu}) A_{\nu}(t) A_{\mu}(t) e^{i\nu_{\nu\mu} t} f_{\nu\mu}(\mathbf{k}_{\perp}), \quad (1.7a)$$

$$f_{\nu\mu}(\mathbf{k}_{\perp}) = - \int_{-L}^0 dz \psi_{\nu\mu}(\mathbf{k}_{\perp}; z) \exp(-iX_{\nu\mu} z), \quad (1.7б)$$

$$\psi_{\nu\mu}(\mathbf{k}_{\perp}; z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_{\perp} \psi_{\nu}(\mathbf{r}_{\perp}; z) \psi_{\mu}(\mathbf{r}_{\perp}; z) e^{-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}}, \quad (1.7в)$$

$$X_{\nu\mu} = k_{\nu\mu} n_{\nu\mu}^e - k_{\nu} n_{\nu}^0 - k_{\mu} n_{\mu}^0 - d_{\nu\mu} k_x - \frac{n_{\nu\mu}^e}{2k_{\nu\mu}} \left[\frac{n_{\nu\mu}^e}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} k_x^2 + \varepsilon_{\parallel}^{-1} k_y^2 \right]. \quad (1.7г)$$

Здесь $\omega_2 = 2\omega_1$, n_{ν}^0 — показатель преломления обыкновенной волны с частотой ω_{ν} .

2. УДВОЕНИЕ ЧАСТОТЫ СХОДЯЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

Основные закономерности влияния параметров первичного пучка на коэффициент преобразования и диаграмму направленности излучения с удвоенной частотой, а также возможность упрощения выражений для этих величин в общем случае легко увидеть на примере преобразования когерентного пучка света. Будем считать, что синфазный в плоскости $z = -z_1 \leq -L$ пучок частоты ω_1 с гауссовым распределением амплитуды в поперечном сечении проходит через линзу с фокусным расстоянием F , расположенную в плоскости $z = -z_1$. Чтобы не делать расчеты громоздкими, будем считать, что при $z < -L$ показатель преломления среды равен показателю преломления обыкновенной волны в кристалле КДР*.

Зависимость $\psi_1(\mathbf{r}_{\perp}; z)$ за плоскостью линзы, а следовательно, и функцию $\psi_{11}(\mathbf{k}_{\perp}; z)$, определяемую соотношением (1.7в), можно вычислить, пользуясь известными формулами квазиоптики (см., например, [8]):

$$\psi_{11}(\mathbf{k}_{\perp}; z) = F \frac{F - 2(z + z_1) - i[M(F - z - z_1) + (z + z_1)M^{-1}]}{[(F - z - z_1)^2 + (z + z_1)^2 M^{-2}](1 + M^2)} \times \exp \left\{ - \frac{\rho^2 k_{\perp}^2}{4(1 + M^2)} \left[1 + i \left(M \frac{F - (z + z_1)}{F} - \frac{z + z_1}{F} M^{-1} \right) \right] \right\}, \quad (2.1)$$

* Это приведет только к тому, что в полученных ниже формулах будет фигурировать некоторое эффективное фокусное расстояние линзы, отличающееся от истинного множителем, близким к единице. Связь с истинными параметрами пучка и фокусирующего устройства легко получить, учитывая, что при выводе (2.1) предполагалось

$$\psi_1(\mathbf{r}_{\perp}; -z_1) = (\pi\rho)^{-1/2} \exp \left[- \frac{1}{2\rho^2} + i \frac{k_1 n_1^0}{2F} \right] r_{\perp}^2.$$

где $M = \rho^2 k_1 n_1^0 / F$ определяет уменьшение радиуса пучка в фокусе линзы.

Если пластинка КДР достаточно тонка, так что $L \ll F$, и находится далеко от фокуса линзы, то при вычислении интеграла (1.76) в предэкспоненциальном множителе правой части (2.1) можно считать $z = -L/2$. Легко видеть, что это эквивалентно предположению о независимости амплитуды функции $\psi_1(\mathbf{r}_\perp; z)$ внутри пластинки от продольной координаты. Тогда интеграл по z в выражении (1.76) легко вычисляется. Например, при $z_1 = L$, когда линза находится на поверхности пластинки, получим

$$\varepsilon_{11}(\mathbf{k}_\perp) = \frac{i\omega_2}{2\pi c} (\beta^2 x_0 p_{11}) A_1^2 \frac{1-iM}{1+M^2} L \frac{\sin X_1}{X_1} \exp \left[-\frac{\rho^2 k_\perp^2}{4(1+M^2)} + iX_2 \right]. \quad (2.2)$$

Здесь X_2 — несущественный в дальнейшем фазовый множитель, а X_1 определяется выражением

$$X_1 = \frac{L}{2} [k_{11} (n_{11}^e - n_1^0) - \alpha_{11} k_x - (2k_{11})^{-1} (\alpha^{(1)} k_x^2 + \alpha^{(2)} k_y^2)], \quad (2.3)$$

где

$$\alpha^{(1)} = \frac{n_{11}^e}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} - \frac{1}{n_1^0}; \quad \alpha^{(2)} = \frac{n_{11}^e}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{n_1^0}.$$

Если в (2.3) существенны два последние слагаемые, то диаграмма направленности излучения на удвоенной частоте, пропорциональная $\frac{\sin^2 X_1}{X_1^2} \exp \left[-\frac{\rho^2 k_\perp^2}{2(1+M^2)} \right]$, существенно отличается от полученной в приближении геометрической оптики. Однако вследствие малой анизотропии и близости оси пучка к направлению синхронизма множители $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ — порядка α_{11} . Поэтому при $|k_\perp|_{\max} k_{11}^{-1} \ll 1$, т. е. в пределах применимости квазиоптического приближения, учет в выражении (2.3) слагаемых, пропорциональных k_x^2 , k_y^2 , приведет лишь к незначительному искажению диаграммы направленности системы $X_1^{-2} \sin^2 X_1$, причем за пределами ее главного лепестка. Отбрасывая эти слагаемые* и аппроксимируя функцию $X_1^{-2} \sin^2 X_1$ экспонентой**:

$$\exp \left[-\frac{\alpha_{11}^2 L^2}{4\pi} (k_p - k_x)^2 \right],$$

в которой $k_p = \alpha_{11}^{-1} k_{11} (n_{11}^e - n_1^0)$ определяет угол θ_p между направле-

* Следует отметить, что это эквивалентно отбрасыванию слагаемых, пропорциональных k_\perp^2 , непосредственно в фазовых множителях выражений (2.1), (1.7), что приводит к незначительным изменениям только при определении коэффициента преобразования и диаграммы направленности излучения на удвоенной частоте вблизи главного лепестка. При отыскании же распределения поля второй гармоники на выходе из пластинки КДР такое приближение может привести к значительным ошибкам, поскольку в фазовом множителе X_2 коэффициенты перед $k_\perp^2 k_1^{-1} L$ порядка единицы.

** Показатель экспоненты выбран из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_1^{-2} \sin^2 X_1 dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \exp [-X_1^2/\pi].$$

При такой аппроксимации вычисленное значение мощности второй гармоники будет, как легко видеть, отличаться от истинного не больше, чем на 20% по крайней мере при $\theta_p < \Delta\theta_c/2 = \pi(\alpha_{11} L k_{11} n_{11}^e)^{-1}$. Это подтверждается и непосредственным сравнением с точным значением соответствующего интеграла, вычисленного в работе [2].

нием полного синхронизма и осью первичного пучка ($\theta_p = k_p/k_1 n_1^0$), для полной мощности излучения на второй гармонике $P_2 = 2\pi c \int dk_{\perp} |\varepsilon_{11}(k_{\perp})|^2$ получим выражение

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4\pi^3 \omega_2^2}{c^3 (n_1^0)^2} (\hat{\beta} x_0 p_{11})^2 \frac{P_1}{2\pi \rho^2} L^2 \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\theta_n^2}{\Delta\theta_c^2}\right)^{-2} \times \exp\left[-\frac{\pi\theta_p^2}{\Delta\theta_c^2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\theta_n^2}{\Delta\theta_c^2}\right)^{-1}\right]. \quad (2.4)$$

Здесь P_1 — мощность первичного пучка, $\Delta\theta_c = 2\pi (\alpha_{11} L k_{11} n_{11}^e)^{-1}$ — половина угла между нулями диаграммы направленности системы в плоскости xz ,

$$\Delta\theta_n = \frac{\rho}{F} (1 + M^{-2})^{1/2} \simeq \frac{\rho}{F}$$

характеризует угловую ширину первичного пучка. При $\Delta\theta_n \ll \Delta\theta_c$ и $\theta_p = 0$ выражение (2.4) совпадает с коэффициентом преобразования для плоской волны [5] (с плотностью потока мощности $P_1/\pi (V\sqrt{2}\rho)^2$). С увеличением же отношения $\Delta\theta_n/\Delta\theta_c$ коэффициент преобразования, как и следовало ожидать [1, 2], уменьшается.

Рассмотрим теперь случай, когда фокус линзы лежит в середине пластины КДР ($z_1 = F - L/2$). При этом с точностью до слагаемых, пропорциональных отношению $L/2F$, которое будем считать много меньше единицы, выражение (1.7) для амплитуд $\varepsilon_{11}(k_{\perp})$ можно записать в виде

$$\varepsilon_{11}(k_{\perp}) = \frac{i\omega_2}{2\pi c} A_1^2 \frac{M^2}{1 + M^2} [f(X'_1)]^{1/2} \exp\left\{-\frac{\rho^2 k_{\perp}^2}{4(1 + M^2)} - iX'_2\right\}. \quad (2.5)$$

Здесь X'_2 — несущественный в дальнейшем фазовый множитель, а диаграмма направленности системы $f(X'_1)$ определяется выражениями

$$[f(X'_1)]^{1/2} = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{\exp(iX'_1 \xi)}{1 + \xi^2} d\xi; \quad (2.6)$$

$$X'_1 = \frac{F}{M} [k_{11}(n_{11}^e - n_1^0) - \alpha_{11} k_x - (2k_{11})^{-1} (\alpha^{(1)} k_x^2 + \alpha^{(2)} k_y^2)],$$

где $\xi_0 = ML/2F$.

Слагаемые, пропорциональные k_x^2 , k_y^2 , так же, как и в предыдущем случае, можно без существенной погрешности опустить. Тогда при $\xi_0^2 \ll 1$ диаграмма направленности излучения удвоенной частоты определяется произведением $X_1^{-2} \sin^2 X_1 \exp\left[-\frac{\rho^2 k_{\perp}^2}{2(1 + M^2)}\right]$, а выражение для коэффициента преобразования за счет увеличения поля первой гармоники в фокусе линзы отличается от выражения (2.4) множителем $M^4(1 + M^2)^{-1}$. При совпадении оси синхронизма и оси пучка запишем коэффициент преобразования в виде*.

* Следует отметить, что полученная при аналогичных предположениях в работе [3] формула дает более быстрое уменьшение P_2 при изменении $\Delta\theta_n \Delta\theta_c^{-1}$ от 0 до 2. При $\Delta\theta_n \Delta\theta_c^{-1} > 2$ отношение значений P_2 , вычисленных по формуле (2.7) и аналогичной формуле работы [3], равно 2. Это, по-видимому, связано с использованием в [3] неточного выражения для функции Грина в анизотропной среде [4].

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4\pi^3 \omega_2^2}{c^3 (n_1^0)^2} (\hat{\beta} x_0 p_{11})^2 \frac{P_1}{2\pi \rho^2} L^2 \frac{M^4 (M^2 + 1)^{-1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2\pi} (\alpha_{11} L / \rho)^2 (M^2 + 1)}}. \quad (2.7)$$

При ξ_0 , сравнимом и большим единицы, становится существенным изменение поля первичного пучка в пластинке КДР вдоль оси z . Когда $\xi_0^2 \gg 1$, диаграмма направленности системы при $(n_{11}^e - n_1^0) = 0$:

$$f(X_1) = 4\pi^2 \begin{cases} \exp \left[-2 \frac{\alpha_{11} F}{M} k_x \right] & \text{при } k_x > 0 \\ 0 & \text{при } k_x < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

не зависит от толщины пластинки, а коэффициент преобразования при $n_{11}^e = n_1^0$ определяется выражением

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{8\pi^3 \omega_2^2}{c^3 (n_1^0)^2} (\hat{\beta} x_0 p_{11})^2 \frac{P_1}{2\pi \rho^2} (\pi F)^2 e^{x^2} (1 - \Phi(X)). \quad (2.9)$$

Здесь

$$X = \sqrt{2} \frac{\alpha_{11} F}{\rho}; \quad \Phi(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-t^2} dt$$

— интеграл вероятности.

На рис. 1 сплошными линиями показана зависимость от фокусного



Рис. 1. Графики зависимости выигрыша фокусировки B от F при $\alpha_{11} = 0,03$, $L = 1$ см, $\lambda_1 = 10^{-4}$ см и радиусах первичного пучка а) $\rho = 0,25$ см; б) $\rho = 0,1$ см.

расстояния F отношения коэффициента преобразования сфокусированного пучка к коэффициенту преобразования несфокусированного пучка (т. е. выигрыша фокусировки B). Эта зависимость построена с помощью (2.4) (при $F \rightarrow \infty$) и соотношений (2.7), (2.9) в пределах применимости последних. Из рис. 1 видно, что выигрыш фокусировки существенно зависит от радиуса пучка на входе в линзу и для широких пучков может достигать 10^3 . Следует, однако, иметь в виду, что это справедливо лишь для когерентных пучков. Для частично когерентных пучков выигрыш может быть существенно меньше (см. раздел 3).

3. ВЛИЯНИЕ МНОГОМОДОВОГО ХАРАКТЕРА ИЗЛУЧЕНИЯ ОКГ НА УДВОЕНИЕ ЧАСТОТЫ

При исследовании преобразования частично когерентного пучка представляет интерес выяснить влияние его частотного и углового спектров на диаграмму направленности, флуктуации интенсивности, средний частотный спектр и средний коэффициент преобразования вторичного

пучка. Мы рассмотрим только последние два вопроса*, ограничившись при этом простейшим случаем, когда фазы φ , отдельных типов колебаний оптического квантового генератора можно считать статистически независимыми. Тогда выражение для средней по ансамблю измерений мощности излучения удвоенной частоты на выходе из пластины КДР $\langle P_2(t) \rangle$ можно записать [9] в виде

$$\langle P_2(t) \rangle = \frac{\omega_2^2}{2\pi c} (\hat{\beta} x_0 p_{11})^2 \left\{ \sum_{\nu} \langle A_{\nu}^4(t) \rangle \int dk_{\perp} |f_{\nu\nu}(k_{\perp})|^2 + 2 \sum_{\nu} \sum_{\mu \neq \nu} \langle A_{\nu}^2(t) A_{\mu}^2(t) \rangle \int dk_{\perp} |f_{\nu\mu}(k_{\perp})|^2 \right\}. \quad (3.1)$$

При достаточно малой толщине пластинки КДР ($k_{\perp \max} L / k_1 \ll 1$) амплитуды полей первичного нефокусированного пучка можно считать не зависящими от z и, в соответствии с результатами раздела 2, воспользоваться соотношением

$$\int dk_{\perp} |f_{\nu\mu}(k_{\perp})|^2 = L^2 \int dk_{\perp} \frac{\sin^2 X_{\nu\mu}}{X_{\nu\mu}^2} \left| \psi_{\nu\mu} \left(k_{\perp}; -\frac{L}{2} \right) \right|^2, \quad (3.2)$$

где

$$X_{\nu\mu} = [k_{\nu\mu} n_{\nu\mu}^e - k_{\nu} n_{\nu}^0 - k_{\mu} n_{\mu}^0 - \alpha_{\nu\mu} k_x] \frac{L}{2}.$$

Для дальнейших вычислений необходимо знать функции $\psi_{\nu} \left(r_{\perp}; \frac{L}{2} \right)$, т. е. зависимость поля от поперечных координат в первичном пучке, соответствующем излучению определенного типа колебаний резонатора квантового генератора. Ограничимся случаем генерации в режиме импульсной добротности лазера, резонатор которого образован зеркалами со стороны a , равной диаметру образца активного вещества. Тогда на небольших расстояниях от зеркала можно считать поле первичного пучка отличным от нуля при $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$; $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$ и аппроксимировать функции ψ_{ν} в этой области выражениями

$$\psi_{l, m, n_{\nu}}(r_{\perp}) = \frac{2}{a} \sin \left(\pi m_{\nu} \frac{x + a/2}{a} \right) \sin \left(\pi n_{\nu} \frac{y + a/2}{a} \right). \quad (3.3)$$

При этом функции $\psi_{\nu\mu}(k_{\perp})$ заметно отличаются от нуля в окрестности $\Delta k \simeq 2\pi/a$ около точек

$$k_{x\nu\mu}^{(l)} = \pm \frac{\pi(m_{\nu} \pm m_{\mu})}{a}; \quad k_{y\nu\mu}^{(l)} = \pm \frac{\pi(n_{\nu} \pm n_{\mu})}{a}.$$

Поэтому при $\alpha_{11} L/a < 1$ интеграл в правой части выражения (3.2) можно с большой точностью вычислить, считая

$$\left| \psi_{\nu\mu} \left(k_{\perp}; -\frac{L}{2} \right) \right|^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} \sum_{i=1}^4 \delta(k_x - k_{x\nu\mu}^{(i)}) \sum_{j=1}^4 \delta(k_y - k_{y\nu\mu}^{(j)}).$$

* Рассмотрение флуктуаций мощности излучения удвоенной частоты при достаточно узком частотном и угловом спектре первичного пучка проведено в работе [9].

Флуктуации амплитуд $A_\nu(t)$, по крайней мере при работе лазера в режиме импульсной добротности, по-видимому, малы, и мы будем их считать A_ν заданными функциями времени. При этом вследствие того, что колебания с большими значениями m и n не возбуждаются [10], частота колебания не зависит от этих чисел, и зависимость $A_\nu^2(t)$ от частоты ω_ν , m и n можно аппроксимировать соотношением [10]

$$A_\nu^2(t) = A_\nu^2(t) \exp \left[-\frac{(\omega_\nu - \omega_1)^2}{\Delta\omega^2} - \frac{m^2 + n^2}{\Delta m^2} \right].$$

Кроме того, будем считать, что число возбуждающихся типов колебаний велико. Поэтому суммирование в правой части выражения (3.1) для $\langle P_2(t) \rangle$ можно заменить интегрированием*, а первым слагаемым пренебречь.

Далее, так же как в предыдущем разделе, аппроксимируем функцию $X_{\nu\mu}^{-2} \sin^2 X_{\nu\mu}$ экспонентой:

$$\exp \left[-\frac{\alpha_{\nu\mu}^2 L^2}{4\pi} (k_{\nu\mu} - k_x)^2 \right],$$

где

$$k_{\nu\mu} = \frac{k_{\nu\mu} n_{\nu\mu}^e - k_\nu n_\nu^0 - k_\mu n_\mu^0}{\alpha_{\nu\mu}},$$

и будем считать

$$n_{\nu\mu}^e = n_{11}^e + \frac{dn_{11}^e}{d\omega} (\omega_\nu + \omega_\mu - \omega_2); \quad n_\nu^0 = n_1^0 + \frac{dn_1^0}{d\omega} (\omega_\nu - \omega_1).$$

Тогда при совпадении оси пучка с направлением синхронизма обыкновенной и необыкновенной волн с частотами ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$ соответственно выражение (3.1) для $\langle P_2(t) \rangle$ с точностью до слагаемых порядка $\Delta\omega\omega_1^{-1} \ll 1$ можно привести к виду

$$\langle P_2(t) \rangle = \frac{8\pi^3 \omega_2^2}{c^3} \frac{P_1^2(t)}{a^2} L^2 \int_0^\infty p_2(\omega) d\omega; \quad (3.4)$$

$$p_2(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta\omega^{-1/2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\theta_n^2}{\Delta\theta_c^2} \right)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_2)^2}{\Delta\omega_2^2} \right].$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta\omega_2 &= \sqrt{2} \Delta\omega \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\omega^2}{\widetilde{\Delta\omega_c^2}} \right)^{-1/2}; \\ \widetilde{\Delta\omega_c} &= \Delta\omega_c \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\theta_n^2}{\Delta\theta_c^2} \right)^{1/2}; \\ \Delta\omega_c &= \pi \left[Lk_2 \left(\frac{dn_{11}^e}{d\omega} - \frac{1}{2} \frac{dn_1^0}{d\omega} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Угол $\Delta\theta_n = \pi\Delta m / ak_1 n_1^0$ равен половине угла раствора первичного пучка,

* При этом $A_1^2(t) = (2\pi/c)P_1(t)(\pi^{3/2}\Delta\omega\Delta m^2)^{-1}$, где $P_1(t)$ — мощность излучения первичного пучка.

$\Delta\theta_c = 2\pi(\alpha_{11}\Delta k_2 n_{11}^e)^{-1}$ характеризует ширину диаграммы направленности системы на частоте ω_c , а $\Delta\omega_c$ равна разности частот волн первичного пучка, для которых набег разности фаз в кристалле КДР между квадратами поля первичного луча и вторичным лучом отличается на π .

Вследствие того, что ширина спектра первичного пучка $\Delta\omega$ много больше величины, обратной характерному времени изменения амплитуд $A_1(t)$ (времени пичка излучения лазера), функция $p_2(\omega)$, как нетрудно показать, с большой точностью определяет средний по ансамблю измерений частотный спектр вторичного пучка, усредненный по направлениям. Из (3.4), (3.5) видно, что распределение по частотам вторичного пучка—гауссово с шириной $\Delta\omega_2$, которая при $\Delta\omega > \Delta\omega_c$ может быть существенно меньше ширины спектра первичного пучка.

Для коэффициента преобразования $\langle P_2 \rangle P_1^{-1}$ из (3.4) получим выражение

$$\frac{\langle P_2(t) \rangle}{P_1(t)} = \frac{8\pi^3 \omega_2^2}{c^3 (n_1^0)^2} (\hat{\beta} x_0 p_{11})^2 \frac{P_1(t)}{a^2} L^2 \left[1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\Delta\theta^2}{\Delta\theta_c^2} + \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega_c^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (3.6)$$

При $\Delta\theta_n \ll \Delta\theta_c$, $\Delta\omega \ll \Delta\omega_c$ коэффициент преобразования (3.6), как уже отмечалось в литературе [9], вдвое больше коэффициента преобразования соответствующей плоской волны за счет биений суммарного поля колебаний с разными частотами. Превышение же ширины углового и частотного спектров первичного пучка по сравнению с $\Delta\theta_c$ и $\Delta\omega_c$ * приводит, естественно, к уменьшению коэффициента преобразования.

Если пластинка КДР находится в фокусе линзы, через которую проходит частично когерентный пучок (1.1), (3.3), то достаточно точно вычислить правую часть выражения (3.1), определяющего $\langle P_2 \rangle$, не удастся. Оценка показывает, что в этом случае ширина частотного спектра первичного пучка почти не влияет на коэффициент преобразования, а отношение выигрыша фокусировки частично когерентного пучка и когерентного пучка такого же сечения (рис. 1) равно, как и следовало ожидать, обратному отношению площадей сечения пучков в фокусе линзы, т. е. $(\Delta\theta_n^2 a^2 k_1^2)^{-1}$. Уменьшение коэффициента преобразования сфокусированного частично когерентного пучка по сравнению с когерентным связано в основном с тем, что в фокусе линзы поле колебаний (3.3) с разными m и n будет сосредоточено в пространственно разделенных нитевидных областях. Поэтому заметный вклад в правую часть выражения (3.1) дадут, в отличие от несфокусированного пучка, лишь слагаемые, для которых $m, \approx m_\mu, n, \approx n_\mu$. При большом числе генерируемых типов колебаний это может привести даже к уменьшению коэффициента преобразования сфокусированного частично когерентного пучка по сравнению с коэффициентом преобразования несфокусированного.

В заключение считаем приятным долгом поблагодарить В. И. Беспалова, А. В. Гапонова и В. И. Таланова за полезные обсуждения затронутых в работе вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Kleinman, Phys. Rev., 128, 1761 (1962).
2. Б. В. Бокунь, А. Г. Хаткевич, ЖПС, 1, 97 (1964).
3. D. U. McMahon, A. R. Franklin, J. Appl. Phys., 6, 14 (1965).

* Для кристалла КДР при $\lambda_1 = 10^{-4}$ см, $L = 2$ см угол $\Delta\theta_c$ равен примерно $3'$, а величина $\Delta\omega_c \omega_1^{-1}$ равна $(1+2) \cdot 10^{-3}$. Величины же $\Delta\theta_n$ и $\Delta\omega \omega_1^{-1}$ могут быть порядка $4' + 6'$ и $2 \cdot 10^{-2}$ соответственно [10].

4. И. Г. Кондратьев, В. И. Таланов, ЖТФ, 35, 571 (1965).
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, ВНИТИ, М., 1964.
6. С. А. Ахманов, Радиотехника и электроника (в печати)
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
8. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, 1965.
9. J. Ducsing, N. Bloembergen, Phys. Rev., 133, A, 1493 (1964).
10. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 августа 1965 г.

ON FREQUENCY DOUBLING OF CONVERGING AND PARTIALLY COHERENT LIGHT BEAMS

G. I. Freidman

The expression has been obtained for the transformation coefficient and secondary radiation pattern (when doubling the frequency of focused coherent light beam) in the approximation of the given field of a primary beam. The dependence has been clarified of the mean transformation coefficient and the width of frequency spectrum of transformed radiation upon the frequency and angular spectra width of partially coherent primary beam.

УДК 621.371.167

О ДИФРАКЦИИ ПОЛЯ ПРОДОЛЬНОГО ДИПОЛЬНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ НА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ

Е. А. Иванов

Приближенно решена задача о поле дипольного (электрического и магнитного) излучателя в пространстве, содержащем в себе два бесконечно длинных идеально проводящих круговых цилиндра с параллельными осями, в предположении, что дипольный момент ориентирован вдоль оси цилиндра, а сам излучатель находится вблизи одного из цилиндров либо на его поверхности. Для случая магнитного диполя решение, полученное в волновой зоне, обобщается на случай прямоугольной излучающей щели, расположенной на поверхности одного из цилиндров. При этом предполагается, что расстояние между осями цилиндров много больше длины волны. Рассмотрен частный случай бесконечно длинной прямолинейной нити с током (электрическим, либо магнитным); даны примеры численного решения задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рис. 1. Наряду с ней возьмем две локальные координатные системы $O_s x_s y_s z_s$ ($s = \pm 1$) с началами в точках O_s ($s = \pm 1$) и с осями, направленными вдоль соответствующих осей системы $Oxyz$, а также отвечающие им цилиндрические координаты ρ, φ, z . В этих координатах положение диполя определяется значениями $\rho_s^0, \varphi_s^0, z^0$ ($s = \pm 1$) и $\rho = \rho^0, \varphi = \varphi^0, z = z^0$ соответственно, а поверхность s -го цилиндра задается уравнением: $\rho_s = a$ ($s = \pm 1$).

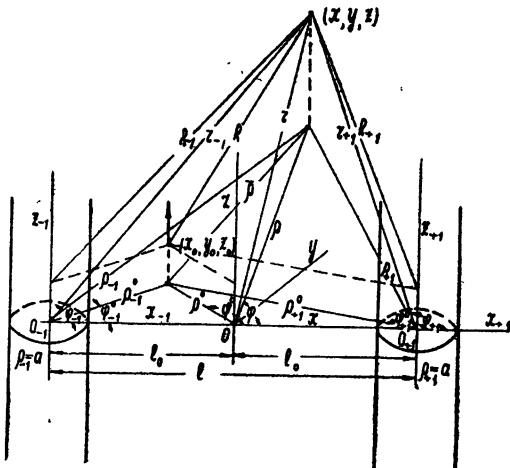


Рис. 1. Геометрия задачи.

Первичное поле электрического диполя с моментом $\mathbf{p} = \{0, 0, p_z\}$, $p_z = Idz_0 / -i\omega$ (I — заданный ток в диполе) в свободном пространстве ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$) выражается через вектор Герца:

$$\Pi^{(1)} = pe^{ikR}/R \quad (1)$$

(R — расстояние от диполя до точки наблюдения) соотношениями*

$$\mathbf{E}^{(1)} = \text{grad div } \Pi^{(1)} + k^2 \Pi^{(1)}, \quad \mathbf{H}^{(1)} = -ik \text{rot } \Pi^{(1)} \quad (k = \omega/c). \quad (2)$$

Если обозначить через $\Pi^{(2)}$ электрический вектор Герца вторичного поля, то полное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} может быть найдено из соотношений вида (2) с вектором $\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}$. Учитывая указанную выше ориентацию момента диполя, мы полагаем, что $\Pi^{(2)} = \{0, 0, \Pi_z^{(2)}\}$, где $\Pi_z^{(2)} = \sum_{s=\pm 1} \Pi_s$,

а Π_s — компонента вектора Герца вторичного поля, обусловленного s -ым цилиндром ($s = \pm 1$). Так как первичное поле нам известно, то искомой функцией является лишь $\Pi_z^{(2)}$. Поэтому в случае электрического дипольного излучателя задача сводится к отысканию решения уравнения

$$\Delta \Pi_2 + k^2 \Pi_2 = 0 \quad (\Pi_2 = \Pi_z^{(2)}), \quad (3)$$

удовлетворяющего на поверхности каждого цилиндра условию

$$(\Pi_1 + \Pi_2)|_{\rho_s = a} = 0 \quad (s = \pm 1; \Pi_1 = \Pi_z^{(1)}), \quad (4)$$

а на бесконечности — условиям излучения.

Первичное поле магнитного диполя с моментом $\mathbf{m} = \{0, 0, m_z\}$, $m_z = Kdz_0 / -i\omega$ (K — заданный магнитный ток в диполе) выражается через магнитный вектор Герца

$$\Pi_1^* = me^{ikR}/R \quad (5)$$

следующим образом:

$$\mathbf{H}^{(1)} = \text{grad div } \Pi_1^* + k^2 \Pi_1^*, \quad \mathbf{E}^{(1)} = ik \text{rot } \Pi_1^*. \quad (6)$$

Как и раньше, считаем, что для полного поля $\Pi^* = \Pi_1^* + \Pi_2^*$, где $\Pi^* = \{0, 0, \Pi^*\}$, $\Pi^* = \Pi_1^* + \Pi_2^*$ и $\Pi_2^* = \sum_{s=\pm 1} \Pi_s^*$ (Π_s^* имеет прежний смысл, $s = \pm 1$). Искомая функция Π_2^* должна быть решением уравнения (3), удовлетворять на поверхности каждого цилиндра условию

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\Pi_1^* + \Pi_2^*)|_{\rho_s = a} = 0 \quad (s = \pm 1) \quad (7)$$

и условиям излучения в бесконечности.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

Будем искать решение задачи (3), (4) в виде суммы двух разложений:

$$\Pi_2 = \sum_{s=\pm 1} \Pi_s = \frac{p_z}{2i} \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi_s - \varphi_s^0)] \int_{-\infty}^{\infty} x_m^{(s)}(h) H_m^{(1)}(v\rho_s) \times \\ \times \exp[ih(z - z_0)] dh; \quad v = \sqrt{k^2 - h^2}, \quad (8)$$

каждое из которых является суперпозицией всех частных решений уравнения (3), полученных разделением переменных**. Представим Π_1 из (1) также в виде разложения (в s -ой локальной системе координат)

* Временная зависимость задана множителем $\exp(-i\omega t)$, который всюду опускается.

** Одно разложение отнесено к -1 -ой локальной системе координат, а второе к $+1$ -ой системе.

$$\Pi_1 = -\frac{p_z}{2i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_s - \varphi_s^0)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} H_m^{(1)}(\nu\rho_s^0) J_m(\nu\rho_s), \rho_s < \rho_s^0 \\ H_m^{(1)}(\nu\rho_s) J_m(\nu\rho_s^0), \rho_s > \rho_s^0 \end{array} \right\} \exp[ih(z-z_0)] dh \quad (9)$$

(см., например, [1], стр. 35—36). Тогда на основании (4), (8), (9) и обобщенной теоремы сложения для цилиндрических волновых функций [2—4]

$$H_m^{(1)}(\nu\rho_s) e^{im\varphi_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\nu\rho_{s,-s}) H_{m-n}^{(1)}(\nu\rho_{s,-s}) \exp[in\varphi_{s,-s} - i(m-n)\varphi_{s,-s}] \quad (10)$$

($\varphi_{+1,-1} = \pi$, $\varphi_{-1,+1} = 0$, $\rho_{s,-s} = l$, $s = \pm 1$) для коэффициентов $x_m^{(s)}(h)$ из (8) получим бесконечную систему линейных уравнений. Последняя после замены

$$x_m^{(s)}(h) = \beta_m J_m(\nu a) X_m^{(s)}(h) \quad (s = \pm 1) \quad (11)$$

(где $\beta_m = 1$, если $m = 0$ и $\beta_m = m$, если $m \neq 0$) сводится к системе

$$X_m^{(s)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{mn}^{(-s,s)} X_n^{(-s)} = F_m^{(s)} \quad (m = 0, \pm 1, \dots; s = \pm 1) \quad (12)$$

для новых неизвестных $X_m^{(s)}(h)$. Здесь

$$\sigma_{mn}^{(-s,s)} = \frac{\beta_n J_n(\nu a) H_{n-m}^{(1)}(\nu l)}{\beta_m H_m^{(1)}(\nu a)} \exp[-i(n-m)\varphi_{-s,s} + im\varphi_s^0 - in\varphi_{-s}^0], \quad (13)$$

$$F_m^{(s)} = \frac{H_m^{(1)}(\nu\rho_s^0)}{\beta_m H_m^{(1)}(\nu a)}$$

Система (12) разрешима методом усечения для каждого значения параметра ν при условии, что $l > 2a$ (наличие множителя β_m в (11) позволяет обосновать это утверждение и для случая, когда диполь расположен на поверхности одного из цилиндров). Доказательство может быть проведено, например, по той же схеме, что и в [5]. При этом имеет

место условие $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |X_m^{(s)}(h)|^2 < \infty$. Однако она практически мало при-

годна для численного решения задачи по точным формулам, так как в ней $\nu = \sqrt{k^2 - h^2}$, где h меняется непрерывным образом от $-\infty$ до ∞ , в то время как расчет системы можно осуществить лишь для фиксированных значений ν . Вместе с тем система (12) может быть использована для получения приближенного решения задачи в волновой зоне. Кроме того, в частном случае бесконечно длинной прямолинейной нити с током система (13) не зависит от h ; тогда получаются формулы, дающие строгое решение соответствующей задачи.

Приближенное решение для дипольного источника. Применим к (13) метод последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения значения $X_{m,0}^{(s)} = 0$ ($s = \pm 1$). Тогда получим

$$X_{m,1}^{(s)} = F_m^{(s)},$$

$$X_{m,2}^{(s)} = F_m^{(s)} - \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sigma_{mm'}^{(-s,s)} F_{m'}^{(-s)},$$

$$X_{m,3}^{(s)} = F_m^{(3)} - \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sigma_{mm'}^{(-s,s)} F_{m'}^{(-s)} + \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{m''=-\infty}^{\infty} \sigma_{mm'}^{(-s,s)} \sigma_{m'm''}^{(s,-s)} F_{m''}^{(s)},$$

$$X_{m,p+1}^{(s)} = F_m^{(s)} + \sum_{t=1}^p (-1)^t \sum_{m'} \sum_{m''} \dots \sum_{m^{(t)}} \sigma_{mm'}^{(-s,s)} \sigma_{m'm''}^{(s,-s)} \dots \sigma_{m^{(t-1)}m^{(t)}}^{(-1)^t s, (-1)^{t-1} s} F_{m^{(t)}}^{(-1)^t s},$$

откуда в предположении, что $X_m^{(s)} = \lim_{p \rightarrow \infty} X_{m,p+1}^{(s)}$, найдем

$$X_m^{(s)} = F_m^{(s)} + \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \sum_{m', m'', \dots, m^{(t)}} \sigma_{mm'}^{(-s,s)} \sigma_{m'm''}^{(s,-s)} \dots \sigma_{m^{(t-1)}m^{(t)}}^{(-1)^t s, (-1)^{t-1} s} F_{m^{(t)}}^{(-1)^t s}. \quad (14)$$

Здесь $\sum_{m', m'', \dots, m^{(t)}}$ означает $\sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{m''=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m^{(t)}=-\infty}^{\infty}$; каждый член ряда по t

имеет определенный смысл, а именно: если в качестве $X_m^{(s)}$ взять $F_m^{(s)}$, то (8) будет определять вторичное поле первого порядка рассеяния, т. е. поле, рассеянное цилиндрами, возбужденными только первичным полем излучателя. Если в качестве $X_m^{(s)}$ взять лишь второе слагаемое

суммы ($t=1$): $X_m^{(s)} = - \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sigma_{mm'}^{(-s,s)} F_{m'}^{(-s)}$ и подставить его в (8), то по-

следнее будет определять вторичное поле второго порядка рассеяния, т. е. поле, рассеянное цилиндрами, возбуждаемыми только полем первого порядка рассеяния (s -ый цилиндр возбуждается только волной первого порядка рассеяния, исходящей от $-s$ -го цилиндра ($s = \pm 1$) и т. д.) [6].

Считая теперь, что в (8) $x_m^{(s)}(\mathbf{h})$ определяется формулами (11), (14), рассмотрим асимптотику интегральных выражений

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_m^{(s)}(\mathbf{h}) H_m^{(1)}(\nu \rho_s) \exp[ih(z - z_0)] dh, \quad (15)$$

содержащихся в Π_s (8) ($s = \pm 1$), в волновой зоне, для которой, как обычно в таких случаях, полагается, что $k\rho_s \gg 1$, $s = \pm 1$ ($\rho_s \rightarrow \infty$). После повторения рассуждений, приведенных, например, в [1] (стр. 25, 37) и связанных с вычислением асимптотики подобного интеграла, найдем, что в волновой зоне, где

$$\begin{aligned} \varphi_s &\simeq \varphi, \quad \rho_s \simeq \rho - sl_0 \cos \varphi, \quad r_s = \sqrt{\rho_s^2 + z^2} = \\ &= (\rho^2 + z^2 - 2\rho sl_0 \cos \varphi + l^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \simeq r - sl_0 \sin \theta \cos \varphi \quad (l_0 = l/2); \\ \rho &= z \sin \theta, \quad R_s \simeq r_s - z \cos \theta \quad (s = \pm 1), \end{aligned}$$

имеет место соотношение

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x_m^{(s)}(\mathbf{h}) H_m^{(1)}(\nu \rho_s) e^{ih(z-z_0)} dh \simeq (-i)^m x_m^{(s)}(k \cos \theta) e^{ikR_s} / R_s \quad (16)$$

(в координатах ρ_s, φ_s, z с началом в точке O_s). Тогда из (8) в сферических координатах r, θ с началом в точке O находим, что

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= -p_z \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m \beta_m X_m^{(s)}(k \cos \theta) \times \\ &\times J_m(u) \exp[im(\varphi - \varphi_s^0) - iksl_0 \cos \varphi \sin \theta] \quad (u = k a \sin \theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть теперь для заданного θ

$$w = kl \sin \theta \gg 1$$

и приближенно

$$H_n^{(1)}(w) = (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi w}} e^{i(w - \pi/4)}. \quad (18)$$

Тогда, применив (18) к выражению* для $\sigma_{mn}^{(-s,s)}$, получим приближенные равенства:

$$\sigma_{mn}^{(-s,s)} = L a_n^{(-s)} b_m^{(s)}, \quad L = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} e^{i(w - \pi/4)}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_n^{(s)} &= (-i)^n \beta_n J_n(u) \exp(-in\varphi_{s,-s} - in\varphi_s^0), \\ b_n^{(s)} &= i^n \exp(in\varphi_{-s,s} + in\varphi_s^0) / \beta_n H_n^{(1)}(u). \end{aligned} \quad (20)$$

С помощью этих равенств (14) приводятся к виду

$$\begin{aligned} X_m^{(s)} &= F_m^{(s)} + b_m^{(s)} \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t L^t \left[\sum_{m'} a_{m'}^{(-s)} b_{m'}^{(-s)} \right] \left[\sum_{m''} a_{m''}^{(s)} b_{m''}^{(s)} \right] \dots \\ &\dots \left[\sum_{m^{(t-1)}} a_{m^{(t-1)}}^{(-1)^{t-1}s} b_{m^{(t-1)}}^{(-1)^{t-1}s} \right] \sum_{m^{(t)}} a_{m^{(t)}}^{(-1)^t s} F_{m^{(t)}}^{(-1)^t s}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если обозначить

$$Q^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(s)} b_m^{(s)}, \quad F^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(s)} F_m^{(s)} \quad (s = \pm 1), \quad (22)$$

то тогда, после представления суммы по t в виде двух частных сумм, в одной из которых суммирование производится только по четным t , а в другой — по нечетным t , получим

$$\begin{aligned} X_m^{(s)} &= F_m^{(s)} + \sum_{t=2, 4, \dots} L^t b_m^{(s)} [Q^{(-s)} Q^{(s)}]^{t/2 - 1} Q^{(-s)} F^{(s)} - \sum_{t=1, 3, \dots} L^t b_m^{(s)} \times \\ &\times [Q^{(-s)} Q^{(s)}]^{(t-1)/2} F^{(s)} = F_m^{(s)} + L b_m^{(s)} \frac{L Q^{(-s)} F^{(s)} - F^{(-s)}}{1 - [L^2 Q^{(-s)} Q^{(s)}]} \end{aligned} \quad (23)$$

в предположении, что $|L^2 Q^{(-s)} Q^{(s)}| < 1$. Из выражения (19) для L и сходимости рядов $Q^{(s)}$ видно, что это условие всегда может быть выполнено за счет соответствующего выбора w . Далее, подставляя (23) в (17), находим, что

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= -p_z \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} \Phi(\theta, \varphi); \\ \Phi(\theta, \varphi) &= \Phi_1(\theta, \varphi) + \Phi_2(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно (13) и (19), (20),

$$\Phi_1 = \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m H_m(u) H_m^{(1)}(k\rho_s^0 \sin \theta) \exp[im(\varphi - \varphi_s^0) - iskl_0 \cos \varphi \sin \theta], \quad (25)$$

* Оно определяется теперь формулой (13), в которой вместо v следует брать $k \sin \theta$, точно так же, как и в выражении (13) для $F_m^{(s)}$.

$$\Phi_2 = L \sum_{s=\pm 1} \frac{\mathcal{L}Q^{(-s)} F^{(s)} - F^{(-s)}}{1 - [\mathcal{L}^2 Q^{(-s)} Q^{(s)}]} \exp(-iskl_0 \cos \varphi \sin \theta) \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m(u) \exp(im \varphi + im \varphi_{-s, s}), \quad (26)$$

где $H_m(u) = J_m(u)/H_m^{(1)}(u)$. Физический смысл функций Φ_1 и Φ_2 очевиден: функцией Φ_1 определяется вторичное поле первого порядка рассеяния, т. е. результат возбуждения цилиндров полем диполя без учета результата взаимных последовательных дифракций волн на цилиндрах, в то время как функцией Φ_2 приближенно определяется вторичное поле — результат наложения полей всех других порядков рассеяния, возникающих только за счет последовательных взаимных дифракций вторичных волн на цилиндрах.

Для поля диполя в волновой зоне (в координатах с началом в O)

$$\Pi_1 = p_z \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} \Phi_0(\theta, \varphi), \quad (27)$$

где

$$\Phi_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(u_0) \exp[im(\varphi - \varphi^0)] = \exp[-iu_0 \cos(\varphi - \varphi^0)], \quad (28)$$

$$u_0 = k\rho^0 \sin \theta.$$

В волновой зоне $E_\theta = H_\varphi$, а $\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial r} = ik \sin \theta \Pi$; поэтому там, согласно соотношению $H_\varphi = ik \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}$,

$$E_\theta = -p_z k^2 \sin \theta \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} [\Phi_0(\theta, \varphi) - \Phi(\theta, \varphi)], \quad (29)$$

а $E_r = E_\varphi = 0$. Из (29) можно получить обобщение на случай линейной антенны с заданным током $I = I(z_0)$, лежащей между точками z_1 и z_2 :

$$E_\theta = \frac{k^2 \sin \theta e^{ikr}}{i\omega r} [\Phi_0(\theta, \varphi) - \Phi(\theta, \varphi)] \int_{z_1}^{z_2} I(z_0) e^{-ikz_0 \cos \theta} dz_0. \quad (30)$$

Если линейный источник расположен вдоль оси Oz , то $\rho_{+1}^0 = \rho_{-1}^0 = \rho_0$, $\varphi_{+1}^0 = \pi$, $\varphi_{-1}^0 = 0$, в силу чего $Q^{(-1)} = Q^{(+1)} = Q$, а $F^{(-1)} = F^{(+1)} = F$.

Тогда

$$\Phi_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=\pm 1} \exp(-iskl_0 \cos \varphi \sin \theta - im\varphi_s^0) \right] (-i)^m H_m(u) \times \\ \times H_m^{(1)}(k\rho_0 \sin \theta) e^{im\varphi}, \quad (31)$$

$$\Phi_2 = \frac{-\mathcal{L}F}{1 + \mathcal{L}Q} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=\pm 1} \exp(-iskl_0 \sin \theta \cos \varphi + im\varphi_{-s, s}) \right] H_m(u) e^{im\varphi}. \quad (32)$$

Формулы (24), (29), (30) — (32) удобны для анализа и численного счета.

Решение для бесконечного линейного источника. Интегрируя (8), (9) по z от $-\infty$ до ∞ , получим (см., например, [1], стр. 36*)

$$\Pi_2 = \frac{I\pi}{\omega} \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m^{(s)} H_m^{(1)}(k\rho_s) \exp [im(\varphi_s - \varphi_s^0)], \quad (33)$$

$$\Pi_1 = -\frac{I\pi}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp [im(\varphi_s - \varphi_s^0)] \left\{ \begin{array}{l} H_m^{(1)}(k\rho_s^0) J_m(k\rho_s), \rho_s^0 > \rho_s \\ H_m^{(1)}(k\rho_s) J_m(k\rho_s^0), \rho_s < \rho_s^0 \end{array} \right\}. \quad (34)$$

Теперь коэффициенты $x_m^{(s)}$ из (33) определяются формулами (11)–(13), в которых везде нужно вместо v брать k ($h = 0$). Все получающиеся при этом формулы являются точными; к аналогичным формулам мы можем прийти при строгом решении задачи о дифракции цилиндрической волны $-\frac{I\pi}{\omega} H_0^{(1)}(k\bar{\rho})$ на двух кругах.

Случай $kl \gg 1$ рассматривается аналогично тому, как это делалось и для дипольного источника. При этом коэффициенты $X_m^{(s)}$ в любой точке плоскости, нормальной оси цилиндров, будут определяться приближенными формулами (23), в которых следует положить $\theta = \pi/2$. В волновой зоне при этом

$$\Pi_2 = \frac{I\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp [i(k\rho - \pi/4)] \Phi(\varphi), \quad (35)$$

где $\Phi(\varphi) = \Phi_1(\varphi) + \Phi_2(\varphi)$, а $\Phi_1(\varphi)$ и $\Phi_2(\varphi)$ имеют тот же вид, что и $\Phi_1\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$, $\Phi_2\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$ из (25), (26). Так как теперь в волновой зоне

$$\Pi_1 = -\frac{I\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp [i(k\rho - \pi/4) - ik\rho^0 \cos(\varphi - \varphi^0)],$$

а $E_z = k^2 \Pi$ ($E_\rho = E_\varphi = 0$), то

$$E_z = -\frac{Ik^2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp [i(k\rho - \pi/4)] \{ \exp [-ik\rho^0 \cos(\varphi - \varphi^0)] - \Phi(\varphi) \}. \quad (36)$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

Схема решения задачи о дифракции поля магнитного диполя (5) на двух параллельных цилиндрах остается прежней. Разница заключается лишь в краевом условии (7), в силу которого коэффициенты в разложении

$$\Pi_2^* = \frac{m_z}{2i} \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_s - \varphi_s^0)} \int_{-\infty}^{\infty} x_m^{(s)}(h) H_m^{(1)}(v\rho_s) e^{ih(z-z_0)} dh \quad (37)$$

должны находиться из формулы

$$x_m^{(s)}(h) = \beta_m J'_m(va) X_m^{(s)}(h), \quad J'_m(va) = \left. \frac{dJ_m(v\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=va} \quad (38)$$

и системы

$$X_m^{(s)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_{mn}^{(-s,s)} X_n^{(-s)} = G_m^{(s)}. \quad (39)$$

* Выражение (34) является теоремой сложения для функции $-\frac{I\pi}{\omega} H_0^{(1)}(k\bar{\rho})$, где $\bar{\rho}^2 = \rho_s^0 + \rho_s^2 - 2\rho_s^0 \rho_s \cos(\varphi_s - \varphi_s^0)$, $s = +1$.

Здесь

$$\tau_{mn}^{(-s, s)} = \frac{\beta_n J'_n(va) H_{n-m}^{(1)}(vl)}{\beta_m H_m^{(1)'}(va)} \exp[-i(n-m)\varphi_{-s, s} + im\varphi_s^0 - in\varphi_{-s}^0],$$

$$G_m^{(s)} = \frac{H_m^{(1)}(v\rho_s^0)}{\beta_m H_m^{(1)'}(va)},$$

$$H_m^{(1)'}(va) = \left. \frac{dH_m^{(1)}(v\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=va} \quad (m = 0, \pm 1, \dots; s = \pm 1).$$
(40)

В волновой зоне в сферических координатах r, θ с началом в O

$$\Pi_2^* = -m_z \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m \beta_m X_m^{(s)}(k \sin \theta) \times$$

$$\times J'_m(u) \exp[im(\varphi - \varphi_s^0) - iskl_0 \cos \varphi \sin \theta],$$
(41)

где $X_m^{(s)}$ определяются формулами вида (14). В последних следует вместо $\sigma_{mn}^{(-s, s)}$ и $F_m^{(s)}$ брать теперь $\tau_{mn}^{(-s, s)}$ и $G_m^{(s)}$ из (40). Для случая $\omega \gg 1$, $X_m^{(s)}$ в (41) определяется формулой (23); $Q^{(s)}$ в ней следует заменить на

$$Q_*^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(s)} b_m^{(s)}, \text{ а } F^{(s)} \text{ — на } F_*^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(s)} G_m^{(s)} \quad (s = \pm 1),$$

где

$$a_m^{(s)} = (-i)^m \beta_m J'_m(u) \exp(-im\varphi_{s, -s} - im\varphi_s^0),$$

$$b_m^{(s)} = im \exp(im\varphi_{-s, s} + \varphi_s^0) / \beta_m H_m^{(1)'}(u).$$

Тогда

$$\Pi_2^* = -m_z \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} \Phi^*(\theta, \varphi),$$
(42)

где

$$\Phi^* = \Phi_1^* + \Phi_2^*, \quad H'_m(u) = J'_m(u) / H_m^{(1)'}(u),$$

$$\Phi_1^* = \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m H'_m(u) H_m^{(1)}(k\rho_s^0 \sin \theta) \exp[im(\varphi - \varphi_s^0) - iskl_0 \cos \varphi \sin \theta],$$
(43)

$$\Phi_2^* = \Delta \sum_{s=\pm 1} \frac{\Delta Q_*^{(-s)} F_*^{(s)} - F_*^{(-s)}}{1 - [L^2 Q_*^{(-s)} Q_*^{(s)}]} \exp(-iskl_0 \cos \varphi \sin \theta) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} H'_m(u) \exp[im(\varphi + \varphi_{-s, s})]$$
(44)

и где функции Φ_1^* и Φ_2^* имеют прежний физический смысл. В волновой зоне

$$E_\varphi = k^2 \sin \theta \Pi^*,$$

так как там $\partial \Pi^* / \partial \rho = \sin \theta$, $\partial \Pi^* / \partial r = ik \sin \theta \Pi^*$, $E_\varphi = -ik \partial \Pi^* / \partial \rho$. Поскольку $\Pi^* = \Pi_1^* + \Pi_2^*$ и

$$\Pi_1^* = m_z \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} \Phi_0^*(\theta, \varphi), \quad \Phi_0^* = \Phi_0,$$

то

$$E_{\varphi} = k^2 \sin \theta \frac{e^{ikr}}{\omega i r} [\Phi_0^*(\theta, \varphi) - \Phi^*(\theta, \varphi)] e^{-ikz_0 \cos \theta} K dz_0. \quad (45)$$

Отсюда в качестве обобщения на случай прямолинейного продольного магнитного тока $K = K(z_0)$, занимающего длину от z_1 до z_2 , получаем формулу

$$E_{\varphi} = k^2 \sin \theta \frac{e^{ikr}}{\omega i r} [\Phi_0^*(\theta, \varphi) - \Phi^*(\theta, \varphi)] \int_{z_1}^{z_2} K(z_0) e^{-ikz_0 \cos \theta} dz_0. \quad (46)$$

Приближим теперь нить с магнитным током к поверхности s -го цилиндра, устремляя $\rho_s^0 \rightarrow a$ (в дальнейшем считается, что $s = +1$, либо $s = -1$). Тогда в координатной системе с началом в точке $O_s(\rho_s^0 = \rho^0, \varphi_s^0 = \varphi^0)$

$$\Phi_1^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m H'_m(u) H_m^{(1)}(u) \exp [im(\varphi - \varphi^0)] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m H'_m(u) \times \quad (47)$$

$$\times H_m^{(1)}(k\rho_{-s}^0 \sin \theta) \exp [im(\varphi - \varphi_{-s}^0) + iskl \cos \varphi \sin \theta],$$

$$\Phi_2^* = L \frac{LQ_*^{(s)} F_*^{(-s)} - F_*^{(s)}}{1 - [L^2 Q_*^{(-s)} Q_*^{(s)}]} \exp (iskl \cos \varphi \sin \theta) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} H'_m(u) \exp [im(\varphi + \varphi_{s,-s})] + L \frac{LQ_*^{(-s)} F_*^{(s)} - F_*^{(-s)}}{1 - [L^2 Q_*^{(-s)} Q_*^{(s)}]} \times \quad (48)$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} H'_m(u) \exp [im(\varphi + \varphi_{-s,s})],$$

где

$$F_*^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m H'_m(u) H_m^{(1)}(u) \exp [-im(\varphi_{s,-s} + \varphi^0)], \quad (49)$$

$$F_*^{(-s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m H'_m(u) H_m^{(1)}(k\rho_{-s}^0 \sin \theta) \exp [-im(\varphi_{-s,s} + \varphi_{-s}^0)]. \quad (50)$$

Из теоремы сложения (10) следует, что при $\omega \gg 1$, когда $H_{m-n}^{(1)}(\omega) \simeq (-i)^{m-n} \mathbb{L}$,

$$H_m^{(1)}(k\rho_{-s}^0 \sin \theta) e^{-im\varphi_{-s}^0} \simeq (-i)^m e^{im\varphi_{-s,s}} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k\rho_s^0 \sin \theta) \times \quad (51)$$

$$\times e^{in(\varphi_{-s,s} + \varphi^0)} = (-i)^m \mathbb{L} \exp [ik\rho_s^0 \sin \theta \cos (\varphi^0 + \varphi_{-s,s}) + im\varphi_{-s,s}].$$

Учитывая это, из (47)–(50) находим, что

$$\Phi_1^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m H'_m(u) \{ e^{-im\varphi^0} H_m^{(1)}(u) + (-i)^m L \exp [iu \cos (\varphi^0 + \varphi_{-s,s}) + iskl \cos \varphi \sin \theta + im\varphi_{-s,s}] \} e^{im\varphi}, \quad (52)$$

а в выражении Φ_2^* (48)

$$F_*^{(-s)} = \mathbf{L} \exp [iu \cos (\varphi^0 + \varphi_{-s, s})] \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m H'_m(u). \quad (53)$$

В волновой зоне в координатах s -го цилиндра

$$\Pi_1^* = m_z \frac{\exp(ikr - ikz_0 \cos \theta)}{r} \Phi_0^*(\theta, \varphi), \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0^* &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(k\rho^0 \sin \theta) \exp [im(\varphi - \varphi^0)] = \\ &= \exp [-ik\rho^0 \sin \theta \cos (\varphi - \varphi^0)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Подставляя в (46) выражения (52) и (48), где $F_*^{(-s)}$ определяется формулой (53), и учитывая (54), мы получим значение составляющей E_φ полного поля, возникающего в результате дифракции на $-s$ -ом цилиндре поля узкой излучающей щели шириною $ad\varphi$ и длиной от z_1 до z_2 , расположенной на поверхности s -го цилиндра. Как и в случае одного цилиндра, обобщение на случай прямоугольной щели конечной ширины, расположенной между $\varphi_0 = \varphi_1$ и $\varphi_0 = \varphi_2$ с заданным распределением поля E_φ в раскрыве щели, достигается простым интегрированием (46) по переменной φ_0 от φ_1 до φ_2 . В результате получим

$$\begin{aligned} E_\varphi &= ak^2 \sin \theta \frac{e^{ikr}}{i\omega r} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\Phi_0^*(\theta, \varphi) - \Phi^*(\theta, \varphi)] \int_{z_1}^{z_2} E_\varphi(a, \varphi_0, z_0) \times \\ &\times e^{-ikz_0 \cos \theta} dz_0 d\varphi_0, \end{aligned} \quad (56)$$

если при этом заменить распределение магнитного тока $K = K(z_0)$ распределением напряжения $E_\varphi(a, \varphi_0, z_0)a(\varphi_2 - \varphi_1)$ на щели. Считая здесь, что $V(z_0) = E_\varphi(a, \varphi_0, z_0)a(\varphi_2 - \varphi_1)$, где $V(z_0)$ — напряжение на щели, и интегрируя по φ_0 , найдем, что

$$E_\varphi = k^2 \sin \theta \frac{e^{ikr}}{i\omega r} [\bar{\Phi}_0(\theta, \varphi) - \bar{\Phi}(0, \varphi)] \int_{z_1}^{z_2} V(z_0) e^{-ikz_0 \cos \theta} dz_0, \quad (57)$$

где

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2, \quad \bar{\Phi}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(u) D_m(\varphi),$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H'_m(u) \{ (-i)^m H_m^{(1)}(u) D_m(\varphi) + \mathbf{L} \cos [(\pi + \varphi_{-s, s} + \varphi)m] \times \\ &\times \exp(iskl \cos \varphi \sin \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(u) D_n(-\varphi_{-s, s}) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_2 &= \mathbf{L} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m H'_m(u) [Q_*^{(s)} \mathbf{L}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(u) D_n(-\varphi_{-s, s}) - i^m H_m^{(1)}(u) \times \right. \\ &\times D_m(-\varphi_{s, -s}) \} \left\{ 1 - [L^2 Q_*^{(-s)} Q_*^{(s)}] \right\}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H'_m(u) \cos [m(\varphi + \varphi_{s, -s})] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp(iskl \cos \varphi \sin \theta) + L^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m H'_m(u) \left[i^m Q_*^{(-s)} H_m^{(1)}(u) \times \right. \right. \\ & \times D_m(-\varphi_{s,-s}) - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(u) D_n(-\varphi_{-s,s}) \left. \left. \right\} \left\{ 1 - [L^2 Q_*^{(-s)} Q_*^{(s)}] \right\}^{-1} \times \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H'_m(u) \cos [m(\varphi + \varphi_{-s,s})]. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались формулой (51); здесь

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}, \quad D_m(\varphi) = \cos [m(\varphi - \delta)] \frac{\sin [m(\varphi_2 - \varphi_1)/2]}{m(\varphi_2 - \varphi_1)/2}, \quad (58)$$

$$\delta = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Как отмечается в [1], более близкое к действительному распределение поля в щели имеет вид

$$E_\varphi(a, \varphi_0, z_0) = \frac{V(z_0)}{a\pi[(\Delta/2)^2 - \varphi_0^2]^{1/2}} \quad (\Delta = \varphi_2 - \varphi_1).$$

В этом случае

$$D_m(\varphi) = \cos m\varphi J_0(\Delta m/2). \quad (59)$$

Бесконечно длинную прямолинейную нить с магнитным током в случае, когда можно получить точное решение задачи, можно рассмотреть по схеме, аналогичной случаю электрического тока. Для такой задачи

$$\Pi_1^* = - (K\pi/\omega) H_0^{(1)}(k\rho),$$

а

$$\Pi_2^* = \frac{K\pi}{\omega} \sum_{s=\pm 1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m^{(s)} H_m^{(1)}(k\rho_s) \exp [im(\varphi_s - \varphi_s^0)],$$

где $x_m^{(s)}$ находятся из (38)–(40), в которых следует положить $h = 0$ ($k = v$). При этом в волновой зоне $E_\varphi = H_z = k^2 \Pi$ (остальные компоненты векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} равны нулю).

Следует заметить, что ряд (14) благодаря асимптотической формуле (18) в выражениях (13) для σ_{mn} сводится к геометрической прогрессии (23), с помощью которой приближенно суммируются все последовательные эффекты дифракции на цилиндрах. При этом, как следует из (23), первичная дифракция имеет порядок $w^{-1/2}$, вторичная— w^{-1} , третичная— $w^{-3/2}$ и т. д. В то же время при использовании формулы (18) отбрасываются члены порядка $w^{-3/2}$, $w^{-5/2}$ и более высокого, которые содержатся в асимптотическом разложении функции Ханкеля. Поэтому здесь вполне естественным образом возникает вопрос о критериях применимости метода. В случае, когда наряду с условием $w \gg 1$ одновременно имеет место и условие $kv \ll 1$, в установление такого критерия не вносится чего-либо нового по сравнению с [7], где рассмотрена подобная ситуация в задаче о дифракции плоской волны на двух параллельных круговых цилиндрах.

Хуже обстоит дело в общем случае ($w \gg 1$, $kv = ka \sin \theta$, где $kv \sim 1$, либо $kv \gg 1$), когда установление аналитическим путем критерия при-

менимости метода является весьма затруднительным делом. Здесь некоторые выводы могут быть сделаны путем сравнения численных результатов, полученных по приближенным формулам и формулам точной теории, например, в задаче о поле бесконечно длинной нити с током (электрическим либо магнитным), когда получение точных формул становится возможным.

Так, для бесконечно длинной нити с электрическим током формулами строгой теории являются формулы (33), (34), где

$$x_m^{(s)} = \beta_m J_m(ka) X_m^{(s)} \quad (s = \pm 1), \quad (60)$$

а $X_m^{(s)}$ находится из бесконечной системы

$$X_m^{(s)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{mn}^{(-s, s)} X_n^{(-s)} = F_m^{(s)} \quad (m=0, \pm 1, \dots; s = \pm 1); \quad (61)$$

$$\sigma_{mn}^{(-s, s)} = \frac{\beta_n J_n(ka) H_{n-m}^{(1)}(kl)}{\beta_m H_m^{(1)}(ka)} \exp[-i(n-m)\varphi_{-s, s} + im\varphi_s^0 - in\varphi_{-s}^0],$$

$$F_m^{(s)} = \frac{H_m^{(1)}(k\rho_s^0)}{\beta_m H_m^{(1)}(ka)}.$$

Как уже отмечалось выше, их можно получить либо путем непосредственного строгого решения задачи о дифракции волны $-\frac{I\pi}{\omega} H_0^{(1)}(k\bar{\rho})$

на двух кругах, либо путем интегрирования по z_0 и h в соответствующих формулах, выведенных первоначально для дипольного излучателя. Бесконечная система для $X_m^{(s)}$ разрешима методом усечения для всех значений ka и kl , удовлетворяющих условию $kl > 2ka$ (цилиндры не касаются) [5], в том числе и для случая, когда источник находится на поверхности одного из цилиндров. При этом ее решение удовлетворяет условию $\sum_m |X_m^{(s)}|^2 < \infty$, из которого следует ограниченность $|X_m^{(s)}|$ для всех m : $|X_m^{(s)}| < \text{const}$, причем, очевидно, $|X_m^{(s)}| \rightarrow 0$ при $|m| \rightarrow \infty$. После подстановки (60) в (33) получаются ряды ($s = \pm 1$)

$$\Pi_s = \frac{I\pi}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m X_m^{(s)} J_m(ka) H_m^{(1)}(k\rho_s) e^{im(\varphi_s - \varphi_s^0)},$$

абсолютно и равномерно сходящиеся для всех $\rho_s > a$, так как в

$$|\Pi_s| \leq \text{const} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\beta_m| |J_m(ka)| |H_m^{(1)}(k\rho_s)|$$

сходится ряд из модулей при $\rho_s > a$.

Как показывают численные расчеты, при учете в (33) приблизительно $2ka$ членов* ряд (33) вычисляется с точностью порядка 2% (во всяком случае для волновой зоны). Исходя из этих соображений, мы при получении приближенных формул учитываем фактически конечность индекса $n - m$ функции Ханкеля $H_{n-m}^{(1)}(kl)$ в выражениях σ_{mn} из

* В этих членах $x_m^{(s)}$ находится из (60), где, в свою очередь, $X_m^{(s)}$ находятся при решении системы (61) методом усечения.

(13), где полагается $n, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. Следовательно, в качестве одного из критериев применимости приближенных формул можно взять условие $kl \gg 2N \simeq 4ka$ ($l \gg 4a$).

Ниже приведены некоторые частные результаты численного расчета полного и вторичного полей (E_z и $E_z^{(2)}$) в волновой зоне для нити с электрическим током. Они представлены диаграммами направленности — графиками функций $|E_z|$ и $|E_z^{(2)}|$, рассматриваемыми как функции полярного угла φ . Расчет производился по формулам точной теории (33), (60), (61) и приближенной теории в предположении, что $kl \gg 1$ (ввиду симметрии диаграмм — нить расположена посередине между цилиндрами — их графики даны лишь для интервала $0 \leq \varphi \leq \pi/2$). Из рис. 2а, б видно, что, если при $l = 5a$ ($ka = 2, kl = 10$) график функции

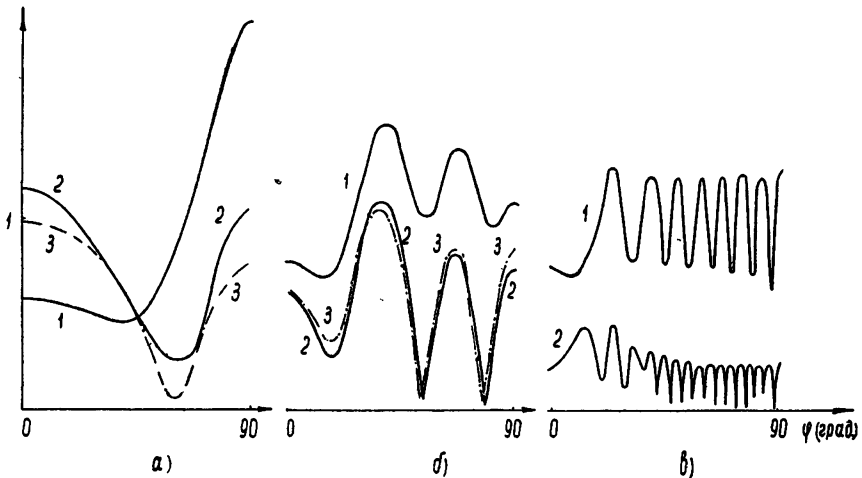


Рис. 2. Модули функций E_z и $E_z^{(2)}$.

а) $ka=2, kl=10$. Кривая 1— $|E_z|$ по строгой формуле; 2— $|E_z^{(2)}|$ по строгой формуле; 3— $|E_z^{(2)}|$ по приближенной формуле.

б) $ka = 2, kl = 20$. Кривая 1— $|E_z|$ по строгой формуле; 2— $|E_z^{(2)}|$ по строгой формуле; 3— $|E_z^{(2)}|$ по приближенной формуле.

в) $ka = 2, kl = 100$. 1— $|E_z|$, 2— $|E_z^{(2)}|$ (по строгим формулам).

$|E_z^{(2)}|$, построенный по приближенной формуле, недостаточно точно соответствует графику той же функции, построенной по точным формулам, то уже при $l = 10a$ ($ka = 2, kl = 20$) это соответствие значительно улучшается. Очевидно, что с увеличением kl для данного ka ($ka = 2$) они будут совпадать с еще большей степенью точности, точно так же, как и для данного kl ($kl = 20$) с уменьшением ka , и наоборот. Например, из рис. 3б видно, что при $kl = 20$ и $ka = 3$ ($l \simeq 7a$) соответствие гораздо хуже (особенно в областях, близких к $\varphi = 0; \pi$ и $\varphi = \pi/2; 3\pi/2$), чем при $kl = 20$ и $ka = 2$ ($l = 10a$).

Ясно, что приведенные примеры не дают еще основания делать какие-либо выводы общего характера, в связи с чем вопрос об оценках метода и установления критерия его применимости подлежит дальнейшему изучению.

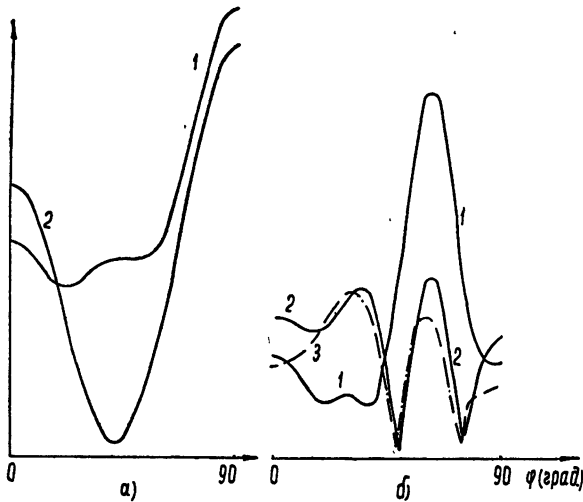


Рис. 3. Модули функций E_z и $E_z^{(2)}$.

- а) $ka=3$, $kl=10$. Кривая 1— $|E_z|$, 2— $|E_z^{(2)}|$ (по строгим формулам).
 б) $ka=3$, $kl=20$. Кривая 1— $|E_z|$ по строгой формуле, 2— $|E_z^{(2)}|$ по строгой формуле; 3— $|E_z^{(2)}|$ по приближенной формуле.

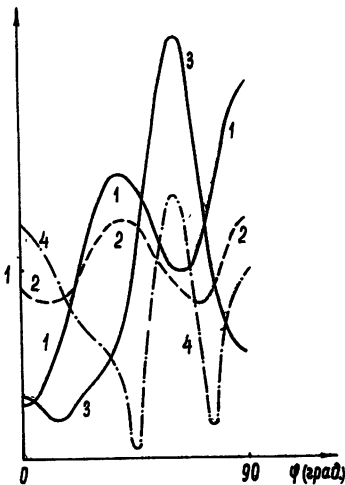


Рис. 4. Модули функций E_z и $E_z^{(2)}$. Кривая 1— $|E_z|$, 2— $|E_z^{(2)}|$ (по строгим формулам, $ka=4$, $kl=10$), 3— $|E_z|$, 4— $|E_z^{(2)}|$ (по строгим формулам, $ka=4$, $kl=20$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Уэйт, Электромагнитное излучение из цилиндрических систем, изд. Сов. радио, М., 1963.
2. Д. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.
3. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, М.—Л., 1963.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
5. Е. А. Иванов, А. М. Родов, Изв. АН БССР, сер. физ.-тех., № 4, 3 (1964).
6. V. Twersky, J. Acoust. Soc. Am., 24, 42 (1952).
7. V. Twersky, J. Appl. Phys., 23, 407 (1952).

ON FIELD DIFFRACTION OF LONGITUDINAL DIPOLE RADIATOR
ON TWO-PARALLEL CIRCULAR CYLINDERS*E. A. Ivanov*

The problem has been solved approximately of the field of a dipole (electric and magnetic) radiator in a space containing two infinitely-long ideal-conducting cylinder with parallel axes assuming that a dipole moment is oriented along cylinders axis and the radiator itself is either the near one of the cylinders or on its surface. For the case of a magnetic dipole the solution obtained in a wave region is generalized over the case of a rectangular radiating slit situated on the surface of one of the cylinders. Hereby, the distance between the cylinders axes is assumed to be much longer than the wavelength. A particular case of infinitely long straight line filament with current (electric or magnetic) has been considered. The examples of numerical calculation of the problem have been given.

УДК 535.4

К. ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ

А. С. Брюховецкий

Рассматривается фраунгоферова дифракция света на ультразвуке с помощью метода Соболева [7, 8]. Выражения для интенсивности дифракционных линий представляют собой квадратуры, зависящие от двух параметров. Предельным переходом по малому параметру из них следуют результаты «упрощенной» теории Рамана и Ната для нормального падения света и результаты Дебая и Бриллюэна для дифракции света в первом борновском приближении. Показано, что интенсивности линий в теории Рамана и Ната соответствуют в действительности не нормальному падению, а брэгговским углам.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическому рассмотрению дифракции света на ультразвуке посвящена большая литература. Первые описания этого явления дали Дебай [1] и Бриллюэн [2]. В основу их положено первое борновское приближение, что облегчает вычисления, но ограничивает рассмотрение случаем ультразвука очень слабой интенсивности.

«Упрощенная» теория Рамана и Ната [3-5] позволяет легко вычислить интенсивность дифракционных спектров. Однако хорошее совпадение этой теории с экспериментом достигается в некоторой области параметров лишь при нормальном падении света.

Теории, рассматривающие дифракцию более строго и налагающие на параметры задачи меньше ограничений, приводят обычно к весьма трудоемкому счету. Критический обзор этих теорий можно найти в работе Рытова [6], где в качестве основного их недостатка отмечается то обстоятельство, что наряду с большими вычислительными трудностями зависимость от угла падения света и интенсивности ультразвука выражается очень сложным образом через коэффициенты разложения и спектр собственных значений.

Рытовым [6] были исследованы экспериментально и теоретически объемные эффекты при дифракции на ультразвуке слабой интенсивности, а введение комплексного эйконала позволило при несущественных упрощениях получить для нормального падения света решение, не облегчающее расчет интенсивностей дифракционных спектров, но позволяющее оценить границы применимости приближенных теорий, основанных на гипотезе о фазовой решетке.

В данной работе дифракция света на ультразвуке рассматривается с помощью результатов, полученных Соболевым [7, 8]. Метод Соболева позволяет в первом приближении дать решение уравнения для рассеянного поля:

$$\Delta \mathbf{E}_1 - \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_1 + \dots = \frac{\varepsilon_1(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_0 - \text{grad} \left[\mathbf{E}_0 \text{grad} \frac{\varepsilon_1(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} (1 + \dots) \right] \quad (\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0), \quad (1)$$

в котором отброшены члены $\text{grad} [\mathbf{E}_1 \text{grad} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (1 + \dots)]$. Это решение можно

записать в виде «запаздывающего потенциала», напоминающего первое борновское приближение:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathbf{R}_0, t) = & -\frac{1}{4\pi} \int \int \int_V \frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} \left\{ \frac{\varepsilon_1(\mathbf{r})}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t') \right]_{t' = t - \tau} - \right. \\ & \left. - [\text{grad} \langle \mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t') \text{ grad} \frac{\varepsilon_1(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} (1 + \dots) \rangle] \right\} dV, \end{aligned}$$

но отличающегося от него тем, что запаздыванием в нем является не $\frac{V\sqrt{\varepsilon_0}}{c} |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$, а решение $\tau(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})$ уравнения эйконала для неоднородной среды. Здесь V — объем, внутри которого правая часть уравнения (1) отлична от нуля; $\mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t)$ — падающая, а $\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t)$ — рассеянная волна; точки в уравнении (1) означают члены в разложении $\ln(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$ более высокого порядка малости, нежели $\varepsilon_1/\varepsilon_0$.

Учитывая, что для слабо неоднородной среды запаздывание можно представить в виде

$$\tau(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = \frac{V\sqrt{\varepsilon_0}}{c} |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| (1 + \tau'),$$

где $\tau' \ll 1$, и дважды применяя теорему Гаусса, рассеянное поле для случая монохроматической падающей волны перепишем в виде

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{R}_0, t) = \frac{k_0^2}{4\pi} e^{i\omega t} \int \int \int_V \frac{e^{-i\omega\tau}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} \varepsilon_1(\mathbf{r}) \{n(\mathbf{r}) [\mathcal{E}_0(\mathbf{r}) n(\mathbf{r})]\} dV, \quad (2)$$

где

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega t} \mathcal{E}_0(\mathbf{r}), \quad n(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|}.$$

Для того, чтобы ограничиться этим приближением в решении уравнения (1), необходимо, чтобы вторая итерация в интегральном уравнении Соболева для плотности запаздывающего потенциала мало отличалась от первой, т. е.

$$\left| \int \int \int_V \Delta_0 \sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t - \tau(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})) dV \right| \ll |f(\mathbf{R}_0, t)|. \quad (3)$$

Здесь $f(\mathbf{R}_0, t)$ — правая часть уравнения (1), поделенная на -4π ;

$$\sigma(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(\mathbf{R}_0)}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1(\mathbf{r})}} \frac{1}{s(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})} \simeq \frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon_1(\mathbf{R}_0)}{\varepsilon_0}\right) \right],$$

где $s(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})$ — длина луча, соединяющего точку рассеяния \mathbf{r} и точку наблюдения \mathbf{R}_0 ; Δ_0 — оператор Лапласа по координатам точки наблюдения. Точка $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0$ из объема интегрирования исключена. В случае плоской падающей волны $\mathcal{E}_0(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ при $kL \gg 1$ приходим к следующей оценке для (3):

$$\frac{|\Delta_0 \varepsilon_1(\mathbf{R}_0)| L}{\varepsilon_0 k} \ll 1 \quad (4)$$

(L — характерный размер рассматриваемого объема). Неравенство (4) легко получить тем же путем, который используется для оценки первого борновского приближения (см. [9], стр. 571).

Для плоской ультразвуковой волны

$$|\Delta_0 \varepsilon_1(\mathbf{R}_0)| = K^2 |\varepsilon_1(R_0)|,$$

где \mathbf{K} — волновой вектор ультразвука, и условие (4) принимает следующий вид:

$$\left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right| \frac{K^2}{k} L \ll 1. \quad (5)$$

Следует отметить, что в квантовой механике для решения уравнения Шредингера формула, аналогичная (2), была получена Гольдманом и Мигдалом [10]. Исходным пунктом при этом служило предположение о специальном виде приближенного выражения для функции Грина.

1. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ПЛОСКОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНЕ

Объем V , в котором правая часть уравнения (1) отлична от нуля, является областью пересечения светового и ультразвукового пучков. Рассмотрим случай, когда и звуковую и падающую световую волну можно считать плоскими по поперечному сечению пучков в пределах рассеивающего объема:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\Omega t - Kx) \quad (\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0), \\ \mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\varepsilon_0} \omega / c, \quad \mathbf{k}(k \sin \varphi, 0, k \cos \varphi), \quad (7)$$

$$K = 2\pi/\Lambda;$$

Ω , Λ ; ω , λ — частота и длина волны ультразвука и света соответственно. При этом объем V представляет собой косоугольный параллелепипед с размерами a , b , l вдоль осей x , y , z (рис. 1). Диэлектрическая проницаемость среды, невозмущенной ультразвуком, равна ε_0 . Нас интересует рассеянное электромагнитное поле в точке M_0 , расстояние до которой от начала координат O значительно больше характерного размера рассеивающего объема:

$$L/R_0 \ll 1.$$

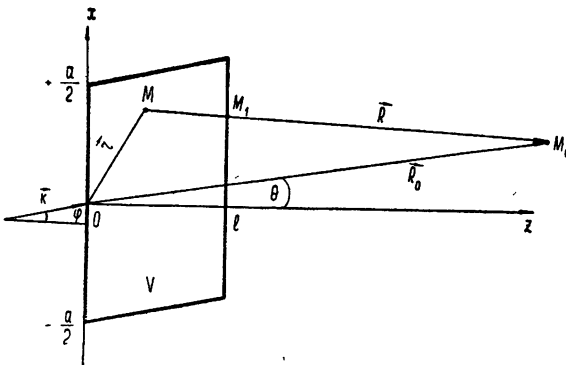


Рис. 1.

При рассмотрении эффектов дифракции можно пренебречь (см. [6]) преломлением и отражением на границе рассеивающего объема, а также членами $\text{grad} \left\{ \epsilon_1 \text{grad} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} (1 + \dots) \right\}$. Кроме того, при выполнении условия

$$\frac{\sqrt{\epsilon_0} c'}{c} K \Delta \ll 1,$$

где c' — скорость ультразвука, можно рассматривать зависимость диэлектрической проницаемости от времени как зависимость от параметра. Тогда рассеянное поле описывается формулой (2), в которую следует подставить выражения (6), (7) для диэлектрической проницаемости и падающего светового поля.

Запаздывание $\tau(R_0, r)$ определяется из уравнения эйконала для неоднородной среды при условии, что луч проходит через точку наблюдения M_0 и точку рассеяния M . Точное решение такой задачи весьма сложно даже в случае, когда допускается разделение переменных в уравнении эйконала:

$$(\nabla\tau)^2 = c^{-2} \{ \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(\Omega t - Kx) \}.$$

Эта трудность обусловлена необходимостью достаточно точно выразить в аналитическом виде постоянные интегрирования через граничные условия. В данном случае мы воспользуемся методами теории возмущений и представим τ в виде ряда по степеням параметра $\alpha = \epsilon_1/2\epsilon_0 \ll 1$:

$$\tau = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j \alpha^j. \tag{8}$$

Для коэффициентов этого ряда легко получаются выражения в виде квадратур:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{c} |R_0 - r|; \\ \tau_1 &= \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{c} \int_M^{M_1} \cos(\Omega t - Kx) ds; \\ \tau_2 &= - \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_0}} \int_M^{M_1} (\nabla\tau_1)^2 ds; \\ \tau_3 &= - \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} \int_M^{M_1} \nabla\tau_1 \nabla\tau_2 ds; \\ &\dots \end{aligned} \tag{9}$$

Интегрирование здесь ведется вдоль прямой MM_0 от точки рассеяния M до точки пересечения M_1 этой прямой с границей рассеивающего объема. В дальнейшем ограничимся случаем фраунгоферовой дифракции

$$k \frac{L^2}{R} \ll 1.$$

При условии, что углы наблюдения близки к углам падения света, координаты точки M_1 легко выразить через координаты точки $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ из уравнения прямой MM_0 :

$$\begin{aligned} x_1 &\simeq x + A(x_0 - x) + O(A^2); \\ y_1 &\simeq y + A(y_0 - y) + O(A^2); \\ z_1 &= l; \quad A = \frac{z-l}{l-z_0} \sim \frac{L}{R_0} \ll 1. \end{aligned}$$

Принимая это во внимание, нетрудно получить явные выражения для квадратур (9):

$$\begin{aligned} \tau_1 &\simeq \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} (l-z) \cos(\Omega t - Kx); \\ \tau_2 &\simeq -\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{6c} K^2(l-z)^3 \sin^2(\Omega t - Kx); \\ \tau_3 &\simeq -\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{30c} K^4(l-z)^5 \sin(\Omega t - Kx) \sin 2(\Omega t - Kx); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

В этих формулах отброшены члены порядка малости AKL и $(KL)^{-1}$ по сравнению с написанными, поскольку они дают поправки в фазе, пренебрежимо малые по сравнению с единицей.

Критерием применимости решения τ в виде ряда (8) является условие равномерной сходимости и почленного дифференцирования ряда. Проведенные вычисления показывают, что имеет место следующая оценка:

$$\omega |\tau_j \alpha^j| \leq \alpha k l \frac{(\sigma K^2 l^2)^{j-1}}{(2j-1)(2j-3)} \quad (j=2, 3, \dots).$$

Тогда искомым критерием будет условие

$$\alpha K^2 l^2 \leq 1.$$

Исследуем подробно случай, когда $\alpha K^2 l^2 \ll 1$, так что в выражении для τ можно ограничиться первой степенью α :

$$\tau = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \{ |R_0 - r| + \alpha(l-z) \cos(\Omega t - Kx) \}. \tag{10}$$

Для этого необходимо, чтобы все отброшенные члены ряда (8) давали в фазе добавку, малую по сравнению с единицей. В противном случае следует учитывать более высокие степени α в разложении (8).

Подставляя в формулу (2) выражения (6), (7) и (10) и ограничиваясь в разложениях

$$\frac{1}{|R_0 - r|} \simeq \frac{1}{R_0} + \dots, \quad n = \frac{R_0 - r}{|R_0 - r|} \simeq \frac{R_0}{R_0} + \dots$$

первым членом, а в разложении

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} |R_0 - r| \simeq \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \left(R_0 - \frac{rR_0}{R_0} + \dots \right)$$

первыми двумя членами, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(R_0, t) &= \frac{\alpha k^2 b e^{i(\omega t - kR_0)}}{4\pi R_0} e^{\pm i\Omega t} [n[\mathcal{E}_0 n]] \times \\ &\times \int_0^l \int_{-\frac{a}{2} + z \operatorname{tg} \varphi}^{+\frac{a}{2} + z \operatorname{tg} \varphi} \exp \left[ikx \left(\sin \theta - \sin \varphi \mp \frac{\lambda}{\Lambda} \right) \right] \exp [ikz(\cos \theta - \cos \varphi)] \times \\ &\times \exp [-iak(l-z) \cos(\Omega t - Kx)] dz dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Для удобства точка наблюдения M_0 выбрана в плоскости (x, z) , т. е. $R_0(R_0 \sin \theta, 0, R_0 \cos \theta)$. Воспользовавшись известным разложением

$$e^{-ip \cos q} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{-inq} J_n(p),$$

где J_n — функции Бесселя первого рода, после несложных преобразований и интегрирования по x найдем окончательный вид рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(R_0, t) &= \frac{abke^{i(\omega t - kR_0)}}{2\pi R_0} [n[\mathcal{E}_0 n]] \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} e^{\mp i n \Omega t} \times \\ &\times \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} \left(\sin \theta - \sin \varphi \pm n \frac{\lambda}{\Lambda} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \left(\sin \theta - \sin \varphi \pm n \frac{\lambda}{\Lambda} \right)} \{ J_n(0) e^{i\Omega} - J_n(\alpha kl) - \\ &- iG \int_0^1 e^{i\Omega(1-\xi)} J_n(\alpha k l \xi) d\xi \}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$G = kl \left[\cos \theta - \cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi \left(\sin \theta - \sin \varphi \pm n \frac{\lambda}{\Lambda} \right) \right].$$

Для дифракции на стоячей ультразвуковой волне легко получить аналогичный результат. В этом случае диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon(r, t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\Omega t) \cos(Kx). \quad (13)$$

Если ограничиться, как и в предыдущем случае бегущей ультразвуковой волны, первой степенью $\alpha = \varepsilon_1/2\varepsilon_0$ в запаздывании

$$\tau = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \left\{ R_0 - \frac{rR_0}{R_0} + \alpha(l-z) \cos(\Omega t) \cos(Kx) \right\}, \quad (14)$$

то подстановка выражений (6), (7), (14) в (2) приводит к следующему выражению для рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathbf{R}_0, t) = & \frac{\alpha k^2 b e^{i(\omega t - kR_0)}}{4\pi R_0} \cos(\Omega t) [n[\mathcal{E}_0 n]] \times \\ & \times \int_0^l \int_{-\frac{a}{2} + z \operatorname{tg} \varphi}^{+\frac{a}{2} + z \operatorname{tg} \varphi} \exp \left[ikx \left(\sin \theta - \sin \varphi \pm \frac{\lambda}{\Lambda} \right) \right] \exp [ikz (\cos \theta - \\ & - \cos \varphi)] \exp [-iak(l-z) \cos(\Omega t) \cos(Kx)] dz dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразования, полностью совпадающие с теми, которые были сделаны при выводе формулы (12), позволяют найти окончательный вид рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathbf{R}_0, t) = & \frac{abke^{i(\omega t - kR_0)}}{2\pi R_0} [n[\mathcal{E}_0 n]] \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} \times \\ & \times \frac{\sin(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi \pm n\lambda/\Lambda)}{(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi \pm n\lambda/\Lambda)} [J_n(0) e^{iG} - \\ & - J_n[\alpha k l \cos(\Omega t)] - iG \int_0^1 e^{iG(1-\xi)} J_n[\alpha k l \xi \cos(\Omega t)] d\xi]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь G то же, что и в формуле (12).

2. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На больших расстояниях от рассеивающего объема падающая волна вследствие конечных размеров поперечного сечения светового пучка должна определяться дифракционным интегралом по плоскости $z = l$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(\mathbf{R}_0, t) = & \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{-2\pi i} \int_{-\frac{a}{2} + l \operatorname{tg} \varphi}^{+\frac{a}{2} + l \operatorname{tg} \varphi} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{e^{-ikr} e^{-ik|R_0 - r|}}{|R_0 - r|} dx dy \simeq \\ \simeq & i \mathcal{E}_0 \frac{abk \exp [i(\omega t - kR_0)]}{2\pi R_0} \frac{\sin(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi)}{(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi)} \times \\ & \times \exp [ikl (\cos \theta - \cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi) (\sin \theta - \sin \varphi)]. \end{aligned}$$

Поскольку интересен именно случай, когда углы наблюдения близки к углам падения, то можно положить

$$[n[\mathcal{E}_0 n]] \simeq \mathcal{E}_0.$$

При этом наблюдаемое поле в случае бегущей ультразвуковой волны

$$\mathcal{E}(\mathbf{R}_0, t) = \mathcal{E}_0(\mathbf{R}_0, t) + \mathcal{E}_1(\mathbf{R}_0, t) = -\mathcal{E}_0 \frac{abk \exp [i(\omega t - kR_0)]}{2\pi R_0} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} e^{\mp i n \Omega t} \frac{\sin(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi \pm n\lambda/\Lambda)}{(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi \pm n\lambda/\Lambda)} \times \\ & \times \{J_n(\alpha k l) + iG \int_0^1 e^{iG(1-\xi)} J_n(\alpha k l \xi) d\xi\}, \end{aligned} \quad (17)$$

а в случае стоячей ультразвуковой волны

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(R_0, t) = & -\mathcal{E}_0 \frac{abk \exp [i(\omega t - kR_0)]}{2\pi R_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} \times \\ & \times \frac{\sin(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi \pm n\lambda/\Lambda)}{(\pi a/\lambda) (\sin \theta - \sin \varphi \pm n\lambda/\Lambda)} \{J_n[\alpha k l \cos(\Omega t)] + \\ & + iG \int_0^1 e^{iG(1-\xi)} J_n[\alpha k l \xi \cos(\Omega t)] d\xi\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из выражений (17) и (18) следует, что направление главных дифракционных максимумов определяется из условий

$$\sin \theta - \sin \varphi = n\lambda/\Lambda \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (19)$$

а относительная интенсивность n -го дифракционного спектра для бегущей ультразвуковой волны

$$\begin{aligned} I_n = & |J_n(\alpha k l) + ikl (\cos \theta - \cos \varphi) \int_0^1 \exp \{ikl (\cos \theta - \\ & - \cos \varphi) (1-\xi)\} J_n(\alpha k l \xi) d\xi|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Для дифракции света на стоячей ультразвуковой волне интенсивность n -го дифракционного спектра получается усреднением за период ультразвука квадрата модуля фигурной скобки в выражении (18).

Из выражения (20), прежде всего, легко получить интенсивность ± 1 -го дифракционного спектра, даваемую теориями Бриллюэна и Де-

бая, если для $\alpha k l \ll 1$ положить $n = \pm 1$ и $J_{\pm 1}(\alpha k l \xi) \simeq \pm \frac{1}{2} \alpha k l \xi$:

$$I_{\pm 1} = \left| \frac{\alpha k l}{2} \frac{\sin(\pi l/\lambda) (\cos \theta - \cos \varphi)}{(\pi l/\lambda) (\cos \theta - \cos \varphi)} \exp [i(\pi l/\lambda) (\cos \theta - \cos \varphi)] \right|^2. \quad (21)$$

Для нормального падения ($\varphi=0$) это выражение совпадает с полученным в работе [6] (формула (57)) при учете амплитудной модуляции.

Если же положить $D = kl (\cos \theta - \cos \varphi) = 0$, то из (20) получим распределение интенсивностей, даваемое «упрощенной» теорией Рамана и Ната для нормального падения света:

$$I_n = |J_n(\alpha k l)|^2. \quad (22)$$

Очевидно, в действительности это выражение для интенсивности соответствует не нормальному падению, а углам падения, определяемым из условий $D = 0$, при выполнении равенства (19). Для малых углов, когда в разложении для синусов достаточно ограничиться первой степенью

аргумента, а для косинусов — второй, условия (19) и $D = 0$ приобретают вид

$$\theta - \varphi = n \frac{\lambda}{\Lambda}; \quad (23)$$

$$D = nKl \left(\varphi + n \frac{K}{2k} \right) = 0. \quad (24)$$

Модуль величины D несимметричен по отношению к перемене знака у n ; поэтому интенсивность соответствующих положительных и отрицательных спектров различна. При этом $I_n(\varphi) = I_{-n}(-\varphi)$. Асимметрия, согласно (24), более заметна для больших n . Эти факты наблюдаются экспериментально [6,11,12]. Поскольку $n^2 K^2 / kl$ уменьшается с увеличением длины волны ультразвука, то асимметрия дифракционной картины тоже должна уменьшаться, что соответствует экспериментам [6,11,12].

Если $n^2 K^2 / kl$ мало настолько, что им можно пренебречь, условие (24), при котором распределение интенсивностей дается формулой (22), переходит в приближенное условие нормального падения света $\varphi \simeq 0$.

Из выражения (20) следует, что когда на интервале интегрирования производная от бесселевой функции меняется медленно по сравнению с экспонентой, максимальным значениям интенсивности дифракционной линии будут соответствовать брэгговские углы. Для последних величина D в показателе экспоненты равна нулю, что в приближении (24) означает

$$\varphi_{n \text{ бр}} = n \frac{\lambda}{2\Lambda}.$$

Такие условия заведомо выполняются при $\alpha kL \ll 1$. В этой области значений параметра αkL существование брэгговских углов дифракции было доказано теоретически и проверено экспериментально Рытовым [6]. Если же $\alpha kL > 1$, то осцилляции производной от бесселевой функции и экспоненты могут складываться и давать в результате значения интенсивности больше, чем для брэгговских углов.

Из эксперимента известно, что интенсивность дифракционных линий уменьшается с ростом номера линии и угла падения. В двух предельных случаях, когда $D/\alpha kL \ll 1$ или $D/\alpha kL \gg 1$, это легко показать, построив для интенсивности (20) асимптотические разложения, из которых следует, что интенсивность убывает по крайней мере, как $(n\varphi)^{-2}$.

В общем случае наклонного падения распределение дифракционных спектров «упрощенной» теории Рамана и Ната

$$I_n = \left| J_n \left(2 \frac{\alpha kL}{Kl \sin \varphi} \sin \left(\frac{Kl}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \right) \right|^2 \quad (25)$$

не подтверждается экспериментом. Поэтому для проверки исходной гипотезы этой теории о фазовой решетке был поставлен ряд экспериментов [13–15], в которых исследовалась дифракция света одновременно на двух параллельных ультразвуковых пучках шириною $l/2$ каждый, сдвинутых по фазе на π . Согласно Раману и Нату, набег фазы на первой ультразвуковой волне должен компенсироваться набегом фазы на второй, и в результате дифракционные явления не должны наблюдаться.

Однако опыты показали, что в случае нормального падения дифракция лишь заметно ослабевает, а не исчезает полностью. Этот факт можно объяснить, исходя из формулы (2). Распределение интенсивностей в этом случае имеет вид

$$I_n = \left\{ \frac{kl}{2} (\cos \theta - \cos \varphi) \int_0^1 \cos \left[\frac{kl}{2} (\cos \theta - \cos \varphi) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - \xi) \right] J_n \left(\frac{\alpha kl}{2} \xi \right) d\xi \right\}, \quad (26)$$

что легко получить путем, аналогичным тому, каким было получено выражение (20). Из (26) следует, что для нормального падения ($\varphi = 0$) интенсивность становится малой величиной порядка $(K^2 l/k)^2$. При произвольных углах падения интенсивность того же порядка, что и в случае дифракции на одной ультразвуковой волне. Причиной этому служат объемные эффекты, характеризуемые величиной $D = kl(\cos \theta - \cos \varphi)$. Этими эффектами объясняется и тот факт, что для нормального падения света интенсивность соответствующих спектров не обращается полностью в нуль [16] в нулях бесселевых функций, как это должно следовать из упрощенной теории Рамана и Ната. Из выражения (20) видно, что при обращении в нуль бесселевой функции интенсивность является величиной порядка $(K^2 l/k)^2$.

Подобный анализ можно провести для дифракции света на стоячих ультразвуковых волнах (18), а также достаточно тривиальным образом обобщить результаты для решеток из многих ультразвуковых волн, когда диэлектрическая проницаемость представляется в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{\rho=1}^m \varepsilon_{\rho} \cos (\Omega_{\rho} t - K_{\rho} r + \delta_{\rho}),$$

а запаздывание в том же приближении, что и (10), равно

$$\tau = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \left\{ R_0 - \frac{r R_0}{R_0} + \sum_{\rho=1}^m \frac{2\alpha_{\rho}}{K_{\rho 3}} \sin \left(K_{\rho 3} \frac{l-z}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \left(\Omega_{\rho} t - K_{\rho} r - K_{\rho 3} \frac{l-z}{2} + \delta_{\rho} \right) \right\}.$$

Здесь $\alpha_{\rho} = \varepsilon_{\rho}/2\varepsilon_0$, $K_{\rho 3}$ — проекция вектора K_{ρ} на ось Oz. Если эта составляющая довольно значительная ($K_{\rho 3} l \gg 1$), то добавка к запаздыванию за счет неоднородности, создаваемой такой ультразвуковой волной, мала и рассеянное этой неоднородностью поле порядка малости $(K_{\rho 3} l)^{-1}$.

Для плоской ультразвуковой решетки (все $K_{\rho 3} = 0$) запаздывание

$$\tau = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \left\{ R_0 - \frac{r R_0}{R_0} + \sum_{\rho=1}^m \alpha_{\rho} (l-z) \cos (\Omega_{\rho} t - K_{\rho} r + \delta_{\rho}) \right\},$$

а наблюдаемое поле выражается довольно просто через квадратуры, подобные (17):

$$\mathcal{E}(R_0, t) = -\mathcal{E}_0 \frac{abk \exp [i(\omega t - kR_0)]}{2\pi R_0} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} (-i)^{\sum_{\rho=1}^m n_{\rho}+1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[-i \sum_{\rho=1}^m (n_{\rho} \Omega_{\rho} t + n_{\rho} \delta_{\rho}) \right] \frac{\sin(\pi a / \lambda) \left(\sin \theta \cos \beta - \sin \varphi + \sum_{\rho=1}^m n_{\rho} \frac{K_{\rho 1}}{k} \right)}{(\pi a / \lambda) \left(\sin \theta \cos \beta - \sin \varphi + \sum_{\rho=1}^m n_{\rho} \frac{K_{\rho 1}}{k} \right)} \times \\ & \times \frac{\sin(\pi b / \lambda) \left(\sin \theta \sin \beta + \sum_{\rho=1}^m n_{\rho} \frac{K_{\rho 2}}{k} \right)}{(\pi b / \lambda) \left(\sin \theta \sin \beta + \sum_{\rho=1}^m n_{\rho} \frac{K_{\rho 2}}{k} \right)} C_{n_1, n_2, \dots, n_m}, \end{aligned}$$

где

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_m} = \left\{ \prod_{\rho=1}^m J_{n_{\rho}}(v_{\rho}) + iG \int_0^1 e^{iG(1-\xi)} \prod_{\rho=1}^m J_{n_{\rho}}(v_{\rho} \xi) d\xi \right\}, \quad (27)$$

$$R_0 (R_0 \sin \theta \cos \beta, \quad R_0 \sin \theta \sin \beta, \quad R_0 \cos \theta),$$

G определяется формулой (12), $v_{\rho} = \alpha_{\rho} k l$. Для $G = 0$ квадрат модуля выражения (27) совпадает с интенсивностью дифракционных спектров, полученной Фюсом [17] на основе упрощенной теории Рамана и Ната.

Подводя итоги, следует отметить, что из всех ограничений, наложенных на полученные решения, наиболее существенным является условие $\alpha K^2 l^2 \ll 1$. Для более коротких длин волн и больших интенсивностей ультразвука, когда $\alpha K^2 l^2 \ll 1$, еще можно воспользоваться разложением (8), учитывая в запаздывании более высокие степени α . Это приведет к зависимости интенсивностей дифракционных спектров от третьего параметра $-\alpha K^2 l^2$. Если же $\alpha K^2 l^2 > 1$, то вся трудность проблемы сводится к методам определения запаздывания.

В заключение автор считает своим долгом отдать дань уважения и искренней признательности светлой памяти В. Л. Германа, уделявшего при своей жизни постоянное внимание и помощь автору данной работы. Автор благодарит С. М. Рытова за обсуждение и ценные замечания, а также П. В. Блюха за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Debye, Phys. Zs., 33, 849 (1932).
2. L. Brillouin, Actual Sci. et Ind., fasc 59, Paris, 1933.
3. C. V. Raman, N. S. Nagendra Nath, Proc. Indian Acad. Sci., A2, 406 (1935).
4. C. V. Raman, N. S. Nagendra Nath, Proc. Indian Acad. Sci., A2, 413 (1935).
5. C. V. Raman, N. S. Nagendra Nath, Proc. Indian Acad. Sci., A3, 75 (1936).
6. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, сер. физ., № 2, 223 (1937).
7. С. Л. Соболев, Тр. сейсм. института АН СССР, № 6, 1 (1930).
8. С. Л. Соболев, Тр. сейсм. института АН СССР, № 42, 1 (1934).
9. В. Г. Левин, Ю. А. Вдовин, В. А. Мямлин, Курс теоретической физики, 2, Физматгиз, М., 1962.
10. И. И. Гольдман, А. Б. Мигдал, ЖЭТФ, 28, 394 (1955).
11. R. Vär, Helv. Phys. Acta, 9, 265 (1936).
12. S. Parthasarathy, Current Sci., 6, 215 (1937).
13. R. Lucas, Compt. Rend. Acad. Sci., 202, 1165 (1936).
14. K. L. Zankel, J. Acoust. Soc. Am., 32, 709 (1960).
15. K. L. Zankel, E. A. Hiedemann, J. Acoust. Soc. Am., 31, 44 (1959).
16. F. H. Sanders, Canad. J. Res., A14, 158 (1936).
17. L. Bergmann, E. Fues, Zs. Phys., 109, 1 (1938).

TO THE THEORY OF LIGHT DIFFRACTION BY ULTRASOUND

A. S. Bryukhovetsky

Fraunhofer light diffraction by ultrasound is considered by Sobolev's method [7,8]. The expressions for the intensity of diffraction lines represent themselves quadratures depending on two parameters. As a result of the limiting transition on a small parameter there followed the results of „simplified“ Raman—Nath's theory for a normal light incidence as well as Debye and Brillouin's results for light diffraction in the first Born's approximation. In Raman—Nath's theory the line intensity is shown to correspond in reality, not to the normal incidence but to Bragg's angles.

УДК 621.371.167

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ С АНИЗОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

В. А. Барегамян

Дано строгое решение задачи о дифракции электромагнитных волн на плоской металлической решетке. Решение представлено в виде рядов Фурье, коэффициенты которых находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. В длинноволновом приближении получены коэффициенты отражения и прохождения основной гармоники, а также эквивалентные граничные условия.

Рассмотрим дифракцию электромагнитных волн на плоской металлической решетке, помещенной в анизотропный диэлектрик конечной толщины.

Решетка с периодом l и шириной ленты $l - d$ расположена в плоскости xOy ; диэлектрик занимает полупространство $z \leq 0$. На решетку под углом α падает плоская произвольно поляризованная волна, волновой вектор которой находится в плоскости падения (плоскость yOz). Анизотропным диэлектриком является одноосный кристалл, а плоскость раздела параллельна или перпендикулярна оси кристалла. Тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\epsilon = \epsilon_0 + (\epsilon_e - \epsilon_0) cc, \quad (1)$$

где c — единичный вектор оси кристалла (cc — диада).

Дифракционное поле состоит из двух волн: обыкновенных (E -поляризованные) и необыкновенных (H -поляризованные). Для решения задачи будем пользоваться точными граничными условиями, т. е. равенством нулю тангенциальных составляющих электрического поля на металле, непрерывностью поля на щелях и непрерывностью тангенциальных составляющих магнитного поля в плоскости $z = 0$.

Рассмотрим некоторые конкретные случаи.

1. Анизотропный одноосный кристалл толщины a помещен между металлическим экраном и решеткой. Ленты решетки параллельны оси Ox . Плоскость раздела xOy перпендикулярна к оси Oz , а ось кристалла параллельна этой оси.

Амплитуды падающей волны возьмем в виде

$$\begin{aligned} E &= aA + B [na], \\ H &= [ma]A - Ba, \end{aligned} \quad (2)$$

где m — вектор рефракции, $a = [mq]$, q — нормаль к плоскости раздела. Пусть падающая волна имеет единичную амплитуду; тогда можем обозначить

$$\begin{aligned} aA &= \cos \psi, \\ aB &= \sin \psi, \end{aligned}$$

где a — модуль вектора \mathbf{a} , ψ — параметр, и падающая волна запишется в виде

$$\begin{aligned} E_x &= -\cos \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)], & H_x &= \sin \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)], \\ E_y &= \cos \alpha \sin \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)], & H_y &= \cos \alpha \cos \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)], \\ E_z &= \sin \alpha \sin \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)], & H_z &= \sin \alpha \cos \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\gamma_{01} = k_0 \cos \alpha, \quad h_0 = k_0 \sin \alpha, \quad k_0 = \omega/c$$

(временный множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и дальше опущен).

В результате падения на решетку волны (3) образуется дифрагированное поле, которое можно разложить в ряд Фурье по функциям $\exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right)$. Для обыкновенных волн над решеткой получим

$$E_x = -\cos \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp [i(\gamma_{n1}z + h_ny)], \quad (4)$$

а в кристалле

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_n e^{-i\gamma_{n20}z} + a'_n e^{i\gamma_{n20}z}) e^{ih_n y}. \quad (5)$$

Аналогично, для необыкновенных волн над решеткой

$$H_x = \sin \psi \exp [i(-\gamma_{01}z + h_0y)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp [i(\gamma_{n1}z + h_ny)], \quad (6)$$

а в кристалле

$$H_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (d_n e^{-i\gamma_{n2e}z} + c'_n e^{i\gamma_{n2e}z}) e^{ih_n y}. \quad (7)$$

Остальные компоненты поля можно получить из уравнений Максвелла. В формулах (4) — (7)

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi}{l} n, \quad \gamma_{n1} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{x^2 - (x \sin \alpha + n)^2},$$

$$\gamma_{n20} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\epsilon_0 x^2 - (x \sin \alpha + n)^2}, \quad \gamma_{n2e} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\epsilon_0 x^2 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_e} (x \sin \alpha + n)^2},$$

где

$$x = k_0 l / 2\pi = l/\lambda.$$

Подчиняя граничным условиям составляющие электромагнитного поля, получим две независимые системы уравнений для обоих типов волн. Для обыкновенных волн она имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\theta < |\varphi| < \pi; \text{ на металле}), \quad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} X_n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \xi_n^E X_n e^{in\varphi} + i \frac{x\gamma_{01}}{k_0} \cos \psi \quad (|\varphi| < \theta; \text{ на щели})$$

с дополнительным условием

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m}{x \sin \alpha + m} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{l} y; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}; \quad X_n = (1 - e^{2i\gamma_{n20} a})(x \sin \alpha + n) b_n, \\ \eta_n^E &= \frac{1}{2} \frac{|x \sin \alpha + n|}{x \sin \alpha + n} \left[(1 - e^{2i\gamma_{n20} a}) \sqrt{\frac{x^2}{(x \sin \alpha + n)^2} - 1} + \right. \\ &\quad \left. + (1 + e^{2i\gamma_{n20} a}) \sqrt{\frac{\epsilon_0 x^2}{(x \sin \alpha + n)^2} - 1} \right] (1 - e^{2i\gamma_{n20} a})^{-1}, \\ \xi_n^{E,H} &= 1 + i \frac{|n|}{n} \eta_n^{E,H}. \end{aligned}$$

Кроме системы уравнений (8), из граничных условий вытекают следующие связи между коэффициентами пространственных гармоник для обыкновенных волн:

$$a_n = \delta_{n0} \cos \psi + b_n (1 - e^{2i\gamma_{n20} a}), \quad a'_n = -b_n e^{2i\gamma_{n20} a}, \quad (10)$$

где δ_{n0} — символ Кронекера.

Систему (8) можно решить методом, развитым в [1]. При этом для определения коэффициентов отражения и прохождения, а также амплитуд волн дифракционных спектров обыкновенной волны получается система алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\sigma X_m &= i \frac{\gamma_{01}}{k_0} x \cos \psi [V_m^0 \tilde{R}_\sigma - R_m \tilde{V}_\sigma^0] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \xi_n^E [V_m^0 \tilde{R}_\sigma - \\ &\quad - R_m \tilde{V}_\sigma^n] X_n \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты V_m^n , R_m , \tilde{V}_σ^n , \tilde{R}_σ зависят от $u = \cos(\pi d/l)$ (начало координат выбрано в середине щели).

Система уравнений (11) одновременно является решением дифракционной задачи для случая, когда решетка находится над изотропным диэлектриком, а подающая волна является E -поляризованной. Действительно, обыкновенная волна в анизотропной среде ведет себя как E -поляризованная волна в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 в случае, когда ось кристалла параллельна оси Oz .

Учитывая вышесказанное, можно показать, что (11) при введении соответствующих обозначений переходит в выражение (1) для E -поляризации (см. [3]).

Для необыкновенных волн имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{in\varphi} &= 2 \frac{\gamma_{h_0}}{k_0} \sin \psi \quad (|\varphi| < \theta; \text{ на щели}), \quad (12) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} y_n e^{in\varphi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \xi_n^H y_n e^{in\varphi} \quad (\theta < |\varphi| < \pi; \text{ на металле}) \end{aligned}$$

с дополнительным условием

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{y_n}{x \sin \alpha + n} = 2 \sin \psi, \quad (13)$$

где

$$y_n = \left[\frac{\gamma_{n2e}}{\epsilon_0 \gamma_{n1}} (1 - e^{2i\gamma_{n2e}a}) + (1 + e^{2i\gamma_{n2e}a}) \right] (x \sin \alpha + n) d_n,$$

$$\gamma_n^H = \frac{1 + \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_e}}{\epsilon_0} \frac{|x \sin \alpha + n|}{x \sin \alpha + n} \times$$

$$\times \frac{(1 - e^{2i\gamma_{n2e}a}) \sqrt{\epsilon_0 x^2 (x \sin \alpha + n)^2 - \epsilon_0 / \epsilon_e}}{\gamma_{n2e} (\epsilon_0 \gamma_{n1})^{-1} (1 - e^{2i\gamma_{n2e}a}) + (1 + e^{2i\gamma_{n2e}a})}.$$

Из граничных условий для тангенциальных составляющих полей, кроме системы уравнений (12), для необыкновенных волн получим следующие соотношения между дифракционными коэффициентами:

$$c_n = \delta_{0n} \sin \psi - \frac{\gamma_{n2e}}{\epsilon_0 \gamma_{01}} (1 - e^{2i\gamma_{02e}a}), \quad c_n' = d_n e^{2i\gamma_{n2e}a}. \quad (14)$$

Систему (12) тоже можно привести к задаче Римана—Гильберта, решение которой запишем в виде

$$R_\sigma Y_m = - \frac{2xh_0}{k_0} \sin \psi [V_m^0 \tilde{R}_\sigma - R_m \tilde{V}_\sigma^0] +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \xi_n^H [V_m^n \tilde{R}_\sigma - R_m \tilde{V}_\sigma^n] y_n \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (15)$$

где $Y_m = y_m$, $m \neq 0$, $Y_0 = y_0 - 2 \frac{xh_0}{k_0} \sin \psi$, коэффициенты V_m^n , R_m , \tilde{R}_σ , \tilde{V}_σ^n

зависят от аргумента $v = -\cos(\pi d/l)$, а значения их определяются по формулам (13) и (14) работы [2].

В отличие от обыкновенных волн, коэффициенты распространения пространственных гармоник и параметр малости задачи ξ_n^H необыкновенных волн зависят от коэффициента анизотропии $\rho = \epsilon_e / \epsilon_0$. Таким образом, для одноосного кристалла дифракционная задача сводится к двум независимым скалярным задачам. Одна из них (для обыкновенных волн) совпадает с задачей для изотропного диэлектрика, а другая существенно отличается от нее.

Заметим, что из системы (15) можно получить решение задачи для H -поляризованной волны в изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ , если положить $\epsilon_0 = \epsilon_e = \epsilon$.

Бесконечные системы уравнений (11) и (15) дают строгое решение задачи. Можно показать, что для решения этих систем применим метод редукции. Это позволяет заменить их усеченными системами, удобными для решения их на электронной вычислительной машине. В длинноволновом приближении (длина падающей волны намного больше периода решетки, $x \ll 1$) можно получить решение задачи в явном виде:

$$b_0 = \frac{ix \cos \alpha \cos \psi \ln \frac{1+u}{2}}{\frac{ix}{2} [(1 - e^{2i\gamma_{020}a}) \cos \alpha + (1 + e^{2i\gamma_{020}a}) \sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2 \alpha}] \ln \frac{1+u}{2} - (1 - e^{2i\gamma_{020}a})}; \quad (16)$$

$$d_0 = \frac{2 \sin \psi}{\frac{\gamma_{02e}}{\varepsilon_0 \gamma_{01}} (1 - e^{2i\gamma_{02e}a}) + (1 + e^{2i\gamma_{02e}a}) + i\gamma_{01}^H \ln \frac{1+v}{2}}. \quad (17)$$

Формулы (16), (17) могут служить основанием для экспериментального определения параметров анизотропного диэлектрика ε_0 и ε_e . Для этого требуется только опытным путем найти a_0 и c_0 , которые выражаются через b_0 и d_0 согласно (10), (14). Если

$$\gamma_{n20}a = m\pi \quad \left(a \sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2 \alpha} = m \frac{\lambda_0}{2} \right), \quad (18)$$

то из (10) следует, что $a_0 = \cos \psi$, и имеют место резонансные условия для обыкновенной волны, падающей на решетку с анизотропным диэлектриком. Для необыкновенных волн эти условия имеют следующий вид:

$$\gamma_{02e} = m\pi; \quad \left(a \sqrt{\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_e} \sin^2 \alpha} = m \frac{\lambda_0}{2} \right); \quad c_0 = \cos \psi. \quad (19)$$

Таким образом, при выполнении условий (18) и (19) коэффициенты отражения обеих волн равны амплитуде падающей волны соответствующей поляризации, а электромагнитная энергия, падающая на решетку с экраном и анизотропным диэлектриком без потерь, отражается как от идеального проводника, который совпадает с плоскостью xOy . При таких условиях определение параметров анизотропного диэлектрика без потерь может быть более удобным.

Используя выражения для b_0 и d_0 (16), (17), можно получить усредненные граничные условия (см. [6]) для обыкновенной и необыкновенной волн. Они имеют следующий вид:

$$(H_{y1} - H_{y11})|_{z=0} = \frac{2 \cos \alpha \cos \psi + b'_0 \cos \alpha + \frac{\gamma_{020}}{k_0} b'_0}{b'_0} E_x \Big|_{z=0}, \quad (20)$$

$$(H_{x1} - H_{x11})|_{z=0} = \frac{2 \sin \psi - \frac{\gamma_{02e}}{\varepsilon_0 \gamma_{01}} d'_0 - d'_0}{\frac{\gamma_{02e}}{\varepsilon_0 k_0} d'_0} E_y \Big|_{z=0}, \quad (21)$$

где b'_0 и d'_0 являются коэффициентами прохождения обыкновенной и необыкновенной волн в случае, когда решетка находится над полубесконечным анизотропным диэлектриком, ось которого направлена параллельно оси Oz . Коэффициенты b'_0 и d'_0 получаются из выражений (16) и (17) при $a \rightarrow \infty$.

2. Если ось кристалла направлена по оси Oy , то для коэффициентов распространения обыкновенной и необыкновенной волн получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\gamma_{n20} &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\varepsilon_0 x^2 - (x \sin \alpha + n)^2}, \\ \gamma_{n2e} &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\varepsilon_e x^2 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0} (x \sin \alpha + n)^2}.\end{aligned}\quad (22)$$

Система алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье обыкновенной волны совпадает с системой, полученной в случае 1. Что же касается необыкновенной волны, то для нее можно получить все формулы из случая 1 для необыкновенной волны заменой ε_0 на ε_e и ε_e на ε_0 .

3. Если ось кристалла параллельна оси Ox , то для обыкновенных волн коэффициент распространения имеет следующий вид:

$$\gamma_{n20} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\varepsilon_0 x^2 - (x \sin \alpha + n)^2},$$

для необыкновенных волн

$$\gamma_{n2e} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\varepsilon_0 x^2 - (x \sin \alpha + n)^2}.$$

Отсюда ясно, что коэффициент распространения необыкновенных волн не зависит от коэффициента анизотропии (ср. со случаями 1, 2).

Обыкновенные и необыкновенные волны ведут себя как E - и H -поляризованные волны в изотропном диэлектрике с диэлектрическими проницаемостями соответственно ε_0 и ε_e . Для получения Фурье-компонент поля обыкновенных волн можно пользоваться системой (10), заменяя ε_0 на ε_e , а для необыкновенных волн — (12), полагая, что $\varepsilon_e = \varepsilon_0$. Во всех случаях полученные системы алгебраических уравнений имеют хорошую сходимость и могут быть рассчитаны на электронной вычислительной машине.

В заключение отметим, что рассмотренные здесь задачи могут найти применение при исследовании дифракции электромагнитных волн на решетках с плазмой, что представляет определенный интерес для диагностики плазмы. Что же касается полученных эквивалентных граничных условий (20), (21), то они могут быть использованы при решении задач о распространении электромагнитных волн в периодических структурах цилиндрического типа (кольцевой и спиральной волновод), погруженных в анизотропные диэлектрические среды.

Считаю своим долгом выразить благодарность В. П. Шестопалову за предложенную тему и за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, 4, 381 (1962).
2. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 33, 6, 641 (1963).
3. А. И. Адонина, Изв. высш. уч. зав — Радиопизика, 6, 416 (1964).
4. И. Ф. Федоров, Оптика анизотропных сред, АН БССР, Минск, 1958.
5. В. А. Барегамян, Сб. Радиотехника, Харьков, вып 1 (1965).
6. Г. Н. Гестрин, Л. Н. Литвиненко, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 34, 1962 (1964).

ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION ON METALLIC GRATINGS
WITH ANISOTROPIC DIELECTRIC*V. A. Baregamyun*

A strict solution of the problem has been given of the electromagnetic wave diffraction on a plane metallic grating. The solution has been represented as Fourier series the coefficients of which are derived from the infinite system of linear algebraic equations. In a long-wave approximation the reflection and transmission coefficients of a basic harmonic have been derived and the equivalent boundary conditions, as well.

УДК 538.59 : 519.25

К СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННОМУ АНАЛИЗУ СИГНАЛОВ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ СПЕКТРАМИ

А. Н. Малахов

Вводятся специальные структурные функции, с помощью которых находятся спектры энергии или мощности для некоторых групп сигналов с неинтегрируемой энергией или мощностью.

Среди нестационарных случайных процессов с неинтегрируемыми спектрами изучены наиболее подробно только процессы со стационарными приращениями (см., например, [1⁻⁴]). В настоящей работе с помощью специальных структурных функций для некоторых классов процессов с неинтегрируемыми спектрами энергии или мощности определяются спектральные плотности энергии или мощности независимо от того, обладают эти процессы стационарными приращениями или нет. Во всем последующем изложении предполагается, что действительные случайные процессы определены в общеизвестном смысле, например, как совокупности реализаций с заданными вероятностными мерами. Мы будем говорить также о сигналах, понимая под ними как случайные процессы, так и детерминированные функции. Поскольку детерминированные функции времени являются частным случаем случайных, то почти все результаты, полученные для последних, справедливы и для первых.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ

Совместной корреляционной функцией двух произвольных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ называется функция

$$K_{xy}[t_1, t_2] \equiv \langle x(t_1) y(t_2) \rangle,$$

где $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение. Первый аргумент относится к первому индексу, второй аргумент — ко второму. Очевидно, что $K_{xy}[t_2, t_1] = K_{yx}[t_1, t_2]$. Если $y(t) \equiv x(t)$, то слово «совместная» и второй индекс будем опускать: $K_{xx} = K_x$.

Как известно, случайный процесс $x(t)$ называется стационарным (в широком смысле), если наряду с $\langle x(t) \rangle = \text{const}$

$$K_x[t_2, t_1] \equiv K_x[t_2 - t_1].$$

Случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ называются стационарно связанными (в широком смысле), если

$$K_{xy}[t_1, t_2] \equiv K_{xy}[t_2 - t_1].$$

Корреляционная функция стационарно связанных процессов $K_{xy}[\tau]$ обладает следующими свойствами (назовем их свойствами K):

- 1) $K_{xy}[-\tau] = K_{yx}[\tau]$, 2) $|K_x[\tau]| \leq K_x[0] > 0$,
- 3) $K_x[\tau]$ — положительно определенная функция.

В последующем будем употреблять нуль и единицу в качестве верхних индексов для указания четности или нечетности функции. При этом определение четной и нечетной частей функции проводится обычным образом. Например,

$$K_{xy}[\tau] = K_{xy}^0[\tau] + K_{xy}^1[\tau],$$

где

$$K_{xy}^0[\tau] = \frac{1}{2} \{K_{xy}[\tau] + K_{xy}[-\tau]\},$$

$$K_{xy}^1[\tau] = \frac{1}{2} \{K_{xy}[\tau] - K_{xy}[-\tau]\}.$$

Для произвольного сигнала $x(t)$ образуем функцию

$$d_x[t_1, t_2; \tau] \equiv \frac{1}{2} \langle [x(t_1 + \tau) - x(t_1)] [x(t_2 + \tau) - x(t_2)] \rangle, \quad (1)$$

которую назовем статистической структурной функцией. Эта структурная функция отличается лишь коэффициентом $1/2$ от общего вида структурной функции, введенной Колмогоровым [1, 2].

Для двух произвольных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ построим функцию

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] \equiv \frac{1}{2} \langle [x(t_1 + \tau) - x(t_1)] [y(t_2 + \tau) - y(t_2)] \rangle, \quad (2)$$

которую назовем совместной статистической структурной функцией.

Нетрудно обнаружить следующие свойства введенных структурных функций:

- 1) $d_{xy}[t_1, t_2; 0] \equiv 0$,
- 2) $d_{xy}[t_2, t_1; \tau] = d_{yx}[t_1, t_2; \tau]$,
- 3) $d_{xy}[t_1, t_2; -\tau] = d_{xy}[t_1 - \tau, t_2 - \tau; \tau]$.

Кроме того, очевидно, что

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \{K_{xy}[t_1 + \tau, t_2 + \tau] + K_{yx}[t_1, t_2] - K_{xy}[t_1 + \tau, t_2] - K_{yx}[t_1, t_2 + \tau]\}.$$

Случайный процесс $x(t)$ называется процессом со стационарными приращениями, если для него наряду с $\langle x(t + \tau) - x(t) \rangle = a(\tau)$

$$d_x[t_1, t_2; \tau] \equiv d_x[t_2 - t_1; \tau].$$

Будем говорить, что процессы $x(t)$, $y(t)$ обладают стационарно связанными приращениями, если

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] \equiv d_{xy}[t_2 - t_1; \tau].$$

Можно показать, что структурная функция $d_{xy}[\theta; \tau]$ обладает следующими свойствами (назовем их свойствами S):

- 1) $d_{xy}[\theta; \tau]$ при $\tau \neq 0$ как функция θ обладает свойствами K ,
- 2) $d_{xy}[\theta; 0] \equiv 0$,
- 3) $d_x[0; \tau] \geq 0$,
- 4) $d_{xy}[\theta; -\tau] = d_{xy}[\theta; \tau]$.

2. СИГНАЛЫ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ СПЕКТРАМИ

Прежде чем рассматривать сигналы с неинтегрируемыми спектрами, обратимся к сигналам, обладающим интегрируемыми спектрами

Сигналы первой группы. Будем говорить, что сигнал $x(t)$ принадлежит к первой группе, если величина

$$\mathcal{E}_x \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x^2(t) \rangle dt,$$

называемая энергией сигнала, конечна. Сигналы, принадлежащие к первой группе, носят импульсный характер, являются интегрируемыми с квадратом и могут быть без каких-либо осложнений разложены в интеграл Фурье. Вследствие этого спектральная плотность энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$ сигнала $x(t)$ может быть введена как

$$\mathcal{E}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \langle |C_x(\omega)|^2 \rangle,$$

где

$$C_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i\omega t} dt.$$

Рассматривая два сигнала первой группы $x(t)$ и $y(t)$, образуем следующую функцию корреляции первого рода (совместную, если $x(t) \neq y(t)$):

$$\Psi_{xy}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xy}[t, t + \tau] dt, \quad (3)$$

которая, как можно показать, обладает свойствами K . Полагая $y(t) \equiv x(t)$, нетрудно обнаружить, что $\Psi_x(\tau)$ и $\mathcal{E}_x(\omega)$ есть пара косинус-трансформаций Фурье. Это дает возможность вводить спектральную плотность энергии не через коэффициенты Фурье, а через функцию корреляции первого рода.

Определим теперь совместные спектральные плотности энергии следующим образом:

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{xy}^0(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{xy}^1(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau, \quad (4)$$

где $\Psi_{xy}^0(\tau)$, $\Psi_{xy}^1(\tau)$ — четная и нечетная части совместной функции корреляции $\Psi_{xy}(\tau)$. «Обратные» формулы имеют вид

$$\Psi_{xy}^0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{xy}^0(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad \Psi_{xy}^1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) \sin(\omega\tau) d\omega. \quad (5)$$

Сигналы второй группы. Будем говорить, что сигнал $x(t)$ принадлежит ко второй группе, если для него энергия \mathcal{E}_x бесконечна, а величина

$$S_x \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle x^2(t) \rangle dt,$$

называемая мощностью сигнала, является конечной величиной. Рассматривая два сигнала второй группы $x(t)$ и $y(t)$, определим совместную функцию корреляции второго рода как

$$\Phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} K_{xy}[t, t + \tau] dt. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что эта функция корреляции обладает свойствами K .

Совместные спектральные плотности мощности сигналов $x(t)$ и $y(t)$ определим как

$$S_{xy}^0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}^0(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$S_{xy}^1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}^1(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau.$$

Отсюда имеем

$$\Phi_{xy}^0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}^0(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (8)$$

$$\Phi_{xy}^1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}^1(\omega) \sin(\omega\tau) d\omega.$$

Следует отметить, что функция корреляции $\Phi_x(\tau)$, определенная согласно (6), уже рассматривалась ранее в литературе [5-8].

Если $\Phi_{xy}(\tau)$ есть функции абсолютно интегрируемые, то $S_{xy}(\omega)$ существуют для всех ω . Если $\Phi_{xy}(\tau)$ — функции неинтегрируемые, то интегралы в (7) следует определять методом суммирования (см. Приложение); при этом $S_{xy}(\omega)$ будет существовать почти для всех ω .

Формулы (7) определяют спектральную плотность любых сигналов второй группы, в том числе и нестационарных. Если $x(t)$ и $y(t)$ являются стационарными случайными процессами, то $\Phi_{xy}(\tau) = K_{xy}[\tau]$ (функции корреляции второго рода совпадают с корреляционными функциями) и соотношения (7), (8) переходят тогда в известные соотношения Винера—Хинчина.

3. СИГНАЛЫ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ СПЕКТРАМИ

Сигналы второй группы. Бесконечность энергии \mathcal{E}_x для сигналов второй группы еще не означает бесконечности для них спектральной плотности энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$ для всех ω . Рассмотрим такие случаи, когда, несмотря на расходимость \mathcal{E}_x , спектральная плотность энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$ для сигналов второй группы существует для почти всех ω (исключая, может быть, некоторые значения ω). Поставим задачу отыскания в этом случае спектральных плотностей $\mathcal{E}_x(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$.

Рассматривая два сигнала второй группы $x(t)$ и $y(t)$, построим функцию

$$\delta_{xy}(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_{xy}[t, t + \theta; \tau] dt, \quad (9)$$

которую назовем совместной структурной функцией первого рода. Нетрудно показать, что эта структурная функция обладает свойствами S . Примем во внимание ее разложение на четное и нечетное слагаемые по первому аргументу $\delta_{xy}(\theta, \tau) = \delta_{xy}^0(\theta, \tau) + \delta_{xy}^1(\theta, \tau)$. Если для рассматриваемых сигналов существует $\Psi_{xy}(\tau)$, то на основании (2) и (3) легко получить

$$\delta_{xy}(\theta, \tau) = \Psi_{xy}(\theta) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}(\theta - \tau). \quad (10)$$

Нетрудно показать, что

$$\delta_{xy}^0(\theta, \tau) = \Psi_{xy}^0(\theta) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^0(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^0(\theta - \tau),$$

$$\delta_{xy}^1(\theta, \tau) = \Psi_{xy}^1(\theta) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^1(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^1(\theta - \tau).$$

Отсюда с помощью формул (5) находим

$$\delta_{xy}^0(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\theta) [1 - \cos(\omega\tau)] \mathcal{E}_{xy}^0(\omega) d\omega, \tag{11}$$

$$\delta_{xy}^1(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega\theta) [1 - \cos(\omega\tau)] \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) d\omega.$$

При получении этих формул мы воспользовались функциями $\Psi_{xy}^0(\tau)$ и $\Psi_{xy}^1(\tau)$. Однако, если $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ таковы, что $\Psi_{xy}^0(\tau)$, $\Psi_{xy}^1(\tau)$ не существуют (согласно (5)), то тем не менее $\delta_{xy}^0(\theta, \tau)$ и $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$, определенные формулами (11), могут существовать; поэтому эти формулы следует рассматривать самостоятельно. Поскольку $\delta_{xy}^0(\theta, \tau)$ и $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$ по аргументу θ обладают всеми свойствами совместных функций корреляции первого рода, формулы (11) нетрудно обратить и получить

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos(\omega\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}^0(\theta, \tau) \cos(\omega\theta) d\theta, \tag{12}$$

$$\mathcal{E}_{xy}^1(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos(\omega\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}^1(\theta, \tau) \sin(\omega\theta) d\theta.$$

Эти формулы справедливы почти для всех ω .

Стоящая в знаменателях полученных формул разность $1 - \cos(\omega\tau)$ не должна вызывать недоумений. Поскольку не каждая функция может служить структурной функцией и поскольку структурная функция имеет определенные свойства по аргументу τ , то при нахождении фурье-сопряженных от каких-либо структурных функций $\delta_{xy}^0(\theta, \tau)$, $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$ должны обязательно получиться зависимости от ω и τ , имеющие вид: $[1 - \cos(\omega\tau)] \mathcal{E}_{xy}^{0,1}(\omega)$, где $\mathcal{E}_{xy}^{0,1}(\omega)$ — некоторые спектральные плотности энергии.

Формулы (12) позволяют находить $\mathcal{E}_{xy}^{0,1}(\omega)$, пользуясь сходимостью несобственного интеграла по Коши—Риману. Если использовать суммирование несобственного интеграла (см. Приложение), то можно представить $\mathcal{E}_{xy}^{0,1}(\omega)$ через $\delta_{xy}(\theta, \tau)$ в другом, иногда существенно более удобном виде. Умножая обе части (10) на $\cos(\omega\tau)$ и интегрируя, можно получить следующее представление для $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$:

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) \cos(\omega\theta) + \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) \sin(\omega\theta) = - \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}(\theta, \tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \tag{13}$$

Отсюда, полагая $\theta = 0$, имеем

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}(0, \tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (14)$$

Таким образом, введение структурных функций $\delta_x(\theta, \tau)$, $\delta_{xy}(\theta, \tau)$ позволяет найти спектральные плотности энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ (для тех ω , для которых они существуют) для любых процессов с неинтегрируемым спектром энергии, принадлежащих ко второй группе.

Сигналы третьей группы. Обратимся теперь к таким сигналам $x(t)$, мощность которых является бесконечной величиной — к сигналам с неинтегрируемым спектром мощности. Бесконечность S_x в общем случае еще не означает бесконечного значения спектральной плотности $S_x(\omega)$ для всех значений ω . Поставим задачу отыскания $S_x(\omega)$ для тех ω и в тех случаях, когда она существует. Образует функцию

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} d_x[t, t + \theta; \tau] dt, \quad (15)$$

которую назовем структурной функцией второго рода.

Будем говорить, что сигнал $x(t)$ с неинтегрируемым спектром мощности принадлежит к третьей группе, если для всякого конечного τ существует или структурная функция второго рода $\Delta_x(\theta, \tau)$, или функция корреляции второго рода $\Phi_x(\tau)$ (поскольку для $\tau = 0$ $\Delta_x(\theta, \tau)$ существует всегда (она тождественно равна нулю), то функция корреляции для сигналов третьей группы при $\tau = 0$ может и не существовать).

Если $\Phi_x(\tau)$ существует, то

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \Phi_x(\theta) - \frac{1}{2} \Phi_x(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Phi_x(\theta - \tau). \quad (16)$$

Для процессов с нулевым средним значением $|\Phi_x(\infty) = 0|$

$$\Delta_x(\theta, \infty) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Delta_x(\theta, \tau) = \Phi_x(\theta).$$

Таким образом, имеется возможность нахождения $\Phi_x(\theta)$, если известна структурная функция $\Delta_x(\theta, \tau)$, которая является некоторым обобщением функции корреляции.

Рассматривая два сигнала третьей группы $x(t)$ и $y(t)$, построим аналогично функцию

$$\Delta_{xy}(\theta, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} d_{xy}[t, t + \theta; \tau] dt, \quad (17)$$

которую назовем совместной структурной функцией второго рода. Нетрудно показать, что эта функция обладает свойствами S . Если $\Delta_{xy}(\theta, \tau)$ существует для всякого конечного τ , то можно, аналогично предыдущему, найти $S_{xy}^0(\omega)$ и $S_{xy}^1(\omega)$ (разумеется, для тех ω , для которых эти спектральные плотности существуют).

Используя представление $\Delta_{xy}(\theta, \tau)$ через $\Phi_{xy}(\tau)$, аналогичное (10), и формулы (8), найдем

$$\begin{aligned} \Delta_{xy}^0(\theta, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\theta) [1 - \cos(\omega\tau)] S_{xy}^0(\omega) d\omega, \\ \Delta_{xy}^1(\theta, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega\theta) [1 - \cos(\omega\tau)] S_{xy}^1(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (18)$$

К этим выражениям можно отнести замечания, подобные тем, какие были сделаны для (11). Обращая формулы (18) по аргументу θ , получим

$$S_{xy}^0(\omega) = \frac{1/2\pi}{1-\cos(\omega\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}^0(\theta, \tau) \cos(\omega\theta) d\theta, \quad (19)$$

$$S_{xy}^1(\omega) = \frac{1/2\pi}{1-\cos(\omega\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}^1(\theta, \tau) \sin(\omega\theta) d\theta.$$

Используя суммируемость несобственных интегралов, легко получить следующую формулу, аналогичную формуле (13):

$$S_{xy}^0(\omega) \cos(\omega\theta) + S_{xy}^1(\omega) \sin(\omega\theta) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}(\theta, \tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (20)$$

Отсюда, полагая $\theta = 0$, имеем

$$S_{xy}^0(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}(0, \tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (21)$$

Тем самым формулы (19), (20) решают вопрос о спектральных плотностях сигналов третьей группы, для которых существуют структурные функции второго рода. Для тех сигналов третьей группы, для которых почти при всех τ существуют функции корреляции $\Phi_x(\tau)$ и $\Phi_{xy}(\tau)$, спектральные плотности определяются по-прежнему формулами (7).

В литературе при списании действительных процессов с неинтегрируемыми спектрами наиболее часто используется структурная функция (см., например, [3, 9])

$$D_x[t_1, t_2] \equiv \langle |x(t_2) - x(t_1)|^2 \rangle.$$

Нетрудно видеть, что эта структурная функция есть частный случай статистической структурной функции, введенной выше,

$$D_x[t_1, t_2] = 2d_x[t_1, t_1; t_2 - t_1].$$

Для процессов со стационарными приращениями

$$D_x[t_1, t_2] \equiv D_x[t_2 - t_1].$$

Тем самым структурные функции $d_x[\theta; \tau]$ и $D_x[\tau]$ связаны следующим образом:

$$D_x[\tau] = 2d_x[0; \tau].$$

Если сигнал третьей группы $x(t)$ есть случайный процесс со стационарными приращениями, то, как легко видеть,

$$\Delta_x(\theta, \tau) = d_x[\theta; \tau].$$

Тогда, полагая $y(t) \equiv x(t)$, $\theta=0$, из первой формулы (18) получаем

$$\Delta_x(0, \tau) = d_x[0; \tau] = \frac{1}{2} D_x[\tau] = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \cos(\omega\tau)] S_x(\omega) d\omega$$

— известное спектральное разложение структурной функции $D_x[\tau]$ (см., например, [9]).

Для сигналов со стационарными приращениями, для которых задана структурная функция $D_x[\tau]$, спектральная плотность мощности может быть найдена с помощью (21):

$$S_x(\omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_x[\tau] \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (22)$$

Отметим также, что в работе [10] имеется представление $S_x(\omega)$ через производные $D_x[\tau]$ с помощью обычного несобственного интеграла Коши—Римана.

4. ДИСКУССИЯ И ПРИМЕРЫ

Обсудим теперь некоторые аспекты полученных результатов.

Отметим прежде всего, что вышеприведенные определения спектральных плотностей, основанные на функциях корреляции (3), (6) и структурных функциях (9), (15), позволяют вести спектральный анализ сигналов единым образом, независимо от того, являются ли сигналы детерминированными или случайными функциями. Это единство представляется тем более оправданным, что каждая отдельная реализация случайного процесса является детерминированной функцией и спектральный анализ дает детерминированное значение ее спектра. При этом спектр случайного процесса получается, по существу, путем некоторого усреднения спектра отдельных реализаций по ансамблю этих реализаций.

Для стационарных случайных процессов, для которых спектр, вычисленный указанным выше образом, совпадает со спектром, определенным из корреляционной функции, это обстоятельство является довольно очевидным. Более сложная ситуация имеет место для нестационарных случайных процессов. В этом случае, вообще говоря, можно вводить различные понятия спектра. Можно, например, из корреляционной функции, в которую входит теперь время, получить спектр, зависящий от времени. Можно, например, ввести понятие текущего спектра, который зависит от момента времени и т. п.

В настоящей статье спектр какого-либо сигнала, в том числе и нестационарного случайного процесса, вводится так, что он не зависит от времени, ибо для его нахождения используется сигнал во всем промежутке времени ($-\infty, +\infty$). Введенный таким образом спектр исключает время по определению. (Следует заметить, что только в этом случае и можно получить неинтегрируемые спектры мощности сигналов.) Физическое содержание этого спектра остается прежним: спектр мощности или энергии каждой реализации, рассматриваемой в бесконечно большом промежутке времени, усредняется по ансамблю реализаций. Очевидно, что нестационарность случайного процесса ничего не может здесь изменить. Нестационарный случайный процесс с этой точки зрения ничем не отличается от детерминированной функции. И для того, и для другого процесса корреляционная функция $K_x[t, t + \tau]$ зависит и от t , и от τ , и для того, и для другого процесса функция корреляции $\Phi_x(\tau)$ зависит только от τ ($\Phi_x(\tau)$ уже вобрала в себя все особенности сигнала на его бесконечной реализации). То же самое имеет место и для структурных функций.

Важным обстоятельством является взаимосвязь теоретического спектра со спектром, определенным экспериментально. Достаточно очевидным представляется то, что измеренные значения спектральной плотности мощности или энергии какого-либо сигнала будут совпадать со значениями, определенными на основании приведенных выше формул

для всех частот, достаточно больших по сравнению с $1/T$, где T — время наблюдения (длительность реализации, на которой измеряется спектр).

Остановимся, наконец, на вопросе определения спектра как Фурье-сопряженной от функции корреляции или от структурной функции. С точки зрения гармонической фильтрации представляется наиболее естественным определять спектр процесса через коэффициент Фурье исследуемого сигнала, так как это мы делали для сигналов первой группы. Для сигналов второй группы спектр мощности определялся уже не через коэффициент Фурье, а через функцию корреляции. Одной из причин этого является то, что с коэффициентами Фурье сигналов второй группы (не говоря уже о третьей группе) обычно не работают, ибо эти сигналы не являются абсолютно интегрируемыми и может иметь место расходимость коэффициентов Фурье. Однако эта причина не является существенной, ибо, если определение коэффициентов Фурье (являющихся несобственными интегралами, поскольку сигнал рассматривается в бесконечном интервале времени) проводить методами суммирования (см. Приложение), то указанные трудности могут быть успешно преодолены. Более того, даже для сигналов с неинтегрируемыми спектрами последние могут найдаться (при использовании суммирования) через коэффициенты Фурье.

Таким образом, спектры почти любых сигналов могут определяться через коэффициенты Фурье, и требования «естественного» определения спектра могут быть соблюдены. Однако более удобным методом является определение спектров сигналов через их функции корреляции и структурные функции, не говоря уже о том, что последние могут быть просто измерены. Более того, последний метод является также и более мощным, ибо, как следует из третьего параграфа, даже для сигналов с неинтегрируемыми спектрами для нахождения последних достаточно ограничиться требованием сходимости интегралов. Кстати, именно в этом и заключается одно из достоинств структурных функций $\delta(\theta, \tau)$ и $\Delta(\theta, \tau)$ *.

В заключение рассмотрим несколько примеров.

Пример первый. Пусть детерминированный сигнал

$$x(t) = A \cdot 1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{2} A & (t = 0) \\ A & (t > 0) \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что этот сигнал принадлежит ко второй группе: он имеет бесконечно большую энергию и мощность, равную $\frac{1}{2}A^2$. Для этого сигнала можно отыскать как спектральную плотность энергии, так и спектральную плотность мощности. На основании (6) находим

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^{+T} 1(t) 1(t + \tau) dt = \frac{1}{2} A^2.$$

Следовательно, спектральная плотность мощности рассматриваемого сигнала равна

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2} A^2 \delta(\omega)$$

* Другое очевидное достоинство указанных структурных функций состоит в том, что они позволяют находить совместные спектральные плотности $S_{xy}^{0,1}(\omega)$, $S_{xy}^{1,0}(\omega)$, чего нельзя достичь, оперируя с $D_\tau[\tau]$.

— вся мощность сосредоточена на нулевой частоте.

Для отыскания спектральной плотности энергии определяем структурную функцию первого рода (согласно (9)):

$$\begin{aligned} \delta_x(\theta, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} [1(t+\tau) - 1(t)] [1(t+\theta+\tau) - 1(t+\theta)] dt = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} A^2 [|\tau| - |\theta|] & (|\theta| < |\tau|) \\ 0 & (|\theta| > |\tau|) \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(\theta, \tau) \cos(\omega\theta) d\theta = \frac{A^2}{2} \int_{-\tau}^{+\tau} [|\tau| - |\theta|] \cos(\omega\theta) d\theta = \frac{A^2}{\omega^2} [1 - \cos(\omega\tau)],$$

то на основании первой формулы (12) находим

$$\mathcal{D}_x(\omega) = \frac{A^2}{2\pi\omega^2} \quad (\omega \neq 0). \quad (23)$$

Такова спектральная плотность энергии единичного импульса. Если воспользоваться формулами (П.3), то можно найти, что

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(\theta, \tau) \cos(\omega\tau) d\tau = A^2 \oint_0^{\infty} (\tau - \theta) \cos(\omega\tau) d\tau = -\frac{A^2 \cos(\omega\theta)}{\omega^2} \quad (\omega \neq 0).$$

Отсюда легко видеть, что (13) или (14) опять приводят, как и должно быть, к формуле (23).

Второй пример. Рассмотрим

$$y(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi,$$

где $x(t)$ — случайный стационарный процесс с заданной корреляционной функцией $K_x[\tau]$ и спектральной плотностью $S_x(\omega)$, где $S_x(0) \neq 0$. Случайный процесс $y(t)$ является нестационарным, принадлежит к третьей группе и обладает стационарными приращениями, поскольку его мощность является бесконечно большой, а структурная функция второго рода существует и равна

$$\Delta_y(\theta, \tau) = d_y[\theta; \tau] = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_x[\theta + u - v] du dv. \quad (24)$$

Если теперь в этой формуле $K_x[\tau]$ выразить через $S_x(\omega)$, а затем сменить порядок интегрирования, то получим

$$\Delta_y(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\theta) \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega^2} S_x(\omega) d\omega.$$

Сравнивая эту формулу с первой формулой (18), нетрудно найти, что

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\omega^2}. \quad (25)$$

Таким образом, эта общеизвестная формула является законной и в том случае, когда $y(t)$ есть процесс с неинтегрируемым спектром.

Если $x(t)$ — белый шум: $K_x[\tau] = D\delta(\tau)$, $S_x(\omega) = D/2\pi$, то, согласно (24),

$$\Delta_y(\theta, \tau) = \begin{cases} (D/2)[|\tau| - |\theta|] & (|\theta| < |\tau|) \\ 0 & (|\theta| > |\tau|) \end{cases}$$

и, следовательно,

$$S_y(\omega) = D/2\pi\omega^2,$$

как и должно быть на основании (25).

В качестве *третьего примера* рассмотрим второй пример, в котором вместо $x(t)$ возьмем $f(t)x(t)$, где $f(t)$ — некоторая детерминированная функция времени.

Нестационарный случайный процесс $y(t)$ будет обладать теперь нестационарными приращениями. Нетрудно найти его статистическую структурную функцию

$$d_y[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau f(t_1+v) f(t_2+u) K_x[t_2-t_1+u-v] du dv,$$

которая теперь, как видно, зависит не только от разности $t_2 - t_1$, но и от t_1 и t_2 в отдельности.

Пусть функция $f(t)$ принадлежит к первой группе. Тогда существует функция корреляции первого рода

$$\Psi_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt$$

и, как легко видеть (см. (9)), структурная функция первого рода

$$\delta_y(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \Psi_f(\theta + u - v) K_x[\theta + u - v] du dv.$$

В этом случае нетрудно убедиться в том, что случайный процесс $y(t)$ принадлежит ко второй группе, преобразуя последнюю формулу, можно найти следующее выражение для спектральной плотности энергии:

$$\mathcal{E}_y(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(u) \mathcal{E}_f(\omega - u) du.$$

Если функция $f(t)$ принадлежит ко второй группе, то существует ее функция корреляции второго рода:

$$\Phi_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) f(t + \tau) dt.$$

В этом случае процесс $y(t)$ принадлежит к третьей группе и его структурная функция второго рода равна, как нетрудно проверить с помощью (15),

$$\Delta_y(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \Phi_f(\theta + u - v) K_x[\theta + u - v] du dv.$$

Отсюда аналогично предыдущему находим искомую спектральную плотность мощности:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(u) S_f(\omega - u) du.$$

Если, в частности, $f(t)$ равна единице, то $S_f(\omega) = \delta(\omega)$ и отсюда получаем, как и должно быть, (25).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Суммируемость несобственных интегралов

Рассмотрим разложение в интеграл Фурье некоторых функций $F^0(\tau)$ или $F^1(\tau)$, определенных в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Если эти функции абсолютно интегрируемы, то, как известно, несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^0(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^1(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \quad (\text{П.1})$$

сходятся для всех ω — существуют в смысле Коши—Римана, т. е. для них существуют пределы

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} F^0(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} F^1(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau.$$

Если $F^0(\tau)$ или $F^1(\tau)$ абсолютно неинтегрируемы, то (П.1) могут расходиться в том смысле, что нельзя сказать, чему равны указанные пределы. В этом случае можно считать, что трудность данной ситуации связана с неудачным определением несобственного интеграла. Эта трудность может быть преодолена, если несобственный интеграл определить более удачно — не методом сходимости, а методом суммирования (см., например, [11, 12]), и вместо обычного обозначения $\int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau) d\tau$ писать

$\oint_{-\infty}^{+\infty} A(\tau) d\tau$, где под этим символом понимать следующее:

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx \equiv \left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^\alpha A(x) dx, \alpha > 0 \text{ (суммирование Чезаро)} \\ \text{или} \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} A(x) dx, \gamma > 0 \text{ (суммирование Абеля),} \\ \text{или} \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2 x^2} A(x) dx \text{ (суммирование Вейерштрасса),} \\ \text{или определение каким-либо другим регулярным методом суммирования.} \end{array} \right. \quad (\text{П.2})$$

Так определенный несобственный интеграл существует практически для всех функций $F^0(\tau)$ и $F^1(\tau)$, с которыми можно встретиться в спектрально-корреляционном анализе (включая и функции возрастающие, как τ^n для любого $n > 0$). В случае сходимости интеграла по Коши—Риману суммирование дает то же самое значение (это обеспечивается регулярностью выбранных методов суммирования). Поэтому использование «суммированного» несобственного интеграла вместо обычного является (хотя бы с прикладной точки зрения) более перспективным*.

Введение суммирования несобственных интегралов вместе с использованием дельта-функций и ее производных позволяет считать существующими интегралы вида (П.1) практически для всех функций $F^0(\tau)$ и $F^1(\tau)$ и почти для всех ω (исключая, может быть, некоторые значения ω).

Для примера приведем следующие четыре формулы суммируемых интегралов ($\omega \neq 0$):

$$\int_0^{\infty} x^{2n} \sin(\omega x) dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{\omega^{2n+1}}, \quad \int_0^{\infty} x^{2n-1} \sin(\omega x) dx = 0, \quad (П.3)$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} \cos(\omega x) dx = 0, \quad \int_0^{\infty} x^{2n-1} \cos(\omega x) dx = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{\omega^{2n}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, 32, 19 (1941).
2. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, 30, 299 (1941).
3. А. М. Яглом, УМН, 7, 3 (1952).
4. Д. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
5. С. Райс, Сб. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953.
6. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, Гостехиздат, М., 1957.
7. Д. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958.
8. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, М., 1961.
9. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
10. В. И. Татарский, Докторская диссертация, Горьк. ун-т, 1964.
11. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.
12. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
31 мая 1965 г.,
после переработки
15 января 1966 г.

TO SPECTRAL-CORRELATIONAL ANALYSIS OF SIGNALS WITH NON-INTEGRATED SPECTRA

A. N. Malakhov

The special structural functions are introduced, with the help of which the energy or power spectra are determined for some groups of signals with non-integrated energy or power.

* При этом можно указать даже на большую физичность суммированного несобственного интеграла — из (П.2) следует, что события, относящиеся к «далеким» временам, берутся с меньшим (со сколь угодно меньшим) весом. Прибор, реализующий интеграл, «забывает» то, что было очень давно.

УДК 621.317.373.023

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ
ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ (ЧАСТОТЫ) ГЕНЕРАТОРОВ
ДИСКРИМИНАТОРАМИ СВЧ**

Ю. Э. Антэк, А. В. Лебедев

Проведен анализ чувствительности схемы частотного дискриминатора с переносом и детектированием на промежуточной частоте. Выполнено сравнение ее с другими известными схемами. Рассмотрены технические возможности метода частотного детектирования.

Частотные детекторы (дискриминаторы) СВЧ находят широкое применение для исследования квазигармонических сигналов. Так, в работах [1-4] подробно проанализированы различные схемы частотных дискриминаторов с детектированием на СВЧ. В последнее время были предложены схемы частотных дискриминаторов СВЧ [5, 6] с переносом и детектированием на промежуточной частоте. Однако анализ их чувствительности не проведен; поэтому не всегда ясны условия, при которых применение той или иной схемы [1-6] будет наиболее целесообразным. Ниже дается анализ чувствительности схемы [5] и показывается, что она является наиболее оптимальной. Результаты анализа позволяют также установить общие предельные технические возможности и области применения метода частотного детектирования на СВЧ в случае исследования квазигармонических сигналов.

Схема [5] в наиболее общем виде представлена на рис. 1. Собственно частотным дискриминатором является интерференционный тракт (1-2), состоящий из двух ветвей, в одной из которых включен элемент задержки сигнала (резонатор Р). Дискриминатор в виде СВЧ моста с резонатором, включенным в одно из плеч и работающим на отражение [5], эквивалентен по характеристикам интерференционной схеме, в канале задержки которой установлен резонатор на прохождение (рис. 1).

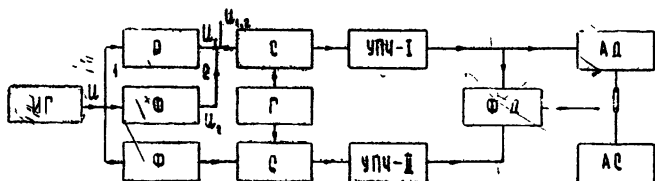


Рис. 1. Блок-схема измерения флуктуаций фазы (частоты).

Сигнал от исследуемого генератора (ИГ), преобразованный дискриминатором (1-2), после переноса на промежуточную частоту (ПЧ) с помощью вспомогательного гетеродина (Г), усиливается усилителем промежуточной частоты УПЧ-1 и поступает либо на амплитудный детектор (АД), либо на фазовый детектор (ФД). В последнем случае в качестве опорного используется исследуемый сигнал, также перенесенный на ПЧ и поступающий на фазовый детектор (ФД) по второму каналу

(УПЧ-II), идентичному УПЧ-I. Выходной сигнал фазового детектора (или сигнал с выхода детектора АД) поступает на анализатор спектра низких частот (АС). Работа схемы поясняется векторной диаграммой рис. 2. Оптимальной настройкой схемы при использовании двух каналов ПЧ будет случай, когда векторы выходных сигналов U_1 и U_2 обеих ветвей дискриминатора (1—2) равны и повернуты на π друг относительно друга, а вектор сигнала опорного канала $U_{оп}$ повернут относительно них на $\pi/2$. Для случая детектирования по каналу 1 (АД) оптимальная настройка соответствует положению, изображенному на рис. 2 пунктиром: векторы U_1 и U_2 равны и их фазовый сдвиг отличается от π на малую величину, определяемую рабочей настройкой.

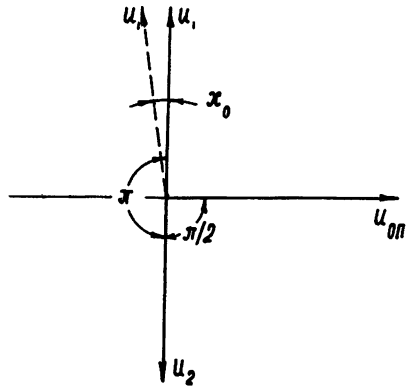


Рис. 2. Векторная диаграмма, поясняющая настройку дискриминатора СВЧ.

Рассматривая дискриминатор (1—2), как линейную систему [4], при воздействии на вход схемы квазигармонического сигнала

$$u(t) = A_0[1 + m(t)] \cos [2\pi f_0 t + \varphi(t)] \quad (1)$$

можно получить следующее общее выражение для спектральной плотности переменной составляющей на выходе детекторов (АД, ФД):

$$S_{АД, ФД}(F) = K_{д, ФД}^2 A_0^2 [K_\varphi S_\varphi(F) + K_m S_m(F) + K_{m\varphi} S_{m\varphi}(F)], \quad (2)$$

где $S_\varphi(F)$ — спектральная плотность флуктуаций фазы $\varphi(t)$, $S_m(F)$ — спектральная плотность флуктуаций амплитуды $m(t)$, $S_{m\varphi}(F)$ — смешанная спектральная плотность, обусловленная взаимной корреляцией амплитудных и фазовых флуктуаций, $K_{д, ФД}$ — коэффициенты передачи соответствующих трактов со входа схемы до выхода детекторов. Коэффициенты K_φ , K_m и $K_{m\varphi}$ являются функциями настройки дискриминатора и вида детектирования.

Для режима детектирования по каналу 1 (АД) эти коэффициенты записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} K_\varphi &= (1 - x_F^2) \frac{x_F^2 x_0^2}{x_0^2 + p^2}; \\ K_m &= (1 - 3x_F^2) \left(x_0^2 + p^2 + \frac{4p^2 x_F^2}{x_0^2 + p^2} \right); \\ K_{m\varphi} &= 2x_0 x_F (1 - 3x_F^2/2) \sqrt{1 + \frac{4p^2 x_F^2}{(x_0^2 + p^2)^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь безразмерные параметры x_0 , x_F и p определяются передаточной характеристикой дискриминатора (1—2)

$$\Phi_{1,2} = \frac{p + jx}{1 + jx}, \quad (4)$$

где x — безразмерная расстройка $x_0 = 2\Delta f_0/\Pi$, $\Delta f_0 = f_0 - f_k$, f_k — резо-

нансная частота контура, Π — эффективная полоса контура, $x_F = 2F/\Pi$, $p = 1 - A_2/A_1$ — коэффициент балансировки, определяющий различие амплитуд сигналов U_1 и U_2 обеих ветвей дискриминатора.

Выражения (3) получены в предположении, что суммарные дрейфы частоты резонатора $\Delta f_p(t)$ и частоты сигнала (1) $\Delta f_c(t)$ в процессе измерения не превосходят рабочей расстройки Δf_0 (интенсивность флуктуаций частоты сигнала мала):

$$|\Delta f_p(t) + \Delta f_c(t)| < |\Delta f_0|, \quad (5)$$

т. е. выполнено условие линейного преобразования.

Из (3) легко получить, что в случае использования только одного канала схемы оптимальным режимом выделения флуктуаций фазы (частоты) при выполнении условия (5) будет режим $p = 0^*$. При этом формулы (3) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} K_\varphi &= x_F^2 (1 - x_F^2); \\ K_m &= x_0^2 (1 - 3x_F^2/2); \\ K_{m\varphi} &= 2x_0 x_F (1 - 3x_F^2/2). \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично, рассматривая двухканальную схему с фазовым детектором, можно убедиться, что для нее оптимальный режим настройки соответствует $p = 0$ и $x_0 = 0$. Учитывая остаточную расстройку x_{\min} и пренебрегая $p (p \ll x_{\min})$, имеем в этом случае следующие выражения для коэффициентов K_φ , K_m и $K_{m\varphi}$:

$$\begin{aligned} K_\varphi &= x_F^2 (1 - x_F^2); \\ K_m &= 4x_{\min}^2 (1 - x_F^2); \\ K_{m\varphi} &= 4x_F x_{\min} (1 - x_F^2/2). \end{aligned} \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) следует, что как в режиме детектирования по каналу I (АД), так и в режиме двухканального детектирования схема [5] дает идентичные результаты, несколько отличающиеся только характером искажений выделяемых спектров. А именно, она позволяет методом вариации расстройки так же, как и для любых других схем [1-4], разделить и измерить все спектральные плотности $S_\varphi(F)$, $S_m(F)$ и $S_{m\varphi}(F)$; уменьшая расстройку x_0 , при этом в принципе можно выделить сколь угодно малые флуктуации фазы на фоне амплитудных.

Рассмотрим чувствительность схемы [5]. Наибольший интерес, а вместе с ним и наибольшие трудности, представляет измерение флуктуаций фазы (частоты). Поэтому оценим чувствительность схемы [5] по уровню минимально обнаружимых флуктуаций фазы из условия, что полезный эффект равен сумме помех.

При непосредственном детектировании сигнала с выхода дискриминатора (1-2) чувствительность измерений, как известно, ограничивается шумами диодного детектора СВЧ и амплитудными флуктуациями исследуемого сигнала. Шумами же трактов СВЧ и трактов НЧ можно пренебречь вследствие их относительной малости.

* Анализ дискриминатора (1-2) с линией задержки показывает, что такая настройка будет оптимальной и для него как при непосредственном детектировании, так и при детектировании с переносом на ПЧ, поскольку передаточная характеристика интерферометра с линией задержки при $x \ll 1$ в первом приближении совпадает с (4). Следует также отметить, что из-за неточности в настройке (в частности, режим $x_0 \sim p$) может возрасти роль амплитудных флуктуаций (как это следует из (3)).

Рассматривая прохождение сигнала и помех при непосредственном детектировании, легко получить (при $x_F \ll 1$, $S_{m\varphi} = 0$ и аппроксимации собственного шума детектора функций вида L/PF)

$$S_{\varphi \min}(F) = S_m(F) \left(\frac{\Delta f_0}{F} \right)^2 + \frac{L}{4n^2 P_{\text{вх}} F} \left(\frac{\Pi}{F} \right)^2. \quad (8a)$$

При одноканальном (АД) и двухканальном (ФД) детектировании на промежуточной частоте чувствительность измерений ограничивается избыточными шумами диодов смесителей, амплитудными флуктуациями исследуемого сигнала и гетеродина-переносчика и тепловыми шумами тракта приемника. Влиянием остальных помех (таких, например, как ограничение чувствительности за счет фазовых флуктуаций гетеродина, вследствие неидентичности эквивалентных задержек трактов ПЧ-I и ПЧ-II) можно пренебречь при рациональной конструкции схемы. В этом случае*

$$S_{\varphi \min \text{ АД}}(F) = \left[S_m(F) + S_{m\Gamma}(F) + \frac{L}{P_{\Gamma} F} \right] \left(\frac{\Delta f_0}{F} \right)^2 + \frac{kTN}{4n^2 P_{\text{вх}}} \left(\frac{\Pi}{F} \right)^2; \quad (8б)$$

$$S_{\varphi \min \text{ ФД}}(F) = \left[S_m(F) + S_{m\Gamma}(F) + \frac{2L}{P_{\Gamma} F} \right] \left(\frac{\Delta f_{\min}}{F} \right)^2 + \frac{kTN}{4n^2 P_{\text{вх}}} \left(\frac{\Pi}{F} \right)^2. \quad (8в)$$

В формулах (8) $S_{m\Gamma}(F)$ — спектральная плотность флуктуаций амплитуды гетеродина на частоте F , kTN — спектральная плотность тепловых шумов, N — коэффициент шума канала I , $P_{\text{вх}}$ — мощность исследуемого сигнала, P_{Γ} — мощность гетеродина, n^2 — потери мощности в СВЧ тракте, L — параметр, определяющий шумовые свойства СВЧ-диода.

Из выражений (8) следует, что предельная (при условии (5)) чувствительность схемы [5] при непосредственном детектировании ограничивается фликкер-шумом кристаллического детектора** и резко падает с уменьшением мощности сигнала, частоты анализа F и может быть повышена только увеличением добротности резонатора. Предельная же чувствительность схемы с переносом (если $\Delta f_0 = \Delta f_{\min}$ достаточно мало) существенно выше, так как ограничивается в основном тепловыми шумами:

$$S_{\varphi \min \text{ тш}}(F) \rightarrow \frac{kTN}{4n^2 P_{\text{вх}}} \left(\frac{\Pi}{F} \right)^2. \quad (10)$$

Однако технические возможности не позволяют реализовать предельную чувствительность. Как показывает опыт, можно получить балансировку дискриминатора p порядка 10^{-3} и достичь значений настройки (остаточной расстройки) $x_0 = x_{\min} \sim 10^{-2}$ для резонаторов с полостью $\Pi \sim 5 \cdot 10^5$ *гц*.

Практически достижимая чувствительность схемы [5] иллюстрируется графиками рис. 3, 4, которые построены по формулам (8) с учетом $x_0 = x_{\min} = 10^{-2}$ (параметры схемы указаны на рисунках). Эти графики

* Аналогичный анализ чувствительности схемы [6] дает

$$S_{\varphi \min}(F) = \left[S_m(F) + S_{m\Gamma}(F) + \frac{L}{P_{\Gamma} F} + \frac{kTN}{n^2 P_{\text{вх}}} \right] \left(\frac{\Pi}{2F} \right)^2. \quad (9)$$

Сравнивая это выражение с (8), легко видеть, что при равных условиях чувствительность схемы [6] ниже, чем [5], так как применение резонатора на прохождение не позволяет подавить избыточный фликкер-шум и амплитудные флуктуации сигнала и гетеродина.

** В пределе Δf_0 может быть выполнена настолько малой, что первым членом в (8a) можно пренебречь.

показывают, что в схеме с переносом на ПЧ, несмотря на дополнительные помехи, возникающие в трактах, чувствительность значительно выше, чем при непосредственном детектировании, что объясняется преж-

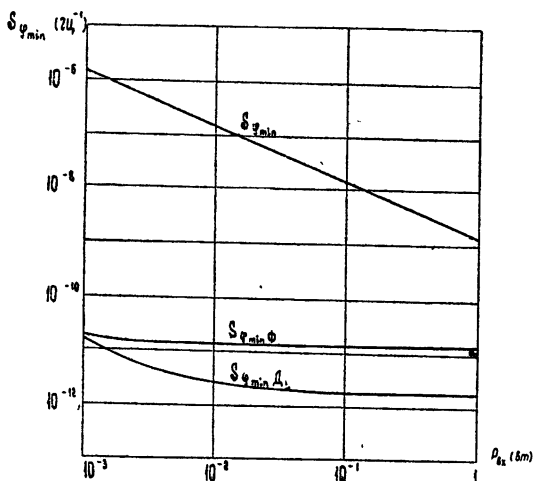


Рис. 3. Чувствительность схемы рис 1 как функция входной мощности на анализируемой частоте $F=10^3$ гц при $\Pi=5 \cdot 10^5$ гц, $\Delta f_0 = 10^4$ гц, $N=10$, $n^2=0,25$, $S_m(F)=S_{m\Gamma}(F)=10^{-11}F^{-1}$, $L=10^{-14}$ вт, $P_{\Gamma}=1$ мвт (мощность гетеродина больше мощности сигнала $P_{вх}n^2(\Delta f_0/\Pi)^2$, поступающего на смеситель).

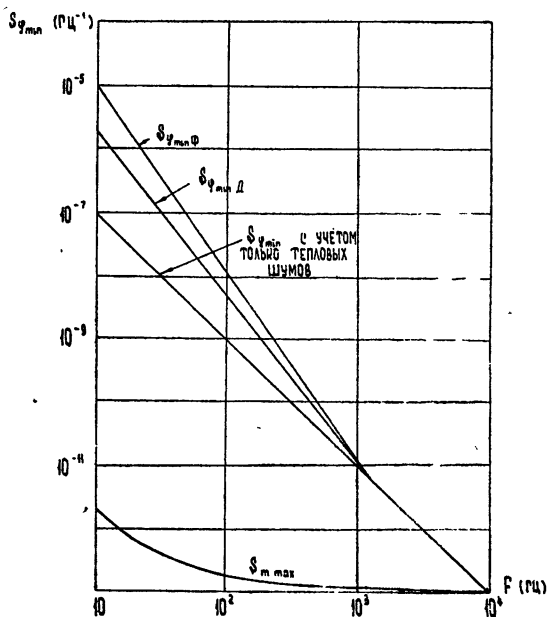


Рис. 4. Чувствительность схемы рис. 1 как функция анализируемой частоты при $P_{вх} = 1$ мвт, $\Pi=5 \cdot 10^5$ гц, $\Delta f_0=10^4$ гц, $N=10$, $n^2=0,25$, $S_m(F)=S_{m\Gamma}(F)=10^{-11}F^{-1}$, $L=10^{-14}$ вт, $P_{\Gamma}=1$ мвт.

де всего снижением влияния фликкер-шума. В схеме с переносом относительный вклад фликкер-шума уменьшается прежде всего потому, что меняется характер детектирования и фликкер-шумы подавляются так же, как и амплитудные флуктуации сигнала и гетеродина (ср. выражения (8)).

Из графиков также следует, что чувствительности схемы с переносом при одноканальном и двухканальном детектировании мало отличаются друг от друга. Указанные на рис. 4 чувствительности могут быть достигнуты только, когда амплитудные флуктуации сигнала не превосходят величины $S_{m \max}(F)$. Последнее обстоятельство связано с тем, что даже в отсутствие аппаратных помех чувствительность измерения, как это ясно из (8), ограничивается амплитудными флуктуациями исследуемого сигнала на уровне

$$S_{\varphi} \geq S_m \left(\frac{\Delta f_0}{F} \right)^2. \quad (11)$$

Хотя, как правило, для исследуемых сигналов флуктуации фазы превосходят амплитудные, условие (11) может быть существенным на низких частотах анализа ($F < \Delta f_0$) для некоторых типов генераторов.

Сопоставим далее чувствительность схемы [5] с чувствительностью измерения известных в литературе метода контура и метода линии задержки. Сравнивая схему [5] с методом контура и методом линии задержки, чувствительность которых оценена в работе [4], нетрудно убедиться, что при равных условиях метод линии задержки (если допустить, что используется линия с малыми потерями и эквивалентной полосой $\Pi = 5 \cdot 10^5$ гц) имеет такую же чувствительность, как и схема [5] при непосредственном детектировании, а метод контура — худшую, поскольку резонатор на прохождение не позволяет подавить амплитудные флуктуации сигнала.

В заключение отметим следующее.

1) Схема [5] представляется наиболее оптимальной (наиболее чувствительной) схемой частотного детектирования.

2) Метод контура и метод линии задержки [4] целесообразно применять для исследования сигналов с большим уровнем флуктуаций фазы.

3) Схема [6], по-видимому, представляет интерес лишь при измерении флуктуаций амплитуды.

4) Любому варианту схемы с частотным детектированием присуще принципиальное ограничение чувствительности, связанное с самим методом и обусловленное потерями преобразования исследуемых флуктуаций фазы в измеряемые амплитудные.

В заключение авторы выражают благодарность В. Н. Никонову за помощь и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 2, 187 (1950).
2. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 818 (1956).
3. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника, 1, 28 (1957).
4. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Т. Д. Разина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1065 (1961).
5. A. Whitwell, N. Williams, Microwave J. Nov., p. 27 (1959).
6. М. С. Скабовский, Радиотехника и электроника, 9, 434 (1964).

**THRESHOLD TECHNICAL POSSIBILITIES OF MEASURING PHASE (FREQUENCY)
FLUCTUATIONS OF GENERATORS BY VHF DISCRIMINATORS***Yu. E. Aptek, A. V. Lebedev*

The analysis has been carried out of the sensitivity of frequency discriminator circuit with transformation and detection at the intermediate frequency. The scheme was compared with other known ones. The technical possibilities of the frequency detection method have been considered.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.3

К ВОПРОСУ О ТЕПЛОВОЙ ИСТОРИИ ЛУНЫ*

О. И. Орнатская, Я. И. Альбер

При рассмотрении тепловой истории Луны обычно исследуется зависимость от времени ее температурного режима и связанного с ним физического состояния лунного вещества в течение всего времени существования Луны (около $(4,5 \div 5) \cdot 10^9$ лет). В качестве основы для этого анализа используется уравнение теплопроводности с заданными значениями плотности, теплоемкости и теплопроводности вещества Луны. В качестве источников тепла принимаются долгоживущие радиоактивные элементы — уран, торий и калий-40, концентрация и распределение которых в Луне определяются, исходя из принятых физических идеализаций.

Решению упомянутой задачи посвящен ряд работ, основными из которых являются работы Юри [1], Макдональда [2,3], Левина, Любимовой, и Маевой [4-7]. Концентрация радиоактивных элементов принята в [1-7], исходя из их среднего содержания в хондровых метеоритах**. В то же время можно оценить концентрацию радиоактивных элементов в Луне, исходя из потока тепла через ее поверхность. Последний может быть определен из радиоастрономических наблюдений (см [8]). Как следует из [8], поток тепла через поверхность Луны более чем в два раза превышает стационарный поток, получающийся при концентрациях, принятых в [5-7]. В связи с этим нами было проведено решение уравнения теплопроводности для четырех вариантов значений концентраций радиоактивных элементов, соответствующих данным работы [8] (большие концентрации — варианты I и I*) и принятым в работах [5-7] (вариант II) и [1-3] (вариант III). Принятые значения средних концентраций в настоящее время $H_j^{t_0}$ приведены в таблице 1***.

Т а б л и ц а 1

Варианты	Концентрации в настоящее время (в граммах на грамм вещества Луны)		
	Уран, $H_1^{t_0} \cdot 10^8$	Торий, $H_2^{t_0} \cdot 10^8$	Калий-40, $H_3^{t_0} \cdot 10^8$
I	11,55	46,7	18,7
I*	7,75	31,3	12,5
II	5,2	21	8,4
III	1,16	4,67	9,35

* Доклад на Совещании по планетной космогонии (Москва, 21 июня 1965 г.).

** В [1-3] рассматривается однородное распределение радиоактивных элементов, а в [5-7] сначала однородное, а затем расслоенное, соответствующее модели Луны, состоящей из железного ядра, дунитовой оболочки и гранито-базальтовой коры толщиной 10 - 17 км, обогащенной радиоактивными элементами.

*** Концентрации в начале рассмотрения H_j^0 (индексы $j = 1, 2, 3$ относятся к урану, торию и калию-40) определяются из $H_j^{t_0}$ по формуле $H_j^0 = H_j^{t_0} e^{-\lambda_j t_0}$, где $t_0 = 4,77 \cdot 10^9$ лет, $\lambda_1 = 1,54 \cdot 10^{-10}$ год⁻¹, $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-11}$ год⁻¹, $\lambda_3 = 5,7 \cdot 10^{-10}$ год⁻¹. Общее содержание радиоактивных элементов в Луне в настоящее время равно $\sum_{j=1}^3 H_j^{t_0} M$, где M — масса Луны.

В то время, как в работах [4-7] раздельно рассматривались однородная и слоенная модели Луны, мы попытались учесть дифференциацию недр Луны в самом ходе математического расчета, не задаваясь заранее какой-либо моделью Луны, а варьируя лишь среднюю концентрацию радиоактивных элементов, от которой в конечном итоге зависит и их распределение.

Вначале рассматривается однородное распределение радиоактивных элементов, а затем, после достижения в центре Луны температуры плавления, — экспоненциально спадающее от поверхности в глубину (общее содержание радиоактивных элементов в Луне при этом, конечно, не меняется). По мере достижения температуры плавления параметр d экспоненты меняется так, что радиоактивные элементы оказываются сосредоточенными все ближе к поверхности, что (естественно весьма приближенно) имитирует вынос при расплавлении радиоактивных элементов ближе к поверхности. Получившиеся в рассмотренных вариантах окончательные значения $d = d_0$ (при которых уже не происходит перегрева до расплавления на глубине d_0 под поверхностью) являются, очевидно, максимально возможными эффективными глубинами залегания радиоактивных элементов. В то же время, по-видимому, нет оснований предполагать также и меньшую, чем d_0 , эффективную глубину, если считать, что перераспределение радиоактивных элементов в основном определяется выносом при расплавлении.

Как следует из проведенных расчетов, при большом содержании в Луне радиоактивных элементов (варианты I и I*) последние в основном сосредоточены до глубины 10—20 км под поверхностью, а увеличение глубины их залегания приводит к резкому росту температуры (до 8000—10000°K), что вызывает расплавление вещества Луны вплоть до этой глубины. Таким образом, можно с достаточной уверенностью сказать, что если содержание радиоактивных элементов в Луне соответствует I и I* вариантам, то в процессе своей истории Луна была расплавлена практически полностью. При концентрации II (Левин) и III (Юри, Макдональд) вариантов Луна в процессе своей истории, вероятно, не могла быть расплавлена ближе к поверхности, чем 75 ÷ 100 км или 400—600 км соответственно*. Оказалось, что чем больше принятая концентрация радиоактивных элементов, тем в настоящее время больше охлаждено вещество Луны, что на первый взгляд может показаться странным, хотя физически очевидно: раньше начинается расплавление вещества и вынос радиоактивных элементов, они располагаются ближе к поверхности и тем меньшее влияние оказывают на температуру основной массы Луны.

Таким образом, к настоящему времени наибольшая толщина твердой коры может иметь место при предположении о большой концентрации. Наружные части Луны в настоящее время являются твердыми до глубины 600 ÷ 700 км в вариантах I и I*, в то время как в вариантах II и III толщина твердой коры в настоящее время составляет соответственно около 250 км и 400 км. Центральные области Луны до указанных глубин под поверхностью находятся при температуре плавления и весьма медленно остывают. Поток тепла через поверхность Луны в настоящее время близок к стационарному ($1,45 \cdot 10^{-6}$, $0,99 \cdot 10^{-6}$, $0,75 \cdot 10^{-6}$ и $0,24 \cdot 10^{-6}$ кал · см⁻² · сек⁻¹ в I—III вариантах; стационарные значения соответственно $1,35 \cdot 10^{-6}$, $0,9 \cdot 10^{-6}$, $0,61 \cdot 10^{-6}$ и $0,236 \cdot 10^{-6}$ кал · см⁻² · сек⁻¹)

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что предложенный путь расчета пригоден не только для Луны, но и для Земли и других планет; при этом, поскольку распределение радиоактивных элементов существенно зависит от их средней концентрации, представляется неверным задавать в качестве исходного параметра какую-либо модель распределения (как это сделано в [5-7]). Эта модель должна следовать из принятой средней концентрации. Более того, варьируя значения концентрации и сравнивая получающиеся модели с реальными условиями (если таковые известны, как например, для Земли), можно судить о существующем среднем содержании радиоактивных элементов. Последнее весьма важно, поскольку имеющиеся данные о концентрациях радиоактивных элементов пока довольно противоречивы.

Более подробно настоящая работа будет изложена в [9].

Авторы глубоко благодарны В. С. Троицкому и В. Н. Гольдбергу за постоянное внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Urey, Physics and Astronomy of the Moon, Ed. by Z. Kopal, Academic Press, New-York-London, 1962, p. 481.
2. G. I. F. Mac Donald, J. Geophys. Res., 64, 1967 (1959).
3. G. I. F. Mac Donald, Science, 133, 1045 (1961).
4. Б. Ю. Левин, Е. А. Любимова, Природа, № 10, 81 (1955).

* Из указанных значений d_0 для II и III вариантов следует, что модель, принятая в [5-7] с основным содержанием радиоактивных элементов в коре толщиной 10 ÷ 17 км — представляется физически маловероятной, поскольку при расплавлении они могли быть вытеснены лишь до глубины не менее 75 ÷ 100 км под поверхность.

5. Б. Ю. Левин, С. В. Маева, ДАН СССР, 133, 44. (1960).
 6. Б. Ю. Левин, Новое о Луне, изд. АН СССР, М., 1963, стр. 118.
 7. С. В. Маева, ДАН СССР, 159, 294 (1964).
 8. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 31, 589 (1962).
 9. О. И. Орнатская, Я. И. Альбер, Астрон. ж. (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 марта 1966 г.

УДК 539.28

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЯДЕРНОМ МАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ

А. С. Виглин, С. П. Довгопол

1. Анализ многих экспериментов по ЯМР основан на уравнении Блоха.

$$\dot{M} + \gamma [H \times M] + \frac{1}{T_2} (M_x e_x + M_y e_y) = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) e_z, \quad (1)$$

где $H = H_0 + H_1(t)$ (причем $H_1(t) = H_1 e^{i\omega t}$, $H_1 \ll H_0$), e_x , e_y , e_z — орты координатной системы, остальные обозначения стандартны. Однако нестационарная часть решения, непосредственно связанная с процессом релаксации, практически не используется, поскольку даже для случая независимых от времени коэффициентов в (1) нет общего решения задачи, за исключением двух частных случаев, рассмотренных в работе [1].

В настоящей работе предлагается общее решение задачи, рассмотрены параметры, определяющие характер переходного процесса, и проанализированы его возможные типы. Полученные результаты указывают на новые экспериментальные возможности.

2. В системе координат, вращающейся вокруг оси $z \parallel H_0$ с частотой поля ω , для намагниченности $\mu(t)$ получаем уравнение

$$\mu + \hat{G} \mu = f, \quad (2a)$$

где

$$G_{ik} = \begin{cases} T_2^{-1}, -\Omega_3, 0 \\ \Omega_3, T_2^{-1}, -\Omega_1 \\ 0, \Omega_1, T_1^{-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Omega_1 = \gamma H_1, \\ \Omega_3 = \gamma H_0 - \omega = \omega_0 - \omega, \\ f_l = \delta_{il} M_0 T_1^{-1}. \end{cases} \quad (2b)$$

Удобно положить

$$\mu(t) = s + e^{-tT_2^{-1}} \nu(t). \quad (3)$$

Тогда

$$s = \hat{G}^{-1} f, \quad \dot{s} = 0, \quad (4)$$

а нестационарная часть определяется уравнением

$$\dot{\nu}(t) + \hat{\Phi} \nu(t) = 0 \quad (\Phi_{ik} = G_{ik} - \delta_{ik} T_2^{-1}). \quad (5)$$

Его частные решения можно искать в виде

$$\nu(t) = q e^{\dot{q}t} \quad (\dot{q} = 0), \quad (6)$$

что приводит к системе уравнений для определения q :

$$(\Phi_{ik} + r \delta_{ik}) q_k = 0 \quad (7)$$

с условием существования нетривиальных решений

$$r^3 + \beta r^2 + \Omega^2 r + \beta \Omega_3^2 = 0 \quad (\beta = T_1^{-1} - T_2^{-1}, \Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_3^2). \quad (8)$$

Пусть r_n ($n = 1, 2, 3$) — корни уравнения (8). Тогда из (7) находим три линейно-независимых решения $q^{(n)}$ с точностью до скалярных множителей, определяемых из начальных условий. Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$v(t) = \sum_n q^{(n)} e^{r_n t}. \quad (9)$$

Если обозначить

$$\mu(0) - s = A, \quad (10)$$

то простые вычисления приводят к

$$v_i(t) = \sum_{(n, l, m)} \frac{(\delta_{i3} \Omega_3^2 + r_n^{i-1} - \delta_{i1}) [A_1(r_e r_m - \Omega_3^2) - \Omega_3 A_2(r_e + r_m) + \Omega_1 \Omega_3 A_3]}{[\delta_{i1} + (\delta_{i2} + \delta_{i3} \Omega_1) \Omega_3] (r_e - r_m)(r_m - r_n)} e^{r_n t}, \quad (11)$$

где сумма берется по всем циклическим перестановкам.

3. Введем безразмерные параметры

$$\lambda = r \Omega^{-1}, \quad a = \beta \Omega^{-1}, \quad b = \Omega_3 \Omega^{-1} \quad (12)$$

и запишем уравнение (8) как кубическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda + ab^2 = 0 \quad (13)$$

с дискриминантом $\Delta = 108^{-1} D(a, b)$, где

$$D(a, b) = 27a^2b^4 + 4a^4b^2 - 18a^2b^2 - a^2 + 4. \quad (14)$$

Известно ([2], § 50), что при $D < 0$ все λ_n вещественны и различны (и, как видно из 12),

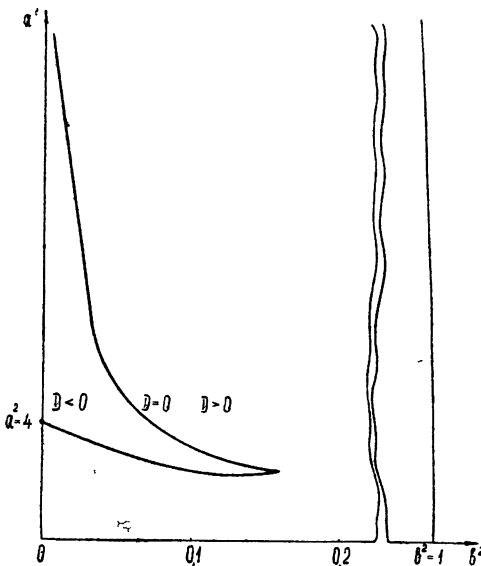


Рис. 1. Области различных типов переходных процессов на плоскости параметров a^2 , b^2 .

переходный процесс есть суперпозиция затухающих экспонент); при $D = 0$ имеем: $-2\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, все корни вещественны (характер процесса прежний); при $D > 0$ корень λ_1 вещественен, а $\lambda_2 = \lambda_3^*$. В этом случае положим

$$r_2 = \nu + i\varphi; \quad \lambda_2 = \lambda_3^* = \nu\Omega^{-1} + i\varphi\Omega^{-1} \equiv \nu + i\bar{\varphi} \quad (15)$$

и перепишем (11) в виде

$$v_i(t) = F_i e^{r_1 t} + K_i e^{\nu t} \cos \varphi t + L_i e^{\nu t} \sin \varphi t \quad (16)$$

(коэффициенты легко найти из (11)). Переходный процесс есть суперпозиция затухающих колебаний.

Границы областей, где Δ меняет знак, можно найти из уравнения

$$D(a, b) = 0. \quad (17)$$

Результат представлен на рис. 1 на плоскости параметров (a^2, b^2) , полностью определяющих тип процесса; при этом из (12) следует, что

$$0 \leq a^2 < \infty, \quad 0 \leq b^2 \leq 1. \quad (18)$$

4. Чтобы рассмотреть некоторые основные случаи, зададимся начальными условиями $\mu_x(0) = M_0$, $\mu_x(0) = \mu_y(0) = 0$ (система равновесна при $t = 0$) и найдем из (10) и (4) величины A_i . Для иллюстрации ограничимся составляющей $\mu_2(t) \equiv \mu_y(t)$, определяющей сигнал поглощения. Отметим, что при выбранных начальных условиях

$$s_2 = -A_2. \quad (19)$$

а) Можно рассмотреть области в плоскости (a^2, b^2) , определяемые условиями $a^2 \ll 1$ и $a^2 \gg 1$, и искать решение уравнения (13) в виде разложения по малым параметрам a и $a = a^{-1}$ соответственно. Полученные решения позволяют сконструировать решение во всей области $D > 0$:

$$r_1 = \frac{-\beta(a^2 + b^2)}{1 + a^2}; \quad r_2 = r_3^* = \Omega \left[\frac{-a(1 - b^2)}{2(1 + a^2)} + i\sqrt{\frac{1 - b^2}{1 + a^2} + b^2} \right]. \quad (20)$$

Действительно, из (20) получаются рассмотренные выше предельные случаи, с той же точностью выполняются известные соотношения между корнями кубического уравнения и, кроме того, точно получается случай $b^2 = 1$: сигнал будет затухающей синусоидой с постоянной затухания

$$-\left[T_2^{-1} + \frac{1}{2} a(1 - b^2)(1 + a^2)^{-1} \right], \quad (21)$$

и одно из времен релаксации можно находить, если известно другое.

б) Оставшийся участок плоскости (a^2, b^2) определяется условием $b^2 \ll 1$, т. е. рассматривается область вблизи резонанса в достаточно сильном радиочастотном поле, когда $\gamma H_1 \gg |\omega - \omega_0|$. Считая b^2 малым параметром, можно найти

$$r_1 = -\beta b^2, \quad r_2 = r_3^* = -2^{-1}\beta(1 - b^2) + 2^{-1}\Omega\sqrt{4 - a^2 - 8b^2} \quad \left. \vphantom{r_2} \right\} D > 0; \quad (22a)$$

$$F_2 \sim b, \quad K_2 \simeq A_2, \quad L_2 \simeq [(1 - b^2)^{1/2}(2 - a)A_2 + aA_2](4 - a^2 - 8b^2)^{-1/2} \quad (22b)$$

$$r_1 = -\beta b^2, \quad r_{2,3} = 2^{-1}(-\beta \pm \Omega\sqrt{a^2 + 8b^2 - 4}) \quad \left. \vphantom{r_{2,3}} \right\} D < 0. \quad (23a)$$

$$q_2^{(1)} \sim b^2, \quad q_2^{(2,3)} \simeq \pm (-A_2\lambda_{3,2} + (1 - b^2)^{1/2}A_2)(a^2 + 8b^2 - 4)^{-1/2} \quad (23b)$$

В области периодического затухания сигнал достаточно интенсивен, если $L_2 \gg -A_2$, что эквивалентно условию

$$[(2 - a)\Omega T_1 - a](4 - a^2 - 8b^2)^{-1/2} \gg 1, \quad (24)$$

т. е. если $a^2 \simeq 4$. Поэтому T_2 (или T_1) можно определять и так: меняя величину a (например, за счет H_1), уловить момент резкого возрастания амплитуды переходного сигнала. Теперь, считая, что $|a| = 2$, и зная $\omega_0 - \omega$, H_1 и T_1 (или T_2), можно найти T_2 (или T_1) из определения a по (12). Этот метод годится и в области чисто затухающих решений. Кроме того, можно использовать и изменение характера наблюдаемого процесса при переходе границы $D = 0$. Отмечая значение b^2 , при котором это происходит, и отыскивая по графику на рис. 1 соответствующее a^2 , можно найти одно из времен релаксации, если известно другое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Торгеу, Phys. Rev., 76, 1059 (1949).
2. Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, Гостехиздат, М., 1940.

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
25 января 1965 г.

УДК 621.378.33

ЛИНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ РАМЗЕЕВСКОГО ТИПА В МОЛЕКУЛЯРНОМ
ГЕНЕРАТОРЕ С РАЗНЕСЕННЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

В. С. Казачок

Получение узкой линии излучения в молекулярном генераторе является одним из главных методов повышения стабильности частоты этих генераторов. В настоящее время известны две экспериментальные работы, в которых узкая линия получена в системах рамзеевского типа [1] с разнесенными резонаторами. В работе [2] описан молекулярный генератор на линии $N^{14}H_3$ ($j = 3$, $k = 3$), в котором два резонатора, пронизываемые пучком молекул, связаны между собой по фазе через вспомогательный резонатор. В работе [3] описывается пассивная система (переход $j = 3$, $k = 2$, $N^{14}H_3$) с двумя резонаторами, имеющими открытые излучающие торцы. Кроме того, в [4] получено сужение линии излучения в двухрезонаторной системе с двумя встречными пучками молекул за счет режима синхронизации.

В настоящей работе исследовалась линия излучения $j = 3$, $k = 3N^{15}H_3$ в системе с двумя последовательными резонаторами, открытые торцы которых обращены навстречу друг другу (см. рис. 1). Оба резонатора рассчитаны на тип волны E_{010} . Резонатор 3

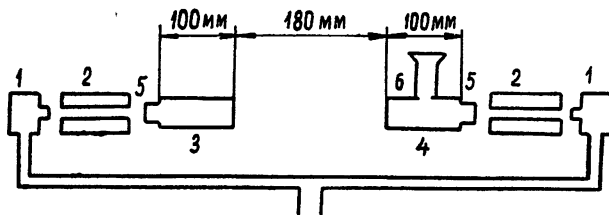


Рис. 1. Система с двумя последовательными резонаторами:

1 — источник пучка, 2 — сортирующая система, 3 — латунный резонатор, 4 — кварцевый резонатор, 5 — заперделный волновод, 6 — волновод для отбора мощности.

латунный, частота его перестраивается нагревом, резонатор 4 — кварцевый, его частота перестраивается металлическим штырем. Мощность генерации отбирается через отверстие связи в кварцевом резонаторе; частота генерации сравнивается с умноженной частотой (100 кГц) кварцевого генератора, промежуточная частота подается на осциллограф и частотомер.

Линия излучения рамзеевского типа наблюдается в этой системе следующим образом: при одном включенном пучке молекул и сильно расстроенном латунном резонаторе перестройкой кварцевого резонатора устанавливается грубо частота генерации, соответствующая частоте линии перехода (с точностью ± 100 гц); затем при двух включенных пучках латунный резонатор перестраивается нагревом в широком диапазоне частот. При плавном ходе частоты латунного резонатора вдоль всей оси, по которой летят молекулы, в том числе и в пространстве между резонаторами, периодически (через несколько секунд) налагается поперечное переменное во времени магнитное поле, которое используется для зеемановской магнитной настройки.

Далее для получения частот экстремумов линии излучения используется методика, описанная в работе [5]. Кратко эта методика сводится к тому, что для нахождения частоты экстремума строится график зависимости частоты генерации, снятой в определенные моменты времени для разных частот резонатора в отсутствие магнитного поля от расстройки частот генерации при наложении магнитного поля в те же моменты

времени. Критерием совпадения частоты генерации с частотой экстремума линии излучения считается нулевая расстройка частоты генерации при наложении магнитного поля. Для обычного молекулярного генератора этот график представляет собой прямую линию.

В описываемом эксперименте получилась зависимость, отмеченная точками на рис. 2. Здесь точки пересечения изображенных кривых с осью ординат соответствуют максимумам линии излучения. Из рис. 2 видно, что линия излучения имеет три максимума. Провалы в этих кривых соответствуют скачку частоты генерации. Прямая, изображенная кружками, соответствует однорезонаторному молекулярному генератору с той же величиной магнитного поля. Тангенс угла наклона прямой и тангенс угла наклона касательных в точках пересечения кривых с осью ординат характеризует эффективную добротность линии излучения для каждого максимума, а именно: $(\operatorname{tg} \alpha)^{-1/2} \sim \sim Q_{\text{л эфф}} H$, где $Q_{\text{л эфф}}$ — эффективная добротность линии, H — величина магнитного поля (см. [5]). Из этого графика можно видеть, что эффективная добротность центрального максимума рамзеевской линии излучения примерно в 5 раз больше добротности линии излучения для однорезонаторного молекулярного генератора (при указанных на рис. 2 размерах). Кривая, отмеченная крестиками, соответствует большему давлению в источнике пучка; здесь эффективная добротность линии уменьшилась и хорошо видны точки, соответствующие частотам минимумов линии излучения (тангенс угла наклона отрицательный). Мощность генерации в обоих случаях примерно одинакова.

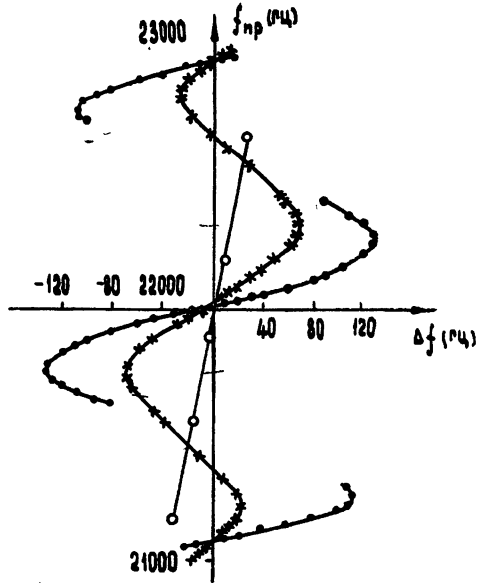


Рис. 2. Зависимость частоты генерации $f_{\text{гр}}$ от сдвига частоты Δf при наложении магнитного поля.

Использованные в настоящей работе источники пучка молекул типа «канал» и шестиполосные ножевые сортирующие системы, а также давление в источнике пучка, напряжение в сортирующей системе и полученное соотношение сигнал/шум являются такими же, как в обычном молекулярном генераторе на аммиаке N^{15}H_3 . Режим описываемого генератора близок к описанному в работе [2], где используется третий резонатор для связи резонаторов по полю. В нашем генераторе существенна связь резонаторов по полю через излучающие открытые торцы. Это подтверждается тем, что при работе с одним пучком были обнаружены те же закономерности, что и указанные выше, но они были слабее выражены из-за уменьшения мощности сигнала. Настоящая система более проста, чем в [2], и позволяет получить большую эффективную добротность линии по сравнению с [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. N. F. Ramsey, Phys. Rev., **78**, 695 (1950).
2. F. Holuj, H. Daams, S. N. Kalra, J. Appl. Phys., **33**, 2370 (1962).
3. S. G. Kukulich, Proc. IEEE, **52**, 223 (1964) (русский перевод).
4. А. Ф. Мухамедгалиева, Г. М. Страховский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, 824 (1965).
5. Г. А. Елкин, В. С. Казачок, Г. Г. Рахимов, А. Ф. Щербинин, Труды ВНИИФТРИ (в печати).

О ФЛУКТУАЦИЯХ В КВАРЦЕВОМ ГЕНЕРАТОРЕ

А. Н. Малахов

Флуктуации в кварцевом автогенераторе исследованы совершенно недостаточно. Имеется, по-видимому, только одна работа [1], в которой проводится теоретическое рассмотрение этих флуктуаций. Почти полностью отсутствуют в литературе материалы и по экспериментальному исследованию флуктуаций в кварцевых генераторах (лишь некоторые данные имеются, например, в работе [2]).

Настоящее сообщение кратко излагает основные результаты достаточно строгого анализа флуктуаций в двухконтурном кварцевом генераторе с кварцем, помещенным между сеткой и катодом лампы. Параметры схемы следующие: анодный контур L, C, r ; кварц L_k, C_k, r_k ; емкость сетка—катод C_s ; емкость анод—сетка C_1 . Источниками шумов являются тепловые шумы анодного контура, кварца и дробовой шум лампы.

Для x - и y -напряжений соответственно на емкостях C и C_s можно получить два линейных уравнения второго порядка, правые части которых имеют различный порядок малости вследствие высокой добротности кварца Q_k по сравнению с добротностью анодного контура Q_a (параметр малости $\mu = Q_a^{-1}$). Рассматриваются флуктуации амплитуд и фаз $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \varphi(t)$, соответствующих решению

$$\begin{aligned}x &= P_0 (1 + \alpha_2) \cos(\omega_0 t + \varphi) + B_0 (1 + \alpha_3) \sin(\omega_0 t + \varphi), \\y &= R_0 (1 + \alpha_1) \cos(\omega_0 t + \varphi).\end{aligned}$$

Здесь частота автоколебаний $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega_0$, $\omega_1^2 = L_k^{-1} [C_k^{-1} + (C_1 + C_s)^{-1}]$, $\Delta\omega_0$ — поправка на частоту, существующая во втором порядке малости

Используя метод усреднения и метод статистической эквивалентности (см. [3,4]), можно получить следующие уравнения для флуктуаций амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2R_0} (h_k e_{\perp k} + s_2 e_{\perp 1}), \\ \dot{\alpha}_2 &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2P_0} e_{\perp 1}, \\ \dot{\alpha}_3 &= -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2B_0} e_{\parallel 1}, \\ \dot{\varphi} &= -q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3 - \frac{\omega_1}{2R_0} (h_k e_{\parallel k} + s_2 e_{\parallel 1}).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь p_{ij} — некоторые коэффициенты, зависящие от параметров генератора и характеризующие затухания отклонений амплитуд от стационарных значений; p_{11}, p_{22}, p_{33} аналогичны прочностям предельного цикла, q_1, q_2, q_3 — неизощренностям, $h_k = C_k / (C_k + C_1 + C_s) \sim \mu$, $s_2 = C_1 / (C_1 + C_s) \sim \mu$. Функции $e_{\perp k}, e_{\parallel k}$ и $e_{\perp 1}, e_{\parallel 1}$ являются дельта-коррелированными взаимно независимыми случайными воздействиями. Их спектральные плотности для первой пары равны $S_k = \frac{2}{\pi} k T r_k$, для второй пары

$S_1 = \frac{1}{\pi} (e I_0 \Gamma^2 Q_a^2 r^2 + 2k T r)$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, e — заряд электрона, I_0 — ток лампы, Γ^2 — коэффициент депрессии дробового шума.

Правые части (1) имеют различные порядки малости. У первого и четвертого уравнений правые части на порядок меньше, чем у остальных двух. Это приводит к тому, что, например, амплитудные флуктуации в кварцевом контуре на порядок меньше, чем в анодном контуре. Однако, несмотря на разный порядок малости, систему (1) разделить не удается и уравнения приходится решать совместно

Довольно громоздкий расчет показывает, что амплитудные флуктуации кварцевого контура обладают следующей спектральной плотностью.

$$S_{\alpha_1}(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi} \frac{\Omega^4 A_4 + \Omega^2 A_2 + A_0}{(\Omega^2 + \Omega_1^2) \left[\frac{1}{4} \Pi_a^2 + (\Omega - \Omega_a)^2 \right] \left[\frac{1}{4} \Pi_a^2 + (\Omega + \Omega_a)^2 \right]}\tag{2}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Pi_a = \omega_1/Q_a, \quad Q_a = \frac{1}{2} \omega_1 h_a \sim \omega_1 \mu, \quad h_a = (\omega_1^2 - \omega_a^2)/\omega_1^2 < 0,$$

$$\omega_a^2 = L^{-1} (C + C_1)^{-1}, \quad \Omega_1 = a_0/\Omega_0^2 \sim \omega_1 \mu^2, \quad a_0 = |p_{ij}|,$$

$$\Omega_0^2 = \Omega_a^2 + \frac{1}{4} \Pi_a^2, \quad D_1 = \pi \omega_1^2 S_1/2R_0^2, \quad A_a = s_2^2 + h_k^2 m \sim \mu^2, \quad m = S_k/S_1.$$

Величины A_2 и A_0 зависят от p_{ij} , R_0 , P_0 , B_0 и имеют порядок малости $\mu_1^2 \mu^4$ и $\omega_1^4 \mu^6$ соответственно.

Из (2) следует, что форма спектра флуктуаций амплитуды имеет сложный вид. На достаточно больших частотах $S_{a1}(\Omega) \sim \Omega^{-2}$; максимумы спектра приходятся на частоты $\Omega \equiv \Omega_a$ и $\Omega = 0$. При $\Omega \ll \Omega_1$ основную роль играет первый множитель в знаменателе (2): при таких частотах $S_{a1}(\Omega) = A_0 D_1 / 2\pi \Omega_0^4 (\Omega^2 + \Omega_1^2)$. Примерный вид $S_{a1}(\Omega)$ изображен на рис. 1 (кривая I).

В общем случае, по-видимому, могут иметь место дополнительные экстремумы на частотах порядка $\omega_1 \mu$. Для анодного контура спектральные плотности амплитудных флуктуаций $S_{a2}(\Omega)$, $S_{a3}(\Omega)$ подобны (2), где, однако, A_0 , A_2 , A_4 принимают другие значения и имеют другие порядки малостей. Их примерные графики показаны кривой II. Кривая III дает четную совместную спектральную плотность $S_{a, \sigma_3}^0(\Omega)$.

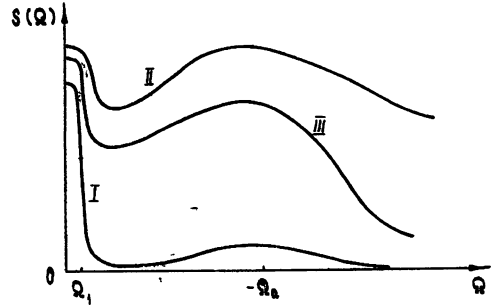


Рис. 1.

Спектральная плотность флуктуаций частоты равна

$$S_\nu(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi} \left\{ \frac{\Omega^4 N_4 + \Omega^2 N_2 + N_0}{(\Omega^2 + \Omega_1^2) [(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2]} + A_4 \right\}, \quad (3)$$

где коэффициенты N_0 , N_2 , N_4 имеют порядки величин соответственно $\omega_1^6 \mu^{10}$, $\omega_1^4 \mu^6$, $\omega_1^2 \mu^4$ и сложным образом зависит от параметров генератора. Эта спектральная плотность имеет максимум при $\Omega = 0$ с шириной Ω_1 , максимум при $\Omega = -\Omega_a$ с шириной $\sim \Pi_a$ и на больших частотах стремится к $S_\nu(\infty) = D_1 A_4 / 2\pi$. Ее примерный вид (максимумов может быть больше) изображен на рис. 2.

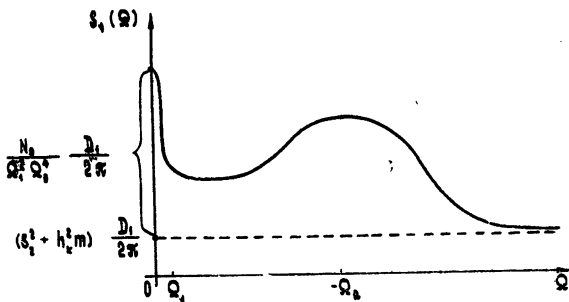


Рис. 2.

Естественная ширина спектральной линии кварцевого автогенератора равна

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_\nu(0) = \frac{\pi \omega_1^2}{4R_0^2} \left[M (2k Tr + e I_0 \Gamma^2 r^2 Q_a^2) + h_k^2 2k Tr_k \right],$$

где $M = s_2^2 + N_0/\Omega_0^4 \Omega_1^2 \sim \mu^2$. Легко видеть, что $\Delta\Omega$ имеет порядок малости $\omega_1 \mu^6$.

Форма естественной спектральной линии кварцевого генератора состоит из почти симметричного узкополосного пика резонансного вида (шириной $\Delta\Omega$) и сильно несимметричного широкого пьедестала (шириной Π_a), обладающего целым рядом экстремумов.

Анализ естественных флуктуаций в кварцевом генераторе и сравнение их с флуктуациями в обычных одноконтурных LC -генераторах (для которых, как можно показать, $M \simeq 1$, $h_k \simeq 1$, $\Delta\Omega \sim \omega_1 \mu^4$) показывает, что сравнительная малость флуктуаций кварцевого генератора обязана прежде всего слабой связи кварцевого контура с лампой вследствие его высокой добротности. Если в одноконтурных LC -генераторах употреблять такие же высокодобротные контура и соответственно слабую связь, то можно получить такие же малые значения $\Delta\Omega$.

Кварцевый генератор является двухконтурным генератором. Анализ показывает, что двухконтурность приводит к корреляции амплитудных и частотных флуктуаций, к сложной форме их спектров, к сложной форме пьедестала спектральной линии и сравнительно мало сказывается на величине $\Delta\Omega$. Как уже отмечалось в [1] и как получается у нас, корреляция между амплитудными и частотными флуктуациями в некоторых режимах может несколько уменьшить $\Delta\Omega$.

Проведенный анализ флуктуаций привел к существованию экстремумов в спектральных плотностях, изображенных на рис. 1 и 2. Отметим, что в работе [2] имеется указание на существование подобных экстремумов. На рис. 3 приведена одна из запи-

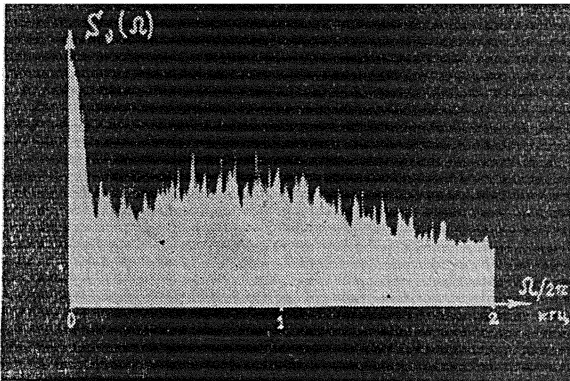


Рис. 3.

сей спектра $S_v(\Omega)$ для кварцевого генератора, полученная и любезно предоставленная нам А. И. Чикиным, на которой отчетливо виден максимум, лежащий в районе 700 гц.

Необходимо отметить, наконец, что анализ технических флуктуаций кварцевого генератора приводит к соответствующим выражениям, подобным (1)–(3). Так, например, для $S_v(\Omega)$, обязанной флуктуациям емкости анодного контура, получается выражение, отличающееся от (3) только тем, что коэффициенты N_4 , N_2 , N_0 , A_4 имеют другие значения, а вместо $D_1/2\pi$ входит $\frac{1}{4} \omega_1^2 S_{\delta C}(\Omega)$, где δC — относительные флуктуации емкости. Поэтому, хотя на рис. 3 приведена спектральная плотность технических флуктуаций частоты, имеется основание ожидать, что подобную зависимость эксперимент даст и для естественных флуктуаций частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Жаботинский, П. Е. Зильберман, О флуктуациях в кварцевых генераторах, ДАН СССР, 119, 918 (1958).
2. Д. А. Дмитренко, А. И. Чикин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1271 (1963).
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 495 (1963).
4. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 710 (1964).

УДК 538.59 : 519.25

К ВОПРОСУ О ФОРМЕ И ШИРИНЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ЧАСТОТЫ

А. Н. Малахов

В литературе уже указывалось [1], что при фликкерных нестационарных флукутациях частоты колебаний форма и ширина спектральной линии монотонно зависят от времени наблюдения, однако достаточно подробного рассмотрения этого обстоятельства не проводилось. Настоящее сообщение кратко излагает результаты анализа, в определенной степени восполняющего этот пробел.

Рассмотрим колебание $x(t) = R_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$, $\varphi(t) = \int \nu(t) dt$, где $\nu(t)$ — флукутации частоты (среднее статистическое значение $\langle \nu \rangle \equiv 0$), являющиеся нестационарным нормально распределенным случайным процессом. Можно показать (см., например, [2,3]), что функция корреляции колебаний, рассматриваемых с момента $t = 0$ равна

$$\Phi_x(\tau) = A^0(\tau) \cos(\omega_0 \tau), \quad A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{-d_\varphi[t, t+\tau]\} dt. \quad (1)$$

Здесь $d_\varphi[t_1, t_2; \tau] \equiv \frac{1}{2} \langle [\varphi(t_1 + \tau) - \varphi(t_1)] [\varphi(t_2 + \tau) - \varphi(t_2)] \rangle$ — статистическая структурная функция флукутаций фазы, обладающих нестационарными приращениями вследствие нестационарности $\nu(t)$. Форма и ширина спектральной линии колебания равны (см. [2,4])

$$W_x(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos(\Omega \tau) d\tau, \quad (2)$$

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2} R_0^2 W_x^{-1}(0) = \frac{1}{2} \pi R_0^2 \left[\int_0^\infty A^0(\tau) d\tau \right]^{-1},$$

где частота Ω отсчитывается от средней частоты колебания ω_0 .

Если флукутации частоты являются стационарными, то фаза обладает стационарными приращениями и

$$d_\varphi[t_1, t_2; \tau] \equiv d_\varphi[t_2 - t_1; \tau]; \quad d_\varphi[t, t; \tau] = d_\varphi[0; \tau] \equiv \lambda(\tau).$$

В этом случае $A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \exp\{-\lambda(\tau)\}$ и на основании (2) мы приходим к ранее исследованным случаям [2,4].

Если флукутации частоты нестационарны и, кроме того, обладают фликкерным спектром, то (см., [1]) $\langle \nu^2(t) \rangle$ неограниченно возрастает с ростом t . В этом случае можно показать, что $d_\varphi[t, t; \tau]$ также неограниченно возрастает с ростом t , вследствие чего $A^0(\tau) \equiv 0$ и $\Delta\Omega = \infty$. Нетрудно установить, что расходимость $\Delta\Omega$ в этом случае связана с бесконечно большим временем наблюдения T . По этой причине необходимо ограничиваться конечным временем наблюдения T ; тогда форма и ширина спектра колебаний начинают существенно зависеть от длины реализации $x(t)$. В этом случае $A^0(\tau)$ заменяется функцией $A^0(T, \tau)$, описываемой второй формулой (1), где теперь T конечно. Форма спектральной линии колебания и ее ширина будут тогда равны

$$W_x(T, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(T, \tau) \cos \Omega \tau d\tau, \quad \Delta\Omega(T) = \frac{1}{2} \pi R_0^2 \left[\int_0^\infty A^0(T, \tau) d\tau \right]^{-1}. \quad (3)$$

Эти выражения позволяют для любого T отыскать форму и ширину спектральной линии, если известна структурная функция $d_\varphi[t, t; \tau]$:

Обычно задаются статистические характеристики флуктуаций частоты. В дальнейшем ограничимся нестационарными флуктуациями частоты, обладающими стационарными приращениями и будем считать известной структурную функцию $d_\nu [\theta; \tau]$.

Поскольку флуктуации частоты и фазы нестационарны, то необходимо выбрать начальные условия — задать привязку флуктуаций. Пусть при $t = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\nu(0) = 0$. Тогда можно показать, что структурная функция флуктуаций фазы связана со структурной функцией флуктуаций частоты следующим образом:

$$d_\varphi [t, t; \tau] = \tau \int_t^{t+\tau} d_\nu [\theta; u] du - \int_0^\tau (\tau - \nu) d_\nu [0; \nu] d\nu. \quad (4)$$

Получаемые отсюда выражения для $d_\varphi [t, t; \tau]$ для большинства реальных случаев флуктуаций частоты таковы, что нахождение $W_x(T, \Omega)$ и $\Delta\Omega(T)$ для произвольного T представляет достаточно трудную операцию. Это связано с учетом переходных процессов, обязанных привязке значений $\varphi(t)$ и $\nu(t)$ в момент $t = 0$ и ведущих к сложному изменению во времени формы и ширины спектральной линии.

Более доступными и к тому же более интересными являются асимптотические значения формы и ширины спектральной линии при достаточно больших значениях T . Для их нахождения можно, во-первых, ограничиться асимптотическим значением $d_\varphi [t, t; \tau]$ для больших t , которое, как нетрудно показать с помощью (4), равно

$$d_\varphi [t, t; \tau] = \tau^2 d_\nu [0; t], \quad (5)$$

и во-вторых, при нахождении функции A^0 ограничиться временным интервалом $[T, T + \theta]$, где $\theta \ll T$. В этом случае мы будем определять форму и ширину спектральной линии колебаний по реализации этих колебаний длительности θ , взятой в достаточно большой момент времени T после «установки нуля». В этом случае получим

$$A^0(T, \tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \exp \{ -\tau^2 d_\nu [0; T] \}.$$

Отсюда, совершая фурье-преобразование и используя (3), находим

$$W_x(T, \Omega) = \frac{1}{2} R_0^2 \frac{1}{\Delta\Omega(T)} \exp \left\{ -\frac{\pi\Omega^2}{\Delta\Omega^2(T)} \right\}, \quad (6)$$

$$\Delta\Omega(T) = 2 \sqrt{\pi d_\nu [0; T]}.$$

Таким образом, если флуктуации частоты колебания являются нестационарными и $d_\nu [\theta; \tau]$ неограниченно возрастает с ростом τ , то при достаточно большом времени T форма линии колебания получается доплеровской и ее ширина зависит от T , но не от θ . Если рассматривать времена, близкие к моменту привязки, когда еще сказываются процессы установления, форма линии не будет доплеровской. Тем самым требуется определенное время t_0 для формирования асимптотической доплеровской формы спектральной линии.

Рассмотрим два примера. Пусть флуктуации частоты, обладающие стационарными приращениями, имеют спектральную плотность

$$S_\nu(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{A}{2\pi |\Omega|^\gamma} \quad (1 < \gamma < 3).$$

Можно показать (см. [3]), что структурная функция этих флуктуаций равна

$$d_\nu [0; \tau] = B\tau^{\gamma-1}, \quad \text{где } B = A\omega_0^2/8\Gamma(\gamma) \sin \left[\frac{\pi}{2}(\gamma-1) \right]. \text{ Точное значение структурной функции флуктуации фазы равно}$$

$$d_\varphi [t, t; \tau] = B \frac{\tau}{\gamma} [(t + \tau)^\gamma - t^\gamma] - \frac{B}{\gamma(\gamma+1)} \tau^{\gamma+1}.$$

Если выбрать такое t_0 , что

$$(t_0/\theta_0)^{\frac{\gamma-1}{2}} \gg 1, \quad \theta_0 = B \frac{1}{\gamma+1},$$

то для всех $T \geq t_0$ будет справедливо асимптотическое значение (5); согласно (6), для $T \geq t_0$ ширина доплеровской спектральной линии

$$\Delta\Omega(T) = \omega_0 \sqrt{\frac{\pi A T^{\gamma-1}}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma-1)}}$$

Если, например, $A = 10^{-15}$, $\gamma = 1,5$, то можно взять $t_0 = 6 \cdot 10^3$ сек и для $T \geq 6 \cdot 10^3$ сек

$$\Delta\Omega(T)/\omega_0 \approx 0,5 \cdot 10^{-7} \sqrt[4]{T}$$

Пусть теперь

$$S_\nu(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{A_1 \Omega_b}{2\pi |\Omega| (|\Omega| + \Omega_b)}, \quad \Omega_b > 0.$$

При этом для $\Omega \ll \Omega_b$ $S_\nu(\Omega) \sim 1/\Omega$, для $\Omega \gg \Omega_b$ $S_\nu(\Omega) \sim 1/\Omega^2$. Можно показать, что для всех $T \geq t_0$, где $\ln \Omega_b t_0 \gg 1$, асимптотическое значение структурной функции будет равно

$$d_\varphi [t, t; \tau] = \frac{1}{\pi} A_1 \tau^2 \ln (1 + \Omega_b t).$$

Следовательно, для $T \geq t_0$ ширина асимптотической доплеровской спектральной линии будет равна

$$\Delta\Omega(T) = \omega_0 \sqrt{A_1 \ln \Omega_b T}.$$

Если, например, $A = 10^{-14}$, $\Omega_b = 2\pi \cdot 10^3$, то можно взять $t_0 = 10$ сек и для $T \geq 10$ сек

$$\Delta\Omega(T)/\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{-7} \sqrt{\ln T}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959).
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 912 (1961).
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 595 (1966).
4. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
29 января 1966 г.

УДК 538.3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Г. А. Бегиашвили, Ю. С. Монин

Известно, что при движении заряженной частицы в случайно-неоднородной изотропной среде возникает некогерентное излучение, связанное с поляризацией неоднородностей [1,2]. В данной работе рассмотрена задача об излучении заряженной частицы, движущейся в случайно-неоднородной анизотропной среде — поликристалле с изотропным распределением кристаллитов. В этом случае локальное отклонение компонент тензора диэлектрической проницаемости среды от средних значений мало, хотя анизотропия отдельных кристаллитов произвольная, и поликристалл в отношении

электродинамических свойств оказывается эквивалентным однородной среде с тензором эффективной диэлектрической проницаемости E_{ik} [3]*. (Тензор E_{ik} оказывается не эрмитовым и, вообще говоря, может зависеть от волнового вектора.)

Таким образом, задача нахождения излучения заряда, движущегося в случайно-неоднородной анизотропной среде, может быть сведена к эквивалентной задаче нахождения излучения в однородной среде с эффективной диэлектрической проницаемостью E_{ik} (метод $\epsilon_{\text{эфф}}$ для вычисления потерь энергии частицы был впервые использован в работе [4]). Согласно [3], в предельном случае малых частот E_{ik} имеет вид

$$E_{ik} = (\epsilon + \gamma_1 + i\gamma_2) \delta_{ik}, \quad \chi a \ll 1, \quad (1)$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{\nu}{9\epsilon} \left(1 - 2 \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \bar{a}^2 \right);$$

$$\gamma_2 = \frac{83}{360} \frac{\nu}{\epsilon} \frac{\omega^3}{c^3} \epsilon^{3/2} \bar{a}^3;$$

$$\nu = (\epsilon_{ik}^0)^2 - \frac{1}{3} (\epsilon_{ii}^0)^2; \quad \epsilon = \frac{1}{3} \epsilon_{ii}^0; \quad \chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon};$$

ϵ_{ik}^0 — тензор диэлектрической проницаемости отдельных кристаллитов; \bar{a} — средний линейный размер кристаллитов.

Воспользовавшись теперь известным выражением для потерь энергии на единицу пути W частицей, движущейся со скоростью v в среде с диэлектрической проницаемостью $E_{ik} = E_{ik}^0$ (см. [5], § 8), получим

$$W = \frac{ie^2 v}{2\pi^2} \int (k v) \frac{dk}{k^2 c^2 - (k v)^2 E} + \frac{ie^2 c^2}{2\pi^2 v} \int (k v) \frac{d k}{[k^2 c^2 - (k v)^2 E] E} \quad (2)$$

(здесь e — заряд частицы).

Если частица движется вдоль оси Ox , то, учитывая (1) и (2), для спектральной плотности потерь энергии получим

$$W_{\omega} = \frac{83}{720} \frac{e^2 \omega^4 \bar{a}^3}{\pi v^2 c^3} \frac{\nu \sqrt{\epsilon}}{(\epsilon - \nu/9\epsilon)^2} \left\{ \left(\epsilon - \frac{\nu}{9\epsilon} \right) \beta^2 - \ln \left[\frac{q_0^2 v^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \beta^2 (\epsilon - \nu/9\epsilon)} \right] \right\} \quad (3)$$

(q_0 — обычный параметр обрезания интеграла; здесь принято, что $q_0 \sim 1/\bar{a}$). При выводе этой формулы предполагалось, что $\beta^2 (\epsilon - \nu/9\epsilon) < 1$, т. е. условия черенковского излучения не выполняются, и, кроме того, $\omega \bar{a}/v \ll 1$.

Таким образом, излучение имеет место и до достижения порога черенковского излучения, а вблизи порога, как легко видеть из формулы (3), интенсивность излучения растет логарифмически. Естественно, что в этом случае характер излучения оказывается подобным характеру излучения в случайно-неоднородной изотропной среде [1]. Однако необходимо отметить, что здесь допороговое излучение обусловлено исключительно неоднородностью анизотропии и W_{ω} обращается в нуль, когда параметр анизотропии $\nu \rightarrow 0$. Наконец отметим, что отличие k -волнового вектора средней волны от $\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$ приводит к несущественному изменению потерь.

Авторы благодарны Ф. Г. Бассу за интерес к работе.

* Точнее, поле в поликристалле с изотропным распределением кристаллитов называется суммой двух слагаемых: «среднего» поля и относительно малой нерегулярной добавки, которая нас в дальнейшем интересовать не будет. Тензор E_{ik} определяет именно характер волны «среднего» поля (затухание, фазовую скорость).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Капица, ЖЭТФ, **39**, 1367 (1960).
2. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН, **86**, 189 (1965).
3. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап. ХГУ, Тр. физ.-мат. фак-та, **2**, 41 (1950).
4. В. В. Тамойкин, С. Б. Бирагов, ЖЭТФ, **44**, 1544 (1963).
5. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмодобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

Институт кибернетики АН ГССР

Поступила в редакцию
10 января 1966 г.

УДК 621.371.123

К ВОПРОСУ О САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

А. Г. Литвак

Проблеме самофокусировки электромагнитных волн в нелинейных средах посвящен целый ряд работ [1-5]. По существу, возможность самофокусировки следует из простых качественных соображений. Под действием поля волны первоначально однородная среда становится неоднородной. Если при этом, производная от диэлектрической проницаемости среды ϵ по квадрату модуля амплитуды поля положительна:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial |E|^2} > 0, \quad (1)$$

то возможно волноводное распространение. Подобное явление самофокусировки можно наблюдать, например, в средах с сильным электрострикционным эффектом (к таким средам, в частности, относится полностью ионизированная плазма [2,6]).

С другой стороны, если $\frac{\partial \epsilon}{\partial |E|^2} < 0$, то в такой среде происходит дефокусировка волн. Этот эффект может быть связан с тепловым действием электромагнитного поля на среду. Например, в слабо ионизированной плазме стационарная электронная концентрация n определяется из уравнения баланса рекомбинации и ионизации*:

$$\nu_i n - \alpha_r n^2 = 0. \quad (2)$$

Ионизационная частота ν_i и коэффициент рекомбинации электронов α_r являются функциями электронной температуры и концентрации. Под действием электромагнитного поля происходит нагревание электронного газа и нарушение ионизационного баланса [7], что обычно приводит к увеличению электронной концентрации в области сильного поля и соответственно к уменьшению диэлектрической проницаемости плазмы.

Из строгого решения задачи для случая изотропной среды [2] следует, что неравенство (1) является как необходимым, так и достаточным условием существования стационарного цилиндрического самоподдерживающегося волноводного канала. Ниже проводится обобщение автолокализованного решения на случай простейшей анизотропной среды, какой является плазма в сильном магнитном поле. Показано, что аналогичное (1) условие на составляющие тензора диэлектрической проницаемости недостаточно для существования такого решения. Больше того, самофокусировка волн возможна также и в анизотропной среде с «ионизационной» нелинейностью.

* Для простоты мы не учитываем других механизмов захвата электронов и диффузии.

Как известно, плазма в сильном постоянном магнитном поле* H_0 описывается тензором эффективной диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

причем ϵ_{\parallel} зависит только от продольной составляющей электрического поля E_z . Для не слишком сильных полей эту зависимость можно считать квадратичной:

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\infty} + \epsilon_1 E_z^2, \quad (4)$$

где ϵ_{∞} — диэлектрическая проницаемость плазмы в отсутствие поля. Случай $\epsilon_1 > 0$ соответствует электрострикционной нелинейности в полностью ионизированной плазме, а $\epsilon_1 < 0$ — нелинейности ионизационной.

Рассмотрим распространение в такой среде двухмерной ТМ-волны с компонентами поля

$$E_z = E_z(x) e^{-ihz}; \quad E_x = E_x(x) e^{-ihz}; \quad H_y = H_y(x) e^{-ihz}. \quad (5)$$

Система уравнений поля сводится к одному нелинейному уравнению для E_z :

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + (k_0^2 - h^2) \epsilon (E_z^2) E_z = 0, \quad (6)$$

где $k_0 = \omega/c$.

Это уравнение имеет первый интеграл:

$$\left(\frac{dE_z}{dx} \right)^2 + (k_0^2 - h^2) E_z^2 \left(\epsilon_{\infty} + \frac{1}{2} \epsilon_1 E_z^2 \right) = C, \quad (7)$$

где C — постоянная интегрирования. Легко установить, что локализованное по x решение (при $x \rightarrow \pm \infty$ $E_z \rightarrow 0$; $dE_z/dx \rightarrow 0$) существует лишь при $\epsilon_{\infty}/\epsilon_1 < 0$, когда на фазовой плоскости уравнения (6) есть три особых точки. На рис. 1, 2 приведена структура фазовой плоскости для случаев $(k_0^2 - h^2) \epsilon_{\infty} > 0$ и $(k_0^2 - h^2) \epsilon_{\infty} < 0$.

Соответствующая локализованному решению замкнутая траектория ($C = 0$), проходящая через точку $(0, 0)$, есть только во втором случае, когда точка $(0, 0)$ является особой точкой типа «седло». Следовательно, самофокусировка возможна лишь, когда $\epsilon_{\infty} < 0$, $\epsilon_1 > 0$ и волна быстрая: $h < k_0$, или когда $\epsilon_{\infty} > 0$, $\epsilon_1 < 0$ и волна медленная: $h > k_0$. Функция $\epsilon(x)$ в таком решении является знакопеременной, так как в случае $\epsilon_{\infty} < 0$ на оси $\epsilon(x = 0) > 0$ и наоборот. Поперечное распределение поля $E_z(x)$ может быть найдено в явном виде**:

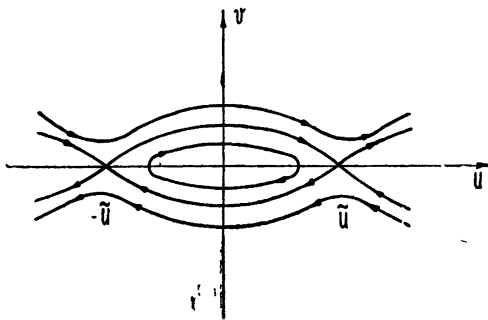


Рис. 1. Структура фазовой плоскости для

$$(k_0^2 - h^2) \epsilon_{\infty} > 0 \quad (u = E_z; \quad v = dE_z/dx;$$

$$\tilde{u}^2 = -2\epsilon_{\infty}/\epsilon_1).$$

где $\kappa^2 = (h^2 - k_0^2) \epsilon_{\infty}$. Постоянная распространения h зависит от мощности волны***.

$$E_z(x) = \frac{E_m}{\text{ch}(\kappa x)}, \quad (8)$$

* Сильным мы называем магнитное поле, для которого $\omega_H \gg \omega$, где $\omega_H = eH_0/mc$ — гирочастота электронов, e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света в вакууме, ω — частота электромагнитного поля. Это условие позволяет пренебречь недиагональными членами в тензоре $\hat{\epsilon}$.

** Это решение справедливо только для локализованных полей

*** Подробно эта зависимость обсуждается в [5]. Там же приведены выражения для составляющих поля $E_x(x)$, $H_y(x)$.

Таким образом, при $\partial \epsilon_1 / \partial E_2^2 = -\epsilon_1 > 0$ самоподдерживающийся волноводный канал существует лишь при $\epsilon_\infty < 0$. С другой стороны, при $\epsilon_1 < 0$ возможно существование самоподдерживающегося плазменного волновода (электронная концентрация максимальна в максимуме поля E_2). Следовательно, под действием поля электромагнитной волны, распространяющейся вдоль направления сильного постоянного магнитного поля, происходит дополнительная ионизация слабо ионизированной плазмы и образование неоднородного самосогласованного плазменного слоя. Наиболее интересным является случай, когда такой эффект возникает в газе без предварительной ионизации ($\epsilon_\infty = 1$) в результате высокочастотного пробоя в поле волны. Можно показать, что явление самообразующегося плазменного волновода возможно и при произвольных магнитных полях, в частности, в случае резонансного пробоя $\omega \approx \omega_H$.

Автор благодарен В. И. Таланову за полезные обсуждения.

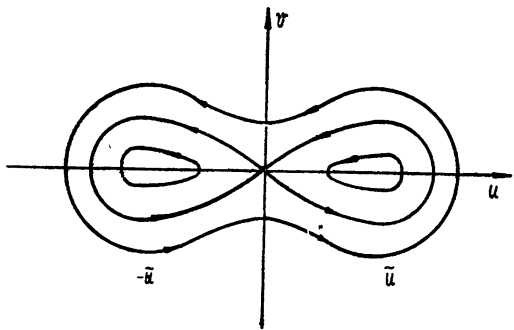


Рис. 2. Структура фазовой плоскости для $(k_0^2 - k^2) \epsilon_\infty < 0$.

Автор благодарен В. И. Таланову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
2. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 564 (1964).
3. R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
4. В. И. Таланов, Письма в редакцию, ЖЭТФ, 2, № 5, 218 (1965).
5. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1148 (1965).
6. А. Г. Литвак, М. И. Петелин, Е. И. Якубович, ЖТФ, 35, 108 (1965).
7. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация, 5, 70 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 ноября 1965 г.

УДК 538.3

ОБ ОДНОМ ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ И ВЕКТОРОВ ГЕРЦА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

С. Н. Столяров

В работах [1–3] было показано, как из уравнений электродинамики движущихся сред Минковского [4] можно получить уравнения для потенциалов в движущейся среде, если при этом использовать более удобную запись связи между компонентами полей F_{ik} и индукций H_{ik} [5] с помощью четырехмерного тензора четвертого ранга ϵ_{ikst} [6]. В настоящей заметке сообщается об одном более простом и наглядном способе вывода ковариантных уравнений для потенциалов в движущейся среде, который был также применен при выводе ковариантных уравнений для поляризационных потенциалов (векторов Герца) в движущейся среде.

Суть метода состоит в следующем. Пусть в однородной и изотропной среде с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ , движущейся со скоростью \mathbf{u} , задано некоторое распределение зарядов и токов с плотностями $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ соответственно. В этом случае уравнения для потенциалов A и φ в системе, где среда покоится (все величины в ней обозначаются штрихами), имеют известный вид.

$$\left(\Delta' - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) A' = - \frac{4\pi}{c} \mu j';$$

$$\left(\Delta' - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \varphi' = - \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho'$$

при дополнительном условии

$$\operatorname{div}' A' + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} = 0.$$

Запишем эти уравнения и дополнительное условие в четырехмерном виде, введя четырехмерные координату ($x_k = x, y, z, ict$), скорость ($u_k = \gamma u_x, \gamma u_y, \gamma u_z, ic\gamma$, где $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - u^2/c^2}$), плотность тока ($j_k = j_x, j_y, j_z, ic\rho$) и потенциал ($A_k = A_x, A_y, A_z, i\varphi$):

$$L' A'_\alpha = - \frac{4\pi}{c} \mu j'_\alpha; \quad L' A'_4 = - \frac{4\pi}{c} \mu \frac{1}{\varepsilon\mu} j'_4; \quad (1)$$

$$\partial'_k A'_k + \kappa \partial'_4 A'_4 = 0. \quad (2)$$

Здесь индекс α пробегает значения 1, 2, 3, а по дважды повторяющемуся индексу $k = 1, 2, 3, 4$ производится суммирование. При этом

$$L' = \partial_k'^2 + \kappa \partial_4'^2; \quad \kappa = \varepsilon\mu - 1; \quad (3)$$

$$\partial'_k = \frac{\partial}{\partial x'_k}; \quad \partial_k'^2 = (\partial'_k \partial'_k).$$

Наличие единственного четырехмерного вектора u_k однозначно определяет в лабораторной системе (относительно которой среда движется со скоростью u) релятивистски-инвариантный вид оператора L' и дополнительного условия Лоренца (2):

$$L = \partial_k^2 - \kappa c^{-2} (u_k \partial_k)^2; \quad (4)$$

$$\partial_k A_k - \kappa c^{-2} (u_l \partial_l) (u_k A_k) = 0; \quad (5)$$

здесь и далее по повторяющимся индексам i, k, j, l и т. д. проводится суммирование от 1 до 4.

Что же касается записи в релятивистски-инвариантном виде уравнений для потенциалов (1), то этому мешает имеющийся во втором уравнении множитель $1/\varepsilon\mu$. В этой связи будем считать, что связь компонент 4-потенциала A_l и тока j_k в среде имеет тензорный характер:

$$A_l = \left(- \frac{4\pi}{c} \mu L^{-1} \right) S_{lk} j_k, \quad (6)$$

где S_{ik} — четырехмерный тензор второго ранга, вид которого в системе покоя определяется путем сравнения выражений (1) и (6):

$$S'_{ik} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\varepsilon\mu \end{Bmatrix}.$$

Используя известные матрицы преобразований Лоренца или исходя из соображений релятивистской инвариантности, можно получить выражение для компонент тензора S_{ik} в лабораторной системе:

$$S_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\kappa c^{-2}}{1 + \kappa} u_i u_k, \quad (7)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. В результате уравнения для потенциалов системы зарядов и токов в движущейся среде принимают вид

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial_k^2} - \kappa c^{-2} (u_k \partial_k)^2 \right\} A_i = - \frac{4\pi}{c} \mu \left[\delta_{ik} + \frac{\kappa c^{-2}}{1 + \kappa} u_i u_k \right] j_k \quad (8)$$

при дополнительном условии (5).

С помощью изложенного метода можно получить также релятивистски-инвариантные уравнения для поляризационных потенциалов Π (электрический вектор Герца) и Π^* (магнитный вектор Герца) в движущейся среде. Для этого необходимо записать в четырехмерном виде известные соотношения в покоящейся среде [7]:

$$j' = \frac{\partial P'}{\partial t'} + c \operatorname{rot}' M', \quad \rho' = -\operatorname{div}' P'; \quad (9)$$

$$A' = \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi'}{\partial t'} + \operatorname{rot}' \Pi^*; \quad \varphi' = -\frac{1}{\epsilon \mu} \operatorname{div}' \Pi'$$

и

$$\left(\Delta' - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \Pi' = -4\pi \mu P';$$

$$\left(\Delta' - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \Pi^* = -4\pi j M', \quad (10)$$

где P' и M' — электрическая и магнитная поляризация в системе покоя, т. е. электрический и магнитный момент единицы объема соответственно.

Тогда, если ввести четырехмерные антисимметричные тензора поляризаций P_{ij} и поляризационных потенциалов Π_{ij} в виде [3]

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & M_z, & -M_y, & iP_x \\ -M_z, & 0, & M_x, & iP_y \\ M_y, & -M_x, & 0, & iP_z \\ -iP_x, & -iP_y, & -iP_z, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & \Pi_z^*, & -\Pi_y^*, & i\Pi_x \\ -\Pi_z^*, & 0, & \Pi_x^*, & i\Pi_y \\ \Pi_y^*, & -\Pi_x^*, & 0, & i\Pi_z \\ -i\Pi_x, & -i\Pi_y, & -i\Pi_z, & 0 \end{pmatrix},$$

уравнения (10) можно записать в ковариантной форме:

$$\left\{ \partial_k^2 - \kappa c^{-2} (u_k \partial_k)^2 \right\} \Pi_{ij} = -4\pi \mu P_{ij}. \quad (11)$$

В то же время нетрудно видеть, что связь (9) между компонентами потенциалов A, φ и векторов Герца Π и Π^* записывается с помощью тензора S_{ik} в виде

$$A_i = S_{ik} \partial_l \Pi_{kl},$$

где S_{ik} определяется соотношением (7).

Полученные уравнения полностью определяют в движущейся среде поля системы, обладающей дипольным электрическим и магнитным моментом.

Однако следует подчеркнуть [9], что выведенные уравнения (11) справедливы лишь в случае, когда области спонтанной намагниченности и поляризации покоятся относительно движущейся среды или когда имеется движущийся точечный диполь. В противном случае из-за поляризации или намагничивания среды внутри области, занимаемой поляризованным или намагниченным объемом, дипольные моменты уже не будут подчиняться обычным кинематическим преобразованиям в вакууме [4], и исходные уравнения (10) примут более сложный вид [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 32, 1244 (1957); Сб. Некоторые вопросы теоретической физики, Атомиздат, М., 1958.
2. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
3. Б. М. Болотовский, Диссертация, ФИАН, М., 1965.

4. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
5. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, § 57, ГИТТЛ, М., 1957.
6. И. Е. Тамм, ЖРФХО, серия физ., 56, 248 (1924).
7. И. М. Франк, Сб. Памяти С. И. Вавилова, изд. АН СССР, М., 1952.
8. Я. И. Френкель, Электродинамика, 1, 2, ГТТИ, М.—Л., 1934—1935.
9. В. Л. Гинзбург, Сб. Памяти С. И. Вавилова, изд. АН СССР, М., 1952

Поступила в редакцию
6 ноября 1965 г.

УДК 621.385.64

К ВОПРОСУ О КОРРЕЛЯЦИИ ШУМОВ В МАГНЕТРОНАХ В ПРЕДОСЦИЛЛЯЦИОННОМ РЕЖИМЕ

М. И. Кузнецов, Ю. А. Яблоков

В настоящей заметке приводится методика и описывается измерительная аппаратура, с помощью которых можно качественно определять статистические зависимости (корреляции) флуктуаций в магнетронах. В качестве исходного используется косвенный метод измерения коэффициента корреляции (или автокорреляции), известный в литературе как метод диаграмм рассеяния [1]. Он применим преимущественно для стационарных флуктуационных процессов и в том числе для процессов, имеющих место в магнетронах в предосцилляционных режимах. С помощью этого метода измеряются коэффициенты корреляции и автокорреляции шумовых ЭДС, наводимых на различные точки поверхности экспериментального цилиндрического неразрезного магнетрона.

1. **Методика измерений.** Метод измерения коэффициента корреляции с помощью диаграмм рассеяния сводится к следующему. Если на пластины осциллографа подать два флуктуирующих напряжения, то вследствие постоянно меняющихся амплитуд и фаз шумовых сигналов на экране осциллографа будет заполнена некоторая площадь, интенсивность свечения каждой точки которой пропорциональна функции вероятности $P(a_1 a_2)$ ($a_1 a_2$ — амплитуды поданных флуктуационных напряжений). Функция вероятности позволяет рассчитать корреляционную функцию

$$B(a_1 a_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_1 a_2^* P(a_1 a_2) da_1 da_2 \quad (1)$$

Если на пластины X осциллографа подать флуктуационное напряжение $a_1(t)$, а на пластины Y — это же напряжение, но сдвинутое на время τ , то функция автокорреляции примет вид

$$B(a_1(t) a_1(t + \tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(t) a_1(t + \tau) P(a_1(t) a_1(t + \tau)) da_1(t) da_1(t + \tau). \quad (2)$$

Если поданный сигнал имеет гауссово амплитудное распределение, то диаграмма рассеяния представляет эллипс с плавно спадающими по яркости границами. Определим размеры эллипса границами равной интенсивности. Зависимая от τ часть функции корреляции (2) (коэффициент корреляции) выражается через размеры эллипса следующим образом

$$\Psi(\tau) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}, \quad (3)$$

где b и a — большая и малая оси эллипса. Следовательно, изменяя время задержки τ , можно определить коэффициент корреляции и в дальнейшем по виду функции $\Psi(\tau)$ найти, пользуясь теоремой Винера—Хинчина (1), статистический спектр процесса.

2. Конструкция лампы и измерительной установки. Для измерений был сконструирован и изготовлен специальный цилиндрический магнетрон с неразрезным анодом, схематический чертеж которого изображен на рис. 1 (отношение радиусов r_a/r_k составляет 2,9). В анодном цилиндре магнетрона вырезаны четыре круглых отверстия диаметром 6 мм, в которые помещены измерительные диски, имеющие диаметр 4 мм. Три измерительных диска расположены в плоскости поперечного сечения экспериментальной лампы; угловые расстояния между ними равны соответственно 75°, 105°, 180°. Четвертый диск смещен на расстояние 30 мм по образующей анода магнетрона (относительно диска 4 на рис. 1).

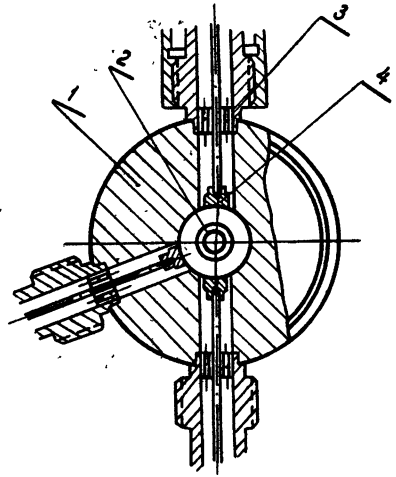


Рис. 1. Цилиндрический магнетрон с неразрезным анодом:

1 — анод, 2 — катод, 3 — керамическая шайба, 4 — измерительный диск.

Токи, наводимые на любую пару измерительных дисков, поступают на измерительную установку — двухканальный супергетеродинный приемник, выходные сигналы с которого подаются соответственно на вертикальные и горизонтальные пластины осциллографа. Время задержки одного из сигналов определяется длиной линии задержки и сдвигом фаз в экспериментальной лампе. Ясно, что если колебания имеют характер вращающихся по азимуту волн, то на измерительные диски наводятся токи со сдвигом фаз, зависящим только от углового расстояния между дисками и номера колебаний n . В частности, для лампы за рис. 1 фазовые сдвиги и эквивалентные

длины задержки должны соответствовать величинам, указанным в таблице 1.

Таблица 1

n	Диски разнесены на 75°		Диски разнесены на 105°	
	φ (град)	l_T (см)	φ (град)	l_T (см)
1	75	62	105	88
2	150	124	210	176

Неравномерность частотных характеристик каналов усилителей приемника и осциллографа приводит к разному фазовому набегу в усилителях и в конечном счете к ошибке в измерении полуосей эллипса. В частности, в используемой измерительной установке фазовая ошибка составляла 15°, что привело к заниженному значению коэффициента корреляции на величину 0,13. Однако ошибки за счет неидентичности фазовых характеристик усилителей нетрудно

3. Экспериментальные результаты. На рис. 2, 3 приводятся фотографии диаграмм рассеяния для сигналов, снятых с дисков, разнесенных на угол 105°, при значениях $H = 2H_{кр}$.

Фотографии на рис. 2 получены для $n = 1$ (n — номер колебания из соотношения Хартри), т. е. для значения времени задержки τ , ограниченного пределами

$$0 < \tau < \frac{1}{f}.$$

Фотографии рис. 3 получены соответственно для значений $n = 2$ и τ , ограничен-

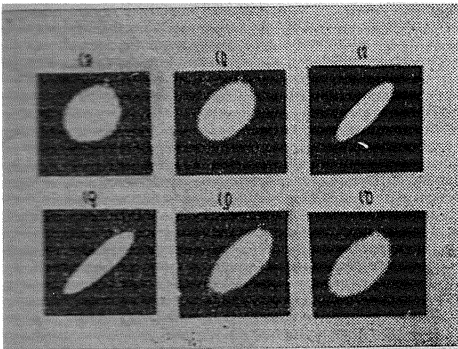


Рис. 2.

ного пределаи $\frac{1}{f} < \tau < \frac{2}{f}$. Результаты обработки осциллограмм рис. 2 и рис. 3 сведены в таблицу 2.

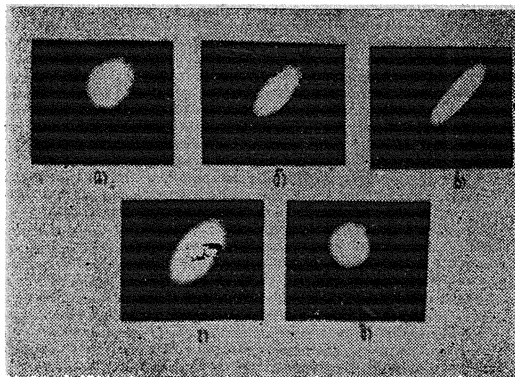


Рис. 3.

Таблица 2

Рис.	l (см)	D	d	Ψ	Примечание
2а	125	25	20	0,22	$n = 1$ Рис. 4а
2б	110	26	17	0,4	
2в	95	30	9	0,84	
2г	90	36	9	0,88	
2д	75	31	15	0,6	
2е	55	30	19	0,43	
3а	145	30	25	0,175	$n = 2$ Рис. 4б
3б	170	36	20	0,53	
3в	195	40	12	0,84	
3г	212	35	17	0,6	
3д	236	25	24	0,07	

В таблице приняты следующие обозначения: D , d — большая и малая оси эллипса (в отн. ед.), l — длина линии задержки в см, Ψ — коэффициент корреляции.

Следует заметить, что аналогичные измерения были проведены с любых пар измерительных дисков, а также в большом диапазоне значений $H = (1,5 - 3,5) H_{кр}$. Однако как вид диаграмм рассеяния, так и рассчитанные значения коэффициентов корреляции совпадают с результатами, описанными выше. Для большей наглядности зависимость коэффициента корреляции от эффективной длины линии задержки изображена на рис. 4.

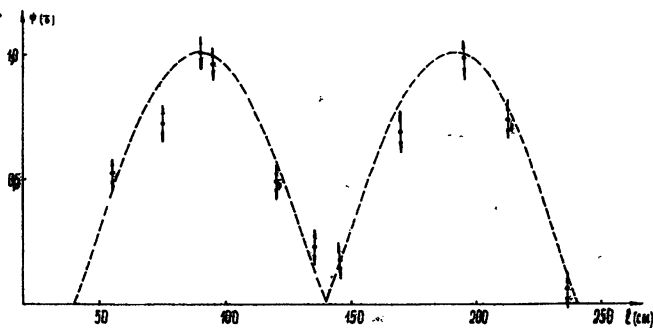


Рис. 4.

4. Обсуждение полученных результатов. Как видно из рис. 4, коэффициенты корреляции по форме напоминают отрезки синусоид, максимальные значения которых в пределах ошибки измерений близки к единице, минимальные значения с точностью 5% равны нулю. Это значит, что флуктуации, снимаемые с любых дисков испытательной лампы, практически почти когерентны, но сдвинуты по фазе. Когерентность сохраняется, по крайней мере, за время двух полных оборотов электронного облака. Таким образом, флуктуации в магнетроне являются шумовыми вращающимися волнами простейшего заряда с медленно флуктуирующими амплитудами и фазами.

Аналогичные эксперименты были проведены для сигналов, снимаемых с дисков, расположенных по образующей магнетрона. Оказалось, что снимаемые напряжения синфазны. Это позволяет сделать вывод, что вращающиеся в магнетроне шумовые волны имеют вид плоских волн вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлетон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, 1, М., 1961.

Поступила в редакцию
28 января 1966 г.

УДК 531.391.5

УСТОЙЧИВОСТЬ В БОЛЬШОМ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Е. Ф. Сабаев

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом широко применяются в теории автоматического регулирования, а также в экономических, биофизических и ряде других исследований. С этим связано повышенное внимание к уравнениям такого вида (см., например, [1-4]).

Ниже рассматривается устойчивость в большом стационарного решения уравнений с отклоняющимся аргументом первого порядка:

$$\frac{d}{dt} x = X(x, \theta), \quad (1)$$

где X — функция, а θ — линейный функционал,

$$\theta = \int_0^h x(t - \theta) df(\theta). \quad (2)$$

Следуя [5], введем функциональное пространство $\{x(-\theta)\} (0 < \theta < h)$ с нормой $\|x\| = \sup_{0 < \theta < h} |x(-\theta)|$.

Пусть $X(0, 0) = 0$; тогда $x = 0$ является тривиальным решением. Исследуем его устойчивость, предполагая, что

- а) $X(x, \theta)$ удовлетворяет условиям Липшица по переменным x и θ ;
б) $f(\theta)$ — функция конечного изменения, непрерывная вместе с производной первого порядка.

Функцию $f(\theta)$, очевидно, можно представить в виде разности двух неубывающих функций: $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \geq 0$. Обозначим $I_1 = \int_0^h df_1(\theta)$ и $I_2 = \int_0^h df_2(\theta)$. Теперь пусть в какой-либо момент времени t $\beta < x(t - \theta) < \alpha$ ($0 < \theta < h$). Тогда из (2) следует неравенство

$$C_1 = \beta I_1 - \alpha I_2 < \theta < \alpha I_1 - \beta I_2 = C_2, \quad (3)$$

согласно которому

$$J(x, \alpha, \beta) \leq \frac{dx}{dt} \leq S(x, \alpha, \beta). \quad (4)$$

Здесь

$$J(x, \alpha, \beta) = \inf_{C_1 < \theta < C_2} X(x, 0);$$

$$S(x, \alpha, \beta) = \sup_{C_1 < \theta < C_2} X(x, 0).$$

Обозначим

$$(\alpha : \alpha \geq 0, \beta : \beta \leq 0) = M,$$

$$((\alpha, \beta) : S(\alpha, \alpha, \beta) \geq 0, (\alpha, \beta) \in M) = M_1,$$

$$((\alpha, \beta) : J(\beta, \alpha, \beta) \leq 0, (\alpha, \beta) \in M) = M_2.$$

Граничными точками множеств M_1 и M_2 являются граничные точки множества M и точки (α, β) , удовлетворяющие одному из уравнений

$$S(\alpha, \alpha, \beta) = 0, \quad J(\beta, \alpha, \beta) = 0.$$

Поскольку $S(x, \alpha, \beta)$, $J(x, \alpha, \beta)$ — монотонные функции α и β , первое из этих уравнений можно разрешить относительно β , а второе относительно α , т. е. записать

$$\beta = \Gamma_1(\alpha), \quad \alpha = \Gamma_2(\beta).$$

Очевидно,

$$(\alpha : \alpha \geq 0, \beta : \beta \leq \Gamma_1(\alpha)) = M_1,$$

$$(\alpha : \alpha \geq \Gamma_2(\beta), \beta : \beta \leq 0) = M_2.$$

Теорема 1. Пусть дополнение множества $M_1 \cup M_2$ до M , обозначаемое в дальнейшем как M_3 , есть не пустое множество, и пусть точка $(0, 0)$ принадлежит его замыканию, т. е. $(0, 0) \in M_3$. Тогда тривиальное решение уравнений (1) и (2) $x = 0$ устойчиво.

Доказательство. Пусть заданы момент времени $t = t_0$ и некоторая кусочно-непрерывная начальная функция $x_0(-\vartheta)$, удовлетворяющая условию

$$\beta_0 \leq x_0(-\vartheta) \leq \alpha_0 \quad (0 \leq \vartheta \leq h).$$

Тогда существует единственное решение уравнений (1) и (2) $x(t)$, непрерывное при $t \geq t_0$, а при $t < t_0$ совпадающее с $x_0(-\vartheta)$, $\vartheta = t_0 - t$ [5]. Следовательно, если при $t \geq t_0$ решение выходит из интервала $[\beta_0, \alpha_0]$, то обязательно найдется такое $t_1 \geq t_0$, что

$$\beta_0 \leq x(t) \leq \alpha_0 \quad (t < t_1) \quad (5)$$

и

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=t_1} > 0, \quad x(t_1) = \alpha_0 \quad (6)$$

или

$$\left(\frac{dx}{dt} x \right)_{t=t_1} < 0, \quad x(t_1) = \beta_0. \quad (7)$$

Таким образом,

$$S(\alpha_0, \alpha_0, \beta_0) \geq 0 \quad (8)$$

в силу (4), (5) и (6) или

$$J(\beta_0, \alpha_0, \beta_0) \leq 0 \quad (9)$$

в силу (4), (5) и (7).

Теперь пусть $(\alpha_0, \beta_0) \in M_3$. Тогда $\beta_0 \leq x(t) \leq \alpha_0$ при всех $t \geq t_0$, так как обратное предположение в силу условий теоремы и неравенств (8) и (9) приводит к противоречию. Поскольку точка $(0, 0)$ принадлежит замыканию множества M_3 , можно указать последовательность $\{\alpha_n, \beta_n\}$ такую, что в любой окрестности точки $(0, 0)$ найдется, по крайней мере, одна точка, принадлежащая $\{\alpha_n, \beta_n\}$, и, такую, что любой ее элемент принадлежит M_3 . Следовательно, по любому наперед заданному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\|x\| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$, если только $\|x_0\| < \delta$. Доказательство закончено.

Теорема 2. Пусть M_3' — любое не пустое односвязное подмножество множества M_3 и точка $(0, 0)$ принадлежит его замыканию. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, если только $\exists \epsilon \leq x_0(-\delta) \leq a$ ($0 \leq \delta \leq h$, $(a, \beta) \in M_3'$).

Доказательство можно провести, основываясь на неравенстве (4), с помощью принципа сжатых отображений.

Отметим, что в случае, когда $X(x, \theta)$ линеаризуема в окрестности стационарного состояния, $\theta = x(t - h)$ и $h \gg 1$, полученные выше достаточные условия устойчивости оказываются близкими к необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Мышкис, УМН, 4, 5 (33), 99 (1949).
2. А. Д. Мышкис, УМН, 5, 2 (36), 148 (1950).
3. Л. Э. Эльсгольц, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами, М., Наука, 1965.
4. В. Хан, Сб. Математика, № 5—6, 73 (1961).
5. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз, 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 декабря 1965 г.