

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Гинзбург В. Л., Озерной Л. М. О роли когерентного плазменного радиоизлучения для квазаров и остатков сверхновых звезд	221
Розенберг А. Д., Островский И. Е., Калмыков А. И. Сдвиг частоты при рассеянии радиоизлучения взволнованной поверхностью моря	234
Гиорградзе Н. П. О нелинейных колебаниях магнитоактивной плазмы	241
Кондратенко А. Н., Лиокумович В. И., Рыбин П. Н. К нелинейной теории электромагнитных волн в ограниченной плазме	261
Кондратенко А. Н., Мирошниченко В. И. Кинетическая теория прохождения электромагнитной волны через плазменный слой, находящийся в магнитном поле	272
Ильин С. Д., Петрусев С. С., Чернетский А. В. Метод волноводного дискриминирования	279
Ильин С. Д., Петрусев С. С., Чернетский А. В. Разделительное устройство для многочастотного СВЧ зондирования плазмы	287
Комиссаров В. М. Статистика лучей в плоскостной среде со случайной неоднородностью	292
Мухамедгалиева А. Ф., Ораевский А. Н., Страховский Г. М. Исследование молекулярного генератора с усилителем «молекулярного звона»	302
Соколов В. М. и Тавгер Б. А. О модели неоднородной намагниченности в теории спин-волнового резонанса в тонкой ферромагнитной пленке	308
Малахов А. Н., Бочков Г. Н. Статистическая устойчивость осцилляторного движения системы с одной степенью свободы. I	314
Кириянов К. Г. О влиянии случайных воздействий на систему с самонастройкой	324
Наймушин М. П. Повышение уровня излучения щели на цилиндре в области тени	336
Третьяков О. А., Черняков Э. И., Шестопапов В. П. К теории эффекта Смита —Парселла	341
Данович И. А. Анализ фокусировки и устойчивости интенсивных электронных пучков в периодических магнитных полях	351
Беспалова Л. В., Метрикин В. С. К теории двухмассовой модели виброударника	362
Горохов В. А. О периодических движениях систем с ударным взаимодействием	376
Хаскельберг Л. Г. Влияние люфта между сервомотором и регулирующим органом на процесс непрямого регулирования	388
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. Дополнительное поглощение космического радиоизлучения в ионосфере во время ионосферного возмущения 18.4.1965 г.	399
Чаевский Е. В. Рассеяние волн площадкой с нормальным распределением случайных отклонений	400
Файнштейн С. М. Об усилении электромагнитных волн потоком заряженных частиц при переходном излучении на резкой границе двух сред	403
Бункин Ф. В., Конев Ю. Б. О флуктуационно-дисперсионных соотношениях	404
Гилянский И. А. Авторезонансное ускорение частицы в неоднородной среде	407
Таланов В. И. Автомодельные волновые пучки в нелинейном диэлектрике	410
Янкаускас З. К. Радиальные распределения поля в самософокусировавшемся пучке света	412
Дудник Р. А. О взаимодействии электронных потоков с полями пространственных гармоник двумернопериодических замедляющих систем	415
Соболь Г. А., Соболь А. П., Медюх М. М. и Галаец И. С. О методе детекторных характеристик при средних давлениях	417
Соболь Г. А., Соболь А. П., Коземчук Р. С.; Мережко Н. Ф. О двухзондовом методе детекторных характеристик	419
Бояринов В. С. К вопросу возникновения радиальных колебаний вала с ударами в шарикоподшипниках	421
Ерин В. Г. Приближенный синтез оптимальной системы второго порядка с регулируемыми коэффициентами	423

УДК 523.164.4

О РОЛИ КОГЕРЕНТНОГО ПЛАЗМЕННОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ КВАЗАРОВ И ОСТАТКОВ СВЕРХНОВЫХ ЗВЕЗД

В. Л. Гинзбург, Л. М. Озерной

Обсуждается возможность интерпретации радиоизлучения «компактного» длинноволнового радиоисточника в Крабовидной туманности и части радиоизлучения квазаров с помощью когерентного плазменного механизма. Для «компактного» источника в Крабовидной туманности это предположение вполне вероятно даже без учёта влияния магнитного поля. В случае квазаров сантиметровое и дециметровое переменное радиоизлучение может иметь когерентную плазменную природу, по-видимому, лишь при учёте влияния магнитного поля. В Приложении анализируется вопрос о реабсорбции некогерентного магнитотормозного излучения в радиоисточниках с однородным и неоднородным магнитным полем.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, наблюдается три типа космического радиоизлучения с непрерывным спектром: магнитотормозное излучение, тормозное излучение (свободно-свободные переходы) и когерентное плазменное излучение. При этом лишь магнитотормозное излучение может возникнуть уже в вакууме. Именно поэтому оно и играет доминирующую роль в галактиках и оболочках сверхновых звезд, где концентрация электронов n мала.

Действительно, для оптически тонкого слоя интенсивность тормозного излучения $J_{\nu, b} \propto n^2 T^{-1/2}$, где T — температура газа (для неравновесного распределения электронов $T \sim E \kappa^{-1}$; E — характерная кинетическая энергия электронов, κ — постоянная Больцмана). Для толстого слоя интенсивность $J_{\nu, b} = 2\nu^2 \kappa T c^{-2}$ и лимитируется значением T . Легко убедиться в том, что интенсивность $J_{\nu, b}$ для радиогалактик, квазаров и оболочек сверхновых звезд при принимаемых обычно значениях n и T значительно меньше наблюдаемой.

Когерентным плазменным радиоизлучением мы называем излучение, возникающее в плазме при возбуждении ее пучками частиц, ударными волнами и т. д. Такое излучение связано с «коллективными» (когерентными) волнами, в плазме и его интенсивность не находится в прямой связи с температурой плазмы T (уже пример радиостанций наглядным образом показывает, что мощность когерентного излучения не имеет никакого отношения к температуре материалов, из которых сделаны передатчик и антенна). Когерентное плазменное радиоизлучение генерируется Солнцем и, возможно, вспыхивающими звездами (этим механизмом объясняются солнечные вспышки II и III типов, а может быть и некоторые другие; см [1-4]).

Характерная частота для такого радиоизлучения ω_c определяется, при отсутствии или малой роли магнитного поля, значением плазменной частоты

$$\omega_L = 2\pi\nu_L = \left(\frac{4\pi e^2 n}{m_e} \right)^{1/2} = 5,64 \cdot 10^4 n^{1/2} \text{ гц.} \quad (1)$$

При наличии поля ω_c зависит также от значения гирочастоты $\omega_H = 2\pi\nu_H = eH/m_e c = 1,76 \cdot 10^7 H$ гц; например, в поперечном магнитном поле $\omega_c \sim (\omega_L^2 + \omega_H^2)^{1/2}$. Частота ω_c зависит, помимо ω_L и ω_H , также от параметра kv , где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число и v — характерная скорость, например, скорость потока плазмы; поэтому частота ω_c может существенно превосходить частоты ω_L и ω_H (по сути дела, это связано с эффектом Доплера). Однако в реальных астрофизических условиях неравенство $\omega_c \gg (\omega_L^2 + \omega_H^2)^{1/2}$ вряд ли может иметь место, особенно когда речь идет об излучении из большой области и в течение достаточно длительного времени. Следовательно, для частот $\omega \gg \omega_c$ плазменный механизм практически не работает. В то же время для галактик и оболочек сверхновых звезд $\nu_L \leq 10^6$ гц ($\lambda_L = c/\nu_L \gtrsim 300$ м) и $\nu_H \leq 10^4$ гц. В этой связи плазменное радиоизлучение, как и тормозное, не может быть ответственным за наблюдаемое излучение упомянутых объектов в диапазоне метровых и более коротких волн.

Мы повторили эти в достаточной мере очевидные соображения, чтобы сразу же стало ясным возможное изменение ситуации при переходе к квазарам и «компактному» источнику в Крабовидной туманности*. В самом деле, наблюдаемая электронная концентрация в эмиссионной оболочке квазара 3С 273-В с размерами $r \sim 10^{19}$ см в среднем порядка 10^7 см $^{-3}$ ($\nu_L \sim 3 \cdot 10^7$ гц [9, 10]). В то же время из предварительных данных о существовании вариаций блеска этого источника с характерным периодом порядка недели и по сведениям об «изломе» инфракрасного спектра на частоте $\nu \simeq 10^{13}$ гц можно заключить [11], что излучающее свет ядро квазара имеет размер $r \simeq 10^{16}$ см. Следовательно, на границе ядра квазара вполне возможно существование плазмы с концентрацией $n \leq 10^{16}$ см $^{-3}$. (Например, при массе ядра $\sim 10^8 M_\odot$ и $r \sim 10^{16}$ см среднее значение $n \sim 3 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$, так что $\nu_L \leq 10^{12}$ гц.) С этой точки зрения сантиметровое и дециметровое излучение квазара 3С 273-В [12, 13] могло бы, в принципе, исходить из некоторой области радиусом 10^{16} см $\leq r \leq 10^{19}$ см, где концентрация $n \sim 10^{10} \div 10^{12}$ см $^{-3}$. Что касается «компактного» радиоисточника в Крабовидной туманности, радиус которого не превосходит $r \sim 10^{15}$ см (см. [5]), то наблюдаемая полоса частот лежит в пределах $(2,5 \div 4) \cdot 10^7$ гц [5, 14], отвечающих при $\nu \sim \nu_L$ концентрации $n \sim 10^7 \div 10^8$ см $^{-3}$. Предположение о существовании такой «короны», скажем, вокруг остатка сверхновой звезды, насколько нам представляется, ничему не противоречит.

Итак, для квазаров и других радиоисточников компактного типа когерентный плазменный механизм радиоизлучения нет оснований считать неэффективным без специального анализа. При этом, конечно, важно выяснить, сталкиваются ли с затруднениями наиболее естественные модели излучения, основанные на некогерентном магнитотормозном механизме. Как показано в Приложении, для компактного источника в Крабовидной туманности некогерентный магнитотормозной механизм излучения невозможен. Для квазара СТА-102, если его радиоизлучение на частоте $\nu \simeq 10^9$ гц действительно существенно меняется за время порядка 100 дней [15], некогерентная магнитотормозная модель также противоречива. Что же касается квазара 3С 273-В, то наблюдаемые изменения радиопотока [12, 13], по-видимому, еще совместимы с магнитотормозной природой радиоизлучения, но приводят к энергетическим трудностям.

* Мы называем «компактным» источник радиоизлучения в Крабовидной туманности, обнаруженный недавно [5] в результате наблюдений мерцаний, обусловленных дифракцией на неоднородностях межпланетной плазмы (см. [6–8]).

Для обсуждения этих вопросов первостепенное значение приобретает анализ реабсорбции. При последовательной постановке задачи нельзя произвольно задавать спектр электронов в источнике, особенно когда реабсорбция существенна. Однако принять во внимание трансформацию спектра электронов в источнике нелегко (помимо реабсорбции может оказаться необходимым учет и других факторов: поглощения в нерелятивистской плазме, отличия от единицы показателя преломления плазмы в излучающей области, роли границ и формы источника и т. п.). Подробное обсуждение этих вопросов здесь невозможно, но в Приложении оценена роль реабсорбции для простейших моделей, в том числе неоднородных (изложение соответствующих приближенных результатов кажется полезным, поскольку в отношении роли неоднородности поля мы пришли к выводам, противоположным [16]). Заметим также, что связанная с попыткой преодолеть трудности магнитотормозной теории излучения квазаров гипотеза [16] о квазарах как ближних объектах, выброшенных из Галактики, представляется нам по целому ряду соображений невероятной.

1. О КОГЕРЕНТНОМ ПЛАЗМЕННОМ МЕХАНИЗМЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Начнем рассмотрение с наиболее простого варианта плазменного механизма, в котором радиоизлучение происходит на частотах $\nu \sim \nu_L$. Тем самым мы считаем выполненным неравенство

$$\omega \sim \omega_L \gg \omega_H = eH/m_e c = 1,76 \cdot 10^7 H \text{ гц}, \quad (2)$$

что позволяет ограничиться рассмотрением изотропной плазмы.

Пусть имеется плазменный шар с концентрацией электронов $n(r)$, падающей с расстоянием r от центра. Плазменные волны с частотой $\omega_L(r)$ могут распространяться без катастрофического затухания лишь в шаровом слое толщиной L , на которой изменение ω_L не превосходит самого значения $\omega_L(r)$. В силу (1) это означает, что $L \leq n(dn/dr)^{-1}$.

Плотность энергии и поток плазменных волн равны $w_{пл} = E_0^2/8\pi$ и $S_{пл} = \sqrt{3} v_T (1 - \omega_L^2 \omega^{-2})^{1/2} w_{пл}$, где $v_T = (\kappa T/m_e)^{1/2} = 3,9 \cdot 10^5 T^{1/2}$ и E_0 — амплитуда плазменной волны. Плазменные волны трансформируются в поперечные волны в результате «взаимодействия» нормальных волн в неоднородной среде и путем рассеяния на флуктуациях концентрации [1, 2, 4, 17]. При релеевском рассеянии, не сопровождающемся изменением частоты, с сечением, равным половине томсоновского $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2$, поток радиоволн, испускаемый единицей объема плазмы*,

$$\Delta S = \frac{e^4 n (1 - \omega_L^2 \omega^{-2})^{1/2}}{6 m_e^2 c^3} E_0^2 = \frac{\sigma_T n}{2\sqrt{3} v_T} \frac{c}{v_T} S_{пл}. \quad (3)$$

Отсюда полный поток радиоволн, создаваемый в упомянутом слое L , равен $S = \Delta S \cdot L$, и мы приходим к коэффициенту трансформации продольных волн в поперечные:

$$Q = \frac{S}{S_{пл}} = \frac{\sigma_T n}{2\sqrt{3} v_T} \frac{c}{v_T} L \sim 2 \cdot 10^{-28} \frac{v_L^2 L}{T^{1/2}}. \quad (4)$$

* Мы ограничиваемся здесь учетом рассеяния на тепловых флуктуациях. Фактически можно ожидать еще большего рассеяния на «шумовом» спектре плазменных волн, возбужденных потоками в плазме, на фронтах ударных волн и т. п. Для дальнейшего, однако, значение Q мало существенно.

Элементарный расчет, приводящий к (3) и (4), применим, однако, лишь при $Q \ll 1$, хотя в общем случае $Q \leq 1$.

На частоте $\nu \sim \nu_L$ эффективная температура радиоизлучения $T_{\text{эфф}}$, исходящего из слоя толщины L , определяется соотношением $S = 2\pi\nu^2 \times T_{\text{эфф}} \Delta\nu c^{-2}$; здесь $\Delta\nu \sim \nu_L$ — интервал частот, излучаемых слоем. Отсюда очевидно, что

$$F_\nu = \frac{2\pi\nu^2 \times T_{\text{эфф}}}{c^2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-\tau} \sim \frac{\sqrt{3} \nu_T Q \omega_{\text{пл}}}{\nu} \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-\tau}, \quad (5)$$

где F_ν — спектральная плотность потока радиоизлучения на расстоянии R от объекта; множитель $e^{-\tau}$ учитывает поглощение излучения в плазме на пути от слоя с $\nu_L \sim \nu$ до границ объекта.

Для водородной плазмы с температурой T^* имеем (см., например, [17])

$$\tau = \int \mu dr, \quad \mu = \frac{\omega_L^2 \nu_{\text{эфф}}}{c\omega^2(1-\omega_L^2\omega^{-2})^{1/2}}, \quad (6)$$

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{5,5n}{T^{3/2}} \times \begin{cases} \ln\left(220 \frac{T}{n^{1/3}}\right), & T < 3 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{K} \\ \ln\left(10^4 \frac{T^{2/3}}{n^{1/3}}\right), & T > 3 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{K} \end{cases}$$

Для оценок в (6) можно положить $\omega \sim \omega_L$, $(1 - \omega_L^2 \omega^{-2})^{1/2} \sim 1$; тогда, пренебрегая практически несущественной разницей в логарифмических факторах, имеем

$$\tau(\nu) \sim \frac{\nu_{\text{эфф}} L}{c} \sim 2 \cdot 10^{-18} \frac{\nu^2 \ln(10^5 T \nu^{-2/3})}{T^{3/2}} L, \quad (7)$$

где L — характерное расстояние, проходимое волной на пути из излучающего слоя. По смыслу оценки, на расстоянии L число $\nu_{\text{эфф}}$ (а значит и концентрация n) изменяется в $2 \div 3$ раза. Поэтому по порядку величины обозначенные одинаково длины L в (4) и (7) совпадают.

Как ясно из дальнейшего, учет влияния магнитного поля, которым мы пока пренебрегали, может быть существенен. Видоизменение соответствующих выражений обсуждается ниже.

2. ОБСУЖДЕНИЕ

Из формулы (5) видно, что оценка потока радиоизлучения F , при заданных r , R , ν зависит от Q , $\omega_{\text{пл}}$ и τ .

Коэффициент трансформации Q в (4) может, как нетрудно усмотреть, оказаться большим. Фактически это означает, что Q в некоторых случаях может быть близок к единице.

Для оценки плотности энергии плазменных волн $\omega_{\text{пл}}$ рассмотрим их генерацию ударными волнами. Наличие перманентной генерации ударных волн, связанных с выбросами потоков плазмы, представляется весьма вероятным в рассматриваемых нестационарных объектах [11]. Механизмом неустойчивости является дрейф надтепловых электронов, возникающий в плоскости фронта ударной волны в присутствии неоднородного магнитного поля [3]. Достижимая плотность энергии плазмен-

* По существу T есть электронная температура.

ных волн оценивалась в [3] значением $w_{пл} \approx n \kappa T$, но более подробный расчет [18], учитывающий нелинейное взаимодействие волн, приводит к выражению

$$w_{пл} \approx \frac{(2\pi)^{5/3}}{8\pi \sqrt{3}} \left(\frac{m_e}{2m_i}\right)^{1/3} \left(\frac{v_0}{v_T}\right)^3 \ln \left[\frac{\sqrt{3}}{24\pi} \left(\frac{m_e}{2m_i}\right)^{1/3} \left(\frac{v_0}{v_T}\right)^3 \frac{v_0 n \kappa T}{m_e \omega_L^3} \right] n \kappa T. \quad (8)$$

Максимальную скорость дрейфа электронов на фронте ударной волны v_0 , которая при небольших числах Маха $\tilde{M} \leq 2$ (но еще таких, что $v_0 > v_T$) равна [18]*

$$v_0 \approx H \omega_L / 4\pi e n,$$

точно указать трудно, так как напряженность магнитного поля неизвестна. По-видимому, отнюдь не завышенными являются следующие оценки: $n \sim 10^7 \text{ см}^{-3}$, $H \sim 1 \text{ э}$, $v_0 \sim 3 \cdot 10^9 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ («компактный» источник), $n \sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $H \sim 10 \text{ э}$, $v_0 \sim 10^9 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ (квазар). Учитывая это, можно считать в (8) $v_0 \sim 3 \cdot 10^9 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, $v_0/v_T \sim 3$, так что

$$w_{пл} \approx 20 n \kappa T. \quad (9)$$

Интересно, что плотность энергии плазменных волн оказывается заметной большей, чем тепловая.

Другим возможным агентом, ответственным за генерацию плазменных волн, может служить пучковая неустойчивость при прохождении через «корону» источника анизотропных потоков релятивистских частиц. Подробный анализ этой возможности показывает, что в случае квазаров такой механизм выдвигает более тяжелые требования к источнику, чем рассматриваемый здесь механизм ударных волн (например, плотность потоков оказывается очень большой, так что для компенсации потери массы нужно вводить специальный механизм аккреции).

Исходя из (5) и используя оценку (9), имеем для потока радиоизлучения на частоте $\nu \sim \nu_L$

$$F_{\nu, \text{max}} \sim 2 \cdot 10^{-17} T^{3/2} \nu (r/R)^2 e^{-\tau}. \quad (10)$$

Для компактного источника в Крабовидной туманности ($R = 1,1 \cdot 10^3 \text{ пс}$) $\varphi = r/R \sim 3 \cdot 10^{-7}$ [5], так что при $T \approx 10^{6^\circ} \text{К}$

$$F_{\nu=3 \cdot 10^7 \text{ гц}, \text{max}} = 6 \cdot 10^{-14} e^{-\tau} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1}. \quad (10a)$$

Для квазара 3С 273-В, если $r \sim 10^{17} \text{ см}$, угол $\varphi \sim 10^{-10}$ ($R \approx 1,6 \cdot 10^{27}$); для СТА-102 при $r \sim 10^{17} \text{ см}$ (см. Приложение) и $R \sim 10^{28} \text{ см}$ угол $\varphi \sim 10^{-11}$ и при $T \approx 10^{6^\circ} \text{К}$

$$F_{\nu=10^8 \text{ гц}, \text{max}} \sim \begin{cases} 2 \cdot 10^{-19} e^{-\tau} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1} & (3\text{С } 273\text{-В}) \\ 2 \cdot 10^{-21} e^{-\tau} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1} & (\text{СТА-102}) \end{cases}. \quad (10b)$$

Поскольку наблюдаемые переменные компоненты потока на указанных частотах составляют \tilde{F}_ν (Крабовидная туманность) $\sim 10^{-20}$, \tilde{F}_ν (3С 273-В) $\sim 10^{-22}$, \tilde{F}_ν (СТА-102) $\sim 10^{-23}$, решающее значение приобретает оценка поглощения радиоволн.

Согласно (7), при $T \sim 10^6$ и $\nu \sim 3 \cdot 10^7$ оптическая толщина

* Если ширина спектрального интервала Δk порядка среднего волнового числа пакета (k) $= \omega_L/v_0$, равенство (8) справедливо с точностью до порядка величины. Для приближенной оценки v_0 , также как и в (8), можно не учитывать разницу между невозмущенными значениями n и N и их значениями за фронтом ударной волны.

$\tau \sim 10^{-11}$ L. Для «компактного» радиоисточника с $r \sim 10^{15}$ см значение $L \leq 10^{11}$ см представляется допустимым. При $L \sim 10^{11}$ и других принятых значениях, согласно (4), коэффициент $Q \sim 10^{-5}$. Из этих оценок следует, что для компактного источника в Крабовидной туманности плазменный механизм может, в принципе, оказаться ответственным за наблюдаемое излучение. Более того, как показано в конце Приложения, некогерентный магнитотормозной механизм в этом случае явно неэффективен. Поэтому плазменный характер радиоизлучения «компактного» источника весьма вероятен. С этой точки зрения нужно иметь в виду, что излучение «компактного» источника может оказаться эллиптически или практически циркулярно поляризованным (при учете влияния магнитного поля условия генерации и выхода обыкновенной и необыкновенной волн различны). Плазменное излучение обладает также специфическим частотным спектром, его интенсивность может быть подвержена сильным вариациям и т. д. Экспериментальное обнаружение названных эффектов было бы серьезным аргументом в пользу плазменного механизма радиоизлучения.

Наиболее естественно считать, что «компактный» источник связан с остатком сверхновой звезды, а само радиоизлучение генерируется в «короне» этого объекта (речь здесь могла бы идти, например, о нейтронной звезде, окруженной мощной магнитосферой [19] или квазистационарной магнитной квазизвезде — «магнитоиде» [11, 20, 21]). Мощность

радиоисточника $\tilde{L} \sim 4\pi F, R^2 \nu \sim 4 \cdot 10^{31}$ эрг·сек⁻¹ отвечает за 10^3 лет излучению энергии $\sim 10^{42}$ эрг. Между тем, например, даже энергия $W_T = n \times TV$, заключенная в объеме $V \sim 4 \cdot 10^{45}$ см³ (при радиусе источника $r \sim 10^{15}$ см), составляет $4 \cdot 10^{42}$ эрг (при $T \sim 10^6$ и концентрации $n \sim 10^7$, отвечающей, согласно (1), частоте $\nu \sim 3 \cdot 10^7$). Масса такого облака газа $M \sim 3 \cdot 10^{-5} M_\odot$. Эти цифры имеют иллюстративное значение, и мы хотим лишь подчеркнуть, что корона остатка сверхновой может и не обладать экстраординарными параметрами*.

Для квазаров, в соответствии с данными [12, 13, 15], в первую очередь представляет интерес сантиметровое и дециметровое излучение. При $\nu \sim 10^{10} \div 10^9$ гц и $T \leq 10^6$ К, согласно (7), $\tau \geq 10^{-6} \div 10^{-8}$ L и $\tau \leq 10$ только при $L \leq 10^7 \div 10^9$ см. С другой стороны, для квазиравновесной атмосферы ядра с $M \sim 10^8 M_\odot$ и $r \sim 10^{16}$ см ускорение $g = GM/r^2 \sim 10^2$ см²·сек⁻² и высота приведенной атмосферы $h \sim \chi T/m, g \leq 10^{12}$ см (при значении $T \leq 10^6$). Поэтому условие $L \leq 10^7 \div 10^9$ см может, в принципе, быть удовлетворено, только если «корона» имеет мелкоструйчатую структуру (аналогичное предположение в отношении эмиссионной оболочки квазара см. в [23]). Правда, получить столь общую неоднородность нелегко.

Обратимся поэтому к другой возможности, допустив, что частота радиоизлучения определяется не ленгмюровской частотой ω_L , а гиро-частотой ω_H . Согласно (2), требуемая для этого напряженность магнитного поля в дециметровом и сантиметровом диапазоне должна состав-

* Мы имеем в виду лишь значения M и W_T ; в других же отношениях «компактный» источник весьма специфичен. Для сравнения напомним, что для солнечных всплесков энергвыделение обычно не превышает 10^{25} эрг и радиосветимость $\tilde{L}_{\max} \sim 10^{22}$ эрг·сек⁻¹ [2, 4]. Для вспыхивающей звезды V 371 Orionis наблюдался [22] радиовсплеск с $\tilde{L} \sim 10^{28}$ эрг·сек⁻¹, $\tilde{L}_\nu \sim 10^{20}$ эрг·сек⁻¹·гц⁻¹ и полным энергвыделением в радиодиапазоне $\sim 10^{31}$ эрг. Сравнение этих значений с приведенной выше радиосветимостью компактного источника ($\tilde{L} \sim 10^{31-32}$ эрг·сек⁻¹ в течение длительного времени) свидетельствует о том, что этот источник является объектом нового типа.

лять $3 \cdot 10^2 \div 3 \cdot 10^3$ э. В области, примыкающей к ядру квазара, такая величина поля является еще вполне возможной [11].

При $\omega_H \gg \omega_L$ выражение (8), не учитывающее влияния магнитного поля на возникающие плазменные колебания, уже несправедливо. Исходя из соображений размерности, можно видеть, что одним из характерных параметров, определяющих в этом случае уровень установившихся электромагнитных колебаний, является плотность энергии магнитного поля. Вероятно, допустимо считать

$$\omega_{пл} = \xi(H^2/8\pi), \quad (11)$$

где $\xi < 1$. В (11) плотность энергии волн обозначена через $\omega_{пл}$, поскольку и в магнитоактивной плазме особенно существенную роль играет обычно возбуждение волн с большой продольной компонентой электрического поля. Поведение таких волн близко к поведению плазменных волн в изотропной плазме, и мы для простоты имеем в виду именно такую картину. Принимая во внимание (5) и используя (11), получим, что при $Q \sim 1$ максимально возможный поток радиоизлучения на частоте $\nu \sim \nu_H$

$$F_{\nu, \max} \sim \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m_e c}{e}\right)^2 \xi \nu v_T \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-\tau} \sim 3 \cdot 10^{-9} \xi T^{1/2} \nu \left(\frac{r}{R}\right)^2 e^{-\tau}. \quad (12)$$

Для ЗС 273-В примем угол $\varphi = r/R \sim 10^{-10}$; для СТА-102 $\varphi \sim 10^{-11}$ и даже при $T \sim 10^{40} \text{К}$

$$F_{\nu \cdot 10^9 \text{ гц}, \max} \sim \begin{cases} 3 \cdot 10^{-18} \xi e^{-\tau} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1} & (\text{ЗС 273-В}) \\ 3 \cdot 10^{-20} \xi e^{-\tau} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1} & (\text{СТА-102}) \end{cases} \quad (12a)$$

Обратимся теперь к рассмотрению поглощения радиоволн. При учете влияния магнитного поля, помимо поглощения типа (6), связанного с соударениями, появляется магнитотормозное поглощение на частотах $\omega = s\omega_H$ ($s = 1, 2, 3, \dots$). Формула (6) заменяется более сложным выражением, зависящим от ω , ω_L , ω_H , $\nu_{эфф}$ и ориентации волнового вектора относительно направления поля [1, 4, 17]. При $(v_T/c)^2 \ll \omega_L^2/\omega^2 \ll 1$ гирорезонансное поглощение в слое L_H квазизнородного поля определяется формулой (см., например, [4])

$$\tau \sim \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \frac{\omega}{c} \left(\frac{v_T}{c}\right)^2 L_H. \quad (13)$$

При $\omega \simeq 2\pi \cdot 10^9 \text{ гц}$, $v_T/c \sim 10^{-3}$ и $\omega_L/\omega \sim 10^{-2}$ (это соответствует электронной концентрации $n \sim 10^6 \text{ см}^{-3}$) из (13) получаем: $\tau \sim 2 \cdot 10^{-11} L_H$. Следовательно, если концентрация плазмы на границе ядра уже мала (и вместе с тем достаточно велика, чтобы обеспечить эффективность когерентного плазменного механизма), а поле с удалением от этой границы спадает на расстоянии $L_H \leq 10^{11-12} \text{ см}$, то поглощение радиоволн может быть гораздо менее существенным, чем в рассмотренном выше плазменном варианте радиоизлучения без учета магнитного поля.

Численная оценка (12a) содержит достаточный «запас», чтобы продемонстрировать возможность объяснения переменного радиоизлучения квазизвездных источников рассматриваемым механизмом даже при $\xi \ll 1$. Вместе с тем, конечно, остается актуальной и интересной задачей более детальная оценка параметра ξ в (11), а также пределов изменения концентрации плазмы, в которых обсуждаемый механизм имеет место.

Согласно [11] и развитым выше соображениям, весьма вероятно единство причин, ответственных за модуляцию потока излучения квазизвездных радиоисточников в широкой полосе частот от оптики до радиодиапазона. Осцилляторный механизм переменности, связанный, по-видимому, с периодическими движениями материи в ядре квазара [11], находит подтверждение в статистическом анализе кривой блеска ЗС 273-В [24]. Большой интерес поэтому представило бы установление корреляции между изменениями потока излучения квазаров в радиодиапазоне и в оптической области.

Одним из возможных наблюдаемых следствий рассмотренного механизма переменности является дрейф частоты радиоизлучения, отвечающей максимуму интенсивности, при движении возбуждающего агента от источника. Скорость дрейфа, связанного с меняющимся по пути движения ударной волны магнитным полем, согласно (2), равна $d\nu/dt = v \nabla H/H$. Если генерация ударных волн носит периодический квазистационарный характер [11], то периодические изменения интенсивности на двух фиксированных частотах будут обладать приблизительно постоянной разностью фаз. Применительно к квазару СТА-102 для частоты, на которой изменения интенсивности находятся в антифазе по отношению к изменениям на частоте $\nu \approx 10^9$ гц [15], можно ожидать, при $v \sim 3 \cdot 10^9$ см·сек⁻¹, $\nabla H/H \sim r^{-1} \sim 10^{-17}$ и $T/2 \sim 50$ дней (см. Приложение), величину порядка $\nu - \Delta\nu \sim \nu - \dot{\nu} T/2 \sim 8 \cdot 10^8$ гц (или несколько меньше при большем градиенте поля), т. е. «антифазная» частота находится также в дециметровом диапазоне. Анализ фазовых соотношений между переменными спектральными интенсивностями, а также поиски круговой поляризации, является перспективным путем исследования параметров квазизвездных радиоисточников.

Когерентный плазменный механизм излучения при учете влияния магнитного поля, который оказался особенно перспективным для объяснения части радиоизлучения квазаров, фактически родственен магнитотормозному механизму и его можно было бы назвать когерентным магнитотормозным механизмом излучения в плазме. Дальнейший тщательный анализ различных возможностей генерации и поглощения радиоволн в рамках когерентного механизма позволит, по всей вероятности, получить новые ценные данные о строении квазаров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О реабсорбции магнитотормозного излучения в источнике

Рассмотрим здесь влияние реабсорбции некогерентного магнитотормозного излучения для некоторых простейших моделей источника. Отнюдь не считая эти модели реалистическими, мы хотим лишь получить некоторое представление о роли неоднородности магнитного поля. В работе [16] был сделан вывод о том, что в неоднородной модели можно достичь больших преимуществ (по сравнению с однородной моделью) в отношении энергетических требований и т. п. Мы, однако, пришли к противоположному заключению.

Будем считать, как и в [16], что спектр электронов и напряженность поля в источнике имеют вид

$$N(E) = K(r) E^{-1}, \quad K(r) = K_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^m, \quad H_{\perp} = H_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n, \quad (\text{П.1})$$

а источник считается сферически симметричным и занимает область $r_0 \leq r \leq r_{\max}$ (H_{\perp} — некоторое эффективное значение компоненты магнитного поля в плоскости, перпендикулярной лучу зрения).

Поток излучения от источника, находящегося на расстоянии R , без учета поглощения равен

$$F_\nu = \frac{4\pi}{R^2} \int_{r_0}^{r_{\max}} \varepsilon(\nu, r) r^2 dr, \quad (\text{П.2})$$

где излучательная способность*

$$\varepsilon(\nu, r) = A(\gamma) K H_{\perp}^{(\gamma+1)/2} \nu^{-(\gamma-1)/2}, \quad (\text{П.3})$$

$$A(\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi(\gamma+1)} \Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+19}{12}\right) \frac{e^3}{mc^2} \left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5}\right)^{(\gamma-1)/2}$$

Согласно (П.1) — (П.3), имеем

$$F_\nu = \frac{4\pi A(\gamma) r_0^3 K_0 H_0^{(\gamma+1)/2} \nu^{-(\gamma-1)/2}}{R^2} I(\beta), \quad (\text{П.4})$$

$$I(\beta) = \int_1^{r_{\max}/r_0} x^\beta dx, \quad \beta = 2 - m - (\gamma + 1) \frac{n}{2}.$$

Коэффициент реабсорбции

$$\mu(\nu, r) = B(\gamma) K H_{\perp}^{(\gamma+2)/2} \nu^{-(\gamma+4)/2}, \quad (\text{П.5})$$

$$B(\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right) \frac{e^3}{m} \left(\frac{3e}{2\pi m^3 c^5}\right)^{\gamma/2}.$$

Характерная оптическая толщина источника, согласно (П.1) и (П.5), равна

$$\tau(\nu) = \int_{r_0}^{r_{\max}} \mu dr = B(\gamma) K_0 r_0 H_0^{(\gamma+2)/2} \nu^{-(\gamma+4)/2} S(\delta), \quad (\text{П.6})$$

$$S(\delta) = \int_1^{r_{\max}/r_0} x^{-\delta} dx, \quad \delta = m + (\gamma + 2) \frac{n}{2}.$$

Характерная частота для реабсорбции ν_r определяется условием $\tau(\nu_r) = 1$. Очевидно, при грубых оценках можно считать, что реабсорбция существенна только при $\nu \lesssim \nu_r$. Используя (П.4), (П.6) и условие $\tau(\nu_r) = 1$, мы можем исключить K_0 и выразить таким образом ν_r через другие параметры.

Для простоты, приведем здесь результаты только

1) для однородной модели, когда $n = m = 0$ и, следовательно, $\beta = 2$ и $\delta = 0$;

2) для неоднородных моделей с $\beta = -1$ и $\delta > 1$.

В случае 1, когда $H_0 = H_{\perp}$, $r_{\max} = r$ есть просто радиус источника и $r_0 = 0$ (поэтому в (П.4) и (П.5) нужно с самого начала заменить $I(\beta) r_0^3$ на $r^3/3$ и $S(\delta) r_0$ на r),

$$\nu_r^{5/2} = C(\gamma) F_{\nu_r, 1} H_{\perp}^{1/2} \varphi^{-2}, \quad \varphi = r/R, \quad (\text{П.7})$$

$$C(\gamma) = \frac{3}{4\pi} \frac{B(\gamma)}{A(\gamma)} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{3e}{2\pi m^3 c}\right)^{1/2} b(\gamma) = 3,8 \cdot 10^{29} b(\gamma) \text{ CGSE.}$$

* Используемые выражения для ε и μ можно найти, например, в [25].

Множитель

$$b(\gamma) = (\gamma + 1) \Gamma\left(\frac{3\gamma + 2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma + 22}{12}\right) \left[\Gamma\left(\frac{3\gamma - 1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma + 19}{12}\right) \right]^{-1}$$

при $\gamma \sim 1$ близок к единице и, например, $b(1) = 0,85$, $b(1,5) = 1,5$, $b(2) = 2,2$ и $b(3) = 3,7$.

Соотношение (П.7) можно использовать, как это обычно и делается (см., например, [26]), для оценки максимального потока от магнитотормозного источника со степенным спектром при заданных ν , H_{\perp} и угловом размере φ . Очевидно,

$$F_{\nu, \max} \sim \frac{\varphi^2 \nu^{5/2}}{C(\gamma) H_{\perp}^{1/2}} \simeq 2,6 \cdot 10^{-30} \frac{\varphi^2 \nu^{5/2}}{b(\gamma) H_{\perp}^{1/2}} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{зц}^{-1}. \quad (\text{П.8})$$

В случае 2 получаем: $I(-1) = \ln(r_{\max}/r_0)$ и при $r_{\max} \gg r_0$ множитель $S(\delta) \simeq (\delta - 1)^{-1}$. Поэтому

$$\nu_{r,2}^{5/2} \simeq \frac{C(\gamma)}{3(\delta - 1) \ln(r_{\max}/r_0)} F_{\nu,2} H_0^{1/2} \varphi_0^{-2}, \quad \varphi_0 = \frac{r_0}{R}, \quad (\text{П.9})$$

$$F_{\nu, \max} \sim \frac{3(\delta - 1) \ln(r_{\max}/r_0) \varphi_0^2 \nu^{5/2}}{C(\gamma) H_0^{1/2}} \simeq 0,8 \cdot 10^{-29} \frac{(\delta - 1) \ln(r_{\max}/r_0) \varphi_0^2 \nu^{5/2}}{b(\gamma) H_0^{1/2}} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{зц}^{-1}.$$

Наконец, при данных $F_{\nu, \gamma}$ и R

$$\frac{\nu_{r,2}}{\nu_{r,1}} = \frac{1}{[3(\delta - 1) \ln(r_{\max}/r_0)]^{2/5}} \left(\frac{H_0}{H_{\perp}} \right)^{1/5} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{4/5}. \quad (\text{П.10})$$

Роль реабсорбции тем меньше, чем ниже частота ν_r (при $\nu \ll \nu_r$ поток $F_{\nu} \propto \nu^{5/2}$, т. е. $\alpha = -2,5$, в то время как при $\nu \gg \nu_r$ для степенного спектра поток $F_{\nu} \propto \nu^{-\alpha}$, $\alpha = (\gamma - 1)/2$).

Сопоставление однородного и неоднородного источников невозможно, очевидно, без конкретизации постановки задачи. Наиболее естественным представляется такой подход: будем сравнивать обе модели при заданных частоте ν_r и потоке F_{ν_r} , которые могут быть измерены. Тогда из (П.10) получаем

$$\frac{r^2}{H_{\perp}^{1/2}} \sim 3(\delta - 1) \ln\left(\frac{r_{\max}}{r_0}\right) \frac{r_0^2}{H_0^{1/2}}. \quad (\text{П.11})$$

Для однородного источника энергия магнитного поля W_m и энергия электронов W_e равны соответственно

$$W_{m,1} \sim \frac{H^2}{8\pi} \frac{4\pi}{3} r^3 \sim \frac{H_{\perp}^2}{4} r^3, \quad (\text{П.12})$$

$$W_{e,1} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} K E^{1-\gamma} dE \frac{4}{3} \pi r^3 \simeq \frac{4\pi r^2 \nu_{r,1}^{5/2} E_{\max}}{3B(1) H_{\perp}^{3/2}}$$

$$(\mu(\nu_r, 1) r \sim 1, \quad \gamma = 1).$$

Для неоднородного случая, полагая сразу $n = 3$, $m = 0$, $\gamma = 1$ (при этом $\delta = 9/2$), имеем

$$W_{m,2} = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV \sim \frac{H_0^2 r_0^3}{4}, \quad W_{e,2} \sim \frac{14\pi r_{\max}^3 \nu_{r,2}^{5/2} E_{\max}}{3B(1) H_0^{3/2} r_0}. \quad (\text{П.13})$$

Таким образом, в обсуждаемых условиях

$$\frac{W_{m,2}}{W_{m,1}} \sim \left(\frac{H_0}{H_{\perp}}\right)^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3, \quad \frac{W_{e,2}}{W_{e,1}} \sim 3 \left(\frac{H_{\perp}}{H_0}\right)^{3/2} \frac{r_{\max}^3}{r^2 r_0}. \quad (\text{П.14})$$

Полная энергия $W_m + W_e$ минимальна при $W_m \sim W_e$. Отсюда, из (П.11) и (П.14) (а также полагая для простоты $\ln(r_{\max}/r_0) = \ln \eta \sim 3$), приходим к оценкам

$$r \sim 5\eta^{-1/5} r_0 = 5\eta^{-6/5} r_{\max},$$

$$\frac{W_2}{W_1} \sim \frac{W_{m,2}}{W_{m,1}} \sim \frac{\eta^{11/5}}{20},$$

т. е. $W_2/W_1 \sim 10$ уже при $\eta \sim 10$. Если же положить $W_{m,2}/W_{m,1} \sim 1$, то, используя (П.11) с $\ln \eta \sim 3$, находим

$$\frac{W_{e,2}}{W_{e,1}} \sim \frac{\eta^3}{70} \gg 1.$$

Итак, если речь идет об энергетических требованиях, мы не только не видим никаких преимуществ неоднородных моделей, но и напротив, при обсуждавшихся естественных предположениях эти модели в энергетическом отношении менее благоприятны, чем однородные. Противоположный вывод, сделанный в [16], представляется нам обусловленным непоследовательностью расчета*. Сказанное не нужно, конечно, понимать как возражение против учета неоднородности источника. Напротив, в реальном источнике, скорее всего, поле существенно возрастает при приближении к границе ядра. Наиболее выгодно с энергетической точки зрения считать, однако, что оптическое излучение исходит из источника с радиусом r_0 , а радиоизлучение на частоте $\nu > \nu_r$ — из достаточно толстого шарового слоя ($r_0 < r < r_{\max}$) с квазиоднородным полем. При $r_{\max} \gg r_0$ для такого источника можно использовать формулы (П.7) и (П.8). Поступая таким образом в применении к источнику ЗС 273-В, имеем, согласно (П.8),

$$\nu \simeq 10^9 \text{ гц}, \quad \gamma \simeq 1, \quad F_{\nu} \simeq 2 \cdot 10^{-22} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1}, \quad (\text{П.15})$$

$$R \simeq 1,6 \cdot 10^{27} \text{ см}, \quad r = r_{\max} \sim 7 \cdot 10^{19} H_{\perp}^{1/4} \text{ см}.$$

Если потребовать, в согласии с данными об изменениях потока радиоизлучения [12, 13], соблюдения неравенства $r \leq 10^{19} \text{ см}$, из (П.15) получаем оценку $H_{\perp} \leq 10^{-4} \text{ э}$. При таком значении магнитного поля полная энергия релятивистских электронов, излучающих на плоском участке спектра $10^9 \leq \nu \leq 10^{13} \text{ гц}$, составляет $W_e \geq 8 \cdot 10^{59} \text{ эрг}$. Даже при отсутствии значительного количества релятивистских протонов эта величина полной энергии электронов, большая сама по себе, намного превосходит энергию магнитного поля в том же объеме. Таким образом, представление о некогерентном магнитотормозном излучении ЗС 273-В встречается с трудностями.

* Заметим, кроме того, что в [16] не учитываются комптоновские потери, которые в квазарах играют большую роль [27].

Для источника СТА-102 при $F_\nu = 7 \cdot 10^{-23}$ эрг·см⁻²·сек⁻¹·гц⁻¹, $R \sim 10^{28}$ см, $H \sim 10^{-4}$ э и $r \sim 10^{17}$ см (последняя оценка основана на сообщении [15] об изменении потока на частоте 10^9 гц с периодом ~ 100 дней) из (П.7) получаем $\nu_r \sim 10^{11}$ гц, что недопустимо. Таким образом, если данные [15] будут подтверждены и действительно $\nu_r \ll 10^9$ гц, магнитотормозная модель источника СТА-102 не представляется возможной (поскольку $\nu_r \propto H_\perp^{1/5}$, использовать неопределенность в значении H_\perp для изменения ситуации в данном случае практически нельзя — см. также ниже. Недостаточным оказывается даже экзотическое допущение, что поток радиоизлучения обусловлен не электронами, а протонами, частота реабсорбции у которых, как видно из (П.7), (П.5), (П.3), в $(m_p/m_e)^{3/5}$ раз ниже [28].

Для «компактного» источника в Крабовидной туманности [5, 14]

$$\nu_r < \nu = 2,6 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}, \quad F_\nu \sim 10^{-20} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1},$$

$$\gamma \simeq 3, 4, \quad \varphi \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ (при } r \sim 10^{15} \text{ см)}$$

и из (П.8) получается значение $H_\perp < 5 \cdot 10^{-9}$ э.

На первый взгляд кажется, что этот результат еще совместим с магнитотормозной моделью источника, а именно моделью, в которой источник считается «полостью» со слабым полем $H_\perp \leq 5 \cdot 10^{-9}$ э, (подобная полость в принципе могла бы образоваться вблизи узловой точки поля и т. п.). Однако такая модель явно неприемлема, как это ясно из оценки минимальной энергии электронов $W_{e, \min}$, необходимой для обеспечения наблюдаемого потока. В самом деле, в наиболее благоприятном случае, когда максимум в спектре электронов с энергией E приходится на частоту ν (см., например, [25]),

$$F_\nu = 0,13 \frac{e^3 H_\perp N}{m_e c^2 R^2} = 1,7 \cdot 10^{-23} \frac{H_\perp N t}{R^2},$$

$$W_{e, \min} = N_t E, \quad E = 7,5 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\nu}{H_\perp} \right)^{1/2}, \quad (\text{П.16})$$

$$\nu = 0,07 \frac{e H_\perp}{m_e c} \left(\frac{E}{m_e c^2} \right)^2.$$

Отсюда

$$W_{e, \min} = 4,4 \cdot 10^{13} \frac{R^2 F_\nu \nu^{1/2}}{H_\perp^{3/2}} \text{ эрг}. \quad (\text{П.17})$$

При $F_\nu \sim 10^{-20}$ эрг·см⁻²·сек⁻¹·гц⁻¹, $\nu \sim 3 \cdot 10^7$ сек⁻¹, $R = 3,3 \cdot 10^{21}$ см и $H_\perp 5 \cdot 10^{-9}$ э из (П.17) следует, что $W_{e, \min} \sim 7 \cdot 10^{52}$ эрг; это значительно превосходит обычное энерговыделение при вспышке Сверхновой I типа. Главное же — объем источника $V \sim 4 \cdot 10^{45}$ см³, так что плотность энергии электронов $W_{e, \min} \sim 2 \cdot 10^7$ эрг·см⁻³ и электронное давление $p \sim 10^7$ дин. Поэтому магнитное поле, удерживающее электроны в полости, должно удовлетворять условию $H \gtrsim \sqrt{4\pi p} \sim 10^4$ э. Вряд ли нужно более подробно доказывать крайнюю невероятность подобной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford Univ. Press, 1959, p. 574; Радиоастрономия, ИЛ, 1961, стр. 559; Астрон. ж., 35, 694 (1958); 36, 233 (1959); 38, 3 (1961).
2. J. P. Wild, S. F. Smerd, A. A. Weiss, Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1, 291 (1963); УФН, 74, 99 (1964).

3. С. Б. Пикельнер и М. А. Гинзбург, *Астрон. ж.*, **40**, 842 (1963).
4. В. В. Железняков, *Радиоизлучение Солнца и планет*, изд. Наука, М., 1964.
5. A. Hewish, S. E. Oke, *Nature*, **207**, 59 (1965).
6. В. Л. Гинзбург, *ДАН СССР*, **109**, 61 (1956).
7. В. В. Писарева, *Астрон. ж.*, **35**, 112 (1958).
8. A. Hewish, P. F. Scott, D. Wills, *Nature*, **203**, 1211 (1964).
9. J. Greenstein, M. Schmidt, *Ap. J.*, **140**, 1 (1964).
10. И. С. Шкловский, *Астрон. ж.*, **41**, 801 (1964).
11. Л. М. Озерной, *Труды симпозиума*, изд. Наука, М., 1966; *Астрон. ж.*, **43**, 300 (1966).
12. W. A. Dent, *Science*, **148**, 1458 (1965).
13. P. Maltby, A. T. Moffet, Owens Valley Radio Observatory, preprint, 1965.
14. В. Н. Andrew, N. J. Branson, D. Wills, *Nature*, **203**, 171 (1964).
15. Г. Б. Шоломицкий, *I. A. U. Inform. Bull. of Variable Stars*, № 83 (1965).
16. F. Hoyle, G. R. Burbidge, *On the Nature of the Quasi-Stellar Objects*, preprint, 1965.
17. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Физматгиз, М., 1960; Pergamon Press, 1964.
18. В. В. Зайцев, *Астрон. ж.*, **42**, 740 (1965).
19. В. Л. Гинзбург, *ДАН СССР*, **156**, 43 (1964).
20. В. Л. Гинзбург и Л. М. Озерной, *ЖЭТФ*, **47**, 1030 (1964).
21. D. Layzer, *Ap. J.*, **141**, 837² (1965).
22. O. V. Slee, L. H. Solomon, G. E. Patston, *Nature*, **199**, 991 (1963).
23. M. Schmidt, *Models for Quasi-Stellars*, preprint, 1965.
24. Л. М. Озерной, В. Е. Чертопруд, *Астрон. ж.*, **43**, 20 (1966).
25. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, *УФН*, **87**, 65 (1965).
26. В. И. Слыш, *Nature*, **199**, 682 (1963).
27. В. Л. Гинзбург, Л. М. Озерной, С. И. Сыроватский, *ДАН СССР*, **154**, 557 (1964).
28. Я. Б. Зельдович, Б. В. Комберг, *Астрон. ж.* (в печати).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
18 сентября 1965 г.

ON COHERENT PLASMA RADIATION OF QUASARS AND REMNANTS OF SUPERNOVAE STARS

V. L. Ginzburg, L. M. Ozerney

The possibility is discussed to interpret the long-wavelength radiation of the „compact“ source in Crab nebulae and a portion of quasar radiation by coherent plasma mechanism. For the „compact“ source in Crab nebulae this assumption is quite sensible even without taking into account the magnetic field. For the case of quasars the centimeter and decimeter variable radiation may have a coherent plasma nature, apparently, only with allowance for the magnetic field. In the appendix the problem is analysed on reabsorption of noncoherent synchrotron radiation in radio sources with a homogeneous and nonhomogeneous magnetic field.

Примечание при корректуре. Как любезно обратил наше внимание В. В. Железняков, формула (П 5) и соответствующая формула в [25] содержит лишний множитель, равный $\frac{1}{2}$. Поэтому используемые в статье значения $\mu(\nu, r)$ фактически нужно умножить на 2. Это обстоятельство, разумеется, не меняет характера сделанных в статье утверждений.

УДК 621.371.165

СДВИГ ЧАСТОТЫ ПРИ РАССЕЯНИИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ
ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ МОРЯ

А. Д. Розенберг, И. Е. Островский, А. И. Калмыков

Измерен сдвиг частоты радиоизлучения на волнах 3,2; 10; 50 см; 1,5 и 4 м при рассеянии морской поверхностью. Получено выражение для сдвига частоты рассеянного излучения по сравнению с частотой падающего излучения, пригодное в широком диапазоне волн (от 3 см до 200 м). Установлена зависимость центральной частоты смещения и ширины спектров от состояния моря и угла между направлением облучения и направлением движения морских волн.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению рассеяния радиоволн поверхностью моря посвящено значительное количество работ. В этих работах получены данные об интенсивности рассеяния излучения в зависимости от различных параметров морского волнения и длины радиоволны. Менее полно изучено смещение частоты рассеянного излучения по сравнению с падающим, обусловливаемое временными изменениями формы и импеданса морской поверхности. Впервые такое изучение было проведено в [1] на средних волнах. Эти измерения показали, что величина смещения частоты рассеянного излучения достаточно устойчива для данной длины радиоволны, а спектр смещения представляет собой узкую линию; этот результат свидетельствует о вполне определенном механизме рассеяния радиоволн морской поверхностью.

В [2] поверхность моря рассматривается как совокупность наложенных друг на друга синусоидальных волн различной длины, действующих при рассеянии падающего радиоизлучения как дифракционные решетки. Исходя из этого представления, в [2] получено следующее выражение для смещения частоты рассеянного морем сигнала:

$$F_c = \sqrt{gn/\pi\lambda}, \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести, λ — длина радиоволны, n — целое число, определяющее порядок дифракционного спектра. Несмотря на то, что вывод формулы (1) проведен чисто формально, измерения, выполненные на декаметровых и метровых волнах [2-4], находятся в хорошем согласии с формулой (1).

В [5] решалась электродинамическая задача о рассеянии радиоволн на взволнованной морской поверхности, заданной статистически; в первом приближении метода возмущений были получены результаты, совпадающие при совмещении направлений облучения и приема с формулой (1) для спектра первого порядка. К сожалению, проведенное в [5] рассмотрение неприменимо к сантиметровым и дециметровым волнам, а измерения частотных спектров рассеянного излучения для этих волн [6, 7] имеют ряд недостатков. В [6] облучение морской поверхности производилось с движущегося корабля, скорость которого определялась недостаточно точно, а в [7] — с самолета. В обоих случаях центральная частота спектра смещения не могла быть надежно определена.

В связи с изложенным представляло интерес провести детальное изучение частотных спектров излучения, рассеянного морской поверхностью, для диапазона сантиметровых и дециметровых радиоволн. Некоторые результаты измерений смещения частоты излучения на волнах 3,2; 10; 50 см; 1,5 и 4 м, рассеянного в обратном направлении, излагаются ниже.

1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ.

Для исследования изменения спектрального состава излучения при его рассеянии взволнованной поверхностью моря был разработан и изготовлен импульсно-когерентный фазометр; функциональная схема фазометра приведена на рис. 1.

Часть энергии высокочастотных импульсов, излучаемых передающей антенной, ответвляется на смеситель канала синхронизации, где преоб-

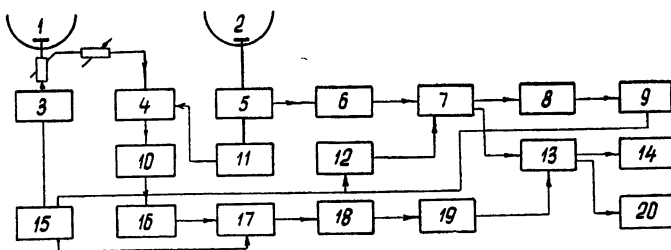


Рис. 1. Блок-схема фазометра:

1—передающая антенна; 2—приемная антенна, 3—передатчик, 4—смеситель 2 (синхронизации), 5—смеситель 1 (основной), 6—ПУПЧ1, 7—УПЧ1, 8—амплитудный детектор, 9—индикатор дальности, 10—ПУПЧ2, 11—стабильный гетеродин, 12—блок стробирования, 13—фазовый детектор, 14—спектральный анализатор, 15—блок запуска и синхронизации, 16—УПЧ2, 17—когерентный гетеродин, 18—усилитель когерентного сигнала, 19—фазовращатель, 20—блок записи.

разуется в импульсы синхронизации и подается через усилитель промежуточной частоты на когерентный гетеродин, работающий в режиме прерывистых автоколебаний. При синхронизации когерентного гетеродина фаза его колебаний в течение всего периода повторения когерентна фазе излученного сигнала. При подаче на фазовый детектор сигнала, рассеянного взволнованной поверхностью моря, и сигнала когерентного гетеродина на выходе фазового детектора появляется импульсное напряжение, амплитуда и знак которого соответствует изменению фазы при рассеянии. Изменение фазы во времени или непосредственно записывается на пленку, или анализируется с помощью спектроанализатора. Фазовращатель осуществляет дополнительное смещение частоты когерентного гетеродина на величину до 200 μ с, что позволяет анализировать знак изменения фазы.

Измерительная аппаратура располагалась на мысе с обрывистым берегом, что позволило производить облучение моря по разным азимутальным направлениям при нескольких углах скольжения.

Распределение энергии в спектре смещения частоты рассеянного морем сигнала непрерывно флуктуирует; поэтому при измерениях определялись средние значения энергий раскочки каждого фильтра спектроанализатора в серии из 40 снимков, снятых с интервалом в 1 сек. В части опытов спектр смещения частоты определялся по записям на самописец напряжения с выхода фазового детектора обычной методикой спектрального анализа для случайного процесса. Оба метода определения спектра смещения эквивалентны.

На рис. 2 приведены усредненный спектр смещения частоты рассеянного морем сигнала на волне 10 см, полученный в одном из опытов по фотографиям экрана спектроанализатора (кривая а) и вычисленный по одновременной записи напряжения с выхода фазового детектора (кривая б). Как видно из рисунка, различие в спектрах незначительно.

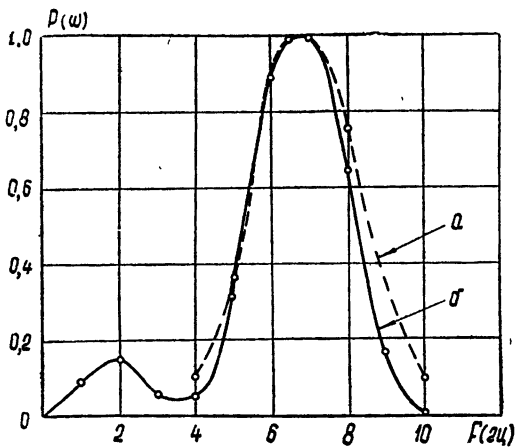


Рис. 2.

2. ЧАСТОТНЫЕ СПЕКТРЫ РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ СПОКОЙНОГО МОРЯ

Проведенными измерениями установлено, что ширина спектра смещения частоты и центральная частота спектра зависят для заданной длины радиоволны от волнения моря и угла между направлением облучения и направлением морских волн. При спокойном море (состояние моря от полного штиля до волнения 1 балл, которому соответствует высота волн до 0,2 м) наблюдаются узкие спектры смещения; центральные частоты спектров имеют наименьшие значения из наблюдавшихся во всех опытах и практически не зависят от азимута и других условий облучения.

Определенные по ряду опытов значения F_c при спокойном море составляют ~ 18 гц на $\lambda = 3,2$ см, $\sim 6,5$ гц на $\lambda = 10$ см, $\sim 2,5$ гц на $\lambda = 50$ см, $\sim 1,4$ гц на $\lambda = 1,5$ м и $\sim 0,85$ гц на $\lambda = 4$ м.

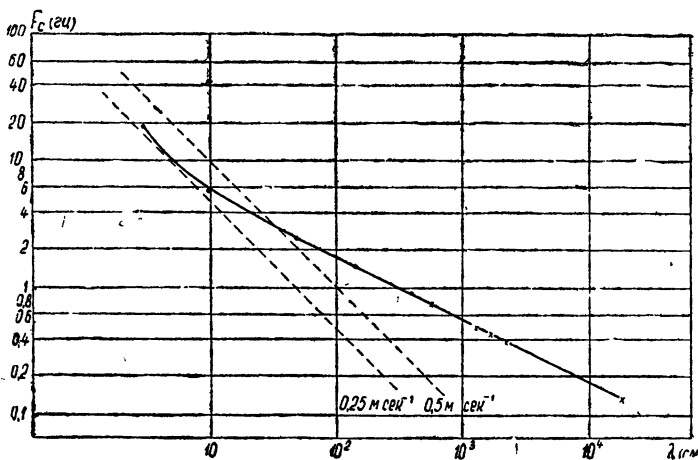


Рис. 3.

На рис. 3. приведены усредненные по ряду опытов значения F_c при спокойном море, полученные авторами, а также другими исследователями. Пунктирными линиями показаны зависимости $F_c = 2v/\lambda$, рассчитанные по обычной формуле Допплера для $v_1 = 0,25 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ и $v_2 = 0,5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$. Как видно из рисунка, усредненные значения сдвига частоты при рассеянии радиоволн поверхностью моря не удовлетворяют формуле Допплера.

Если принять высказанное в [2] предположение, что рассеяние радиоволн происходит на периодической структуре, созданной гравитационными волнами на поверхности моря, и распространить его на сантиметровый диапазон радиоволн, то сдвиг частоты при рассеянии сантиметровых радиоволн должен определяться соотношением

$$F_c = (2/\lambda) v_\phi,$$

где v_ϕ — есть фазовая скорость ряби с длиной волны $\Lambda = \lambda/2$. Фазовая скорость волн ряби с учетом капиллярных сил на поверхности жидкости равна

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g\Lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\rho\Lambda}}, \quad (2)$$

где α — поверхностное натяжение, ρ — плотность жидкости. В результате для сдвига частоты при рассеянии сантиметровых радиоволн поверхностью моря получаем

$$F_c = \sqrt{\frac{g}{\pi\lambda} + \frac{16\pi\alpha}{\rho\lambda^3}}. \quad (3)$$

Сплошная линия на рис. 3 представляет собой значения, рассчитанные по формуле (3). Как видно из рисунка, во всем исследованном диапазоне волн измеренные при спокойном море значения F_c хорошо удовлетворяют выражению (3).

3. СДВИГ ЧАСТОТЫ РАССЕЯННОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНОМ ВОЛНЕНИИ МОРЯ

При значительном волнении моря ширина спектра рассеянного излучения и значение центральной частоты сдвига зависят от угла между направлением облучения и направлением ветра. Если направление облучения перпендикулярно направлению ветра, значение центральной частоты сдвига чаще всего совпадает со значением F_c для спокойного моря, т. е. удовлетворяет формуле (3). Формула (3) не удовлетворяется при этом направлении облучения в тех случаях, когда на море нет четко выраженной одной системы волн, и не удовлетворяется во всех случаях при облучении «против» или «по ветру»; в последнем случае F_c всегда больше значения, соответствующего формуле (3).

При облучении взволнованной поверхности моря «по» или «против» ветра наблюдается дополнительный сдвиг частоты по сравнению со значением, следующим из формулы (3); этот дополнительный сдвиг растет с увеличением скорости ветра. Можно предположить, что этот дополнительный сдвиг происходит за счет ветрового течения поверхностного слоя воды (о наличии такого перемещения см., например, [8]). Обозначив скорость ветрового сноса поверхностного слоя воды через $v_{вс}$, получаем следующее выражение для значения центральной частоты смещения рассеянного морем радиоизлучения:

$$F_c = \sqrt{\frac{g}{\pi\lambda} + \frac{16\pi\alpha}{\rho\lambda^3}} + \frac{2|v_{вс} \cos \theta|}{\lambda}, \quad (4)$$

где Θ — угол между направлением ветра и направлением облучения.

На рис. 4 приведены экспериментальные значения смещения частоты (при облучении моря «против» ветра) на волнах 3,2; 10 и 50 см, полученные из шести опытов при различной скорости ветра, а также расчетные кривые, вычисленные по формуле (4) для разных значений $v_{рс}$.

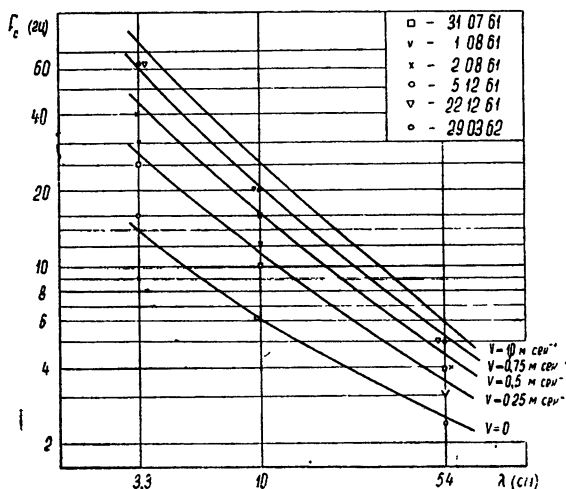


Рис. 4.

менения F_c за счет ветрового сноса поверхностного слоя воды. С этой целью в одном из опытов, проводившемся в ночное время, в море на расстоянии 1,5 км от берега были сброшены три прозрачных поплавка с заключенными в них горящими лампочками; вес каждого поплавка составлял ~ 100 г, объем ~ 100 см³. Таким образом, поплавки были практически полностью погружены в воду и парусность отсутствовала. Движение поплавков под влиянием ветрового течения фиксировалось фототеодолитом. Одновременно определялось значение F_c на волне 10 см при рассеянии радиоизлучения с этого же участка моря. Скорость поплавков, вычисленная по фотографии их траекторий, была равна $0,22$ м·сек⁻¹. Значение $v_{рс}$, вычисленное из формулы (4) по измеренному в этом опыте F_c , оказалось равным $0,2$ м·сек⁻¹.

Согласно формуле (4), значение центральной частоты смещения при рассеянии радиоволн взволнованной поверхностью моря состоит из нескольких компонент. Первый член подкоренного выражения отражает вклад гравитационных сил, образующих морские волны, второй — сил поверхностного натяжения, а последний член характеризует смещение частоты под влиянием ветрового сноса поверхностного слоя воды. Вклад этих компонент в значение F_c изменяется с длиной волны. Для радиоволн длиннее 10 см вторым слагаемым под корнем в формуле (4) можно пренебречь. Слагаемое $2v_{рс} \cos \Theta / \lambda$ при $v_{рс} = 0,75$ м·сек⁻¹ и $\lambda = 100$ м составляет только 15% от F_c . По этой причине в [1, 2] не была замечена зависимость F_c от направления облучения.

Аппаратура позволяла определять знак смещения частоты рассеянного сигнала. Проведенные измерения показали, что во всех случаях наблюдается только один знак смещения частоты, совпадающий с направлением ветра. Фазовая скорость волн и скорость ветрового сноса $v_{рс}$ всегда совпадают по направлению. В связи с этим в формуле (4) поставлен модуль $v_{рс} \cos \Theta$.

Таким образом, формула (4) является достаточно общей формулой.

Как видно из рисунка, значения центральных частот смещения при рассеянии радиоволн взволнованной поверхностью моря хорошо удовлетворяют формуле (4).

Всем измеренным значениям F_c соответствуют скорости ветрового сноса меньше 1 м·сек⁻¹, что хорошо согласуется с океанографическими данными.

Представляло интерес непосредственно определить $v_{рс}$ и сопоставить его со значением, найденным из формулы (4) по одновременно измеренному значению F_c ; это явилось бы дополнительной проверкой реальности механизма из-

позволяющей определять значение центральной частоты спектра смещения при рассеянии морем радиоволн в широком диапазоне от 3 см до 200 м.

4. ШИРИНА ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Выше отмечалось, что ширина спектра смещения зависит от состояния моря и угла между направлением облучения и направлением морских волн. С возрастанием волнения моря спектр уширяется. Попытки установить зависимость ширины спектра смещения от скорости ветра, отношения высоты волны к периоду и ряда других параметров оказались безуспешными; наиболее явно проявилась зависимость ширины спектра смещения от степени волнения моря, оцениваемого в баллах.

В [7] высказано предположение, что ширина спектра смещения рассеянного излучения может быть обусловлена, кроме диссипативных процессов, еще рассеянием на брызгах и пене, а также пульсациями величин скоростей ветрового сноса. Данные выполненных нами измерений позволяют оценить уширение спектра смещения за счет пульсаций скорости ветрового сноса $\delta v_{вс}$.

Вклад в суммарную ширину спектра смещения, обязанный пульсациям $v_{вс}$, может быть оценен путем измерений ширины спектра при облучениях моря параллельно и перпендикулярно ветровому сносу. Так

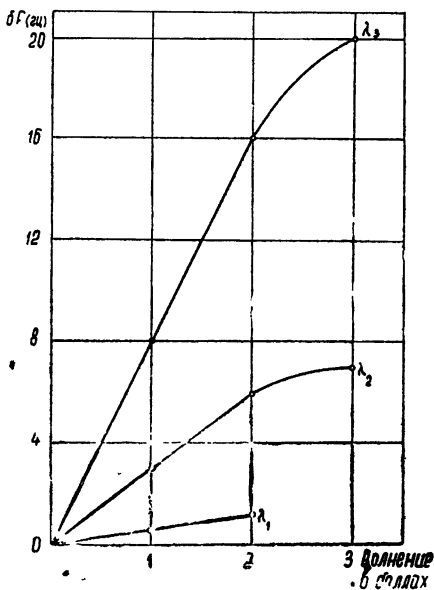


Рис. 5.

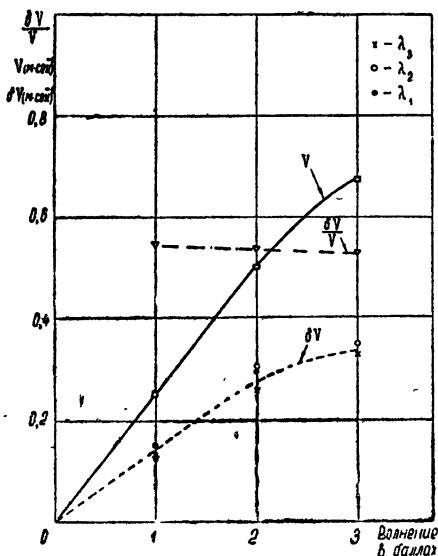


Рис. 6.

как уширение спектра за счет диссипативных процессов от направления облучения не зависит, то разница δF между шириной полос для параллельного и перпендикулярного облучений и даст указанный вклад в ширину спектра.

На рис. 5 по оси ординат отложено уширение спектра δF за счет пульсаций ветрового сноса, по оси абсцисс—волнение моря в баллах. Как следует из рисунка, с ростом волнения моря растет δF . Согласно формуле (4), это уширение должно быть обратно пропорционально длине радиоволны; величина $\delta F \lambda / 2 = \delta v_{вс}$ при одновременных измерениях не должна зависеть от длины радиоволны.

На рис. 6 приведены значения $\delta v_{вс}$, найденные из одновременных

измерений на волнах 50; 10 и 3,2 см при одинаковых условиях облучения моря. Эти значения практически совпадают, что служит подтверждением правильности предположения об уширении спектра за счет пульсаций ветрового сноса. Отношение величин δF к суммарной ширине спектра показывает, что уширение спектра смещения за счет пульсаций скорости ветрового сноса составляет 30 ÷ 40% от суммарной ширины спектра.

В литературе [8] имеются сведения о том, что пульсации скорости ветрового сноса $\delta v_{вс}$ должны возрастать с увеличением силы ветра; однако величины $\delta v_{вс}$ и $\delta v_{вс}/v_{вс}$ не приводятся. Проведенные нами измерения позволили оценить эти значения.

Значения $\delta v_{вс}$, как уже указывалось, определялись из уширения спектра, а значения $v_{вс}$ — по изменению F_c при облучении «поперек», «по» или «против» ветра. Приведенная на рис. 6 сплошная кривая представляет зависимость средней скорости ветрового сноса $v_{вс}$ от волнения моря в баллах; она получена в результате обработки значительного числа опытов на волнах 3,2; 10 и 50 см. Усредненные значения $v_{вс}$, определенные из измерений на разных волнах, практически совпадают. Сравнение средних величин скорости ветрового сноса $v_{вс}$ и ее пульсаций $\delta v_{вс}$ показывает, что с возрастанием волнения $\delta v_{вс}$ растет примерно пропорционально росту $v_{вс}$ (штрих-пунктирная линия на рис. 6).

Таким образом, проведенными измерениями установлено, что рассеяние радиоволн на морской поверхности имеет характер пространственного резонанса вплоть до коротких сантиметровых волн. Однако при укорочении длины волны растет вклад различных факторов, приводящий к уширению спектра смещения частоты рассеянного сигнала. Один из таких факторов — ветровое течение и его флуктуации — рассмотрен в настоящей работе.

В заключение считаем своим долгом выразить благодарность В. И. Зельдису за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Брауде, А. В. Мень, Ю. В. Поплавко, И. С. Тургенев, В. Ф. Шульга, О. М. Лебедева, Радиоокеанографические исследования морского волнения, изд. АН УССР, Киев, 1962, стр. 49—79.
2. D. D. Crombie, *Nature*, **175**, 681 (1955).
3. R. P. Ingalls, M. T. Stone, *IRE Trans.*, AP-5, 164 (1957).
4. E. Sofaer, *Proc. IEE*, **105**, 383 (1958).
5. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 58 (1961).
6. I. C. Wiltse, S. P. Schlesinger, C. M. Jonson, *Proc. IRE*, **45**, 220 (1957).
7. B. L. Hicks, N. Knable, I. I. Kovaly, G. S. Newell, J. P. Ruina, C. W. Sherwin, *J. Geophys. Res.*, **65**, 827 (1960).
8. В. В. Шулейкин, Очерки по физике моря, изд. АН СССР, М., 1962.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
16 марта 1965 г.

FREQUENCY SHIFT OF RADIATION SCATTERED BY RUFFLED SEA SURFACE

A. D. Rosenberg, I. E. Ostrovsky, A. I. Kalmykov

The frequency shift of radiation scattered by the sea surface has been measured for the 3,2; 10; 50 cm; 1,5 and 4m waves. The expression for the shift available in a wide wave range (from 3cm to 200m) is obtained. The dependence is determined of the fundamental frequency and spectrum bandwidth of the scattered field upon the sea state and the angle between the direction of radiation and that of the sea wave motion.

УДК 533.951

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Н. П. Гиоргадзе

Вычислен нелинейный тензор электропроводности магнитоактивной плазмы и определена эффективность генерации продольного и поперечного полей, обусловленной резонансным слиянием различного типа волн. Общие соотношения использованы при рассмотрении процессов слияния волн в изотропной плазме.

Электродинамика плазмы как слабонелинейной среды в настоящее время привлекает серьезное внимание [1-7]. Это обстоятельство связано, с одной стороны, с наличием мощных источников электромагнитного излучения, возмущение которыми волновых процессов в плазме уже не может считаться малым, а с другой стороны, существенностью нелинейных эффектов в физике плазмы.

Как известно, нелинейность уравнений Максвелла для электромагнитного поля в среде

$$\left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta \right] E_\beta(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$$

обусловлена материальным уравнением, связывающим ток и электрическое поле. Если нелинейность мала, то эта связь может быть представлена в виде степенного ряда по амплитудам поля; с точностью до членов второго порядка (которыми мы ограничимся в настоящей работе) указанное разложение имеет вид

$$j_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}, \omega) + \int \frac{d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^4} \sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\mathbf{k}\mathbf{k}', \omega\omega') \times \\ \times E_\beta(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega') E_\gamma(\mathbf{k}', \omega').$$

Общее выражение для тензора электропроводности трудно обозримо. Поэтому в работе рассмотрен ряд частных случаев, когда вид компонент тензора электропроводности упрощается. В заключение рассматривается резонансное слияние волн в холодной изотропной плазме*.

1. НЕЛИНЕЙНЫЙ ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим двухкомпонентную плазму без столкновений, помещенную в направленное вдоль оси z постоянное магнитное поле H_0 . Пусть состояние плазмы описывается кинетическим уравнением

$$\frac{df_\alpha}{dt} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} [\mathbf{v} H_0] \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} =$$

* Резонансное слияние распространяющихся вдоль магнитного поля волн рассмотрено в работе [1].

$$= -\frac{e_a}{m_a} E \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e_a}{m_a c} [\mathbf{v}H] \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1.1)$$

где f_{0a} — стационарная (или квазистационарная) функция распределения, которая всюду в дальнейшем предполагается изотропной по скоростям; все остальные обозначения стандартные и не требуют пояснений.

Применяя преобразование Фурье к функциям

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{r}t) &= \int \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4} f_a(\mathbf{k}\omega) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})], \\ f_a(\mathbf{k}\omega) &= \int d\mathbf{r} dt f_a(\mathbf{r}t) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (1.2)$$

для фурье-компоненты функции распределения из (1.1) получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a(\mathbf{k}\omega)}{\partial \vartheta} + i \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega_a} f_a(\mathbf{k}\omega) &= \frac{e_a}{m_a \omega_a} E \frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_a}{m_a \omega_a} \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^4} \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k}'\mathbf{v}}{\omega'}\right) E(\mathbf{k}'\omega') + \frac{\mathbf{k}'(\mathbf{v}E(\mathbf{k}'\omega'))}{\omega'} \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_a(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ϑ — полярный угол в пространстве скоростей, а $\omega_a = e_a H_0 / m_a c$ — гирочастота α -компоненты.

Уравнение (1.3), приводящее к материальному уравнению, в приближении малых нелинейностей может быть решено методом итераций. Первый шаг итерационной процедуры приводит к линейному приближению:

$$\begin{aligned} f_a^{(1)}(\mathbf{k}\omega) &= -i \frac{e_a}{m_a} \sum_{mm'} J_m(\xi) J_{m'}(\xi) \exp[i(m'-m)\psi] \times \\ &\times \left\{ \frac{\exp[i(m-m')\vartheta]}{\omega - k_z v_z - m' \omega_a} E_z \frac{\partial f_{0a}}{\partial v_z} + \frac{1}{2} E_+ \frac{\partial f_{0a}}{\partial v_\perp} \frac{\exp[i(m-m'-1)\vartheta]}{\omega - k_z v_z - (m'+1)\omega_a} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} E_- \frac{\partial f_{0a}}{\partial v_\perp} \frac{\exp[i(m-m'+1)\vartheta]}{\omega - k_z v_z - (m'-1)\omega_a} \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а второй — к квадратичной по полю нелинейной поправке:

$$\begin{aligned} f_a^{(2)}(\mathbf{k}\omega) &= -i \left(\frac{e_a^2}{m_a \omega_a} \right) \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int \frac{d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^4} \exp\{i[(m'-m)\psi + (n'-n)\psi']\} \times \\ &\times J_m(\xi) J_{m'}(\xi) \exp[-(i/\omega_a)(\omega - k_z v_z - m\omega_a)\vartheta] \times \\ &\times \int d\vartheta' \exp[(i/\omega_a)(\omega - k_z v_z - m'\omega_a)\vartheta'] \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}'\mathbf{v}}{\omega'}\right) \times \right. \\ &\left. \times \frac{\partial}{\partial v_\mu} + \frac{v_\mu}{\omega'} \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial v_\nu} \right] F_l E_\nu(\mathbf{k}'\omega') E_l(\Delta\mathbf{k} \Delta\omega). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$F_z = J_n(\Delta\xi) J_{n'}(\Delta\xi) \frac{\exp[i(n-n')\vartheta']}{\Delta\omega - \Delta k_z v_z - n'\omega_a} \frac{\partial f_{0a}}{\partial v_z},$$

$$\begin{aligned}
 F_+ &= J_n(\Delta\xi) J_{n'}(\Delta\xi) \frac{\exp [i(n-n'-1)\vartheta']}{\Delta\omega - \Delta k_z v_z - (n'+1)\omega_a} \frac{1}{2} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_\perp}, \\
 F_- &= J_n(\Delta\xi) J_{n'}(\Delta\xi) \frac{\exp [i(n-n'+1)\vartheta']}{\Delta\omega - \Delta k_z v_z - (n'-1)\omega_a} \frac{1}{2} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_\perp} \\
 &(\xi = k_\perp v_\perp / \omega_a, \quad \Delta\xi = \Delta k_\perp v_\perp / \omega_a),
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$A_\pm = A_x \pm iA_y$, $\Delta\omega = \omega - \omega'$, $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, а ψ и ψ^A — полярные углы векторов \mathbf{k} и $\Delta\mathbf{k}$ соответственно. Заметим, что соотношения (1.4) и (1.5) удовлетворяют условию однозначности:

$$f_\alpha(\vartheta) = f_\alpha(\vartheta + 2\pi).$$

Нелинейный тензор электропроводности может теперь быть найден подстановкой (1.5) в выражение для нелинейного тока

$$j_\alpha^{(2)}(\mathbf{k}\omega) = \sum_{\mathbf{a}} e_a \int d\mathbf{v} v_a f_\alpha^{(2)}(\mathbf{k}\omega) \tag{1.7}$$

и приведения (1.7) к виду, совпадающему по форме со вторым слагаемым в выражении для тока $j_\alpha(\mathbf{k}\omega)$, написанным в начале статьи. После несложных, хотя и несколько громоздких вычислений для циркулярных компонент нелинейного тензора электропроводности, получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zzz} &= -2\pi \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int d v_\perp v_\perp d v_z v_z P_m \left\{ \delta(N) \frac{\partial}{\partial v_z} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\Delta k_+}{2\Delta\omega} \hat{L}_1^{(+)}(nn') \delta(N-1) + \frac{\Delta k_-}{2\Delta\omega} \hat{L}_1^{(-)}(nn') \delta(N+1) \right\} Q_{n'} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z}; \\
 \sigma_{z\pm z} &= -2\pi \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int d v_\perp v_\perp d v_z v_z P_m \left\{ \pm \Delta k_\pm \frac{n-n'}{\Delta\omega} \delta(N) + \right. \\
 &+ \left. \delta(N \pm 1) \hat{L}_2^{(\mp)}(nn') \right\} Q_{n'} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z}; \\
 \sigma_{z\pm\pm} &= -2\pi \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int d v_\perp v_\perp d v_z v_z P_m \left\{ \pm(n-n' \pm 1) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{\Delta k_\pm}{\Delta\omega} \delta(N \pm 1) + \delta(N \pm 2) \hat{L}_2^{(\mp)}(nn' \mp 1) \right\} Q_{n' \mp 1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_\perp}; \\
 \sigma_{zz\pm} &= -2\pi \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int d v_\perp v_\perp d v_z v_z P_m \left\{ \delta(N \pm 1) \frac{\partial}{\partial v_z} + \right. \\
 &+ \left. \delta(N \pm 1 + 1) \frac{\Delta k_-}{2\Delta\omega} \hat{L}_1^{(-)}(nn' \mp 1) + \delta(N \pm 1 - 1) \frac{\Delta k_+}{2\Delta\omega} \hat{L}_1^{(+)}(nn' \mp 1) \right\} Q_{n' \mp 1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_\perp}; \\
 \sigma_{z\pm\mp} &= -2\pi \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int d v_\perp v_\perp d v_z v_z P_m \left\{ \pm(n-n' \mp 1) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\Delta k_{\pm}}{\Delta \omega} \delta(N \mp 1) + \delta(N) \hat{L}_2^{(\mp)}(nn' \pm 1) \left\{ Q_{n' \pm 1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}}; \right. \\
\sigma_{\pm z z} = & -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \left\{ \delta(N \pm 1) \frac{\partial}{\partial v_z} + \right. \\
& + \frac{\Delta k_{-}}{2\Delta \omega} \hat{L}_1^{(-)}(nn') \delta(N+1 \pm 1) + \frac{\Delta k_{+}}{2\Delta \omega} \hat{L}_1^{(+)}(nn') \delta(N-1 \pm 1) \left. \right\} Q_{n'} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z}; \\
& \sigma_{\pm z +} = -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \left\{ \delta(N+1 \pm 1) \frac{\partial}{\partial v_z} + \right. \\
& + \frac{\Delta k_{-}}{2\Delta \omega} \hat{L}_1^{(-)}(nn'-1) \delta(N+2 \pm 1) + \frac{\Delta k_{+}}{2\Delta \omega} \hat{L}_1^{(+)}(nn'-1) \delta(N \pm 1) \left. \right\} Q_{n'-1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}}; \\
\sigma_{\pm z -} = & -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \left\{ \delta(N-1 \pm 1) \frac{\partial}{\partial v_z} + \right. \\
& + \frac{\Delta k_{-}}{2\Delta \omega} \hat{L}_1^{(-)}(nn'+1) \delta(N \pm 1) + \frac{\Delta k_{+}}{2\Delta \omega} \hat{L}_1^{(+)}(nn'+1) \delta(N-2 \pm 1) \left. \right\} Q_{n'+1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}}; \\
\sigma_{\pm + z} = & -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \left\{ \frac{\Delta k_{+}}{\Delta \omega} (n-n') \delta(N \pm 1) + \right. \\
& \left. + \hat{L}_2^{(-)}(nn') \delta(N+1 \pm 1) \right\} Q_{n'} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z}; \\
\sigma_{\pm - z} = & -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \left\{ -\frac{\Delta k_{-}}{\Delta \omega} (n-n') \times \right. \\
& \left. \times \delta(N \pm 1) + \hat{L}_2^{(+)}(nn') \delta(N-1 \pm 1) \right\} Q_{n'} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z}; \\
\sigma_{\pm ++} = & -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \left\{ \frac{\Delta k_{+}}{\Delta \omega} (n-n'+1) \times \right. \\
& \left. \times \delta(N+1 \pm 1) + \hat{L}_2^{(-)}(nn'-1) \delta(N+2 \pm 1) \right\} Q_{n'-1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}}; \\
\sigma_{\pm +-} = & -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \left\{ \frac{\Delta k_{\pm}}{\Delta \omega} \times \right. \\
& \left. \times \delta(N-1 \pm 1) (n-n'-1) + \hat{L}_2^{(-)}(nn'+1) \delta(N \pm 1) \right\} Q_{n'+1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}}; \\
\sigma_{\pm -+} = & -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m \pm 1} \times \\
& \times \left\{ -\frac{\Delta k_{-}}{\Delta \omega} (n-n'+1) \delta(N+1 \pm 1) + \hat{L}_2^{(+)}(nn'-1) \delta(N \pm 1) \right\} Q_{n'-1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}};
\end{aligned} \tag{1.8a}$$

$$\sigma_{\pm\pm} = -2\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \sum_{mm'} \sum_{nn'} \int dv_{\perp} v_{\perp}^2 dv_z P_{m=1} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{\Delta k}{\Delta \omega} (n-n'-1) \delta(N-1 \pm 1) + \hat{L}_2^{(+)} (nn' + 1) \delta(N-2 \pm 1) \right\} Q_{n'+1} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}},$$

где

$$P_m = \exp [i(m' - m) \psi] J_m(\xi) J_{m'}(\xi) \frac{1}{\omega - k_z v_z - m \omega_{\alpha}},$$

$$Q_{n'} = \exp [i(n' - n) \psi'] J_n(\xi') J_{n'}(\xi') \frac{1}{\omega' - k'_z v_z - n' \omega_{\alpha}}, \quad (1.9)$$

$$\hat{L}_1^{(\pm)}(nn') = v_z \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_z} \pm (n-n') \frac{v_z}{v_{\perp}},$$

$$\hat{L}_2^{(\pm)}(nn') = \frac{\Delta k_z v_{\perp}}{\Delta \omega} \frac{\partial}{\partial v_z} + \left(1 - \frac{\Delta k_z v_z}{\Delta \omega} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \pm \frac{n-n'}{v_{\perp}} \right)$$

и $N = m - m' + n - n'$, $\xi' = k' v_{\perp} |\omega_{\alpha}|^{-1}$.

Следует подчеркнуть, что, за исключением бесселевых функций, всюду m , m' , n и n' содержат еще множитель $\text{sgn} e_{\alpha}$, опущенный для краткости. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при суммировании по α .

Вид нелинейного тензора электропроводности существенно упрощается в отсутствие внешнего магнитного поля ($\omega_{\alpha} = 0$). При этом его компоненты проще получить из кинетического уравнения для изотропной плазмы:

$$\sigma_{ijk}^{(2)} = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \int dv v_i \frac{1}{\omega - k v} \left[\left(1 - \frac{\Delta k v}{\Delta \omega} \right) \frac{\partial}{\partial v_j} + \frac{v_j}{\Delta \omega} \left(\Delta k \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{\partial f_{0\alpha} / \partial v_k}{\omega' - k' v}. \quad (1.86)$$

Формула (1.86) согласуется с результатом работы [1].

Соотношения (1.8а) определяют 27 компонент нелинейного тензора электропроводности. По формуле

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(kk', \omega\omega') = \frac{1}{2} [\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(kk', \omega\omega') + \sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(k, k - k', \omega, \omega - \omega')]$$

его обычно приводят к симметризованному виду, более удобному при вычислениях. Мы не будем заниматься здесь этим вопросом. Заметим, что в несколько ином виде нелинейный тензор электропроводности магнитоактивной плазмы определен в работе [10].

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Выражение нелинейного тензора электропроводности значительно упрощается в случае холодной плазмы. Полагая здесь

$$f_{0\alpha} = n_{0\alpha} \frac{\delta(v_{\perp})}{2\pi v_{\perp}} \delta(v_z), \quad (2.1)$$

получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zzz} &= - \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega\omega'} \left(\frac{k'_z}{\omega'} + \frac{2k_z}{\omega} \right); \\
 \sigma_{z\pm z} &= - \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega\omega'} \frac{k_{\pm}}{\omega \pm \omega_{\alpha}}; \\
 \sigma_{z\pm\mp} &= -2 \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega\Delta\omega} \frac{\Delta k_z}{\omega' \mp \omega_{\alpha}}; \\
 \sigma_{\pm zz} &= - \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega'\Delta\omega} \frac{\Delta k_{\pm}}{\omega \mp \omega_{\alpha}}; \\
 \sigma_{\mp z\pm} &= -2 \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{k_z}{(\omega \pm \omega_{\alpha})^2 (\omega' \pm \omega_{\alpha})}; \\
 \sigma_{\mp\pm z} &= 2 \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega'(\omega \pm \omega_{\alpha})} \left(\frac{\Delta k_z}{\Delta\omega} - \frac{k_z}{\omega \pm \omega_{\alpha}} - \frac{k'_z}{\omega'} \right); \\
 \sigma_{\mp\pm\pm} &= 4 \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{(\omega \pm \omega_{\alpha})(\omega' \pm \omega_{\alpha})} \left(\frac{\Delta k_{\pm}}{2\Delta\omega} - \frac{k'_{\pm}}{2\omega'} - \frac{k_{\pm}}{\omega \pm 2\omega_{\alpha}} \right); \\
 \sigma_{\pm\pm\mp} &= -2 \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{(\omega' \mp \omega_{\alpha})(\omega \mp \omega_{\alpha})} \left(\frac{k_{\pm}}{\omega} + \frac{\Delta k_{\pm}}{\Delta\omega} \right); \\
 \sigma_{\pm\mp\pm} &= -2 \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{(\omega' \pm \omega_{\alpha})(\omega \mp \omega_{\alpha})} \left(\frac{k_{\pm}}{\omega} + \frac{k'_{\pm}}{\omega'} \right); \\
 \sigma_{zz\pm} &= - \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{(\omega' \pm \omega_{\alpha})\omega} \left(\frac{k_{\pm}}{\omega \pm \omega_{\alpha}} + \frac{k'_{\pm}}{\omega'} + \frac{\Delta k_{\pm}}{\Delta\omega} \right);
 \end{aligned} \tag{2.2a}$$

(остальные компоненты равны нулю). Если внешнее поле отсутствует, то [1]

$$\sigma_{ijk} = - \sum_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega\omega'} \left[\delta_{ij} \left(\frac{k_k}{\omega} + \frac{k'_k}{\omega'} - \frac{\Delta k_k}{\Delta\omega} \right) + \delta_{ik} \frac{k_j}{\omega} + \delta_{jk} \frac{\Delta k_i}{\Delta\omega} \right]. \tag{2.26}$$

3. МОЩНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

С учетом первых двух соотношений, приведенных в начале статьи, исходная система уравнений Максвелла может быть представлена в виде

$$(n^2 \delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha} n_{\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}) E_{2\beta} = c^2 \omega^{-2} S_{\alpha}(\mathbf{k}\omega), \tag{3.1}$$

где линейный тензор диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi i \omega^{-1} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)},$$

а нелинейный источник

$$S_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int \frac{d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^4} \sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega, \omega-\omega') \times \quad (3.2)$$

$$\times E_{1\beta}(\mathbf{k}'\omega') E_{1\gamma}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega').$$

Здесь $n^2 = k^2 c^2 \omega^{-2}$ — коэффициент преломления, а $n_{\alpha} = k_{\alpha} c \omega^{-1}$.

Будем считать плазму прозрачной и затуханием волн линейного приближения пренебрежем. Как известно, амплитуда волны линейного приближения с волновым вектором \mathbf{k} имеет тогда вид

$$E_1(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi \sum_{\mu} E_{1\mu}(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_{\mu}(\mathbf{k})), \quad (3.3)$$

где $\omega_{\mu}(\mathbf{k})$ — решение дисперсионного уравнения

$$\|\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)\| = 0, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = n^2 \delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha} n_{\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

При этом легко видеть, что $\omega_{\mu}(-\mathbf{k}) = -\omega_{\mu}(\mathbf{k})$ и (в силу реальности физических величин) $E_{1\mu}^*(\mathbf{k}) = E_{1\mu}(-\mathbf{k})$.

Далее не представляет труда написать общее выражение для амплитуды волны второго приближения. Нас, однако, будет интересовать лишь частное решение уравнения (3.1), справедливое в окрестности резонанса. Это решение имеет вид

$$E_{2\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{\tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega)}{\|\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)\|} \sum_{\nu\nu'} \sum_{\mu} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\sigma}_{\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega, \omega'(\mathbf{k}')) \times \quad (3.4)$$

$$\times E_{\nu\gamma}(\mathbf{k}') E_{\nu'\delta}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') [\delta(\omega - \omega_{\nu}(\mathbf{k}') - \omega_{\nu'}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')) - \delta(\omega - \omega_{\mu}(\mathbf{k}))],$$

где $\tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $\Lambda_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$.

Хорошо известно, что в резонансе имеет место линейный рост амплитуды поля, который легко получается при переходе от $E_{2\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$ (3.4) к $E_{2\alpha}(\mathbf{r}, t)$:

$$E_{2\alpha}(\mathbf{r}, t) = 4\pi t \sum_{\nu\nu'} \sum_{\mu} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mu}(\mathbf{k})t)] \times$$

$$\times \frac{\tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega_{\mu}(\mathbf{k}))}{\omega_{\mu}(\mathbf{k}) (\partial/\partial\omega) \|\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)\| \omega_{\mu}(\mathbf{k})} \tilde{\sigma}_{\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega_{\mu}(\mathbf{k}), \omega_{\nu}(\mathbf{k}')) \times \quad (3.5)$$

$$\times E_{\nu\gamma}(\mathbf{k}') E_{\nu'\delta}(\Delta\mathbf{k}).$$

Скорость систематического изменения электромагнитной энергии единицы объема среды определяется, как известно, выражением

$$w = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (3.6)$$

где \mathbf{D} — вектор индукции, для компоненты Фурье которого имеет место соотношение

$$D_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = E_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) + 4\pi i \omega^{-1} j_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.7)$$

Усредняя (3.6) по объему V , занимаемому средой, и используя (3.7), получим

$$\bar{\omega} = -\frac{i}{4\pi(2\pi V)^2} \sum_{\mathbf{k}} \int d\omega d\omega' \omega \exp[-i(\omega - \omega')t] \times \quad (3.8)$$

$$\times [E_i^*(\mathbf{k}\omega') \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\omega) E_j(\mathbf{k}\omega) + H_i^*(\mathbf{k}\omega') H_i(\mathbf{k}\omega)] + \dots$$

Всюду в дальнейшем мы ограничимся изучением резонансного взаимодействия волн и не будем рассматривать индуцированного рассеяния. Кроме того, мы будем предполагать, что число квазичастиц, образовавшихся в результате резонансного слияния, мало по сравнению с числом сливающихся квазичастиц. В таком случае можно пренебречь обратным процессом распада волн и ограничиться рассмотрением лишь резонансного слияния. Можно показать, что скорость изменения энергии, обусловленного резонансным слиянием волн, дается именно выписанными явно слагаемыми в (3.8), причем под амплитудами полей следует понимать амплитуды второго приближения в виде (3.4). Отсюда следует, что для наших целей достаточно знание лишь старшего по нелинейностям тензора электропроводности.

Подставляя (3.4) в (3.8) и усредняя по фазам, после несложных вычислений найдем

$$\bar{\omega} = \frac{8\pi^2}{V^4} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\nu\nu'} \sum_{\mu} \frac{1}{\omega_{\mu}^2(\mathbf{k})} \frac{\tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}\omega_{\mu}) \tilde{\Lambda}_{\beta'\alpha'}^*(\mathbf{k}\omega_{\mu})}{|\partial/\partial\omega| \|\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega)\|^2_{\omega_{\mu}}} \times$$

$$\times \left\{ \left(1 + \frac{\mathbf{k}^2 c^2}{\omega_{\mu}^2(\mathbf{k})} \right) \left(\delta_{\alpha\alpha'} - \frac{k_{\alpha} k_{\alpha'}}{k^2} \right) + \frac{k_{\alpha} k_{\alpha'}}{k^2} + \left[\frac{\partial}{\partial\omega} (\omega \varepsilon'_{ij}(\mathbf{k}\omega) - \delta_{ij}) \right]_{\omega_{\mu}} \right\} \times$$

$$\times \delta(\omega_{\nu}(\mathbf{k}') + \omega_{\nu'}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \omega_{\mu}(\mathbf{k})) \tilde{\sigma}_{\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega_{\mu}(\mathbf{k}), \omega_{\nu}(\mathbf{k}')) \times \quad (3.9)$$

$$\times \tilde{\sigma}_{\beta'\gamma'\delta'}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega_{\mu}(\mathbf{k}), \omega_{\nu'}(\mathbf{k}')) \langle E_{\nu\gamma}(\mathbf{k}') E_{\nu'\gamma'}(\mathbf{k}') \rangle \times$$

$$\times \langle E_{\nu\delta}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') E_{\nu'\delta'}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rangle,$$

где $\varepsilon'_{ij}(\mathbf{k}\omega)$ — реальная часть $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\omega)$, а $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по фазам.

Полученные соотношения и описывают скорость изменения энергии за счет процессов резонансного слияния. Для краткости будем называть эту величину мощностью нелинейной генерации. Заметим, что при выводе этих соотношений мы использовали тот факт, что в окрестности резонанса $\omega_{\nu}(\mathbf{k}') + \omega_{\nu'}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \omega_{\mu}(\mathbf{k})$ имеет место

$$\|\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega_{\mu})\|^2 \simeq [\omega_{\nu}(\mathbf{k}') + \omega_{\nu'}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \omega_{\mu}(\mathbf{k})]^2 \left| \frac{\partial}{\partial\omega} \|\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega)\| \right|_{\omega_{\mu}}^2. \quad (3.10)$$

В простейшем случае холодной изотропной плазмы, который будет рассмотрен впоследствии в качестве одного из примеров, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$. Используя это обстоятельство, из (3.9) немедленно получим

$$\bar{\omega} = \omega_T + \omega_L, \quad (3.11)$$

где

$$\omega_T = \frac{8\pi^2}{V^4} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\nu\nu'} \sum_{\mu} \frac{1}{\omega_{\mu}^2(\mathbf{k})} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial\omega} (\omega \varepsilon'(\mathbf{k}\omega)) \right]_{\omega_{\mu}} + \frac{\mathbf{k}^2 c^2}{\omega_{\mu}^2(\mathbf{k})} \right\} \times$$

$$\times \left(\delta_{\alpha\alpha'} - \frac{k_\alpha k_{\alpha'}}{k^2} \right) \frac{\tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}(k\omega_\mu) \tilde{\Lambda}_{\beta'\alpha'}^*(k\omega_\mu)}{\left| (\partial/\partial\omega) \parallel \Lambda_{\alpha\beta}(k\omega) \parallel \right|_{\omega_\mu}^2} \delta(\omega_\nu(k') + \omega_{\nu'}(k-k') - \omega_\mu(k)) \times \quad (3.12a)$$

$$\times \tilde{\sigma}_{\beta\gamma\delta}(kk', \omega_\mu, \omega_\nu) \tilde{\sigma}_{\beta'\gamma'\delta'}^*(kk', \omega_\mu, \omega_\nu) \langle E_{\nu\gamma}(k') E_{\nu\gamma'}^*(k') \rangle \langle E_{\nu\delta}(\Delta k) E_{\nu\delta'}^*(\Delta k) \rangle;$$

$$\omega_L = \frac{8\pi^2}{V^4} \sum_k \sum_{k'} \sum_{\nu\nu'} \sum_\mu \frac{1}{\omega_\mu^2(k)} \left[\frac{\partial}{\partial\omega} (\omega\varepsilon'(k\omega)) \right]_{\omega_\mu} \frac{k_\alpha k_{\alpha'}}{k^2} \times$$

$$\times \frac{\tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}(k\omega_\mu) \tilde{\Lambda}_{\beta'\alpha'}^*(k\omega_\mu)}{\left| (\partial/\partial\omega) \parallel \Lambda_{\alpha\beta}(k\omega) \parallel \right|_{\omega_\mu}^2} \delta(\omega_\nu(k') + \omega_{\nu'}(k-k') - \omega_\mu(k)) \times \quad (3.12б)$$

$$\times \tilde{\sigma}_{\beta\gamma\delta}(kk', \omega_\mu, \omega_\nu) \tilde{\sigma}_{\beta'\gamma'\delta'}^*(kk', \omega_\mu, \omega_\nu) \langle E_{\nu\gamma}(k') E_{\nu\gamma'}^*(k') \rangle \langle E_{\nu\delta}(\Delta k) E_{\nu\delta'}^*(\Delta k) \rangle.$$

4. ХОЛОДНАЯ ИЗОТРОПНАЯ ПЛАЗМА

Используем полученные выше общие результаты для описания резонансного слияния в простейшем случае холодной изотропной плазмы. Легко видеть, что

$$\parallel \Lambda_{\alpha\beta}(k\omega) \parallel = -\varepsilon(n^2 - \varepsilon)^2, \quad k_\alpha \tilde{\Lambda}_{\beta\alpha} = k_\beta (n^2 - \varepsilon)^2,$$

$$\left(\delta_{\alpha\alpha'} - \frac{k_\alpha k_{\alpha'}}{k^2} \right) \tilde{\Lambda}_{\beta\alpha}(k\omega) \tilde{\Lambda}_{\beta'\alpha'}^*(k\omega) = \varepsilon^2 (n^2 - \varepsilon)^2 \left(\delta_{\beta\beta'} - \frac{k_\beta k_{\beta'}}{k^2} \right), \quad (4.1)$$

где $\varepsilon = 1 - \Omega^2 \omega^{-2}$, $\Omega^2 = 4\pi e^2 n_0 m^{-1}$, а спектр линейных волн содержит следующие ветви:

$$\omega_{1,2} \simeq \pm \Omega \text{ — продольные волны,}$$

$$\omega_{3,4} \simeq \pm \sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2} \text{ — поперечные волны}$$

(то, что корни ω_3 и ω_4 двукратные, несущественно для данного рассмотрения).

Подставляя эти соотношения в (3.12б), для мощности нелинейной генерации продольного поля получим

$$\omega_L = \omega_L^{(LL)} + \omega_L^{(TL)} + \omega_L^{(TT)},$$

где

$$\omega_L^{(LL)} = \sum_{\mu=1}^2 \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\nu'=1}^2 \omega_L^{\nu\nu' \rightarrow \mu}, \quad \omega_L^{(TL)} = 2 \sum_{\mu=1}^2 \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\nu'=3}^4 \omega_L^{\nu\nu' \rightarrow \mu},$$

$$\omega_L^{(TT)} = \sum_{\mu=1}^2 \sum_{\nu=3}^4 \sum_{\nu'=3}^4 \omega_L^{\nu\nu' \rightarrow \mu}$$

— парциальные вклады от взаимодействия продольных волн с продольными, продольных с поперечными и поперечных с поперечными соответственно, а

$$\omega_L^{\nu\nu' \rightarrow \mu} = \frac{2\pi^2}{V^4} \sum_k \sum_{k'} \left(\frac{\partial \omega \varepsilon}{\partial \omega} \right)_{\omega_\mu} \frac{k_\beta k_{\beta'}}{k^2} \delta(\omega_\nu(k') + \omega_{\nu'}(\Delta k) - \omega_\mu(k)) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \tilde{\sigma}_{\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}\mathbf{k}', \omega_\mu, \omega_\nu) \tilde{\sigma}_{\beta'\gamma'\delta'}^*(\mathbf{k}\mathbf{k}', \omega_\mu, \omega_\nu) \langle E_{\nu\gamma}(\mathbf{k}') E_{\nu\gamma'}^*(\mathbf{k}') \rangle \times \\ & \times \langle E_{\nu\delta}(\Delta\mathbf{k}') E_{\nu\delta'}^*(\Delta\mathbf{k}') \rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

— мощность нелинейной генерации, связанная с элементарным актом слияния $\omega_\nu(\mathbf{k}') + \omega_{\nu'}(\Delta\mathbf{k}) = \omega_\mu(\mathbf{k})$.

Как и следовало ожидать, генерируемые продольные имеют частоты $\pm\Omega$. Кроме того, как легко видеть, слияние ленгмюровских волн не может давать опять ленгмюровскую волну, вследствие чего $\omega_L^{(L)} = 0$.

Остановимся подробно на случае взаимодействия поперечных волн, причем для простоты будем считать падающие поперечные волны коллинеарными и направленными вдоль оси z . Полагая тогда

$$\mathbf{k}_\beta = k\delta_{\beta z}, \quad E_\nu(\mathbf{k}) = L^2 E_\nu(k) \delta(k_x) \delta(k_y)$$

(где L — линейный размер системы), после некоторых преобразований найдем

$$\begin{aligned} \omega_L^{(TT)} \simeq & \frac{1}{16L^4} \sum_{\mu=1}^2 \sum_{\nu\nu'=3}^4 \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{(e/m)^2 k^2 \Omega^2}{\omega_\nu^2(\mathbf{k}') \omega_{\nu'}^2(\Delta\mathbf{k})} \delta(\omega_\nu(\mathbf{k}') + \omega_{\nu'}(\Delta\mathbf{k}) - \omega_\mu(\mathbf{k})) \times \\ & \times \langle E_{\nu\gamma}(\mathbf{k}') E_{\nu\gamma'}^*(\mathbf{k}') \rangle \langle E_{\nu\delta}(\Delta\mathbf{k}) E_{\nu\delta'}^*(\Delta\mathbf{k}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Переходя далее от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию и используя наличие δ -функции, получим

$$\begin{aligned} \omega_L^{(TT)} \simeq & \frac{1}{16L^4} \left(\frac{e\Omega}{m} \right)^2 \frac{L}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mu=1}^2 \sum_{\nu=3}^4 \sum_{\nu'=3}^4 \sum_i \frac{k_i^2}{|k_i - k'| c^2 \omega_\nu^2(\mathbf{k}') |\omega_{\nu'}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}')|} \times \\ & \times \langle E_{\nu\gamma}(\mathbf{k}') E_{\nu\gamma'}^*(\mathbf{k}') \rangle \langle E_{\nu\delta}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') E_{\nu\delta'}^*(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') \rangle, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где резонансный волновой вектор $\mathbf{k}_i \equiv \mathbf{k}_i(\mathbf{k}', \nu\nu', \mu)$ определяется как i -ый корень резонансного соотношения, соответствующего процессу $\nu\nu' \rightarrow \mu$. Из 8 элементарных актов, входящих в (4.4), резонансными являются лишь 4:

$$\begin{aligned} \Omega &= (\Omega^2 + k'^2 c^2)^{1/2} - [\Omega^2 + (k - k')^2 c^2]^{1/2}, \\ \Omega &= -(\Omega^2 + k'^2 c^2)^{1/2} + [\Omega^2 + (k - k')^2 c^2]^{1/2}, \\ -\Omega &= (\Omega^2 + k'^2 c^2)^{1/2} - [\Omega^2 + (k - k')^2 c^2]^{1/2}, \\ -\Omega &= -(\Omega^2 + k'^2 c^2)^{1/2} + [\Omega^2 + (k - k')^2 c^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

причем, как легко видеть,

$$\begin{aligned} k_1^{(\pm)} &= k_4^{(\pm)} = k' \pm Q_1(k') \quad (|k'| > \sqrt{3} \Omega c^{-1}), \\ k_2^{(\pm)} &= k_3^{(\pm)} = k' \pm Q_2(k') \quad (k' \text{ — произвольно}), \end{aligned}$$

где

$$Q_{1,2}(k') = \left[k'^2 + \frac{\Omega^2}{c^2} \mp 2 \frac{\Omega}{c} \left(k'^2 + \frac{\Omega^2}{c^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

(разумеется, должно еще иметь место условие $k_i v_T \Omega^{-1} \ll 1$).

Учитывая сказанное и предполагая для простоты, что падающие волны поляризованы вдоль оси x , из (4.4) без труда получим

$$\begin{aligned} \omega_L^{(TT)} \simeq & \frac{1}{16L^4} \left(\frac{e\Omega}{m} \right)^2 \frac{L}{2\pi} \left\{ \sum_{|k'| > \sqrt{3}\Omega c^{-1}} \frac{k'^2 + Q_1^2(k')}{\omega_3^2(k') |\omega_4(Q_1(k'))| |Q_1(k')|^2 c^2} \times \right. \\ & \times [|E_{3x}(k')|^2 |E_{4x}(Q_1(k'))|^2 + |E_{4x}(k')|^2 |E_{3x}(Q_1(k'))|^2] + \\ & + \sum_{k'} \frac{k'^2 + Q_2(k')}{\omega_4^2(k') |\omega_3(Q_2(k'))| |Q_2(k')|^2 c^2} [|E_{4x}(k')|^2 |E_{3x}(Q_2(k'))|^2 + \\ & \left. + |E_{3x}(k')|^2 |E_{4x}(Q_2(k'))|^2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В области $k' \gg \Omega c^{-1}$, $Q_{1,2}(k') \simeq k' \gg \Omega c^{-1}$ и, следовательно, эта область соответствует взаимодействию коротких волн. Полагая напряженность поля поперечной волны постоянной в некотором интервале волновых чисел Δk , получим следующее условие нормировки:

$$|E_{3,4}(k')|^2 L^{-1} = 4\pi^2 U_{T3,4} |\Delta k|^{-1}, \quad (4.6)$$

где $U_{T3,4}$ — плотность энергии в поперечной волне. Переходя далее в (4.5) от суммирования по k' к интегрированию и учитывая (4.6), без труда найдем

$$\omega_L^{(TT)} \simeq 4\pi^2 \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{U_{T3} U_{T4}}{\Omega} \frac{\Omega^3 c^{-3}}{k_1 k_2 (k_2 - k_1)}, \quad (4.7)$$

где k_2 и k_1 — верхняя и нижняя границы спектра соответственно.

В области $k' \ll \Omega c^{-1}$, $Q_2(k') \simeq \sqrt{3}\Omega c^{-1}$ и, следовательно, эта область соответствует взаимодействию длинных волн с волнами примерно ленгмюровской частоты. Мощность нелинейной генерации продольного поля находится аналогичным образом:

$$\omega_L^{(TT)} \simeq \frac{3}{4} \pi^2 \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{U_{T3} U_{T4}}{\Omega} \frac{\Omega^2 c^{-2}}{k_2^2 - k_1^2}. \quad (4.8)$$

Заметим, что резонансное взаимодействие коротких поперечных волн рассмотрено в работе [4], причем, на наш взгляд, результаты [4] находятся в качественном соответствии с результатами этой статьи.

Наконец, заметим, что соотношение (4.5) характеризует скорость диссипации в плазме энергии подводимого электромагнитного поля, обусловленной резонансным слиянием поперечных волн в продольные. Эту диссипацию удобно характеризовать нелинейным декрементом затухания, определяемым как

$$\gamma_T^{(нл)} = \omega_L^{(TT)} / 2U_T,$$

где $U_T = U_{T3} + U_{T4}$ — плотность энергии поперечного поля.

Рассмотрим теперь вопрос генерации поперечного поля. С использованием соотношений (3.12а) и (4.1) мощность генерации может быть представлена в виде трех слагаемых:

$$\omega_T = \omega_T^{(LL)} + \omega_T^{(LT)} + \omega_T^{(TT)},$$

где опять

$$\begin{aligned} \omega_T^{(LL)} &= \sum_{\mu=3}^4 \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\nu'=1}^2 \omega_T^{\nu\nu' \rightarrow \mu}, & \omega_T^{(LT)} &= 2 \sum_{\mu=3}^4 \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\nu'=3}^4 \omega_T^{\nu\nu' \rightarrow \mu}, \\ \omega_T^{(TT)} &= \sum_{\mu=3}^4 \sum_{\nu=3}^4 \sum_{\nu'=3}^4 \omega_T^{\nu\nu' \rightarrow \mu} \end{aligned}$$

— соответствующие парциальные вклады, а

$$\begin{aligned} \omega_T^{\nu\nu' \rightarrow \mu} &= \frac{2\pi^2}{V^4} \sum_k \sum_{k'} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon(\mathbf{k}\omega)) \right]_{\omega_\mu} + \frac{k^2 c^2}{\omega_\mu^2(\mathbf{k})} \right\} \left(\delta_{\beta\beta'} - \frac{k_\beta k_{\beta'}}{k^2} \right) \times \\ &\times \tilde{\sigma}_{\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}\mathbf{k}', \omega_\mu, \omega_\nu) \tilde{\sigma}_{\beta'\gamma'\delta'}(\mathbf{k}\mathbf{k}', \omega_\mu, \omega_\nu) \delta(\omega_\nu(\mathbf{k}') + \omega_{\nu'}(\Delta\mathbf{k}) - \\ &- \omega_\mu(\mathbf{k})) \langle E_{\nu\gamma}(\mathbf{k}') E_{\nu\gamma}^*(\mathbf{k}') \rangle \langle E_{\nu'\delta}(\Delta\mathbf{k}) E_{\nu'\delta}^*(\Delta\mathbf{k}') \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

— мощность генерации для элементарного акта $\nu\nu' \rightarrow \mu$. Естественно, что генерируемые за счет резонансных эффектов поперечные волны имеют частоты $\pm \sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2}$.

Исследуем сначала взаимодействие продольных волн. Из 8 элементарных актов, входящих в $\omega_T^{(LL)}$, резонансными являются лишь 2, причем резонансные условия

$$\Omega + \Omega \simeq \sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2}, \quad -\Omega - \Omega \simeq -\sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2}$$

удовлетворяются резонансным волновым вектором $|\mathbf{k}_p| \simeq \sqrt{3} \Omega c^{-1}$. Вводя для удобства скалярный потенциал, определяемый соотношением $E(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k})$, и проводя простые вычисления, найдем

$$\begin{aligned} \omega_T^{(LL)} &\simeq \frac{1}{8V^4} \left(\frac{e}{m\Omega} \right)^2 \sum_k \sum_{k'} (k^2 - k k')^2 \left[k'^2 - \frac{(k k')^2}{k^2} \right] \times \\ &\times \delta(2\Omega - \sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2}) [|\Phi_1(\mathbf{k}')|^2 |\Phi_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|^2 + |\Phi_2(\mathbf{k}')|^2 |\Phi_2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|^2]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если флуктуации в плазме находятся на уровне тепловых шумов, то, по крайней мере в области прозрачности, спектр колебаний можно считать не зависящим от волнового вектора. Если же, например, продольные колебания возбуждены пучком, то волновой вектор центра тяжести спектра много больше резонансного. Пренебрегая поэтому зависимостью Φ от \mathbf{k} (но не от \mathbf{k}') и ограничиваясь вкладом от $|\mathbf{k}'| \gg k_p$, из (4.10) получим

$$\omega_T^{(LL)} \simeq \frac{\pi}{c^5} \left(\frac{e\Omega}{m} \right)^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{k'} \sum_{n=1}^2 |\Phi_n(\mathbf{k}') V^{-1/2}|^2 |\Phi_n(-\mathbf{k}') V^{-1/2}|^2, \quad (4.11)$$

что практически совпадает с результатом работы [8]. В этой работе, кстати, указано, что при определенных условиях излучение, обусловленное нелинейным взаимодействием продольных волн, может оказаться существенным. Заметим еще, что соотношение (4.11), деленное на удвоенную плотность энергии продольного поля, представляет собой нелинейный декремент затухания продольного поля в плазме, обусловленного резонансным слиянием ленгмюровских волн в поперечные.

Распадное взаимодействие продольных волн рассмотрено в работе [1], причем полученное в этой работе характерное время слияния находится в соответствии с мощностью нелинейной генерации поперечного поля (4.11).

В заключение исследуем вклад в излучение резонансного взаимодействия продольных волн с поперечными. Вводя опять для продольного поля скалярный потенциал, для элементарного акта генерации получим

$$\omega_T^{\nu\nu' \rightarrow \mu} = \frac{1}{4V^4} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \sum_{k'} \frac{k'^4}{\omega_{\nu'}^2(\Delta\mathbf{k})} \delta(\omega_\nu(\mathbf{k}') + \omega_{\nu'}(\Delta\mathbf{k}) - \omega_\mu(\mathbf{k})) \times$$

$$\times |\Phi_v(\mathbf{k}')|^2 [|E_{v'}(\Delta\mathbf{k})|^2 - \frac{1}{k^2} |kE_{v'}(\Delta\mathbf{k})|^2]. \quad (4.12)$$

Положим для простоты, что поперечное поле представляет собой плоскополяризованную вдоль оси x монохроматическую волну с волновым вектором \mathbf{k}_0 , направленным вдоль оси z . Иными словами,

$$E_{v'}(\Delta\mathbf{k}) = V [E_{v'}(\mathbf{k}_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0) + E_{v'}^*(\mathbf{k}_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{k}_0)], \\ E_{v'} \equiv E_{v'}(E_{v'}, 0, 0), \quad \mathbf{k}_0 \equiv \mathbf{k}_0(0, 0, k_0).$$

В этих предположениях (4.12) принимает вид

$$w_T^{vv' \rightarrow \mu} = \frac{1}{2V} \frac{e^2}{m^2} \frac{k|\omega_\mu(\mathbf{k})|}{c^2\omega_v^2(\mathbf{k}_0)} \frac{1}{(2\pi)^3} |E_{v'}(\mathbf{k}_0)|^2 \Gamma(\mathbf{k}\mathbf{k}_0), \quad (4.13)$$

где \mathbf{k} — резонансный для данного элементарного акта волновой вектор, а

$$\Gamma(\mathbf{k}\mathbf{k}_0) = \int d\varphi d\vartheta \sin \vartheta |\Phi_v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \times \\ \times [(k^2 + k_0^2) - 2kk_0 \cos \vartheta]^2. \quad (4.14)$$

Из 8 элементарных актов, входящих в $w_T^{(LT)}$, резонансными являются лишь 4, причем соответствующие резонансные условия и волновые векторы определяются соотношениями

$$\sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2} = \Omega + \sqrt{\Omega^2 + k_0^2 c^2}, \quad -\sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2} = \Omega - \sqrt{\Omega^2 + k_0^2 c^2}; \\ \sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2} = -\Omega + \sqrt{\Omega^2 + k_0^2 c^2}, \quad -\sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2} = -\Omega - \sqrt{\Omega^2 + k_0^2 c^2}; \\ k_{p1} = k_{p4} = Q_2(k_0) \quad (k_0 \text{ — произвольно}); \\ k_{p3} = k_{p4} = Q_1(k_0) \quad (|k_0| > \sqrt{3} \Omega c^{-1}).$$

Если флуктуации продольного поля находятся на уровне тепловых шумов,

$$\Gamma = \frac{8\pi}{15} [5(k^2 + k_0^2)^2 + 4k^2 k_0^2] |\Phi|^2,$$

где $|\Phi|^2$ — пропорциональная температуре спектральная плотность флуктуаций, вследствие чего для мощности нелинейной генерации получаем

$$w_T^{(LT)} \simeq \frac{1}{15\pi^2} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{|\Phi|^2}{V} \left\{ k_1 \frac{|\omega_3(k_1)|}{\omega_3^2(k_0)} [5(k_1^2 + k_0^2)^2 + 4k_1^2 k_0^2] \times \right. \\ \times [|E_3(\mathbf{k}_0)|^2 + |E_4(\mathbf{k}_0)|^2] + k_2 \frac{|\omega_3(k_2)|}{\omega_3^2(k_0)} [5(k_2^2 + k_0^2)^2 + \\ \left. + 4k_2^2 k_0^2] [|E_3(\mathbf{k}_0)|^2 + |E_4(\mathbf{k}_0)|^2] \right\} \quad (4.15)$$

(второе слагаемое отлично от нуля, если только $|k_0| > \sqrt{3} \Omega c^{-1}$).

Учитывая нормировку продольных волн

$$|E_L^-|^2 V^{-1} = 4\pi (2\pi)^3 U_L(\Delta\mathbf{k})^{-1},$$

а также нормируя поперечную продольную волну условием

$$|E_{3,4}(k_0)|^2 = 2\pi U_{T3,4} = 2\pi U_T,$$

из (4.15) без труда получим

$$\begin{aligned} \omega_T^{(LT)} \simeq 32\pi^2 \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{U_T U_L}{k_D^3} \left\{ \frac{k_1 |\omega_3(k_1)|}{\omega_3^2(k_0) |k_1 - k_0|^2} [5(k_1^2 + k_0^2)^2 + \right. \\ \left. + 4k_1^2 k_0^2] + \frac{k_2 |\omega_3(k_2)|}{\omega_3^2(k_0) |k_2 - k_1|^2} [5(k_2^2 + k_0^2) + 4k_2^2 k_0^2] \right\}_{|k_i| > \sqrt{3} \omega_c^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Отсюда для коротких поперечных волн будем иметь

$$\omega_T^{(LT)} \simeq 1,5 \cdot 10^4 \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{U_T U_L}{\Omega} \left(\frac{k_0}{k_D}\right)^4 \frac{c}{v_T} \quad (k_0 c \gg \Omega), \quad (4.17)$$

а для длинных

$$\omega_T^{(LT)} \simeq 3 \cdot 10^3 \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{U_T U_L}{\Omega} \left(\frac{v_T}{c}\right)^3 \quad (k_0 c \ll \Omega). \quad (4.18)$$

Полученные соотношения показывают, что интенсивность рассеяния увеличивается в сторону коротких волн, становясь при $k_0 \sim k_D$ довольно значительной величиной.

Заметим, что распадное взаимодействие продольных волн с поперечными рассматривалось в работах [1,11]. При этом в работе [12] рассеивающиеся волны считались монохроматическими, а поперечные, кроме того, короткими. Вследствие этого можно говорить о качественном соответствии результатов.

В ряде случаев в плазме могут развиваться неравновесные, практически одномерные шумы. Такая ситуация имеет, например, место, когда ленгмюровские колебания раскачиваются пучком заряженных частиц преимущественно вдоль своей направленной скорости. Пусть z — направление, вдоль которого возбуждены продольные колебания. Представляя потенциал этих колебаний в виде

$$\Phi_{\nu}(k) = (2\pi)^2 \Phi_{\nu}(k_z) \delta(k_x) \delta(k_y)$$

и вновь полагая поперечную волну монохроматической (с волновым вектором k_0), из (4.12) после некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned} \omega_T^{v \rightarrow \mu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \sum_i \frac{(k_{zi} - k_0 \cos \vartheta_0)^4}{|k_{zi}| \omega_{\nu}^2(k_0)} [\Omega^2 + (k_0^2 \sin^2 \vartheta_0 + k_{zi}^2) c^2]^{1/2} \times \\ \times \left[1 - \frac{\cos^2 \psi_E}{\cos^2 \psi_E + \text{ctg}^2 \vartheta_0} \frac{(k_{zi} - k_0 \cos \vartheta_0)^2}{k_{zi}^2 + k_0^2 \sin^2 \vartheta_0} \right] |E_{\nu}(k_0)|^2 \left| \frac{\Phi_{\nu}(k_{zi} - k_0 \cos \vartheta_0)}{L^{1/2}} \right|^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где ϑ_0 — угол между z и k_0 , ψ_E — угол между осью x и проекцией E , на плоскость XOZ . При этом ось x выбрана в плоскости, проходящей через z и k_0 . Наконец, резонансные значения z -компоненты волнового вектора определяются уравнением $\omega_{\nu} + \omega_{\nu'} = \omega_{\mu}$ и имеют вид

$$k_{zi}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{c} [\Omega^2 \pm 2\Omega(\Omega^2 + k_0^2 c^2)^{1/2} + k_0^2 c^2 \cos^2 \vartheta_0]^{1/2}.$$

Рассмотрим конкретно случай, когда одномерные продольные колебания раскачены пучком. Соответствующая спектральная функция найдена в работе [9] и имеет вид

$$\frac{1}{L} |\Phi(k)|^2 = 4\pi^2 n_b m \frac{\Omega^2}{k^6} \frac{\Omega - kv_1}{u_b - v_1}. \quad (4.20)$$

Здесь n_b — плотность пучка, u_b — направленная скорость пучка, а

$$v_1 = \left(\frac{T_b}{2m} \right)^{1/2} \ln \left[\frac{n_0}{n_b} \frac{u_b}{(2\pi T/m)^{1/2}} \right]$$

— величина, при разумном выборе параметров пренебрежимая, по сравнению с u_b . Волновое число в (4.20) ограничено условием

$$0 < \frac{\Omega}{c} \ll \frac{\Omega}{v_2} < |k| \leq \frac{\Omega}{v_1},$$

где

$$v_2 \sim u_b [1 + (n_b/n_0)^{1/3}] \sim u_b.$$

Наконец, T_1 и T_b — температура плазмы и пучка соответственно.

Если $|k_0| \leq \Omega c^{-1}$, то $k_{zi}^{(-)}$ становится мнимым, а $k_{zi}^{(+)} \sim \Omega c^{-1}$, т. е. и $|k_{zi} - k_0 \cos \vartheta_0| \sim \Omega c^{-1}$. Следовательно, случай $|k_0| \sim \Omega c^{-1}$ не представляет интереса. Для длин волн $\Omega^2 \ll k_0^2 c^2 \cos^2 \vartheta_0$, которыми и ограничимся в настоящей работе, для мощности нелинейной генерации поперечного поля, обусловленной резонансным слиянием продольных волн с поперечными, получим

$$\begin{aligned} w_T^{(LT)} \simeq & \pi \frac{u_b}{c} \left(\frac{\Omega}{k_0 c} \right)^2 \left(\frac{\Omega_b}{k_0 u_b} \right)^2 \frac{\Omega U_T}{|\cos \vartheta_0|^3} \times \\ & \times \left(1 - 4 \cos^2 \vartheta_0 \frac{\cos^2 \psi_E}{\cos^2 \psi_E + \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

причем

$$0 < \frac{\Omega}{c} \ll \frac{\Omega}{v_2} < 2k_0 |\cos \vartheta_0| < \frac{\Omega}{v_1} \quad (0 \leq \vartheta_0 \leq \pi, \quad 0 \leq \psi_E \leq 2\pi).$$

В случае $\vartheta_0 = 0$, т. е. когда поперечная волна распространяется вдоль направления продольного шума, из (4.21) получаем

$$w_T^{(LT)} \simeq \pi \frac{u_b}{c} \left(\frac{\Omega}{k_0 c} \right)^2 \left(\frac{\Omega_b}{k_0 u_b} \right)^2 \Omega U_T. \quad (4.22)$$

Автор благодарен В. П. Силину, ознакомившемуся с работой и сделавшему ряд ценных замечаний, а также Л. М. Гобунову и В. В. Пустовалову за полезные обсуждения.

ДОПОЛНЕНИЕ

Выражение тензора электропроводности несколько конкретизируется, если нелинейные волны распространяются вдоль постоянного магнитного поля. Приравнивая тогда всюду в (1.8) k_{\perp} нулю, после некоторых вычислений найдем

$$\begin{aligned}
\sigma_{zzz} &= - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\omega}{k_z} \left\{ \sum_n \eta_n^0 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2) + \frac{\omega_{\alpha}}{2\Delta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_n^0 - \eta_{-(n+1)}^0 + \eta_{n+1}^0 - \eta_{-n}^0) \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_1F_1 \left(n + \frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2 \right) \right\}; \\
\sigma_{z\pm z} &= \pm \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\omega}{k_z} \frac{\Delta k_{\pm} \Delta k_z}{\Delta k_{\pm}^2} \frac{\omega_{\alpha}}{\Delta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{\pm(n+1)}^0 - \eta_{\mp n}^0) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \\
&\quad \times {}_1F_1 \left(n + \frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2 \right); \\
\sigma_{z\pm\pm} &= \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\omega}{k_z} \frac{\Delta k_{\pm}^2}{\Delta k_{\pm}^2} \frac{\Delta k_z}{\Delta\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{n+1}^0 + \zeta_{-(n+1)}^0) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right. \\
&\quad \times {}_2F_2 \left(n + \frac{3}{2}, n+2; n+1, 2n+3; -2\xi^2 \right) - 2\zeta_0 \frac{\partial}{\partial v_{T_{\alpha}}^2} [v_{T_{\alpha}}^2 e^{-\xi^2} I_1(\xi^2)] \Big\}; \\
\sigma_{z\pm\mp} &= \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\omega}{k_z} \frac{\Delta k_z}{\Delta\omega} \sum_n 2\zeta_{n\pm 1}^0 \frac{\partial}{\partial v_{T_{\alpha}}^2} [v_{T_{\alpha}}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)]; \\
\sigma_{zz\pm} &= \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\omega}{k_z} \left\{ \pm \frac{\Delta k_{\pm} \omega_{\alpha}}{\Delta k_{\pm}^2 v_{T_{\alpha}}^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{\mp(n+1)}^0 - \zeta_{\pm n}^0) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right. \\
&\quad \times {}_1F_1 \left(n + \frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2 \right) - \frac{\Delta k_{\pm}}{2\Delta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{n+1}^0 + \zeta_{-(n+1)}^0) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \\
&\quad \times {}_2F_2 \left(n + \frac{3}{2}, n+2; n+1, 2n+3; -2\xi^2 \right) - \\
&\quad \left. - \frac{\Delta k_{\pm}}{2\Delta\omega} \sum_{n\neq\pm 1} 2\zeta_{n\mp 1}^0 \frac{\partial}{\partial v_{T_{\alpha}}^2} [v_{T_{\alpha}}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)] \right\}; \\
\sigma_{\pm zz} &= \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \left\{ \pm \frac{\Delta k_{\pm} \omega_{\alpha}}{\Delta k_{\pm}^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{\pm(n+1)}^{\pm 1} - \eta_{\mp n}^{\pm 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right. \\
&\quad \times {}_1F_1 \left(n + \frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2 \right) + \frac{\Delta k_{\pm} v_{T_{\alpha}}^2}{\Delta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{\pm(n+2)}^{\pm 1} + \eta_{\mp n}^{\pm 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \\
&\quad \times {}_2F_2 \left(n + \frac{3}{2}, n+2; n+1, 2n+3; -2\xi^2 \right) + \frac{2\Delta k_{\pm} v_{T_{\alpha}}^2}{\Delta\omega} \times \\
&\quad \times \sum_{n\neq\pm 1} \eta_n^{\pm 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_{\alpha}}^2} [v_{T_{\alpha}}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)] + \frac{\Delta k_{\pm}}{\Delta\omega} \sum_n \chi_n^{\pm 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_{\alpha}}^2} [v_{T_{\alpha}}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)] \Big\}; \\
\sigma_{\pm} &= \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\Delta k_{\pm}^2}{\Delta k_{\pm}^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{\pm(n+1)}^{\pm 1} + \zeta_{\mp(n+1)}^{\pm 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+2; n+1, 2n+3; -2\xi^2\right) - \\
 & - 2\zeta_0^{\pm 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_\alpha}^2} [v_{T_\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_1(\xi^2)] \pm \frac{\omega_\alpha}{2\Delta\omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{\pm(n+2)}^{\pm 1} - \zeta_{\mp(n+1)}^{\pm 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+2)} \times \right. \\
 & \times {}_2F_2\left(n+2, n+\frac{5}{2}; n+1, 2n+4; -2\xi^2\right) + 3(\zeta_0^{\pm 1} - \zeta_{\pm 1}^{\pm 1}) \xi^4 {}_1F_1\left(\frac{5}{2}; 3; -2\xi^2\right) \left. \right] \pm \\
 & \pm \frac{\omega_\alpha}{\Delta\omega v_{T_\alpha}^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_{\pm n}^{\pm 1} - \psi_{\mp(n+1)}^{\pm 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) \pm \\
 & \pm \frac{\omega_\alpha}{\Delta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{\pm n}^{\pm 1} - \zeta_{\mp(n+1)}^{\pm 1}) \frac{n+2}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+3; n+2, 2n+2; -2\xi^2\right) \left. \right\}; \\
 & \sigma_{\mp z \pm} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \left\{ \sum_n 2\zeta_{\pm(n-1)}^{\mp 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_\alpha}^2} [v_{T_\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)] \pm \frac{\omega_\alpha}{\Delta\omega v_{T_\alpha}^2} \times \right. \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_{\pm n}^{\mp 1} - \psi_{\mp(n+1)}^{\mp 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) \pm \frac{\omega_\alpha}{\Delta\omega} \times \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{\pm n}^{\mp 1} - \zeta_{\mp(n+1)}^{\mp 1} + \zeta_{\pm(n-1)}^{\mp 1} - \zeta_{\mp(n+2)}^{\mp 1}) \frac{n+2}{2^n n!} \times \\
 & \times \xi^{2(n+1)} {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+3; n+2, 2n+2; -2\xi^2\right) \left. \right\}; \\
 & \sigma_{\mp \pm z} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \left\{ 2 \sum_n \left(\varphi_{\pm 1}^{\mp 1} - \frac{\Delta k_z}{\Delta\omega} \chi_{\pm n}^{\mp 1} \right) e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2) - \right. \\
 & - 2 \frac{\Delta k_z}{\Delta\omega} v_{T_\alpha}^2 \sum_n \eta_{\pm n}^{\mp 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_\alpha}^2} [v_{T_\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)] \pm \\
 & \pm \frac{\omega_\alpha}{\Delta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{\pm n}^{\mp 1} - \varphi_{\mp(n+1)}^{\mp 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) \left. \right\}; \\
 & \sigma_{\pm \pm z} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \frac{\Delta k_\pm^2}{\Delta k_\pm^2} \left\{ \frac{2v_{T_\alpha}^2 \Delta k_z}{\Delta\omega} \left[2\eta_{\pm 1}^{\pm 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_\alpha}^2} [v_{T_\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_1(\xi^2)] - \right. \right. \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_{\pm(n+2)}^{\pm 1} - \eta_{\mp(n+1)}^{\pm 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+2; n+1, 2n+3; -2\xi^2\right) \left. \right] \mp \\
 & \mp \frac{\omega_\alpha}{\Delta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{\pm(n+1)}^{\pm 1} - \varphi_{\mp n}^{\pm 1}) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) \left. \right\}; \\
 & \sigma_{\pm \pm \pm} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha^2} \frac{\Delta k_\pm^3}{\Delta k_\pm^2} \frac{1}{\Delta\omega} \left\{ +\Delta k_z \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{\mp(n-1)}^{\pm 1} - \zeta_{\pm(n+2)}^{\pm 1}) \frac{v_{T_\alpha}^2}{\omega} \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right. \right.
 \end{aligned}$$

(Д.1)

$$\begin{aligned}
& \times {}_2F_2\left(n+2, n+\frac{5}{2}; n+1, 2n+4; -2\xi^2\right) + 3\left(\zeta_{\pm 1}^{\pm 1} - \zeta_0^{\pm 1}\right) \frac{v_{T_\alpha}^2}{\omega_\alpha} \xi^2 \times \\
& \times {}_1F_1\left(\frac{5}{2}; 3; -2\xi^2\right) \Big] + \left[2\xi_0^{\pm 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_\alpha}^2} [v_{T_\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_1(\xi^2)] - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\xi_{\pm(n+1)}^{\pm 1} + \xi_{\mp(n+1)}^{\pm 1}\right) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right. \\
& \quad \left. \times {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+2; n+1, 2n+3; -2\xi^2\right) \Big] \Big\}; \\
\sigma_{\mp\pm\pm} &= 2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \Delta k_{\pm} \left\{ \frac{1}{\Delta \omega} \sum_n \xi_{\pm(n-1)}^{\mp 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_\alpha}^2} [v_{T_\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)] \mp \right. \\
& \quad \mp \frac{\Delta k_z \omega_{\alpha}}{\Delta k_{\perp}^2 \Delta \omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\zeta_{\pm n}^{\mp 1} - \zeta_{\mp(n+1)}^{\mp 1}\right) \frac{n+2}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \\
& \quad \times {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+3; n+2, 2n+2; -2\xi^2\right) \pm \\
& \quad \pm \frac{\omega_{\alpha}}{\Delta k_{\perp}^2 v_{T_\alpha}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\xi_{\pm n}^{\mp 1} - \xi_{\mp(n+1)}^{\mp 1}\right) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) \mp \\
& \quad \mp \frac{\Delta k_z \omega_{\alpha}}{\Delta k_{\perp}^2 \Delta \omega v_{T_\alpha}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\psi_{\pm n}^{\mp 1} - \psi_{\mp(n+1)}^{\mp 1}\right) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \\
& \quad \left. \times {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) \Big\}; \\
\sigma_{\mp\pm\mp} &= -\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \Delta k_{\mp} \left\{ \pm \frac{\Delta k_z \omega_{\alpha}}{\Delta k_{\perp}^2 \Delta \omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\zeta_{\pm(n+1)}^{\mp 1} - \zeta_{\mp n}^{\mp 1}\right) \frac{2(n+2)}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right. \\
& \quad \times {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+3; n+2, 2n+2; -2\xi^2\right) \mp \frac{2\omega_{\alpha}}{\Delta k_{\perp}^2 v_{T_\alpha}^2} \times \\
& \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\xi_{\pm(n+1)}^{\mp 1} - \xi_{\mp n}^{\mp 1}\right) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) \pm \\
& \quad \pm \frac{2\Delta k_z \omega_{\alpha}}{\Delta \omega \Delta k_{\perp}^2 v_{T_\alpha}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\psi_{\pm(n+1)}^{\mp 1} - \psi_{\mp n}^{\mp 1}\right) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \\
& \quad \times {}_1F_1\left(n+\frac{3}{2}; 2n+2; -2\xi^2\right) + \frac{1}{\Delta \omega} \left[2\xi_0^{\mp 1} \frac{\partial}{\partial v_{T_\alpha}^2} [v_{T_\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_1(\xi^2)] - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\xi_{\pm(n+1)}^{\mp 1} + \xi_{\mp(n+1)}^{\mp 1}\right) \frac{1}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} {}_2F_2\left(n+\frac{3}{2}, n+2; 2n+1, 2n+3; -2\xi^2\right) \Big] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\pm\pm\mp} = -2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\Delta k_{\pm}}{\Delta \omega} \left\{ \pm \frac{\Delta k_z}{\Delta k_{\perp}^2} \omega_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{\pm(n+2)}^{\pm 1} - \zeta_{\mp(n-1)}^{\pm 1}) \frac{n+2}{2^n n!} \xi^{2(n+1)} \times \right. \\ \times {}_2F_2 \left(n + \frac{3}{2}, n+3; n+2, 2n+2; -2\xi^2 \right) + \sum_n \xi_{\pm(n+1)}^{\pm 1} \times \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial v_{T\alpha}^2} [v_{T\alpha}^2 e^{-\xi^2} I_{|n|}(\xi^2)] \right\}.$$

Здесь

$$\eta_n^m = \int dv_z \frac{1}{\omega - m\omega_{\alpha} - k_z v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{\omega' - n\omega_{\alpha} - k'_z v_z} \frac{\partial f_{0\alpha}(v_z)}{\partial v_z}, \\ \zeta_n^m = \int dv_z \frac{1}{\omega - m\omega_{\alpha} - k_z v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{\omega' - n\omega_{\alpha} - k'_z v_z} f_{0\alpha}(v_z), \\ \chi_n^m = \int dv_z v_z \frac{1}{\omega - m\omega_{\alpha} - k_z v_z} \frac{1}{\omega' - n\omega_{\alpha} - k'_z v_z} \frac{\partial f_{0\alpha}(v_z)}{\partial v_z}, \\ \psi_n^m = \int dv_z v_z \frac{1}{\omega - m\omega_{\alpha} - k_z v_z} \frac{1}{\omega' - n\omega_{\alpha} - k'_z v_z} f_{0\alpha}(v_z), \\ \varphi_n^m = \int dv_z \frac{1}{\omega - m\omega_{\alpha} - k_z v_z} \frac{1}{\omega' - n\omega_{\alpha} - k'_z v_z} \frac{\partial f_{0\alpha}(v_z)}{\partial v_z}, \\ \xi_n^m = \int dv_z \frac{1}{\omega - m\omega_{\alpha} - k_z v_z} \frac{1}{\omega' - n\omega_{\alpha} - k'_z v_z} f_{0\alpha}(v_z), \quad (Д.2)$$

$\xi^2 = \Delta k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 \omega_{\alpha}^{-2}$, ${}_{\alpha}F_{\beta}$ — стандартное обозначение для гипергеометрических функций, $v_{T\alpha}^2 = T_{\alpha}/m_{\alpha}$.

В случае сильных магнитных полей, либо в случае, когда протяженность плазмы в каком-либо одном измерении значительно превышает протяженность в остальных измерениях (например, плазменный цилиндр, длина которого много больше радиуса), колебания могут считаться одномерными. Нелинейный тензор электропроводности может тогда быть получен из (Д.1) в предположении $\Delta k_{\perp} = 0$, причем отличные от нуля компоненты имеют вид

$$\sigma_{zzz} = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\omega}{k_z} \gamma_0^0(\omega k_z \omega' k'_z), \\ \sigma_{z\pm\mp} = 2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \frac{\omega}{k_z} \frac{\Delta k_z}{\Delta \omega} \zeta_{\pm 1}^0(\omega k_z \omega' k'_z), \\ \sigma_{\mp z \pm} = 2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \zeta_{\mp 1}^1(\omega k_z \omega' k'_z), \quad (Д.3) \\ \sigma_{\pm\mp z} = 2 \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \left(\varphi_0^{\pm 1} - \frac{\Delta k_z}{\Delta \omega} \chi_0^{\pm 1} - \frac{\Delta k_z v_{T\alpha}^2}{\Delta \omega} \gamma_0^{\pm 1} \right).$$

Одномерные колебания плазмы вдоль магнитного поля с учетом нелинейных эффектов были рассмотрены в [5], однако тензор электропроводности там не выписывался.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 1437 (1964); Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 203 (1964).
2. В. И. Карпман, ЖЭТФ, 44, 1309 (1963); Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 47, 1552 (1964).
3. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, 43, 2234 (1962).
4. Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 47, 1454 (1964).
5. Н. П. Гиоргадзе, Н. Л. Цинцадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 263 (1964).
6. Н. П. Гиоргадзе, ЖТФ, 34, 1580 (1964).
7. И. А. Ахиезер, И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 46, 300 (1964).
8. R. E. Aamodt, W. E. Drummond, Plasma Phys., 6, 147 (1964).
9. В. Д. Шапиро, ЖЭТФ, 44, 613 (1963).
10. А. П. Кропоткин, В. В. Пустовалов, ЖЭТФ, 49, 1345 (1965).
11. Н. П. Гиоргадзе, Е. М. Хирсели, Н. Л. Цинцадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
12. Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ДАН СССР (в печати).

Институт физики
АН Грузинской ССР

Поступила в редакцию
25 января 1965 г.

ON MAGNETOACTIVE PLASMA NONLINEAR OSCILLATIONS

N. P. Giorgadze

The nonlinear tensor of electric conductivity of magnetoactive plasma has been calculated and the effectiveness (caused by the resonance „confluence“ of different modes) of longitudinal and transverse field generation has been determined. The general relations have been used for examination of wave „confluence“ processes in an isotropic plasma.

УДК 621.371.182

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

А. Н. Кондратенко, В. И. Лиокумович, П. Н. Рыбин

В случае слабой нелинейности рассмотрены электромагнитные волны в изотропном слое плазмы, а также в слое плазмы, находящемся в постоянном сильном магнитном поле. Найдены вторые гармоники волн; получены нелинейные дисперсионные уравнения. В полуограниченной плазме вблизи граничной частоты фазовая скорость оказывается существенно зависящей от амплитуды поля волны.

Изучение распространения электромагнитных волн в плазме представляет значительный интерес в связи с возможностью нагрева плазмы с помощью высокочастотных колебаний, диагностикой плазмы, ускорением заряженных частиц и другими приложениями. Наличие границ плазмы может существенно изменить ее дисперсионные характеристики; кроме того, оно приводит к появлению поверхностных волн. Линейная гидродинамическая теория электромагнитных волн в ограниченной плазме изучена достаточно хорошо (см., например, [1-4]). Однако плазма является нелинейной средой; поэтому при достаточно больших амплитудах распространяющихся в ней электромагнитных волн неизбежно проявление нелинейных эффектов, особенно в случае малых фазовых скоростей. Без учета теплового движения частиц нелинейность плазмы сказывается в появлении гармоник, зависимости фазовой скорости волны от амплитуды поля, нелинейного взаимодействия волн и ряда других явлений.

Нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в ограниченной плазме, являются уравнениями в частных производных. В общем случае нелинейными оказываются и граничные условия. Решение таких уравнений сопряжено со значительными математическими трудностями.

В случае малой (но конечной) амплитуды распространяющейся волны решение можно искать в виде ряда по малому параметру [5, 6], как это делается в асимптотическом методе решения нелинейных уравнений в обыкновенных производных [7]. При этом в каждом приближении уравнения в частных производных сводятся к линейным уравнениям в обыкновенных производных с известной правой частью и граничными условиями.

Электромагнитные волны конечной амплитуды в плазменном цилиндре малого радиуса рассматривались в работах [5, 6], где зависимость фазовой скорости волны от параметра нелинейности получена для частоты распространяющейся волны много меньше ленгмюровской. Ограничения на размеры плазмы и частоту волны, принятые в этих работах, привели к тому, что некоторые интересные результаты не были рассмотрены.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей статье мы рассмотрим распространение электромагнитных волн малой, но конечной амплитуды в однородном плазменном слое произвольной толщины. Систему координат выбираем таким образом, что ось x нормальна к слою (координаты границ слоя $x = \pm a$), а ось z вдоль направления распространения волны. Исходная гидродинамическая система уравнений состоит из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} n \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi e(n - n_0) \quad (1.3)$$

и уравнения движения электронов плазмы

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{e}{m} \mathbf{E} = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \frac{e}{mc} [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad (1.4)$$

где \mathbf{v} — скорость, e — заряд, m — масса, n — плотность, n_0 — равновесная плотность электронов плазмы, равная плотности ионов, движением которых пренебрегли.

Будем рассматривать E -волну (E_x, E_z, H_y). Поле E_z предполагаем четным ($E_z(x) = E_z(-x)$) и обращаемым в нуль при $x \rightarrow \pm \infty$.

Решение уравнений (1.1)–(1.4) в плазме и вакууме необходимо сшить на границе раздела плазма—вакуум. Интегрируя уравнения (1.1) и (1.2) на подвижной границе электронов плазмы в пределах $a - \delta, a + \delta$ и положив $\delta = 0$, найдем, что в лабораторной системе координат имеют место соотношения [5]

$$\{E_z\} = \frac{v_x}{c} \{H_y\}, \quad (1.5)$$

$$\{H_y\} = \frac{v_z}{c} \{E_x\} - \frac{v_x}{c} \{E_z\}, \quad (1.6)$$

где $\{A_i\}$ — скачок величины A_i на границе плазма—вакуум.

Слагаемое, пропорциональное v_z в формуле (1.6), представляет собой поверхностный ток, обусловленный нелинейностью ($n v_z$); слагаемые, пропорциональные v_x , появляются вследствие перехода из подвижной системы в лабораторную [8]. При выводе формул (1.5) и (1.6) мы пренебрегли смещением электронов от границы ионного остова, что возможно при $\omega \ll \Omega$ [5], в плазме твердых тел; точно так же можно пренебречь смещением в плазме, находящейся в бесконечно сильном магнитном поле, параллельном границе плазмы. Заметим, что слагаемые, пропорциональные v_x в соотношениях (1.5) и (1.6), в рассмотренных нами случаях оказываются малыми и роли не играют.

Нелинейность будем предполагать слабой. Малым параметром задачи является величина $\varepsilon = e E_0 k_3 m^{-1} \omega^{-2}$, где E_0 — амплитуда напряженности поля волны. Решение уравнений (1.1) и (1.4) с точностью до ε^m ищем в виде

$$A(x, z, t) = \sum_{n=1}^m \varepsilon^n R_n(x, \varepsilon) T_n(\omega, \xi), \quad \xi = t - \frac{k_3}{\omega} z. \quad (1.7)$$

При этом в каждом нечетном приближении необходимо уточнять (по ϵ) фазовую скорость. В дальнейшем будем считать, что зависимость от координаты y отсутствует.

2. СИЛЬНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1) Рассмотрим сначала, как более простой случай, слой плазмы, находящейся в бесконечно сильном магнитном поле ($\omega_{He} \gg \Omega$). При этом $v_x = 0$, а остальные неизвестные с точностью до ϵ^3 включительно определяются из следующей системы уравнений [6]:

$$\frac{c^2 \beta^2}{1 - \beta^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \Omega^2 E_z = \frac{mc \beta \Omega^2}{2e} \left(3 \frac{\partial u^2}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u^3}{\partial \xi} \right), \quad (2.1)$$

$$E_x = - \frac{c \beta}{1 - \beta^2} \int \frac{\partial E_z}{\partial x} d\xi, \quad (2.2)$$

$$H_y = \beta E_x, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = - \frac{e E_z}{mc \beta} + u \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad (2.4)$$

где $\beta = v_\phi c^{-1}$, $v_\phi = \omega k_3^{-1}$, $u = v_z v_\phi^{-1}$, $\Omega^2 = 4\pi e^2 n_0 m^{-1}$. При выводе уравнения (2.1) вместо (1.3) было использовано уравнение непрерывности.

С учетом соотношения (2.3) граничные условия (1.5) и (1.6) принимают вид

$$\{E_z\}, \{H_y\} = \{E_x\} = 0. \quad (2.5)$$

Решая уравнения (2.1)–(2.4) в первом (линейном) приближении, получим следующие значения для полей и скорости электронов в плазме:

$$E_z = E_0 \cos(k_\perp x) \cos \psi, \quad (2.6)$$

$$E_x = \frac{E_0}{1 - \beta^2} \frac{k_\perp}{k_3} \sin(k_\perp x) \sin \psi, \quad (2.7)$$

$$u = - \epsilon \cos(k_\perp x) \sin \psi, \quad (2.8)$$

где

$$k_\perp^2 = - \epsilon_3 k_3^2 (1 - \beta^2), \quad \epsilon_3 = 1 - \Omega^2 \omega^{-2}, \quad \psi = \omega \xi.$$

В вакууме решение уравнений (2.1) и (2.2) имеет вид

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_1 e^{-\kappa|x|} \cos \psi, \quad \mathcal{E}_x = k_3 x^{-1} \mathcal{E}_1 e^{-\kappa|x|} \sin \psi, \quad (2.9)$$

где $\kappa = k_3(1 - \beta^2)^{1/2}$.

Используя непрерывность полей на границе плазма–вакуум, получим дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в рассматриваемых условиях:

$$\cos(k_\perp a) = \sqrt{-\epsilon_3} \sin(k_\perp a). \quad (2.10)$$

2) Чтобы получить уравнения второго приближения, надо в правую часть уравнения (2.1) подставить линейное решение. Представляя E_z во втором приближении в виде $E_z^{(2)} = E_0 R_2(x) \sin(2\psi)$, получим следующее уравнение для определения $R_2(x)$:

$$\frac{d^2 R_2}{dx^2} + q^2 R_2 = f_0 \cos^2(k_\perp x), \quad (2.11)$$

где

$$q^2 = \frac{\gamma^2 k_{\perp}^2}{-\varepsilon_3 \omega^2}, \quad \gamma^2 = \Omega^2 - 4\omega^2, \quad f_0 = -\frac{3\varepsilon \Omega^2}{2\varepsilon_3 \omega^2} k_{\perp}^2.$$

Решая уравнения (2.11), (2.2), (2.4), найдем, что в плазме во втором приближении

$$E_z^{(2)} = E_0 \left[A \cos(qx) + \frac{f_0}{2q^2} + \frac{f_0 \cos(2k_{\perp} x)}{2(q^2 - 4k_{\perp}^2)} \right] \sin(2\psi), \quad (2.12)$$

$$E_x^{(2)} = -\frac{1}{1-\beta^2} \frac{E_0}{2k_3} \left[Aq \sin(qx) + \frac{f_0 k_{\perp} \sin(2k_{\perp} x)}{q^2 - 4k_{\perp}^2} \right] \cos(2\psi), \quad (2.13)$$

$$u^{(2)} = \frac{\varepsilon}{2} \left[A \cos(qx) + \frac{f_0}{2q^2} + \frac{f_0 \cos(2k_{\perp} x)}{2(q^2 - 4k_{\perp}^2)} - \frac{\varepsilon}{2} \cos^2(k_{\perp} x) \right] \cos(2\psi). \quad (2.14)$$

Поля в вакууме во втором приближении имеют вид

$$\varepsilon_z^{(2)} = \varepsilon_2 e^{-2|x|} \sin(2\psi), \quad \varepsilon_x^{(2)} = -\frac{k_3}{x} \varepsilon_2 e^{-2|x|} \cos(2\psi). \quad (2.15)$$

Используя непрерывность полей на границе плазма—вакуум, определим неизвестные постоянные A и ε_3 :

$$A = \frac{f_0}{2x \cos(qa) - q \sin(qa)} \left[\frac{k_{\perp} \sin(2k_{\perp} a) - x \cos(2k_{\perp} a)}{q^2 - 4k_{\perp}^2} - \frac{x}{q^2} \right], \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_3 = E_0 e^{2xa} \left[A \cos(qa) + \frac{f_0}{2q^2} + \frac{f_0 \cos(2k_{\perp} a)}{2(q^2 - 4k_{\perp}^2)} \right]. \quad (2.17)$$

Если частота распространяющейся волны $\omega \simeq \Omega/2$, то $|\gamma^2| \ll \omega^2$, $|q^2| \ll k_{\perp}^2$ и поля в плазме резко возрастают (резонанс):

$$E_z^{(2)} = 3E_0 \frac{\varepsilon}{\Delta} \left[1 - \frac{\cos(qx)}{\cos(qa)} \right] \sin(2\psi), \quad (2.12a)$$

$$E_x^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta(1-\beta^2)}} \frac{\sin(qx)}{\cos(qa)} \cos(2\psi), \quad (2.13a)$$

где $\Delta = \gamma^2 \omega^{-2}$.

Отброшенные в (2.12a) слагаемые порядка Δ , а в (2.13a) — порядка $|\sqrt{\Delta}| \ll 1$ по отношению к удержанным членам. Заметим, что в случае тонкого слоя плазмы (либо точного равенства $2\omega = \Omega$), когда $|qa| \ll 1$, резонанс исчезает.

3) После подстановки в правую часть уравнения (2.1) первого и второго приближения для E_z получим следующее уравнение (в третьем приближении):

$$\frac{c^2 \beta^2}{1-\beta^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \Omega^2 E_z = \frac{3}{4} E_0 \Omega^2 \varepsilon \left[A \cos(qx) + \frac{f_0}{2q^2} + \frac{f_0 \cos(2k_{\perp} x)}{2(q^2 - 4k_{\perp}^2)} - \frac{3}{2} \varepsilon \cos^2(k_{\perp} x) \right] \cos(k_{\perp} x) \cos \psi + D(x) \cos(3\psi). \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) уточняет по ε координатные функции полей линейного приближения, а через величину $D \sim \varepsilon^2 E_0$ определяет третью гармонику, которой мы интересоваться не будем. Поэтому решение уравнения (2.18) ищем в виде $E_z = E_0 R_1(x, \varepsilon) \cos \psi$, где R_1 находится из уравнения

$$\frac{d^2 R_1}{dx^2} + k_{\perp}^2 R_1 = F_1 \cos(k_{\perp} x) + A \frac{f_0}{2} \cos(qx) \cos(k_{\perp} x) + F_2 \cos(3k_{\perp} x). \quad (2.19)$$

Здесь

$$F_1 = \frac{f_0^2}{4} \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{2(q^2 - 4k_{\perp}^2)} - \frac{9\varepsilon}{4f_0} \right),$$

$$F_2 = \frac{f_0^2}{8} \left(\frac{1}{q^2 - 4k_{\perp}^2} - \frac{3\varepsilon}{2f_0} \right).$$

Поскольку правая часть уравнения (2.19) содержит секулярное слагаемое, то R_1 ищем в виде [7]

$$R_1 = \cos \varphi - M_1(x, \varepsilon), \quad \partial \varphi / \partial x = k_{\perp} + \varepsilon^2 N, \quad (2.20)$$

после чего получим $\varepsilon^2 N = -F_1 / 2k_{\perp}$

$$M_1 = \frac{A f_0 \cos[(q + k_{\perp})x]}{4q(q + 2k_{\perp})} + \frac{A f_0 \cos[(q - k_{\perp})x]}{4q(q - 2k_{\perp})} + \frac{F_2}{8k_{\perp}^2} \cos(3k_{\perp} x). \quad (2.21)$$

Таким образом, с точностью до ε^2 включительно первые гармоники (по времени) полей в плазме равны

$$E_z = E_0 \{ \cos[(k_{\perp} - F_1/2k_{\perp})x] - M_1(x) \} \cos \psi, \quad (2.22)$$

$$E_x = \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{E_0}{k_{\perp}} \left\{ \left(k_{\perp} - \frac{F_1}{2k_{\perp}} \right) \sin \left[\left(k_{\perp} - \frac{F_1}{2k_{\perp}} \right) x \right] - M_2(x) \right\} \sin \psi, \quad (2.23)$$

где

$$M_2(x) = \frac{A f_0 (q + k_{\perp})}{4q(q + 2k_{\perp})} \sin[(q + k_{\perp})x] + \frac{A f_0 (q - k_{\perp})}{4q(q - 2k_{\perp})} \sin[(q - k_{\perp})x] - \frac{3F_2}{8k_{\perp}} \sin(3k_{\perp} x). \quad (2.23a)$$

Приравняв поля в плазме (2.22) и (2.23) соответствующим компонентам полей в вакууме (2.9), получим нелинейное дисперсионное уравнение

$$\frac{\varkappa \{ \cos[(k_{\perp} - F_1/2k_{\perp})a] - M_1(a) \}}{(k_{\perp} - F_1/2k_{\perp}) \sin[(k_{\perp} - F_1/2k_{\perp})a] - M_2(a)} = 1. \quad (2.24)$$

В случае $\varepsilon = 0$ уравнение (2.24) переходит в уравнение линейного приближения (2.10). Исследуем в некоторых частных случаях уравнение (2.24). Если $\varepsilon_3 \rightarrow 0$, то из (2.26) найдем, что $\cos[(k_{\perp} - F_1/2k_{\perp})a] \rightarrow 0$, откуда для фазовой скорости получим следующее значение:

$$\beta = \frac{\Omega \sqrt{-\varepsilon_3}}{c A_n} \left(1 - \frac{27}{64} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_3} \right), \quad (2.25)$$

где $A_n = (\pi/2a)(2n + 1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Если $\omega \ll \Omega$ ($\varepsilon_3 \rightarrow -\infty$), то $\sin[(k_{\perp} - F_1/2k_{\perp})a] \rightarrow 0$, вследствие чего

$$\beta^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + B_n^2 c^2 (1 - 3\varepsilon^2/16)}, \quad B_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (2.26)$$

Из формул (2.25) и (2.26) видно, что с увеличением параметра нелинейности фазовая скорость волны увеличивается. Особенно существен-

ной оказывается нелинейность в случае $\omega \rightarrow \Omega$. Это связано с тем, что в данном случае фазовая скорость, определенная по линейному приближению, стремится к нулю, а $\varepsilon \sim 1/\beta$.

3. ПЛАЗМЕННЫЙ СЛОЙ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ И ВТОРЫЕ ГАРМОНИКИ

1) В случае свободного плазменного слоя магнитное поле волны определяется из уравнения

$$\frac{\partial H_y}{\partial \xi} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial E_x}{\partial \xi} + c \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (3.1)$$

скорость электронов плазмы находится из уравнения (1.4), а электрическое поле волны из уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \Omega^2 E + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\frac{m}{e} \Omega^2 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \frac{\Omega^2}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{v} \operatorname{div} E. \quad (3.2)$$

Решая уравнения (1.4), (3.1), (3.2), найдем, что в первом (линейном) приближении компоненты поля в плазме и скорости электронов имеют вид

$$E_x = -\frac{k_3}{k_1} E_0 \operatorname{sh}(k_1 x) \sin \psi, \quad (3.3)$$

$$E_z = E_0 \operatorname{ch}(k_1 x) \cos \psi, \quad (3.4)$$

$$H_y = -\frac{k_3}{k_1} \beta \varepsilon_3 E_0 \operatorname{sh}(k_1 x) \sin \psi, \quad (3.5)$$

$$v_x = -\frac{e E_0 k_3}{m \omega k_1} \operatorname{sh}(k_1 x) \cos \psi, \quad (3.6)$$

$$v_z = -\frac{e E_0}{m \omega} \operatorname{ch}(k_1 x) \sin \psi, \quad (3.7)$$

где

$$k_1 = k_3 (1 - \beta^2 \varepsilon_3)^{1/2}.$$

Так как в рассматриваемом приближении граничные условия (1.5) и (1.6) однородны, то приравнявая тангенциальные компоненты поля в плазме (3.4) и (3.5) соответствующим компонентам поля в вакууме (2.9), (2.3), найдем, что

$$\varepsilon_1 = E_0 e^{2a} \operatorname{ch}(k_1 a),$$

а дисперсионное уравнение имеет вид

$$\varepsilon_3 + \frac{k_1}{x} \operatorname{cth}(k_1 a) = 0. \quad (3.8)$$

2) Подставим в правую часть уравнения (3.2) линейное решение. Тогда найдем, что вторые гармоники электрического поля волны определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_x^{(2)}}{\partial \xi^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) + \Omega^2 E_x^{(2)} - \frac{c}{\beta} \frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial \xi \partial x} = \\ & = -\frac{e E_0^2 \Omega^2 (2 - \beta^2 \varepsilon_3)}{4 m k_1 c^2 \beta^2} \operatorname{sh}(2 k_1 x) - \frac{e E_0^2 \Omega^2 \varepsilon_3}{4 m k_1 c^2} \operatorname{sh}(2 k_1 x) \cos(2 \psi); \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial \xi^2} + \Omega^2 E_z^{(2)} - c^2 \frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{c}{\beta} \frac{\partial^2 E_x^{(2)}}{\partial \xi \partial x} = \\ = \frac{eE_0^2 \Omega^2}{2m\omega c \beta} \left[1 - \frac{\omega^2 \epsilon_3}{c^2 k_1^2} \operatorname{sh}^2(k_1 x) \right] \sin(2\psi). \end{aligned} \quad (3.10)$$

В дальнейшем, где это не вызовет недоразумений, индекс «2», указывающий на второе приближение, будем опускать.

Решение уравнений (3.9), (3.10) ищем в виде

$$E_x = P_1(x) + P_2(x) \cos(2\psi), \quad E_z = P_3(x) \sin(2\psi), \quad (3.11)$$

после чего найдем

$$P_1 = - \frac{eE_0^2 (2 - \beta^2 \epsilon_3)}{4m c^2 \beta^2 k_1} \operatorname{sh}(2k_1 x), \quad (3.12)$$

а для P_2 и P_3 получим систему уравнений:

$$\left(\gamma^2 + \frac{4\omega^2}{\beta^2} \right) P_2 - \frac{2c\omega}{\beta} \frac{dP_3}{dx} = - \frac{e\Omega^2 \epsilon_3 E_0^2}{4m k_1 c^2} \operatorname{sh}(2k_1 x), \quad (3.13)$$

$$\gamma^2 P_3 - c^2 \frac{d^2 P_3}{dx^2} + \frac{2c\omega}{\beta} \frac{dP_2}{dx} = \frac{e\Omega^2 E_0^2}{2m\omega c \beta} \left[\operatorname{ch}^2(k_1 x) - \frac{k_3^2}{k_1^2} \operatorname{sh}^2(k_1 x) \right]. \quad (3.14)$$

Решая уравнения (3.13), (3.14), получим

$$P_2 = E_0 \frac{\epsilon \Omega^2 k_3}{4\gamma^2 k_1} \left[\frac{2k_3^2}{q_1 k_1} B \operatorname{sh}(q_1 x) - \beta^2 \epsilon_3 \operatorname{sh}(2k_1 x) \right], \quad (3.15)$$

$$P_3 = E_0 \frac{\epsilon \Omega^2 k_3^2}{4\gamma^2 k_1^2} [B \operatorname{ch}(q_1 x) - \beta^2 \epsilon_3 \operatorname{ch}(2k_1 x) + 2 - \beta^2 \epsilon_3], \quad (3.16)$$

где $q_1 = (\beta^2 \gamma^2 + 4\omega^2)^{1/2} / c\beta$, B — постоянная, которая определится из граничных условий.

Воспользовавшись уравнениями (3.1) и (1.4), окончательно найдем, что во втором приближении компоненты поля в плазме и скорости электронов имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} E_x = - E_0 \frac{\epsilon k_3}{4k_1} (2 - \beta^2 \epsilon_3) \operatorname{sh}(2k_1 x) + \\ + E_0 \frac{\epsilon \Omega^2 k_3}{4\gamma^2 k_1} \left[2 \frac{k_3^2}{q_1 k_1} B \operatorname{sh}(q_1 x) - \beta^2 \epsilon_3 \operatorname{sh}(2k_1 x) \right] \cos(2\psi), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$E_z = E_0 \frac{\epsilon \Omega^2 k_3^2}{4\gamma^2 k_1^2} [B \operatorname{ch}(q_1 x) - \beta^2 \epsilon_3 \operatorname{ch}(2k_1 x) + 2 - \beta^2 \epsilon_3] \sin(2\psi), \quad (3.18)$$

$$H_y = - E_0 \frac{\epsilon \Omega^2 k_3^2}{8c q_1 \omega k_1^2} B \operatorname{sh}(q_1 x) \cos(2\psi), \quad (3.19)$$

$$v_x = \left[- \frac{\epsilon^2 k_3^2}{4k_1^2} \frac{\Omega^2 \omega}{\gamma^2 q_1} B \operatorname{sh}(q_1 x) + \frac{\epsilon^2 k_3}{2k_1} \frac{\omega^2}{\gamma^2} c \beta^3 \epsilon_3 \operatorname{sh}(2k_1 x) \right] \sin(2\psi), \quad (3.20)$$

$$v_z = \frac{\varepsilon^2 k_3^2}{2k_1^2} \frac{c\beta\omega^2}{\gamma^2} \left\{ \frac{\Omega^2}{4\omega^2} B \operatorname{ch}(q_1 x) - \beta^2 \varepsilon_3 [1 + \operatorname{ch}(2k_1 x)] + 2 \right\} \cos(2\psi), \quad (3.21)$$

ε_x и ε_z в вакууме во втором приближении имеют вид (2.15) (но ε_2 имеет другое значение). Вследствие наличия нелинейного поверхностного тока в вакууме во втором приближении возникает постоянное магнитное поле, так что

$$\tilde{H}_y^{(2)} = -\frac{k_3}{x} \beta \varepsilon_2 e^{-2|x|} \cos(2\psi) - \tilde{H}^0. \quad (3.22)$$

В рассматриваемом случае граничные условия (1.5) и (1.6) принимают следующий вид:

$$\{E_z^{(2)}\} = 0, \quad \{H_y^{(2)}\} = E_0 \varepsilon \frac{\omega}{c} \operatorname{ch}(k_1 a) \left[\frac{\operatorname{sh}(k_1 a)}{k_1} + \frac{\operatorname{ch}(k_1 a)}{x} \right] \sin^2 \psi. \quad (3.23)$$

Воспользовавшись этими уравнениями и уравнением (3.8), найдем

$$\varepsilon_2 = E_0 \frac{\varepsilon \Omega^2 k_3^2}{4\gamma^2 k_1^2} [B \operatorname{ch}(q_1 a) - \beta^2 \varepsilon_3 [1 + \operatorname{ch}(2k_1 a)] + 2] e^{2xa}, \quad (3.24)$$

$$B = \left\{ \beta^2 \varepsilon_3 [1 + \operatorname{ch}(2k_1 a)] - 2 + \frac{2k_1^2 \gamma^2}{k_3^2 \omega^2 \varepsilon_3} \operatorname{ch}^2(k_1 a) \right\} \times$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{x\gamma^2}{2q_1 \omega^2} \operatorname{th}(q_1 a) \right) \operatorname{ch}(q_1 a) \right]^{-1}, \quad (3.25)$$

$$\tilde{H}^0 = E_0 \frac{\varepsilon \Omega^2}{4ck_1 \omega} \operatorname{sh}(2k_1 a). \quad (3.26)$$

Чтобы формулы второго приближения (3.17)–(3.21), (3.24)–(3.26) записать для полугораниченной плазмы, необходимо сделать замену

$$E_0 \rightarrow \frac{E_1}{\operatorname{ch}(k_1 a)}, \quad B \rightarrow B_1 \frac{\operatorname{ch}^2(k_1 a)}{\operatorname{ch}(q_1 a)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2' e^{2xa},$$

перенести начало координат в точку $x = -a$ и устремить $a \rightarrow \infty$. В результате получим

$$E_x = E_1 \frac{\varepsilon_1 k_3}{2k_1} (2 - \beta^2 \varepsilon_3) e^{-2k_1 x} +$$

$$+ E_1 \frac{\varepsilon_1 \Omega^2 k_3}{4\gamma^2 k_1} \left(-2 \frac{k_3^2}{q_1 k_1} B_1 e^{-q_1 x} + 2\beta^2 \varepsilon_3 e^{-2k_1 x} \right) \cos(2\psi), \quad (3.17a)$$

$$E_z = E_1 \frac{\varepsilon_1 \Omega^2}{4\gamma^2} \frac{k_3^2}{k_1^2} (B_1 e^{-q_1 x} - 2\beta^2 \varepsilon_3 e^{-2k_1 x}) \sin(2\psi), \quad (3.18a)$$

$$H_y = E_1 \frac{\varepsilon_1 \Omega^2 k_3^2}{8cq_1 \omega k_1^2} B_1 e^{-q_1 x} \cos(2\psi), \quad (3.19a)$$

$$v_x = \left(\frac{\varepsilon_1^2 k_3^2}{4k_1^2} \frac{\Omega^2 \omega}{\gamma^2 q_1} B_1 e^{-q_1 x} - \varepsilon_1^2 \frac{k_3 \omega^2}{k_1 \gamma^2} c\beta^3 \varepsilon_3 e^{-2k_1 x} \right) \sin(2\psi), \quad (3.20a)$$

$$v_z = \frac{\varepsilon_1^2 k_3^2}{2k_1^2} \frac{c\beta\omega^2}{\gamma^2} \left(\frac{\Omega^2}{4\omega^2} B_1 e^{-q_1 x} - 2\beta^2 \varepsilon_3 e^{-2k_1 x} \right) \cos(2\psi), \quad (3.21a)$$

$$\varepsilon_2' = E_1 \frac{\varepsilon_1 \Omega^2}{4\gamma^2} \frac{k_3^2}{k_1^2} (B_1 - 2\beta^2 \varepsilon_3), \quad (3.24a)$$

$$B_1 = 2 \frac{\varepsilon_3^2 \beta^2 k_3^2 \omega^2 + k_1^2 \gamma^2}{k_3^2 \omega^2 \varepsilon_3 (1 - x\gamma^2/2q_1\omega^2)}, \quad (3.25a)$$

$$\tilde{H}^0 = E_1 \frac{\varepsilon_1 \Omega^2}{2ck_1\omega}, \quad \varepsilon_1 = \frac{eE_1 k_3}{m\omega^2}. \quad (3.26a)$$

3) Формулы второго приближения значительно упрощаются в резонансе $\omega \simeq \Omega/2$ или при малой фазовой скорости. В случае тонкого слоя ($k_1 a \ll 1$) компоненты поля в плазме при $\omega \simeq \Omega/2$ имеют вид

$$E_x = -2E_0 \frac{\varepsilon}{\Delta} (2 - 3\beta^2) k_3 x \cos(2\psi),$$

$$E_z = -2E_0 \frac{\varepsilon}{\Delta} (2 - 3\beta^2) k_3^2 x^2 \sin(2\psi), \quad (3.27)$$

$$H_y = \varepsilon E_0 \frac{\omega x}{c} \cos(2\psi), \quad \Delta = \gamma^2 \omega^{-2} \rightarrow 0.$$

В полуограниченной плазме при резонансе

$$E_x = -\frac{4}{\sqrt{3}} E_1 \frac{\varepsilon_1}{\Delta} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-q_1 x} + e^{-2k_1 x} \right) \cos(2\psi),$$

$$E_z = -\frac{4}{3} E_1 \frac{\varepsilon_1}{\Delta} (e^{-q_1 x} - e^{-2k_1 x}) \sin(2\psi), \quad (3.28)$$

$$H_y = -\frac{\sqrt{6}}{9} E_1 \varepsilon_1 e^{-q_1 x} \cos(2\psi).$$

Заметим, что при $\omega \simeq \Omega/2$ поле в вакууме не имеет резонансного характера, так как в этом случае для произвольной толщины слоя

$$\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon}{2} E_0 \frac{\varepsilon_3 - 1}{\varepsilon_3} \operatorname{ch}^2(k_1 a) e^{2ka}. \quad (3.29)$$

Если $\beta^2 \rightarrow 0$, то для полуограниченной плазмы найдем

$$E_x = \varepsilon_1 E_1 \left[1 + \frac{2}{3} \cos(2\psi) \right] e^{-2k_3 x}, \quad (3.30)$$

$$E_z = -\frac{2}{3} \varepsilon_1 E_1 e^{-2k_3 x} \sin(2\psi), \quad (3.31)$$

$$H_y = \frac{\varepsilon_1}{3} \beta E_1 e^{-2k_3 x} \cos(2\psi), \quad (3.32)$$

$$v_x = -\frac{\varepsilon_1^2}{3} c\beta e^{-2k_3 x} \sin(2\psi), \quad v_z = v_x \operatorname{ctg}(2\psi), \quad (3.33)$$

$$E_x = -\frac{2}{3} \varepsilon_1 E_1 e^{2k_3 x} \cos(2\psi). \quad (3.34)$$

4. НЕЛИНЕЙНОЕ ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЧНОЙ ЧАСТОТЫ

В полуограниченной плазме дисперсионное уравнение (3.8) принимает следующий вид [1]:

$$\beta^2 = (\varepsilon_3 + 1) \varepsilon_3^{-1}. \quad (4.1)$$

Отсюда найдем, что при $\omega \rightarrow \Omega/\sqrt{2}$ (граничная частота) $\beta^2 \rightarrow 0$. В рассматриваемом случае, вообще говоря, существенным оказывается как тепловое движение частиц плазмы, вклад которого в дисперсионное уравнение пропорционален $k_3 v_{Te} \omega^{-1}$, [9] при $v_{Te} \ll \omega k_3^{-1}$ (v_{Te} — средняя тепловая скорость частиц), так и нелинейность плазмы, поскольку нелинейный параметр $\varepsilon \sim 1/\beta$. Если создать условия, при которых тепловым движением все же можно пренебречь, а амплитуда поля волны достаточно велика, то фазовая скорость должна ограничиваться нелинейностью.

Уравнения третьего приближения для компонент электрического поля волны, уточняющие первую гармонику, вблизи граничной частоты имеют вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) + \Omega^2 E_x - \frac{c}{\beta} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial \xi} = -4\varepsilon_1^2 \omega^2 E_1 e^{-3k_3 x} \sin \psi, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \Omega^2 E_z - \frac{c}{\beta} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -\frac{8}{3} \omega^2 \varepsilon_1^2 E_1 e^{-3k_3 x} \cos \psi. \quad (4.3)$$

Решая эти уравнения, найдем, что с точностью до ε^2 включительно первые гармоники компонент электрического поля равны

$$E_x = E_1 \left(\frac{k_3}{k_1} + \varepsilon_1^2 Q_1 e^{-2k_3 x} \right) e^{-k_3 x} \sin \psi, \quad (4.4)$$

$$E_z = E_1 (1 + \varepsilon_1^2 Q_2 e^{-2k_3 x}) e^{-k_3 x} \cos \psi, \quad (4.5)$$

где

$$Q_1 = \frac{28 - 4\beta^2}{\beta^2 - 8}, \quad Q_2 = \frac{28 - 8\beta^2}{3(\beta^2 - 8)}.$$

Воспользовавшись формулой (3.1) и значениями (4.4) и (4.5), для магнитного поля волны с той же степенью точности получим

$$H_y = E_1 \frac{\omega \varepsilon_3}{k_1 c} \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} e^{-2k_3 x} \right) e^{-k_3 x} \sin \psi. \quad (4.6)$$

Граничные условия (1.5) и (1.6) для первой гармоники в третьем приближении принимают следующий вид:

$$\{E_z\} = \frac{\varepsilon_1^2}{2} \beta^2 E_1 \cos \psi, \quad (4.7)$$

$$\{H_y\} = \varepsilon_1^2 \beta E_1 O(\beta^2), \quad (4.8)$$

где $O(\beta^2)$ — величина, пропорциональная β^2 .

Подставляя в левую часть уравнений (4.7) и (4.8) значения (4.5), (4.6) и (2.9), (2.3), найдем нелинейное дисперсионное уравнение при $\beta^2 \ll 1$:

$$\beta^2 = -\epsilon_3 - 1 + 5\epsilon_1^2/3. \quad (4.9)$$

Если первое слагаемое в правой части (4.9) меньше второго, то фазовая скорость пропорциональна параметру нелинейности. В общем случае

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left\{ -\epsilon_3 - 1 + \left[(\epsilon_3 + 1)^2 + \frac{20}{3} \frac{e^2 E_1^2}{m^2 \omega^2 c^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.10)$$

В предельных случаях получаем либо (4.1), либо формулу

$$\beta = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{e E_1}{m \Omega c} \right)^{1/2}.$$

Авторы выражают благодарность Я. Б. Файнбергу за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Shuman, Z. Naturforsch., **5a**, 185 (1950).
2. М. А. Гинцбург, Изв. АН СССР, сер. физ., **18**, 444 (1954); Труды ИЗМИРАН СССР, вып. 17, 208 (1960).
3. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко, ЖТФ, **29**, 549 (1959); М. Ф. Горбатенко, Диссертация, ХГУ, 1964.
4. Г. Сул, Л. Уокер, Вопросы волнового распространения электромагнитных волн в гиротронных средах, ИЛ, М., 1955.
5. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, **34**, 154 (1964).
6. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, **34**, 606 (1964).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
8. S. Chandrasachar, A. Kaufman, K. Watson, Ann. Phys., **2**, 435 (1957).
9. Ю. А. Романов. Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 242 (1964).

Поступила в редакцию
22 июля 1965 г.

TO NONLINEAR THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN CONFINED PLASMA

A. N. Kondratenko, V. I. Liokoumavich, P. N. Rybin

Electromagnetic waves in an isotropic plasma layer and in the layer being in a strong constant magnetic field have been considered for the case of weak nonlinearity. The second wave harmonics have been found, the nonlinear dispersion equations have been obtained. The phase velocity is proved to be essentially dependent on the wave amplitude in a half-limited plasma near the critical frequency.

УДК 621.371.182

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПЛАЗМЕННЫЙ СЛОЙ, НАХОДЯЩИЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Н. Кондратенко, В. И. Мирошниченко

Определяются коэффициенты отражения, прохождения и поглощения при нормальном падении поляризованной по кругу электромагнитной волны на плоский слой плазмы, находящийся в постоянном магнитном поле, перпендикулярном к границам слоя

1. Вопрос о проникновении поляризованной по кругу электромагнитной волны в плазменное полупространство, находящееся в магнитном поле, перпендикулярном границе плазмы, рассматривался в работах [1-3]. В настоящей статье мы рассмотрим вопрос об отражении и прохождении поляризованной по кругу электромагнитной волны, падающей нормально к границе плазменного слоя толщиной a при наличии постоянного магнитного поля H_0 , перпендикулярного слою. Исходная система уравнений состоит из уравнений Максвелла и кинетических уравнений для добавок к равновесным функциям распределения электронов и ионов, которые будем считать максвелловскими. Выбрав ось z нормально к границе слоя, эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$-\frac{d^2 E_{\pm}}{dz^2} = k^2 \left(E_{\pm} + \frac{4\pi i}{\omega} j_{\pm} \right), \quad (1)$$

$$\frac{dE_{\pm}}{dz} = \pm k H_{\pm}, \quad (2)$$

$$v_z \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z} - \omega_{H\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \theta} - i\omega f_{\alpha} = -\frac{e_z}{2} (E_- e^{i\theta} + E_+ e^{i\theta}) v_{\perp} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varepsilon_{\alpha}}, \quad (3)$$

$$j_{\pm} = \sum_{\alpha=e, i} e_{\alpha} \int v_{\pm} f_{\alpha} dv \quad (0 \leq z \leq a). \quad (4)$$

Здесь

$$\omega_{H\alpha} = \frac{eH_0}{m_{\alpha} c}, \quad \varepsilon_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} v^2}{2}, \quad f_{0\alpha} = n_0 \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon_{\alpha}/T_{\alpha}},$$

$$k = \omega/c, \quad A_{\pm} = A_x \pm iA_y, \quad e_i = e, \quad e_e = -e;$$

индекс e относится к электронам, i — к ионам, θ — полярный угол в пространстве скоростей.

Уравнения (1) — (2) необходимо дополнить граничными условиями, которые сводятся к непрерывности полей E_{\pm} и H_{\pm} на границах раздела плазма—вакуум и граничными условиями для функций распределения, которые в предположении об одинаковом характере отражения электронов и ионов от обеих стенок имеют вид

$$f_a(0, v_z > 0) = p f_a(0, v_z < 0) \quad (0 \leq p \leq 1); \quad (5)$$

$$p f_a(a, v_z > 0) = f_a(a, v_z < 0).$$

Решая кинетическое уравнение (3) совместно с граничными условиями (5) и подставляя полученное значение f_a в выражение (4), получим, что ток

$$j_{\pm}(z) = \int_0^a \sigma(z, z') E_{\pm}(z') dz'. \quad (6)$$

Ядро $\sigma(z, z')$ определяется следующим выражением:

$$\frac{4\pi i}{\omega} \sigma(z, z') = \sum_{a=e, i} \frac{i\omega_{0a}^2}{\sqrt{\pi} \omega v_{T_a}} \int_0^{\infty} \exp(-v_z^2/v_{T_a}^2) \frac{dv_z}{v_z} \times$$

$$\times [\exp(-i\delta_a a/v_z) - p^2 \exp(i\delta_a a/v_z)]^{-1} \left\{ 2 \cos \frac{\delta_a(a-|z-z'|)}{v_z} + \right. \quad (7)$$

$$\left. + 2p \cos \frac{\delta_a(a-z-z')}{v_z} - (1-p^2) \exp \left[\frac{i\delta_a}{v_z} (a-|z-z'|) \right] \right\};$$

$$\omega_{0a}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_a, \quad v_{T_a}^2 = 2T_a / m_a, \quad \delta_a = \omega \mp \omega_{H_a} + iO.$$

Уравнения (1)–(2) с током (6) заданы на промежутке $(0, a)$. Продолжим поля $E_{\pm}(z)$ и ток $j_{\pm}(z)$ на интервал $(-a, 0)$ четным образом (магнитное поле $H_{\pm}(z)$, как это следует из (2), — нечетным) и далее на всю ось периодически с периодом $2a$.

Выражение для электрического поля $E(z)$ ищем в виде

$$E(z) = \frac{2}{a} \sum'_{n=0} E_n \cos(x_n z), \quad x_n = n\pi/a. \quad (8)$$

Штрих означает, что член суммы с $n=0$ умножается на $1/2$; здесь и в дальнейшем знаки \pm , соответствующие обыкновенным и необыкновенным волнам, опущены.

Тогда из (1) для коэффициентов Фурье E_n получим следующую систему связанных уравнений:

$$[x_m^2 - k^2 \varepsilon(m)] E_m - k^2 \sum'_{n=0} R_{mn} E_n = [E'(0) - (-1)^m E'(a)], \quad (9)$$

где

$$\varepsilon(m) = 1 - \sum_{a=e, i} \frac{\omega_{0a}^2}{\sqrt{\pi} \omega v_{T_a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-v_z^2/v_{T_a}^2) dv_z}{\delta_a - x_m v_z}, \quad (10)$$

$$R_{mn} = - \sum_{a=e, i} \frac{2i\omega_{0a}^2 v_{T_a}}{\sqrt{\pi} \omega \alpha \delta_a^2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x_m^2 v_{T_a}^2 x^2}{\delta_a^2} \right)^{-1} \times \quad (11)$$

$$\times \left(1 - \frac{x_n^2 v_{T_a}^2 x^2}{\delta_a^2} \right)^{-1} e^{-x^2} x dx \frac{(1-p)[1 + (-1)^{m+n}]}{\exp(-i\delta_a a/v_{T_a} x) - p^2 \exp(i\delta_a a/v_{T_a} x)} \times$$

$$\times [(1-p)(-1)^m + p \exp(i\delta_a a/v_{T_a} x) - \exp(-i\delta_a a/v_{T_a} x)].$$

2. Как видно из (11), система (9)—(11) распадается на систему независимых уравнений при зеркальном отражении электронов и ионов от границ плазменного слоя ($p = 1$). В этом случае выражение для напряженности электрического поля имеет вид

$$E(z) = -\frac{2}{a} \sum'_{n=0}^{\infty} [E'(0) - (-1)^n E'(a)] \frac{\cos(x_n z)}{x_n^2 - k^2 \varepsilon(n)}. \quad (12)$$

В формуле (12) легко перейти к случаю полуограниченной плазмы, устремляя $a \rightarrow \infty$. При этом суммирование заменяется интегрированием, а слагаемое, пропорциональное $E'(a)$, исчезает, так как на бесконечности поле обращается в нуль. В этом случае формула (12) совпадает с соответствующей формулой работы [2].

Определим коэффициенты отражения и прохождения электромагнитной волны при зеркальном отражении электронов и ионов от границ слоя ($p = 1$). Полагая $z = 0, a$, из (12) можно получить два соотношения между значениями электрического и магнитного полей на границах слоя:

$$E(0) = \mp \alpha H(0) \pm \beta H(a), \quad (13)$$

$$E(a) = \mp \beta H(0) \pm \alpha H(a),$$

где

$$\alpha = \frac{2k}{a} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n^2 - k^2 \varepsilon(n)}, \quad \beta = \frac{2k}{a} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_n^2 - k^2 \varepsilon(n)}.$$

Учитывая эти соотношения совместно с граничными условиями, выражающими непрерывность тангенциальных компонент \mathbf{E} и \mathbf{H} на границах плазменного слоя, легко определить коэффициенты отражения R и прохождения T падающей электромагнитной волны:

$$R = \frac{E_2}{E_1} = \frac{-\alpha^2 + \beta^2 - 1}{-\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2i\alpha}, \quad (14)$$

$$T = \frac{E_3}{E_1} = \frac{-2i\beta e^{-ika}}{-\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2i\alpha}. \quad (15)$$

Выражения для коэффициентов R и T в общем случае сложны. Найдем выражения для R и T в случае слабой пространственной дисперсии ($\sqrt{\varepsilon_0} \beta_{T\alpha} \ll 1$, $|(\omega \pm \omega_{H\alpha}) a / \pi v_{T\alpha}| \gg 1$). Вычисляя суммы α и β в этом предельном случае аналогично тому, как это делалось в [4], для коэффициентов R и T получим:

$$R = \left[\frac{k^2}{k_z^2} - 1 + 2i\alpha'' \frac{k}{k_z} \operatorname{ctg}(k_z a) \right] \left[\frac{k^2}{k_z^2} + 1 + 2\alpha'' + \right. \\ \left. + 2i \frac{k}{k_z} \operatorname{ctg}(k_z a) + 2i\alpha'' \frac{k}{k_z} \operatorname{ctg}(k_z a) \right]^{-1}, \quad (16)$$

$$T = 2i \frac{k}{k_z^2} \frac{e^{-ika}}{\sin(k_z a)} \left[\frac{k^2}{k_z^2} + 1 + 2\alpha'' + \right. \\ \left. + 2i \frac{k}{k_z} \operatorname{ctg}(k_z a) + 2i\alpha'' \frac{k}{k_z} \operatorname{ctg}(k_z a) \right]^{-1}, \quad (16a)$$

где

$$k_z = k \sqrt{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{He})} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Hi})},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\omega_{0e}^2 \omega^2 \beta_{Te}^3}{(\omega \pm \omega_{He})^4} + \frac{\omega_{0i}^2 \omega^2 \beta_{Ti}^3}{(\omega \mp \omega_{Hi})^4} \right].$$

Имея выражение (16) и (16а) для R и T , легко определить поглощательную способность плазменного слоя:

$$W = 1 - |R|^2 - |T|^2 = 4\alpha'' \left[\frac{k^2}{k_z^2} + 1 + \frac{2k^2}{k_z^2} \operatorname{ctg}^2(k_z a) \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{k^2}{k_z^2} + 1 \right)^2 + 4 \frac{k^2}{k_z^2} \operatorname{ctg}^2(k_z a) \right]^{-1}. \quad (17)$$

Как видно из (17), при зеркальном отражении электронов и ионов от границ, поглощательная способность плазменного слоя пропорциональна кубу тепловой скорости электронов и ионов.

3. Найдем коэффициенты отражения R и прохождения T в случае слабой пространственной дисперсии при произвольном отражении электронов и ионов от границ слоя ($p \neq 1$). Удерживая только члены, линейные по $v_{T\alpha}$ в выражении для ядер сумм R_{mn} , найдем

$$R_{mn} \simeq \frac{i}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\omega_{0e}^2}{(\omega \pm \omega_{He})^2} \frac{v_{Te}}{\omega a} + \frac{\omega_{0i}^2}{(\omega \mp \omega_{Hi})^2} \frac{v_{Ti}}{\omega a} \right] (1-p) [1 + (-1)^{m+n}]. \quad (18)$$

Уравнения для коэффициентов Фурье напряженности электрического поля в этом случае расщепляются:

$$[\chi_m^2 - k^2 \varepsilon(m)] E_m = - [E'(0) - (-1)^m E'(a)] + ikb [E(0) + (-1)^m E(a)], \quad (19)$$

$$b = \frac{1-p}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\omega_{0e}^2 \beta_{Te}}{(\omega \pm \omega_{He})^2} + \frac{\omega_{0i}^2 \beta_{Ti}}{(\omega \mp \omega_{Hi})^2} \right].$$

Из (19) легко определить напряженность электрического поля $E(z)$. Полагая далее $z = 0, a$, получим два соотношения между значениями электрического и магнитного полей на границах плазменного слоя. Учитывая эти соотношения и граничные условия для полей, определим коэффициенты отражения R и прохождения T в этом случае:

$$R = \frac{\beta^2 - \alpha^2 - 1 - 2ib\alpha}{\beta^2 - \alpha^2 + 1 - 2ia + 2b[\beta^2 - \alpha^2 - ia]}, \quad (20)$$

$$T = \frac{-2i\beta e^{-ika}}{\beta^2 - \alpha^2 + 1 - 2ia + 2b[\beta^2 - \alpha^2 - ia]}. \quad (21)$$

(В формулах (20) и (21) для α и β должны быть взяты гидродинамические значения.)

Поглощательная способность плазменного слоя в этом случае принимает вид

$$W = \frac{4b(1 + \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 \operatorname{ctg}^2 \sqrt{\varepsilon_0} ka)}{(1 + \varepsilon_0)^2 + 4\varepsilon_0 \operatorname{tg}^2 \sqrt{\varepsilon_0} ka}. \quad (22)$$

Как видно из (22), поглощательная способность плазменного слоя

в случае, когда часть электронов и ионов отражается диффузно от стенок, пропорциональна тепловой скорости электронов и ионов. Условия применимости формул (18)—(22) состоят в выполнении следующих неравенств:

$$\left| \frac{\sqrt{\epsilon_0} \beta_{T\alpha} \omega}{\omega \pm \omega_{H\alpha}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\pi v_{T\alpha}}{(\omega \pm \omega_{H\alpha}) a} \right| \ll 1. \quad (23)$$

4. Пренебрегая движением ионов, рассмотрим прохождение через слой плазмы высокочастотных волн при условии $\omega a \ll v_{Te}$, $|\omega \pm \omega_{He}| a \ll v_{Te}$. Аналогично [4] найдем, что при незеркальном отражении электронов от границ слоя

$$1 - p > |\omega \pm \omega_{He}| a / v_{Te},$$

поля в плазме определяются из уравнений

$$\pm \frac{dH_{\pm}}{dz} = -kE_{\pm} + \frac{k\sigma}{a} \int_0^a E_{\pm}(z') dz', \quad (24)$$

$$\frac{dE_{\pm}}{dz} = \pm kH_{\pm},$$

где

$$\sigma = -i \frac{p+1}{p-1} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \frac{\omega a}{4\sqrt{\pi} v_{Te}} \ln \frac{|\omega \mp \omega_{He}| a}{v_{Te}}. \quad (25)$$

Пренебрегая в уравнении (24) величиной kE_{\pm} , а в уравнении (25) kH_{\pm} (предполагаем $\sigma \gg 1$), найдем

$$E_{\pm} = A, \quad H_{\pm} = k\sigma a A z + B. \quad (26)$$

Подставляя значения (26) в граничные условия, для постоянных A , B и коэффициентов отражения R и прохождения T получим следующие значения:

$$A = \frac{2}{2+s}, \quad B = -\frac{2(1+s)}{2+s}, \quad (27)$$

$$R = -\frac{s}{2+s}, \quad T = \frac{2}{2+s}, \quad (28)$$

где $s = ika\sigma$.

Поглощательная способность плазмы в этом случае имеет вид

$$W = 4s(2+s)^{-2}. \quad (29)$$

Максимальная поглощательная способность слоя реализуется при $s = 2$. При этом отраженная и прошедшая волны имеют одинаковые амплитуды, равные половине амплитуды падающей волны.

Формулы, аналогичные (27)—(29), можно получить при гидродинамическом описании плазмы в слое, вводя эффективную частоту соударений электронов со стенками $\nu \sim v_{Te} a^{-1}$. Полученные таким образом формулы отличаются от формул (27)—(29) численным и логарифмическим множителем.

5. Рассмотрим случай низкочастотных волн ($\omega \ll \omega_{He}$) при

$$\frac{\omega a}{v_{Ti}} \ll 1, \quad \frac{\omega_{He} a}{v_{Te}} \gg 1, \quad \frac{|\omega \pm \omega_{He}| a}{v_{Ti}} \ll 1. \quad (30)$$

Отражение частиц плазмы от границ слоя будем предполагать незеркальным, так что $1-p > |\omega \pm \omega_{Hi}| a v_{Ti}^{-1}$.

При выполнении неравенств (30) для тока можно найти следующее значение:

$$-\frac{4\pi i}{\omega} j_{\pm} = \mp \frac{\omega_{0e}^2}{\omega \omega_{He}} E_{\pm}(z) + \frac{\sigma_i}{a} \int_0^a E_{\pm}(z') dz', \quad (31)$$

где

$$\sigma_i = -i \frac{p+1}{p-1} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} \frac{\omega a}{4\sqrt{\pi} v_{Ti}} \ln \frac{|\omega \pm \omega_{Hi}| a}{v_{Ti}}.$$

Напряженность электрического поля в плазме определяется из уравнения

$$\frac{d^2 E_{\pm}}{dz^2} + k_1^2 E_{\pm} = k^2 \sigma_i \frac{1}{a} \int_0^a E_{\pm}(z') dz', \quad (32)$$

где

$$k_1^2 = k^2 \left(1 \mp \frac{\omega_{0i}^2}{\omega \omega_{Hi}} \right).$$

Решая уравнение (32) совместно с (25), найдем

$$E_{\pm}(z) = A_1(e^{ik_1 z} + \xi) + B_1(e^{-ik_1 z} + \xi e^{-ik_1 a}), \quad (33)$$

$$H_{\pm}(z) = \pm \frac{ik_1}{k} (A_1 e^{ik_1 z} - B_1 e^{-ik_1 z}), \quad (34)$$

где

$$\xi = -\frac{ib_{\pm}}{1+ib_{\pm}} \frac{e^{ik_1 a} - 1}{ik_1 a}, \quad \frac{k^2}{k_1^2} \sigma_i = ib_{\pm}.$$

Сшивка полей (33)–(34) с полями в вакууме приводит к следующему выражению для коэффициентов отражения R и прохождения T :

$$R = \frac{1}{\Delta} [2\xi k^2 (e^{-ik_1 a} - 1) + (k_1^2 - k^2) 2i \sin(k_1 a)], \quad (35)$$

$$T = \frac{2kk_1}{\Delta} [2 + \xi(1 + e^{-ik_1 a})], \quad (36)$$

$$\Delta = -(k_1 - k)^2 e^{ik_1 a} + [(k_1 + k)^2 + 2\xi k(k + k_1)] e^{-ik_1 a} + 2\xi k(k - k_1). \quad (37)$$

Если $\omega_{0i}^2/\omega \omega_{Hi} \ll 1$, то R , T и W имеют такой же вид, как и (28)–(29), с заменой индексов e на i . Если же $\omega_{0i}^2/\omega \omega_{Hi} \gg 1$, то при $|k_1| a \ll 1$ R и T имеют такой вид:

$$R = \frac{ia [k_1^2 + ib(k_1^2 + k^2)]}{k_1^2 ab + 2k + bk_1 ka - ik_1^2 a}, \quad (38)$$

$$T = \frac{2k}{k_1^2 ab + 2k + bk_1 ka - ik_1^2 a}. \quad (39)$$

В зависимости от соотношения между параметрами плазмы и волны, волна может как отражаться, так и проходить через слой.

Поглощательная способность слоя определяется следующими выражениями:

$$W^+ = \frac{4kb_+ x^2 a + 3k^2 a^2 x^2 b_+^2}{x^2 a^2 (kb_+ - x)^2 + 2(k + b_+ x^2 a)^2} \quad (40)$$

для обыкновенной волны,

$$W^- = \frac{-4kk_1^2 ab_-}{(2k - k_1^2 ab_-)^2 + k_1^4 a^2} \quad (41)$$

для необыкновенной волны,

Здесь

$$b_{\pm} = \pm \frac{\rho + 1}{\rho - 1} \frac{\omega_{Hi} a}{4\sqrt{\pi} v_{Ti}} \ln \frac{|\omega \mp \omega_{Hi}| a}{v_{Ti}}$$

Авторы признательны за замечания при рецензировании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. П. Силин, Тр. ФИАН СССР, 6, 251 (1955).
- 2 В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).
- 3 К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 36, 1457 (1959).
- 4 А. Н. Кондратенко, В. И. Мирошниченко, ЖТФ, 35, 2154 (1965).

Поступила в редакцию
7 июня 1965 г

THE KINETIC THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE TRAVELLING THROUGH PLASMA LAYER IN A MAGNETIC FIELD

A. N. Kondratenko, V. I. Miroshnichenko

The reflection, transmission and absorption factors are determined in the case of the normal incidence of a circular-polarized electromagnetic wave on a plane plasma layer located in a constant magnetic field perpendicular to the layer boundaries.

УДК 533.9.07

МЕТОД ВОЛНОВОДНОГО ДИСКРИМИНИРОВАНИЯ

С. Д. Ильин, С. С. Петрусев, А. В. Чернетский

Дается сравнительная оценка методов СВЧ диагностики плазмы с точки зрения исследования процессов, связанных с ускорением плазмы. Рассматривается преобразование фазочастотных девиаций зондирующего сигнала в аналоговое напряжение. Выводится выражение для полосы преобразующей системы при заданной степени точности. Оценивается быстродействие системы. Приводятся соображения по упрощению конструкции устройства.

При исследовании плазмы газового разряда большую актуальность имеют измерения процессов сжатия, устойчивости возбуждения и распространения ударных волн, а также законов движения плазменных образований. При этом часто требуется иметь временное разрешение порядка $10^{-6} \div 10^{-8}$ сек. Простейший анализ явлений, происходящих, например, в коаксиальной ускорительной установке [1] или в установках с магнитозвуковым резонансом [2] показывает, что время переходного процесса на участке ускорения — от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд. Отсюда очевидны высокие требования, предъявляемые к быстродействию измерительной аппаратуры.

В современных интерферометрической, фазометрической и «просветной» методиках, как правило, используется периодическая регистрация значений измеряемых параметров с их усреднением по пути прохождения зондирующего луча [3]. В этом случае быстродействие, определяемое периодом повторения сигналов, снижается допустимой скажностью или гистерезисными явлениями СВЧ генераторов. Непрерывная регистрация параметров плазмы в процессе их изменения имеет здесь явные преимущества. В данной работе рассматривается один из методов непрерывной регистрации процессов в движущейся плазме или плазме с перемещающейся границей.

1. Анализ метода преобразования девиаций частоты в аналоговое напряжение. Сущность описываемого метода сводится к облучению границы плазмы СВЧ энергией небольшой мощности с последующим анализом закона изменения частоты отраженного сигнала (за счет эффекта Доплера) в зависимости от скорости движения фронта критической концентрации в плазме:

$$F_x = \frac{2f_0 v_r}{c} = \frac{v_r}{\lambda} \quad (1)$$

Выделение аналогового напряжения $U_a = f(F_x)$ осуществляется волноводным СВЧ дискриминатором на двойном тройнике с асимметричными закороченными боковыми плечами (рис. 1). При равенстве амплитуд сигналов в боковых плечах амплитуда СВЧ сигнала на выходе дискриминатора

$$U_E = U_{E \max} \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|, \quad (2)$$

где $\Delta\varphi$ — дифференциальный фазовый сдвиг между сигналами в боковых плечах двойного тройника,

$$\Delta\varphi = \omega\tau, \quad (3)$$

$$\tau = 2l/v_{гр} \quad (4)$$

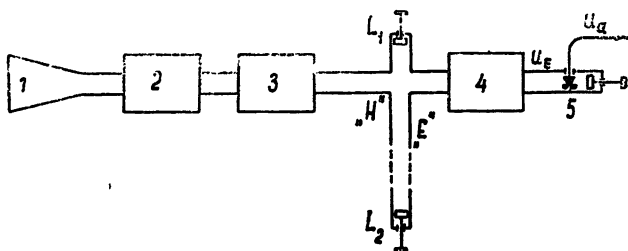


Рис. 1. Принципиальная схема волноводного дискриминатора: 1—приемная антенна, 2—СВЧ ограничитель мощности, 3, 4—ферритовый вентиль, 5—детектор.

(τ — относительная задержка сравниваемых сигналов, $l = L_2 - L_1$ — разность длин боковых плеч, $v_{гр}$ — групповая скорость сигнала в волноводе). Мощность на выходе дискриминатора

$$P_E = P_{E \max} \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = P_{E \max} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\Delta\varphi) \right]. \quad (5)$$

В случае квадратичной вольтамперной характеристики СВЧ детектора ток

$$I_d = k_d U_E^2 = \eta P_E \quad (6)$$

и выражение для аналогового напряжения принимает вид

$$U_a = U_{a \max} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\Delta\varphi) \right]. \quad (7)$$

Амплитудно-частотные характеристики, соответствующие выражениям (4), (5), (7), представлены на рис. 2б, в, где также дан пересчет $\Delta\varphi$ в частотный масштаб: $\Delta\varphi = 2\pi f\tau$.

Согласно выражению (7), характеристика волноводного дискриминатора имеет периодически повторяющийся характер с периодом $\Delta\varphi = 2\pi$ или $\Delta f = 1/\tau$. Очевидно, максимальная полоса дискриминирующих частот ΔF_{\max} , соответствующая $\Delta\varphi = \pi$, будет равна

$$\Delta F_{\max} = 1/2\tau. \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что полоса дискриминирования является только функцией временной задержки τ , которая может регулироваться в больших пределах путем изменения длины плеча L_2 . По сравнению с известными методами [3] это является преимуществом с точки зрения достаточной широкополосности, необходимой для регистрации скоростей от $5 \cdot 10^5$ до 10^8 см·сек⁻¹[1, 2].

Очевидно, в некотором интервале частот ΔF характеристика дискриминатора (7) может быть аппроксимирована прямой линией с требуемой точностью δ_u :

$$\Delta U_a = \frac{U_{a \max}}{2} \Delta\varphi + \frac{U_{a \max}}{2}. \quad (9)$$

Согласно данным работы [6], относительная ошибка смещения по амплитуде δ_u определяется как

$$\delta_u = \frac{|\Delta U_a|}{U_{a \max}} 100\% \quad (10)$$

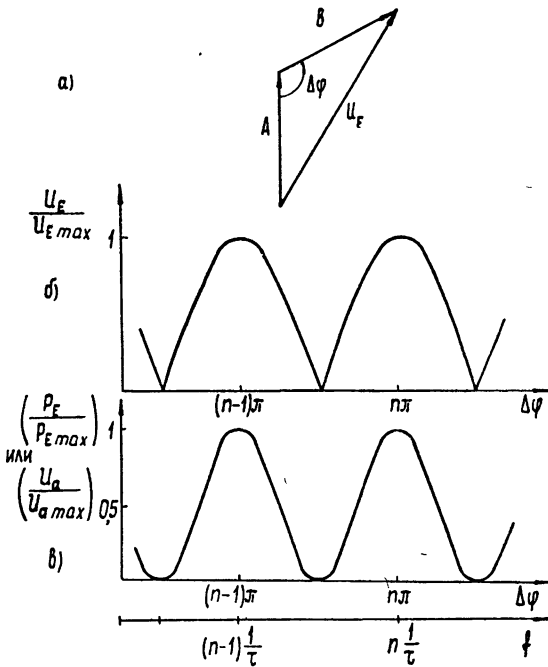


Рис. 2. а) Векторная диаграмма выходного напряжения.
 б) Амплитудная характеристика дискриминатора по напряжению.
 в) Амплитудная характеристика по мощности.

или для линейной аппроксимации синусоидальной функции (рис. 3)

$$\delta_u = \frac{\Delta\varphi/2 - \sin(\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} 100\% = \left[\frac{m\pi}{2\sin(m\pi/2)} - 1 \right] 100\% \quad (11)$$

Здесь m — коэффициент использования полосы дискриминатора ΔF_{\max} :

$$m = \Delta F / \Delta F_{\max} = \Delta\varphi / \pi \quad (12)$$

Зависимость δ_u от параметра m показана на рис. 4.

Из (9) и (12) можно вывести окончательное выражение для реальной полосы дискриминирующих частот:

$$\Delta F = m/2\tau \quad (13)$$

Величина m определяется по графику рис. 4 по заданной величине δ_u .

Из соотношения (13) можно найти необходимую задержку τ_v , исходя из требований полосы частот и точности линейной аппроксимации:

$$\tau_v = \frac{m}{2\Delta F} = \frac{m\tau}{4f_0\sigma_r} \quad (14)$$

Конструктивный расчет элемента задержки l можно произвести с помощью следующего выражения:

$$l = \frac{\tau_v}{2} v_{гр}, \quad (15)$$

где групповая скорость волны H_{01} в прямоугольном волноводе

$$v_{гр} = c \sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}. \quad (16)$$

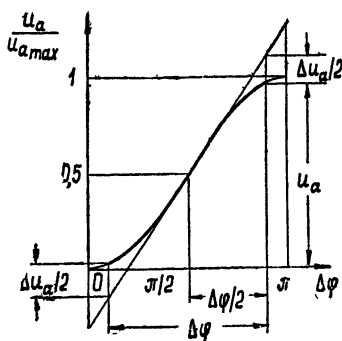


Рис. 3. Определение относительной ошибки при линейной аппроксимации синусоидальной функции.

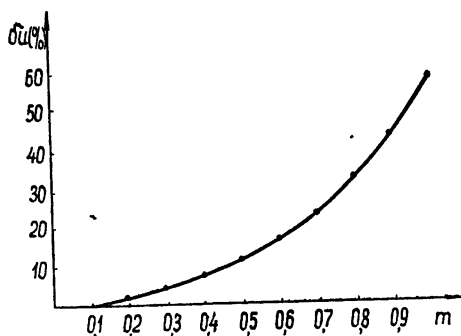


Рис. 4. Относительная ошибка линейной аппроксимации аналогового напряжения в зависимости от коэффициента использования полосы дискриминатора.

2. *Быстродействие системы.* Запишем фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ в виде ряда

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \tau) - \varphi(t) = \tau\varphi' + \frac{\tau^2}{2}\varphi'' + \frac{\tau^3}{6}\varphi''' + \dots, \quad (17)$$

где

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) = \omega_0 + \frac{2\omega_0}{c}v_r = \omega_0 + kv_r, \quad (18)$$

($k = 2\omega_0/c$, v_r — радиальная скорость),

$$\varphi'' = \omega'(t) = k \frac{dv_r}{dt} = k\gamma \quad (19)$$

(γ — ускорение) и т. д. Для действующих физических установок можно пренебречь членами, содержащими γ' , γ'' и т. д. Без учета постоянной составляющей выражение (9) можно записать так:

$$U_a = U_{a \max} \frac{\omega_0 \tau}{c} \left(v_r + \frac{\tau}{2} \gamma \right). \quad (20)$$

Следовательно, в процессе ускорения плазмы аналоговое напряжение, кроме скоростной составляющей, содержит член, эквивалентный некоторому приращению скорости $\Delta v = \gamma\tau/2$. Для однозначной интерпретации аналогового напряжения необходимо, чтобы

$$v_{r \min} > \frac{\tau}{2} \gamma_{\max}. \quad (21)$$

Обозначив через δ_γ процент искажений, вносимых ускорением плазмы, перейдем от неравенства (21) к следующему выражению:

$$\delta_\gamma = \frac{\tau}{2v_r} \gamma 100\%. \quad (22)$$

Требование к быстродействию системы τ при заданных $\gamma_{r \min}$, $\gamma_{r \max}$ и δ_γ можно выразить формулой

$$\tau_\gamma = 2\delta_\gamma v_{r \min} / \gamma_{\max}. \quad (23)$$

Дискриминирующая система будет отвечать требованиям быстродействия и необходимой точности воспроизведения, если задержка τ_γ , рассчитанная по формуле (23), будет больше требуемой задержки τ_v (14), т. е.

$$\tau_v < \tau_\gamma. \quad (24)$$

Необходимое время задержки τ_v уменьшается при возрастании измеряемых скоростей $v_{r \max}$. Очевидно, возникающие при этом ускорения γ_{\max} будут увеличиваться примерно пропорционально $v_{r \max} [1,2]$, т. е. $v_r / \gamma \simeq \text{const}$.

Из выражения (23) следует, что $\tau_\gamma \simeq \text{const}$. Таким образом, в еще большей степени увеличивается неравенство (24) и уменьшается относительная погрешность δ_γ , связанная с влиянием ускорения (см. (22)). Отсюда следует, что с точки зрения быстродействия система не имеет ограничений при увеличении измеряемых скоростей.

3. *О повышении достоверности измерений.* Как видно из выражения (9), величина аналогового напряжения в равной степени зависит от частоты и уровня отраженного сигнала. Поэтому частотные (F_d) и амплитудные ($h(t)$) изменения отраженного сигнала будут вносить пропорциональный вклад в аналоговое напряжение, т. е.

$$U_a = U_v h(t) + U_{a0} h(t). \quad (25)$$

Кроме того, достоверность результатов измерений при СВЧ зондировании плазмы в значительной степени зависит от выполнения условия применимости геометрической оптики [3]. При существующих методах формирования зондирующих лучей зоны локализации СВЧ полей, как правило, значительно превосходят размеры исследуемых образований.

Явления дифракции, огибания и многократного отражения проявляются в этом случае в виде интерференции принимаемых волн, что приводит к значительным искажениям амплитудно-фазового характера регистрируемого сигнала. Отсюда следует необходимость введения в схему дискриминатора СВЧ ограничителя мощности на уровне, лежащем ниже уровня максимального отраженного сигнала: $P_{\max} > P_{\text{огр}}$.

При решении проблемы повышения достоверности проводимых измерений особые трудности возникают вследствие искажений фазовой структуры зондирующего сигнала. В этом случае из-за динамических процессов, происходящих в плазме, резко меняются соотношения между зонами локализации СВЧ энергии и геометрией «активных» и «пассивных» отражающих поверхностей. Кроме того, фаза и амплитуда сигнала от пассивных отражателей претерпевает сложные изменения вследствие многократных отражений и экранирующего действия плазмы. В результате амплитуда и фаза сигнала в месте приема получает значительные искажения, которые возрастают с увеличением ускорения и пространственных флукуаций плазменных образований.

Единственно приемлемым средством устранения рассмотренных эффектов является зондирование специально сформированными узконаправленными лучами, сечение которых меньше площадей поверхностных неоднородностей исследуемой плазмы.

4. *Пример расчета волноводного дискриминатора.* Пусть рабочая длина волны $\lambda_0 = 3,2 \text{ см}$; сечение волновода $a = 23 \text{ мм}$, $b = 10 \text{ мм}$; максимальная регистрируемая скорость $v_{r \max} = 10^7 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$; коэффициенты нелинейных искажений: $\delta_u = 15\%$, $\delta_\gamma = 5\%$. Расчет проводится для $\delta_u = 15\%$ и $m = 0,6$ (см. рис. 4).

Максимальная доплеровская частота

$$F_{d \max} = v_{r \max} / (\lambda_0 / 2) = 6,25 \cdot 10^6 \text{ гц.}$$

Временная задержка

$$\tau = m / 2F_d = 48 \cdot 10^{-9} \text{ сек.}$$

Разность длины боковых плеч

$$l = \frac{\tau}{2} c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} = 517 \text{ см.}$$

Максимальное допустимое ускорение

$$\gamma_{\max} = \frac{2v_{r \max}}{\tau} \delta_\gamma = 20,8 \cdot 10^{12} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Для установки с $\gamma = 2 \cdot 10^{12} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$ погрешность $\delta_\gamma = 0,5\%$.

5. *Результаты эксперимента.* Были проведены экспериментальные исследования макета волноводного дискриминатора, выполненного в соответствии с приведенными выше расчетами. Испытания проводились на волне $3,2 \text{ см}$ в статическом и динамическом режимах.

Статическая характеристика дискриминатора показана на рис. 5. Из кривой видно, что участки периодической характеристики, близкие

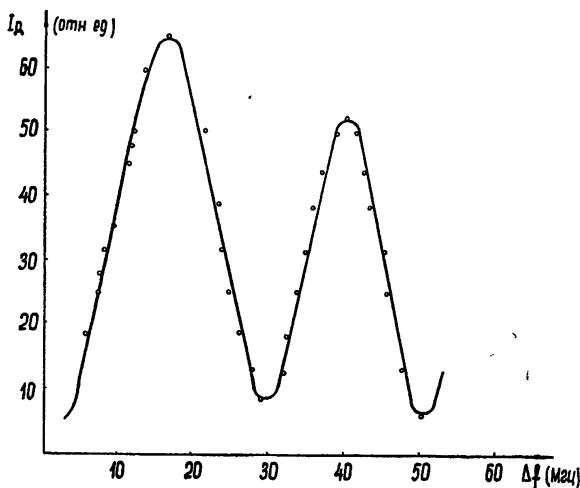


Рис. 5. Экспериментальная статическая характеристика дискриминатора ($f_0 = 9650 \text{ Мгц}$).

к линейным, имеют величину порядка 6 МГц , что хорошо совпадает с расчетными данными.

На рис. 6 показаны осциллограммы, снятые в динамическом режиме работы дискриминатора. Проводилось дискриминирование спектра частот порядка 4 МГц , полученного путем модуляции СВЧ генератора пилообразным напряжением (верхняя осциллограмма на рис. 6).

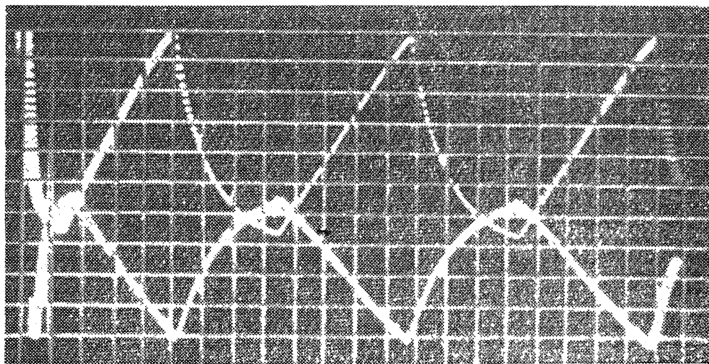


Рис. 6. Осциллограммы выходного напряжения дискриминатора (нижняя) и модулирующего напряжения СВЧ генератора (верхняя).

6. *Возможность упрощения конструкции волноводного дискриминатора.* При соответствующей регулировке длины малого плеча L_1 на его входе можно добиться противофазности прямых и отраженных волн. В этом случае частотно-зависимые изменения напряжения U_a будут обусловлены, в основном, изменением разности фаз $\Delta\varphi$ между прямой и отраженной волнами в длинном плече L_2 . Следовательно, процесс частотного дискриминирования может быть осуществлен на волноводной линии с детектирующим устройством, расположенным на расстоянии $L_0 = l$ от замкнутого конца (рис. 7). Одновременно волновая линия

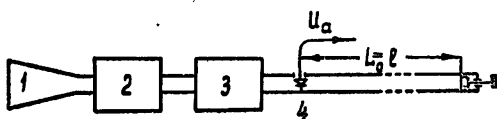


Рис. 7. Принципиальная схема волноводного дискриминатора упрощенной конструкции:

- 1—приемная антенна, 2—СВЧ ограничитель мощности, 3—ферритовый вентиль, 4—детектор.

в этом случае выполняет функции линии задержки и элемента сравнения. Подобная система более проста в изготовлении и настройке.

Рассмотренный метод позволяет получить новые сведения по динамике плазмы (при выполнении условий, обязательных для любого способа диагностики), особенно при исследовании процессов ускорения быстродвижущихся плазменных сгустков, а также колебаний границ неподвижной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, Атомиздат, М., 1963.
2. Д. А. Франк-Каменецкий, Лекции по физике плазмы, Атомиздат, М., 1964.
3. В. Д. Русанов, Современные методы исследования плазмы, Атомиздат, М., 1963.
4. Сборник трудов ИТОРИР им. Попова, Связьиздат, М., 1958.
5. Линии передач сантиметровых волн, под ред. Ремеза Г. А., Сов. радио, т II, М., 1948.
6. В. Т. Фролкин, Индикаторные устройства, ч 1, Оборонгиз, М., 1956.

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию
17 июня 1965 г.

METHOD OF WAVEGUIDE DISCRIMINATING

S. D. Il'in, S. S. Petrousev, A. V. Chernetsky

There given a comparative estimation of the methods of UHF-plasma-diagnostics from the standpoint of the investigation of processes related with plasma acceleration. The transformation is examined of phase-frequency deviations of a probing signal into the analogous voltage. The expression is derived for the band of such a transformation system at the definite accuracy. A high-speed response of the system is estimated. Considerations are given concerning the simplification of a device construction.

УДК 533.9.07

РАЗДЕЛИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ МНОГОЧАСТОТНОГО СВЧ ЗОНДИРОВАНИЯ ПЛАЗМЫ*С. Д. Ильин, С. С. Петрусов, А. В. Чернетский*

Описывается волноводное устройство, в котором применены специальным образом рассчитанные запердельные и полосовые чебышевские фильтры, позволяющие осуществить последовательное разделение частотных каналов в широком диапазоне частот. Устройство может найти применение при совмещенном в пространстве и времени многочастотном зондировании плазменных образований с концентрациями $10^{12} \div 2 \cdot 10^{14}$ эл. см⁻³. Приводятся примеры расчета волноводных фильтров и результаты эксперимента.

За последние годы большое распространение получили сверхвысокочастотные методы исследования параметров плазмы. Наиболее широко применяется радиоинтерферометрирование плазмы и определение критической концентрации по запирающему лучу [1]. В обоих случаях используется аппаратура, работающая как на одной определенной частоте, так и на нескольких [2-5]. Последний случай наиболее интересен, так как позволяет определить распределение концентрации частиц в плазме. Однако это достигается либо поочередным зондированием на каждой частоте [2], либо одновременным, но разделенным в пространстве зондированием, когда антенны устанавливаются радиально относительно плазмы, и ее просвечивание производится на каждой частоте по отдельному каналу [4].

Совершенно ясно, что было бы удобно объединить энергию всех каналов в одном радиолуче и производить одновременно измерения на всех частотах. Не всегда можно (по конструктивным соображениям) сделать в плазменной установке много окон, прозрачных для СВЧ излучения. Кроме того, устройство, с помощью которого можно производить одновременные измерения на нескольких частотах в одной и той же области плазмы, даст точные сведения о пространственном распределении частиц в этой области в каждый момент времени. При раздельном зондировании сведения поступают, по существу, из различных областей, это служит возможным источником ошибок. Следует также указать на перспективность использования многочастотных совмещенных антенн при исследовании собственного излучения плазмы.

Известны попытки создания подобных систем, в которых разделение излучений различных частот осуществляется либо направленными ответвителями (в излучающем канале), либо с помощью дифракционных систем [6] или специальных зеркал, облучаемых разнополяризованными или несовмещенными первичными излучателями [5].

Указанные системы до настоящего времени не получили практического применения в диагностической аппаратуре из-за малой эффективности и трудности их геометрического и электрического согласования с объемами, заполненными плазмой, а также из-за невозможности использования по-разному поляризованных излучений в установках с магнитным полем. Можно также отметить трудности указанных методов,

связанные с локализацией СВЧ энергии в необходимом диапазоне частот.;

В настоящей работе описывается многочастотное устройство с последовательным разделением каналов, по которым проходят соответствующие частоты. Система представляет собою высокочастотный тракт, состоящий из однотипных разделительных элементов (см. рис. 1). В каж-

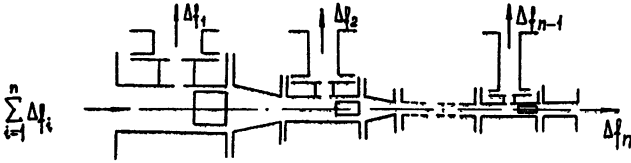


Рис. 1. Схема многочастотного разделительного устройства.

дый разделительный элемент входит полосовой чебышевский фильтр и фильтр высших частот запредельного типа, выполненные на волноводных элементах и соединенные последовательно.

Как известно, запредельный фильтр пропускает без существенного ослабления все сигналы, частоты которых превышают так называемую критическую частоту $f_{кр}$, и отражает сигналы на частотах, лежащих ниже этой граничной частоты [7-9]. В данном случае граничная частота должна быть выше максимальной частоты отражаемого сигнала и ниже минимальной пропускаемой частоты соседнего пропускаемого диапазона.

Полосовой фильтр пропускает с незначительным затуханием полосу частот Δf и отражает сигналы на частотах, не лежащих в полосе прозрачности. Комбинированное применение фильтров в каждом разделительном элементе создает условия, необходимые для выделения и дальнейшей автономной канализации низшего спектра частот из совокупности спектров, которые поступают на вход каждого разделительного элемента.

Методику выбора параметров и конструктивный расчет указанных фильтров можно найти, например, в работе [8]. Ниже приводится примерный расчет одного из разделительных элементов.

Расчет полосового фильтра. Возьмем следующие исходные данные: рабочий диапазон частот: $3,12 \div 3,28$ см; полоса пропускания фильтра: $3,04 \div 3,36$ см; наибольшее затухание в полосе пропускания: $b_n = 0,17$ дБ; границы полосы заграждения: $1,68 \div 6,1$ см; заграждение на границе указанной полосы: $b_3 = 30$ дБ; сечение основного волновода: $h = 10$, $a = 23$ мм; тип волны отделяемого колебания: H_{10} .

Определим расстояние между резонансными элементами

$$l = \lambda_b / 4,$$

где λ_b — длина волны в волноводе, соответствующая средней длине волны рабочего диапазона в вакууме $\lambda_0 = 3,2$ см:

$$\lambda_b = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}} = 44,75 \text{ мм},$$

а $l = 11,19$ мм.

Вспомогательные параметры определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \lambda_0 / \lambda_3 - \lambda_3 / \lambda_0 = 1,375, & \gamma_n &= \lambda_0 / \lambda_n - \lambda_n / \lambda_0 = 0,1, \\ b_3 &= 10 \ln L_3 = 30, & L_3 &= 1000, \\ b_n &= 10 \ln L_n = 0,17, & L_n &= 1,04. \end{aligned}$$

Здесь λ_3 и λ_n — длины волн, соответствующие полосе заграждения и пропускания [8], η_3 и η_n — величины, обратные масштабным множителям S , L_3 и L_n — относительные значения затухания.

Число резонансных элементов фильтра найдем из выражения

$$N = \frac{\operatorname{arcch} \sqrt{(L_3 - 1)/(L_n - 1)}}{\operatorname{arcch} \eta_3/\eta_n} = 1,74.$$

Примем ближайшее целое значение: $N = 2$. Величина масштабного множителя: $S = 1/\eta_n = 10$. Добротность контуров Q определяется из графика (см. рис. 2):

$$Q/S = 0,625, \quad Q = 5,25.$$

Добротность контуров с учетом избирательности соединительных линий

$$Q_H = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_0} \right)^2 = 0,768.$$

Коэффициент трансформации идеального трансформатора $n_{\text{ТР}} = 1,225$ (см. рис. 3). Перепад волновых сопротивлений $\alpha = 1/n_{\text{ТР}} = 0,81$; высота ступеньки $h_0 = ah = 8,1$ мм.

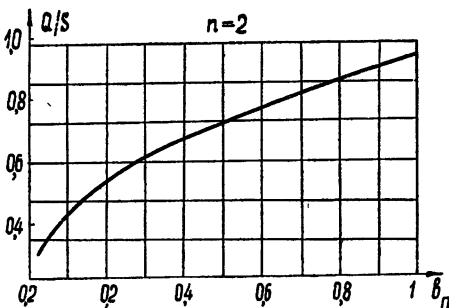


Рис. 2. График для определения добротности контуров.

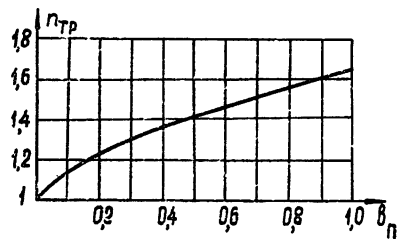


Рис. 3. График для нахождения коэффициента трансформации идеального трансформатора.

Определим добротность резонансных диафрагм, устанавливаемых в волноводе: $Q' = Q - Q_H = 4,482$. Конструктивно резонансную диафрагму можно выполнить в виде симметричного прямоугольного отверстия в тонкой металлической пластине (см. рис. 4). Размеры a' и b' такой диафрагмы определяются из соотношения

$$\frac{a'}{b'} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a'} \right)^2} = \frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}.$$

Допуск на расстройку диафрагмы весьма велик; поэтому диафрагма не требует регулировки и настройки после изготовления и сборки. Точка резонанса не зависит от толщины диафрагмы, если последняя много меньше λ_0 .

Расчет фильтра высших частот. При работе волновода на длине волны, большей критической $\lambda_{\text{кр}}$, электромагнитные волны очень быстро затухают с увеличением расстояния от начала волновода. Скорость этого затухания определяется

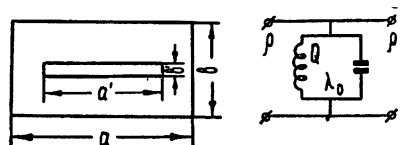


Рис. 4. Резонансная диафрагма и ее эквивалентная схема.

только отношением $\lambda_0/\lambda_{кр}$ и мало зависит от материала стенок. Для волны H_{10} в прямоугольном волноводе $\lambda_0/\lambda_{кр} = \lambda_0/2a$ коэффициент затухания [9]

$$\alpha = \frac{27,3}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2}$$

Например, задавшись отношением $\lambda_0/\lambda_{кр} = 1,6$, получим $\alpha \approx 21 \text{ дБ} \cdot \text{см}^{-1}$. Конструктивно запредельный фильтр можно выполнить либо в виде пирамидального волноводного перехода, либо отрезка волновода стандартного сечения с впаянной по средней линии короткозамыкающей продольной пластинкой. Затухание этих фильтров в полосе прозрачности не превышает величин, характерных для обычных волноводных трактов подобного типа.

Результаты эксперимента. По описанной методике были рассчитаны, сконструированы и изготовлены волноводные фильтры на различные диапазоны частот, которые в целом перекрывают соответствующие им критические концентрации частиц в плазме $n_{кр} \approx 10^{12} \div 7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

Конструкция многочастотного разделителя показана на рис. 5. В таблице 1 приведены расчетные данные и результаты эксперимента.

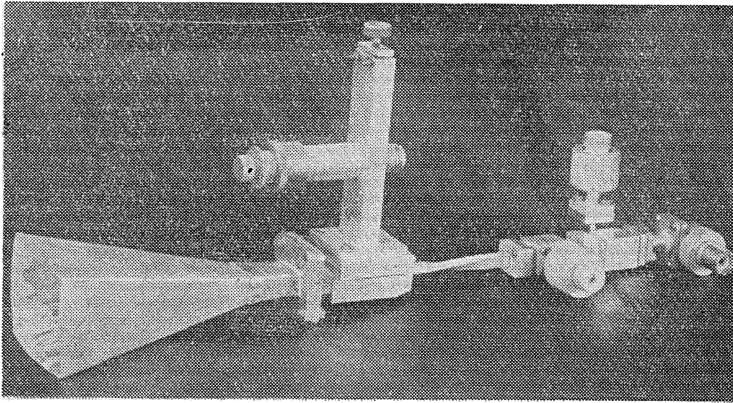


Рис. 5. Внешний вид многочастотного разделителя.

Таблица 1

№ фильтра	$n_{кр}$ (эл.см ⁻³)	$P_{\text{ВЫХ}}/P_{\text{ВХ}}$		b_3	
		расчет	эксперимент	расчет	эксперимент
1	1 · 10	0,96	0,85	30	30
2	1,7 · 10	0,96	0,80	30	30
3	7 · 10	0,96	0,76	30	30

Измерения производились на частотах, соответствующих критическим концентрациям электронов, определяемым из формулы

$$n_{кр} = \frac{m\omega_0^2}{4\pi e^2},$$

где ω_0 — плазменная частота, m и e — соответственно масса и заряд электрона.

Отношение выходной мощности к входной $P_{\text{вых}}/P_{\text{вх}}$ определялось в полосе частот $\omega_0 \pm 2,5\%$. Величина запирающего соседнего канала $b_3 = 10 \ln L_3$ находилась на средних частотах соседних каналов.

Описанный метод совмещения нескольких излучающих или приемных антенн в одной системе может расширить возможности известных способов исследования плазмы, особенно в направлении структурных измерений плазменных образований. Открывается возможность применения многочастотных специальных ламп. При использовании устройства для пассивной диагностики может быть осуществлена одновременная регистрация широкого спектра радиочастот, излучаемых плазмой, точнее, определенным ее участком. При этом могут быть осуществлены абсолютные измерения излучаемой энергии, так как относительно небольшие затухания в разделительном тракте могут быть тщательно откалиброваны и учтены.

Разделительное устройство может стать основой узконаправленных антенных систем. Например, установка на выходе разделителя рупора с диэлектрической линзой обеспечивает высокую локализацию энергии в определенной области плазмы и в значительной степени избавляет от погрешностей измерений, связанных с рассеянием излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Русанов, Современные методы исследования плазмы, Госатомиздат, М., 1962.
2. Движущаяся плазма, Сб переводов, ИЛ, М., 1962, стр. 179
3. В. Е. Голант, ЖТФ, 30, 1265 (1960).
4. А. И. Анисимов, Н. И. Виноградов, В. Е. Голант, Б. П. Константинов, ЖТФ, 30, 1009 (1960)
5. В. Б. Бродский, Б. М. Белицкий, С. Е. Загик, В. А. Лютомский, А. В. Спиридонов, ЖТФ, 33, 419 (1963)
6. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза, Сб докладов под ред академика АН УССР К. Д. Синельникова, изд. АН УССР, 2, Киев, 1962, стр. 315.
7. Линии передачи сантиметровых волн, перев с англ. под ред А. Г. Ремеза, изд. Сов. радио, М., 1948.
8. А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич, В. П. Смирнов, Справочник по элементам волноводной техники, Госэнергоиздат, М., 1963.
9. Справочник по радиотехнике под ред Б. А. Смиренина, Госэнергоиздат, М, 1950

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию
17 июня 1965 г.

SEPARATION DEVICE FOR MULTI-FREQUENCY UHF PLASMA PROBING

S. D. Il'in, S. S. Petrousev, A. V. Chernetsky

A waveguide device is described in which the cut-off and band Chebyshev's filters (calculated in a special way) are applied. This permits to realize a subsequent separation of frequency channels in a wide frequency range. The device may be used at compatible space-time multifrequency probing of plasma formations with densities of about $10^{12} - 2 \cdot 10^{14}$ el. cm⁻³. The calculation examples of waveguide filter are given and experimental results, as well.

УДК 621.371.134

СТАТИСТИКА ЛУЧЕЙ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В. М. Комиссаров

Процесс распространения волн в среде с регулярной и случайными неоднородностями описывается с помощью уравнения Фоккера—Планка. Найдена пространственно-угловая функция распределения лучей. Рассчитаны флуктуации углов прихода и смещений луча. Указаны условия применимости проведенного рассмотрения.

Исследуя распространение волн в реальных средах, мы должны учитывать как регулярные, так и случайные изменения свойств этих сред. В частности, оставаясь в пределах применимости геометрической оптики, нужно кроме систематического отклонения принимать во внимание статистический разброс лучей по направлениям и в пространстве, обусловленный рассеивающим действием случайных неоднородностей среды. Луч, прошедший в среде расстояние, значительно превышающее характерный пространственный масштаб случайных неоднородностей, испытывает многократное рассеяние. Это позволяет при определенных условиях для нахождения пространственно-углового распределения лучей применить статистическую схему теории броуновского движения, основанную на уравнении Фоккера—Планка. Нам известна работа Денисова [1], в которой учет влияния рефракции на угловое распределение лучей при нормальном падении на слой проведен с помощью уравнения типа Эйнштейна—Фоккера для вращательного броуновского движения. В отличие от этой работы, мы рассматриваем случай произвольного угла падения и проводим аналогию между распространением луча и поступательным движением броуновской частицы во внешнем силовом поле. На этом пути возникает возможность найти совместную функцию распределения для направлений и смещений луча.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛУЧА

Пусть время распространения луча настолько мало, что выполнены условия квазистатичности. Тогда в приближении геометрической оптики при описании процесса распространения можно пользоваться системой дифференциальных уравнений луча в следующем виде [2]:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{S}, \quad [(n + \alpha\mu)\mathbf{S}]' = \nabla(n + \alpha\mu); \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{S}^0. \quad (2)$$

Здесь $n = n(z)$ — среднее значение показателя преломления, зависящее только от координаты z , $\alpha\mu(\mathbf{r})$ — случайные отклонения от среднего значения (они предполагаются малыми: $\alpha \ll 1$), $\mathbf{S}(\alpha, \sigma)$ — единичный вектор касательной к лучу, σ — путь вдоль луча. Вообще говоря, мы должны определить $\mu = \mu(\mathbf{r}, \omega)$, где ω — точки некоторого вероятностного пространства Ω , на котором задана вероятностная мера $dP(\omega)$, и функции

$\mu(\mathbf{r}, \omega)$ измерима относительно $dP(\omega)$. Но на первом этапе решения мы отвлечемся от случайного характера показателя преломления и будем считать, что $\mu = \mu(\mathbf{r})$ есть какая-либо реализация из множества функций $\mu(\mathbf{r}, \omega)$, вид которой мы не будем конкретизировать. Будем считать, что функции $n(z)$ и $\mu(\mathbf{r})$ непрерывно дифференцируемы.

К исследованию уравнений (1), (2) применим, пользуясь малостью параметра α , метод последовательных приближений. Ограничиваясь членами первого порядка малости по α , представим решение (1), (2) в виде

$$\mathbf{r}(\alpha, \sigma) = \mathbf{r}_0(\sigma) + \alpha \mathbf{r}_\alpha(\sigma) + O(\alpha^2); \quad (3)$$

$$S(\alpha, \sigma) = S_0(\sigma) + \alpha S_\alpha(\sigma) + O(\alpha^2).$$

Полагая $\alpha = 0$ в (1), (2), для нулевого приближения получим

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{S}_0, \quad [n_0 \mathbf{S}_0]' = \nabla n_0; \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_0(0) = 0, \quad S_0(0) = S^0. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем употребляется обозначение $f_0 = f(\mathbf{r}_0)$. Решение системы (4), (5) определит зависимость \mathbf{r} и S от σ , которая имела бы место, при распространении в среде без случайной неоднородности.

Прежде чем переходить к отысканию уравнений первого приближения, заметим, что $n(z) = n_0 + \alpha z_\alpha (dn_0/dz_0) + O(\alpha^2)$. Продифференцируем теперь (1), (2) по α и положим $\alpha = 0$. В результате после некоторых преобразований получим

$$\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{S}_\alpha, \quad (n_0 \mathbf{S}_\alpha)' = \mathbf{f} + z_\alpha F - S_{\alpha z} S_0 \frac{dn_0}{dz_0}; \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_\alpha(0) = \mathbf{S}_\alpha(0) = 0, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{f}(\sigma) = \nabla \mu_0 - (\mu_0 \mathbf{S}_0)', \quad (8)$$

$$F(\sigma) = \nabla \frac{dn_0}{dz_0} - S'_0 \frac{dn_0}{dz_0} - S_0 \frac{d^2 n_0}{dz_0^2} S_{0z}. \quad (9)$$

Комбинируя (4), (5) и (6), (7), получим систему дифференциальных уравнений луча в искомом приближении:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}' = -\frac{n'_0}{n_0} \mathbf{S} + \frac{\nabla n_0}{n_0} + \frac{\alpha}{n_0} \mathbf{f} + \frac{\alpha z_\alpha}{n_0} F - \frac{\alpha S_{\alpha z}}{n_0} S_0 \frac{dn_0}{dz_0}; \quad (10)$$

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad S(0) = S^0. \quad (11)$$

Здесь z_α и $S_{\alpha z}$, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой в (6), (7), определяются следующими формулами:

$$z_\alpha = S_{0z} [J(\sigma) - J(0)]; \quad (12)$$

$$S_{\alpha z} = S_{0z} \Phi(\sigma) + \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} (1 - S_{0z}^2) \frac{z_\alpha}{S_{0z}}, \quad (13)$$

где $J(\sigma)$ — первообразная функции

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{(n_0 S_{0z})^2} \int_0^\sigma n_0 S_{0z} f_z(t) dt. \quad (14)$$

Функция $\Phi(\sigma)$ имеет бесконечные разрывы в точках $n_0(\sigma) = 0$ и $S_{0z}(\sigma) = 0$. Первую из них вместе с некоторой ее окрестностью мы

исключаем из рассмотрения. Во второй точке (точке поворота луча) функции z_α и $S_{\alpha z}$, как следует из анализа формул (12) и (13), конечны и непрерывны. Они остаются конечными и непрерывными во всей области изменения параметра σ до тех пор, пока можно ограничиться приближением (3).

Как было сказано выше, функция $\mu(\mathbf{r})$ является некоторой реализацией из семейства случайных функций $\mu(\mathbf{r}, \omega)$. Таким образом, мы получили систему стохастических дифференциальных уравнений луча, которая определит в приближении (3) семейство случайных траекторий, также зависящих от параметра ω .

2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА

Стохастическая задача (10), (11) без членов, пропорциональных z_α и $S_{\alpha z}$, имеет тот же вид, что и задача о движении броуновской частицы во внешнем силовом поле [3]. Роль времени играет путь σ , а роль скорости — вектор \mathbf{S} . Как известно, процессы типа броуновского движения являются марковскими вероятностными процессами. Это означает, что вероятность системе находиться в некотором интервале состояний в момент времени $t + \Delta t$ полностью определяется заданием состояния этой системы в момент времени t и не зависит от того, в каких состояниях система находилась до момента t , т. е. не зависит от ее предыстории. Но интегральные члены (12), (13) как раз и учитывают в некотором смысле предысторию процесса. Поэтому процесс распространения луча в приближении (5) можно было бы считать марковским процессом, если бы мы указали условия, при которых воздействием этих членов можно пренебречь.

Разобьем путь σ на неперекрывающиеся отрезки $\Delta\sigma$, большие по сравнению с масштабом случайной неоднородности среды a . Тогда луч на участке $\Delta\sigma$ испытает много случайных отклонений. В то же время отрезки $\Delta\sigma$ должны быть достаточно малы по сравнению с расстояниями, на которых луч существенно искривляется. Для этого прежде всего необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\Delta\sigma \ll l$, где $l \sim (dn/dz)^{-1}$ характеризует масштаб изменения регулярных свойств среды. Тогда приращение \mathbf{r} и \mathbf{S} на таком отрезке определяется, согласно (10), следующим образом:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{S}\Delta\sigma, \quad \Delta\mathbf{S} = -\frac{n'_0}{n_0}\mathbf{S}\Delta\sigma + \frac{\nabla n_0}{n_0}\Delta\sigma + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{A}(\sigma, \Delta\sigma) = \frac{\alpha}{n_0} \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} \mathbf{f}(t) dt, \quad (16)$$

$$\mathbf{B}(\sigma, \Delta\sigma) = \frac{\alpha F}{n_0} \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} z_\alpha(t) dt, \quad (17)$$

$$\mathbf{C}(\sigma, \Delta\sigma) = -\frac{\alpha S_0}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} S_{\alpha z}(t) dt. \quad (18)$$

Будем далее считать среду статистически однородной и изотропной. Тогда статистические свойства процесса распространения луча на каждом элементарном участке $\Delta\sigma$ определяются функцией $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$. Для

сравнения вкладов функций A , B и C нужно знать среднее значение квадрата модуля их суммы. Поскольку $A \perp C$, имеем

$$\langle |A+B+C|^2 \rangle = \langle A^2 \rangle + \langle B^2 \rangle + \langle C^2 \rangle + 2\langle AB \rangle + 2\langle BC \rangle. \quad (19)$$

Таким образом, воздействием интегральных членов (12) и (13) можно пренебречь, если выполняется неравенство

$$\langle A^2 \rangle \gg \langle B^2 \rangle + \langle C^2 \rangle + 2\langle AB \rangle + 2\langle BC \rangle. \quad (20)$$

На основании (16) находим

$$\langle A^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{n_0^2} \left\langle \int_0^{\sigma+\Delta\sigma} \int_0^{\sigma} f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2 \right\rangle. \quad (21)$$

Поскольку искривление луча мало, заменим в (21) интегрирование вдоль луча интегрированием вдоль прямой. Теперь предположим, что можно поменять местами операции усреднения и интегрирования и дифференцирования. Производя далее обычные в этих случаях вычисления [2], получим

$$\langle A^2 \rangle = 4D\Delta\sigma n_0^{-2}, \quad (22)$$

где

$$D = -\alpha^2 \langle \mu^2 \rangle \int_0^{\infty} r^{-1} N(r) dr. \quad (23)$$

Эта формула для коэффициента диффузии лучей D в однородной в среднем среде, как указывается в работе Келлера [4], отличается от соответствующей формулы, полученной Черновым (см. [2], стр. 21, формула (32)), отсутствием под интегралом второй производной от коэффициента корреляции $N(r)$ *. Это различие, согласно [4], вызвано тем, что в [2] при выводе формулы не учитывается член, содержащий производную $d\mu/d\sigma$ (ср. со вторым членом в правой части формулы (8) настоящей работы). Однако следует заметить, что обе формулы для коэффициента диффузии лучей фактически эквивалентны. В самом деле, можно показать, что, если функция $\mu(r)$ непрерывна в среднем квадратичном вместе со своей первой производной, то

$$\left[\frac{dN(r)}{dr} \right]_{r=0} = 0, \quad r = |r_2 - r_1|. \quad (24)$$

В то же время, используя теорему Хинчина, можно доказать, что $\lim_{r \rightarrow \infty} (dN/dr) = 0$. Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2 N}{dr^2} = \frac{dN}{dr} \Big|_{r=0} - \frac{dN}{dr} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (25)$$

и, таким образом, обе формулы совпадают.

Для иллюстрации ограничений, которые требование (20) налагает на параметры среды и луча, рассмотрим частный случай, когда зависимость $n(z)$ имеет вид $n(z) = 1 + z/l$. В этом случае, интегрируя в (12) по частям, получим

$$z_\alpha = -\frac{l}{n_0} \int_0^\sigma n_0 S_{0z} f_z(t) dt + l S_{0z} \int_0^\sigma f_z(t) dt; \quad (26)$$

* Формула для коэффициента диффузии D , аналогичная формуле (23), используется также в монографии Фейнберга [5]

$$S_{az} = \frac{S_{0z}}{n_0^2} \int_0^a n_0 S_{0z} f_z(t) dt + \frac{(1 - S_{0z}^2)}{n_0} \int_0^a f_z(t) dt. \quad (27)$$

Чтобы вычислить моменты, стоящие в правой части неравенства (20), нужно знать значения моментов $\langle z_\alpha(\sigma_1) z_\alpha(\sigma_2) \rangle$, $\langle z'_\alpha(\sigma_1) z'_\alpha(\sigma_2) \rangle$ и др. Отыскание последних связано с длинными математическими выкладками, характер которых ясен на примере вычисления следующего интеграла, входящего в эти моменты:

$$I = \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} (n_0 S_{0z})_1 (n_0 S_{0z})_2 \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial z_1 \partial z_2} dt_1 dt_2. \quad (28)$$

Не нарушая общности, будем считать в этой формуле $\sigma_{1,2} \gg a$. Разобьем в каждом интеграле пути интегрирования на неперекрывающиеся отрезки $\Delta\sigma_i \gg a$. В этом случае корреляцией между различными участками путей интегрирования можно пренебречь. Тогда:

$$I = \sum_{i=0}^k \int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta\sigma_i} \int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta\sigma_i} (n_0 S_{0z})_i^2 \left(\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial z_1 \partial z_2} \right)_i dt_1 dt_2. \quad (29)$$

где k — число отрезков, на которое разбивается меньший путь интегрирования. Считая в то же время $\Delta\sigma_i$ достаточно малыми и пренебрегая искривлением луча на каждом элементарном участке, заменим интегрирование вдоль луча интегрированием по прямой:

$$I = \sum_{i=0}^k (n_0 S_{0z})_i^2 \int_0^{\Delta\sigma_i} \int_0^{\Delta\sigma_i} \left(\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial z_1 \partial z_2} \right)_i dr_1 dr_2. \quad (30)$$

Перейдем в этой формуле к переменным $r = r_2 - r_1$ и $r_0 = (1/2)(r_2 + r_1)$. Интегрируя по r_0 и учитывая, что $\Delta\sigma_i \gg a$, получим

$$I = -2 \sum_{i=0}^k (n_0 S_{0z})_i^2 \Delta\sigma_i \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right)_i dr. \quad (31)$$

Принимая во внимание, что $\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right)_i = (S_{0z})_i^2 \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1 - (S_{0z})_i^2}{r} \frac{\partial N}{\partial r}$, и используя формулы (23) и (25), окончательно получим

$$\begin{aligned} I &= -2 \sum_{i=0}^k (n_0 S_{0z})_i^2 [1 - (S_{0z})_i^2] \Delta\sigma_i \int_0^\infty r^{-1} N_r dr = \\ &= 2D(\alpha^2 \langle \mu^2 \rangle)^{-1} [1 - (S_{0z}^0)^2] \sum_{i=0}^k \Delta\sigma_i (S_{0z})_i^2. \end{aligned} \quad (32)$$

В этой формуле и ниже индекс «0» вверху обозначает, что соответствующая величина взята в начале координат. Опуская длинные выкладки, приведем окончательно неравенство, эквивалентное неравенству (20):

$$\frac{\sigma \Delta\sigma}{l^2} [1 - (S_z^0)^2] \ll 1. \quad (33)$$

Соотношение (33) получено в предположении, что выполняются следующие неравенства:

$$a \ll \Delta\sigma \ll l. \quad (34)$$

Если параметры среды и луча удовлетворяют неравенствам (33) и (34), то воздействием интегральных членов (12) и (13) можно пренебречь, а процесс распространения луча в рассматриваемом приближении можно считать по аналогии с броуновским движением непрерывным марковским процессом. Статистические свойства процесса на каждом элементарном отрезке определяются в этом случае членом $|A(\Delta\sigma)|$. Разбивая, в свою очередь, отрезок $\Delta\sigma$ на большое число отрезков длиной порядка радиуса корреляции (фактически порядка масштаба случайной неоднородности a), найдем, что величина $A(\Delta\sigma)$ есть результат сложения большого числа слабозависимых величин. Согласно центральной предельной теореме, распространенной Бернштейном [6] на суммы зависимых величин, величина $A(\Delta\sigma)$ подчиняется нормальному закону распределения. Для среды статистически однородной и изотропной, принимая во внимание (22), получим, что функция распределения

$$w[A(\Delta\sigma)] = \frac{n_0^3}{[4\pi D\Delta\sigma]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{|A|^2}{4D\Delta\sigma} n_0^2\right\}. \quad (35)$$

Рассматривая в приближении (5) лучи как траектории марковского процесса, сформулируем задачу о нахождении распределения лучей по углам и в пространстве. Пусть ϑ — полярный, φ — азимутальный углы, определяющие направления луча. Требуется найти пространственно-угловую функцию распределения $W(\vartheta, \varphi, \mathbf{r}, \sigma, \mathbf{S}^0)$ для луча, прошедшего в среде путь σ , если в начальной точке $\mathbf{r}=0$ он имел направление, определяемое вектором \mathbf{S}^0 .

К решению этой задачи подойдем следующим образом. Как было сказано выше, припишем вектору \mathbf{S} смысл скорости и отвлечемся от того, что его длина по определению равна единице. В такой постановке наша задача совпадает с нахождением функции распределения $W(\mathbf{S}, \mathbf{r}, \sigma, \mathbf{S}^0)$ по скоростям и координатам для броуновской частицы, движущейся во внешнем силовом поле, при заданных скорости и положении частицы в начальный момент. После нахождения этой функции распределения введем в пространстве \mathbf{S} сферическую систему координат:

$$S_x = R \sin \vartheta \sin \varphi, \quad S_y = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad S_z = R \cos \vartheta. \quad (36)$$

Учитывая то обстоятельство, что $R \equiv 1$, определим функцию распределения $W(\vartheta, \varphi, \mathbf{r}, \sigma, \mathbf{S}^0)$. Функция распределения $W(\mathbf{S}, \mathbf{r}, \sigma, \mathbf{S}^0)$, как известно из теории броуновского движения [3], является фундаментальным решением уравнения Фоккера—Планка. В нашем случае, привлекая (35), найдем, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \mathbf{S} \text{grad}_{\mathbf{r}} W = \frac{n_0'}{n_0} (\mathbf{S} \text{grad}_{\mathbf{S}} W + 3W) - \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} \frac{\partial W}{\partial S_z} + \frac{D}{n_0^2} \nabla_{\mathbf{S}}^2 W \quad (37)$$

при условии $W = \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}^0) \delta(\mathbf{r})$ при $\sigma = 0$.

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для решения этой задачи можно применить метод, проиллюстрированный в работе [3] на примере одномерного гармонического осциллятора, описывающего броуновское движение. Прежде всего введем функцию χ , связанную с функцией W следующим образом:

$$W = \chi n_0^3. \quad (38)$$

Тогда для χ получим уравнение

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} + \mathbf{S} \operatorname{grad}_r \chi - \frac{n'_0}{n_0} \mathbf{S} \operatorname{grad}_S \chi + \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} \frac{\partial W}{\partial S_z} = \frac{D}{n_0^2} \nabla_S^2 \chi. \quad (39)$$

Это уравнение без правой части является линейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка. Решение нашей задачи связано с общим решением этого уравнения. Однако, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [7], интегрирование такого уравнения можно свести к интегрированию соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Легко показать, что в эту систему входят шесть уравнений луча:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}' = -\frac{n'_0}{n_0} \mathbf{S} + \frac{\nabla n_0}{n_0}. \quad (40)$$

В связи с этим выберем в качестве новых переменных шесть независимых интегралов этой дополнительной системы Лагранжа, которые представим в виде двух следующих вектор-интегралов:

$$I_1 = n_0 \mathbf{S} - \int_0^\sigma \nabla n_0 d\sigma; \quad (41)$$

$$I_2 = \mathbf{r} - n_0 \mathbf{S} L(\sigma) + L(\sigma) \int_0^\sigma \nabla n_0 d\sigma - \int_0^\sigma \frac{1}{n_0} \left\{ \int_0^\sigma \nabla n_0 d\sigma_1 \right\} d\sigma,$$

где $L(\sigma) = \int_0^\sigma d\sigma/n_0$ — функция, представляющая собой для плазмы групповой путь луча. При такой замене переменных уравнение (39) переходит в следующее:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} = D [\nabla_{I_1}^2 - 2L(\sigma) \nabla_{I_1} \nabla_{I_2} + L^2(\sigma) \nabla_{I_1}^2] \chi. \quad (42)$$

Решение этого уравнения при условии

$$I_1 = I_1^0, \quad I_2 = I_2^0 \quad (\text{при } \sigma = 0) \quad (43)$$

имеет вид

$$\chi = \frac{1}{8\pi^3 \Delta^{3/2}} \exp \left\{ - [g(I_1 - I_1^0)^2 + 2h(I_1 - I_1^0)(I_2 - I_2^0) + b(I_2 - I_2^0)^2] / 2\Delta \right\}, \quad (44)$$

где

$$g = 2 \int_0^\sigma L^2(\sigma) D d\sigma, \quad b = 2 \int_0^\sigma D d\sigma, \quad h = 2 \int_0^\sigma L(\sigma) D d\sigma, \quad \Delta = gb - h^2. \quad (45)$$

Принимая во внимание (38), (41) и (44), можно получить соответствующее выражение для функции распределения $W(\mathbf{S}, \mathbf{r}, \sigma, \mathbf{S}^0)$, которое мы не выписываем здесь из-за его громоздкости.

Чтобы получить теперь функцию распределения для направлений и смещений луча, введем в пространстве \mathbf{S} сферическую систему координат в соответствии с формулами (36). Запишем углы ϑ и φ в виде

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad (46)$$

где ϑ_1 и φ_1 — углы, характеризующие малые отклонения от регулярного направления распространения. Введем также переменные x_1, y_1, z_1 , которые определяются как разность соответствующими случайными и средними координатами точки на траектории луча. Тогда, учитывая малость флуктуаций углов прихода и смещений луча и то, что $|\mathbf{S}| \equiv 1$, получим на основании формул (38), (41) и (44) следующую функцию распределения для направлений и смещений луча:

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \frac{n_0^2 b^{1/2}}{(2\pi)^{5/2} \Delta^{3/2}} \exp \left\{ - \left[n_0^2 \Delta_1 (\vartheta_1^2 + \sin^2 \vartheta_0 \varphi_1^2) + 2x_1 n_0 \Delta_2 (\vartheta_1 \cos \vartheta_0 \times \right. \right. \\ & \times \sin \varphi_0 + \varphi_1 \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0) + 2y_1 n_0 \Delta_2 (\vartheta_1 \cos \vartheta_0 \cos \varphi_0 - \\ & \left. \left. - \varphi_1 \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0) - 2z_1 n_0 \Delta_2 \vartheta_1 \sin \vartheta_0 + b(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \right] / 2\Delta \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\Delta_1 = g - 2hL + bL^2, \quad \Delta_2 = h - bL. \quad (48)$$

При написании формулы (47) мы еще учли требование нормировки:

$$\int W dV = 1. \quad (49)$$

Заметим также, что в нашем случае $\varphi_0 = \varphi^0$ и $n_0 \sin \vartheta_0 = \sin \vartheta^0$.

Рассмотрим некоторые следствия этой общей формулы. При $\sin \vartheta^0 = 0$ и $n \equiv 1$ (однородная в среднем среда), интегрируя в (47) по z_1 и вводя векторы $\vartheta \{ \vartheta_1 \sin \varphi_0; \vartheta_1 \cos \varphi_0 \}$, $\rho \{ x_1, y_1 \}$, получим известную функцию распределения (см., например, [5, 8]):

$$W(\vartheta, \rho, \sigma) = \frac{3}{4\pi^2 D^2 \sigma^4} \exp \left\{ - \frac{1}{D} \left[\frac{3\rho^2}{\sigma^3} - \frac{3\vartheta\rho}{\sigma^2} + \frac{\vartheta^2}{\sigma} \right] \right\}. \quad (50)$$

Аналогично из общей формулы (47) можно получить соответствующие результаты, содержащиеся в работах других авторов [1, 2].

Далее, интегрируя формулу (47) по переменным x_1, y_1, z_1 , получим функцию распределения для углов ϑ_1 и φ_1 :

$$W(\vartheta, \varphi, \sigma) = \frac{n_0^2}{2\pi b} \exp \left\{ - \frac{n_0^2 (\vartheta_1^2 + \varphi_1^2 \sin^2 \vartheta_0)}{2b} \right\}. \quad (51)$$

Здесь и в дальнейшем без ограничения общности будем считать $\varphi_0 = \pi/2$. Функция распределения (51) с точностью до членов второго порядка малости включительно удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, которое может быть получено из общего уравнения (37). Для этого введем в пространство \mathcal{S} сферическую систему координат по формулам (36) и преобразуем соответствующим образом уравнение (37). Интегрируя преобразованное уравнение по переменным x, y, z , получим следующее уравнение для функции распределения $W(R, \vartheta, \varphi, \sigma)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \sigma} = & \frac{n_0'}{n_0} \left(R \frac{\partial W}{\partial R} + 3W \right) + \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} \left(\sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} - \cos \vartheta \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \\ & + \frac{D}{n_0^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} W(\vartheta, \varphi, \sigma) = & \int_0^\infty W(R, \vartheta, \varphi, \sigma) R^2 dR; \\ W(R, \vartheta, \varphi, \sigma) = & W(\vartheta, \varphi, \sigma) \delta(R-1). \end{aligned} \quad (53)$$

Используя эти формулы, легко получим для угловой функции распределения $W(\vartheta, \varphi, \sigma)$ уравнение

$$\sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} \sin \vartheta \left(2 \cos \vartheta W + \sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) + D_1 \left(\sin \vartheta \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} + \cos \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right). \quad (54)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Эйнштейна—Фоккера для вращательного броуновского движения во внешнем силовом поле (см., например, [9], стр. 240), если скорость R_ϑ систематического изменения угла ϑ положить равной $-\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dz_0} \sin \vartheta$, а коэффициент диффузии лучей в неоднородной среде $D_1 = D/n_0^2$. То, что функция (51) с указанной степенью точности удовлетворяет уравнению (54), можно проверить непосредственной подстановкой, положив снова в (51) $\vartheta_1 = \vartheta - \vartheta_0$ и $\varphi_1 = \varphi - \pi/2$.

Формула (51) позволяет вычислить средний квадрат отклонения луча от его регулярного направления после прохождения им пути σ . Поскольку ε — угол между двумя направлениями ($\vartheta_0, \pi/2$) и ($\vartheta_0 + \vartheta_1, \pi/2 + \varphi_1$), имеем

$$\cos \varepsilon = \cos \vartheta_0 \cos(\vartheta_0 + \vartheta_1) + \sin \vartheta_0 \sin(\vartheta_0 + \vartheta_1) \cos \varphi_1. \quad (55)$$

Воспользовавшись малостью углов ε, ϑ_1 и φ_1 , получим

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle \vartheta_1^2 \rangle + \sin^2 \vartheta_0 \langle \varphi_1^2 \rangle. \quad (56)$$

Здесь следует различать два случая: а) $\vartheta^0 \neq 0$, б) $\vartheta^0 = \vartheta_0 = 0$.

В случае а

$$\langle \vartheta_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W \vartheta_1^2 \sin^2 \vartheta_0 d\vartheta_1 d\varphi_1 = b/n_0^2, \\ \langle \varphi_1^2 \rangle = b/n_0^2 \sin^2 \vartheta_0; \quad \langle \varepsilon^2 \rangle = 2b/n_0^2. \quad (57)$$

В случае б φ_1 становится равномерно распределенным в интервале от 0 до 2π и

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle \vartheta_1^2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \vartheta_1^2 W d\vartheta_1 d\varphi_1 = 2b/n_0^2. \quad (58)$$

Случай б был рассмотрен в работе [1]; там же была получена формула (58).

Принтегрировав общую формулу (47) по ϑ_1 и φ_1 , получим нормальный закон распределения для смещений луча. Функция распределения $W(\mathbf{r}_1, \sigma)$ может быть стандартно выражена через следующие моменты второго порядка:

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{b\Delta_1 - \sin^2 \vartheta_0 \Delta_2^2}{b}, \quad \langle y_1^2 \rangle = \Delta_1, \\ \langle z_1^2 \rangle = \frac{b\Delta_1 - \cos^2 \vartheta_0 \Delta_2^2}{b}, \quad \langle x_1 y_1 \rangle = 0, \\ \langle x_1 z_1 \rangle = \frac{\sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \vartheta_0 \Delta_2^2}{b}, \quad \langle y_1 z_1 \rangle = 0. \quad (59)$$

Как известно, входящая в эти формулы величина $L(\sigma)$ может существенно отличаться от геометрического пути в неоднородной среде.

В заключение заметим, что, если неравенство (20) не выполняется, то соответствующие формулы для флуктуаций углов прихода и смещений луча можно получить на основании общего решения системы (6), (7). Однако это не является целью настоящей работы.

Автор признателен своему научному руководителю Л. А. Чернову за неоднократные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 34 (1958).
2. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
3. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, М., 1947.
4. Д. Б. Келлер, Сб. Гидродинамическая неустойчивость, изд. Мир, М., 1964, стр. 265.
5. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
6. С. Н. Бернштейн, УМН, вып. 10, 65 (1944).
7. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
8. С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, ОНТИ, М.—Л., 1948.
9. М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, М., 1944.

Акустический институт АН СССР

Поступила в редакцию
19 июля 1965 г.

RAY STATISTICS IN PLANE-STRATIFIED MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

V. M. Komissarov

The process of wave propagation in a medium with regular and random inhomogeneities is described by Fokker—Plank's equation. The spatial-angular function of the rays distribution has been found. The fluctuations of arrival angles and ray displacements have been calculated. The applicability conditions of the given consideration have been explained.

УДК 621.378.33

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА С УСИЛИТЕЛЕМ «МОЛЕКУЛЯРНОГО ЗВОНА» :

А. Ф. Мухамедгалиева, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский

Исследовалась возможность сужения исходной спектральной линии излучения в молекулярном генераторе с двумя последовательными резонаторами, один из которых работает в усилительном режиме. Ширина линии в такой системе оказалась примерно в 4–5 раз меньшей, чем в однорезонаторном молекулярном генераторе.

В настоящей работе проведено исследование молекулярного генератора с двумя последовательными резонаторами и с двумя встречными пучками, в котором один из резонаторов работал как генератор, а второй как усилитель. Схематический вид его приведен на рис. 1. В этой системе исследовалась возможность получения более узкой исходной спектральной линии излучения по сравнению с однорезонаторным молекулярным генератором.

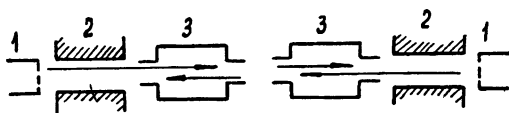


Рис. 1. Схематический вид двухрезонаторного двухпучкового молекулярного генератора:

1—источники молекулярного пучка, 2—сортирующие системы, 3—резонаторы.

Выбор такого режима работы системы, когда один из резонаторов работает в режиме усиления, объясняется следующим. Теоретическое исследование двухрезонаторного двухпучкового молекулярного генератора с двумя генерирующими резонаторами, результаты которого приведены в работе [1], показало, что в режиме взаимной синхронизации ширина линии зависит как от T — времени пролета молекул между резонаторами, так и от величины χ — коэффициента ослабления молекулярного пучка. Если же один из резонаторов работает в режиме усиления, то отрицательное влияние величины χ на сужение спектральной линии излучения можно уменьшить. Объяснить это можно следующим образом.

Как известно, пучок молекул, предварительно поляризованный в одном из резонаторов, возбуждает в последующем резонаторе колебания той же частоты, что и в первом резонаторе; эти колебания называются «молекулярным звоном» [2–4]. Если пустить встречный интенсивный пучок молекул так, чтобы в резонаторе, являющемся для этого пучка первым, не возникла генерация, а только происходило усиление сигнала «молекулярного звона», то поляризация молекул, вылетающих из усиливающего резонатора, будет совпадать с поляризацией молекул пучка, вылетающих из генерирующего резонатора.

Если число молекул встречного пучка, влетающих в генерирующий резонатор, примерно равно числу молекул, вылетающих из него, то эта

система должна быть аналогична рамзеевской системе (поскольку частицы того и другого пучка когерентны) [5]. Усиливающий резонатор является как бы зеркалом, «отражающим» пучок без потери интенсивности. Чтобы при большой интенсивности пучка усиливающий резонатор не самовозбуждался, нужно применять резонатор с малой добротностью. Время жизни частиц на уровне в такой системе будет определяться величиной $2(T + \tau)$, где T — время пролета в пространстве между резонаторами, τ — время пролета в резонаторе [6].

Был проведен расчет частоты колебаний двухрезонаторного двухпучкового молекулярного генератора в случае, когда один из резонаторов работает в режиме усиления. Из-за сложности системы расчет проводился в предположении, что система работает в области полей, далеких от насыщения. Кроме того, предполагалось, что частота генерации близка к частоте молекулярного перехода. Выражение для частоты при этих предположениях имеет вид

$$\frac{\omega_{\text{л}} - \omega}{\omega} = \frac{Q_1}{Q_{\text{лин}}} \frac{1+a}{1+6(T+\tau)\tau^{-1}a} \Delta_1 + \frac{Q_2/(1-\eta_2)}{Q_{\text{лин}}} \frac{a}{1+6(T+\tau)\tau^{-1}a} \Delta_2, \quad (1)$$

где $\omega_{\text{л}}$ — частота спектральной линии, $\omega_{\text{рез1}}$, Q_1 — частота и добротность резонатора, в котором имеет место генерация, $\omega_{\text{рез2}}$, Q_2 — частота и добротность усиливающего резонатора, $Q_{\text{лин}}$ — добротность линии, η_2 — коэффициент регенерации усиливающего резонатора, $a = 4\chi^2\eta_2/(1-\eta_2)$, $\Delta_1 = (\omega_{\text{л}} - \omega_{\text{рез1}})/\omega_{\text{л}}$, $\Delta_2 = (\omega_{\text{л}} - \omega_{\text{рез2}}\epsilon')/\omega_{\text{л}}$, ϵ' — активная часть комплексной диэлектрической проницаемости усиливающего пучка.

Из выражения (1) ясно, что в двухрезонаторной двухпучковой системе можно получить увеличение эффективной добротности линии в $1 + 6(T + \tau)\tau^{-1}a$ раз. Увеличение добротности линии будет существенным, если $6(T + \tau)\tau^{-1}a \gg 1$. Это условие эквивалентно двум другим условиям: $T \gg \tau$ и $a \sim 1$. Если взять величину коэффициента ослабления пучка $\chi = 0,3$ (используя данные эксперимента [7]), то величина $a \sim 1$ при коэффициенте регенерации $\eta_2 \sim 0,7$.

Заметим, что величина a не может быть больше единицы по следующей причине. Величина $\chi\eta_2$ обозначает вклад в регенерацию частиц в усиливающем резонаторе, вылетающих из первого резонатора. Эта величина не может быть больше величины $1 - \eta_2$ (где η_2 — регенерация, создаваемая частицами, вылетающими непосредственно из сортировки); в противном случае в усилительном резонаторе возникла бы генерация, а χ всегда меньше единицы. Соотношение $a = 4\chi^2\eta_2/(1-\eta_2) = 1$ показывает, что для эффективного сужения линии нужно тем больше увеличивать усиление во втором резонаторе, чем больше ослабление пучка χ . Иначе говоря, ослабление пучка молекул при пролете из первого резонатора во второй можно компенсировать увеличением потока частиц, вылетающих из усиливающего резонатора.

Выражение (1), кроме того, показывает, что частота колебаний зависит от перестройки частоты усиливающего резонатора. Эта зависимость возрастает с увеличением регенерации; последнее видно из того, что во второе слагаемое выражения для частоты входят регенерированная добротность усиливающего резонатора $Q_2/(1-\eta_2)$ и величина a , которые с увеличением регенерации возрастают.

Проводилось экспериментальное исследование двухрезонаторной двухпучковой системы со следующими размерами: длины резонаторов 2,3 см, расстояние между резонаторами 16 см. Исследовалась возможность сужения спектральной линии излучения в такой системе. О степени сужения линии излучения, когда режим генерации существует только в первом резонаторе, можно судить по уменьшению угла наклона к оси

абсцисс прямой, выражающей зависимость изменения частоты генерации от перестройки резонатора. Дело в том, что

$$\Delta\nu_{\Gamma} = (Q/Q_{\text{лин}}) \Delta\nu_{\text{рез}},$$

где $Q_{\text{лин}} = \omega\tau/2$, есть так называемая добротность линии, которая определяется временем пролета в осциллирующем поле, а следовательно, и шириной линии излучения.

На рис. 2 представлена экспериментальная зависимость частоты генерации системы от перестройки резонатора, в котором происходит генерация, при разных интенсивностях пучка в усиливающем резонаторе

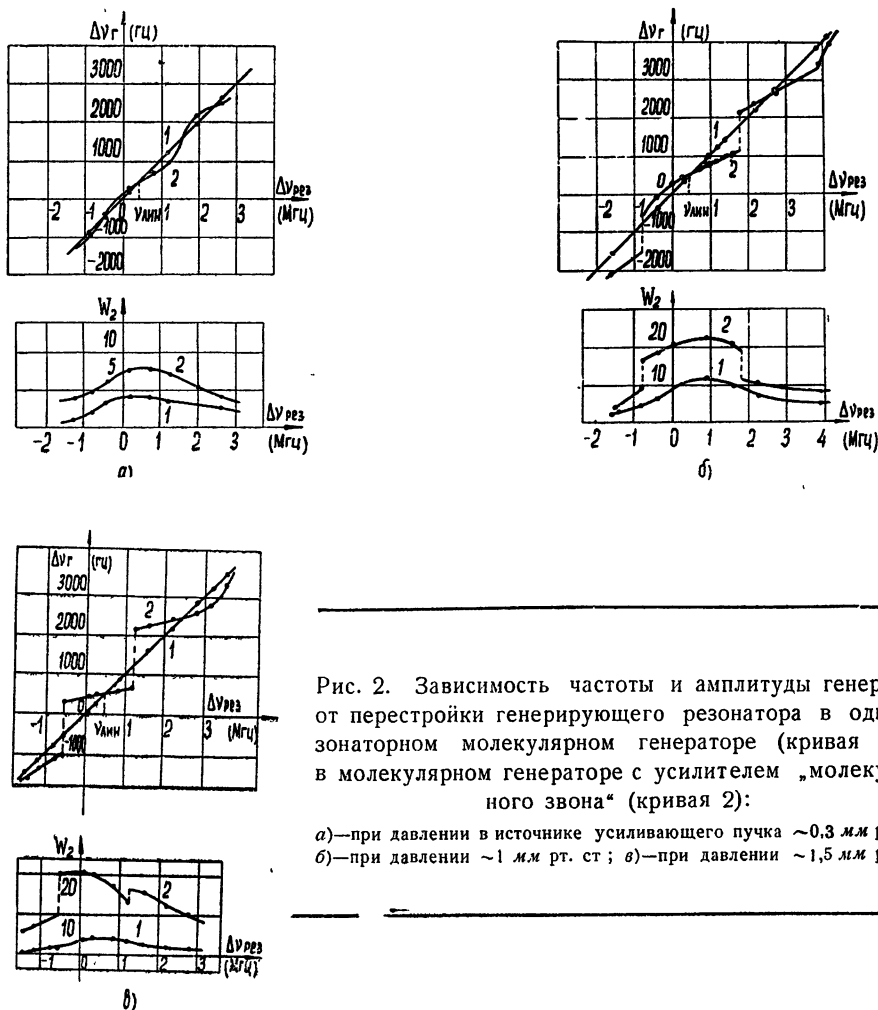


Рис. 2. Зависимость частоты и амплитуды генерации от перестройки генерирующего резонатора в однорезонаторном молекулярном генераторе (кривая 1) и в молекулярном генераторе с усилителем „молекулярного звона“ (кривая 2):

а) — при давлении в источнике усиливающего пучка ~ 0.3 мм рт. ст.
 б) — при давлении ~ 1 мм рт. ст.; в) — при давлении $\sim 1,5$ мм рт. ст.

и при постоянном пучке в генерирующем резонаторе. Прямая линия на этих графиках представляет ту же зависимость, когда второй (усиливающий) пучок отключен. Из рисунков видно, что угол наклона кривых к оси абсцисс в системе с усилителем меньше, чем в системе без усилителя, что свидетельствует об увеличении эффективной добротности линии в системе с усилителем. Угол наклона к оси абсцисс уменьшается при увеличении интенсивности пучка, усиливающего «молекулярный звон». При максимальном усиливающем пучке тангенс угла наклона к оси абсцисс в системе с усилителем примерно в $4 \div 5$ раз меньше, чем в си-

стеме без усилителя. Это значит, что в такое же число раз увеличилась эффективная добротность линии.

Из рис. 2 видно, что при перестройке резонатора, в котором происходит генерация, частота меняется непрерывно не во всем диапазоне перестроек. При увеличении интенсивности усиливающего пучка (начиная с некоторой определенной величины) в системе появляются скачки частоты. Характеристики показывают, что чем больше усиление, тем на большую величину скачком меняется частота генерации. Расстояние между двумя скачками примерно $1,5 \div 2$ кГц по генерации. Амплитудные характеристики, снимавшиеся одновременно с частотными, показывают, что скачки частоты сопровождались скачками амплитуды.

Кривые рис. 2 снимались при условии, что частота резонатора, в котором происходит усиление, настроена на частоту молекулярного перехода. На рис. 3 приведены характеристики системы, когда частота усиливающего резонатора изменялась на 3 Мгц в ту и другую сторону от частоты спектральной линии. Из графиков видно, что характер кривых при этом не меняется; наблюдается лишь некоторое смещение по частоте всей характеристики в сторону изменения частоты усиливающего

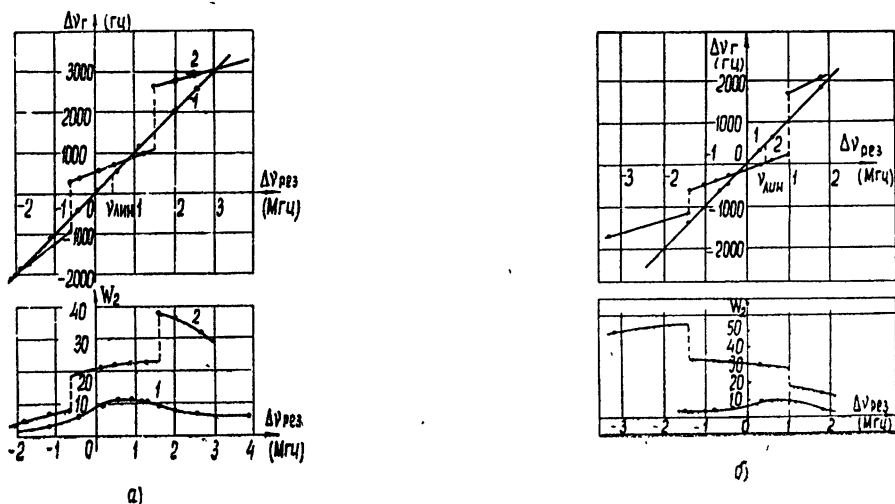


Рис. 3. Зависимость частоты и амплитуды генерации от перестройки генерирующего резонатора:

а) — частота усиливающего резонатора больше частоты линии на 3 Мгц; б) — частота усиливающего резонатора меньше на 3 Мгц частоты линии.

резонатора. В ту же сторону смещается центральная точка пересечения характеристик однопучкового молекулярного генератора и генератора с молекулярным усилителем. Эта точка лежит приблизительно в области настройки одиночного резонатора на линию в том случае, если усиливающий резонатор настроен на частоту спектральной линии. Амплитудные характеристики, приведенные на рис. 3, показывают, что при разных значениях частоты усиливающего резонатора максимум усиленного «звона» перемещается по частоте в сторону изменения частоты усиливающего резонатора.

Исследовалась также зависимость изменения частоты системы при перестройке частоты усиливающего резонатора. Эта зависимость приведена на рис. 4 при разных интенсивностях усиливающего пучка. Частота генерации зависит от перестройки частоты усиливающего резонатора гораздо слабее, чем от перестройки резонатора, в котором происходит генерация. Правда, с увеличением интенсивности усиливающего пучка

зависимость от частоты усиливающего резонатора становится сильнее; однако даже при максимальном пучке частота генерации во всем диапазоне перестроек меняется не больше, чем на $600 \div 700$ гц.

Кривые рис. 2 можно сопоставить с выражением, полученным для частоты молекулярного генератора с усилителем «молекулярного зво-

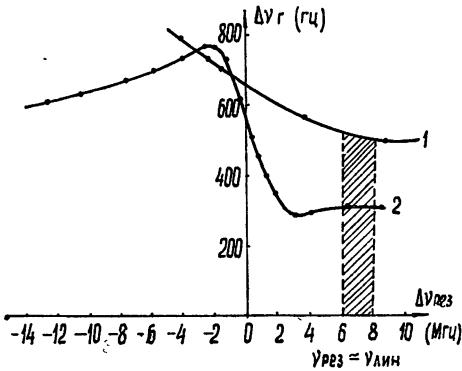


Рис. 4. Зависимость частоты генерации от перестройки частоты усиливающего резонатора при разных давлениях в источнике усиливающего пучка:

1—давление в источнике усиливающего пучка $\sim 0,5$ мм рт. ст., 2—давление в источнике усиливающего пучка $\sim 1,5$ мм рт. ст.

на». Из формулы (1) видно, что в этой системе можно получить сужение спектральной линии в $1 + 6(T + \tau)\tau^{-1} a$ раз, где параметр a зависит от ослабления пучка и коэффициента усиления во втором резонаторе. Графики рис. 2 для разных интенсивностей усиливающих пучков как раз свидетельствуют о том, что с увеличением коэффициента усиления эффективная добротность линии увеличивается. В нашей системе ожидаемое сужение линии составляло $10 \div 12$; однако из-за неполной компенсации потерь в пространстве между резонаторами встречным пучком получено меньшее сужение линии.

В процессе эксперимента было обнаружено, что пучок молекул, предварительно поляризованный в первом резонаторе, излучает энергию в вакуумный металлический корпус так же, как и во второй резонатор. Металлический корпус генератора, представляющий собой параллелепипед размерами $20 \text{ см} \times 30 \text{ см} \times 120 \text{ см}$, действительно может являться многомодовым резонатором. Была измерена его добротность, которая на длине волны $1,25 \text{ см}$ оказалась ~ 1000 . Для того, чтобы экранировать пучок от поля этого «паразитного» резонатора, между рабочими резонаторами была помещена трубка из металлической сетки. Эта сетчатая трубка не является резонатором; ее добротность близка к единице. Мощность излучения во втором резонаторе при окружении пучка металлической сеткой возрастала в $6 \div 8$ раз, что свидетельствовало об уменьшении излучения пучка в пространстве между резонаторами. Это излучение непосредственно принималось с помощью рупора на конце волновода, введенного в корпус молекулярного генератора при снятом втором резонаторе.

Сопоставляя выражения (1) с экспериментальной величиной сужения линии, оценим величины a и η_2 . Поскольку эффективная добротность линии увеличилась примерно в 5 раз:

$$(1+a)[1+6(T+\tau)\tau^{-1}a]^{-1} = 1/5,$$

при известном для нашей системы отношении $(T + \tau)\tau^{-1} \sim 8$ получаем: $a \sim 0,1$. Из выражения для величины a , используя значение ослабления пучка $\gamma \sim 0,3$, можно получить величину η_2 , которая в случае $a \sim 0,1$ составляет $\sim 0,2$.

При значениях $a \sim 0,1$ и $\eta_2 \sim 0,2$ и приблизительно равных добротностях Q_1 и Q_2 , как видно из выражения (1), зависимость частоты от

расстройки второго (усиливающего) резонатора должна быть примерно в 8 раз слабее, чем от расстройки первого резонатора. Последнее удовлетворительно согласуется с полученной на эксперименте зависимостью частоты генерации от перестройки усиливающего резонатора.

В наших экспериментах использовались короткие резонаторы. Следует заметить, что в случае длинных резонаторов существенного выигрыша в сужении исходной ширины линии получить, по-видимому, не удастся, поскольку раздвигать резонаторы на значительное расстояние нельзя из-за сильного ослабления пучка при пролете между резонаторами.

Амплитудные и частотные характеристики обнаруживают два скачка частоты и амплитуды. Наличие этих скачков можно объяснить тем, что линия в данной системе, как и в рамзеевской системе с разнесенными осциллирующими полями, должна иметь, кроме основного максимума на частоте молекулярного перехода, еще два боковых максимума, отстоящих по частоте от основного максимума приблизительно на $1,2T^{-1}$. В соответствии с такой формой линии в режиме генерации должны наблюдаться скачки частоты и амплитуды. Другими словами, генерация между скачками происходит на разных пиках рамзеевской кривой. Расстояние между двумя скачками составляет около $1,5 \div 2$ кГц. Для наших размеров системы расстояние между соседними максимумами примерно $2,2 \div 2,5$ кГц. Поскольку скачок частоты генерации может происходить не на строго определенной частоте, а в некоторой области частот, можно считать, что генерация между скачками происходит на разных пиках рамзеевской кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 8, 158 (1963)
2. W. H. Niga, Rev. Sci. Instr., 28, 726 (1957).
3. F. H. Reder, C. I. Bickart, Rev. Sci. Instr., 31, 1164 (1960)
4. Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, ЖЭТФ, 42, 907 (1962).
5. Н. Ф. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
6. А. Ф. Мухамедгалиева, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, Письма в ред. ЖЭТФ, 1, 22 (1965)
7. А. Ф. Мухамедгалиева, Г. М. Страховский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 824 (1965).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
10 августа 1965 г

INVESTIGATION OF MOLECULAR GENERATOR WITH AMPLIFIER OF „MOLECULAR RINGING“

A. F. Moukhamedgalieva, A. N. Oraevsky, G. M. Strakhovsky

The possibility was investigated of initial spectral line narrowing in a molecular generator with two successive resonators, one of which operates in the amplifying regime. The linewidth in such a system was appeared to be $4 \div 5$ times less than in one-resonator molecular generator.

УДК 538.62

О МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ В ТЕОРИИ СПИН-ВОЛНОВОГО РЕЗОНАНСА В ТОНКОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЕНКЕ

В. М. Соколов и Б. А. Тавгер

Найдена степень неоднородности намагниченности тонкой ферромагнитной пленки в зависимости от условий на границе с учетом «естественной» неоднородности рассмотрен спин-волновой резонанс в однородном СВЧ поле. Результаты сопоставлены с данными работ [1-5], в которых неоднородность намагниченности постулировалась.

В последнее время в теории спин-волнового резонанса в тонких ферромагнитных пленках большое внимание уделяется моделям с неоднородной намагниченностью пленки по толщине [1-5]. Это связано с тем, что теория Киттеля [6], основанная на предположении об однородной намагниченности пленки, дает для первых мод неправильное значение резонансных полей. Слабым местом указанных работ является то, что вид неоднородной намагниченности в них не выводится, а постулируется с целью удовлетворить эксперименту. При расчете спин-волнового резонанса дополнительно выбираются граничные условия, причем этот выбор делается независимо от вида неоднородной намагниченности. Однако, как будет показано ниже, вид неоднородной намагниченности зависит от граничных условий. Объяснение вида неоднородной намагниченности в указанных работах имеет сугубо априорный характер; например, в работе [2] причиной неоднородной намагниченности считается неоднородная концентрация неферромагнитных атомов, а в работе [3] — неоднородные напряжения пленки.

Портис [2] постулировал зависимость намагниченности в виде

$$M(z) = M_0 \left(1 - 4\vartheta \frac{z^2}{L^2} \right) \quad (1)$$

и при расчете считал границу «свободной»: $\left. \frac{\partial m^+}{\partial z} \right|_{\pm L/2} = 0$, где m^+ — циркулярная амплитуда отклонения момента от насыщения. В таких предположениях он получил для первых мод постоянное расстояние между первыми резонансными пиками и интенсивность, убывающую медленнее, чем n^{-2} (n — номер моды). Это удовлетворительно согласуется с экспериментом. В работе [3] предполагается параболическая зависимость эффективного поля от z , которая, в частности, может быть обусловлена неоднородной намагниченностью. При расчете спин-волнового резонанса граничные условия выбирались «закрепленными»: $m^+(0) = m^+(L) = 0$. Для первых мод результаты аналогичны выводам работы [2], а для больших номеров мод совпадают с результатами Киттеля [6]. Это удовлетворительно соответствует данным эксперимента по спин-волновому резонансу в тонких ферромагнитных пленках.

В данной работе для решения задачи о спин-волновом резонансе

выбираются граничные условия, соответствующие двум обычным предельным случаям: «закрепленная» граница: $m^-|_{0,L} = 0$ и «свободная» граница: $\left. \frac{\partial m^-}{\partial z} \right|_{0,L} = 0$. Далее считается, что неоднородность намагниченности обусловлена возбуждением спиновых волн и существует даже в идеальной пленке. Последнее обстоятельство связано с тем, что спиновая волна в пленке, в отличие от массивного образца, будет стоячей волной поперек пленки; следовательно, намагниченность пленки будет зависеть от z , причем эта зависимость определяется граничными условиями. Таким образом, задание граничных условий приводит к определенному виду неоднородной намагниченности, и эта «естественная» неоднородность должна учитываться при решении задачи о спин-волновом резонансе.

1. ЕСТЕСТВЕННАЯ НЕОДНОРОДНАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ ТОНКОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЕНКИ

Для нахождения спиновых волн воспользуемся линеаризованным уравнением Ландау—Лифшица:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = g [M_0 + m, H_{\text{эфф}}], \quad (2)$$

где $H_{\text{эфф}} = \alpha \Delta m + H_i$, g — гиромагнитное отношение, $H_i = H_0 - 4\pi M_0$ — поле внутри пленки с учетом размагничивающего влияния границ, H_0 — внешнее магнитное поле, достаточное для полного насыщения и направленное по z , M_0 — насыщенный магнитный момент при $T = 0$, $\alpha \Delta m$ — член, учитывающий обменное взаимодействие в изотропной магнитной среде [7]. Поле анизотропии внутри образца пренебрегаем, так как обычно $H_i \gg H_{\text{ан}}$.

При переходе к циркулярным проекциям $m^+ = m_x + im_y$, $m^- = m_x - im_y$, уравнение (2) распадается на два независимых уравнения:

$$- \frac{i}{g} \frac{\partial m^+}{\partial t} = \alpha \Delta m^+ - H_i m^+, \quad (3)$$

$$\frac{i}{g} \frac{\partial m^-}{\partial t} = \alpha \Delta m^- - H_i m^-. \quad (4)$$

Поскольку m_x и m_y — действительные величины, то $(m^+)^* = m^-$ и, следовательно, уравнения (3), (4) являются комплексно-сопряженными. Умножив уравнение (4) на $\mu = \hbar g$, получим уравнение, аналогичное уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial m^-}{\partial t} = \alpha \mu M_0 \Delta m^- - \mu H_i m^-. \quad (5)$$

Здесь $\alpha \mu M_0 \Delta$ играет роль оператора кинетической, а $\mu H_i = \epsilon_0$ — потенциальной энергии.

Подставляя в уравнение (5) m^- в виде

$$m^-(r, t) = u(r) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{x,n} + \epsilon_0) t \right\}, \quad (6)$$

получаем стационарное уравнение

$$\alpha \mu M_0 \Delta u(r) = \epsilon_{x,n} u(r). \quad (7)$$

Решение (7) для пленки ищем в виде

$$u(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{x}\rho} [B_1 \sin(\delta_n z) + B_2 \cos(\delta_n z)], \quad (8)$$

где $\mathbf{x}(k_x, k_y, 0)$ — волновой вектор в плоскости X, Y , $\rho(x, y, 0)$ — радиус вектор в плоскости X, Y .

Подставляя (8) в уравнение (7), получим дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_{\mathbf{x},n} = \alpha\mu M_0(x^2 + \delta_n^2). \quad (9)$$

Обычно начало отсчета энергии выбирают иначе:

$$\varepsilon'_{\mathbf{x},n} = \alpha\mu M_0(x^2 + \delta_n^2) + \varepsilon_0. \quad (9a)$$

В выражении (9a) учтена энергия ε_0 , соответствующая однородной прецессии всех спинов системы.

Граничные условия в общем случае, как известно, определяются уравнением (2) на границе и имеют вид

$$C_1 \frac{\partial m^-}{\partial z} + C_2 m^- = 0. \quad (10)$$

Вначале рассмотрим случай «закрепленной» границы ($C_1 \ll C_2$). Возможность таких граничных условий обсуждалась в работе Киттеля [6] и ряде других последующих работ. При таком условии решение имеет вид

$$m^-(\mathbf{r}, t) = B_1 \exp \left\{ i \left(\frac{\varepsilon'_{\mathbf{x},n}}{\hbar} t + \mathbf{x}\rho \right) \right\} \sin \left(\frac{\pi}{L} nz \right). \quad (11)$$

Уравнение (11) не содержит однородной прецессии. Легко видеть, что при любом закреплении на границе однородная прецессия возникнуть не может.

Коэффициент B_1 определяется из соотношения

$$\int \left\{ \frac{\alpha}{2} (\nabla m_{\mathbf{x},n}^+ \nabla m_{\mathbf{x},n}^-) + \frac{H_i}{2M_0} m_{\mathbf{x},n}^+ m_{\mathbf{x},n}^- \right\} dv = \varepsilon'_{\mathbf{x},n}. \quad (12)$$

Подставляя в (12) решение (11), находим: $B_1 = 2(\mu M_0/v)^{1/2}$. В представлении вторичного квантования операторы проекций магнитного момента равны

$$\begin{aligned} \hat{M}^+ &= 2 \left(\frac{\mu M_0}{v} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{x},n} e^{-i\mathbf{x}\rho} \sin \left(\frac{\pi}{L} nz \right) \hat{a}_{\mathbf{x},n}; \\ \hat{M}^- &= 2 \left(\frac{\mu M_0}{v} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{x},n} e^{i\mathbf{x}\rho} \sin \left(\frac{\pi}{L} nz \right) \hat{a}_{\mathbf{x},n}; \\ \hat{M}_z &= M_0 \left(1 - \frac{\hat{M}^+ \hat{M}^-}{2M_0^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\hat{a}_{\mathbf{x},n}^+$ и $\hat{a}_{\mathbf{x},n}^-$ — бозе-операторы рождения и поглощения.

Вычисляя среднее значение от оператора \hat{M}_z при конечной температуре и далее усредняя по X и Y , получим

$$\langle M_z \rangle = M_0 \left[1 - \frac{4\mu}{2M_0 v} \sum_{\mathbf{x},n} \sin \left(\frac{\pi}{L} nz \right) \frac{1}{e^{\varepsilon'_{\mathbf{x},n}/kT} - 1} \right]. \quad (14)$$

Заменяя сумму по x интегралом: $\sum_x (\dots) \rightarrow \int \frac{S2\pi x dx}{(2\pi)^2(\dots)}$, получим

$$\langle M_z(z) \rangle = M_0 \left\{ 1 - \frac{kT}{4\pi AL} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} nz \right) \left| \ln \left[1 - \exp \left(-\gamma \frac{n^2}{L^2 T} - \frac{\varepsilon_0}{kT} \right) \right] \right| \right\}, \quad (15)$$

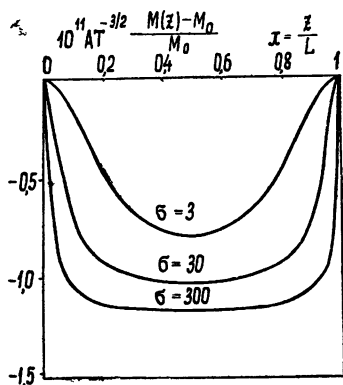
где

$$A = \frac{\alpha M_0^2}{2}, \quad \gamma = \frac{2A\mu\pi^2}{M_0 k} \quad (\gamma \sim 10^{-12}).$$

Уравнение (15) определяет вид неоднородной намагниченности по z . Если усреднить это выражение по z , то получится выражение для намагниченности пленки, которое совпадает с результатом работы [8]. Численный расчет по формуле (15) был проведен на электронной вычислительной машине для разных значений параметров. Для $L = 10^{-6}$ см и $T = 3; 30; 300^\circ\text{K}$ результаты приведены на рис. 1.

Рис. 1. Зависимость намагниченности от z при закрепленной границе ($m^-|_{0,L} = 0$) и разных значениях параметра

$$\sigma = \frac{1}{\gamma} L^2 T = 10^{12} L^2 T.$$



Теперь рассмотрим случай «свободной» границы ($C_2 \ll C_1$ в уравнении (10)). Решение уравнения (6) в этом случае:

$$m^-(r, t) = B_2 \exp \left\{ i \left(\frac{\varepsilon_{x,n}}{\hbar} t + \mathbf{x} \rho \right) \right\} \cos \left(\frac{\pi}{L} nz \right), \quad (16)$$

где $B_2 = 2 [\mu M_0 / v (1 + \delta_{on})]^{1/2}$, δ_{on} — символ Кронекера. Отличие B_2 от аналогичного коэффициента B_1 связано с тем, что при «свободной» границе существует однородная прецессия. Между прочим отметим, что граничные условия, получающиеся из уравнения Ландау—Лифшица, без включения в $H_{\text{эфф}}$ дополнительного поля поверхностной анизотропии, имеют общий вид (10). При $\mathbf{k} = 0$ (где \mathbf{k} — волновой вектор) всякое закрепление на границе снимается, т. е. однородная прецессия становится возможной. Поступая так же, как и для «закрепленной» границы, получим следующее выражение:

$$\langle M_z(z) \rangle = M_0 \left\{ 1 - \frac{kT}{4\pi AL} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{L} nz}{1 + \delta_{on}} \left| \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\gamma n^2}{L^2 T} - \frac{\varepsilon_0}{kT} \right) \right] \right| \right\}. \quad (17)$$

Ввиду того, что нас интересует лишь неоднородная намагниченность, член в сумме (17), связанный с однородной прецессией $n = 0$, учитывать не следует. Это фактически соответствует некоторой перенормировке M_0 . Результаты численного расчета приведены на рис. 2.

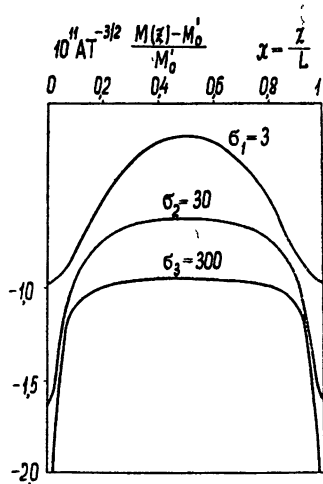


Рис. 2 Зависимость намагниченности пленки от z в случае „свободной“ границы $\left(\frac{\partial m^-}{\partial t}\right)_{0,L} = 0$ при разных значениях параметра $\sigma = \frac{1}{\gamma} L^2 T = 10^{12} L^2 T$. Величина M_0' на графике — перенормированный магнитный момент (с учетом отклонения, вызванного однородной прецессионной модой $n=0$, от насыщения).

Для свободной границы естественная неоднородность, вообще говоря, не дает квадратичной зависимости, и это отклонение тем больше, чем выше температура или толще пленка. Однако для первых мод полученная неоднородность качественно приближается к квадратичной неоднородности, использованной в работе Портиса, причем параметр неоднородности $\epsilon = \frac{M(L/2) - M(0)}{M(0)}$, взятый из графиков, близок к значению ϵ , полученному Портисом из сравнения с экспериментом.

Если считать граничные условия «закрепленными», что делается в большинстве работ по спин-волновому резонансу, то естественная неоднородность, полученная выше, обратна предполагаемой в работах [3, 4]. Задача о спин-волновом резонансе в поле с такой неоднородностью ранее не рассматривалась; поэтому ниже мы остановимся на решении этой задачи.

2. СПИН-ВОЛНОВОЙ РЕЗОНАНС В ТОНКИХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ ПРИ «ЗАКРЕПЛЕННЫХ» ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Строго говоря, для решения поставленной задачи требуется решить нелинейное уравнение со спин-спиновым гамильтонианом. Однако, чтобы получить приближенный результат, мы воспользуемся наглядным методом теории возмущений. Соответствующее уравнение в шредингеровской форме имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial m^-}{\partial t} = \hat{V}_0 m^- + \hat{W} m^-, \quad (18)$$

где

$$\hat{V}_0 = \alpha \mu M_0 \Delta - \epsilon_0; \quad \hat{W} = \frac{\mu M_0 k T}{AL} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi n}{L} z |\ln(1 - e^{-n^2 \sigma})|;$$

$$\sigma = 10^{12} L^2 T.$$

В отсутствие неоднородности $\hat{W} = 0$ и (18) переходит в (15), т. е. без учета возмущения решение переходит в известное решение Киттеля.

В первом порядке теории возмущений поправка к энергии равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(1)} &= \int m_{x,n}^+ \hat{W} m_{x,n}^- dv = \\ &= \frac{\mu M_0 kT}{4AL} \left[\frac{1}{2} \left| \ln(1 - e^{-n^2/\sigma}) \right| + \sum_{p=1}^{\infty} \left| \ln(1 - e^{-p^2/\sigma}) \right| \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценки показывают, что для $L = 10^{-6}$ см, $T = 300^\circ\text{K}$ отношение $\varepsilon_n^{(1)}/\varepsilon_n^{(0)} \sim 10^{-2}$, т. е. для таких параметров теория возмущений применима. Сумма в формуле (19) для всех мод одинакова, поэтому она не влияет на расстояние между пиками в спин-волновом резонансе. Для больших n первый член правой части уравнения (19) стремится к нулю; следовательно, для больших номеров мод расстояние между пиками определяется нулевым приближением, т. е. будет расти пропорционально n . Для малых номеров $\ln(1 - e^{-n^2/\sigma}) \simeq \ln(\sigma^2/n^2)$, что приводит к сближению нижних уровней. Таким образом, формула (19) согласуется с экспериментальными данными.

В заключение выражаем глубокую благодарность В. В. Васькину, В. Я. Демиховскому, М. Я. Широкову за полезные обсуждения, В. С. Метрикину — за проведение вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. E. Wigen, F. Kooi, M. R. Shanabargen, Phys. Rev. Letters, 9, 206 (1962).
2. A. M. Portis, Appl. Phys. Letters, 2, 69 (1963).
3. E. Hirota, J. Phys. Soc. Japan, 19, 3 (1964).
4. J. T. Davies, J. Appl. Phys., 35, 804S (1964).
5. F. Kooi, P. E. Wigen, M. R. Shanabargen, J. Appl. Phys., 35, 791S (1964).
6. C. Kittel, Phys. Rev., 110, 1295 (1958).
7. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, УФН, 71, 533 (1960).
8. В. Я. Демиховский, Б. А. Тавгер, ЖЭТФ, 45, 1157 (1963).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 июля 1965 г.

ON MODEL OF NONHOMOGENEOUS MAGNETIZATION IN THE THEORY OF SPIN-WAVE RESONANCE IN A THIN FERROMAGNETIC FILM

V. M. Sokolov and B. A. Tavger

The nonuniformity degree of magnetization of a thin ferromagnetic film depending on the boundary conditions has been found. The spin-wave resonance in a uniform UHF-field has been examined when taking into account the „natural“ nonhomogeneity. The results were compared with the data of works [1-5] in which the nonhomogeneity of magnetization was postulated.

УДК 62—501.32

СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. I

А. Н. Малахов, Г. Н. Бочков

Рассматривается осцилляторная система второго порядка и анализируются условия статистической устойчивости амплитуды и фазы колебаний при сравнительно медленных флуктуациях параметров.

1. К настоящему времени опубликовано уже немало работ, исследующих поведение стохастических систем — динамических систем, обладающих флуктуациями параметров [1—21]. Все эти работы можно разбить условно на три группы.

К первой группе относятся, например, работы [1—5, 7, 9—12], рассматривающие так называемую стабильность линейных стохастических систем в среднем и в среднеквадратичном. Здесь под стабильностью понимается ограниченность $\langle x(t) \rangle$ и $\langle x^2(t) \rangle$, где $x(t)$ — выходная координата стохастической системы, $\langle \dots \rangle$ — статистическое усреднение. Тем самым стохастическая система считается стабильной, если флуктуации параметров при ограниченном входе не приводят к расходимости среднего значения и среднего квадрата выхода системы. В работах [14, 15, 18, 19, 21] исследуется, кроме того, поведение высших моментов и корреляций выхода системы.

Вторая группа работ [6, 8, 13, 16, 20] рассматривает движение стохастической системы с точки зрения его устойчивости. При этом вводится целый ряд определений устойчивости движения: устойчивостью по вероятности, асимптотическая устойчивость в целом, почти полная, асимптотическая устойчивость и т. п. Эти понятия достаточно близки к классическому понятию устойчивости по Ляпунову и фактически распространяют его на случай стохастической системы. Тем самым в этих работах фактически исследуется устойчивость движения стохастических систем к начальным условиям; при этом, естественно, предполагается, что движение соответствующей детерминированной системы (у которой флуктуации параметров отсутствуют) является устойчивым по Ляпунову.

К третьей группе относится одна работа [17], где рассматривается несколько другой аспект поведения стохастических систем. При одних и тех же начальных условиях сравниваются движение стохастической системы и соответствующей ей детерминированной системы. Вводится понятие статистической устойчивости движения, соответствующее тому, что достаточно малым флуктуациям параметров соответствует малая разница в поведении обеих систем.

Понятия трех аспектов изучения стохастических систем, например, статистической устойчивости движения, стабильности системы в среднеквадратичном и асимптотической устойчивости движения в целом, вообще говоря, различны. Так, например, статистически неустойчивое движение может соответствовать стабильности системы в среднеквадратичном, а статистически устойчивое — асимптотической неустойчивости

движения в целом и т. п. Третий аспект отличается от первых двух еще и тем, что рассматриваемые в нем движения могут быть неустойчивыми по Ляпунову.

В настоящей работе, являющейся дальнейшим развитием работы [17], рассматривается осцилляторная система второго порядка и анализируются условия статистической устойчивости амплитуды и фазы ее решения при сравнительно медленных флуктуациях параметров. Полученные результаты иллюстрируются примером регенерированного контура.

2. Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$\ddot{x} + b(t)\dot{x} + a(t)x = 0, \quad x(0) = x_0 \neq 0, \quad \dot{x}(0) = x_0 \quad (1)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} b(t) &= 2h + \Delta b(t), \\ a(t) &= \omega_0^2 + \Delta a(t), \end{aligned} \quad Q = \omega_0/2h > 1,$$

где $\Delta b(t)$, $\Delta a(t)$ — случайные стационарные и стационарно-связанные нормально распределенные процессы с нулевыми средними значениями $\langle \Delta b(t) \rangle = 0$, $\langle \Delta a(t) \rangle = 0$. Будем полагать заданными их функции корреляции и спектры.

В отсутствие флуктуаций параметров ($\Delta b(t) \equiv 0$, $\Delta a(t) \equiv 0$) невозмущенное движение

$$x^0(t) = B_0 e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - h^2,$$

где B_0 и φ_0 постоянны и определяются начальными условиями.

Пусть теперь $\Delta b(t) \neq 0$, $\Delta a(t) \neq 0$. Движение $x(t)$ будет «возмущенным». Будем искать это возмущенное решение уравнения в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= B e^{-ht} \cos \psi, \\ \dot{x}(t) &= -h B e^{-ht} \cos \psi - \omega_1 B e^{-ht} \sin \psi, \\ \psi &= \omega_1 t + \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

считая B и φ функциями времени. Подставляя (2) в (1), нетрудно получить для B и φ следующие точные уравнения:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{B}{\omega_1} \{-\Delta b(t) [h \cos \psi + \omega_1 \sin \psi] + \Delta a(t) \cos \psi\} \sin \psi, \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\omega_1} \{-\Delta b(t) [h \cos \psi + \omega_1 \sin \psi] + \Delta a(t) \cos \psi\} \cos \psi. \quad (4)$$

Эти точные уравнения весьма сложны, и их общий анализ практически невозможен.

Ограничимся случаем достаточно малых флуктуаций параметров, когда

$$\sqrt{\langle \Delta b^2(t) \rangle} \ll \omega_0, \quad \sqrt{\langle \Delta a^2(t) \rangle} \ll \omega_0^2. \quad (5)$$

В этом случае правые части (3), (4) малы и $B = B(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ являются медленными функциями времени по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$. Пользуясь тогда методом усреднения [22], получим следующие уравнения первого приближения, рассмотрением которых и ограничимся:

$$\frac{dB}{dt} = M \{\text{правая часть уравнения (3)}\}; \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = M \{ \text{правая часть уравнения (4)} \},$$

где M — оператор усреднения (по периоду $T = 2\pi/\omega_1$), который мы для неавтономной системы (3), (4) полагаем равным

$$M\{Y(t)\} \equiv \frac{1}{T} \int_{t-T}^t Y(\xi) d\xi.$$

Раскроем правые части (6). Поскольку B и φ мало меняются на интервале $[t, t+T]$, их можно вынести за знак интеграла. Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= a_{\parallel}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\xi)}{\Delta b(\xi)} \cos(2\omega_1 \xi) d\xi; \\ b_{\parallel} &= b_{\parallel}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \Delta b(\xi) \cos(2\omega_1 \xi) d\xi; \\ a_{\perp} &= a_{\perp}(t) = -\frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\xi)}{\Delta b(\xi)} \sin(2\omega_1 \xi) d\xi; \\ b_{\perp} &= b_{\perp}(t) = -\frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \Delta b(\xi) \sin(2\omega_1 \xi) d\xi; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_{10}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \frac{\Delta a(\xi)}{\Delta b(\xi)} d\xi; \\ b_{10} &= b_{10}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2 \Delta b(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Кроме того, перейдем к «физической» амплитуде колебаний

$$A(t) = B(t) e^{-ht}.$$

Тогда уравнения первого приближения для $A = A(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ запишутся в следующем виде:

$$\frac{dA}{dt} = -hA - \frac{b_{10}}{4} A - \frac{a_{\perp} - \omega_1 b_{\perp} - hb_{\perp}}{4\omega_1} A \cos(2\varphi) + \frac{a_{\parallel} + \omega_1 b_{\perp} - hb_{\perp}}{4\omega_1} A \sin(2\varphi); \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a_{10}}{4\omega_1} - \frac{hb_{10}}{4\omega_1} + \frac{a_{\parallel} + \omega_1 b_{\perp} - hb_{\perp}}{4\omega_1} \cos(2\varphi) + \frac{a_{\perp} - \omega_1 b_{\perp} - hb_{\perp}}{4\omega_1} \sin(2\varphi).$$

Эти нелинейные уравнения позволяют исследовать флуктуации амплитуды и фазы решения уравнения (1) при любых спектральных плотностях флуктуаций параметров. В частности, флуктуации параметров могут быть как медленными по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$, так и быстрыми.

Уравнения (8) представляются удобными для анализа еще и потому, что для некоторых практических случаев они разделяются и становятся линейными; тем самым анализ стохастического уравнения второго порядка может сводиться к анализу стохастических линейных уравнений первого порядка, статистическая устойчивость решения которых подробно рассмотрена в [17].

3. В этой статье мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда флуктуации Δa и Δb являются медленно меняющимися функциями времени по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$. В этом случае в формулах (7) Δa и Δb можно вынести из-под интегралов. Тогда

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= a_{\perp} = 0, & a_{10} &= 2\Delta a(t), \\ b_{\parallel} &= b_{\perp} = 0, & b_{10} &= 2\Delta b(t) \end{aligned}$$

и уравнения (8) примут вид

$$\frac{dA}{dt} = -hA - \frac{\Delta b(t)}{2} A, \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta a(t)}{2\omega_1} - \frac{h \Delta b(t)}{2\omega_1}. \quad (10)$$

Статистическая устойчивость решения уравнения (9) рассматривалась в работе [17], на основании которой можно утверждать, что независимо от значения начального условия $A_0 = A(0) \neq 0$ амплитуда $A(t)$ статистически устойчива, если

$$h > \frac{\pi}{2} S_{\Delta b}(0), \quad (11)$$

и статистически не ограничена, если

$$h < \frac{\pi}{2} S_{\Delta b}(0). \quad (12)$$

Здесь $S_{\Delta b}(0)$ — значение в нуле $S_{\Delta b}(\omega)$ — спектральной плотности флуктуаций параметра $\Delta b(t)$.

Эти результаты справедливы, если h и $S_{\Delta b}(0)$ не равны одновременно нулю.

Если $h = 0$ и $S_{\Delta b}(0) = 0$, то, как следует из Приложения, при стремлении $S_{\Delta b}(\omega)$ к нулю при $\omega \rightarrow 0$ быстрее, чем ω , имеет место статистическая устойчивость амплитуды $A(t)$, в противном случае $A(t)$ статистически не ограничена.

Таким образом, поведение «амплитуды» осцилляторного решения уравнения (1) определяется только флуктуациями затухания системы и не зависит от флуктуаций «собственной частоты» системы.

Если $S_{\Delta b}(0) > 0$, а среднее затухание системы достаточно мало или равно нулю, так что выполняется условие (12) (например, автогенератор находится вблизи порога самовозбуждения), то любое ненулевое начальное значение амплитуды колебания A_0 будет неустойчивым и амплитуда со временем уйдет сколь угодно далеко (в пределах применимости уравнения (1)) от A_0 .

Обратимся к поведению фазы решения, заданной уравнением (10). Исследуем статистическую устойчивость фазы при произвольном начальном значении φ_0 . Невозмущенное движение равно $\varphi^0(t) = \varphi_0$. Решение уравнения (10)

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \nu(s) ds,$$

где

$$\nu(t) = \frac{1}{2\omega_1} [\Delta a(t) - h \Delta b(t)]. \quad (13)$$

В соответствии с [17], рассмотрим флуктуацию движения

$$\xi(t) = \varphi(t) - \varphi^0(t) = \int_0^t \nu(s) ds.$$

Нетрудно найти, что среднее значение и дисперсия $\xi(t)$ равны

$$m_\xi(t) \equiv 0,$$

$$d_{\xi}(t) = 2 \int_0^t (t-s) \Phi_{\nu}(s) ds, \quad \Phi_{\nu}(\tau) = \langle \nu(t) \nu(t+\tau) \rangle.$$

Если спектральная плотность флуктуаций частоты $S_{\nu}(0) > 0$, то для достаточно больших t (см. [17]) можно найти, что

$$d_{\xi}(t) = 2\pi S_{\nu}(0) t.$$

Следовательно, для $S_{\nu}(0) > 0$ имеет место статистическая неограниченность фазы $\varphi(t)$, которая в этом случае представляет собой нестационарный процесс с расходящейся мощностью.

Если же $S_{\nu}(0) = 0$, то все определяется (если существует $\langle \nu^2 \rangle$) характером стремления $S_{\nu}(\omega)$ к нулю при $\omega \rightarrow 0$. Если $S_{\nu}(\omega)$ стремится к нулю быстрее, чем ω , то существует конечное значение

$$d_{\xi} = \lim_{t \rightarrow \infty} d_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\nu}(\omega)}{\omega^2} d\omega;$$

для этого случая легко доказать статистическую устойчивость фазы.

Если $S_{\nu}(\omega)$ стремится к нулю как ω или медленнее, то d_{ξ} становится бесконечной, и мы имеем случай статистической неограниченности фазы.

Из (13) легко получить связь $S_{\nu}(\omega)$ со спектральными плотностями флуктуаций параметров:

$$S_{\nu}(\omega) = \frac{1}{4\omega_1^2} [S_{\Delta a}(\omega) + h^2 S_{\Delta b}(\omega) - 2h S_{\Delta a \Delta b}^0(\omega)], \quad (14)$$

где $S_{\Delta a \Delta b}^0(\omega)$ — четная часть совместной спектральной плотности флуктуаций параметров.

Таким образом, в принципе могут встретиться различные сочетания статистической устойчивости и неограниченности по амплитуде и по фазе. Что это будет означать для движения $x(t)$? Если имеет место статистическая устойчивость как по амплитуде, так и по фазе, то движение $x(t)$ является статистически устойчивым. Если же имеет место статистическая устойчивость по амплитуде и неограниченность по фазе, то движение $x(t)$, например, для случая $h = 0$ (постоянная амплитуда) будет статистически неустойчивым, но ограниченным (см. [17]). Наконец, неограниченность по амплитуде приводит к статистической неограниченности $x(t)$ при любом характере изменения фазы.

4. Рассмотрим в качестве примера поведение колебаний автогенератора с контуром в цепи сетки, когда колебания еще не развились (начальное значение амплитуды достаточно мало) и можно ограничиться линейным уравнением. Пусть в системе имеются флуктуации сопротивления потерь контура и флуктуации крутизны лампы. Обозначая через x напряжение на конденсаторе контура (на сетке лампы), имеем для него уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R(t)C - MS(t)}{LC} \frac{dx}{dt} + \frac{1 - M dS/dt}{LC} x = 0. \quad (15)$$

Здесь $L, C, R(t)$ — параметры контура, $S(t)$ — крутизна лампы, M — коэффициент взаимной индукции в цепи обратной связи.

Флуктуирующими параметрами являются сопротивление и крутизна, равные соответственно

$$R(t) = R[1 + \delta r(t)],$$

$$S(t) = S[1 + \delta S(t)].$$

Сравнивая (1) и (15), имеем

$$h = \frac{RC - MS}{2LC}, \quad \Delta b = \frac{CR \delta r - MS \delta S}{LC};$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \Delta a = -\frac{MS}{LC} \frac{d}{dt} \delta S. \quad (16)$$

Как можно показать, условие малости флуктуаций параметров (5), необходимое для справедливости полученных результатов, принимает вид

$$\sqrt{\langle \delta r^2 \rangle} \ll Q, \quad \sqrt{\langle \delta S^2 \rangle} \ll \frac{1}{\omega_0 |M| S},$$

где Q — добротность колебательного контура (без учета обратной связи). Если считать, что $|M|S$ не превышает существенно RC , то флуктуации крутизны по порядку величины также должны удовлетворять неравенству $\sqrt{\langle \delta S^2 \rangle} \ll Q$.

Выражая $S_{\Delta b}(\omega)$ через спектральные плотности относительных флуктуаций сопротивления и крутизны $S_{\delta r}(\omega)$, $S_{\delta S}(\omega)$ и $S_{\delta r \delta S}(\omega)$, нетрудно найти с помощью (11) следующее условие статистической устойчивости амплитуды колебания:

$$RC - MS > \pi \left[\frac{1}{Q^2} S_{\delta r}(0) + M^2 S^2 \omega_0^2 S_{\delta S}(0) - \frac{2MS \omega_0}{Q} S_{\delta r \delta S}^0(0) \right]. \quad (17)$$

Статистическая неограниченность амплитуды, согласно (12), имеет место при обратном знаке неравенства. Как видно из (17), полученное условие статистической устойчивости амплитуды колебаний генератора существенно зависит от коррелированности флуктуаций сопротивления и крутизны.

Пусть в общем случае

$$\delta S(t) = k \delta r(t) + \sigma(t), \quad \langle \delta r(t) \sigma(t + \tau) \rangle \equiv 0, \quad (18)$$

т. е. флуктуации крутизны частично коррелированы с флуктуациями сопротивления. Легко видеть, что

$$S_{\delta S}(\omega) = k^2 S_{\delta r}(\omega) + S_{\sigma}(\omega), \quad S_{\delta r \delta S}^0(\omega) = k S_{\delta r}(\omega).$$

Условие статистической устойчивости амплитуды принимает тогда вид

$$RC - MS > \pi [(Q^{-1} - kMS\omega_0)^2 S_{\delta r}(0) + M^2 S^2 \omega_0^2 S_{\sigma}(0)]. \quad (19)$$

Начнем анализ областей устойчивости с самого простейшего случая, когда $M = 0$, т. е. когда рассматриваемая система превращается в колебательный контур с флуктуирующим сопротивлением. Условие устойчивости амплитуды при этом

$$S_{\delta r}(0) < Q/\pi\omega_0.$$

Таким образом, если имеются достаточно большие флуктуации сопротивления, такие, что $S_{\delta r}(0) > Q/\pi\omega_0$, в контуре наступает статистически неустойчивый режим — возбуждаются колебания (в отсутствие флуктуаций параметров колебания в контуре затухают). Физически это связано с тем, что мы не накладывали условия положительности на сопротивление контура $R(t) = R[1 + \delta r(t)]$, и поэтому флуктуации со-

противления $\delta r(t)$ могут приводить к отрицательным значениям $R(t)$, несмотря на то, что $\bar{R} > 0$.

Пусть теперь $M \neq 0$, но флуктуации крутизны отсутствуют ($S_c(0) = 0, k = 0$). Тогда для области устойчивости имеем (рис. 1, прямая a)

$$S_{\delta r}(0) < \frac{Q}{\pi\omega_0} \left(1 - M \frac{S}{RC} \right). \quad (20)$$

Этот случай полностью сводится к предыдущему, если учесть, что обратная связь вносит в контур активное сопротивление ($-MS/C$) и суммарное сопротивление потерь контура равно $R(1 - MS/RC)$.

Если и флуктуации сопротивления отсутствуют ($S_{\delta r}(0) = 0$), то условие устойчивости, согласно (20), сводится к тривиальному неравенству $M < RC/S$. Наличие флуктуаций сопротивления ($S_{\delta r}(0) > 0$) приводит, как видно из рис. 1, к тому, что неустойчивость по амплитуде (а следовательно, и возбуждение автогенератора) возникает при значениях M , меньших RC/S .

Пусть теперь имеются флуктуации крутизны, некоррелированные с флуктуациями сопротивления ($S_c(0) > 0, k = 0$). Тогда условие статистической устойчивости амплитуды принимает вид

$$S_{\delta r}(0) < \frac{Q}{\pi\omega_0} \left(1 - \frac{MS}{RC} \right) - M^2 S^2 \omega_0^2 Q^2 S_c(0). \quad (21)$$

Как видно из рис. 1 (кривые b, c, d), область устойчивости, согласно (21), уменьшается с увеличением $S_c(0)$. Особенно существенно изме-

няется она для значений $M < 0$, оставаясь при этом внутри области устойчивости, соответствующей $S_c(0) = 0$. При дальнейшем возрастании $S_c(0)$ область устойчивости сужается, прижимаясь к отрезку $[0, Q/\pi\omega_0]$.

Теперь уже возбуждение генератора происходит при более меньших положительных значениях M . Причина этого заключается в том, что флуктуации крутизны из-за наличия обратной связи как бы сводятся к дополнительным флуктуациям сопротивления: вместо $S_{\delta r}(0)$ имеем $S_{\delta r}(0) + M^2 S^2 \omega_0^2 Q^2 S_c(0)$. Ясно, что при этом знак M не играет никакой роли, и уменьшение области устойчивости происходит как для области $M > 0$, так и для области $M < 0$.

Если появляется корреляция между флуктуациями сопротивления и крутизны, то область устойчивости деформируется более сложным образом. На рис. 2 показаны области устойчивости и неограниченности (когда $k > 1$) для полностью коррелированных $r(t)$ и $S(t)$ (кривая $a, S_c(0) = 0$) и для частично коррелированных (кривые b и c).

Аналогичные диаграммы можно построить и для координат $M, S_c(0)$.

Перейдем к анализу поведения фазы. На основании (14), (16) и (18) имеем для спектральной плотности флуктуации частоты следующее выражение:

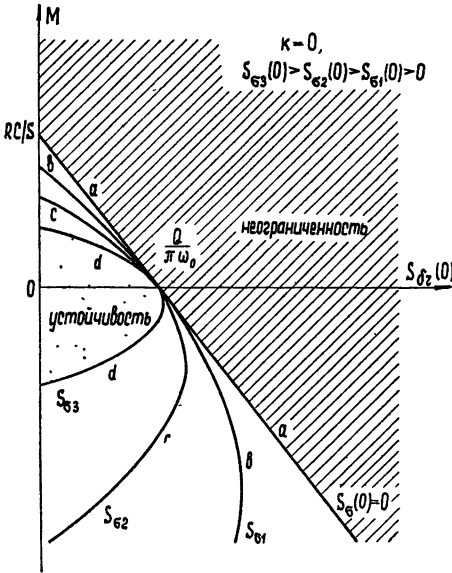


Рис. 1.

$$S_v(\omega) = \frac{\omega_0^4}{4\omega_1^2} \{ S^2 M^2 \omega^2 [k^2 S_{\delta r}(\omega) + S_\sigma(\omega)] + h^2 [RC - MSk]^2 S_{\delta r}(\omega) + S^2 M^2 S_\sigma(\omega) \}.$$

Таким образом, условие статистической неограниченности фазы имеет вид

$$h^2 [(RC - MSk)^2 S_{\delta r}(0) + M^2 S^2 S_\sigma(0)] > 0.$$

Это условие выполняется, если $h > 0$ и если хотя бы одна спектральная плотность в точке $\omega = 0$ отлична от нуля. Если $S_{\delta r}(0) > 0$, $S_\sigma(0) > 0$, то статистическая устойчивость фазы существует лишь для значений $M = RC/S$ ($h = 0$). Таким образом, область статистической устойчивости фазы представляет линию, т. е. для всех реальных случаев фаза неустойчива.

Если $S_{\delta r}(0) = 0$, $S_\sigma(0) = 0$ и при $\omega \rightarrow 0$ эти спектральные плотности стремятся к нулю быстрее, чем ω , то фаза колебания будет статистически устойчивой для любых значений M . При этом, как нетрудно видеть из (19), устойчивость по амплитуде будет иметь место для всех $M < RC/S$ (рис. 3; $\lim_{\omega \rightarrow 0} S_{\delta r}(\omega)/\omega = 0$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} S_\sigma(\omega)/\omega = 0$).

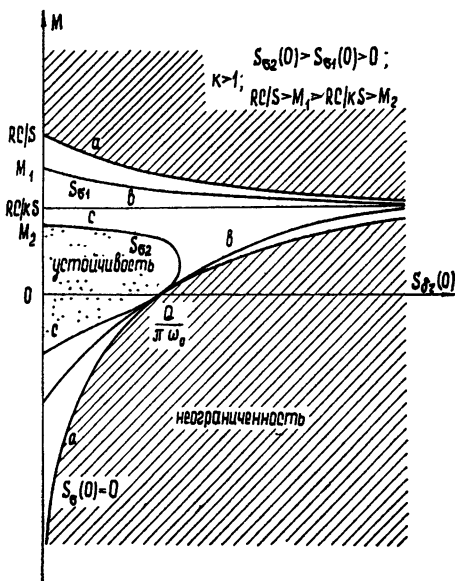


Рис. 2.

то амплитуда статистически не ограничена. Этот случай соответствует как раз случаю неустойчивости невозмущенного движения по Ляпунову: Амплитуда колебания при любых не равных нулю начальных значениях неограниченно возрастает (пока справедливо урав-

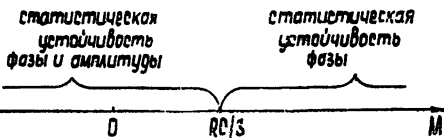


Рис. 3.

нение (15)); фаза при этом сохраняет статистическую устойчивость, т. е. малые флуктуации сопротивления и крутизны приводят к малому отлчию фазы возмущенного нарастающего (по амплитуде) колебания от фазы нарастающего невозмущенного колебания. Последнее не имеет места, например, при $S_\sigma(0) > 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Результаты, полученные в [17] относительно статистической устойчивости решения уравнения

$$\dot{x}(t) + [a + a(t)] x(t) = 0, \quad x(0) = x_0 \neq 0,$$

справедливы, если a и $M_\alpha \equiv \pi S_\alpha(0)$ не обращаются одновременно в нуль.

Пусть теперь $a = 0$, $S_\alpha(0) = 0$. Решим вопрос о статистической

устойчивости $x(t)$ и в этом случае. Сохраняя обозначения, принятые в [17], для этого случая имеем

$$m_{\xi_i}(t) = x_0 [e^{M_{\alpha}(t)t} - 1];$$

$$d_{\xi_i}(t) = x_0^2 [e^{4M_{\alpha}(t)t} - 2e^{M_{\alpha}(t)t} + 1],$$

где

$$M_{\alpha}(t)t = \int_0^t (t-s) \Phi_{\alpha}(s) ds = \frac{1}{2} \langle \lambda_t^2 \rangle, \quad \lambda_t = \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Поскольку $d\lambda_t/dt = \alpha(t)$, то спектральные плотности $\alpha(t)$ и λ_t связаны соотношением $S_{\alpha}(\omega) = \omega^2 S_{\lambda}(\omega)$. Формально имеем

$$\langle \lambda_t^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\lambda}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\alpha}(\omega)}{\omega^2} d\omega. \quad (22)$$

Это выражение имеет смысл (т. е. интеграл равен $\langle \lambda_t^2 \rangle$ независимо от t при больших t), если интеграл в правой части (22) сходится. В этом случае λ_t — стационарный процесс. Если интеграл бесконечен, то это значит, что λ_t — нестационарный процесс с неинтегрируемым спектром мощности.

Поскольку $S_{\alpha}(0) = 0$, существование интеграла в (22) (при условии, что $\langle \alpha^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\alpha}(\omega) d\omega$ существует) связано с характером стремления $S_{\alpha}(\omega)$ к нулю при $\omega \rightarrow 0$. Если $S_{\alpha}(\omega)$ стремится к нулю быстрее, чем ω , то интеграл сходится и $\langle \lambda_t^2 \rangle$ конечно. Если $S_{\alpha}(\omega)$ стремится к нулю как ω или медленнее, то интеграл бесконечен. Если интеграл расходится, то $M_{\alpha}(t)t$ при $t \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает. В этом случае движение $x(t)$ статистически неограниченное.

Пусть интеграл в (22) сходится. Тогда существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (t-s) R_{\alpha}(s) ds = K_0 < \infty,$$

где $R_{\alpha}(\tau)$ — коэффициент корреляции. В этом случае для достаточно больших t $M_{\alpha}(t)t = \langle \alpha^2 \rangle K_0$ и

$$m_{\xi_i}(t) = x_0 [e^{\langle \alpha^2 \rangle K_0} - 1],$$

$$d_{\xi_i}(t) = x_0^2 [e^{4\langle \alpha^2 \rangle K_0} - 2e^{\langle \alpha^2 \rangle K_0} + 1].$$

Выбирая интенсивность флуктуаций параметра столь малой, что $4\langle \alpha^2 \rangle K_0 \ll 1$, имеем

$$m_{\xi_i}(t) = x_0 \langle \alpha^2 \rangle K_0,$$

$$d_{\xi_i}(t) = x_0^2 2\langle \alpha^2 \rangle K_0.$$

Выбирая теперь $\delta = \varepsilon/4x_0^2 K_0$, для $\langle \alpha^2 \rangle < \delta$ получим

$$|d_{\xi_i}(t)| < \varepsilon/2,$$

а следовательно, и статистическую устойчивость движения.

Таким образом, если $S_{\alpha}(\omega)$ стремится к нулю быстрее, чем ω , то движение $x(t)$ статистически устойчиво; в противном случае движение статистически не ограничено.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Rosenbloom, J. Heilfron, D. L. Trautman, IRE Convention record, 4, 106 (1954).
2. A. Rosenbloom, Analysis of Randomly Time-Varying Linear Systems, Ph. D. Thesis. University of California, Los Angeles, 1954.
- 3 В. И. Тихонов, Автоматика и телемеханика, 19, 717 (1958); 20, 1089 (1960).
4. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, Научн. докл. высш. шк., 3, 221 (1958).
5. J. C. Samuels, IRE Trans., CT-6, 248 (1959).
6. J. E. Bertram, P. E. Sarachik, IRE Trans., CT-6, 260 (1959).
7. J. C. Samuels, A. C. Eringen, J. Math. and Phys., 38, 83 (1959).
8. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, ПММ, 24, 809 (1960).
9. J. C. Samuels, J. Ac. Soc. Amer., 32, 594 (1960).
10. T. K. Caughey, J. Ac. Soc. Amer., 32, 1356 (1960).
11. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, 5, 863 (1960)
12. J. C. Samuels, J. Ac. Soc. Amer., 33, 1782 (1961).
13. И. Я. Кац, Мат. зап. Уральск гос. ун-та и Уральск. мат. об-ва, 1, тетр. 2 (1962).
14. T. K. Caughey, J. K. Dienes, J. Math. and Phys., 41, 300 (1962).
15. J. L. Bogdanoff, F. Kozin, J. Ac. Soc. Amer., 34, 1063 (1962).
16. F. Kozin, J. Math. and Phys., 42, 59 (1963).
17. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 6, 42 (1963).
18. С. А. Иванов, Ю. М. Романовский, Радиотехника и электроника, 8, 1397 (1963).
19. F. Kozin, J. L. Bogdanoff, J. Math. and Phys, 42, 336 (1963).
20. И. Я. Кац, ПММ, 28, 366 (1964).
21. A. H. Gray, J. Ac. Soc. Amer., 37, 235 (1965).
22. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
5 июня 1965 г.

STATISTICAL STABILITY OF OSCILLATORY MOTION IN SYSTEM WITH
ONE DEGREE OF FREEDOM. I.

A. N. Malakhov, G. N. Bochkov

The oscillatory second-order system is considered and conditions of statistical stability of the oscillation amplitude and phase are examined at comparatively slow parameter fluctuations.

УДК 62 — 506

О ВЛИЯНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА СИСТЕМУ С САМОНАСТРОЙКОЙ

К. Г. Кирьянов

С помощью z-преобразования изучено влияние шумовых внешних воздействий на установившийся периодический режим системы с самонастройкой. Найдены дисперсии переменных системы. Проведено моделирование системы на цифровой вычислительной машине

В работе [1] изучались простейшие периодические режимы системы с самонастройкой, изображенной на рис. 1. Система работает таким образом, что при подключении на ее входы периодических сигналов $x_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) на емкостях памяти γC_j (при определенных параметрах системы) откладываются и устойчиво сохраняются напряжения y_j , равные входным напряжениям x_j в определенной фазе. Изменение «содержимого» памяти $y_j(t)$ и порогового напряжения $\epsilon(t)$ происходит в моменты времени t_k (моменты «срабатывания» порогового детектора), когда напряжение $\sigma(t) = \Phi(x_1(t), \dots, x_N(t); y_1(t), \dots, y_N(t))$

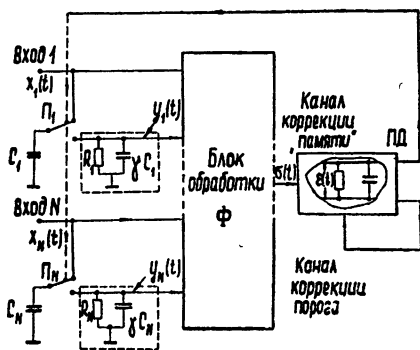


Рис. 1.

с выхода блока обработки входных сигналов и содержимое памяти достигают уровня $\epsilon(t)$. В работе [1] показано, что поведение системы описывается точечным преобразованием T_{N+2} переменных $y_j(t_{k-1})$, $\epsilon(t_{k-1})$, t_{k-1} в величины $y_j(t_k)$, $\epsilon(t_k)$, t_k следующего вида*:

$$T_{N+2} \begin{cases} y_j(t_k) = p x_j(t_k) + q y_j(t_{k-1}) e^{-\alpha(t_k - t_{k-1})} \quad (j = 1, 2, \dots, N); \\ \epsilon(t_k) = \rho \epsilon(t_{k-1}) e^{-\delta(t_k - t_{k-1})} + \mu; \\ K \Phi(x_1(t_k), \dots, x_N(t_k); y_1(t_{k-1}) e^{-\alpha(t_k - t_{k-1})}, \dots, y_N(t_{k-1}) e^{-\alpha(t_k - t_{k-1})}) - \\ - \epsilon(t_{k-1}) e^{-\delta(t_k - t_{k-1})} = 0. \end{cases}$$

Изучение влияния малых случайных воздействий на периодический режим работы системы можно проводить методом, применимым к кусочно-линейным системам, предложенным в работе [2] и обобщенным в работе [3] на системы с произвольным числом степеней свободы для

* Все обозначения такие же, как в работе [1].

случая недельтакоррелированного шума. Однако ввиду специфики рассматриваемой системы, описываемой точечным преобразованием, изучение влияния внешних воздействий на систему при определенных ограничениях на характер внешних воздействий удобно проводить, используя аппарат z -преобразования. Это и сделано в настоящей работе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что внешние воздействия на каждый из N входов системы $x_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) состоят из детерминированной периодической $s_j(t)$ (периода T) и возмущающей $n_j(t)$ составляющих, т. е.

$$x_j(t) = s_j(t) + n_j(t). \quad (1)$$

Исследуется влияние возмущений $n_j(t)$ на установившийся периодический режим типа $\Gamma_{N+1,1}$ [1], который при $n_j \equiv 0$ характеризуется тем, что $y_j(t_k) = \bar{y}_j$; $x_j(t_k) = \bar{s}_j(\tau)$ и $t_k = knT + \tau$. Под $n_j(t)$ будем понимать случайные шумовые воздействия со следующими характеристиками:

$$\bar{n}_j(t) = 0, \quad \bar{n}_j^2 = \sigma_j^2, \quad \overline{n_j(t)n_j(t + \Theta)} = \psi_{jk}(\Theta); \quad (2)$$

$$n_j(knT + \tau + dt_k) \simeq n_j(knT + \tau) \quad \text{при любых } k. \quad (3)$$

Условие (3) означает, что случайные воздействия n_j меняются незначительно за интервал dt_k , равный отклонению периода срабатывания от величины nT вследствие влияния возмущений на систему. Условие (3) означает, что $\dot{n}_j(t)$ существует и

$$n_j(knT + \tau) \gg \dot{n}_j(knT + \tau)(dt_k) \quad \text{при любых } k \text{ и } j = 1, \dots, N. \quad (3a)$$

При дополнительном условии гауссовости шума, используя неравенство Буняковского—Шварца, а также формулу для среднего расстояния \bar{T} между соседними нулями гауссового процесса (4), легко показать, что из условия (3a) следует физически более наглядное условие (3б):

$$\frac{4}{3\pi^2} \bar{T}^2 = \frac{\sigma_j^2}{3\dot{\sigma}_j^2} \gg \overline{(dt_k)^2} \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (3б)$$

где $\dot{\sigma}_j^2$ — дисперсии производных $n_j(t)$.

Рассматриваемая далее линеаризованная теория налагает различные требования на максимальные значения n_j в зависимости от вида функции обработки Φ .

Если действительная непрерывная по всем аргументам (в достаточно малых окрестностях неподвижных точек T_{N+2}) функция обработки Φ не линейна хотя бы по одному из переменных x_j , то значения n_j считаются достаточно малыми, не превышающими величины, для которых справедливо точечное преобразование, линеаризованное около рассматриваемой неподвижной точки. Если же Φ линейна по x_j ($j = 1, 2, \dots, N$), то в силу линейности первых N уравнений точечного преобразования по x_j можно считать, что значения n_j не превосходят величин, при которых вызываемые ими флуктуации времени переключения $\overline{(dt_k)^2}$, находимые в настоящей работе (см., например, (28)), не нарушают условия (3a).

Исключением переменной $\varepsilon(t)$ в T_{N+2} можно показать, что система

фактически может быть описана точечным преобразованием $(N + 1)$ -го порядка. Если линейризованное точечное преобразование $(N + 1)$ -го порядка представить в форме

$$dY(t_k) = TdY(t_{k-1}) + \xi(t_k, t_{k-1}), \quad (4)$$

где T — квадратная матрица линейного преобразования, $dY(t)$ — вектор с компонентами $dy_1(t), dy_2(t), \dots, dy_N(t), dt$, ξ — вектор возмущений, компоненты которого представляют линейные комбинации величин n_j^* , в моменты времени t_k и t_{k-1} , то, применяя z -преобразование к обеим частям векторного соотношения (4), получим для изображений векторов уравнение

$$Y^*(z) = Tz^{-1}Y^*(z) + \xi^*(z) \quad (5)$$

или

$$Y^*(z) = -(T - zE)^{-1}z\xi^*(z),$$

где

$$Y^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} dY(t_k)z^{-k} \quad \text{и} \quad \xi^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi(t_k, t_{k-1})z^{-k}, \quad (6)$$

а E — единичная матрица одинакового с T порядка. С помощью обратного z -преобразования

$$dY(t_k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma = e^{cnT}} Y^*(z)z^{k-1} dz$$

можно найти вектор $dY(t_k)$ и ответить на любой (в рамках линейной теории) вопрос, касающийся влияния малых внешних воздействий на периодический режим работы системы.

Следует заметить, что в данном случае z -преобразование применяется к последовательностям компонент вектора $dY(t_k)$, упорядоченных по индексу k (см. (6)). В этом случае компоненты взяты не в равноотстоящие на время nT моменты, так как $(N + 1)$ -я компонента вектора dY есть, хотя и малое (см. (3а)), но отклонение dt_k времени срабатывания от величины nT .

2. НАХОЖДЕНИЕ $Y^*(z)$

Можно показать, что линейризованное точечное преобразование представимо в матричной форме в виде $MdY(t_k) = QdY(t_{k-1}) + \varphi$ или в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{N+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_1(t_k) \\ dy_2(t_k) \\ \dots \\ dy_N(t_k) \\ dy_{N+1}(t_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & a & \dots & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & c_N \\ h_1, h_2, \dots, h_N & c_{N+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_1(t_{k-1}) \\ dy_2(t_{k-1}) \\ \dots \\ dy_N(t_{k-1}) \\ dy_{N+1}(t_{k-1}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_N \\ \varphi_{N+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_N \\ F_{N+1} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

* Это возможно благодаря условию (3а).

Здесь введены обозначения

$$dy_{N+1}(t_k) \equiv dt_k, \quad dy_{N+1}(t_{k-1}) \equiv dt_{k-1};$$

$$a = qe^{-anT}, \quad f = \rho e^{-bnT}, \quad c_j = \alpha a y_j, \quad b_j = c_j - p \bar{s}'_j(\tau), \quad h_j = (f - a) \Phi'_{y_j}, \quad j = 1, \dots, N;$$

$$b_{N+1} = \Phi q(U + \delta - \alpha W), \quad c_{N+1} = \Phi q \left(f U + \delta - \alpha W - f \frac{1-a}{a} V \right); \quad (8)$$

$$\varphi_{N+1} = \Phi \left[-q \sum_j \beta_{x_j} n_j(t_k) + qf \sum_j \beta_{x_j} n_j(t_{k-1}) - pf \sum_j \beta_{y_j} n_j(t_{k-1}) \right]^*;$$

$$\varphi_j = p n_j(t_k), \quad j = 1, \dots, N;$$

$$U = \sum_j \beta_{x_j} \bar{s}'_j(\tau); \quad V = \frac{\rho e^{-anT}}{1-a} \sum_j \beta_{y_j} \bar{s}'_j(\tau); \quad W = \frac{\rho e^{-anT}}{1-a} \sum_j \beta_{y_j} \bar{s}_j(\tau);$$

$$\beta_{x_j} = \Phi'_{x_j} / \Phi, \quad \beta_{y_j} = \Phi'_{y_j} / \Phi;$$

$F_j (j = 1, \dots, N)$ определены соотношением (7); Φ, Φ' — значения функции обработки и ее производных в неподвижной точке точечного преобразования.

Как уже упоминалось в [1], уравнение (7) может быть разрешено относительно $dY(t_k)$, если $\det M = b_{N+1} \neq 0$, что всегда выполняется в случае устойчивости системы. Поэтому из (7) следует, что $dy_j(t_k) = F_j - (b_j/b_{N+1}) F_{N+1}$, $j = 1, \dots, N$; $dy_{N+1} = F_{N+1}/b_{N+1}$ или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} dy_1(t_k) \\ dy_2(t_k) \\ \dots \\ dy_N(t_k) \\ dy_{N+1}(t_k) \end{pmatrix} = \frac{1}{b_{N+1}} \begin{pmatrix} (ab_{N+1} - b_1 h_1) - b_1 h_2 \dots - b_1 h_N (c_1 b_{N+1} - b_1 c_{N+1}) \\ - b_2 h_1 (ab_{N+1} - b_2 h_2) \dots - b_2 h_N (c_2 b_{N+1} - b_2 c_{N+1}) \\ \dots \\ - b_N h_1 - b_N h_2 \dots (ab_{N+1} - b_N h_N) (c_N b_{N+1} - b_N c_{N+1}) \\ h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_N \quad c_{N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dy_1(t_{k-1}) \\ dy_2(t_{k-1}) \\ \dots \\ dy_N(t_{k-1}) \\ dy_{N+1}(t_{k-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_N \\ \xi_{N+1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\xi_j = \varphi_j - (b_j/b_{N+1}) \varphi_{N+1}$, $j = 1 \dots N$; $\xi_{N+1} = (1/b_{N+1}) \varphi_{N+1}$. (10)

Из соотношения (9), представляющего развернутое соотношение (4), найдем, что, согласно (5),

$$Y_i^*(z) = \Delta_j / \Delta \quad (j = 1 \dots N). \quad (11)$$

Определитель

$$\Delta = \det(T - zE) = \frac{1}{b_{N+1}} (a - z)^{N-1} \left[(c_{N+1} - b_{N+1} z)(a - z) - \sum_j h_j (c_j - b_j z) \right] = \frac{1}{b_{N+1}} (a - z)^{N-1} \chi_2(z).$$

* Здесь и далее, где не указаны пределы, суммирование происходит от 1 до N .

В характеристическом полиноме

$$\begin{aligned}\chi_2(z) &= b_{N+1}z^2 + \left[\sum_j h_j b_j - ab_{N+1} - c_{N+1} \right] z + c_{N+1}a - \sum_j h_j c_j = \\ &= A[a_2 z^2 + a_1 z + a_0] = Aa_2(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\end{aligned}\quad (12)$$

коэффициенты A , a_0 , a_1 и a_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}A &= q\Phi, \quad a_0 = afU - f(1-a)V - \alpha fW + \delta a, \quad a_1 = (\alpha f + a)W - \delta a - \\ &\quad - \delta - (a+f)U + (1-a)V, \quad a_2 = \delta - \alpha W + U.\end{aligned}\quad (13)$$

Числители в (11) получаются в двух формах:

$$\begin{aligned}\Delta_{k=1\dots N} &= -\frac{z(a-z)^{N-2}}{b_{N+1}} \left\{ \varphi_k^*(z)\chi_2(z) - (c_k - b_k z) \left[\varphi_{N+1}^*(z)(a-z) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_j h_j \varphi_j^*(z) \right] \right\}; \quad \Delta_{N+1} = -\frac{z(a-z)^{N-1}}{b_{N+1}} \left[\varphi_{N+1}^*(z)(a-z) - \sum_j h_j \varphi_j^*(z) \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Следовательно,

$$Y_{N+1}^*(z) = -\frac{z}{\chi_2(z)} \left[\varphi_{N+1}^*(z)(a-z) - \sum_j h_j \varphi_j^*(z) \right]; \quad (15)$$

$$Y_{k=1\dots N}^*(z) = -\frac{z}{(a-z)\chi_2(z)} \left\{ \varphi_k^*(z)\chi_2(z) - (c_k - b_k z) \left[\varphi_{N+1}^*(z)(a-z) - \sum_j h_j \varphi_j^*(z) \right] \right\}.$$

Из (15) имеем

$$Y_{k=1\dots N}^*(z) = \frac{z}{z-a} \varphi_k^*(z) - \frac{zb_k - c_k}{z-a} Y_{N+1}^*(z). \quad (16)$$

Применяя z -преобразование к $\varphi_j(t)$ (8), получим

$$\begin{aligned}\varphi_j^*(z) &= pN_j^*(z), \quad j = 1 \dots N, \quad \varphi_{N+1}^*(z) = \Phi \left[-q \sum_j \beta_{x_j} N_j^*(z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z} qf \sum_j \beta_{x_j} N_j^*(z) - \frac{1}{z} pf \sum_j \beta_{y_j} N_j^*(z) \right].\end{aligned}\quad (17)$$

Подстановка выражений (17) в (15) дает

$$Y_{N+1}^*(z) = -\frac{z-f}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \sum_j (z-d_j) \beta_{x_j} N_j^*(z); \quad (18)$$

$$Y_{k=1\dots N}^*(z) = \frac{z}{z-a} pN_k^*(z) - \frac{zb_k - c_k}{z-a} Y_{N+1}^*(z), \quad (19)$$

где

$$d_j = \begin{cases} a \left(1 - \frac{\beta_{y_j} p}{\beta_{x_j} q} \right) & \text{для случая произвольной функции обработки} \\ 2a - 1 & \text{для случая } \Phi(t) = \Phi_{xy} = \sum_j x_j(t)y_j(t). \end{cases} \quad (20)$$

Для дальнейшего удобно ввести коэффициенты передачи

$$K_{jN+1}(z) = \frac{Y_{N+1}^*(z)}{N_j^*(z)} \Big|_{N_m^*(z)=0; m=1 \dots j-1, j+1, \dots, N} = -\beta_{xj} \frac{(z-f)(z-d_j)}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \quad (21)$$

$$K_{jk}(z) = \frac{Y_k^*(z)}{N_j^*(z)} \Big|_{N_m^*(z)=0; m=1 \dots j-1, j+1, \dots, N} = \frac{pz}{z-a} \delta_{jk} - \frac{zb_k - c_k}{z-a} K_{jN+1}(z), \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (22)$$

Коэффициент передачи $K_{jN+1}(z)$ характеризует влияние возмущения на j -ом входе на отклонение времени срабатывания от величины nT , т. е. характеризует синхронизирующее действие системы. Коэффициенты передачи $K_{jk}(z)$ характеризуют флуктуации содержимого памяти около значений y_j . Первое слагаемое в (22) характеризует флуктуации содержимого памяти y_j вследствие прямого воздействия флуктуаций входных сигналов, заряжающих емкости памяти в моменты коррекции. Второе слагаемое характеризует флуктуации содержимого памяти через посредство флуктуаций времени подключения входных сигналов к емкостям памяти; при этом $\frac{zb_k - c_k}{z-a}$ есть весовой коэффициент, переводящий флуктуации времени подключения во флуктуации содержимого в k -ой ячейке памяти.

3. ДИСПЕРСИИ ПЕРЕМЕННЫХ СИСТЕМЫ

Если заданы решетчатые функции взаимной корреляции шумов на входах системы $\psi_{rs}(i)$, то, найдя из изображения

$$\Psi_{rs}(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \psi_{rs}(i) z^{-l}, \quad (23)$$

можно вычислить корреляционные функции всех переменных системы по формуле

$$\psi_l(m) = \sum_{r, s=1}^N \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma: \{|z|=1\}} K_{rl}(z) K_{sl}(z^{-1}) \Psi_{rs}(z) \frac{dz}{z^{l-m}} \quad (l=1, 2, \dots, N, N+1), \quad (24)$$

где $K_{rl}(z)$ — соответствующие коэффициенты передачи. Для дальнейшего удобно ввести величины

$$Q_{l, N+1}^{(2)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} K_{l, N+1}(z) K_{l, N+1}(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (l = 1 \dots N); \quad (25)$$

$$Q_{l, m}^{(2)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} K_{lm}(z) K_{lm}(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (l, m = 1 \dots N). \quad (26)$$

Если теперь предположить, что шумы не дельтакоррелированы, а имеют время корреляции $\tau_{\text{кор}}$, большее, чем dt_k при любом k , а также предположить (для упрощения дальнейших расчетов), что $\tau_{\text{кор}} < nT$ и что шумы взаимонезависимы на каждом из входов системы и имеют одинаковые дисперсии, то

$$\psi_{rs}(i) = \begin{cases} \psi_0 = \sigma^2 & \text{при } r = s \text{ и } i = 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (27)$$

и выполняется условие (3), так как $\overline{(dt_k)^2} \ll \overline{T^2} \leq \tau_{\text{коп}}^2 < (nT)^2$.

Для вычисления дисперсий переменных системы будем иметь следующие формулы:

$$\overline{(dy_l)^2} = \sigma_{y_l}^2 = \psi_0 \sum_{k=1}^N Q_{kl}^{(2)}, \quad \overline{(dt_k)^2} = \sigma_t^2 = \psi_0 \sum_{k=1}^N Q_k^{(2)} J_{N+1}^{(2)}, \quad (28)$$

где

$$Q_{kl}^{(2)} = [p^2 J_0^{(0)} + 2pg_k J_{kl}^{(1)}] \delta_{kl} + g_k^2 J_{kl}^{(2)}, \quad (29)$$

$$Q_k^{(2)} J_{N+1}^{(2)} = g_k^2 J_k^{(3)} \quad (30)$$

и где введены следующие обозначения:

а) для интегралов по замкнутому контуру

$$J_0^{(0)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}; \quad (31)$$

$$J_{kl}^{(1)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{(b_l - c_l z)(1-fz)(1-d_k z) dz}{(z-a)(1-az)(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)}; \quad (32)$$

$$J_{kl}^{(2)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{(b_l z - c_l)(z-f)(z-d_k)(b_l - zc_l)(1-fz)(1-d_k z) dz}{(z-a)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(1-az)(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)}; \quad (33)$$

$$J_k^{(3)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{(z-f)(z-d_k)(1-fz)(1-d_k z) dz}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z) z}; \quad (34)$$

б) для коэффициентов в (29) и (30)

$$g_k = \begin{cases} -\beta_{x_k}/a_2 & \text{для произвольной функции обработки} \\ -\bar{s}_k(\tau)/a_2 \sum_i \bar{s}_i^2(\tau) & \text{для } \Phi(t) = \Phi_{xy}. \end{cases} \quad (35)$$

Проводя интегрирование, будем иметь

$$J_0^{(0)} = \frac{1}{1-a^2}; \quad J_{kl}^{(1)} = a_2 \frac{(b_l - c_l a)(1-fa)(1-d_k a)}{(1-a^2)(a_2 + aa_1 + a^2 a_0)};$$

$$J_{kl}^{(2)} = a_2 \frac{c_l f d_k}{aa_0} + a_2^2 \frac{(ab_l - c_l)(b_l - ac_l)(a-f)(1-fa)(a-d_k)(1-ad_k)}{a(1-a^2)(a_2 + a_1 a + a_0 a^2)(a_2 a^2 + a_1 a + a_0)} + \\ + \frac{(\lambda_1 b_l - c_l)(b_l - \lambda_1 c_l)(\lambda_1 - f)(1-f\lambda_1)(\lambda_1 - d_k)(1-d_k \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - \lambda_2)(1-a\lambda_1)(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1 \lambda_2)} + \\ + \frac{(\lambda_2 b_l - c_l)(b_l - \lambda_2 c_l)(\lambda_2 - f)(1-f\lambda_2)(\lambda_2 - d_k)(1-d_k \lambda_2)}{\lambda_2(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - \lambda_1)(1-a\lambda_2)(1-\lambda_2^2)(1-\lambda_1 \lambda_2)}; \quad (36)$$

$$J_k^{(3)} =$$

$$= \frac{a_2 \{ 2f d_k (a_2^2 + a_1^2 - a_0^2) + (1+d_k^2)(1+f^2)a_2(a_2+a_0) + 2a_1 a_2 [f(1+d_k^2) + d_k(1+f^2)] \}}{(a_2 - a_1 + a_0)(a_2 + a_1 + a_0)(a_2 - a_0)}$$

В случае $\alpha = 0$ и $\Phi = \Phi_{xy}$ для этих интегралов получаются более простые выражения:

$$\begin{aligned}
 J_0^{(0)} &= \frac{1}{1-q^2}; \quad J_{ki}^{(1)} = \\
 &= \frac{-p\bar{s}'_i(\tau)a_2}{R} \left[\frac{1}{1-q^2} - \frac{\delta q}{\delta(1-q^2)(1-q) + R[1-q(2q-1)](1-qf)} \right]; \\
 J_{ki}^{(2)} &= \frac{p^2[\bar{s}'_i(\tau)]^2 a_2^2}{R^2} \left[\frac{1}{1-q^2} - \frac{2\delta p}{\delta(1-q^2)(1-q) + R[1-q(2q-1)](1-qf)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta^2}{(\delta + R - q\delta + fR - 2qfR)(\delta + q\delta + qR + qfR)} \right]; \quad (37) \\
 J_k^{(3)} &= [\delta^2(1-q^2)(1-f) + \delta R(2q^2f^2 - q^2 - q^2f + 1 + f - \\
 &\quad - 2qf + q - qf^2) + R^2q(1+f)(1+f-2qf)(\delta + R)][R(\delta + \\
 &\quad + R - q\delta + fR - 2qfR)(\delta + q\delta + qR + qfR)]^{-1}.
 \end{aligned}$$

4. ФЛУКТУАЦИИ ПОРОГОВОГО НАПРЯЖЕНИЯ $\varepsilon(t)$

Флуктуации переменной порога $\varepsilon(t)$, как это следует из вида точечного преобразования, совпадают с флуктуациями функции обработки, так как $d\varepsilon(t_k) = \rho K d\Phi$. Поэтому около неподвижной точки преобразования имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varepsilon(t_k)}{\rho K} &= \left[\sum_j \Phi'_{x_j} \bar{s}'_j(\tau) \right] dt_k + \left[\sum_j \Phi'_{x_j} n_j(t_k) \right] + \left[\sum_j \Phi'_{y_j} dy_j(t_{k-1}) \right] e^{-\alpha n T} - \\
 &\quad - \alpha e^{-\alpha n T} \left[\sum_j \Phi'_{y_j} \bar{y}_j \right] (dt_k - dt_{k-1}). \quad (38)
 \end{aligned}$$

Полагая $d\varepsilon(t_k) \div E^*(z)$ и применяя z -преобразование к обеим частям равенства, будем иметь

$$\begin{aligned}
 \frac{E^*(z)}{\rho K} &= \sum_j \Phi'_{x_j} \bar{s}'_j Y_{N+1}^*(z) + \sum_j \Phi'_{x_j} N_j^*(z) + z^{-1} e^{-\alpha n T} \sum_j \Phi'_{y_j} Y_j^*(z) - \\
 &\quad - \alpha e^{-\alpha n T} \sum_j \Phi'_{y_j} \bar{y}_j (1 - z^{-1}) Y_{N+1}^*(z). \quad (39)
 \end{aligned}$$

Вводя прежние обозначения, получим

$$E^*(z)/\rho K \Phi = Y_{N+1}^*(z)[U - \alpha W(1 - z^{-1})] + e^{-\alpha n T} z^{-1} \sum_j \beta_{y_j} Y_j^*(z) + \sum_j \beta_{x_j} N_j^*(z). \quad (40)$$

Используя (13), (18) и (19), после преобразований получим

$$E^*(z) = \delta \rho K \Phi \frac{z - 1}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \sum_j \beta_{x_j} (z - d_j) N_j^*(z). \quad (41)$$

При тех же предположениях относительно характеристик шума ((3а), (27)) дисперсия порогового напряжения может быть вычислена по формуле

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\psi_0}{2\pi j} \oint_{\Gamma} E^*(z) E^*(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \psi_0 \frac{\rho^2 K^2 \Phi^2 \delta^2}{a_2^2} \sum_j \beta_{x_j}^2 J_j^{(4)}, \quad (42)$$

где

$$J_j^{(4)} = \frac{2a_2[d_j(a_2^2 + a_1^2 - a_0^2) + (1 + d_j^2)a_2(a_2 + a_0) + a_1a_2(1 + d_j)^2]}{(a_2 - a_1 + a_0)(a_2 + a_1 + a_0)(a_2 - a_0)}. \quad (43a)$$

При $\alpha = 0$ и $\Phi = \Phi_{xy}$

$$J_j^{(4)} = \frac{2(\delta + R)[qR(1 - 2fq + f) + \delta(1 - q)]}{(\delta + R - q\delta + fR - 2qfR)(\delta + q\delta + qR + qfR)}. \quad (43b)$$

5. ДИСПЕРСИИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ $\alpha=0$ И $\Phi=\Phi_{xy}$

На основании (28) и (29) с помощью (35) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{y_l}^2 / \psi_0 &= \frac{\rho^2}{1 - q^2} + \frac{2\rho^2}{R} \frac{\overline{s_l(\tau)\overline{s_l'(\tau)}}}{\sum_j \overline{s_j^2(\tau)}} \left[\frac{1}{1 - q^2} - \frac{\delta\rho}{a_2 + a_1q + a_0q^2} \right] + \\ &+ \frac{\rho^2}{R^2} \frac{[\overline{s_l'(\tau)}]^2}{\sum_j \overline{s_j^2(\tau)}} \left[\frac{1}{1 - q^2} - \frac{2\delta\rho}{a_2 + a_1q + a_0q^2} + \frac{2\delta^2}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1 + a_0)} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Рассматривая выражение (44), можно сделать следующие выводы.

1) Дисперсия содержимого l -ой емкости памяти y_l не может быть меньше, чем

$$\sigma_{y_l}^2 = \psi_0 \frac{\rho}{1 + q}. \quad (45)$$

2) При изменении параметров системы, соответствующем приближению системы к границе области устойчивости, дисперсия содержимого памяти стремится к бесконечности. Это является общим фактом для линейных систем; однако специфика данной задачи состоит в том, что в ней, как свидетельствует D -разбиение (например, в плоскости параметров $1/R$ и nT), система не может иметь бифуркаций при изменении параметров через границу N_{+1} [5]. Это объясняет присутствие в одном из знаменателей (44) выражений $a_2 - a_1 + a_0$ и $a_2 - a_0$, характеризующих только границы N_{-1} и N_{φ} .

3) Дисперсия уменьшается с уменьшением ρ .

4) Дисперсия напряжений на различных емкостях памяти различна, так как $\sigma_{y_l}^2$ зависит от l через посредство формы приходящего сигнала. Дисперсия напряжений на емкостях памяти, соответствующая более крутой (независимо от знака производной) части приходящего сигнала, увеличивает вес последнего члена в (44).

5) Дисперсия $\sigma_{y_l}^2$ зависит от N сложным образом: она уменьшается с ростом N , если при этом растет сумма $\sum_j \overline{s_j^2(\tau)}$.

Точность воспроизведения всех входных сигналов при действии шума естественно характеризовать величиной $\Delta_{ш} = \sum_l \sigma_{y_l}^2 / \sum_l \overline{y_l^2}$, которая при $\alpha = 0$ и $\Phi = \Phi_{xy}$ равна

$$\Delta_{ш} = \frac{\psi_0}{\sum_i \bar{s}_i^2(\tau)} \frac{p}{1+q} \left\{ N + 2 \left[1 - \frac{\delta p^2(1+q)}{a_2 + a_1 q + a_0 q^2} \right] + \frac{\sum_i [\bar{s}_i^2(\tau)]^2}{\sum_i [\bar{s}_i(\tau)]^2} \frac{1}{R^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{2\delta p^2(1+q)}{a_2 + a_1 q + a_0 q^2} + \frac{2\delta^2 p(1+q)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1 + a_0)} \right] \right\}. \quad (46)$$

Формулы для дисперсии времени срабатывания и дисперсии порогового напряжения в рассматриваемом случае получаем из (28) и (43а):

$$\sigma_{\tau}^2 = \{ \psi_0 [\delta^2(1-q^2)(1-f) + \delta R(2q^2 f^2 - q^2 - q^2 f + 1 + f - 2qf + q - qf^2) + \\ + R^2 q(1+f)(1+f-2qf)] [(\delta + R) \sum_i \bar{s}_i^2(\tau) R(\delta + R - \\ - q\delta + fR - 2qfR)(\delta + q\delta + qR + qfR)]^{-1}; \quad (47)$$

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \frac{2\psi_0 \rho^2 K^2 \delta^2 \Sigma \bar{s}_i^2(\tau) [qR(1-2fq+f) + \delta(1-q)]}{(\delta + R)(\delta + R - q\delta + fR - 2qfR)(\delta + q\delta + qR + qfR)}. \quad (48)$$

6. ЭКСПЕРИМЕНТ НА ЦВМ

Моделирование системы при малых случайных внешних воздействиях осуществлялось на вычислительной машине «Раздан» методом, изложенным в [1]. Для получения нормально распределенных квазислучайных чисел сначала получались равномерно распределенные числа в интервале $(-1,1)$, которые затем с помощью специального преобразования переводились в числа с гауссовым законом распределения. Параметры последнего приведены ниже.

При машинном эксперименте были взяты следующие параметры системы:

$$p = 1/16 (q = 15/16), \quad \alpha = 0,$$

$$\delta = 0,5, \quad \rho = 1, \quad \mu = 26,$$

$$K = 0,005, \quad N = 32$$

(отводы — равноотстоящие на 1/64 часть периода) и параметры регулярного сигнала: сигнал — периодический треугольный импульс; период сигнала характеризовался заданием 128 чисел: $s_0 = 0, s_1 = 3, s_2 = 6, \dots, s_{31} = 93, s_{32} = 96, s_{33} = 93, \dots, s_{63} = 3, s_{64} = 0, s_{65} = 0, \dots, s_{127} = 0$; шаг вычислений 10^{-3} ; период $T = 0,128$; параметры шумового сигнала: радиус корреляции — 2 шага; распределение нормальное; среднее значение равно нулю; дисперсия $\sigma = 2,35$ (рис. 2), 23,5 (рис. 3) и 47 (рис. 4).

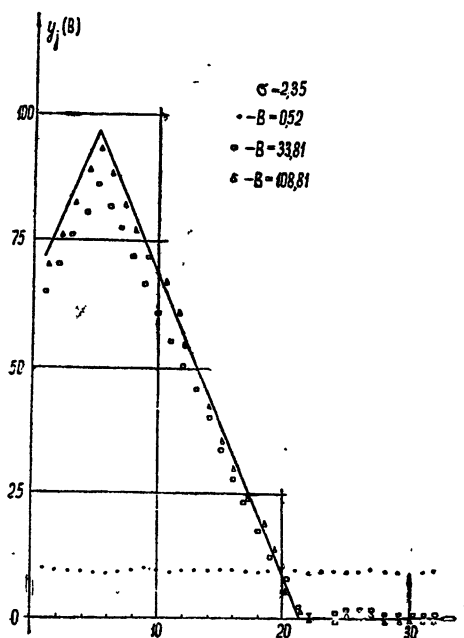


Рис. 2.

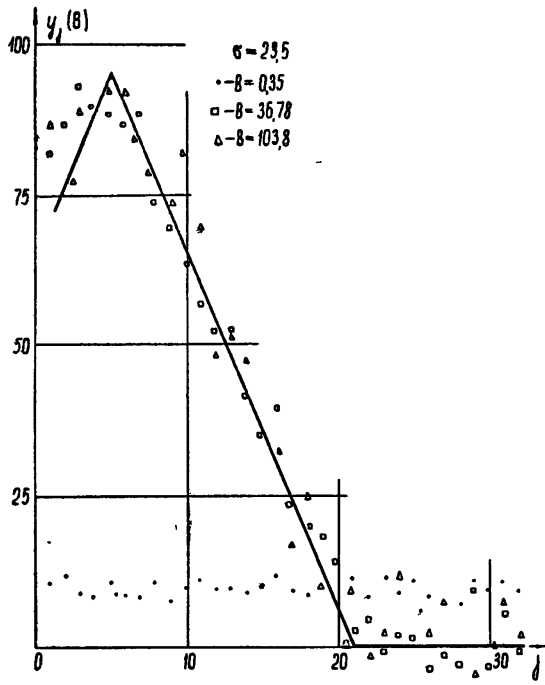


Рис. 3.

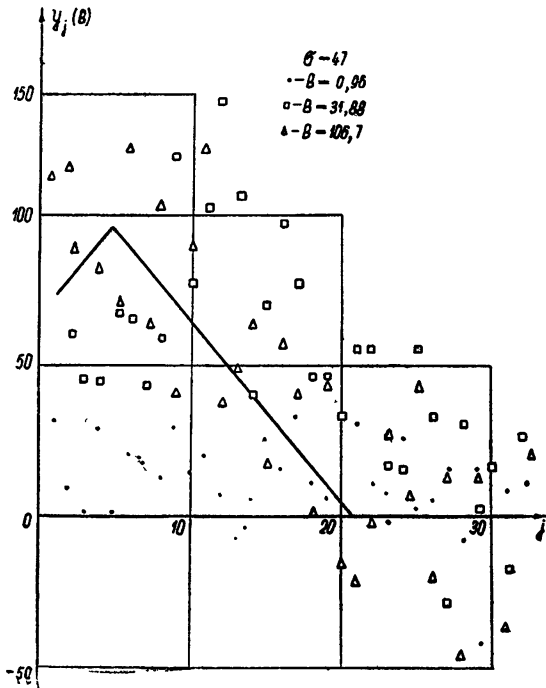


Рис. 4.

На рис. 2—4 показана полученная на ЦВМ эволюция содержимого памяти в зависимости от времени B , выраженного в периодах приходящего сигнала, при начальных значениях $y_j = 10 (j = 1, \dots, 32)$. При указанных параметрах сигнала получаем: $\sum \bar{s}_j^2 = 8 \cdot 10^4$, $R = 15,6$, $\frac{1}{R^2} \sum_j [\bar{s}_j']^2 / \sum_j \bar{s}_j^2 = 9,3$. По формуле (46) (при $n = 1$)

$$\Delta_{\text{ш}} = 1,68 \cdot 10^{-5} \sigma^2. \quad (49)$$

Экспериментальные (вычисленные непосредственно на машине-модели) и теоретические (рассчитанные по формуле (49)) данные сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Параметр	Дисперсия шума на входах $\phi_0 = \sigma^2$					
	2,35		23,5		4,7	
	теорет.	экспер.	теорет.	экспер.	теорет.	экспер.
$\Delta_{\text{ш}}$	$0,9 \cdot 10^{-4}$	$0,92 \cdot 10^{-4}$	$0,9 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$

Из таблицы видно, что в рассмотренном примере при максимальном значении сигнала 96 линейная теория справедлива для дисперсий шумов на входах системы, не превышающих 23.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. И. Неймарку, под руководством которого выполнена работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Г. Кирьянов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 589 (1965).
2. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 50 (1959).
3. Р. Х. Садеков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 796 (1960).
4. С. О. Raice, Bell. Syst. Tech. J., 24, 46 (1945).
5. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 95 (1958).

Поступила в редакцию
22 июня 1965 г.

ON INFLUENCE OF RANDOM ACTIONS UPON SELF-TUNING

K. G. Kir'yanov

By means of z -transformation the influence of noise external actions upon steady-state periodic regime of the self-tuning system has been studied. The dispersions of variable systems have been found out. The modelling of the system has been made on a digital computer.

УДК 621.396.671

ПОВЫШЕНИЕ УРОВНЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЩЕЛИ НА ЦИЛИНДРЕ В ОБЛАСТИ ТЕНИ

М. П. Наймушин

Рассматриваются возможности повышения (в части пространства, экранируемой цилиндром (область тени)) уровня излучения продольной щели, расположенной на этом цилиндре. Повышение уровня достигается введением переменного импеданса на части контура поперечного сечения цилиндра.

При помещении источника излучения, создающего в свободном пространстве ненаправленное излучение, на металлический цилиндр заднее полупространство в значительной мере экранируется цилиндром. Например, средний уровень излучений продольной щели на цилиндре в заднем полупространстве (в области тени) меньше уровня излучения в переднем полупространстве (в освещенной области) более, чем в 2,5 раза (по напряженности) для $ka > 10$ (здесь $k = 2\pi/\lambda$, a — радиус цилиндра) [1]. Для получения более равномерного излучения необходимо размещать на окружности цилиндра несколько излучателей. Однако для того, чтобы интерференционные минимумы не были бы глубоки, число излучателей должно быть значительным и увеличиваться прямо пропорционально диаметру цилиндра. Увеличение количества излучателей усложняет схему питания и в ряде случаев оказывается неприемлемым.

Представляет интерес рассмотреть, насколько можно уменьшить экранирующее действие цилиндра, вводя импедансную структуру на поверхности цилиндра и не увеличивая количество излучателей. Для упрощения рассмотрим двухмерную задачу, т. е. будем считать распределение источников и импеданса однородным вдоль оси цилиндра, а цилиндр бесконечным. Источник возьмем в виде узкой бесконечной продольной щели. Поле в этом случае соответствует H -волнам относительно оси цилиндра. Так как вдоль контура цилиндра импеданс может быть в общем случае переменным, то для определения диаграммы излучения источника сначала нужно найти распределение электрических и магнитных токов по поверхности цилиндра. Это можно сделать, используя интегральное уравнение для поверхностной плотности тока, приведенное в [2]. В цилиндрической системе координат r, φ, z уравнение имеет следующий вид:

$$I_{\varphi}^3(\varphi) + \int_0^{2\pi} I_{\varphi}^3(\varphi') \frac{Z_H(\varphi') - Z_0}{2\pi i W} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos [n(\varphi - \varphi')] \times \\ \times \left[\frac{H_n^{(2)'}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} + \frac{Z_0}{iW} \right]^{-1} d\varphi' = I_{\varphi}^{\text{перв}}(\varphi). \quad (1)$$

Здесь

$$Z_H(\varphi) = - \left. \frac{E_{\varphi}}{H_z} \right|_{r=a} = - \frac{I_z^M}{I_{\varphi}^3}; \quad Z_0 = \text{const},$$

$W = \sqrt{\mu/\epsilon}$, μ и ϵ — постоянные окружающего пространства, $I_\varphi^{\text{перв}}(\varphi)$ — плотность поверхностного электрического тока, наводимого на цилиндре источником при поверхностном импедансе цилиндра Z_0 , $H_n^{(2)}(ka)$ и $H_n^{(2)'}(ka)$ — функция Ханкеля и ее производная по аргументу.

После решения интегрального уравнения (1) диаграмма направленности рассчитывается по следующей формуле:

$$F(\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{iW} \{ I_\varphi^{\text{перв}}(\varphi') [Z_H(\varphi') - Z_0] + I_z^{\text{ст}} \} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos [n(\varphi - \varphi')] d\varphi' [H_n^{(2)'}(ka) + \frac{Z_0}{iW} H_n^{(2)}(ka)]^{-1}, \quad (2)$$

где $I_z^{\text{ст}}$ — заданная плотность магнитного тока в щели.

Если импеданс цилиндра постоянен, то, приняв $Z_0 = Z_H(\varphi)$, получаем решение задачи без решения интегрального уравнения. Если импеданс имеет постоянное значение на части контура, то, считая Z_0 равным величине импеданса на этой части, сократим интервал интегрирования в уравнении (1). Это облегчает решение уравнения.

Известно, что если цилиндр обладает постоянным индуктивным поверхностным импедансом, то продольная щель на цилиндре возбуждает азимутальные поверхностные волны, которые распространяются по обе стороны от щели. При этом повышается уровень излучения в заднем полупространстве, но диаграмма излучения носит осциллирующий характер вследствие интерференции полей двух противоположно направленных волн. Для иллюстрации этого положения на рис. 1 приведена серия диаграмм направленности продольной щели на цилиндре при $ka = 10$ и различной величине постоянного индуктивного импеданса $Z_0/iW = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$. Угол φ отсчитывается от щели. На графике приведены диаграммы лишь в интервале $0 \div 180^\circ$, так как в интервале $180 \div 360^\circ$ они идут симметрично. Из рисунка видно, что при возрастании импеданса увеличивается уровень излучения в заднем полупространстве ($\varphi = 90^\circ$ —

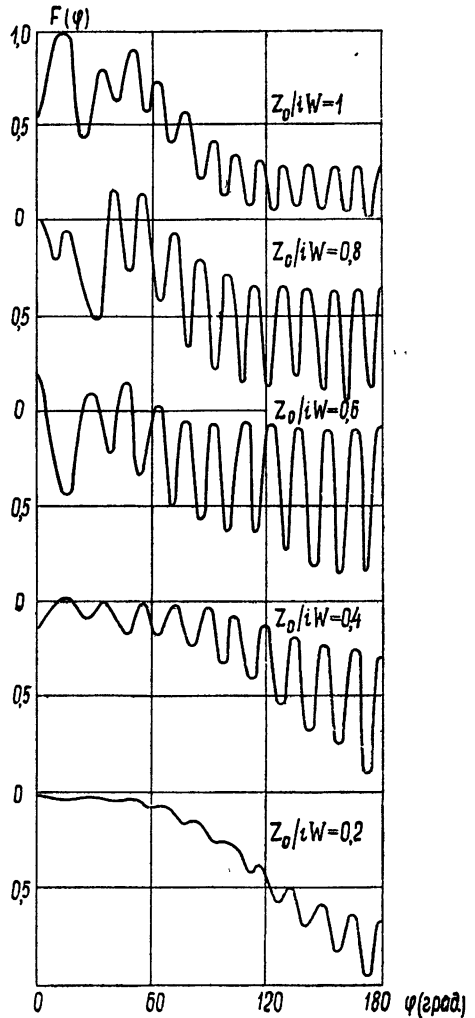


Рис. 1. Диаграммы направленности продольной щели на цилиндре с постоянным импедансом ($ka = 10$).

-180°), но зато увеличивается и ширина сектора, в котором диаграмма направленности имеет резко осциллирующий характер. Известно [3], что при большой величине поверхностного импеданса (при определенных его значениях) наступает пространственный резонанс, когда диаграмма направленности меняется по закону $\cos(m\varphi)$. Таким образом, введение постоянного по всему контуру импеданса не обеспечивает удовлетворительного расширения диаграммы направленности щели.

С целью уменьшения осцилляций диаграммы направленности можно возбудить на цилиндре однонаправленную азимутальную волну. На рис. 2 показано распределение импеданса вдоль контура цилиндра,

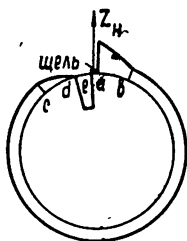


Рис. 2 Распределение импеданса вдоль контура цилиндра, обеспечивающее возбуждение однонаправленной азимутальной поверхностной волны.

обеспечивающее возбуждение волны, бегущей по часовой стрелке вдоль контура цилиндра, и подавление волны, бегущей против часовой стрелки. Плавный переход $a-b$ служит для уменьшения собственного излучения щели и хорошего возбуждения азимутальной волны. На участке $b-c$ импеданс является постоянным, и его величина Z_0 подбирается такой, чтобы излучение за счет срыва азимутальной поверхностной волны обеспечивало наиболее равномерную диаграмму направленности. Плавный переход $c-d$ от значений Z_0 до 0 необходим для уменьшения отраженной волны. На участке $d-e$ импеданс имеет емкостный характер (для того, чтобы подавить возбуждение волны, бегущей против часовой стрелки).

На рис. 3 приведены распределения импеданса вблизи щели и диа-

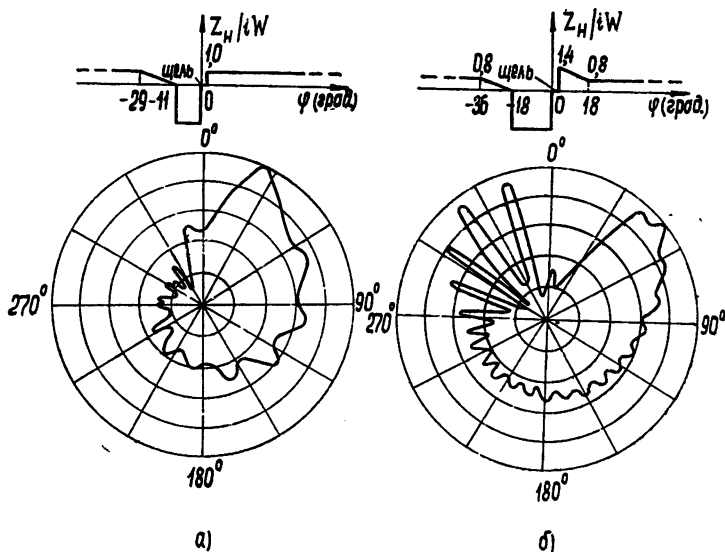


Рис. 3. Распределение импеданса вблизи щели и диаграммы направленности при возбуждении однонаправленной азимутальной волны ($ka=10$).

грамма направленности для двух значений постоянного импеданса на большей части контура: а) $Z_0/iW = 1,0$ и б) $Z_0/iW = 0,8$. Угол φ отсчитывается от щели в направлении распространения азимутальной волны. Из рисунка видно, что однонаправленная азимутальная волна может создавать значительный уровень излучения в заднем полупространстве. Например, для диаграммы на рис. 3б уровень излучения в секторе $90^\circ \div 270^\circ$ мало меняется и составляет примерно 0,5 от максимума (по напряженности). Для случая, изображенного на рис. 3а, уровень излучения в заднем полупространстве меньше, что объясняется более высоким постоянным значением импеданса, а следовательно, и меньшим излучением за счет срыва азимутальной волны. Как показывают расчеты, наиболее высокий и равномерный уровень излучения в секторе $90^\circ \div 270^\circ$ получается в том случае, когда при обходе контура от точки b до точки c (см. рис. 2) плотность электрического и магнитного поверхностных токов за счет срыва азимутальной волны уменьшается приблизительно в два раза. (Диаграмма направленности на рис. 3б как раз соответствует этому случаю.) Однако в целом при возбуждении однонаправленной азимутальной волны излучение является весьма неравномерным, особенно в секторе $270^\circ \div 360^\circ$. Это обусловлено как плавным спаданием поверхностного тока при обходе контура цилиндра, так и скачком тока на источнике (щели).

Другая возможность повышения уровня излучения щели на цилиндре в заднем полупространстве — возбуждение двух противоположно направленных азимутальных поверхностных волн на ограниченных участ-

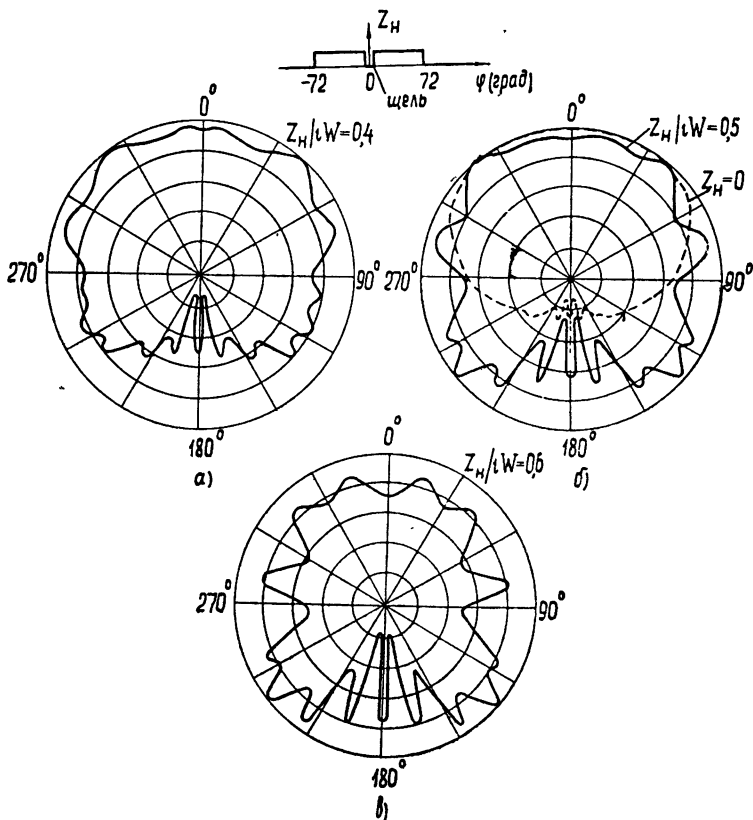


Рис. 4. Распределение импеданса и диаграммы направленности при возбуждении щелью симметричного участка импедансной структуры на цилиндре ($ka=10$).

ках контура цилиндра, так что их интерференция исключается. Этого можно добиться при помещении щели в центре симметричного участка импедансной структуры, занимающего на контуре сектор $\Delta\varphi < 180^\circ$. На остальной части контура импеданс должен быть равным нулю или иметь отрицательное значение (емкостной импеданс), чтобы азимутальная волна на этом участке не поддерживалась. В этом случае как бы образуются два распределенных источника, экранированные друг от друга цилиндром и освещающие каждый свою половину пространства. Вследствие дифракции поля интерференция излучения обоих источников все же имеет место, но в небольшом секторе.

На рис. 4 приведены диаграммы направленности щели, возбуждающей цилиндр ($ka = 10$) с полосой постоянного импеданса, занимающей у щели сектор $\pm 72^\circ$ (± 2 длины волны вдоль контура). Импеданс принимал различные значения: а) $Z_H/iW = 0,4$, б) $Z_H/iW = 0,5$, в) $Z_H/iW = 0,6$. Наибольшая равномерность диаграммы направленности во всем секторе углов имеет место при $Z_H/iW = 0,5$. На этом же рисунке приведена для сравнения диаграмма направленности щели на идеально проводящем цилиндре. Из сравнения графиков видно повышение уровня излучения в заднем полупространстве при введении участка с индуктивным импедансом. Ширина сектора, в котором уровень излучения превышает 0,7 от максимума, составляет для $Z_H/iW = 0,4$; 0,5; 0,6; соответственно 270° , 310° , 245° , в отличие от 180° для идеально проводящего цилиндра. Таким образом, использование симметричной импедансной структуры может значительно расширить диаграмму направленности щели на цилиндре, приближая ее к ненаправленной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Р. Уэйт, Электромагнитное излучение из цилиндрических систем, изд. Сов. радио, М., 1963.
2. М. П. Наймушин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 540 (1965).
3. J. R. Wait, A. M. Conda, IRE Trans., AP-9, 330 (1961).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
7 июня 1965 г.

INCREASING OF SLIT RADIATION LEVEL ON SYLINDER IN SHADOW REGION

M. P. Naymoushin

The possibilities are considered of increasing (in a part of space screened by cylinder (a shadow region)) of the radiation level of a longitudinal slit located on this cylinder. The level increasing is achieved by introducing a variable impedance in a part of circuit of cylinder transverse section.

УДК 621.371.167

К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА СМИТА—ПАРСЕЛЛА

О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопалов

Развита теория излучения электромагнитных волн модулированным электронным потоком, движущимся над отражательной дифракционной решеткой. Получены частотные и энергетические характеристики излучения; определены оптимальные параметры потока и решетки для случая, когда влияние пространственного заряда и обратной реакции излучения на поток не учитывается. Для сравнения приводятся результаты решения задачи об излучении в случае, когда электронный поток движется над решеткой из металлических брусьев прямоугольного поперечного сечения и над ленточной дифракционной решеткой.

В литературе явление излучения электромагнитных волн электронным потоком при движении его над дифракционной решеткой получило название эффекта Смита—Парселла [1]. Представляется очевидным рассматривать это излучение как частный случай обобщенного эффекта Вавилова—Черенкова, который сначала был открыт для диэлектрических сред, а позже обнаружен для других структур, где волна может распространяться с фазовой скоростью $v_\phi < c$. На связь эффекта Смита—Парселла с эффектом Вавилова—Черенкова было указано в работах [2, 3]. Поэтому под названием эффекта Смита—Парселла следует подразумевать наименование одного из видов излучения Вавилова—Черенкова, возникающего при движении заряженной частицы или потоков частиц над периодическими структурами.

Частотные характеристики излучения Смита—Парселла можно получить из простого построения Гюйгенса [1, 4]; они подтверждаются и более детальным рассмотрением [5, 6]. Для определения длины волны излучения, помимо скорости электронного потока $v = \beta c$ и угла наблюдения излучения, достаточно знать только период решетки l , а конфигурация профиля решетки не существенна.

Энергетические характеристики излучения определяются дифракцией на решетке собственного электромагнитного поля движущегося электронного потока. При этом, следовательно, существенное влияние на интенсивность излучения оказывает геометрическая конфигурация решетки. Точность расчета энергетических характеристик излучения, а значит, и выбор оптимальных параметров пучка и решетки для получения максимального излучения определяются степенью строгости решения соответствующей дифракционной задачи.

В первых наших работах [5—8] рассматривалось движение электронного потока над идеализированными дифракционными решетками, образованными металлическими лентами. Установлена, в частности, сильная зависимость интенсивности излучения от ширины лент решетки. В настоящей работе исследуется излучение, вызванное движением потока над отражательной дифракционной решеткой, которая обычно применяется на практике. Дается сравнение энергетических характеристик излучения отражательной решетки с ленточной решеткой и решеткой из брусьев прямоугольного поперечного сечения; анализируется влияние профиля решетки на излучение.

1. ИЗЛУЧЕНИЕ ПОТОКА НАД ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ

Пусть над отражательной дифракционной решеткой с периодом $2l$, шириной щелей $2d$ и глубиной $2h$ (рис. 1) движется плоский электронный поток с периодически распределенной плотностью заряда

$$\rho = \rho_0 \delta(z - p) \exp [i(ky - \omega t)]. \quad (1)$$

Расстояние пучка от поверхности решетки a , скорость пучка v направлена перпендикулярно образующим решетки и равна $j\beta c$. Здесь введены обозначения: ρ_0 — амплитуда, ω — частота модуляции, c — скорость света в пустоте, $\beta = v/c$, v — скорость пучка, i, j, k — орты прямоугольной системы координат, $\delta(z)$ — дельта-функция.

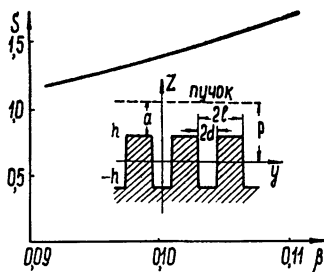


Рис. 1. Зависимость S от скорости пучка β при $x = 0,1$; $d/l = 0,1$; $h/l = 2,4$; $a/2l = 0,01$.

Необходимо определить излучаемое потоком электромагнитное поле, которое удовлетворяет волновому уравнению, граничным условиям на решетке, условию излучения на бесконечности и согласуется с условием Майкснера на ребре. Для этого сначала найдем собственное поле пучка в отсутствие решетки. Оно определяется из решения неоднородного дифференциального уравнения для векторного и скалярного потенциалов и уравнений Максвелла и имеет вид неоднородной плоской H -поляризованной волны:

$$H = i\beta F \frac{d}{dz} |z - p| \exp [-q|z - p| +iky]; \quad (2)$$

$$E = \left[-j i \theta + k \frac{d}{dz} |z - p| \right] F \exp [-q|z - p| +iky], \quad (3)$$

где $F = 2\pi\rho_0$, $q = k\theta = k\sqrt{1 - \beta^2}$ и зависимость от времени принята в форме $\exp(-i\omega t)$.

Таким образом, задачу о возбуждении электромагнитных колебаний электронным потоком можно рассматривать как задачу о дифракции волны (2), (3), падающей под некоторым комплексным углом на металлическую решетку. Воспользовавшись инвариантностью уравнений Максвелла относительно системы координат, однородностью структуры вдоль оси ox и периодичностью вдоль оси oy , запишем отраженное поле разложенным в ряд Фурье по функциям $\exp(i\pi ny/l)$:

$$H_1 = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp \left\{ i \left[q_n(z - h) + \left(k + \frac{\pi n}{l} \right) y \right] \right\}; \quad (4)$$

$$E_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-j \sqrt{1 - \tau_n^2} + k \tau_n \right) A_n \exp \left\{ i \left[q_n(z - h) + \left(k + \frac{\pi n}{l} \right) y \right] \right\}. \quad (5)$$

Здесь $q_n = k\theta_n = k\beta\sqrt{1 - \tau_n^2}$; $\tau_n = (\eta + n)/x$; $\eta = x/\beta$; $x = 2l/\lambda$.

Отметим, что судя по характеру искомых полей (4)–(5), физический смысл имеет только та ветвь корня q_n , мнимая часть которой положительна, а при $\text{Im}q_n = 0$, $\text{Re}q_n > 0$.

Для выполнения граничных условий на боковой поверхности решетки представим поле в области щелей в виде разложения в ряд Фурье по косинусам, образующим полную систему функции на интервале $-d \leq y \leq d$:

$$H_0 = i \sum_{m=0}^{\infty} H_m(z) \cos m \pi(y + d)/2d. \quad (6)$$

Амплитуды $H_m(z)$ находятся из условия подчинения (6) уравнению Гельмгольца, а электрическая составляющая поля E_0 определяется через H_0 из уравнений Максвелла. Вводя обозначения

$$\psi = y/2d, \quad u = d/l, \quad g_m = k\xi_m = k\beta \sqrt{\left(\frac{m}{2ux}\right)^2 - 1}, \quad (7)$$

запишем выражения для поля внутри щели в окончательном виде:

$$H_0 = i \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m \operatorname{ch} g_m z + \beta_m \operatorname{sh} g_m z) \cos m \pi(\psi + 1/2), \quad (8)$$

$$E_0 = \sum_{m=0}^{\infty} [j(\alpha_m \operatorname{sh} g_m z + \beta_m \operatorname{ch} g_m z) i\xi_m \beta^{-1} \cos m \pi(\psi + 1/2) +$$

$$+ k(\alpha_m \operatorname{ch} g_m z + \beta_m \operatorname{sh} g_m z) i m \pi(2k\beta d)^{-1} \sin m \pi(\psi + 1/2)],$$

где α_m и β_m — неизвестные коэффициенты разложения.

Используем точные граничные условия при $z = h$, $z = -h$ и разложение $\exp[i(k + \pi n/l)y]$ в ряд по $\cos[m\pi(\psi + 1/2)]$ на интервале $-d \leq y \leq d$:

$$e^{ik_n\psi} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^n e^{im\pi/2} \cos m \pi(\psi + 1/2);$$

$$\gamma_m^n = \sin 1/2(k_n + m\pi)2(k_n + m\pi)^{-1} + (-1)^m \sin 1/2(k_n - m\pi) \times$$

$$\times 2(k_n - m\pi)^{-1}; \quad \gamma_0^n = \sin 1/2k_n 2k_n^{-1} \quad (m = 0), \quad (10)$$

и в ряд по $\cos[m\pi(\zeta + \zeta_0)/2\zeta_0]$ на интервале $d \leq y \leq 2l - d$:

$$e^{ik_n\psi} = e^{ikl} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m^n e^{im\pi/2} \cos[m\pi(\zeta + \zeta_0)/2\zeta_0];$$

$$\delta_m^n = (-1)^n [\sin[(k_n + m\pi/2\zeta_0)\zeta_0]/(k_n + m\pi/2\zeta_0)\zeta_0 +$$

$$+ (-1)^m \sin[(k_n - m\pi/2\zeta_0)\zeta_0]/(k_n - m\pi/2\zeta_0)\zeta_0], \quad (11)$$

$$\delta_0^n = (-1)^n \sin(k_n \zeta_0)/k_n \zeta_0 \quad (m = 0);$$

$$\zeta = \psi - l/2d, \quad \zeta_0 = 1/2(l/d - 1), \quad k_n = 2kd + 2\pi nd/l.$$

Это приведет к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{A}_n = A_n e^{qa}/\rho_0$:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n \gamma_m^n (\theta_n + i\xi_m \operatorname{th} 2g_m h) = -2\pi\beta\gamma_1^0 (\theta_0 - i\xi_m \operatorname{th} 2g_m h); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n \delta_m^n \theta_n = -2\pi\beta\delta_m^0 \theta_0. \end{cases} \quad (12)$$

Электромагнитное поле (4), (5) представляет собой суперпозицию распространяющихся и затухающих в направлении оси oz плоских волн. Таким образом, гармоники, которые описывают распространяющуюся часть поля, должны иметь вещественную постоянную распространения q_n , что имеет место при

$$\beta^2 - (1 + n\beta/x)^2 > 0. \quad (13)$$

Из (13) видно, что излучение для решетки в свободном пространстве возможно только для пространственных гармоник с отрицательным индексом. Выражения для полей (4), (5) позволяют установить простую связь между длиной волны излучения и направлением ее распространения:

$$\lambda = \frac{2l}{-n} \left(\frac{1}{\beta} - \cos \chi_n \right). \quad (14)$$

Определим среднее значение вектора Умова—Пойнтинга \mathcal{S} через единичную площадку произвольной плоскости $z = \text{const}$, причем $|z| > h$. Для этого достаточно найти его среднюю величину на участке $-1/2 < x < 1/2$, $-l < y < l$. В случае n -ой пространственной гармоники, для которой выполнено условие (13), вектор \mathcal{S} выражается следующим образом:

$$\mathcal{S}_n = \frac{c}{8\pi} [j\tau_n + k \sqrt{1 - \tau_n^2}] \rho_0^2 |\tilde{A}_n|^2 e^{-2qa}. \quad (15)$$

Амплитуда поля \tilde{A}_n определяется из (12).

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЧКА НАД РЕШЕТКОЙ ИЗ БРУСЬЕВ И ЛЕНТ

Для сравнения рассмотрим движение электронного потока с плотностью заряда (1) над решеткой из брусьев прямоугольного поперечного сечения и над ленточной дифракционной решеткой. Это тем более целесообразно, что в последнем случае удастся получить для коэффициентов Фурье поля простые приближенные аналитические выражения. Ниже приводятся только некоторые конечные результаты; подробное изложение дано соответственно в [6, 8].

1. При движении электронного потока над дифракционной решеткой из металлических брусьев прямоугольного поперечного сечения излучение наблюдается не только в верхнем, но и в нижнем полупространстве. В пространстве над решеткой излученное поле имеет вид

$$H_2 = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp \{-i[q_n(z+h) + (k + \pi n/l)y]\}; \quad (16)$$

$$E_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j\sqrt{1-\tau_n^2} + k\tau_n) B_n \exp \{-i[q_n(z+h) + (k + \pi n/l)y]\}. \quad (17)$$

Применяя обычные граничные условия при $z = h$ к (4), (5) и (8), (9) у при $z = -h$ к (16), (17) и (8), (9), получим следующие две системы линейных алгебраических уравнений, каждая из которых аналогична (12):

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n \gamma_m^n (\theta_n \text{th } g_m h + i\xi_m) = -2\pi\beta\gamma_m^0 (\theta_0 \text{th } g_m h - i\xi_m); \quad (18) \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n \delta_m^n \theta_n = -2\pi\beta\delta_m^0 \theta_0; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n \gamma_m^n (\theta_n + i\xi_m \operatorname{th} g_m h) = -2\pi\beta\gamma_m^0 (\theta_0 - i\xi_m \operatorname{th} g_m h); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n \delta_m^n \theta_n = -2\pi\beta\delta_m^0 \theta_0. \end{array} \right. \quad (19)$$

Совместное решение (18), (19) позволяет определить неизвестные коэффициенты поля A_n и B_n , которые связаны с \tilde{A}_n и \tilde{B}_n следующими соотношениями:

$$A_n = 1/2\rho_0(\tilde{A}_n + \tilde{B}_n)e^{-qa}, \quad B_n = 1/2\rho_0(\tilde{B}_n - \tilde{A}_n)e^{-qa}.$$

Системы, подобные (18), (19), рассматривались в [9]. Установлено, что они квазирегулярны и, следовательно, для получения численных результатов пригоден метод редукции. Однако исследование сходимости таких систем довольно затруднительно и обычно проводится численным методом. В нашем случае некоторые оценки можно получить путем сравнения решения систем уравнений (18), (19) в случае $h \rightarrow 0$ с решением задачи для бесконечно тонкой ленточной решетки. Последнее можно получить путем сведения граничной электродинамической задачи к задаче Римана—Гильберта [10].

При неограниченном увеличении толщины брусьев и уменьшении их ширины рассматриваемая решетка превращается в систему полубесконечных плоскостей, для которой в работе [11] получено также строгое решение задачи методом Винера—Хопфа.

2. При движении пучка над ленточной решеткой поля можно записать в виде (2)—(5), (16), (17). Подчинение их точным граничным условиям приводит к равенствам

$$-\beta Fe^{-qa} + A_0 = -B_0, \quad A_n = -B_n; \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp[i(k + \pi n/l)y] = 0 \quad (\text{щель}); \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sqrt{1 - \tau_n^2} \exp[i(k + \pi n/l)y] = -i\theta Fe^{-qa} e^{iky} \quad (\text{лента}). \end{array} \right. \quad (22)$$

Можно показать, что система уравнений (21), (22) представляет задачу Римана—Гильберта, решение которой получено в [10]; в нашем случае оно имеет вид бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2cP_c(u) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \frac{|j|}{j} \varepsilon_j V_c^j = G V_c^{\mu-1}; \\ cP_m(u) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \left(\frac{|j|}{j} \varepsilon_j V_m^j - \delta_m^j \right) = G V_m^{\mu-1} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{array} \right. \quad (23)$$

где $\eta = x/\beta = \mu + \zeta$, μ — целая часть, $|\zeta| < \frac{1}{2}$; $P_m(u)$ — полиномы Лежандра; $P_\zeta(u)$ — функции Лежандра; $u = \cos\left(\pi \frac{l-d}{l}\right)$;

$$j = \mu + n - 1; \quad x_j = \frac{A_n}{\rho_0} e^{qa}(\eta + n); \quad G = -2\pi x \sqrt{1 - \beta^2};$$

$$\varepsilon_j = 1 - \frac{|j| |j+1+\zeta|}{j(j+1+\zeta)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{(j+1+\zeta)^2}};$$

$$V_j^\zeta = \frac{\zeta}{\zeta+1+j} [P_\zeta(u)P_{j+1}(u) - P_{\zeta-1}(u)P_j(u)];$$

$$V_m^j = \frac{m^2+1}{2(m-j)} [P_m(u)P_{j+1}(u) - P_{m-1}(u)P_j(u)].$$

Полученная система уравнений (23) благодаря $\varepsilon_j \sim 0\left(\frac{1}{j^2}\right)$ при $|j| \gg 1$ имеет более быструю сходимость с ростом j, m по сравнению с (18), (19) и позволяет получить численные результаты с высокой степенью точности. На рис. 5б для сравнения в качестве примера приводятся результаты численного решения (18), (19) при $h \rightarrow 0$ и системы (23) высокого порядка.

Представляет интерес рассмотреть случай, когда излучается только одна пространственная гармоника с номером $j = -1$ (т. е. $n = -\mu$). Это будет иметь место для значений $x < 1/2$; излучение будет наблюдаться в интервалах

$$\frac{\mu\beta}{1+\beta} < x < \frac{\mu\beta}{1-\beta} \quad (\mu = 1, 2, \dots).$$

Выражение для амплитуды гармоники x_{-1} в этом случае имеет вид

$$x_{-1} = G \frac{\zeta}{\eta} \frac{P_\zeta(u)P_\mu(u) - P_{-\zeta}(u)P_{\mu-1}(u)}{P_\zeta(u) + P_{-\zeta}(u) - [P_\zeta(u) - P_{-\zeta}(u)]\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2 - x^2}}.$$

Если функции Лежандра разложить в ряд Тейлора по степеням индекса ζ и ограничиться линейным приближением по ζ :

$$P_\zeta(u) = P_0(u) + \zeta \left. \frac{\partial P_\nu(u)}{\partial \nu} \right|_{\nu=0} = 1 + \zeta \ln \frac{1+u}{2},$$

то выражение для амплитуды излучаемой гармоники поля $A_{-\mu}$ с произвольным номером $\mu < 1/2\beta$ будет иметь вид*

$$A_{-\mu} = x_{-1}\rho_0 e^{-qa} = \pi\rho_0\beta \sqrt{1 - \beta^2} e^{-qa} \left\{ P_\mu(u) - P_{\mu-1}(u) + \right. \\ \left. + \zeta \ln \frac{1+u}{2} [P_\mu(u) + P_{\mu-1}(u)] \right\} \left[1 - \sqrt{\zeta^2 - x^2} \ln \frac{1+u}{2} \right]^{-1}. \quad (24)$$

Очевидно, что точность формулы (24) увеличивается при $\zeta \rightarrow 0$, т. е. наи-

* Выражение (24) является, как видно, обобщением полученной в [6] формулы для случая $\mu=1$.

большая точность соответствует излучению перпендикулярно к плоскости решетки и уменьшается по мере отклонения луча от нормали.

3. Отметим некоторые особенности излучения Смита—Парселла, обусловленные геометрической конфигурацией решетки.

Как видно из соотношений (20), возникающее при движении электронного потока над ленточной решеткой электромагнитное излучение всегда симметрично относительно плоскости решетки. Если же ленты решетки обладают конечной толщиной, то из решения системы уравнений (18), (19) следует, что эта симметрия отсутствует [8]. В последнем случае зависимости амплитуд дифракционных гармоник качественно аналогичны представленным на рис. 1—5б для случая отражательной дифракционной решетки. Количественно излучаемая от решетки из брусьев вверх или вниз мощность в соответствующих точках приблизительно в 4 раза меньше, чем для отражательной решетки, а резонансы наблюдаются при толщине брусьев, кратной $\sim 0,5\lambda$.

Если исследуемое излучение рассматривать как результат дифракции неоднородной плоской волны (2), (3) на решетке соответствующей конфигурации, то резонансное поведение амплитуд дифракционных гармоник может быть объяснено и частично предсказано с точки зрения известных аномалий Вуда. Отчетливо наблюдаются, в частности, резкие изменения амплитуды дифракционной гармоники в момент возникновения или исчезновения других распространяющихся дифракционных гармоник (см., например, графики работы [6]), а также в случае, когда время прохождения пучком одного периода решетки кратно периоду электромагнитных колебаний.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Численные результаты по расчету энергетических характеристик излучения производятся здесь для пространственной гармоник с индексом $n = -1$ в диапазонах скоростей пучка $0,09 < \beta < 0,11$ и $0,20 < \beta < 0,33$. Выражения для мощности излучения с единичной площадки в этом случае имеет вид

$$S = s \frac{c}{8\pi} \rho_0^2 S e^{-2qa}, \quad (25)$$

где $S = |A_{-1}|^2$, а $s = j \cos \chi_{-1} + k \sin \chi_{-1}$ единичный вектор, характеризующий направление излучения. На практике более удобно пользоваться формулой (25) в следующем виде:

$$S = s I_0^2 R \text{ (вт} \cdot \text{см}^{-2}\text{)}. \quad (26)$$

Здесь I_0 ($a \cdot \text{см}^{-1}$)—величина тока на единицу ширины пучка, $R \simeq \simeq \frac{1,19}{\beta^2} S e^{-2qa}$ (ом)—сопротивление излучения.

Не представляет труда обобщить результаты и для пучка конечной толщины (влияние пространственного заряда пучка не учитывается). Для известного распределения плотности тока $J(z)$ излучаемая мощность (25) запишется следующим образом:

$$S = s \frac{1,19}{\beta^2} S \left[\int_a^{a+\Delta} J(z) e^{-qz} dz \right]^2, \quad (27)$$

где a —нижняя граница пучка, а Δ —его толщина. В частном случае равномерного распределения плотности тока по толщине пучка формула (27) имеет простой вид:

$$s = SI_0^2 R \frac{e^{-2qa}}{q^2 \Delta^2} (1 - e^{-qa})^2. \quad (28)$$

Очевидно, что для получения максимальной мощности излучения толщина пучка Δ и расстояние a между пучком и решеткой должны быть минимальными.

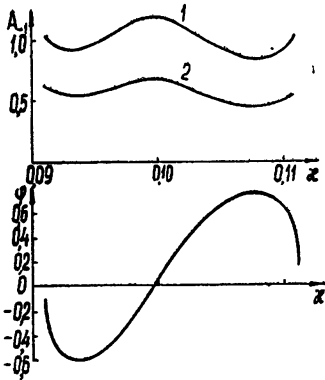


Рис. 2. Зависимость амплитуды $|A_{-1}|$ и фазы φ от x для $\beta = 0,1$, $d/l = 0,1$, $h/l = 2,4$, $a/2l = 0,01$ (кривая 1) и $0,1$ (кривая 2).

На рис. 2 приводится зависимость $A_{-1} = |A_{-1}| e^{i\varphi}$ от $x = 2l/\lambda$ для $\Delta \rightarrow 0$ и $a/2l = 0,01$ и $0,1$. Величина фазы φ не зависит от a , а амплитуда $|A_{-1}|$ экспоненциально убывает и при $a/2l = 0,1$ составляет $\sim 0,6|A_{-1}|_{\max}$.

Как видно из рис. 3а и 4а, а также из рис. 3б и 4б, излучаемая мощность существенно зависит от профиля решетки. Для рассмотренной нами идеально-проводящей отражательной дифракционной решетки оптимальная ширина щелей составляет $\sim (0,15 \div 0,25)$ периода, а глубина

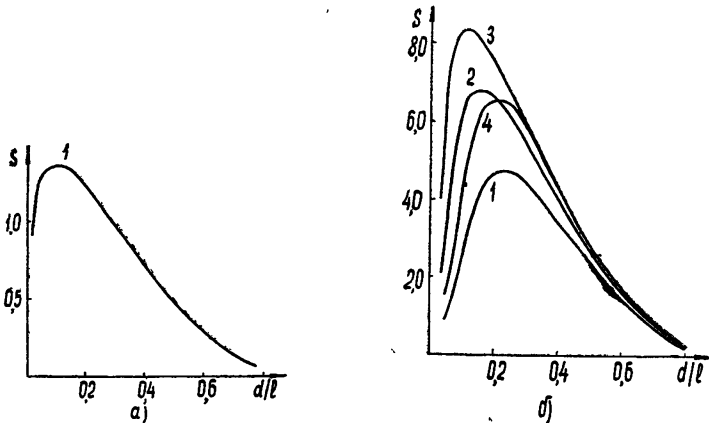


Рис. 3. Влияние ширины щелей на излучаемую мощность: а) при $x=0,1$, $\beta=0,1$, $h/l=2,4$, $a/2l=0,01$; б) при $x=0,25$, $\beta=0,25$ (нормальное излучение), $a/2l=0,01$ для различной глубины щели: 1 — $h/l=0,8$; 2 — $h/l=0,85$; 3 — $h/l=0,9$; 4 — $h/l=0,95$.

должна быть кратна $\sim 0,25\lambda$. На рис. 1 и 5а приводятся зависимости излучаемой мощности при оптимальной и неоптимальной глубине решетки. Эти же соображения относятся и к решетке из изолированных брусьев прямоугольного и поперечного сечения; в этом случае оптимальная глубина кратна $\sim 0,5\lambda$.

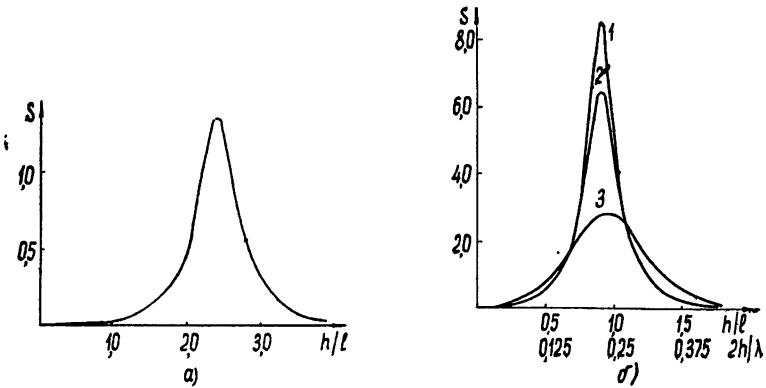


Рис. 4. Влияние глубины щели на излучаемую мощность: а) при $\alpha=0,1$, $\beta=0,1$, $d/l=0,2$, $a/2l=0,01$; б) при $\alpha=0,25$, $a/2l=0,01$:
 1— $\beta=0,25$, $d/l=0,2$; 2— $\beta=0,22$, $d/l=0,2$; 3— $\beta=0,25$, $d/l=0,5$.

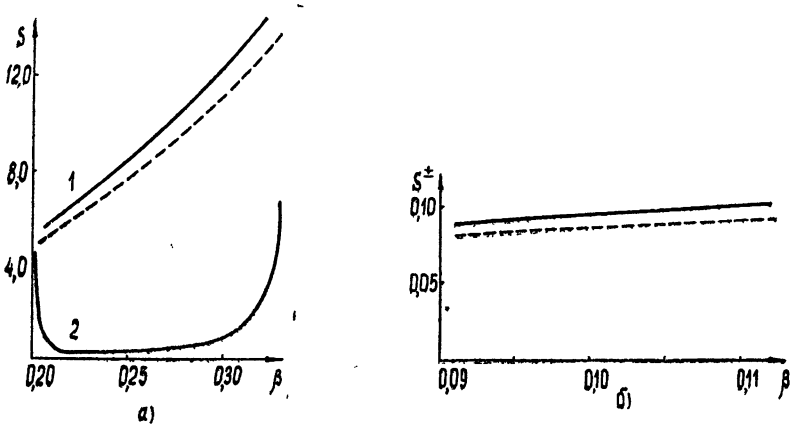


Рис. 5. Зависимость S от скорости пучка:

а) при $\alpha=0,25$, $d/l=0,2$:
 1— $h/l=0,9$; 2— $h/l=0,45$. Пунктирная кривая—зависимость $S(\beta)$ при тех же параметрах, что и для кривой 1, но система (12) более высокого порядка;

б) при $\alpha=0,1$, $d/l=0,5$, $h/l=10^{-4}$,
 $a/2l=0,01$
 сплошная линия — результаты расчета с помощью систем (18), (19); пунктир—системы (23) при $h=0$ и тех же α , d/l , $a/2l$.

Диаграммы направленности излучения при различных β приводятся на рис. 6. Максимальное излучение при выбранной глубине щели наблюдается соответственно под углами 1) $\chi_{-1}=0,45\pi$; 2) $\chi_{-1}=0,5\pi$; 3) $\chi_{-1}=0,55\pi$, а также при χ_{-1} , близких к 0 и π , когда гармоника появляется или исчезает.

Таким образом, на основании численных результатов, часть которых приведена на рис. 1—6, можно заключить следующее. Во-первых, при заданной величине тока электронный поток должен иметь возможно меньшую толщину (влияние пространственного заряда не учитывается) и пропускаться на минимальном удалении от решетки. Во-вторых, форма профиля дифракционной решетки оказывает существенное влияние на величину излучаемой мощности и диаграмму направленности.

В заключение следует отметить, что результаты для идеализированного монохроматического электронного потока (в принципе реализуемого [12]) можно обобщить на случай движущейся точечной частицы,

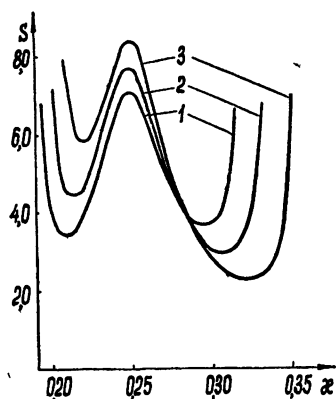


Рис. 6. Зависимость S от x для $h/l = 1,8$, $d/l = 0,2$ при различных скоростях пучка: 1— $\beta = 0,24$; 2— $\beta = 0,25$; 3— $\beta = 0,26$.

а также произвольной совокупности частиц. При этом полученные здесь результаты следует рассматривать как решение для отдельной компоненты интеграла Фурье.

Можно показать, что излучение немодулированного электронного потока некогерентно. Степень когерентности излучения может быть увеличена за счет модуляции пучка, для чего пригодны как внешние источники, так и собственное излучение электронного потока. В случае, когда модуляция пучка осуществляется внешними источниками, пригодно решение, полученное в настоящей работе. Если же пучок модулируется за счет воздействия собственного излучения, возникает необходимость решения задачи о самосогласованном поле, что выходит за пределы данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. J. Smith, E. M. Purcell, Phys. Rev., **92**, 1069 (1953).
2. Toraldo di Francia, Nuovo Cimento, **16**, 61 (1960).
3. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 3, 642 (1965).
4. Дж. Джелли, Черенковское излучение, ИЛ, М., 1960.
5. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Тбилиси, Рефераты докладов, Наука, М., 1964.
6. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника, **10**, 1892 (1965).
7. О. А. Третьяков, Радиотехника и электроника, **10**, 2009 (1965).
8. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопалов, ЖТФ, **36**, 34 (1966).
9. С. А. Масалов, Е. Н. Подольский, И. Е. Тарапов, II Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Горький, Рефераты докладов, М., 1962.
10. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, **32**, 381 (1962).
11. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, ДАН СССР, **156**, 770 (1964).
12. A. J. Fox, N. W. Smith, Proc. IEEE, **52**, 429 (1964).

Харьковский институт горного машиностроения,
автоматики и вычислительной техники

Поступила в редакцию
30 июня 1965 г.

TO THE THEORY OF SMITH-PARSELL'S EFFECT

O. A. Tretyakov, E. I. Chernyakov, V. P. Shestopalov

The theory is developed of electromagnetic wave radiation by a modulated electron flow moving above the reflected-diffraction grating. The frequency and energy characteristics of radiation have been obtained. The optimal parameters of the flow and grating have been determined for the case when the influence of the spatial charge and back reaction of the radiation upon the flow is neglected. For comparison the results are given of the problem solution on radiation in the case when the electron flow is moving above the grating consisted of metallic bars with rectangular cross-section and strip diffraction one.

УДК 621.385.69

АНАЛИЗ ФОКУСИРОВКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

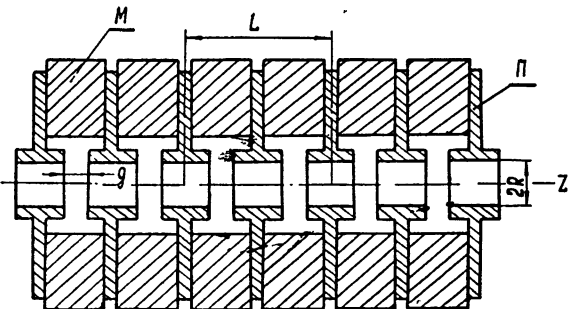
И. А. Данович

Проведен анализ периодической магнитной фокусировки электронных пучков с учетом реального распределения фокусирующих полей. Исследовано влияние несинусоидальности магнитных полей и радиальных изменений величины индукции на фокусировку и устойчивость электронных потоков. Получены соотношения, позволяющие определить параметры системы, обеспечивающие оптимальные режимы фокусировки пучка. Эти соотношения могут быть использованы также для расчета траекторий в коротких магнитных линзах и переходных областях фокусирующих устройств.

Теоретическому исследованию периодической магнитной фокусировки электронных пучков посвящен ряд работ, авторы которых преимущественно ограничивались рассмотрением фокусирующих полей с чисто синусоидальным законом распределения индукции вдоль оси магнитной системы [1-4]. Электронный пучок предполагался при этом параксиальным и радиальные изменения магнитной индукции не учитывались. Однако практически [5], и особенно при фокусировке интенсивных электронных пучков, когда требуется малая величина периода магнитной системы, изменения индукции по радиусу пучка могут быть весьма существенными. Необходимость создания при этом достаточно сильных магнитных полей приводит к необходимости помещения полюсных наконечников фокусирующей системы в непосредственной близости от границы электронного пучка. Закон осевого распределения магнитной индукции в этом случае может значительно отличаться от синусоидального, принимая, в зависимости от соотношения между периодом фокусирующей системы и величиной магнитного зазора g (см. рис. 1), вид, показанный на рис. 2.

Рис. 1. Эскиз фокусирующей системы:

М—постоянные магниты, П—полюсные наконечники.



Попытка учесть изменение индукции по радиусу пучка была сделана в [6]. Однако эта работа, вследствие особенностей примененного метода анализа, не позволяет исследовать вопросы устойчивости фокусировки и рассматривать поведение пучков в неоптимальных режимах. Следует также отметить, что вследствие пренебрежения в [6] членом

уравнения, появляющимся при частично экранированном катоде, оказались незамеченными некоторые специфические особенности фокусировки при частичной экранировке катода, а полученные расчетные соотношения являются неточными.

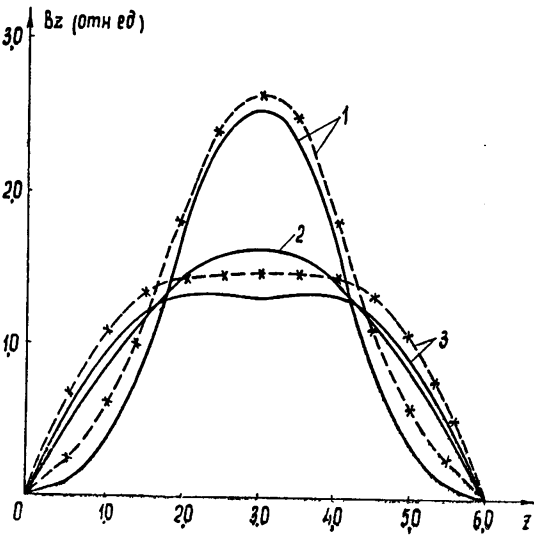


Рис. 2. Осевое распределение индукции магнитного поля B_z ;

1— $\pi g/L=0,45$, $\pi R/L=0,375$, 2— $\pi g/L=1$, $\pi R/L=0,375$, 3— $\pi g/L=1,3$, $\pi R/L=0,375$. Крестиками отмечены экспериментальные данные.

Исследованию устойчивости электронных пучков в несинусоидальных магнитных полях (без учета радиальных изменений индукции) посвящена работа [7]. В этой работе устойчивость фокусировки определена для случая пренебрежимо малой величины пространственного заряда, а аналитические решения имеют частный характер.

Ниже будут получены более общие соотношения, применимые для анализа фокусировки и устойчивости пучков в несинусоидальных магнитных полях с учетом радиального распределения индукции и конечной величины пространственного заряда.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ

При анализе фокусировки будем исходить из предположения ламинарности электронного потока, что позволяет ограничиться рассмотрением движения крайнего электрона пучка. Условия, при которых принятое допущение справедливо, определены ниже.

При выводе уравнения используется цилиндрическая система координат r, θ, z . Ось z направлена по оси фокусирующей системы. Значения коэффициентов приводятся в системе единиц МКСА.

Дифференциальное уравнение движения электрона в аксиально симметричных электрическом и магнитном полях имеет вид [8]

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\eta \frac{dV}{dr} + \eta r \dot{\theta} B(z, r), \quad (1)$$

где V — распределение потенциала в фокусирующей системе, $B(z, r)$ — распределение индукции магнитного поля, η — отношение заряда электрона к массе, точками обозначено дифференцирование по времени.

Распределение магнитного поля в пролетном канале фокусирующей системы при отсутствии насыщения полюсных наконечников определяется выражением [1]

$$B(z, r) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4B_g \sin(n\pi g/L)}{J_0(2n\pi R/L)n\pi} I_0\left(\frac{2n\pi}{L}r\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}z\right), \quad (2)$$

где B_g — величина индукции в воздушном зазоре между полюсными наконечниками, $I_0(2n\pi r/L)$ — модифицированная функция Бесселя, остальные обозначения понятны из рис. 1.

Как показывают расчеты, реальное распределение магнитного поля в большинстве практических случаев можно с достаточной точностью аппроксимировать двумя первыми членами ряда (2). После разложения входящей в (2) функции Бесселя в степенной ряд и пренебрежения членами со степенью выше второй при $n = 1$ и выше третьей при $n = 3$ получим

$$B(r, y) = B_{z1} f_1. \quad (3)$$

Здесь $f_1 = (1 + \sigma \rho^2) \cos(2y) + a(1 + 9\sigma \rho^2 + 20\sigma^2 \rho^4) \cos(6y)$, $\sigma = (\pi r_0/L)^2$ — параметр, определяющий величину радиального изменения индукции (r_0 — заданный максимальный радиус пучка в периодической системе), $a = B_{z3}/B_{z1}$ — параметр, характеризующий несинусоидальность магнитного поля, B_{z1} и B_{z3} — амплитудные коэффициенты первой и третьей гармоник на оси системы, определяемые из (2) при $r = 0$, $y = \pi z/L$, $\rho = r/r_0$. На рис. 2 пунктиром показано рассчитанное с помощью (3) распределение магнитного поля для одной из конкретных систем, достаточно хорошо совпадающее с экспериментальным.

Величина угловой скорости, входящей в (1), определяется теоремой Буша [9] и с учетом (3) равна

$$\dot{\theta} = -\frac{\eta B_{z1}}{2} \left[f_2 - \frac{B_{zK}}{B_{z1}} \left(\frac{r_K}{r_0} \right)^2 \frac{1}{\rho^2} \right], \quad (4)$$

где

$$f_2 = \left(1 + \frac{\sigma}{2} \rho^2 \right) \cos(2y) + a \left(1 + \frac{9}{2} \sigma \rho^2 + \frac{20}{3} \sigma^2 \rho^4 \right) \cos(6y),$$

B_{zK} — значение индукции магнитного поля на катоде, r_K — радиус катода.

Переходя в (1) к безразмерным переменным ρ , y после подстановки (3), (4) и величины dV/dr , получим

$$\frac{d^2 \rho}{dy^2} = \frac{4\beta}{\rho} + 16\alpha \left[\rho \left(\frac{f_2^2}{2} - f_1 f_2 \right) + \frac{V\bar{K}(f_1 - f_2)}{\rho} + \frac{K}{2\rho^3} \right], \quad (5)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\lambda_p} \right)^2, \quad \alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{L}{\lambda_p} \right)^2 \left(\frac{B_{z1}}{B_b} \right)^2, \quad K = \left(\frac{B_{zK}}{B_{z1}} \right)^2 \left(\frac{r_K}{r_0} \right)^4,$$

$$\lambda_p^2 = \frac{16\pi^2 U_0}{\eta B_b^2} = 1,303 \cdot 10^{-3} \frac{r_0^2}{\Pi_n}, \quad B_b^2 = \frac{V\sqrt{2} I}{\pi \epsilon_0 \gamma^{3/2} U^{1/2} r_0^2} = 6,89 \cdot 10^{-7} \times \\ \times \frac{\Pi_n U}{r_0^2}, \quad \Pi_n = \frac{I}{U^{3/2}},$$

U — потенциал на оси пучка, I — ток пучка.

2. ВЛИЯНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ИНДУКЦИИ НА ФОКУСИРОВКУ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКОВ

Этот вопрос представляет самостоятельный интерес, так как в целом ряде фокусирующих систем, диаметр пролетных каналов которых существенно больше диаметра электронного пучка, закон осевого распределения индукции магнитного поля может быть весьма близок к синусоидальному при одновременном наличии значительных радиальных изменений величины индукции.

Ограничиваясь случаем малых пульсаций пучка ($\rho = 1 + \delta$, $\delta \ll 1$),

уравнение (5) может быть линеаризовано и приведено к обычной форме записи неоднородного уравнения Хилла:

$$\frac{d^2\delta}{dy^2} + [\theta_0 + 2\theta_2 \cos(2y) + 2\theta_4 \cos(4y)] \delta = \theta'_0 - \theta'_2 \cos(2y) - \theta'_4 \cos(4y). \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 4\beta + 4\alpha(1 + 6\sigma + 3,75\sigma^2 + 6K), \\ 2\theta_2 &= \theta'_2 = -8\alpha\sqrt{K}\sigma, \quad 2\theta_4 = 4\alpha(1 + 6\sigma + 3,75\sigma^2), \\ \theta'_0 &= 4\beta - 4\alpha(1 + 2\sigma + 0,75\sigma^2 - 2K), \\ \theta'_4 &= 4\alpha(1 + 2\sigma + 0,75\sigma^2). \end{aligned}$$

Как показало численное интегрирование исходного нелинейного уравнения (5) на электронной вычислительной машине [11], при величине пульсаций $\delta = 0,2 \div 0,25$ результаты, полученные из решения линеаризованного уравнения, практически полностью совпадают с результатами численных расчетов.

В зависимости от соотношений между коэффициентами $\theta_0, \theta_2, \theta_4$ уравнение (6) может иметь устойчивое либо неустойчивое решения, определяемые однородной частью (6). Характер решения может быть определен при помощи диаграммы устойчивости для уравнений Хилла с двумя периодическими коэффициентами [10]. Как следует из [10], границы первой неустойчивой зоны при $\theta_0 > 0$ определяются величинами параметров θ_0, θ_2 и весьма мало зависят от величины θ_4 , что дает возможность записать условие существования устойчивых решений (6) для первой зоны в виде

$$0 < \theta_0 < 1 - |\theta_2|. \quad (7)$$

Вторая устойчивая область фокусировки (при $\theta_2 \ll \theta_4$, что всегда выполняется) имеет место при

$$1 + |\theta_2| < \theta_0 < 4 - |\theta_4|. \quad (8)$$

В более высоких областях устойчивости пульсации пучка имеют значительную величину и уравнение (6) не может быть использовано для анализа фокусировки.

Решение (6) проводилось методом вариации произвольных постоянных при использовании приближенного решения однородной части уравнения Хилла [9]. При введении пучка в нуль индукции периодического поля ($y_{вх} = \pi/4$) с начальными условиями $\delta = \delta_0, \delta' = \delta'_0$ и для коэффициентов, соответствующих зонам устойчивости, решение (6) запишется в виде

$$\begin{aligned} \delta(y) &= \left(\frac{\delta'_0}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{2\theta'_2}{(\theta_0 - 4)\sqrt{\theta_0}} \right) \sin \left[\sqrt{\theta_0} \left(y - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \frac{\theta'_0}{\theta_0} + \left(\delta_0 - \right. \\ &\left. - \frac{\theta'_0}{\theta_0} - \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16} \right) \cos \left[\sqrt{\theta_0} \left(y - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \frac{\theta'_2}{\theta_0 - 4} \cos(2y) - \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16} \cos(4y). \end{aligned} \quad (9)$$

Как следует из (9), пульсации электронного пучка могут быть существенно уменьшены при выборе входных условий таким образом, чтобы

* Штрихом обозначено дифференцирование по координате y .

в уравнении траектории первый и третий члены обратились в нуль, т. е. при

$$\delta_0 = \frac{\theta'_0}{\theta_0} + \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16}, \quad \delta'_0 = \frac{2\theta'_2}{\theta_0 - 4}$$

или

$$r_{\text{вх}} = r_0 \left(1 + \frac{\theta'_0}{\theta_0} + \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16} \right), \quad (10)$$

$$\alpha_{\text{вх}} = \arctg \left[\sqrt{\sigma} \frac{2\theta'_2}{\theta_0 - 4} \right]. \quad (11)$$

Используя оставшиеся члены, определим величину индукции периодического поля (т. е. величину параметра α) из условия, чтобы максимальный радиус пучка в процессе фокусировки был равен заданному значению r_0 :

$$r_{\text{max}} = r_0 (1 + \delta_{\text{max}}) = r_0 \left(1 + \frac{\theta'_0}{\theta_0} + \left| \frac{\theta'_2}{\theta_0 - 4} \right| + \left| \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16} \right| \right) = r_0$$

(величины β , σ , K считаются известными). Отсюда получаем

$$B_{z1} = \sqrt{\frac{2\alpha_{\text{opt}}}{\beta}} B_b, \quad (12)$$

где

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{\beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 4\varepsilon_3 \pm \sqrt{[\beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 4\varepsilon_3]^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2(4\beta - \beta^2)}}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_1 = 1 + 6\sigma + 3,75\sigma^2 + 6K, \quad \varepsilon_2 = 2 + 4\sigma + 1,5\sigma^2 - 2K + 8\sqrt{K}\sigma,$$

$$\varepsilon_3 = 1 + 2\sigma + 0,75\sigma^2 - 2K.$$

Условия (10)–(12) являются условиями оптимальной фокусировки электронного пучка с заданными параметрами. Невыполнение соотношений (10), (11) приводит к возникновению дополнительных пульсаций границы пучка, при нарушении (12) радиус пучка в процессе фокусировки будет больше (при $\alpha < \alpha_{\text{opt}}$) либо меньше ($\alpha > \alpha_{\text{opt}}$) заданной величины.

На рис. 3 представлен рассчитанный согласно (13) график, показывающий зависимость соотношений между параметрами α и β от величины σ при $K = 0$ (катод экранирован от магнитного поля), а также приведены значения получаемых в оптимальном режиме пульсаций. Из рисунка следует, что наличие радиальных изменений магнитных полей приводит к необходимости уменьшения требуемой для фокусировки величины индукции на оси системы. Пульсации пучка по сравнению с идеализированным случаем $\sigma = 0$ несколько увеличиваются. Штриховкой на рис. 3 отмечена граница, за пределами которой электронный пучок становится неустойчивым; эта граница рассчитана при помощи соотношений (7)–(8) для $\theta_2 = 0$. Как видно из рисунка, наличие радиальных изменений индукции может заметно ограничить область параметров пучка, в которых возможна устойчивая фокусировка.

При частично экранированном катоде наличие радиальных изменений магнитных полей также приводит к уменьшению требуемой величины индукции и к еще большему сужению области параметров элек-

тронного пучка, соответствующих устойчивой фокусировке (рис. 4). Особенностью этого режима, не отмеченной в [6], является возникновение дополнительной зоны неустойчивости, связанной с наличием радиальных

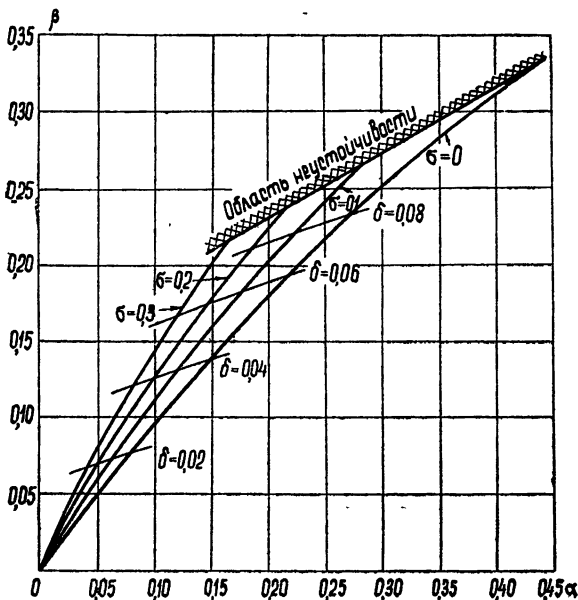


Рис. 3. Зависимость соотношений между параметрами α и β от величины σ для экранированного катода при $a=0$.

изменений величины индукции ($\theta_z \neq 0$). Несмотря на малую протяженность неустойчивой зоны (отмеченной крестиками на рис. 4), ее наличие следует учитывать при работе с параметрами системы и пучка, близкими к границе неустойчивости, так как сравнительно небольшие отклонения от оптимального режима могут привести к значительному ухудшению прохождения тока.

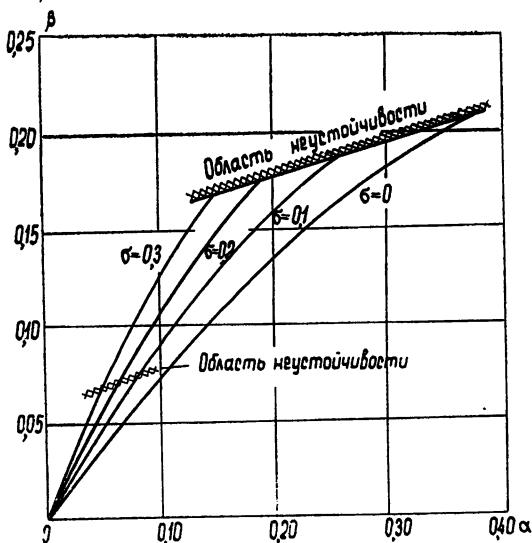


Рис. 4. Зависимость соотношений между параметрами α и β от величины σ для частично экранированного катода ($K=0.1$, $a=0$).

3. ВЛИЯНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНОСТИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ФОКУСИРОВКУ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКОВ

В связи с тем, что получение несинусоидальных магнитных полей обычно связано с фокусировкой интенсивных электронных пучков (когда основным вопросом является получение достаточно сильных магнитных полей), режимы фокусировки с полем на катоде в данном случае едва ли представляют практический интерес и поэтому дальнейший анализ будет производиться для экранированных катодов ($K = 0$).

После перехода в (5) к независимой переменной $\xi = 2y$ линеаризованное дифференциальное уравнение траектории принимает вид

$$\frac{d^2\delta}{d\xi^2} + [\theta_0 + 2\theta_2 \cos(2\xi) + 2\theta_4 \cos(4\xi)] \delta = \theta'_0 - \theta'_2 \cos(2\xi) - \theta'_4 \cos(4\xi), \quad (14)$$

где

$$\theta_0 = \beta + \alpha [1 + 6\sigma + 3,75\sigma^2 + a^2(1 + 54\sigma + 500\sigma^2 + 1680\sigma^3)],$$

$$\theta_2 = \frac{\alpha}{2} [1 + 6\sigma + 3,75\sigma^2 + a(2 + 60\sigma + 270\sigma^2 + 190\sigma^3)],$$

$$\theta_4 = \frac{\alpha a}{2} (2 + 60\sigma + 270\sigma^2 + 190\sigma^3), \quad \theta'_4 = \alpha a (2 + 20\sigma + 54\sigma^2),$$

$$\theta'_0 = \beta - \alpha [1 + 2\sigma + 0,75\sigma^2 + a^2(1 + 18\sigma + 100\sigma^2 + 240\sigma^3)],$$

$$\theta'_2 = \alpha [1 + 2\sigma + 0,75\sigma^2 + a(2 + 20\sigma + 54\sigma^2)].$$

Аналогично предыдущему условия обеспечения устойчивой фокусировки пучка записываются в виде $0 < \theta_0 < 1 - |\theta_2|$ — для первой зоны устойчивости и $1 + |\theta_2| < \theta_0 < 4 - |\theta_4|$ — для второй зоны устойчивости. Решение уравнения (14) в устойчивых областях для случая, когда пучок вводится в нуль индукции периодического поля ($\xi_{\text{вх}} = \pi/2$) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta(\xi) = & \frac{\delta'_0}{\sqrt{\theta_0}} \sin \left[\sqrt{\theta_0} \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{\theta'_0}{\theta_0} + \left(\delta_0 - \frac{\theta'_0}{\theta_0} - \frac{\theta'_2}{\theta_0 - 4} - \right. \\ & \left. - \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16} \right) \cos \left[\sqrt{\theta_0} \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right) \right] - \frac{\theta'_2}{\theta_0 - 4} \cos(2\xi) - \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16} \cos(4\xi). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (15), определим, аналогично предыдущему, оптимальные условия фокусировки электронного пучка. В итоге получим

$$\alpha_{\text{вх}} = 0, \quad r_{\text{вх}} = r_0 \left[1 + \frac{\theta'_0}{\theta_0} + \frac{\theta'_2}{\theta_0 - 4} + \frac{\theta'_4}{\theta_0 - 16} \right], \quad B_{z1} = \sqrt{\frac{2\alpha'_{\text{opt}}}{\beta}} B_b,$$

где

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{4\epsilon_2 - \beta\epsilon_3 \mp \sqrt{(4\epsilon_2 - \beta\epsilon_3)^2 - 4\epsilon_1\epsilon_4(4\beta - \beta^2)}}{2\epsilon_1\epsilon_4}, \quad (16)$$

$$\epsilon_1 = 1 + 6\sigma + 3,75\sigma^2 + a^2(1 + 54\sigma + 500\sigma^2 + 1680\sigma^3),$$

$$\epsilon_2 = 1 + 2\sigma + 0,75\sigma^2 + a^2(1 + 18\sigma + 100\sigma^2 + 240\sigma^3),$$

$$\epsilon_3 = 1 - 2\sigma - 2,25\sigma^2 + 2,5a(1 + 10\sigma + 27\sigma^2) - a^2(36\sigma + 400\sigma^2 + 1440\sigma^3),$$

$$\epsilon_4 = 2 + 4\sigma + 1,5\sigma^2 + 2a(1 + 10\sigma + 27\sigma^2) + a^2(1 + 18\sigma + 100\sigma^2 + 240\sigma^3).$$

Расчеты, проведенные с помощью уравнения (16), показали, что основной причиной изменения условий оптимальной фокусировки яв-

ляется наличие радиальных изменений величины индукции периодического поля. Влияние несинусоидальности магнитных полей на оптимальные соотношения между параметрами α и β при $\sigma=0$ оказывается сравнительно слабым и практически может не учитываться до значений $\alpha \leq 0,2 \div 0,3$ (рис. 5, 6).

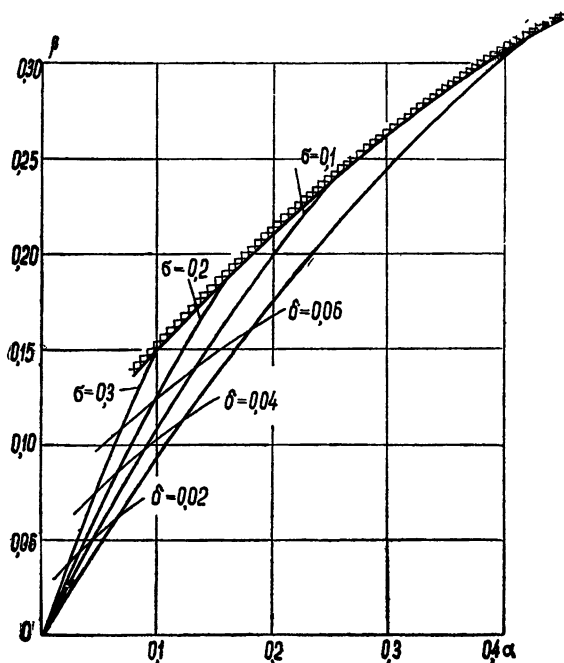


Рис. 5. Зависимость соотношений между параметрами α и β от величины σ при $a = 0,1$ ($K = 0$).

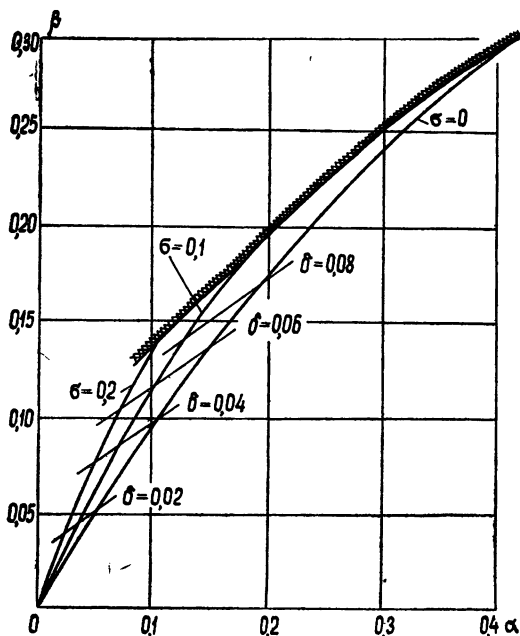


Рис. 6. Зависимость соотношений между параметрами α и β от величины σ при $a = 0,2$ ($K = 0$).

Гораздо более существенное влияние оказывает несинусоидальность магнитных полей на устойчивость фокусировки и величину пульсаций пучка. При положительных a , соответствующих «обострению» кривой распределения индукции (см. рис. 2, 1), область параметров пучка, соответствующая устойчивой фокусировке и отмеченная на рис. 5, 6 штриховкой, значительно сокращается, приводя, в частности, к уменьшению максимально допустимой плотности пространственного заряда в пучке. При отрицательных a (рис. 2, 3) область устойчивой фокусировки расширяется при одновременном сужении первой зоны неустойчивости (рис. 7), определяемой соотношением

$$1 - |\theta_2| \leq \theta_0 \leq 1 + |\theta_2|.$$

Интересно отметить, что в частном случае, который может быть реализован в некоторых магнитных системах, при

$$a = - \frac{.1 + 6\sigma + 3,75\sigma^2}{2 + 60\sigma + 270\sigma^2 + 190\sigma^3}$$

(т. е. при $\theta_2 = 0$), первая зона неустойчивости исчезает и фокусировка оказывается возможной в значительно более широком интервале изменения параметров пучка.

Волнистость электронного пучка уменьшается при отрицательных a и увеличивается при положительных a . Кривые, соответствующие фиксированным значениям пульсаций $\delta = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$, приведены на рис. 5—7.

Следует отметить, что при проектировании периодических систем обычно имеется довольно большая свобода в выборе величины магнитного зазора g , определяющей знак и величину параметра a . В тех случаях, когда параметры a и β в процессе фокусировки изменяются незначительно и в оптимальном режиме лежат далеко от области неустойчивости, имеется возможность выбора величины g , соответствующей оптимальной (с точки зрения получения максимальной величины индукции на оси магнитной системы). Однако в ряде других случаев может оказаться более целесообразным увеличение зазора до таких значений, при которых $a \leq 0$ и фокусировка окажется возможной в более широком интервале изменения параметров электронного пучка (например, скорости электронов), а волнистость границы потока существенно уменьшится.

В заключение остановимся на вопросе, связанном с принятым при выводе исходного уравнения предположением о ламинарности электронного потока. Очевидно, что это допущение будет справедливым в том

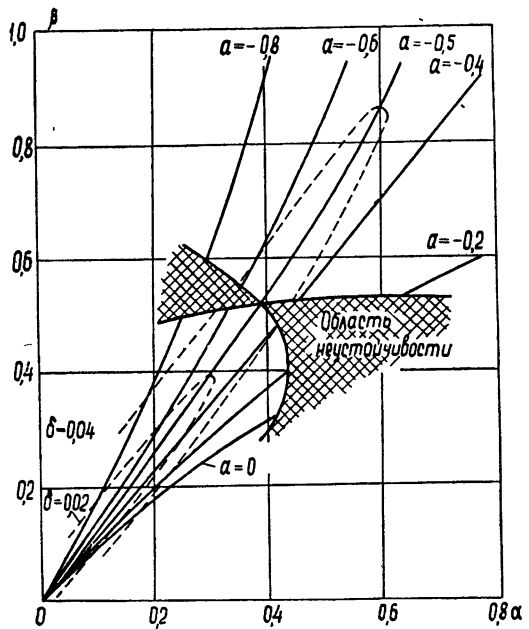


Рис. 7. Зависимость соотношений между параметрами a и β от величины σ при $\sigma = K = 0$.

случае, если условия оптимальной фокусировки выполняются для всех электронов поперечного сечения пучка и их траектории будут подобными. Полученные выше соотношения несколько громоздки и неудобны для рассмотрения этого вопроса; поэтому мы найдем более простые соотношения, основываясь на следующих упрощениях. Так как пульсации пучка в оптимальном режиме имеют весьма малую величину, пренебрежем изменениями электрических и магнитных сил вследствие периодических отклонений радиальной координаты электрона от равновесной.

Определим изменение величины ρ' при прохождении электроном одной магнитной линзы интегрированием (5) от $y = -\pi/4$ до $y = 3\pi/4$ (принимая в левой части (5) $\rho = 1$):

$$\Delta\rho' = \rho' |_{3\pi/4} - \rho' |_{\pi/4} = \beta - \alpha [1 + 2\sigma + 0,75\sigma^2 + a^2(1 + 18\sigma + 100\sigma^2)].$$

Для согласования отдельных магнитных линз по всей длине системы необходимо выполнить условие $\Delta\rho' = 0$; условие согласования тогда принимает вид

$$B_b^2 = \frac{B_{z1}^2}{2} [1 + a^2 + \sigma(2 + 18a^2) + \sigma^2(0,75 + 100a^2)]. \quad (17)$$

Выражение (17) после преобразования его к виду

$$A \frac{\int_0^{r_0} j(r) 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{B_{z1}^2}{2} \left[x_1 + x_2 \left(\frac{r_0}{r_r} \right)^2 + x_3 \left(\frac{r_0}{r_r} \right)^4 \right], \quad (18)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon_0 \gamma_1^{3/2} U^{1/2}}, \quad x_1 = 1 + a^2, \quad x_2 = \sigma_r (2 + 18a^2), \\ x_3 = \sigma_r^2 (0,75 + 100a^2), \quad \sigma_r = (\pi r_r / L)^2,$$

r_r — радиальная координата крайнего электрона пучка, может рассматриваться как условие равновесия фокусирующих и дефокусирующих сил для любого электрона, находящегося на расстоянии r_0 от оси пучка.

Учитывая, что $A, B_{z1}, x_1 - x_3$ не зависят от радиальной координаты, нетрудно убедиться, что в общем случае (18) может выполняться для всех электронов лишь при определенном законе распределения плотности тока по сечению пучка, которое должно быть согласовано с распределением на входе в периодическую систему. В частном случае, когда $\sigma = 0$, для получения ламинарного потока плотность тока должна быть постоянной по сечению пучка. Для других случаев требуемый закон распределения плотности тока $j(r)$ может быть определен следующим образом. Пусть

$$j(r) = j_0 + j_1 \left(\frac{r}{r_r} \right) + j_2 \left(\frac{r}{r_r} \right)^2 + j_3 \left(\frac{r}{r_r} \right)^3 + j_4 \left(\frac{r}{r_r} \right)^4. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и накладывая дополнительное условие

$$\int_0^{r_r} j(r) 2\pi r dr = I,$$

определим величины коэффициентов ряда (19), удовлетворяющих условию баланса сил для всех электронов поперечного сечения пучка:

$$j_1 = j_3 = 0, \quad j_0 = j_{cp} \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad j_2 = j_0 \frac{2x_2}{x_1}, \quad j_4 = j_0 \frac{3x_3}{x_1},$$

где

$$j_{\text{ср}} = I/\pi r^2.$$

Расчеты показывают, что для обеспечения ламинарного пучка при наличии радиальных изменений индукции плотность тока должна уменьшаться к оси пучка.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. T. Mendel, C. F. Quate, W. H. Yocum, Proc. IRE, 42, 800 (1954).
2. K. K. N. Chang, Proc. IRE, 43, 62 (1955).
3. Дж. Мендель, Проблемы современной физики, 6, 163 (1956).
4. W. Kleen, K. Pöschl, Archiv der elektr. Übertrag., 9 295 (1955).
5. E. J. Nalos, F. K. Patton, J. Microwave, 5, 95 (1962).
6. C. C. Johnson, IRE Trans., ED-6, 409 (1959).
7. D. C. Buick, IRE Trans., ED-4, 44 (1957).
8. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
9. Н. В. Мак-Ланлан, Теория и приложение функции Матье, ИЛ, М., 1953.
10. K. Klotter, G. Kotowsky, Z. angew. Math. und Mechanik, 23, 149 (1943).
11. Л. В. Касаткин, И. А. Данович, Радиотехника и электроника, 9, 1475 (1965).

Киевский научно-исследовательский институт
радиотехнических проблем

Поступила в редакцию
9 апреля 1964 г.

FOCUSING AND STABILITY ANALYSIS OF INTENSIVE ELECTRON BEAMS IN PERIODIC MAGNETIC FIELDS

I. A. Danovich

The analysis has been made of periodic magnetic focusing of electron beams when a real distribution of focusing fields has been taken into account. The influence has been studied of magnetic field nonsinusoidality and radial changes of induction magnitude on electron beams focusing and stability. The relations have been derived, permitting to determine the system parameters providing the optimal regimes of beam focusing. These relations may be used for calculation of trajectories in short magnetic lenses and transient regions of focusing devices.

УДК 681.142 : 531.3

К ТЕОРИИ ДВУХМАССОВОЙ МОДЕЛИ ВИБРОУДАРНИКА

Л. В. Беспалова, В. С. Метрикин

Методом точечных отображений с использованием электронной вычислительной машины исследуется динамика виброударного механизма со специальной ударной массой.

В простейшей модели виброударника [1-4] вибратор и ударник представляют собой одну массу, ударяющуюся о неподвижный ограничитель. Ввиду наносимых ударов срок службы вибратора резко сокращается. Позднее [5, 6] был предложен ряд других конструкций вибромолота, в которых вибратор и ударник разделены между собой. В данной статье рассматривается динамика вибромолота со специальной ударной массой (рис. 1). Исследуемая модель представляет собой нелинейную неавтономную систему с двумя степенями свободы. Изучение динамики этой системы проводится методом точечных отображений [7-10].

В разделах 1 и 2 исследуется существование и устойчивость одноударных периодических движений с периодом, кратным периоду внешней силы. В разделе 3 по полученным формулам проведен расчет на электронной вычислительной машине для коэффициента восстановления ударной скорости $R = 0,6$. Оказалось, что в значительной части найденной ранее [5] области существования одноударного периодического движения это движение неустойчиво.

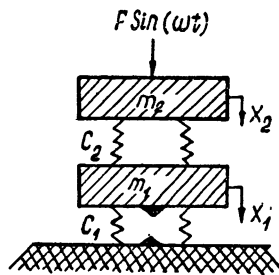


Рис. 1.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ. СВЕДЕНИЕ К ТОЧЕЧНОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ

Рассматриваемая ниже модель виброударника (рис. 1) состоит из двух масс, одна из которых является ударной массой (m_1), а другая является вибратором, создающим внешнюю периодическую силу $F \sin(\omega t)$. Массы соединены между собой пружинами с коэффициентами упругости C_2 . Ударная масса, кроме того, соединена также с ограничивающей плоскостью посредством пружин с коэффициентом упругости C_1 . Ограничитель колебаний считается неподвижным. Предполагается, что столкновения между массами отсутствуют. При соприкосновении ударника (m_1) с ограничителем происходит неупругий удар с коэффициентом восстановления скорости R . Таким образом, двухмассовая модель виброударника представляет собой существенно нелинейную, неавтономную систему с двумя степенями свободы.

В предположении, что диссипация энергии происходит только через удары (между ударами потери энергии нет), уравнения движения виброударника при $x_1 < x_0$ запишутся в виде

$$m_1 \ddot{x}_1 + C_2(x_1 - x_2) + C_1 x_1 = Q_1, \quad (1.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + C_2(x_2 - x_1) = F \sin(\omega t) + Q_2,$$

где Q_1 — вес ударной массы, Q_2 — постоянная сила, действующая на массу m_2 ($Q_2 \neq m_2 g$), x_1 и x_2 — смещения нижней и верхней масс, положительное направление которых указано стрелкой на рис. 1. За начало отсчета берется положение виброударника, при котором верхние и нижние пружины находятся в ненапряженном состоянии. Зазор между ударником и ограничителем обозначен через x_0 . Он может быть как положительным, так и отрицательным, смотря по тому, имеется ли в исходном состоянии некоторое расстояние между ударником и ограничителем колебаний, или ударник прижат к ограничителю, т. е. существует предварительное сжатие нижних пружин.

В момент соприкосновения ударника с ограничителем при $x_1 = x_0$ происходит неупругий удар, характеризуемый соотношением

$$\dot{x}_1 = -R \dot{x}_1^0, \quad (1.2)$$

где \dot{x}_1^0 и \dot{x}_1 — скорости непосредственно до удара и после удара.

Система уравнений (1.1) и (1.2) в безразмерных переменных:

$$\zeta_1 = \frac{m_1 \omega^2}{F} x_1 - \frac{Q_1 + Q_2}{F \lambda_1^2} \quad (\omega t = \tau),$$

$$\zeta_2 = \frac{m_2 \omega^2}{F} x_2 - \frac{x \lambda_2^2 Q_1 + (\lambda_1^2 + x \lambda_2^2) Q_2}{F \lambda_1^2 \lambda_2^2},$$

где $\lambda_1^2 = C_1/m_1 \omega^2$, $\lambda_2^2 = C_2/m_2 \omega^2$, $x = m_2/m_1$, принимает вид при $\zeta_1 < \zeta_0$

$$\ddot{\zeta}_1 + \lambda_2^2 (x \zeta_1 - \zeta_2) + \lambda_1^2 \zeta_1 = 0, \quad (1.3)$$

$$\ddot{\zeta}_2 + \lambda_2^2 (\zeta_2 - x \zeta_1) = \sin \tau,$$

при $\zeta_1 = \zeta_0$

$$\dot{\zeta}_1 = -R \dot{\zeta}_1^0. \quad (1.4)$$

Поведение системы характеризуют пять параметров λ_1 , λ_2 , x , ζ_0 , R , изменяющихся в пределах $-\infty < \zeta_0 < \infty$; $0 \leq R \leq 1$; $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, x \leq \infty$.

Фазовое пространство рассматриваемой двухмассовой модели виброударника пятимерно: $\zeta_1, \zeta_2, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \tau$. В соответствии с уравнениями (1.3) и (1.4) оно разбивается гиперплоскостью $\zeta_1 = \zeta_0$ на две части. $\zeta_1 < \zeta_0$ и $\zeta_1 > \zeta_0$. Все возможные движения системы лежат в области $\zeta_2 \leq \zeta_0$. В случае ударных движений системы изображающая точка каждый раз в момент удара будет попадать на гиперплоскость $\zeta_1 = \zeta_0$, и, следовательно, задача сводится к исследованию точечного преобразования гиперплоскости $\zeta_1 = \zeta_0$ самой в себя.

Интегрируя систему (1.3) с начальными данными $\zeta_1 = \zeta_0$, $\zeta_2 = \zeta_2^0$, $\dot{\zeta}_1 = -R \dot{\zeta}_1^0$, $\dot{\zeta}_2 = \dot{\zeta}_2^0$ при $\tau = \tau_0$ и полагая затем $\zeta_1 = \zeta_0$, получим точечное отображение S гиперплоскости $\zeta_1 = \zeta_0$ самой в себя, которое переводит точку $A_0(\tau_0, \zeta_0, \dot{\zeta}_2^0, \dot{\zeta}_1^0)$ этой плоскости в точку $A_1(\tau_1, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \zeta_2)$, также принадлежащую этой плоскости. S -преобразование определяется следующей системой четырех уравнений:

$$\zeta_0 = a \sin \tau_1 + (k_2 - k_1)^{-1} \{ k_1 [A_1 \eta_1^{-1} \sin [\eta_1(\tau_1 - \tau_0)] + + B_1 \cos [\eta_1(\tau_1 - \tau_0)]] - k_2 [A_2 \eta_2^{-1} \sin [\eta_2(\tau_1 - \tau_0)] + B_2 \cos [\eta_2(\tau_1 - \tau_0)]] \};$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= a \cos \tau_1 + (k_2 - k_1)^{-1} \{ k_1 [A_1 \cos [\eta_1 (\tau_1 - \tau_0)] - B_1 \eta_1 \sin [\eta_1 (\tau_1 - \tau_0)]] - \\ &\quad - k_2 [A_2 \cos [\eta_2 (\tau_1 - \tau_0)] - B_2 \eta_2 \sin [\eta_2 (\tau_1 - \tau_0)]] \}; \\ \zeta_2 &= b \sin \tau_1 + (k_2 - k_1)^{-1} \{ [\eta_1^{-1} A_1 \sin [\eta_1 (\tau_1 - \tau_0)] + B_1 \cos [\eta_1 (\tau_1 - \tau_0)]] - \\ &\quad - [\eta_1^{-1} A_2 \sin [\eta_2 (\tau_1 - \tau_0)] + B_2 \cos [\eta_2 (\tau_1 - \tau_0)]] \}; \\ \zeta_2 &= b \cos \tau_1 + (k_2 - k_1)^{-1} \{ [A_1 \cos [\eta_1 (\tau_1 - \tau_0)] - B_1 \eta_1 \sin [\eta_1 (\tau_1 - \tau_0)]] - \\ &\quad - [A_2 \cos [\eta_2 (\tau_1 - \tau_0)] - B_2 \eta_2 \sin [\eta_2 (\tau_1 - \tau_0)]] \}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$A_1 = R \zeta_0 + k_2 \zeta_2^0 + (a - bk_2) \cos \tau_0,$$

$$B_1 = -\zeta_0 + k_2 \zeta_2^0 + (a - bk_2) \sin \tau_0,$$

A_2 и B_2 получаются соответственно из A_1 и B_1 заменой в них $k_1 = (\lambda_2^2 - \eta_1^2) / \kappa \lambda_2^2$ на $k_2 = (\lambda_2^2 - \eta_2^2) / \kappa \lambda_2^2$; $a = \lambda_2^2 / \Delta$ и $b = (\lambda_1^2 + \kappa \lambda_2^2 - 1) / \Delta$ — амплитуды вынужденных колебаний ударника и вибратора соответственно; здесь $\Delta = (1 - \eta_1^2)(1 - \eta_2^2)$, а η_1^2 и η_2^2 являются корнями уравнения частот

$$\eta^4 - [\lambda_1^2 + \lambda_2^2(1 + \kappa)] \eta^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 = 0. \quad (1.6)$$

В дальнейшем за η_1 условимся принимать больший корень; тогда всегда $k_2 - k_1 > 0$. Учитывая (1.6), Δ можно записать также в виде

$$\Delta = 1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 - [\lambda_1^2 + \lambda_2^2(1 + \kappa)]. \quad (1.7)$$

Первое уравнение системы (1.5) служит для определения момента следующего удара. Из всех корней τ_1 этого уравнения надо брать наименьший корень, удовлетворяющий условию $\tau_1 > \tau_0$. Три других уравнения системы (1.5) определяют положение и скорость вибратора в момент удара и скорость ударной массы.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Периодические движения ударной массы можно, как и в случае одномассовой модели вибромолота [4], характеризовать двумя числами m и n , где m — число ударов ударника за период движения, а n — кратность периода T периоду вынуждающей силы: $T = 2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Отыскание периодического движения сводится к отысканию неподвижной точки точечного преобразования S при одноударном движении и S^m -преобразования (m -раз повторенного S -преобразования) при m -ударном движении.

Полагая в (1.5) $\tau_1 - \tau_0 = 2\pi n$, $\zeta_1 = \zeta_0$, $\zeta_2 = \zeta_2^0$, $\zeta_2 = \zeta_2^0$, получим систему уравнений для нахождения неподвижной точки $A_0(\tau_0, \zeta_0, \zeta_2^0, \zeta_2^0)$ S -преобразования. Разрешая ее при любом целом n , получаем следующую систему уравнений, определяющую координаты неподвижной точки:

$$\begin{aligned} \sin \tau_0 &= \zeta_0 a^{-1} - [2af]^{-1} F \zeta_0, \quad \cos \tau_0 = b^{-1} \zeta_0^0, \\ \zeta_2^0 &= (1 - R) [2a]^{-1} \zeta_0 b, \\ \zeta_2^0 &= ba^{-1} \zeta_0 + [2af]^{-1} (1 + R) [-\eta_1(a - bk_2) \operatorname{ctg}(\pi n \eta_2) + \\ &\quad + \eta_2(a - bk_1) \operatorname{ctg}(\pi n \eta_1)] \zeta_0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Величина ζ_0 определяется как решение уравнения

$$[F^2 + (1-R)^2 f^2] \dot{\zeta}_0^2 - 4fF \zeta_0 \dot{\zeta}_0 + 4f^2(1-a^2)\zeta_0^2 = 0, \quad (2.2)$$

в котором введено обозначение

$$F = (1+R) [k_1 \gamma_2 \operatorname{ctg}(\pi n \gamma_1) - k_2 \gamma_1 \operatorname{ctg}(\pi n \gamma_2)],$$

$$f = (k_2 - k_1) \gamma_1 \gamma_2.$$

Решая (2.2) относительно $\dot{\zeta}_0$, находим*:

$$\dot{\zeta}_0 = \frac{2f}{F^2 + (1-R)^2 f^2} \{F\zeta_0 + [a^2[F^2 + (1-R)^2 f^2] - (1-R)^2 f^2 \zeta_0^2]^{1/2}\}. \quad (2.3)$$

Поскольку ударные периодические движения возможны лишь, когда ударная скорость $\dot{\zeta}_0$ имеет действительное и положительное значение, то границами существования в пространстве параметров $\lambda_1, \lambda_2, \zeta_0, R, \alpha$ будут

$$|\zeta_0| = |a| \quad (F\zeta_0 < 0), \quad (2.4)$$

$$|\zeta_0| = |a| \left[\frac{F^2}{(1-R)^2 f^2} + 1 \right]^{1/2} \quad (F\zeta_0 > 0),$$

а также прямые $n\gamma_2 = k, n\gamma_1 = l$ ($n \neq k, n \neq l; k, l, n = 1, 2, \dots$).

Для исследования устойчивости движения составляем характеристическое уравнение для S -преобразования, линеаризованного в окрестности неподвижной точки. Обозначая через $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ соответственно выражения, полученные перенесением всех членов в уравнениях системы (1.5) в одну сторону, и раскрывая определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau_0} - z \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau_1}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_0} - z \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_1}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_2^0} - z \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_2^1}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_2^0} - z \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_2^1}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_2^0} - z \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_2^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial \tau_0} - z \frac{\partial \Phi_4}{\partial \tau_1}, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_0} - z \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_1}, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_2^0} - z \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_2^1}, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_2^0} - z \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_2^1}, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_2^0} - z \frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta_2^1} \end{vmatrix}, \quad (2.5)$$

получим характеристический полином четвертой степени:

$$c_0 z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4 = 0, \quad (2.6)$$

коэффициенты которого после ряда упрощений примут вид

$$c_0 = \gamma_1 \gamma_2 \frac{(k_2 - k_1)^2}{k_1 k_2} \zeta_0, \quad c_4 = R^2 c_0,$$

$$c_1 = \left\{ \sum_{i=1}^6 Q_i \right\} \zeta_0 + \left\{ \sum_{i=1}^2 P_i \right\} \zeta_0,$$

$$c_2 = \left\{ \sum_{i=1}^3 d_i + \sum_{i=1}^4 Q_{i+6} \right\} \zeta_0 + \left\{ \sum_{i=1}^4 P_{i+2} \right\} \zeta_0, \quad (2.7)$$

$$c_3 = \left\{ \sum_{i=1}^6 Q_{i+10} \right\} \zeta_0 + \left\{ \sum_{i=1}^2 P_{i+6} \right\} \zeta_0.$$

* Уравнение (2.2) совпадает (с точностью до обозначений) с соответствующим уравнением в [9], а при $\alpha = 0$ — аналогичными соотношениями в работах [1-4].

Входящие в них величины d_i , P_i и Q_i выражаются через параметры системы следующим образом:

$$d_1 = -2\eta_1\eta_2 \left[(1-R)^2 + 2R \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \right] \cos(2\pi n \eta_1) \cos(2\pi n \eta_2);$$

$$d_2 = -\eta_1\eta_2 (1+R)^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \sin(2\pi n \eta_1) \cos(2\pi n \eta_2);$$

$$d_3 = \eta_1\eta_2 \left[4R + (1+R^2) \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \right];$$

$$Q_1 = 2f \left(\frac{R}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \cos(2\pi n \eta_1);$$

$$Q_3 = \frac{1+R}{2a} \left[(a-bk_1) \left(\lambda_2^2 - \lambda_2^2 \frac{R}{k_1} - 1 \right) + k_1 \right] \sin(2\pi n \eta_2) \operatorname{ctg}(\pi n \eta_1);$$

$$Q_5 = \frac{1+R}{a} \frac{\eta_2}{\eta_1} \left[\frac{k_2-k_1}{k_2} + \frac{k_1(a-bk_2)}{k_2} - \lambda_2^2(a-bk_1) \left(1 - \frac{R}{k_2} \right) - k_1 \right] \cos^2(\pi n \eta_2);$$

$$Q_7 = \frac{1+R}{a} \left[2a-b(1-R)k_1 + \lambda_2^2(a-bk_1) \left(R-1 + \frac{2R}{k_1} \right) - (1-R)k_1 - \right. \\ \left. - Ra\eta_1^2 - a\eta_1^2 \right] \cos(2\pi n \eta_1) \cos^2(\pi n \eta_1);$$

$$Q_9 = \frac{1+R}{a} \frac{\eta_1}{\eta_2} \left[\frac{k_2}{k_1} (-2a-bk_1R + bk_1) - \lambda_2^2(a-bk_2) \left(R-1 + \frac{2R}{k_1} \right) + \right. \\ \left. + a\eta_2^2(R-1) + k_2(1-R) + \frac{2ak_2\eta_2^2}{k_1} \right] \cos(2\pi n \eta_1) \cos^2(\pi n \eta_2); \quad (2.8)$$

$$Q_{11} = \frac{1+R}{2} \left[(1+R)\eta_1^2 - 1 - \frac{Rk_1}{a}(1+b) - \left(1 + \frac{1}{k_1} \right) \frac{R\lambda_2^2(a-bk_1)}{a} \right] \times \\ \times \sin(2\pi n \eta_2) \operatorname{ctg}(\pi n \eta_1);$$

$$Q_{13} = (1+R) \frac{\eta_1}{\eta_2} \left[\frac{R\lambda_2^2}{a}(a-bk_2) \left(1 + \frac{1}{k_1} \right) - \eta_2^2 \left(R + \frac{k_2}{k_1} \right) + \right. \\ \left. + R \frac{k_2}{a} (1+b) + \frac{k_2}{k_1} \right] \cos^2(\pi n \eta_2);$$

$$Q_{15} = 2Rf \left[\frac{R}{k_2} + \frac{1}{k_1} \right] \cos(2\pi n \eta_2);$$

$$P_1 = \frac{k_2-k_1}{a} \eta_1 \left[\lambda_2^2 \left(1 - \frac{R}{k_1} \right) (b-xa) - 1 + \frac{a}{k_1} (1+R\lambda_1^2) - b \right] \sin(2\pi n \eta_2);$$

$$P_3 = 2 \frac{k_2-k_1}{a} \left[a + R(-\lambda_2^2 b + \lambda_2^2 xa + \lambda_1^2 a) \right] \frac{\eta_2}{k_2} \sin(2\pi n \eta_1) \cos(2\pi n \eta_2);$$

$$P_5 = \frac{k_2-k_1}{a} [b - \lambda_2^2 b + \lambda_2^2 xa + 1] (1-R) \eta_1 \sin(2\pi n \eta_2) \cos(2\pi n \eta_1);$$

$$P_7 = \frac{k_2 - k_1}{a} \eta_{11} \left[(1+b)R + \frac{R\lambda_1^2 a}{k_1} + \frac{a}{k_1} - R\lambda_2^2 (b-xa) \left(1 + \frac{1}{k_1} \right) \right] \sin(2\pi n \eta_2).$$

Выражения для P_i и Q_j с четными индексами получаются из соотношений для P_i и Q_j с нечетными индексами путем преобразования:

$$Q_{2j} = \Pi_{1,2} Q_{2j-1} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$P_{2l} = \Pi_{1,2} P_{2l-1} \quad (j = 1, 2, 3, 4, \dots, 8),$$

где $\Pi_{1,2}$ — оператор перестановки, изменяющий в P и Q индексы у k и η с 1 на 2 или с 2 на 1, смотря по тому, с какими индексами они входят в эти выражения.

Полагая в (2.3) $z = +1$, $z = -1$, получаем соответственно границы устойчивости N_{+1} , N_{-1} в пространстве параметров λ_1 , λ_2 , ζ_0 , R , x :

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0, \quad c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 0.$$

Далее, полагая $z = e^{i\varphi}$, находим границу N_φ , которая распадается на четыре поверхности [11]:

$$4(c_0 - c_4) + 2(c_1 - c_3) = 0,$$

$$4(c_0 - c_4) - 2(c_1 - c_3) = 0,$$

$$6(c_0 + c_4) - 2c_2 = 0,$$

(2.9)

$$c_0^3 + c_4^3 - c_0 c_4^2 - c_0^2 c_4 - c_0^2 c_2 - c_2 c_4^2 + 2c_0 c_2 c_4 - c_0 c_3^2 + c_0 c_1 c_3 - c_1^2 c_4 + c_1 c_3 c_4 = 0.$$

Часть границ, определяющих область устойчивости одноударного периодического движения, совпадает с границей существования этого движения, при переходе через которую происходит исчезновение периодического движения. Другая часть является бифуркационными границами; при переходе этой части границ происходит превращение одноударного периодического движения в другое, более сложное периодическое движение. Следует отметить, что бифуркационной границей является также граница, получаемая из условия разрывности точечного преобразования. Непрерывность S -преобразования (1.5), определяющего, в частности, момент следующего удара τ_1 по моменту предыдущего удара τ_0 , очевидно, нарушается при появлении между τ_0 и τ_1 промежуточного удара в момент τ_1^* . Таким образом, для определения этой бифуркационной границы имеем условия $\zeta_1 = \zeta_0$, $\dot{\zeta}_1 = 0$ при $\tau = \tau_1^*$, $\tau_0 < \tau_1^* < \tau_1$ ($\tau_1 - \tau_0 = 2\pi n$). В данной работе расчет этой границы не проводился*. На рис. 3 а, б, в приводятся осциллограммы движения ударника и вибратора, а также изменения их скорости, полученные при моделировании данной системы на МН-8, для значений параметров $R = 0,6$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,6$, $x = 1$ и ζ_0 , соответственно равных 0,4, 0,9 и 2,0. Значение $\zeta_0 = 0,9$ является бифуркационным.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ГРАНИЦ ОДНОУДАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ $R = 0,6$

По формулам, приведенным в разделах 1, 2, были найдены границы одноударного периодического движения для коэффициента восстановления ударной скорости $R = 0,6$.

Вычисления проводились на электронной вычислительной машине М-20. На рис. 2а, б в плоскости λ_1 , ζ_0 построены области устойчивости

* Для частного случая $R = 0,6$, $m_1 = m_2$, $C_1 = C_2$ граница была найдена на МН-8 (см. рис. 2а)

(заштрихованные части плоскости) одноударного движения для $n = 1, 2$ в случае равенства обеих масс $m_1 = m_2$ и одинаковых жесткостей нижних и верхних пружин $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Граница существования, найденная по формулам (2.4), нанесена на этих рисунках пунктирной линией. Штрихпунктирной линией указана граница области безударных движений $\zeta_0 > |a|$. Эту область можно было бы назвать также областью жесткого

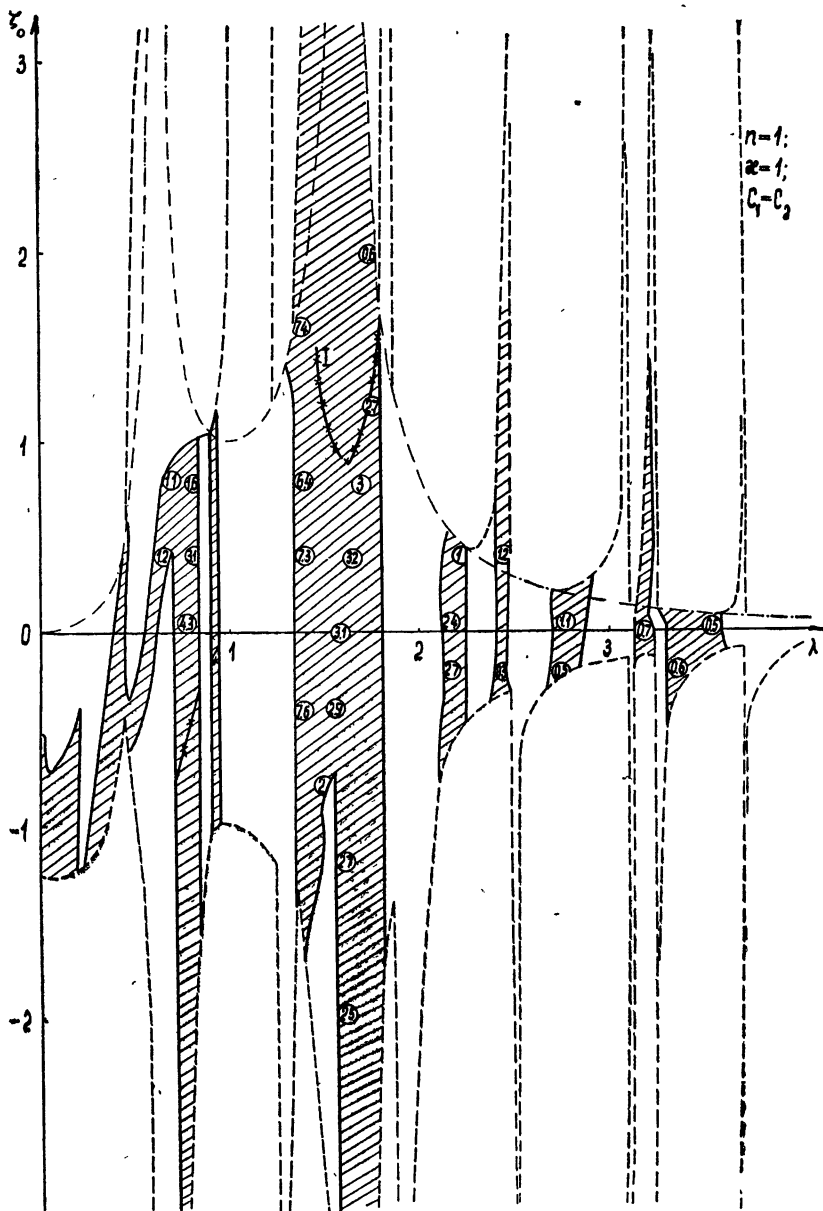


Рис. 2а.

возбуждения ударных колебаний, так как здесь при определенных начальных условиях кроме безударных движений могут существовать ударные периодические движения (так же, как и у одномассовой модели [4]).

Как видно из рис. 2а, б, в значительной части области существования одноударного движения это движение неустойчиво. Из областей устойчивости наиболее существенными являются области, расположенные вблизи резонансных частот соответствующей линейной системы без

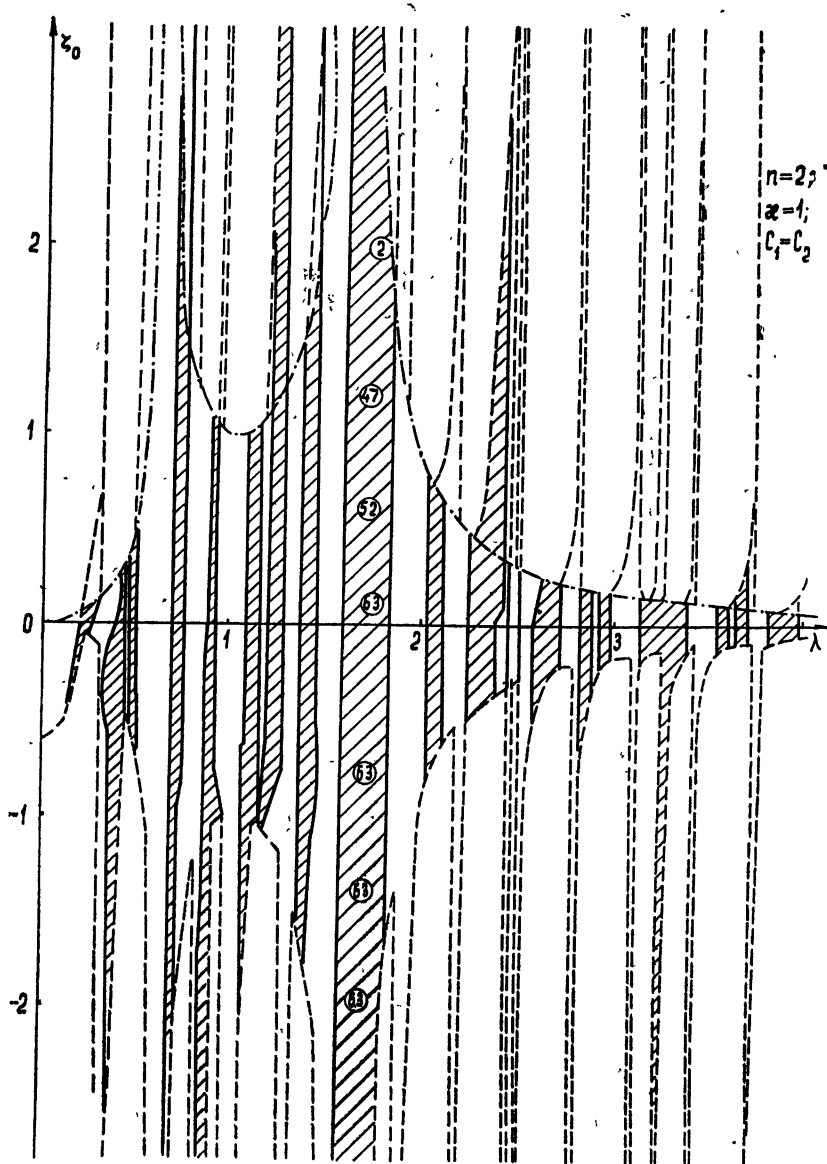


Рис. 2б.

ограничителя ($\lambda = 0,618$ и $\lambda = 1,618$). Для $n = 1$, $m_1 = m_2$, $C_1 = C_2$ линией 1 нанесена бифуркационная граница перехода одноударного движения в многоударное, полученная в результате моделирования данной системы на МН-8. Область одноударного движения лежит выше указанной границы; арабскими в кружочках цифрами отмечены величины ударной скорости. Наибольшая ударная скорость расположена в области, лежащей в окрестности большей из резонансных частот.

При возрастании n области устойчивости становятся уже, число их возрастает; значение ударной скорости в областях, лежащих вблизи резонансных частот, растет по величине.

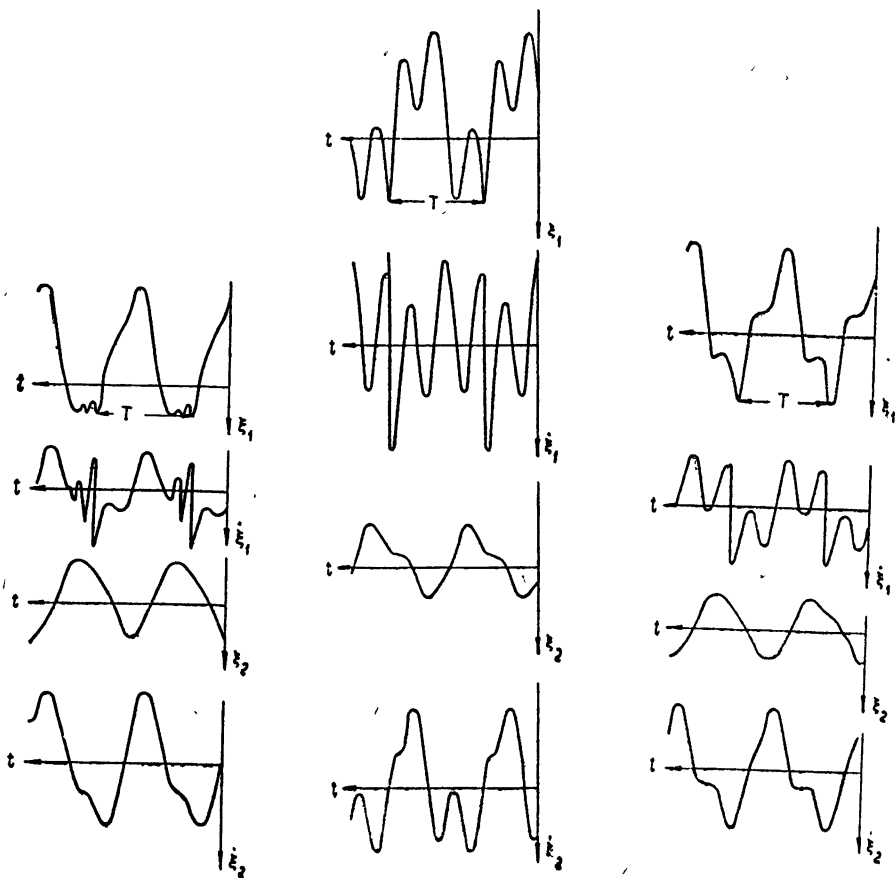


Рис. 3а.

Рис. 3б.

Рис. 3в.

На рис. 4 в тех же обозначениях на плоскости λ_1, ζ_0 построена область устойчивости одноударного движения для случая, когда масса вибратора вдвое меньше массы ударника, а жесткости верхних и нижних пружин остаются одинаковыми ($C_1 = C_2$). Заменяя в (1.6) λ_2^2 на $\kappa^{-1} \lambda_1^2$, можно записать уравнение собственных частот в виде $\lambda_1^4 - (2\kappa + 1)\lambda_1^2 + \kappa = 0$. Отсюда находим, что при $\kappa = 0,5$, $\lambda_1 = 0,541$ и $1,307$. Наиболее обширные части области устойчивости сдвигаются, как видно на рис. 2а и 4, в окрестности этих частот.

С ростом κ наблюдается расширение областей устойчивости, расположенных вблизи резонансных частот, и увеличение ударной скорости.

На рис. 5а, б аналогичные построения проделаны для равных масс, но различных жесткостей верхних и нижних пружин. Отношение $C_1/C_2 = \gamma$ соответственно равнялось 0,5 и 3. Уравнение частот (1.6) перепишем в виде

$$\lambda_1^4 - (\gamma + 2)\lambda_1^2 + \gamma = 0.$$

Отсюда находим следующие значения λ_1 , отвечающие резонансным частотам линейной системы: при $\gamma = 0,5$ $\lambda_1 = 0,468$ и $1,51$, при $\gamma = 3$ $\lambda_1 = 1,13$

и 2,03. Основные части области устойчивости одноударного периодического движения расположены в окрестности этих частот. С ростом γ области расширяются.

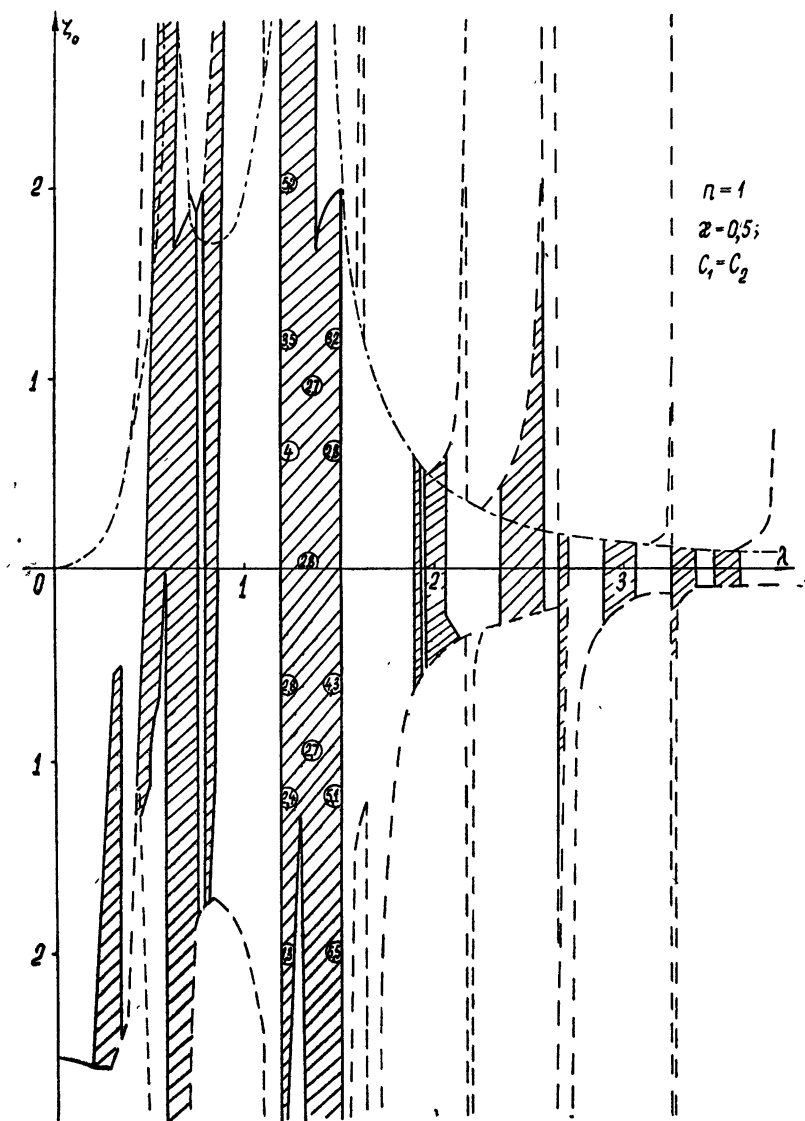


Рис. 4.

На рис. 6 на плоскости λ, ζ_0 построены области устойчивости для равных масс и равных жесткостей, но для коэффициента восстановления ударной скорости $R = 0,9$. При возрастании R области устойчивости становятся более изрезанными.

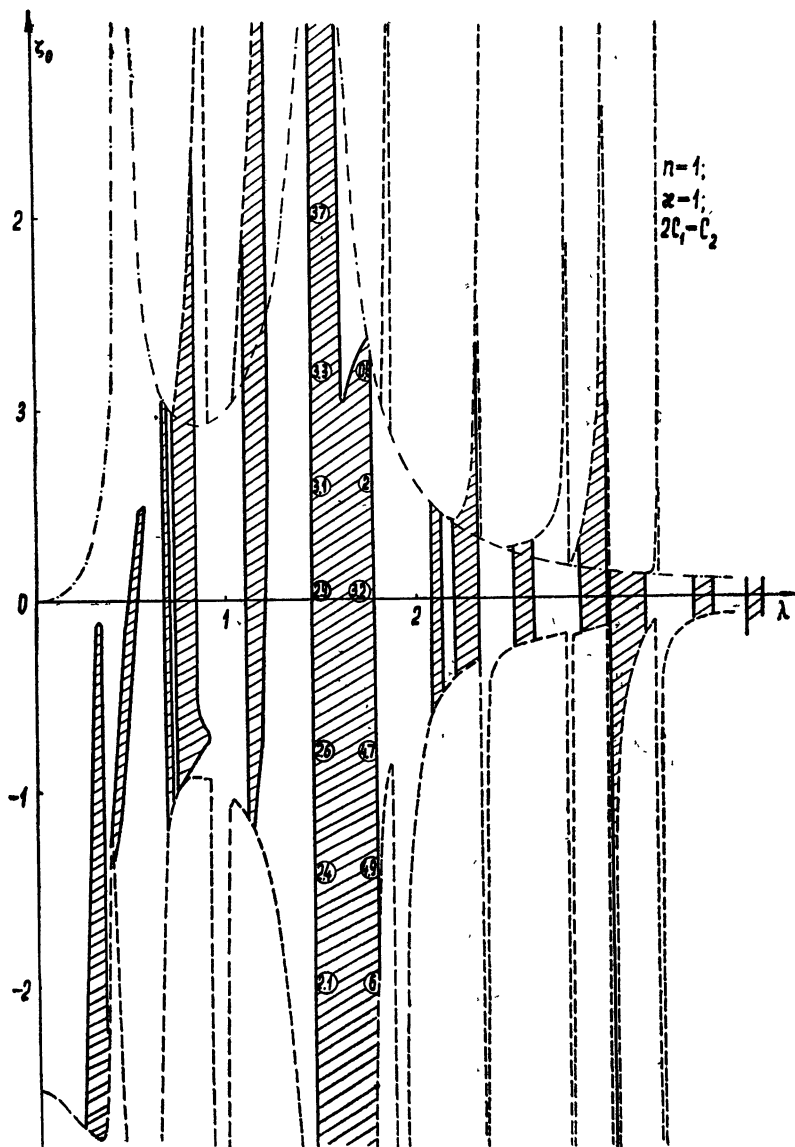


Рис. 5а.

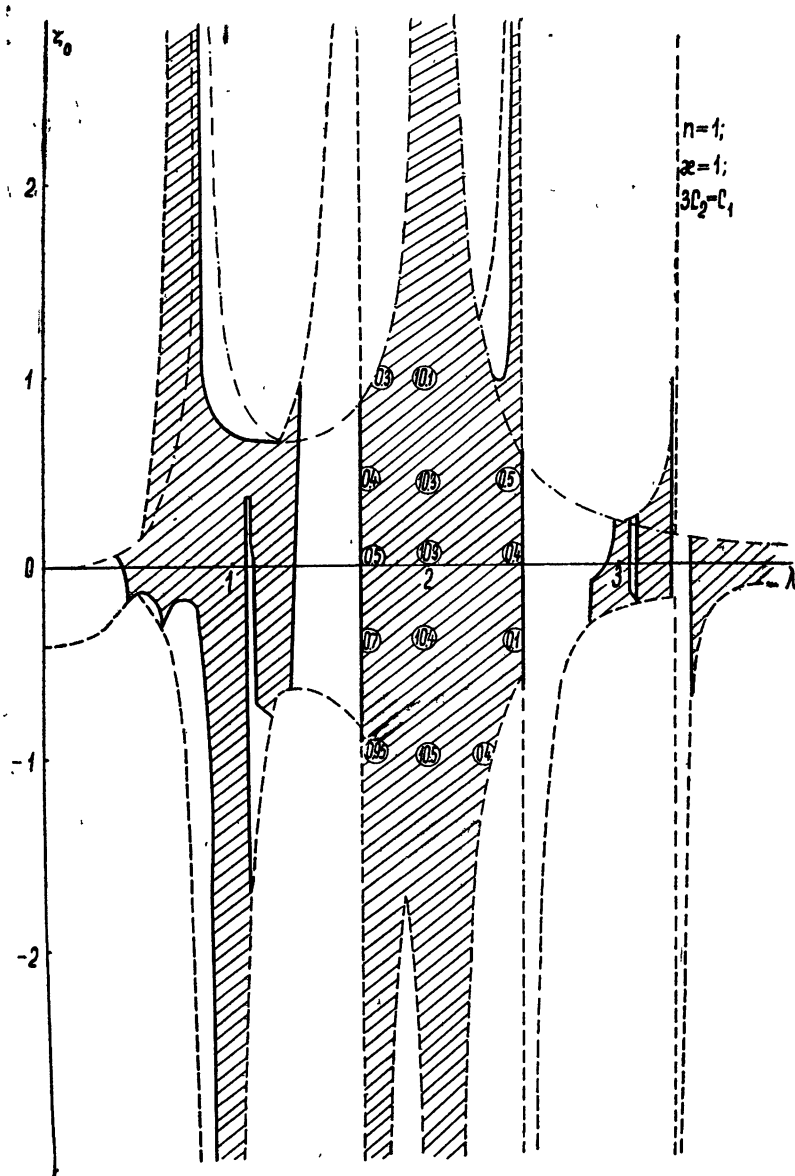


Рис. 56,

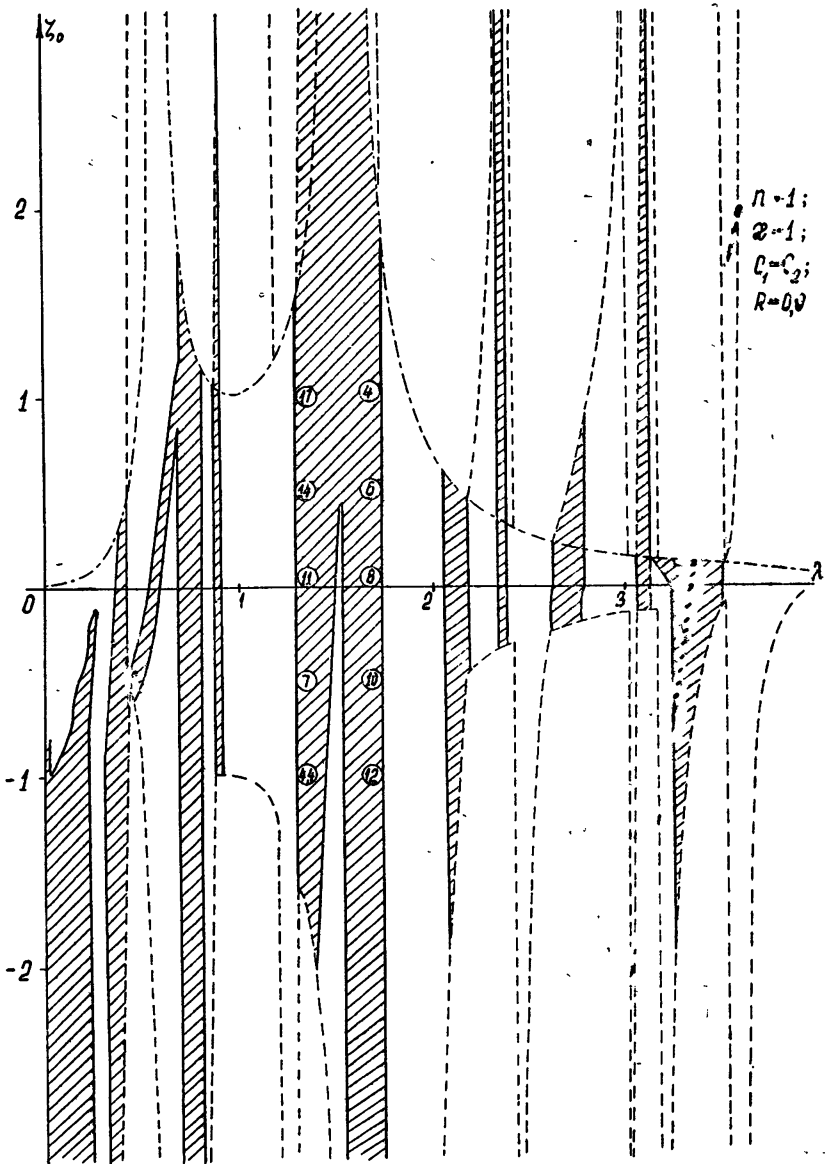


Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Русаков, А. А. Харкевич, ЖТФ, 12, 715 (1942).
2. С. А. Цаплин, Вибродарные механизмы, Автотрансиздат, М., 1953.
3. Д. Д. Баркан и О. Я. Шехтер, ЖТФ, 25, 2300 (1955).
4. Л. В. Беспалова, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 3 (1957).
5. Д. Д. Баркан и О. Я. Шехтер, Труды НИИ О и Ф, Динамика грунтов, сб. № 28 (1956).
6. О. А. Савинов, А. Я. Лускин, Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве, Госиздат литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, Л., 1960.
7. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).
8. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 95 (1958).

9. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 146 (1958).
10. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
11. Р. Ольденбург и Г. Сарториус, Динамика автоматического регулирования, М., 1949.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 июня 1965 г.

TO THE THEORY OF TWO-MASS VIBRO-STRIKER MODEL

L. V. Bespalova, V. S. Metrikin

By the method of point-wise representation using an electron digital computer the dynamics is investigated of vibrating striker mechanism with a special shock-mass.

УДК 62—50

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМ С УДАРНЫМ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В. А. Горохов

Предложен способ составления уравнений периодических движений динамической системы с ударными взаимодействиями.

1. Наряду с релейными системами [1-3] и системами с кусочно-линейной характеристикой [5, 7, 8] из общего класса кусочно-линейных систем, описанных в [4], можно выделить линейные системы с ударным взаимодействием, для которых можно дать общий метод составления уравнений периода* и определения устойчивости периодического режима произвольного типа. Примерами таких систем могут служить некоторые механические системы, движение которых сопровождается мгновенными ударами, а также электрические системы, в которых наблюдаются мгновенные переключения.

Периодическое движение линейной системы под действием мгновенных ударов (импульсов) полностью определяется моментами времени, в которые возникают удары (импульсы) и величинами скачков координат системы, вызванных этими ударами (импульсами). В настоящей работе предлагается способ составления уравнений для определения этих моментов времени и соответствующих скачков координат. Затем дается метод исследования на устойчивость периодических движений. В конце статьи приведен пример, иллюстрирующий этот метод.

Пусть движение некоторой динамической системы между ударами описывается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{si} x_s = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Пусть далее при выполнении одного из N равенств

$$\Phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

и возможно неравенств вида

$$Q_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad (3)$$

происходит удар, вызывающий скачок координат. При этом новые значения координат, отмеченные чертой сверху, связаны со старыми значениями тех же координат следующими соотношениями:

$$\overline{x}_i - x_i = f_i^j(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4)$$

Функции Φ_j , Q_j и f_i^j полагаем непрерывными и имеющими непрерывные частные производные по всем аргументам.

* Уравнениями периода будем называть уравнения, решение которых полностью определяет данный периодический режим.

Обозначим через t_k моменты времени, в которые происходят удары, взятые в естественной последовательности ($k = 0, 1, 2, \dots$), и рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{si} x_s = \sum_k f_i^k \delta(t - t_k). \quad (5)$$

Здесь $\delta(z)$ обозначает δ -функцию, а

$$f_i^k = f_i^{\varepsilon_k} [x_1(t_k - 0), x_2(t_k - 0), \dots, x_n(t_k - 0)], \quad (6)$$

где $\varepsilon_k = j$, если в момент t_k выполнены j -ые условия (2), (3). Нетрудно убедиться, что при $t \neq t_k$ система (5) совпадает с системой (1), а при $t = t_k$ выполняются соотношения (4). Решение уравнений (5) в любой момент времени t можно записать как сумму реакций линейной системы на всю последовательность импульсов*, действовавших на систему до данного момента времени. Реакция линейной системы на отдельный импульс, действующий в момент времени t_k , как известно, будет такой:

$$\varphi_i(t - t_k) = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n f_j^k c_{sjl} \exp[\lambda_s(t - t_k)] \quad (t > t_k). \quad (7)$$

Здесь введено обозначение

$$c_{sjl} = \Delta_{ji}(\lambda_s) / \Delta'(\lambda_s),$$

где

$$\Delta(p) = \text{Det} \parallel a_{ij} + \sigma_{ij} p \parallel, \quad (8)$$

$\Delta_{ji}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ji} + \sigma_{ji} p$ определителя (8), λ_s — корни уравнения

$$\Delta(p) = 0. \quad (9)$$

Будем предполагать для простоты, что все λ_s различны и среди них нет равных нулю.

Пусть нам известны моменты t_k появления импульсов и площади f_i^k этих импульсов. Тогда значение $x_i(t)$ для $t_{r+1} \geq t \geq t_r$ можно представить в виде

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^r \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n f_j^k c_{sjl} \exp[\lambda_s(t - t_k)] + x_i^*(t), \quad (10)$$

где $x_i^*(t)$ — реакция линейной системы на всю последовательность импульсов, действовавших до момента t_0 , включая импульс, задающий начальное состояние системы.

2. Рассмотрим периодический режим, при котором на систему действует m импульсов за период. Этот периодический режим будет полностью определен, если за период известны

1) промежутки времени между любыми двумя последовательными импульсами:

$$\tau_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, m);$$

* Здесь и далее импульсами будем называть для краткости систему мгновенных импульсов $f_i^k \delta(t - t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

2) площадь каждого из этих импульсов f_i^k ;

3) при выполнении каких из N условий (2), (3) появляется каждый из m импульсов.

Промежутки времени между двумя последовательными импульсами и площади этих импульсов находятся из уравнений периода. Что касается условий появления импульсов, то мы будем считать их заданными, т. е. считать, что для любого момента t_k известно, какие условия из (2), (3) выполнены. Будем записывать эти условия с индексом ϵ_k внизу, равным j ($j = 1, 2, \dots, N$), если в момент t_k выполнены j -ые условия (2), (3).

Допустим, что у нас уже найдено периодическое решение $x_i(t)$, тогда для любого из промежутков времени от t_k до t_{k+1} функция $x_i(t)$ является решением линейной системы (1) и поэтому может быть записана в виде

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^n C_{si}^k e^{\lambda_s \tau} \quad (t_{k+1} \geq t \geq t_k), \quad (11)$$

где $\tau = t - t_k$, C_{si}^k — некоторые постоянные.

Обозначим через T длительность периода ($T = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m$). Тогда

$$x_i(t + T) = x_i(t) \quad (12)$$

для всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Но, согласно (10),

$$x_i(t+T) = \sum_{q=k+1}^{m+k} \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n f_j^q c_{sjl} \exp \left[\lambda_s \left(\tau + T - \sum_{v=k+1}^q \tau_v \right) \right] + \sum_{s=1}^n C_{si}^k \exp [\lambda_s (\tau + T)], \quad (13)$$

где в силу периодичности $f_j^{m+r} = f_j^r$, $\tau_{m+r} = \tau_r$ ($r = 1, 2, \dots, k$). При выводе формулы (13) использованы равенства $\tau = t - t_k$ и $t_q - t_k = \tau_{k+1} + \dots + \tau_q$. Теперь условие периодичности (12) можно записать в виде следующего равенства, тождественного относительно τ ($0 \leq \tau \leq \tau_{k+1}$):

$$\sum_{s=1}^n \left\{ C_{si}^k (e^{\lambda_s T} - 1) + \sum_{q=k+1}^{m+k} \sum_{j=1}^n f_j^q c_{sjl} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[\lambda_s \left(T - \sum_{v=k+1}^q \tau_v \right) \right] \right\} e^{\lambda_s \tau} = 0. \quad (14)$$

Однако в силу линейной независимости функций $e^{\lambda_s \tau}$ это тождество относительно τ возможно лишь в случае, если все выражения, стоящие в фигурных скобках, равны нулю. Следовательно,

$$C_{si}^k = \sum_{q=k+1}^{m+k} \sum_{j=1}^n f_j^q c_{sjl} \exp \left(-\lambda_s \sum_{v=k+1}^q \tau_v \right) \frac{e^{\lambda_s T}}{1 - e^{\lambda_s T}}. \quad (15)$$

Подставляя значения C_{si}^k в (11), получим периодическое решение на отрезке времени от t_k до t_{k+1} :

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^n \sum_{q=k+1}^{m+k} \sum_{j=1}^n f_j^q c_{sji} \exp\left(-\lambda_s \sum_{\nu=k+1}^q \tau_\nu\right) \frac{e^{\lambda_s T}}{1-e^{\lambda_s T}} e^{\lambda_s \tau} \quad (16)$$

$$(t_k \leq t \leq t_{k+1}).$$

Рассмотрим теперь случай, когда один из корней уравнения (9) равен нулю (пусть, например, $\lambda_1 = 0$). Для того, чтобы в этом случае существовал периодический режим, необходимо существование предела правой части равенства (16) при $\lambda_1 \rightarrow 0$. Нетрудно убедиться, что для существования этого предела необходимо выполнение следующих равенств:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f_j^k c_{1ji} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Эти условия, в частности, всегда выполнены для симметричного периодического режима, при котором $m = 2r$, $T = 2\vartheta$, $\tau_{k+r} = \tau_k$, $f_i^{k+r} = -f_i^k$ и $x_i(t + \vartheta) = -x_i(t)$.

Для определения неизвестных τ_k и f_i^k в (16) воспользуемся тем, что в момент времени t_k должны быть выполнены равенства

$$\Phi_{e_k} [x_1(t_k-0), x_2(t_k-0), \dots, x_n(t_k-0)] = 0; \quad (17)$$

$$f_i^{e_k} [x_1(t_k-0), x_2(t_k-0), \dots, x_n(t_k-0)] = f_i^k. \quad (18)$$

Найдем значения $x_i(t_k-0)$. Для этого положим в (16) $t = t_k$ ($\tau = 0$). Затем получим значения $x_i(t_k+0)$, а так как, согласно (4), $x_i(t_k-0) = -x_i(t_k+0) - f_i^k$, то

$$x_i(t_k-0) = \sum_{s=1}^n \sum_{q=k+1}^{m+k} \sum_{j=1}^n f_j^q c_{sji} \exp\left(-\lambda_s \sum_{\nu=k+1}^q \tau_\nu\right) \frac{e^{\lambda_s T}}{1-e^{\lambda_s T}} - f_i^k. \quad (19)$$

Подставляя в (17) и (18) значения $x_i(t_k-0)$ из (19), мы получим в общем случае $m(1+n)$ уравнений для определения неизвестных $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ и $f_1^k, f_2^k, \dots, f_n^k$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Если же некоторые из f_i^k заданы (в частности, равны нулю) или связаны между собой некоторой зависимостью (например, линейной), то число уравнений (18) соответственно сократится.

Следует заметить, что для действительного существования данного периодического режима (устойчивого или неустойчивого) недостаточно существования допустимого решения уравнений (17), (18) при подстановке в них выражений для $x_i(t_k-0)$ из (19). Необходимо еще выполнение соответствующих условий (3); иными словами, в любой момент t_k должно быть выполнено неравенство

$$Q_{e_k} [x_1(t_k-0), x_2(t_k-0), \dots, x_n(t_k-0)] > 0.$$

Кроме того, в каждый из промежутков времени от t_k до t_{k+1} не должно появляться дополнительных импульсов, так как в противном случае периодический режим будет иметь более, чем m импульсов за период. Иными словами, в любой из моментов $t \in (t_k, t_{k+1})$ не должно одновременно выполняться ни одно из N условий (2), (3).

Далее, в каждый момент времени t_k должно выполняться только какое-либо одно из N условий (2), (3), ибо в противном случае, когда выполняются одновременно два и более условий (2), (3), уравнения

скачка координат (4) примут, вообще говоря, иной вид, что, в свою очередь, внесет изменения в уравнения (18).

3. Таким же способом можно составить уравнения периода для неавтономной системы:

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{si} x_s = \psi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Пусть удары происходят при выполнении одного из N равенств

$$\Phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

и, возможно, неравенств вида

$$Q_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t) > 0. \quad (22)$$

При этом новые значения координат системы, отмеченные чертой сверху, связаны со старыми значениями соотношениями

$$\bar{x}_i - x_i = f_i^j(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \quad (23)$$

Функции Φ_j , Q_j , f_i^j и ψ_i предполагаются периодическими по t с общим периодом T . Пусть, кроме того, функции Φ_j , Q_j и f_i^j непрерывны и непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

Будем рассматривать периодический режим, при котором появляются m импульсов за период. Длительность периода примем равной T , но все дальнейшие рассуждения без труда переносятся на случай, когда рассматривается периодический режим с периодом, кратным T .

Снова, как и выше, обозначим через t_k моменты появления импульсов, а через f_i^k площади этих импульсов. Запишем уравнения движения нашей системы в виде

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{si} x_s = \sum_k f_i^k \delta(t - t_k) + \psi_i(t). \quad (24)$$

Периодическое решение будем искать в виде суммы

$$x_i(t) = y_i(t) + z_i(t), \quad (25)$$

где $y_i(t)$ — периодическое решение системы линейных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{si} y_s = \psi_i(t) \quad (26)$$

с периодом T , а $z_i(t)$ — периодическое решение системы

$$\frac{dz_i}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{si} z_s = \sum_k f_i^k \delta(t - t_k) \quad (27)$$

с тем же периодом T .

Ограничимся рассмотрением нерезонансного случая, т. е. случая, когда среди корней уравнения (9) нет чисто мнимых корней вида $\pm 2\pi ki/T$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Кроме того, положим, что все эти корни различны. В этом случае периодическое решение системы (26) будет следующим:

$$y_i(t) = \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n A_{sji} \left(\frac{e^{\lambda_s T}}{1 - e^{\lambda_s T}} \int_0^T e^{-\lambda_s \sigma} \psi_j(\sigma) d\sigma + \int_0^t e^{-\lambda_s \sigma} \psi_j(\sigma) d\sigma \right) e^{\lambda_s t}, \quad (28)$$

где

$$A_{sji} = \Delta_{ji}(\lambda_s) / \Delta'(\lambda_s).$$

Периодическое решение системы (27) находится точно так же, как и для автономной системы. Поэтому можно прямо воспользоваться формулой (16), заменив в ней $x_i(t)$ на $z_i(t)$ и сохраняя в остальном прежние обозначения. Теперь можно записать периодическое решение системы (24) для $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ в виде

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^n \sum_{q=k+1}^{m+k} \sum_{j=1}^n f_j^q c_{sji} \exp\left(-\lambda_s \sum_{v=k+1}^q \tau_v\right) \frac{e^{\lambda_s T}}{1 - e^{\lambda_s T}} e^{\lambda_s \tau} + y_i\left(\tau + t_0 + \sum_{v=1}^k \tau_v\right), \quad (29)$$

где t_0 — момент времени, принятый за начало периода.

Для получения уравнений периода заметим, что в момент времени t_k выполняются следующие равенства:

$$\Phi_{*k} [x_1(t_k - 0), x_2(t_k - 0), \dots, x_n(t_k - 0), t_k] = 0; \quad (30)$$

$$f_i^{*k} [x_1(t_k - 0), x_2(t_k - 0), \dots, x_n(t_k - 0), t_k] = f_i^k. \quad (31)$$

Полагая в (29) $\tau=0$ и учитывая, что $x_i(t_k - 0) = x_i(t_k + 0) - f_i^k$, получим

$$x_i(t_k - 0) = \sum_{s=1}^n \sum_{q=k+1}^{m+k} \sum_{j=1}^n f_j^q c_{sji} \exp\left(-\lambda_s \sum_{v=k+1}^q \tau_v\right) \frac{e^{\lambda_s T}}{1 - e^{\lambda_s T}} + y_i\left(t_0 + \sum_{v=1}^k \tau_v\right) - f_i^k. \quad (32)$$

Подставим полученные значения $x_i(t_k - 0)$ в (30) и (31) и добавим к ним равенство

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m = T.$$

Тогда получим $m(1+n) + 1$ уравнений для определения неизвестных $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m; f_1^1, f_1^2, \dots, f_1^m$ и t_0 .

4. Для определения устойчивости периодического движения автономной системы рассмотрим возмущенное движение этой системы, достаточно близкое к данному периодическому движению. Это означает следующее: если t_k — момент появления импульса при выполнении j -ых условий (2), (3) для периодического движения, а f_i^k — площадь этого импульса, то $t_k + dt_k$ и $f_i^k + df_i^k$ будут соответственно моментом появления импульса и площадью этого импульса при выполнении так же j -ых условий (2), (3) для возмущенного движения. При этом dt_k и df_i^k

предполагаются достаточно малыми, чтобы можно было пренебречь их квадратами.

Промежутки времени между двумя последовательными импульсами для возмущенного движения:

$$\tau_k + d\tau_k = t_k + dt_k - t_{k-1} - dt_{k-1},$$

где $d\tau_k = dt_k - dt_{k-1}$. Вследствие автономности системы можно положить $dt_0 = 0$. Положим далее, что

$$d\tau_{k+l} = z^l d\tau_k, \quad df_i^{k+l} = z^l df_i^k \quad (l=0, 1, 2, \dots). \quad (33)$$

По определению, периодическое движение асимптотически устойчиво, если возмущенное движение с течением времени стремится к невозмущенному периодическому движению. Так как периодическое движение для автономной системы полностью определяется значениями τ_k и f_i^k , то оно будет асимптотически устойчиво, если $|d\tau_{k+l}|$ и $|f_i^{k+l}|$ убывают с течением времени (с увеличением значений l).

Укажем способ, по которому можно составить уравнение для определения z в (33). С этой целью рассмотрим функцию

$$\xi_i^k(\tau) = x'_i(t'_k + \tau) - x_i(t_k + \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \min(\tau_{k+1}, \tau_{k+1} + d\tau_{k+1}), \quad (34)$$

где $t'_k = t_k + dt_k$, а x'_i и x_i — значения координат системы соответственно для возмущенного и периодического движения.

Так как величины $d\tau_k$ и df_i^k достаточно малы и можно пренебречь их степенями выше первой, то $\xi_i^k(\tau)$ выразится как линейная комбинация от $d\tau_k$ и df_i^k . Тогда, согласно (33), можно положить

$$\xi_i^{k+l}(\tau) = z^l \xi_i^k(\tau) \quad (l=0, 1, 2, \dots). \quad (35)$$

Поскольку $x'_i(t'_k + \tau)$ является решением системы (1), можно записать

$$x'_i(t'_k + \tau) = \sum_{s=1}^n B_{si}^k e^{\lambda_s \tau}, \quad (36)$$

где B_{si}^k — неизвестные постоянные. Используя (11) и (36), получим, согласно (34),

$$\xi_i^k(\tau) = \sum_{s=1}^n D_{si}^k e^{\lambda_s \tau}, \quad (37)$$

где $D_{si}^k = B_{si}^k - C_{si}^k$.

Для дальнейшего нам будут нужны значения $x'_i(t'_{k+m} + \tau)$, где $t'_{k+m} = t_{k+m} + dt_{k+m}$. Используем с этой целью общую формулу (10), учитывая, что

$$t'_{k+m} - t'_q = T - \sum_{v=k+1}^q \tau_v + \sum_{v=k+1}^{k+m} d\tau_v - \sum_{v=k+1}^q d\tau_v, \quad (q=k+1, k+2, \dots, k+m).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
 x'_i(t'_{k+m} + \tau) = & \sum_{s=1}^n B_{si}^k \exp [\lambda_s(\tau + T + dT_k)] + \\
 & + \sum_{q=k+1}^{k+m} \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n (f_j^q + df_j^q) c_{sjl} \times \\
 & \times \exp \left[\lambda_s \left(\tau + T - \sum_{v=k+1}^q \tau_v + dT_k - \sum_{v=k+1}^q d\tau_v \right) \right],
 \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$dT_k = z(d\tau_1 + d\tau_2 + \dots + d\tau_k) + d\tau_{k+1} + d\tau_{k+2} + \dots + d\tau_m.$$

Найдем теперь $\xi_i^{k+m}(\tau)$. Для этого вычтем значение $x_i(t_{k+m} + \tau)$ из $x'_i(t'_{k+m} + \tau)$, используя формулы (13) и (38) и линеаризуя эту разность относительно df_i^k , $d\tau_k$, dT_k и D_{si}^k . В результате получим

$$\begin{aligned}
 \xi_i^{k+m}(\tau) = & \sum_{s=1}^n D_{si}^k \exp [\lambda_s(\tau + T)] + \sum_{s=1}^n dT_k C_{si}^k \exp [\lambda_s(\tau + T)] + \\
 & + \sum_{q=k+1}^{k+m} \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \left[df_j^q + f_j^q \left(dT_k - \sum_{v=k+1}^q d\tau_v \right) \right] c_{sjl} \times \\
 & \times \exp \left[\lambda_s \left(\tau + T - \sum_{v=k+1}^q \tau_v \right) \right].
 \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь C_{si}^k берутся из (15), а неизвестные постоянные D_{si}^k можно найти точно так же, как это было сделано при нахождении C_{si}^k , только вместо условия периодичности (12) нужно воспользоваться равенством (35), положив в нем $l = 1$. Подставив найденные таким образом D_{si}^k в (37), получим

$$\begin{aligned}
 \xi_i^k(\tau) = & \sum_{s=1}^n \sum_{q=k+1}^{k+m} \sum_{j=1}^n \left[df_j^q + f_j^q \left(\frac{dT_k}{1 - e^{\lambda_s T}} - \sum_{v=k+1}^q d\tau_v \right) \right] c_{sjl} \times \\
 & \times \exp \left(-\lambda_s \sum_{v=k+1}^q \tau_v \right) \frac{e^{\lambda_s(\tau + T)}}{z - e^{\lambda_s T}}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Заметим теперь, что в моменты времени t'_k при возмущенном движении выполняются следующие равенства:

$$\Phi_{\epsilon_k} [x'_1(t'_k - 0), x'_2(t'_k - 0), \dots, x'_n(t'_k - 0)] = 0; \tag{41}$$

$$f_i^{*k} [x'_1(t'_k - 0), x'_2(t'_k - 0), \dots, x'_n(t'_k - 0)] = f_i^k + df_i^k. \tag{42}$$

Так как, согласно (4) и (34),

$$x'_i(t'_k - 0) = x_i(t_k - 0) + \xi_i^k(0) - df_i^k, \tag{43}$$

то, линеаризуя (41) и (42) относительно разности $\xi_i^k(0) - df_i^k$ и учитывая (17) и (18), мы получим систему из $m(1 + n)$ линейных однородных уравнений относительно $d\tau_k$ и df_i^k :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_{\epsilon_k}}{\partial x_j} [\xi_j^k(0) - df_j^k] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i^k}}{\partial x_j} [\xi_j^k(0) - df_j^k] - df_i^k = 0 \quad (44)$$

$$(k=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n).$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, мы получим уравнение для определения z . Периодический режим будет асимптотически устойчив, если все корни этого уравнения будут по модулю меньше единицы, и неустойчив, если хотя бы один из корней по модулю больше единицы.

5. Аналогично можно определить устойчивость периодического режима для неавтономной системы. Снова рассмотрим возмущенное движение, достаточно близкое к данному периодическому движению. Пусть $t_{k+lm} = t_k + lT$ — моменты появления импульсов при периодическом движении, а $f_i^{k+lm} = f_i^k$ — площади этих импульсов. Тогда положим, что моменты появления импульсов и площади этих импульсов для возмущенного движения соответственно равны $t'_{k+lm} = t_k + lT + dt_{k+lm}$ и $f_i^k + df_i^{k+lm}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$). При этом в моменты времени t'_{k+lm} для возмущенного движения и в моменты t_{k+lm} для периодического движения выполнены одни и те же условия (2) и (3).

Промежутки времени между двумя последовательными импульсами при возмущенном движении

$$\tau'_{k+lm} = \tau_k + d\tau_{k+lm}$$

$$(d\tau_{k+lm} = dt_{k+lm} - dt_{k+lm-1}). \quad (45)$$

Положим

$$d\tau_{k+lm} = z'd\tau_k, \quad df_i^{k+lm} = z'df_i^k, \quad dt_{lm} = z'dt_0. \quad (46)$$

Периодический режим будет асимптотически устойчив, если все $|df_i^{k+lm}|$, $|d\tau_{k+lm}|$ и $|dt_{lm}|$ стремятся к нулю с течением времени (с увеличением l).

Представим значение координат системы для возмущенного движения в виде суммы

$$x'_i(t) = y_i(t) + z'_i(t), \quad (47)$$

где $y_i(t)$ — периодическое решение системы (26), определяемое формулой (28), а $z'_i(t)$ — значение координат системы (27) при возмущенном движении.

Полагая $y_i(t)$ непрерывно дифференцируемой, построим функцию

$$\xi_i^k(\tau) = x'_i(t'_k + \tau) - x_i(t_k + \tau) = \zeta_i^k(\tau) + \frac{dy_i}{dt} dt_k. \quad (48)$$

Здесь x_i — значение координат системы при периодическом движении, а

$$\zeta_i^k(\tau) = z'_i(t'_k + \tau) - z_i(t_k + \tau),$$

где z_i — периодическое решение системы (27). При этом, как и выше, полагаем

$$\zeta_i^{k+lm}(\tau) = z^l \zeta_i^k(\tau) \quad (l=0, 1, 2, \dots). \quad (49)$$

Значение $\zeta_i^k(\tau)$ находится точно так же, как это сделано для нахождения $\xi_i^k(\tau)$ в случае автономной системы. После того как получено значение $\zeta_i^k(\tau)$, мы можем найти

$$x'_i(t'_k - 0) = x_i(t_k - 0) + \zeta_i^k(0) + \frac{dy_i}{dt} dt_k - df_i^k, \quad (50)$$

где $dt_k = dt_0 + d\tau_1 + d\tau_2 + \dots + d\tau_k$.

Линеаризуя равенства

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon_k} [x'_1(t'_k - 0), x'_2(t_k - 0), \dots, x'_n(t_k - 0), t'_k] &= 0, \\ f_{i^k} [x'_1(t'_k - 0), x'_2(t'_k - 0), \dots, x'_n(t_k - 0), t'_k] &= f_i^k + df_i^k \end{aligned} \quad (51)$$

относительно dt_k и $\zeta_i^k(0) + (dy_i/dt) dt_k - df_i^k$, получим, учитывая (30) и (31), что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_{\varepsilon_k}}{\partial x_j} [\zeta_j^k(0) - df_j^k] + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_{\varepsilon_k}}{\partial x_j} \frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial \Phi_{\varepsilon_k}}{\partial t} \right) \times \\ \times \left(dt_0 + \sum_{\nu=1}^k d\tau_{\nu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i^k}}{\partial x_j} [\zeta_j^k(0) - df_j^k] + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i^k}}{\partial x_j} \frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial f_{i^k}}{\partial t} \right) \left(dt_0 + \sum_{\nu=1}^k d\tau_{\nu} \right) - df_i^k = 0.$$

К уравнениям (52) следует добавить еще одно уравнение

$$dt_0(1-z) + \sum_{k=1}^m d\tau_k = 0, \quad (53)$$

которое следует из условия $dt_m = zdt_0$.

Уравнения (52) совместно с (53) дают в общем случае систему из $m(1+n) + 1$ линейных однородных уравнений относительно $d\tau_k$, df_i^k и dt_0 . Приравнявая нулю определитель этой системы, получим уравнение относительно z . Учитывая (46), заключаем, что данное периодическое решение для неавтономной системы будет асимптотически устойчиво, если все корни этого уравнения лежат внутри единичного круга, и неустойчиво, если хотя бы один из корней лежит вне единичного круга.

6. Для примера рассмотрим периодический режим системы (1) в случае, когда удар происходит при выполнении одного из двух условий: $x_1 = 1$ и $x_1 = -1$. При этом значения координат системы (1) до удара и после удара связаны соотношениями

$$x_i(t_k + 0) - x_i(t_k - 0) = \alpha_i x_n(t_k - 0) \quad (\alpha_1 = 0).$$

Пусть удары происходят через равные промежутки времени T . Длительность периода будет равна $2T$. Допустим далее, что периодический режим симметричен и поэтому $x_i(t + T) = -x_i(t)$. Обозначим значение x_n непосредственно перед ударом, который происходит при выполнении условия $x_1 = 1$, через f . Тогда данный периодический режим бу-

дет определяться только двумя величинами (T и f). Пусть в момент времени t_0 происходит удар при выполнении условия $x_1 = 1$. Тогда для $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, согласно общей формуле (16),

$$x_i(t) = -f \sum_{s=1}^n c_{si} \frac{e^{\lambda_s T}}{1 + e^{\lambda_s T}} e^{\lambda_s \tau} \quad (54)$$

$$(\tau = t - t_0),$$

где

$$c_{si} = \sum_{j=1}^n a_j \Delta_{ji}(\lambda_s) / \Delta'(\lambda_s).$$

Учитывая, что $x_1(t_0 + 0) = 1$, а $x_n(t_0 + 0) = (1 + \alpha_n) f$, получим систему уравнений для определения T и f :

$$\sum_{s=1}^n c_{sn} e^{\lambda_s T} / (1 + e^{\lambda_s T}) + 1 + \alpha_n = 0,$$

$$f \sum_{s=1}^n c_{s1} e^{\lambda_s T} / (1 + e^{\lambda_s T}) + 1 = 0. \quad (55)$$

Рассмотрим возмущенное движение нашей системы. При этом, в силу симметричности периодического движения, можно положить $d\tau_2 = z d\tau_1$, $df_2 = -z df_1$. Найдем теперь значение $\xi_i^0(\tau)$ по формуле (40), заменив в ней z на z^2 :

$$\xi_i^0(\tau) = - \sum_{s=1}^n c_{si} \left(df_1 e^{\lambda_s T} + f \frac{d\tau_1}{1 + e^{\lambda_s T}} \right) \frac{\exp [\lambda_s(\tau + T)]}{z + e^{\lambda_s T}}. \quad (56)$$

Уравнения (44) в нашем случае примут вид

$$\xi_1^0(0) = 0, \quad \xi_n^0(0) - (1 + \alpha_n) df_1 = 0. \quad (57)$$

Положим в (56) $\tau = 0$ и подставим полученные значения $\xi_1^0(0)$ и $\xi_n^0(0)$ в (57). Получим систему из двух линейных однородных уравнений относительно $d\tau_1$ и df_1 . Приравняем нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} \sum_{s=1}^n \frac{c_{s1} e^{\lambda_s T}}{z + e^{\lambda_s T}} & \sum_{s=1}^n \frac{c_{s1} e^{\lambda_s T}}{(1 + e^{\lambda_s T})(z + e^{\lambda_s T})} \\ \sum_{s=1}^n \frac{c_{sn} e^{\lambda_s T}}{z + e^{\lambda_s T}} & \sum_{s=1}^n \frac{c_{sn} e^{\lambda_s T}}{[(1 + e^{\lambda_s T})(z + e^{\lambda_s T})]} \end{vmatrix} = 0. \quad (58)$$

Согласно сказанному выше, данный симметричный периодический режим будет асимптотически устойчив, если все корни уравнения (58) по модулю меньше единицы, и неустойчив, если хотя бы один из них по модулю больше единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1951.
2. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955.

3. Ю. И. Неймарк, Сб Памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1954.
4. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41; № 2, 95; № 5—6, 146 (1958).
5. Ю. И. Неймарк, Уч зап ГИФТИ и Радиофака, ГГУ (1956).
6. Я. З. Цыпкин, Теория импульсных систем, Гостехиздат, М., 1958.
7. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, ПММ, 20, 639 (1956).
8. Е. Н. Розенвассер, Автоматика и телемеханика, 21, 1279 (1960).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июня 1965 г.

ON PERIODICAL MOTIONS OF SYSTEMS WITH SHOCK INTERACTION

V. A. Gorokhov

The method has been proposed for deriving the equations of periodical motions of a dynamic system with shock interactions.

УДК 62—526

ВЛИЯНИЕ ЛЮФТА МЕЖДУ СЕРВОМОТОРОМ И РЕГУЛИРУЮЩИМ ОРГАНОМ НА ПРОЦЕСС НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Л. Г. Хаскельберг

Методом точечных преобразований рассматривается влияние люфта между сервомотором (постоянной скорости, без зоны нечувствительности) и регулирующим органом на динамику непрямого регулирования. Предполагается, что в системе существует жесткая обратная связь, чувствительный элемент безынерционен, а объект регулирования имеет положительное самовыравнивание.

В настоящей работе исследуется процесс непрямого регулирования при условии, что в системе сервомотор — золотник — золотник существует жесткая обратная связь. Сервомотор предполагается постоянной скорости, без зоны нечувствительности. Кроме того, в дальнейшем считается, что чувствительный элемент безынерционен, а объект регулирования имеет положительное самовыравнивание.

Цель работы — изучить влияние люфта между сервомотором и регулирующим органом. Все исследование проводится методом точечных преобразований [1].

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения системы могут быть записаны (в безразмерных координатах) в следующем виде [4]:

уравнение объекта регулирования

$$T_a \varphi' + k\varphi = \mu_p; \quad (1)$$

уравнение чувствительного элемента

$$\delta\eta + \varphi = 0; \quad (2)$$

уравнение золотника

$$\sigma = \eta - \mu_c; \quad (3)$$

уравнение сервомотора

$$\mu_c' = \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{1}{T_s}; \quad (4)$$

$$\mu_c - \mu_p = \operatorname{sgn}(\mu_p') (\varepsilon/2\delta) \text{ для } \mu_p' \neq 0; \quad (5a)$$

$$|\mu_c - \mu_p| < \varepsilon/2\delta \text{ для } \mu_p' = 0. \quad (5b)$$

Соотношения (5a) и (5b) выражают зависимость между координатами сервомотора и регулирующего органа при наличии зазора между ними. В (1)—(5) φ — относительное отклонение регулируемой координаты, η — относительное смещение чувствительного элемента, σ — относительное смещение золотника сервомотора, μ_c — относительное смещение сервомотора, μ_p — относительное смещение регулирующего органа,

T_a — время разгона объекта регулирования, k — коэффициент самовыравнивания объекта, δ — коэффициент неравномерности чувствительного элемента, ε — коэффициент нечувствительности, вызываемой люфтом между сервомотором и регулирующим органом, T_s — время сервомотора.

Уравнения (1)–(5) после замены переменных

$$\mu_c = \frac{\varepsilon}{\delta} x; \quad \mu_p = \frac{\varepsilon}{\delta} y$$

приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{sgn}(\sigma) A; \\ y' &= 0; \\ \sigma' &= -Bx - Cy - D\sigma - \frac{\varepsilon}{\delta} x' \end{aligned} \quad (6a)$$

для $|x - y| < 1/2$;

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{sgn}(\sigma) A; \\ y' &= \operatorname{sgn}(\sigma) A; \\ \sigma' &= -Bx - Cy - D\sigma - \frac{\varepsilon}{\delta} x' \end{aligned} \quad (6b)$$

для $x - y = \pm 1/2$.

После подстановки значения $x' = \operatorname{sgn}(\sigma)A$ эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{sgn}(\sigma)A; \\ y' &= 0; \\ \sigma' &= -Bx - Cy - D\sigma - \operatorname{sgn}(\sigma)E \end{aligned} \quad (7a)$$

для $|x - y| < 1/2$;

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{sgn}(\sigma)A; \\ y' &= \operatorname{sgn}(\sigma)A; \\ \sigma' &= -Bx - Cy - D\sigma - \operatorname{sgn}(\sigma)E \end{aligned} \quad (7b)$$

для $x - y = \pm 1/2$.

Постоянные A, B, C, D, E следующим образом выражаются через параметры системы:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\delta}{\varepsilon T_s}; \quad B = \frac{k\varepsilon}{\delta T_a}; \quad C = \frac{\varepsilon}{\delta^2 T_a}; \\ D &= k/T_a; \quad E = 1/T_s. \end{aligned} \quad (8)$$

Между A, B, D, E имеется зависимость $E = AB/D$. Из (8) следует, что постоянные A, B, C, D, E положительны.

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА. ДООПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДАЧИ

Фазовое пространство трехмерно. Оно заполнено отрезками траекторий, лежащими либо в параллельных плоскостях $y = \operatorname{const}$, либо в полуплоскостях $H(x - y = -1/2; \sigma < 0)$ или $H'(x - y = 1/2; \sigma > 0)$. Изображающая точка может находиться либо на полуплоскостях H или H' , либо в области $|x - y| < 1/2$.

Система (7), (7а) не определяет разбиения на траектории плоскости $\sigma = 0$. На плоскости $\sigma = 0$ выделяется область G , ограниченная отрезками прямых $x - y = -1/2$, $x - y = 1/2$, $-Bx - Cy - E = 0$, $-Bx - Cy + E = 0$. Интегральные кривые, примыкающие к области G с обеих сторон плоскости $\sigma = 0$, направлены навстречу друг другу. Естественно доопределить задачу так, чтобы разбиение фазового пространства рассматриваемой системы было предельным при $\bar{\sigma}_0 \rightarrow 0$ для разбиения фазового пространства системы, характеристика сервомотора в которой имеет вид [1,2]

$$\mu_c = F(\sigma) = -F(-\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} & \text{для } \sigma > \bar{\sigma}_0 \\ \frac{1}{T_s} \frac{\sigma}{\bar{\sigma}_0} & \text{для } \sigma \leq \bar{\sigma}_0 \end{cases}. \quad (9)$$

При таком доопределении изображающая точка, попавшая на плоскость $\sigma = 0$ вне области G , продолжает свое движение вдоль интегральной кривой по другую сторону плоскости $\sigma = 0$. Изображающая точка, попавшая в область G , продолжает свое движение по одной из траекторий разбиения области G . Если изображающая точка попадает на ограничивающие G части прямых $x - y = -1/2$ или $x - y = 1/2$, то далее она движется по этим прямым.

Разбиение области G на траектории определяется системой

$$\begin{aligned} y' &= 0, \\ x' &= \frac{\varepsilon}{\delta} (-Bx - Cy) \end{aligned} \quad (10a)$$

для $|x - y| < 1/2$ и уравнением

$$x' = \frac{\varepsilon}{\delta} (-Bx - Cy) \quad (10б)$$

для $x - y = \pm 1/2$. Система (10а), (10б) получается из (6а), (6б) при $\sigma = 0$ и $\sigma' = 0$. Состояния равновесия доопределенной системы заполняют отрезок

$$-Bx - Cy = 0; \quad \sigma = 0; \quad |x - y| \leq 1/2.$$

Изображающая точка не может покинуть H (H') при $\sigma < 0$ (соответственно при $\sigma > 0$), что легко доказывается рассмотрением знака $(x - y)'$ в области $|x - y| < 1/2$. Изображающая точка может перейти с H (H') в область $|x - y| < 1/2$ только через прямую $x - y = -1/2$, $\sigma = 0$ ($x - y = 1/2$, $\sigma = 0$). Интегральные кривые на полуплоскости H (H') подходят к прямой $x - y = -1/2$, $\sigma = 0$ ($x - y = +1/2$, $\sigma = 0$) при $y < \left(\frac{B}{2} + E\right)(B + C)^{-1}$ ($y > \left(-\frac{B}{2} + E\right)(B + C)^{-1}$). Изображающая точка с прямой $x - y = -1/2$, $\sigma = 0$ ($x - y = 1/2$, $\sigma = 0$) переходит в область $|x - y| < 1/2$ при

$$y < \left(\frac{B}{2} - E\right)(B + C)^{-1} \quad (y > (-B/2 + E)(B + C)^{-1}).$$

Как показывается ниже, изображающая точка, покинувшая H (H') при

$$y < -\frac{B}{2(B+C)} \frac{1 + e^{-D/A}}{1 - e^{-D/A}} \quad \left(y > \frac{B}{2(B+C)} \frac{1 + e^{-D/A}}{1 - e^{-D/A}}\right),$$

попадает на полуплоскость $H'(H)$.

Нетрудно показать, что

$$-\frac{B}{2(B+C)} \frac{1+e^{-D/A}}{1-e^{-D/A}} < \frac{B/2-E}{B+C}.$$

Если

$$-\frac{B}{2(B+C)} \frac{1+e^{-D/A}}{1-e^{-D/A}} < y < \frac{B/2-E}{B+C} \left(\frac{-B/2+E}{B+C} < y < \frac{B}{2(B+C)} \frac{1+e^{-D/A}}{1-e^{-D/A}} \right),$$

то изображающая точка попадает в область G плоскости $\sigma = 0$ и по траектории разбиения области G асимптотически приближается к состоянию равновесия.

Интегральные кривые на полуплоскости $H'(H)$ либо пересекают полупрямую

$$x-y=1/2, \sigma=0, y > \frac{-B/2+E}{B+C} \left(x-y=-1/2, \sigma=0, y < \frac{B/2-E}{B+C} \right)$$

и далее переходят в область $|x-y| < 1/2$, либо попадают на интервал

$$-\frac{B/2+E}{B+C} < y < \frac{-B/2+E}{B+C} \left(\frac{B/2-E}{B+C} < y < \frac{B/2+E}{B+C} \right).$$

В последнем случае изображающая точка асимптотически приближается к положению равновесия.

3. РАЗБИЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА. РАЗБИЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ

Обозначим полупрямую

$$x-y=-1/2, \sigma=0, y < -\frac{B}{2(B+C)} \frac{1+e^{-D/A}}{1-e^{-D/A}}$$

через L . Через L' обозначим полупрямую

$$x-y=1/2, \sigma=0, y > \frac{B}{2(B+C)} \frac{1+e^{-D/A}}{1-e^{-D/A}}.$$

Интегральные кривые системы (2) производят отображение полупрямой $L(L')$ на $H'(H)$. Обозначим это преобразование через $S(S')$.

Точки полуплоскости $H'(H)$ интегральными кривыми системы (2а) отображаются на точки полупрямой $x-y=1/2, \sigma=0, y > > -(B/2+E)(B+C)^{-1}$ (соответственно $x-y=-1/2, \sigma=0, y < < (B/2+E)(B+C)^{-1}$). Обозначим это преобразование через T (соответственно T'). Преобразование $STS'T'$ переводит точки полупрямой L либо в точки этой же полупрямой, либо в точки области G — области скользящих движений.

В силу симметричности фазового пространства относительно начала координат для изучения характера движений в системе достаточно рассмотреть преобразование ST . Структура преобразования ST может быть выяснена изучением взаиморасположения двух кривых: кривой γ и кривой Γ , расположенных на полуплоскости H' . Кривая γ есть образ полупрямой L при преобразовании S . Этой кривой принадлежат все те точки полуплоскости H' , в которых заканчиваются отрезки траекторий, расположенные в плоскостях $y = \text{const}$ и имеющие своими начальными точками точки на полупрямой L . Кривая Γ есть геометрическое место точек

полуплоскости H' , обладающих тем свойством, что преобразование T не изменяет по абсолютной величине их расстояния до плоскости $y=0$.

Будем изучать взаимное расположение кривых γ и Γ , проектируя их на плоскость $x=0$.

Для получения уравнения кривой γ нужно найти решение системы (2) при условиях

$$x(0) - y_0 = -1/2, \quad x(\tau) - y_0 = 1/2, \quad \sigma(0) = 0.$$

Здесь τ — время пробега изображающей точки от L до H' . Уравнение кривой γ связывает значения σ и y при $t=\tau$. Уравнение кривой γ имеет вид

$$\sigma(\tau) = -\frac{B+C}{D} (1 - e^{-D/A}) y_0 - \frac{B}{2D} (1 + e^{-D/A}). \quad (11)$$

Уравнение (11) есть уравнение прямой. Кривая γ пересекает прямую $x - y = 1/2, \sigma = 0$ в точке с координатой

$$y = -\frac{B}{2(B+C)} \frac{1 + e^{-D/A}}{1 - e^{-D/A}} < 0.$$

Уравнение кривой Γ находится из (7а) и условий

$$x(0) - y_0 = \frac{1}{2}; \quad x(\tau_1) - (-y_0) = \frac{1}{2}; \quad \sigma(\tau_1) = 0.$$

Здесь τ_1 — время пробега изображающей точки по интегральной кривой на полуплоскости H' от точки с координатами σ_0, y_0 до точки с координатами $0, -y_0$. Тогда получаем

$$\sigma_0 = \left[\frac{AC}{D^2} + \frac{B+C}{D} y_0 - \frac{B}{2D} \right] \left(1 - e^{-\frac{2D}{A} y_0} \right) - \frac{2(B+C)}{D} y_0. \quad (12)$$

В дальнейшем вместо $\sigma(t), \sigma_0, y_0$ в формулах (11) и (12) будем писать σ и y .

Свойства кривой Γ :

1) $\sigma|_{y=0} = 0$;

2) $\lim_{y \rightarrow -\infty} \sigma = +\infty$;

3) $\frac{d\sigma}{dy} = -\frac{B+C}{D} + \left[\frac{C}{D} - \frac{B}{D} - \frac{B}{A} + 2\frac{B+C}{A} y \right] e^{-\frac{2D}{A} y}$;

4) $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{d\sigma}{dy} = -\infty$;

5) $\frac{d\sigma}{dy} \Big|_{y=0} = -B(2/D + 1/A) < 0$;

6) $\frac{d^2\sigma}{dy^2} = 2e^{-\frac{2D}{A} y} \left[\frac{2B}{A} + \frac{BD}{A^2} - \frac{2(B+C)D}{A^2} y \right]$.

Из (6) видно, что $d^2\sigma/dy^2 > 0$ для $y < 0$. Из 4), 5) и 6) следует, что $d\sigma/dy$ при y , возрастающем от $-\infty$ до 0, монотонно возрастает от $-\infty$ до $-B(2/D + 1/A) < 0$. Отсюда следует, что кривая Γ с любой прямой

(в частности, с прямой γ) может иметь не более двух точек пересечения (для $y < 0$).

Взаимное расположение кривых γ и Γ показано на рис. 1а, б. Определим условия пересечения кривых Γ и γ . Так как, для точек кривой Γ $\sigma > 0$ при $y < 0$, то пересечение Γ и γ может иметь место только для

$$y < -\frac{B}{2(B+C)} \frac{1 + e^{-D/A}}{1 - e^{-D/A}} < 0.$$

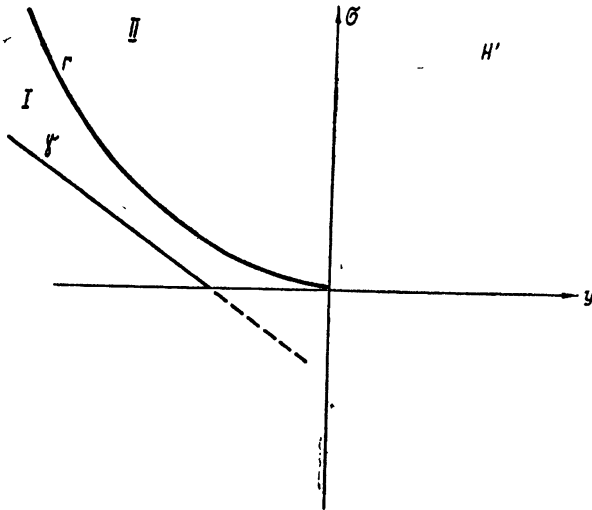


Рис. 1а.

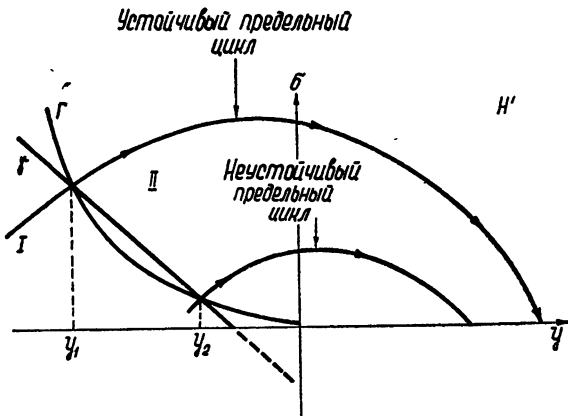


Рис. 16.

Из (11) и (12) получаем условие пересечения кривых γ и Γ :

$$m - ny = (p + qy) e^{-\alpha y}; \tag{13}$$

где

$$m = \frac{AC}{D} + \frac{B}{2} e^{-D/A}, \quad n = (B + C) e^{-D/A}, \tag{14}$$

$$p = \frac{AC}{D} - \frac{B}{2}, \quad q = B + C, \quad \alpha = \frac{2D}{A}.$$

Так как A, B, C, D положительны, то из (14) следует, что m, n, q, α также положительны.

Найдем условие существования отрицательного решения уравнения (13). Пусть $p < 0$. Тогда уравнение (13) не имеет отрицательных решений, так как при $p < 0$ и $y < 0$ левая часть (13) положительна, правая — отрицательна. Пусть теперь $p > 0$. Из (14) следует, что $m > p > 0$. Обозначим $F_1(y) = m - ny$; $F_2(y) = (p + qy)e^{-\alpha y}$. Графики $F_1 = F_1(y)$ и $F_2 = F_2(y)$ имеют вид, показанный на рис. 2 (показан случай пересечения). Найдем необходимые условия пересечения кривых $F_1 = F_1(y)$ и $F_2 = F_2(y)$.

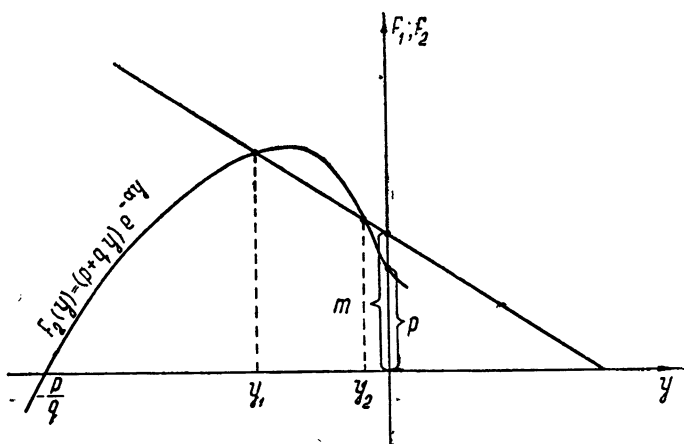


Рис. 2.

Из рис. 2 видно, что для $y < 0$ кривые $F_1 = F_1(y)$ и $F_2 = F_2(y)$ могут пересекаться только при $-p/q < y < 0$. Из свойств кривой Γ , а также из рис. 2 следует, что при существовании отрицательных решений уравнения (13) число таких решений равно двум (частный случай — два совпавших решения).

Обозначим эти решения через y_1 и y_2 (в порядке возрастания). При $y = y_1$ и $y = y_2$ должно быть

$$F_1(y_1) = F_2(y_1), \quad F'_1(y_1) < F'_2(y_1); \quad (15a)$$

$$F_1(y_2) = F_2(y_2), \quad F'_1(y_2) > F'_2(y_2). \quad (15b)$$

Подставляя значения $F_1(y), F_2(y), F'_1(y), F'_2(y)$ и разделив в (15) почленно неравенство на равенство (с учетом положительности $F_2(y_1), F_1(y_1), F_2(y_2), F_1(y_2)$), получим

$$y_1^2 + Ry_1 + M > 0; \quad (16a)$$

$$y_2^2 + Ry_2 + M < 0. \quad (16b)$$

Здесь

$$R = \frac{np - mq}{nq}; \quad M = \frac{mq + np - \alpha mp}{\alpha nq}. \quad (17)$$

Из (16) следует, что трехчлен

$$Q(y) = y^2 + Ry + M \quad (18)$$

в точках пересечения кривых $F_1 = F_1(y)$ и $F_2 = F_2(y)$ принимает зна-

чения разных знаков. Это означает, что между y_1 и y_2 имеется корень трехчлена $Q(y)$ (очевидно, только один). Поэтому исследование уравнения (8) проводится так. Составляется трехчлен $Q(y)$; находятся его корни $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$. Если эти корни комплексны, или если ни $y^{(1)}$, ни $y^{(2)}$ не принадлежат интервалу $(-p/q, 0)$, то уравнение (8) отрицательных решений не имеет. Пусть теперь $y^{(1)}$ или $y^{(2)}$ (или оба) принадлежат интервалу $(-p/q, 0)$. Пусть, например, $y^{(1)} \in (-p/q, 0)$, а $y^{(2)} \notin (-p/q, 0)$. Подставим $y = y^{(1)}$ в (11) и (12); обозначим полученные значения соответственно через σ_γ и σ_Γ . Тогда при условии

$$\sigma_\gamma > \sigma_\Gamma \quad (19a)$$

кривые γ и Γ (одновременно $F_1(y)$ и $F_2(y)$) пересекаются в интервале $(-p/q, 0)$. Если же

$$\sigma_\gamma < \sigma_\Gamma, \quad (19b)$$

то кривые γ и Γ не пересекаются в $(-p/q, 0)$. Если и $y^{(1)}$, и $y^{(2)}$ принадлежат интервалу $(-p/q, 0)$, то проверяем выполнение условий (19a) или (19b) для обеих корней.

Наличие хотя бы одного принадлежащего интервалу $(-p/q, 0)$ корня трехчлена $Q(y)$ является необходимым условием пересечения кривых γ и Γ (одновременно $F_1 = F_1(y)$ и $F_2 = F_2(y)$). Если же, кроме того, для какого-либо принадлежащего интервалу $(-p/q, 0)$ корня трехчлена $Q(y)$ выполняется условие (19a), то получается необходимое и достаточное условие пересечения кривых γ и Γ . Точки пересечения γ и Γ расположены левее прямой

$$y = -\frac{B}{2(B+C)} \frac{1 + e^{-D/A}}{1 - e^{-D/A}}.$$

Заметим справедливость неравенства

$$-\frac{B}{2(B+C)} \frac{1 + e^{-D/A}}{1 - e^{-D/A}} > -\frac{B}{2(B+C)} \left(1 + 2\frac{A}{D}\right). \quad (20)$$

Здесь $y = -\frac{B}{2(B+C)} \left(1 + 2\frac{A}{D}\right)$ — координата точки пересечения прямых на плоскости $\sigma = 0$: $-Bx - Cy - E = 0$ и $x - y = \frac{1}{2}$. Это неравенство легко доказывается путем рассмотрения функции

$$g(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2 \frac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)}.$$

Для всех $x > 0$ $g(x) < 0$.

Пусть кривые γ и Γ пересекаются и пусть $y = y^{(1)}$ — тот принадлежащий интервалу $(-p/q, 0)$ корень трехчлена (18), для которого выполняется условие (19a). Обозначим через $\bar{\sigma}_\gamma$ и $\bar{\sigma}_\Gamma$ те значения σ в (11) и (12), которые получаются при подстановке в (11) и (12) значения

$$y = -\frac{B}{2(B+C)} \left(1 + 2\frac{A}{D}\right).$$

Если

$$\bar{\sigma}_\gamma < \bar{\sigma}_\Gamma; \quad y^{(1)} > -\frac{B}{2(B+C)} \left(1 + 2\frac{A}{D}\right),$$

то траектории, проходящие через точки пересечения кривых γ и Γ , пересекают прямую $x - y = 1/2$, $\sigma = 0$ в точках с координатой

$$y < \frac{B}{2(B+C)} \left(1 + 2 \frac{A}{D} \right),$$

т. е. изображающая точка попадает на отрезок скользящих движений и затем асимптотически приближается к положению равновесия. Если

$$\bar{\sigma}_\gamma < \bar{\sigma}_\Gamma; \quad y^{(1)} < - \frac{B}{2(B+C)} \left(1 + 2 \frac{A}{D} \right),$$

то через точки пересечения γ и Γ проходят периодические решения системы — предельные циклы.

Если же $\bar{\sigma}_\gamma > \bar{\sigma}_\Gamma$, то через точку пересечения γ и Γ с координатой y_1 проходит предельный цикл; проходящая же через точку пересечения с координатой y_2 ($y_2 > y_1$) траектория попадает на отрезок скользящих движений и затем асимптотически приближается к положению равновесия.

Исследуем теперь устойчивость периодических решений (если они существуют).

Кривая Γ делит полуплоскость H' на области I и II (рис. 1). Точки области I преобразованием T переводятся в такие точки прямой $x - y = 1/2$, $\sigma = 0$, координата y которых меньше (по модулю) координаты y исходной точки. Точки области II переводятся в такие точки прямой $x - y = 1/2$, $\sigma = 0$, координата y которых больше (по модулю) координаты y исходной точки. Преобразование T не меняет расстояния (по модулю) от плоскости $y = 0$ точек кривой Γ . Отсюда легко показать, что через точку с координатой y_1 проходит устойчивый, а через точку с координатой y_2 — неустойчивый предельный цикл.

При отсутствии пересечения γ и Γ система абсолютно устойчива.

Рассмотрим теперь движение изображающей точки в области скользящего режима. Движение изображающей точки, попавшей в область скользящих движений, определяется системой (10), (10а). Если изображающая точка попадает на один из отрезков NP , PK , SQ , MQ (рис. 3), то в силу (10а) она асимптотически приближается к положению равновесия P (с NP , KP) или Q (с MQ , SQ). Если изображающая точка попадает внутрь области G , то в силу (10) она движется в плоскости G вдоль прямой $y = y_0$ до NP (SQ) и далее к положению равновесия P (Q). Если прямая $y = y_0$ пересекает отрезок PQ , то изображающая точка движется по прямой $y = y_0$ до точки пересечения прямых $y = y_0$ и PQ . Точки отрезка PQ являются устойчивыми состояниями равновесия.

Из (8), (17)–(19) получаем разбиение пространства параметров системы на области абсолютной устойчивости и области существования периодических режимов. В качестве параметров можно выбрать A , B , C , D , определенные формулами (8).

Два многообразия в пространстве параметров, определяемые условиями

$$\sigma_\gamma^{(1)} = \sigma_\Gamma^{(1)}, \quad - \frac{p}{q} < y^{(1)} < 0, \quad p > 0 \quad (21)$$

и

$$\sigma_\gamma^{(2)} = \sigma_\Gamma^{(2)}, \quad - \frac{p}{q} < y^{(2)} < 0, \quad p > 0, \quad (22)$$

являются бифуркационными. Здесь $y^{(1)}, y^{(2)}$ — корни трехчлена (18), $\sigma_{\Gamma}^{(1)}$ и $\sigma_{\Gamma}^{(2)}$, $\sigma_{\gamma}^{(1)}$ и $\sigma_{\gamma}^{(2)}$ — результат подстановки в (11) и (12) соответственно $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$; p, q определены формулами (14).

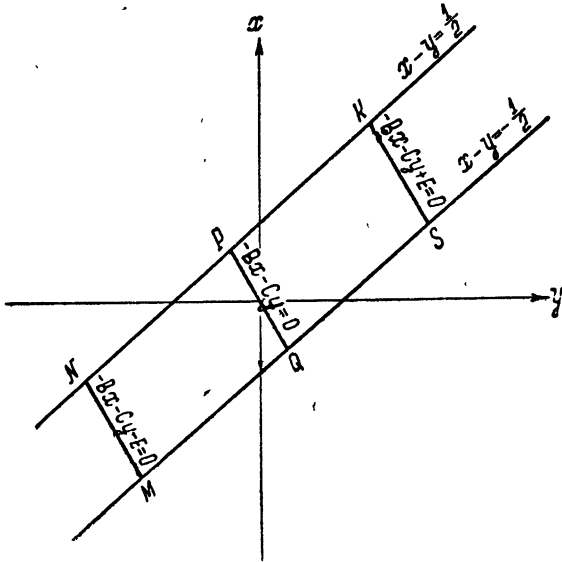


Рис. 3.

Переходу точки пространства параметров через многообразия (21) или (22) (из области $\sigma_{\gamma}^{(1)} > \sigma_{\Gamma}^{(1)}, -p/q < y^{(1)} < 0, p > 0$ в область $\sigma_{\gamma}^{(1)} < \sigma_{\Gamma}^{(1)}, -p/q < y^{(1)} < 0, p > 0$ или из области $\sigma_{\gamma}^{(2)} > \sigma_{\Gamma}^{(2)}, -p/q < y^{(2)} < 0, p > 0$ в область $\sigma_{\gamma}^{(2)} < \sigma_{\Gamma}^{(2)}, -p/q < y^{(2)} < 0, p > 0$) соответствует в фазовом пространстве системы слияние устойчивого и неустойчивого предельных циклов в полуустойчивый предельный цикл (при $\sigma_{\gamma}^{(1)} = \sigma_{\Gamma}^{(1)}$ или $\sigma_{\gamma}^{(2)} = \sigma_{\Gamma}^{(2)}$) и затем его исчезновение (при $\sigma_{\gamma}^{(1)} < \sigma_{\Gamma}^{(1)}$ или $\sigma_{\gamma}^{(2)} < \sigma_{\Gamma}^{(2)}$).

Поверхность в пространстве параметров $R^2 - 4M = 0$ (R и M определены формулами (17) и (14)) не является бифуркационной. При $R^2 - 4M = 0$ корни трехчлена (13) совпадают; кроме того,

$$y^{(1)} = y^{(2)} = -\frac{R}{2} = \frac{B + C}{2} \left[\frac{AC}{D} (1 - e^{-D/A}) + Be^{-D/A} \right] > 0. \quad (23)$$

Из (23) следует, что $y^{(1)} = y^{(2)}$ не принадлежит интервалу $(-p/q, 0)$, т. е. не выполняется необходимое условие пересечения кривых γ и Γ . Поэтому при пересечении точкой в пространстве параметров поверхности $R^2 - 4M = 0$ характер разбиения фазового пространства не изменяется (абсолютная устойчивость сохраняется вблизи $R^2 - 4M = 0$ как для $R^2 - 4M > 0$, так и для $R^2 - 4M < 0$).

Рассмотрим разбиение пространства параметров в случае нулевого самовыравнивания. Производя предельный переход и раскрывая неопределенности, получим, что для $k = 0$ уравнение кривой γ :

$$\sigma = -\frac{C}{A} y - \frac{B}{D}, \quad (24)$$

а уравнение кривой Γ :

$$\sigma = -2 \frac{B}{D} y. \quad (25)$$

Переходя к пределу в выражении для R (14) и (17), получим

$$\lim_{k \rightarrow 0} R = -1.$$

Для M из (14) и (17) получаем асимптотическое выражение для M при малых k (одновременно с k мало и $D = k/T_a$):

$$M \sim -A/2D.$$

Для корней трехчлена (18) получаем асимптотические выражения

$$y^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2A}{D}}; \quad y^{(2)} \sim -\sqrt{\frac{2A}{D}}.$$

При $k = 0$ интервал $(-p/q, 0)$ есть интервал $(-\infty, 0)$. Подставим поэтому в (24) и (25) $y^{(2)} \sim -\sqrt{\frac{2A}{D}}$; тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\Gamma} &= -\frac{C}{A} y^{(2)} - \frac{B}{D}; \quad \sigma_{\gamma} = 2\frac{B}{D} y^{(2)}; \\ \sigma_{\gamma} - \sigma_{\Gamma} &= \left[-\frac{C}{A} + 2\frac{B}{D} \right] y^{(2)} - \frac{B}{D}. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как $y^{(2)} \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow 0$, а $B/D = \varepsilon/\delta$, то знак разности $\sigma_{\gamma} - \sigma_{\Gamma}$ при $k = 0$ определяется знаком $-C/A + 2B/D$. Если

$$-\frac{C}{A} + 2\frac{B}{D} > 0, \quad (27)$$

то $\sigma_{\gamma} < \sigma_{\Gamma}$. Из (196) следует абсолютная устойчивость системы. Если же

$$-C/A + 2B/D < 0, \quad (28)$$

то $\sigma_{\gamma} > \sigma_{\Gamma}$ и γ, Γ пересекаются в одной точке, через которую проходит неустойчивый предельный цикл. (Координата y второй точки пересечения γ и Γ при $k \rightarrow 0$ стремится к $-\infty$.)

Подставляя значения A, B, C, D из (8) в (27), получим условие абсолютной устойчивости системы:

$$\varepsilon < 2\delta^2 T_a / T_s. \quad (29)$$

Условие (29) совпадает с условием, полученным в [4], но отличается (множителем 2) от условия, приведенного в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Адронов, Н. Н. Баутин, Г. А. Горелик, Автоматика и телемеханика, 7, 15 (1946).
2. А. А. Адронов, Н. Н. Баутин, Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 3 (1955).
3. Ю. В. Долголенко, Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 3 (1954).
4. Ю. Г. Корнилов, Автоматика и телемеханика, 11, 39 (1950).

Азербайджанский политехнический институт
(г. Баку)

Поступила в редакцию
28 июня 1965 г.

THE EFFECT OF BACKLASH BETWEEN SERVO MOTOR AND CONTROL ELEMENT ON THE PROCESS OF INDIRECT CONTROL

L. G. Khaskel'berg

The effect of backlash between the servomotor (at a constant speed, without insensitivity zone) and the control element on the dynamics of indirect control is considered by the pointwise transformation method. It is assumed that there exist a rigid feedback, a sensitive element being inertialess and controlled member having a positive self-regulation.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.371.177

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ ВО ВРЕМЯ ИОНОСФЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ 18.4.1965 г.

В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов

18 апреля 1965 г. в Зименках было зарегистрировано весьма редкое для умеренных широт в эпоху минимума солнечной деятельности событие — появление аномального поглощения радиоволн в ионосфере полярного типа. В настоящей заметке сообщаются предварительные результаты измерений величины аномального поглощения радиоволн в этот день, полученные радиоастрономическим методом одновременно на нескольких частотах.

Записи уровня космического радиоизлучения велись на частотах 24,6, 13,0; 8,9 и 8,5 Мгц. Расчетные диаграммы направленности антенн на частотах 24,6 и 13 Мгц составляли около $25^\circ \times 18^\circ$ по уровням половинной мощности в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Размеры диаграмм направленности антенн на частотах 8,5 и 8,9 Мгц были равны соответственно $25^\circ \times 35^\circ$ и $5^\circ \times 8^\circ$. Аномальное поглощение появилось около 9 час 50 мин по московскому времени и продолжалось примерно до 20 часов. Изменения величины поглощения Γ в этот период времени представлены на рис. 1, где кружками и крестиками обозначены результаты измерений на частотах 8,5 и 8,9 Мгц, а треугольниками и точками — результаты измерений на частотах 13 и 24,6 Мгц. Пунктирные линии проводились в тех местах, где измерения Γ были ненадежны. Это относится, в частности, к первой вспышке поглощения, поскольку она совпала с прохождением источника Кассиопея-А через диаграммы направленности приемных антенн (на частоте 8,5 Мгц, где из-за широкой диаграммы направленности вклад источника был невелик, в это время наблюдались помехи).

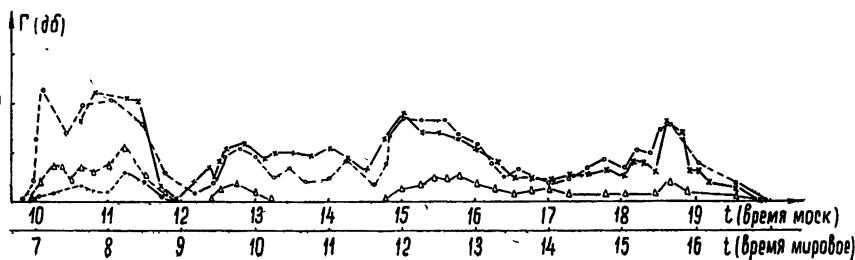


Рис. 1.

Как видно из рис. 1, величина Γ достигала значений порядка $1,5 \div 2$ дБ на частотах 8,5 и 8,9 Мгц. На $f=13$ Мгц поглощение было в $2 \div 3$ раза меньше, а на $f=25$ Мгц не превышало 0,2 дБ (за исключением первой вспышки поглощения, которая требует дополнительного рассмотрения). Эти значения величин Γ в пределах ошибок измерений соответствуют закону обратной зависимости поглощения от квадрата рабочей частоты.

Результаты измерений Γ на частотах 8,5 и 8,9 Мгц оказались весьма близки друг к другу на протяжении всего периода ионосферного возмущения. Выше уже упоминалось, что каналы на этих частотах существенно отличались друг от друга размерами антенных систем. Можно полагать поэтому, что область ионизации не содержала значительных горизонтальных неоднородностей с масштабом порядка $5 \div 10$ км.

Аномальное поглощение полярного типа регистрировалось в Зименках и ранее во время ряда мировых магнитных бурь 1959—1961 гг. [1]. Однако в тех случаях постоянно наблюдалось нарушение закона обратной зависимости поглощения от квадрата частоты, что связывалось с определенной высотой области ионизации. В [2] было обращено внимание на то, что определяемая на опыте частотная зависимость поглощения $\Gamma(f)$ может существенно отличаться от действительной зависимости $\Gamma(f)$ при наличии горизонтальных неоднородностей в области ионизации и что именно это обстоятельство явилось, возможно, основной причиной нарушения закона обратной квадратичной зависимости для аномального поглощения во время магнитной бури 28.10.1961 г. Случай 18.IV.1965 г., как мы видим, не противоречит этой точке зрения.

Авторы признательны А. А. Белобородовой за помощь при обработке данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, В. В. Толмачева, Геомagnetизм и аэрoномия, 5, 698 (1965).
2. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, А. В. Толмачева, Геомagnetизм и аэрoномия (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 октября 1965 г.

УДК 621.371.165

РАСSEЯНИЕ ВОЛН ПЛОЩАДКОЙ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Е. В. Чаевский

Если поле, рассеянное площадкой с нормальным распределением случайных отклонений, описывать в приближении Кирхгофа, то, согласно [1], для среднего квадрата флуктуационной компоненты поля имеем

$$I = k^2 A G, \quad (1)$$

где k — волновое число, A — величина, не зависящая от k и параметров шероховатостей,

$$G = e^{-h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{h^2 r} - 1] \exp [ik(a_x x + a_y y)] dx dy. \quad (2)$$

Обозначения в (2) те же, что и в [2].

Анализ индикатрисы рассеяния (1) для высоких ($h \gg 1$) и низких ($h \ll 1$) неровностей приведен в литературе [1—3]. Однако метод Кирхгофа не требует выполнения этих неравенств; ограничения в методе Кирхгофа накладываются только на характерную длину неровностей и характерные наклоны. Поэтому при достаточно пологих длинных шероховатостях формула (1) пригодна и для описания поля, рассеянного неровностями, сравнимыми по высоте с длиной падающей волны ($h \sim 1$). В настоящем сообщении с помощью соотношения (1) выясняются некоторые свойства этого поля.

Учитывая анизотропию шероховатостей, предположим, что коэффициент корреляции r имеет вид

$$r(x_0, y_0) = \exp \left[- (x_0^2 \Lambda_{x_0}^{-2} + y_0^2 \Lambda_{y_0}^{-2}) \right]. \quad (3)$$

Здесь x_0, y_0 — ортогональная система координат в плоскости отражающей площадки, причем ось x_0 ориентирована в направлении минимального радиуса корреляции ($\Lambda_{x_0} \leq \Lambda_{y_0}$). Если ось x ортогональной системы координат x, y на отражающей площадке ориентировать вдоль проекции волнового вектора падающей волны, то

$$r(x, y) = \exp \left[- (x^2 \Lambda_{xx}^{-1} - 2xy \Lambda_{xy}^{-1} + y^2 \Lambda_{yy}^{-1}) \right], \quad (4)$$

где

$$\Lambda_{xx}^{-1} = \Lambda_{x_0}^{-2} \cos^2 \varphi + \Lambda_{y_0}^{-2} \sin^2 \varphi, \quad (5)$$

$$\Lambda_{xy}^{-1} = (\Lambda_{x_0}^{-2} - \Lambda_{y_0}^{-2}) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \Lambda_{yy}^{-1} = \Lambda_{x_0}^{-2} \sin^2 \varphi + \Lambda_{y_0}^{-2} \cos^2 \varphi$$

и φ — угол между осями x_0 и x .

Подставляя (4) в (2), разлагая $e^{h^2 r}$ в ряд и интегрируя почленно, получаем

$$I = \pi k^2 \Delta_{x_0} \Delta_{y_0} A G_0, \tag{6}$$

где

$$G_0 = G_0(\xi, h) = e^{-h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{nn!} e^{-\xi^2/n}, \tag{7}$$

$$\xi^2 = \frac{1}{4} k^2 \Delta_{x_0}^2 \Delta_{y_0}^2 (\alpha_x^2 \Delta_{xx}^{-1} + 2\alpha_x \alpha_y \Delta_{xy}^{-1} + \alpha_y^2 \Delta_{yy}^{-1}). \tag{8}$$

В случае, когда наблюдатель находится в направлении зеркального отражения от площадки, $\alpha_x = \alpha_y = 0$, $\xi = 0$ и ряд (7) непосредственно выражается через табулированные функции. Согласно [4],

$$G_0(0, h) = [\text{Ei}(h^2) - C - 2 \ln h] e^{-h^2}, \tag{9}$$

где $\text{Ei}(t)$ — интегральная экспонента, а C — постоянная Эйлера.

При произвольных ξ и $h^2 \ll 1$ величину $G_0(\xi, h)$ удобно рассчитать путем непосредственного суммирования ряда (7) на электронной вычислительной машине. Однако, когда $h^2 \gg 1$, в ряде (7) необходимо удерживать порядка $2h^2$ членов; при этом удобнее использовать асимптотическое разложение $G_0(\xi, h)$ по малому параметру h^{-2} . Тогда, согласно [2],

$$G_0(\xi, h) = h^{-2} \left[1 + \frac{1}{2} h^{-2} (\psi^4 - 4\psi^2 + 2) + \dots \right] e^{-\psi^2}, \tag{10}$$

где $\psi^2 = \xi^2 h^2$.

На рис. 1 приведены зависимости $G_0(0; h)$, $h^2 G_0(0, h)$, характеризующие рассеяние в зеркальном направлении; на рис. 2 изображено семейство кривых, описывающих индикатрисы рассеяния для различных ξ . Кривые рис. 2 получены суммированием ряда (7) на электронной вычислительной машине. Расчеты по приближенным формулам показывают, что ошибка не превосходит 3%, если а) при $h \leq 0,3$ учитывать только первый член ряда (7); б) при $h \geq 3$ описывать G_0 двумя членами асимптотического ряда (10); в) при $h \geq 6$ ограничиваться первым членом ряда (10).

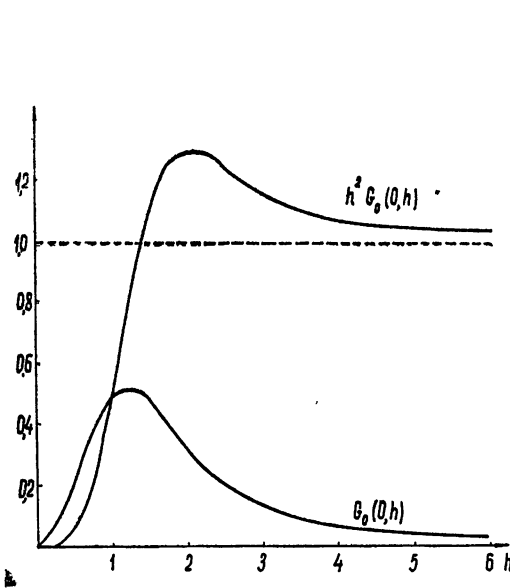


Рис. 1.

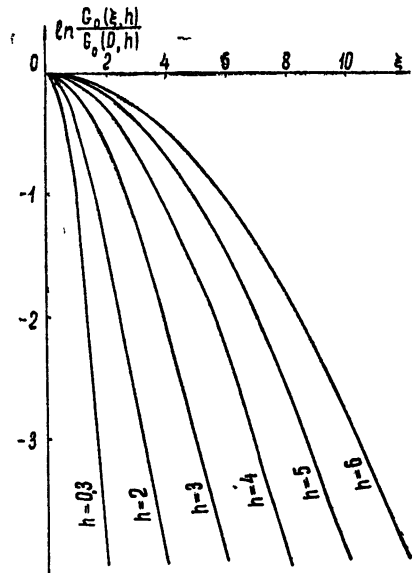


Рис. 2.

Согласно (6), с увеличением высоты неровностей рассеяние энергии в зеркальном направлении с точностью до постоянного множителя описывается функцией $G_0(0, h)$. Если же увеличивается k (или при неизменных наклонах увеличивается высота и длина неровностей), рассеяние энергии в зеркальном направлении описывается функцией $h^2 G_0(0, h)$. Из рис. 1 видно, что в первом случае величина рассеянной энер-

тии достигает максимума при $h = 1,2$, а затем стремится к нулю. Во втором случае максимальное рассеяние достигается при $h = 2$, а затем стремится к насыщению.

Из рис. 2 видно, как по мере увеличения высот неровностей усиливается рассеяние энергии по углам.

Пусть α_2 — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения. Согласно (7), функция G_0 зависит только от безразмерных параметров ξ и h . Поэтому, если на сфере единичного радиуса начертить кривую $\alpha_2(\xi)$, вдоль которой величина ξ остается постоянной, направления $\alpha_2(\xi)$ при произвольных h остаются направлениями постоянной интенсивности рассеяния.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее. Будем описывать единичный вектор α_2 координатами χ, Ω сферической системы координат, обычным образом связанной с декартовой системой XYZ (Ω — азимутальный угол). Функция $G_0(\alpha_x, \alpha_y)$ — остроуглаправленная; интерес представляют лишь малые отклонения α_2 от направления зеркального отражения α_2^* . Введем прямоугольную систему координат с переменными $\Delta\chi, \Delta\Omega$

так, чтобы единичные орты этой системы ориентировались вдоль $\frac{\partial}{\partial\chi}\alpha_2^*, \frac{\partial}{\partial\Omega}\alpha_2^*$. Разлагая α_2 в ряд по $\Delta\chi, \Delta\Omega$ и подставляя в (8), получим

$$\xi^2 = \frac{1}{4} k^2 \Lambda_{x0}^2 \Lambda_{y0}^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\Lambda_{yy}} \Delta\chi^2 + 2 \frac{\cos \theta}{\Lambda_{xy}} \Delta\chi \Delta\Omega + \frac{1}{\Lambda_{xx}} \Delta\Omega^2 \right), \quad (11)$$

где θ — угол падения волн на отражающую площадку.

Величина ξ^2 , как нетрудно показать, положительно определенная; поэтому из (11) следует, что кривые постоянной интенсивности — эллипсы. Если определить угол φ_1 соотношением

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{\sin 2\varphi \cos \theta (\Lambda_{y0}^2 - \Lambda_{x0}^2)}{(1 + \cos^2 \theta) (\Lambda_{x0}^2 \cos^2 \varphi + \Lambda_{y0}^2 \sin^2 \varphi) - (\Lambda_{x0}^2 + \Lambda_{y0}^2)}, \quad (12)$$

то в системе координат $(\Delta\chi_1, \Delta\Omega_1)$, повернутой на угол φ_1 относительно $(\Delta\chi, \Delta\Omega)$, уравнение (11) принимает вид

$$\frac{4\xi^2}{k\Lambda_{x0}^2 \Lambda_{y0}^2} = [\Lambda_{xx}^{-1} \sin^2 \varphi_1 + \Lambda_{xy}^{-1} \cos \theta \sin(2\varphi_1) + \Lambda_{yy}^{-1} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi_1] \Delta\chi_1^2 + \\ + [\Lambda_{xx}^{-1} \cos^2 \varphi_1 - \Lambda_{xy}^{-1} \cos \theta \sin(2\varphi_1) + \Lambda_{yy}^{-1} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi_1] \Delta\Omega_1^2. \quad (13)$$

Согласно (12), одна из осей симметрии эллипса лежит в плоскости падения, если плоскость падения пересекается с площадкой вдоль одного из направлений экстремальной корреляции ($\varphi = 0, \pi/2$). Полуоси эллипса определяются соотношением (13). Как видно из (12), при малых поворотах плоскости падения относительно направления максимальных корреляций ($\varphi = \pi/2$) направления поворотов эллипсов меняются, когда косинус угла падения становится меньше $\Lambda_{x0}\Lambda_{y0}^{-1}$. Если обозначить разность $\varphi - \pi/2$ через δ , повороты эллипсов при малых δ происходят так, как показано на рис. 3.

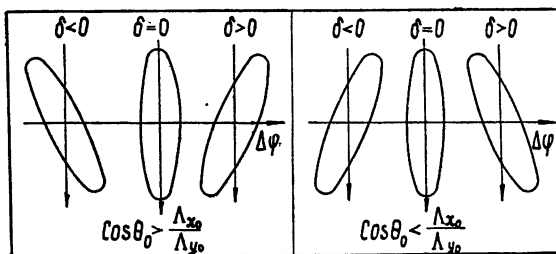


Рис. 3.

В заключение автор благодарит А. Я. Спасьбухова за суммирование ряда (4) на электронной вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исакович, ЖЭТФ, 23, 305 (1952).
2. Е. В. Чаевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 1128 (1965).

3. P. Beckmann, The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces, Pergamon Press, 1963.
4. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
4 августа 1964 г.,
после переработки
4 октября 1965 г.

УДК 533.951

ОБ УСИЛЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПОТОКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ НА РЕЗКОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

С. М. Файнштейн

В литературе (см, например, [1, 2]) подробно исследованы неустойчивости в системе из потока и квазинейтральной плазмы — магнитотормозная и черенковская нестабильности. В [3] рассмотрен вопрос о связанном усилении с переходным излучением плазменных волн квазинейтральным потоком на резкой границе двух плазм. Задача ставится следующим образом: имеется резкая граница двух плазм при температуре T , которые пронизываются квазинейтральным потоком заряженных частиц со средней скоростью V_0 и температурой T_s ; нужно найти коэффициент поглощения электромагнитных волн на резкой границе двух сред.

В [3] методом коэффициентов Эйнштейна вычислен коэффициент поглощения плазменных волн, связанного с переходным излучением. Для электромагнитных волн он имеет аналогичный вид (см. [3]):

$$\mu = \frac{16\pi^3 c^2}{n^2 \omega^2 \kappa T_{s\parallel}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_\omega(\nu) f(\nu) |\nu_\parallel| \left(1 - \frac{V_0}{\nu_\parallel} - \frac{\nu_{T_s\parallel}^2}{\nu_\parallel^2} \right) d\nu_\parallel d\nu_\perp. \quad (1)$$

Здесь n — показатель преломления электромагнитных волн, κ — постоянная Больцмана, ν_\parallel — проекция скорости частицы, перпендикулярная границе плазм, ν_\perp — проекция скорости частицы, перпендикулярная ν_\parallel , $\epsilon_\omega(\nu)$ — спектральная компонента потока электромагнитной энергии, которая излучается нормально границе при пересечении ее частицей, $f(\nu)$ — функция распределения частиц в потоке:

$$f(\nu) = N_s \left(\frac{2\pi\kappa}{m} \right)^{-3/2} (T_{s\parallel}^{-1/2} T_{s\perp}^{-1}) \exp - \left[\frac{m(\nu_\parallel - V_0)^2}{2\kappa T_{s\parallel}} + \frac{m\nu_\perp^2}{2\kappa T_{s\perp}} \right],$$

N_s — равновесная концентрация частиц в потоке, ν_{T_s} — средняя тепловая скорость частиц в потоке, равная $(\kappa T_s/m)^{1/2}$.

Функция $\epsilon_\omega(\nu)$ вычислена в работе [4]:

$$\epsilon_\omega(\nu) = \frac{e^2 \epsilon_2^{3/2} (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \nu_\parallel^4 \nu_\perp^2}{\pi^2 c^7 (\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1})^2}, \quad (2)$$

где $\epsilon_{1,2} = 1 - \omega_{01,2}^2 \omega^{-2}$ — диэлектрическая проницаемость плазмы, $\omega_{01,2}^2 = 4\pi N_{1,2} e^2 m^{-1}$ — ленгмюровская частота ($N_{1,2}$ — равновесная концентрация плазмы).

В формуле (1) не учитываются частицы потока, движущиеся против V_0 ; это справедливо при условии $V_0 \gg \nu_{T_s}$. Формула (2) верна в нерелятивистском приближении: $\nu \ll c$. Кроме того, выражение (2) получено при условии $\omega^2 > \omega_{01,2}^2$, что равносильно положительности показателя преломления волн.

Подставив (2) в (1) и используя приближенную формулу (при условии $V_0 \gg \nu_{T_s}$)

$$\int_0^{\infty} v_{\parallel}^n \exp \left[\frac{-m(v_{\parallel} - V_0)^2}{2\kappa T_{s\parallel}} \right] dv_{\parallel} \approx V_0^n v_{T_{s\parallel}} \sqrt{2\pi} \quad (n = 3, 4, 5),$$

получим

$$\mu = - \frac{32 \pi e^2 \varepsilon_2^{1/2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 N_s}{\omega^2 \kappa T_{s\parallel} (\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1})^2 c^5} \left(\frac{\kappa T_{s\parallel}}{m} \right)^{5/2} \left(\frac{\kappa T_{s\perp}}{m} \right) < 0.$$

Для случая, когда рассматривается усиление волн, распространяющихся против V_0 , в конечном результате необходимо поменять местами индексы 1 и 2; при этом знак μ сохраняется.

Таким образом, при достаточной скорости потока ($V_0 \gg v_{T_s}$) можно получить усиление электромагнитных волн в рассматриваемой системе (об интерпретации отрицательного коэффициента поглощения см. [1])* . В случае моноскоростного потока ($T_s=0$) и холодной плазмы ($T=0$) можно убедиться, что имеет место более эффективная передача энергии от потока к волне (коэффициент усиления может быть много больше единицы)**.

Автор признателен В. В. Железнякову за ценные замечания, М. С. Ковнеру и В. В. Тамойкину за обсуждение данной заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).
2. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., 35, 694 (1958).
3. С. М. Файнштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 19 (1965).
4. В. Е. Пафомов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 484 (1962).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
24 февраля 1965 г.

УДК 53:519.25

О ФЛУКТУАЦИОННО-ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ

Ф. В. Бункин, Ю. Б. Конев

Известно (см., например, [1]), что существует общая связь между спектральной интенсивностью равновесных флуктуаций в произвольной системе и той частью ее обобщенной восприимчивости, которая определяет диссипацию энергии. Эта связь устанавливается флуктуационно-диссипационной теоремой, которая в общем случае многих флуктуирующих величин x_i имеет вид

$$F_{ik}^{(1)}(\omega) = \frac{\hbar}{2\pi} a_{ik}^{(2)}(\omega) \operatorname{cth}(\gamma\omega), \quad \gamma = \frac{\hbar}{2kT}. \quad (1)$$

Здесь $F_{ik}^{(1)}$ — эрмитовская матрица спектральных интенсивностей флуктуаций $x_i(t)$, связанная с матрицей корреляции***

$$\varphi_{ik}(\tau) = \varphi_{ki}(-\tau) = \frac{1}{2} \langle \hat{x}_i(t) \hat{x}_k(t+\tau) + \hat{x}_k(t+\tau) \hat{x}_i(t) \rangle \quad (2)$$

* Если $V_0 = 0$ (система равновесия), то, как можно показать, $\mu > 0$; это означает поглощение волны потоком (см. [1]). Положительность коэффициента поглощения трудно получить из (1), если проинтегрировать по v_{\parallel} от $-\infty$ до $+\infty$; впрочем, этот результат следует и из закона Кирхгофа, который может быть несколько видоизменен применительно к рассматриваемому вопросу.

** Вычисления можно проделать квазигидродинамическим способом (см. [3]).

*** Формула (2) определяет $\varphi_{ik}(\tau)$ в квантовом случае [1]; при этом $\hat{x}_i(t)$ — оператор величины x_i в гайзенберговском представлении. В случае классических флуктуаций

$$\varphi_{ik}(\tau) = \langle x_i(t) x_k(t+\tau) \rangle.$$

формулой Винера — Хинчина

$$F_{ik}^{(1)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ik}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{ik}(\tau) + \varphi_{ki}(\tau)}{2} \cos(\omega\tau) d\tau + i \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{ik}(\tau) - \varphi_{ki}(\tau)}{2} \sin(\omega\tau) d\tau \right\}, \quad (3)$$

а $\alpha_{ik}^{(2)}(\omega)$ — вторая «мнимая» эрмитовская часть матрицы обобщенных восприимчивостей:

$$\alpha_{ik}(\omega) = \alpha_{ik}^{(1)} + i\alpha_{ik}^{(2)} \equiv \frac{\alpha_{ik} + \alpha_{ki}^*}{2} + i \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}. \quad (4)$$

В частном случае одной флуктуирующей величины $x(t)$ формулы (1), (3) и (4) определяют спектральную интенсивность флуктуаций через мнимую часть $\alpha''(\omega)$ обобщенной восприимчивости $\alpha(\omega)$:

$$F'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{\hbar}{2\pi} \alpha''(\omega) \operatorname{cth}(\gamma\omega). \quad (5)$$

С методической точки зрения представляется неудовлетворительным то обстоятельство, что флуктуационно-диссипационная теорема устанавливает связь статистических характеристик флуктуаций в системе лишь с частью ее динамических свойств: в формулы (1) и (5) входят только мнимые части обобщенных восприимчивостей. С другой стороны, в силу дисперсионных соотношений Крамерса—Кронига ясно, что действительные части обобщенных восприимчивостей (в матричном случае — первые эрмитовские части $\alpha_{ik}^{(1)}(\omega)$ матрицы $\alpha_{ik}(\omega)$) также должны быть связаны со статистическими свойствами равновесных флуктуаций. В настоящей заметке получена связь полной обобщенной восприимчивости системы $\alpha_{ik}(\omega)$ с матрицей «комплексной» спектральной интенсивности

$$F_{ik}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_{ik}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = F_{ik}^{(1)}(\omega) + iF_{ik}^{(2)}(\omega). \quad (6)$$

Здесь $F_{ik}^{(1)}(\omega)$ и $F_{ik}^{(2)}(\omega)$ эрмитовские части матрицы $F_{ik}(\omega)$, первая из которых определяется формулой (3), а

$$F_{ik}^{(2)}(\omega) = \frac{F_{ik} - F_{ki}^*}{2i} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{ik}(\tau) + \varphi_{ki}(\tau)}{2} \sin(\omega\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - i \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{ik}(\tau) - \varphi_{ki}(\tau)}{2} \cos(\omega\tau) d\tau \right\}. \quad (7)$$

Так как $F_{ik}(\omega)$ определяется односторонним преобразованием Фурье (6), причем функции $\varphi_{ik}(\tau)$ конечны при всех τ , ясно, что функции $F_{ik}^{(1)}(\omega)$ и $F_{ik}^{(2)}(\omega)$ связаны между собой дисперсионными соотношениями Крамерса—Кронига [1]*:

$$F_{ik}^{(2)}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{ik}^{(1)}(x)}{x - \omega} dx. \quad (8)$$

Искомая связь получается подстановкой в правую часть (6) формул (1) и (8) с учетом того, что функция $F_{ik}^{(1)}(x)$ под интегралом в (8) также должна быть выражена через $\alpha_{ik}^{(2)}(x)$ согласно (1). Получающееся при этом главное значение интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{ik}^{(2)} \operatorname{cth}(\gamma x)}{x - \omega} dx \quad (9)$$

* Интеграл в (8) понимается в смысле главного значения.

можно вычислить с помощью вычетов. Для этого рассмотрим интеграл

$$\oint_{C_n} \frac{\alpha_{ik}(z) \operatorname{cth}(\gamma z)}{z - \omega} dz, \quad (10)$$

где контур интегрирования C_n показан на рис. 1. Радиус полуокружности $R_n = \pi\gamma^{-1}(n+1/2)$, $n=1, 2, \dots$. Так как на дуге R_n функция $\operatorname{cth}(\gamma z)$ ограничена, а $\alpha_{ik}(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то интеграл по полуокружности при $n \rightarrow \infty$ исчезает. Вычисляя вычеты в полюсах $z_n = in\pi/\gamma$ функции $\operatorname{cth}(\gamma z)$ и разделяя матрицу α_{ik} на $\alpha_{ik}^{(1)}$ и $\alpha_{ik}^{(2)}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{ik}^{(2)}(x) \operatorname{cth}(\gamma x)}{x - \omega} dx &= -\frac{\alpha_{ik}^{(1)}(0)}{\gamma\omega} + \alpha_{ik}^{(1)}(\omega) \operatorname{cth}(\gamma\omega) - \\ &- \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega \alpha_{ik}^{(1)}\left(i \frac{n\pi}{\gamma}\right) - \frac{n\pi}{\gamma} \alpha_{ik}^{(2)}\left(i \frac{n\pi}{\gamma}\right) \right] \left[\omega^2 + \left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2 \right]^{-1/2}; \end{aligned} \quad (11)$$

при этом указанные выше подстановки дают

$$\begin{aligned} F_{ik}(\omega) &= \frac{i\hbar}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha_{ik}(0)}{\gamma\omega} - \alpha_{ik}(\omega) \operatorname{cth}(\gamma\omega) + \frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \left[\alpha_{ik}\left(i \frac{n\pi}{\gamma}\right) + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \alpha_{ki}\left(i \frac{n\pi}{\gamma}\right) \right] + i \frac{n\pi}{\gamma} \left[\alpha_{ik}\left(i \frac{n\pi}{\gamma}\right) - \alpha_{ki}\left(i \frac{n\pi}{\gamma}\right) \right] \right\} \left[\omega^2 + \left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2 \right]^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где учтено, что всегда $\alpha_{ik}(0) = \alpha_{ki}(0)$.

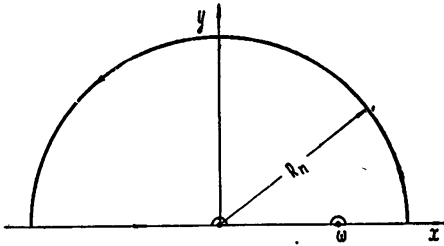


Рис. 1.

Формула (12) устанавливает искомые флуктуационно-дисперсионные соотношения в общем случае, т. е. при любой симметрии матрицы $\alpha_{ik}(\omega)$. При их использовании нужно иметь в виду, что, во-первых, величины $\alpha_{ik}(in\pi/\gamma)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) всегда вещественны, а во-вторых, $\alpha_{ik}(0) \geq \alpha_{ik}(in\pi/\gamma)$ ($n=1, 2, \dots$) [1]. Отсюда, в частности, следует, что в классическом пределе, когда $\omega = \hbar\omega/2kT \ll 1$, бесконечная сумма в (12) вносит пренебрежимо малый вклад; поэтому

$$F_{ik}(\omega) = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\alpha_{ik}(0) - \alpha_{ik}(\omega)}{\gamma\omega} \quad (13)$$

или

$$F_{ik}^{(1)}(\omega) = \frac{\hbar T}{\pi\omega} \alpha_{ik}^{(2)}(\omega), \quad (14)$$

$$F_{ik}^{(2)}(\omega) = \frac{kT}{\pi\omega} [\alpha_{ik}(0) - \alpha_{ik}^{(1)}(\omega)]. \quad (15)$$

Таким образом, для классических флуктуаций «спектр» $F_{ik}^{(2)}(\omega)$ однозначно определяется измеримой на опыте дисперсионной характеристикой системы $\alpha_{ik}^{(1)}(\omega)$ (например, для электрических флуктуаций в квазистационарной цепи мнимой частью ее импеданса).

Следует отметить, что величины $F_{ik}^{(2)}(\omega)$ (или $F''(\omega)$), не имея непосредственного физического смысла (в противоположность величинам $F_{ik}^{(1)}(\omega)$), обладают равными правами с $F_{ik}^{(1)}(\omega)$ в корреляционном анализе флуктуаций. Это следует из обратного преобразования (6), которое при $\tau > 0$ имеет вид

$$\varphi_{ik}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_{ik}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (16)$$

Ограничиваясь далее для определенности только случаем одной переменной, отсюда получаем

$$\varphi(\tau) = 2 \int_0^{\infty} F'(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega = 2 \int_0^{\infty} F''(\omega) \sin(\omega\tau) d\omega \quad (\tau > 0). \quad (17)$$

Для классических флуктуаций корреляционная функция $\varphi(\tau)$, согласно (15) и (17), может быть представлена в виде

$$\varphi(\tau) = \frac{2kT}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\alpha(0) - \alpha'(\omega)]}{\omega} \sin(\omega\tau) d\omega \quad (\tau > 0). \quad (18)$$

Эта формула, а также аналогичная ей для матрицы корреляции $\varphi_{ik}(\tau)$ (которая может быть легко получена из (16)) могут представить интерес при конкретных вычислениях корреляционных функций классических тепловых флуктуаций, например, когда по каким-либо причинам не удается измерить диссипационные характеристики системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, ГИТТЛ, М., 1964.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
7 июня 1965 г.

УДК 538.691.

АВТОРЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

И. А. Гилинский

1. Заряженная частица, помещенная в однородное магнитное поле, может резонансно ускоряться в вакууме полем плоской монохроматической волны с волновым вектором $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ и частотой $\omega = ecH_0/E_0(1 - \beta_0)$ (E_0 — начальная энергия частицы, $\beta_0 = v_0/c$) [1–3]. Как показали Коломенский и Лебедев [1, 3], резонанс сохраняется при возрастании энергии частицы. Если показатель преломления среды $n \neq 1$, то авторезонансного ускорения не происходит [3].

Это обстоятельство легко понять без вычислений. Для возможности авторезонансного ускорения требуется, чтобы частота обращения частицы по орбите равнялась скорости изменения фазы волны вдоль траектории частицы:

$$ecH_0/E = \omega(1 - V_z/V_\phi) \quad (1)$$

($V_\phi = c/n$ — фазовая скорость волны; направление \mathbf{H}_0 выбрано за ось z). С другой стороны, поскольку поле волны зависит лишь от разности $z - V_\phi t$, то существует интеграл движения [4]

$$E(1 - V_\phi V_z/c^2) = \text{const}. \quad (2)$$

Легко видеть, что необходимое условие авторезонанса (1) совместимо с интегралом движения (2) только при $V_\phi = c$, т. е. в вакууме. Более глубокая причина такой роли вакуума заключена в том, что спектр поглощения (излучения) заряда в магнитном поле при $n \neq 1$ неэквидистантен [5, 6]. Последнее делает невозможным сохранение резонанса при фиксированной частоте фотонов. Условие резонанса (1) можно, однако, поддерживать принудительно и при $n \neq 1$, подобно тому, как это делается в циклических ускорителях. Для этого необходимо медленно менять вдоль траектории частицы входящие в (1) параметры — напряженность магнитного поля, частоту или фазовую скорость волны.

Неоднородность магнитного поля приводит к появлению трудно учитываемых поперечных компонент; поэтому мы исследуем движение частицы в среде с переменным показателем преломления $n(z)$. Закон изменения показателя преломления с координатой должен быть таким, чтобы условие резонанса (1) выполнялось тождественно на траектории частицы*. Это требование вместе с уравнениями движения дает возможность найти искомую зависимость $n(z)$.

* Разумеется, в случае неоднородной среды интеграл движения типа (2) отсутствует.

Рассмотрим случай циркулярно поляризованной волны, компоненты полей которой вращаются в ту же сторону, что и частица. В квазиклассическом приближении фаза волны

$$u = \omega t - \frac{\omega}{c} \int_0^z n(z) dz + u_0,$$

а компоненты полей

$$E_x = \mathcal{E}_0 n^{-1/2} \sin u, \quad E_y = \mathcal{E}_0 n^{-1/2} \cos u, \\ H_x = -nE_y, \quad H_y = nE_x.$$

Определяемая (1) резонансная частота $\omega = ecH_0/E(1 - nV_z/c) = \text{const}$. Для определенности полагаем, что в начальном сечении $n_0 = n(0) < 1$. В результате вычислений получим, что энергия и продольная скорость частицы связаны с показателем преломления соотношениями

$$E = E_0 - n_0 c P_z^0 + nc P_z^0 \left(\frac{1 - n_0^2}{1 - n^2} \right)^{1/2}; \quad (3a)$$

$$V_z/c = nc P_z^0 \left(\frac{1 - n_0^2}{1 - n^2} \right)^{1/2} \left\{ E_0 - n_0 c P_z^0 + nc P_z^0 \left(\frac{1 - n_0^2}{1 - n^2} \right)^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (3b)$$

Зависимость показателя преломления от координаты дается уравнением

$$\int_{n_0}^n dnn^{1/2} \left\{ (1 - n^2)^2 \left[n/(1 - n^2)^{1/2} - n_0/(1 - n_0^2)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + V_n^2/2cV_z^0 \left(1 - \frac{n_0 V_z^0}{c} \right) (1 - n_0^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right\}^{-1} = \frac{\mathcal{E}_0}{2H_0} \frac{\omega}{c} z \left[\frac{2(E_0 - n_0 c P_z^0)}{c P_z^0 (1 - n_0^2)^{1/2}} \right]^{3/2}. \quad (4)$$

В формулах (3) и (4) P_z^0, E_0 означают продольный импульс и энергию в начальном сечении, V_n — проекция скорости частицы на направление электрического поля в точке влета. Отношение \mathcal{E}_0/H_0 считаем малым параметром задачи.

Из (4) следует, что¹ при возрастании z показатель преломления приближается к единице. Асимптотически при $\frac{\mathcal{E}_0}{H_0} \frac{\omega}{c} z \gg 1$

$$1 - n \sim \left(\frac{\mathcal{E}_0}{H_0} \frac{\omega}{c} z \right)^{-4/3} \left[\frac{E_0 - n_0 c P_z^0}{c P_z^0 (1 - n_0^2)^{1/2}} \right]^{3/2}; \quad (5)$$

$$E \simeq (E_0 - n_0 c P_z^0) \left\{ 1 + A \left(\frac{\mathcal{E}_0}{H_0} \frac{\omega}{c} z \right)^{2/3} \left[\frac{E_0 - n_0 c P_z^0}{c P_z^0 (1 - n_0^2)^{1/2}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (6)$$

где A — численный коэффициент порядка единицы.

Вопрос об устойчивости рассмотренного движения требует специального исследования.

2. Приведем теперь краткий вывод соотношений (3) и (4). Удобно ввести безразмерные переменные $p = P/mc$, $\varepsilon = E/mc^2$, $r = \frac{\omega}{c} R$, $v = V/c$ и вместо дифференцирования по времени перейти к производным по фазе

$$\omega(1 - nv_z) \frac{d}{du} = \frac{d}{dt}.$$

Уравнения движения в этих переменных имеют вид

$$\frac{dp_x}{du} = \frac{e\mathcal{E}_0}{mc\omega n^{1/2}} \sin u + \frac{eH_0}{mc\omega} \frac{dy}{du}, \\ \frac{dp_y}{du} = \frac{e\mathcal{E}_0}{mc\omega n^{1/2}} \cos u - \frac{eH_0}{mc\omega} \frac{dx}{du}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{du} &= \frac{eE_0 n^{1/2}}{mc \omega} \left(\frac{dx}{du} \sin u + \frac{dy}{du} \cos u \right); \\ \frac{d\varepsilon}{du} &= \frac{eE_0}{mc \omega n^{1/2}} \left(\frac{dx}{du} \sin u + \frac{dy}{du} \cos u \right). \end{aligned}$$

Мы требуем, чтобы выполнялось условие резонанса (1), имеющее в новых переменных вид

$$\varepsilon (1 - n v_z) \equiv \varepsilon_0 (1 - n_0 v_z^0) = \frac{eH_0}{mc \omega}. \quad (8)$$

Это соотношение определяет резонансную частоту ω .

Продифференцируем условие резонанса (8), учитывая, что $p_z = \varepsilon v_z$; $\frac{d\varepsilon}{du} - p_z \times \frac{dn}{du} - n \frac{dp_z}{du} = 0$, и примем во внимание соотношение $\frac{dp_z}{du} = n \frac{d\varepsilon}{du}$, следующее из двух последних уравнений системы (7). Исключив p_z и dp_z/du из этих соотношений и условия (8), найдем дифференциальное уравнение, связывающее изменение энергии и показателя преломления:

$$\frac{dn}{du} = \frac{n(1 - n^2)}{\varepsilon - \varepsilon_0 + n_0 p_z^0} \frac{d\varepsilon}{du}. \quad (9)$$

Его интегралом является равенство (3а). Выразив v_z из (8) и (3а), получим (3б).

Для вывода уравнения (4) обратимся к первым двум уравнениям системы (7). Имеем

$$p_x = \varepsilon v_x = \varepsilon (1 - n v_z) \frac{dx}{du} = \varepsilon_0 (1 - n_0 v_z^0) \frac{dx}{du},$$

и аналогичное соотношение для p_y . Поэтому уравнения движения для поперечных координат принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{du^2} &= \frac{\mu}{n^{1/2}} \sin u + \frac{dy}{du}; \\ \frac{d^2 y}{du^2} &= \frac{\mu}{n^{1/2}} \cos u - \frac{dx}{du}. \end{aligned} \quad (10)$$

Мы учли, что, согласно (8), $eH_0/mc \omega \varepsilon_0 (1 - n_0 v_z^0) = 1$, и обозначили $\mu = E_0/H_0$ (μ — малый параметр задачи).

Первый интеграл уравнения (10) имеет вид

$$\frac{dx}{du} = \left(\frac{dx}{du} \right)_0 \cos(u - u_0) + \left(\frac{dy}{du} \right)_0 \sin(u - u_0) + \mu \sin u \int_{u_0}^u du n^{-1/2};$$

$$\frac{dy}{du} = \left(\frac{dy}{du} \right)_0 \cos(u - u_0) - \left(\frac{dx}{du} \right)_0 \sin(u - u_0) + \mu \cos u \int_{u_0}^u du n^{-1/2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение для $d\varepsilon/du$, получим

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \frac{eE_0}{mc \omega n^{1/2}} \left\{ v_n + \mu \int_{u_0}^u du n^{-1/2} \right\}.$$

Далее необходимо перейти к дифференцированию по z :

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \left(\frac{1 - n_0^2}{1 - n^2} \right)^{1/2} \frac{p_z^0}{\varepsilon_0 - n_0 p_z^0} \frac{d\varepsilon}{dz}$$

и использовать связь между энергией и показателем преломления (3а). Тогда находим

$$n^{1/2} (1 - n^2)^{-2} \frac{dn}{dz} = \frac{\mu (\varepsilon_0 - n_0 p_z^0)^2}{(p_z^0)^2 (1 - n_0^2)} \left\{ v_n + \frac{\mu (\varepsilon_0 - n_0 p_z^0)}{p_z^0 (1 - n_0^2)^{1/2}} \int_{z_0}^z \left(\frac{1 - n^2}{n} \right)^{1/2} dz \right\}. \quad (11)$$

Как следует из (11),

$$\left(\frac{dn}{dz}\right)_0 = \frac{\mu(\epsilon_0 - n_0 p_z^0)^2 (1 - n_0^2)}{(p_z^0)^2 n_0^{1/2}} v_n.$$

Дифференцируя (11) по z , получаем для $n(z)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dz} \left[n^{1/2} (1 - n^2)^{-2} \frac{dn}{dz} \right] = \frac{\mu^2 (\epsilon_0 - n_0 p_z^0)^3}{(p_z^0)^3 (1 - n_0^2)^{3/2}} \left(\frac{1 - n^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Первый интеграл этого уравнения можно найти обычным образом, вводя новую неизвестную функцию $\rho = n^{1/2} (1 - n^2)^{-2} dn/dz$ и независимую переменную n :

$$\frac{\rho^2}{2} = \frac{\mu^2 (\epsilon_0 - n_0 p_z^0)^3}{(p_z^0)^3 (1 - n_0^2)^{3/2}} n (1 - n^2)^{-1/2} + \text{const.} \quad (12)$$

Учитывая начальное значение $(dn/dz)_0$, разрешая (12) относительно dn/dz , интегрируя и переходя к обычным переменным, получаем зависимость $n(z)$, при которой имеет место авторезонанс (формула (4) раздела 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ДАН СССР, 145, 1256 (1962).
2. В. Я. Давыдовский, ЖЭТФ, 43, 386 (1962).
3. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ЖЭТФ, 44, 261 (1963).
4. И. А. Гилинский, ДАН СССР, 134, 1055 (1960).
5. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
6. И. А. Гилинский, К. А. Рязанцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 838: (1964).

Новосибирский педагогический институт

Поступила в редакцию
19 апреля 1965 г.

УДК 631.371.123

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В НЕЛИНЕЙНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

В. И. Таланов

В работе [1] было отмечено, что в нелинейном диэлектрике возможна самофокусировка волн. Расчеты стационарных цилиндрических самоподдерживающихся каналов [2, 3] подтвердили такую возможность. Некоторые особенности распространения нецилиндрических волновых пучков в нелинейной среде рассматривались в [4]. В [5] описаны эксперименты по наблюдению явления автолокализации при фокусировке интенсивных лазерных пучков в жидкостях.

Ниже будет показано, что в слабонелинейной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_n = \epsilon_0(1 + \epsilon' E_0^2)$ ($\epsilon' E_0^2 \ll 1$, E_0 — амплитуда поля, ϵ' — параметр нелинейности) могут существовать параксиальные волновые пучки с распределениями поля, отличающимися в разных сечениях лишь масштабным множителем. Заимствуя терминологию из газодинамики [6], такие пучки будем называть автомоделными. Оказывается, к числу автомоделных принадлежит и поперечная структура цилиндрического аксиально-симметричного волноводного канала, рассчитанного в работе [3]. Следствием автомоделности является неустойчивость такого канала по отношению к квадратичным возмущениям фазы поля в пучке.

Параксиальные волновые пучки описываются уравнениями [4]

$$2\varphi'_z + (\nabla_{\perp} \varphi)^2 = \psi_0^2 + \frac{\Delta_{\perp} \psi_0}{\psi_0}; \quad \psi'_{0z} = -\frac{1}{2} \psi_0 \Delta_{\perp} \varphi - (\nabla_{\perp} \varphi \nabla_{\perp} \psi_0) \quad (1)$$

для лучевой амплитуды и медленной фазы поля $E = E_0 \exp(-jkz - j\varphi + j\omega t)$. В (1) вве-

дены безразмерные величины $\psi_0 = \sqrt{\epsilon'} E_0$ и $x, y, z = k(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. При переходе от волнового уравнения к (1) приняты обычные для квазиоптики предположения: $k\Lambda_{\perp} \gg 1$; $k\Lambda_{\perp}^2 \sim \Lambda_{\parallel}$, где Λ_{\perp} и Λ_{\parallel} — характерные размеры неоднородности поля соответственно в поперечном и продольном сечениях пучка; $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}$.

Уравнения (1) допускают автомодельные решения типа

$$\psi_0 = a(z)^{-1} \dot{e}(u, v); \quad \varphi = \frac{S(z)(u^2 + v^2)}{2} + \varphi_0(z), \quad (2)$$

где $u = x/a$; $v = y/a$. Подставляя (2) в (1) и разделяя переменные, получим уравнения

$$aa' = S; \quad a^2 S' - S^2 = C_1; \quad 2\varphi_0' = -C_3/a^2; \quad (3)$$

$$\Delta_{u,v} e + [C_2 - C_1(u^2 + v^2) + e^2] e = 0. \quad (4)$$

Здесь C_1 и C_2 — константы разделения.

Уравнения (3) легко интегрируются:

$$S = C_3 z + C_4; \quad (5)$$

$$a^2 = \frac{(C_3 z + C_4)^2 + C_1}{C_3}; \quad (6)$$

$$2\varphi_0(z) = -\frac{C_2}{\sqrt{C_1}} \arctg\left(\frac{C_3}{\sqrt{C_1}} z + \frac{C_4}{\sqrt{C_1}}\right) + C_5; \quad (7)$$

C_3, C_4, C_5 — постоянные интегрирования.

Структуры автомодельных пучков определяются нелинейным уравнением (4). Характер его решений будет качественно различным при $C_1 \geq 0$ и $C_1 < 0$. В первом случае оно имеет решения, описывающие локализованные пучки, амплитуда которых на бесконечности обращается в нуль, во втором такие решения отсутствуют.

Полагая в (4) $C_1 = 0, C_2 = -1$ и считая пучок аксиально симметричным ($e = e(\rho), \rho^2 = u^2 + v^2$), приходим к уравнению

$$e'' + \frac{1}{\rho} e' + e^3 - e = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) было получено в работе [3] для цилиндрического пучка. Подстановка $C_1 = 0$ в соотношение (6) показывает, что в общем случае пучки со структурой, описываемой уравнением (8), имеют форму конуса. Строго цилиндрический пучок получается в результате предельного перехода $C_4/C_3 \rightarrow \infty$ при $a(0) = \text{const}$. Введение в произвольное сечение такого пучка квадратичного фазового возмущения превращает его в сходящийся или расходящийся конический пучок с тем же амплитудным распределением.

Интересно сравнить характер распространения автомодельных локализованных пучков в линейной и нелинейной средах.

При $C_1 > 0$ уравнение (4) можно переписать в виде

$$\Delta_{s,t} f + (\mu - R^2 + Pf^2) f = 0, \quad (9)$$

сбозначив

$$e = e_0 f(s, t), \quad (s, t) = \sqrt[4]{C_1}(u, v), \quad R^2 = s^2 + t^2, \quad \mu = C_2/\sqrt{C_1}, \\ P = e_0^2/\sqrt{C_1}.$$

При нормировке $\int_S f^2 ds dt = 1$ величина P равна ηW , где $\eta = 8\pi\epsilon' k^2/c \sqrt{\epsilon_0}$,

W — мощность пучка.

В линейной среде ($P=0$) уравнение (9) решается в функциях Эрмита или Лигерра и определяет структуры так называемых гауссовых пучков [7, 8]. Такие решения имеют лишь при целочисленных значениях μ . В нелинейной среде ($P \neq 0$) как собственные функции f , так и собственные значения μ зависят от P . Вместе с тем картина фазовых фронтов автомодельных пучков, описываемая уравнениями (3), не зависит от параметра нелинейности и полностью подобна картине фронтов гауссовых пучков в линейной среде. Идентичными будут и лучевые траектории.

Подобно гауссовым пучкам, автомодельные пучки в нелинейной среде могут направляться системами квадратичных фазовых корректоров (линзы, зеркала). Деление

этих систем на устойчивые и неустойчивые остается таким же, как и в линейной среде. Отличие лишь в том, что теперь на границах устойчивых и неустойчивых областей ($C_1 = 0$) могут существовать пучки, описываемые уравнением (9), которые следует отнести к локализованным полям.

В заключение заметим, что наряду с автомодельным характером определенного класса решений уравнений (1) имеет место инвариантность этих уравнений относительно группы преобразований

$$r_{\perp} = br_{\perp}; \quad z = b^2z; \quad \psi_0 = \frac{\psi_0}{b},$$

где $b = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
2. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 564 (1964).
3. R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Letters, 13, 479 (1964).
4. В. И. Таланов, Письма в ред. ЖЭТФ, 2, 218 (1965).
5. Н. Ф. Филиппецкий, А. Р. Рустамов, Письма в ред. ЖЭТФ, 2, 88 (1965).
6. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Физматгиз, М., 1965.
7. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 45, 684 (1963).
8. P. K. Tien, J. P. Gordon, J. R. Winnery, Proc. IEEE, 53, 129 (1965).

Научно-исследовательский радиотехнический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 декабря 1965 г.

УДК 538.311

РАДИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ В САМОСФОКУСИРОВАВШЕМСЯ ПУЧКЕ СВЕТА

З. К. Янкаускас

Волновое уравнение для электрического поля E в нелинейной среде имеет вид:

$$\nabla^2 E - \frac{\epsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\epsilon_2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E^2 E) = 0. \quad (1)$$

Полагая $E = E(x, y) \cos(k_z z - \omega t)$ и усредняя E^2 по времени, получим.

$$\nabla_{x,y}^2 E - \Gamma^2 E + \frac{\epsilon_2}{2} k_0^2 E^2 E = 0, \quad (2)$$

где $\Gamma^2 = k_z^2 - k^2$, $k = n_0 k_0 = n_0 \omega / c$.

В случае цилиндрического пучка круговой поляризации вместо (2) справедливо уравнение

$$\frac{d^2 E_1}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{dE_1}{dr_1} - \Gamma^2 (E_1 - bE_1^3) = 0, \quad b = \frac{\epsilon_2}{2} k_0^2 / \Gamma^2. \quad (3)$$

Эффекту самофокусировки соответствуют граничные условия $E_1 \rightarrow 0$ при $r_1 \rightarrow \infty$ и $dE_1/dr_1 = 0$ при $r_1 = 0$. Поскольку нас интересуют лишь непериодические решения уравнения (3), считаем $\Gamma^2 > 0$. В [2] найдено лишь одно такое решение. Покажем, что уравнение (3) имеет бесконечное множество непериодических решений, соответствующих различным радиальным распределениям поля E и соответственно различным мощностям самофокусировки.

Исследуем частные решения (3) на фазовой плоскости E, E' , как это делается в теории колебаний. Под E и E' будем подразумевать координату и скорость изображающей точки. В безразмерном виде вместо (3) имеем

$$E'' + \frac{1}{r} E' - E + E^3 = 0, \quad (3a)$$

где $r = \Gamma r_1$, $E = E(r) = b^{1/2} E_1(r_1)$, (r — будет играть роль времени).

Уравнение (3а) без члена $(1/r) E'$ соответствует консервативной системе

$$E'' - E + E^3 = 0, \tag{3б}$$

для которой нетрудно найти все решения. (Отметим, что качественно (3б) совпадает с уравнением маятника на вращающейся платформе; см. [3], стр. 129, [4]).

Первый интеграл (3б) (закон сохранения энергии) имеет вид

$$K = \frac{(E')^2}{2} + U(E), \quad U(E) = \frac{E^4}{4} - \frac{E^2}{2}. \tag{4}$$

Точки равновесия находим из уравнения $\partial U / \partial E = 0$. Отсюда следует, что $E_0 = 0, \pm 1$; точка $E_0 = 0$ — седло, а точка $E_0 = \pm 1$ — центры.

Уравнения $K = \text{const}$ определяют семейство кривых (E, E') , по которым движутся изображающие точки консервативного движения. Сепаратриса $K = 0$ соответствует единственному неперiodическому решению $K = E(0) / \cosh r$ с обязательным условием $E(0) = \sqrt{2}$. Картина фазовых траекторий для (3б) приведена на рис. 1.

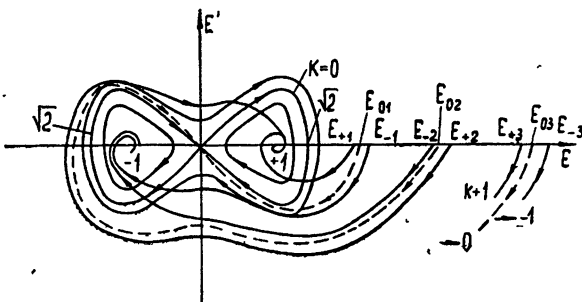


Рис. 1.

Вернемся к уравнению (3а). В терминах теории колебаний здесь присутствует демпфирующий член $(1/r)E'$, вследствие чего полная энергия не сохраняется.

Подставляя (4) в (3а), получим

$$\frac{\partial K}{\partial r} = - \frac{(E')^2}{r}, \tag{5}$$

в отличие от (3б), где $K = \text{const}$. Следовательно, везде $\partial K / \partial r < 0$ и энергия непрерывно уменьшается. Это исключает возможность существования замкнутых предельных циклов и положением равновесия может быть только одна из точек 0 (неустойчивое) и ± 1 (устойчивое). Поэтому на фазовой плоскости любая траектория неконсервативной системы (3а) закончится в одной из точек 0, ± 1 .

Изображающая точка при движении будет пересекать линии с $K = \text{const}$. Если траектория пересечет линию $K = 0$ в левой полуплоскости, то ясно, что она закончится в точке -1 , а если пересечение произойдет в правой полуплоскости, то траектория может закончиться лишь в точке $+1$. Непериодические решения (точнее, решения, удовлетворяющие граничному условию $E \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$), соответствующие траекториям, приходящим в точку 0, заключены между траекториями, заканчивающимися в (-1) и $(+1)$.

Благодаря граничным условиям $dE/dr = 0$ при $r = 0$ мы интересуемся лишь теми траекториями, которые начинаются на оси E ; поэтому траектории, заканчивающиеся в точке 0, могут быть найдены путем плавного увеличения начальной амплитуды $E(0)$ на оси E . Когда $0 < E(0) < \sqrt{2}$, все траектории кончатся в $(+1)$. В окрестности $(+1)$ для $E(0)$ несколько больших картина не изменится; траектория, начинающаяся в точке E_{+1} показана на рис. 1. Когда начальная ордината возрастает до E_{-1} , потенциальная энергия U увеличивается настолько, что изображающая точка пересекает кривую $K = 0$ в левой полуплоскости и траектория кончается в точке (-1) . В окрестности E_{-1} для $E(0)$, несколько больших E_{-1} (скажем, E_{-2}), конечная точка не меняется. При E_{+2} траектория опять кончается в точке $(+1)$, пройдя один раз все четверти фазовой плоскости. При дальнейшем увеличении $E(0)$ появляется траектория с еще большей начальной потенциальной энергией, достаточной для достижения изображающей точкой кривой $K(0)$ после двухкратного перехода через 4 и 3 четверти и т. д.

Изложенные случаи показаны на рис. 1. Траектории, кончающиеся в точке 0, всегда находятся между двумя осциллирующими траекториями. Уменьшая интервалы E_{-1} , E_{+1} , E_{-2} , E_{+2} и т. д., можно найти интересующие нас решения E_{0n} сколь угодно точно. На рис. 2 показаны также радиальные распределения поля, соответствующие различным начальным амплитудам. Каждому типу распределения соответствует своя критическая мощность самофокусировки

$$P_n = \frac{c}{4\pi} n_{\text{эфф}} 2\pi \int E_n^2(r) r dr (\Gamma^2 b)^{-1},$$

где $n_{\text{эфф}} = k_2/k_0 = [n_0^2 + (\epsilon_2/2b)]^{1/2}$ (см. [2]).

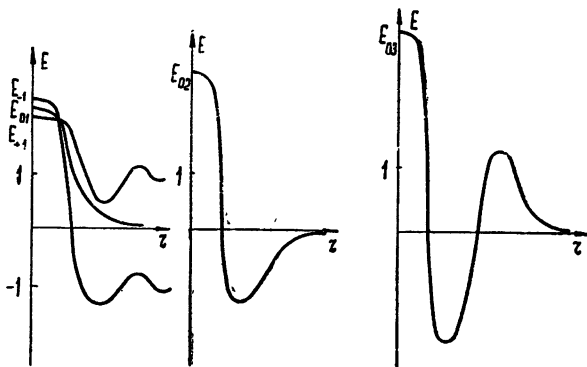


Рис. 2.

На рис. 3 приведены зависимости $E(r)$ для трех значений $E(0)$, рассчитанные на электронной вычислительной машине. Кривая 2 на этом рисунке близка к собственному решению E_{02} .

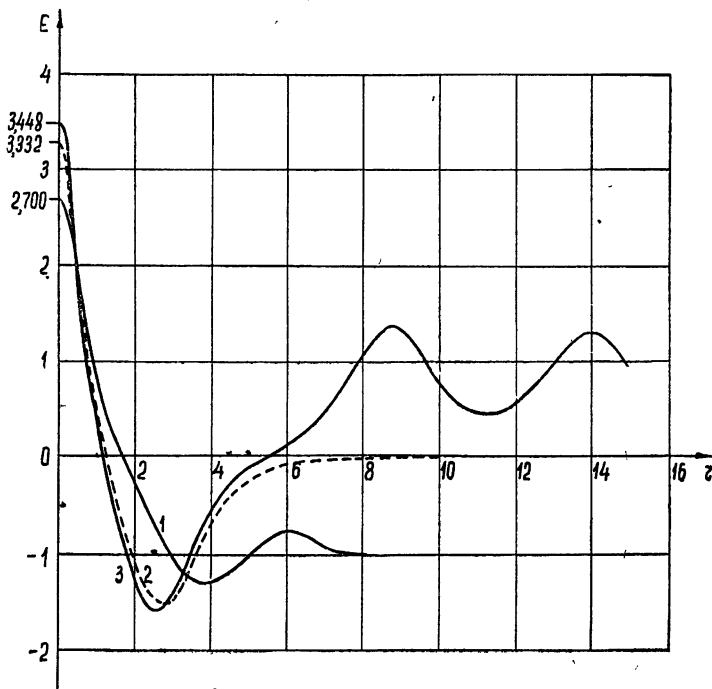


Рис. 3.

Автор благодарит Э. Е. Фрадкина за предложенную тему и ценные дискуссии и В. И. Таланова за интерес к работе и организацию количественной проверки характера решений на электронной вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 3 (1964).
2. R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964).
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
4. R. Finkelstein, R. Lelevier, M. Ruderman, Phys. Rev., 83, 326 (1951).

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
20 ноября 1965 г.

УДК 621.385

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ С ПОЛЯМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИК ДВУХМЕРНОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Р. А. Дудник

В работах [1–3] рассмотрен один из возможных методов исследования взаимодействия электронных потоков с СВЧ полями двухмерных замедляющих систем с помощью так называемых «двухмерных телеграфных уравнений» [1]. При этом способе учитывается поле только одной основной пространственной гармоники двухмерной замедляющей системы (импедансное приближение [4]). Однако оказывается возможным на основе этих результатов провести исследование взаимодействия электронных потоков с полями пространственных гармоник двухмернопериодических замедляющих систем. Проведенный в работе [5] анализ взаимодействия электронного потока с полями одномернопериодических замедляющих систем показал, что влиянием пассивных гармоник на пучок при большом разделении скоростей гармоник можно пренебречь по сравнению с действием синхронной пространственной гармоники.

Как известно [6], в приближенной теории ЛБВ реальную замедляющую систему представляют в виде эквивалентной линии, распределенные индуктивность L и емкость C которой подобраны так, чтобы фазовая скорость волны и напряженность ВЧ электрического поля, действующего на электроны, были бы такими же, как в реальной системе. Подбирая параметры эквивалентной линии L и C , можно формально рассчитать взаимодействие электронного потока с любой пространственной гармоникой периодической замедляющей системы, в синхронизме с которой находится электронный пучок.

Ниже подобный формальный подход применяется при расчете взаимодействия электронного потока с полями пространственных гармоник двухмернопериодических замедляющих систем. Мы проиллюстрируем это на примере лампы с поперечным взаимодействием (ЛПВ) типа «О» [2].

Согласно [7], для рассматриваемых замедляющих систем постоянные распространения можно записать в виде

$$\alpha_{0,2}^{(s)} = \alpha_{0,2} + \frac{2\pi s}{D_y}; \quad h_0^{(l)} = h_0 + \frac{2\pi l}{D_x}, \quad (1)$$

где $\alpha_{0,2}$ и h_0 — постоянные распространения основной пространственной гармоники (см., например, выражение (3) работы [2]); D_x , D_y — периоды системы в направлении оси x и y ; s , $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — номера пространственных гармоник. Отметим, что для замедляющих систем типа «косая гребенка», «косые штыри» $s \equiv l$. В волноводе с идеально проводящими боковыми стенками при $\nu=0$, d поле волны, распространяющееся в направлении оси x , можно представить [7, 8] в виде суперпозиции двух парциальных волн — падающей и отражающей — с фазовыми постоянными Γ_1 и Γ_2 , удовлетворяющими условиям

$$\Gamma_1 \cos \theta_1^- = \Gamma_2 \cos \theta_2^- = h_0; \quad \Gamma_{1,2} \sin \theta_{1,2} = \alpha_{0,2}; \quad \alpha_{0,1} - \alpha_{0,2} \approx 2\pi n/d, \quad (2)$$

где θ_1 и θ_2 — углы падения и отражения. Согласно (1)—(2), падающей и отраженной волнам соответствуют свои пространственные гармоники, так что

$$\alpha_{0_1}^{(s)} - \alpha_{0_2}^{(s)} \simeq 2\pi n/d. \quad (3)$$

Пусть электронный поток, движущийся в направлении оси y с постоянной скоростью v_0 , находится в синхронизме с s -ой пространственной гармоникой падающей волны:

$$h_e = \alpha_{0_1}^{(s)}, \quad (4)$$

где $h_e = \omega/v_0$. Считая, что остальные гармоники далеки от синхронизма, ограничимся рассмотрением взаимодействия только с двумя полями s -ой пространственной гармоники в падающей и отраженной волнах. При этом в случае ЛПВ типа «О» мы получим дисперсионное уравнение, аналогичное уравнению (2) работы [2], в котором при слабом токе пучка поперечные и продольные волновые числа близки соответственно к $\alpha_{0_1,2}^{(s)}$ и $h_0^{(l)}$, а малый параметр χ_- в правой части равен $\chi^{(s)} = I_0 R^{(s)}/2V_0$. Здесь I_0 — линейная плотность тока пленочного пучка; V_0 — потенциал пучка, определяемый условием (4); $R^{(s)}$ — сопротивление связи для s -ой пространственной гармоники.

Введенные в уравнении (11) работы [2] коэффициенты $g_{1,2}$, характеризующие особенности взаимодействия электронного пучка с полями основной волны двухмерно-периодической замедляющей системы, в рассматриваемом случае будут равны

$$g_{1,2}^{(s,l)} = \frac{h_0^{(l)}}{\alpha_{0_1}^{(s)}} k'_{1,2}, \quad (5)$$

где величину $k'_{1,2}$, согласно (10а) работы [2], можно представить в виде

$$k'_{1,2} = \frac{\partial k_{1,2}}{\partial h} = -\tilde{Y}_{12} \mp \frac{h_0 d}{\pi} (\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2). \quad (6)$$

Здесь \tilde{Y}_{ik} — нормированные компоненты \hat{Y} — тензора поверхностной проводимости замедляющей системы, \tilde{B} — безразмерная проводимость зазора между крышкой волновода и замедляющей системой. Применяя замену переменных, величину $k'_{1,2}$ запишем в виде

$$|k'_{1,2}| = \frac{\partial k_{1,2}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial h} = \left(\frac{u_x}{u_y} \right)_{1,2}. \quad (7)$$

При этом мы воспользовались определением групповой скорости $u = \text{grad}_\Gamma \omega$, которая, как известно из [7], одинакова для всех пространственных гармоник.

Отметим, что если зазор между крышкой волновода и замедляющей системой $a \ll \lambda_m$, где λ_m — длина замедленной волны, то поток вектора Пойнтинга в такой системе с точностью до членов порядка $(a/\lambda_m)^2$ дается выражением

$$\Sigma_\tau \simeq VI^*,$$

где V — напряжение ВЧ поля волны на зазоре, I — поверхностный ток системы $I = -\hat{Y} \text{grad} V$ [1]. Отсюда следует, что отношение потоков вектора Пойнтинга по осям x и y равно

$$\frac{\Sigma_x}{\Sigma_y} = \frac{u_x}{u_y} \simeq \tilde{Y}_{12} \mp \frac{h_0 d}{\pi} (\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2). \quad (8)$$

Сравнивая выражения (6)—(9), можно видеть, что в рассматриваемом случае

$$g_{1,2}^{(s,l)} = -\frac{v_y^{(s)}}{v_x^{(l)}} \left(\frac{u_x}{u_y} \right)_{1,2}, \quad (9)$$

где $v_y^{(s)}$ и $v_x^{(l)}$ — компоненты фазовой скорости пространственной гармоники.

Таким образом, коэффициенты $g_{1,2}^{(s,l)}$, определяемые дисперсионными свойствами двухмерно-периодической замедляющей системы, могут быть рассчитаны с помощью соотношения (1) и выражения (6), полученного в импедансном приближении. Отметим, что величины $g_{1,2}^{(s,l)}$ и $R^{(s)}$ могут быть найдены из строгого решения задачи о волноводных свойствах данного конкретного типа замедляющей системы. Результаты

этих расчетов можно непосредственно использовать в соотношениях, характеризующих усиление ЛПВ [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Доклад на сессии Научно-технического общества радиотехники и электроники им. А. С. Попова, М., 1961; см. также Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
2. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 764 (1963).
3. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 135 (1964).
4. М. А. Миллер, В. И. Галанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 795 (1961).
5. М. Ф. Стельмах, Радиотехника и электроника, 2, 470 (1957).
6. Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
7. Р. А. Силин, Вопросы радиоэлектроники, сер. 1, Электроника, № 4, 3 (1959).
8. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 августа 1965 г.

УДК 533.951

О МЕТОДЕ ДЕТЕКТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ СРЕДНИХ ДАВЛЕНИЯХ

Г. А. Соболев, А. П. Соболев, М. М. Медюх и И. С. Галанец

1. В работе [2] изложен метод определения параметров плазмы (V_n , T_e , n_e) с помощью детекторных характеристик при давлениях газа в разрядной трубке меньше 1 мм рт. ст. В [1] излагается метод определения параметров плазмы с помощью зондовых характеристик при давлениях больше 1 мм рт. ст., т. е. в условиях, когда длина свободного пробега частиц λ меньше размеров зонда a . В настоящей работе, исходя из выражения для зондовой характеристики [1] при $\lambda < a$, обосновывается метод определения V_n , T_e , n_e с помощью детекторных характеристик.

Величина электронного тока на отрицательно заряженный зонд для этого случая определяется выражением [1]

$$I_3 = I_0 e^{\alpha V_3} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} e^{\alpha V_3} \int_1^{x_{\infty}} e^{-\alpha V(x)} \frac{dx}{x^2} \right]^{-1},$$

где $\alpha = e/kT_e$, V_3 — потенциал зонда относительно плазмы. При малых изменениях V_3 вблизи потенциала пространства ($V_3 \approx 0$) это выражение можно переписать в удобном для нас виде:

$$I_3 = I_0 (e^{-\alpha V_3} + A)^{-1}. \quad (1)$$

Величина A при малых изменениях V_3 остается почти неизменной. Формула (1), таким образом, представляет собой зондовую характеристику с учетом наличия соударений в призондовом слое. В предельном случае при $\lambda \gg a$ формула (1) переходит в лэнгмюровскую.

Если на зондовую цепь, кроме источника постоянного напряжения V_3 , действует переменное напряжение $V_{\sim} = V_d \cos(\omega t)$, то постоянная составляющая зондового тока, как известно [3], изменится на величину

$$I_d = \left(\frac{V_d}{2} \right)^2 \frac{d^2 I_3}{dV_3^2}. \quad (2)$$

Взяв вторую производную от (1) и подставив в (2), получим детекторную характеристику

$$I_d = \left(\frac{V_d}{2} \right)^2 \alpha^2 I_0 e^{\alpha V_3} \frac{1 - A e^{\alpha V_3}}{(1 + A e^{\alpha V_3})^3}, \quad (3)$$

где $I_0 = (en_e s/4) \sqrt{8kT_e/\pi m}$. Величина I_d равна нулю в двух точках: при $V_3 = -\infty$ и при $V_3 = V_0$. В последнем случае имеет место соотношение $A = e^{-\alpha V_0}$ (здесь V_0 , как и V_3 , включает в себя знак). Исходя из (1), при условии $V_3 = V_0$ получим

$I_0 = I_0/2e^{-\alpha V_0}$, откуда $I_0 = 2I_0 e^{-\alpha V_0} (I_0 \text{ — зондовый ток в точке } V_3 = V_0)$. Тогда детекторная характеристика примет вид

$$I_d = \frac{I_0}{2} V_d^2 a^2 e^{\alpha(V_3 - V_0)} (1 - e^{\alpha(V_3 - V_0)}) (1 + e^{\alpha(V_3 - V_0)})^{-3}. \quad (4)$$

В максимуме кривой (4) соблюдается условие

$$e^{\alpha(V_m - V_0)} = 2 \pm \sqrt{3},$$

т. е. $e^{\alpha V_m} = 0,268$, где V_m есть зондовое напряжение в максимуме (4). Из этого условия легко определяется один из параметров плазмы — электронная температура T_e :

$$T_e = 8,8 \cdot 10^3 (V_m - V_0) = 8,8 \cdot 10^3 \Delta V_m \text{ } ^\circ\text{K}; \quad (5)$$

ΔV_m находится экспериментально.

Потенциал плазмы относительно опорного электрода (у нас — относительно анода) определяется из соотношения

$$V_{II} = V_{3-a} - V_m = V_{3-a} - (\Delta V_m + V_0), \quad (6)$$

где V_{3-a} — напряжение на зонде относительно анода в точке максимума кривой (4), а V_0 определяется из приближенного выражения $e^{-\alpha V_0} = 3a/4\lambda$, которое справедливо для области исследованных давлений. Подставляя значения I_0 и a в формулу (4) с учетом (5), получим выражение детекторной характеристики в зависимости от различных величин:

$$I_d = 10^{-6} s n_e V_d^2 (\Delta V_m)^{-3/2} e^{\alpha V_3} (1 - e^{\alpha(V_3 - V_0)}) (1 + e^{\alpha(V_3 - V_0)})^{-3} \text{ мка}. \quad (7)$$

Из максимума кривой (7) легко определить третий параметр плазмы — концентрацию электронов n_e :

$$n_e = 2,76 \cdot 10^6 \frac{I_{dm} (\Delta V_m)^{3/2}}{s V_d^2} e^{-\alpha V_m} \text{ см}^{-3}. \quad (8)$$

Здесь I_{dm} — в микроамперах, ΔV_m , V_m , V_d — в вольтах.

2. Измерения проводились на электрической схеме с компенсацией в зондовой цепи [2]. Одновременно снимались зондовая и соответствующая ей детекторная характеристики в плазмах тлеющего и дугового разрядов в аргоне, неоне и парах ртути. Давление паров ртути определялось по температуре жидкой капли

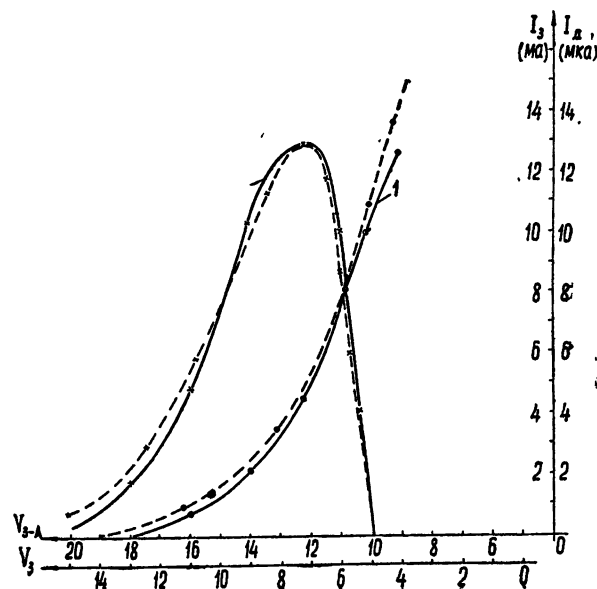


Рис. 1. Дуговой разряд в парах ртути ($P=4,6$ мм рт. ст.): 1—зондовая характеристика; 2—детекторная характеристика.

На рис 1 представлены графики зондовых и соответствующих им детекторных характеристик, снятых в ртутной плазме дугового разряда: сплошными линиями — экспериментальные, пунктирными — рассчитанные по формулам (1) и (7). Заметное отклонение расчетных кривых от опытных в левой их части объясняется влиянием ионных токов, не учитываемых формулами. Для дугового и тлеющего разрядов в Ar и Ne в том же интервале давлений зондовые и детекторные характеристики качественно аналогичны.

Во всех случаях расчетные зондовые характеристики совмещались с экспериментальными в точках $V_a = V_m$. Из рисунка видим, что расчетные зондовые и детекторные характеристики хорошо совпадают с экспериментальными.

Значения T_e и n_e , определенные нашим методом и методом [1], сведены в таблицу 1.

Т а б л и ц а 1

Газ метод	Неон						Аргон	
	$T_e \cdot 10^{-3} \text{°K}$			$n_e \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-3}$			$T_e \cdot 10^{-3} \text{°K}$	$n_e \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-3}$
Давление в мм рт. ст.	1,5	6,0	14,0	1,5	6,0	14,0	4,6	4,6
Настоящей статьи . . .	26,4	22,0	17,6	3,6	14,8	20,6	19,3	9,7
Статьи [1]	30,0	21,8	20,4	4,4	15,0	29,6	23,0	10,0

Из таблицы ясно, что значения T_e и n_e , определяемые этими методами, близки друг к другу. Следовательно, изложенный в настоящей работе метод определения указанных параметров плазмы по своей точности, очевидно, не уступает методу [1], и более предпочтителен в случае экономии времени (по двум точкам детекторной характеристики V_m и V_0 можно достаточно просто определять T_e , n_e , V_m).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Захарова, Ю. М. Каган, К. С. Мустафин и В. И. Перель, ЖТФ, 30, 442 (1960).
2. Г. А. Соболев, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 963 (1962).
3. Б. Л. Грановский, Электрический ток в газе, 1, Гостехиздат, М., 1952.

Львовский политехнический институт
(Тернопольский филиал)

Поступила в редакцию
6 июля 1965 г.

УДК 533.951

О ДВУХЗОНДОВОМ МЕТОДЕ ДЕТЕКТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Г. А. Соболев, А. П. Соболев, Р. С. Коземчук, Н. Ф. Мережко

В работах [1-3] изложен метод определения параметров плазмы безэлектродного разряда с помощью двух зондов. В настоящей работе излагается метод определения некоторых параметров плазмы с помощью детекторных характеристик двух зондов.

Подавая в электрическую цепь двух зондов, кроме постоянного напряжения V_0 , переменное напряжение $V_{\sim} = V_d \cos(\omega t)$, получим детекторную характеристику [4].

Вольтамперную характеристику двух зондов, согласно [1, 2] можно записать в удобном для нас виде:

$$I = I_0 \left(\frac{2}{1 + a e^{-\alpha V}} - 1 \right), \tag{1}$$

где $a = e^{\alpha V_0}$ является фактором несимметричности системы двух зондов, $a = e/kT_e$. В области квадратичного детектирования, где проводились наши измерения, после двукратного дифференцирования функции (1) получим выражение детекторной характеристики $I_d = (V_d/2)^2 (d^2 I/dV^2)$ в виде

$$I_d = 2 \left(\frac{V_d}{2} \right)^2 \alpha^2 I_0 e^{-\alpha(V-V_0)} (e^{-\alpha(V-V_0)} - 1) (e^{-\alpha(V-V_0)} + 1)^{-3}, \tag{2}$$

где

$$I_0 = \frac{en_e S}{4} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}}$$

Кривая (2) проходит через три характерные точки: $I_d = I_{d \max}$ при $V = V_{\max}$; $I_d = I_{d \min}$ при $V = V_{\min}$ и $I_d = 0$ при $V = V_0$. В точке максимума (или минимума) кривой (2) имеет место соотношение $e^{-\alpha(V_m - V_0)} = 0,268$, где V_m — напряжение на зонде в данной точке. Из этого соотношения легко определяется один из параметров плазмы — электронная температура T_e :

$$T_e = 8,8 \cdot 10^3 (V_m - V_0) = 8,8 \cdot 10^3 \Delta V_m \text{ (}^\circ\text{K)}, \quad (3)$$

где ΔV_m есть отрезок на оси зондового напряжения V между двумя точками: $I_d = I_{d \max}$ (при $V = V_m$) и $I_d = 0$ (при $V = V_0$).

Из максимума (или минимума) кривой (2) легко определить также второй параметр плазмы (концентрацию электронов n_e) по формуле

$$n_e = 84,6 \cdot 10^7 \frac{I_{d \max}}{SV_x^2 \alpha^2 \sqrt{T_e}} \text{ см}^{-3}, \quad (4)$$

где S — площадь зонда.

Третий параметр плазмы (градиент потенциала E) легко определяется, исходя из следующих соображений. Если несимметричность системы двух зондов связана с наличием лишь градиента поля в плазме и если расстояние между зондами l , а разность потенциалов, обуславливающая несимметричность системы, есть V_0 , то градиент потенциала плазмы в области зондов

$$E = \frac{V_0}{l} \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}. \quad (5)$$

Однако этот метод определения E имеет место лишь в том случае, когда сама система двух зондов (при отсутствии градиента в плазме) является строго симметричной.

Измерения производились в аргоновой и неоновой плазмах тлеющего и дугового разрядов. Одновременно снимались зондовая и детекторная характеристики, затем обрабатывались нашим методом и методом [1].

На рис. 1 представлены зондовые и соответствующие им детекторные характеристики тлеющего разряда в неоне (сплошными линиями — экспериментальные, пунктирными — рассчитанные по формулам (1) и (2)). Расчетные зондовые и детекторные характеристики совмещены с экспериментальными в точках $V = V_m$. Из рисунков ясно, что имеет место довольно неплохое совпадение расчетных кривых с экспериментальными.

Зондовые и детекторные характеристики в аргоновой плазме тлеющего разряда, а также в аргоне дугового разряда качественно аналогичны кривым, показанным на рис. 1

В таблице 1 приведены значения T_e и n_e , определенные нашим методом и методом [1] для аргона и неона.

Из таблицы видно, что значения T_e и n_e , определяемые этими методами, близки друг к другу.

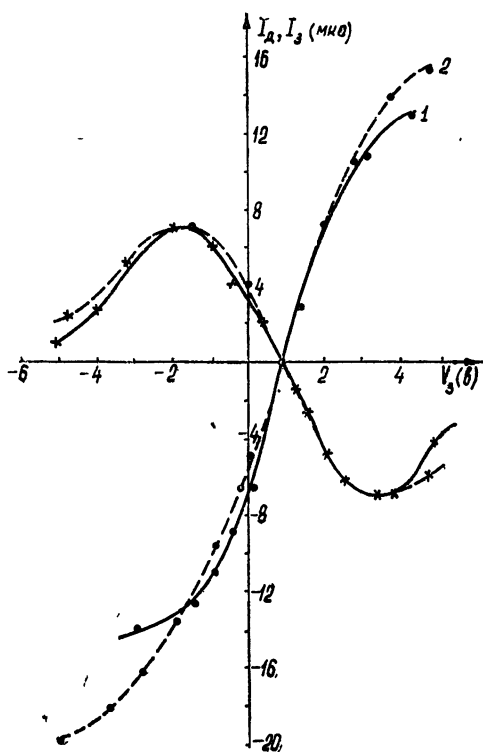


Рис. 1. Тлеющий разряд в неоне
($P = 1$ мм рт. ст.):

1 — зондовая характеристика; 2 — детекторная характеристика.

Таблица 1

Газ	Аргон		Неон	
	T_e (°K)	n_e (см ⁻³)	T_e (°K)	n_e (см ⁻³)
Работы [1]	13000	$1,5 \cdot 10^{10}$	19300	$0,98 \cdot 10^{10}$
Настоящей работы . .	15840	$1,0 \cdot 10^{10}$	22000	$0,68 \cdot 10^{10}$

Исходя из сказанного, можно считать, что

а) поскольку детекторная характеристика является более тонким отображением ее зондовой характеристики, изложенный метод должен стать более точным при определении параметров плазмы по сравнению с методом зондовых характеристик;

б) изложенный метод определения параметров плазмы более простой и быстрый по сравнению с зондовым методом;

в) вследствие достаточной устойчивости электрической системы двух зондов в любых разрядах по сравнению с ленгмюровским зондом изложенный метод должен стать более эффективным при любых допустимых режимах плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диагностика плазмы, Сб. под ред. Г. П. Константинова (статья И. А. Кована и др.), М., 1963.
2. E. Johnson, L. Malter, Phys. Rev., 80, 158 (1950).
3. Л. Биберман, Б. Панин, ЖТФ, 21, 12 (1951).
4. Г. А. Соболев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 963 (1962).

Львовский политехнический институт
(Тернопольский филиал)

Поступила в редакцию
6 июля 1965 г.

УДК 531.391

К ВОПРОСУ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА С УДАРАМИ В ШАРИКОПОДШИПНИКАХ

В. С. Бояринов

В статьях [1, 2] исследовались вертикальные колебания абсолютно жесткого вала, вращающегося в шарикоподшипниках. Были найдены условия, при которых невозможны безотрывные движения вала и, следовательно, возникают колебания вала с ударами о шарики. В настоящей заметке показано, что уравнения, полученные при учете конечной жесткости вала, можно привести к ранее изученным в [2]. Поэтому все результаты [2] могут быть обобщены для данного случая.

Пусть гибкий вал, несущий между опорами массу m , сбалансирован и опирается на два подшипника качения с зазорами между внутренними кольцами и шариками так, что в некоторой области, обозначенной на рис. 1 через G , вал может двигаться, не соприкасаясь с шариками. За обобщенные координаты системы примем вертикальное смещение y массы m , отсчитываемое от некоторой неподвижной точки, и угол ψ поворота касательной к упругой линии вала, отсчитываемый от горизонтального направления против часовой стрелки.

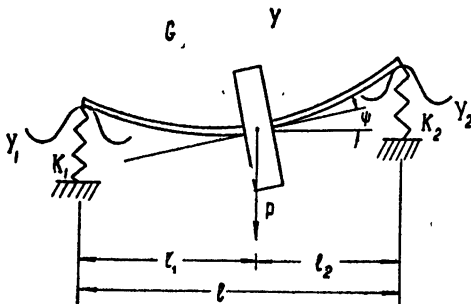


Рис. 1.

Жесткости опор $k_1(\varphi)$, $k_2(\varphi)$ и координаты поверхностей прикосновения $y_1(\varphi)$ и $y_2(\varphi)$ являются периодическими функциями угла φ поворота сепаратора подшипника. Сохраняя предположения и обозначения [2], примем для них следующие выражения:

$$k_i = k_{i0} + \Delta k_i \cos(\omega t + \varphi_i), \quad y_i = y_{i0} + \Delta y_i \cos(\omega t + \varphi_j) \quad (1)$$

$$(i = 1, 2; \quad j = 3, 4).$$

Здесь ω — частота следования шариков, а смысл остальных обозначений ясен из рис. 1.

В этом случае уравнения движения для безотрывных колебаний можно записать в виде

$$\ddot{\xi} + \alpha \xi + \mu' \kappa [(a_1 \cos \tau - \beta_1 \sin \tau) \xi + (a_2 \cos \tau - \beta_2 \sin \tau) \eta] = Q_1; \quad (2)$$

$$\ddot{\eta} + \Delta^2 \alpha \eta + \mu' \kappa \delta^2 [(a_2 \cos \tau - \beta_2 \sin \tau) \xi + (a_3 \cos \tau - \beta_3 \sin \tau) \eta] = Q_2;$$

$$\xi + l^{-1} y_0^* - 0,5 (\eta + \psi_0^*) - \mu_2 - \mu_1 \cos(\tau + \varphi_3) \leq 0; \quad (3)$$

$$\xi + l^{-1} y_0^* + 0,5 (\eta + \psi_0^*) - \mu_2 \varepsilon_2 - \mu_1 \varepsilon_1 \cos(\tau + \varphi_4) \leq 0,$$

где

$$Q_1 = \mu_1 (A_1 \cos \tau - A_2 \sin \tau) + \mu' (A_3 \cos \tau - A_4 \sin \tau + A_5 \cos 2\tau - A_6 \sin 2\tau + A_7),$$

$$Q_2 = \mu_1 (B_1 \cos \tau - B_2 \sin \tau) + \mu' (B_3 \cos \tau - B_4 \sin \tau + B_5 \cos 2\tau - B_6 \sin 2\tau + B_7),$$

$$\xi = (y - y_0^*) l^{-1}, \quad \eta = \psi - \psi_0^*, \quad \tau = \omega t, \quad \alpha = \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2, \quad \mu' = \frac{\Delta k \lambda}{k},$$

$$\lambda = \frac{k_B}{k + k_B}, \quad \mu_1 = \frac{\Delta y_1}{l}, \quad \omega_1^2 = \frac{k \lambda}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{0,25 l^2 k \lambda}{m \rho^2},$$

$$y_0^* = 0,5 \left(y_{10} + y_{20} - \frac{P}{k_0 \lambda} \right), \quad \Delta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \mu_2 = \frac{y_{10}}{l}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{y_{20}}{y_{10}}, \quad a = \frac{g}{l \omega^2}, \quad \delta = l/\rho, \quad k = 2k_0, \quad \psi_0^* = l^{-1} (y_{20} - y_{10}),$$

$$\alpha_i = g_i(\varepsilon_j, \mu_k, \varphi_m), \quad \beta_i = G_i(\varepsilon_j, \mu_k, \varphi_m),$$

$$A_\nu = f_\nu(\varepsilon_j, \mu_k, \varphi_n, a), \quad B_\nu = F_\nu(\varepsilon_j, \mu_k, \varphi_n, a)$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad k, j, m = 1, 2; \quad n = 1, 2, 3, 4; \quad \nu = 1, 2, \dots, 7),$$

α_i , β_i , A_ν , B_ν — некоторые функции параметров, указанных в скобках, k_B — жесткость вала.

При выводе уравнений (2) мы воспользовались тем, что матрица жесткостей системы является обратной по отношению к матрице коэффициентов влияния, а также тем, что $\Delta k_i \ll k_{0i}$. Вследствие некоторой громоздкости формул они записаны для случая

$$l_i = 0,5 l, \quad k_{0i} = k_0, \quad \Delta k_i = \Delta k \quad (i = 1, 2).$$

Для полностью симметричной системы ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$) уравнения упрощаются, и соответствующие выражения для α_i , β_i , A_ν , B_ν имеют вид

$$\alpha_1 = \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2, \quad \alpha_2 = 0,5 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1), \quad \alpha_3 = 0,25 \alpha_1,$$

$$A_1 = 0,5 \kappa (\cos \varphi_3 + \cos \varphi_4), \quad A_3 = a \alpha_1, \quad A_5 = 0,5 \mu_1 \kappa [\cos(\varphi_1 + \varphi_3) + \cos(\varphi_2 + \varphi_4)],$$

$$A_7 = 0,5 \mu_1 \kappa [\cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \cos(\varphi_2 - \varphi_4)], \quad B_1 = \Delta^2 \kappa (\cos \varphi_4 - \cos \varphi_3), \quad B_3 = 4 \Delta^2 a \alpha_2,$$

$$B_5 = \Delta^2 \kappa \mu_1 [\cos(\varphi_2 + \varphi_4) - \cos(\varphi_1 + \varphi_3)], \quad B_7 = \Delta^2 \kappa \mu_1 [\cos(\varphi_2 - \varphi_4) - \cos(\varphi_1 - \varphi_3)].$$

Коэффициенты β_1 , β_2 , β_3 , A_2 , A_4 , A_6 , B_2 , B_4 , B_6 получаются из коэффициентов α_1 , α_2 , α_3 , A_1 , A_3 , A_5 , B_1 , B_3 , B_5 соответственно после замены $\cos \varphi_i$ на $\sin \varphi_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Условия контакта с шариками (3) запишутся в виде

$$\xi - \frac{a}{\alpha} - 0,5 \eta - \mu_1 \cos(\tau + \varphi_3) \leq 0; \quad (4)$$

$$\xi - \frac{a}{\alpha} + 0,5 \eta - \mu_1 \cos(\tau + \varphi_4) \leq 0.$$

Уравнения (2) и (3) переходят в соответствующие уравнения [2] после замены μ' на

$\mu(\mu'=\lambda\mu)$. Поэтому результаты работы [2] могут быть непосредственно использованы после данной замены.

Так как $\lambda < 1$, то из приведенных в [2] рисунков, в частности, следует то, что при уменьшении жесткости вала область значений параметров, при которых возникают колебания вала с ударами в шарикоподшипниках, уменьшается.

В заключение благодарю Ю. И. Неймарка за внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Бояринов, Ю. И. Неймарк, Изв. АН СССР, сер. мех., № 3, 49 (1965).
2. В. С. Бояринов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 982 (1965).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
4 июля 1965 г.

УДК 62—501.3

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РЕГУЛИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Г. Ерин

Рассмотрим систему, описываемую уравнением вида

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega x = 0 \quad (1)$$

или эквивалентной системой уравнений

$$\dot{x} = y; \quad (2)$$

$$\dot{y} = -\omega x - 2hy,$$

где h и ω — регулируемые параметры, изменяющиеся в пределах

$$h_1 < h \leq h_2; \quad \omega_1 < \omega \leq \omega_2. \quad (3)$$

Поведение системы рассматривается на фазовой плоскости (x, y) .

Для этой системы ставится задача определить закон управления коэффициентами h и ω , обеспечивающий перемещение изображающей точки по фазовым траекториям $\{x, y\}$ за минимальное время в ϵ — окрестность начала координат, т. е. на множество

$$x^2 + y^2 \leq \epsilon^2. \quad (4)$$

Предполагается, что исходные точки не принадлежат множеству (4).

Характер фазовых траекторий, т. е. решений уравнения (1) в плоскости (x, y) определяется корнями соответствующего характеристического уравнения, т. е. величинами h и ω .

Оси координат ω и h вместе с дискриминантной кривой ($h^2 - \omega = 0$) делят всю плоскость параметров (ω, h) на 6 областей, точкам каждой из которых присущ определенный вид фазовых траекторий. Это следующие области:

- а) две области $\omega < 0, h > 0$ и $\omega < 0, h < 0$ — гиперболические траектории с особой точкой в начале координат типа седла;
- б) область $h > 0, 0 < \omega < h^2$ — траектории параболического типа с особой точкой в начале координат типа устойчивого узла;
- в) область $h > 0, \omega > h^2$ — траектории-спирали с устойчивым фокусом в начале координат;
- г) область $h < 0, \omega > h^2$ — траектории-спирали с неустойчивым фокусом в начале координат;
- д) область $h < 0, 0 < \omega < h^2$ — траектории параболического типа с особой точкой типа неустойчивого узла в начале координат.

Область изменения параметров (3) на плоскости (ω, h) представляет собой прямоугольник, который назовем прямоугольником регулирования. На рис. 1 показан один из случаев расположения прямоугольника регулирования.

При решении задачи использован принцип максимума [1]. Согласно последнему, система (2) будет оптимальной в рассматриваемом смысле при таких $h^0(t)$ и $\omega^0(t)$ для которых функция H будет максимальной. Функция H в нашей задаче имеет следующий вид:

$$H = \psi_1 y + \psi_2 (-2hy - \omega x), \quad (5)$$

где ψ_1 и ψ_2 — решения системы, сопряженной к системе (2).

Из всех значений h и ω , которые они могут принимать в заданном прямоугольнике регулирования (3), должны реализоваться те, которые обеспечивают максимальность значения функции H . А так как H линейна по h и ω , то максимумы реализуемых значений h и ω находятся в вершинах прямоугольника регулирования.

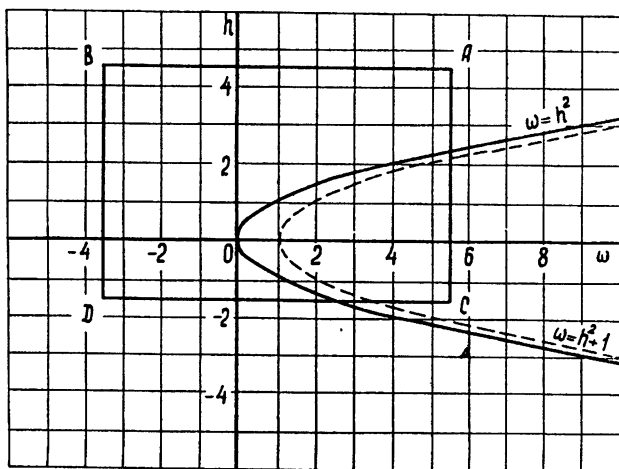


Рис. 1.

Закономерность выбора оптимальных $h^0(t)$ и $\omega^0(t)$ может быть кратко записана в виде следующих формул:

$$h^0(t) = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{h_1 - h_2}{2} \operatorname{sgn} [\psi_2(t) y(t)]; \quad (6)$$

$$\omega^0(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \operatorname{sgn} [\psi_2(t) x(t)].$$

Получены выражения оптимальных h^0 и ω^0 как функции времени. Из выражения (6) видно, что характер реализации оптимальных h^0 и ω^0 релейный. Пользуясь соотношениями (6) и принципом пятого движения [2], можно представить h^0 и ω^0 как функции фазовых координат:

$$h^0(x, y) = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{h_1 - h_2}{2} \operatorname{sgn} [y\varphi(x, y)]; \quad (7)$$

$$\omega^0(x, y) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \operatorname{sgn} [x\varphi(x, y)],$$

где $\varphi(x, y)$ — некоторая линия переключения $h^0(x, y)$ и $\omega^0(x, y)$. Вершины прямоугольника регулирования обозначим следующим образом:

- 1) вершина A ($\omega = \omega_2$, $h = h_2$);
- 2) вершина B ($\omega = \omega_1$, $h = h_2$);
- 3) вершина C ($\omega = \omega_2$, $h = h_1$);
- 4) вершина D ($\omega = \omega_1$, $h = h_1$).

При исследовании возможных случаев расположения прямоугольника регулирования на плоскости параметров (ω, h) получены следующие результаты.

Вершина D для обеспечения оптимальности не реализуется.

Если весь прямоугольник $ABDC$ лежит на квадранте параметров $h < 0$, $\omega < 0$ то при $\epsilon \rightarrow 0$ область, из которой возможно попадание на заданное множество (4), стремится к нулю, т. е. практического интереса эта область не представляет.

Если прямоугольник регулирования $ABDC$ расположен на плоскости параметров так, что его сторона AB лежит полностью в области спиральных траекторий с устойчивым фокусом, то в общем случае линии переключения не могут быть аппроксимиро-

ваны прямыми. Если, однако, вершина A лежит на кривой $\omega = h^2 + 1$, т. е. $\omega_2 = h_2^2 + 1$, то линиями переключения служат оси координат x и y .

Во всех остальных случаях расположения прямоугольника регулирования $ABDC$ на плоскости параметров (ω, h) линии переключения параметров ω^0 и h^0 могут быть аппроксимированы прямыми, т. е. при $\epsilon \rightarrow 0$ $\varphi(x, y) \rightarrow ax + by$ равномерно (a и b — числа, определяемые положением вершины B на плоскости (ω, h)).

Введем обозначения

$$g_1 = -h_2 + \sqrt{h_2^2 + \omega_1}; \quad g_2 = h_2 + \sqrt{h_2^2 + \omega_1};$$

$$m_1 = -h_1 + \sqrt{h_1^2 + \omega_2}; \quad m_2 = h_1 + \sqrt{h_1^2 + \omega_2};$$

$$p_2 = h_2 + \sqrt{h_2^2 - \omega_1};$$

G_ϵ — область достижимости. Возможны три различных случая аппроксимации линии переключения $\varphi(x, y)$ прямой $ax + by = 0$:

- 1) $\omega_1 < 0, h_2 > 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$ $b = 1, a = g_2$;
- 2) $h_1 < h_2 < 0, \omega_1 < 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$ $b = 1, a = g_1$;
- 3) $\omega_2 > \omega_1 > 0, h_2 > 0, h_2^2 - \omega_1 > 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$ $b = 1, a = p_2$.

Следовательно, линии переключения в этих трех случаях при $\epsilon \rightarrow 0$ аппроксимируются прямыми, которые проходят через начало координат и имеют тангенс угла наклона, равный максимальному отрицательному корню характеристического уравнения, соответствующему положению вершины B .

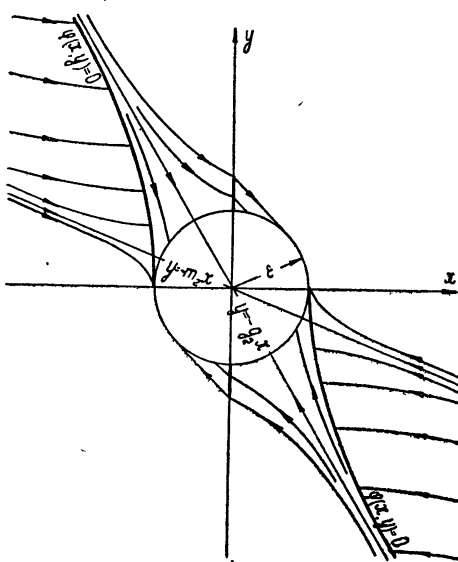
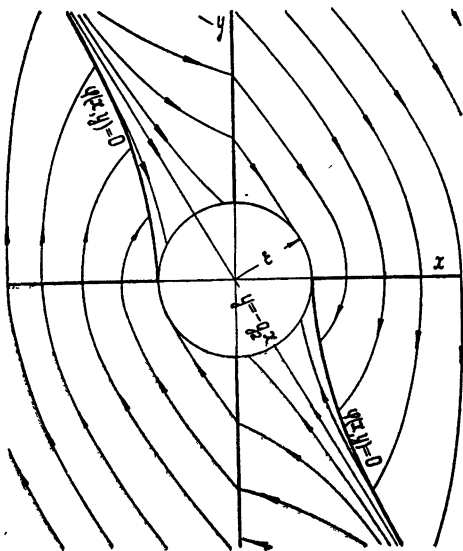
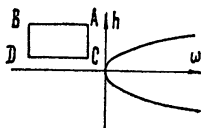
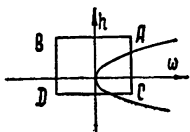


Рис. 2.

Рис. 3.

Несколько замечаний об областях достижимости G_ϵ . Из всех случаев существования области достижимости при $\epsilon \rightarrow 0$ лишь в четырех случаях областью достижимости является часть плоскости, заключенная между прямыми, проходящими через начало координат:

- 1) при $\omega < 0, h > 0$ $G_\epsilon \rightarrow (y + g_2 x)(y + m_2 x) < 0$;
- 2) при $\omega < 0, h_2 > 0, h_1 < 0$ $G_\epsilon \rightarrow (y + g_2 x)(y + m_1 x) < 0$;

$$3) \text{ при } \omega < 0, \quad h < 0, \quad G_\varepsilon \rightarrow (y + g_1 x)(y + m_1 x) < 0;$$

$$4) \text{ при } \omega_1 < 0, \quad \omega_2 > 0, \quad h < 0, \quad h_1^2 > \omega_2, \quad G_\varepsilon \rightarrow y(y + g_1 x) < 0.$$

В остальных случаях областью достижимости является вся плоскость (x, y) . Два характерных случая синтеза показаны на рис. 2, 3.

Основным результатом данной работы является то, что указаны области изменения параметров ω и h , на которых сложные линии переключения могут быть аппроксимированы при $\varepsilon \rightarrow 0$ прямыми, характеризующимися корнями характеристического уравнения.

В заключение автор выражает благодарность Р. Габасову за предложенную задачу и ряд ценных указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
2. А. А. Фельдбаум, Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, М., 1959.

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
27 февраля 1965 г.