

## СОДЕРЖАНИЕ

Пупышева Л. В., Разин В. А. К методике измерений линейной поляризации распределенного космического радиоизлучения . . . . .	7
Эйдман В. Я. О неустойчивости потока плазмы в неоднородной среде . . . . .	11
Ильин В. С., Костюнина Г. П. Дифракция электромагнитных волн на ультразвуковых волнах в анизотропной среде . . . . .	16
Якименко И. П. О резонансах флюктуационного излучения плазменного цилиндра	33
Рыжов Ю. А. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости сильно-неоднородной анизотропной среды . . . . .	39
Каллистратова М. А. Флуктуации направления распространения световых волн в неоднородной турбулентной среде . . . . .	50
Грачева М. Е., Лежен А. С. Флуктуации интенсивности света при распространении в среде с переменными характеристиками турбулентности . . . . .	57
Долин Л. С. О распространении узкого пучка света в среде с сильно анизотропным рассеянием . . . . .	61
Амадзиев А. М., Белянина В. Ф., Мясников Л. Л. О детектировании атомных пучков, применяемых в стандартах частоты и радиоспектроскопах . . . . .	72
<b>Родичев А. М.</b> О поведении инвертированных ферромагнетиков . . . . .	<b>81</b>
Быков В. П. Фокусировка лучей между гладкими зеркалами . . . . .	85
Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф. Поле лазерного излучения, сфокусированное реальными системами . . . . .	95
Зачепицкая Л. П., Клибанова И. М., Малахов А. Н. Влияние больших флюктуаций контурной емкости на работу систем синхронизации генераторов . . . . .	102
Шевченко В. В. Электромагнитные волны в изотропном слоистом плазменном волноводе . . . . .	110
Коротун Л. И. Волны плотности заряда в радиальном электронном потоке . . . . .	126
Мельниченко А. А., Флягин В. А. Экспериментальное исследование трохоидальных пучков с большим пространственным зарядом, формируемых в скрещенных электрическом и магнитном полях . . . . .	135
Гурзо В. В., Куликов М. Н., Стальмахов В. С. Исследование нестабильности (диокотронного усиления) тонких электронных потоков, движущихся в скрещенных полях . . . . .	146
Вигдорчик В. И., Конторович В. М. Стационарные колебания электронного облача в цилиндрическом магнетроне. I. Механизм стабилизации неустойчивости.	155
Грошков Л. М. Измерение распределения потенциала в неразрезном магнетроне в статическом режиме методом зонда с электронно-лучевым индикатором . . . . .	167
Рабинович М. И. О влиянии дисперсии на характер автоколебаний в нелинейной активной линии . . . . .	173
Ашбель Н. И. и Постников Л. В. Некоторые вопросы динамики транзисторного триггера . . . . .	182
Мельникова В. А. Динамика мультивибратора, собранного по схеме Роера . . . . .	189
Моргулис М. В., Шильман С. В. О частотных методах анализа чувствительности характеристик линейных динамических систем . . . . .	197

## Краткие сообщения и письма в редакцию

Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. Среднее поле в среде с хаотическими анизотропными неоднородностями . . . . .	205
Ханкина С. И., Яковенко В. М. О возбуждении низкочастотных волн в полупроводниковой плазме, находящейся в постоянном электрическом и магнитном полях . . . . .	207
Бородовский П. А., Булдыгин А. Ф. Экспериментальное исследование взаимодействия электронов с полем бегущей волны в строфотроне . . . . .	209
Чубаров М. А. О приведении многочленов в каноническую форму на цифровых вычислительных машинах . . . . .	212

## Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. V, № 5, 1965 . . . . .	214
--	-----

---

УДК 523.164.4 : 621.396.628

## К МЕТОДИКЕ ИЗМЕРЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

*Л. В. Пупышева, В. А. Разин*

Рассматривается методика измерений линейной поляризации распределенного космического радиоизлучения с использованием «чёрного» диска, позволяющего экранировать луч антенны. Показано, что эта методика может обеспечить достаточно высокую точность измерений поляризационных параметров космического радиоизлучения.

Исследования линейной поляризации распределенного космического радиоизлучения сопряжены со специфическими трудностями, так как при поляризационных измерениях наблюдаются побочные эффекты того же порядка величины, что и эффект, обусловленный поляризованной компонентой космического радиоизлучения. Значительные погрешности измерений возникают по ряду причин, основными из которых являются следующие:

1) из-за сложной зависимости характеристик антенны от направления распространения и поляризации принимаемого излучения (боковые и задние лепестки диаграммы направленности, кросс-поляризация) и неоднородного пространственного распределения источников радиоизлучения очень трудно учесть, насколько искажаются поляризационные параметры космического радиоизлучения, принимаемого главным лучом антенны;

2) при изменении поляризации антенны могут возникать изменения ее диаграммы направленности и импеданса;

3) в антенну всегда попадает частично поляризованное радиоизлучение Земли; кроме того, в принимаемом радиоизлучении может содержаться линейно поляризованная компонента, возникающая вследствие отражения радиоволн от земной поверхности и местных предметов.

В той или иной степени эти побочные эффекты проявляются при любых методах наблюдения поляризации космического радиоизлучения (независимо от того, измеряется ли непосредственно разность антенных температур [1-3] или когерентность двух взаимно перпендикулярных компонент в принимаемом радиоизлучении [4-8]). Дополнительные осложнения возникают вследствие изменения во времени отмеченных эффектов.

Корректный учет побочных эффектов при поляризационных измерениях представляет собой сложную задачу. Об этом можно судить, в частности, по работам [6-9], в которых благодаря специально принятым мерам побочные эффекты подавлялись и учитывались весьма тщательно. Как указано в работе [9], в процессе наблюдений поляризации космического радиоизлучения с помощью антенны с лучом шириной  $8^\circ$  на частоте 408 Мгц ошибки в измерении температуры поляризованной компоненты достигали  $1^\circ\text{K}$  при чувствительности аппарата  $0,15^\circ\text{K}$  и средней температуре поляризованной компоненты  $1 \sim 2^\circ\text{K}$ . В работе [8] приведены результаты измерений поляризации космического радиоизлучения на частоте 610 Мгц. В этих измерениях использовалась параболическая антenna диаметром 25 м с лучом шириной  $1,4^\circ$  по точкам половинной интенсивности и аппаратура, имевшая чувствитель-

ность  $0,11^{\circ}\text{K}$ . Для определения величины систематических ошибок некоторые области небосвода наблюдались дважды: в июне и в ноябре 1963 г. Несмотря на то, что методика измерений была одна и та же, результаты наблюдений области небосвода с координатами  $I^{\text{II}} = 110^{\circ}$  и  $b^{\text{II}} = -25^{\circ}$  оказались существенно разными: поляризационные параметры Стокса  $Q$  и  $U$  отличались на  $0,7^{\circ}\text{K}$  (при температуре поляризованной компоненты  $\sim(0,2 \div 0,5)^{\circ}\text{K}$ ). Не исключено, что такое расхождение результатов связано с ошибками измерений. Таким образом, повышение точности измерений поляризации распределенного космического радиоизлучения остается актуальной проблемой. Ниже в этом аспекте будет рассмотрен метод экранировки луча антенны эталоном неполяризованного радиоизлучения [10].

Эталоном может служить, например, диск, изготовленный из материала, хорошо поглощающего радиоволны. Измерения с использованием «черного» диска, согласно [10], должны проводиться в два этапа. Сначала диском экранируют луч антенны и проводят поляризационные измерения для определения величины побочных эффектов. Затем наблюдения проводятся при убранном диске. Сравнивая результаты этих двух экспериментов, можно определить температуру линейно поляризованной компоненты космического радиоизлучения в области небосвода, закрывавшейся диском.

Возможны различные варианты этого метода измерения в зависимости от того, какие размеры имеет диск и на каком расстоянии от антенны и высоте он устанавливается. Поэтому, прежде чем оценивать погрешности измерений, которые могут возникнуть при его использовании, надо конкретизировать схему измерительной установки. Мы будем считать, что диск помещается на таком расстоянии от антенны, где диаграмма направленности, по существу, уже сформировалась. Чтобы можно было экранировать луч антенны, диаметр диска должен быть не меньше диаметра апертуры  $D$ , так как ширина главного лепестка диаграммы направленности  $\sim\lambda/D$ , где  $\lambda$  — длина волны, а лепесток формируется на расстоянии  $\sim D^2/\lambda$  от антенны. Угловая высота диска над горизонтом должна равняться по крайней мере нескольким разворотам главного лепестка диаграммы направленности антенны, т. е. диск надо поднимать на высоту, равную нескольким его диаметрам. В противном случае будет сильно сказываться влияние земли на диаграмму направленности антенны. Для оценок примем, что  $D = 10 \text{ м}$ ,  $\lambda = 30 \text{ см}$ , диаметр диска  $d = 10 \text{ м}$ , высота его центра над землей  $h = 20 \text{ м}$ , расстояние между антенной и диском  $r = D^2/4\lambda \approx 83 \text{ м}$  (при этом диаметр первой зоны Френеля равняется диаметру апертуры антенны).

При использовании описанной методики измерений погрешности могут возникнуть из-за дифракционных явлений, в силу того, что диск не идеально «черный», а также из-за асимметрии главного луча антенны. Прежде всего возникает вопрос, насколько эффективно диск экранирует участок небосвода, находящийся за ним, и каков телесный угол затененной области. Мы ограничимся лишь качественным решением этой проблемы. В примере, который здесь рассматривается, центр диска расположен в максимуме поля излучения антенны (если последняя используется как передающая). Воспользовавшись результатами работы [11] о поле излучения антенны с круглым раскрытием, можно показать, что диск с диаметром, равным диаметру апертуры антенны, расположенный на расстоянии  $r = D^2/4\lambda$  от нее с центром на электрической оси, поглощает примерно 80% всей энергии. С другой стороны, в главном лепестке диаграммы направленности антенны излучается 70  $\div$  80% энергии. Следовательно, диск полностью экранирует главный лепесток диаграммы направленности антенны. На основании теоремы взаимности

можно заключить, что в направлении главного луча при наличии диска антenna не будет и принимать радиоволны. Дифракционные эффекты в этом случае определяются боковыми лепестками диаграммы направленности антенны, т. е. оказываются ослабленными почти на два порядка.

С дифракцией радиоволн могут быть связаны еще два эффекта. Во-первых, при дифракции, вообще говоря, изменяется поляризация излучения. (Правда, в случае, если экран является «черным», этого не происходит [12].) Во-вторых, из-за дифракции радиоволн увеличивается интенсивность радиоизлучения, попадающего в антенну от источников, не закрытых диском. При измерениях поляризации космического радиоизлучения по этой причине возникает разность антенных температур

$$\Delta T \approx T_0 \frac{\int_{\Omega_k} F_{\text{дифр}} (R_{\parallel}^2 - R_{\perp}^2) d\Omega}{\int_{4\pi} F d\Omega}, \quad (1)$$

где  $T_0$  — температура поверхности земли ( $\sim 300^{\circ}\text{K}$ ),  $\Omega_k$  — телесный угол, занятый участком поверхности земли, от которого излучение попадает в антенну (космическим радиоизлучением и излучением атмосферы пренебрежем),  $F_{\text{дифр}}$  — энергетическая дифракционная диаграмма направленности диска,  $R_{\parallel}^2$  и  $R_{\perp}^2$  — энергетические коэффициенты отражения от земли горизонтально и вертикально поляризованных радиоволн,  $F$  — диаграмма направленности антенны по мощности. Принимая уровень боковых лепестков антенны равным  $2 \cdot 10^{-2}$ , среднее значение разности  $R_{\parallel}^2 - R_{\perp}^2 \sim 0,2$  [14] и полагая в согласии с [13]  $\int_{\Omega_k} F_{\text{дифр}} d\Omega / \int_{4\pi} F_{\text{дифр}} d\Omega \sim 1,5 \cdot 10^{-2}$  при  $d/\lambda = 33$  и  $h/r = 0,24$ , из выражения (1) получаем  $\Delta T \approx 300 \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \approx 0,02^{\circ}\text{K}$ . Температура же поляризованной компоненты космического радиоизлучения на волне  $30 \text{ см}$  может достигать  $0,5^{\circ}\text{K}$  [7,8].

Ошибку из-за неидеальной «черноты» диска можно оценить следующим образом. Примем, что коэффициент отражения радиоволн от поглощающего материала, покрывающего диск, равен 1% (по мощности) [15]. Так как от диска отражаются только радиоволны, идущие в главном луче, для величины  $R_{\parallel}^2 - R_{\perp}^2$  при  $h/r = 0,24$  примем значение 0,3 [16]; фактор рассеяния антенны положим равным 0,3. Тогда  $\Delta T$  будет равна  $10^{-2} \cdot 0,3 \cdot 0,7 T_0 \approx 0,6^{\circ}\text{K}$ . Для устранения этой ошибки необходимо «заметаллизировать» почву около радиотелескопа, покрыв ее, например, металлической сеткой. В рассматриваемом примере из простых геометрических соотношений ясно, что покрывать сеткой надо около  $1500 \text{ м}^2$ ; это не представляет больших трудностей. Погрешности измерений из-за асимметрии главного лепестка диаграммы направленности антенны здесь такие же, как и при наблюдениях другими методами. Эти ошибки можно сравнительно просто учесть или существенно уменьшить путем симметрирования луча антенны.

Из сказанного ясно, что метод экранировки луча антенны может обеспечить достаточно высокую точность измерений поляризации космического радиоизлучения. К достоинствам метода следует также отнести возможность производить с высокой точностью калибровку радиотелескопа.

Создание экрана из поглощающего материала, подобно описанному выше, и устройства для его установки не представляет больших технических трудностей. Но изготовление экранов для антенн с апертурой

в несколько десятков метров вряд ли оправдано. Однако, если антенна имеет луч уже  $0,5^\circ$ , в качестве эталона неполяризованного радиоизлучения можно использовать Луну. На дециметровых и метровых волнах распределение радиотемпературы по диску Луны не зависит от фазы и близко к сферически симметричному [17]. Поэтому, когда луч антенны направлен на центр лунного диска, из-за симметрии лунных изофот улавливаемое антенной радиоизлучение Луны будет неполяризованным. Разумеется, надо еще учесть, что Луна не является абсолютно «черным» телом, и антенна улавливает также отраженное от Луны космическое радиоизлучение, которое из-за неоднородного распределения яркостной температуры по небосводу оказывается частично поляризованным. Но даже по существенно завышенным оценкам температура поляризованной компоненты, обусловленной отражением космического радиоизлучения от Луны, значительно меньше температуры поляризованного космического радиоизлучения. Например, если принять диэлектрическую проницаемость лунного вещества равной 2 [17], то степень поляризации  $\rho$  радиоизлучения, отраженного от «гладкой» «Луны», не превосходит 15% [18] при яркостной температуре на волне 30 см  $T_{\text{я}} \ll 0,2^\circ\text{K}$ . Иными словами, погрешность измерений не будет превосходить  $2\rho T_{\text{я}} \sim 0,05^\circ\text{K}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Разин, Радиотехника и электроника, 1, 846 (1956); Астрон. ж., 35, 241 (1958).
2. J. L. Pawsey, E. Harting, Austr. J. Phys., 13, 740 (1960).
3. R. Wielebinski, J. R. Shakeshaft, F. I. K. Pauliny-Toth, Observatory, 82, 158 (1962).
4. J. M. Thomson, Nature, 180, 495 (1957).
5. G. Westerhout, C. L. Seeger, W. N. Brouw, J. Tinbergen, BAN, 16, 187 (1962).
6. W. N. Brouw, C. A. Muller, J. Tinbergen, BAN, 16, 213 (1962).
7. E. M. Berkhuijsen, W. N. Brouw, BAN, 17, 185 (1963).
8. E. M. Berkhuijsen, W. N. Brouw, C. A. Muller, J. Tinbergen, BAN, 17, 465 (1964).
9. R. Wielebinski, J. R. Shakeshaft, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., 128, 19 (1964).
10. В. А. Разин, IV Всесоюзная конференция по радиоастрономии, Горький, 1963, Аннотации докладов, изд. АН СССР, М., 1963.
11. Ming-Kuei Hu, Radio Propagation, 65D, 137 (1961).
12. F. Kottler, Ann. Phys., 71, 457 (1923).
13. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1265 (1963).
14. В. А. Разин, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 21 (1962).
15. Я. А. Шнейдерман, Зарубежная радиоэлектроника, 4, 115 (1965).
16. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
17. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 81, 608 (1963).
18. А. М. Стародубцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 399 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 августа 1965 г.

## TO THE MEASUREMENT METHODS OF THE LINEAR POLARIZATION OF THE DISTRIBUTED COSMIC RADIO EMISSION

L. V. Pupysheva, V. A. Razin

The measurement methods of the linear polarization is considered of the distributed cosmic radio emission, using the „black“ disk; the latter permitting to shield the antenna's beam. These methods are shown to be able to secure the sufficiently high accuracy of the polarization parameters measurements of the cosmic radio emission.

УДК 533.951.8

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКА ПЛАЗМЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*В. Я. Эйдман*

Показано, что в потоке плазмы, пронизывающем слабонеоднородную среду, имеет место конвективная неустойчивость по отношению к продольным возмущениям.

Вопрос об условиях распространения волн в потоке плазмы, пронизывающем неоднородную среду, рассматривался в ряде работ (см., например, [1,2]). Однако проблема устойчивости такой системы, насколько нам известно, или не рассматривалась вовсе, или это делалось не вполне удовлетворительно (см. [2]). В связи с этим представляет интерес вновь рассмотреть этот вопрос. В настоящей статье решается задача об устойчивости потока однородной плазмы, пронизывающего неоднородную среду, по отношению к продольным возмущениям. Показывается, что такая система, так же как и в случае однородной среды, может быть конвективно неустойчива.

Уравнение, описывающее продольные колебания в однородном потоке, пронизывающем неоднородную среду, характеризуемую диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\omega, z)$ , при начальном возмущении типа

$$j_{ct} = -\frac{1}{4\pi} \delta(t) E(z, t=0) \equiv -\frac{1}{4\pi} \delta(t) E_0(z) \text{ имеет вид [2]}$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{\omega_0^2}{u^2 \epsilon(z)} F = -\frac{i}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} E_{0k} e^{i(k-\alpha)z} (k-\alpha)^2 dk, \quad (1)$$

где тепловым движением электронов плазмы пренебрегается, т. е. считается, что  $u^2 / v_T^2 \ll 1$  ( $v_T$  — средняя тепловая скорость электронов),  $\omega$  — ленгмюровская частота плазмы, движущейся со скоростью  $u$ ,  $\alpha = \omega/u$ ,

$E_{0k} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) e^{-ikz} dz$ . Продольное поле  $E$  определяется соотноше-

ниями  $F = \epsilon E_\omega e^{-i\omega z}$ ,  $E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega(z') e^{-i\omega t} d\omega$ , причем путь интегрирования  $L$  огибает сверху все особые точки  $E_\omega$ , расположенные в области  $\omega_2 > 0$  ( $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ ). Последнее обеспечивает выполнение начального условия  $E(t < 0) = 0$ .

Общее решение уравнения (1) в приближении геометрической оптики запишем в виде

$$E_\omega = -\frac{u}{4\pi\omega_0 \omega \epsilon^{3/4}} \left\{ e^{i\psi_1(z)} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} E_{0k} \exp \{i[-\psi_1(z') + kz']\} \epsilon^{1/4}(z') \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (k-\alpha)^2 dk dz' - e^{i\psi_2(z)} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} E_{0k} \exp \{i[-\psi_2(z') + kz']\} \times \\ & \times \varepsilon^{1/4} (z') (k-\alpha)^2 dk dz' \Big\} + \frac{c_1}{\varepsilon^{3/4}} e^{i\psi_1} + \frac{c_2}{\varepsilon^{3/4}} e^{i\psi_2} = E_{\text{в, } \omega} + E_{\text{с, } \omega}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\psi_1 = \alpha z + \frac{\omega_0}{u} \int_{-\infty}^z dz' / \sqrt{\varepsilon(z')}, \quad \psi_2 = \alpha z - \frac{\omega_0}{u} \int_{-\infty}^z dz' / \sqrt{\varepsilon(z')},$$

$c_1, c_2$  — произвольные постоянные интегрирования.

Выражение (2) обладает одной замечательной особенностью, которая позволяет однозначно определить постоянные интегрирования. Благодаря множителю  $e^{i\omega z/u}$ , входящему в  $E_{\text{с, } \omega} = \varepsilon^{-3/4} (c_1 e^{i\psi_1} + c_2 e^{i\psi_2})$ , выражение (3) имеет в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$  бесконечно удаленную ( $\omega \rightarrow \infty, \omega_2 > 0$ ) существенно особую точку. Вынужденное же решение  $E_{\text{в, } \omega}$ , как легко показать, используя очевидное соотношение  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega, z) = 1$ , не имеет такой особенности. Ввиду этого при

$c_1 \neq 0$  или  $c_2 \neq 0$  невозможно провести путь интегрирования  $L$  в плоскости  $\omega$  указанным выше образом, т. е. нельзя удовлетворить начальному условию  $E(t < 0)$ . Таким образом, необходимо положить  $c_1 = c_2 = 0$ . Заметим, что сказанное относительно способа определения постоянных интегрирования  $c_1, c_2$  остается в силе и в случае произвольной зависимости  $\varepsilon(z)$ , когда не справедливо приближение геометрической оптики. В частности, формула (16) из статьи [2] дает правильное выражение для поля, если в качестве нижнего предела интегрирования по  $dz'$  взять значение, равное  $-\infty$ .

Чтобы исследовать устойчивость рассматриваемой системы, необходимо определить характер поведения функции  $E_\omega$  в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$ . Для этого рассмотрим входящее в (2) выражение при  $\omega_2 > 0$ :

$$I_1(z) = \exp(i\zeta + ikz) \int_{-\infty}^z e^{-k' \varepsilon^{1/4}(z')} dz', \quad \zeta = \psi_1(z) - kz, \\ \zeta' = \psi_1(z') - kz'. \quad (3)$$

Произведя замену переменных  $\zeta - \zeta' = \xi$ , получим

$$I_1(z) = \int_0^{\zeta + \infty(\sigma_1 + i\sigma_2)} f(\zeta - \xi) e^{i\xi} d\xi, \quad (4)$$

где

$$f(\zeta') = \frac{\varepsilon^{1/4} [z'(\zeta')]}{\alpha - k + \omega_0/u \sqrt{\varepsilon[z'(\zeta')]}} = \frac{\varepsilon^{1/4}}{\Delta(\zeta')}, \quad \sigma_1 = \frac{\omega_1 - uk}{u}, \quad \sigma_2 = \frac{\omega_2}{u} > 0.$$

Интеграл (4) берется по некоторой кривой в комплексной плоскости  $\xi$ , определяемой уравнением  $\zeta - \xi = \psi_1(z') - kz'$  ( $-\infty < z' < z$ ). Будем предполагать, что  $\varepsilon(z, \omega)$  при  $\omega_2 > 0$  — аналитическая функция ( $\varepsilon$  не должна иметь ни нулей, ни особых точек при  $\omega_2$ ). Тогда путь интегрирования в (4) можно сместить на мнимую ось ( $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ ). При этом следует заметить, что (4) не имеет особенности типа  $\Delta(\zeta - \xi) = 0$  в плос-

кости  $\xi$ . Это непосредственно следует из отсутствия здесь особенностей исходного выражения (3), а также из формального применения теоремы о вычетах, так как

$$\frac{d\Delta}{d\xi} = \frac{\omega_0}{2u \varepsilon^{3/2}} \frac{d\varepsilon}{dz'} \frac{dz'}{d\xi} = \frac{\omega_0}{2u \varepsilon^{3/2}} \frac{d\varepsilon}{dz'} \frac{1}{\Delta} \rightarrow \infty \quad (\Delta \rightarrow 0).$$

Таким образом, после несложных преобразований с помощью формул

$$f(\zeta - i\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(\zeta)}{d\zeta^n} \frac{(-i\xi_2)^n}{n!}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\xi_2} \xi_2^n d\xi_2 = n!$$

будем иметь

$$I_1(\zeta) = i \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{d^n f(\zeta)}{d\zeta^n}, \quad f(\zeta) = \frac{\varepsilon^{1/4} [z(\zeta)]}{\alpha - k + \omega_0/u \sqrt{\varepsilon [z(\zeta)]}}. \quad (5)$$

Поскольку  $d^n f/d\zeta^n \approx d^n \varepsilon / dz^n$ , то в приближении геометрической оптики надо оставить в (5) лишь один член с  $n = 0$ . Аналогично вычисляется и второй интеграл, входящий в (2). В результате выражение (2) можно будет записать в виде

$$E_{\omega}(z) = -\frac{ui}{4\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz} E_{0k} (k - \alpha)^2}{\omega \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{\Delta_2} \right) dk, \quad (6)$$

где

$$\Delta_{1,2} = \alpha - k \pm \omega_0/u \sqrt{\varepsilon [\omega(z)]}.$$

Из (6) следует, что при наличии корней уравнения

$$\omega - uk \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon(\omega, z)}} = 0, \quad (7)$$

расположенных в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$ , имеет место неустойчивость.

Используя (6), (7), легко получить выражение для поля

$$E(z, t) = -\omega_0 \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \{i[kz - \omega_i(k, z)t]\} E_{0k} dk}{\omega_i [\pm 2\varepsilon^{3/2} + \omega_0 \partial \varepsilon_i / \partial \omega_i]}, \quad (8)$$

где, например,  $\omega_i$  — корень уравнения (7), причем  $i = 1$  отвечает знаку плюс в формулах (7), (8), а  $i = 2$  отвечает минусу в (7), (8). В отличие от случая однородной среды, частота колебаний, определяемая уравнением (7), зависит не только от волнового числа, но и от координаты  $z$ .

Неустойчивость, имеющая место в рассматриваемой системе при наличии корней (7) с  $\omega_2 > 0$  ( $\omega_i(k, z)$  — ограниченная функция), так же как и при  $\varepsilon(z) = \text{const}$ , будет конвективной неустойчивостью. В этом нетрудно убедиться с помощью рассмотрения, аналогичного произведенному Стэрреком [3] для однородной среды. Тот же результат можно получить непосредственно, анализируя выражение для поля (2))

$$E(z, t) = -\frac{u}{4\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^{3/4}\omega} \left\{ e^{i\psi_i(z)} \int_{-\infty}^z e^{-i\psi_i(z')} \tilde{E}_0(z') \varepsilon^{1/4}(z') dz' \right\} dz,$$

$$-e^{i\psi_2(z)} \int_{-\infty}^z e^{-i\psi_2(z')} \tilde{E}_0(z') \varepsilon^{1/4}(z') dz' \Big\} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (9)$$

где

$$\tilde{E}_0(z) = -\frac{d^2 E_0}{dz^2} + 2\alpha i \frac{dE_0}{dz} + \alpha^2 E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} E_{0k} (k - \alpha)^2 e^{ikz} dk.$$

Если возмущение локализовано в области  $a < z < b$ , т. е.  $\tilde{E}_0(z) \neq 0$  лишь в указанном интервале, то из (9) следует, что  $E_\omega$  не имеет особенностей при  $\omega_2 > 0$  ни при каком конечном значении  $z(\varepsilon(\omega, z))$  при  $\omega_2 > 0$  не имеет ни нулей, ни особых точек). Исследуем теперь поведение поля в бесконечно удаленной точке. При  $z \rightarrow \infty$  (точнее уже при  $z > b$ )

$$E(z, t) = -\frac{u}{4\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\varepsilon^{3/4}\omega} [A_1(\omega) e^{i\psi_1} - A_2(\omega) e^{i\psi_2}] d\omega. \quad (10)$$

Здесь

$$A_j(\omega) = \int_a^b e^{i\psi_j(z')} \tilde{E}_0(z') \varepsilon^{1/4}(z') dz', \quad \psi_j = \alpha z \pm \frac{\omega_0}{u} \int_a^z \frac{dz'}{\sqrt{\varepsilon(z')}} \quad (j=1,2),$$

причем обе величины  $A_j$  при конечных  $a, b$  не имеют особенностей в области  $\omega_2 > 0$ . Из (10) непосредственно видно, что при  $z \rightarrow +\infty$   $E_\omega(z)$  может обратиться в бесконечность, если одно из значений  $\text{Im } \psi_j \rightarrow -\infty$  при  $z \rightarrow +\infty$ , т. е. при условии  $|\text{Im} \int_a^z dz'/\sqrt{\varepsilon(z', \omega)}| = (\omega_2/\omega_0) z \rightarrow \infty$ .

Используя правило Лопитала, получим, что  $E_\omega(z \rightarrow +\infty)$  может обратиться в бесконечность в случае, когда

$$\left| \text{Im} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z, \omega)}} \right| > \frac{\omega_2}{\omega_0} \quad (11)$$

$$(\omega_2 > 0, z \rightarrow +\infty).$$

Таким образом, при локализованном возмущении фурье-компоненты поля  $E_\omega \rightarrow \infty$  лишь в бесконечно удаленной в сторону потока точке ( $z \rightarrow +\infty$ ); иными словами, мы имеем дело с конвективной неустойчивостью. Если же возмущение не локализовано (например, описывается функцией типа  $E_0(z) = e^{ikz}$ ), то, разумеется, отличить конвективную неустойчивость от абсолютной невозможно.

В однородной среде для локализованного возмущения всегда  $E_\omega(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$  (при наличии корней уравнения (7) с  $\omega_2 > 0$ , см., например, (9)). В неоднородной среде ситуация может быть несколько сложнее. Допустим, что существуют корни уравнения (7), имеющие  $\omega_2 > 0$ , лишь для конечного интервала значений  $z$  ( $\delta < z < \beta$ ,  $\gamma = |\beta - \delta| \gg \lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны). При этом условие (11) не соблюдается. Тогда для возмущения, характеризуемого достаточно узким пакетом по  $k$ , поле на этом участке будет нарастать, но поскольку  $\gamma$  — конечная величина, это нарастание будет происходить лишь до некоторой конечной величины. В этом случае можно сказать, что реализуется лишь ло-

кальная конвективная неустойчивость или локальное усиление волны. Если же безгранична неоднородная среда такова, что условие (11) соблюдается, то поле  $E(z, t) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$  и возникает конвективная неустойчивость, аналогичная существующей в случае однородной среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Sumi, J. Phys. Japan, 15, 120 (1960).
2. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 709 (1963).
3. P. A. Sturrock, Phys. Rev., 112, 1488 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 апреля 1965 г.,

после переработки  
18 сентября 1965 г.

## ON PLASMA FLUX INSTABILITY IN INHOMOGENEOUS MEDIUM

V. Ya. Eidman

The convective instability with respect to the longitudinal perturbations is shown to take place in a plasma flux, piercing the slightly nonuniform medium.

УДК 621.371.167

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. I

*В. С. Ильин, Г. П. Костюнина*

На основе вариационной методики рассмотрено прохождение электромагнитных волн через анизотропный слой с тензором диэлектрической проницаемости модулированным ультразвуком. Получены выражения для элементов матрицы рассеяния такой системы. Найдено дифракционное поле в дальней зоне.

Дифракция электромагнитных волн на ультразвуковых колебаниях в среде была впервые осуществлена Дебаем, Сирсом [1, 2], Люка и Бикаром [3]. В дальнейшем этому явлению было посвящено значительное число работ, подробный обзор которых содержится в известной монографии Бергмана [4]. Среди теоретических работ следует отметить статьи [5–8], в которых дан расчет дифракции света на ультразвуковых волнах в изотропной среде (жидкости). В указанных работах вычисление дифракционной картины проводилось на основе решения скалярной задачи для дальней зоны. Кроме этого, не учитывались достаточно полно объемные эффекты в среде, влияние отражений от границ раздела и т. д.

В связи с этим представляет интерес решение данной задачи для анизотропного слоя при учете внутренних отражений волн и их поляризации. При этом необходимо провести расчет «ближнего» дифракционного поля с тем, чтобы определить возмущенную ультразвуком матрицу рассеяния анизотропного слоя. Это позволяет рассматривать слой в виде некоторого многополюсника, «подключение» которого к другим оптико-электрическим устройствам может быть теперь описано на основе теории цепей.

Целью настоящей работы является теоретический анализ дифракции электромагнитных волн на стоячих ультразвуковых волнах в анизотропной среде.

### 1. ВЫВОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим бесконечный в направлениях  $x$  и  $y$  слой толщины  $L$  с вещественными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_2(x, t) = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}; \quad \overset{\leftrightarrow}{\mu}_2 = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}. \quad (1)$$

В слое в направлении  $x$  возбуждена стоячая ультразвуковая волна с волновым вектором  $\vec{k}=2\pi/\Lambda$ . Появление волн упругости приводит к модуляции электрических параметров  $\epsilon$  и  $\mu$ . Будем учитывать только пьезоэлектрические эффекты и не учитывать магнитострикцию. Тогда компоненты тензора  $\epsilon$  записываются так [9]:

$$\epsilon_s = \epsilon_{s0} + \Delta\epsilon_s(t) \cos(\bar{k}x), \quad s = x, y, z. \quad (2)$$

В силу периодичности изменения свойств среды и нормального падения электромагнитной волны на слой с поляризацией, указанной на рис. 1, можно без нарушения структуры поля в плоскостях  $x = m\Lambda/2$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) поместить идеальные электрические стенки и, таким образом, свести задачу о прохождении электромагнитной волны через бесконечный слой к волноводной задаче о распространении электромагнитных волн между двумя идеально проводящими плоскостями с неоднородным диэлектриком на участке  $0 \leq z \leq L$ . Электромагнитные волны в таком волноводе описываются в  $i$ -среде волновым уравнением

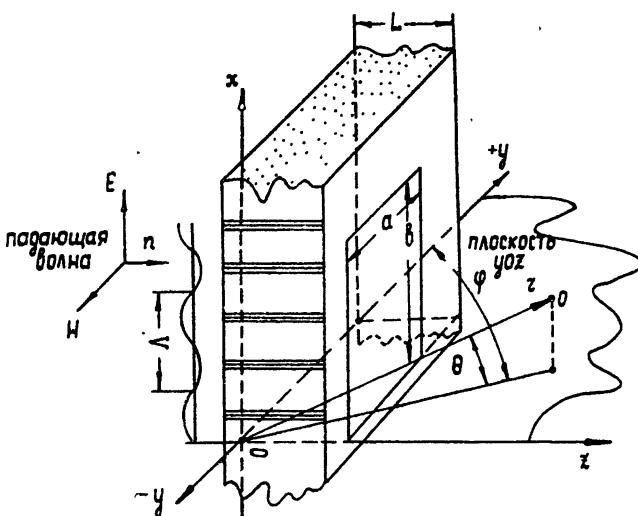


Рис. 1. К расчету дифракции электромагнитных волн на ультразвуковой решетке в анизотропном магнито-диэлектрическом слое.

$$\Delta E_i + k^2 \epsilon_i \mu_i E_i = \text{grad div } E_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Используя соотношение  $\text{div } \epsilon E = 0$ , получим следующее уравнение для компоненты поля  $E_x$ :

$$\frac{\partial^2 E_{xi}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\epsilon_{zi}} \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_{xi} E_{xi}) \right] + k^2 \epsilon_{xi} \mu_{xi} E_{xi} = 0. \quad (4)$$

Выбирая вид частного решения в соответствии с методом разделения переменных в форме

$$E_{xni} = X_{ni}(x) Z_{ni}(z), \quad (5)$$

приходим к уравнениям

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\epsilon_{zi}} \frac{d}{dx} (\epsilon_{xi}(x) X_{ni}) \right] + X_{ni} (k^2 \epsilon_{xi} \mu_{xi} - \gamma_{ni}^2) = 0, \quad (6)$$

$$d^2 Z_{ni} / dz^2 + \gamma_{ni}^2 Z_{ni} = 0. \quad (7)$$

По теореме Стеклова [10] имеем следующее условие ортогональности для «меморанных» функций введенного в рассмотрение волновода:

$$\int_0^{\Lambda/2} \varepsilon_{xi}^2(x) X_{ni}(x) X_{mi}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ \tilde{N}_{ni} & \text{при } n = m \end{cases}, \quad (8)$$

$$\tilde{N}_{n1} = \tilde{N}_{n3} = N_n, \quad X_{n1} = X_{n3} = X_n.$$

Общее решение для  $E_{xi}$ , удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial E_{xi}}{\partial x} \Big|_{r=0, \Lambda/2} = 0, \quad (9)$$

запишется следующим образом:

$$E_{xi} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{ni} e^{j\gamma_{ni} z} + B_{ni} e^{-j\gamma_{ni} z}) X_{ni}(x). \quad (10)$$

Рассмотрим вид (10) в различных средах. Пусть в среде 1

$$\gamma_{n1} = \gamma_{n3} = \gamma_n = \begin{cases} \text{действительное и положительное} \\ \text{при } 0 \leq n \leq N \\ \text{мнимое и положительное} \\ \text{при } n > N \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

источник электромагнитного поля, находящийся в точке  $z = -\infty$ , возбуждает в регулярном участке волновода 1 волну с индексом  $n^*$  и с амплитудой  $B_{n^*1}$ , а все волны, распространяющиеся в направлении, противоположном оси  $z$ , не отражаются от  $z = -\infty$ . Кроме этого, амплитуда поля должна быть конечна в любой точке волновода, включая  $z = -\infty$ .

Таким образом, удовлетворяя граничным условиям на бесконечности ( $z = -\infty$ ), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} B_{n1} &= 0 \quad \text{для всех } 0 \leq n \leq N \text{ (кроме } n^*), \\ A_{n1} &= 0 \quad \text{для } n > N. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (12) решение для поля имеет вид

$$E_{xi}(x, z) = B_{n^*1} e^{-j\gamma_n z} X_{n^*}(x) + \sum_{n=0}^N A_{ni} e^{j\gamma_n z} X_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} B_{ni} e^{j\gamma_n z} X_n(x). \quad (13)$$

Компоненту электрического поля  $E_x$  в плоскости  $z = 0$  обозначим через  $E_{0n^*}(x) = E_0$ , тогда из анализа Фурье следует:

$$\begin{aligned} A_{n1} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Lambda/2} E_0 X_n(x) \varepsilon^2 dx \quad (n \neq n^* \leq N), \\ A_{n^*1} + B_{n^*1} &= \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} E_0 X_n(x) \varepsilon^2 dx \quad (n = n^* \leq N), \\ B_{n1} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Lambda/2} E_0 X_n(x) \varepsilon^2 dx \quad (n > N). \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим решение для поля в волноводе 3. Считая, что на плоскости  $z = +\infty$  нет отражающих препятствий и амплитуды волн конечны, из (10) и (11) получим, что

$$\begin{aligned} A_{n3} &= 0 \quad (0 \leq n \leq N), \\ B_{n3} &= 0 \quad (N \leq n \leq \infty). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда решение имеет вид

$$E_{x3}(x, z) = \left( \sum_{n=0}^N B_{n3} e^{-j \gamma_n z'} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_{n3} e^{-| \gamma_n | z'} \right) X_n(x), \quad (16)$$

где координата  $z' = L - z$ .

Обозначая через  $E_{L,n^*}(x) = E_L$  компоненту электрического поля  $E_x$ , заданную в плоскости  $z = L$ , запишем выражения для коэффициентов ряда (16) в виде

$$\begin{aligned} B_{n3} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Delta/2} E_L X_n(x) \varepsilon^2 dx \quad (0 \leq n \leq N), \\ A_{n3} &= \frac{1}{N_n} \int_0^{\Delta/2} E_L X_n(x) \varepsilon^2 dx \quad (n \geq N). \end{aligned} \quad (17)$$

Для первого и третьего волноводов введем коэффициенты отражения  $R$  и прохождения  $T$ :

$$R_{nn^*} = A_{n1}/B_{n^*1}, \quad T_{nn^*} = B_{n3}/B_{n^*1} \quad (0 \leq n \leq N). \quad (18)$$

Для всех индексов  $0 \leq n \leq N$  и  $0 \leq n^* \leq N$  совокупности  $R_{nn^*}$  и  $T_{nn^*}$  образуют матрицу коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$ .

Решение для поля во второй среде запишется так:

$$E_{x2}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n2} e^{j \tilde{\gamma}_{n2} z} + B_{n2} e^{-j \tilde{\gamma}_{n2} z}) X_{n2}(x). \quad (19)$$

Коэффициенты  $A_{n2}$  и  $B_{n2}$  выражаются через  $E_0$  и  $E_L$  следующим образом:

$$A_{n2} + B_{n2} = \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \int_0^{\Delta/2} E_0 \varepsilon_x^2(x) X_{n2}(x) dx, \quad (20)$$

$$A_{n2} e^{j \tilde{\gamma}_{n2} z} + B_{n2} e^{-j \tilde{\gamma}_{n2} z} = \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \int_0^{\Delta/2} E_L \varepsilon_x^2(x) X_{n2}(x) dx. \quad (21)$$

Представление амплитуд волн, входящих в ряды (13), (16) и (19), через тангенциальные компоненты  $E_0$  и  $E_L$  по существу является операцией «сшивания» электрического вектора на границах слоя  $z = 0$  и  $z = L$ .

Произведем теперь «сшивание» магнитных компонент. Из уравнений Максвелла легко получить соотношение

$$H_{yi} = j \frac{k \mu_{xi}}{120\pi \mu_{yi}} \int \varepsilon_{xi}(x) E_{xi}(x, z) dz. \quad (22)$$

Подставляя в (22) поля (13), (16) и (19), можно найти  $H_{y1}$ ,  $H_{y2}$ ,  $H_{y3}$ . Если приравнять компоненты  $H_{y1}$ ,  $H_{y3}$  в плоскости  $z = 0$  и компоненты

$H_{y2}$ ,  $H_{yz}$  в плоскости  $z = L$ , то с учетом (14), (17), (20) и (21) получим следующую систему интегральных уравнений относительно  $E_0$  и  $E_L$ :

$$\begin{aligned} B_{n^*1} (1 - R_{n^*n^*}) \frac{1}{\gamma_{n^*}} \varepsilon X_{n^*}(x) &= \sum_{n=0}^{N^*} \frac{1}{N_n} \frac{1}{\gamma_n} \varepsilon \left[ \int_0^{L/2} E_0 \varepsilon_x^2 X_n dx \right] X_n(x) + \\ &+ j \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \frac{1}{|\gamma_n|} \varepsilon \left[ \int_0^{L/2} E_0 \varepsilon_x^2 X_n dx \right] X_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(j \tilde{\gamma}_{n2} L)}{\operatorname{sh}(j \tilde{\gamma}_{n2} L)} \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \times \\ &\times \frac{1}{\tilde{\gamma}_{n2}} \frac{\mu_x}{\mu_y} \left[ \int_0^{L/2} E_L \varepsilon_x^2 X_{n2} dx \right] \varepsilon_x(x) X_{n2}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \frac{1}{\tilde{\gamma}_{n2}} \frac{1}{\operatorname{sh}(j \tilde{\gamma}_{n2} L)} \times \\ &\times \frac{\mu_x}{\mu_y} \left[ \int_0^{L/2} E_L \varepsilon_x^2 X_{n2} dx \right] \varepsilon_x(x) X_{n2}(x) \end{aligned} \quad (23)$$

(звездочка означает, что при суммировании член с индексом  $n^*$  должен быть опущен),

$$\begin{aligned} -B_{n^*1} T_{n^*n^*} \frac{\varepsilon}{\gamma_{n^*}} X_{n^*} &= \sum_{n=0}^{N^*} \frac{1}{N_n} \frac{1}{\gamma_n} \left[ \int_0^{L/2} E_L \varepsilon^2 X_n dx \right] \varepsilon X_n(x) + \\ &+ j \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \frac{1}{|\gamma_n|} \left[ \int_0^{L/2} E_L \varepsilon^2 X_n dx \right] \varepsilon X_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(j \tilde{\gamma}_{n2} L)}{\operatorname{sh}(j \tilde{\gamma}_{n2} L)} \times \\ &\times \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \frac{1}{\tilde{\gamma}_{n2}} \frac{\mu_x}{\mu_y} \left[ \int_0^{L/2} E_L \varepsilon_x^2 X_{n2} dx \right] \varepsilon_x(x) X_{n2}(x) - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(j \tilde{\gamma}_{n2} L)} \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \frac{1}{\tilde{\gamma}_{n2}} \frac{\mu_x}{\mu_y} \left[ \int_0^{L/2} E_0 \varepsilon_x^2 X_{n2} dx \right] \varepsilon_x(x) X_{n2}(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Для решения системы (23)–(24) вычтем из уравнения (23) уравнение (24), а затем сложим (23) и (24). Тогда

$$\begin{aligned} B_{n^*1} (1 - R_{n^*n^*} \pm T_{n^*n^*}) \varepsilon \frac{X_{n^*}}{\gamma_{n^*}} &= \sum_{n=0}^{N^*} \frac{1}{N_n} \frac{1}{\gamma_n} \left[ \int_0^{L/2} (E_0 \mp E_L) \times \right. \\ &\times \varepsilon^2 X_n dx \left. \right] \varepsilon X_n(x) + j \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \frac{1}{|\gamma_n|} \left[ \int_0^{L/2} (E_0 \mp E_L) \varepsilon^2 X_n dx \right] \times \\ &\times \varepsilon X_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} j \tilde{\gamma}_{n2} L \pm 1}{\operatorname{sh} j \tilde{\gamma}_{n2} L} \frac{1}{\tilde{N}_{n2}} \frac{1}{\tilde{\gamma}_{n2}} \frac{\mu_x}{\mu_y} \left[ \int_0^{L/2} (E_0 \mp \right. \\ &\left. \mp E_L) \varepsilon_x^2 X_{n2} dx \right] \varepsilon_x(x) X_{n2}(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Выражения (14) и (17) запишем в следующей форме:

$$B_{n^*1} (1 + R_{n^*n^*}) = \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{L/2} E_0 \varepsilon^2 X_{n^*}(x) dx, \quad (26)$$

$$B_{n^*3} = B_{n^*1} T_{n^*n^*} = \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) \epsilon^2 X_{n^*}(x) dx. \quad (27)$$

Вычтем и сложим выражения (26) и (27):

$$B_{n^*1} (1 + R_{n^*n^*} \mp T_{n^*n^*}) = \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) \epsilon^2 X_{n^*} dx. \quad (28)$$

Затем умножим (25) на  $E_0 \mp E_L$ , проинтегрируем от 0 до  $\Lambda/2$  и поделим на (28), тогда имеем

$$\begin{aligned} F_{n^*}^{(\mp)} = & \frac{1 - R_{n^*n^*} \pm T_{n^*n^*}}{1 + R_{n^*n^*} \mp T_{n^*n^*}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_{n^*}}{N_n} \frac{\gamma_{n^*}}{\gamma_n} \left[ \int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) X_n dx \right]^2 + \right. \\ & \left. + j \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N_{n^*}}{N_n} \frac{\gamma_{n^*}}{|\gamma_n|} \left[ \int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) X_n dx \right]^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_{n^*}}{\tilde{N}_{n^2}} \frac{\gamma_{n^*}}{\tilde{\gamma}_{n^2}} \times \right. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\mu_x}{\mu_y} \frac{\operatorname{ch} j \gamma_{n^*} L \pm 1}{\operatorname{sh} j \tilde{\gamma}_{n^*} L} \left[ \int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) \frac{\epsilon_x}{\epsilon} X_{n^2} dx \right]^2 \left[ \int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) \frac{\epsilon_x^2}{\epsilon^2} X_{n^2} dx \right] \times \\ & \times \left. \left\{ \int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) X_{n^*} dx \right\}^{-2} \right]. \end{aligned}$$

Выражение (29) представляет собой квадратичный функционал, стационарный по отношению к малым вариациям функций  $E_0 \mp E_L$  вокруг их точных значений\*. Это позволяет воспользоваться известным из вариационного исчисления методом Ритца [11] для определения стационарных точек функционала. Знание величины  $F_{n^*}^{(\mp)}$  позволяет найти элементы матриц коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$ .

Перебирая значения  $n^* = 0, 1, 2, \dots, N$ , т. е. перебирая источники возбуждения по всем типам распространяющихся волн, можно получить последовательность функционалов  $F_0^{(\mp)}, F_1^{(\mp)}, \dots, F_N^{(\mp)}$  и определить, таким образом, диагональные элементы матриц  $R$ ,  $T$ . Для отыскания недиагональных элементов этих матриц легко получить из соотношений (14), (17) и (18) выражение

$$R_{nn^*} \mp T_{nn^*} = \frac{1}{N_n} \frac{\int_0^{\Lambda/2} (E_0 \mp E_L) \epsilon^2 X_n(x) dx}{B_{n^*1}} \quad (n^* = 0, 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, N). \quad (30)$$

Поскольку диагональные элементы матриц  $R$  и  $T$  связаны со стационарными величинами  $F_{n^*}^{(\mp)}$  дробно-линейными соотношениями, то диагональные элементы также будут стационарными величинами. Недиагональные элементы матриц  $R$  и  $T$  при данном способе их выражения через поля  $E_0$  и  $E_L$  не являются стационарными величинами. Если известны матрицы  $R$  и  $T$ , то из их элементов может быть построена [12] матрица рассеяния  $S$ , которая полностью характеризует волновые свойства рассматриваемого симметричного в плоскости  $z = L/2$  устройства.

\* Доказательство стационарности ввиду его громоздкости здесь не приводится. Однако оно может быть установлено путем прямого вычисления первой вариации функционала (29) с учетом (23) и (24) и леммы Лоренца.

## 2. МИНИМИЗИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО МЕТОДУ РИТЦА

Введем для простоты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n^*}^{(\mp)} &= E_0 \mp E_L; \quad (\mp)F_{n^*} = (\mp)F'_{n^*} + j(\mp)F''_{n^*}; \\ g_n &= \left( \frac{N_{n^*}}{N_n} \frac{\gamma_{n^*}}{\gamma_n} \right)^{1/2} X_n(x); \quad \bar{W}_n = \left( \frac{N_{n^*}}{N_n} \frac{\gamma_{n^*}}{|\gamma_n|} \right)^{1/2} X_n(x); \\ \bar{W}_n &= \left[ \frac{N_{n^*}}{\tilde{N}_{n^*}} \frac{\gamma_{n^*}}{\gamma_{n^*}} \frac{\mu_x}{\mu_y} - \frac{\cos(\tilde{\gamma}_{n^*} L) \pm 1}{\sin(\tilde{\gamma}_{n^*} L)} \right]^{1/2} \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} X_{n^*}(x). \end{aligned} \quad (31)$$

В соответствии с методом Ритца зададим пробные функции для  $\mathcal{E}_{n^*}^{(\mp)}$  в виде

$$\mathcal{E}_{n^*}^{(\mp)} = \sum_{v=1}^q (\alpha_{n^*v}^{(\mp)} \psi_v + j \beta_{n^*v}^{(\mp)} \psi_v). \quad (32)$$

Подстановка (31) и (32) в функционал (29) и наложение условий стационарности

$$\frac{\partial F_{n^*}^{(\mp)}}{\partial \alpha_v} = 0, \quad \frac{\partial F_{n^*}^{(\mp)}}{\partial \beta_v} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, q) \quad (33)$$

приводит (после разделения мнимых и действительных частей полученных выражений) к следующей системе алгебраических уравнений для  $\alpha_{n^*v}$  и  $\beta_{n^*v}$ :

$$\sum_{v=1}^q \left\{ \alpha_{n^*v}^{(\mp)} (P_{vv} - (\mp)F'_{n^*} c_{vv}) - \beta_{n^*v}^{(\mp)} (Q_{vv} - (\mp)F''_{n^*} c_{vv}) \right\} = 0, \quad (34)$$

$$\sum_{v=1}^q \left\{ \alpha_{n^*v}^{(\mp)} (Q_{vv} - (\mp)F''_{n^*} c_{vv}) + \beta_{n^*v}^{(\mp)} (P_{vv} - (\mp)F'_{n^*} c_{vv}) \right\} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} P_{vv} &= \sum_{n=0}^N \left[ \int_0^{\Delta/2} g_n \psi_v dx \right] \left[ \int_0^{\Delta/2} g_n \psi_v dx \right], \\ Q_{vv} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[ \int_0^{\Delta/2} \bar{W}_n \psi_v dx \right] \left[ \int_0^{\Delta/2} \bar{W}_n \psi_v dx \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\Delta/2} \bar{W}_n \psi_v dx \right] \times \\ &\quad \times \left[ \int_0^{\Delta/2} \bar{W}_n \psi_v \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} dx \right], \\ c_{vv} &= \left[ \int_0^{\Delta/2} X_{n^*} \psi_v dx \right] \left[ \int_0^{\Delta/2} X_{n^*} \psi_v dx \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Рассмотрим определитель совместности системы (34)

$$\begin{vmatrix} |1| & -|2| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ |2| & |1| \end{vmatrix} = 0, \quad (36)$$

где блоки

$$\boxed{1} = \begin{bmatrix} (P_{11} - {}^{(\mp)}F'_{n^*}c_{11}), \dots, (P_{q1} - {}^{(\mp)}F'_{n^*}c_{q1}) \\ \vdots \\ (P_{1q} - {}^{(\mp)}F'_{n^*}c_{1q}), \dots, (P_{qq} - {}^{(\mp)}F'_{n^*}c_{qq}) \end{bmatrix}; \quad (37)$$

$$\boxed{2} = \begin{bmatrix} (Q_{11} - {}^{(\mp)}F''_{n^*}c_{11}), \dots, (Q_{q1} - {}^{(\mp)}F''_{n^*}c_{q1}) \\ \vdots \\ (Q_{1q} - {}^{(\mp)}F''_{n^*}c_{1q}), \dots, (Q_{qq} - {}^{(\mp)}F''_{n^*}c_{qq}) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Определитель (36) обладает известной симметрией в размещении блоков. Это условие приводит к расщеплению (36) на два соотношения, из которых можно определить  ${}^{(\mp)}F'_{n^*}$  и  ${}^{(\mp)}F''_{n^*}$ .

Рассмотрим последнее утверждение для случая, когда функции  $X_n$  и  $\psi$ , ортогональны. Тогда при  $q \geq n^*$  из всех  $c_{vv}$  отличным от нуля в силу ортогональности будет только  $c_{n^*n^*}$ .

Другими словами, в блоках (37) и (38)  $F_{n^*}^{(\mp)}$  будут присутствовать только на главной диагонали в  $n^*$  строке и  $n^*$  столбце. Определитель (36) — квадратный, порядка  $2q$ . Поэтому для него должно иметь место следующее отношение алгебраических дополнений [14]:

$$\frac{D_{n^*n^*}}{D_{n^*(n^*+q)}} = \frac{D_{(n^*+q)n^*}}{D_{(n^*+q)(n^*+q)}}. \quad (39)$$

При этом легко видеть из (36), (37) и (38), что

$$D_{n^*n^*} = D_{(n^*-q)(n^*+q)}, \quad -D_{(n^*+q)n^*} = D_{n^*(n^*+q)}. \quad (40)$$

Тогда (39) можно переписать в виде

$$[D_{n^*n^*}]^2 + [D_{n^*(n^*+q)}]^2 = 0. \quad (40a)$$

Так как слева в (40) стоят существенно положительные величины, то для выполнения (40a) необходимо, чтобы

$$D_{n^*n^*}({}^{(\mp)}F'_{n^*}) = 0, \quad D_{n^*(n^*+q)}({}^{(\mp)}F''_{n^*}) = 0. \quad (41)$$

Таким образом, из соотношений (41) можно однозначно определить  ${}^{(\mp)}F'_{n^*}$  и  ${}^{(\mp)}F''_{n^*}$ . В силу линейности алгебраической системы (33) после подстановки (41) в (33) можно с точностью до постоянного множителя (амплитуды) отыскать все  $\alpha_{n^*v}^{(\mp)}$ ,  $\beta_{n^*v}^{(\mp)}$  и однозначно найти таким образом поле по найденным функциям  $E_0$ ,  $E_L$ . С помощью (14) — (22) могут быть найдены все компоненты электромагнитного поля.

Описанная вариационная методика при соответствующем выборе  $q$  позволяет, в принципе, решить задачу с любой степенью точности. Ввиду положительной определенности интегральных операторов в уравнениях (23) и (24) процесс минимизации функционала будет сходящимся [15].

### 3. РАСЧЕТ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУХ ВОЛН

Из уравнения (6) определим «мембранные» функции  $X_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Поскольку в первой и третьей средах

\* Случай неортогональности  $\psi$  и  $X_n$  рассмотрен в работе [13].

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon_1} = \overset{\leftrightarrow}{\epsilon_3} = \epsilon = \text{const}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\mu_1} = \overset{\leftrightarrow}{\mu_3} = \mu = \text{const},$$

то из уравнения (6) легко получить выражения

$$X_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{\Lambda}x\right); \quad \gamma_n = \sqrt{k^2\epsilon\mu - \left(\frac{2n\pi}{\Lambda}\right)^2}; \quad N_n = \frac{\Lambda\epsilon}{2\epsilon_n}; \quad (42)$$

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_n = 2 \text{ при } n \neq 0.$$

Для решения уравнения (6) во второй среде с учетом значений  $\epsilon_s$  из (2) введем замену:

$$\begin{aligned} X_{n2}(x) &= v_{n2}(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int p dx\right), \\ p &= \frac{2}{\epsilon_x} \frac{d\epsilon_x}{dx} - \frac{1}{\epsilon_z} \frac{d\epsilon_z}{dx}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя (43) в (6), получим уравнение

$$\frac{d^2v_{n2}}{dx^2} + [\tilde{\theta}_{n0} + \tilde{\theta}_{n1} \cos(\bar{k}x) + \tilde{\theta}_{n2} \cos(2\bar{k}x) + \dots] v_{n2} = 0 \quad (44)$$

с граничными условиями  $\frac{dv_{n2}}{dx} \Big|_{x=0, \Lambda/2} = 0$  для функции  $v_{n2}$ . В (44) введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{n0} &\simeq k^2 \mu_x \epsilon_{z0} - \tilde{\gamma}_{n2}^2 \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right)^2 \right\} - \frac{\bar{k}^2}{8} \left( \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \right)^2, \\ \tilde{\theta}_{n1} &\simeq k^2 \mu_x \Delta\epsilon_z - \tilde{\gamma}_{n2}^2 \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} \left[ \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} - \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right] - \frac{\bar{k}^2}{2} \left( \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \right), \\ \tilde{\theta}_{n2} &\simeq \tilde{\gamma}_{n2}^2 \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} \left[ \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} - \left( \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right)^2 \right] + \frac{5}{8} \bar{k}^2 \left( \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \right)^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Уравнение (44) решаем вариационным методом, используя функционал [11]

$$f = \int_0^{\Lambda/2} \left\{ \left( \frac{dv_{n2}}{dx} \right)^2 - [\tilde{\theta}_{n0} + \tilde{\theta}_{n1} \cos(\bar{k}x) + \tilde{\theta}_{n2} \cos(2\bar{k}x)] v_{n2}^2 \right\} dx. \quad (46)$$

Решение отыскивается в форме

$$v_{n2} \simeq C_{n0} + C_{n1} \cos(\bar{k}x) + C_{n2} \cos(2\bar{k}x). \quad (47)$$

Подставляя (47) в (46), после наложения условий стационарности можно получить следующую систему однородных алгебраических уравнений для определения  $C_{n0}$ ,  $C_{n1}$ ,  $C_{n2}$ :

$$\begin{aligned} C_{n0} 2\tilde{\theta}_{n0} + C_{n1} \tilde{\theta}_{n1} + C_{n2} \tilde{\theta}_{n2} &= 0, \\ C_{n0} \tilde{\theta}_{n1} + C_{n1} \left( \tilde{\theta}_{n0} + \frac{\tilde{\theta}_{n2}}{2} - \bar{k}^2 \right) + C_{n2} \frac{\tilde{\theta}_{n1}}{2} &= 0, \\ C_{n0} \tilde{\theta}_{n2} + C_{n1} \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{n1} + C_{n2} (\tilde{\theta}_{n0} - 4\bar{k}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Постоянные распространения  $\tilde{\gamma}_{n2}$  находятся как корни уравнения

$$\begin{aligned} & 2\tilde{\theta}_{n0}^3 + \tilde{\theta}_{n0}^2 \tilde{\theta}_{n2} - 10\bar{k}^2 \tilde{\theta}_{n0}^2 - 4\bar{k}^2 \tilde{\theta}_{n0} \tilde{\theta}_{n2} + 8\bar{k}^4 \tilde{\theta}_{n0} + \\ & + \tilde{\theta}_{n1}^2 \tilde{\theta}_{n2} - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{n2}^3 - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{n1}^2 \tilde{\theta}_{n0} - \tilde{\theta}_{n2}^2 (\tilde{\theta}_{n0} - \bar{k}^2) - \tilde{\theta}_{n1}^2 (\tilde{\theta}_{n0} - 4\bar{k}^2) = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

которое получено путем приравнивания определителя системы (48) нулю. При снятии ультразвукового возмущения в (45) следует перейти к пределу  $\Delta\epsilon \rightarrow 0$ . Тогда  $\tilde{\theta}_{nk} \rightarrow \theta_{nk}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) и определитель невозмущенной системы (48) примет нормальную форму:

$$\theta_{n0} (\theta_{n0} + \theta_{n2}/2 - \bar{k}^2) (\theta_{n0} - 4\bar{k}^2) = 0. \quad (50)$$

Отсюда для невозмущенных значений  $\gamma_{n2}$  получаем

$$\gamma_{02}^2 = k^2 \mu_x \epsilon_{x0}; \quad \gamma_{12}^2 = \left( k^2 \mu_x \epsilon_{x0} - \bar{k}^2 \frac{\epsilon_{x0}}{\epsilon_{z0}} \right); \quad \gamma_{22}^2 = \left( k^2 \mu_x \epsilon_{x0} - 4\bar{k}^2 \frac{\epsilon_{x0}}{\epsilon_{z0}} \right).$$

Для решения уравнения (50) в случае малых  $\Delta\epsilon$  положим

$$\tilde{\gamma}_{n2}^2 = \gamma_{n2}^2 + \delta_n \quad (|\gamma_n|^2 \gg |\delta_n|). \quad (51)$$

Подставляя (51) в (49) и ограничиваясь первыми степенями  $\delta_n$ , найдем поправку к невозмущенным значениям  $\gamma_{n2}$  в виде

$$\begin{aligned} \delta_n = & \left[ 2a_0^3 + a_0^2 a_2 - 10\bar{k}^2 a_0^2 - 4\bar{k}^2 a_0 a_2 + 8\bar{k}^4 a_0 - \frac{1}{2} a_1^2 a_0 - a_1^2 (a_0 - \right. \\ & \left. - 4\bar{k}^2) \right] \left[ 6a_0^2 b_0 - a_0^2 b_2 + 2a_0 b_0 a_2 - 20a_0 b_0 \bar{k}^2 + 4\bar{k}^2 (a_0 b_2 - \right. \\ & \left. - a_2 b_0) + 8\bar{k}^4 b_0 - \frac{1}{2} (a_1^2 b_0 + 2a_0 a_1 b_1) - 2a_1 b_1 (a_0 - 4\bar{k}^2) - a_1^2 b_0 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$a_0 = n^2 \bar{k}^2 + \gamma_{n2}^2 \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} - \left( \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right)^2 \right] \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} - \frac{\bar{k}^2}{8} \left( \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \right)^2,$$

$$a_1 = n^2 \bar{k}^2 \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} + \gamma_{n2}^2 \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} - \frac{\bar{k}^2}{2} \left( \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \right),$$

$$a_2 = \gamma_{n2}^2 \frac{\epsilon_{z0}}{2\epsilon_{x0}} \left[ \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} - \left( \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right)^2 \right] + \frac{5}{8} \bar{k}^2 \left( \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \right)^2,$$

$$b_0 = \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} - \left( \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right)^2 \right] \right\},$$

$$b_1 = \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} \left[ \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} - \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right], \quad b_2 = \frac{\epsilon_{z0}}{\epsilon_{x0}} \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} - \left( \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right)^2 \right].$$

Из (52) видно, что  $\delta_n \sim (\Delta\epsilon)^2$ . Это понятно, ибо постоянные распространения  $\gamma_n$  всегда стационарны по отношению к возмущениям (вариациям) первого порядка.

Определяя из системы (48)  $C_{n0}$ ,  $C_{n1}$ ,  $C_{n2}$  через амплитуды  $C_{nn} = 1$  ( $n = 0, 1, 2$ ), окончательно получим выражения для «мембранных» функций:

$$\begin{aligned}
 X_{02} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{z0}}}{\varepsilon_{x0}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} - \right. \\
 &\quad - \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) + \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} - 2 \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \right] \cos(\bar{k}x) + \\
 &\quad + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} - \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\tilde{\theta}_{02} - \tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{00} - 4\bar{k}^2} \right] \cos(2\bar{k}x) \right\}; \\
 X_{12} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{z0}}}{\varepsilon_{x0}} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) - \frac{\tilde{\theta}_{11}}{2\tilde{\theta}_{10}} + \left[ 1 - \frac{\tilde{\theta}_{11}}{2\tilde{\theta}_{10}} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{1}{4} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\tilde{\theta}_{11}}{2(\tilde{\theta}_{10} - 4\bar{k}^2)} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right] \cos(\bar{k}x) + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) - \frac{\tilde{\theta}_{11}}{2(\tilde{\theta}_{10} - 4\bar{k}^2)} \right] \cos(2\bar{k}x) + \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_{11}}{2(\tilde{\theta}_{10} - 4\bar{k}^2)} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left. \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) \right] \cos(3\bar{k}x) \right\}; \\
 X_{22} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{z0}}}{\varepsilon_{x0}} \left\{ - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\theta}_{22} - (\tilde{\theta}_{20} - 4\bar{k}^2)}{(\tilde{\theta}_{20} - \tilde{\theta}_{22})} - \frac{(\tilde{\theta}_{20} - 4\bar{k}^2)}{\tilde{\theta}_{21}} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) + \left[ - \frac{2(\tilde{\theta}_{20} - 4\bar{k}^2)}{\tilde{\theta}_{21}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) \right] \cos(\bar{k}x) + \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} + \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) \times \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left. \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \right) \right] \cos(2\bar{k}x) \right\}. \tag{53}
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{\tilde{\theta}_{20} - 4\bar{k}^2}{\tilde{\theta}_{21}} \Big] \cos(2\bar{k}x) + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} - \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right) \right] \cos(3\bar{k}x) + \\ + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\Delta\epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right) \right] \cos(4\bar{k}x) \Big\}.$$

По данным функциям  $X_{n2}$  из выражения (8) вычислим нормы  $\tilde{N}_{n2}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{02} &= \epsilon_{z0} \frac{\Lambda}{2} \left\{ 1 - 2 \left( \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \right)^2 + 2 \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \right\}, \\ \tilde{N}_{12} &= \epsilon_{z0} \frac{\Lambda}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\tilde{\theta}_{11}^2}{4\tilde{\theta}_{10}^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\theta}_{11}}{2(\tilde{\theta}_{10} - 4\bar{k}^2)} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left( \frac{\tilde{\theta}_{11}}{\tilde{\theta}_{10}} + \frac{\tilde{\theta}_{11}}{2(\tilde{\theta}_{10} - 4\bar{k}^2)} \right) \right\}; \\ \tilde{N}_{22} &= \epsilon_{z0} \frac{\Lambda}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2(\tilde{\theta}_{20} - 4\bar{k}^2)^2}{\tilde{\theta}_{21}^2} - \frac{\Delta\epsilon_z}{\epsilon_{z0}} \frac{\tilde{\theta}_{20} - 4\bar{k}^2}{\tilde{\theta}_{21}} \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Если  $N > 0$ , то в рассматриваемом волноводе могут распространяться не один, а  $N + 1$  типов волн. В этом случае необходимо знать величины  $F_0^{(\pm)}, F_1^{(\pm)}, \dots, F_N^{(\pm)}$ . Однако при малых  $\Delta\epsilon$  можно учитывать только две распространяющиеся волны: волну с  $n^* = 0$  и волну с  $n^* = 1$ , т. е. рассматривать только две величины  $F_0^{(\pm)}$  и  $F_1^{(\pm)}$ . Другими словами, мы принимаем следующее приближение для матрицы  $R$ :

$$R = \begin{Bmatrix} R_{00}, R_{01}, \dots, R_{0N} \\ R_{10}, R_{11}, \dots, R_{1N} \\ \vdots \\ R_{N0}, \dots, \dots, R_{NN} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} R_{00}, R_{01}, 0, \dots, 0 \\ R_{10}, R_{11}, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, 0, \dots, 0 \end{Bmatrix}.$$

Аналогичное приближение будет и для матрицы  $\tilde{T}$ .

Проведем минимизацию функционалов  $F_0^{(\pm)}$  и  $F_1^{(\pm)}$ . Полагая в (32) — (41)  $q = 2$ ,  $\psi_1 = 1$ ,  $\psi_2 = \cos(\bar{k}x)$  и используя (53) — (54), после некоторых преобразований получим с точностью до членов  $(\Delta\epsilon^2)$  выражения

$${}^{(\mp)}F_0 = 0 + O(\Delta\epsilon^2); \quad {}^{(\mp)}F_0' = - \frac{N_0 \gamma_0 [\cos(\gamma_{02}L) \pm 1] \epsilon_{x0} \epsilon_{z0} \mu_x}{N_{02} \gamma_{02} \sin(\gamma_{02}L) \epsilon^3 \mu_y} + O(\Delta\epsilon^2); \quad (55)$$

$${}^{(\mp)}F_1 = 0 + O(\Delta\epsilon^2); \quad {}^{(\mp)}F_1' = - \frac{N_1 \gamma_1 [\cos(\gamma_{12}L) \pm 1] \epsilon_{x0} \epsilon_{z0} \mu_x}{N_{12} \gamma_{12} \sin(\gamma_{12}L) \epsilon^3 \mu_y} + O(\Delta\epsilon^2), \quad (56)$$

где

$$N_{02} = \epsilon_{z0} \frac{\Lambda}{2}; \quad N_{12} = \epsilon_{z0} \frac{\Lambda}{4}.$$

Определим теперь поля  $E_0$  и  $E_L$ . Из точки  $z = -\infty$  на пласт падает плоская ТЕМ-волна, что соответствует источнику возбуждения с индексом  $n^* = 0$ . Для данного случая решение системы (33) имеет вид

$$\alpha_{01}^{(\mp)} = 0, \beta_{01}^{(\mp)} = \alpha_{01}^{(\mp)} \frac{Q_1^{(\mp)}}{P}, \beta_{02}^{(\mp)} = -\alpha_{01}^{(\mp)} \frac{Q_2^{(\mp)}}{P}, \quad (57)$$

где

$$P = \frac{N_0}{N_1} \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \frac{(\Lambda/2)^2}{4}; \quad Q_1^{(\mp)} = -\frac{N_0}{N_{12}} \frac{\gamma_0}{\gamma_{12}} \frac{\cos(\gamma_{12}L) \pm 1}{\sin(\gamma_{12}L)} \frac{\epsilon_{z0} \epsilon_{x0} \mu_x}{\epsilon^3 \mu_y} \frac{(\Lambda/2)^2}{4};$$

$$Q_2^{(\mp)} = -\frac{N_0}{N_{02}} \frac{\gamma_0}{\gamma_{02}} \frac{\cos(\gamma_{02}L) \pm 1}{\sin(\gamma_{02}L)} \frac{\epsilon_{z0} \epsilon_{x0} \mu_x}{\epsilon^3 \mu_y} \frac{(\Lambda/2)^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta \epsilon_z}{\epsilon_{z0}} - \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} + \frac{\Delta \epsilon_x}{\epsilon_{x0}} \right) -$$

$$-\frac{N_0}{N_{12}} \frac{\gamma_0}{\gamma_{12}} \frac{\cos(\gamma_{12}L) \pm 1}{\sin(\gamma_{12}L)} \frac{\epsilon_{z0} \epsilon_{x0} \mu_x}{\epsilon^3 \mu_y} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta \epsilon_z}{\epsilon_{z0}} - \frac{\tilde{\theta}_{11}}{\tilde{\theta}_{10}} \right) \frac{(\Lambda/2)^2}{4}.$$

С учетом (31) и (32) для полей  $E_0$  и  $E_L$  имеем

$$(E_0 \mp E_L) = \alpha_{01}^{(\mp)} \left[ 1 + j \frac{Q_1^{(\mp)}}{P} - j \frac{Q_2^{(\mp)}}{P} \cos(kx) \right]. \quad (58)$$

Для окончательной записи поля (58) необходимо нормировать неопределенную амплитуду  $\alpha_{01}^{(\mp)}$  к амплитуде падающей волны  $B_{n^*1}$ . Из (14), (17) и (18) следует, что

$$B_{n^*1} (1 + R_{n^*n^*}) = \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} \epsilon^2 E_0 X_{n^*} dx; \quad (59)$$

$$T_{n^*n^*} B_{n^*1} = \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} \epsilon^2 E_L X_{n^*} dx. \quad (60)$$

Из выражений (59) и (60) можно получить

$$\frac{1 - R_{n^*n^*} \pm T_{n^*n^*}}{1 + R_{n^*n^*} \mp T_{n^*n^*}} = \frac{\left[ 2B_{n^*1} - \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} \epsilon^2 (E_0 \mp E_L) X_{n^*} dx \right]}{\left[ \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} \epsilon^2 (E_0 \mp E_L) X_{n^*} dx \right]}. \quad (61)$$

Сравнивая левую часть (61) с (29), видим, что она равна  $F_{n^*}^{(\mp)}$ ; тогда условие нормировки примет вид

$$2B_{n^*1} = (1 + F_{n^*}^{(\mp)}) \frac{1}{N_{n^*}} \int_0^{\Lambda/2} \epsilon^2 (E_0 \mp E_L) X_{n^*} dx. \quad (62)$$

Подставляя (58) в (62), получаем

$$\alpha_{01}^{(\mp)} = B_{01} \frac{2}{(1 + F_0^{(\mp)}) (1 + jQ_1^{(\mp)} P^{-1})}. \quad (63)$$

Окончательно выражения для полей  $E_0$  и  $E_L$  запишутся так:

$$\begin{aligned} E_0 = B_{01} \left\{ \frac{1}{1+F_0^{(-)}} + \frac{1}{1+F_0^{(+)}} - j \left[ \frac{Q_2^{(-)}}{(1+F_0^{(-)}) (P+jQ_1^{(-)})} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Q_2^{(+)}}{(1+F_0^{(+)}) (P+jQ_1^{(+)})} \right] \cos(\bar{k}x) \right\}; \\ E_L = B_{01} \left\{ \frac{1}{1+F_0^{(+)}} - \frac{1}{1+F_0^{(-)}} - j \left[ \frac{Q_2^{(+)}}{(1+F_0^{(+)}) (P+jQ_1^{(+)})} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{Q_2^{(-)}}{(1+F_0^{(-)}) (P+jQ_1^{(-)})} \right] \cos(\bar{k}x) \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким образом, получено решение задачи о прохождении электромагнитной волны через бесконечный анизотропный слой толщиной  $L$ , в котором возбуждены стоячие ультразвуковые волны. При конечных размерах слоя  $a$  и  $b$  решение будет справедливо лишь в «ближней» зоне, т. е. при  $z < b$ ,  $a$ .

#### 4. РАСЧЕТ ДИФРАКЦИИ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

Для определения дифракционного поля на больших расстояниях ( $z \gg b, a$ ) воспользуемся принципом Кирхгофа—Гюйгенса, рассматривая поле, определенное в плоскости  $z = L$ , как заданное поле прямоугольной апертуры  $ab$ . Используя двухвольновое приближение, с помощью полученных формул можно перейти к полям  $E_x$  и  $H_y$  во второй среде и записать их в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_x(x, L) = A_{02} e^{j\gamma_{02} L} \frac{\sqrt{\varepsilon_{z0}}}{\varepsilon_{x0}} \left[ 1 + \left( q_1 + \frac{A_{12}}{A_{02}} e^{jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \cos(\bar{k}, x) \right] + \\ + B_{02} e^{-j\gamma_{02} L} \frac{\sqrt{\varepsilon_{z0}}}{\varepsilon_{x0}} \left[ 1 + \left( q_1 + \frac{B_{12}}{B_{02}} e^{-jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \cos(\bar{k}x) \right]; \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} H_y(x, L) = k \frac{\mu_x}{\mu_y} \frac{\sqrt{\varepsilon_{z0}}}{120\pi\gamma_{02}} \left\{ A_{02} e^{j\gamma_{02} L} \left[ 1 + \left( \bar{q}_1 + \frac{A_{12}}{A_{02}} \gamma_{02} e^{jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \times \right. \right. \\ \left. \times \cos(\bar{k}x) \right] - B_{02} e^{-j\gamma_{02} L} \left[ 1 + \left( \bar{q}_1 + \frac{B_{12}}{B_{02}} \gamma_{02} e^{-jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \cos(\bar{k}x) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$q_1 = \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{z0}} - 2 \frac{\tilde{\theta}_{00}}{\tilde{\theta}_{01}} \right); \quad \bar{q}_1 = q_1 + \frac{\Delta\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}}.$$

Принимая во внимание, что

$$\left| \left( \left\{ \frac{q_1}{q_1} \right\} + \frac{A_{12}}{A_{02}} e^{jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \cos(\bar{k}x) \right| \ll 1, \quad \left| \left( \left\{ \frac{q_1}{q_1} \right\} + \frac{B_{12}}{B_{02}} e^{-jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \cos(\bar{k}x) \right| \ll 1, \quad (67)$$

воспользуемся разложениями

$$\left[ 1 + \left( \left\{ \frac{q_1}{q_1} \right\} + \frac{A_{12}}{A_{02}} e^{jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \cos(\bar{k}x) \right] \simeq \exp \left[ \left( \left\{ \frac{q_1}{q_1} \right\} + \frac{A_{12}}{A_{02}} e^{jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos(\bar{k}x) \right] = \exp \left( \left\{ \frac{\alpha}{\delta} \right\} \cos(\bar{k}x) \right); \quad (68)$$

$$\left[ 1 + \left( \left\{ \frac{q_1}{q_1} \right\} + \frac{B_{12}}{B_{02}} e^{-jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \cos(\bar{k}x) \right] \simeq \exp \left[ \left( \left\{ \frac{q_1}{q_1} \right\} + \frac{B_{12}}{B_{02}} e^{-jL(\gamma_{12} - \gamma_{02})} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos(\bar{k}x) \right] = \exp \left[ \left( \frac{\beta}{\gamma} \right) \cos(\bar{k}x) \right]. \quad (69)$$

Тогда выражения (65), (68), (69) с учетом (68), (69) могут быть подставлены в формулы для компонент электрического ( $A^e$ ) и магнитного ( $A^m$ ) векторных потенциалов [16], после вычисления которых получаем

$$A_y^m = \frac{e^{jk_0 r}}{4\pi r} abF \frac{\sqrt{\epsilon_{z0}}}{\epsilon_{x0}} \left\{ A_{02} e^{j\gamma_{02} L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\alpha) + B_{02} e^{-j\gamma_{02} L} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\beta) \right\}; \quad (70)$$

$$A_x^e = \frac{e^{jk_0 r}}{4\pi r} \frac{abF}{120\pi} \frac{\sqrt{\epsilon_{z0}}}{\sqrt{\epsilon_{x0}\mu_x}} \frac{\mu_x}{\mu_y} \left\{ A_{02} e^{j\gamma_{02} L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\delta) - B_{02} \times \right. \\ \left. \times e^{-j\gamma_{02} L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\chi) \right\}, \quad (71)$$

где  $k\sqrt{\epsilon\mu} = k_0$ ,  $r$  — радиус-вектор точки наблюдения 0,

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon_{x0}\mu_x} = \frac{2\pi}{\lambda_1},$$

$$F = F_a F_b; \quad F_b = \sin \left[ \frac{k_1 b}{2} \left( \sin \theta \sin \varphi - n \frac{\lambda_1}{\Lambda} \right) \right] \left[ \frac{k_1 b}{2} \left( \sin \theta \sin \varphi - n \frac{\lambda_1}{\Lambda} \right) \right]^{-1},$$

$$F_a = \sin \left[ \frac{k_1 a}{2} (\sin \theta \cos \varphi) \right] \left[ \frac{k_1 a}{2} (\sin \theta \cos \varphi) \right]^{-1}.$$

При вычислении (70) и (71) принималось во внимание разложение

$$e^{-ik_0 \cos \bar{k}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(\zeta) e^{-jn\bar{k}x}. \quad (72)$$

Используя известную связь векторного потенциала с электрическим полем [16], получим окончательно

$$E_{\theta, \varphi} = -ik_1 ab \frac{e^{jk_0 r}}{4\pi r} \sin \varphi F \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon_{z0}}}{\epsilon_{x0}} \left[ A_{02} e^{j\gamma_{02} L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{02} e^{-j\gamma_{02} L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\beta) \right] + \left[ -A_{02} e^{j\gamma_{02} L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\delta) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{02} e^{-j\gamma_{02} L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\chi) \right] \cos \theta \frac{120\pi}{W} \sqrt{\frac{\mu_x}{\epsilon_{x0}}} \right\},$$

где

$$W = E_x/H_y \simeq 120\pi \sqrt{\mu_y/\epsilon_{x0}}.$$

Это выражение описывает дифрагированное на ультразвуковой решетке с апертурой  $a \times b$  электрическое поле в дальней зоне.

Для осуществления предельного перехода к формулам [8] наложим на (72) условие изотропности среды  $\epsilon_{x0} = \epsilon_{z0}$ , пренебрежем, следя [8], величиной магнитного поля  $H_y$  в плоскости  $z = L$  и вычеркнем отраженные волны  $A_{02}$  и  $A_{12}$ . Тогда, определяя, согласно (20) и (21),  $B_{02}$  через амплитуду падающей волны  $B_{01}$  и полагая  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma_{02}L = m\pi$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), получаем поле  $E_\theta$  в виде

$$\begin{aligned} E_{\theta, \varphi = \frac{\pi}{2}} = & -ik_1 ab \frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r} B_{01} \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_{x0}}} \frac{\mu_x}{\mu} \right) e^{-j\gamma_{02}L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(j\beta) \times \\ & \times \sin \left[ \frac{k_1 b}{2} \left( \sin \theta - n \frac{\lambda_1}{\Lambda} \right) \left[ \frac{k_1 b}{2} \left( \sin \theta - n \frac{\lambda_1}{\Lambda} \right) \right]^{-1} \right], \end{aligned}$$

что полностью совпадает с дифракционным полем, приведенным в работе [8]\*. При  $\mu = \pi\lambda_1 z/\Lambda^2 \rightarrow 0$  данное выражение переходит в формулу упрощенной теории Рамана—Ната.

Выше рассмотрена теория дифракции электромагнитных волн на ультразвуке в кристалле. Получены выражения для дифракционного поля в ближней и дальней зонах. Показано, что в ближней зоне рассматриваемая система может быть описана матрицей рассеяния  $S$  некоторого  $2(N+1)$ -полюсника, что позволяет при исследовании различного рода «каскадных» соединений подобных устройств вести расчеты на основе матричного метода теории цепей. Полученные выражения содержат как частные случаи классические формулы скалярной дифракции в изотропном слое.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P. Debye, F. Sears, Proc. Nat. Ac. Sci., 18, 409 (1932).
2. P. Debye, Ber. Säch. Akad. Wiss., 84, 125 (1932).
3. R. Lucas, P. Biquard, Comptes Rendus (Paris), 194, 2132 (1932).
4. А. Бергман, Ультразвук и его применение в науке и технике, ИЛ, М., 1956.
5. C. Raman, N. Nath, Proc. Ind. Inst. Sci., 2(A) (part. I), 406 (1935).
6. C. Raman, N. Nath, Proc. Ind. Inst. Sci., 2(A) (part. II), 413 (1935).
7. C. Raman, N. Nath, Proc. Ind. Inst. Sci., 3(A) (part III), 75 (1936).
8. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, сер. физ., № 2, 223 (1937).
9. В. С. Ильин, Г. П. Костюнина, Оптика и спектроскопия, (в печати).
10. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, Гостехиздат, М., 1957.
11. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИФМЛ, М.—Л., 1962.
12. Справочник по волноводам под ред. Л. Н. Фельда (пер. с англ.), изд. Сов. радио, М., 1952.
13. В. С. Ильин, Кандидатская диссертация, РГУ, 1962.
14. А. П. Мишина, И. В. Прокуряков, Высшая алгебра, Спр. мат. биб., изд. Наука, М., 1965.
15. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
16. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию  
19 июля 1965 г.

\* В работе [8] решение приведено с точностью до некоторого постоянного множителя.

**THE ELECTROMAGNETIC WAVES DIFFRACTION AT ULTRA-SONIC WAVES  
IN AN ANISOTROPIC MEDIUM***V. S. Il'in, G. P. Kostyunina*

On the basis of the variational method the transition of electromagnetic waves has been considered through the anisotropic layer with the dielectrical permittivity tensor, modulated by the ultra-sonic. The expressions have been obtained for the scattering-matrix elements of such a system. The diffraction field has been derived in the far zone.

---

УДК 533.93

## О РЕЗОНАНСАХ ФЛУКТУАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

И. П. Якименко

Определены резонансы теплового излучения тонкого однородного плазменного цилиндра в продольном магнитном поле

1. Исследование резонансов флукуационного излучения ограниченной магнитоактивной плазмы представляет интерес для разработки эффективных методов диагностики плазмы путем измерения характеристик ее собственного теплового излучения, а также для создания управляемых генераторов некогерентного излучения. Кроме того, такое исследование имеет и более общее значение, так как резонансы флукуационного излучения — это одновременно частоты поглощения плазменного цилиндра, помещенного в волновод или резонатор, области эффективного взаимодействия пучка заряженных частиц с плазменными волноводами, резонансные частоты при дифракции и излучении волн плазменным цилиндром. Таким образом, все эти задачи тесно связаны с проблемой собственных колебаний плазменного цилиндра.

На основании общей теории электромагнитных флукуаций в работе [2] вычислено спектральное распределение плотности радиального потока мощности теплового излучения плазменного цилиндра радиуса  $a$  в продольном постоянном магнитном поле  $H_0$  (в классическом случае  $\hbar\omega \ll T$ ):

$$P_\omega = \frac{T}{\pi^4 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} \frac{d\beta}{\gamma^2 |\Delta|^2} (-1)^{l+k} f_{lk} \delta_{ll} \delta_{lk}^*, \quad (1)$$

где

$$f_{lk} = \frac{\epsilon''_z}{|\epsilon_z|^2} \gamma_l^2 \gamma_k^{*2} \lambda_l \lambda_k^* I_1^{lk} + k^2 [\epsilon''(1 + b_l b_k^*) - \eta''(b_l + b_k^*)] I_2^{lk} + n k^2 [\epsilon''(b_l + b_k^*) - \eta''(1 + b_l b_k^*)] I_3^{lk},$$

$$I_1^{lk} = \frac{J_{ni} J_{nk}^{*'} - J'_{ni} J_{nk}^*}{\gamma_l^2 - \gamma_k^{*2}} a, \quad I_2^{lk} = \frac{\gamma_l^2 J_{ni} J_{nk}^{*'} - \gamma_k^{*2} J_{nk}^* J_{ni}'}{\gamma_l^2 - \gamma_k^{*2}} a, \quad (2)$$

$$I_3^{lk} = J_{ni} J_{nk}^*, \quad J_{ni} = J_n(\gamma_l a), \quad J'_{ni} = \partial J_{ni} / \partial a,$$

$$\gamma_{1,2}^2 = a_1 - b_0 \lambda_{1,2}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{a_1 - a_2}{2b_0} \pm \left[ \left( \frac{a_1 - a_2}{2b_0} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}, \quad \gamma^2 = k^2 - \beta^2,$$

$$a_1 = \frac{\epsilon_z(k^2 \epsilon - \beta^2)}{\epsilon}, \quad a_2 = k^2 \frac{\epsilon^2 - \gamma_l^2}{\epsilon} - \beta^2, \quad b_0 = \frac{\beta k \eta_l}{\epsilon}, \quad b_{1,2} = \frac{k^2 \epsilon - \beta^2 - \gamma_{1,2}^2}{k^2 \eta_l},$$

$k = \omega/c$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы [1]

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\eta & 0 \\ -i\eta & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Суммирование по индексам  $i, k, l$  в (1) производится от 1 до 2, причем величины  $\delta_{rs}$  определяются выражениями

$$\delta_{1,1,2} = \frac{ik\lambda_{2,1}\Delta_{1,2}}{\gamma_{1,2}^2 H J_{1,2}}, \quad \delta_{2,1,2} = \frac{ik\lambda_{2,1}\Delta_{3,4}}{\gamma_{1,2}^2 H J_{1,2}}, \quad (4)$$

$$\Delta_{1,2} = \frac{k\lambda_{1,2}}{\gamma_{2,1}^2} \frac{J'_{2,1}}{J_{2,1}} - \frac{n k^2 (\gamma_{2,1}^2 - \epsilon_z \gamma^2)}{\beta a \gamma_{2,1}^2 \gamma^2} - \frac{k\lambda_{1,2}}{\gamma^2} \frac{H'}{H},$$

$$\Delta_{3,4} = \frac{ik \epsilon_z}{\gamma_{2,1}^2} \frac{J'_{2,1}}{J_{2,1}} + \frac{in \beta \lambda_{1,2} (\gamma^2 - \gamma_{2,1}^2)}{a \gamma_{2,1}^2 \gamma^2} - \frac{ik}{\gamma^2} \frac{H'}{H},$$

$$\Delta = \Delta_2 \Delta_3 - \Delta_1 \Delta_4, \quad J_i = J_n(\gamma a), \quad H = H_n^{(1)}(\gamma a).$$

Выражение (1) содержит сумму всех несимметричных мод флукуционного излучения. Определим резонансы этого излучения для мод  $n > 0$  в случае тонкого плазменного цилиндра, когда

$$J_{ni} = \frac{1}{n!} \left( \frac{\gamma_i a}{2} \right)^n, \quad H_n^{(1)} = -\frac{i(n-1)!}{\pi} \left( \frac{2}{\gamma a} \right)^n, \quad \frac{J'_n}{J_n} = -\frac{H_n^{(1)'}}{H_n^{(1)}} = \frac{n}{a}. \quad (5)$$

При этом

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2in^2k^2(\lambda_2 - \lambda_1)(\varepsilon - \eta + 1)}{\gamma^2 a^2 [k^2(\varepsilon - \eta) - \beta^2]}, \\ (-1)^{l+k} f_{lk} \delta_{ll} \delta_{kk}^* &= \frac{k^2(\varepsilon'' - \eta'')(a/2)^{2n}}{n! (n-1)!} \cdot \{ |\gamma_1^n(1+b_1)\delta_{11} - \gamma_2^n(1+b_2)\delta_{12}|^2 + \\ &\quad + |\gamma_1^n(1+b_1)\delta_{21} - \gamma_2^n(1+b_2)\delta_{22}|^2 \}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1^n(1+b_1)\delta_{11} - \gamma_2^n(1+b_2)\delta_{12} &= \frac{2\pi n^2 \beta k \gamma^n (\lambda_2 - \lambda_1)}{a \gamma^2 [k^2(\varepsilon - \eta) - \beta^2]}, \\ \gamma_1^n(1+b_1)\delta_{21} - \gamma_2^n(1+b_2)\delta_{22} &= \frac{2\pi i n^2 k^2 \gamma^n (\lambda_1 - \lambda_2)}{a \gamma^2 [k^2(\varepsilon - \eta) - \beta^2]}. \end{aligned}$$

Подстановка (6) в общую формулу (1) дает для мощности колебаний с  $n > 0$  выражение

$$P_{\omega n}^+ = \frac{T}{\pi^2} \frac{\varepsilon'' - \eta''}{|\varepsilon - \eta + 1|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a/2)^{2n-1}}{n! (n-1)!} \int_0^k \gamma^{2(n-1)} (k^2 + \beta^2) d\theta. \quad (7)$$

Входящий сюда интеграл легко вычисляется, так как

$$\begin{aligned} \int (k^2 - \beta^2)^{n-1} (k^2 + \beta^2) d\beta &= \beta k^{2n} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^s (\beta/k)^{2s} (n-2s)}{s! (1+2s)} \times \right. \\ &\quad \left. \times (n-1)(n-2)...(n-s+1) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Окончательно полная мощность флюктуационного излучения положительных гармоник ( $n \geq 1$ ) может быть получена в виде

$$P_{\omega}^+ = \frac{k^2 T}{\pi^2} \frac{\varepsilon'' - \eta''}{|\varepsilon - \eta + 1|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ka/2)^{2n-1}}{n! (n-1)!} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^s (n-2s)}{s! (1+2s)} (n-1)(n-2)\dots(n-s+1) \right\}. \quad (9)$$

При  $n = 1$  и  $n = 2$  отсюда находим

$$P_{\omega 1}^+ = \frac{2k^3 a T}{3\pi^2} \frac{\varepsilon'' - \eta''}{|\varepsilon - \eta + 1|^2}, \quad P_{\omega 2}^+ = \frac{k^5 a^3 T}{20\pi^2} \frac{\varepsilon'' - \eta''}{|\varepsilon - \eta + 1|^2}, \quad (10)$$

что совпадает с соответствующими выражениями, полученными в [2]. Формула (9) включает полный спектр типов флюктуационных колебаний, но существенно то, что все эти колебания имеют резонанс на одних и тех же частотах, определяемых множителем

$$f_+(\omega) = \frac{\varepsilon'' - \eta''}{|\varepsilon - \eta + 1|^2}. \quad (11)$$

**2.** Мы рассмотрели мощность флюктуационных колебаний с  $n > 0$ . Однако общая формула (1) содержит также сумму всех отрицательных мод  $n < 0$ . Пользуясь тем, что для функций Бесселя

$$Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x), \quad (12)$$

и выполняя все преобразования, связанные с переходом к тонкому цилинду (точно так же, как это сделано выше для  $n > 0$ ), получим для мощности излучения, связанной с колебаниями  $n < 0$  выражение

$$P_{\omega}^- = \frac{k^2 T}{\pi^2} \frac{\varepsilon'' + \eta''}{|\varepsilon + \eta + 1|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ka/2)^{2n-1}}{n! (n-1)!} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^s (n-2s)}{s! (1+2s)} (n-1)(n-2)\dots(n-s+1) \right\}. \quad (13)$$

Как видно, это выражение отличается от (9) только наличием другого множителя

$$f_-(\omega) = \frac{\varepsilon'' + \eta''}{|\varepsilon + \eta + 1|^2}. \quad (14)$$

Однако резонансные частоты, определяемые из (14), резко отличаются от резонансных частот, даваемых (11). Кроме того, ход частотной зависимости  $f_+$  и  $f_-$  совершенно различен; поэтому колебания с  $n > 0$  и  $n < 0$  имеют и разные резонансы, и разные абсолютные уровни мощности.

**3.** Чтобы глубже понять природу и различие резонансов при  $n > 0$  и  $n < 0$ , обратимся к анализу дисперсионного уравнения тонкого плазменного цилиндра, помещенного в продольное магнитное поле. Запишем сначала дисперсионное уравнение для однородного плазменного столба радиуса  $a$ , помещенного в круглую трубу радиуса  $b$ :

$$\Delta_2 \Delta_3 = \Delta_1 \Delta_4, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} &= \bar{\lambda}_{1,2} \left[ \frac{\xi}{y} - \frac{1}{y_{2,1}} \frac{J_{n+1}(y_{2,1})}{J_n(y_{2,1})} \right] + n\delta_{1,2}, \\ \Delta_{3,4} &= \frac{\varphi}{y} - \frac{\varepsilon_z}{y_{2,1}} \frac{J_{n+1}(y_{2,1})}{J_n(y_{2,1})} + n\delta_{1,2}, \quad \bar{\lambda}_{1,2} = p\lambda_{1,2}, \quad p = \beta/k, \\ \xi &= \frac{N_{n+1}(\gamma a)J'_n(\gamma b) - N'_n(\gamma b)J_{n+1}(\gamma a)}{N_n(\gamma a)J'_n(\gamma b) - N'_n(\gamma b)J_n(\gamma a)}, \\ \varphi &= \frac{N_{n+1}(\gamma a)J_n(\gamma b) - N_n(\gamma b)J_{n+1}(\gamma a)}{N_n(\gamma a)J_n(\gamma b) - N_n(\gamma b)J_n(\gamma a)}, \\ \delta_{1,2} &= \bar{\lambda}_{1,2} \left( \frac{1}{y_{2,1}^2} - \frac{1}{y^2} \right) + \frac{\varepsilon_z}{y_{2,1}^2} - \frac{1}{y^2}, \quad y_i = \gamma_i a. \end{aligned} \quad (16)$$

Это уравнение получено, как обычно, путем решения уравнений Максвелла для области  $0 < r < a$  (плазма) и  $a < r < b$  (вакуум) с граничными условиями для тангенциальных компонент полей при  $r = a$  и  $r = b$ .

Дисперсионное уравнение для несимметрических волн в плазменном цилиндре [3] получается из (15), (16) при  $b \rightarrow \infty$ , когда

$$\begin{aligned} J_n(\gamma b) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma b}} \cos \left[ \gamma b - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right], \\ N_n(\gamma b) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma b}} \sin \left[ \gamma b - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right], \\ \frac{N_n(\gamma b)}{J_n(\gamma b)} &\simeq -\frac{J'_n(\gamma b)}{N'_n(\gamma b)} \simeq i; \end{aligned} \quad (17)$$

вид (15) сохраняется, но

$$\varphi = \xi = \frac{H_{n+1}^{(1)}(\gamma a)}{H_n^{(1)}(\gamma a)}. \quad (18)$$

Осуществим теперь переход к случаю тонкого цилиндра ( $\gamma_i a \rightarrow 0$ ). Тогда при  $n > 0$  (правополяризованные волны)

$$\Delta_+ = \Delta_2 \Delta_3 - \Delta_1 \Delta_4 = \frac{2n^2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1)(\varepsilon - \eta + 1)}{x^2 y^2 (\varepsilon - \eta - p^2)}, \quad (19)$$

а при  $n < 0$  (левополяризованные волны)

$$\Delta_- = \frac{2n^2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1)(\varepsilon + \eta + 1)}{x^2 y^2 (\varepsilon + \eta - p^2)}. \quad (20)$$

Сравнивая (19) и (20) с (11) и (14), можно отметить, что резонансы  $f_+(\omega)$  относятся к правополяризованным волнам, а резонансы  $f_-(\omega)$  связаны с левополяризованными волнами. То, что эти резонансы наблюдаются при разных частотах, вполне соответствует тому факту, что фазовые скорости для волн  $n > 0$  и  $n < 0$  существенно различны, в связи с чем в плазменном волноводе при наличии магнитного поля возможен значительный эффект Фарадея. Последнее было отмечено в [3, 4]. Физически очевидно, что если вместо плазменного стержня рассматривается канал в безграничной плазме, то право- и левополяризованные волны

меняются местами и, следовательно, резонансы флуктуационного поля при  $n > 0$  будут спределяться формулой (14), а при  $n < 0$  — формулой (11). Это легко доказывается математически, поскольку для этого достаточно в уравнении (15) произвести замены  $J_n \leftrightarrow H_n^{(1)}$ .

4. Исследуем теперь подробнее резонансы флуктуационного излучения, определенные из (11) и (14). Из вида компонент тензора диэлектрической проницаемости, приведенных, например, в [2], следует, что функция  $f_+(\omega)$  имеет максимум вблизи частоты гиромагнитного резонанса, тогда как функция  $f_-(\omega)$  плавно меняется вблизи этой частоты. Следовательно, в области гиромагнитного резонанса резонируют колебания  $n > 0$ , тогда как для колебаний  $n < 0$  эта частота не является резонансной. Это обстоятельство связано с тем, что поглощение право-поляризованных волн в плазме (в отличие от левополяризованных волн) имеет резонансный характер вблизи гирочастоты.

Далее, функция  $f_+(\omega)$  имеет максимум при

$$\operatorname{Re}(\varepsilon - \eta + 1) = 0. \quad (21)$$

Тогда

$$f_+(\omega) = ul^2/4x\delta \quad (\delta \ll 1, x/u \neq 1), \quad (22)$$

где  $x = \omega a/c$ ,  $u = \omega_H a/c$ ,  $l = \omega_0/\omega_H$ ,  $\delta = v/\omega_H$ ,  $v$  — частота соударений электронов в плазме,  $\omega_H$  — гирочастота,  $\omega_0$  — ленгмюровская частота. Условие (21) выполняется при

$$x_+ = \frac{u}{2}(1 + \sqrt{1 + 2l^2}) = \frac{u + \sqrt{u^2 + 2\alpha^2}}{2}, \quad (23)$$

где

$$\alpha = \omega_0 a/c.$$

Итак, излучение на гармониках  $n > 0$  резонирует вблизи  $\omega_H$ , а также на частоте, задаваемой формулой (23).

Функция  $f_-(\omega)$  имеет максимум, если

$$\operatorname{Re}(\varepsilon + \eta + 1) = 0, \quad (24)$$

когда эта величина совпадает с  $f_-(\omega)$  при резонансе:

$$f_-(\omega) = ul^2/4x\delta \quad (\delta \ll 1, x/u \neq 1). \quad (25)$$

Легко установить, что резонанс для колебаний  $n < 0$  возникает на частоте

$$x_- = \frac{u}{2}(\sqrt{1 + 2l^2} - 1) = \frac{\sqrt{u^2 + 2\alpha^2} - u}{2}. \quad (26)$$

Таким образом, кроме частоты гиромагнитного резонанса, в спектре флуктуационного излучения тонкого плазменного цилиндра наблюдаются еще две резонансные частоты, определяемые формулой (23) для  $n > 0$  и формулой (26) для  $n < 0$ .

Устремим магнитное поле к нулю ( $u \rightarrow 0$ , переход к изотропной плазме). Тогда в предельном случае изотропной плазмы ( $u = 0$ ) из (26) и (23) получим

$$x_+ = x_- = \alpha/\sqrt{2}. \quad (27)$$

Равенство (27) определяет граничную частоту для плазменного волновода в свободном пространстве без магнитного поля [5]. Итак, в отсут-

ствие магнитного поля в спектре флуктуационного излучения плазменного цилиндра содержитя единственная резонансная частота, совпадающая с граничной частотой плазменного цилиндра. При включении магнитного поля эта частота расщепляется на две частоты  $\omega_+(n > 0)$  и  $\omega_-(n < 0)$ , определяемые формулами (23) и (26).

Мы не рассмотрели здесь колебание  $n = 0$ ; можно показать, однако, что оно не имеет резонансного характера.

5. В настоящей работе определены резонансы теплового излучения плазменного цилиндра при наличии и в отсутствие магнитного поля. Однако важно иметь в виду, что все рассмотрение было проведено только для случая однородного цилиндра. Между тем реальный плазменный цилиндр, получаемый в лаборатории, всегда неоднороден, вследствие чего экспериментально обычно наблюдается еще серия резонансов, связанная с неоднородностью цилиндра [6]. Поэтому дальнейшим развитием данной работы должен быть учет неоднородности цилиндра.

Кроме того, вблизи граничных частот большую роль играет пространственная дисперсия [1], и строгий анализ флуктуационных процессов вблизи этих частот возможен только при учете пространственной дисперсии.

Результаты настоящей работы могут быть полезны при разработке методов диагностики плазмы: по известным резонансным частотам и абсолютному уровню мощности при резонансе можно определить концентрацию заряженных частиц в плазме и ее температуру.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 476 (1965).
3. В. П. Шестопалов, И. П. Якименко, В. Д. Филь, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 179 (1962).
4. A. W. Trivelpiece, R. W. Gould, J. Appl. Phys., 30, 1784 (1959).
5. Л. М. Пятигорский, Уч. зап ХГУ, 6, 23 (1955).
6. C. D. Lustig, Phys. Letters, 9, 315 (1964).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
12 июля 1965 г.

#### ON RESONANCES OF FLUCTUATIONAL EMISSION OF A PLASMA CYLINDER

*I. P. Yakimenko*

The thermal radiation resonances have been determined of a fine uniform plasma cylinder in a longitudinal magnetic field.

УДК 621.371.123

## ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

*Ю. А. Рыжов*

Получено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости и функций Грина анизотропной сильно неоднородной бесконечной среды. Общие соотношения анализируются на примере магнитоактивной плазмы с изотропными флуктуациями электронной плотности. Исследован случай, когда размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной волны распространяющегося излучения.

При решении электродинамических задач об излучении источников в хаотически неоднородных средах часто можно ограничиться определением среднего поля. Например, для вычисления средних потерь заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью в неоднородной среде, необходимо знать среднее поле этой частицы в месте ее нахождения. Относительная простота определения среднего поля в значительной мере связана с тем обстоятельством, что уравнения для среднего электрического поля в хаотически неоднородной среде совпадают с уравнениями поля в некоторой однородной среде с эффективной диэлектрической проницаемостью. Другими словами, средняя электрическая индукция является линейным функционалом среднего электрического поля.

Нахождению эффективной диэлектрической проницаемости неоднородных сред посвящен ряд работ. В некоторых из них [1-3] рассматривается вопрос об эффективной диэлектрической проницаемости методом возмущений. Результаты такого подхода справедливы при малых относительных флуктуациях диэлектрической проницаемости среды. Однако в целом ряде важных случаев приходится иметь дело с сильными флуктуациями. Интересным примером является электронная плазма, которая на частотах, близких к резонансной, является средой с сильными флуктуациями. Другим примером среды с сильными флуктуациями является вещество вблизи критических точек при фазовых переходах.

За последнее время появились работы, выходящие за пределы метода возмущений [4-7]. Методами, заимствованными из квантовой теории поля, в электродинамике неоднородных сред были получены результаты, которые позволяют рассчитывать поле в среде с сильными флуктуациями. Родственные задачи решались в [8, 9]. Настоящая работа является развитием и обобщением этих методов в применении к анизотропным сильно неоднородным средам. Полученные общие результаты иллюстрируются на примере неоднородной магнитоактивной плазмы. Вычисление эффективной диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы методом возмущений было проведено в [10].

## 1. ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ БЕЗГРАНИЧНОЙ ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Тензор эффективной диэлектрической проницаемости определяется из соотношения

$$\langle D_n \rangle = \langle \epsilon_{nk} E_k \rangle = \overset{\wedge}{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}} \langle E_k \rangle, \quad (1)$$

где  $\langle D_n \rangle$ ,  $\langle E_n \rangle$  — средние значения электрической индукции и поля,  $\epsilon_{nk} = \langle \epsilon_{nk} \rangle + \Delta \epsilon_{nk}$  — тензор диэлектрической проницаемости,  $\Delta \epsilon_{nk}$  — флюктуационное отклонение, которое мы считаем случайной однородной функцией координат точки. Величина  $\overset{\wedge}{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}}$  в общем случае является линейным интегральным оператором. В случае статистически однородной среды ядро этого оператора является функцией разности координат двух точек:

$$\overset{\wedge}{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}} \langle E_k \rangle = \int \epsilon_{nk}^{\text{эфф}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle E_k(\mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

Будем исходить из уравнения для электрического поля точечного источника с током, зависящим от времени по закону  $\exp(-i\omega t)$ :

$$\Delta E_i - \frac{\partial^2 E_j}{dx_i dx_j} + k_0^2 \epsilon_{ik} E_k = n_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3)$$

Введем в рассмотрение вспомогательный тензор  $\epsilon_{ik}^0(\omega)$  (см. [8]) и запишем уравнение для поля в однородной среде с такой диэлектрической проницаемостью:

$$\Delta E_i^0 - \frac{\partial^2 E_i^0}{\partial x_i \partial x_j} + k_0^2 \epsilon_{ik}^0 E_k^0 = n_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4)$$

Вычитая уравнение (4) из (3), получаем

$$\Delta(E_i - E_i^0) - \frac{\partial^2(E_i - E_i^0)}{\partial x_i \partial x_j} + k_0^2 \epsilon_{ik}^0 (E_k - E_k^0) = -k_0^2 (\epsilon_{ik} - \epsilon_{ik}^0) E_k \quad (5)$$

или

$$E_i = G_{ik}^0 n_k - k_0^2 \int G_{in}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\epsilon_{nk}(\mathbf{r}') - \epsilon_{nk}^0] E_k(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (6)$$

где  $G_{ik}^0$  — решение уравнения (4) [11]:

$$G_{ik}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} e_{k\alpha\beta} e_{imn} D_{\alpha m} D_{\beta n} I_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (7)$$

Здесь  $e_{k\alpha\beta}$  — абсолютно антисимметричный единичный тензор ( $e_{123} = 1$ ),

$$D_{\alpha m} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_m} - \nabla^2 \delta_{\alpha m} - \alpha_{\alpha m},$$

$$\alpha_{\alpha m} = k_0^2 \epsilon_{\alpha m},$$

$$I_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\Delta(\mathbf{k})} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{k},$$

$\Delta(\mathbf{k})$  — детерминант матрицы  $(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - k_0^2 \epsilon_{ij})$ .

Функция Грина  $G_{ik}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  является сингулярной. Для дальнейшего необходимо [8, 7] представить ее в виде суммы двух частей, из которых

одна сингулярна в смысле теории обобщенных функций (является  $\delta(\mathbf{r})$  — функцией), а другая регулярна [12]. В приложении выполнены все расчеты, необходимые для такого представления. Здесь мы приводим окончательный результат:

$$G_{ik}(\mathbf{r}) = G_{ik}^0(\mathbf{r}) + R_{ik}\delta(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где  $R_{ik}$  — постоянный тензор, зависящий от компонент тензора  $\epsilon_{ik}^0$ ; функция  $G_{ik}^0(\mathbf{r})$  условно означает величину  $P G_{ik}^0(\mathbf{r})$ , где символ  $P$  указывает на интегрирование с этой функцией в смысле главного значения. С учетом (8) уравнение для поля (6) перепишется в виде

$$F_i = G_{ik}^0 n_k - k_0^2 \int G_{in}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xi_{nm}(\mathbf{r}') F_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (9)$$

где введены следующие обозначения:

$$F_i = \eta_{ik} E_k, \quad \eta_{ik} = \delta_{ik} + k_0^2 R_{im} (\epsilon_{mk} - \epsilon_{mk}^0), \quad \xi_{nm} = (\epsilon_{nk} - \epsilon_{nk}^0) \eta_{km}^{-1}. \quad (10)$$

В дальнейшем уравнение (9) решается последовательными итерациями. Наилучшая сходимость рядов для поля  $F_i$  получается при условии

$$\langle \xi_{nm} \rangle = 0. \quad (11)$$

Мы будем предполагать, что величина  $\xi_{nm}$  распределена по нормальному закону и ее среднее значение равно 0. Последнее условие определяет вспомогательный тензор  $\epsilon_{ik}^0$ , который до этого момента предполагался произвольным. Переход к уравнению (9) с величинами  $F_i$  и  $\xi_{nm}$  от уравнения (6) с величинами  $E_i$  и  $\epsilon_{nm}$  существенен. Его значение состоит в том, что этот переход эквивалентен суммированию бесконечного ряда для квазистатической части эффективной диэлектрической проницаемости — тензора  $\epsilon_{ij}^0(\omega)$ , не зависящего от параметров  $kl$ ,  $k_0 l$ . Этот бесконечный ряд получается, если весь нижеследующий метод применять непосредственно к уравнению (6). С этим тесно связаны пределы применимости рассматриваемого метода при  $kl$ ,  $k_0 l \rightarrow 0$ .

Приведем некоторые соотношения, связывающие старые переменные с новыми:

$$\begin{aligned} F_i &= \eta_{ik} E_k = \delta_{ik} E_k + k_0^2 R_{in} (\epsilon_{nk} - \epsilon_{nk}^0) E_k, \\ \xi_{nm} F_m &= (\epsilon_{nk} - \epsilon_{nk}^0) \eta_{km}^{-1} F_m = (\epsilon_{nk} - \epsilon_{nk}^0) E_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Определим величину  $\hat{\xi}_{nm}^{\text{эфф}}$  следующим образом:

$$\langle \xi_{nm} F_m \rangle = \hat{\xi}_{nm}^{\text{эфф}} \langle F_m \rangle = \int \hat{\xi}_{nm}^{\text{эфф}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle F_m(\mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}'. \quad (13)$$

Усредняя уравнения (12), имеем

$$\begin{aligned} \langle F_i \rangle &= \delta_{ik} \langle E_k \rangle + k_0^2 R_{in} (\hat{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}} - \epsilon_{nk}^0) \langle E_k \rangle, \\ \hat{\xi}_{nm}^{\text{эфф}} \langle F_m \rangle &= (\hat{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}} - \epsilon_{nk}^0) \langle E_k \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Из этих соотношений для полей вида  $e^{ikr}$  в случае статистически однородной среды получим

$$\hat{\xi}_{nm}^{\text{эфф}} (\omega, \mathbf{k}) \{ \delta_{mk} + k_0^2 R_{ml} [\hat{\epsilon}_{lk}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) - \epsilon_{lk}^0(\omega)] \} = \hat{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) - \epsilon_{nk}^0(\omega), \quad (15)$$

где  $\hat{\xi}_{nm}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\hat{\epsilon}_{lk}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  — собственные значения операторов  $\hat{\xi}_{nm}^{\text{эфф}}$  и  $\hat{\epsilon}_{lk}^{\text{эфф}}$ :

$$\begin{aligned}\xi_{nm}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k}) &= \int \xi_{nm}^{\text{эф}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \\ \varepsilon_{nm}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k}) &= \int \varepsilon_{nm}^{\text{эф}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}.\end{aligned}\quad (16)$$

Разрешая уравнение (15) относительно  $\varepsilon_{kl}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k})$ , получаем

$$\varepsilon_{kl}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{kl}^0(\omega) + \gamma_{kn}^{-1} \xi_{nl}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k}), \quad (17)$$

где  $\gamma_{kn}^{-1}$  — тензор, обратный тензору  $\gamma_{nn} = \delta_{nn} - k_0^2 \xi_{nn}^{\text{эф}} R_{nn}$ . Формула (17) является аналогом соответствующей формулы в [7], выражающей  $\varepsilon_{kl}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k})$  через тензор эффективной поляризуемости  $\xi_{kl}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k})$ .

Положив  $F_l = G_{lk}^F n_k$ , запишем уравнение (9) в виде

$$G_{lk}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_{lk}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - k_0^2 \int G_{ln}^{0'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xi_{nm}(\mathbf{r}') G_{mk}^F(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}'. \quad (18)$$

Решая уравнение (18) последовательными итерациями и производя суммирование получающихся рядов с помощью диаграммной техники (совершенно аналогично тому, как это сделано в [6]), приходим к уравнению Дайсона для функции  $\langle G_{lk}^F \rangle$ . Отличие от изотропного случая заключается лишь в следующем. Функция  $\xi_{nm}$  зависит от двух индексов. Поэтому и соответствующим точкам на диаграммах отвечают два индекса. Запишем уравнение, которому удовлетворяет функция  $\langle G_{lk}^F \rangle$ :

$$\langle G_{lk}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle = G_{lk}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int G_{ln}^{0'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) Q_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \langle G_{mk}^F(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (19)$$

где функция  $Q_{np}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  определяется бесконечным рядом

$$\begin{aligned}Q_{np}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= k_0^4 B_{nlqp} G_{lq}^{0'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k_0^8 \iint G_{lr}^{0'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) B_{nlkj}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \times \\ &\times G_{mk}^{0'}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) B_{rmqp}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) G_{jq}^{0'}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \dots\end{aligned}\quad (20)$$

Для вычисления величины  $\xi_{nm}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k})$  усредним уравнение (18). Подставляя в полученное уравнение соотношение (13) и сравнивая затем это уравнение с (19), замечаем справедливость соотношений

$$-k_0^2 \xi_{nm}^{\text{эф}}(\mathbf{r}) = Q_{nm}(\mathbf{r}), \quad (21)$$

$$\xi_{nm}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{1}{k_0^2} \int Q_{nm}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (22)$$

Одновременно мы заключаем, что оператор  $\hat{\xi}_{nm}^{\text{эф}}$  действительно имеет вид, указанный формулой (13) при условии, если среда статистически однородна. Аналогичные выводы справедливы и для оператора  $\hat{\varepsilon}_{nm}^{\text{эф}}$ .

Формулы (17), (20) и (22) определяют тензор эффективной диэлектрической проницаемости произвольной анизотропной среды. Функция  $Q_{nm}(\mathbf{r})$  выражается бесконечным рядом. В ряде случаев можно ограничиться первым членом ряда. Оценка показывает, что это приближение справедливо для

$$|\xi_{nm}^{\text{эф}}(\omega, \mathbf{k})| \ll 1. \quad (23)$$

При этом формула (17) приобретает вид

$$\varepsilon_{ij}^{\text{эф}} = \varepsilon_{ij}^0 + \xi_{ij}^{\text{эф}}. \quad (17a)$$

Выражение для  $\xi_{ij}^{\text{эфф}}$  представляет собой ряд по степеням величин  $kl$ ,  $k_0l$ , где  $l$  — радиус корреляции случайной величины  $\xi$ . Для изотропных флуктуаций рассматриваемое приближение справедливо, если длина волны распространяющегося излучения велика по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций.

## 2. ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Общие соотношения мы проиллюстрируем на примере магнитоактивной электронной плазмы с изотропными флуктуациями плотности электронов. Вычисление тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  мы начнем с нахождения его квазистатической части — тензора  $\epsilon_{ij}^0$ . Тензор  $\epsilon_{ij}^0(\omega)$  определяется лишь интенсивностью флуктуаций электронной плотности и средними параметрами плазмы, но не зависит от величин  $kl$  и  $k_0l$ . При стремлении этих параметров к нулю  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow \epsilon_{ij}^0(\omega)$ . Согласно условию (11) для определения  $\epsilon_{ij}^0(\omega)$  необходимо решить систему уравнений

$$\langle \xi_{nm} \rangle = \langle (\epsilon_{nk} - \epsilon_{nk}^0) \eta_{km}^{-1} \rangle = 0. \quad (24)$$

Для плазмы

$$\epsilon_{nk} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{nk}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & -ig_0 & 0 \\ ig_0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Система (24) при этом сводится к системе из трех уравнений для определения величин  $\varepsilon_0$ ,  $\eta_0$ ,  $g_0$ . Тензор  $R_{ln}$ , входящий в  $\eta_{km}^{-1}$  для плазмы, найден в Приложении (формулы (A.6)). Вычисление тензора  $\xi_{nm}$  приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \xi_{11} = \xi_{22} &= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \left( \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x + x_1} \right) - \frac{g - g_0}{2} \left( \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x + x_1} \right), \\ \xi_{12} = -\xi_{21} &= -\frac{i}{2k_0 R_1} \left( \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x + x_1} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\xi_{33} = -\frac{\eta - \eta_0}{1 + k_0^2 R_3 (\eta - \eta_0)}, \quad \xi_{13} = \xi_{31} = \xi_{23} = \xi_{32} = 0,$$

где  $x = 1 + k_0^2 R_1 (\varepsilon - \varepsilon_0)$ ,  $x_1 = k_0^2 R_1 (g - g_0)$ . Положим в (26)  $\varepsilon = 1 - \alpha N$ ,  $g = \alpha N V u$ ,  $\eta = 1 - \beta N$ , где  $\beta = 4\pi e^2/m\omega^2 = \omega_0^2/\omega^2$ ,  $z = (1 - u)^{-1} \beta$ ,  $u = \omega_H^2/\omega^2$ ,  $N$  — концентрация электронов, которая распределена по закону

$$W(N) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ \frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2\sigma^2} \right] & (N \geq 0), \\ 0 & (N < 0), \end{cases} \quad (27)$$

$\langle N \rangle$  — среднее значение электронной плотности,  $\sigma^2 = \langle \Delta N^2 \rangle$ . Будем считать, что  $\sigma \langle N \rangle^{-1} \ll 1$ . Это условие позволяет распространить интегрирование с функцией распределения (27) на всю ось  $N$ . Вместе с тем это распространение не требует жесткого выполнения условия  $\sigma \langle N \rangle^{-1} \ll 1$  и допускает относительно большие значения  $\sigma \langle N \rangle^{-1}$ . Введенное ограничение совершенно не принципиально, но позволяет существенно упростить расчет.

Усредняя  $\xi_{nm}$  с помощью (27), получаем три уравнения для определения компонент тензора  $\varepsilon_{nm}^0$  плазмы:

$$I_+(\gamma_1) = \sqrt{2\pi} k_0^2 R_1 \alpha\sigma (1 + \sqrt{u}),$$

$$I_+(\gamma_2) = \sqrt{2\pi} k_0^2 R_1 \alpha\sigma (1 - \sqrt{u}),$$

$$I_+(\gamma_3) = \sqrt{2\pi} k_0^2 R_3 \beta\sigma,$$

$$\gamma_1 = \frac{1 + k_0^2 R_1 (p - r)}{k_0^2 R_1 \alpha\sigma (1 + \sqrt{u})}, \quad \gamma_2 = \frac{1 + k_0^2 R_1 (p + r)}{k_0^2 R_1 \alpha\sigma (1 - \sqrt{u})}, \quad (28)$$

$$\gamma_3 = \frac{1 + k_0^2 R_3 q}{k_0^2 R_3 \beta\sigma},$$

$$p = \langle \varepsilon \rangle - \varepsilon_0, \quad r = \langle g \rangle - g_0, \quad q = \langle \eta \rangle - \eta_0;$$

$$I_+(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2} dx}{\gamma - x} = \sqrt{2\pi} e^{-\gamma^2/2} \int_{+\infty}^{\gamma} d\tau e^{-\tau^2/2} \quad (\text{Im } \gamma > 0). \quad (29)$$

Правая часть равенства (29) служит аналитическим продолжением функции  $I_+(\gamma)$  в нижнюю полуплоскость [13].

Система (28) может быть исследована в различных частных случаях. При  $\sigma \rightarrow 0$  получается следующее разложение для  $p, r, q$ :

$$p - r = k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 + \sqrt{u})^2 + k_0^6 R_1^3 \alpha^4 \sigma^4 (1 + \sqrt{u})^4,$$

$$p + r = k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 - \sqrt{u})^2 + k_0^6 R_1^3 \alpha^4 \sigma^4 (1 - \sqrt{u})^4, \quad (30)$$

$$q = k_0^2 R_3 \beta^2 \sigma^2 + k_0^6 R_3^3 \beta^4 \sigma^4,$$

где в функциях  $R_1, R_2$  вместо  $\varepsilon_0$  и  $\eta_0$  нужно подставить  $\langle \varepsilon \rangle$  и  $\langle \eta \rangle$ . Легко получить также выражение для  $\varepsilon_{ij}$  вблизи плазменной частоты аналогично тому, как это сделано в [7].

Часть тензора  $\varepsilon_{ij}^{\text{зфф}}(\omega, \mathbf{k})$ , зависящую от параметров  $k_0 l, k l$ , мы вычислим для частного случая мелкомасштабных флуктуаций, когда при нахождении  $\xi_{ij}^{\text{зфф}}(\omega, \mathbf{k})$  можно ограничиться первым членом ряда (20).

### 3. СЛУЧАЙ МЕЛКОМАШТАБНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Исследование пространственной дисперсии, обусловленной хаотическими неоднородностями среды, показывает, что ее наличие не приводит к появлению каких-либо дополнительных эффектов при излучении и распространении радиоволн [7]. Поэтому в случае длинноволнового излучения мы ограничимся расчетом значений  $\varepsilon_{nm}^{\text{зфф}}(\omega, \mathbf{k})$  при  $|k|=0$ . Это приближение соответствует пренебрежению слабой пространственной дисперсией. Поправки, связанные с учетом пространственной дисперсии, не значительны.

Из формул (20) и (22) при  $k=0$  получаем

$$\xi_{np}^{\text{зфф}} = -(2\pi)^{-3} k_0^2 B_{nlqp}(0) \int \Phi_\xi(\mathbf{p}) G_{lq}^0(\mathbf{p}) d\mathbf{p} + k_0^2 B_{nlqp}(0) R_{lq}, \quad (31)$$

где

$$B_{nlqp}(\mathbf{r}) = B_{nlqp}(0) \Gamma_\xi(\mathbf{r}),$$

$$\Phi_{\xi}(\mathbf{p}) = \int \Gamma_{\xi}(\mathbf{r}) e^{-ipr} d\mathbf{r}, \quad G_{lq}^{0'}(\mathbf{p}) = G_{lq}^0(\mathbf{p}) - R_{lq}.$$

Мы ограничимся расчетом случая с изотропной функцией корреляции. В рассматриваемом приближении конечный результат не зависит от конкретного вида функции корреляции. Для простоты расчетов положим

$$\Gamma_{\xi}(r) = e^{-r^2/l^2}, \quad \Phi_{\xi}(p) = \pi^{3/2} l^3 \exp(-p^2 l^2/4).$$

Спектр  $G_{lq}^0(\mathbf{p})$  дается формулами (A.4) в Приложении.

Процесс вычисления  $\xi_{np}^{\text{ЭФФ}}$  довольно громоздок. Часть интегралов вычисляется в конечном виде. Другие же сводятся к функции  $I_+(\beta)$  (см. (29)), где  $\beta = k_0 n_1(0) l, k_0 n_2(0) l$ .

В нашем приближении, когда  $|k_1 l| \ll 1, |k_2 l| \ll 1$ , можно положить  $I_+(k_1 l) = I_+(k_2 l) \simeq -i\pi$ . Выпишем окончательные результаты. Тензор  $\xi_{np}^{\text{ЭФФ}}(\omega)$  имеет вид

$$\xi_{np}^{\text{ЭФФ}}(\omega) = \begin{vmatrix} \xi_{11}^{\text{ЭФФ}} & \xi_{12}^{\text{ЭФФ}} & 0 \\ \xi_{21}^{\text{ЭФФ}} & \xi_{22}^{\text{ЭФФ}} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33}^{\text{ЭФФ}} \end{vmatrix}, \quad (32)$$

где  $\xi_{11}^{\text{ЭФФ}} = \xi_{22}^{\text{ЭФФ}}, \xi_{12}^{\text{ЭФФ}} = -\xi_{21}^{\text{ЭФФ}}$ . Компоненты тензора  $\xi_{np}^{\text{ЭФФ}}(\omega)$  равны

$$\begin{aligned} \xi_{11}^{\text{ЭФФ}}(\omega) &= B_1(k_0 l)^2 + i c_1(k_0 l)^3 + i c'_1(k_0 l)^3, \\ \xi_{33}^{\text{ЭФФ}}(\omega) &= B_2(k_0 l)^2 + i c_2(k_0 l)^3 + i c'_2(k_0 l)^3, \\ \xi_{12}^{\text{ЭФФ}}(\omega) &= B_3(k_0 l)^2 + i c_3(k_0 l)^3 + i c'_3(k_0 l)^3. \end{aligned} \quad (33)$$

Коэффициенты  $B_i$  вычисляются в конечном виде. Мы их, однако, выписывать не будем. При выполнении неравенств  $k_0 l \ll 1$  члены  $B_i(k_0 l)^2$  дают малый вклад в значение  $\varepsilon_{ij}^{\text{ЭФФ}}(\omega)$ . В то же время малые члены, пропорциональные  $(k_0 l)^3$ , в ряде случаев учитывать необходимо, так как они определяют затухание среднего поля из-за рассеяния.

Коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$  определяют затухание среднего поля из-за рассеяния в необыкновенную волну:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{V\pi}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} \left\{ (B_{1111} + B_{1221}) n_1^5 \sin^2 \theta - \right. \\ &\quad \left. - n_1^3 [2\varepsilon_0(B_{1111} + B_{1221}) \sin^2 \theta + 2ig_0(B_{1121} - B_{1211}) \sin^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \eta_0(B_{1111} + B_{1221})(1 + \cos^2 \theta)] + 2\eta_0 n_1 [(B_{1111} + B_{1221}) \varepsilon_0 + ig_0(B_{1121} - B_{1211})] \right\}; \\ c_2 &= -\frac{V\pi}{4} B_{3333} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} [n_1^5 \cos^2 \theta - n_1^3 \varepsilon_0 (1 + \cos^2 \theta) + (\varepsilon_0^2 - g_0^2) n_1]; \\ c_3 &= \frac{V\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} \left\{ B_{1112} n_1^5 \sin^2 \theta - n_1^3 [2B_{1112} \varepsilon_0 \sin^2 \theta + B_{1112} \eta_0 (1 + \cos^2 \theta) + \right. \\ &\quad \left. + ig_0(B_{1122} - B_{1212}) \sin^2 \theta] + n_1 \eta_0 [2B_{1112} \varepsilon_0 + ig_0(B_{1122} - B_{1212})] \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $B_{ijkl} = B_{iikl}(0)$ .

Коэффициенты  $c'_i$ , отвечающие рассеянию в обыкновенную волну, получаются из  $c_i$  взаимной заменой  $n_1 \leftrightarrow n_2$ . Интегрирование по  $\theta$  в (34) по существу возможно лишь в частных случаях (например, в случае слабой гиротропии при  $u \ll 1$ ). Относительно формул (34) необходимо высказать следующие замечания. Они теряют свою справедливость на частотах, при которых возможен плазменный резонанс. Если  $\omega_0 < \omega_H$ , то выражения (34) справедливы для  $\omega > \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$ , а также при  $\omega_0 < \omega < \omega_H$ . Если же  $\omega_0 > \omega_H$ , то формулы (34) по-прежнему справедливы при  $\omega > \omega_p$ , а также в интервале  $\omega_H < \omega < \omega_0$ . На частотах плазменного резонанса становится неприменимым мелкомасштабное приближение.

Необходимо еще привести формулы для коэффициентов  $B_{1111}, B_{1221}$  и т. д., входящих в соотношения (34). Используя формулы (26) и усреднения  $\xi_{11}^2, \xi_{12}^2$  и т. д., с помощью (27) можно получить следующие значения интенсивностей флуктуаций величин  $\xi_{mn}$ :

$$\begin{aligned} \langle \xi_{11}^2 \rangle + \langle \xi_{1221}^2 \rangle &= \frac{1}{2k_0^4 R_1^2} \left[ \frac{p - r}{k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 + \sqrt{u})^2} - 1 \right] + \frac{1}{2k_0^4 R_1^2} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{p + r}{k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 - \sqrt{u})^2} - 1 \right]; \\ \langle \xi_{11} \xi_{12} \rangle &= - \frac{i}{4k_0^4 R_1^2} \left[ \frac{p + r}{k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 - \sqrt{u})^2} - \frac{p - r}{k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 + \sqrt{u})^2} \right]; \\ \langle \xi_{33}^2 \rangle &= \frac{1}{k_0^4 R_3^2} \left( \frac{q}{k_0^2 R_3 \beta^2 \sigma^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

В приближении метода возмущений, используя значения для  $p - r, p + r, q$ , записанные в (30) специально с точностью до членов  $\sigma^4$  (это необходимо для вычисления  $\langle \xi^2 \rangle$ ), получаем

$$\begin{aligned} \langle \xi_{11}^2 \rangle + \langle \xi_{12} \xi_{21} \rangle &= \alpha^2 \sigma^2 (1 + u), \\ \langle \xi_{11} \xi_{12} \rangle &= i \alpha^2 \sigma^2 \sqrt{u}, \\ \langle \xi_{33}^2 \rangle &= \beta^2 \sigma^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Располагая выражением для  $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$ , легко записать среднее значение функции Грина неоднородной магнитоактивной плазмы.

Отметим также, что во все формулы для  $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$  входит параметр  $l$  — радиус корреляции процесса  $\xi(r)$ . Можно показать, что  $l$  совпадает с радиусом корреляции флуктуаций величины  $\Delta \varepsilon(r)$ . Будем усреднять величину  $\xi_1 \xi_2$  с помощью двухмерной функции распределения  $W_2(\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2)$ , где индексы 1 и 2 принадлежат значениям  $\xi$  и  $\Delta \varepsilon$  в двух различных точках, разнесенных на расстояние  $r$ . Если параметр  $r$  выбрать большим по сравнению с радиусом корреляции процесса  $\Delta \varepsilon(r)$ , то можно считать, что  $W_2(\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2) = W_1(\Delta \varepsilon_1) W_1(\Delta \varepsilon_2)$  и  $\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle = 0$  (в силу условия для выбора вспомогательной диэлектрической проницаемости). Проводя такое же рассуждение для величины  $\Delta \varepsilon_1 \Delta \varepsilon_2$ , приходим к выводу о справедливости сделанного выше утверждения.

Автор благодарен В. В. Тамойкину за дискуссию, а также М. М. Кобрину за интерес к работе и замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Выделение $\delta(r)$ -особенности функции Грина электромагнитного поля

При использовании сингулярных функций Грина иногда возникает необходимость специального представления их в виде суммы сингулярной и регулярной частей в смысле обобщенных функций [12]. Очень часто мы имеем дело с функциями Грина вида

$$G(\mathbf{r}) = \frac{\partial^k I_0(\mathbf{r})}{\partial x_{\alpha}^{(1)} \partial x_{\beta}^{(2)} \dots \partial x_n^{(k)}}, \quad (\text{A.1})$$

где  $I_0(\mathbf{r})$  — локально интегрируемая функция с особенностью в начале координат. К числу таких функций, в частности, принадлежат функции Грина векторного волнового уравнения в изотропной и анизотропной среде. Общий подход к рассмотрению таких выражений можно осуществить с помощью теории обобщенных функций. Согласно общему правилу, выражение типа (1) имеет смысл, определяемый формулами

$$\begin{aligned} (G, \varphi) &= \left( \frac{\partial I_0}{\partial x}, \varphi \right) = - \left( I_0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = - \int I_0(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\mathbf{r} = \\ &= - \lim_{|\mathbf{r}| \geq \epsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}| \geq \epsilon} I_0(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где функция  $\varphi(\mathbf{r})$  принадлежит к пространству так называемых основных функций.

Применим эту формулу к случаю, когда  $G(\mathbf{r})$  определяется выражением (1). Производя интегрирование по частям последовательно по всем переменным, перейдем к пределу при  $r \rightarrow 0$ . При этом часть интегралов по границе области вблизи от начала координат исчезает.

Вводя спектр функции  $G(\mathbf{r})$ :

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} d\mathbf{p},$$

получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^k I_0}{\partial x_{\alpha}^{(1)} \partial x_{\beta}^{(2)} \dots \partial x_n^{(k)}}, \varphi \right) &= \int_{r \geq \epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^k I_0}{\partial x_{\alpha}^{(1)} \partial x_{\beta}^{(2)} \dots \partial x_n^{(k)}} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ &= \frac{i^k}{2\pi^2} \varphi(0) \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \int \frac{G(\mathbf{p})}{p} \frac{\sin(pr) - pr \cos(pr)}{(pr)^2} d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Эта формула удобна для исследования функций Грина. Например, можно получить представление функции  $G(\mathbf{r}) = \Delta e^{ik_0 r} r^{-1}$ , спектр которой равен  $G(\mathbf{p}) = 4\pi p^2 (k_0^2 - p^2)^{-1}$ . Подставляя это значение в (3), находим

$$G = -k_0^2 \frac{e^{ik_0 r}}{r} + 8\delta(r) \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x} dx = -k_0^2 \frac{e^{ik_0 r}}{r} - 4\pi\delta(r).$$

Более сложным примером является функция Грина для анизотропной среды. Мы рассмотрим функцию Грина магнитоактивной плазмы.

Спектр функции Грина  $G_{lk}(p)$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 G_{ik}(\mathbf{p}) = & \frac{1}{2} e_{k\alpha\beta} e_{lmn} \frac{1}{\Delta(\mathbf{p})} (p_\alpha p_m p^2 \delta_{\beta n} + p_\beta p_n p^2 \delta_{\alpha m} - p^4 \delta_{\alpha m} \delta_{\beta n} + \\
 & + p^2 \alpha_{\beta n} \delta_{\alpha m} + p^2 \alpha_{\alpha m} \delta_{\beta n} - p_\alpha p_m \alpha_{\beta n} - p_\beta p_n \alpha_{\alpha m} - \alpha_{\alpha m} \alpha_{\beta n}); \quad (A.4) \\
 \Delta(\mathbf{p}) = & - k_0^2 (\eta \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta) (p^2 - p_1^2) (p^2 - p_2^2),
 \end{aligned}$$

$p_1 = k_0 n_1$ ,  $p_2 = k_0 n_2$ ,  $n_1$  и  $n_2$  — коэффициенты преломления необыкновенной и обыкновенной волн. Подставляя (A.4) в (A.3) и производя необходимые операции, находим

$$G_{ik}(\mathbf{r}) = G'_{ik}(\mathbf{r}) + R_{ik} \delta(\mathbf{r}), \quad (A.5)$$

где штрих означает, что интегрирование с штрихованной функцией рассматривается в смысле главного значения в соответствии с формулой (A.3),  $R_{ik}$  — диагональный тензор с компонентами

$$\begin{aligned}
 R_{11} = R_{22} = R_1 = & \frac{1}{2k_0^2} \frac{1}{\eta - \epsilon} \left[ \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon(\eta-\epsilon)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta-\epsilon}{\epsilon}} - 1 \right], \\
 R_{33} = R_3 = & \frac{1}{k_0^2} \frac{1}{\eta - \epsilon} \left( 1 - \sqrt{\frac{\epsilon}{\eta-\epsilon}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta-\epsilon}{\epsilon}} \right)
 \end{aligned} \quad (A.6)$$

в пределе при  $\eta \rightarrow \epsilon$  компоненты  $R_1 = R_3 = 1/3k_0^2 \epsilon$ .

В заключение отметим следующее. Пусть  $G(\mathbf{p})$  определяется формулой

$$G(\mathbf{p}) = \frac{p^m}{N(\theta, \varphi) (p^2 - p_1^2) \dots (p^2 - p_k^2)} = \frac{p^m}{\Delta(\mathbf{p})},$$

т. е. дисперсионное уравнение имеет  $k$  корней. Подставляя это значение в формулу (3), приходим к следующему выводу. Для того, чтобы функция  $G(\mathbf{r})$  со спектром  $G(\mathbf{p})$  содержала  $\delta(\mathbf{r})$ -функцию, необходимо выполнение равенства  $m = 2k$ . Иными словами, число ветвей дисперсионного уравнения должно соответствовать порядку производной от локально интегрируемой функции, определяемой формулой

$$I_0(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int \frac{1}{\Delta(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап ХГУ, 35, тр. физ.-мат ф-та, 2, 41 (1950).
- Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 827 (1959).
- Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень, УФН, 73, 89 (1961).
- R. C. Voiggt, Canadian J. Phys., 40, 782 (1962).
- В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 44, 676 (1963).
- В. И. Татарский, ЖЭТФ, 46, 1397 (1964).
- Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, 656 (1965).
- В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 34, 509 (1964).
- В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 46, 725 (1964).
- Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 605 (1964).
- Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 32, 338 (1957).
- И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.
- В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

THE TENSOR OF AN EFFECTIVE PERMITTIVITY OF A STRONG  
NONUNIFORM ANISOTROPIC MEDIUM

*Yu. A. Ryzhov*

The expression has been obtained for the tensor of an effective permittivity and Green function of an anisotropic strong nonuniform infinite medium. The general relationships are analysed in the example of a magneto-active plasma with isotropic fluctuations of the electron density. The case of small (in comparison with the wave length) scale inhomogeneities has been investigated.

---

УДК 535.3 : 551.51

## ФЛУКТУАЦИИ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

*М. А. Каллистратова*

Исследовались вызванные атмосферной турбулентностью флюктуации направления распространения световых волн от края солнечного диска. Получены частотный спектр мощности флюктуаций и зависимость дисперсии флюктуаций от метеорологических условий в приземном слое атмосферы вблизи телескопа. Результаты измерений хорошо согласуются с данными расчета и подтверждают развитую в [2] теорию распространения волн в среде с переменной интенсивностью турбулентности.

Атмосферная турбулентность приводит к флюктуациям амплитуды и фазы световых волн, распространяющихся в атмосфере. Флюктуации разности фаз приводят к случайным изменениям направления распространения волн, что проявляется в смещении («дрожании») изображения удаленных объектов при наблюдении в реальных атмосферных условиях. Первыми, по-видимому, заинтересовались «дрожанием» астрономы, которым это явление создавало значительные помехи. Астрономами накоплен значительный наблюдательный материал и исследованы некоторые важные зависимости, как, например, зависимость интенсивности «дрожания» звезд от зенитного расстояния [1]. Однако, по наблюдениям астрономов, в основном визуальным и не сопровождавшимся исследованиями турбулентности, невозможно установить количественных связей между флюктуациями направления распространения света и пульсациями показателя преломления в атмосфере.

Теоретический анализ распространения волн в турбулентной среде, опирающийся на статистическую теорию турбулентности [2], позволил объяснить основные особенности флюктуационных явлений при распространении света в атмосфере. В работе [3] были проведены экспериментальные исследования флюктуаций угла прихода световых волн в ночное время на однородной трассе в приземном слое атмосферы, т. е. в условиях постоянства интенсивности турбулентности на всем пути распространения. Полученные в этой работе результаты дали хорошее совпадение с теорией [2] и показали возможность расчета дисперсии и частотного спектра флюктуаций направления распространения по данным о метеорологических условиях на трассе (по средним значениям и вертикальным градиентам скорости ветра и температуры ветра).

Однако в реальных условиях трассы с неизменной интенсивностью турбулентности на всем пути распространения встречаются крайне редко; поэтому большой практический интерес представляют исследования флюктуаций направления распространения волн на неоднородной трассе. При этом желательно провести такие исследования в дневное время, когда пульсации показателя преломления значительно больше, чем ночью, и оказывают более сильное влияние на распространение волн.

Для решения этой задачи измерялись дисперсия и частотный спектр флюктуаций направления распространения световых волн от края солнечного диска. При этом свет проходил через всю толщу атмосферы, где

интенсивность турбулентных пульсаций показателя преломления меняется от нуля на верхней границе атмосферы до максимального значения в нижних слоях.

Солнечный телескоп был установлен на ровной площадке в открытой степи в районе Цимлянска. Измерения проводились в августе 1963 г. в безоблачные и малооблачные дни. При всех измерениях определялись также характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы вблизи телескопа; в отдельных случаях проводилось самолетное зондирование.

Для измерений применялась разработанная ранее методика [3, 4], при которой случайные изменения направления прихода световых волн автоматически компенсируются поворотом зеркальца магнитоэлектрического шлейфа, стоящего на пути светового пучка (так что изображение источника в фокусе оптической системы остается неподвижным). Следящая система, управляющая поворотом зеркальца, сделана достаточно быстро действующей, чтобы отрабатывать весь спектр флуктуаций угла прихода световых волн. Угол поворота зеркальца пропорционален изменению направления прихода световых волн, и ток магнитоэлектрического шлейфа, пропорциональный углу поворота, используется в качестве выходной величины измерительного устройства.

Для получения изображения солнечного диска использовался горизонтальный солнечный телескоп, состоящий из целостата и максутовского объектива с эквивалентным фокусным расстоянием 10 м. Входная апертура объектива определялась размером зеркальца шлейфа следящей системы и составляла 5 см.

Сигнал с выхода следящей системы, пропорциональный угловому смещению вертикального края изображения солнечного диска, поступал на низкочастотный 26-канальный анализатор спектра, аналогичный разработанному в [5], и квадратичный детектор, шкала которого была про- градуирована в дисперсии угла прихода  $\sigma_{\phi}^2 = (\bar{\phi} - \phi)^2$ . Следящая система осредняла смещения участков края изображения солнечного диска с угловым размером  $l < 20''$ . Как показал расчет и контрольные измерения  $\sigma_{\phi}^2$  с другим усреднением, усреднение смещений участков изображения края с угловыми размерами  $20''$  не приводит к заметному уменьшению полной дисперсии флуктуаций.

Специальное внимание при проведении эксперимента было обращено на сокращение пути лучей и обеспечение хорошего перемешивания воздуха в пределах телескопа, а также на равномерность хода целостата и отсутствие механических колебаний зеркал телескопа под действием ветра. Анализ перечисленных помех показал, что даваемый ими ложный сигнал в полосе частот, пропускаемой измерительной аппаратурой, не превышал  $0,1''$  при всех измерениях, вошедших в обработку. Собственные шумы следящей системы измерялись при помощи неподвижной модели края солнечного изображения и были совершенно не значительны.

Всего за время измерений было получено около 150 значений дисперсии угла прихода и свыше 30 частотных спектров флуктуаций угла прихода. Измерения проводились при зенитных углах Солнца от  $30^\circ$  до  $60^\circ$ .

Дисперсия флуктуаций угла прихода плоской волны в фокальной плоскости объектива определяется выражением [2]

$$\sigma_{\phi}^2 = 2,8 b^{-1/3} \sec \theta \int_{z_1}^{\infty} C_n^2(z) dz, \quad (1)$$

где  $\theta$  — зенитный угол источника,  $z_1$  — высота, на которой установлен приемный объектив,  $b$  — диаметр объектива,  $C_n$  — структурная постоянная показателя преломления, характеризующая интенсивность флюктуаций показателя преломления в атмосфере\*.

В атмосфере  $C_n$  для оптического диапазона волн определяется в основном структурной постоянной пульсаций температуры воздуха  $C_T$ :

$$C_n = \frac{69 \cdot 10^{-6} p}{T^2} C_T, \quad (2)$$

где  $p$  — давление в  $мб$ ,  $T$  — температура в  $^{\circ}\text{К}$ ,  $C_T$  — выражено в  $град \cdot см^{-1/3}$ ,  $C_n$  — в  $см^{-1/3}$ . В приземном слое атмосферы  $C_T$ , а следовательно, и  $C_n$  рассчитываются по вертикальным градиентам средней температуры воздуха и скорости ветра [2, 3]. Зависимость  $C_T$  от высоты в атмосфере исследована теоретически для условий чистой конвекции, которые реализуются днем в летнее время в малооблачную погоду над сушей. Следуя [6], мы можем записать

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_1) \left( \frac{z}{z_1} \right)^{-4/3}. \quad (3)$$

Как показали измерения на самолете [7], формула (3) справедлива до уровня образования кучевых облаков  $z_{обл}$ , т. е. до высоты в несколько километров. На этих высотах  $C_n$  на 2—3 порядка меньше, чем в приземном слое, поэтому мы, по-видимому, не сделаем большой ошибки, заменив  $z_{обл}$  на бесконечность. С учетом зависимости (3) формула (1) приобретает вид

$$\frac{\sigma_\varphi^2}{\sec \theta} = 2,8 b^{-1/3} z_1 3 C_n^2(z_1), \quad (4)$$

где  $z_1$  — высота, на которой установлен приемный объектив.

Уменьшение среднеквадратичных значений флюктуаций направления распространения при подъеме приемного объектива на большую высоту должно происходить, как это следует из формул (3) и (4), пропорционально  $z^{-1/6}$ .

Надежных данных об изменении  $C_n$  с высотой в условиях, отличных от конвективных, в литературе не имеется. Судя по отдельным измерениям, описанным в [7], в ночное время величина  $C_n$  меньше, чем днем, и достаточно быстро падает с высотой.

Самолетное зондирование до высоты 3 км, проводившееся несколько раз одновременно с измерениями флюктуаций угла прихода, показало справедливость зависимости (3) в условиях эксперимента. На рис. 1 приведена зависимость  $C_n^2$  от высоты для четырех полетов; величина  $C_n$  рассчитывалась по спектрам пульсаций температуры воздуха. Здесь же нанесено значение  $C_n^2$  на высоте 4 м (приемный объектив был установлен на высоте 3 м). Пунктиром проведена зависимость  $z^{-4/3}$ .

\*  $C_n$  — постоянная в «законе 2/3» Колмогорова—Обухова, примененном к пульсации коэффициента преломления  $n$ .

$$[n(r) - n(r - \rho)]^2 = C_n^2 \rho^{2/3}.$$

Этот закон справедлив в реальной атмосфере для масштабов турбулентности  $\rho$ , ответственных за флюктуации разности фаз в распространяющейся волне, в пределах применявшегося объектива.

На рис. 2 выполнено сравнение измеренных и рассчитанных по формуле (4) среднеквадратичных значений флуктуаций угла прихода, приведенных к нулевому зенитному углу. Из графика видно, что по сведениям о величине пульсаций показателя преломления на трассе

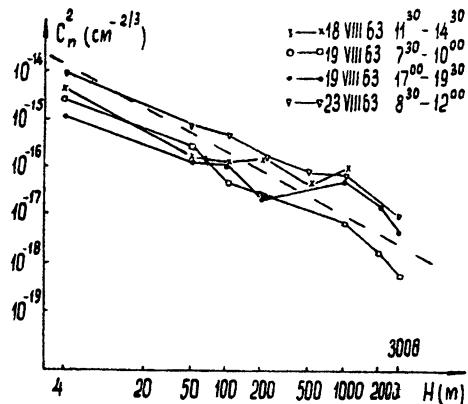


Рис. 1. Примеры зависимости структурной постоянной показателя преломления  $C_n$  от высоты по данным самолетных зондирований и наземным измерениям. Пунктиром проведена зависимость  $z^{-4/3}$ .

можно достаточно надежно рассчитать дисперсию флуктуаций направления распространения волны. Приведенная зависимость является экспериментальным подтверждением развитой в [2] теории распространения волн в среде с переменной интенсивностью турбулентности.

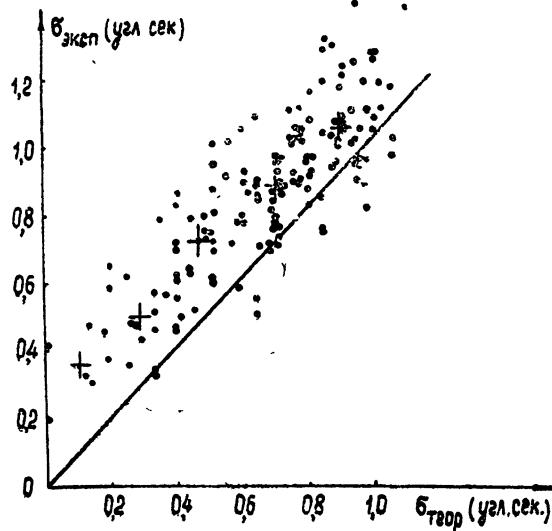


Рис. 2. Сопоставление расчетных значений среднеквадратичной величины флуктуаций направления распространения  $\sigma_\phi$  теор и измеренных значений  $\sigma_\phi$  эксп (все данные приведены к нулевому зенитному углу). Прямой отмечено полное совпадение, крестиками указаны средние значения  $\sigma_\phi$  эксп по 5 группам. Коэффициент корреляции  $r$  между  $\sigma_\phi$  эксп и  $\sigma_\phi$  теор равен 0,83.

Между частотным спектром флуктуаций  $W_\phi(f)$  и дисперсией  $\sigma_\phi^2$  существует следующая связь:  $\sigma_\phi^2 = \int W_\phi(f) df$ . Поскольку свойства  $\sigma_\phi^2$  — дисперсии флуктуаций направления распространения — уже рассмотрены,

для исследования распределения мощности флюктуаций по спектру, удобнее рассматривать спектры, нормированные на дисперсию:  $W(f)/\sigma_\varphi^2$ . Как показано в [8], для  $W(f)/\sigma_\varphi^2$  имеет место следующая формула:

$$W_\varphi(f)/\sigma_\varphi^2 = 0,045 \sin^2\left(\frac{\pi bf}{v_\perp}\right) \left(\frac{b}{v_\perp}\right)^{-5/3} f^{-8/3}, \quad (5)$$

где  $b$  — диаметр объектива,  $v_\perp$  — составляющая скорости ветра, перпендикулярная направлению распространения волн. Формула (5) получена путем применения гипотезы «замороженной» турбулентности к рассчитанным в [2] пространственным спектрам флюктуаций направления. При выводе (5) предполагалось, что  $v_\perp$  и интенсивность турбулентности неизменны на всей трассе распространения.

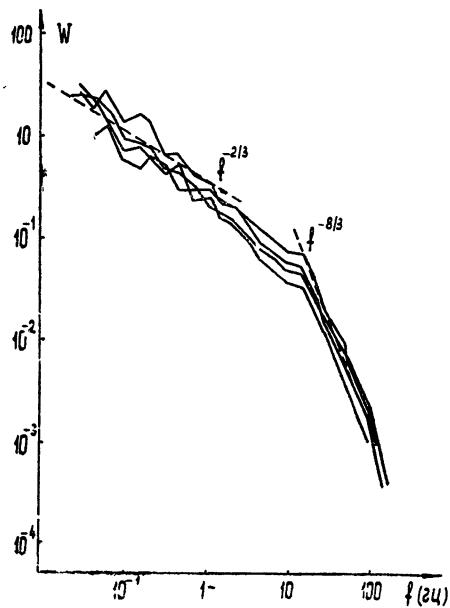


Рис. 3. Примеры частотных спектров флюктуаций направления распространения света. Пунктиром проведены асимптоты при больших и малых частотах.

Для ориентировочных расчетов спектров флюктуаций направления распространения на неоднородной трассе можно, по-видимому, использовать (5), взяв в качестве  $v_\perp$  значение соответствующей компоненты скорости в слое, где интенсивность турбулентности наибольшая. Рис. 3, на котором приведены примеры полученных спектров, подтверждает это предположение: на графике пунктиром нанесены асимптоты теоретического спектра (5) при низких частотах ( $W_\varphi(f) \sim f^{-2/3}$ ) и при высоких частотах ( $W_\varphi(f) \sim f^{-8/3}$ )\*.

Асимптотическое поведение измеренного спектра дает основание для более подробного анализа применимости (5) к полученным спектрам. Для этого удобнее пользоваться безразмерной функцией  $U_\varphi = f W_\varphi(f)/\sigma_\varphi^2$ , которая, как показано в [8], является универсальной функцией безразмерного параметра  $bf/v_\perp$ , пропорциональной мощности флюктуаций в полосе частот в одну октаву,

$$U_\varphi = 0,045 \sin^2\left(\frac{\pi bf}{v_\perp}\right) \left(\frac{bf}{v_\perp}\right)^{-5/3}. \quad (6)$$

\* Последнее получается, если учесть, что в силу непостоянства скорости ветра и сравнительно широкой полосы фильтров анализатора (каждый фильтр имеет полосу в полоктавы) значение  $\sin^2(\pi bf/v_\perp)$  на высоких частотах ( $f \gg b/v_\perp$ ) надо заменить на его среднее значение, равное  $1/2$ .

Значения  $U_\varphi(f)$  были построены для двух групп спектров (рис. 4), измеренных при сильно различающейся средней скорости ветра в нижнем 70-метровом слое (скорость и направление ветра определялись синхронно с основными измерениями на нескольких высотах на 70-метровой вышке, расположенной вблизи телескопа). В первую группу были отобраны, а затем усреднены 20 спектров флуктуаций направления распространения, измеренных при небольших зенитных углах Солнца и скоростях ветра  $v_\perp = 6 \div 8 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Во вторую группу были объединены 12 спектров, измеренных в утренние и вечерние часы при меньших скоростях ветра  $v_\perp = 2 \div 3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . В соответствии с формулой (6) спектр второй группы сдвинут в сторону более низких частот.

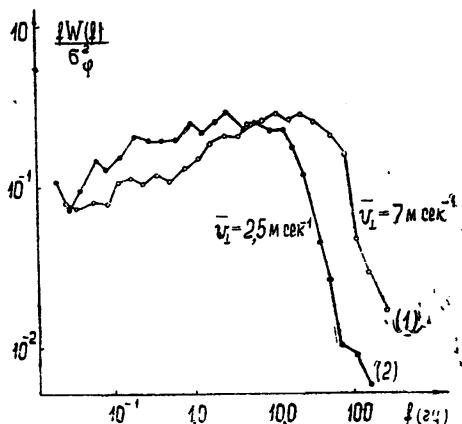


Рис. 4. Сравнение усредненных безразмерных частотных спектров флуктуаций направления, полученных при различной скорости ветра в нижнем 70-метровом слое атмосферы.

На рис. 5 спектры обеих групп и теоретический спектр, рассчитанный по формуле (6), приведены в безразмерных координатах  $\dot{U}_\varphi$  и  $bf/v_\perp$ . Высокочастотные части спектров, полученных при больших и при малых скоростях ветра, при этом хорошо совмещаются, т. е. теория вполне

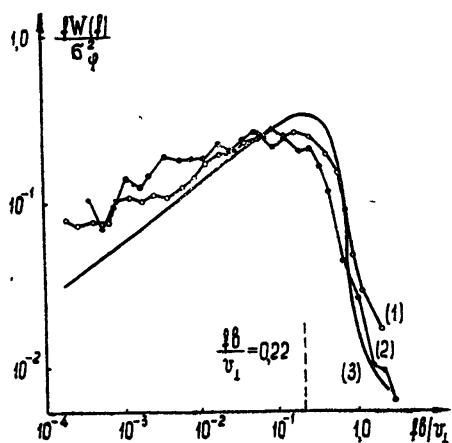


Рис. 5. Сравнение экспериментальных (1, 2) и теоретического (3) спектров в безразмерных координатах. Пунктиром показано положение максимума теоретического спектра  $fW(f)$ .

удовлетворительно описывает сдвиг частотного спектра с изменением средней скорости ветра и при неоднородной трассе. В области низких частот экспериментально полученные спектры имеют интенсивность флуктуаций несколько более высокую, чем теоретический спектр.

Из изложенного материала можно сделать следующие выводы.

1) Приведенные к зениту среднеквадратичные значения флуктуаций направления распространения световых волн, прошедших в летний день через атмосферу, в несколько раз превышают значения, наблюдаемые ночью по «дрожанию» звезд [1], достигая величины  $\sigma_\varphi = 1 \div 1'',5$ .

2) Оценка дисперсии флуктуаций направления распространения света может быть сделана путем расчета по формулам теории [2]; для этого необходимо знать средние значения и вертикальные градиенты температуры воздуха и скорости ветра в приземном слое атмосферы.

3) Форма частотного спектра флуктуаций направления распространения света, прошедшего через всю толщу атмосферы, удовлетворительно согласуется с теоретической, рассчитанной для однородной трассы, при условии, что в качестве скорости ветра при расчете берется средняя скорость ветра в нижнем слое атмосферы толщиной в несколько десятков метров.

В заключение приятно выразить глубокую благодарность А. С. Гурвичу и В. И. Татарскому за постоянное внимание к работе, ценные указания и замечания, а также механику М. А. Воробьеву за участие в наладке следящей системы и в измерениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Колчинский, Астрон. ж., 29, 350 (1952).
2. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
3. В. М. Бовшеверов, А. С. Гурвич, М. А. Калистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 886 (1961).
4. В. М. Бовшеверов, М. А. Калистратова, Астрон. ж., 41, 550 (1964).
5. Л. Р. Цванг, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1674 (1960).
6. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1392 (1960).
7. Л. Р. Цванг, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1594 (1963).
8. Г. С. Голицын, А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Акуст. ж., 6, 187 (1960).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
29 июля 1965 г.

#### ANGLE OF ARRIVAL FLUCTUATIONS OF LIGHT WAVES IN A NONUNIFORM TURBULENT MEDIUM

*M. A. Kalistratova*

Angle of arrival fluctuations caused by the atmospheric turbulence in light waves from a solar disk edge has been investigated. The power spectrum of the fluctuations has been obtained as well as their dependence on meteorological conditions in near the earth layer of the atmosphere in the neighbourhood of the telescope. The measurement results are in good agreement with the calculation data and confirm the theory of wave propagation in the medium with the variable intensity of the turbulence developed in [2].

УДК 535.3 : 551.51

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*М. Е. Грачева, А. С. Лежен*

Экспериментально исследованы флюктуации интенсивности света, распространяющегося в приземном слое атмосферы вдоль неоднородной (наклонной) трассы с переменными характеристиками турбулентности. Получено удовлетворительное согласие с основными выводами теории в условиях свободной конвекции для случая, когда источник света расположен вблизи земной поверхности, а приемник поднят на высоту 70 м.

Турбулентное состояние атмосферы, вызывающее флюктуации коэффициента преломления, приводит к флюктуациям интенсивности, фазы и других параметров распространяющихся волн. В реальной атмосфере флюктуации коэффициента преломления [1] подчинены «закону 2/3»

$$D_n(r) = \overline{[n(\rho) - n(\rho + r)]^2} = C_n^2 r^{2/3} \quad (l_0 \ll r \ll L_0),$$

где  $D_n(r)$  — структурная функция коэффициента преломления  $n$  атмосферы,  $\rho$  — радиус-вектор одной из точек наблюдения,  $\rho + r$  — радиус-вектор другой точки наблюдения, отстоящей от первой на расстояние  $r$ ,  $l_0$  — внутренний,  $L_0$  — внешний масштабы турбулентности. При этом средний квадрат флюктуаций логарифма интенсивности плоской монохроматической волны

$$\sigma^2 = 2,24 k^{7/6} \int_0^L C_n^2 x^{5/6} dx, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $L$  — расстояние, проходимое волной в турбулентной атмосфере.

Интегрирование в (1) ведется вдоль луча в направлении от приемника к источнику. В случае, когда турбулентный режим атмосферы одинаков на всем пути распространения волны (однородная трасса),  $C_n^2$  неизменна вдоль всей трассы и носит название структурной постоянной. Тогда формула (1) приобретает вид

$$\sigma_0^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (2)$$

В приземном слое турбулентный режим атмосферы, однако, не является однородным, а величина  $C_n^2$  есть плавная функция координат, существенно изменяющаяся лишь на расстояниях порядка  $L_0$  [1]. Зависимость  $C_n^2$  от высоты  $z$  над землей может быть представлена в виде

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_h) (z/z_h)^{-\alpha},$$

где  $z_h$  — некоторый фиксированный уровень,  $\alpha$  показатель  $\alpha$  равен 2/3 для режима динамической турбулентности [1] и 4/3 для свободной конвекции [2, 3].

Таким образом, если в приземном слое атмосферы световая волна распространяется не горизонтально, а под некоторым углом к земной

поверхности ( $x = z \sec \Theta$ , где  $\Theta$  — зенитный угол луча), то, как следует из (1), величина флуктуаций логарифма интенсивности света  $\sigma^2$  будет зависеть не только от расстояния  $L$ , проходимого световой волной, но и от стратификации турбулентного режима атмосферы и взаимного расположения источника света и приемника. Для случая, когда приемник находится вблизи земной поверхности, а источник поднят на некоторую высоту  $z$ , подынтегральная функция в (1) является произведением возрастающей  $(z \sec \Theta)^{5/6}$  и убывающей  $C_n^2(z)$  функций. В случае, когда источник расположен внизу, а приемник вверху, интегрируется произведение двух возрастающих функций. Очевидно, что значение интеграла (1) во втором случае ( $\sigma_{\downarrow}^{2+}$ ) будет больше, чем в первом ( $\sigma_{\downarrow}^{2+}$ ). Другими словами, при распространении света вдоль наклонной трассы в приземном слое атмосферы мерцание источника, находящегося вблизи земли, будет больше, чем мерцание того же источника, поднятого вверх при прочих равных условиях\*.

С помощью формулы (1) авторами были рассчитаны средние квадраты флуктуаций логарифма интенсивности света для двух различных случаев расположения источника света и приемника: в первом случае источник помещается на высоте 1 м над земной поверхностью, приемник поднят на 70-метровую вышку; во втором случае источник и приемник меняются местами. Длина наклонной трассы  $L$  и зенитный угол  $\Theta$  приемника (источника) равны соответственно 600 м и 84°. Полученные значения  $\sigma_{\downarrow}^{2+}$  и  $\sigma_{\downarrow}^{2+}$  нормировались на величину  $\sigma_0^2$ , вычисленную по формуле (2) для горизонтальной трассы, проходящей на высоте  $z = 1$  м над землей. На рис. 1 представлены графики зависимости  $\sigma_{\downarrow}^{2+}/\sigma_0^2$  и  $\sigma_{\downarrow}^{2+}/\sigma_0^2$ , а также отношения  $\sigma_{\downarrow}^{2+}/\sigma_{\downarrow}^{2+}$  от  $\alpha$  (в полулогарифмическом масштабе). Из рассмотрения этих графиков следует, что с увеличением  $\alpha$  отношение  $\sigma_{\downarrow}^{2+}/\sigma_{\downarrow}^{2+}$  растет. Это означает, что наиболее резкий «контраст» значений  $\sigma_{\downarrow}^{2+}$  и  $\sigma_{\downarrow}^{2+}$  достигается при неустойчивой стратификации атмосферы в условиях свободной конвекции.

Цель эксперимента заключалась в исследовании мерцания при распространении света вдоль наклонной трассы для случая, когда источник расположен вблизи земной поверхности ( $z = 1$  м), а приемник поднят на 70-метровую вышку, поскольку именно этот случай представляет наибольший интерес.

Измерения проводились летом 1964 года на научной станции ИФА АН СССР над участком степи с ровным рельефом. Приемная аппаратура аналогична описанной в работе [4]. Для того, чтобы можно было сравнивать значения средних квадратов флуктуаций логарифма интенсивности света  $\sigma_{\downarrow}^{2+}$ , полученные в разные дни, т. е. при различных метеорологических условиях, измерения мерцаний сопровождались измерениями средних профилей температуры  $\bar{T}(z)$  и скорости ветра  $\bar{U}(z)$  в приземном слое атмосферы. Как показано в работе [1], структурная

\* Полученный результат не противоречит теореме взаимности. Действительно, в качестве источника плоской волны, падающей на одну границу плоского слоя толщиной  $L$ , можно рассматривать точечный источник, находящийся на расстоянии  $L_1$  от слоя, причем  $L_1 \gg L$ , поскольку мы рассматриваем поле на другой границе. Для определения интенсивности флуктуаций можно применить теорему взаимности при такой перестановке приемника и источника, когда точечный источник помещается на границу слоя, где находился ранее приемник, и соответственно перемещается точка наблюдения. При расчетах  $\sigma_{\downarrow}^{2+}$  и  $\sigma_{\downarrow}^{2+}$  по формуле (1) такой «перестановки» не производилось, так как в обоих случаях принималось, что на границу слоя падает плоская волна. Если взять точечный источник и поместить его на границу слоя, то расчет приводит к равенству  $\sigma_{\downarrow}^{2+} = \sigma_{\downarrow}^{2+}$  в соответствии с теоремой взаимности.

постоянная  $C_n^2$  для однородной трассы в приземном слое связана с профилями температуры  $\bar{T}(z)$ . Используя эту связь, по измеренным профилям  $\bar{T}(z)$  рассчитывалась величина  $C_n^2$  на уровне 1 м над землей и  $\sigma_0^2$  по формуле (2) для горизонтальной однородной трассы. Полученные значения  $\sigma_0^2$  использовались как нормировочные коэффициенты для соответствующих значений  $\sigma_*^{2\dagger}$ , что аналогично приведению  $\sigma_*^{2\dagger}$  к одинаковым метеорологическим условиям.

По данным градиентных измерений вычислялись также числа Ричардсона  $Ri$  для  $z = 1$  м, характеризующие турбулентный режим атмосферы [1]:

$$Ri = \frac{g}{T_0} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^{-1},$$

где  $\bar{T}(z)$  и  $\bar{U}(z)$  — средние профили температуры и скорости ветра,  $T_0$  — средняя температура воздуха в приземном слое,  $g = 9,8 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ . Методика вычислений  $C_n^2$  и  $Ri$  описана в работе [4].

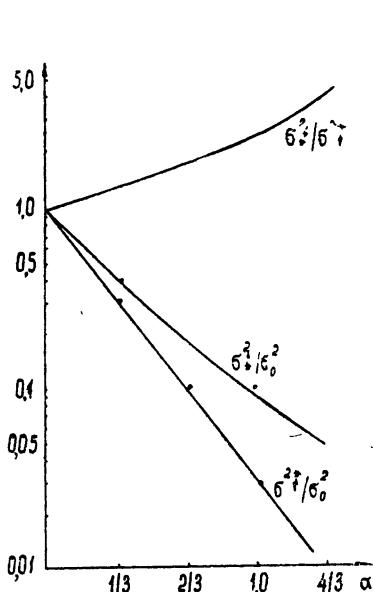


Рис. 1. Зависимость рассчитанных по формуле (1) нормированных отношений  $\sigma_*^{2\dagger}/\sigma_0^2$  (источник внизу) и  $\sigma_*^{2\dagger}/\sigma_0^2$  (источник вверху), а также величины  $\sigma_*^{2\dagger}/\sigma_*^{2\dagger}$  от показателя  $\alpha$ , характеризующего режим турбулентности.

На рис. 2 представлен график, на который нанесены экспериментально полученные значения  $\sigma_*^{2\dagger}$  для наклонной трассы, нормированные на  $\sigma_0^2$  для однородной трассы ( $\sigma_*^{2\dagger}/\sigma_0^2$ ) в зависимости от чисел Ричардсона  $Ri$ . Как показано в работах [5, 6], при значениях  $Ri \approx 0,05 \div 0,08$  в приземном слое атмосферы имеет место переход от режима динамической турбулентности к режиму свободной конвекции. Поэтому представляется возможным сравнить рис. 2 и рис. 1. Из сравнения этих графиков следует, что в условиях свободной конвекции измеренные

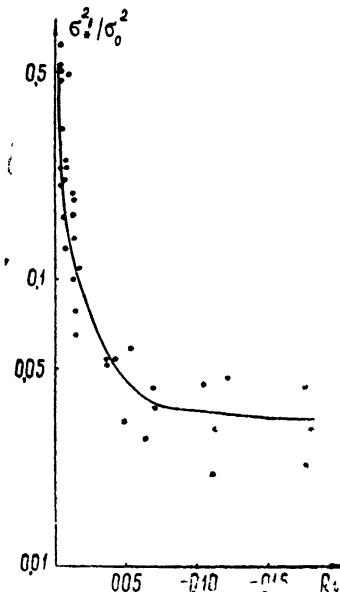


Рис. 2. Зависимость экспериментальных значений  $\sigma_*^{2\dagger}/\sigma_0^2$  от чисел Ричардсона  $Ri$ , характеризующих турбулентный режим.

нормированные отношения  $\sigma_*^{2\dagger}/\sigma_0^2$  близки к расчетным ( $\sigma_*^{2\dagger}/\sigma_0^2 \approx 0,04$ ). Таким образом, экспериментальные данные находятся в удовлетворительном согласии с основными выводами теории.

В заключение авторы выражают глубокую признательность В. И. Татарскому и А. С. Гурвичу за руководство и ценные советы при подготовке и проведении эксперимента, а также приносят благодарность всем сотрудникам ИФА, которые принимали участие в измерениях и обработке экспериментальных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1392 (1960).
3. Л. Р. Цванг, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1594 (1963).
4. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 717 (1965).
5. А. В. Перепелкина, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1026 (1959).
6. C. H. B. Priestly, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 81, 139 (1955).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
31 мая 1965 г.

#### LIGHT INTENSITY FLUCTUATIONS WHEN PROPAGATING IN A MEDIUM WITH VARIABLE TURBULENT CHARACTERISTICS

*M. E. Grachova, A. S. Lezhen*

The intensity fluctuations have been experimentally investigated of the light, propagating along the nonuniform oblique trajectory near the earth atmospheric layer with the variable turbulent characteristics. The satisfactory agreement has been obtained with the main conclusions of the theory under the conditions of the free convection for the case when the light source is placed in the vicinity of the earth surface and the receiver is elevated up to 70 m height.

УДК 535.36

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ УЗКОГО ПУЧКА СВЕТА В СРЕДЕ С СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫМ РАССЕЯНИЕМ

Л. С. Долин

Рассматривается задача о распространении первоначально узкого направленного пучка света в мутной среде с сильно вытянутой индикатрицей рассеяния. Исходя из уравнения переноса в приближении малых углов, рассчитана зависимость освещенности на оси пучка, дисперсии угла прихода лучей и эффективного сечения пучка от оптического пути, начальных характеристик пучка и угловой ширины индикатрисы рассеяния.

Исследование структуры светового пучка в среде с сильно анизотропным рассеянием представляет интерес для целого ряда задач атмосферной оптики (рассеяние на аэрозоле и тумане), спектроскопии светорассеивающих сред, гидрооптики и т. д. Большинство работ, посвященных этому вопросу, выполнено в приближении малократного рассеяния [1,2] или относится к бесконечно широким пучкам [3-6], где вопрос о пространственной деформации пучка не возникает. Однако в некоторых случаях (например, при расчете видимости удаленных объектов в мутной среде в условиях искусственного освещения) возникает необходимость в решении более общей задачи — исследовании угловой и пространственной структуры узкого направленного пучка с учетом многократного рассеяния.

Ниже проводится расчет некоторых интегральных характеристик такого пучка (аксиального распределения освещенности, дисперсии угла прихода лучей на оси пучка, эффективного сечения пучка), основанный на решении уравнения переноса в приближении малых углов.

### 1. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В приближении геометрической оптики поле светового пучка описывается хорошо известным уравнением переноса [7,8]

$$\mathbf{n} \nabla_r J(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -\varepsilon J(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + \sigma \int_{4\pi} J(\mathbf{r}, \mathbf{n}') x(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi} + Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}), \quad (1)$$

здесь  $J$  — лучевая интенсивность поля,  $x(\gamma)$  — индикатриса рассеяния ( $\gamma = (\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}')$ ,  $\int_{4\pi} x(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi} = 1$ ,  $d\omega$  — элемент телесного угла),  $\varepsilon$  — показатель ослабления,  $\sigma = \lambda \varepsilon$  — показатель рассеяния,  $\lambda$  — вероятность выживания кванта,  $\varepsilon - \sigma = k$  — показатель истинного поглощения,  $Q(\mathbf{r}, \mathbf{n})$  — источники излучения.

Будем предполагать, что функция  $x(\gamma)$  отлична от нуля лишь в интервале углов  $0 < \gamma < \gamma_0 \ll 1$ , а интенсивность светового поля пренебрежимо мала всюду, за исключением небольшого телесного угла около направления оси пучка. При этих условиях интересующие нас характеристики пучка, вообще говоря, можно найти, используя известное ре-

шение уравнения (1) в приближении малых углов [9]. Однако соответствующие расчеты сопряжены со значительными трудностями вычислительного характера.

Более простое (хотя и менее строгое) решение задачи удается получить, исходя из диффузационного уравнения

$$LJ(r, n) = \left( n \nabla_r - \frac{1}{4} \sigma \bar{\gamma}^2 \Delta_n + k \right) J(r, n) = Q(r, n), \quad (2)$$

$$\bar{\gamma}^2 = \int_{4\pi} \gamma^2 x(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi}$$

( $\Delta_n$  — оператор Лапласа, действующий в пространстве угловых координат единичного вектора  $n$ ,  $\bar{\gamma}^2$  — дисперсия угла отклонения луча при элементарном акте рассеяния). Как известно, это уравнение выводится из уравнения (1) в предположении, что  $J(r, n)$  есть медленная (в масштабе угловой ширины индикатрисы) функция угловых координат вектора  $n$ . Поэтому его целесообразно использовать только для нахождения рассеянного поля  $J^s$ , а нерассеянную компоненту  $J^0$  необходимо определять непосредственно из уравнения переноса. Таким образом, задача сводится к последовательному решению двух уравнений:

$$n \nabla_r J^0 = -\varepsilon J^0 + Q, \quad (3)$$

$$LJ^s = Q^s, \quad Q^s = \sigma \int_{4\pi} J^0(r, n') x(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (4)$$

Пользуясь тем, что угловая расходимость пучка предполагается малой, положим  $n \nabla_r \simeq \frac{\partial}{\partial z} + n_\perp \nabla_{r_\perp}$ ,  $\Delta_n \simeq (\nabla_{n_\perp})^2$  ( $r_\perp$ ,  $n_\perp$  — проекции векторов  $r$  и  $n$  на плоскость  $z = 0$ , нормальную к оси пучка); индикатрису рассеяния в выражении для источников рассеянного поля  $Q^s$  будем аппроксимировать гауссовой функцией с таким же, как у  $x(\gamma)$ , интегральным параметром  $\bar{\gamma}^2$ . Тогда из (3), (4) получим

$$J^{0,s}(r_\perp, z, n_\perp) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F^{0,s}(k, z, p) \exp[-i(k r_\perp + p n_\perp)] d^2 k d^2 p, \quad (5)$$

$$F^0(k, z, p) = F_0(k, p+k z) \exp(-\varepsilon z), \quad (6)$$

$$F^s(k, z, p) = \sigma F_0(k, p+k z) \exp\left(-\varepsilon z - \frac{1}{4} \bar{\gamma}^2 p^2\right) \times \\ \times \int_0^z \exp\left(\sigma \zeta - \frac{1}{4} \sigma \bar{\gamma}^2 \int_0^\zeta |p + k \xi|^2 d\xi\right) d\zeta, \quad (7)$$

где  $F_0(k, p)$  — спектр интенсивности  $J(r_\perp, 0, n_\perp)$  на выходе излучателя.

Как будет показано ниже на частном примере, уравнения (1) и (3), (4) приводят к близким значениям интегральных параметров пучка.

В то же время использование формул (5) — (7) для расчета детальной структуры поля может привести к существенным ошибкам, особенно на начальном участке пучка.

## 2. ОСЛАБЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУЧКА

Исходя из соотношений (5)–(7), рассчитаем коэффициент передачи энергии  $\eta$  вдоль оси пучка в предположении, что приемник перехватывает все рассеянное излучение, попадающее на его апертуру (т. е. угол поля зрения приемного устройства велик по сравнению со среднеквадратичным отклонением лучей от аксиального направления). Для приемника с плоской апертурой мощность принимаемого сигнала  $P$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^2 n_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} \sum(r_{\perp}) J(r_{\perp}, z, n_{\perp}) d^2 r_{\perp} = \\ &= (2\pi)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_s(k) F(k, z, 0) d^2 k, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\sum(r_{\perp})$  — коэффициент прозрачности апертуры,  $F = F^0 + F^s$ ,  $\sum_s(k)$  — спектр  $\sum(r_{\perp})$ .

Чтобы не усложнять вычислений, мы ограничимся рассмотрением простейшей в математическом отношении модели. Начальное распределение интенсивности в пучке и коэффициент прозрачности апертуры будем задавать в виде

$$J(r_{\perp}, 0, n_{\perp}) = \frac{P_0}{\omega S} \exp \left( -\frac{\pi \theta^2}{\omega} - \frac{\pi r_{\perp}^2}{S} \right), \quad (9)$$

$$\sum(r_{\perp}) = \exp \left( -\frac{\pi r_{\perp}^2}{\Sigma_0} \right), \quad (10)$$

где  $P_0$  — мощность пучка,  $S$  и  $\omega$  — параметры, характеризующие его сечение и начальную расходимость,  $\Sigma_0$  — эффективная апертура приемного устройства,  $r_{\perp} = |r_{\perp}|$ ,  $\theta = |n_{\perp}|$ . Тогда из (6)–(10) получим

$$\eta(z) = \frac{P}{P_0} = \frac{C_{\Sigma} e^{-\tau}}{C_{\Sigma,s} + 3\beta \tau_{\sigma}^2} \left[ 1 + \int_0^{\tau_{\sigma}} e^t dt \left( 1 + \frac{3t^2 + t^3}{C_{\Sigma,s} + 3\beta \tau_{\sigma}^2} \right)^{-1} \right], \quad (11)$$

$$\tau_{\sigma} = \sigma z, \quad \tau = \varepsilon z, \quad C_{\Sigma,s} = C_{\Sigma} + C_s = \frac{\sigma^2 (\Sigma_0 + S)}{(\pi/3) \bar{\gamma}^2},$$

$$\beta = \omega / \pi \bar{\gamma}^2.$$

Зависимость  $\eta = \eta(z)$  для пучков с нулевой начальной расходимостью ( $\omega = 0$ ) иллюстрируется семейством кривых, изображенных на рис. 1 (сплошные линии). Здесь же пунктиром изображены аналогичные кривые, полученные в приближении малых углов непосредственно из уравнения переноса [10] при  $x(\gamma) = 2\delta^{-2} \exp(-\gamma\delta^{-1})$ . Хорошее совпадение обоих семейств кривых указывает на весьма высокую точность используемого при выводе (11) диффузационного описания и, следовательно, на универсальный характер зависимости  $\eta(z)$  в средах с различными (в пределах неравенства  $\bar{\gamma}^2 \ll 1$ ) индикатрисами.

На рис. 2 для тех же значений параметра  $C_{\Sigma,s}$  показано аксиальное распределение коэффициента передачи  $\eta^s = P^s/P_0$  (толстые сплошные линии), соответствующего рассеянному полю. Тонкими сплошными линиями изображена зависимость  $\eta^s = \eta^s(z)$ , рассчитанная в приближении однократного рассеяния.

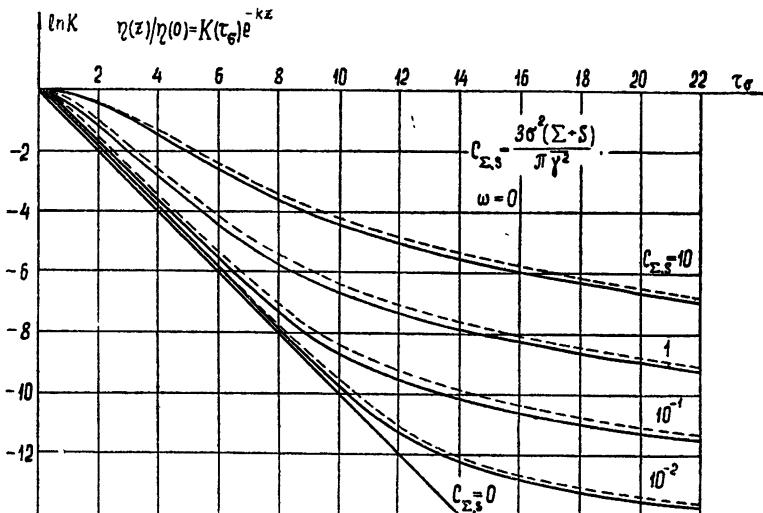


Рис. 1.

Заметим, что поскольку освещенность на оси пучка в приближении малых углов равна  $E(z) = \lim_{\Sigma_0 \rightarrow 0} P(z) / \Sigma_0$ , кривые рис. 1, 2 показывают также аксиальное распределение освещенности в пучках с нулевой начальной расходностью.

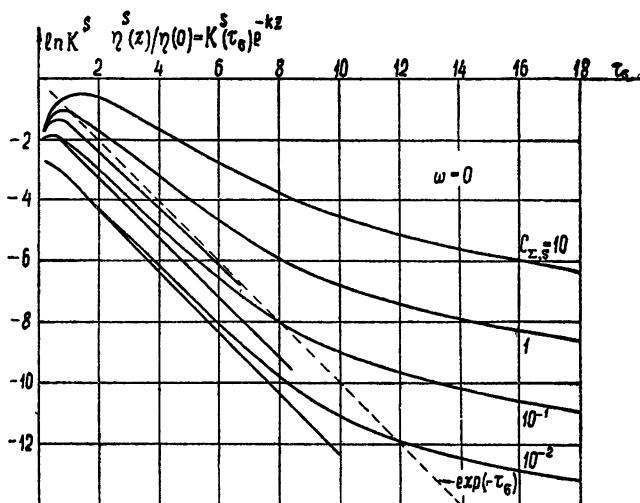


Рис. 2.

Изменение освещенности в пучках с конечной начальной расходностью показано на рис. 3 для случая  $S = 0$ . Кривые этого рисунка от-

личаются от аналогичных кривых рис. 1 в основном поведением при малых  $\tau_s$ , где интенсивности рассеянной и нерассеянной компонент поля изменяются соответственно как  $1/\tau_s$  и  $1/\tau_s^2$ .

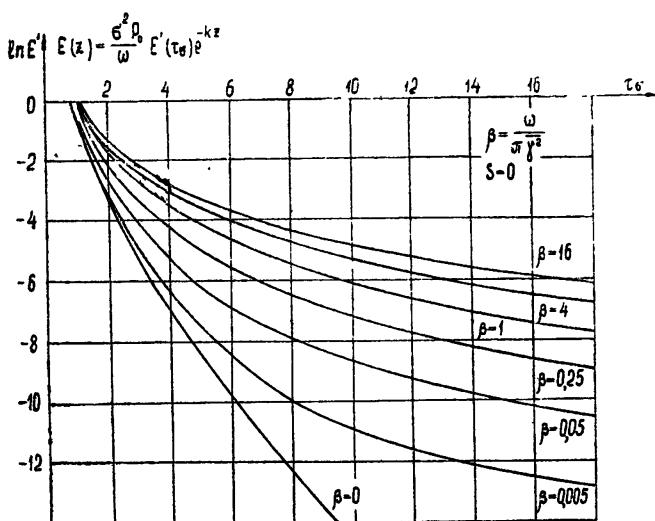


Рис. 3.

Как видно из формулы (11) и рис. 1, 2, по характеру зависимости  $E = E(z)$  узкий пучок ( $C_s < 1$ ) можно разбить на несколько качественно различных зон. В области  $0 < \tau_s < \sqrt{C_s/2}$  ( $0 < z < \sqrt{S/2\gamma^2}$ ), где прямой и рассеянный световые потоки еще пространственно не разделены, наблюдается быстрый рост интенсивности рассеянного света и сравнительно медленное ослабление суммарной освещенности:

$$E(z) \simeq E(0) \exp(-kz) (1 + \tau_s^3/C_s)^{-1}.$$

При  $\sqrt{C_s/2} < \tau_s < 3 \ln \tau_s - \ln C_s$  рассеянное излучение в основном уходит из пучка, благодаря чему освещенность убывает по закону Бугера (в качестве верхней границы бугеровской зоны мы условно приняли оптическое расстояние, на котором сравниваются освещенности рассеянным и нерассеянным светом). Наконец, при  $\tau_s > 3 \ln \tau_s - \ln C_s$  рассеянное поле преобладает, и освещенность убывает по тому же закону, что и на начальном участке пучка. Как видно из рис. 2, в первой и частично во второй зонах основной вклад в компоненту освещенности  $E^s$  дает однократное рассеяние. В конце второй зоны начинает сказываться рассеяние более высокой кратности, которое обеспечивает подкачуку энергии из периферийной области пучка и приводит к нарушению бугеровского закона ослабления.

### 3. УГОЛОВАЯ РАСХОДИМОСТЬ ПУЧКА

В качестве параметра, характеризующего угловую расходимость пучка, мы будем использовать средний квадрат угла отклонения лучей от аксиального направления (дисперсию угла прихода)

$$\bar{\theta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |n_\perp|^2 J(0, z, n_\perp) d^2 n_\perp / \int_{-\infty}^{\infty} J(0, z, n_\perp) d^2 n_\perp. \quad (12)$$

Используя соотношения (5) — (7), (12), можно получить для величины  $\bar{\theta}^2$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^2 &= - \iint_{-\infty}^{\infty} [\Delta_p F(\mathbf{k}, z, p)]_{p=0} d^2 \mathbf{k} / \iint_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}, z, 0) d^2 \mathbf{k} = \\ &= \left[ \frac{\omega}{\pi} \left( 1 + \frac{3\beta\tau_s^2}{C_s} \right)^{-2} + \bar{\gamma}^2 C_s \int_0^{\tau_s} \frac{(C_s + 3\beta\tau_s^2)(1 + \beta + t) - 3\beta(1 + \beta)t^2 + (1 - 2\beta)t^3 + t^4/4}{(C_s + 3\beta\tau_s^2 + 3t^2 + t^3)^2} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^t dt \right] \left[ \left( 1 + \frac{3\beta\tau_s^2}{C_s} \right)^{-1} + C_s \int_0^{\tau_s} \frac{e^t dt}{C_s + 3\beta\tau_s^2 + 3t^2 + t^3} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим некоторые предельные и частные случаи (13).

1)  $\sigma = 0$ ; тогда

$$\bar{\theta}^2 = \frac{\omega/\pi}{1 + \omega z^2/S};$$

2)  $S \rightarrow \infty$ ; при этом

$$\bar{\theta}^2 = \frac{\omega}{\pi} + \bar{\gamma}^2 \tau_s; \quad (14)$$

3)  $\tau_s \rightarrow \infty$ ,  $S$  — конечно; здесь

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{4} \bar{\gamma}^2 \tau_s; \quad (15)$$

4)  $\omega = 0$ ,  $S$  — конечно; результаты расчета по формуле (13) приведены в виде графиков на рис. 4 (сплошные линии);

5)  $S = 0$ ,  $\omega$  — конечно; соответствующие кривые изображены на рис. 5 (сплошные линии).

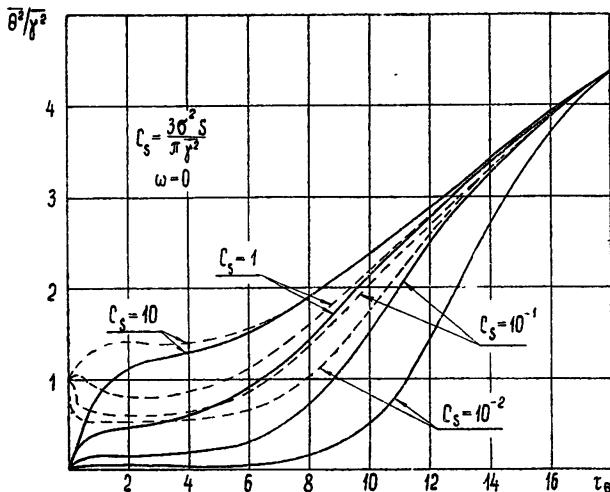


Рис. 4.

Пунктирными линиями на рис. 4, 5 показано аксиальное распределение дисперсии угла прихода  $(\bar{\theta}^2)^s$  для рассеянного поля (в формулу (12) вместо  $J(0, z, \mathbf{n}_\perp)$  подставляется  $J^s(0, z, \mathbf{n}_\perp)$ ). Соотношения (14), (15) известны [11, 9]. Поясним ход кривых на рис. 4, 5.

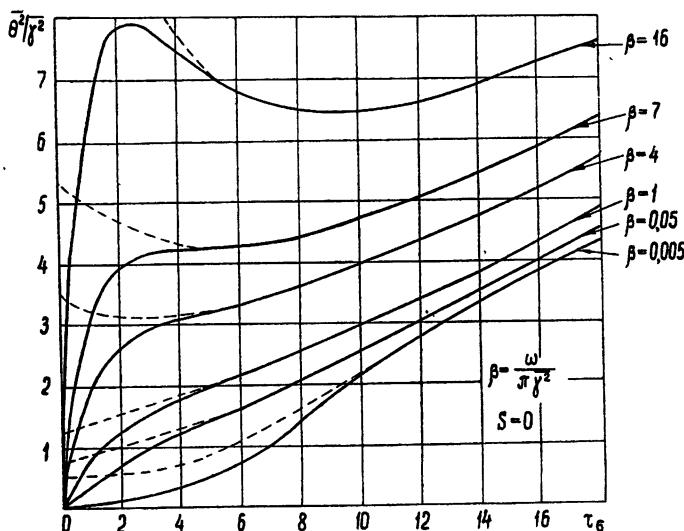


Рис. 5.

Из рис. 4 нетрудно видеть, что на начальном участке пучка с нулевой начальной расходимостью ( $\omega = 0$ ,  $\tau_s < \sqrt{C_s/2}$ ) дисперсия угла прихода изменяется в соответствии с формулой (14), т. е. таким же образом, как в бесконечно широком пучке. При  $\tau_s > \sqrt{C_s/2}$  имеется область, где величина  $\bar{\theta}^2$  практически сохраняется или меняется сравнительно медленно. Эта область четко выражена в узких пучках ( $C_s < 1$ ) и отсутствует в достаточно широких. Как показывает сравнение рис. 2 и 4, ее верхней границей служит граница области однократного рассеяния. При дальнейшем увеличении  $\tau_s$ , по мере того как начинает сказываться рассеяние более высокой кратности, величина  $\bar{\theta}^2$  быстро растет; асимптотически все кривые рис. 4 приближаются к прямой (15).

Кривые рис. 5 и пунктирные кривые рис. 4, относящиеся к рассеянному полю, отличаются характерными минимумами. Для узких пучков с нулевой начальной расходимостью величина  $(\bar{\theta}^2)^s$  оказывается даже меньше, чем  $\gamma^2$  (при  $C_s \rightarrow 0$  имеем  $(\bar{\theta}^2)^s \rightarrow \gamma^2/2$ ). Появление этих минимумов объясняется, по-видимому, тем, что на начальном участке пучка преимущественный вклад в рассеянное поле дает однократное рассеяние в небольшом объеме среды вблизи источника; по мере удаления от источника угловой размер этого объема (светящегося однократно рассеянным светом) уменьшается, что и приводит к сужению углового спектра интенсивности в точке наблюдения.

Полученные выше результаты относятся лишь к той части пучка, где выполняется условие  $\bar{\theta}^2 \ll 1$ . При достаточном удалении от источника это условие в общем случае нарушается и, следовательно, приближение малых углов становится непригодным. Исключение составляет случай, когда параметр  $\lambda$  мал (поглощение велико). При малых  $\lambda$  угло-

вое распределение интенсивности остается сильно анизотропным всюду, и поэтому оказывается возможным после соответствующего уточнения использовать приближение малых углов при любых  $\tau_\sigma$ . Уточнение должно состоять, по крайней мере, в более точной аппроксимации оператора  $(n\nabla_r)$  в уравнении (2).

В настоящей работе мы не ставим своей задачей получить аналитическое продолжение решения (13) в область больших  $\tau$  и ограничимся вычислением асимптотического значения величины  $\bar{\theta}^2$ .

Известно, что в бесконечно широком пучке при достаточно больших  $\tau$  устанавливается стационарное угловое распределение интенсивности (глубинный режим). Аналогичная ситуация имеет место и в ограниченном пучке. В самом деле, когда пучок расширится до размеров, существенно превышающих величину  $1/\varepsilon$ , влияние краев на поле в приаксиальной области будет пренебрежимо малым, и в этой области установится такое же стационарное распределение, как в бесконечно широком пучке.

Приближенный вид этого распределения можно найти, если в однородном диффузационном уравнении положить  $(n\nabla_r) \simeq \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\Delta_n = (\nabla_{n_\perp})^2$  и искать решение типа  $\exp(-\alpha z) D(\theta)$  с наименьшим значением  $\alpha$ . В результате получим

$$\alpha = k \left(1 - \frac{1}{2} \bar{\theta}^2\right)^{-1}, \quad D(\theta) \sim \exp\left(\frac{-\theta^2}{\bar{\theta}^2}\right), \quad (16)$$

$$\bar{\theta}^2 = \left(\frac{2\lambda\bar{\gamma}^2}{1-\lambda}\right)^{1/2}.$$

Положение границы области глубинного режима  $(\tau_\sigma)_{r6}$  можно оценить, находя точку пересечения прямых (15) и (16). Такая оценка дает

$$(\tau_\sigma)_{r6} \geqslant 4 \left[ \frac{2\lambda}{\bar{\gamma}^2(1-\lambda)} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

Заметим, что величина  $\bar{\theta}^2$  характеризует угловое распределение интенсивности на входе приемника, апертура которого мала по сравнению с поперечным размером пучка. Если же размер апертуры соизмерим с шириной пучка (или превышает ее), то угловое распределение интенсивности принимаемого сигнала

$$J_z(z, n_\perp) = \iint_{-\infty}^{\infty} \sum (r_\perp) J(r_\perp, z, n_\perp) d^2 r_\perp$$

будет отличаться от тела яркости на оси пучка. Как легко убедиться, момент второго порядка, соответствующий этому распределению (в соотношение (12) вместо  $J(0, z, n_\perp)$  подставляется  $J_z(z, n_\perp)$ ), получается из (13) путем замены  $C_s \rightarrow C_s + C_z$ . В результате этот момент совпадает с дисперсией угла прихода  $\bar{\theta}^2$  на оси пучка с начальным сечением  $S + \Sigma_0$ .

#### 4. ЭФФЕКТИВНОЕ СЕЧЕНИЕ ПУЧКА

В качестве эффективного сечения пучка  $S_{\text{эфф}}(z)$  естественно принять площадь на поверхности  $z = \text{const}$ , определяемую условием  $|r_{\perp}| \leq \sqrt{S_{\text{эфф}}/\pi}$ ; через эту площадь переносится заданная доля ( $q$ ) полной мощности пучка в сечении  $z = \text{const}$ .

Величина  $S_{\text{эфф}}$  может быть легко найдена в приближении малых углов. Для этого достаточно разрешить относительно  $\Sigma_0$  уравнение

$$P(\Sigma_0, z) = qP(\infty, z) \quad (q < 1), \quad (18)$$

используя для  $P(\Sigma_0, z)$  выражение (11).

Если положить в (11)  $S = 0$ ,  $\omega = 0$ ,

$$C_z \gg 3\tau_z^2 + \tau_z^3, \quad (19)$$

то, как легко убедиться,

$$P(\Sigma_0, z) = P(\infty, z) (1 - \tau_z^3/C_z). \quad (20)$$

Учитывая далее (18), получим для  $S_{\text{эфф}}$  следующее выражение\*:

$$S_{\text{эфф}}(z) = \frac{\pi}{3} \frac{\sigma z^3}{\gamma^2} \frac{1-q}{1-q}. \quad (21)$$

Формула (21) применима в весьма ограниченном интервале оптических толщин  $(3(1-q)/q \ll \tau_z \ll 1/\gamma^2)$ ; нижняя граница этого интервала определяется неравенством (19), а верхняя — условием малости дисперсии угла прихода лучей, усредненной по сечению пучка.

В области глубинного режима зависимость  $S_{\text{эфф}} = S_{\text{эфф}}(z)$  можно найти с помощью теоремы оптической взаимности [8]. Поместим в точку  $r=R$  вспомогательный источник

$$\tilde{Q}(r/R, n) = \delta(r-R) \cos(-R_0, n), \quad R_0 = R/R$$

и напишем соотношение взаимности между полем пучка  $J(r, n)$  и полем  $\tilde{J}(r/R, n)$ , создаваемым вспомогательным источником. Для простоты положим

$$Q(r, n) = \delta(r) \delta(n - z_0)$$

(пучок создается точечным мононаправленным источником, действующим в направлении оси  $z$ ). В результате получим соотношение

$$H = \int_{4\pi} J(R, n) \cos(R_0, n) d\omega_n = \tilde{J}(0/R, -z_0),$$

которое связывает распределение радиального потока излучения  $H$  на сфере  $R = \text{const}$  с угловым распределением интенсивности вспомогательного поля в точке  $r=0$ .

Предположим, что во вспомогательном поле  $\tilde{J}$  в окрестности точки  $r=0$  установился глубинный режим и, следовательно,

$$\tilde{J}(0/R, n) = f(R) D(-R_0, n)$$

\* Формула (21) является, по существу, следствием известного «закона трех вторых» для среднеквадратичного поперечного смещения луча [11].

( $D$  — стационарное тело яркости) Тогда поток излучения

$$H = f(R) D(R_0, z_0).$$

Нетрудно видеть, что это соотношение приводит к квадратичному закону изменения  $S_{\text{эфф}}(R)$ .

Проведенные выше расчеты позволяют составить достаточно полное качественное представление о структуре первоначально узкого остронаправленного светового пучка в мутной среде с сильно анизотропным рассеянием. Схематически основные характеристики пучка с нулевой начальной расходимостью сведены на рис. 6. Верхняя кривая изображает аксиальное распределение дисперсии угла прихода лучей  $\theta^2$

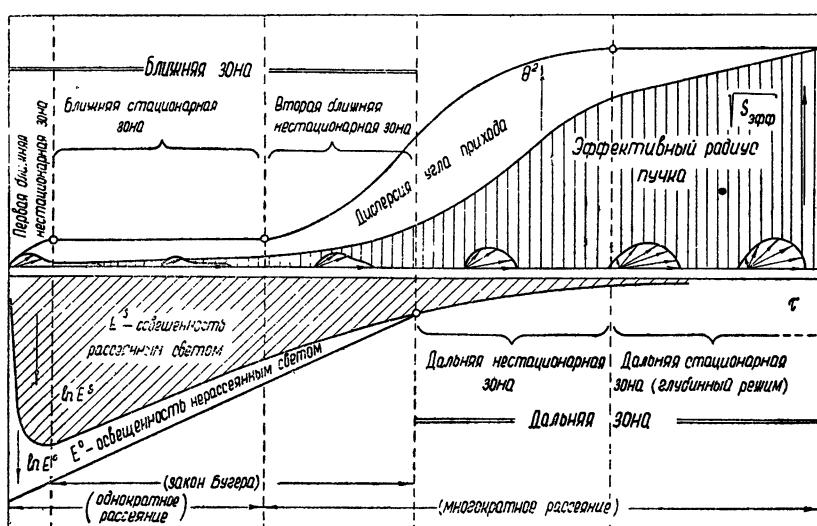


Рис. 6.

(см. третий раздел). Верхняя заштрихованная область соответствует форме пучка, граница которого установлена по определенному уровню спада интенсивности (см. раздел 4). Деформация тела яркости на оси пучка иллюстрируется несколькими качественными диаграммами. Наконец, в нижней половине рисунка приведено отдельно аксиальное распределение освещенности  $E^0$  и  $E^s$  нерассеянным и рассеянным светом (см. второй раздел). В отличие от исходных кривых (рис. 1—5) все кривые на рис. 6 изображены в произвольном масштабе.

По различным признакам пучок можно разбить на несколько качественно различных зон. В качестве основного критерия взято соотношение между освещенностями на оси пучка, которые создаются нерассеянным (затухающим по экспоненте) и рассеянным полями. Соответственно, ближней зоной названа область, где  $E^0 > E^s$ , а дальней зоной — область преобладания рассеянной компоненты ( $E^s > E^0$ ). Граница этих зон проходит на расстоянии, которое определяется из уравнения  $\tau_s = 3 \ln \tau_0 - \ln C_s$ , где  $\tau_s = \sigma z$ ,  $C_s = \sigma S / (\pi/3) \bar{\gamma}^2$ .

Ближняя зона, в свою очередь, разбита на несколько участков в зависимости от характера углового расхождения луча. Для тонкого пучка ( $C_s < 1$ ) можно различать две нестационарных зоны (где  $\bar{\theta}^2$  меняется вдоль оси пучка) и одну стационарную ( $\bar{\theta}^2 \simeq \text{const}$ ).

В первой нестационарной зоне, непосредственно примыкающей к источнику, первичный и рассеянный световые потоки пространственно еще не разделены и освещенность на оси пучка убывает сравнительно медленно; граница зоны удалена от источника примерно на расстояние  $z \sim \sqrt{S}/\sqrt{\gamma^2}$ \*. В ближней стационарной зоне ( $\bar{\theta}^2 \simeq \text{const}$ ), где рассеянное излучение в основном уходит из приаксиальной области пучка, надежно выполняется закон Бугера; с небольшими отклонениями он оказывается справедливым и во второй нестационарной зоне, т. е. вплоть до границы дальней зоны. Подчеркнем, что первая нестационарная и стационарная ближняя зона находятся в области, где преобладает однократное рассеяние, а начало второй нестационарной зоны совпадает с нижней границей области многократного рассеяния.

Аналогичное разбиение на нестационарный и стационарный участки может быть сделано и в дальней зоне. Граница между ними  $(\tau_0)_{\text{гб}} \geq 4 [2\lambda/\bar{\gamma}^2(1-\lambda)]^{1/2}$  ( $\sqrt{\bar{\gamma}^2} \ll [(1-\lambda)/2\lambda]^{1/2}$ ) соответствует выходу в область глубинного режима, где информация об источнике почти полностью утрачивается (при  $\omega < \pi\bar{\theta}^2$  структура светового поля не зависит от начальных характеристик пучка).

Автор признателен А. В. Гапонову и М. А. Миллеру за полезные дискуссии и замечания и Э. М. Поповой за помощь в проведении вычислений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прожекторный луч в атмосфере, под ред. Г. В. Розенберга, изд. АН СССР, М., 1960.
2. А. И. Грибанов, Методы расчета видимости при направленном освещении, Госэнергоиздат, М., 1955.
3. Л. М. Романова, Оптика и спектроскопия, 13, 429 (1962); 13, 819 (1962).
4. Л. М. Романова, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1108 (1962).
5. Т. А. Гермогенова, ДАН СССР, 113, 297 (1957).
6. М. В. Масленников, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1, 255 (1961).
7. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
8. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
9. Н. Времмер, J. Res. Nat. Bureau Stand., 68D, 563 (1964).
10. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 380 (1964).
11. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
3 мая 1965 г

#### ON THE PROPAGATION OF A NARROW LIGHT BEAM IN THE MEDIUM WITH THE ANISOTROPIC SCATTERING

L. S. Dolin

The problem is considered of propagation of a primary narrow directed light beam in the turbid medium with a high directive scattering indicatrice. From the transport equation in the small angles approximation the intensity distribution has been calculated on the beam axis, as well as angle of arrival deviation and an effective beam cross-section in dependence of the optical path, the primary beam characteristics and the angular width of the scattering indicatrice

\* Для широких пучков она может распространяться на всю ближнюю зону и «замазать» соседние участки.

УДК 539.282

## О ДЕТЕКТИРОВАНИИ АТОМНЫХ ПУЧКОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В СТАНДАРТАХ ЧАСТОТЫ И РАДИОСПЕКТРОСКОПАХ

*А. М. Амадзиеv, В. Ф. Белянина, Л. Л. Мясников*

Изложена методика и приведены результаты исследования поверхностной ионизации атомных пучков калия, рубидия и цезия на текстурированном вольфраме и платине и атомного пучка таллия на платине и окисленном вольфраме. Полученные данные о температурной зависимости коэффициента ионизации и времени установления для этих ионизаторов удовлетворительно согласуются с теорией.

Экспериментальная установка для исследования ионизации атомных пучков металлов аналогична применяемым в атомно-лучевых радиоспектрографах (рис. 1). Основными частями установки являются 1) источник, представляющий собой камеру, снабженный отверстием для эфузии атомов (1); 2) коллиматорная система — диафрагмы, определяющие вместе с отверстием источника геометрическую форму пучка (2, 4); 3) детектор для обнаружения атомов пучка (11); 4) вакуумная система, внутри которой размещены все остальные части установки. Атомный пучок исследуемого металла формируется щелью 2 и коллиматорами 4 и попадает в ионизационную камеру 8. Атомный пучок можно перекрывать заслонкой 6 при помощи внешнего магнита. Система изготовлена из молибденового стекла, которое обладает высокими вакуумными свойствами и дает хорошие спай с металлом. Подвижные соединения — сильфоны 10, 5 дают возможность перемещать источник атомных пучков 1 и детектор 11 относительно всей системы.

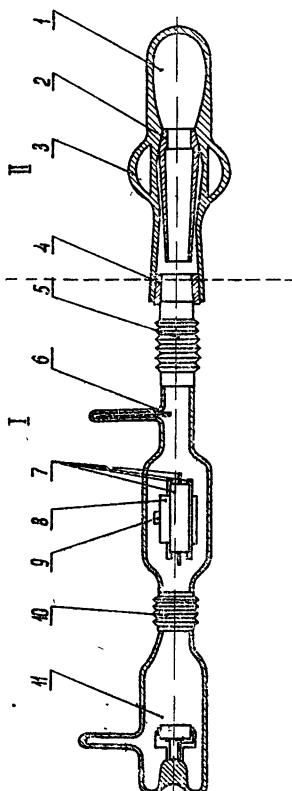


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Детекторы атомного пучка, предназначенные для работы в стандартах частоты и радиоспектрографах, должны отвечать следующим требованиям: 1) высокой чувствительности, 2) малой инерционности, 3) простоте преобразования сигнала, 4) надежности конструкции. Этим требованиям наиболее полно удовлетворяют детекторы с поверхностной ионизацией и детекторы с ионизацией электронным ударом. В стандартах частоты более широкое применение нашли детекторы с поверхностной ионизацией и электронным ударом [1].

## 1. ДЕТЕКТОРЫ С ПОВЕРХНОСТНОЙ ИОНИЗАЦИЕЙ

Детектор с поверхностной ионизацией (рис. 2) состоит из трех никелевых полуцилиндров: принимающего полуцилиндра со щелью, сделанной с учетом расходимости пучка, двух охранных полуцилиндров, предназначенных для того, чтобы атомы пучка не попадали на более холодные концы ленточки и регистрировали фон. Атомы ионизировались на накаленной вольфрамовой ленточке размерами  $25 \times 2 \times 0,1$  мм. Вольфрамовый эмиттер вследствие прокатки сильно текстурирован; имеется выход в плоскость прокатки кристаллографической грани (001). Поэтому можно считать, что поверхность эмиттера практически целиком состоит из выходов плоскости граней (001) и вследствие этого однородна по отношению к работе выхода (4,52 эв). В качестве эмиттера использовалась также платиновая ленточка размерами  $20 \times 2 \times 0,1$  мм.

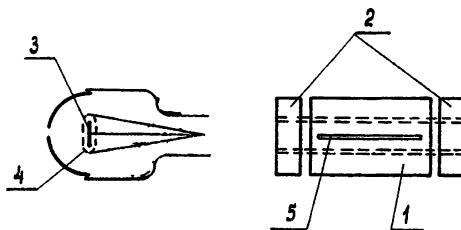


Рис. 2. Детектор с поверхностной ионизацией.

фрамовый эмиттер вследствие прокатки сильно текстурирован; имеется выход в плоскость прокатки кристаллографической грани (001). Поэтому можно считать, что поверхность эмиттера практически целиком состоит из выходов плоскости граней (001) и вследствие этого однородна по отношению к работе выхода (4,52 эв). В качестве эмиттера использовалась также платиновая ленточка размерами  $20 \times 2 \times 0,1$  мм.

Весьма существенно, чтобы материалы, используемые для изготовления детекторов, не содержали примесей, уменьшающих величину работы выхода электрона с поверхности. Кроме того, в вольфраме обычно присутствуют примесные атомы калия, испарение которых происходит вспышками, причем одновременно может испаряться до  $10^6$  ионов [2]. Для удаления примесного калия и его органических соединений ленточку детектора нагревали до  $2700^\circ\text{K}$  в течение  $10 \div 12$  часов при давлении  $10^{-6}$  мм рт. ст., начиная с комнатной температуры. Наиболее удачным оказался прогрев вольфрамовой ленточки в атмосфере кислорода при давлении  $10^{-5}$  мм рт. ст.: хотя постоянный фон и возрастал примерно до  $10^{-13}$  а при  $1500^\circ\text{K}$ , но уровень шумов снижался.

Ленточка окружена сеткой большой проницаемости. Сетка служит для запирания электронного потока, идущего с ленточки. Выводы с ленточки коллекторов и с сетки сделаны из молибдена и могут быть прогреты пропускаемым через них током. Система терmostатирована. Преимущество полуцилиндров перед ранее применяемыми цилиндрами в том, что атомы, не попавшие на ленточку, пролетают дальше и не осаждаются на металлических частях детектора. Ионы ускоряются напряжением порядка 100 в. Ионизация атомов электронным ударом благодаря отталкивающему полю мало вероятна.

Нагрев ленточки осуществлялся стабилизированным напряжением постоянного тока. Температура ленточки измерялась микропирометром, а при низких температурах — по току накала с учетом влияния охлаждающих концов. Ионный ток поверхностной ионизации измерялся электрическим усилителем постоянного тока; погрешность измерения составляла 5%.

В случае работы с пучком таллия производилось окисление ленточки детектора струей кислорода через капилляр, расположенный непосредственно над ленточкой. Давление в системе при этом падало с  $10^{-6}$  мм рт. ст. до  $2 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст. Окисление ленточки производилось

при температуре  $1000 \div 1500^{\circ}\text{K}$ , начиная с высших температур в течение 1 часа.

## 2. ДЕТЕКТОРЫ С ИОНИЗАЦИЕЙ АТОМОВ ПУЧКА ЭЛЕКТРОННЫМ УДАРОМ

Система детектирования атомных пучков электронным ударом состояла из трех основных узлов: 1) электронно-бомбардировочного ионизатора, предназначенного для преобразования части атомного пучка в ионы; 2) масс-спектрометра для отведения ионов определенной массы; 3) регистрирующего устройства для потока ионов.

Основной функцией электронно-бомбардировочного ионизатора является превращение нейтральных атомов пучка в положительные ионы, количество которых зависит от плотности электронного потока. Для формирования электронного потока была использована видоизмененная конструкция пушки, предложенная в [3] (см. рис. 3). Вместо оксидного катода 1 применялся вольфрамовый катод прямого (непосредственного)

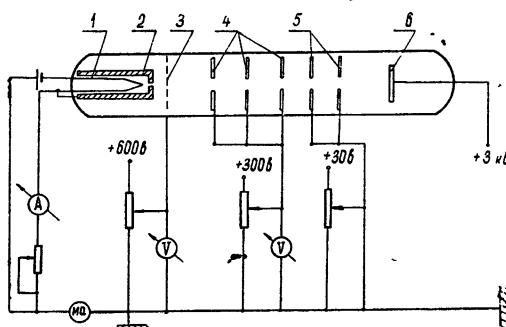


Рис. 3. Схема электронной пушки.

нагрева. Катод окружен цилиндром Венельта 2, на который подается небольшой отрицательный потенциал относительно катода. Применение цилиндра Венельта дало возможность получить более равномерное поле внутри сферы.

Сформированный электронный пучок ускорялся сеткой большой проницаемости 3, потенциал которой  $+600\text{ в}$ . Ускоренные сеткой электроны окончательно формировались тремя электродами 4 пушки, на которые подавали напряжение  $+300\text{ в}$ . Задачей следующей ступени было торможение ускоренных электронов. Это достигалось подачей отрицательного потенциала относительно ускоряющей ступени. Анализ снятых характеристик позволил выбрать оптимальный рабочий режим электронной пушки:  $I_{\text{нак}} = 8\text{ а}, U_{\text{сетки}} = 600\text{ в}, U_{\phi_{\text{э1}}} = 300\text{ в}, U_{\phi_{\text{э2}}} = 100\text{ в}$ .

При этих напряжениях на электродах электронный пучок в области ионизации характеризовался плотностью тока  $15\text{ мА} \cdot \text{см}^{-2}$ . Однако полученная плотность — не предельная; она была несколько увеличена с помощью магнитного поля.

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ

Сила ионного тока при поверхностной ионизации атомов на металлических поверхностях выражается следующей формулой [4]:

$$I^+ = \frac{A \cdot n_0 F}{A + \exp[\epsilon(V_i - \phi)/KT]}, \quad (1)$$

где  $\epsilon$  — заряд электрона,  $n_0$  — число падающих атомов на единицу поверхности в 1 сек,  $A$  — отношение статистических весов ионного и атомного состояний,  $F$  — поверхность эмиттера,  $\varphi$  — работа выхода металла,  $V_i$  — потенциал ионизации падающего атома. С учетом вероятности перехода в термодинамическое равновесие

$$W = [1 - e^{\epsilon / kT}] \quad (2)$$

(где  $\tau$  — время жизни адсорбированного атома,  $\tau_0$  — время спин-решеточной релаксации), а также коэффициента отражения  $r_i$  выражение для величины ионного тока примет вид

$$I = \frac{AW(1-r_i)\epsilon n_0 F}{A + \exp[\epsilon(V-\varphi)/kT]} \quad (3)$$

При детектировании атомных пучков была снята зависимость ионного тока поверхностной ионизации от температуры вольфрамового ионизатора для атомных пучков цезия, рубидия и калия (рис. 4). Точки на кривых соответствуют разностям отсчетов тока при открытой и закрытой заслонке. Кривые получены при одинаковых интенсивностях

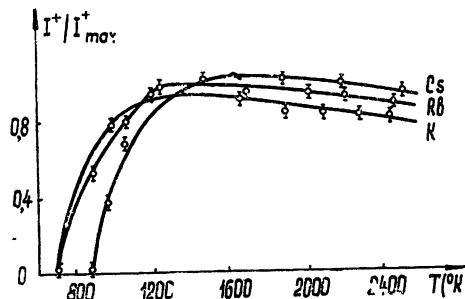


Рис. 4. Зависимость ионного тока пучков цезия, рубидия и калия от температуры ионизатора.

атомных пучков ( $10^{14}$  атом·см $^{-2}$ ), регулируемых термостатом. Из кривых зависимостей ионного тока от температуры видно, что, начиная с некоторой температуры  $T_0$  (температурного порога ионизации), почти каждый атом цезия и рубидия ионизируется на поверхности вольфрама. На рис. 5 приведены температурные характеристики ионного тока цезия, рубидия и калия.

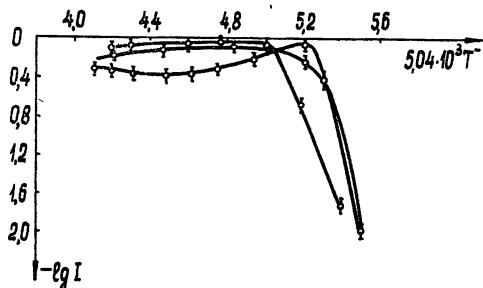


Рис. 5. Зависимость  $\lg I$  от  $5,04 \cdot 10^3 / T$  для атомов цезия, рубидия, калия ( $T$  — в  $^{\circ}\text{К}$ ).

Одновременно была исследована электронная эмиссия вольфрамового ионизатора при падении на его поверхность исследуемого пучка. Оказалось, что атомы цезия, рубидия и калия увеличивают термоэлектронную эмиссию ионизатора, что связано с уменьшением работы выхода адсорбированными атомами пучка (рис. 6). При температурах выше порога ионизации атомные пучки на термоэлектронную эмиссию не влияют. Это можно объяснить тем, что при высоких температурах время

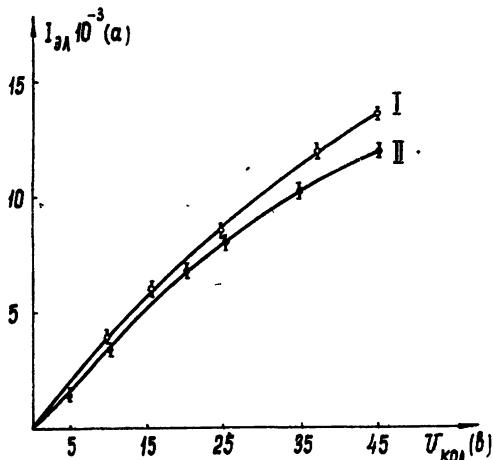


Рис. 6. Зависимость термоэлектронной эмиссии от потенциала коллектора при наличии падающего пучка щелочных металлов (I), при перекрытом пучке (II).

жизни адсорбированных атомов мало и они не образуют устойчивой пленки.

Для случая ионизации атомов на поверхности платины наблюдается аномально низкий коэффициент ионизации, не согласующийся с теорией. Расхождение увеличивается с увеличением температуры ионизатора. Это можно объяснить наличием значительного отражения от поверхности платины.

Таблица 1

$T$ (°К)	Цезий на вольфраме		Рубидий на вольфраме		Калий на вольфраме	
	$\beta_{\text{теор}} (\%)$	$\beta_{\text{эксп}} (\%)$	$\beta_{\text{теор}} (\%)$	$\beta_{\text{эксп}} (\%)$	$\beta_{\text{теор}} (\%)$	$\beta_{\text{эксп}} (\%)$
1000	100	100	97	96	72	69
1200	99,5	99	87	84	65,7	58,7
1400	98	96	80	74	61	51
1600	96,5	94	76	69	57,5	49,6
1800	94,5	90	72,5	61	54,5	49,5
2000	92,5	86	69	58	52,5	48

В таблице 1 даны теоретические и экспериментальные коэффициенты ионизации  $\beta$  цезия, рубидия, калия на вольфраме и платине.

#### 4. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ АТОМНОГО ПУЧКА ТАЛЛИЯ

Задача детектирования атомного пучка таллия более сложна из-за сравнительно высокого потенциала ионизации, так как для получения заметного ионного тока необходимо, чтобы работа выхода материала

ионизатора была не меньше потенциала ионизации атомов пучка. Потенциал ионизации таллия 6,11 эв. Поэтому ионизация его атомов на поверхности чистого вольфрама, работа выхода которого 4,54 эв, возможна лишь с применением электрических полей напряженностью порядка  $10^8 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$  [5]. Из-за неудобства применения таких полей и малости коэффициента ионизации наиболее перспективным для детектирования атомных пучков является использование металлов, на поверхности которых создано покрытие адсорбированными молекулами ( $\text{O}_2$ ,  $\text{H}_2$  и др.). Покрытие поверхности эмиттера электроотрицательными молекулами кислорода повышает работу выхода до 6,82 эв.

При исследовании атомного пучка таллия была снята зависимость ионного тока с окисленной вольфрамовой ленточки и чистой платины от температуры ленточки (рис. 7). Зависимости ионного тока от температуры для случая оксидированного вольфрама обнаруживают резкий спад с увеличением температуры, что связано с десорбцией молекул кислорода.

Таблица 2

Таллий на оксидированном вольфраме					Таллий на платине				
$T$ (°C)	$\varphi$	$\tau$ (сек)	$\beta_{\text{теор}} (\%)$	$\beta_{\text{эксп}} (\%)$	$T$ (°C)	$\varphi$	$\tau$ (сек)	$\beta_{\text{теор}} (\%)$	$\beta_{\text{эксп}} (\%)$
508	6,8	360	~99%	—	508	5,64	—	~28%	22%
860	6,65	180	~98,6%	56%	860	5,64	180	~28%	20%
1025	6,22	30	~51%	40%	1025	5,64	30	~28%	18%
1230	6,16	6	~40%	26%	1230	5,64	3	~28%	16%

На рис. 8 показаны температурные характеристики ионного тока таллия с оксидированного вольфрама и чистой платины:

$$\lg i_+ = f\left(\frac{5040}{T}\right). \quad (4)$$

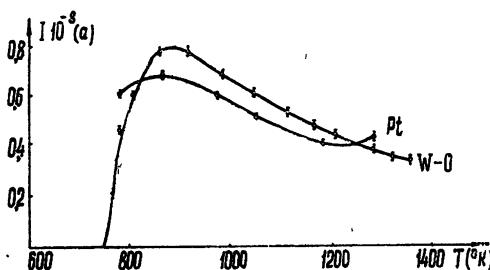


Рис. 7. Зависимость ионного тока пучка таллия на платине и окисленном вольфраме от температуры эмиттера.

Наклон касательной к кривой дает возможность судить о величине работы выхода окисленного эмиттера. В таблице 2 приведены теоретические и экспериментальные значения коэффициента ионизации таллия на окисленном вольфраме и платине.

Расчет ожидаемой величины ионного тока (в амперах) производился по формуле

$$i_+ = 1,6 \cdot 10^{-19} n_0 \beta F, \quad (5)$$

где  $n_0$  — интенсивность атомного пучка,  $\beta$  — коэффициент ионизации,  $F$  — рабочая площадь. Интенсивность атомного пучка определялась по формуле (4):

$$n_0 = \frac{1,6 \cdot 10^{22} A_s Ad P'}{l^2 \sqrt{MT}}, \quad (6)$$

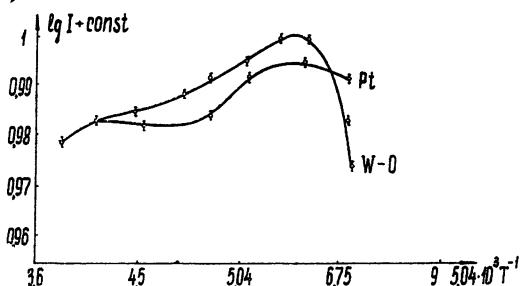


Рис. 8. Зависимость  $\lg I$  от  $5.04 \cdot 10^3 / T$  для атомов таллия ( $T$  — в°К).

где  $P'$  — давление насыщенных паров в источнике,  $A_s$ ,  $A_d$  — площадь щели и детектора соответственно,  $T$  — температура источника. Работу выхода вольфрама брали по данным [6]. Для платины величина работы выхода, определенная разными авторами, колеблется от 5,58 до 6,2 эв.; принималось, что 20% поверхности имеет работу выхода меньше 6 эв. и 80% — большую или равную 6,1 эв.

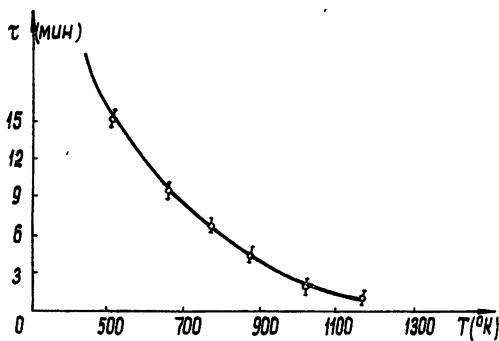


Рис. 9. Зависимость времени установления ионного тока от температуры эмиттера.

Наибольший интерес представляет время установления максимального ионного тока в зависимости от температуры ионизатора. При исследовании этой зависимости наблюдалось уменьшение времени установления при увеличении температуры ионизатора (рис. 9). Инерционность атомно-лучевого стандарта частоты зависит от времени жизни атомов на поверхности ионизатора, и она тем меньше, чем выше температура ионизатора. Можно уменьшить время установления максимального ионного тока, увеличив температуру ионизатора; однако при этом температура должна быть выбрана так, чтобы не было резкого сниже-

ния работы выхода окисленного вольфрама вследствие усиления десорбции молекул кислорода с поверхности ионизатора.

Была определена длительность работы окисленного вольфрамового ионизатора, определяемая временем, в течение которого работа выхода ионизатора еще достаточно велика, чтобы обеспечить уверенную регистрацию атомного пучка таллия (рис. 10). Из-за постоянной десорбции

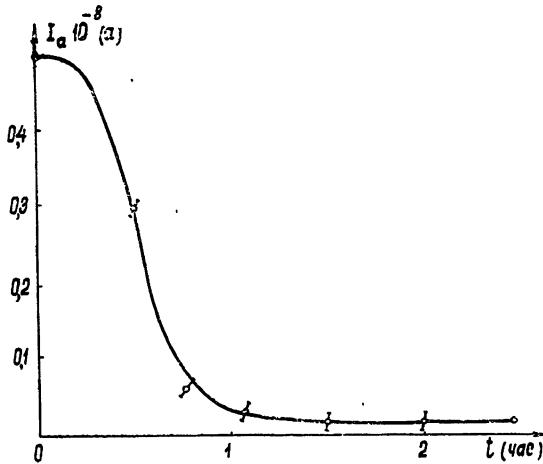


Рис. 10. Зависимость величины ионного тока окисленного вольфрама от времени выдержки при постоянной температуре эмиттера.

молекул кислорода с поверхности оксидный слой утрачивается, что приводит к уменьшению работы выхода ионизатора. Экспериментальные значения коэффициентов ионизации атомов таллия на окисленном вольфраме оказались значительно меньше теоретических.

Необходимо отметить, что с течением времени ионизатор детектора покрывался микрокаплями адсорбированного таллия и распыленного материала коллектора. Загрязнение ионизатора способствует возникновению паразитного ионного фона, для устранения которого необходима очистка ионизатора посредством нагревания.

Поверхностный ионизационный детектор является наиболее приемлемым детектором, но, к сожалению, обладает инерционностью. В связи с этим исследовались детекторы атомных пучков с электронной бомбардировкой. Полученные коэффициенты ионизации у детекторов с электронной бомбардировкой (1,8%) гораздо меньше, чем у детекторов с поверхностной ионизацией (90%) для Cs, Rb и K; однако детекторы с электронной бомбардировкой являются почти безынерционными.

Детектор атомных пучков с ионизацией электронным ударом должен обладать как бы эффектом сужения ширины резонансной линии в стандартах частоты, поскольку вероятность ионизации атомов обратно пропорциональна ее скорости, а ширина резонансной линии

$$2\Delta\nu = 1/t, \quad (7)$$

где  $t$  — время пролета атома между высокочастотными резонаторами. Большая вероятность ионизации медленных атомов электронно-бомбардировочным детектором дает в результате уменьшение ширины спектральной линии по сравнению с другими детекторами.

Были оценены абсолютные значения эффективного сечения ионизации для Cs, Rb и K. Максимальное значение эффективного сечения ионизации составило для Cs  $8 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ , для Rb  $6 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$  и для K  $2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
2. R. F. Minturn, S. Datz, H. Taylor, J. Appl. Phys., 31, 876 (1960).
3. Н. Симпсон, Д. Кьют, Приборы для научных исследований, 3, 126 (1963).
4. Э. Я. Зандберг, Н. И. Ионов, УФН, 67, 6, 581 (1959).
5. Э. Я. Зандберг, ЖТФ, 33, 1215 (1960)
6. В. С. Фоменко, Эмиссионные свойства элементов и химических соединений, изд АН УССР, Киев, 1961.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию  
29 мая 1965 г

### ON DETECTION OF ATOM BEAMS USED IN FREQUENCY STANDARTS AND RADIOSPECTROSCOPES

*A. M. Amadziev, V. F. Belyanina, L. L. Myasnikov*

The method is set forth and results are given of investigation of surface ionization of potassium, rubidium and cesium atom beams on tungsten with ordered structure and platinum as well as thallium atom beams on platinum and oxidized tungsten. The data obtained concerning the dependence of ionization coefficient on temperature and transient time for these ionizers are in a satisfactory agreement with the theory.

УДК 538.245

## О ПОВЕДЕНИИ ИНВЕРТИРОВАННЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

A. M. Родичев

Исследовался характер перехода однородно намагниченного шара (ферродиэлектрика) в новое устойчивое состояние при инвертировании большими полями. Показано, что при определенных условиях скорость роста однородной прецессии может быть значительно больше скорости роста спиновых волн, и перемагничивание осуществляется однородным вращением.

Возможность когерентного радиоизлучения инвертированных ферромагнитных систем утверждалась в работах [1, 2]; однако в [1, 2] не учитывалось наличие в ферромагнетиках спиновых волн. Исследование спиновых волн в эллипсоиде (в инвертированном состоянии) [3, 4] показало, что их амплитуды растут с различными скоростями\*. В [3, 4] не сравнивалась скорость роста спиновых волн и однородной прецессии, а ведь именно соотношение между этими скоростями должно определять характер процесса.

В работе [5] на основе анализа скорости роста волн и однородной намагниченности показано, что тонкие ферритовые и металлические пластиинки (пленки), полые тороиды и цилиндры могут при определенных условиях перемагничиваться однородным вращением  $\dot{M}$ . Для шара, инвертируемого полями с  $|A| < 4\pi M_0$ , результаты работы [5] подтвердили выводы работ [3, 4]. Результаты экспериментов по инвертированию дисков [6, 7], тонких ферромагнитных пленок [8] и полых цилиндров [9] находятся в согласии с выводами работы [5].

В настоящей работе проведем исследование процесса перемагничивания шара (ферродиэлектрика) большими полями на углы, близкие к  $\pi$ .

Возьмем шар, однородно намагниченный вдоль оси  $z$ . Запишем, следуя [5], циклические и релаксационные частоты спиновых волн и однородной прецессии:

$$\omega'_k = [(1 + a_k^2)^{-1} \gamma^2 A_k (A_k + 4\pi M_0 \sin^2 \theta) - \omega''_k]^1/2, \quad (1)$$

$$\omega''_k = a_k (1 + a_k^2)^{-1} \gamma (A_k + 2\pi M_0 \sin^2 \theta), \quad (2)$$

$$\omega'_{k=0} = [(1 + a_0^2)^{-1} \gamma^2 A_0^2 - \omega''_0]^1/2, \quad (3)$$

$$\omega''_{k=0} = a_0 (1 + a_0^2)^{-1} \gamma A_0, \quad (4)$$

$$A_k = qM_0 k^2 + H_e + H_a + H_d, \quad A_0 = H_e + H_a,$$

где  $k$  — волновой вектор,  $q$  — постоянная обмена,  $M_0$  — намагченность,  $H_e$  — внешнее поле,  $H_a$  — поле анизотропии,  $H_d = -(4\pi/3)M_0$  — размагничивающее поле,  $a_k$  и  $a_0$  — величины, характеризующие затухание волны и однородной прецессии, обусловленное потерями вида  $\alpha \dot{M}^2$  (используемый метод не позволяет здесь учесть потери вида  $\beta \ddot{M}^2$  [10]).

\* В работе [4] предполагалось, что когерентное излучение можно получить, поворачивая поле  $H_e \sim 3 \cdot 10^4$  э на определенный угол за время  $\sim 10^{-12}$  сек.

$\vartheta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $M_z$ . Экспоненциальный рост амплитуд спиновых волн и однородной прецессии характеризуется величиной  $\text{Re } \Omega$ , где

$$\Omega = -i\omega' - \omega''. \quad (5)$$

Как видно из (1) — (2) и (5), при  $-4\pi M_0 < A_k < 0$  рост волн в основном определяется величиной  $\omega'_k$ ;  $\text{Re } \Omega_k$  при этом может достигать  $10^{10} \text{ сек}^{-1}$ . При

$$\begin{aligned} A_k &< -4\pi M_0, \\ \text{Re } \Omega_k &= -\omega'_k. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом случае характер процесса определяется соотношением  $a_0$  и  $a_k$  и величиной начальных амплитуд спиновых волн и однородной прецессии.

Значения  $a_0$  и  $a_k$  можно найти по ширинам соответствующих линий поглощения. Как показывают многочисленные эксперименты по резонансу на шарах диаметром  $10^{-1} \text{ см}$ ,  $a_0$  оказывается порядка  $10^{-2} \div 10^{-5}$ ;  $a_k$  меньше  $a_0$  [11] и может отличаться на порядок. Следует заметить, что  $a_0$  и  $a_k$ , определяемые по ширине линии резонанса, завышены вследствие потерь типа  $\beta \dot{M}^2$ . Кроме того, эффективная величина  $a_0$  при циклическом движении  $\mathbf{M}$  и при переходном процессе может сильно отличаться, так как при циклическом установившемся движении энергия, расходуемая на возбуждение волн (соловский механизм [12] и др.), может быть велика. С другой стороны, величина  $a_k$ , которая приводилась выше, получена для спиновых волн, возбужденных при амплитуде поля подкачки выше критической. Вообще же  $a_k = a_k \gamma M_0 V$ , где  $V$  — объем, занятый возбуждением, и для волн теплового происхождения величина  $a_k$  должна быть значительно меньшей. Учитывая все сказанное, следует считать  $a_0 \gg a_k$ .

С учетом сказанного из (1), (2), (5) следует, что область больших инкрементов нарастания для волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  фактически начинается при  $H_e < (4\pi/3)M_0 - H_a - qM_0 k^2$  и кончается при  $H_e = H_f \leq (4\pi/3)M_0 - 4\pi M_0 - H_a - qM_0 k^2$ , т. е. при данном  $H_e$  большие инкременты нарастания имеют волны с  $k^2 > k_{kp}^2 = [-H_e + (4\pi/3)M_0 - 4\pi M_0 - H_a]/(1/qM_0)$ .

На рис. 1 показана область роста спиновых волн с  $k < k_{kp}$  и максимальная величина  $\text{Re } \Omega_k$ , а также  $\text{Re } \Omega_0$  для однородной прецессии при  $a_0 = 0,05$ ,  $a_k = 0,005$ ,  $H_a = 0,2(\pi/3)M_0$ ,  $qM_0 k_{kp}^2 = 20(\pi/3)M_0$  (для удобства поля даны в единицах  $(\pi/3)M_0$ ). При  $|H_e| > |H_f|$  коэффициент нарастания амплитуды однородной прецессии  $\text{Re } \Omega_0$  начинает превосходить  $\text{Re } \Omega_k$  для всех волн с  $k < k_{kp}$ .

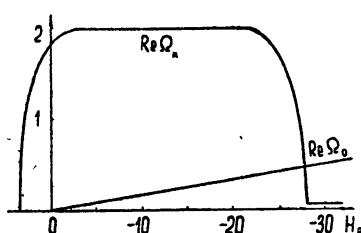


Рис. 1. Зависимость  $\text{Re } \Omega_0$  и  $\text{Re } \Omega_k$  (в единицах  $\pi \gamma M_0$ ) от величины инвертирующего поля  $H_e$  (в единицах  $(\pi/3) M_0$ ) для волн с  $k < k_{kp}$ .

Выясним теперь, при каких условиях инкремент однородной прецессии больше инкремента любой спиновой волны. Во-первых, максимальные  $\text{Re } \Omega_k$  спиновых волн, обусловленные влиянием диполь-диполь-

ного взаимодействия равны  $2\pi\gamma M_0^*$ . Поэтому, как видно из (1)–(5), в принципе всегда можно указать такую величину  $H_e^{(1)}$ , чтобы  $\operatorname{Re} \Omega_0 > \operatorname{Re} \Omega_k$  (на рис. 1 взято  $|H_f| < |H_e^{(1)}|$ ). Во-вторых, концепция спиновых волн ограничивает величину волновых векторов некоторой величиной  $k_{\max}$ ; поэтому, оставаясь в рамках теории спиновых волн, можно всегда указать такое поле  $H_e^{(2)}$ , чтобы условие (6) выполнялось для всего спектра. Тогда также  $\operatorname{Re} \Omega_0 > \operatorname{Re} \Omega_k$ . Однако для достижения однородного вращения намагниченности, по-видимому, следует требовать выполнения условия (6) не для всего спектра, а только до определенной величины  $k_1$ , такой, что число волн с  $k > k_1$  (с большими энергиями) столь мало, что их рост заметно не отражается на характере перехода образца в новое состояние.

С учетом соотношений (1)–(6) и распределения спиновых волн по энергиям [13] величина  $k_1$  определяется следующим выражением:

$$M_0 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha e^{\operatorname{Re} \Omega_0} \gg \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_1}^{k_{\max}} \frac{\mu_k}{e^{\epsilon_k/T} - 1} e^{\operatorname{Re} \Omega_k} dk, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — начальный угол между  $-M$  и  $(H_e + H_a)$  в инвертированном состоянии\*\*, определяющий начальную амплитуду однородной прецессии,  $\epsilon_k = \hbar \omega_k$  — энергия спиновой волны,  $\mu_k = -\partial \epsilon_k / \partial H_e$  — амплитуда спиновой волны, причем в выражения  $\mu_k$  и  $\epsilon_k$  входит  $H_e$  исходного состояния, а в  $\Omega_k = H_e$  — инвертированного состояния;  $T$  — температура в эргах.

В общем условие того, что система перейдет в новое состояние путем движения однородной намагниченности, будет таким:

$$M_0 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha e^{\operatorname{Re} \Omega_0} \gg \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{\max}} \frac{\mu_k}{e^{\epsilon_k/T} - 1} e^{\operatorname{Re} \Omega_k} dk. \quad (8)$$

Этим условием определяется при данном  $\alpha$  необходимая величина  $H_{f_1}$ .

Вклад в интеграл волн с  $k < k_1 = \left[ \frac{-H_{f_1} - (8\pi/3)M_0 - H_a}{qM_0} \right]^{1/2}$  мал из-за

малости инкремента нарастания, а волн с  $k > k_1$  — из-за малости их числа. При этом излучение будет иметь большую степень когерентности. (Заметим, что если  $|H_e| > |H_{f_1}|$ , то благодаря большой циклической частоте спиновые волны имеют возможность присоединяться к однородной прецессии.)

Выше предполагалось ступенчатое изменение поля. Если  $H_{f_1}$  велико, то технически трудно обеспечить большую крутизну фронта нарастания поля, такую, чтобы на фронте инвертирующего импульса в области полей, меньших  $H_{f_1}$ , не успели возрасти спиновые волны. Снизить  $H_{f_1}$  можно, подбирая  $M_0$ ,  $q$  и понижая температуру. Увеличение угла  $\alpha$  также приводит к фактическому понижению  $H_{f_1}$ .

Рассмотрим подробнее переход однородной намагниченности в новое равновесное состояние. Формулы (1)–(4) были получены линеаризацией уравнения движения [10].

$$\dot{M} = -\gamma [M, H_0 - \alpha \dot{M} + \beta \ddot{M} - \eta \ddot{M}]. \quad (9)$$

\* Действительно, как видно из (1),  $\omega'$  без члена  $4\pi M_0 \sin^2 \theta$  не дает вклада в инкремент нарастания при любой величине инвертирующего поля.

\*\* Формулы (1)–(5) остаются справедливыми при небольших  $\alpha$ .

Считая приближенно, что в середине процесса  $-\ddot{M} = \dot{M}^2 \dot{M}^{-2} \dot{M}$ ,  $\varphi \gg \delta$ ,  $\varphi \ll \dot{\varphi}^2$ , получим из (9)

$$\dot{\varphi} \sin \vartheta = -\gamma (\Phi^0 H_0) + \dot{\vartheta} (a + b \dot{\varphi}^2) - c \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta + c \dot{\vartheta}, \quad (10)$$

$$\dot{\vartheta} = \gamma (\varphi^0 H_0) - \dot{\varphi} \sin \vartheta (a + b \dot{\varphi}^2) - c \dot{\varphi} \sin \vartheta - c \dot{\varphi} \cos \vartheta \dot{\vartheta}, \quad (11)$$

где  $H_0 = H_e + H_a$ ,  $a = \alpha \gamma M$ ,  $b = \beta \gamma M$ ,  $c = \gamma \gamma M$ ,  $\Phi^0$ ,  $\varphi^0$  — орты, направленные соответственно по меридиану и параллели в сторону увеличения полярного и азимутального углов  $\vartheta$  и  $\varphi$  вектора  $M$ .

Скорость перехода при  $H_{ex}$ ,  $H_{ey} \ll H_{ez}$  определяется величиной

$$\dot{\vartheta} = [1 + (a + b \dot{\varphi}^2)^2 + c \dot{\varphi} \cos \vartheta]^{-1} \{ (a + b \dot{\varphi}^2) [\gamma (\Phi^0 H_0) + c \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta - c \dot{\vartheta}] - c \dot{\varphi} \sin \vartheta \}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что скорость перехода определяется величиной постоянных  $a$ ,  $b$  и  $c$ , т. е. свойствами образца и его размерами [10], а также углом между  $\Phi^0$  и  $H_0$ .

Циклическая частота прецессии  $\omega'_0 = \dot{\varphi}$  при малых  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определяется выражением

$$\omega'_0 = \dot{\varphi} \simeq \gamma (H_{ez} + H_a).$$

Приближенная оценка ширины линии  $\Delta\omega'_0$  (в пренебрежении инерционным членом) дает

$$\Delta\omega'_0 \simeq (a + b \dot{\varphi}^2) \gamma (H_{ez} + H_a).$$

При  $H_{ez} = 3 \cdot 10^3$  э,  $H_a = 10^2$  э,  $a = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 10^{-24}$  имеем  $\Delta\omega'_0 = 10^{-2} \omega'_0$ . Для шара с  $M = 1$  гс · см<sup>3</sup> мощность излучения в импульсе ( $P = (2/3c^3) \dot{M}^2$ ) может достигать  $10^4 \div 10^5$  ватт.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, ЖЭТФ, 34, 1032 (1958).
2. F. R. Morgenthaler, IRE Trans., MTT-7, 6 (1959).
3. Л. Н. Булаевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 639 (1961).
4. T. Schaug-Pettersen, J. Appl. Phys., 31, 382 (1960).
5. А. М. Родичев, Изв. АН СССР, сер. физ. (в печати).
6. M. W. Miller, Proc. IRE, 49, 957 (1961).
7. B. J. Elliot, T. Schaug-Pettersen, H. J. Shaw, J. Appl. Phys., 31, 400 (1961).
8. W. Dietrich, W. Proebster, Electr. Rundschau, 14, 47 (1960).
9. R. F. Elfant, J. Appl. Phys., 34, 1112 (1963).
10. А. М. Родичев, ЖЭТФ, 48, 84 (1965).
11. R. C. Le Crow, and E. G. Spenser, J. Appl. Phys. Suppl., 30, 185 (1959).
12. H. Suhl, J. Phys. Chem. Solids, 1, 209 (1957).
13. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, УФН, 71, 533 (1960).

Институт физики СО АН СССР

Поступила в редакцию  
17 апреля 1965 г.

## ON THE BEHAVIOUR OF THE INVERTED FERROMAGNETICS

A. M. Rodichev

The transition character has been investigated of the uniformly-magnetized (ferroelectric) sphere into the new stable state by the inverting of the large fields. Under certain conditions the growth velocity of the uniform (isotropic) precession is shown to be considerably greater than the growth velocity of the spinal waves; the magnetic polarity reversal being carried out by the uniform rotation.

УДК 621.378.325

## ФОКУСИРОВКА ЛУЧЕЙ МЕЖДУ ГЛАДКИМИ ЗЕРКАЛАМИ

*В. П. Быков*

Показано, что резонаторы, образованные вогнутыми зеркалами, могут быть как фокусирующими, так и дефокусирующими; выяснены условия, когда зеркала становятся фокусирующими. Определены условия, при которых каждому продольному «квантовому числу» соответствует единственное колебание, т. е. имеет место так называемый одномодовый режим для поперечных колебаний. Рассмотрена фокусировка лучей в резонаторах, не аппроксимируемых зеркальным эллипсоидом.

В работах [1,2] предложена лучевая трактовка колебаний в открытых резонаторах, позволяющая весьма просто определять собственные частоты колебаний и положение каустических поверхностей, соответствующих этим колебаниям. В статьях [3,4] этим методом были рассмотрены некоторые конкретные типы резонаторов. В настоящей статье мы продолжим исследование открытых резонаторов на основе геометрической оптики. Основное внимание будет уделено вопросам фокусировки и дефокусировки лучей. В некоторых случаях система вогнутых зеркал может оказаться дефокусирующей, т. е. лучи, распространяющиеся между такими зеркалами, после нескольких отражений выходят за пределы зеркал или попадают на ту или иную диафрагму, ограничивающую поперечные размеры области колебаний. Если же область, где распространяются лучи, ограничена каустическими поверхностями, то такую систему зеркал мы будем называть фокусирующей.

Сначала мы рассмотрим открытый резонатор, образованный двумя сферическими зеркалами с разными радиусами кривизны, и выясним, при каких условиях такая система является фокусирующей. Далее получим условие, при котором два произвольных зеркала, расположенные друг против друга, могут быть аппроксимированы эллипсоидами, принадлежащими одному конфокальному семейству. К подобным двум зеркалам может быть применена теория, развитая для зеркального эллипсоида. Возможны также такие комбинации зеркал, которые не аппроксимируются эллипсоидами одного конфокального семейства. В настоящей работе будут рассмотрены два таких случая.

### 1. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗЕРКАЛА РАЗЛИЧНОЙ КРИВИЗНЫ

Рассмотрим два сферических зеркала, расположенные друг против друга на расстоянии  $d$  (рис. 1). Так как радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  зеркал различны, то невозможно оба зеркала аппроксимировать одним и тем же эллипсоидом. Поэтому подберем два конфокальных эллипсоида так, чтобы они осуществляли касание второго порядка с рассматриваемыми зеркалами. Распространение лучей между двумя эллипсоидами происходит так же, как и внутри одного эллипсоида. Действительно, теорема Штауде [5], заключающаяся в том, что луч, касающийся двух поверхностей конфокального семейства, после отражения в третьей будет вновь касаться первых двух поверхностей, не конкретизирует, в какой поверхности происходит отражение. Важно лишь, что все эти

поверхности принадлежат одному конфокальному семейству. Таким образом, в рассматриваемом случае будут осуществляться колебания четвертого типа, имеющие каустическими поверхностями два однополостных гиперболоида [2,3]. Колебания третьего типа осуществляться не могут ввиду наличия в системе симметрии вращения.

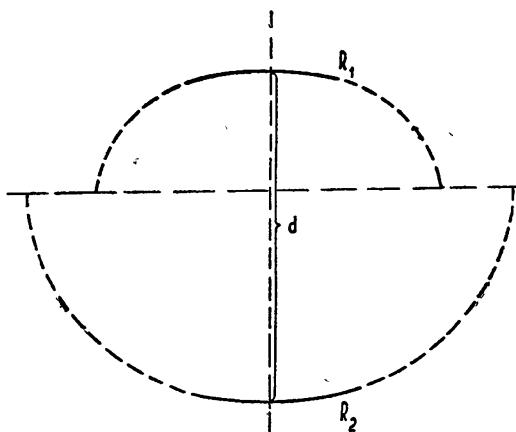


Рис. 1.

Пусть зеркала аппроксимируются эллипсоидами, принадлежащими семейству\*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1, \quad (1)$$

причем верхнему зеркалу соответствует  $\lambda = \lambda_1$ , а нижнему  $\lambda = \lambda_2$ . Полагая радиусы кривизны эллипсоидов в точке, где их пересекает малая ось, равными радиусами сферических зеркал, расстояние между зеркалами равным сумме малых полуосей эллипсоидов, получим систему уравнений:

$$R_1 = \frac{a^2 + \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad R_2 = \frac{a^2 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \\ d = \sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}. \quad (2)$$

Формально эта система всегда определяет неизвестные параметры  $a^2$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Однако физически интересен лишь случай, когда  $a^2 > 0$ .

Если  $a^2 < 0$ , то зеркала аппроксимируются либо двумя вытянутыми эллипсоидами вращения, либо эллипсоидом и гиперболоидом, большая ось которых расположена вдоль общей нормали к зеркалам. Как показано в работах [2,3], в конфокальном семействе не существует колебаний, поле которых сосредоточено вдоль большой оси эллипса. Интересующие нас колебания третьего и четвертого типов располагаются вдоль короткой оси эллипса. Поэтому, если зеркала аппроксимируются конфокальными поверхностями, большая ось которых расположена вдоль общей нормали обоих зеркал, то такие зеркала не обладают

\* Уравнение (1) отличается от уравнения конфокального семейства, используемого в работах [2–4], во-первых, тем, что  $C = 0$ , и, во-вторых, знаком при параметре  $\lambda$ . Поэтому формулы работ [2–4] используются в настоящей статье с соответствующими корректировками.

фокусирующими свойствами, и лучи между ними удерживаться не могут. Если же зеркала аппроксимируются двумя сплюснутыми эллипсоидами вращения, то образуются каустические поверхности, ограничивающие область, заполненную лучами, и, следовательно, зеркала являются фокусирующими.

Таким образом, при  $a^2 > 0$  зеркала будут фокусирующими, в то время как при  $a^2 < 0$  они дефокусирующие.

Решая систему (2) относительно  $a^2$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получим

$$a^2 = \frac{d(R_1-d)(R_2-d)(R_1+R_2-d)}{(R_1+R_2-2d)^2}, \quad (3)$$

$$\lambda_1 = a^2 - \frac{dR_1(R_2-d)}{R_1+R_2-2d}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = a^2 - \frac{dR_2(R_1-d)}{R_1+R_2-2d}. \quad (5)$$

Зависимость  $a^2$  от  $d$ , определяемая соотношением (3), показана на рис. 2, где для определенности положено  $R_1 < R_2$ . Легко видеть, что при  $0 < d < R_1$  или  $R_2 < d < R_1 + R_2$  происходит фокусировка лучей, а при  $R_1 < d < R_2$  или  $d > R_1 + R_2$  происходит дефокусировка лучей.

Как известно, «конфокальный резонатор» определяется условием  $d = R_1 = R_2$ . Такой резонатор неустойчив по отношению к малым возмущениям радиусов кривизны. Действительно, если  $R_1$  и  $R_2$  не точно равны друг другу, то при  $R_1 < d < R_2$  колебания с каустиками существовать не могут, и такой резонатор имеет лишь колебания с большими потерями на излучение\*.

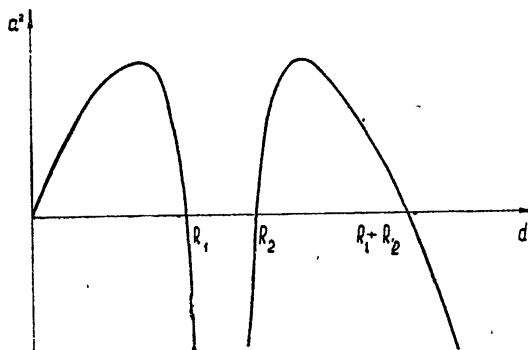


Рис. 2.

Особенно интересны такие конфигурации, при которых  $a^2$  обращается в нуль. Это происходит при  $d = 0$ ,  $d = R_1$ ,  $d = R_2$  и  $d = R_1 + R_2$ . Случай  $d = 0$  соответствует резонатору с плоскими зеркалами. При  $d = R_1 + R_2$  имеет место концентрический резонатор. Случаи  $d = R_1$  и  $d = R_2$ , очевидно, следуют приписать «конфокальному» резонатору.

По мере приближения  $d$  к одной из этих точек с фокусирующей стороны поперечная протяженность каждого колебания монотонно уве-

\* Результаты, подобные изложенным выше, получены в работе [6]. Однако наш вывод, опирающийся на геометрическую оптику, проще и нагляднее; поэтому мы сочли возможным привести его в настоящей работе.

личивается. При достаточной близости  $d$  к одной из этих точек поперечные размеры всех колебаний могут оказаться больше размеров зеркал или некоторой диафрагмы, ограничивающей поперечные размеры системы. При этом колебания будут иметь большие потери на излучение. Имеется также область значений  $d$ , где поперечный размер основного колебания меньше размеров диафрагмы, а размеры всех колебаний высших типов больше размеров диафрагмы. В этом случае основное колебание обладает высокой добротностью, в то время как высшие типы имеют малую добротность. При фиксированном продольном квантовом числе  $N_\xi$  резонатор будет иметь только одно колебание с высокой добротностью.

Для колебаний четвертого типа положение внешней и внутренней каустических поверхностей определяется формулами (26) и (27) работы [3]. В рассматриваемом случае эти формулы имеют вид

$$(V\tau_2 - \sqrt{\tau_1})^2 = \frac{2a}{k} (2N_\eta + 1), \quad \sqrt{\tau_2\tau_1} = \frac{a}{k} N_\zeta, \quad (6)$$

где  $\tau_2$  и  $\tau_1$  — параметры, определяющие положение внешней и внутренней каустических поверхностей в эллипсоидальной системе координат,  $N_\eta$  и  $N_\zeta$  — целые числа,  $a$  — параметр, определяемый соотношением (3),  $k$  — волновое число. Разрешая систему (6), получим для  $\tau$ , соответствующего внешней каустической поверхности, следующие значения:

$$\tau = \frac{a}{k} \left\{ (2N_\eta + N_\zeta + 1) + [(2N_\eta + 1)(2N_\eta + 2N_\zeta + 1)]^{1/2} \right\} = \frac{a}{k} f_{N_\eta N_\zeta}. \quad (7)$$

Для первых трех колебаний имеем

$$f_{00} = 2, \quad f_{10} = 6, \quad f_{01} = 2 + \sqrt{3}.$$

Для колебаний высших типов значения  $f$  еще большие.

Радиус каустической поверхности  $r$  связан с параметром  $\tau$  посредством соотношения (9) работы [3], которое в нашем случае принимает вид

$$r^2 = \tau (1 - \xi a^{-2}). \quad (8)$$

Нас будет интересовать радиус внешней каустической поверхности на зеркалах ( $\xi = \lambda_1$  и  $\xi = \lambda_2$ ). Используя соотношения (3), (4), (7) и (8), получим следующее выражение для радиуса каустической поверхности на первом зеркале (предполагается, что  $R_1 < R_2$ ):

$$r^2 = \frac{\tau(a^2 - \lambda_1)}{a^2} = \frac{f_{N_\eta N_\zeta} R_1}{k} \left[ \frac{d(R_2 - d)}{(R_1 - d)(R_1 + R_2 - d)} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Выражение для радиуса каустической поверхности на втором зеркале получается из выражения (9) заменой  $R_1$  на  $R_2$  и  $R_2$  на  $R_1$ .

Легко убедиться, что при  $0 < d < R_1$  радиус каустической поверхности на первом зеркале больше, чем на втором. Если же  $R_2 < d < R_1 + R_2$ , то радиус каустической поверхности на втором зеркале больше, чем на первом.

Выражения для радиусов каустической поверхности на зеркалах показывают, что при приближении  $d$  к  $R_1 + R_2$  эти радиусы на обоих зеркалах монотонно возрастают; при приближении  $d$  к  $R_1$  радиус каустической поверхности на первом зеркале увеличивается, а на втором стремится к нулю; при приближении  $d$  к  $R_2$  имеет место обратная кар-

тина — на первом зеркале радиус каустической поверхности стремится к нулю, а на втором монотонно возрастает.

Рассмотрим теперь вопрос о выборе размеров диафрагмы или (при заданной диафрагме) о выборе параметров резонатора так, чтобы малыми потерями на излучение обладало лишь основное колебание, а остальные выходили за пределы диафрагмы и поэтому имели низкую добротность. Будем полагать, что диафрагма радиусом  $\rho$  существенно уменьшает добротность колебания, если  $\rho \leq q r$ , где  $r$  — радиус каустической поверхности этого колебания и  $q$  — коэффициент порядка единицы (это значение  $q$  лежит примерно между 1,5 и 2,0).

Отсюда следует, что, если радиусы каустических поверхностей основного и следующего за ним колебаний равны соответственно  $r_{00}$  и  $r_{01}$ , то при условии

$$qr_{00} < \rho \leq qr_{01} \quad (10)$$

высокой добротностью будет обладать лишь основное колебание. Следует, однако, иметь в виду, что это условие имеет качественный характер и пользоваться им можно лишь при условии, если разница между  $r_{00}$  и  $r_{01}$  достаточно велика, как это имеет место в рассмотренном выше примере.

Ниже будем предполагать (хотя это и не обязательно), что диафрагма расположена в том месте, где поперечные размеры колебания максимальны. В частности, это условие автоматически выполнено, если диафрагмой служит цилиндрическая поглощающая трубка, протяженностью от зеркала до зеркала.

Если  $0 < d < R_1$ , то, подставляя (9) в соотношение (10) и преобразуя последнее, получим неравенства, определяющие размер диафрагмы:

$$f_{00} < \frac{k\rho^2}{q^2 R_1} \left[ \frac{(R_1 - d)(R_1 + R_2 - d)}{d(R_2 - d)} \right]^{1/2} \leq f_{01}. \quad (11)$$

При  $R_2 < d < R_1 + R_2$  имеют место аналогичные неравенства, отличающиеся от (11) лишь заменой  $R_1$  на  $R_2$  и  $R_2$  на  $R_1$ .

Приведем пример. Пусть  $R_2 = \infty$ , т. е. одно из зеркал плоское. Тогда неравенства (11) после преобразований примут вид

$$R_1(1 - 3,24 \cdot 10^{-3}) < d < R_1(1 - 0,93 \cdot 10^{-3}),$$

если  $q = 1,2$ ;  $f_{00} = 2$ ;  $f_{01} = 3,7$ ;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  см;  $R_1 = 10^2$  см;  $\rho = 3 \cdot 10^{-1}$  см. При выполнении этих неравенств только основное колебание будет высокодобротным. Весь интервал изменения  $d$  составляет около 2,2 мм.

## 2. РЕЗОНАТОРЫ С АСТИГМАТИЧНЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

В работе [3] было показано, что система, состоящая из сферического зеркала и плоскопараллельной пластины, расположенной перед зеркалом и наклоненной к лучам под углом Брюстера, в параксиальном приближении эквивалентна одному эллипсоидальному зеркалу с двумя радиусами кривизны, т. е. зеркалу, не обладающему симметрией вращения.

Произвольная гладкая поверхность характеризуется в каждой своей точке двумя радиусами кривизны. Поэтому интересно рассмотреть резонатор, образованный двумя зеркалами, каждое из которых имеет два радиуса кривизны. Попытаемся аппроксимировать эти зеркала конфокальными эллипсоидами. Сначала рассмотрим случай, когда линии кривизны одного зеркала параллельны линиям кривизны другого зеркала в тех точках, где зеркала пересекаются общим перпендикуляром. Очевидно,

видно, в этом случае мы имеем пять заданных параметров — радиусы кривизны первого зеркала  $R'_1$  и  $R''_1$ , радиусы кривизны второго зеркала  $R'_2$  и  $R''_2$  и расстояние между зеркалами  $d$ .

Для того, чтобы зеркала аппроксимировались конфокальными эллипсоидами, необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{aligned} R'_1 &= \frac{a^2 + \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad R''_1 = \frac{b^2 + \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \\ R'_2 &= \frac{a^2 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad R''_2 = \frac{b^2 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \\ d &= \sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — параметры, соответствующие первому и второму эллипсоидам,  $a^2$  и  $b^2$  — параметры конфокального семейства. Всего имеется пять уравнений и четыре неизвестных, т. е. рассматриваемая система зеркал может быть аппроксимирована конфокальными эллипсоидами не всегда, а лишь при определенном соотношении между  $R'_1$ ,  $R''_1$ ,  $R'_2$ ,  $R''_2$  и  $d$ . Исключая из уравнений (12) параметры  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , можно найти это соотношение:

$$d(R'_1 - R''_1 - R'_2 + R''_2) = R'_1 R''_2 - R''_1 R'_2. \tag{13}$$

Если линии кривизны одного зеркала повернуты на некоторый угол относительно линий кривизны другого зеркала, то такие зеркала ни при каком условии не аппроксимируются конфокальными эллипсоидами.

Рассмотрим фокусировку и дефокусировку лучей между зеркалами, которые невозможно аппроксимировать зеркальным эллипсоидом, начав с отражения лучей от произвольного зеркала (рис. 3). Пусть нормаль к отражающей поверхности в точке падения луча  $N = \{a, b, c\}$ ,

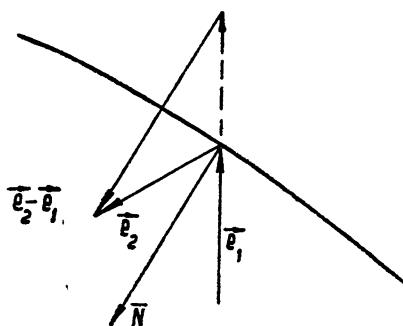


Рис. 3.

а единичными векторами падающего и отраженного лучей являются соответственно  $e_1 = \{a_1, b_1, \gamma_1\}$  и  $e_2 = \{a_2, b_2, \gamma_2\}$ . Закон отражения и условия единичности векторов  $e_1$  и  $e_2$  позволяют выразить  $a_2$ ,  $b_2$  и  $\gamma_2$  через  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - \frac{2a(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad b_2 = b_1 - \frac{2b(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)}{a^2 + b^2 + c^2}, \\ \gamma_2 &= \gamma_1 - \frac{2c(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим теперь зеркало, пересекающее ось  $z$  в точке  $(0, 0, d)$  и описываемое уравнением

$$z = d - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{R'_1} + \frac{y^2}{R''_1} \right) + \dots \quad (15)$$

Будем полагать, что лучи параксиальны. Это значит, что в единичных векторах лучей компоненты  $\alpha$  и  $\beta \ll 1$  и  $\gamma \approx 1$ , а координаты  $x$  и  $y \ll d$ . Как видно из уравнения (15), линии кривизны зеркала в точке  $(0, 0, d)$  параллельны осям  $x$  и  $y$ . Очевидно, для нормали к зеркалу справедливо выражение

$$\mathbf{N} = \left\{ -\frac{x}{R'_1}; -\frac{y}{R''_1}; -1 \right\} = \{a, b, c\}, \quad (16)$$

причем в параксиальном приближении длина вектора  $N$  равна единице.

Пусть некоторый исходный луч с направляющими косинусами  $\alpha_1, \beta_1, 1$  пересекает плоскость  $xy$  в точке  $(x_1, y_1, 0)$ . С зеркалом этот луч пересечется в точке с координатами

$$x' = x_1 + \alpha_1 d, \quad y' = y_1 + \beta_1 d. \quad (17)$$

Пользуясь формулами (14), легко написать выражения для направляющих косинусов  $\alpha, \beta$  отраженного луча

$$\alpha = \left( 1 - \frac{2d}{R'_1} \right) \alpha_1 - \frac{2}{R'_1} x_1, \quad \beta = \left( 1 - \frac{2d}{R'_1} \right) \beta_1 - \frac{2}{R''_1} y_1. \quad (18)$$

С плоскостью  $xy$  отраженный луч пересечется в точке с координатами

$$\begin{aligned} x &= x' + \alpha d = 2d \left( 1 - \frac{d}{R'_1} \right) \alpha_1 + \left( 1 - \frac{2d}{R'_1} \right) x_1, \\ y &= y' + \beta d = 2d \left( 1 - \frac{d}{R'_1} \right) \beta_1 + \left( 1 - \frac{2d}{R''_1} \right) y_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения  $p = d/R'_1, q = d/R''_1, u = x/d, v = y/d$  и перепишем соотношения (18) и (19) в виде единой системы

$$\begin{aligned} \alpha &= (1-2p) \alpha_1 - 2pu_1, \\ u &= 2(1-p) \alpha_1 + (1-2p) u_1, \\ \beta &= (1-2q) \beta_1 - 2qv_1, \\ v &= 2(1-q) \beta_1 + (1-2q) v_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь рассмотрим другое зеркало, пересекающее ось  $z$  в точке  $(0, 0, -d)$  и описываемое уравнением

$$z = -d + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{R'_2} + \frac{y^2}{R''_2} \right) + \dots \quad (21)$$

В качестве исходного луча возьмем луч, отраженный от первого зеркала. Очевидно, параметры луча, отраженного от второго зеркала, будут выражаться через параметры луча, отраженного от первого зеркала, посредством формул, аналогичных формулам (20). Изменение в этих формулах будет состоять лишь в замене  $p$  и  $q$  на  $p' = d/R'_2$  и  $q' = d/R''_2$ .

Для того, чтобы параметры луча, отраженного от второго зеркала, выразить через параметры луча, падающего на первое зеркало, нужно

последовательно применить формулы (20) и аналогичные им для отражения от второго зеркала. В результате получим

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= (8pp' - 2p - 6p' + 1) \alpha_n + (8pp' - 2p - 2p') u_n, \\ u_{n+1} &= (8pp' - 6p - 6p' + 4) \alpha_n + (8pp' - 6p - 2p' + 1) u_n, \\ \beta_{n+1} &= (8qq' - 2q - 6q' + 1) \beta_n + (8qq' - 2q - 2q') v_n, \\ v_{n+1} &= (8qq' - 6q - 6q' + 4) \beta_n + (8qq' - 6q - 2q' + 1) v_n.\end{aligned}\quad (22)$$

Мы ввели индексы  $n+1$  и  $n$ , так как эти формулы будут описывать и все последующие отражения от двух зеркал.

Решение системы (22) будем искать в виде

$$\alpha_n = \alpha e^{i\nu n}, \quad u_n = ue^{i\nu n}, \quad \beta_n = \beta e^{i\nu n}, \quad v_n = ve^{i\nu n}. \quad (23)$$

Подстановка (23) в (22) приводит к однородной системе из четырех уравнений. Условием разрешимости является равенство нулю определителя системы. Это условие представляет собой характеристическое уравнение, определяющее частоту колебаний  $\nu$ , и имеет следующий вид:

$$[e^{2i\nu} - 2(8pp' - 4p - 4p' + 1)e^{i\nu} + 1][e^{2i\nu} - 2(8qq' - 4q - 4q' + 1)e^{i\nu} + 1] = 0. \quad (24)$$

Решение (23) является периодическим, если  $\nu$  — действительная величина. Из уравнения (24) нетрудно заключить, что условием действительности  $\nu$  является одновременное выполнение двух неравенств

$$\begin{aligned}(8pp' - 4p - 4p' + 1)^2 &< 1, \\ (8qq' - 4q - 4q' + 1)^2 &< 1.\end{aligned}\quad (25)$$

Расчеты показывают, что первое неравенство выполняется в двух областях:  $0 < d < R'_1$  и  $R'_1 < d < R'_1 + R''_1$  (предполагается, что  $R'_1 < R''_1$ ). Второе неравенство также выполняется в двух областях:  $0 < d < R'_2$  и  $R''_2 < d < R'_2 + R''_2$  ( $R'_2 < R''_2$ ). Эти области такие же, как полученные в первом разделе для зеркал, аппроксимируемых эллипсоидами; однако теперь выполнение этих неравенств характеризует фокусировку лучей лишь в одном из двух взаимно-перпендикулярных направлений.

Теперь рассмотрим случай, когда линии кривизны двух противостоящих зеркал не параллельны друг другу. Пусть, например, линии кривизны верхнего зеркала параллельны осям  $x'$ ,  $y'$ , повернутым на угол  $\varphi$  относительно осей  $x$ ,  $y$ . Координаты  $x'$  и  $y'$  связаны с координатами  $x$  и  $y$  посредством соотношений

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (26)$$

Уравнение верхнего зеркала теперь имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}z = d - \frac{1}{2} \left[ x^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R'_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R''_1} \right) + 2xy \cos \varphi \sin \varphi \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right) + y^2 \left( \frac{\sin^2 \varphi}{R'_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{R''_1} \right) \right] + \dots\end{aligned}$$

или в новых обозначениях

$$z = d - \frac{1}{2} \left( x^2 \frac{p}{d} + 2xy \frac{r}{d} + y^2 \frac{q}{d} \right) + \dots \quad (27)$$

Нормаль к зеркалу

$$\bar{N} = \left\{ -x \frac{p}{d} - y \frac{r}{d}; \quad -x \frac{r}{d} - y \frac{q}{d}; \quad -1 \right\}.$$

Пользуясь формулами (14) и (17), получим

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - 2p) \alpha_1 - & 2pu_1 - & 2r\beta_1 - & 2rv_1, \\ u &= 2(1 - p) \alpha_1 + & (1 - 2p) u_1 - & 2r\beta_1 - & 2rv_1, \\ \beta &= -2r\alpha_1 - & 2ru_1 + & (1 - 2q)\beta_1 - & 2qv_1, \\ v &= -2r\alpha_1 - & 2ru_1 + & 2(1 - q)\beta_1 + & (1 - 2q)v_1, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\alpha, u, \beta, v$  — параметры отраженного луча,  $\alpha_1, u_1, \beta_1, v_1$  — параметры падающего луча. Отражение от нижнего зеркала описывается формулами, аналогичными (20). Последовательное применение формул, характеризующих отражение от верхнего и нижнего зеркал, даст нам преобразование от  $n$ -го луча к  $n + 1$ -му. Мы выпишем лишь матрицу этого преобразования:

$$\begin{array}{cccc} 8pp' - 2p - 6p' + 1 & 8pp' - 2p - 2p' & 8rp' - 2r & 8rp' - 2r \\ 8pp' - 6p - 6p' + 4 & 8pp' - 6p - 2p' + 1 & 8rp' - 6r & 8rp' - 6r \\ 8rq' - 2r & 8rq' - 2r & 8qq' - 2q - 6q' + 1 & 8qq' - 2q - 2q' \\ 8rq' - 6r & 8rq' - 6r & 8qq' - 6q - 6q' + 4 & 8qq' - 6q - 2q' + 1. \end{array} \quad (29)$$

Аналогично тому, как это делалось выше, можно написать характеристическое уравнение.

$$\begin{aligned} [e^{2i\nu} - 2(8pp' - 4p - 4p' + 1) e^{i\nu} + 1] [e^{2i\nu} - 2(8qq' - 4q - 4q' + 1) e^{i\nu} + 1] - \\ - 64r^2 e^{2i\nu} (2p' - 1)(2q' - 1) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Это уравнение четвертой степени, которое, однако, легко решается. Оно сводится к уравнению

$$\cos^2 \nu - (A + B) \cos \nu + (AB - C) = 0, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 8pp' - 4p - 4p' + 1, \quad B = 8qq' - 4q - 4q' + 1, \\ C &= 16r^2 (2p' - 1)(2q' - 1). \end{aligned} \quad (32)$$

Решение уравнения (31) имеет вид

$$\cos \nu = \frac{(A+B) \pm \sqrt{(A-B)^2 + 4C}}{2}. \quad (33)$$

Решение будет иметь периодический характер, если  $\nu$  — величина действительная. Для этого необходимо, чтобы подкоренное выражение в формуле (33) было положительным и чтобы величина, стоящая в правой части формулы (33), была меньше единицы по абсолютной величине.

В качестве примера рассмотрим два цилиндрических зеркала, расположенные друг против друга так, что образующие одного зеркала повернуты относительно образующих другого зеркала на угол  $\varphi$ . Радиусы кривизны первого зеркала равны  $R'_1 = 2d$  и  $R''_1 = \infty$ , где  $d$  — расстояние между зеркалами. Радиусы кривизны второго зеркала равны  $R'_2 = 2d$  и  $R''_2 = \infty$ . Таким образом, имеем

$$p = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi, \quad r = \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi, \quad q = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi, \quad p' = \frac{1}{2}, \quad q' = 0.$$

Производя вычисления согласно (32) и (33), получим для  $\cos \nu$  два значения:

$$\cos \nu_1 = -1 \quad \text{и} \quad \cos \nu_2 = \cos(2\varphi).$$

Итак, колебания лучей между такими зеркалами имеют периодический характер. Однако это движение неустойчиво по отношению к малому возмущению радиусов кривизны цилиндрических зеркал. Действительно, если  $R'_1 = 2d(1-\Delta)$  и  $R'_2 = 2d(1-\Delta')$ , то для  $\cos \nu$  получим следующие значения:  $\cos \nu_1 \approx -1 + 2\Delta\Delta'/\cos^2 \varphi$ ;  $\cos \nu_2 \approx \cos 2\varphi - 4(\Delta+\Delta') \sin^2 \varphi$ . Легко видеть, что при  $\Delta\Delta' < 0$  величина  $\cos \nu_1 < -1$ . Это значит, что движение лучей теряет периодический характер, и зеркала становятся дефокусирующими. Таким образом, рассматриваемый резонатор, состоящий из цилиндрических зеркал, неустойчив по отношению к малому возмущению радиусов кривизны зеркал.

В заключение отметим, что исследование резонаторов в первом и втором разделах проводилось существенно разными методами. В первом разделе резонаторы аппроксимировались зеркальным эллипсоидом, а во втором исследование проводилось в параксиальном приближении методом конечных разностей. Первый метод обладает тем преимуществом, что с его помощью получается большая информация. Поэтому было бы интересно развить аналогичный метод для резонаторов, не аппроксимируемых зеркальным эллипсоидом.

Автор благодарен Л. А. Вайнштейну за многочисленные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Быков, Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 47, 508 (1964).
2. В. П. Быков, ДАН СССР, 162, 46 (1965).
3. В. П. Быков, Сб. Электроника больших мощностей, № 4 (1965).
4. В. П. Быков, Радиотехника и электроника (в печати).
5. O. Stande, Die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, Leipzig, 1896.
6. G. D. Boyd, H. Kogelnik, Bell Syst. Techn. J., 41, 1347 (1962).

Поступила в редакцию  
7 июля 1965 г.

#### RAY FOCUSING BETWEEN SMOOTH MIRRORS

V. P. Bykov

The resonators formed by the concaved mirrors is shown to be both focusing and defocusing; the conditions have been ascertained when the mirrors become focusing. The conditions have been defined when the single mode oscillation corresponds to each longitudinal "quantum number", i. e. the so-called one-mode regime takes place for the transverse oscillations. The rays' focusing has been considered in the resonators, being not approximated by the mirror ellipsoid.

УДК 621.378 325.001

## ПОЛЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ФОКУСИРОВАННОЕ РЕАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

*Б. Я. Зельдович, Н. Ф. Пилипецкий*

Выполнен расчет амплитуды поля идеального параллельного лазерного пучка при фокусировке оптическими системами со сферической aberrацией.

Рассмотрено поле при фокусировке с помощью конической линзы; отмечено, что такая система весьма удобна для реализации векторного синхронизма при генерации гармоники света.

Как известно, фокусировка когерентного лазерного света дает возможность получать весьма большую амплитуду поля световой волны и наблюдать в фокусе ряд пороговых эффектов типа пробоя воздуха и многоквантовой ионизации. Однако достигаемые значения поля пока еще значительно меньше, чем это следует по теоретическим оценкам для идеальной фокусировки идеального пучка. В настоящее время основную неидеальность вносит сам лазерный пучок, расходимость которого значительно превышает идеальный дифракционный минимум. В данной работе, однако, рассматривается другой аспект задачи — вычисление амплитуды светового поля при фокусировке идеального пучка (для простоты круглого сечения) с помощью систем со сферической aberrацией. (К таким системам относятся все одиночные линзы.)

Для простоты все формулы записаны без учета векторного характера электромагнитного поля. Специфические векторные свойства подобных задач обсуждаются, например, в работах [2, 3]; при не слишком больших углах фокусировки  $\theta_1$  (см. ниже) амплитуда векторного поля будет отличаться от приводимых в работе скалярных выражений на множители типа  $\cos \theta_1$ , близкие к 1.

В данной работе основной упор сделан на вычисление абсолютной величины амплитуды поля в пространстве, в отличие от многочисленных работ по оптике, где главным образом отыскивается относительное распределение освещенностей в плоскости изображения.

Содержание первого раздела имеет справочный характер и служит в основном для введения обозначений и формулировки исходных предположений. Во втором разделе приведены асимптотические выражения для поля при больших aberrациях. В третьем разделе рассчитано поле при aberrации 2-го порядка произвольной величины. На основании полученных в этом разделе результатов сделан вывод о существовании оптимального (при заданных форме линзы и диаметре пучка) фокусного расстояния, обеспечивающего максимальное локальное значение поля. В четвертом разделе обсуждается возможность использования конической линзы для создания длинной нити с большим полем и постоянным эффективным волновым вектором и для реализации векторного синхронизма в нелинейной оптике.

## 1. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы будем предполагать, что входной пучок является идеальным, имеет форму круга диаметром  $D$  в сечении и амплитуду поля  $E_0$ , постоянную по сечению. Предполагается также, что пучок падает вдоль оси оптической системы. После фокусировки такого пучка линзой с фокусным расстоянием  $f$  угол наклона крайнего пучка к оси  $\theta_0 \approx D/2f$ . Мощность, переносимая пучком, равна ( $n$  — показатель преломления)

$$W = \frac{1}{2} \frac{cn}{4\pi} E_0^2 \frac{\pi D^2}{4}. \quad (1)$$

Волновое число  $k = n\omega/c = 2\pi/\lambda$  для излучения рубинового лазера в вакууме равно  $0,91 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ . Интеграл Гюйгенса-Френеля, на основании которого выполнены все вычисления, имеет вид (ср. [1], § 59)

$$E(\mathbf{r}') = k(2\pi i)^{-1} \int dS_n E(\mathbf{r}) R^{-1} e^{ikR}, \quad (2)$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

При фокусировке пучка параллельных лучей, идущих вдоль оси оптической системы, существенна только сферическая aberrация. На языке геометрической оптики она может быть охарактеризована зависимостью координаты  $l_1$  пересечения луча с осью от угла  $\theta_0$ , составляемого лучом с осью. Вследствие аксиальной симметрии функция  $l_1(\theta)$  — четная и поэтому разлагается в ряд по чётным степеням  $\theta$  или  $\operatorname{tg} \theta$  (употребление  $\operatorname{tg} \theta$  объясняется чисто формальными соображениями удобства — см. ниже):

$$l_1(\theta) = f + a_2(\operatorname{tg} \theta)^2 + a_4(\operatorname{tg} \theta)^4 + \dots \quad (3)$$

Ограничивааясь нулевым членом разложения, мы получаем приближение гауссовой или параксиальной оптики. Важно, однако, подчеркнуть, что коэффициенты  $a_2, a_4, \dots$  имеют ту же размерность, что и  $f$ , и для простых, не специально исправленных систем имеют тот же порядок величины, что и  $f$ . Для дальнейшего нам удобно обозначить  $m = |a_2|/f$ .

Приведем для справок (см. [4]) выражение для  $a_2$  в случае «собирающей» тонкой линзы из вещества с показателем преломления  $n$  со сферическими поверхностями радиусов  $r_1$  и  $r_2$  и гауссовым фокусным расстоянием  $f = [(n-1)(r_1^{-1} + r_2^{-1})]^{-1}$  (поверхность  $r_1$  обращена к параллельному пучку):

$$a_2 = -\frac{f}{2} \left[ \left( \frac{n}{n-1} \right)^2 - \frac{2n+1}{n-1} \frac{f}{r_1} + \frac{n+2}{n} \frac{f^2}{r_1^2} \right]. \quad (4)$$

Минимальное (по модулю) значение  $a_2$  для  $n = 1,5$  получается при  $fr_1^{-1} = 1,71$  и равно  $a_2 = -1,07$ . Этому соответствует почти плоско-выпуклая линза с выпуклостью, обращенной к параллельному пучку. Для сферического зеркала радиусом  $r$  ( $f=r/2$ ) величина  $a_2 = -f/8$  (знак минус здесь означает, что приосевые лучи фокусируются дальше от зеркала, чем крайние).

Сферические aberrации возникают и при фокусировке света «идеальным» (т. е. абсолютно исправленным относительно сферической aberrации) объективом внутрь вещества с  $n \neq 1$  через его плоскую границу. В этом случае, например,  $a_2 = (l/2)(1-n^{-2})$ , где  $l$  — расстояние от параксиального фокуса внутри вещества до плоской границы ( $a_2 > 0$ ).

Ограничивааясь членами до  $a_2 \operatorname{tg}^2 \theta$  включительно, мы получим, что минимальный диаметр «кружка рассеяния» будет равен  $(1/2)a_2 \operatorname{tg}^2 \theta_0$ .

Однако распределение амплитуды в этом кружке может быть сильно неоднородным. Как известно (см. [1], § 54) любая не плоская волна имеет, вообще говоря, две каустические поверхности, являющиеся геометрическим местом центров кривизны поверхности волнового фронта. Лучи, являющиеся нормалями к волновому фронту, касаются каустик. На каустиках в приближении геометрической оптики поле обращается

в бесконечность; поэтому правильно поле здесь может быть подсчитано только с учетом дифракционных явлений. В случае аксиально-симметричного волнового фронта одна из каустик вырождается в отрезок оси (см. рис. 1), вторая же является поверхностью вращения, описываемой уравнениями (см. [5], § 118)

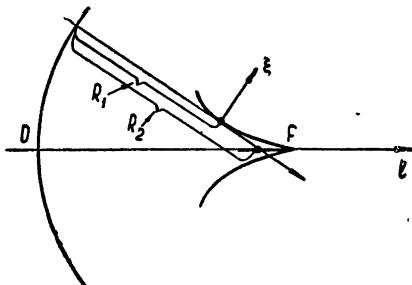


Рис. 1.

$$\begin{aligned} l_k &= l_1(u) + u dl_1/du, \\ r_k &= u^2 dl_1/du \quad (u = \tan \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

В частном случае идеального сферического волнового фронта обе каустики сливаются в одну точку — центр сферы.

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ НА КАУСТИКАХ

Для вычисления поля по формуле (2) нужно точно знать расстояние  $R$  от точки  $(x, 0, 0)$ , в которой мы хотим вычислить поле, до волновой поверхности  $x' = X(y', z')$ . В общем случае (см. [1], § 59)  $X$  и  $R$  задаются выражениями

$$X(y', z') \simeq y'^2/2R_1 + z'^2/2R_2,$$

$$R = [(x - X)^2 + y'^2 + z'^2]^{1/2} \simeq x + y'^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right) 2^{-1} + z'^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right) 2^{-1},$$

где  $x$  — расстояние от волновой поверхности по нормали до точки наблюдения,  $R_1$  и  $R_2$  — такие же расстояния до центров кривизны волнового фронта (до каустик). Интеграл (2) по элементу площади  $ds = dy' dz'$  распадается на произведение двух интегралов, каждый из которых дает сомножитель  $|R_i/(R_i - x)|^{1/2}$ ; результирующее выражение есть обычное поле в приближении геометрической оптики:

$$E(x) = \frac{E_0 \sqrt{R_1 R_2} e^{ikx}}{[(R_1 - x)(R_2 - x)]^{1/2}}. \quad (6)$$

При  $x$ , близком к  $R_1$  (вблизи каустики 1), в разложении  $X(y', z')$  по  $y'$  нужно учитывать члены более высокого порядка (в общем случае — третьего); тогда интеграл по  $dy'$  дает функцию Эйри, а интеграл по  $dz'$  остается тем же. В результате поле вблизи обычной (двухмерной) каустики дается формулой [1]

$$E = E_0 \frac{\sqrt{kR_1 kR_2}}{\sqrt{k(R_1 - R_2)}} \left( \frac{2}{k\rho} \right)^{1/3} \Phi(\xi [2k^2/\rho]^{1/3}). \quad (7)$$

Здесь  $\rho$  — радиус кривизны сечения рассматриваемой каустики плоскостью, нормальной к ней и проходящей через луч. Координата  $\xi$  отсчитывается от каустики по нормали к ней в сторону вогнутости (геометри-

ческой тени; см. рис. 1). Функция Эйри  $\Phi(t)$  наиболее велика в области  $-1.5 \leq t \leq 0.5$ , где она достигает значений порядка единицы (подробнее см. в [1]).

В нашем случае радиус кривизны двухмерной каустики может быть записан в виде

$$\rho = \frac{1}{\cos \theta} \frac{dr_k}{d\theta} = (1+u^2)^{3/2} \frac{dr_k}{du}. \quad (8)$$

Легко видеть также, что

$$R_1 \simeq \frac{l_1(\theta)}{\cos \theta}, \quad R_1 - R_2 = \frac{r_k}{\sin \theta}. \quad (9)$$

Фаза вдоль двухмерной каустики меняется по ее длине так же, как и в плоской волне\*; это следует из свойства луча касаться каустики.

Для случая осевой каустики опять-таки один из интегралов остается таким же, как в геометрической оптике, но во второй интеграл дает вклад вся окружность на волновом фронте, лучи с которой светят в данную точку оси. В результате поле вблизи осевой каустики (на расстоянии  $r$  от оси) равно

$$E = E_0 \frac{\sqrt{kR_1 kR_2} \sqrt{2\pi} \sin \theta}{\sqrt{k(R_1 - R_2)}} J_0(kr \sin \theta). \quad (10)$$

Здесь  $J_0$  — бесселева функция,  $J_0(0) = 1$ . Фаза  $\phi$  вдоль осевой каустики меняется так, что

$$k_{\text{эфф}} = d\phi/dl = k \cos \theta(l). \quad (11)$$

В параксиальной области все определяется членом  $a^2 u^2$  ( $u = \tan \theta$ ). При этом происходит полукубическое касание двухмерной каустики к оси

$$\begin{aligned} l_k &= f + 3a_2 u^2, \\ r_k &= 2a_2 u^3. \end{aligned} \quad (5a)$$

Максимальная амплитуда поля достигается на осевой каустике, где ее значение постоянно: подставляя  $R_1 = f$  и  $R_1 - R_2$  из (9) в (10), мы получим

$$E = E_0 \frac{kf}{\sqrt{k|a_2|}} \sqrt{\pi} J_0(kr \theta(l)). \quad (10a)$$

Формулы (7), (10) получены путем асимптотического вычисления интеграла (2) и поэтому справедливы лишь при весьма больших aberrациях и не слишком малых углах  $\theta$ . В разделе 3 будет получено точное выражение для поля на оси, из которого будет видно, каковы пределы применимости формулы (10a). Однако уже заранее ясно, что для четкой идентификации осевой каустики и применимости формулы (10a) необходимо, чтобы минимальный размер «кружка рассеяния»  $a_2 \tan^3 \theta_1$  был значительно больше дифракционной толщины каустики  $\lambda/\theta_1$ , т. е. при

$$a_2 \theta_1^4 \gg \bar{\lambda} (\bar{\lambda} = \lambda/2\pi). \quad (12)$$

\* Не путать с набегом фазы  $\pi/2$  на данном луче при прохождении его мимо каустики.

### 3. ПОЛЕ НА ОСИ ПРИ АБЕРРАЦИИ 2-ГО ПОРЯДКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

С точки зрения волновой оптики сферическая aberrация может быть охарактеризована зависимостью расстояния точек волнового фронта до параксиального фокуса от угла  $\theta$ :

$$R_f(\theta) = f + b_4 \theta^4 + b_6 \theta^6 + \dots \quad (13)$$

Обе характеристики — геометрическая и волновая — однозначно связаны друг с другом; в частности,  $b_4 = a_2/4$ . Легко видеть, что при условии (12) разность хода для крайнего и осевого лучей  $\Delta = R_f(\theta_1) - R_f(0)$  значительно превышает длину волны; именно в этом случае возможно асимптотическое вычисление интеграла (2).

Записывая теперь интеграл (2) для точки на оси с координатой  $l$ ,  $x=l-f$ , будем иметь (не предполагая выполнения условия (12))

$$R \simeq R_f(0) + (l-f) \cos \theta \simeq l - x \theta^2/2 + b_4 \theta^4;$$

$$E(l) \simeq E_0 k (2\pi i)^{-1} f 2\pi \int_0^{\theta_1} \theta d\theta e^{ikR}.$$

Преобразование этого интеграла приводит к табличным интегралам Френеля  $C(v)$  и  $S(v)$ . Именно, введем приведенное фокусное расстояние  $h$ :

$$h = f D^{-1} 4\pi^{-1/3} (kD/2)^{-1/3} m^{-1/3}. \quad (14)$$

Тогда

$$|E(l)| = E_0 (kD/2)^{2/3} \pi^{2/3} 2^{-1} m^{1/6} h^{1/2} |F(-x \sqrt{\pi k/8a_2}, h^{-3/2})|. \quad (15)$$

Здесь

$$F(a, b) = \int_a^{a+b} \exp\left(i \frac{\pi}{2} v^2\right) dv = [C(a+b) - C(a)] + i[S(a+b) - S(a)]. \quad (16)$$

Формула (15) решает поставленную в этом разделе задачу.

При  $x=0$  (в параксиальном фокусе) при  $h \gg 1$  с хорошей точностью выполняется равенство

$$h^{1/2} F(0, h^{-3/2}) = h^{-1} \quad (17)$$

и формула (15) дает хорошо известное выражение для амплитуды поля в фокусировке при безаберрационной фокусировке:

$$E = E_0 k f \theta_1^2 / 2 = E_0 k f (D/2f)^2 / 2. \quad (18)$$

В противоположном предельном случае (при  $h \ll 1$ ) один из аргументов  $a$ ,  $a+b$  можно заменить на  $-\infty$  или  $\infty$  соответственно\*. Тогда поле на каустике (например, вблизи параксиального фокуса) будет даваться выражением

$$E(l) = E_0 k f \frac{1}{\sqrt{k a_2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(v) \right] + i \left[ \frac{1}{2} + S(v) \right] \right\}, \quad (19)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k(l-f)}{2\sqrt{k|a_2|}} \frac{a_2}{|a_2|}.$$

При  $v \gg 1$   $S(v) = C(v) = 1/2$  и выражение (19) переходит в (10a) с  $r=0$ .

\* Легко видеть, что условие  $h \ll 1$  эквивалентно условию (12).

График квадрата  $|E(l)|^2$  как функции  $l$  имеет такой же вид, как зависимость поля от расстояния до границы геометрической тени при дифракции Френеля (см. [1], § 60). Радиус приосевой области с большим полем, определяемым формулой (19),

$$r \sim \min \{ \bar{\lambda}/\theta(x); \bar{\lambda}(ka_2)^{1/4} \}. \quad (20)$$

При  $v < 0$ ,  $|v| \gg 1$  выражение (19) переходит в выражение (6), даваемое геометрической оптикой. Максимальная напряженность поля по (19) в 1,17 раз больше, чем на каустике вдали от ее конца и достигается при  $v = 1,2$ . Аналогичный максимум такой же амплитуды имеется и вблизи второго конца осевой каустики.

С практической точки зрения большой интерес представляет нахождение максимального значения поля в пространстве (т. е. для всевозможных значений  $x$ ) при заданных параметрах фокусирующей системы. Величина этого максимума зависит от приведенного фокусного расстояния по закону

$$E_{\max} = E_0(kD/2)^{2/3} \pi^{2/3} 2^{-1} m^{1/6} Z(h), \quad (21)$$

где функция

$$Z(h) = \max \{ h^{1/2} |F(y, y + h^{-3/2})| \} \quad (22)$$

$$(-\infty < y < +\infty)$$

приведена на рис. 2. Для сравнения пунктирными линиями показаны значения поля, даваемые асимптотической формулой (10а) для поля на каустике ( $OA$ ), асимптотической формулой для максимума поля вблизи конца каустики ( $OB$ ); при этом  $Z$  (на  $OB$ ) = 1,17  $Z$  (на  $OA$ ) = 1,17( $2h$ )<sup>1/2</sup> и формулой (18) для безаберрационного случая (на  $CD$ ; при этом  $Z(h) = h^{-1}$ ). Максимум  $Z(h)$  лежит вблизи  $h = 0,6$  и равен 1,4. Таким

образом, при заданных диаметре идеального пучка  $D$  и конструкции линзы (параметр  $m$ ) наибольшее поле достигается при

$$f = D \cdot 0,1 m^{1/3} (kD/2)^{1/3}; \quad (23)$$

оно равно

$$E_{\max \text{ max}} = 1,03 E_0 (kD/2)^{2/3} m^{1/6}. \quad (24)$$

Из рис. 2 видно так же, что функция  $Z(h)$  не сильно отличается от асимптотического и безаберрационного пределов при  $h < 0,55$  и  $h > 0,65$  соответственно.

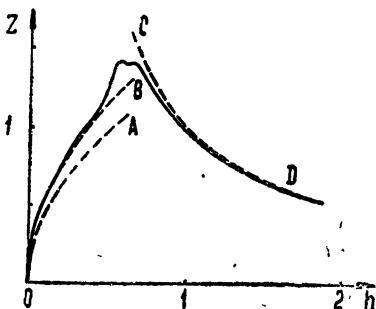


Рис. 2.

#### 4. КОНИЧЕСКАЯ ЛИНЗА

Основным препятствием к прямому применению изложенных выше результатов является собственная угловая расходимость лазерного пучка, значительно превышающая дифракционную. Однако свойства лазерного пучка с точки зрения этой задачи отнюдь не могут быть охарактеризованы одним числом — углом расхождения; требуется еще задать степень когерентности отдельных плоских волн, идущих под разными углами. Примером является случай, когда лазерный пучок представляет собой часть идеальной сферической волны с конечным углом: в этом случае свойства фокусировки (сферические aberrации, каустики) практи-

тически не отличаются от случая с идеальной плоской волной, и поэтому все изложенное выше непосредственно годится и здесь.

Отметим, что учет осевых каустик и их свойств может оказаться весьма важным при наблюдении автоканализации световых пучков (см. [6, 7]). При этом, во-первых, не следует путать осевую каустику с автоканализирующимся пучком, и во-вторых, поле каустики может облегчать выполнение условий для начала канализации.

Для эффектов типа генерации гармоник или стимулированного комбинационного рассеяния осевые каустики с большим полем также могут играть важную роль. Для этих эффектов важно значение эффективного волнового вектора — формула (11). В частности, иногда нужно иметь  $k_{\text{эфф}}$  строго постоянным для выполнения условий синхронизма (см. [8]). Этого можно добиться, используя линзы или зеркала с коническими (а не сферическими) поверхностями. Для них  $\theta(l)=\text{const}$ , можно сказать, что импульсы фотонов лежат не во всем телесном угле, а лишь на конусе направлений под углом  $\theta$  к оси. При этом, согласно (9),  $R_2 = \infty$ ,  $R_2 - R_1 = \infty$ ,  $R_2(R_2 - R_1) = 1$  и поле вблизи оси

$$E = E_0 \sqrt{\pi k D \sin \theta} \sqrt{l/l_{\max}} J_0(kr \sin \theta). \quad (25)$$

Здесь  $l_{\max} = D/2 \operatorname{tg} \theta$ .

Естественно, такая система не может обеспечить синхронизма при нормальной дисперсии, так как  $k = k_0 \cos \theta$ ; однако в области с аномальной дисперсией (для кристалла KDP — при  $\theta > \theta_m$ ) с помощью этой системы весьма эффективно можно реализовать векторный синхронизм.

Возможно, что конические оптические системы могут стать полезными и в других случаях — там, где нужно создать в прозрачном веществе большое значение поля вдоль очень тонкой нити ( $r \sim \lambda/0$ ) столь сильное поле, что будет иметь место разрушение вещества нити или большое тепловыделение.

## ЛИТЕРАТУРА

- Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
- Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1049 (1964).
- A. Boivin, E. Wolf, Phys. Rev., 138, 1561 B (1965).
- Г. Г. Слюсарев, Геометрическая оптика, гл. III, изд. АН СССР, М., 1946.
- Тудоровский, Теория оптических приборов, 1, § 118, изд. АН СССР, М., 1948.
- Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962); В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 564 (1964); R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964); см. также УФН, 87, 169 (1965).
- Н. Ф. Пилипецкий, А. Р. Рустамов, Письма ЖЭТФ, 2, 88 (1965).
- С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, ИНИ АН СССР, М., 1964.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 апреля 1965 г.

## LASER-RADIATION FIELD, FOCUSED BY REAL SYSTEMS

B. Ya. Zel'dovich, N. F. Pilipetskii

The calculation of field amplitude has been fulfilled in an ideal parallel laser beam when focusing by the optical systems with the spherical aberration. The field has been considered when focusing by the conical lens; this system is noted to be rather suitable for the vector synchronism realization when generating the light harmonics.

УДК 621.373.072.9

## ВЛИЯНИЕ БОЛЬШИХ ФЛУКТУАЦИЙ КОНТУРНОЙ ЕМКОСТИ НА РАБОТУ СИСТЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ ГЕНЕРАТОРОВ

*Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов*

Рассмотрено влияние больших медленных флюктуаций контурной емкости на работу томсоновского генератора, стабилизированного по частоте системой синхронизации или системой фазовой автоподстройки. Для шаговой модели флюктуаций емкости получена зависимость остаточной расстройки от интенсивности флюктуаций и начальной расстройки частот генераторов. Определен вид спектра колебаний генератора и дан расчет его ширины в зависимости от интенсивности флюктуаций и начальной расстройки.

1. Вопрос о влиянии флюктуаций контурной емкости на работу томсоновского генератора, стабилизированного по частоте системой синхронизации или системой фазовой автоподстройки (ФАП), с идеальным прямоугольным фильтром низких частот, был рассмотрен в статье [1]. В этой работе были получены укороченные уравнения, описывающие флюктуации амплитуды и фазы такого генератора, и найдены некоторые статистические характеристики колебаний для частного случая достаточно малых флюктуаций контурной емкости, когда возможна линеаризация уравнений.

В настоящей статье исследуются характеристики фазовых флюктуаций генератора в случае достаточно интенсивных флюктуаций контурной емкости, когда в системе синхронизации временами возможен выход генератора из полосы захвата. Разность фаз подстраиваемого и эталонного генераторов при этом нельзя считать малой, и для отыскания фазовых флюктуаций необходимо решать нелинейное уравнение, полученное в работе [1]:

$$\varphi + \sin \varphi = -\Delta - \xi(t). \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  — мгновенная разность фаз эталонного генератора, имеющего частоту  $\omega_{\text{эт}}$  и подстраиваемого генератора, собственная частота которого в отсутствие синхронизирующего напряжения равна  $\omega_0$ ;  $\xi(t) = (\omega_{\text{эт}}/2\Delta_0)\delta c(t)$ ,  $\delta c(t)$  — относительные флюктуации контурной емкости,  $\Delta_0$  — полоса синхронизации генератора (полоса схватывания) в отсутствие флюктуаций емкости,  $\Delta = (\omega_{\text{эт}} - \omega_0)/\Delta_0$  — относительная начальная расстройка частот генераторов. В уравнении (1) введено безразмерное время  $t = \Delta_0 t_{\text{разм}}$ .

Решить нелинейное уравнение (1) в общем виде для произвольного случайного воздействия  $\xi(t)$  не представляется возможным. Для случая дельта-коррелированных значений  $\xi(t)$  аналогичное уравнение достаточно подробно исследовалось в работах [2, 3]. В рассматриваемой задаче, однако, этими результатами нельзя воспользоваться, поскольку нас как раз интересуют достаточно медленные флюктуации емкости, существенные в ряде практических задач.

2. Для простоты анализа примем шаговую модель флюктуаций емкости, т. е. будем считать, что в течение времени, равного времени корреляции  $\tau_{\text{кор}}$ , емкость имеет некоторое постоянное значение, которое

затем меняется скачком, причем значение емкости после скачка не зависит от значения, предшествовавшего скачку. В этом случае на интервале времени между двумя скачками решение уравнения (1) записывается в квадратурах. Вид этого решения будет различным в зависимости от значений правой части  $\xi + \Delta$ .

а) Если  $|\xi + \Delta| \leq 1$  (что соответствует по  $\xi$  области  $A$ ; см. рис. 1), решение уравнения (1) имеет вид

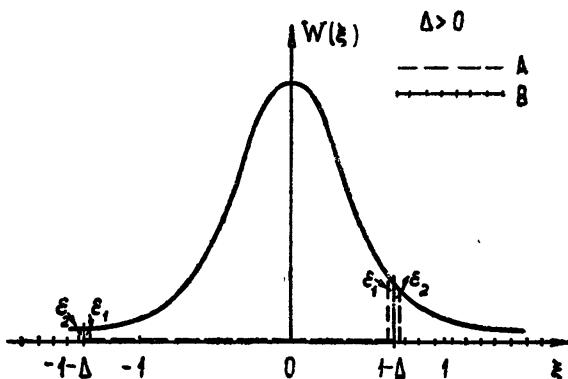


Рис. 1. Кривая распределения плотности вероятности случайного параметра  $\xi$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = & \left\{ [1 - \sqrt{1 - (\xi + \Delta)^2}] C_1(\xi, \varphi_n) - [1 + \sqrt{1 - (\xi + \Delta)^2}] \times \right. \\ & \times \exp [-\sqrt{1 - (\xi + \Delta)^2}(t - t_0)] \left\{ -(\xi + \Delta)[C_1(\xi, \varphi_n) - \right. \\ & \left. - \exp [-\sqrt{1 - (\xi + \Delta)^2}(t - t_0)]] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C_1(\xi, \varphi_n) = [(\xi + \Delta) \operatorname{tg}(\varphi_n/2) + 1 + \sqrt{1 - (\xi + \Delta)^2}] [(\xi + \Delta) \operatorname{tg}(\varphi_n/2) + 1 - \sqrt{1 - (\xi + \Delta)^2}]^{-1}$  — постоянная интегрирования,  $\varphi_n$  — начальная фаза генератора. Как видно из этой формулы, после скачка начинается переходный процесс со временем установления  $\tau_{\text{уст}} = 1/\sqrt{1 - (\xi + \Delta)^2}$ , по окончании которого система приходит в равновесное состояние; последнее характеризуется тем, что частота подстраиваемого генератора равна  $\omega_{\text{ст}}$ , т. е. при значениях параметра из области  $A$  генератор все время находится в полосе захвата. Разность фаз генераторов в установившемся состоянии определяется соотношением

$$\varphi = -\arcsin(\xi + \Delta). \quad (3)$$

Введем следующее упрощающее предположение: примем, что флюктуации емкости настолько медленны, что

$$\tau_{\text{кор}} \gg \tau_{\text{уст}}. \quad (4)$$

В этом случае можно пренебречь переходным процессом и в качестве решения взять установившееся значение фазы. Необходимо отметить, что для любого конечного значения времени корреляции условие (4) нарушается в  $\epsilon$ -окрестности границы полосы синхронизации (рис. 1). Для большинства практических случаев этот момент является мало существенным, так как флюктуации емкости достаточно низкочастотны

и вероятность того, что случайный параметр  $\xi$  примет значение, принадлежащее области  $\epsilon_1$ , оказывается пренебрежимо малой\*.

б) Если  $|\xi + \Delta| > 1$  (что соответствует по  $\xi$  области  $B$ ), то решение уравнения (1) в интервале между двумя скачками имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = -\frac{\sqrt{(\xi + \Delta)^2 - 1}}{\xi + \Delta} \operatorname{tg} \frac{(t - t_0)\sqrt{(\xi + \Delta)^2 - 1} + C_2(\xi, \varphi_0)}{2} - \frac{1}{\xi + \Delta}, \quad (5)$$

где  $C_2(\xi, \varphi_0) = -\operatorname{arctg} [(\xi + \Delta) \operatorname{tg} (\varphi_0/2) + 1] [(\xi + \Delta)^2 - 1]^{-1/2}$  — постоянная интегрирования. Из решения (5) видно, что в этом случае фаза монотонно возрастает при  $\xi < 0$  (или уменьшается при  $\xi > 0$ ), т. е. при значениях параметра  $\xi$ , принадлежащих области  $B$ , генератор оказывается вне полосы синхронизации. В дальнейшем для нас будет представлять интерес не самое значение  $\varphi(t)$ , а изменение его на интервале времени  $\tau$ , т. е. набег фазы за  $\tau$ :  $\Delta\varphi(\tau) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$ . Зависимость

$\Delta\varphi(\tau)$  (для  $\tau \ll \tau_{\text{кор}}$ ) при значениях случайного параметра  $\xi$  из области  $B$  нетрудно получить из соотношения (5). Для наглядности на рис. 2 приведено графическое решение (5) относительно  $\Delta\varphi(\tau)$  при различных значениях  $\xi$ .

Из решения (5) и графиков рис. 2 видно, что фаза изменяется на  $2\pi$  за время  $T = 2\pi[(\xi + \Delta)^2 - 1]^{-1/2}$  и скорость изменения фазы — периодическая функция  $\tau$  с периодом  $T$ . Введем усредненную за время  $T$  частоту  $v$ , которая, как легко видеть, равна  $v = 2\pi/T$ , и представим изменение фазы за время  $(t - t_0) \ll \tau_{\text{кор}}$

Рис. 2. Графики  $\Delta\varphi(\tau) | \tau < \tau_{\text{кор}} |$  для различных значений случайного параметра  $\xi$  из области  $B$ . Кривые, выделенные жирной линией, соответствуют точному решению уравнения (5); прямые — приближенному решению, определенному уравнением (6).

следующим приближенным соотношением:

$$\Delta\varphi = \tilde{v}(t - t_0), \quad (6)$$

где

$$\tilde{v} = \begin{cases} -\sqrt{(\xi + \Delta)^2 - 1} & \text{при } \xi > 0 \\ +\sqrt{(\xi + \Delta)^2 - 1} & \text{при } \xi < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Как видно из графиков рис. 2, приближенное решение больше всего отклоняется от точного для малых значений  $|\xi|$ , т. е. для тех значений, при которых генератор находится вблизи границы полосы синхронизации. Но поскольку при этих значениях параметра изменения фазы происходят очень медленно ( $T \rightarrow \infty$ ), следует ожидать, что область значений  $\xi$ , в которой приближенное решение с относительно большей погрешностью описывает набег фазы в генераторе, не даст заметного вклада в значение среднего набега фазы  $\langle \Delta\varphi \rangle$  и тем более в значение  $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ . Соответствующие оценки будут даны ниже.

\* Например, если принять, что  $f_{\text{эт}} = 10^7 \text{ Гц}$  и полоса синхронизации  $\Lambda_0/2\pi = -3 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ , то для флуктуаций емкости с шириной спектра  $2 \cdot 10^3 \text{ Гц}$  (что соответствует безразмерному времени  $\tau_{\text{кор}} = 10^3$ ) при  $\langle \xi^2 \rangle = 10^{-2}$  и начальной расстройке  $\Delta = 0,5$  ширина области  $\epsilon_1$ , в которой  $\tau_{\text{уст}} \geq 10^{-1}\tau_{\text{кор}}$ , равна  $5 \cdot 10^{-5}$ , а вероятность того, что  $\xi$  примет значение внутри области  $\epsilon_1$ , составляет  $10^{-9}$ .

Приняв эти упрощающие предположения, найдем для нормального закона распределения флуктуаций емкости следующие характеристики фазовых флуктуаций генератора: остаточную расстройку частот генераторов  $\nu_{\text{ост}}$ , среднеквадратичный набег фазы  $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$  и ширину спектральной линии генератора  $\Delta\Omega$ .

3. Определим остаточную среднюю расстройку частот генераторов как  $\nu_{\text{ост}} = \langle \Delta\varphi(\tau) \rangle \tau^{-1}$  для времени  $\tau$ , значительно большего времени корреляции. Для нахождения  $\langle \Delta\varphi(\tau) \rangle$  разобьем интервал времени  $\tau$  на отрезки, равные времени корреляции; при этом  $\tau \approx n\tau_{\text{кор}}$ , где  $n \gg 1$ . Тогда средний набег фазы получим, просуммировав с последующим усреднением набеги фазы за  $n$  интервалов продолжительностью  $\tau_{\text{кор}}$ :

$$\langle \Delta\varphi(\tau) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \Delta\varphi_k(\tau_{\text{кор}}) \right\rangle = n \langle \Delta\varphi(\tau_{\text{кор}}) \rangle. \quad (8)$$

Если параметр  $\xi$  принадлежит области  $B$ , то случайный набег фазы за время  $\tau_{\text{кор}}$ , как следует из (6), будет иметь значение

$$\Delta\varphi_B(\tau_{\text{кор}}) = \tilde{\nu}(\xi)\tau_{\text{кор}}. \quad (9)$$

Если же параметр  $\xi$  принимает значение, принадлежащее области  $A$ , то набег фазы  $\Delta\varphi_A$ , как следует из (3), можно записать следующим образом:

$$\Delta\varphi_A(\tau_{\text{кор}}) = -\arcsin(\xi + \Delta) - \varphi_n. \quad (10)$$

Для начальной фазы  $\varphi_n$  принимаем равновероятный закон распределения в интервале  $[-\pi; \pi]$ , если до последнего скачкообразного изменения параметр  $\xi$  имел значение, принадлежащее области  $B$ ; если же параметр имел значение, принадлежащее области  $A$ , то для  $\varphi_n$  принимаем закон распределения в соответствии с законом распределения установившейся фазы, который может быть получен с помощью соотношения (3). Тогда плотность вероятности начальной фазы  $W_1(\varphi_n)$  можно записать в виде

$$W_1(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(\sin \varphi_n + \Delta)^2}{2\sigma^2} \right] \cos \varphi_n \left[ 1\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - 1\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{P_B}{2\pi} [1(\varphi + \pi) - 1(\varphi - \pi)], \quad (11)$$

где  $P_B = \int_{-\infty}^{-1-\Delta} W(\xi)d\xi + \int_{1-\Delta}^{\infty} W(\xi)d\xi$  — вероятность того, что параметр  $\xi$  принимает значение из области  $B$ ,  $\sigma = \sqrt{\langle \xi^2 \rangle}$ ,  $1(x)$  — единичная функция. В этих предположениях выражение для среднего набега фазы за время корреляции, усредненного по начальным фазам, можно представить (учитывая (9) и (10)) следующим образом:

$$\overline{\langle \Delta\varphi(\tau_{\text{кор}}) \rangle} = \int_B \tau_{\text{кор}} \sqrt{(\xi + \Delta)^2 - 1} W(\xi)d\xi - \quad (12)$$

$$- \int_{-1-\Delta}^{1-\Delta} \arcsin(\xi + \Delta) W(\xi)d\xi - P_A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n W_1(\varphi_n)d\varphi_n,$$

где  $P_A = \int_{-1-\Delta}^{1-\Delta} W(\xi)d\xi$ . Черта сверху означает усреднение по начальным фазам.

В выражении (12) первый интеграл представляет собой средний набег фазы, связанный с выходом генератора из полосы синхронизации при значениях случайного параметра  $\xi$ , соответствующих области  $B$ . Последующие два члена представляют собой средний набег фазы, связанный со случаем изменением параметра  $\xi$  в области  $A$ . Сравнительная оценка членов в (12) показывает, что набег фазы в генераторе определяется, главным образом, изменением фазы при выходе его из полосы синхронизации\*. Поэтому в дальнейшем приближенно примем, что

$$\langle \Delta\varphi(\tau_{\text{кор}}) \rangle = \int_B \tau_{\text{кор}} \sqrt{(\xi + \Delta)^2 - 1} W(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Отсюда, учитывая (7) и (8), получим следующее выражение для средней расстройки частот генераторов:

$$\nu_{\text{ост}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[ \int_{1+\Delta}^{\infty} \sqrt{(\xi - \Delta)^2 - 1} e^{-\xi^2/2\sigma^2} d\xi - \int_{1-\Delta}^{-\infty} \sqrt{(\xi + \Delta)^2 - 1} e^{-\xi^2/2\sigma^2} d\xi \right]. \quad (14)$$

Из этого соотношения следует, что  $\nu_{\text{ост}}$  отлично от нуля только в случае не нулевой начальной расстройки ( $\Delta \neq 0$ ) и имеет знак, обратный  $\Delta$ . Таким образом, средняя частота генератора из-за флюктуаций емкости оказывается смещенной на величину  $\nu_{\text{ост}}$  от эталонной частоты

в сторону собственной частоты подстраиваемого генератора. Этот вывод аналогичен результату, который был получен в работах [2, 3] при оценке влияния дельта-коррелированных аддитивных шумов. На рис. 3 приведены графики зависимости  $\nu_{\text{ост}}$  от начальной расстройки, рассчитанные по формуле (14) для различных значений интенсивности флюктуаций емкости.

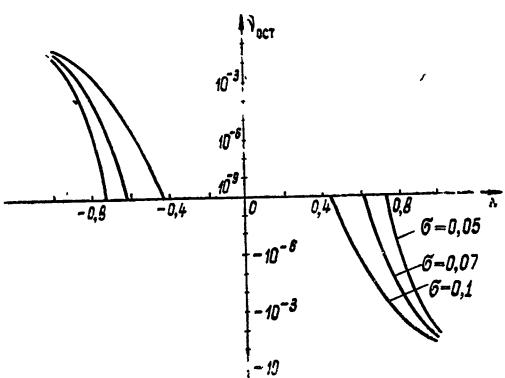


Рис. 3. Зависимость  $\nu_{\text{ост}}$  от начальной расстройки для различных значений интенсивности флюктуаций емкости

вблизи границы полосы синхронизации (рис. 1), в которой приближенное решение (6) отличается от точного (5), например, больше чем на 10%. Для  $\sigma = 0,1$ ,  $f = 10^7$  Гц,  $\Lambda_0/2\pi = 3 \cdot 10^5$  Гц,  $\Delta = 0,5$  и  $\tau_{\text{кор}} = 10^3$  этот вклад составляет 2,5%.

4. Определим характер спектра колебаний генератора вблизи его средней частоты. Если пренебречь амплитудными флюктуациями, то колебания генератора можно представить как  $x = R_0 \cos [\omega_{\text{ст}} t + \varphi(t)]$ . Для колебаний такого типа функция корреляции равна

$$\Phi_x(\tau) = \langle \cos(\gamma(\tau)) \rangle \cos[(\omega_{\text{ст}} - \nu_{\text{ост}})\tau], \quad (15)$$

где  $\gamma(\tau) = \Delta\varphi(\tau) - \langle \Delta\varphi(\tau) \rangle$  — отклонение набега фазы в генераторе за время  $\tau$  от его среднего значения. Как следует из (8),  $\gamma(\tau)$  можно представить следующим образом:

\* Для тех же количественных соотношений, которые были взяты выше, первый член в (12) по крайней мере в 10 раз больше последующих.

$$\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^n [\overline{\Delta\varphi_k(\tau_{\text{кор}})} - \langle \Delta\varphi(\tau_{\text{кор}}) \rangle] = \sum_{k=1}^n \gamma_k(\tau_{\text{кор}}), \quad (16)$$

причем  $\gamma_k(\tau_{\text{кор}})$  и  $\gamma_i(\tau_{\text{кор}})$  статистически независимы при  $i \neq k$ , так как они определяются независимыми значениями случайного параметра  $\xi_k$  и  $\xi_i$ . На основании центральной предельной теоремы при достаточно большом  $n$  распределение  $\gamma(\tau)$  можно считать предельно нормальным. Характер спектра колебаний вблизи частоты  $\omega_{\text{ст}} - v_{\text{ост}}$  определяется поведением огибающей функции корреляции  $\langle \cos[\gamma(\tau)] \rangle$  при больших значениях аргумента  $\tau$ . Для нормального закона распределения  $\gamma(\tau)$  огибающая функции корреляции записывается как

$$\langle \cos[\gamma(\tau)] \rangle = \exp[-\overline{\langle \gamma^2(\tau) \rangle}/2],$$

где  $\overline{\langle \gamma^2(\tau) \rangle}$  — дисперсия набега фазы.

Из соотношения (16), учитывая, что при  $i \neq k$   $\langle \Delta\varphi_i(\tau_{\text{кор}}) \times \Delta\varphi_k(\tau_{\text{кор}}) \rangle = \langle \Delta\varphi(\tau_{\text{кор}}) \rangle^2$ , получим выражение для  $\langle \gamma^2(\tau) \rangle$ :

$$\langle \gamma^2(\tau) \rangle = n[\overline{\langle \Delta\varphi^2(\tau_{\text{кор}}) \rangle} - \overline{\langle \Delta\varphi(\tau_{\text{кор}}) \rangle}^2]. \quad (17)$$

Для среднеквадратичного набега фазы за время корреляции имеем (учитывая, что  $\varphi_n$  определяется значением случайного параметра до скачка, а конечная фаза через  $\tau_{\text{кор}}$  — значением  $\xi$  после скачка):

$$\overline{\langle \Delta\varphi^2(\tau_{\text{кор}}) \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\varphi^2(\tau_{\text{кор}}) W(\xi) W_1(\varphi_n) d\xi d\varphi_n. \quad (18)$$

Принимая во внимание соотношения (9) — (11) и (13), из (18) получим выражение для дисперсии набега фазы за время корреляции\*:

$$\langle \gamma^2(\tau_{\text{кор}}) \rangle = \tau_{\text{кор}}^2 E(\sigma, \Delta). \quad (19)$$

Здесь

$$E(\sigma, \Delta) = (-1 + \Delta + \sigma^2) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{1 + \Delta}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1 - \Delta}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \left\{ (1 - \Delta) \exp\left[-\frac{(1 + \Delta)^2}{2\sigma^2}\right] + (1 + \Delta) \exp\left[-\frac{(1 - \Delta)^2}{2\sigma^2}\right] \right\} - v_{\text{ост}}^2,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

На основании (17), учитывая, что  $\tau = n\tau_{\text{кор}}$ , получаем выражение для дисперсии набега фазы за время  $\tau$ :

$$\langle \gamma^2(\tau) \rangle = \tau \frac{\langle \gamma^2(\tau_{\text{кор}}) \rangle}{\tau_{\text{кор}}}. \quad (20)$$

Из этого выражения видно, что в генераторе зависимость дисперсии набега фазы от времени, если оно значительно превышает  $\tau_{\text{кор}}$ , описывается диффузионным законом. Коэффициент диффузии

$$d = \frac{\langle \gamma^2(\tau_{\text{кор}}) \rangle}{\tau_{\text{кор}}}. \quad (21)$$

\* В выражении (19) так же, как и в выражении (14) для  $v_{\text{ост}}$ , отброшены члены, связанные с набегом фазы во внутренней области. Для  $\sigma = 0,1$ ,  $\Delta = 0,5$ ,  $\tau_{\text{кор}} = 10^3$  отброшенные члены дают поправку порядка 1%.

Таблица 1

$\Delta$	0..	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,05	—	—	—	—	—	—	1,55 · 10 <sup>-16</sup>	2,18 · 10 <sup>-10</sup>	5,7 · 10 <sup>-6</sup>	2,85 · 10 <sup>-3</sup>	3,87 · 10 <sup>-1</sup>
0,07	—	—	—	—	—	—	1,23 · 10 <sup>-13</sup>	1,48 · 10 <sup>-10</sup>	2,11 · 10 <sup>-6</sup>	4,18 · 10 <sup>-4</sup>	1,15 · 10 <sup>-2</sup>
0,1	—	—	—	—	—	—	2,92 · 10 <sup>-13</sup>	7,93 · 10 <sup>-8</sup>	8,73 · 10 <sup>-6</sup>	3,48 · 10 <sup>-4</sup>	5,17 · 10 <sup>-3</sup>
0,2	4,53 · 10 <sup>-7</sup>	6,43 · 10 <sup>-7</sup>	6,75 · 10 <sup>-6</sup>	6,4 · 10 <sup>-5</sup>	4,31 · 10 <sup>-4</sup>	2,16 · 10 <sup>-3</sup>	8,68 · 10 <sup>-3</sup>	2,4 · 10 <sup>-2</sup>	5,13 · 10 <sup>-2</sup>	0,103	7,5 · 10 <sup>-2</sup>
0,3	6,73 · 10 <sup>-5</sup>	2,67 · 10 <sup>-4</sup>	1,02 · 10 <sup>-3</sup>	3,36 · 10 <sup>-3</sup>	9,02 · 10 <sup>-3</sup>	2,09 · 10 <sup>-2</sup>	4,23 · 10 <sup>-2</sup>	7,57 · 10 <sup>-2</sup>	0,11	0,18	0,14
											0,19

Таблица 2

$\Delta$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Delta f/f$	8,1 · 10 <sup>-16</sup>	2,19 · 10 <sup>-12</sup>	1,9 · 10 <sup>-9</sup>	5,97 · 10 <sup>-7</sup>	6,55 · 10 <sup>-5</sup>	2,61 · 10 <sup>-3</sup>	3,88 · 10 <sup>-2</sup>	2,26 · 10 <sup>-1</sup>	0,56

Выше было отмечено, что для  $\tau \gg \tau_{\text{кор}}$  распределение плотности вероятности  $\gamma(\tau)$  близко к нормальному. Как известно, в этом случае спектр колебаний генератора вблизи средней частоты имеет вид резонансной кривой с шириной на уровне 0,5, равной  $\Delta\Omega = (\pi/2)d$ . Учитя соотношения (19) и (21), для  $\Delta\Omega$  получаем выражение

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{2} \tau_{\text{кор}} E(\sigma, \Delta).$$

В таблице 1 приведены значения функции  $E(\sigma, \Delta)$ , рассчитанные для некоторых конкретных значений  $\sigma$  и  $\Delta$ . Отсюда видно, что уширение спектральной линии становится особенно существенным при значениях начальной расстройки, близких к единице (т. е. близких к границе полосы синхронизации).

В таблице 2 приведены значения относительной ширины линии  $\Delta f/f$  при  $\sigma = 0,1$  для  $f = 10^7$  гц,  $\Delta_0/2\pi = 3 \cdot 10^5$  гц и ширины спектра флюктуаций емкости  $2 \cdot 10^3$  гц ( $\tau_{\text{кор}} = 10^3$ ).

В заключение приведем общую картину изменения спектра колебания синхронизированного генератора, обладающего медленными флюктуациями емкости контура. Если флюктуации достаточно малы, так что справедливы линеаризованные уравнения, то спектр колебаний подстраиваемого генератора представляет собой суперпозицию монохроматических колебаний на частоте эталонного генератора, и шумового пьедестала, являющегося в этом приближении суммой спектров амплитудных и фазовых флюктуаций. Можно показать, что при увеличении интенсивности флюктуаций, когда уравнения становятся существенно нелинейными, но генератор еще не выходит из полосы захвата, характер спектра колебания существенно не меняется, оставаясь суперпозицией монохроматической линии на частоте  $\omega_0$  и шумового пьедестала, который в этом случае представляет собой более сложную комбинацию спектров амплитудных и фазовых флюктуаций. Когда интенсивность внешнего воздействия становится настолько большой, что возможен выход генератора из полосы захвата, спектр колебаний качественно меняется—уширяется спектральная линия и появляется остаточная расстройка частот генераторов. Аналогичная картина имеет место и при увеличении начальной расстройки.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 924 (1965).
- В. И. Тихонов, Автоматика и телемеханика, 20, 1188 (1959).
- Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 апреля 1965 г.

#### ON INFLUENCE OF LARGE FLUCTUATIONS OF CIRCUIT CAPACITY ON OPERATION OF GENERATOR SYNCHRONIZATION SYSTEM

*L. P. Zacheptskaya, I. M. Klibanova, A. N. Malakhov*

The effect of large slow circuit capacity fluctuations has been considered upon operation of Tomson generator frequency-stabilized by synchronization system or phase auto-control one. For a step model of circuit fluctuations the dependence has been obtained of residual detuning versus fluctuation intensity and initial generator detuning. The form of oscillation spectrum has been determined and the calculation of its width in the dependence on fluctuation intensity and initial detuning has been given.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОМ СЛОИСТОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

B. B. Шевченко

Исследованы ортогональные собственные волны в волноводе из изотропной слоисто-неоднородной плазмы. Такой волновод обладает смешанным (дискретно-непрерывным) спектром волн. Дискретной части спектра соответствуют волны, локализованные вблизи волновода, а непрерывной части спектра соответствует поле излучения. Решена в общем виде задача о возбуждении слоистого плазменного волновода.

Исследование плазменных волноводов необходимо для понимания работы ряда технических устройств: плазменных генераторов и усилителей, антенн, окруженных плазмой, и др. Кроме того, изучение свойств электромагнитных волн в таких волноводах представляет также самостоятельный интерес, важный с теоретической точки зрения. Дело в том, что плазменные волноводы являются, по-видимому, единственным примером направляющих систем, которые обладают спектром волн, включающим все известные типы направляемых волн: быстрые и медленные (поверхностные), прямые и обратные волны, волны с комплексной постоянной распространения (комплексные волны), односторонние и так называемые «вытекающие» волны.

Ряд характерных свойств плазменных волноводов можно получить, рассматривая изотропные слоистые плазменные волноводы, т. е. волноводы из ненамагниченной слоисто-неоднородной плазмы. Имеется в виду однослойный или многослойный волновод из неоднородных (в поперечном направлении) плазменных слоев. Простейший тип такого волновода — одиночный однородный плазменный слой — рассматривался ранее в работах [1–3]. В [2] исследовалась также возможность направленного распространения волн между двумя однородными слоями. В настоящей работе сделана попытка рассмотреть общий случай изотропного слоистого плазменного волновода из неоднородных плазменных слоев. С методической точки зрения изложенная ниже теория плазменного слоистого волновода является обобщением развитой в [4] теории диэлектрического слоистого волновода (см. также [5]).

В работе использована международная система единиц и рассматриваются гармонические поля с зависимостью от времени типа  $e^{i\omega t}$ .

### 1. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ СЛОИСТОГО ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим плазменный волновод, показанный на рис. 1. Относительная диэлектрическая проницаемость плазмы (без учета пространственной дисперсии и в отсутствие внешнего постоянного магнитного поля) может быть представлена в виде

$$\epsilon = 1 - \tau, \quad \tau = \tau_0 \left( 1 + i \frac{v}{\omega} \right), \quad \tau_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v^2}, \quad (1)$$

где  $\omega$  — круговая частота электромагнитного поля,  $\omega_0$  — ленгмюровская частота, являющаяся функцией электронной концентрации плазмы,  $v$  — частота столкновений электронов. Характерным для плазмы является то, что действительная часть  $\epsilon$  может быть как положительной, так и отрицательной. Мы будем рассматривать плазму с малыми потерями, т. е. считать, что относительная частота столкновений мала:  $v/\omega \ll 1$ .

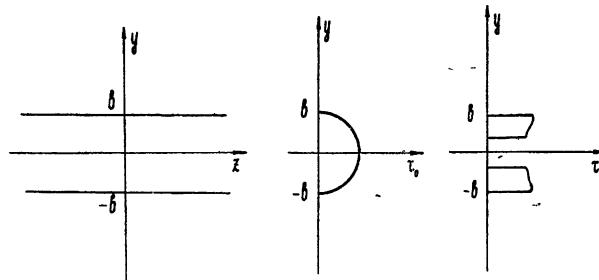


Рис. 1.

В частном случае плазмы без потерь  $v=0$ . Следует заметить, что предельный переход  $v \rightarrow 0$  в некоторых случаях требует специального подхода [3].

Для простоты рассмотрим симметричный относительно плоскости  $y=0$  слоистый волновод. Пусть величина  $\tau_0$ , определяющая проницаемость плазмы, при фиксированной частоте поля изменяется в поперечном направлении примерно так, как показано на рис. 1. В более общем случае  $\tau_0(y)$  есть непрерывная или кусочно непрерывная симметричная функция, нигде не обращающаяся в бесконечность и равная нулю вне волновода при  $|y| > b$ . Случай, когда  $\tau_0(y)$  обращается в бесконечность при каком-либо значении  $y$  соответствует выделению в таком слоистом волноводе экранированного (закрытого) волновода, который может быть рассмотрен независимо. Вдоль осей  $x$  и  $z$   $\tau_0$  постоянна.

Мы будем рассматривать только двухмерные волны, распространяющиеся вдоль оси  $z$ , поле которых не зависит от координаты  $x$ . Как известно, в двухмерном случае волны можно разделить на два класса:  $E$ -волны ( $E_z \neq 0$ ) и  $H$ -волны ( $H_z \neq 0$ ). Мы ограничимся здесь рассмотрением наиболее интересных  $E$ -волн. Аналогично и даже несколько проще рассматриваются  $H$ -волны.

Поле  $E$ -волн имеет составляющие  $H_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ . При этом  $E_y$  и  $E_z$  выражаются через  $H_x$  в виде

$$E_y = \frac{Z_0}{ikz} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{Z_0}{ikz} \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (2)$$

а  $H_x$  удовлетворяет уравнению

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 \epsilon H_x = 0, \quad (3)$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  — волновое число, а  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  — волновое сопротивление свободного пространства.

\* Хотя мы здесь говорим только о плазменных слоях ( $\operatorname{Re} \tau > 0$ ), все сказанное в одинаковой степени справедливо и для того случая, когда, кроме плазменных, имеются диэлектрические слои ( $\operatorname{Re} \tau < 0$ ), (например, на практике это стеки трубы, ограничивающие плазму).

Собственные волны будем искать, как обычно, в виде

$$H_x(y, z) = W(y) e^{-i\omega z}, \quad (4)$$

где функция поперечного сечения  $W(y)$  должна удовлетворять уравнению

$$\epsilon \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{dW}{dy} \right) + g^2 W = 0,$$

$$g^2 = k^2 \epsilon - h^2.$$

Учитывая, что при  $|y| > b$   $\tau = 0$ ,  $\epsilon = 1$ , и вводя обозначение  $x^2 = k^2 - h^2$ , получим:  $g^2 = x^2 - k^2 \tau$ . Уравнение перепишется в виде

$$\epsilon \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{dW}{dy} \right) - k^2 \tau(y) W + x^2 W = 0. \quad (5)$$

Поскольку рассматриваемый волновод является открытой системой, то для  $W(y)$  необходимо поставить условия на бесконечности. Как показано в [4, 5], для того, чтобы построить полную систему собственных волн, с помощью которой можно было бы выразить поле любого физически мыслимого источника (конечных размеров и с ограниченной мощностью), достаточно наложить на  $W(y)$  при  $y \rightarrow \pm \infty$  условие ограниченности

$$|W(y)| < C, \quad (6)$$

где  $C$  — константа. Это условие обобщает обычное требование  $W(y) \rightarrow 0$ , которое накладывается при отыскании, например, поверхностных волн. Построенная при условии (6) система собственных волн включает в себя как волны, направляемые волноводом, так и поле, излучающееся в открытое пространство.

Решение уравнения (5) при условии (6), аналитическое или численное, можно получить, лишь зная конкретный вид функции  $\tau(y)$ . Однако в дальнейшем нам понадобятся некоторые общие свойства функций сечения  $W(y)$ , которые мы найдем, не вычисляя самих функций.

Разобьем все решения уравнения (5) на четные и нечетные функции. Четные функции в нуле должны удовлетворять условию

$$W(0) = \sigma_1, \quad \left. \frac{dW}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad (7)$$

а нечетные — условию

$$W(0) = 0, \quad \left. \frac{dW}{dy} \right|_{y=0} = k \sigma_2, \quad (8)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  — произвольные безразмерные величины. Если бы мы рассматривали только полупространство  $y > 0$ , то четные функции соответствовали бы решениям для плазменного волновода, лежащего на идеальном электрическом проводнике, а нечетные — на идеальном магнитном проводнике.

Из уравнения (5) видно, что вне волновода при  $|y| > b$  функции сечения должны иметь вид

$$W(x, y) = v_{\pm}(x) \cos(\kappa y) - w_{\pm}(x) \sin(\kappa y), \quad (9)$$

где верхний знак относится к значению функций над волноводом ( $y > b$ ), а нижний — под волноводом ( $y < -b$ ). Для четных функций соответст-

венно  $v_+ = v_- = v$ ,  $w_+ = -w_- = w$ , а для нечетных  $v_+ = -v_- = v$ ,  $w_+ = w_- = w$ . Можно показать (см. Приложение 1), что  $v(x)$  и  $w(x)$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} v(x) &= \sigma_1 - \frac{1}{\kappa} \int_0^b \sin(\kappa y) \left( k^2 \tau W + \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dy} \frac{dW}{dy} \right) dy, \\ w(x) &= -\frac{k}{\kappa} \sigma_2 - \frac{1}{\kappa} \int_0^b \cos(\kappa y) \left( k^2 \tau W + \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dy} \frac{dW}{dy} \right) dy, \end{aligned} \quad (10)$$

где для четных функций нужно положить  $\sigma_2 = 0$ , а для нечетных  $-\sigma_1 = 0$ . Поскольку внутри волновода при  $|y| < b$   $W = W(g)$ , где  $g = g(x^2)$ , то на основании (10) имеем

$$v(-x) = v(x), \quad w(-x) = -w(x). \quad (11)$$

Рассмотрим функции сечения над волноводом ( $y > b$ ) (аналогично рассматриваются функции сечения под волноводом:  $y < -b$ ). Представим (9) в виде

$$W(x, y) = \frac{v - iw}{2} e^{-ixy} + \frac{v + iw}{2} e^{ixy}. \quad (12)$$

Налагаемое на  $W$  условие (6) ограничивает спектр возможных значений  $x$ . Во-первых, возможными являются все действительные значения  $x$ , которые составляют непрерывный спектр. Кроме действительных, могут иметь место также комплексные и, в частности, чисто мнимые значения  $x$ .

Нетрудно видеть, что  $x$  с  $\operatorname{Im} x < 0$ , удовлетворяющее уравнению

$$V(x) = v(x) + iw(x) = 0, \quad (13)$$

дает решение, удовлетворяющее условию (6). Аналогично  $\tilde{x}$  с  $\operatorname{Im} \tilde{x} > 0$ , удовлетворяющее уравнению

$$W(\tilde{x}) = v(\tilde{x}) - iw(\tilde{x}) = 0, \quad (14)$$

также дает решение, удовлетворяющее (6). В первом случае выражение (12) принимает вид

$$W(x, y) = v(x) e^{-ixy}, \quad (15)$$

а во втором —

$$W(\tilde{x}, y) = v(\tilde{x}) e^{i\tilde{x}y}. \quad (16)$$

Второе решение не является новым по сравнению с первым. Действительно, это решение можно записать в виде (15), если обозначить  $\tilde{x} = -x$ , где в соответствии с (11)  $x$  будет уже удовлетворять уравнению (13).

Рассмотрим функцию  $x V(x)$ , которая, согласно (10), может быть представлена в виде

$$x V(x) = x\sigma_1 - ik\sigma_2 - i \int_0^b e^{-ixy} \left( k^2 \tau W + \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dy} \frac{dW}{dy} \right) dy. \quad (17)$$

Если  $W(y)$  — квадратично интегрируемая в интервале  $[0, b]$  функция, удовлетворяющая уравнению (5), то  $\times V(x)$  есть голоморфная (целая аналитическая) функция  $x$ . Известно, что такая функция может иметь нули только в изолированных точках. Последнее в одинаковой степени относится и к самой функции  $V(x)$ . Следовательно, спектр комплексных значений  $x$  дискретный, т. е.  $x = x_n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Итак, суммируя полученные результаты, запишем при  $|y| > b$  функции сечения, соответствующие дискретной части спектра, в виде

$$W_n(y) = v_{\pm}(x_n)e^{\mp i x_n y}, \quad (18)$$

где  $x_n$  — решения уравнения (13), имеющие  $\operatorname{Im} x_n < 0$ , т. е. находящиеся в нижней полуплоскости комплексных значений  $x$ . (В дальнейшем уравнение (13) мы будем называть также дисперсионным уравнением.)

Функции сечения, соответствующие непрерывной части спектра, при  $|y| > b$  имеют вид

$$\begin{aligned} W(x, y) &= v_{\pm}(x) \cos(x y) - w_{\pm}(x) \sin(x y) = \\ &= \frac{1}{2}(v_{\pm} - iw_{\pm}) e^{-i x y} + \frac{1}{2}(v_{\pm} + iw_{\pm}) e^{i x y}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $x = \operatorname{Re} x$  принимает, вообще говоря, все действительные значения  $x$ . Однако, поскольку  $W(x, y) = W(-x, y)$ , то мы будем рассматривать в дальнейшем только положительные значения  $x$ .

Функции сечения (18), подставленные в (4), дают собственные волны дискретной части спектра. Они имеют в общем случае комплексное волновое число  $h_n = \sqrt{k^2 - x_n^2}$  и называются поэтому комплексными волнами. Если  $x_n$  чисто мнимое, то соответствующая волна есть просто поверхность волна. При подстановке в (4) выражений (19) получим собственные волны непрерывной части спектра или, по терминологии [5], псевдоповерхностные волны. Волновые числа этих волн  $h(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$  являются или действительными, или чисто мнимыми.

Можно показать (см. Приложение 2), что функции сечения, а следовательно, и собственные волны ортогональны друг к другу при интегрировании в поперечном сечении. Ортогональность может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W_n W_m dy &= N_n \delta_{nm}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W_n W(x) dy = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W(x) \tilde{W}(x) dy &= N(x) \delta(x - \tilde{x}). \end{aligned} \quad (20)$$

Для нормировочных величин имеем выражения:

$$N_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W_n^2 dy, \quad N(x) = \pi [v^2(x) + w^2(x)]; \quad (21)$$

при этом они связаны соотношением

$$\left. \frac{dN(x)}{dx} \right|_{x=x_n} = 2\pi i N_n. \quad (22)$$

## 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ СЛОИСТОГО ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА

Пусть для определенности источники поля сосредоточены в направлении оси  $z$  в интервале  $(z_1, z_2)$ . Поле, возбуждаемое этими источниками, запишется в виде суммы собственных волн дискретной части спектра и интеграла по непрерывной части спектра:

$$H_x(y, z) = \sum_n \left\{ \sum B_{\pm n} W(y) \exp(-ih_{\pm n} z) + \right. \\ \left. + \int_0^\infty B_\pm(z) W(x, y) \exp[-ih_\pm(x)z] dx \right\}, \quad (23)$$

где первый знак суммы означает суммирование по четным и нечетным волнам,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , верхний знак относится к полю справа от источников ( $z > z_2$ ), а нижний — к полю слева от источников ( $z < z_1$ ). Здесь учтено, что  $W(-x) = W(x)$ , поэтому интеграл берется в интервале  $(0, \infty)$ . Поле в интервале  $(z_1, z_2)$ , включающем источники, выражается более сложно. Здесь, во-первых, необходимо одновременно учитывать волны с индексами  $(+)$  и  $(-)$ , а во-вторых, в общем случае нужно включить в рассмотрение потенциальное поле источника. Этот вопрос требует специального рассмотрения.

Волновые числа для волн справа и слева от источников можно определить двояким образом:

1) для  $z > z_2$

$$\operatorname{Im} h_{+n} \leq 0, \quad \operatorname{Im} h_+(x) \leq 0,$$

а для  $z < z_1$

$$\operatorname{Im} h_{-n} \geq 0, \quad \operatorname{Im} h_-(x) \geq 0,$$

или 2)

$$h_{+n} = -h_{-n} = h_n, \quad h_+(x) = -h_-(x) = h(x),$$

где

$$\operatorname{Im} h_n \leq 0, \quad \operatorname{Im} h(x) \leq 0.$$

Второе определение несколько лучше, так как в нем нет неопределенности при  $\operatorname{Im} h = 0$ , имеющейся в первом случае. В дальнейшем мы будем пользоваться вторым определением.

Введенная система собственных волн позволяет применить при решении задачи о возбуждении слоистого плазменного волновода (открытой системы) стандартные методы теории возбуждения закрытых волноводов [6]. При этом формальное вычисление дает для коэффициентов разложения те же формулы, что и для закрытых волноводов (см., например, [6], формулу (80.04)). Поле рассматриваемой поляризации ( $E$ -волны) может быть возбуждено магнитным током, текущим вдоль оси  $x$ . В общем случае возбуждения цилиндрическим источником с произвольной формой сечения цилиндра и осью, направленной вдоль оси  $x$ , коэффициенты разложения  $B_{\pm n}$ ,  $B_\pm(z)$  имеют вид

$$B_{\pm n} = -\frac{kI^\mu}{2Z_0h_nN_n} \int_S \int f(y, z) W_n(y) e^{\pm ih_n z} dy dz, \\ B_\pm(z) = -\frac{kI^\mu}{2Z_0h(x)N(x)} \int_S \int f(y, z) W(x, y) e^{\pm ih(x)z} dy dz, \quad (24)$$

где  $I^\mu$  — амплитуда магнитного тока,  $f(y, z)$  — функция распределения

тока по сечению цилиндра  $S$ . Из выражения (24) можно получить следующие важные частные случаи: 1)  $f(y, z) = \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$  — возбуждение узкой щелью в проводящем экране; 2)  $f(y, z) = f_1(y) \delta(z - z_0)$ , где  $f_1(y)$  не равна нулю лишь в интервале  $y_1 \leq y \leq y_2$ , — возбуждение широкой щелью в вертикальном проводящем экране; 3)  $f(y, z) = \delta(y - y_0) f_2(z)$ , где  $f_2(z)$  не равна нулю лишь в интервале  $z_1 \leq z \leq z_2$ , — возбуждение широкой щелью в горизонтальном проводящем экране, например, в металлическом основании, на котором лежит слоистый волновод. Как известно, в случае щели магнитный ток связан с электрическим полем на щели выражением

$$\mathbf{i}^\mu = [n, E],$$

где  $n$  — нормаль к поверхности экрана, в котором вырезана щель,  $\mathbf{i}^\mu = I^\mu f(y, z) n$ .

Выпишем в качестве примера выражения для случая узкой щели:

$$\begin{aligned} B_{\pm n} &= B_n = -\frac{kI^\mu}{2Z_0N_n h_n} W_n(y_0), \\ B_\pm(x) &= B(x) = -\frac{kI^\mu}{2Z_0N(x) h(x)} W(x, y_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь предполагается, что щель расположена в плоскости  $z = z_0 = 0$ .

### 3. ВОЛНЫ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Рассмотрим несколько подробнее волны дискретной части спектра. Прежде всего вычислим комплексную мощность, переносимую одной такой волной. Поперечные составляющие поля волны, в соответствии с (1), равны

$$H_x^{\pm n} = B_{\pm n} W_n(y) e^{\mp i h_n z}, \quad E_y^{\pm n} = \pm \frac{h_n Z_0}{k \epsilon} B_{\pm n} W_n(y) e^{\mp i h_n z}. \quad (26)$$

Отсюда

$$P_z^{\pm n} = - \int_{-\infty}^{\infty} E_y^{\pm n} (H_x^{\pm n})^* dy = \pm \frac{Z_0 h_n}{k} N_n^0 |B_{\pm n}|^2 e^{\pm 2 \operatorname{Im} h_n z}, \quad (27)$$

$$\text{где } N_n^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^{-1} |W_n|^2 dy.$$

Далее в этом разделе мы будем рассматривать плазму без потерь ( $\tau = \tau_0$ ,  $\epsilon = \operatorname{Re} \epsilon$ ). Ниже будет показано, в частности, что в случае плазмы без потерь  $N_n^0$ , а следовательно, и поток мощности комплексной волны равны нулю. (Имеется в виду полный поток мощности в направлении оси  $z$ .) Связано это с тем, что локальное направление потока мощности в поперечном сечении зависит от знака  $\epsilon$ , т. е. поток мощности в слоях с разным знаком  $\epsilon$  направлен в противоположные стороны. Это существенно новый факт по сравнению с диэлектрическими слоистыми волноводами.

Обратимся теперь к комплексной плоскости значений  $x$ . Поскольку  $h = \sqrt{k^2 - x^2}$  — двухзначная функция  $x$ , а нам нужно выбрать ветвь, для которой  $\operatorname{Im} h \leq 0$ , проведем в плоскости  $x$  разрез по  $\operatorname{Im} h = 0$ . Нетрудно убедиться, что он пройдет так, как показано на рис. 2. Выше было отмечено, что все собственные значения дискретной части спектра  $x_n$  находятся в нижней полуплоскости ( $\operatorname{Im} x_n < 0$ ). Покажем, что они

располагаются симметрично относительно мнимой оси. Действительно, рассмотрим уравнение, комплексно сопряженное с (13):

$$v^*(x) - iw^*(x) = 0,$$

которое при чисто действительном  $\tau$  и, следовательно,  $\epsilon$  можно переписать (см. (10)) в виде

$$v(x^*) - iw(x^*) = 0. \quad (28)$$

Отсюда с учетом (11) получим

$$v(-x^*) + iw(-x^*) = 0,$$

т. е. уравнение (13). Таким образом, если  $x_n$  — решение уравнения (13), то  $x_m = -x_n^*$  — также решение этого уравнения (рис. 2).

Нетрудно убедиться в том, что  $x_n$ , лежащим в третьем квадранте, соответствуют  $h_n$  с положительной действительной частью:  $\operatorname{Re} h_n > 0$ , а  $x_m = -x_n^*$ , лежащим

в четвертом квадранте, соответствуют  $h_n$  с отрицательной действительной частью:  $\operatorname{Re} h_n < 0$ . Естественно назвать собственные волны с  $\operatorname{Re} h_n > 0$  прямыми, а с  $\operatorname{Re} h_n < 0$  — обратными. В частности, поверхностные волны, т. е. волны с чисто мнимыми  $x_n$  и, следовательно, действительными  $h_n$ , также нужно разделить на прямые и обратные в зависимости от того, на какой стороне разреза находится  $x_n$ . Следует подчеркнуть, что здесь имеются в виду прямые и обратные волны, находящиеся по одну сторону от источника поля. Смысл такой ситуации в какой-то степени будет пояснен ниже.

В случае комплексных значений  $x_n$  следует отличать ортогональность типа (20) от ортогональности в энергетическом смысле. Последняя (см. Приложение 2) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W_n W_m^* dy = \begin{cases} N_n & \text{при } x_m = -x_n^* \\ 0 & \text{при } x_m \neq -x_n^*, \end{cases} \quad (29)$$

где  $N_n$  нормирована так же, как в (20) (см. (21)).

Отсюда видно, что, во-первых,  $M_n^0$  — нормировка потока комплексной мощности (см. (27)) равна нулю, и, во-вторых, функции сечения прямой и соответствующей ей обратной комплексных волн не являются ортогональными в энергетическом смысле (за исключением четной и нечетной функций). Это означает, что прямая и обратная волны не могут распространяться независимо друг от друга. Более того, эти волны не могут быть возбуждены независимо одна от другой. Действительно, рассмотрим коэффициент возбуждения (24) для волны с собственным значением  $-x_n^*$ . С учетом того, что

$$W_n(-x_n^*) = W_n^*(x_n),$$

$$N_n(-x_n^*) = N_n^*(x_n), \quad h_n(-x_n^*) = -h_n^*(x_n),$$

имеем

$$B_{\pm n}(-x_n^*) = \frac{kI^{\mu}}{2Z_0 h_n^* N_n^*} \int_S \int f(y, z) W_n^*(y) e^{\mp i h_n^* z} dy dz, \quad (30)$$

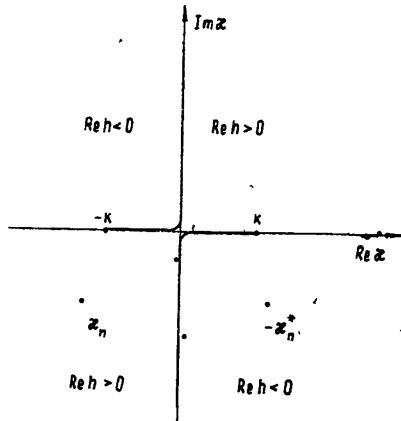


Рис. 2.

Отсюда видно, что, например, при  $f(y, z) = |f(y, z)|$ , т. е. в случае синфазного источника, а также при  $f(y, z) = \operatorname{Re} f(y, z)$ , т. е. для частично синфазного, частично противофазного источника, можно записать

$$B_{\pm n}(-x_n^*) = \frac{-I^\mu}{(I^\mu)^*} B_{\pm n}^*(x_n). \quad (31)$$

Рассмотрим суммарное колебание, состоящее из волн с  $\chi = x_n$  и  $\chi = -x_n^*$ :

$$H_{x_\Sigma}^{\pm n} = H_x^{\pm n}(x_n) + H_x^{\pm n}(-x_n^*),$$

где, согласно (31),

$$H_x^{\pm n}(-x_n^*) = -\frac{I^\mu}{(I^\mu)^*} [H_x^{\pm n}(x_n)]^*.$$

Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} H_{x_\Sigma}^{\pm n} &= \frac{2i}{(I^\mu)^*} \operatorname{Im} \left[ (I^\mu)^* B_{\pm n} W_n e^{\mp i h_n z} \right] = \\ &= \frac{2ie^{\pm \operatorname{Im} h_n z}}{(I^\mu)^*} \operatorname{Im} \left[ (I^\mu)^* B_{\pm n} W_n \cos(\operatorname{Re} h_n z) \mp \operatorname{Re} (I^\mu)^* B_{\pm n} W_n \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\operatorname{Re} h_n z) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Видно, что такое колебание представляет собой стоячую волну, затухающую вдоль оси  $z$  в направлении от источника ( $\operatorname{Im} h_n < 0$ ). Можно показать, что и в поперечном направлении имеет место аналогичная затухающая стоячая волна. Иными словами, если, например, прямая волна в данной точке пространства уносит энергию от источника, то обратная возвращает эту энергию обратно к источнику.

В случае плазмы с потерями симметрия расположения  $x_n$  относительно мнимой оси нарушается. Кроме того, в этом случае отсутствует ортогональность в энергетическом смысле (29). Оба эти свойства имеют место только при чисто действительном  $\epsilon$ .

#### 4. АНАЛИЗ ВОЛН НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Теперь проведём анализ поля, записанного в (23) в виде интегралов по непрерывной части спектра. Рассмотрим один из интегралов, соответствующий, например, четным волнам:

$$H_x^{\pm}(y, z) = \int_0^{\infty} \frac{D(x, \pm h)}{h(x) N(x)} W(x, y) e^{\mp i h(x) z} d x. \quad (33)$$

Здесь для удобства дальнейшего изложения коэффициент  $B_{\pm}(x)$  представлен в виде

$$B_{\pm}(x) = \frac{D(x, \pm h)}{h(x) N(x)}, \quad (34)$$

где соответственно

$$D(x, \pm h) = \frac{-k I^\mu}{2 Z_n} \int_s \int f(y, z) W(x, y) e^{\pm i h(x) z} dy dz. \quad (35)$$

Рассмотрим сначала поле над волноводом, т. е. при  $y > b$ . С учетом (11), (12) и (21) преобразуем выражение (33) к виду

$$H_x^{\pm}(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(x, \pm h)}{h(x)(v + iw)} \exp[-i(x y \pm hz)] dx. \quad (36)$$

Из этого выражения видно, что подынтегральная функция имеет полюса в точках, где  $x$  удовлетворяет уравнению

$$V(x) = v(x) + iw(x) = 0, \quad (37)$$

т. е. дисперсионному уравнению (13). При  $\operatorname{Im} x < 0$  эти полюса соответствуют точкам дискретной части спектра — спектральным точкам. В общем случае уравнение (37) может иметь решения и с  $\operatorname{Im} x > 0$ , т. е. в верхней полуплоскости комплексных значений  $x$  (рис. 3). Эти решения и соответствующие им полюса подынтегральной функции не входят в спектр.

Если контур интегрирования деформировать так, чтобы он прошел в нижней полуплоскости под какой-нибудь спектральной точкой, то из интеграла выделится вычет, соответствующий полюсу в этой точке. Этот вычет представляет собой собственную комплексную волну, имеющую, однако, знак, противоположный знаку соответствующей собственной волны, стоящей в разложении (23) вне интеграла. В разложении эти члены уничтожают друг друга. Таким образом, указанная деформация контура соответствует введению одной из собственных волн под знак интеграла. Если же контур интегрирования деформировать так, чтобы он прошел в верхней полуплоскости над каким-нибудь неспектральным

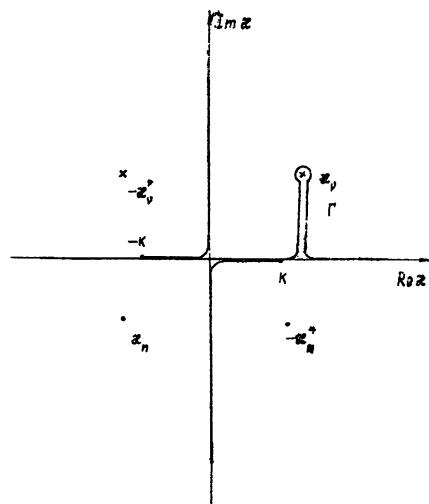


Рис. 3.

полюсом (рис. 3, путь  $\Gamma$ ), то из-под интеграла выделится член, соответствующий этому неспектральному полюсу и вместо интеграла (36) мы получим выражение

$$H_x^{\pm}(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{D(x, \pm h)}{h(x) V(x)} \exp[-i(x y \pm hz)] dx + \\ + \frac{iD(x_v, \pm h_v) \exp[-i(x_v y \pm h_v z)]}{h_v dV(x)/dx|_{x=x_v}}. \quad (38)$$

Более общее выражение, справедливое при любых значениях  $y$  может быть аналогично получено из (33) с учетом (21):

$$H_x^{\pm}(y, z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{D(x, \pm h) W(x, y)}{h(x)(v - iw)(v + iw)} e^{\mp ihz} dx + \\ + \frac{iD(x_v, \pm h_v) W(x_v, y)}{h_v v(x_v) dV(x)/dx|_{x=x_v}} e^{\mp ih_v z}, \quad (39)$$

где под контуром  $\Gamma_1$  понимается часть контура  $\Gamma$  с началом в точке  $x=0$  и концом в точке  $x=\infty$ .

Дополнительный член в (38) и (39) представляет собой волну, похожую на собственную комплексную волну. Однако поле такой волны не спадает, а, наоборот, возрастает при удалении от волновода в поперечном направлении и при  $|y| \rightarrow \infty$  экспоненциально стремится к бесконечности. Поэтому выделение такой «несобственной» волны из-под интеграла целесообразно лишь в некоторой ограниченной области, а именно внутри волновода и, может быть, в непосредственной близости от него.

Проанализируем интеграл по непрерывному спектру (33) вдали от источника. Рассмотрим поле над волноводом ( $y > b$ ), считая при этом для простоты, что источник находится вблизи начала координат, причем расположен так, что  $z_1 = -a$ ,  $z_2 = a$ , т. е. вдоль оси  $z$  он сосредоточен в интервале  $(-a, a)$ . Введем цилиндрическую систему координат  $r$ ,  $\Theta$  и новую переменную интегрирования  $\vartheta$  согласно соотношениям

$$\begin{aligned} y &= r \sin \Theta, \quad z = r \cos \Theta, \\ x &= k \sin \vartheta, \quad h = k \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда получим из (36) интеграл вида

$$H_x^{\pm}(\Theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2-i\infty}^{+\pi/2+i\infty} \frac{D(k \sin \vartheta, \pm k \cos \vartheta)}{v(k \sin \vartheta) + iw(k \sin \vartheta)} \exp [\mp ikr \cos(\vartheta \mp \Theta)] d\vartheta. \quad (41)$$

Контур интегрирования в плоскости  $\vartheta$  показан на рис. 4. Изменим контур интегрирования так, чтобы он пошел по перевальному пути. Перевальная точка при  $z > a$  ( $\Theta < \pi/2$ ) есть  $\vartheta = \Theta$ , а при  $z < -a$  ( $\Theta > \pi/2$ ) есть  $\vartheta = \pi - \Theta$ . Полюса обойдем так, как показано на рис. 4. Вдали от источников при  $r \rightarrow \infty$  имеет место следующее асимптотическое выражение:

$$H_x(\Theta, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{D(k \sin \Theta, k \cos \Theta)}{v(k \sin \Theta) + iw(k \sin \Theta)} \frac{\exp[-i(kr - \pi/4)]}{\sqrt{kr}}, \quad (42)$$

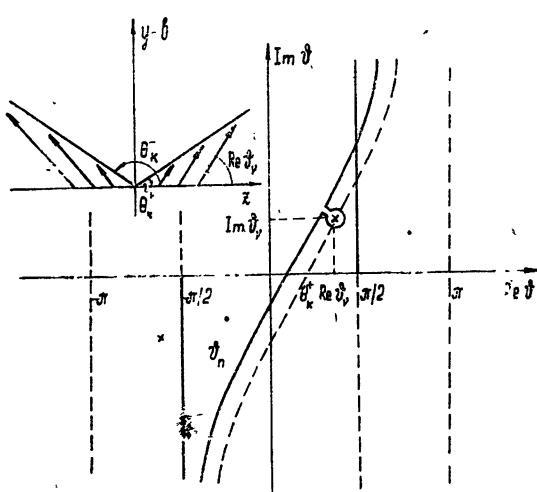


Рис. 4.

справедливое везде, кроме углов  $\Theta < \arcsin(b/r)$ ,  $\Theta > \pi - \arcsin(b/r)$ ,  $\pi/2 - \arcsin(a/r) < \Theta < \pi/2 + \arcsin(a/r)$ , которые, вообще говоря, можно не учитывать при достаточно больших  $r$ . Выражение (42) представляет собой поле излучения в виде расходящейся цилиндрической волны.

Из рис. 4 видно, что в интервале углов  $0 < \Theta < \Theta_k^+$  и  $\Theta_k^- < \Theta < \pi$  при переходе к перевальному пути интегрирования можно выделить вычет,

соответствующий несобственной волне. Это означает, что в указанных интервалах углов несобственная волна не дает вклада в поле излучения и ее можно выделить. Легко убедиться, что поле волны в этих интервалах углов экспоненциально спадает при  $r \rightarrow \infty$ . Действительно,

$$H_x^{\pm v}(\Theta, r) = \frac{iD(k \sin \vartheta, \pm k \cos \vartheta)}{dV(k \sin \vartheta)/d\vartheta} \exp [\mp ikr \cos(\vartheta \mp \Theta)] \Big|_{\vartheta=\vartheta_v}. \quad (43)$$

Поскольку  $\operatorname{Im} \cos(\vartheta_v \mp \Theta) = -\sin(\operatorname{Re} \vartheta_v \mp \Theta) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} \vartheta_v)$ , то при  $\Theta < \Theta_k^+ < \operatorname{Re} \vartheta_v$ ,  $\operatorname{Im} \cos(\vartheta_v - \Theta) < 0$ , а при  $\Theta \geq \Theta_k^- > \pi - \operatorname{Re} \vartheta_v$ ,  $\operatorname{Im} \cos(\vartheta_v + \Theta) > 0$ .

Рассмотрим угловую зависимость поля излучения. Из выражения (42) и рис. 4 видно, что если полюс  $\vartheta$ , находится недалеко от действительной оси, то излучение будет иметь максимумы в направлениях, близких к  $\Theta = \operatorname{Re} \vartheta$ , и  $\Theta = \pi - \operatorname{Re} \vartheta$ . Таким образом, присутствие несобственной волны может существенно влиять на диаграмму излучения.

Несобственная волна является «вытекающей» волной. В отличие от собственной волны, ее энергия не концентрируется полностью в волноводе и вблизи него, а, преобразуясь в поле излучения, вытекает в свободное пространство. Такая волна должна всегда поддерживаться источником.

С другой стороны, присутствие в поле непрерывного спектра несобственной волны говорит о наличии резонансного явления, сходного с попечерным резонансом собственной волны ( $x$ , удовлетворяет тому же дисперсионному уравнению, что и  $x$ , собственной волны). В простейшем случае одиночного однородного плазменного слоя с положительным  $\epsilon$  несобственную «вытекающую» волну можно представить себе как плоскую волну, распространяющуюся внутри слоя вследствие отражения от границ со свободным пространством. При этом энергия волны из-за неполного отражения непрерывно излучается в пространство. Аналогичное представление вытекающей волны пригодно для двух слоев плазмы, разделенных воздушным промежутком. Плоская волна распространяется в этом случае в воздушном промежутке, частично просачиваясь сквозь слои.

Рассмотрим теперь энергетические характеристики поля излучения. Нетрудно показать, что асимптотическое выражение (42) справедливо и для поля под слоем. Учитывая, что вне слоя  $E_\Theta = (Z_0/ik)(\partial H_x/\partial r)$ , получим асимптотическое выражение для  $E_\Theta$ :

$$E_\Theta = \frac{-Z_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{D(k \sin \Theta, k \cos \Theta)}{v(k \sin \Theta) + iw(k \sin \Theta)} \frac{\exp[-i(kr - \pi/4)]}{\sqrt{kr}}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что диаграмма излучения по мощности в зависимости от угла  $\Theta$  имеет вид

$$P(\Theta) = -E_\Theta H_x^* r = \frac{Z_0}{2\pi k} \frac{|D(k \sin \Theta, k \cos \Theta)|^2}{v^2(k \sin \Theta) + w^2(k \sin \Theta)}, \quad (45)$$

а полный поток мощности излучения

$$P_{\text{изл}} = \int_0^{2\pi} P(\Theta) d\Theta. \quad (46)$$

Формула (45) справедлива лишь тогда, когда возбуждаются только четные или только нечетные волны, т. е. возбуждение симметрично или антисимметрично относительно плоскости  $y = 0$ . В общем случае несимметричного возбуждения нужно одновременно учитывать и четные,

и нечетные волны. При этом для диаграммы потока мощности будет иметь место следующее выражение:

$$P(\Theta) = \frac{Z_0}{2\pi k} \left| \frac{D_q(k \sin \Theta, k \cos \Theta)}{v_q(k \sin \Theta) + iw_q(k \sin \Theta)} + \frac{D_h(k \sin \Theta, k \cos \Theta)}{v_h(k \sin \Theta) + iw_h(k \sin \Theta)} \right|^2. \quad (47)$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассмотрим полупространство  $y > 0$  (аналогично рассматривается полупространство  $y < 0$ ) и перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$\frac{d^2 W}{dy^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{d \epsilon}{dy} \frac{d W}{dy} - k^2 \tau(y) W + x^2 W = 0. \quad (\Pi.1)$$

Условия в нуле имеет вид

$$W(0) = \sigma_1, \quad dW/dy|_{y=0} = k \sigma_2, \quad (\Pi.2)$$

где  $\sigma_2 = 0$  соответствует четной функции, а  $\sigma_1 = 0$  — нечетной функции. Проинтегрируем два раза по частям выражение

$$\int_0^y \sin [x(y-u)] \frac{d^2 W}{du^2} du = xW(y) - k \sigma_2 \sin (x y) - \\ - x\sigma_1 \cos (x y) - x^2 \int_0^y \sin [x(y-u)] W(u) du.$$

Отсюда на основании уравнения (П.1) имеем

$$W(y) = \sigma_1 \cos (x y) + \frac{k}{x} \sigma_2 \sin (x y) + \\ + \frac{1}{x} \int_0^y \sin [x(y-u)] \left[ k^2 \tau(u) W(u) + \frac{1}{\epsilon} \frac{d \epsilon}{du} \frac{d W}{du} \right] du.$$

В частности, значение функции  $W(y)$  вне волновода можно записать с учетом того, что  $\tau(y) = 0$ ,  $d \epsilon/dy = 0$  при  $y > b$ , в виде

$$W(y) = \sigma_1 \cos (x y) + \frac{k}{x} \sigma_2 \sin (x y) + \\ + \frac{1}{x} \int_0^b \sin [x(y-u)] \left[ k^2 \tau(u) W(u) + \frac{1}{\epsilon} \frac{d \epsilon}{du} \frac{d W}{du} \right] du. \quad (\Pi.3)$$

Выражение (П. 3) можно переписать также в виде

$$W(y) = v(x) \cos (x y) - w(x) \sin (x y),$$

$$v(x) = \sigma_1 - \frac{1}{x} \int_0^b \sin (x y) \left[ k^2 \tau(y) W(y) + \frac{1}{\epsilon} \frac{d \epsilon}{dy} \frac{d W}{dy} \right] dy, \quad (\Pi.4)$$

$$w(x) = - \frac{k}{x} \sigma_2 - \frac{1}{x} \int_0^b \cos (x y) \left[ k^2 \tau(y) W(y) + \frac{1}{\epsilon} \frac{d \epsilon}{dy} \frac{d W}{dy} \right] dy,$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

1) Рассмотрим уравнения (5) для функций сечения двух волн дискретной части спектра, записанные в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{dW_n}{dy} \right) - \frac{k^2 \tau}{\varepsilon} W_n + \frac{x_n^2}{\varepsilon} W_n = 0, \\ \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{dW_m}{dy} \right) - \frac{k^2 \tau}{\varepsilon} W_m + \frac{x_m^2}{\varepsilon} W_m = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Умножим эти уравнения соответственно на  $W_m$  и  $-W_n$ , сложим их и проинтегрируем результат по  $y$ . Тогда получим с учетом (18), что

$$(x_n^2 - x_m^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} W_n W_m dy = \frac{1}{\varepsilon} \left[ W_n \frac{dW_m}{dy} - W_m \frac{dW_n}{dy} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (\text{П.6})$$

Отсюда следует, что при  $x_n \neq x_m$ , т. е. в отсутствие вырождения интеграл равен нулю.

Аналогичное (П. 6) соотношение получается для функций сечения от дискретной и непрерывной частей спектра; из этого соотношения следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} W_n W(x) dy = 0. \quad (\text{П.7})$$

Теперь рассмотрим функции сечения двух волн непрерывной части спектра с собственными значениями  $x$  и  $\tilde{x}$ . Для них с учетом (19) получим выражение

$$\begin{aligned} J(x, \tilde{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} W(x) W(\tilde{x}) dy = \\ &= \frac{1}{x^2 - \tilde{x}^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \left[ W(x) \frac{dW(\tilde{x})}{dy} - W(\tilde{x}) \frac{dW(x)}{dy} \right] \Big|_{-R}^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ (v\tilde{v} + w\tilde{w}) \frac{\sin[(x - \tilde{x})R]}{x - \tilde{x}} + (v\tilde{v} - w\tilde{w}) \frac{\sin[(x + \tilde{x})R]}{x + \tilde{x}} - \right. \\ &\quad \left. - (v\tilde{w} - w\tilde{v}) \frac{\cos[(x - \tilde{x})R]}{x - \tilde{x}} + (v\tilde{w} + w\tilde{v}) \frac{\cos[(x + \tilde{x})R]}{x + \tilde{x}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Учитывая, что в первом члене в фигурных скобках

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin[(x - \tilde{x})R]}{x - \tilde{x}} = \pi \delta(x - \tilde{x})$$

и что остальные члены при интегрировании по  $x$  дают нуль (ср. [4, 5]), получим ортогональность функции сечения непрерывной части спектра:

$$J(z, \tilde{z}) = N(z)\delta(z - \tilde{z}), \quad (\text{П.9})$$

где  $N(z) = \pi [v^2(z) + w^2(z)]$ .

Следует отметить, что для непрерывной части спектра всегда имеет место вырождение между четной и соответствующей ей нечетной волнами. Однако функции сечения этих волн все-таки являются ортогональными вследствие самого свойства четности.

2) Нормировочная величина для функций сечения дискретной части спектра, согласно (П. 6), имеет вид

$$N_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W_n^2 dy. \quad (\text{П.10})$$

Покажем, что между  $N(z)$  и  $N_n$  существует прямая связь. Действительно, пусть  $z = z_n$  удовлетворяет уравнению  $v(z_n) + iw(z_n) = 0$ . Тогда из (П. 8) следует

$$J(z_n, \tilde{z}) = \lim_{R \rightarrow \infty} iv(z_n) \left[ \frac{\tilde{v} + i\tilde{w}}{z_n - \tilde{z}} e^{-i(z_n - \tilde{z})R} + \frac{\tilde{v} - i\tilde{w}}{z_n + \tilde{z}} e^{-i(z_n + \tilde{z})R} \right]. \quad (\text{П.11})$$

Отсюда

$$N_n = \lim_{\tilde{z} \rightarrow z_n} J(z_n, \tilde{z}) = -iv(z_n) \left( \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{z}} + i \frac{d\tilde{w}}{d\tilde{z}} \right) \Big|_{\tilde{z}=z_n}.$$

Здесь сначала делается предельный переход  $\tilde{z} \rightarrow z_n$ , а затем  $R \rightarrow \infty$ . При втором переходе второй член в квадратной скобке в (П. 11) обращается в нуль, так как  $\operatorname{Im} z_n < 0$ . С другой стороны,

$$\frac{dN(z)}{dz} = 2\pi \left( v \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} \right),$$

откуда

$$\frac{dN(z)}{dz} \Big|_{z=z_n} = 2\pi v(z_n) \left( \frac{dv}{dz} + i \frac{dw}{dz} \right) \Big|_{z=z_n} = 2\pi i N_n. \quad (\text{П.12})$$

3) Рассмотрим другой вид ортогональности, который имеет место в случае плазмы без потерь:  $\tau = \tau_0$ ,  $\epsilon = \operatorname{Re} \epsilon$ . Эта ортогональность получается из (П. 5), если в качестве второго уравнения взять комплексно сопряженное ему. В результате вместо соотношения (П. 6) получим

$$\left[ x_n^2 - (x_m^*)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W_n W_m^* dy = \frac{1}{\epsilon} \left( W_n \frac{dW_n^*}{dy} - W_m^* \frac{dW_n}{dy} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

а само свойство ортогональности запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} W_n W_m^* dy = \begin{cases} N_n & \text{при } x_m = -x_n^* \\ 0 & \text{при } x_m \neq -x_n^* \end{cases}$$

где  $N_n$  — та же нормировка (П. 10).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 51, 317 (1963).
2. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 124 (1964).
3. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 176 (1964).
4. В. В. Шевченко, Диссертация, МФТИ, М., 1964.
5. В. В. Шевченко, Акустический ж., 9, 215 (1963)
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
12 июля 1965 г.

ELECTROMAGNETIC WAVES IN ISOTROPIC STRATIFIED PLASMA  
WAVEGUIDE

V. V. Shevchenko

Orthogonal eigen waves of waveguide in isotropic stratified nonhomogeneous plasma have been investigated. The waveguide has a mixed (discrete and continuous) frequency spectrum. A discrete part of the spectrum corresponds to waves localized near waveguide but a continuous one to radiation field. The problem of stratified plasma waveguide excitation has been solved in a general form.

УДК 533.951

## ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА В РАДИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ

*Л. И. Коротун*

С учетом гидродинамического давления рассматриваются волны плотности заряда в электронном потоке, частицы которого расходятся в радиальном направлении как с постоянной, так и с переменной скоростью. Изучен характер пространственного изменения основных параметров волны. Показано, что при определенном законе изменения невозмущенной скорости потока возможно возникновение неустойчивости, при достаточно высоких температурах инкременты и фазовые скорости нарастающих волн заметно зависят от температуры.

Вопрос о волнах плотности в электронных потоках с постоянной концентрацией электронов по сечению рассматривался многими авторами (Рамо [1], Ридбек [2], позднее Файнберг, Блиох [3] и др.) как при постоянной невозмущенной скорости потока, так и при скорости, меняющейся по определенному закону. В связи с возможностью применения во многих областях электроники радиальных потоков\*, обладающих некоторыми преимуществами при формировании потоков с большими плотностями, представляет интерес рассмотреть задачу о неустойчивости в таких потоках.

В упомянутых выше работах было показано, что возникшие в потоке отклонения равновесного значения в случае постоянной скорости потока распространяются в виде волн постоянной амплитуды или в виде волн изменяющейся амплитуды — в случае изменения скорости потока по определенному закону. В радиальном электронном потоке, где имеет место монотонное изменение невозмущенной плотности электронов в направлении распространения, естественно ожидать аналогичных эффектов, связанных с монотонным изменением плазменной частоты потока. Далее, при использовании все более коротких волн оказывается сильное влияние температуры на свойства электронного потока, приводящее к заметному расхождению теоретических выводов для «холодного» потока и экспериментальных результатов. Ввиду предполагаемого преимущества радиального потока именно на коротких волнах возникает необходимость учесть температуру потока.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть электроны покидают бесконечно длинный цилиндр радиуса  $a$  с начальной скоростью  $v_0(a)$ . Считаем, что плотность потока не зависит от  $z$  и  $\varphi$ . Предполагая далее, что скорости электронов далеки от релятивистских, пренебрежем магнитным полем, вклад которого в уравнение движения меньше, чем вклад электрического поля. Кроме того, будем считать, что постоянные электрические поля в системе создаются ион-

\* Электроны движутся вдоль радиуса  $r$  в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ .

ным фоном [6], а переменное электрическое поле имеет единственную компоненту в направлении движения электронов.

Для радиальной скорости  $v$ , плотности  $\rho$  и продольной компоненты электрического поля  $E$  в системе CGSE имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{|e|}{m} E - \frac{v_T^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) (\rho v) &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) E &= -4\pi\rho. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $e$ ,  $m$  — соответственно заряд и масса электрона,  $v_T = \sqrt{km^{-1}T_e}$  — тепловая скорость электронов, определяющая гидродинамическое давление  $p = n(r)kT_e$  ( $k$  — постоянная Больцмана,  $T_e$  — температура электронов;  $n(r)$  — плотность электронов).

Пусть все переменные величины меняются во времени по закону  $e^{j\omega t}$ . Тогда величины, входящие в (1), можно представить в виде

$$\begin{aligned} v(r) &= v_0(r) + \tilde{v}(r) e^{j\omega t}, \\ \rho(r) &= \rho_0(r) + \tilde{\rho}(r) e^{j\omega t}, \\ E(r) &= E_0(r) + \tilde{E}(r) e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $v_0(r)$ ,  $\rho_0(r)$  — соответственно равновесная скорость и плотность электронов,  $\tilde{v}(r)$ ,  $\tilde{\rho}(r)$  — отклонения скорости и плотности от равновесных значений,  $\tilde{E}(r)$  — радиальная компонента переменного электрического поля. Предполагая отклонения от равновесных значений малыми и линеаризовав систему (1), получим для плотности конвекционного тока  $\tilde{J} = \rho_0 \tilde{v} + \tilde{\rho} v_0$  следующее уравнение:

$$\tilde{J}'' + p(r) \tilde{J}' + q(r) \tilde{J} = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$p(r) = \left( 1 + \frac{v_T^2}{v_0^2} \right) \left[ \frac{2j\omega}{v_0} + \frac{2v'_0}{v_0} - \left( 1 - \frac{v_T^2}{v_0^2} \right) \frac{\rho'_0}{\rho_0} + \left( 1 - \frac{v_T^2}{v_0^2} \right) \frac{1}{r} \right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} q(r) &= \left( 1 + \frac{v_T^2}{v_0^2} \right) \left\{ j\omega \frac{v'_0}{v_0^2} - j \frac{\omega}{v_0} \frac{\rho'_0}{\rho_0} - \frac{\omega^2}{v_0^2} + \frac{\omega_p^2(r)}{v_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left[ \frac{j\omega}{v_0} + \frac{2v'_0}{v_0} - \left( 1 - \frac{v_T^2}{v_0^2} \right) \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right] - \left( 1 - \frac{v_T^2}{v_0^2} \right) \frac{1}{r^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\omega_p^2(r) = \frac{4\pi |e|}{m} \rho_0(r).$$

Для того, чтобы представить  $p(r)$  и  $q(r)$  как функции только  $v_0(r)$ , воспользуемся условием непрерывности для невозмущенной плотности тока  $\text{div}(\rho_0 v_0) = 0$ . Учитывая последнее и используя замену  $\tilde{J} = \exp[-1/2 \int p(r) dr] u$ , сведем уравнение (3) к виду

$$y'' + F(r) y = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(r) = & \frac{\omega_p^2(a) v_0(a) a}{r v_0^3(r)} - \frac{3}{2} \frac{v_0''(r)}{v_0(r)} - \frac{3}{4} \left[ \frac{v_0'(r)}{v_0(r)} \right]^2 + \\ & + \frac{v_T^2}{v_0^2} \left\{ \frac{\omega_p^2(a) v_0(a) a}{r v_0^3(r)} - \frac{3}{2} \frac{v_0''(r)}{v_0(r)} + \frac{3}{2} \left[ \frac{v_0'(r)}{v_0(r)} \right]^2 + \frac{\omega^2}{v_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

При выводе (7) предполагается, что  $v_T^2/v_0^2 \ll 1$ , поэтому члены более высокого порядка малости опущены. Уравнение (7) для каждого конкретного вида  $F(r)$  позволяет получить основные характеристические величины потока.

## 2. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ПОТОКА

Рассмотрим для простоты случай, когда невозмущенная скорость электронов потока постоянна и отсутствует тепловое движение электронов ( $v_T = 0$ ,  $v_0 = \text{const}$ ). При этом (6) приобретает вид уравнения Бесселя:

$$y'' + \frac{\omega_p^2(a) a}{v_0} \frac{1}{r} y = 0,$$

общее решение которого запишем в виде

$$y = r^{-1/2} [C_1 H_1^{(1)}(\gamma \sqrt{r}) + C_2 H_1^{(2)}(\gamma \sqrt{r})], \quad (8)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные,  $\gamma = 2\omega_p(a)\sqrt{a}v_0^{-1}$ ,  $H_1^{(1)}$ ,  $H_1^{(2)}$  — функции Ганкеля первого порядка первого и второго рода.

Плотность конвекционного тока при этом представляется в виде

$$\tilde{J} = r^{1/2} [C_1 H_1^{(1)}(\gamma \sqrt{r}) + C_2 H_1^{(2)}(\gamma \sqrt{r})] \exp\left(-j \frac{\omega}{v_0} r\right). \quad (9)$$

Для случая, когда  $\gamma \sqrt{r} \gg 1$ , справедливы асимптотические представления, функций Ганкеля, с учетом которых

$$\tilde{J} = r^{-3/4} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} [C'_1 \exp(j\gamma \sqrt{r}) + C'_2 \exp(-j\gamma \sqrt{r})] \exp\left(-j \frac{\omega}{v_0} r\right),$$

где

$$C'_1 = C_1 \exp(-j3\pi/4), \quad C'_2 = C_2 \exp(j3\pi/4).$$

Используя (1) и опуская в выражениях осциллирующие множители, получим, что амплитуды остальных характеристических величин изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\propto r^{3/4}, \quad \tilde{v} \propto r^{-1/4}, \quad \tilde{\rho}_1 \propto \left( \frac{r^{-3/4}}{v_0} + \frac{\gamma}{2} \frac{r^{-5/4}}{\omega} \right), \\ \tilde{\rho}_2 &\propto \left( \frac{r^{-3/4}}{v_0} - \frac{\gamma}{2} \frac{r^{-5/4}}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\tilde{\rho}_1$  и  $\tilde{\rho}_2$  — соответственно амплитуды медленной и быстрой волн переменной плотности заряда.

Постоянные  $C'_1$  и  $C'_2$  легко определить из условий в месте вылета электронов:  $\tilde{J}(a) = 0$ ,  $\tilde{v}(a) = u_0$ . Они равны соответственно

$$C_1 = -\frac{u_0}{4\pi a} \left[ \frac{\omega_p v_0(a)}{4\pi a} \right]^{1/2} \frac{\exp[-j(\gamma\sqrt{a} - \omega a/v_0)]}{\omega\rho_0(a)},$$

$$C_2 = u_0 \left[ \frac{\omega_p v_0(a)}{4\pi a} \right]^{1/2} \frac{\exp[j(\gamma\sqrt{a} + \omega a/v_0)]}{\omega\rho_0(a)}.$$

Записывая полный конвекционный ток  $\tilde{I}$  с единицы длины (по оси  $z$ )

$$\tilde{I} = r^{1/4} \sqrt{\frac{8\pi}{\gamma}} [C_1 \exp(j\gamma\sqrt{r}) + C_2 \exp(-j\gamma\sqrt{r})] \exp\left(-j\frac{\omega}{v_0} r\right),$$

видим, что, в отличие от потоков с постоянной равновесной плотностью электронов, в радиальном потоке имеет место нарастание амплитуды тока по закону  $r^{1/4}$  в случае постоянной равновесной скорости электронов. Выражения для фазовых скоростей волн указывают на наличие в системе быстрой ( $v_{\phi 1}$ ) и медленной ( $v_{\phi 2}$ ) волн:

$$v_{\phi 1} = \frac{v_0}{1 - [\omega_p(a)/\omega] \sqrt{a/r}}, \quad (11)$$

$$v_{\phi 2} = \frac{v_0}{1 + [\omega_p(a)/\omega] \sqrt{a/r}}. \quad (12)$$

Из выражений (11) — (12) следует, что фазовые скорости волн не остаются постоянными в различных сечениях потока (в отличие от потоков с постоянной плотностью). При этом в случае, если монотонно меняющаяся скорость медленной волны, совпадающая с направлением движения потока, стремится асимптотически к скорости электронов потока, быстрая волна в зависимости от плотности потока  $\rho_0(a)$  и частоты возмущения  $\omega$  может не совпадать с направлением движения электронов потока. Так при  $\omega_p(a) > \omega$  существует цилиндрическая поверхность  $r = b = \omega_p^2(a) a^{-1/2}$ , в которой  $v_{\phi 1}$  обращается в бесконечность; при этом в области  $a \ll r \ll b$  скорости  $v_{\phi 1}$  и  $v_{\phi 2}$  одного знака, в области  $r > b$  — разного знака. Характерно, что амплитуда быстрой волны переменной плотности  $\rho_2$  при  $r = b$  обращается в нуль.

Рассмотрим теперь случай, когда тепловая скорость электронов отлична от нуля. При этом (6) приобретает вид

$$y'' + \left[ \frac{\omega_p^2(a) a}{v_0^2 r} + \frac{\omega^2 v_T^2}{v_0^4} \right] = 0. \quad (13)$$

Вводя обозначения  $x = \sigma r$ ,  $k = \alpha/\sigma$ ,  $\sigma^2 = -4\beta^2$ , где

$$\beta^2 = \frac{v_T^2 \omega^2}{v_0^4}, \quad \alpha = \frac{\omega_p^2(a) a}{v_0^2},$$

нетрудно показать, что (13) есть уравнение Уиттекера, общее решение которого

$$y = C_1 W_{k, 1/2}(x) + C_2 W_{-k, 1/2}(-x). \quad (14)$$

Здесь  $W_{k, 1/2}(x)$ ,  $W_{-k, 1/2}(-x)$  — функции Уиттекера,  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные.

Рассматривая случай, когда  $|x| > 1$ , и учитывая, что при  $|\arg x| \leq \pi - \delta < \pi$  функции Уиттекера

$$W_{k,m}(x) = e^{-x/2} x^k [1 + O(x^{-1})],$$

$$W_{-k,m}(-x) = e^{x/2} (-x)^k [1 + O(x^{-1})],$$

запишем:

$$y = C'_1 e^{-ix(r)} + C'_2 e^{ix(r)}, \quad (15)$$

где

$$x(r) = \frac{\alpha}{2\beta} \ln r + \beta r, \quad C'_1 = C_1 \exp \left[ j \frac{\omega_p^2(a) \alpha}{2v_T \omega} \ln \left( -2j \frac{v_T \omega}{v_0^2} \right) \right],$$

$$C'_2 = C_2 \exp \left[ -j \frac{\omega_p^2 \alpha}{2v_T \omega} \ln \left( 2j \frac{v_T \omega}{v_0^2} \right) \right].$$

Выражение для конвекционного тока в этом случае примет вид

$$\tilde{J} = r^{-1} [C'_1 e^{-ix(r)} + C'_2 e^{ix(r)}] \exp [-j(\omega/v_0)r]. \quad (16)$$

Представляя ток на единицу длины потока  $\tilde{I}$  в форме

$$\tilde{I} = 2\pi [C'_1 e^{-ix(r)} + C'_2 e^{ix(r)}] \exp [-j(\omega/v_0)r],$$

видим, что значительная тепловая скорость электронов приводит, в отличие от предыдущего случая, к постоянству амплитуды волны тока  $\tilde{I}$  в направлении распространения. Характер изменения амплитуд остальных характеристических величин определяется выражениями

$$\tilde{E} \propto r^{-1}, \quad \tilde{v} \propto \left( \frac{\alpha}{2\beta} r^{-1} + \beta \right),$$

$$\tilde{\rho}_1 \propto \left[ \frac{\alpha}{2\omega\beta} r^{-2} + \left( \frac{\beta}{\omega} + \frac{1}{v_0} \right) r^{-1} \right], \quad \tilde{\rho}_2 \propto \left[ \frac{\alpha}{2\omega\beta} r^{-2} + \left( \frac{\beta}{\omega} - \frac{1}{v_0} \right) r^{-1} \right]. \quad (17)$$

Здесь  $C'_1$  и  $C'_2$  определяются, как и в предыдущем случае, из условий в месте вылета электронов. Из сравнения (10) с выражениями (17) видно, что в рассмотренном случае существует более резкое спадание амплитуды волн плотности  $\tilde{\rho}$ , скорости  $\tilde{v}$  и электрического поля  $\tilde{E}$  в направлении распространения.

Введем функцию

$$A(r) = \frac{\alpha}{2\beta\omega} r^{-2} - \frac{1}{v_0} r^{-1},$$

характеризующую изменение амплитуды быстрой волны переменной плотности  $\tilde{\rho}_2$  в направлении распространения. При этом оказывается, что  $A(r)$  и  $A'(r)$  обращаются в нуль соответственно на поверхностях  $r_b = \omega_p^2(a) v_0 \alpha / 2\omega^2 v_T$  и  $r_c = 2r_b$ . Для первого сечения потока ( $r = r_b$ ) характерно обращение в нуль амплитуды быстрой волны  $\tilde{\rho}_2$  во втором сечении ( $r = r_c$ ) имеет место относительный минимум амплитуды.

Аналогичное исследование для амплитуды медленной волны  $\tilde{\rho}_1$  указывает, что она изменяется монотонно; это имеет место и для волн переменной скорости  $\tilde{v}$ . Из сравнения (10) и (17) следует, что, если в случае «холодного» потока переменная скорость  $\tilde{v}$  монотонно уменьшается как  $r^{-1/4}$ , то при условии  $|x| > 1$  характер спадания ее гораздо сильнее (как

$r^{-1}$ ), причем она асимптотически приближается к некоторому значению, зависящему от температуры потока. Выражения для фазовых скоростей быстрой  $v_{\Phi 1}$  и медленной волн в этом случае приобретает вид

$$v_{\Phi 1} = \frac{v_0}{1 - [\omega_p^2(a)/\omega^2] (v_0/v_T)(a/r)}, \quad (18)$$

$$v_{\Phi 2} = \frac{v_0}{1 + [\omega_p^2(a)/\omega^2] (v_0/v_T)(a/r)}. \quad (19)$$

Из (19) видно, что так же, как и в (12), фазовая скорость медленной волны, монотонно возрастающая с течением радиуса, приближается к скорости электронов. Фазовая скорость быстрой волны имеет особенность при  $r=2r_b$ . Таким образом, на цилиндрической поверхности  $r=r_b$  амплитуда быстрой волны переменной плотности  $\rho_2$  стремится к нулю, а фазовая скорость к бесконечности. При этом указанная поверхность смещается в область больших радиусов по сравнению со случаем «холодного» потока.

### 3. МОНОТОННОЕ ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ

Рассмотрим случай «холодного» радиального потока, в котором не-возмущенная скорость электронов изменяется по закону

$$v_0(r) = v_0(a) (r/a)^n,$$

где  $n$  — любое натуральное число. Уравнение (6) в этом случае приобретает вид

$$y'' + \left[ \frac{\omega_p^2}{v_0^2} \left( \frac{a}{r} \right)^{3n+1} + \left( \frac{3}{2} n - \frac{9}{4} n^2 \right) r^{-2} \right] y = 0. \quad (20)$$

Общее решение (20) для случая  $n \neq 1/3$  запишется в виде комбинаций функций Ганкеля:

$$y = r^{1/2} \left[ C_1 H_v^{(1)} \left( \frac{2}{m} \sqrt{b} r^{m/2} \right) + C_2 H_v^{(2)} \left( \frac{2}{m} \sqrt{b} r^{m/2} \right) \right],$$

где

$$v = \frac{1}{m} \sqrt{1-4c}, \quad b = \frac{\omega_p^2}{v_0^2} a^{3n+1},$$

$$c = -\frac{9}{4} n^2 + \frac{3}{2} n, \quad m = 1 - 3n.$$

Известно, что сечение  $r = r_0$ , где  $F(r) = 0$ , является точкой перехода уравнения (20). На интервале, где  $F(r) < 0$ , решение (20), естественно, должно быть монотонно меняющимся, а на интервале, где  $F(r) > 0$ , осциллирующим. Так, при  $|(2/m) \sqrt{b} r^{m/2}| \gg v$

$$y = r^{(2-m)/4} \sqrt{\frac{m}{\pi V b}} \left[ C'_1 \exp \left( j \frac{2}{m} \sqrt{b} r^{m/2} \right) + C'_2 \exp \left( -j \frac{2}{m} \sqrt{b} r^{m/2} \right) \right], \quad (21)$$

где

$$C'_1 = C_1 \exp \left( -j \frac{\pi}{4} v - \frac{\pi}{4} \right), \quad C'_2 = C_2 \exp \left( j \frac{\pi}{4} v + \frac{\pi}{4} \right).$$

Выражение для конвекционного тока

$$\tilde{J} = r^{-3/4-3n/2} \left[ C_1 \exp \left( j \frac{2\sqrt{b}}{1-3n} r^{(1-3n)/2} \right) + C_2 \exp \left( -j \frac{2\sqrt{b}}{1-3n} r^{(1-3n)/2} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[ -j \frac{\omega a^n r^{-n+1}}{v_0(a)(1-n)} \right] \quad (22)$$

в этом случае также указывает на наличие в системе быстрой и медленной волн (соответственно  $v_{\phi 1}$  и  $v_{\phi 2}$ )

$$v_{\phi 1} = \frac{v_0}{(a/r)^n - (\omega_p/\omega)(a/r)^{(3n+1)/2}}, \quad (23)$$

$$v_{\phi 2} = \frac{v_0}{(a/r)^n + (\omega_p/\omega)(a/r)^{(3n+1)/2}}.$$

Из (22) видно, что амплитуда тока  $\tilde{J}$  при степенном характере ускорения потока монотонно уменьшается; при торможении, более быстром, чем  $r^{-1/2}$ , наблюдается монотонный рост амплитуды. При  $\omega_p \ll \omega$  фазовые скорости обеих волн равны невозмущенной скорости элекгронов потока. При условии  $(2/m)\sqrt{b}r^{m/2} \ll v$ , что характерно для случая низких плотностей электронов в потоке, конвекционный ток запишется в виде

$$\tilde{J} = r^{-1/2-3n/2} \left( C_1^0 r^{\sqrt{1-4c}/2} + C_2^0 r^{-\sqrt{1-4c}/2} \right) \exp \left[ -j \frac{\omega a^n r^{1-n}}{v_0(a)(1-n)} \right], \quad (24)$$

где

$$C_1^0 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) b^{\sqrt{1-4c}/2m};$$

$$C_2^0 = \frac{C_1 - C_2}{\pi} \left( \frac{1}{m} \sqrt{1-4c} - 1 \right) ! \left( \frac{\sqrt{b}}{m} \right)^{-\sqrt{1-4c}/m}.$$

В этом случае наблюдается более быстрый рост амплитуды тока  $\tilde{J}$ , но все же характер нарастания остается степенным.

Пусть теперь электронный поток обладает значительной тепловой скоростью (везде предполагается, однако, что  $v_T^2/v_0^2 \ll 1$ ), а его невозмущенная скорость изменяется вдоль радиуса по закону

$$v_0(r) = v_m(a) e^{-\beta r},$$

где

$$v_m(a) = v_0(a) e^{\beta a}.$$

Выражение (7) в этом случае приобретает вид

$$F(r) = \frac{\omega_p^2(a) a}{v_m^2(a) r} e^{3\beta r} + \frac{v_T^2 \omega^2}{v_m^4(a)} e^{4\beta r} - \frac{9}{4} \beta^2. \quad (25)$$

Введем величины

$$\lambda = r/\omega, \quad \xi = \int [F(\lambda)]^{1/2} d\lambda, \quad \eta(\xi) = [F(\lambda)]^{1/4} y,$$

с учетом которых (6) запишется в виде

$$\frac{d^2 \eta(\xi)}{d\xi^2} + \omega^2 \eta(\xi) = \rho(\xi) \eta(\xi), \quad (26)$$

где

$$\rho(\xi) = \frac{1}{4} \frac{F''(\xi)}{F(\xi)} - \frac{5}{16} \frac{[F'(\xi)]^2}{F^3(\xi)}.$$

Решение (26) можно приближенно (с точностью до  $\omega^{-1}$ ) представить в форме [7]

$$\eta(\xi) = D_1 e^{i\omega\xi} + D_2 e^{-j\omega\xi}$$

или в прежних переменных

$$y = \frac{1}{[F(r)]^{1/4}} \left\{ D_1 \exp \left( j \int [F(r)]^{1/2} dr \right) + D_2 \exp \left( -j \int [F(r)]^{1/2} dr \right) \right\}. \quad (27)$$

Решение (27) несправедливо в области  $F(r) = 0$ .

Не устанавливая связи между постоянными интегрирования слева и справа поверхности  $F(d) = 0$ , запишем выражение для конвекционного тока:

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & \exp \left[ -j \frac{\omega}{\beta v_m} \left( 1 + \frac{v_r^2}{v_m^2} e^{2\beta r} \right) + \frac{3}{2} \beta r \right] \frac{D_1, D_2}{[F(r)]^{1/4}} \times \\ & \times \left\{ \exp \left( j \int [F(r)]^{1/2} dr \right) + \exp \left( -j \int [F(r)]^{1/2} dr \right) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (28) видно, что независимо от знака функции  $F(r)$  имеется экспоненциальное нарастающее решение  $\tilde{J}$ . В области, где  $F(r) < 0$ , происходит более быстрое нарастание неустойчивости, в области  $F(r) > 0$  — более медленное. Следует также отметить, что при  $F(r) > 0$  инкремент не зависит от температуры потока, при  $F(r) < 0$  наряду с более быстрым нарастанием неустойчивости имеет место снижение нарастания за счет температуры потока. Далее, при  $F(r) < 0$  конвекционный ток  $\tilde{J}$  состоит из одной волны с фазовой скоростью

$$v_\Phi = \left[ \frac{v_m^2(a)}{2v_r^2} \right] v_m(a) e^{-2\beta r}, \quad (29)$$

совпадающей с направлением движения потока. Из (29) также следует, что при  $v_r \rightarrow 0$  характер неустойчивости перестает быть волнобразным. В области  $F(r) < 0$  имеется, как и в предыдущем случае, две волны тока со сложной зависимостью фазовых скоростей от  $r$  и  $v_r$ .

Итак, в нашей статье получены основные характеристические величины потока в линейном приближении как без учета, так и с учетом температуры. Указаны особенности быстрой волны плотности. Показано, что при степенном характере изменения невозмущенной скорости потока возможен рост амплитуды тока  $\tilde{J}$  по степенному закону, при экспоненциальном торможении — экспоненциальное нарастание.

Во время подготовки к печати данной статьи появились работы [4, 5], в которых рассматривались волны плотности в радиальном потоке без учета температуры и с постоянной невозмущенной скоростью электронов. В работе [4] допущена ошибка при переходе от высокочастотной скорости неустойчивости к высокочастотному потенциалу, что сказалось на окончательных выводах. Использованная там замена  $\tilde{u} = (m/e)v_0v$  ( $\tilde{u}$  — высокочастотный потенциал) применима, вообще говоря, при отсутствии явной зависимости от времени величин  $\tilde{u}$ ,  $v$  или же с опреде-

ленным приближением для низких частот. В работе [5] не проведена дифференциация неустойчивости на быструю и медленную волны.

Автор выражает благодарность А. Я. Кириченко за предложение темы настоящей работы, а также П. В. Блиоху и Ф. Г. Бассу за ценные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Ramo, Phys. Rev., **56**, 276 (1939).
2. О. Е. Н. Рудbeck, Nuovo Cimento Suppl., **10**, 101 (1953).
3. П. В. Блиох и Я. Б. Файнберг, ЖТФ, **26**, 530 (1956).
4. В. С. Савельев, Г. П. Синявский, Вопросы радиоэлектроники, сер. 1, Электроника, **3**, 35 (1964).
5. Ф. Л. Саяхов, Радиотехника и электроника, **9**, 888 (1964).
6. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, М., 1953.
7. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, ГИФМЛ, М., 1962

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
4 ноября 1964 г.

### CHARGE DENSITY WAVES IN A RADIAL ELECTRON FLUX

*L. I. Korotun*

With regard for the hydrodynamic pressure the waves are being considered of the charge density in an electron flux with radial divergence of particles, possessing constant as well as variable velocity. The spatial variation character has been studied of the main wave parameters. The onset of the instability is shown to be possible at the definite variation law of the nonperturbated flux velocity. Increments and phase velocities of growing waves are shown to be dependent on temperature under sufficiently high temperatures.

УДК 621.385.001

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРОХОИДАЛЬНЫХ ПУЧКОВ С БОЛЬШИМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ, ФОРМИРУЕМЫХ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ**

*A. A. Мельниченко, B. A. Флягин*

Приведены результаты экспериментального исследования трохоидальных пучков с большими значениями первенца, формируемых в скрещенных электрическом и магнитном полях. С помощью зондирующего ленточного электронного пучка, вводимого в систему вдоль магнитного поля, определены «внешние» характеристики пучка и распределение напряженности электрического поля в зависимости от величины тока исследуемого пучка.

При формировании мощных трохоидальных пучков с большими значениями параметра раскачки  $f$  в электронных приборах, основанных на взаимодействии незамедленных электромагнитных волн с потоком колеблющихся электронов [1,2], необходимо учитывать поле, создаваемое пространственным зарядом пучка. В электронно-оптических системах с нарастающим магнитным полем [3,4] действие пространственного заряда пучка наиболее сильно проявляется в области взаимодействия, где величина магнитного поля достигает наибольшего значения, определяемого рабочей частотой прибора, а средняя продольная скорость электронов уменьшается ( $v_0 = E_0/B_0$ ). Ясно, что влияние пространственного заряда особенно возрастает с увеличением рабочей частоты. Действительно, если учесть, что напряженность поля  $E_0$  ограничена возможностью пробоя между анодом и катодной пластиной ( $E_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$ ), то уже для полей  $H = 13 \cdot 10^3 \text{ э}$ , что соответствует рабочей длине волн  $\lambda = 8 \text{ мм}$ , средняя продольная скорость не превосходит величины, соответствующей 50 эв. При такой скорости увеличение тока пучка до  $1 \text{ а} \cdot \text{см}^{-1}$  (на сантиметр ширины пространства взаимодействия) приводит к увеличению поля пространственного заряда до величины порядка  $E_0$ .

Приведенные выше соображения показывают, что необходимость использования больших магнитных полей в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах является одной из основных причин, ограничивающих допустимые токи (а следовательно, и мощность) электронных приборов, действие которых основано на передаче колебательной энергии электронов в трохоидальных пучках высокочастотному полю. Аналогичная ситуация имеет место, конечно, и для обычных приборов типа  $M^*$ . Однако для приборов рассматриваемого типа роль статического прост-

\* На первый взгляд, в обычных приборах  $M$ -типа (ЛБВМ, ЛОВМ, платинотрон, магнетрон и т. д.) ограничение на ток более слабое, так как возможна работа при относительно слабых магнитных полях (практически возможно, чтобы  $w_H < (1/2)w$ ). Однако благодаря более жестким требованиям к фокусировке пучка (малое поперечное сечение, строго одинаковая продольная скорость и др.) предельная мощность пучка в приборах обычного типа оказывается такого же порядка, как и в приборах с трохоидальным пучком.

ранственного заряда не сводится к ограничению рабочего тока: обусловленная собственным зарядом пучка неоднородность статического поля  $E_0$  приводит к изменению характера движения отдельных электронов, т. е. изменяет свойства осцилляторов, взаимодействующих с высокочастотным полем. Такое изменение «внутренней структуры» электронного пучка, не очень существенное для приборов обычного типа, имеет первостепенное значение для приборов с возбужденными осцилляторами. Изменения частоты колебаний электронов, формы траекторий и характеристики неизохронности (нелинейности) могут не только привести к заметному изменению рабочей частоты ( $\omega \neq \omega_H$ ), коэффициента усиления и других параметров прибора, но привести даже к качественным изменениям характера группировки.

Невозможность полного и в то же время достаточно строгого теоретического исследования формирования мощных трохоидальных пучков в неоднородных скрещенных полях делает необходимым тщательное экспериментальное исследование этой проблемы. Эксперимент может дать не только «внешние» характеристики пучка (пределный ток, положение пучка относительно электродов системы и т. д.), но и определенные сведения о его внутренней структуре (например, распределение электрического поля по поперечному сечению).

### 1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЙ

Изменения поля и потенциала в пространстве взаимодействия, вызываемые проходящим интенсивным трохоидальным пучком электронов, определились с помощью метода зондирующего пучка [6–9]. Тонкий ленточный пучок электронов с помощью специальной электронной пушки вводится в пространство взаимодействия по направлению магнитного поля (рис. 1). Электроны зондирующего луча, входящие в пространство, ограниченное анодом и катодной пластиной, под действием электрического и магнитного полей перемещаются вдоль системы со скоп-

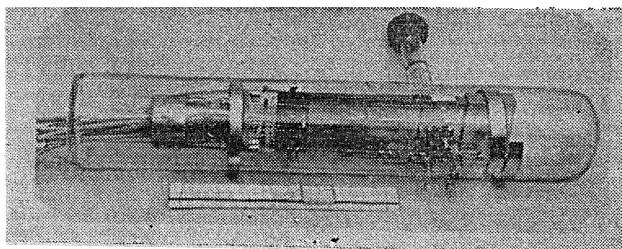


Рис. 1а. Экспериментальная лампа.

ростью  $v_d = E_1 / B_1$ , описывая циклоидальную траекторию радиуса  $r = (1/2)(E_1/B_1^2)$ . Смещение зондирующего пучка  $L$  относительно места влета пропорционально ширине системы  $S$  и отношению скорости дрейфа  $v_d$  к скорости влета электронов зондирующего пучка в систему  $L \sim S(v_d/v_s)$ . При этом предполагается, что величина отклонения зондирующего луча  $L \gg r_d$  — радиуса циклоиды в этих полях.

При наличии интенсивного электронного потока распределение электрического поля в системе изменяется: над пучком величина поля возрастает, под пучком — падает. При таком способе наблюдений необходимо, чтобы величина отклонения зондирующего пучка  $\Delta L$ , обусловленная изменением поля пространственного заряда исследуемого пучка,

была много больше радиуса циклоиды зондирующего пучка в этих полях, поскольку их отношение определяет точность измерений. В проведенном эксперименте при токе пучка  $i_k \sim 15 \text{ ma}$  отношение  $r_{\text{п}}/\Delta L \sim 0,1$ .

В соответствии с изменением поля меняется величина отклонения зондирующего пучка. По наблюдаемому на флюоресцирующем экране изображению ленточного пучка можно определить закон изменения поля в пространстве анод—катодная пластина с учетом поля пространственного заряда исследуемого пучка. Чтобы учесть влияние краевых полей системы, необходимо определить зависимость величины отклонения различных точек зондирующего пучка от напряженности поля в пространстве анод—катодная пластина в отсутствие изучаемого пучка. Используя

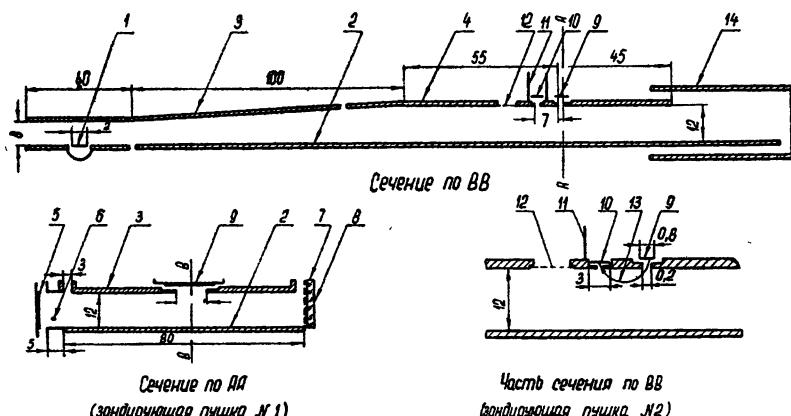


Рис. 16. Схематический чертеж лампы:

1—катод, 2—катодная пластина, 3—первый анод, 4—второй анод, 5—ленточный катод, 6—ускоряющий электрод, 7—сетка, 8—флюоресцирующий экран, 9 и 10—коллектор, 11—экран, 12—катод зондирующего пучка, 13—траектория зондирующего пучка, 14—коллектор исследуемого пучка

такие калибровочные характеристики, по изображению зондирующего луча можно построить распределение поля в системе с учетом пространственного заряда пучка.

Такой метод измерений позволяет в значительной мере устраниć вредное воздействие неоднородных полей. Для оценки точности измерений был поставлен контрольный эксперимент, в котором зондирующий пучок вводился по направлению электрического поля (рис. 16). С этой целью через отверстие в анодной пластине в пространство взаимодействия вводился тонкий пучок электронов, сформированный с помощью каллиматора. Величина отклонения пучка, входящего в скрещенные поля по направлению электрического поля со скоростью  $v_{32}$ , определяется соотношением  $L \simeq 2\pi R_{\text{тр}}$ , где  $R_{\text{тр}} = w_H^{-1} \sqrt{v_{\text{п}}^2 + v_{32}^2}$ . При изменении электрического поля под влиянием пространственного заряда пучка дрейфовая скорость пучка  $v_{\text{д}}$  изменяется, а следовательно, изменяется и отклонение зондирующего луча. Подбирая для каждого значения тока исследуемого пучка величину ускоряющего напряжения зондирующего пучка так, чтобы последний падал на коллектор, можно построить зависимость ускоряющего напряжения  $v_{\text{уск}} = f(i_k)$  от тока. Проводя затем калибровку по анодному напряжению в отсутствие исследуемого пучка, можно определить зависимость поля под пучком от величины катодного тока.

## 2. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА И КОНСТРУКЦИЯ ЛАМПЫ

В соответствии с поставленной задачей в экспериментальной лампе должен быть сформирован мощный трохоидальный пучок электронов с большим значением параметра раскачки  $f$ . Формирование пучка осуществлялось с помощью плавно изменяющихся электрического и магнитного полей. Распределение магнитного поля и расположение в нем экспериментальной лампы показано на рис. 2 а, б. Такой выбор полей и конструкции лампы позволил получить параметр раскачки  $f=9$ . Следует заметить, что расположение лампы в нарастающем магнитном поле в значительной степени уменьшило вероятность возникновения регулярных автоколебаний в системе. Размеры системы и ее конструктивные особенности (см. рис. 1) определялись, исходя из возможности четкого наблюдения зондирующего пучка. Фотографирование изображения осуществлялось с помощью зеркала, помещенного под углом  $45^\circ$  к флюоресцирующему экрану. В лампе использовался ленточный tantalовый катод, покрытый гексоборидом лантана  $\text{LaB}_6$ . Ширина катода  $d = 2 \text{ мм}$  выбиралась малой по сравнению с длиной циклониды  $L = 2\pi r_{\text{ц}}$  в области катода ( $L/d \sim 5 \div 10$ ). Такая конструкция пуш-

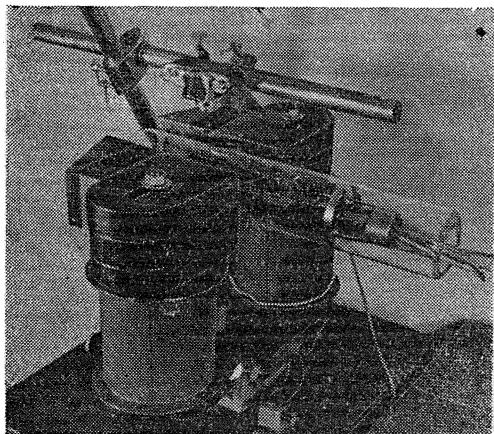


Рис. 2а. Расположение лампы в полюсах магнита.

рина катода  $d = 2 \text{ мм}$  выбиралась малой по сравнению с длиной циклониды  $L = 2\pi r_{\text{ц}}$  в области катода ( $L/d \sim 5 \div 10$ ). Такая конструкция пуш-

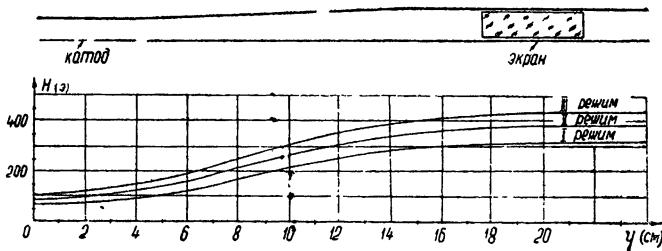


Рис. 2б. Распределение магнитного поля вдоль системы.

ки позволяла в некоторых экспериментах получить разброс в пучке по скоростям в пределах 4%.

## 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Закон изменения напряженности поля в промежутке анод—катодная пластина при различных токах пучка определялся с помощью методов, описанных в предыдущем разделе. На рис. 3 приведены фотографии изображения зондирующего пучка на флюоресцирующем экране. С помощью фотографий, аналогичных изображенным на рис. 5, и калибровочных характеристик зондирующего луча были построены зависимости изменения напряженности поля в исследуемом промежутке при различных токах пучка (рис. 4). Измерения проводились при трех значениях

магнитного поля  $H = 330; 375; 420$  э и разных величинах параметра раскачки  $f=7$  и  $f=9,3$ . При напряженности электрического поля  $E = 300 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$  и  $H = 375$  э величина базиса трохоиды в исследуемом промежутке  $L=2\pi em^{-1}Ew_H^{-2}=0,86$ ; поэтому при ширине катода  $d=2$  мм пучок можно считать сплошным и не учитывать зависимость поля пространственного заряда пучка от продольной координаты.

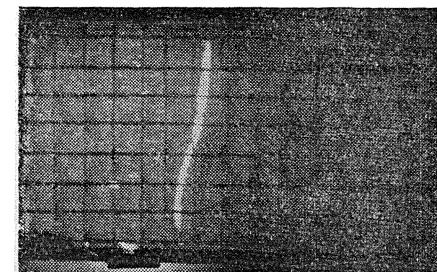
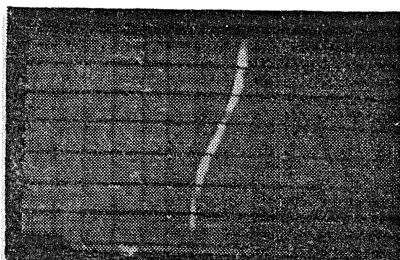
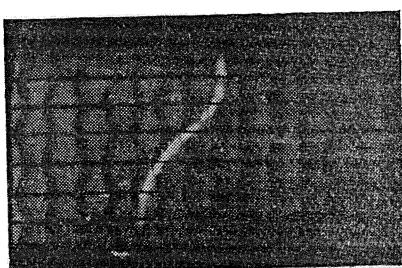
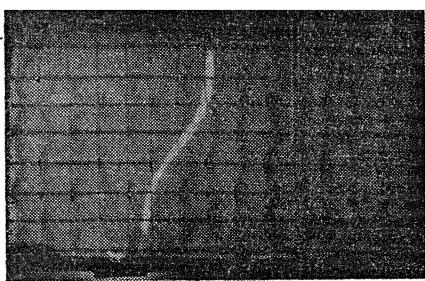
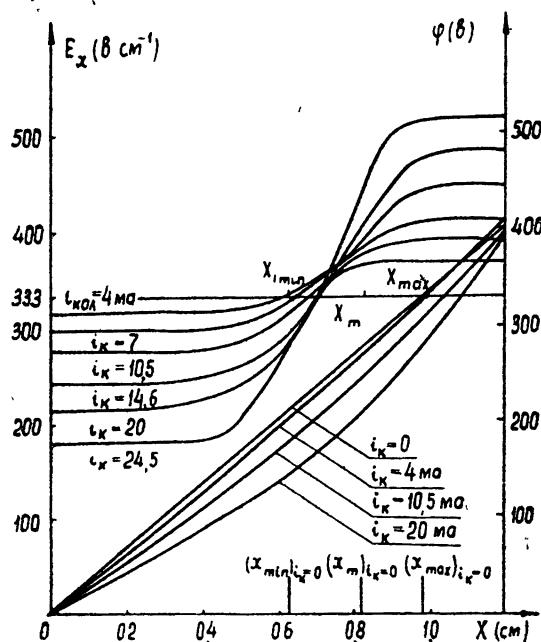
*a**b**c**d*

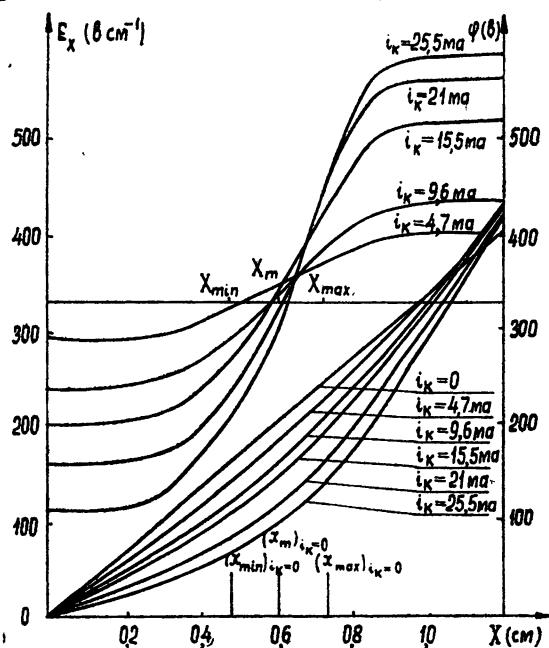
Рис. 3. Изображение зондирующего ленточного пучка для режима  $E=333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  
 $H=420$  э,  $f=9,3$ :  
а)  $i_k = 4,9$  ма, б)  $i_k = 10$  ма, в)  $i_k = 15,5$  ма, г)  $i_k = 21$  ма.

На основании полученных характеристик (рис. 4) можно определить закон изменения напряженности электрического поля в центре пучка  $E_m$  и на его верхней ( $E_{\max}$ ) и нижней ( $E_{\min}$ ) границах, распределение потенциала в промежутке катод—анод  $\varphi$ , а также изменение местоположения пучка  $x_{m_i}$  и его ширину  $R_{i_k}$  в зависимости от величины проходящего тока  $i_k$ . На рис. 5 приведены зависимости относительных величин  $E_{\max}/E_1$ ,  $E_{\min}/E_1$ ,  $E_m/E_1$ ,  $\varphi_{m_l}/\varphi_{\min}$ ,  $x_{m_l}/x_{\min}$ ,  $R_{i_k}/R_0$  от величины тока пучка  $i$  ( $E_1$ ,  $E_{\max}$ ,  $\varphi_{m_0}$ ,  $x_{m_0}$ ,  $R_0$  — значения соответствующих величин при  $i = 0$ ). Исходя из приведенных графиков, можно судить о влиянии пространственного заряда пучка на изменение его внешних характеристик.

Напряженность поля на верхней и нижней границах пучка изменяется с ростом тока по линейному закону. Величина напряженности поля  $E$ , обусловленная пространственным зарядом пучка, достаточно хорошо совпадает со значениями поля  $E$ , рассчитанными для плоского заряженного слоя с плотностью заряда  $\rho = j_0/v_d$ , где  $v_d = E_1/B_1$  — скорость дрейфа электронов в отсутствие пространственного заряда.



a

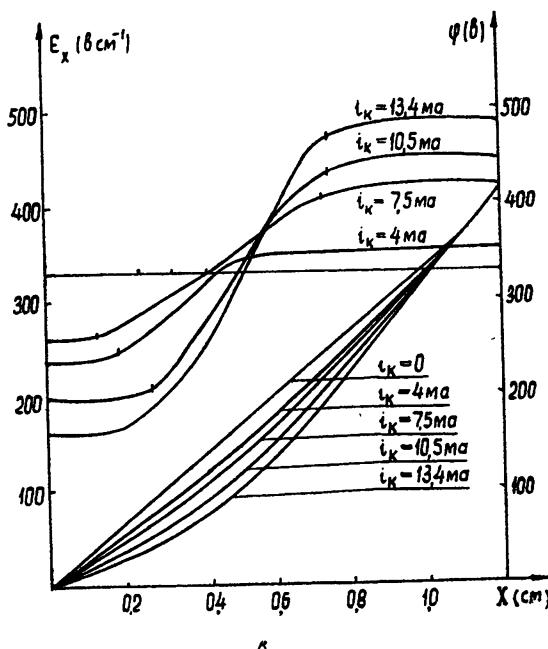


б)

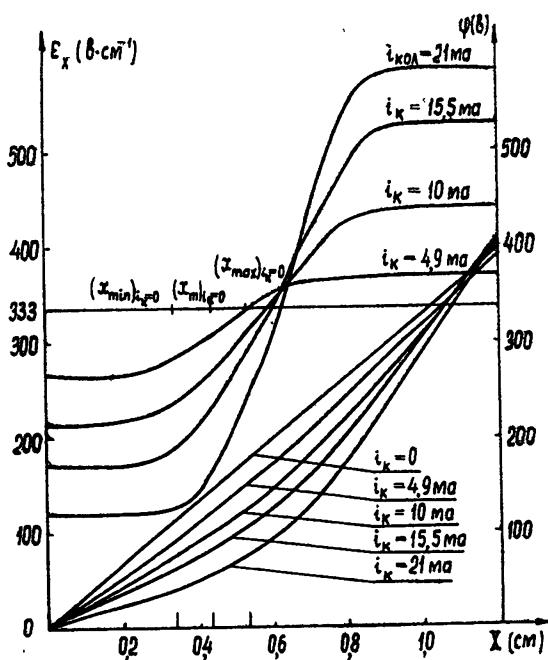
Рис. 4. Распределение напряженности электрического поля и потенциала в зазоре анод—катодная пластина ( $d_1=1.2 \text{ см}$ ):

а)  $E=333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $H=316 \text{ а}$ ,  $f=9.3$ ;

б)  $E=333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $H=375 \text{ а}$ ,  $f=9.3$ .



1)



2)

Рис. 4. Распределение напряженности электрического поля и потенциала в зазоре анод—катодная пластина ( $d_1=1,2$  см.):

в)  $E=333 \text{ e.s.m}^{-1}, H=375 \text{ e}, f=7;$

г)  $E=333 \text{ e.s.m}^{-1}, H=435 \text{ e}, f=9,3.$

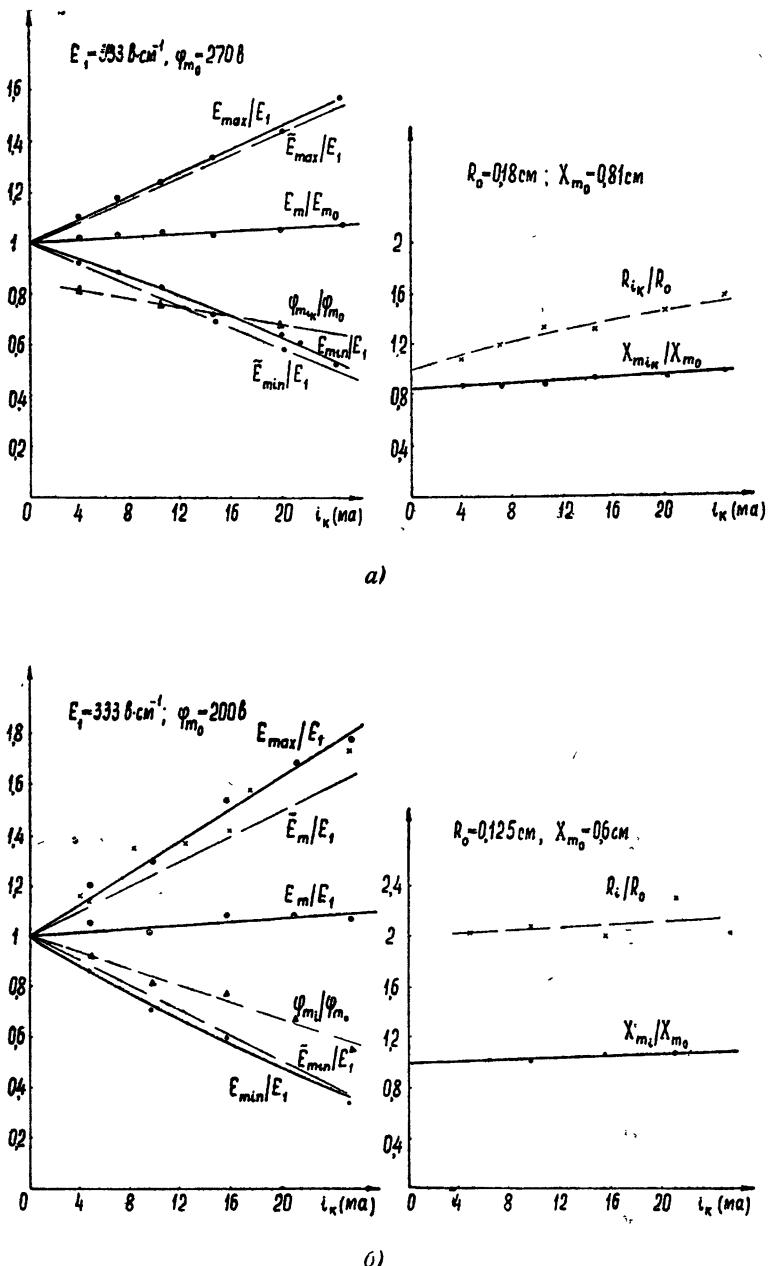
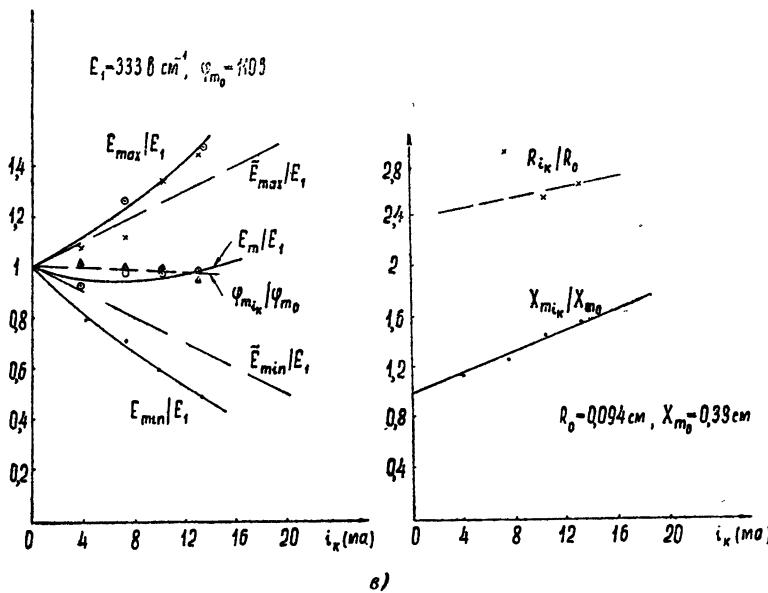


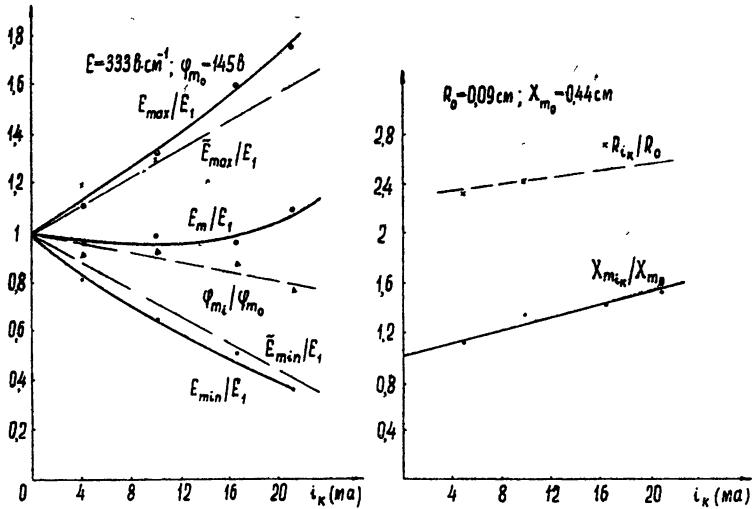
Рис. 5. Зависимость напряженности поля на границах ( $E_{\max}$  и  $E_m$ ) и в центре пучка ( $E_m$ ), потенциала в центре пучка  $\varphi_m$ , радиуса пучка  $R$ , положения центра пучка  $x_m$  от величины проходящего тока  $i_K$  ( $d_1=1,2$  см):

$$a) E = 333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}, H = 320 \text{ э}, f = 9,3;$$

$$b) E = 333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}, H = 375 \text{ э}, f = 9,3.$$



б)



в)

Рис. 5. Зависимость напряженности поля на границах ( $E_{\max}$  и  $E_{\min}$ ) и в центре пучка ( $E_m$ ), потенциала в центре пучка  $\varphi_m$ , радиуса пучка  $R$ , положения центра пучка  $x_m$  от величины проходящего тока  $i_k$  ( $d_1=1,2 \text{ см}$ ):

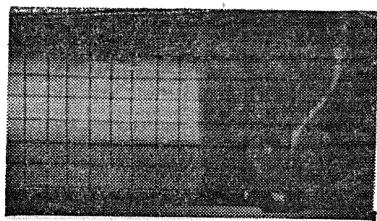
- в)  $E = 333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}, H = 375 \text{ э}, f = 7;$   
 г)  $E = 333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}, H = 420 \text{ э}, f = 9,3.$

С ростом магнитного поля (рис. 5) крутизна изменения напряженности поля возрастает и при значении магнитного поля  $H=420$  э и токе пучка  $i=20$  ма величина напряженности поля над пучком увеличивается на 33% от первоначальной величины при  $i=0$ .

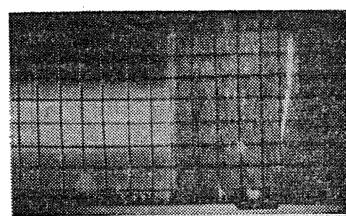
Потенциал в пространстве анод—катодная пластина понижается при появлении электронного пространственного заряда; при этом кинетическая энергия пучка уменьшается. При больших значениях проходящего тока разность потенциалов между нижней границей пучка и катодной пластиной стремится к нулю.

Положение пучка в межэлектродном пространстве зависит от величины проходящего тока и при увеличении тока центр пучка смещается к аноду. Как видно из графиков рис. 5, величина смещения тем больше, чем ближе расположен пучок к катодной пластине. Подъем пучка наблюдался также визуально в лампе с несколько ухудшенным вакуумом. На рис. 6 показаны одновременно сфотографированные изображения зондирующего луча и следа исследуемого пучка, полученного за счет ионизации остаточного газа. На приведенных фотографиях четко наблюдается подъем пучка к аноду с ростом в нем плотности тока. Относительное изменение величины  $R_{i_k}/R_0$ , где  $R_0$  — радиус трохоиды, рассчитанной в отсутствие пучка, с ростом тока незначительно. Следует отметить, что с изменением режима работы пушки существенно изменяется разброс электронов по скоростям, и, если для режима 1 разброс  $\Delta v/v_{cp}$  не превышает 4%, то для остальных режимов разброс становится большим ( $\Delta v/v_{cp} \approx 20\%$ ) и может значительно изменить характеристики пучка.

Предельная величина тока, который возможно было пропустить через рассматриваемую систему, составляет  $25 \div 30$  ма. При дальнейшем увеличении тока значительная часть его попадает на анод и боковые фокусирующие электроды. При токе  $i_k \sim 25$  ма наблюдается



a)



б)

Рис. 6. Изображение зондирующего пучка и следа исследуемого электронного потока для режима  $E=333 \text{ в}\cdot\text{см}^{-1}$ ,  $H=875$  э,  $f=9,3$ :  
а)  $i_k = 2$  ма, б)  $i_k = 15$  ма,

значительное расплывание зондирующего пучка; это, по-видимому, связано с флуктуационными процессами в исследуемом пучке.

Для проверки точности измерений величина напряженности поля на верхней границе пучка определялась с помощью зондирующего луча, вводимого в систему по направлению электрического поля. Результаты измерений  $E$ , отмеченные на рис. 5 б, в крестиками, достаточно хорошо совпадают с данными, полученными первым методом.

#### 4. ИЗМЕНЕНИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ ПУЧКА

Поскольку мощный пучок вызывает изменение электрического поля в пространстве анод—катодная пластина, частота вращения электронов

может существенно изменить свою величину. Если закон распределения поля и начальные условия ввода пучка известны (определен с помощью эксперимента), то частота вращения электронов в таком пучке может быть легко найдена в приближении заданного поля. Предположим, что напряженность поля в пучке изменяется по линейному закону:  $E_x = E_m [1 + k(x - x_m)]$ , где  $E_m$  — напряженность поля в центре пучка  $x_m$ . Такая аппроксимация достаточно хорошо описывает реальное распределение поля. При заданном законе распределения электрического поля частота вращения электронов с учетом пространственного заряда может быть легко найдена, исходя из уравнений движения электронов:  $w_j = \sqrt{w_H^2 - 2kE_m}$ . Определим изменение частоты  $w_j$ , обусловленное пространственным зарядом пучка для режима  $E = 333 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$  и  $H = 375 \text{ э}$ . Для тока пучка  $i = 25,5 \text{ мА}$  относительное изменение частоты  $(w_H - w_j)/w_H$  составляет  $2\%*$ . Естественно, что при таком методе расчета не учитывается нелинейность осциллятора, которая может существенно изменить характеристики приборов с возбужденными осцилляторами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- \* 1. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
- 2. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 443 (1960); 2, 863 (1959).
- 3. В. А. Флягин, Т. Б. Панкратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 957 (1962).
- 4. В. А. Флягин, Т. Б. Панкратова, Радиотехника и электроника, (в печати).
- 5. Электронные высокочастотные приборы со скрещенными полями, 1, 2, под ред. М. М. Федорова, ИЛ, М., 1961.
- 6. A. Wehnelt, H. Bley, Zeit. Physik, 35, 388 (1926).
- 7. O. Klemperer, Proc. Phys. Soc., 59, 302 (1947).
- 8. D. L. Reverdin, J. Appl. Phys., 22, 257 (1951).
- 9. А. М. Грошков, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1104 (1961).
- 10. И. И. Антаков, В. П. Васильев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 741 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
8 мая 1965 г.

#### AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF TROCHOIDAL LARGE PERVEANCE BEAMS, FORMED IN CROSSED ELECTRICAL AND MAGNETIC FIELDS

A. A. Mel'nicchenko, V. A. Flyagin

The results are given of an experimental investigation of the trochoidal large pervenance beams, formed in crossed electrical and magnetic fields. By means of a sounding-ribbon electron beam, inserted into the system along the magnetic field, the "external" beam characteristics and the voltage distribution of an electrical field have been determined, in dependence of the current value of the investigated beam.

\* В испытанных генераторах с трохоидальным электронным пучком этот эффект не наблюдался, что объясняется малым пространственным зарядом пучка в области взаимодействия.

УДК 621.385.11

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ (ДИОКОТРОННОГО УСИЛЕНИЯ) ТОНКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

*B. B. Гурзо, M. H. Куликов, B. C. Стальмахов*

Изложены результаты экспериментального исследования диокотронного усиления в тонких электронных потоках, движущихся в скрещенных полях. Величина усиления сопоставлена с формой электронного потока. Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами теоретического анализа и определены границы линейного режима работы. Проведено исследование основных характеристик электронно-волнового усилителя М-типа с тонким лучом.

В связи с целым рядом упрощающих предположений, используемых обычно при теоретическом анализе лучевых приборов М-типа, возникает вопрос о точности выводов и пределах их применимости к расчету реальных приборов. Одним из возможных способов проверки правильности теоретических предпосылок является систематическое экспериментальное исследование наиболее существенных эффектов, предсказываемых теорией. Одним из таких эффектов является нестабильность (диокотронное усиление) тонких электронных потоков, движущихся в скрещенных полях в области, свободной от внешних высокочастотных полей (в области дрейфа) [1, 2]. Исследование этого эффекта представляет интерес как с точки зрения проверки правильности основных теоретических предпосылок линейного анализа лучевых приборов типа М и определения границ их применимости, так и с точки зрения изучения возможностей создания электронно-волновых усилителей М-типа, а также борьбы с этим эффектом в тех приборах, где он может оказаться вредным (линии задержки, параметрические усилители М-типа и т. п.).

В настоящей работе изложены результаты экспериментального исследования диокотронного усиления в тонких электронных потоках, движущихся в скрещенных полях. Приведены также некоторые характеристики электронно-волнового усилителя М-типа с тонким лучом. В отличие от работ [3, 4], где определялось усиление на единицу тока или длины луча, в данной работе определено полное усиление в зоне дрейфа.

### 1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ И КОНСТРУКЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ПРИБОРА

Экспериментальное исследование эффекта диокотронного усиления в зоне дрейфа требует для ввода и вывода высокочастотного сигнала согласующих элементов, так что экспериментальный макет (рис. 2) представлял собой электронно-волновой усилитель типа М. Теоретический анализ электронно-волнового усилителя М-типа с тонким электронным лучом при учете параметров согласующих устройств был проведен в [5]. Как показано в этой работе, при достаточно большой величине диокотронного усиления в зоне дрейфа, когда можно пренебречь затухающей волной по сравнению с нарастающей (что соответствует примерно  $G_d > 6 \text{ дБ}$ ), величина полного усиления электронно-волнового

усилителя  $G_{\text{полн}}$  (выраженная в децибелах) может быть представлена в виде суммы

$$G_{\text{полн}} = G_d + G_m, \quad (1)$$

где  $G_d$  — диокотронное усиление, определяемое только параметрами электронного луча в зоне дрейфа, и  $G_m$  — магнетронное усиление, определяемое параметрами согласующих устройств.

Таким образом, величина диокотронного усиления может быть определена, если известна величина полного усиления и величина усиления в согласующих устройствах  $G_m$ . Величина  $G_m$  может быть найдена по результатам измерения усиления  $G_{\text{каск}}$  каскадного усилителя, образованного согласующими элементами. Используя результаты [5], можно показать, что в случае синхронизма и отсутствия потерь в замедляющей системе ( $b = d = 0$ ) для  $S > 1$  (где  $S$  — параметр пространственного заряда [2]) величина  $G_m$  связана с  $G_{\text{каск}}$  соотношением

$$\begin{aligned} G_m = G_{\text{каск}} + 20 \lg \{ \sqrt{S^2 - 1} \operatorname{sh}(2\pi DN \sqrt{S^2 - 1}) + \\ + S [\operatorname{ch}(2\pi DN \sqrt{S^2 - 1})] \}^2 \{ (S^2 - 1) \operatorname{sh}^2(2\pi DN \sqrt{S^2 - 1}) + \\ + S^2 [\operatorname{ch}(2\pi DN \sqrt{S^2 - 1}) + 1]^2 \}^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $D$  — параметр усиления [2],  $N$  — число замедленных длин волн, укладывающихся вдоль согласующего элемента.

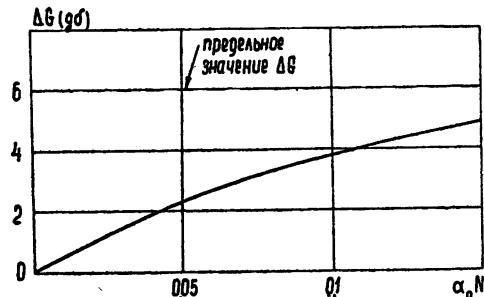
Если  $S$  велико, то соотношение (2) упрощается. В этом случае

$$G_m = G_{\text{каск}} + 20 \lg \frac{\{ \operatorname{sh}(2\pi\alpha_0 N) + [\operatorname{ch}(2\pi\alpha_0 N) - 1] \}^2}{\operatorname{sh}^2(2\pi\alpha_0 N) + [\operatorname{ch}(2\pi\alpha_0 N) - 1]^2}, \quad (3)$$

где  $\alpha_0$  — параметр диокотронного усиления [1, 5] в согласующих элементах. Соотношение (3) оказывается достаточно точным, начиная с  $S = 1,5 \div 2,0$ .

Зависимость величины  $\Delta G = G_m - G_{\text{каск}}$  от  $\alpha_0 N$ , определяемая соотношением (3), представлена на рис. 1. Асимптотическое значение  $\Delta G$  при больших  $\alpha_0 N$  составляет 6 дБ.

Рис. 1. Зависимость величины  $\Delta G = G_m - G_{\text{каск}}$  от  $\alpha_0 N$  для параметра пространственного заряда  $S > 1,5$ .



Следует заметить, что описанная выше методика определения  $G_d$  применима только тогда, когда справедливо соотношение (1), т. е. для случая достаточно больших величин диокотронного усиления ( $G_d > 6$  дБ).

Схематическое изображение разборного экспериментального макета, на котором производилось исследование диокотронного усиления, представлено на рис. 2. В макете использовались три идентичных элемента связи. Первые два элемента связи образуют каскадный усилитель (измерение  $G_{\text{каск}}$ ), третий элемент служит для вывода высокочастотной энергии (измерение  $G_{\text{полн}}$ ). Такая конструкция позволяла производить измерение  $G_{\text{полн}}$  и  $G_{\text{каск}}$  в одинаковых условиях, что существенно по-

высило точность измерений. В качестве элементов связи были использованы отрезки встречно-щтыревой замедляющей системы, в которых взаимодействие с электронным потоком осуществлялось на первой обратной гармонике поля. В процессе измерений каждый элемент связи мог независимо настраиваться напряжением на максимум взаимодействия.

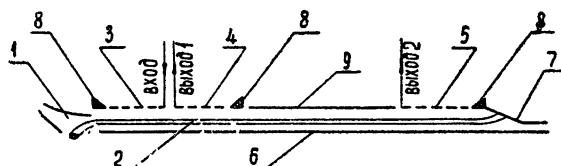


Рис. 2. Схематическое изображение экспериментального прибора:

1—электронная пушка, 2—электронный поток, 3—первый элемент связи, 4—второй элемент связи, 5—третий элемент связи, 6—основание (отрицательный электрод), 7—коллектор, 8—поглотитель, 9—дрейф.

Для формирования электронного луча использовалась «короткая» (неадиабатическая) электронная пушка [6]. Конструкция прибора позволяла через отверстия в боковых экранах следить по свечению ионизированного газа за фронтом электронного потока в пространстве дрейфа.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ $G_d$ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ С ВЫВОДАМИ ТЕОРИИ

Для определения величин  $G_d$  исследовались зависимости  $G_{\text{как}}$  (определяемого отношением сигнала с первого выхода к сигналу на входе) и  $G_{\text{полн}}$  (определяемого отношением сигнала со второго выхода к сигналу на входе) от тока луча. Типичные экспериментальные кривые для различных напряжений в зоне дрейфа приведены на рис. 3.

Для расчета величины  $G_d$  по результатам измерений, приведенным на рис. 3, необходимо определить величину  $\Delta G$ . Расчет параметров согласующих элементов показывает, что для исследуемых режимов работы, начиная с  $I_0 = 20 \text{ ma}$ , параметр пространственного заряда в согласующих устройствах  $S > 2$ ; поэтому для определения величины  $\Delta G$  можно использовать соотношение (3) или кривую на рис. 1. Величина  $\alpha_0 N$  для согласующих устройств определялась расчетным путем. Как видно из рис. 1, неточность в определении  $\alpha_0 N$  дает очень малую ошибку в расчете  $\Delta G$ . Значения  $G_d$ , рассчитанные по результатам измерений, представлены на рис. 4. Как видно, максимальные значения  $G_d$  достигают величины  $30 \div 35 \text{ db}$ .

Для сравнения измеренных значений  $G_d$  с результатами теоретического расчета, проведенного в [5], необходимо определить величину  $\alpha_0 N_2$ , соответствующую данному режиму работы прибора ( $N_2$  — число замедленных длин волн, укладывающихся вдоль длины области дрейфа). Величина  $\alpha_0$  для прямолинейного электронного потока связана с параметрами луча соотношением

$$\alpha_0 = 0,565 \frac{I_0}{h} \frac{B_0}{E_0^2}, \quad (4)$$

где  $I_0$  — ток луча в  $\text{ma}$ ,  $h$  — ширина луча в направлении магнитного поля в  $\text{см}$ ,  $B_0$  — магнитная индукция в  $\text{гс}$ ,  $E_0$  — напряженность электрического поля на оси электронного потока в  $\text{в}\cdot\text{мм}^{-1}$ .

Величина  $N_2$  может быть определена из соотношения

$$N_2 = 30 \frac{B_0}{E_0} \frac{l_2}{\lambda}, \quad (5)$$

где  $l_2$  — длина области дрейфа,  $\lambda$  — длина волны. Ширина луча в направлении магнитного поля  $h$  определялась по распределению тока коллектора между его сегментами (коллектор прибора состоял из трех сегментов).

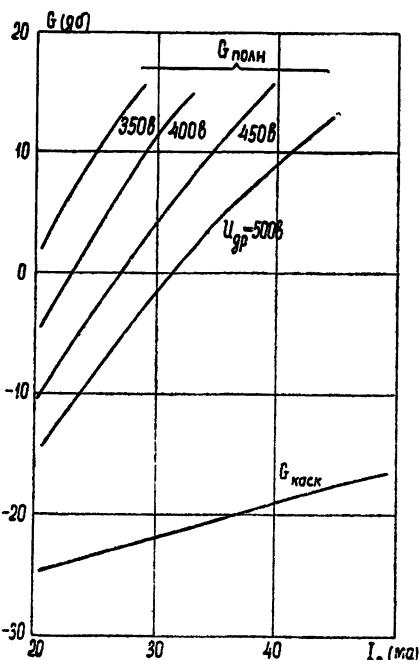


Рис. 3. Зависимость  $G_{полн}$  и  $G_{каск}$  от тока луча для нескольких значений напряжения на дрейфе ( $B_0=385$  Гс,  $\lambda = 20$  см).

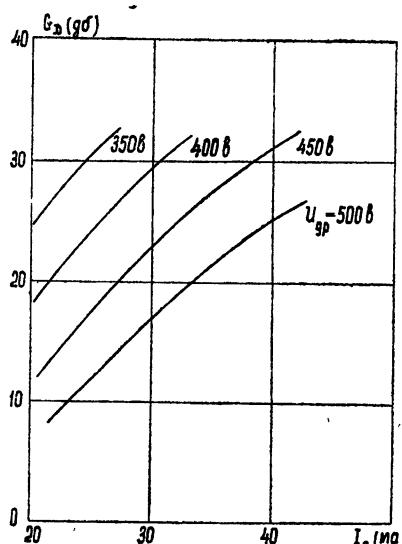


Рис. 4. Зависимость диокотронного усиления  $G_d$  от тока луча для нескольких значений напряжения на дрейфе.

Таким образом, для каждого заданного режима работы прибора могут быть определены величины  $\alpha_0$  и  $N_2$ , рассчитанные в предположении прямолинейности электронного потока. Зная величину  $\alpha_0$ , можно оценить толщину электронного потока  $2\Delta$  в зоне дрейфа. Расчеты показывают, что для исследуемых режимов работы величина  $2\Gamma_e\Delta < 0,2$  и влиянием окружающих плоскостей можно пренебречь (здесь  $\Gamma_e = \omega/\mu_e$ ,  $\mu_e$  — скорость электронов на оси потока). В этом случае, как это следует из работы [8], электронный луч с высокой степенью точности можно считать тонким и использовать для расчета  $G_d$  результаты работы [5]. В этом случае величина  $G_d$  определяется простым соотношением

$$G_d (\text{дБ}) = 54,6 \alpha_0 N_2 - 6. \quad (6)$$

На рис. 5 представлены экспериментальные величины  $G_d$ , соответствующие рис. 4, которым сопоставлены значения  $\alpha_0 N_2$ , рассчитанные для каждой экспериментальной точки по соотношениям (4) и (5). На этом же рисунке (сплошная кривая) представлена теоретическая зависимость  $G_d$  от  $\alpha_0 N_2$ , определяемая соотношением (6). Как видно, экспериментально измеренные значения  $G_d$ , хотя и лежат несколько ниже теоретической кривой, достаточно точно совпадают с результатами расчета.

Как уже указывалось, в основе теоретического анализа лежит прямолинейная модель электронного потока. Для оценки границ применимости этого предположения была проведена серия экспериментов по измерению  $G_d$  для лучей с различной циклоидальностью (контроль формы луча осуществлялся по свечению ионизированного газа). Для некоторых типичных режимов работы фотографии луча приведены на рис. 6, а на рис. 5 треугольниками показаны экспериментальные значения  $G_d$ , соответствующие этим режимам.

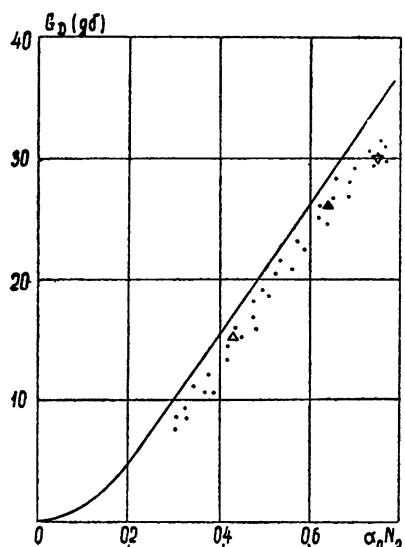


Рис. 5. Зависимость диокотронного усиления  $G_d$  от  $\alpha_0 N_2$ :  
 $\Delta - U_{dp} = 550$  в,  $B_0 = 385$  гс,  $I_0 = 30$  ма;  $\blacktriangle - U_{dp} = 450$  в,  $B_0 = 385$  гс,  $I_0 = 30$  ма;  $\nabla - U_{dp} = 350$  в,  $B_0 = 385$  гс,  $I_0 = 20$  ма. Сплошная кривая—теоретические значения  $G_d$ .

Как видно из соотношений (4) и (6), теория малого сигнала предсказывает линейную зависимость диокотронного усиления  $G_d$  от тока луча  $I_0$ . Однако, как видно из рис. 4, при больших величинах диокотронного усиления эта линейность нарушается и величина  $dG_d/dI_0$  начинает уменьшаться. Можно предположить, что это связано с появлением нелинейных эффектов в электронном потоке (нелинейный диокотронный эффект). Это подтверждается тем, что величина тока луча, при которой начинается нарушение линейности, зависит от величины входной мощности, т. е. от величины начальной модуляции. Зависимость  $G_d$  от  $I_0$  для нескольких значений  $P_{вх}$  приведена на рис. 7. Видно, что с увеличением начальной модуляции луча уменьшается величина диокотронного усиления в зоне дрейфа, при которой начинают проявляться нелинейные эффекты в луче. При достаточно большой начальной модуляции (или при большом токе луча, т. е. при большом усилии в зоне дрейфа) наступает «насыщение» диокотронного усиления. Это должно быть связано с «насыщением» (ограничением) поперечных высокочастотных смещений электронов в луче и определяемого ими высокочастотного тока луча.

Результаты, приведенные на рис. 7, позволяют оценить величины модуляций луча, при которых нелинейные эффекты в зоне дрейфа становятся заметными. Соответствующие расчеты показывают, что нарушения линейности начинаются, когда высокочастотные поперечные смещения электронов в луче по порядку величины достигают 0,01 от длины волны возмущения.

Как видно из рис. 5, результаты измерений свидетельствуют о том, что циклоидальность луча мало влияет на величину диокотронного усиления. Кроме того, сопоставление с расчетными данными показывает, что замеренные для различных циклоидальностей величины  $G_d$  близки к теоретическим, рассчитанным из прямолинейной модели. Отсюда можно сделать вывод о том, что упрощенный теоретический анализ лучевых приборов М-типа с тонким лучом при учете пространственного заряда практически может быть применен к расчету лучевых приборов даже со значительной циклоидальностью луча (обычно реализуемые режимы).

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВОГО УСИЛИТЕЛЯ М-ТИПА С ТОНКИМ ЛУЧОМ

Если высокочастотный сигнал подается на вход первого элемента связи, а снимается с выхода третьего элемента (рис. 2), то прибор работает как электронно-волновой (диокотронный) усилитель М-типа. Как видно из рис. 3, в этом случае возможно получение усиления порядка  $15 \div 18$  дБ. Возможность получения более высоких значений коэффициента усиления (путем увеличения тока луча или уменьшения напряжения дрейфа) в исследуемом макете ограничивалась самовозбуждением усилителя.

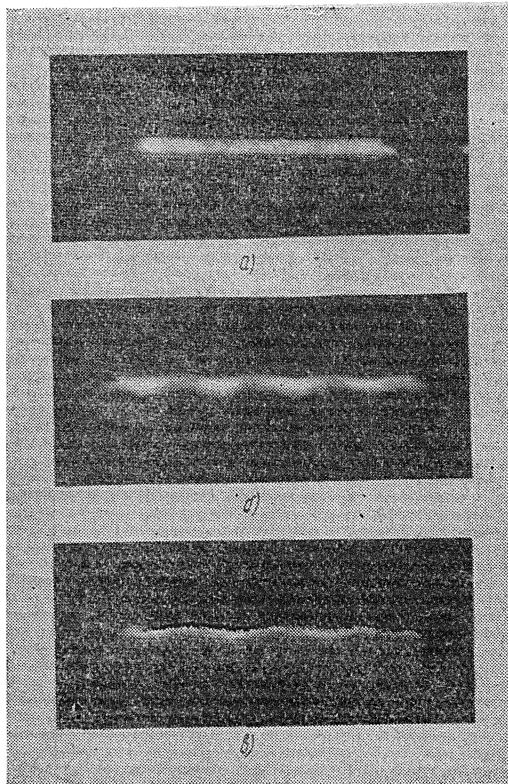


Рис. 6. Фотографии луча в области дрейфа для нескольких режимов работы:

- a)  $U_{dp} = 550$  в,  $B_0 = 385$  гс,  $I_0 = 30$  ма;
- б)  $U_{dp} = 450$  в,  $B_0 = 385$  гс,  $I_0 = 30$  ма;
- в)  $U_{dp} = 350$  в,  $B_0 = 385$  гс,  $I_0 = 20$  ма.

Расчет согласующих устройств показывает, что их электрическая длина для значений параметров луча, приведенных на рис. 3, мала ( $DN \approx 0,05 \div 0,08$ ). В этом случае, согласно [5], электронно-волновой усилитель должен быть достаточно широкополосным. На рис. 8 представлена зависимость коэффициента усиления такого прибора от частоты при фиксированных напряжениях на электродах прибора. Полоса усиливаемых частот в этом режиме составляла около 8% (по уровню 3 дБ), несмотря на то, что в приборе использовались элементы связи со значительной дисперсией. Кроме того, коэффициент усиления электронно-волнового усилителя оказывается менее критичным к напряжению на системе (элементах связи) и величине магнитной индукции, чем коэф-

фициент усиления каскадного усилителя, образованного согласующими элементами.

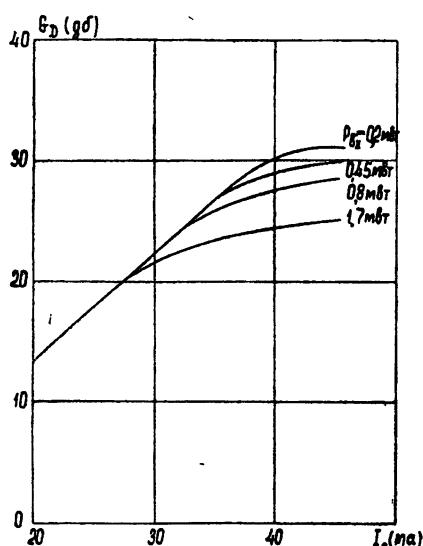


Рис. 7. Зависимость  $G_d$  от тока луча  $I_0$  для нескольких значений входной мощности  $P_{вх}$ .

участка амплитудной характеристики. Никаких специальных мер по уменьшению уровня шумов не принималось.

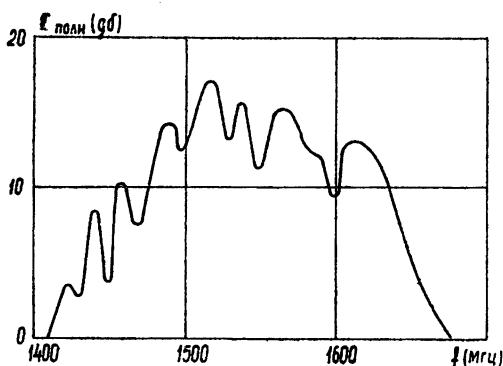


Рис. 8. Зависимость усиления ЭВУМ от частоты при фиксированных напряжениях на электродах прибора ( $B_0 = 385$  гс,  $I_0 = 30$  мА,  $U_{dp} = 400$  в).

Как видно из рис. 9, максимальные величины выходных мощностей, полученные на исследованных усилителях, невелики и составляют десятки мВт, что соответствует к.п.д. порядка долей процента (что совпадает с величинами к.п.д., полученными в [3]).

Таким образом, быстрое насыщение высокочастотной составляющей

На рис. 9 представлена зависимость выходной мощности электронно-волнового усилителя М-типа от входной для нескольких значений тока луча. Пунктирной прямой на этом рисунке соединены точки перегиба амплитудных характеристик, соответствующие переходу от линейного режима работы к нелинейному. Видно, что чем больше ток луча, тем при меньших величинах входной мощности наступает насыщение. Как и ранее, появление «перегиба» амплитудных характеристик связано с проявлением нелинейных эффектов луча, движущегося в скрещенных полях в зоне дрейфа.

Следует отметить, что с ростом тока луча резко возрастал уровень собственных шумов усилителя. Так, при токе луча  $I_0 = 45$  мА уровень шумов оказывался сравнимым с величиной сигнала в конце линейного

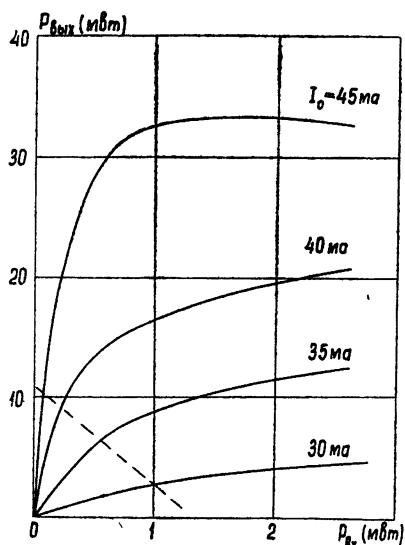


Рис. 9. Зависимость выходной мощности ЭВУМ от входной для нескольких значений тока луча ( $B_0 = 385$  гс,  $U_{dp} = 400$  в,  $I_0 = 20$  см).

тока луча в области дрейфа приводит к тому, что к.п.д. электронно-волнового усилителя М-типа с тонким лучом оказывается очень малым; к.п.д. такого усилителя может быть несколько увеличен за счет увеличения длины выходного устройства связи [3], однако при этом будут теряться такие преимущества усилителя как широкополосность, малая критичность к напряжениям на электродах и т. д.

Проделанные измерения диокотронного усиления в тонких электронных потоках, движущихся в скрещенных полях, показывают, что измеренные значения  $G_d$  очень хорошо совпадают с результатами теоретического расчета, основанного на прямолинейной модели электронного потока.

Измерения проводились в широком диапазоне изменения параметров луча (в линейном режиме); при этом циклоидальность электронного потока при изменении тока луча и напряжения зоны дрейфа могла изменяться весьма сильно. Результаты эксперимента подтверждают правильность методики учета пространственного заряда в тонких электронных потоках лучевых приборов М-типа (основные приближения, расчет постоянных распространения, начальных амплитуд и т. д. [5]) и показывают возможность применения теории, основанной на предположении о прямолинейных траекториях электронов, к расчету приборов со значительной циклоидальностью луча.

Исследования диокотронного усиления при различных величинах начальной модуляции луча (при различных уровнях входного сигнала) показывают, что линейный режим в электронном потоке в области, свободной от внешних ВЧ полей, ограничен очень малыми величинами модуляции луча. Нелинейные эффекты угла начинают сказываться, когда высокочастотные поперечные смещения электронов в луче составляют 0,01 от длины волны возмущения. В дальнейшем при увеличении модуляции луча диокотронное усиление уменьшается. Это подтверждает известный вывод о том, что в лучевых приборах М-типа в режиме больших амплитуд пространственный заряд не играет такой роли, как в режиме малых амплитуд [7].

Проведенные исследования характеристик электронно-волнового усиления М-типа с тонким лучом подтвердили теоретический вывод [5] о возможности широкополосной работы усилителя даже при наличии элементов связи со значительной дисперсией, если электрическая длина последних достаточно мала. В проведенных экспериментах полоса усиления составляла около 8%. Однако, по-видимому, практическое использование электронно-волнового усилителя М-типа с тонким лучом ограничено низким уровнем к.п.д., связанным с быстрым насыщением переменной составляющей тока луча в зоне дрейфа, и высоким уровнем собственных шумов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. G. Macfarlane, H. G. Nay, Proc. Phys. Soc., **63B**, 409 (1950).
2. R. W. Gould, J. Appl. Phys., **28**, 230 (1955).
3. P. Guénard, H. Huber, Ann. Radioélectr., **7**, 252 (1952).
4. L. A. Harris, Proc. IRE, **B-105**, Suppl., 645 (1958).
5. М. Н. Куликов, В С Стальмаков, Радиотехника и электроника, **9**, 252 (1964).
6. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, **1**, ИЛ, 1961, стр. 145, 368.
7. Вопросы электроники сверхвысоких частот, вып. 1, под ред. В. Н. Шевчика, изд. Саратовского университета, 1964, стр. 81.

**INVESTIGATION OF INSTABILITY (DIOCOTRON AMPLIFICATION) OF FINE ELECTRON FLUXES IN CROSSED FIELDS***V. V. Gurzo, M. N. Kulikov, V. S. Stal'makhov*

The results are papered of an experimental investigation of the diocotron amplification in the fine electron fluxes, moving in crossed fields. The amplification factor is compared with the form of an electron flux. A comparison has been carried out of the experimental data with theoretical results and the boundaries for the linear operating conditions have been determined. The investigation has been performed of the main characteristics of an electron wave M-type amplifier with the fine beam.

---

УДК 621.385.64

## СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МАГНЕТРОНЕ.

### I. МЕХАНИЗМ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

*B. I. Вигдорчик, B. M. Конторович*

Рассмотрен нелинейный механизм сжатия электронного облака высокочастотным полем в магнетроне с поверхностной волной. Показано, что этот механизм способен стабилизировать неустойчивость колебательного режима. Получено дисперсионное уравнение, позволяющее определить параметры стационарного режима колебаний.

#### ВВЕДЕНИЕ

В произвольных нелинейных колебательных системах усредненные по периоду колебаний «траектории», вообще говоря, не совпадают со «статическими» (т. е. осуществляющимися в тех же постоянных внешних полях, но в отсутствие колебаний). Как показано Капицей [1] (см. также [2]) и Миллером [3], в случае быстропеременных неоднородных внешних полей, действующих на электрон, движение по усредненной траектории можно описать, если ввести дополнительную потенциальную энергию электрона в высокочастотном поле, равную в простейшем случае  $U = (e^2/4m\omega^2) |E'|^2$ , где  $E'$  — амплитуда, а  $\omega$  — частота переменного поля,  $e$  — заряд,  $m$  — масса электрона. В магнетроне с поверхностной волной, который рассматривается в настоящей работе, амплитуда высокочастотного поля уменьшается с удалением от анода и электронные траектории, «выталкиваемые» силой  $f = -\partial U/\partial r$  из области более сильного поля, смещаются к катоду. При достаточно больших градиентах переменного поля это обстоятельство может оказаться определяющим.

Действительно, рассмотрим бриллюэновское электронное облако в магнетроне [4]. В отсутствие колебаний при магнитном поле, большем критического, электроны движутся по концентрическим окружностям внутри облака радиуса  $r_B \ll r_a$ , где  $r_a$  — радиус анода. Такое движение, как было показано в работах Тычинского [5] и Малеева [6], вообще говоря, неустойчиво относительно бесконечно малых возмущений, и в магнетроне возникают колебания, амплитуда которых экспоненциально нарастает со временем.

Если радиальные градиенты переменного поля достаточно велики, то по мере увеличения амплитуды колебаний, благодаря выталкиванию электронов из области, занятой переменным полем, взаимодействие электронов с волной ослабляется. Поэтому уменьшается и скорость нарастания амплитуды поля со временем; при некотором значении амплитуды ее дальнейший рост прекращается (см. рис. 1) и устанавливается стационарный режим. Величина стационарной амплитуды зависит от постоянных полей и геометрии системы.

\* В нашем случае выражение для  $U$  отличается от приведенного: вместо  $\omega$  входит  $\Delta\omega$  — частота поля в системе координат, где электрон покоятся.

Существование стационарного режима колебаний, в котором средние (по периоду колебаний) силы, действующие на электрон, уравновешиваются друг друга, возможно только в определенных областях значений внешних полей. Для различных пространственных гармоник, находящихся в резонансе с пучком, эти области, вообще говоря, различны.

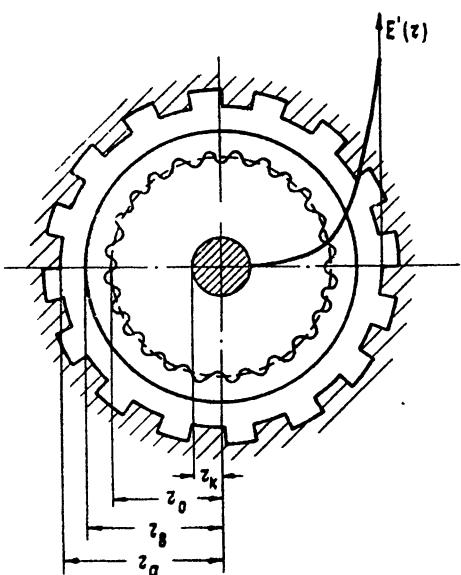


Рис. 1. Сжатие электронного облака неоднородным высокочастотным полем (усредненный радиус колеблющегося облака  $r_0$  меньше статического бриллюэновского радиуса  $r_B$ ). Волнистой линией изображена колеблющаяся граница облака  $r_b(\varphi, t)$  с вакуумом. На рисунке показана также радиальная зависимость амплитуды поверхностной волны  $E'(r)$ .

Заметим, что нами учитывается только один упомянутый выше «амплитудный» нелинейный механизм, ограничивающий рост колебаний. При этом мы пренебрегаем «фазовыми» нелинейными эффектами, связанными с модуляцией электронов по скорости и ответственными за передачу энергии электронов переменному полю. При достаточно больших замедлениях и не слишком больших мощностях время установления рассматриваемых стационарных колебаний значительно меньше характерного времени группировки электронов, что несколько оправдывает сделанное предположение.

Сжатие электронного облака в высокочастотном поле приводит также к следующему эффекту, который должен иметь место в приборах с поверхностной волной. В стационарном колебательном режиме усредненный радиус облака  $r_0$  меньше статического бриллюэновского радиуса. Вследствие этого электроны не попадают на анод ( $r_0 < r_a$ ) даже при магнитном поле, меньшем критического, если вплоть до радиуса  $r_0 = r_a$  в магнетроне существуют колебания. Таким образом, хотя колебания не могут возникнуть в докритическом режиме, они могут затягиваться в область докритических магнитных полей при медленном изменении параметров генерирующего магнетрона.

## 1. ОТЛИЧИЕ УСРЕДНЕННОГО РЕЖИМА ОТ СТАТИЧЕСКОГО

1. Рассмотрим отличие усредненного режима от статического на примере одного квазилинейного уравнения\*:

$$LA + AMA = F, \quad (1.1)$$

где  $L$  и  $M$  — линейные операторы,  $A$  — неизвестная функция,  $F$  — внеш-

\* В действительности нас будут интересовать системы таких уравнений.

ная сила. Ищем решение в виде  $A = \bar{A} + A'$ , где черта означает усреднение по периоду колебаний по явно входящему времени при фиксированных координатах (при этом  $\bar{A}' = 0$ ).

Подставим решение в этом виде в уравнение (1.1) и усредним его. Так как оператор усреднения коммутирует с линейными операторами  $L$  и  $M$  в интересующем нас случае уравнений электродинамики и гидродинамики вблизи от стационарного режима, из (1.1) получим

$$L\bar{A} + \bar{A}MA + \bar{A}'MA' = \bar{F}. \quad (1.2)$$

Отличие уравнения (1.2) от уравнения статического режима, когда ищется не зависящее от времени решение исходных уравнений:

$$LA_{ct} + A_{ct}MA_{ct} = F_{ct},$$

заключено в слагаемом  $\bar{A}'MA'$ , квадратичном по амплитуде колебаний. Таким образом  $\bar{A}$ , определяемое из уравнения (1.2) и описывающее усредненный режим, оказывается, в отличие от  $A_{ct}$ , зависящим от амплитуды колебаний.

Колебания возле усредненных траекторий описываются периодической функцией времени  $A'$ , для которой получаем уравнение, вычитая (1.2) из (1.1):

$$LA' + \bar{A}MA' + \bar{A}'M\bar{A} + (A'MA' - \bar{A}'MA') = F - \bar{F}. \quad (1.3)$$

При исследовании устойчивости статического режима решение уравнения (1.1) ищется в виде  $A = A_{ct} + a$ , где  $a$  — малое отклонение от статического режима. Уравнение для  $a$  имеет вид\*

$$La + A_{ct}Ma + aMA_{ct} + aMa = F - F_{ct}.$$

2. Исследование устойчивости статического режима в линейном приближении проводится с помощью уравнения для  $a$ , в котором пре-небрегается нелинейным членом  $aMa$ . После этого задача об устойчивости сводится к исследованию собственных частот  $\omega_{ct}$  системы (так как  $a \propto \exp(-i\omega_{ct}t)$ , описываемой линейным уравнением

$$\{L + A_{ct}M + (MA_{ct})\}a = 0.$$

В отличие от этой схемы, в методе усреднения линеаризация уравнений заключается в пренебрежении разностью  $A'MA' - \bar{A}'MA'$ , которая в определенном смысле оказывается существенно меньше каждого из слагаемых в отдельности\*\*.

Действительно, в разности  $A'MA' - \bar{A}'MA'$  уже отсутствуют нулевые гармоники, и отbrasывание ее в уравнении означает лишь пренебрежение вторыми и более высокими гармониками, которые благодаря дисперсии в большинстве случаев не являются резонансными и поэтому могут не играть существенной роли. Нулевая же гармоника смешает траекторию, т. е. положение резонанса для электронов в нашей задаче\*\*\*.

Следовательно, метод усреднения позволяет исходить из такого «нулевого» приближения, в котором уже учтено среднее смещение траектории под действием колебаний; поэтому следует ожидать, что при-

\* В дальнейшем будем рассматривать собственные колебания системы в статических внешних полях, т. е. будем считать, что  $F = F_{ct}$  и, следовательно,  $\bar{F} = F_{ct}$ . (В общем случае усредненный режим может отличаться от статического и за счет отличия  $\bar{F}$  от  $F_{ct}$ .)

\*\* Использование подобного метода для линейных уравнений с малыми случайными коэффициентами и обсуждение его отличия от метода возмущений см. в [7, 8].

\*\*\* Здесь имеются в виду временные гармоники.

менение этого метода будет эффективным в рассматриваемом нами нелинейном механизме, где смещение траектории играет главную роль.

Таким образом, для  $A'$  получим линейное уравнение

$$\{L + \bar{A}M + (MA)\} A' = 0 \quad (1.4)$$

и соответствующее ему уравнение для собственных частот  $\omega$  ( $A' \propto e^{-i\omega t}$ ). Частоты  $\omega_{ct} = \omega_{ct}(A_{ct})$  малых колебаний системы возле статического режима определяются внешними полями  $F_{ct}$  и параметрами  $l$ , характеризующими операторы  $L$  и  $M$  с соответствующими граничными условиями. В отличие от них, частоты колебаний системы возле усредненного режима  $\omega = \omega(\bar{A})$ , в силу уравнений (1.2), зависят, кроме тех же параметров  $F_{ct}$  и  $l$ , также и от амплитуды колебаний:  $\omega = \omega(F_{ct}, l, |A'|)$ .

Неустойчивость статического режима магнетрона проявляется в том, что  $\operatorname{Im} \omega_{ct} > 0$  в определенной области изменения параметров  $l$  и  $F_{ct}$ . Это соответствует существованию нарастающих решений вида  $a \propto \exp(\operatorname{Im} \omega_{ct} t) \exp(-i \operatorname{Re} \omega_{ct} t)$  [6]. Однако сведения об областях неустойчивости при колебаниях с «бесконечно малой» амплитудой, как правило, недостаточны. Метод усреднения в нашем случае позволяет учесть нелинейность, определяющую амплитуду установившихся колебаний. Действительно,  $\operatorname{Im} \omega(F_{ct}, l, |A'|)$  изменяется с ростом  $|A'|$ , вызванным неустойчивостью. Так как в интересующей нас колебательной системе должен существовать установившийся режим, то при некотором значении амплитуды  $A'_0$  инкремент нарастания обратится в нуль (см., например, [9]):

$$\operatorname{Im} \omega(F_{ct}, l, |A'_0|) = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) можно рассматривать как выражение для амплитуды колебаний  $A'_0$  в зависимости от параметров генератора и приложенных внешних полей:  $A'_0 = A'_0(F_{ct}, l)$ . При этом генерируемая частота определяется вещественной частью  $\omega$ , т. е. уравнением  $\operatorname{Re} \omega = \operatorname{Re} \omega(F_{ct}, l, |A'_0|)$ .

## 2. УСРЕДНЕННЫЕ И ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Исходными уравнениями являются уравнения Максвелла и уравнения движения электронов. В цилиндрической системе координат для азимутальной  $E$ -волны и скрещенных постоянных полей уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} &= 4\pi r\rho, \quad \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) = -\frac{r}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \frac{4\pi}{c}\rho v + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t}, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = \frac{4\pi}{c}\rho u + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения движения запишем в гидродинамической форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} &= \frac{e}{m} \left( E_r + \frac{v}{c} H_z \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} &= \frac{e}{m} \left( E_\varphi - \frac{u}{c} H_z \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $E_r, E_\varphi, H_z$  — отличные от нуля компоненты электрического и магнитного полей,  $\rho$  — плотность

заряда,  $u$  и  $v$  — радиальная и тангенциальная компоненты скорости электронного потока в точке с координатами  $r$  и  $\varphi$ .

При решении системы уравнений мы ограничимся одноволновым приближением, в котором учитывается взаимодействие пучка с одной (резонансной) гармоникой поля замедляющей системы. Согласно пункту 1 первого раздела, ищем решение системы уравнений (2.1), (2.2) в виде  $A = \bar{A} + A'(r, \varphi, t)$ , где  $A$  — любая из шести функций этой системы. Решение линеаризованных уравнений для  $A'(r, \varphi, t)$  ищем в виде

$$A'(r, \varphi, t) = \operatorname{Re} A'(r) \exp[i(\gamma\varphi - \omega t)]. \quad (2.3)$$

Усреднение в  $\bar{A}$  проводим по явно входящему времени, считая  $r$ ,  $\varphi$  и  $t$  независимыми переменными в соответствии с гидродинамическим описанием. Поскольку нас в дальнейшем будет интересовать установившийся режим, зависимостью величин  $\bar{A} = (\operatorname{Re} \omega/2\pi) \int_0^{2\pi/\operatorname{Re}\omega} A(r, \varphi, t) dt$  от времени пренебрегаем.

Решения системы (2.1), (2.2) в области  $r_k \leq r \leq r_b(\varphi, t)$ , занятой пучком, и в вакууме  $r_b(\varphi, t) \leq r \leq r_a$  ( $r_b(\varphi, t)$  — граница раздела пучок—вакуум) связаны между собой граничными условиями для электрического и магнитного полей. В вакууме уравнения (2.2), очевидно, выпадают, а в (2.1) следует положить  $\rho \equiv 0$ .

**2.** Линеаризованные уравнения для осциллирующих величин в пучке имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rE'_r) + i\gamma E'_\varphi &= 4\pi r\rho', \quad \frac{d}{dr}(rE'_\varphi) = i\gamma E'_r, \\ \frac{dH'_2}{dr} &= \frac{4\pi}{c} \rho' \bar{v} + \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} v' - i\frac{\omega}{c} E'_\varphi, \\ -\frac{i\gamma}{r} H'_2 &= \frac{4\pi}{c} \rho' \bar{u} + \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} u' - i\frac{\omega}{c} E'_r, \\ i\Delta\omega u' + \frac{d}{dr}(\bar{u} u') + 2(\omega_L - \omega_e)v' &= \frac{e}{m} E'_r, \\ i\Delta\omega v' + \frac{\bar{u}}{r} \frac{d}{dr}(rv') - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}[r^2(\omega_L - \omega_e)] u' &= \frac{e}{m} E'_\varphi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно общей схеме (см. раздел 1.1), здесь опущены члены со вторыми гармониками, которые считаются нерезонансными вследствие дисперсионных свойств замедляющей системы, а также учтено, что в нерелятивистском приближении можно считать  $\bar{H}_z$  не зависящим от  $r$  (см. (2.6)).

Усредняя (2.1) и (2.2), получаем уравнения для усредненных величин

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r\bar{E}_r) &= 4\pi r\bar{\rho}, \quad \frac{d}{dr}(r\bar{E}_\varphi) = 0, \quad \bar{\rho}\bar{u} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\rho'u'^*), \\ \frac{d\bar{H}_z}{dr} &= \frac{4\pi}{c} r\bar{\rho}\omega_e + \frac{2\pi}{c} \operatorname{Re}(\rho'v'^*); \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}^2}{dr} - r\omega_e^2 + 2r\omega_L\omega_e &= \frac{e}{m}\bar{E}_r - \frac{1}{2r}\operatorname{Re} \left[ \left( r \frac{du'}{dr} - i\gamma v' \right) u'^* \right] + \frac{|v'|^2}{2r}, \\ -\frac{\bar{u}}{r} \frac{d}{dr} [r^2(\omega_L - \omega_e)] + \frac{1}{2r} \operatorname{Re} \left[ u' \frac{d}{dr} (rv'^*) \right] &= \frac{e}{m}\bar{E}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где введены обозначения

$$\omega_e = \frac{\bar{v}}{r}, \quad \omega_L = -\frac{e\bar{H}_z}{2mc}, \quad \Delta\omega = \gamma\omega_e - \omega, \quad (2.8)$$

звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения и использовано выражение для среднего от произведения  $\bar{A}'\bar{B}' = (1/2)\operatorname{Re} A'B'^*$ . Заметим, что из второго уравнения системы (2.6) и равенства нулю тангенциального электрического поля на катоде следует, что  $\bar{E}_\varphi(r) \equiv 0$ . Величина  $\Delta\omega/\gamma$  представляет собой разность между угловой скоростью электрона  $\omega_e$  и угловой фазовой скоростью волны в пучке  $\omega/\gamma$ ; при этом  $(-\Delta\omega)$  — частота поля в системе отсчета, где электрон покоятся.

При выполнении неравенства  $|\Delta\omega| \gg \gamma|\bar{u}|/r$  (см. пункт 3 этого раздела) с помощью четвертого уравнения системы (2.6) можно выразить решение системы уравнений (2.4), (2.5) через  $E'_\varphi$ . Для  $\rho'$  при этом получим

$$\begin{aligned} \rho' = \frac{(\delta\omega)^2}{4\pi i[(\delta\omega)^2 - \omega_p^2]} &\left\{ \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{\omega_p}{\delta\omega} \right)^2 \right] \frac{d}{dr} (rE'_\varphi) - \right. \\ &\left. - \frac{2E'_\varphi}{\Delta\omega} \frac{d}{dr} \left[ (\omega_L - \omega_e) \left( \frac{\omega_p}{\delta\omega} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где введены плазменная частота  $\omega_p^2 = 4\pi\rho e/m$  и обозначение  $(\delta\omega)^2 = (\Delta\omega)^2 - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} [r^4(\omega_L - \omega_e)^2]$ . Как показано ниже, второе слагаемое в выражении для  $\delta\omega$  тождественно равно нулю, т. е.  $\delta\omega = \Delta\omega^*$ .

Уравнение для  $E'_\varphi$  с учетом (2.9) имеет вид

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} (rE'_\varphi) \right] - \gamma^2 E'_\varphi = 4\pi i \gamma r \rho'. \quad (2.10)$$

Из выражения (2.9) для  $\rho'$  видно, что вблизи тех  $r$ , где  $\delta\omega(r) = 0$ ,  $\pm\omega_p(r)$ , коэффициенты при  $dE'_\varphi/dr$  и  $E'_\varphi$  в (2.10) неограниченно возрастают. Точка, где  $\delta\omega = 0$ , соответствует синхронизму, т. е. равенству скорости электрона и возмущенной фазовой скорости электромагнитной волны; точки, где  $\delta\omega = \pm\omega_p$ , соответствуют «плазменному резонансу», когда частота колебаний совпадает с частотой одной из плазменных волн. Нетрудно видеть, что вдали от этих особых точек и вдали от катода величиной  $\rho'$  в уравнении (2.10) можно пренебречь и записать его решение в виде

$$E'_\varphi = pr^{\gamma-1} + qr_k^{\gamma} r^{-\gamma-1}, \quad \left| \frac{4\pi r \rho'}{\gamma E'_\varphi} \right| \ll 1, \quad (2.11)$$

\* По этой же причине в выражение для дополнительной потенциальной энергии (см. Введение) в качестве знаменателя войдет  $(\Delta\omega)^2$ . Заметим, что в случае, если  $\omega_e \ll \omega/\gamma$ , т. е., если скорость электрона много меньше фазовой скорости волны,  $(\Delta\omega)^2$  переходит в  $\omega^2 - 4\omega_L^2$  [3].

где  $p$  и  $q$  — произвольные постоянные. Символическое неравенство (2.11) раскрыто ниже (см. (2.16)).

Можно показать, что, если в соответствии с граничным условием  $E_\varphi(r_k) = 0$  высокочастотное поле на катоде обращается в нуль, то  $p$  и  $q$  в (2.11) являются величинами одного порядка. Это означает, что в случае больших замедлений ( $\gamma \gg 1$ ) поле быстро убывает от границы вглубь облака и решение (2.11) можно записать в виде

$$E'_\varphi = pr^{1-\frac{1}{\gamma}}, \quad 1 \sim |q/p| \ll (r/r_k)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.12)$$

При этом в процессе возбуждения колебаний принимает участие лишь тонкий слой электронов вблизи усредненной границы облака  $r \approx r_0$ .

Таким образом, при тех значениях параметров, когда особые точки оказываются достаточно далеко от границы облака, т. е. в очень слабом переменном поле, следует ожидать, что их влияние на распределение поля вблизи границы будет несущественным. Это предположение подтверждается довольно громоздким исследованием приближенного решения уравнения (2.11), которое можно построить, сшивая решения вблизи границы с решением вблизи особых точек и решением вблизи катода\*.

3. В силу малости амплитуды высокочастотного поля вблизи катода по сравнению с полем на границе облака влияние поля вблизи катода на усредненный режим в  $(r_k/r_0)^{\frac{1}{\gamma}}$  раз слабее, чем вблизи границы облака. Поэтому вблизи катода усредненные величины совпадают (с точностью до  $(r_k/r_0)^{\frac{1}{\gamma}}$ ) со статическими. Например, усредненная тангенциальная скорость вблизи катода должна быть равна  $v = \omega_L r (1 - r^2/r_k^2)$  [4].

Найдем из уравнений для усредненных величин зависимость  $v$  от  $r$  вдали от особых точек, когда справедливо решение (2.11). С этой целью выражение для средней радиальной скорости

$$\bar{v} = -\frac{1}{2\rho} \operatorname{Re}(p' u'^*) = \frac{2e^2 \operatorname{Re}(ipq^*) r_k^{\frac{1}{\gamma}}}{m^2 r^2 (\delta\omega)^2 [(\delta\omega)^2 - \omega_p^2]} \frac{d}{dr} (\omega_L - \omega_e)$$

подставим в выражение для  $E'_\varphi$  (второе уравнение (2.7)). Условие  $\bar{E}_\varphi(r) = 0$  приобретает вид:  $\operatorname{Re}(ip^* q) \frac{d}{dr} [r^2 (\omega_L - \omega_e)] = 0$ . Отсюда следует, что  $\bar{v} = \omega_L r (1 - \text{const}/r^2)$ , так как, вообще говоря,  $\operatorname{Re}(ip^* q) \neq 0$ . Сравнивая выражения для  $\bar{v}$  вблизи и вдали от катода, находим окончательно\*\*:

$$\bar{v} = \omega_L r (1 - r^2/r_k^2). \quad (2.13)$$

Условие применимости метода усреднения, как известно [3], требует, чтобы амплитуда колебательного движения электронов была значительно меньше характерного размера пространственной неоднородности высокочастотного поля. Отсюда следует ограничение на квадрат амплитуды поля  $|p|^2$ , которое удобно записать в виде

\* Случай, когда особые точки оказываются вблизи границы облака и в пучке становится существенным плазменный резонанс, в настоящей работе не рассматривается. Заметим, что метод усреднения не применим, если вблизи границы пучка оказывается точка синхронизма. При этом становятся существенными «фазовые» нелинейные эффекты.

\*\* Этот результат физически очевиден, так как в бриллюзновском режиме  $v$ , определяется только магнитным (а не электрическим) полем. Усредненный же режим отличается от статического потенциальной силой, эквивалентной радиальному электрическому полю.

$$P \equiv P(r_0) \ll \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^4 \left( \frac{r_0}{r_a} \right)^2, \quad (2.14)$$

где

$$P(r) = \frac{e^2 |p|^2}{m^2 \omega_0^4 r_a^2} r^{2(\gamma-1)}. \quad (2.15)$$

Здесь  $\omega_0$  — собственная частота магнетрона в отсутствие пучка, соответствующая волновому числу  $\gamma$ ,  $P$  — безразмерный квадрат амплитуды колебаний, пропорциональный отношению энергии электрона в переменном поле с частотой  $\omega_0$  к кинетической энергии его движения со скоростью, равной фазовой скорости волны на аноде.

Используя (2.14), из (2.15) можно получить следующие ограничения на  $\Delta\omega$  и  $(\Delta\omega)^2 - \omega_p^2$ :

$$|\Delta\omega| \gg 2\omega_L \frac{r_k^2}{r^2}, \quad |(\Delta\omega)^2 - \omega_p^2| \gg 4 \frac{\omega_0^4}{(\Delta\omega)^2} \left| 2 \frac{\omega_L^3 \Delta\omega}{\omega_0^4} \frac{r_k^2}{r^2} - \gamma^2 P(r) \frac{r_a^2}{r^2} \right|. \quad (2.16)$$

Очевидно, что (2.16) является ограничением на внешние параметры, при которых можно пользоваться решением (2.11).

Исходя из (2.12), (2.14) и (2.16), можно показать, что  $|\bar{u}| \ll \omega_L r_0 (\Delta\omega/\gamma\omega_L)^2$  и что в наиболее важной области  $|\Delta\omega| \leq \gamma\omega_L$  выполняется использованное выше неравенство  $|\bar{u}| \ll \omega_L r_0 |\Delta\omega/\gamma\omega_L|$ .

Окончательно, в нулевом приближении по малым параметрам (2.11) и (2.12) и в первом приближении по параметру (2.14), решение системы уравнений (2.4) — (2.7) запишем в виде

$$E'_\varphi = pr^{\gamma-1}, \quad E'_r = -ipr^{\gamma-1}, \quad u' = -\frac{e}{m\Delta\omega} pr^{\gamma-1}, \quad (2.17)$$

$$v' = \frac{e}{im\Delta\omega} pr^{\gamma-1}, \quad H'_z = \frac{\omega r}{ic\gamma} \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega\Delta\omega} \right) pr^{\gamma-1} -$$

для амплитуд осциллирующих добавок и в виде

$$\bar{E}_r = \frac{m\omega_L^2}{e} r \left[ 1 - \frac{r_k^4}{r^4} + Q(r) \right], \quad \frac{d\bar{H}_z}{dr} = \frac{m\bar{v}}{ec} \omega_p^2, \quad (2.18)$$

$$\frac{4\pi e}{m} \rho \equiv \omega_p^2 = 2\omega_L^2 \left[ 1 + \frac{r_k^4}{r^4} + \gamma Q(r) \right]$$

для усредненных величин. Здесь

$$Q(r) = \gamma P(r) \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \frac{\omega_0^4}{(\Delta\omega)^2 \omega_L^2}.$$

Эффективная радиальная сила, стоящая в усредненном уравнении (2.7), равна  $e\bar{E}_r - m\omega_L^2 r Q(r)$ , где второй член и есть та дополнительная сила, которая ответственна за сжатие облака. Соответственно этому плотность  $\rho$  в (2.18) увеличивается по сравнению с бриллюэновской.

Вне электронного облака, где  $\rho = \rho' = 0$ , решение системы уравнений (2.1) имеет следующий простой вид:

$$E'_\varphi = ar^{\gamma-1} + br_a^{2\gamma} r^{-\gamma-1}, \quad E'_r = \frac{1}{i} (ar^{\gamma-1} - br_a^{2\gamma} r^{-\gamma-1}), \quad (2.19)$$

$$H'_z = \frac{\omega f}{ic\gamma} (ar^{\gamma-1} - br^{2\gamma} r^{-\gamma-1})$$

для осциллирующих величин и

$$\bar{E}_r = D/r, \quad \bar{E}_\varphi = 0, \quad \bar{H}_z = H_0 \quad (2.20)$$

для усредненных полей. Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $D$  — постоянные, которые должны быть найдены из граничных условий на аноде и на границе электронного облака и из условия стационарности. Следует отметить, что полученное выше решение уравнений для усредненных величин (2.18) имеет ту же структуру, что и статическое решение Бриллюэна [4].

### 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

1. На поверхности анода тангенциальные компоненты поля связаны условием

$$E'_\varphi(r_a) = i\chi(\omega, \gamma) H'_z(r_a), \quad (3.1)$$

где  $\chi(\omega, \gamma)$  — реактивный импеданс, позволяющий в одноволновом приближении описывать резонансную замедленную гармонику поля с учетом его поверхностного характера [10].

Условие (3.1) позволяет связать коэффициенты  $a$  и  $b$  в выражениях (2.19) для полей. При  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ , разлагая  $\chi(\omega, \gamma)$  в ряд по  $(\omega - \omega_0)/\omega_0$ , получим такое соотношение:

$$aX = b(X + g). \quad (3.2)$$

Здесь введены безразмерный сдвиг частоты  $X = (\omega - \omega_0)/\omega_0$  и параметр

$$g = 2\gamma \left[ \gamma + \frac{\omega_0^2 r_a}{c} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \right]^{-1}, \quad (3.3)$$

зависящий от свойств замедляющей системы [6] ( $\omega_0$  — собственная частота «холодной» системы в отсутствие пучка). Если значения поля на границе (со стороны пучка) обозначить через  $E(r_b - 0)$ , а со стороны вакуума — через  $E(r_b + 0)$ , где  $r_b = r_b(\varphi, t)$  — граница электронного облака, то условия на этой границе имеют вид

$$E_\tau(r_b - 0) = E_\tau(r_b + 0), \quad (3.4)$$

$$E_n(r_b - 0) = E_n(r_b + 0), \quad (3.5)$$

$$H_z(r_b - 0) = H_z(r_b + 0). \quad (3.6)$$

Здесь  $\tau$  и  $n$  — проекции векторов поля на касательную и нормаль к поверхности раздела пучок—вакуум.

Уравнение колеблющейся границы запишем в виде

$$r_b(\varphi, t) = r_0 + \operatorname{Re} \{ \xi(r_0) \exp[i(\gamma\varphi - \omega t)] \}. \quad (3.7)$$

Здесь  $r_0$  — среднее положение границы облака,  $\xi(r_0)$  — малое отклонение от него. Из очевидного равенства радиальной компоненты скорости пучка на границе радиальной скорости границы

$$\frac{dr_b}{dt} \equiv \frac{\partial r_b}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) r_b = u(r_b).$$

найдем, пренебрегая гармониками выше первой и используя выражения для  $r_b$  и  $u'$  (2.17), что

$$\xi(r_0) = -\frac{epr_0^{1-1}}{im\omega_0^2(\Delta\Omega)^2}, \quad (3.8)$$

где  $\Delta\Omega = [\gamma\omega_e(r_0) - \omega]/\omega_0$ .

Проекции полей связаны с углом  $\alpha$ , характеризующим отклонение нормали к поверхности пучка от ее невозмущенного значения:

$$\sin \alpha = \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \right)^2 + (r_b)^2 \right]^{-1/2}.$$

Для того, чтобы при разложении в ряд по  $|\xi/r_0|$  амплитуд высокочастотных полей можно было ограничиться членами первого порядка малости, необходимо из-за большой неоднородности поля потребовать, чтобы амплитуда колебаний границы облака была значительно меньше замедленной длины волны:

$$|\xi(r_0)| \ll r_0/\gamma. \quad (3.9)$$

Это условие эквивалентно неравенству (2.14). Неравенство (3.9) означает, что возмущенная граница пучка является достаточно «гладкой» и угол  $\alpha$  мал.

Разлагая в ряд по  $|\xi/r_0|$  и приравнивая осциллирующие члены в граничных условиях (3.4), (3.5), получим, что на усредненной границе

$$a + bR^{-2\gamma} = p, \quad a - bR^{-2\gamma} = p[1 - (\tilde{\Omega}_p/\Delta\Omega)^2], \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_p^2 &= \Omega_p^2 + 2\Omega_L^2 \gamma Q(r_0) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{r_k^4}{r_0^4} \right) \left( \frac{\Omega_L}{\Delta\Omega} \right)^2 \right], \\ \Omega_p^2 &= 2\Omega_L^2 (1 + r_k^4/r_0^4), \quad \Omega_L = \omega_L/\omega_0, \quad R = r_0/r_a. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Условие (3.6) для магнитного поля в результате совпадает со вторым уравнением в (3.10).

Как видно, тангенциальная компонента переменного электрического поля  $E_\varphi'$  непрерывна, а его радиальная компонента  $E_r'$  (и магнитное поле  $H_z'$ ) имеет на усредненной границе облака разрыв, обусловленный переменными поверхностными зарядами и током:

$$E_r'(r_0+0) - E_r'(r_0-0) = ipr_0^{1-1} (\tilde{\Omega}_p/\Delta\Omega)^2.$$

2. При усреднении граничных условий по периоду колебаний  $T = 2\pi/\text{Re}\omega$  после всех преобразований получим из (3.5) граничное условие для усредненного поля:

$$\frac{e}{mr_0^2\omega_L^2} D - 1 + \frac{r_k^4}{r_0^4} = Q(r_0) \left[ 1 + \frac{1}{2\gamma} \left( 1 - 3 \frac{r_k^4}{r_0^4} \right) \left( \frac{\Omega_L}{\Delta\Omega} \right)^2 \right]. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что среднее электрическое поле  $\bar{E}_r(r)$  имеет на усредненной границе облака разрыв с величиной скачка, пропорциональной  $P$ :

$$\bar{E}(r_0+0) - \bar{E}(r_0-0) = \frac{m\omega_L^2 r_a}{2|e|R} \left( \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \right)^4 P.$$

Этот скачок среднего поля обусловлен наводимым на усредненной границе облака  $r_0$  поверхностным зарядом за счет колебания границы  $r_b(\varphi, t)$  относительно среднего положения.

Граничное условие (3.4) при усреднении тождественно обращается в нуль. Исходя из (2.16), можно показать, что при усреднении условия (3.6) отличие среднего магнитного поля  $\bar{H}_z$  от статического  $H_0$  пренебрежимо мало. Поэтому ниже полагаем

$$\bar{H}_z(r_0) = H_0, \quad \omega_L = \frac{|e| H_0}{2mc}. \quad (3.13)$$

Если задано анодное напряжение  $V$ , то можно найти связь между усредненным радиусом облака и квадратом амплитуды колебаний  $P$  из условия

$$\int E dr = -V. \quad (3.14)$$

Подставляя в условие (3.14) значения полей в пучке (2.17), (2.18) и значения полей вне пучка (2.19), (2.20), а также используя связь между амплитудами этих полей (3.10), (3.11), (3.12), получим

$$\begin{aligned} \zeta^2 \frac{(1-\sigma^2)^2}{R^2} - \left(1 - \frac{\sigma^2}{R^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{\sigma^4}{R^4}\right) \ln \frac{1}{R^2} = \\ = \frac{PR^{2\gamma-2}}{(\Delta\Omega)^2 \Omega_L^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{\Omega_L^2}{2\gamma(\Delta\Omega)^2} \left(1 - 3 \frac{\sigma^4}{R^4}\right) \right] \ln R^{-2\gamma} + 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_p}{\Delta\Omega} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\zeta = H_k/H_0$ ,  $H_k = (2c/r_a) \sqrt{-mV/e} (1-\sigma^2)^{-1}$ ,  $\sigma = r_k/r_a$ . При  $P = 0$  отсюда следует известное уравнение для радиуса бриллюэновского облака.

3. Граничные условия на поверхности облака (3.10), (3.11) и на поверхности анода (3.2), связывающие амплитуды колебаний  $a$ ,  $b$  и  $p$  трех волн в межэлектродном пространстве, приводят к следующему дисперсионному соотношению для сдвига частоты  $X = (\omega - \omega_0)/\omega_0$ :

$$X(X-\Gamma)^2 = (\tilde{\Omega}_p^2/2) [X + (X+g) R^{2\gamma}], \quad (3.16)$$

где

$$\Gamma = \frac{\gamma \omega_e(r_0) - \omega_0}{\omega_0}. \quad (3.17)$$

Здесь  $\Gamma$  представляет собой параметр рассинхронизации пучка по отношению к волне в «холодной» системе.

Вместе со связью (3.15) между амплитудой колебаний  $P$  и усредненным радиусом облака  $R$  дисперсионное уравнение (3.16) дает возможность определить параметры стационарного режима и области его существования. Заметим, что дисперсионное уравнение (3.16) имеет формально такой же вид, как и дисперсионное уравнение, полученное Малеевым [6] для колебаний с бесконечно малой амплитудой. Однако в нашем случае радиус облака  $R$  и эффективная «плазменная частота»  $\tilde{\Omega}_p$  существенно зависят от амплитуды колебаний (см. (3.15) и (3.11)).

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, ЖЭТФ, 21, 580 (1951).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, М., 1958.
3. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 3, 110 (1958).
4. Л. Бриллюэн, Теория магнетрона, изд. Сов. радио, М., 1946.
5. В. П. Тычинский, Радиотехника и электроника, 2, 912 (1957).
6. В. Я. Малеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 333 (1962).

7. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап. ХГУ, труды физ.-мат. факультета, 2, 41 (1950).
8. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 44, 676 (1963).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
10. М. А. Миллер, ДАН СССР, 87, 571 (1952); ЖЭТФ, 25, 1972 (1955).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
17 апреля 1965 г.

STATIONARY OSCILLATIONS OF AN ELECTRON CLOUD IN A CYLINDRICAL MAGNETRON. I. MECHANISM OF INSTABILITY STABILIZATION

*V. I. Vigdorchik, V. M. Kontorovich*

The non-linear compression mechanism has been considered of an electron cloud by the high-frequency field in the surface-wave magnetron. This mechanism is shown to be able to stabilize the oscillatory regime instability. The dispersion equation has been obtained, permitting to determine the parameters of the stationary oscillation regime.

УДК 621.385.64

## ИЗМЕРЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА В НЕРАЗРЕЗНОМ МАГНЕТРОНЕ В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ МЕТОДОМ ЗОНДА С ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫМ ИНДИКАТОРОМ

*Л. М. Грошков*

Излагается метод измерения потенциала при помощи зонда с электронно-лучевым индикатором. Приводятся результаты измерений, которые подтверждают выводы работ [1, 2] о том, что распределение потенциала в магнетроне в статическом режиме близко к распределению, описываемому теорией бидромического состояния пространственного заряда с двухпетлевыми траекториями электронов.

### 1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ

Использованный в настоящей работе метод измерения распределения потенциала в магнетроне состоит в следующем. Из полого цилиндрического катода через узкую щель в его боковой поверхности выпускается тонкий электронный луч в направлении, перпендикулярном оси магнетрона. Этот луч (будем называть его зондирующими), отклоняясь в электрическом и магнитном полях магнетрона, попадает в некоторую точку на аноде (рис. 1). Его траектория определяется скоростью вылета электронов луча из щели, величиной напряженности магнитного поля и распределением потенциала между катодом и анодом. В месте прихода зондирующего луча на анод ставится коллектор — небольшой электрод, на который попадают электроны луча. По величине тока, текущего в цепи коллектора, можно судить о приходе зондирующего луча на коллектор. В начале измерений при заданном режиме магнетрона скорость вылета электронов луча из щели подбирается такой, чтобы ток на коллектор был максимальным. При помещении на пути зондирующего луча (или близко от него) металлического зонда в виде тонкой проволочки, параллельной оси магнетрона, траектория луча изменится, если потенциал зонда будет отличаться от первоначального, потенциала той точки, в которую помещен зонд. При этом ток в цепи коллектора уменьшится. Если же зонду сообщить потенциал, равный тому потенциальному, который был в выбранной точке в отсутствие зонда, то зондирующий луч пройдет по прежней траектории, и ток коллектора примет вновь максимальное значение. Помещая зонд в различ-

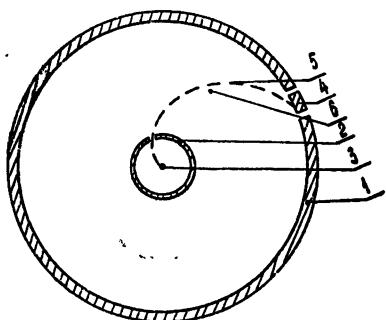


Рис. 1. К методике измерения распределения потенциала в неразрезном магнетроне:

1—анод, 2—катод, 3—вольфрамовая нить,  
4—коллектор, 5—траектория зондирующего  
луча, 6—зонд.

зонда, то зондирующий луч пройдет по прежней траектории, и ток коллектора примет вновь максимальное значение. Помещая зонд в различ-

ные точки междуэлектродного промежутка и измеряя в каждом случае потенциал зонда, при котором ток в цепи коллектора максимальен, можно измерить распределение потенциала между катодом и анодом. Можно использовать и другой вид индикации прихода зондирующего луча в определенную точку на аноде и смещения его от этой точки: свечение виллемита, нанесенного в виде узкого пояска на внутренней поверхности полупрозрачного анода, как это было сделано в работе [3].

Описанный метод измерения потенциала может быть назван методом зонда с электронно-лучевым индикатором. Существенное достоинство метода состоит в том, что измерение проводится тогда, когда потенциал зонда равен потенциалу пространства, в которое он помещен. Зонд с таким потенциалом не будетискажать исследуемое поле и притягивать или отталкивать электроны, движущиеся по своим орбитам. При отсутствии каких-либо держателей зонда в исследуемом пространстве и малой толщине зонда количество электронов, прямо перехватываемых им, будет невелико. При этом зонд не заряжается, как это бывает в случае изолированного зонда. Поэтому можно считать, что при измерениях будут сохраняться свойства исследуемой системы, в какой бы точке между катодом и анодом ни находился зонд.

В отличие от косвенного способа измерения потенциала по траекториям, наблюдаемым на флюоресцирующем экране при зондировании магнетрона продольным электронным лучом (работы [1, 2, 4]), предлагаемый метод свободен от искажающего влияния краевых полей. Именно последнее не позволило автору работы [4] осуществить абсолютные измерения потенциала. Кроме того, здесь можно проводить измерения во всем междуэлектродном пространстве, в то время как упомянутые траектории наблюдаются лишь в ограниченной области.

Измерение распределения потенциала в магнетроне методом механического зонда было проведено в 1938 г. Энгбертом [5]. Он пришел к заключению, что потенциал в магнетроне имеет линейное распределение. Однако позднее Дёлер [6] считал, что результаты [5] устанавливают квадратичную зависимость потенциала от радиуса. Возможность столь различных выводов из эксперимента говорит о невысокой точности измерений [5]. Это, возможно, было связано с тем, что держатель зонда у Энгбера (естественно, более массивный, чем зонд) находился также в исследуемом пространстве.

## 2. КОНСТРУКЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЛАМПЫ

Измерения проведены с помощью специальной экспериментальной лампы. Ее схематический чертеж приведен на рис. 2. В лампе использовался оксидный синтерированный катод. В керне катода вдоль образующей прорезана щель. Катод подогревается с помощью вольфрамовой нити диаметром  $150-200 \mu$ . Эта нить служит одновременно источником электронов зондирующего луча. Напряжением, приложенным между нитью и катодом, определяется скорость вылета электронов луча из щели. Катод крепится и центрируется в анодном цилиндре с помощью металлических чашечек, приваренных к концам катода и отделенных от анода слюдяными прокладками. Зондом служит вольфрамовая проволочка диаметром  $50-100 \mu$ . При помощи специального механизма зонд перемещается в вакууме по дуге окружности, близкой к траектории зондирующего луча, рассчитанной на основании результатов работы [3]. С этим механизмом связан микрометр, по показаниям которого определяется положение зонда в междуэлектродном пространстве (его радиальная координата). Лампа помещается между полюсными наконечниками электромагнита, размеры которых в несколько раз превосходят

поперечные размеры лампы. Согласно проведенным измерениям, магнитное поле в экспериментальном макете магнетрона однородно с точностью до 1%.

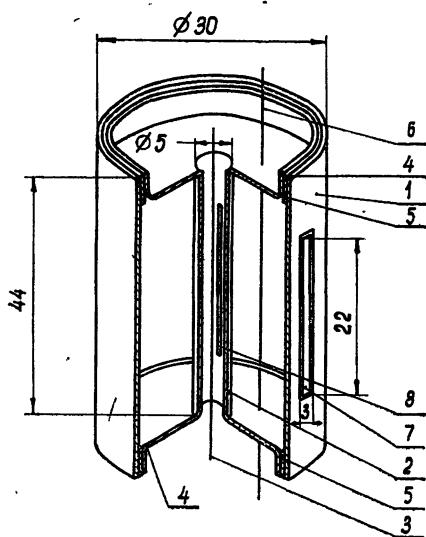


Рис. 2. Конструкция экспериментальной лампы:

1—анод, 2—катод, 3—вольфрамовая нить, 4—катодные чашечки, 5—слюдянные прокладки, 6—зонд, 7—коллектор, 8—щель в катоде. Размеры указаны для лампы 1.

В работе были использованы два экземпляра лампы описанной конструкции. Их геометрические размеры приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Лампа 1	Лампа 2
Диаметр анода (мм) .	30	30
Диаметр катода (мм) .	5	12
Длина катода и анода (мм)	44	44
Размеры щели (мм) . .	0,1x22	0,1x5
Диаметр зонда (мм) . .	0,1	0,05

В лампе 1 индикация прихода зондирующего луча в выбранную точку производилась по максимуму тока в цепи коллектора, а в лампе 2 — как по максимуму тока, так и по свечению пятна на флюoresцирующем экране.

### 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОЦЕНКЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА И ВОЗМОЖНЫХ ОШИБОК ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

Оценка чувствительности метода измерений была проведена с помощью лампы 2, когда приход луча в первоначальную точку на аноде индицировался по максимуму тока в цепи коллектора. С этой целью были сняты графики зависимости тока коллектора  $I_k$  от потенциала зонда  $V_z$  в лампе с холодным катодом для трех различных положений зонда в междуэлектродном пространстве: вблизи катода, примерно посередине между катодом и анодом, и вблизи анода. Полученные графики  $I_k(V_z)$  приведены на рис. 3. В подписях к этим рисункам указаны электрический режим магнетрона и положение зонда.

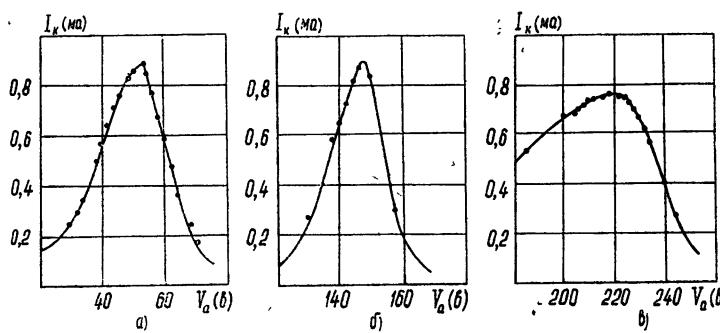


Рис. 3. Зависимость тока коллектора от потенциала зонда ( $H = 105 \text{ э}, V_a = 235 \text{ в}$ ):

а)  $r_3 = 7,4 \text{ мм}$ , б)  $r_3 = 10,8 \text{ мм}$ , в)  $r_3 = 14,5 \text{ мм}$ .

Чувствительность данного метода измерения потенциала  $x$  можно определить так:

$$x = \frac{\Delta I_k / I_{k \max}}{\Delta V_s / (V_s) I_{k \max}}.$$

Это величина, равная относительному изменению тока коллектора в процентах к максимальному току, которое приходится на один процент изменения потенциала зонда. С помощью графиков рис. 3 можно найти, что вблизи катода  $x=2$ , в средней части промежутка катод—анод  $x=5$ , вблизи анода  $x=1$ . Эти цифры показывают, что при наличии в цепи коллектора измерителя тока, позволяющего заметить изменение тока в один процент от измеряемой величины, потенциал во всем междуэлектродном пространстве (за исключением области, лежащей в непосредственной близости к аноду) может быть измерен с точностью, не худшей, чем 0,5%. (Уменьшение чувствительности при измерении потенциала вблизи анода обусловлено, во-первых, тем, что зонд здесь находится относительно далеко от траектории зондирующего луча, и, во-вторых, тем, что на более коротком пути, который проходит в этом случае луч до коллектора после возмущения его движения зондом, он отклоняется мало.)

Таким образом, описанный метод в принципе обеспечивает весьма высокую точность измерения потенциала. На точность измерений в основном влияют погрешности, связанные с геометрией лампы, напряжениями на электродах и магнитным полем. Для уменьшения ошибок, обусловленных геометрией лампы, были приняты меры, обеспечивающие возможно большую точность при изготовлении деталей и сборке лампы. В частности, абсолютная ошибка в установке зонда с помощью механизма, снабженного микрометрическим устройством, не превышала 0,1 мм. Для обеспечения постоянства режима магнетрона напряжения на электроды лампы подавались от стабилизированных выпрямителей, а электромагнит и накал лампы запитывались от аккумуляторов большой емкости. Все напряжения и токи измерялись приборами класса точности 0,5.

Для оценки суммарной погрешности эксперимента, обусловленной всеми названными факторами, были проведены измерения распределения потенциала в лампе с холодным катодом. В этом случае распределение потенциала в лампе известно, и из сравнения экспериментальных данных с расчетными можно оценить ошибку измерений.

Результаты этих предварительных измерений приведены на рис. 4 (лампа 1) и 5 (лампа 2). Здесь представлены расчетные кривые распределения потенциала  $V_s(r)/V_a$  (кривые 1) и нанесены экспериментальные точки, полученные при различных значениях магнитного поля  $H$  и анодного напряжения  $V_a$ . Как видно из рис. 4, экспериментальные кривые отличаются от расчетных для лампы 1 не более чем на 5%. Очевидно, погрешность измерения потенциала и в горячей лампе 1 не превышает эту величину. Кривые  $V_s(r)/V_a$  для лампы 2 получены при использовании обоих видов индикации: по току луча и свечению виллемита. В обоих случаях ошибка измерений с помощью лампы 2 не больше 2,5%.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Некоторые результаты из серии измерений распределения потенциала в магнетроне с полным пространственным зарядом приведены на тех же рис. 4 и 5.

Здесь следует отметить, что метод измерения с индикацией прихода луча в первоначальную точку на аноде по току коллектора в случае

магнетрона, содержащего пространственный заряд, оказывается менее чувствительным, чем в случае, когда пространственный заряд отсутствует. Дело в том, что электроны магнетрона даже при  $H > H_{kp}$  попадают на анод, а следовательно, и на коллектор, и вносят вклад в ток коллектора, маскируя этим полезный эффект. Поэтому измерения с помощью первой лампы удалось провести для режимов существенно закритических. В измерениях со второй лампой использовался метод индикации по свечению виллемита. Электроны магнетрона не засвечивают экран и «не мешают» измерениям. Правда, и при такой индикации измерения в лампе с полным пространственным зарядом вести сложнее, чем в лампе с холодным катодом. Дело в том, что в этом случае электрическое поле у катода в магнетроне таково, что щель рассеивает электроны луча, и луч приходит на экран существенно размытым. К размытию пятна на экране ведут и флюктуации электрического поля в магнетроне. Однако, пропуская зондирующую луч через щель в аноде и «вырезая» его край, который затем попадает на экран (см. рис. 6), удается существенно повысить чувствительность при измерениях с использованием этого метода индикации. Так были сняты кривые распределения потенциала в магнетроне на лампе 2 и в частности кривая, приведенная на рис. 5.

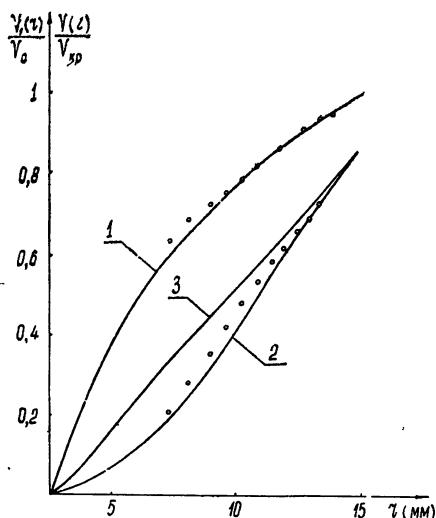


Рис. 4.

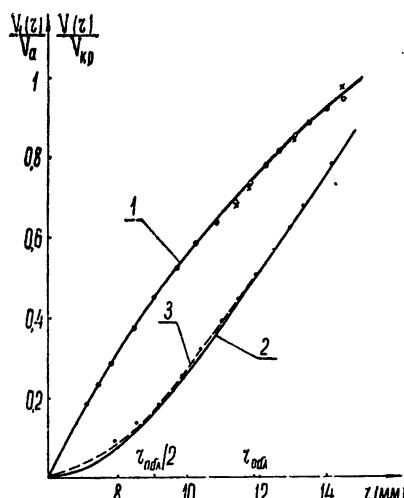


Рис. 5.

Рис. 4. 1—расчетная кривая  $V_1(r)/V_a$  (катод холодный), 2—расчетная кривая  $V(r)/V_{kp}$  для однопоточного состояния, 3—расчетная кривая  $V(r)/V_{kp}$  для двухпоточного состояния,  $\circ\circ\circ$ —экспериментальные точки ( $V_a = 425$  в,  $H = 103,5$  э).

Рис. 5. 1—расчетная кривая  $V_1(r)/V_a$  (катод холодный), 2—расчетная кривая  $V(r)/V_{kp}$  для однопоточного состояния, 3—расчетная кривая  $V(r)/V_{kp}$  для бидромического состояния с двухштеплевыми траекториями электронов,  $x x$ —экспериментальные точки кривой  $V_1(r)/V_a$ , индикация по свечению виллемита;  $\circ\circ\circ$ —экспериментальные точки кривой  $V_1(r)/V_a$ , индикация по току коллектора;  $\cdots\cdots$ —экспериментальные точки кривой  $V(r)/V_{kp}$  ( $V_a = 313$  в,  $H = 101,5$  э).

На рис. 4, кроме экспериментальных точек, нанесены расчетные кривые  $V(r)/V_{kp}$  для однопоточного (кривая 2) и двухпоточного (кривая 3) состояний пространственного заряда, а на рис. 5—для однопоточного состояния (кривая 2) и бидромического состояния с виртуальным катодом в середине электронного облака (кривая 3).

Сравнение экспериментальных кривых с теоретическими показывает, что распределение потенциала в статическом магнетроне мало от-

личается от бриллюэновского и еще более точно описывается теорией бидромического состояния с двухпетлевыми траекториями электронов.

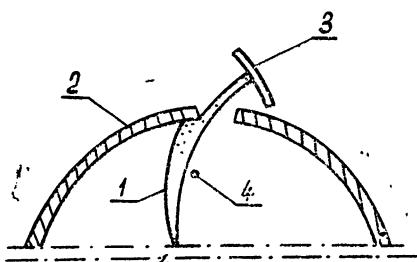


Рис. 6. К методике измерений распределения потенциала в магнетроне с индикацией луча по свечению виллемита:  
1—зондирующий луч, 2—анод, 3—флюоресцирующий экран, 4—зонд.

В заключение следует отметить, что описанный метод экспериментального исследования электрического поля может быть применён и для других систем (с пространственным зарядом и без него). Сложность его применения состоит только в необходимости перемещения зонда в вакууме.

Автор выражает благодарность М. И. Кузнецову за постоянный интерес к работе и важные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1104 (1961).
2. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1217 (1964).
3. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 748 (1959).
4. J. Verweel, Le Vide, 67, 32 (1957).
5. W. Engbert, H. F. T. und Elek., 51, 47 (1938).
6. O. Doepler, Ann. de Radioel., 3, 27 (1948).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
19 апреля 1965 г.

#### THE MEASUREMENT OF THE POTENTIAL DISTRIBUTION IN AN UNSPILT-ANODE MAGNETRON OF THE STATIC REGIME BY THE SONDE METHOD, USING AN INDICATOR TUBE

*L. M. Groshkov*

The method for the potential distribution measurement is described by using a sonde with indicator tube. The measurement results are given which corroborates the known conclusions [1, 2] that the potential distribution in the magnetron under static regime is near to the distribution derived by the bidromic state theory of the space charge with two looped electron paths.

УДК 621.372.22

## О ВЛИЯНИИ ДИСПЕРСИИ НА ХАРАКТЕР АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ АКТИВНОЙ ЛИНИИ

*M. I. Рабинович*

Рассмотрена кольцевая активная линия передачи с нелинейными потерями. Показано, что в линии с дисперсией и сильной нелинейностью возможны автоколебания в виде стационарных бегущих волн, близких к релаксационным. Аналогичные решения возможны также и в диспергирующей слабо-нелинейной линии, если ее длина достаточно велика. В разрывном приближении определены параметры релаксационных волн.

На основе анализа системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений рассматривается влияние периодичности структуры линии (пространственная дисперсия) на автоколебания в виде стационарных бегущих волн, существующих в искусственной линии с малыми нелинейными потерями.

Вопросы, связанные с влиянием дисперсии на характер волновых процессов в нелинейных распределенных системах, затрагиваются в ряде работ [1-9]. Однако в большинстве из них рассматриваются пассивные системы; активным системам посвящены лишь работы [8,9], где исследуются автоколебательные процессы в оптических квантовых генераторах.

В настоящей статье рассматривается влияние временной и пространственной дисперсии на характер автоколебаний в линии передачи с нелинейными потерями. Автоколебания в таких активных системах исследовались в работах [10,11] где, в частности, показано, что в кольцевой и безграничной линии с распределенными нелинейными параметрами возможно существование автоколебаний в виде стационарных бегущих волн.

Ниже показано, что при сильной нелинейности и слабой дисперсии эти стационарные волны близки к релаксационным. Показано также, что релаксационные волны возможны и в слабонелинейной диспергирующей системе, если протяженность линии достаточно велика. В разрывном приближении определены параметры релаксационных волн.

Влияние пространственной дисперсии рассматривается на примере нелинейной линии с сосредоточенными параметрами; такая линия описывается системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Показывается, что влияние пространственной дисперсии (периодичности структуры линии) на автоколебания в виде стационарных бегущих волн во многом аналогично влиянию временной дисперсии. С помощью метода усреднения определены параметры синусоидальных волн, существующих в искусственной линии с малыми нелинейными высокочастотными или низкочастотными потерями.

1. Автоколебания в виде стационарных бегущих волн, распространяющихся со скоростью  $v$  вдоль активной кольцевой линии длины  $l$  (рис. 1), описываются системой уравнений в обычных производных [10]

$$\frac{du}{d\xi} = U, \quad \frac{dU}{d\xi} = -\frac{1}{Cv} \varphi(U) - \frac{1-LC_1v^2}{LCv^2} u \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$u, U(\xi) = u, U(\xi + l). \quad (1.2)$$

Здесь  $\xi = vt - z$ , где  $v \in (0, 1/\sqrt{LC})$  — условие существования периодических волн, а  $\varphi(U)$  — нелинейная зависимость тока активного элемента

от приложенного к нему напряжения; остальные обозначения ясны из рис. 1. Пусть  $\varphi(U)$  имеет вид

$$\varphi(U) = -g(1 - bU^2)U. \quad (1.3)$$

Система (1.1), (1.3), как известно [12], имеет единственный устойчивый предельный цикл, который и соответствует автоколебаниям в виде стационарных бегущих волн [10]. Для выяснения зависимости формы предельного цикла от параметров системы

(1.1) — (1.3) удобно перейти к новым переменным

$$y = u \frac{\sqrt{1 - LC_1 v^2}}{g\sqrt{L/C}}, \quad x = \xi \frac{1 - LC_1 v^2}{Lg v}. \quad (1.4)$$

После преобразований вместо (1.1) — (1.3) получим

$$\frac{dy}{dx} = Y, \quad \mu \frac{dY}{dx} = \left( 1 - b \frac{1 - LC_1 v^2}{LC v^2} Y^2 \right) Y - y, \quad (1.5)$$

$$\mu = \frac{C(1 - LC_1 v^2)}{Lg^2}. \quad (1.6)$$

Вид автоколебаний в рассматриваемой системе зависит от величины нелинейности. В сильно-нелинейной системе ( $C/Lg^2 \ll 1$ ) при любом  $v$  параметр  $\mu$  мал ( $\mu \ll 1$ ) и, следовательно, волны всех типов близки к релаксационным.

В слабо-нелинейной системе ( $C/Lg^2 \gg 1$ ) волны различных типов в общем случае могут быть существенно различны. В [10] подробно рассмотрена слабо-нелинейная система в предположении, что длина кольца не слишком велика ( $l \sim 2\pi$ ). В такой короткой системе  $\mu \gg 1$  и все стационарные волны близки к синусоидальным, а их частоты  $\omega_k$  и скорости распространения  $v_k$  определяются выражениями

$$\omega_k^2 = \frac{1}{L(C + C_1/k^2)}, \quad v_k^2 = \frac{1}{L(Ck^2 + C_1)}, \quad k = \frac{2\pi}{l} n \quad (1.7)$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Если же длина системы достаточно велика, то в ней возможны и релаксационные волны. Действительно, уже из (1.7) следует, что для первых типов волн  $v^2$  при возрастании  $l$  стремится к  $1/LC_1$ , т. е. даже при слабой нелинейности ( $C/Lg^2 \ll 1$ ) параметр  $\mu$  становится малым, а квазигармоническое рассмотрение недопустимым.

Это объясняется тем, что в распределенной системе установившиеся нелинейные колебания представляют собой результат взаимодействия многих типов волн, эффективность которого определяется близостью их скоростей распространения, т. е. зависит от дисперсионной характеристики системы. Как следует из выражения (1.7), которое определяет скорости распространения малых гармонических возмущений, и рис. 2,

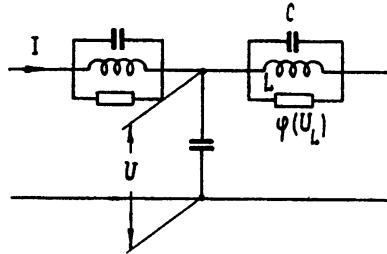


Рис. 1.

где представлена зависимость относительной разности скоростей  $(v_k - v_{2k}) v_k^{-1}$  от волнового числа  $k$ , гармонические составляющие малых длинноволновых возмущений распространяются с близкими скоростями и потому эффективно участвуют в процессе нелинейного взаимодействия. Скорости же распространения составляющих коротковолновых возмущений существенно различны; поэтому короткие стационарные волны в слабо-нелинейной системе близки к синусоидальным.

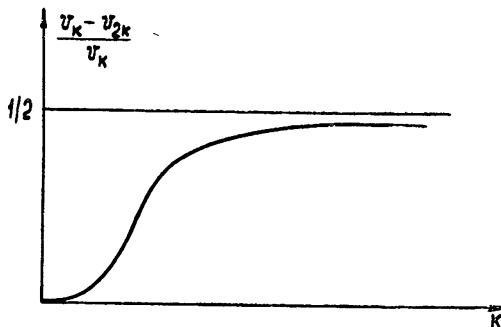


Рис. 2.

Наличие релаксационных волн в рассматриваемой системе с малой нелинейностью может быть пояснено и с помощью частотных характеристик системы.

Предположив, что система (рис. 1) линейна, определим ее добротность. Для этого воспользуемся дисперсионным уравнением

$$L(Ck^2 + C_1) p^2 - Lgk^2 p + k^2 = 0, \quad (1.8)$$

где  $k = 2\pi n/l$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), а  $p = \alpha + j\omega$ . Из (1.8) определим

$$\alpha_k = \frac{gk^2}{2(Ck^2 + C_1)}, \quad \bar{\omega}_k^2 = \omega_k^2 \left(1 - \frac{L^2 g^2 \omega_k^2}{4}\right); \quad (1.9)$$

здесь  $\omega_k^2$  совпадает с (1.7). На частоте  $\omega_k$  распределенная система, как известно, имеет добротность  $Q_k = \omega_k / 2\alpha_k$ ; поэтому, учитывая (1.9), находим

$$Q_k = 1/Lg \omega_k. \quad (1.10)$$

На основании (1.7), (1.10) для рассматриваемой системы качественно может быть построена резонансная характеристика, которая приведена на рис. 3. Как видно из этой характеристики, в полосе пропускания линии содержится малое число гармонических составляющих коротковолновых возмущений, т. е. возмущений, частоты которых  $\omega_k \leq \omega_{np}$ <sup>\*</sup>. Именно этим объясняется то, что характер коротких стационарных волн в слабо-нелинейной системе произвольной длины по существу определяется ее добротностью на высоких частотах —  $Q^2 \approx C/Lg^2$ .

Для низкочастотных возмущений (они существуют лишь в достаточно длинной линии) полоса пропускания оказывается очень широкой, поскольку в ней укладывается большое число их гармонических составляющих (тем больше, чем ниже частота возмущения). Ввиду этого при

\* Существование предельной частоты, очевидно, связано с наличием в рассматриваемой системе дисперсии.

наличии в системе даже слабой нелинейности длинные волны оказываются существенно несинусоидальными, хотя добротность системы для них выше, чем для коротких волн.

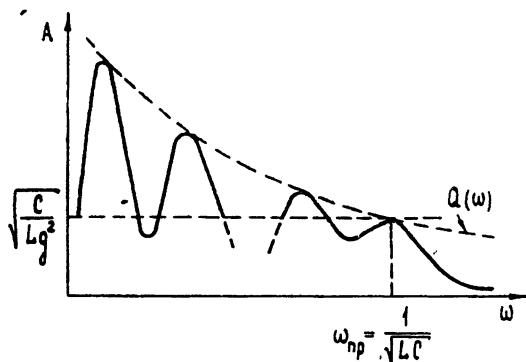


Рис. 3.

Оценивая влияние добротности на характер автоколебаний в слабонелинейной системе, следует заметить, что величина добротности характеризует близость к синусоидальным лишь тех волн, для которых дисперсия оказывается достаточно сильной. При слабой дисперсии даже «высокодобротные» моды оказываются сильно несинусоидальными. Если дисперсия отсутствует ( $C = 0$ ), то в рассматриваемой системе независимо от добротности вообще не могут существовать непрерывные стационарные волны.

Определим параметры стационарных бегущих волн в случае  $\mu \ll 1$ . При  $\mu \rightarrow 0$  предельный цикл системы (1.5) превращается в разрывный [13], состоящий из участков быстрых и медленных движений (рис. 4). Быстрые движения осуществляются по прямым  $y = \text{const}$ , а траекторией медленных движений является кривая

$$\dot{y} = \left( 1 - b \frac{1 - LC_1 v^2}{LC v^2} Y^2 \right) Y. \quad (1.11)$$

Длина стационарной волны, распространяющейся со скоростью  $v$ , при достаточно малом  $\mu$  близка к периоду движения изображающей точки по разрывному предельному циклу. Этот период легко определяется непосредственным интегрированием и в старых переменных записывается в виде

$$\lambda = 1,614 \frac{\lg v}{1 - LC_1 v^2}. \quad (1.12)$$

В кольцевой линии длины  $l$  могут существовать лишь те периодические решения, которые удовлетворяют условию (1.2); для них

$$\lambda(v) = l/n \quad (n=1,2,\dots). \quad (1.13)$$

Учитывая это, находим скорости распространения релаксационных волн:

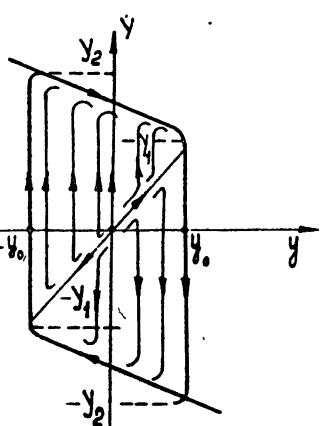


Рис. 4.

$$v_n = \left[ \frac{1}{LC_1} + \left( 0,8 \frac{g/C_1}{l/n} \right)^2 \right]^{1/2} - 0,8 \frac{g/C_1}{l/n}. \quad (1.14)$$

Амплитуда этих стационарных волн (рис. 4), согласно (1.11), (1.14), равна

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{0,24}{\sqrt{b}} \lambda, \quad U_1 = \frac{1}{2} U_2 = \frac{2}{3} u_0 \\ (u_0 &\sim y_0, \quad U_1 \sim Y_1, \quad U_2 \sim Y_2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Как отмечалось выше, в короткой системе с сильной нелинейностью ( $C/Lg^2 \ll 1$ ) волны всех типов близки к релаксационным. В случае, когда  $C/Lg^2 \sim 1$ , проведенное рассмотрение справедливо для тех типов волн, для которых

$$l/n \gg g \sqrt{L/C_1}, \quad (1.16)$$

поскольку при этом  $0 < (1 - LC_1 v^2) \ll 1$  и  $\mu$  мало. Для того, чтобы релаксационные волны могли существовать в диспергирующей слабо-нелинейной системе ( $C/Lg^2 \gg 1$ ), необходимо удовлетворить условию

$$l \gg \frac{C/g}{\sqrt{LC_1}}, \quad (1.17)$$

т. е. длина линии должна быть достаточно велика.

2. До сих пор, как и в работах [10, 11], рассматривалась распределенная модель нелинейной активной линии, т. е. предполагалось, что происходящие в ней процессы описываются уравнениями в частных производных. При рассмотрении искусственных линий или линий, содержащих периодически включенные нелинейные элементы, такой подход допустим лишь в случае слабой пространственной дисперсии; это имеет место, если длина генерируемых волн существенно больше периода линии (для искусственной линии необходимо, чтобы  $\lambda$  [яч.]  $\gg 1$ ).

Рассмотрим случай сильной пространственной дисперсии. Будем полагать, что система обладает малой нелинейностью ( $g = \epsilon g$ ,  $\epsilon \ll 1$ ), а временная дисперсия отсутствует ( $C = 0$ ).

1) *Система с высокочастотными нелинейными потерями.* Кольцевая линия, состоящая из  $2N$  ячеек (рис. 1), описывается системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= C_1 \frac{du_n}{dt} \quad (n=1,2,\dots,2N), \\ u_{n-1} - u_n &= \frac{d\Phi_n}{dt}, \\ \Phi_n &= L \varphi(u_n - u_{n-1}) + LI_n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\varphi(\Delta u)$  имеет вид (1.3) ( $du/d\xi \rightarrow \Delta u$ ), и граничными условиями

$$I_0 = I_{2N}, \quad u_0 = u_{2N}. \quad (2.2)$$

Исключая из (2.1) ток  $I_n$  и поток  $\Phi_n$ , преобразуем эту систему к виду

$$\frac{dU_n}{dt} = \frac{1}{C} \frac{d}{dt} [\varphi(u_{n+1} - u_n) - \varphi(u_n - u_{n-1})] + (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})/LC,$$

$$\frac{du_n}{dt} = U_n \quad (n=1,2,\dots,2N). \quad (2.3)$$

Поскольку нелинейность в системе мала ( $g = \varepsilon g$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ), будем искать решение (2.3) в виде стационарных бегущих волн, близких к синусоидальным:

$$\begin{aligned} u_n^k &= A_k(t) \cos [\omega_k t - n\varphi_k + \psi_k(t)], \\ U_n^k &= -\omega_k A_k(t) \sin [\omega_k t - n\varphi_k + \psi_k(t)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь амплитуда  $A_k(t)$  и фаза  $\psi_k(t)$  — медленно меняющиеся функции времени. Величина  $\varphi_k$  определяется краевыми условиями (2.2):

$$\varphi_k = \frac{\pi}{N} k \quad (k=1, 2, \dots, N). \quad (2.5)$$

После подстановки (2.4) в (2.3) получаем для  $U_n^k$  и  $u_n^k$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dU_n^k}{dt} &= \varepsilon 2g \frac{1-\cos\varphi_k}{C} \left[ 1 - 3b \sin^2 \varphi_k \frac{U_n^{k^2}}{\omega_k} - 3b u_n^{k^2} (1 - \cos \varphi_k)^2 \right] \times \\ &\times \left( 1 + \varepsilon 12g b \sin^2 \varphi_k \frac{1 - \cos \varphi_k}{C \omega_k^2} u_n^k U_n^k \right)^{-1} U_n^k - 2(1 - \cos \varphi_k) \times \\ &\times \left[ LC(1 + \varepsilon 12g b \sin^2 \varphi_k \frac{1 - \cos \varphi_k}{C \omega_k^2} u_n^k U_n^k) \right]^{-1} u_n^k, \\ \frac{du_n^k}{dt} &= U_n^k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как предполагалось  $\omega_k = \text{const}$ , полученная система, строго говоря, справедлива лишь при  $k = N$  ( $\pi$ -колебания). Однако, если  $N$  достаточно велико, то этой системе приближенно должны удовлетворять и те решения, для которых  $k \leq N$  ( $\sin \varphi_k \ll 1$ ). Частоты таких решений определяются приближенным выражением

$$\omega_k^2 = \frac{2(1 - \cos \varphi_k)}{LC}. \quad (2.7)$$

Пренебрегая в знаменателе коэффициентов (2.6) малым нелинейным членом и воспользовавшись для решения полученного уравнения методом Ван-дер-Поля [13], находим укороченные уравнения для амплитуд и фаз стационарных волн вида (2.4)

$$\frac{dA_k}{dt} = -\varepsilon g \frac{2(1 - \cos \varphi_k)}{C} A_k \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} b A_k^2 (1 - \cos \varphi_k + \sin^2 \varphi_k) \right], \quad (2.8a)$$

$$\frac{d\psi_k}{dt} \equiv 0 \quad (k=n, n+1, \dots, N-1, N; \quad n \ll N). \quad (2.8b)$$

Уравнение (2.8a) имеет единственное и устойчивое ненулевое состояние равновесия

$$A_k = \left[ \frac{2}{3b(1 - \cos \varphi_k + \sin^2 \varphi_k)} \right]^{1/2}, \quad (2.9)$$

которое и соответствует установившейся амплитуде стационарных бегущих волн. Как видно из полученного выражения, эта амплитуда зависит от длины волны.

2) Активная линия с нелинейными низкочастотными потерями. Кольцевая линия, состоящая из  $2N$  идентичных ячеек, представленных на рис. 5\*, описывается системой уравнений вида

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \varphi(u_n) + C \frac{du_n}{dt}, \\ u_{n-1} - u_n &= L \frac{dI_n}{dt}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$u_0 = u_{2N}, \quad I_0 = I_{2N} \quad (n=1, 2, \dots, 2N),$$

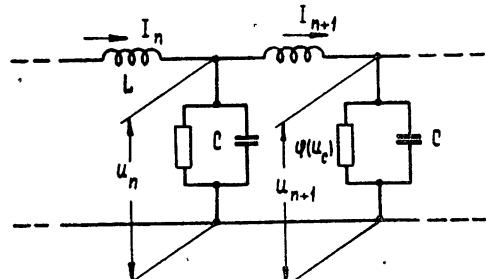
где  $\varphi(u_n) = -\varepsilon g(1 - b u_n^2) u_n$ . Исключив из (2.10) ток  $I_n$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= \frac{1}{C} \varphi'(u_n) U_n - \frac{1}{LC} (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}), \\ \frac{du_n}{dt} &= U_n, \quad u_0, I_0 = u_{2N}, I_{2N}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Будем искать решение этой системы в том же виде, что и решение системы (2.3). Подставляя (2.4) в (2.11), находим

$$\begin{aligned} \frac{dU_n^k}{dt} &= \frac{\varepsilon g}{C} (1 - 3b u_n^{k-1}) U_n^k - \\ &- \frac{2(1 - \cos \varphi_k)}{LC} u_n^k, \end{aligned}$$

$$\frac{du_n^k}{dt} = U_n^k \quad (k=1, 2, \dots, N).$$



(2.12)

Рис. 5.

Здесь по-прежнему  $\varphi_k = (\pi/N)k$ , а частота близких к синусоидальным стационарных волн определяется выражением (2.7). Заметим, что квазигармоническое рассмотрение, а следовательно, и система (2.12), справедливы лишь для тех типов волн, для которых  $\varphi_k$  не слишком мало. Укороченное уравнение для амплитуд этих типов волн записывается в виде

$$\frac{dA_k}{dt} = -\frac{\varepsilon g}{2C} A_k \left( 1 - \frac{3}{4} b A_k^2 \right) \quad (2.13)$$

(уравнение для фаз  $\varphi_k$  совпадает с (2.8б)). Это уравнение имеет единственное и устойчивое ненулевое состояние равновесия, которое на фазовой плоскости системы (2.12) соответствует устойчивому предельному циклу\*\*:

$$A_k = 2/\sqrt{3b} \quad (k=n, n+1, \dots, N-1, N; n \ll N). \quad (2.14)$$

\* Распределенная модель активной линии с низкочастотными нелинейными потерями и дисперсией рассмотрена в [11].

\*\* Устойчивость этого предельного цикла, очевидно, лишь необходимое, но недостаточное условие устойчивости исследуемых стационарных решений.

Как видно из (2.14), в линии с низкочастотными нелинейными потерями, в отличие от системы с высокочастотными потерями, амплитуда близких к синусоидальным стационарных волн не зависит от частоты.

Из проведенного рассмотрения следует, что влияние временной и пространственной дисперсии на автоколебания в нелинейной активной линии во многом аналогично. В частности, в линии без дисперсии автоколебания в виде стационарных бегущих волн или вообще не существуют, или являются разрывными. Наличие же временной или пространственной дисперсии делает возможным существование в системе непрерывных стационарных волн.

На рис. 6 представлена зависимость  $[v(\varphi_k) - v(2\varphi_k)]/v(\varphi_k)$  от  $\varphi_k$  для слабо-нелинейной системы с пространственной дисперсией. Как

видно, она фактически совпадает с соответствующей зависимостью для системы с временной дисперсией (рис. 2). Подобными для этих систем оказываются также и резонансные характеристики. (В случае системы с пространственной дисперсией ограниченность полосы пропускания обусловлена ограниченностью  $\varphi_k = 2\pi/\lambda_k$ , т. е. по существу дискретностью параметров системы.)

Таким образом, влияние пространственной и временной

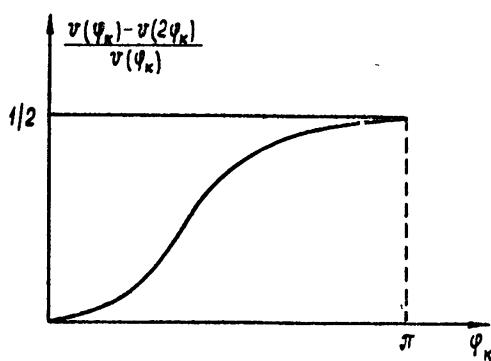


Рис. 6.

дисперсии на характер автоколебаний аналогично. Так же, как в линии с временной дисперсией и малой нелинейностью, в линии, обладающей пространственной дисперсией, близкими к синусоидальным будут лишь короткие волны ( $\lambda/2(\text{яч.}) \sim 1$ , для них  $\sin \varphi_k \ll 1$ ), т. е. те волны, для которых дисперсия оказывается достаточно сильной (рис. 6).

Автор благодарен А. В. Гапонову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

- С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
- Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 1116 (1961).
- Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 536 (1963).
- А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖТФ, 35, 677, 690 (1965).
- Н. Влоембергеп, Proc. IEEE, 51, 124 (1963).
- Л. А. Островский, ЖТФ, 33, 905 (1963).
- Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1130 (1962).
- Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 91 (1965).
- Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутян, ЖЭТФ, 43, 1897 (1962).
- М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 794 (1965).
- М. И. Рабинович, Радиотехника и электроника (в печати).
- Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории колебаний, Физматгиз, М., 1963.
- А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

**ON INFLUENCE OF DISPERSION ON THE AUTOOSCILLATION CHARACTER  
IN A NONLINEAR ACTIVE TRANSMISSION LINE***M. I. Rabinovich*

A ring active transmission line has been considered with the nonlinear losses. It is shown that in the transmission line with dispersion and strong nonlinearity, quasi-relaxation autooscillations are possible in the form of stationary traveling waves near to the relaxation ones. The analogous solutions are possible too in the dispersive slightly nonlinear transmission line, its length being sufficiently large. The parameters have been determined of the relaxation waves in a discontinuous approximation. On the basis of the system analysis of the nonlinear differentially difference equations the influence of the periodicity of the line structure (spatial dispersion) is considered on the autooscillations in form of the stationary traveling waves in an artificial line with a small nonlinear losses.

---

УДК 621.373.54

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ТРАНЗИСТОРНОГО ТРИГГЕРА

*Н. И. Ашбель и Л. В. Постников*

Исследуется динамическая модель триггерной схемы на основе кусочно-линейной идеализации статических характеристик транзистора. Выделена область пространства параметров, в которой фазовая плоскость «медленных» движений неоднолистная. Найдено распределение состояний равновесия по областям линейности и выяснена их устойчивость. Определены области пространства параметров, где рассматриваемая динамическая система работает в режиме триггера, кипп-реле и мультивибратора.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В обширной литературе по теории и расчету триггерных схем на транзисторах (см., например, [1—4]) описываются различные методы исследования, основанные на использовании эквивалентных схем, анализе спусковых, входных, переходных и выходных характеристик триггера (при обычно принимаемой кусочно-линейной аппроксимации статических характеристик транзистора). Однако в этих работах не ставится цель найти соответствие между точками пространства параметров и возможными режимами работы исходной динамической системы, хотя с этой точки зрения задача становится более широкой, чем это указано в заголовке, так как приводит к одновременному рассмотрению трех важнейших импульсных схем: триггера, кипп-реле и мультивибратора. Эти устройства отличаются друг от друга только значениями параметров и могут рассматриваться как различные режимы одной и той же динамической системы, описываемой кусочно-линейной системой дифференциальных уравнений четвертого порядка, имеющей, вообще говоря, шестнадцать областей линейности.

Используя относительную малость паразитных емкостей, можно выделить из четырехмерного фазового пространства два двухмерных подпространства, в каждом из которых величины скоростей существенно различны. Характерной особенностью этих трех типов схем является наличие участков «быстрых» и «медленных» движений, что возможно при условии существования областей неоднолистности фазовой плоскости «медленных» движений; последнее, очевидно, имеет место только в некоторой области пространства параметров. Другая группа необходимых условий, определяющих количество состояний равновесия и их распределение по областям линейности, дает возможность разбить пространство параметров на области, соответствующие каждому из трех названных режимов.

### 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим представленную на рис. 1 схему триггера на двух плоскостных полупроводниковых триодах, уравнения которых в соответствии с [5] запишем в форме

$$\begin{aligned} i_{k_j}^* &= g_{m_j}^* v_{k_j}^* - \alpha g_{n_j}^* v_{e_j}^*, \quad i_{e_j}^* = g_{n_j}^* v_{e_j}^* - \beta g_{m_j}^* v_{k_j}^*, \\ (-1)^{m_j} v_{k_j}^* &\leq 0, \quad (-1)^{n_j} v_{e_j}^* \leq 0 \\ (j &= 1, 2; m, n = 0, 1). \end{aligned} \quad (1)$$

В обозначениях рис. 1 уравнения движения с учетом соотношений (1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{v_{k_1}^* - v_{e_1}^* + E}{R} + g_{m_1}^* v_{k_1}^* - \alpha g_{n_1}^* v_{e_1}^* + \\ + \frac{x_1^*}{r} + c \dot{x}_1^* = 0, \\ \frac{x_1^*}{r} + c \dot{x}_1^* + \frac{v_{e_2}^* - E_2^*}{\rho} + \\ + g_{m_2}^* (1 - \beta) v_{k_2}^* + g_{n_2}^* (1 - \alpha) v_{e_2}^* = 0, \\ x_1^* = v_{k_1}^* - v_{e_1}^* + v_{e_2}^*. \end{aligned}$$

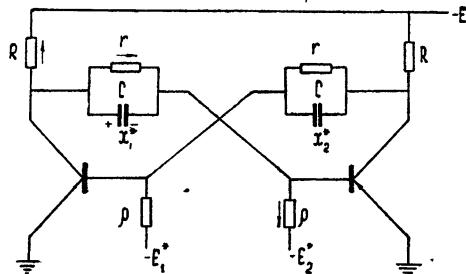


Рис. 1. Схема транзисторного триггера.

Еще три уравнения системы получатся заменой в этих уравнениях индексов 1 на 2 и наоборот\*.

Области линейности  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$  определяются неравенствами

$$(-1)^{m_1} v_{k_1}^* \leq 0, \quad (-1)^{m_2} v_{k_2}^* \leq 0, \quad (-1)^{n_1} v_{e_1}^* \leq 0, \quad (-1)^{n_2} v_{e_2}^* \leq 0.$$

Произведем замену переменных

$$v_{k_j}^* = E v_{k_j}, \quad v_{e_j}^* = E v_{e_j}, \quad x_j^* = E x_j, \quad E_j^* = E E_j, \quad t^* = rct$$

и обозначим

$$g_{m_j}^* = g_{m_j}/r, \quad g_{n_j}^* = g_{n_j}/r, \quad r/R = \lambda, \quad r/\rho = \eta.$$

Уравнения движения и неравенства, определяющие области линейности, в безразмерной форме примут вид

$$\begin{aligned} 0 + 0 + v_{k_1} &+ 0 - v_{e_1} + v_{e_2} = \\ &= x_1 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 &+ v_{k_1} + v_{e_1} - v_{e_2} = \\ &= 0 + x_2 + 0 + 0 + 0 \\ \dot{x}_1 + 0 + (\lambda + g_{m_1}) v_{k_1} &+ 0 - (\lambda + \alpha g_{n_1}) v_{e_1} + 0 = \\ &= -x_1 + 0 + 0 + 0 - \lambda \quad (2) \\ 0 + \dot{x}_2 + 0 &+ (\lambda + g_{m_2}) v_{k_2} + 0 - (\lambda + \alpha g_{n_2}) v_{e_2} = \\ &= 0 - x_2 + 0 + 0 - \lambda \\ \dot{x}_1 + 0 + 0 &+ (1 - \beta) g_{m_1} v_{k_1} + 0 + [\eta + (1 - \alpha) g_{n_1}] v_{e_2} = \\ &= -x_1 + 0 + 0 + \eta E_2 + 0 \\ 0 + \dot{x}_2 + (1 - \beta) g_{m_1} v_{k_1} &+ 0 + [\eta + (1 - \alpha) g_{n_1}] v_{e_1} + 0 = \\ &= 0 - x_2 + \eta E_1 + 0 + 0 \end{aligned}$$

\* В уравнениях движения не учтены малые параметры, дающие «быстрые» движения, анализ последних аналогичен проведенному в работе [6].

$$(-1)^{m_1} v_{k_1} \leq 0, \quad (-1)^{m_2} v_{k_2} \leq 0, \quad (-1)^{n_1} v_{e_1} \leq 0, \quad (-1)^{n_2} v_{e_2} \leq 0. *$$

Обозначив через  $A$  детерминант, составленный из коэффициентов левой части системы (2), имеем

$$A = -\{(\eta + \lambda)^2 + (\eta + \lambda)[(2 - \beta)(g_{m_1} + g_{m_2}) + (1 - \alpha)(g_{n_1} + g_{n_2})] + (1 - \alpha\beta) \times \\ \times (g_{m_1}g_{n_1} + g_{m_2}g_{n_2}) + [\alpha + (1 - \alpha)(1 - \beta)](g_{m_1}g_{n_2} + g_{m_2}g_{n_1}) - (2\alpha - 1)g_{n_1}g_{n_2}\}.$$

Во всех областях  $A < 0$ , кроме области  $G_{0011}$ , в которой  $A > 0$ , если выполняется условие

$$(\eta + \lambda)^2 + 2[(1 - \alpha)g_1^n + (2 - \beta)g_0^m] + 2(2 - \beta)g_0^m g_1^n - (2\alpha - 1)(g_1^n)^2 < 0,$$

которое после пренебрежения величиной  $(2 - \beta)g_0^m$  по сравнению с величиной  $(1 - \alpha)g_1^n$  и сокращения на положительный множитель значительно упрощается:

$$(\eta + \lambda) < (2\alpha - 1)g_1^n. \quad (3)$$

Выполнение условия (3) означает, что фазовая плоскость рассматриваемой системы неоднолистная вследствие пренебрежения малыми паразитными параметрами. При этом система уравнений (2) оказывается противоречивой, если ее не дополнить условиями скачка [7]. Поэтому рассмотрим только «медленные» движения; поскольку фазовая плоскость «медленных» движений неоднолистная, переход с одного листа на другой происходит скачком без изменения «медленных» координат, так как в качестве этих координат выбраны напряжения на емкостях.

### 3. ПОДПРОСТРАНСТВО «МЕДЛЕННЫХ» ДВИЖЕНИЙ. СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Уравнениями движения в фазовой плоскости «медленных» движений будут

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= B_1^1 x_1 + B_1^2 x_2 + B_1^3 E_1 + B_1^4 E_2 + B_1^5, \\ \dot{x}_2 &= B_2^1 x_1 + B_2^2 x_2 + B_2^3 E_1 + B_2^4 E_2 + B_2^5, \end{aligned} \quad (4)$$

областями линейности  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$

$$(-1)^{\gamma}(B_1^1 x_1 + B_1^2 x_2 + B_1^3 E_1 + B_1^4 E_2 + B_1^5) \leq 0 \\ (\gamma = m_1, m_2, n_1, n_2),$$

а координатами состояний равновесия

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{B_{12}^{12}} (B_{12}^{13} E_1 + B_{12}^{14} E_2 + B_{12}^{15}), \\ \bar{x}_2 &= -\frac{1}{B_{12}^{12}} (B_{12}^{13} E_1 + B_{12}^{14} E_2 + B_{12}^{15}). \end{aligned} \quad (5)$$

Состояние равновесия (5) существует, если выполняются неравенства

$$[(-1)^{\gamma} / B_{12}^{12}] (B_{12}^{13} E_1 + B_{12}^{14} E_2 + B_{12}^{15}) \leq 0. \quad (6)$$

Величина  $B$  с индексами представляет собой дробь, знаменателем которой служит  $A$ , а числителем — детерминант, полученный из  $A$  за-

\* В уравнениях системы (2) точка над  $x$  символизирует дифференцирование по безразмерному времени  $t$ .

меной столбца с номером, заданным нижним индексом, столбцом из коэффициентов правой части системы (2), номер которого дается верхним индексом\*.

Неравенства (6) определяют разбиение плоскости  $E_1, E_2$  на области с различным расположением состояния равновесия по областям линейности. Если это разбиение однолистное, то состояние равновесия единственное; в случае неоднолистности этого разбиения в системе может существовать несколько состояний равновесия. Условие однолистности разбиения плоскости  $E_1, E_2$  определяется постоянством знака произведения  $AB_{12}^{12}$ . Анализ этого выражения в предположении  $g_0^m/g_1^m, g_0^n/g_1^n \ll 1$  показывает, что оно отрицательно во всех областях, кроме области  $G_{0011}$ , в которой оно положительно при

$$\eta\lambda + (1+g_0^m)\eta + [1+(1-\alpha)g_1^n]\lambda + (1-\alpha\beta)g_0^m g_1^n - (2\alpha-1)g_1^n < 0. \quad (7)$$

Последнее условие выполняется лишь для

$$r < \frac{2\alpha - 1}{(1-\alpha\beta)g_0^m}.$$

Область значений  $\eta$  и  $\lambda$ , удовлетворяющих неравенству (7), показана на рис. 2.

Для переключательного режима транзистора ( $g_0^m, g_0^n \ll \ll \eta, \lambda; g_1^m, g_1^n \gg 1$ ) неравенство (7) принимает вид

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{R}{R+r} > 1,$$

т. е. коэффициент усиления по току, умноженный на долю тока, ответвляющегося в базовую цепь, больше единицы. Условие (6), определяющее существование состояния равновесия в области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ , представляет собой разбиение плоскости  $E_1, E_2$ . Координаты точки пересечения границ  $\Gamma_{\gamma_1}$  и  $\Gamma_{\gamma_2}$  в этой плоскости определяются уравнениями

$$\bar{B}_{\gamma_1}^3 E_1 + \bar{B}_{\gamma_1}^4 E_2 = -\bar{B}_{\gamma_1}^5,$$

$$\bar{B}_{\gamma_2}^3 E_1 + \bar{B}_{\gamma_2}^4 E_2 = -\bar{B}_{\gamma_2}^5,$$

где  $\bar{B} = B_{12}^{12}$ .

Точка пересечения границ  $\delta_{\gamma_1 \gamma_2}$  существует, если ее координаты

$$E_1 = \frac{\bar{B}_{\gamma_1 \gamma_2}^{45}}{\bar{B}_{\gamma_1 \gamma_2}^{34}}, \quad E_2 = -\frac{\bar{B}_{\gamma_1 \gamma_2}^{35}}{\bar{B}_{\gamma_1 \gamma_2}^{34}}. \quad (8)$$

удовлетворяют остальным неравенствам системы (6), т. е. если выполняются неравенства

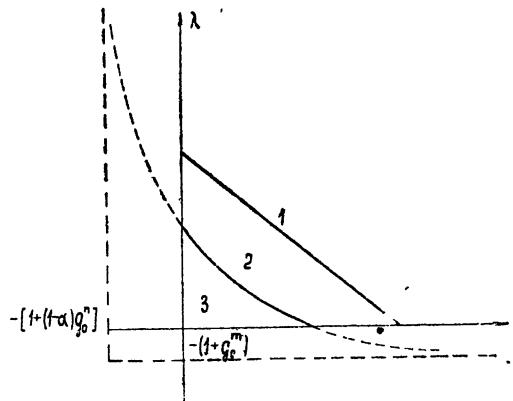


Рис. 2. Область значений  $\eta, \lambda$ , удовлетворяющих неравенству (7).

\* Более подробно о величинах  $A$  и  $B$  см. [8, 9].

$$(-1)^{\gamma} \frac{\bar{B}_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma}^{3 \cdot 4 \cdot 5}}{\bar{B}_{\gamma_1 \gamma_2}^{3 \cdot 4}} \leqslant 0.$$

Условия существования точек пересечения границ в конкретной форме запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta_{m_1 m_2}: & (-1)^{n_1} \leqslant 0, \quad (-1)^{n_2} \leqslant 0, \\ \delta_{m_1 n_1}: & (-1)^{m_2} \geqslant 0, \quad (-1)^{n_2} \geqslant 0, \\ \delta_{m_1 n_2}: & (-1)^{m_2} \geqslant 0, \quad (-1)^{n_1} \leqslant 0, \\ \delta_{m_2 n_1}: & (-1)^{m_1} \geqslant 0, \quad (-1)^{n_2} \leqslant 0, \\ \delta_{m_2 n_2}: & (-1)^{m_1} \geqslant 0, \quad (-1)^{n_1} \geqslant 0, \\ \delta_{n_1 n_2}: & (-1)^{m_1} \geqslant 0, \quad (-1)^{m_2} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Таким образом, существуют области  $G_{m_1 n_2 11}$ ,  $G_{m_1 0 n_1 0}$ ,  $G_{m_1 01 n_2}$ ,  $G_{0 m_2 0 n_2}$ ,  $G_{0 m_2 n_1 1}$ ,  $G_{00 n_1 n_2}$ .

Координаты точек пересечения границ, определяемые уравнениями (8), в переключательном режиме таковы:

$$\begin{aligned}\delta_{m_1 m_2}: & E_1 = \frac{(1-\alpha)\lambda}{\alpha\eta}, \quad E_2 = \frac{(1-\alpha)\lambda}{\alpha\eta}, \\ \delta_{m_1 n_1}: & E_1 = -\frac{\lambda}{\eta(\lambda+1)}, \quad E_2 = -\frac{\lambda(\eta+1)}{\eta}, \\ \delta_{m_1 n_2}: & E_1 = \frac{\lambda[(1-\alpha)(\lambda+1)-\alpha]}{\alpha\eta(\lambda+1)}, \quad E_2 = -\frac{\lambda[\lambda+1+\alpha(1-\beta)g_0^m g_1^n]}{\alpha\eta(\lambda+1)g_1^n}, \\ \delta_{m_2 n_1}: & E_1 = -\frac{\lambda[\lambda+1+\alpha(1-\beta)g_0^m g_1^n]}{\alpha\eta(\lambda+1)g_1^n}, \quad E_2 = \frac{\lambda[(1-\alpha)(\lambda+1)-\alpha]}{\alpha\eta(\lambda+1)}, \\ \delta_{m_2 n_2}: & E_1 = -\frac{\lambda(\eta+1)}{\eta}, \quad E_2 = -\frac{\lambda}{\eta(\lambda+1)}, \\ \delta_{n_1 n_2}: & E_1 = -\frac{\lambda\eta}{\lambda+1}, \quad E_2 = -\frac{\lambda\eta}{\lambda+1}.\end{aligned}$$

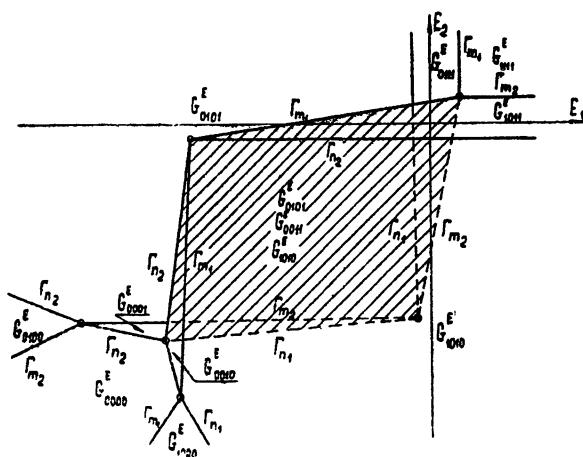


Рис. 3. Разбиение плоскости  $E_1$ ,  $E_2$  на области  $G^E_{m_1 m_2 n_1 n_2}$

Используя эти данные, а также вычисляя коэффициенты наклона границ для незамкнутых областей, получим разбиение плоскости  $E_1, E_2$  на области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}^E$ , изображенное на рис. 3 для значений параметров  $\lambda$  и  $\eta$ , расположенных в области 3 рис. 2, и на рис. 4 — для значений параметров, расположенных в областях 1 и 2 рис. 2.

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Для выяснения типа состояния равновесия перенесем начало координат в состояние равновесия и будем искать решение уравнений (4) в виде  $x_1 = ae^{pt}$ ,  $x_2 = be^{pt}$ . Тогда для  $a$  и  $b$  получим однородную алгебраическую систему линейных уравнений

$$(B_1^1 - p)a + B_1^2 b = 0,$$

$$B_1^1 a + (B_2^2 - p)b = 0,$$

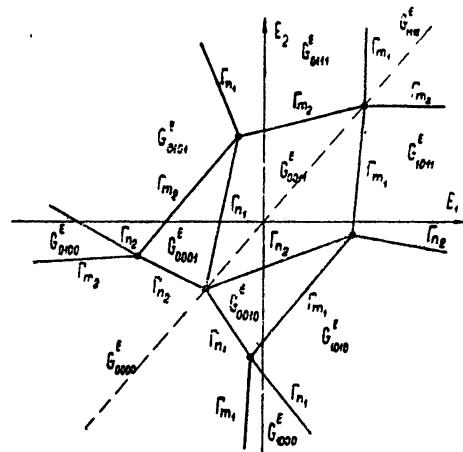


Рис. 4. Разбиение плоскости  $E_1, E_2$  на области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}^E$ .

нетривиальные решения которой получаются при значениях  $p$ , удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$p^2 - (B_1^1 + B_2^2)p + B_{12}^{1,2} = 0. \quad (9)$$

Анализ коэффициентов уравнения (9) показывает, что величина  $A(B_1^1 + B_2^2)$  всегда положительна, произведение  $AB_{12}^{1,2} < 0$  во всех областях  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ , если параметры  $\eta$  и  $\lambda$  расположены в области 1 или 2 рис. 2, и  $AB_{12}^{1,2} > 0$  только в области  $G_{0011}$ , если  $\eta$  и  $\lambda$  находятся в области 3. Далее, детерминант  $A$  отрицателен во всех областях, если параметры  $\eta$  и  $\lambda$  находятся в области 1, и положителен в области  $G_{0011}$  при наличии  $\eta$  и  $\lambda$  в областях 2 и 3.

Из разбиения плоскости  $E_1, E_2$  на области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}^E$  (рис. 3 и 4) и результатов предыдущего параграфа можно сделать следующие выводы.

1) Если значения параметров  $\eta$  и  $\lambda$  находятся в области 1 (рис. 2), то разбиение плоскости  $E_1, E_2$  соответствует рис. 4. Состояние равновесия единственно и устойчиво, в какой бы области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$  оно ни находилось. Фазовая плоскость в этом случае однолистная.

2) Если значения параметров  $\eta$  и  $\lambda$  находятся в области 2 (рис. 2), то разбиение плоскости  $E_1, E_2$  на области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}^E$  будет иметь вид, показанный на рис. 4. В этом случае плоскость параметров однолистная и, следовательно, система имеет единственное состояние равновесия в области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ , соответствующей области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}^E$ . Сама фазовая плоскость будет трехлистной, а состояние равновесия единственным и устойчивым, если  $E_1$  и  $E_2$  не находятся в области  $G_{0011}^E$ . При наличии  $E_1$  и  $E_2$  в области  $G_{0011}^E$  состояние равновесия будет расположено в области  $G_{0011}$ , которая (как это можно показать, следуя [6]) неустойчива по «быстрым» движениям. Это мультивибраторный режим; соответствующее ему состояние равновесия единственно, но неустойчиво. Если параметры  $E_1$  и  $E_2$  находятся вне области  $G_{0011}^E$ , но близки к ее грани-

цам, то при определенном изменении этих параметров во времени схема может работать, как кипп-реле. Подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

3) Если значения параметров  $\vartheta$  и  $\lambda$  находятся в пределах области 3 (рис. 2), то разбиение плоскости  $E_1, E_2$  на области  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}^E$  будет таким, как показано на рис. 3. При этом в случае, если  $E_1$  и  $E_2$  находятся в заштрихованной области, система имеет три состояния равновесия в областях  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ , соответствующих областям  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}^E$  плоскости параметров  $E_1, E_2$ ; одно из них,— в области  $G_{0011}$ , а два других, в зависимости от величин  $E_1$  и  $E_2$ , могут находиться в любой области, кроме  $G_{0000}, G_{1111}, G_{0100}$  и  $G_{1000}$ .

Если  $E_1$  и  $E_2$  не находятся в заштрихованной области плоскости  $E_1, E_2$  (рис. 3), то состояние равновесия единственно и устойчиво. Фазовая плоскость  $x_1, x_2$  в этом случае трехлистна. Анализ «быстрых» движений системы приводит к выводу, что сами «медленные» движения в пределах области  $G_{0011}$  неустойчивы, а следовательно, состояние равновесия в этой области неустойчиво. Это триггерный режим работы схемы.

В заключение следует отметить, что в данной работе найдены необходимые условия существования того или иного режима триггерной схемы на транзисторах. Для получения достаточных условий существования, а также для более детального исследования этих режимов нужно сделать разбиение фазовой плоскости на траектории. Рассмотрение этих вопросов, выходящих за рамки настоящей статьи, послужит темой отдельного сообщения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Кононов, Симметричные триггеры на плоскостных полупроводниковых триодах, ГЭИ, М., 1960.
2. И. П. Степаненко, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, изд. Сов. радио, М., 1961, стр. 321.
3. Н. М. Ашимов, Радиотехника, 16, 60 (1961).
4. А. Лоу, Р. Эндерс, Я. Зевелс, Ф. Вельдхаузер, Ч. Ченг, Основы полупроводниковой электроники, изд. Сов. радио, М., 1958.
5. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 706 (1959).
6. В. Г. Аранович, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1156 (1961).
7. Н. А. Железцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 67 (1958).
8. Н. И. Ашбель, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 319 (1961).
9. Н. И. Ашбель, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1216 (1963).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
22 мая 1965 г.

## SOME PROBLEMS OF THE TRANSISTOR TRIGGER DYNAMICS

*N. I. Ashbel', L. V. Postnikow.*

The dynamic model of the trigger scheme is being investigated on the basis of the piece-linear idealization of the static transistor characteristics. The region in parameters space has been defined in which the phase plane of „slow“ motions is not single sheet. The distribution of the equilibrium states has been found over the linear regions and their stability has been stated. The regions in parameters space have been defined for the dynamic system considered operating in the trigger, the kipp-relay and the multivibrator regimes.

УДК 621.373.431

## ДИНАМИКА МУЛЬТИВИБРАТОРА, СОБРАННОГО ПО СХЕМЕ РОЕРА

B. A. Мельникова

На основе кусочно-линейной аппроксимации статических характеристик транзисторов исследуется мультивибратор, собранный по схеме Роера. Сделано разбиение плоскости параметров на области различных режимов работы; получены аналитические выражения для амплитуды и периода колебаний.

Мультивибратор на транзисторах, собранный по схеме Роера, нашел широкое применение в узлах электронной аппаратуры. Он используется как генератор прямоугольных импульсов, как преобразователь напряжения в источниках питания и т. д. Хорошая форма вырабатываемых импульсов в первом случае и высокий КПД во втором обеспечивает ему ряд преимуществ по сравнению с другими генераторами подобного типа.

Расчету генератора и анализу процессов, протекающих в нем, посвящены работы [1—7]. В этих работах получены условия возбуждения схемы, а также аналитические выражения для амплитуды и периода колебаний в зависимости от параметров схемы и транзисторов. Транзисторы при этом идеализировались как статические линейные элементы, а в магнитном сердечнике учитывалось насыщение, а иногда и петля гистерезиса. В отдельных работах довольно грубо учитывалась нелинейность транзистора в виде насыщения коллекторного тока.

Проведенный в указанных работах анализ хотя и дает выражения для амплитуды и периода колебаний, однако не указывает их границ применимости. Из этого анализа также не ясно, в каких режимах может работать генератор и как эти режимы связаны с параметрами схемы.

В данной работе основное внимание уделено именно этому вопросу — разбиению плоскости параметров схемы на области различных режимов работы мультивибратора. Для наиболее интересных случаев получены аналитические выражения для амплитуды и периода колебаний.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Будем считать, что трансформатор линейный, потоки рассеяния отсутствуют, омическое сопротивление катушек индуктивности и объемное сопротивление транзисторов малы по сравнению с сопротивлением открытого перехода в транзисторах, сами транзисторы будем описывать статическими кусочно-линейными уравнениями, предложенными в работе [8].

Первое пренебрежение, по-видимому, допустимо не только в случае отсутствия сердечника в трансформаторе, но и для достаточно мощных трансформаторов, когда транзистор заходит в нелинейность раньше, чем насыщается сердечник\*. Второе пренебрежение исключает из рассмотрения быстрые движения [10]. Пренебрежение омическими сопротивлениями, вообще говоря, незаконно, так как в практических схемах ставят

\* Условия справедливости этой идеализации получены в конце работы.

достаточно большое ограничивающее сопротивление в коллекторную цепь, чтобы предохранить транзистор от пробоя. Однако учет этого сопротивления не меняет качественного поведения системы, а дает лишь количественные поправки, существенно усложняя при этом расчет.

При указанных выше условиях уравнение схемы (рис. 1) можно написать в виде

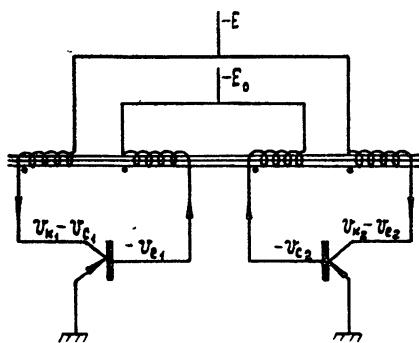


Рис. 1.

$$\begin{aligned} -E - v_{k_1} + v_{e_1} &= w_{k_1} \frac{d\Phi}{dt'}, \\ E_0 - v_{e_1} &= w_{b_1} \frac{d\Phi}{dt'}, \\ -E - v_{k_2} + v_{e_2} &= -w_{k_2} \frac{d\Phi}{dt'}, \\ E_0 - v_{e_2} &= -w_{b_2} \frac{d\Phi}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{L_0} &= w_{k_1} (\bar{g}_{m_1} v_{k_1} - \alpha \bar{g}_{n_1} v_{e_1}) + w_{b_1} [\bar{g}_{m_1} (1 - \beta) v_{k_1} + \bar{g}_{n_1} (1 - \alpha) v_{e_1}] - \\ &- w_{k_2} (\bar{g}_{m_2} v_{k_2} - \alpha \bar{g}_{n_2} v_{e_2}) - w_{b_2} [\bar{g}_{m_2} (1 - \beta) v_{k_2} + \bar{g}_{n_2} (1 - \alpha) v_{e_2}], \\ (-1)^{m_i} v_{k_i} &\leq 0, \quad (-1)^{n_i} v_{e_i} \leq 0 \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $w_k$  — число витков коллекторной обмотки,  $w_b$  — число витков обмотки в базе,  $\Phi$  — поток магнитной индукции,  $L_0$  — индуктивность, отнесенная к одному витку. После перехода к безразмерным переменным и параметрам

$$\begin{aligned} u_k &= v_k/E, \quad u_e = v_e/E, \quad \Phi = \bar{\Phi}/w_b g_0 L_0 E, \\ t &= t'/w_b^2 L_0 g_0, \quad g_t = \bar{g}/g_0, \quad \lambda = E_0/E, \quad h = w_k/w_b \end{aligned} \quad (3)$$

система уравнений (1) для симметричной схемы приводится к виду

$$\begin{aligned} -h \frac{d\Phi}{dt} - u_{k_1} + u_{e_1} &= 1, \quad -\frac{d\Phi}{dt} - u_{e_1} = -\lambda, \\ h \frac{d\Phi}{dt} - u_{k_2} + u_{e_2} &= 1, \quad \frac{d\Phi}{dt} - u_{e_2} = -\lambda, \\ g_{m_1} (h + 1 - \beta) u_{k_1} - g_{n_1} (\alpha h - 1 + \alpha) u_{e_1} - \\ - g_{m_2} (h + 1 - \beta) u_{k_2} + g_{n_2} (\alpha h - 1 + \alpha) u_{e_2} &= \Phi. \end{aligned} \quad (4)$$

Неравенства (2), определяющие области линейности, примут вид

$$(-1)^{m_i} u_{k_i} \leq 0, \quad (-1)^{n_i} u_{e_i} \leq 0 \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Разрешая систему (4) относительно  $\frac{d\Phi}{dt}$ , получим

$$A \frac{d\Phi}{dt} = A_1^5 \Phi + (A_1^1 + A_1^3) - (A_1^2 + A_1^4) \lambda, \quad (6)$$

где  $A$  — детерминант, составленный из коэффициентов левых частей

системы (4); пояснение смысла  $A_i^j$  дано в работе [9]. Таким образом, в каждой из 16 областей линейности  $G_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ , задаваемых неравенствами (5), динамика схемы описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

## 2. РАЗБИЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПРЯМОЙ НА ОБЛАСТИ ЛИНЕЙНОСТИ

Разрешая систему (4) относительно  $u_{k_i}$ ,  $u_{e_i}$  и подставляя полученные выражения в неравенства (5), получим разбиение фазовой прямой на области линейности:

$$\frac{(-1)^i}{A} [A_1^1 + A_i^3 - \lambda (A_i^2 + A_i^4) + \Phi A_i^5] \leq 0, \quad (7)$$

где  $i = m_1, n_1, m_2, n_2$ . Граница области линейности  $\Gamma_{i_0}$ , определяемая уравнением

$$\Phi = \frac{\lambda (A_{i_0}^2 + A_{i_0}^4) - (A_{i_0}^1 + A_{i_0}^3)}{A_{i_0}^5}, \quad (8)$$

существует, если ее координата удовлетворяет трем другим неравенствам системы (7). Подставляя значение для координаты границы (8) в неравенства (7) и воспользовавшись операцией обращения детерминантов (см. Приложение к работе [9]), получим условие существования границы  $\Gamma_{i_0}$  в виде

$$\frac{(-1)^i}{A_{i_0}^5} [A_{ii_0}^{15} + A_{ii_0}^{35} - \lambda (A_{ii_0}^{25} + A_{ii_0}^{45})] \leq 0, \quad (9)$$

где  $i$  принимает не равные  $i_0$  значения из  $m_1 n_1 m_2 n_2$ . После подстановки детерминантов и сокращения на положительные множители эти условия примут вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{m_1} : & (-1)^{n_1} \leq 0, \quad (-1)^{m_2} (\lambda - 1) \leq 0, \quad (-1)^{n_2} [\lambda (h + 2) - 1] \leq 0, \\ \Gamma_{n_1} : & (-1)^{m_1} \geq 0, \quad (-1)^{m_2} [\lambda (h + 2) - 1] \leq 0, \quad (-1)^{n_2} \lambda \leq 0, \\ \Gamma_{m_2} : & (-1)^{m_1} (\lambda - 1) \leq 0, \quad (-1)^{n_1} [\lambda (h + 2) - 1] \leq 0, \quad (-1)^{n_2} \leq 0, \\ \Gamma_{n_2} : & (-1)^{m_1} [\lambda (h + 2) - 1] \leq 0, \quad (-1)^{n_1} \lambda \leq 0, \quad (-1)^{m_2} \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Как следует из этих неравенств, в зависимости от величины параметров  $\lambda, h$  возможны следующие последовательности областей линейности:

- $G_{0101} \Gamma_{m_2} G_{0001} \Gamma_{n_1} G_{0011} \Gamma_{n_2} G_{0010} \Gamma_{m_1} G_{1010}$ ,
  - $G_{0101} \Gamma_{n_1} G_{0111} \Gamma_{m_2} G_{0011} \Gamma_{m_1} G_{1011} \Gamma_{n_2} D_{1010}$ ,
  - $G_{0101} \Gamma_{n_1} D_{0111} \Gamma_{m_1} G_{1111} \Gamma_{m_2} G_{1011} \Gamma_{n_2} G_{1010}$ .
- (11)

Соответствующее разбиение плоскости параметров  $h, \lambda$  на области  $a, b, c$  дано на рис. 2\*; границы последних имеют вид:  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1/(h + 2)$ ,  $\lambda = 1$ . После вычисления координат границ (8) и выяснения их взаимного расположения получаем разбиение фазовой прямой  $\Phi$  на области линейности, приведенное на рис. 3. Как показано в работе [9], области линейности располагаются по разные стороны от границ, если детерминант  $A$  при переходе через границу не меняет знака, и налагаются, если  $A$  меняет знак.

\* На рисунке 2 представлена зависимость  $h$  от  $\lambda$ .

Чтобы выяснить, на каких границах детерминант меняет знак, запишем его в виде квадратичной формы относительно  $h$ :

$$-A = a_{11}h^2 + 2a_{12}h + a_{22},$$

где

$$a_{11} = g_{m_1} + g_{m_2},$$

$$a_{22} = (1 - \alpha)(g_{n_1} + g_{n_2}) + (1 - \beta)(g_{m_1} + g_{m_2}),$$

$$2a_{12} = (2 - \beta)(g_{m_1} + g_{m_2}) - \alpha(g_{n_1} + g_{n_2}).$$

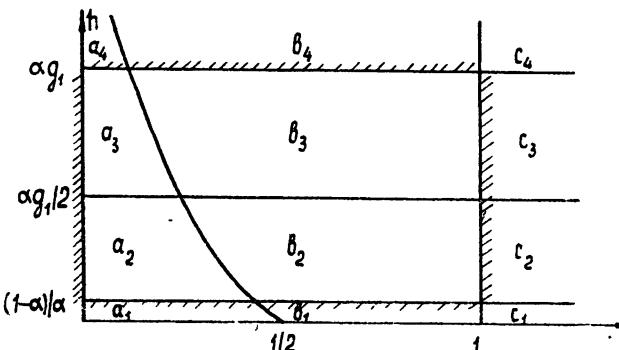


Рис. 2.

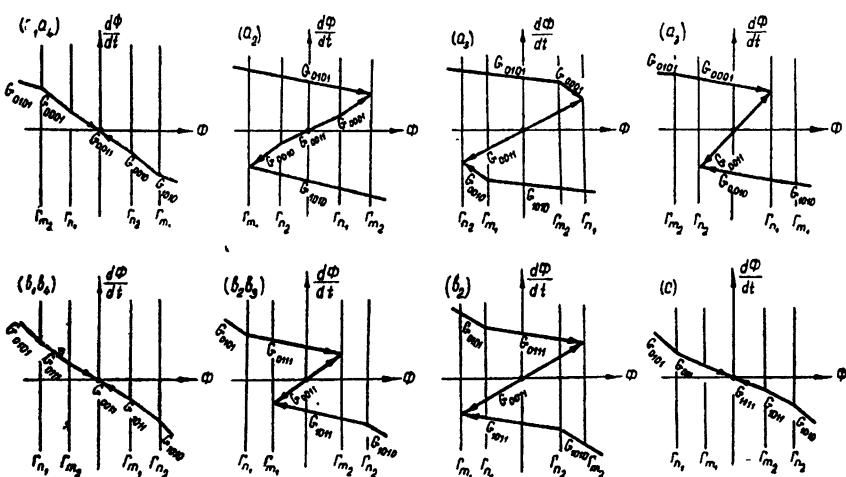


Рис. 3.

Нетрудно показать, что  $A$  везде отрицательно, за исключением областей  $G_{0011}$ ,  $G_{0001}$ ,  $G_{0010}$  для значений  $h$ , удовлетворяющих неравенствам  $h_1 < h < h_2$ , где

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1-\alpha}{\alpha}, & h_2 &= \alpha g_1 && (G_{0011}), \\ h_1 &= \frac{1-\alpha}{\alpha}, & h_2 &= \frac{\alpha g_1}{2} && (G_{0001}, G_{0010}). \end{aligned} \tag{12}$$

Разбиение оси  $h$  на граничные значения (12) и соответствующее раз-

биеение областей  $a, b, c$  плоскости параметров  $h, \lambda$  на области  $a_j, b_j, c_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) дано на рис. 2.

Как показывает анализ, смена знаков детерминанта происходит на границах  $\Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2}$ , если параметры  $\lambda, h$  выбраны в областях  $a_2, b_2, b_3$ , и на границах  $\Gamma_{n_1} \Gamma_{n_2}$ , если параметры лежат в области  $a_3$ . В этом случае фазовая линия в определенных областях неоднозначна. При выборе параметров в областях  $a_1, a_4, b_1, b_4$ , с области линейности заполняют всю фазовую линию не налагаясь.

### 3. РЕЖИМЫ РАБОТЫ МУЛЬТИВИБРАТОРА

Для выяснения возможных режимов работы схемы построим зависимость  $\frac{d\Phi}{dt}$  от  $\Phi$  в соответствии с уравнением (6). Эта зависимость (рис. 3) линейна в каждой из областей линейности; поскольку  $A_1^5 = 1$ , то наклон прямой положителен в областях, где  $A > 0$ . Если координату границы  $\Gamma_{l_0}$  (8) подставить в уравнение (6) и воспользоваться операцией обращения детерминантов, то получим выражение

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{A_{ii_0}^{15} + A_{ii_0}^{35} - \lambda(A_{ii_0}^{25} + A_{ii_0}^{45})}{A_{l_0}},$$

показывающее непрерывность зависимости  $\frac{d\Phi}{dt}$  от  $\Phi$  на границах линейности. Как следует из рис. 3, схема имеет одно состояние равновесия, лежащее в начале координат плоскости  $\frac{d\Phi}{dt}, \Phi$ . Если дополнить систему либо гипотезой скачка, либо учетом существенных малых параметров [11], то при выборе параметров  $\lambda, h$  в областях  $a_2, a_3, b_2, b_3$  (заштрихованная область рис. 2) на фазовой плоскости получится предельный цикл. Соответственно в схеме при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания, причем изменение  $\Phi$  будет иметь пилообразную форму, а  $\frac{d\Phi}{dt}$  — форму разрывных колебаний (рис. 4).

Напряжение на коллекторах триодов может быть найдено из уравнений (4)

$$u_{k_1} - u_{e_1} = -1 - h \frac{d\Phi}{dt}, \quad (13)$$

$$u_{k_2} - u_{e_2} = -1 + h \frac{d\Phi}{dt}.$$

Эти напряжения, так же как и  $\frac{d\Phi}{dt}$ , меняются разрывно.

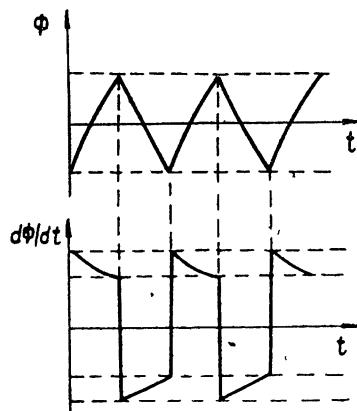


Рис. 4.

### 4. АМПЛИТУДА И ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ

Получим выражения для амплитуды и периода колебаний для наиболее интересного режима работы (область  $a_2$ ). Для этого найдем значение  $h \frac{d\Phi}{dt}$  на границах  $\Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}$

$$h \frac{d\Phi}{dt} = h \{ [h^2 + h(2 + \alpha - \beta) + \alpha - \beta] - \lambda [h^2(1 - 2\alpha) + h(4 - 3\alpha - \beta) + 2 - \alpha - \beta] \} (h + 1)^{-1} [h^2 + (2 - \alpha - \beta)(h + 1)]^{-1} = \\ = d_1(h) - k_1(h)\lambda, \quad (14)$$

$$h \frac{d\Phi}{dt} = \frac{h(1 - \lambda)}{h + 1} = d_2(h) - k_2(h)\lambda. \quad (15)$$

Качественная зависимость от параметра  $\lambda$  величины  $h \frac{d\Phi}{dt}$  для этих двух случаев приведена на рис. 5а. На рис. 5б, 5в приведены зависимости  $d_1(h)$  и  $k_1(h)$ . Из рисунков следует, что наименьшее искажение импульсов (отклонение от прямоугольности) получается при малых  $\lambda$  и  $h$ .

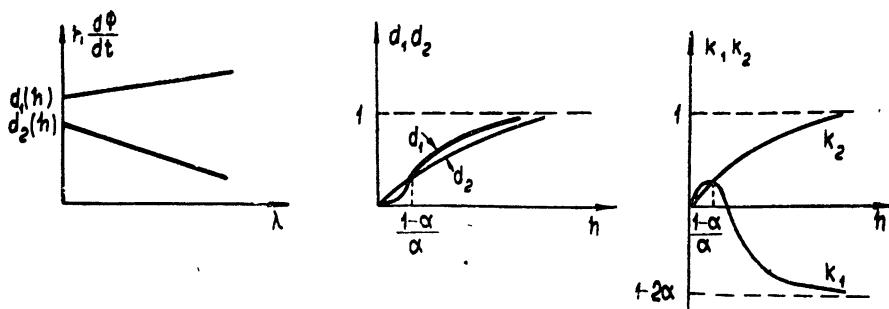


Рис. 5.

Период колебаний складывается из длительности интервалов времени движения изображающей точки по участкам медленных движений: от точки  $\Gamma_{m_1}$  области  $G_{0101}$  до  $\Gamma_{m_2}$  и от точки  $\Gamma_{m_2}$  области  $G_{1010}$  до точки  $\Gamma_{m_1}$ . В единицах безразмерного времени он выражается следующим образом:

$$T = -2g_1[h^2 + (2 - \alpha - \beta)(h + 1)] \ln [h^2 + (2 - \alpha - \beta)(h + 1)] (\lambda - 1) \times \\ \times \{ \lambda [h^2(1 - 2\alpha) + h(4 - 3\alpha - \beta) + 2 - \alpha - \beta] - [h^2 + h(2 + \alpha - \beta) + \alpha - \beta] \}^{-1}.$$

При  $\lambda \ll 1$  выражение для периода принимает вид

$$T = -2g_1[h^2 + (2 - \alpha - \beta)(h + 1)] \ln \frac{h^2 + (2 - \alpha - \beta)(h + 1)}{h^2 + (2 + \alpha - \beta)h + \alpha - \beta}.$$

График зависимости периода от параметра  $h$  при малых  $\lambda$  приведен на рис. 6.

Найдем условие, когда справедлива примененная в работе линейная аппроксимация для зависимости магнитного потока в сердечнике от тока в обмотках трансформатора. Пусть известна кривая намагничивания (рис. 7) и пусть на интервале  $|B| < B_0$  зависимость  $B$  от  $H$  можно считать линейной; тогда магнитный поток  $\Phi$  будет линейной функцией тока, если

$$\Phi_{\max} \leq S B_0, \quad (16)$$

где  $S$  — поперечное сечение сердечника.

При работе в области  $a_2$  максимальное значение  $\Phi$  равно

$$\Phi_{\Gamma_{m_2}} = \frac{\lambda [g_1 h (\alpha h - 1 + \alpha)] + [g_1 (\alpha h - 1 + \alpha) - 2g_0 h^2]}{h + 1}.$$

Подставляя это выражение в неравенство (16), получим

$$\lambda < \frac{SB_0(h+1) + 2g_0 h^2}{g_1 h [\alpha h - (1-\alpha)]} - \frac{1}{h}.$$

Зависимость  $\lambda$  от  $h$ , удовлетворяющая этому неравенству, приведена на рис. 8 (заштрихованная область). Для получения меньшего искажения импульсов и большей частоты следования необходимо выбирать малые значения  $\lambda$  и  $h$  (рис. 5, 6). В этом случае, как это следует из рис. 8, допустима линейная аппроксимация.

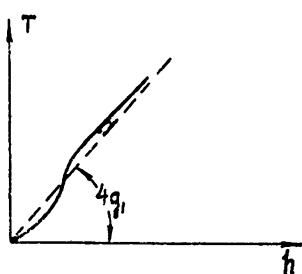


Рис. 6.

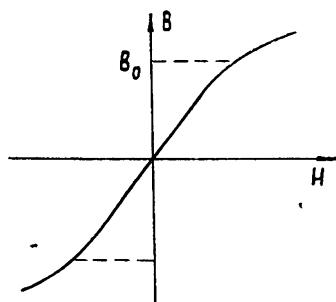


Рис. 7.

В заключение отметим следующее. Как ясно из уравнений (13) — (15), напряжение на коллекторе может достигать значения  $2E$ ; поэтому необходимо ставить гасящее сопротивление в коллекторную цепь. В данной работе расчет производился без учета этого сопротивления. Однако, как показала экспериментальная проверка, рассчитанные периодические режимы существуют и при наличии коллекторного сопротивления.

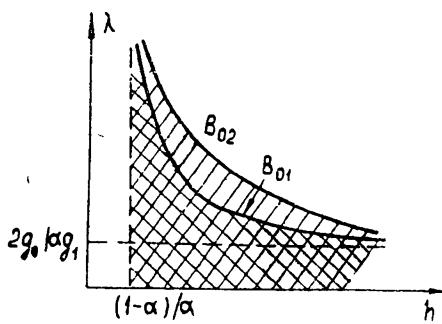


Рис. 8.

Качественная проверка работы схемы проводилась на плоскостном полупроводниковом триоде типа П-402 при включении в коллекторную цепь сопротивления в 60 ом. При выборе параметров схемы в областях  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  (рис. 2) вырабатывались колебания почти прямоугольной формы. Форма генерируемых импульсов сильно зависела как от числа витков отдельных обмоток, так и от их соотношения  $h$ . Наблюдаемые искажения формы импульсов при изменении напряжения смешения со-

ответствовали теоретически полученным результатам. Проведена проверка зависимости периода колебаний от параметров  $\lambda$  и  $h$ , подтвердившая соответствие результатов расчета с экспериментом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Roer, AJEE Trans., 74, 78 (1956).
2. Г. Н. Берестовский, К. Я Сенаторов, Радиотехника и электроника, 9, 1178 (1957).
3. Ю. И. Конев, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, изд. Сов. радио, М., 1958, стр. 306.
4. А. М. Пшеничников, Автоматика и телемеханика, 9, 1250 (1959).
5. Ю. И. Конев, Сб. Полупроводниковые приборы в автоматике, изд. Сов. радио, М., 1960, стр. 337.
6. Л. Н. Киселев, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, изд. Сов. радио, М., 1961, стр. 275.
7. Semicond Prod., 5, 45 (1962).
8. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 2, 767 (1959).
9. Н. И. Ашбель, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 319 (1961).
10. Н. И. Ашбель, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 4, 1216 (1963).
11. А. А. Андronov, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 июня 1965 г.

### THE DYNAMICS OF MULTIVIBRATOR DESIGNED BY ROER

V. A. Mel'nikova

The multivibrator is investigated on the basis of the piece-wise linear approximation of the transistors' static characteristics designed by Roer. The parameters' plane has been divided into the regions of different operating conditions; the analytic expressions have been obtained for the amplitude and period of oscillations.

УДК 62 — 501.1

## О ЧАСТОТНЫХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*M. B. Моргулис, С. В. Шильман*

Исследуется чувствительность линейных динамических систем с помощью логарифмических частотных характеристик.

Расчет систем автоматического управления обычно производится для некоторых средних номинальных значений параметров. В то же время в реальных системах значения параметров отклоняются от расчетных. Отсюда возникает необходимость в анализе чувствительности систем к изменениям параметров, позволяющем выбрать допуски на эти параметры. Указанная проблема имеет особенно важное значение для сложных систем управления, имеющих значительное число параметров, подверженных неконтролируемым изменениям.

Изучению этой задачи посвящено много работ (см., в частности, [1—7]). Систематический обзор работ по исследованию чувствительности систем автоматического управления дан в [10].

В данной статье анализируется чувствительность логарифмических частотных характеристик линейной разомкнутой системы к малым изменениям параметров. Такой анализ позволяет оценивать влияние их на устойчивость и на некоторые существенные показатели качества замкнутой системы. В статье указывается также на целесообразность применения метода логарифмических частотных характеристик для теоретического анализа динамической точности системы и ее чувствительности во временной области.

### 1. О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ К МАЛЫМ ИЗМЕНЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ

Как известно, по логарифмической частотной характеристике разомкнутой системы можно судить об устойчивости и качестве ее в замкнутом состоянии. Поэтому мы проведем анализ влияния малых изменений параметров на логарифмическую частотную характеристику системы управления в разомкнутом состоянии.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы  $W(p, \alpha)$ , где  $\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — вектор в  $n$ -мерном пространстве параметров. Обозначим

$$A(\omega, \alpha) = 20 \lg |W(j\omega, \alpha)|,$$

$$\varphi(\omega, \alpha) = \arg W(j\omega, \alpha)$$

и найдем изменения  $A(\omega, \alpha)$  и  $\varphi(\omega, \alpha)$  при малых вариациях  $\alpha_i$  в окрестности номинальных значений параметров, характеризуемых вектором  $\alpha_0(\alpha_{10}, \dots, \alpha_{n0})$ . Эти изменения с точностью до величин второго порядка малости определяются выражениями

$$\Delta A \approx \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial A(\omega, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)} \right]_{\alpha=\alpha_0} \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}}, \quad (1)$$

$$\Delta \varphi \approx \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \varphi(\omega, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)} \right]_{\alpha=\alpha_0} \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что влияние малых изменений параметров можно характеризовать при помощи функций

$$u_i(\omega, \alpha_0) = \left[ \frac{\partial A(\omega, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)} \right]_{\alpha=\alpha_0},$$

$$v_i(\omega, \alpha_0) = \left[ \frac{\partial \varphi(\omega, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)} \right]_{\alpha=\alpha_0},$$

которые будем называть функциями влияния соответственно на амплитудную и фазовую частотные характеристики.

Эти функции можно найти путем вычисления  $A(\omega, \alpha)$  и  $\varphi(\omega, \alpha)$  с последующим дифференцированием. Однако этот путь в случае сравнительно сложных систем связан с громоздкими вычислениями. Существенно проще указанные функции можно вычислить, если воспользоваться их связью с функциями чувствительности  $S_{\alpha_i}^W(p, \alpha) = \partial[\ln W(p, \alpha)]/\partial(\ln \alpha_i)$ , введенными Боде [8]. Заметим, что

$$\operatorname{Re} \frac{\partial[\ln W(j\omega, \alpha)]}{\partial(\ln \alpha_i)} = \frac{\partial[\ln |W(j\omega, \alpha)|]}{\partial(\ln \alpha_i)},$$

$$\operatorname{Im} \frac{\partial[\ln W(j\omega, \alpha)]}{\partial(\ln \alpha_i)} = \frac{\partial[\arg W(j\omega, \alpha)]}{\partial(\ln \alpha_i)}.$$

Отсюда получаем

$$u_i(\omega, \alpha) = \frac{\partial A(\omega, \alpha)}{\partial(\ln \alpha_i)} = 20 \lg e \frac{\partial[\ln |W(j\omega, \alpha)|]}{\partial(\ln \alpha_i)} = 20 \lg e \operatorname{Re} \frac{\partial[\ln W(j\omega, \alpha)]}{\partial(\ln \alpha_i)}, \quad (3)$$

$$v_i(\omega, \alpha) = \frac{\partial \varphi(\omega, \alpha)}{\partial(\ln \alpha_i)} = \operatorname{Im} \frac{\partial[\ln W(j\omega, \alpha)]}{\partial(\ln \alpha_i)}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) дают простой способ вычисления  $u_i$ ,  $v_i$  по функциям чувствительности. В частности, для расчета можно воспользоваться графическими методами. При этом построение  $u_i$ ,  $v_i$  осуществляется следующим образом. Представим  $S_{\alpha_i}^W(j\omega, \alpha)$  в виде

$$S_{\alpha_i}^W(j\omega, \alpha) = \sum_k \frac{\partial(\ln W)}{\partial(\ln W_k)} \frac{\partial(\ln W_k)}{\partial(\ln \alpha_i)}.$$

Выражение  $S_{\alpha_i}^W = \partial(\ln W)/\partial(\ln W_k)$  является функцией чувствительности системы к изменениям  $k$ -го элемента, зависящего от  $\alpha_i$ ; она целиком определяется структурой системы [4]. Отсюда следует, что логарифмические частотные характеристики, соответствующие  $S_{\alpha_i}^W(j\omega, \alpha)$ , можно построить по логарифмическим частотным характеристикам элементов системы. Функция чувствительности  $k$ -го элемента  $S_{\alpha_i}^{W_k} = \partial(\ln W_k)/\partial(\ln \alpha_i)$  к изменениям параметра  $\alpha_i$  обычно имеет сравни-

тельно простой вид, и соответствующие характеристики легко могут быть построены. Полученные характеристики суммируются, а затем с помощью номограмм находятся вещественная и мнимая части  $S_{W_k}^W(j\omega, \alpha) S_{v_i}^{W_k}(j\omega, \alpha)$ . Суммы последних по  $k$ , умноженные на соответствующие масштабные коэффициенты, дают искомые функции  $u_i, v_i$ . Полное изменение  $A(\omega, \alpha)$  и  $\varphi(\omega, \alpha)$  оценивается по формулам (1) и (2). Если считать изменения параметров случайными, то можно произвести совместную вероятностную оценку изменений логарифмических амплитудной и фазовой характеристик при фиксированном  $\omega$ .

Особый интерес представляет изучение чувствительности таких характеристик системы, как запасы устойчивости по фазе и по амплитуде, частота среза разомкнутой системы и др.

Найдем изменение частоты среза  $\omega_c$  относительно номинального значения  $\omega_{c0}$  в зависимости от малых изменений параметров системы. Возьмем функцию  $A(\omega_c, \alpha)$  и, разложив ее в ряд Тейлора в окрестности  $\omega_{c0}, \alpha_0$ , с точностью до величин второго порядка малости получим

$$\Delta A \approx \lg e \left[ \frac{\partial A(\omega, \alpha_0)}{\partial (\lg \omega)} \right]_{\omega=\omega_{c0}} \frac{\delta \omega_c}{\omega_{c0}} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial A(\omega_{c0}, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)} \right]_{\alpha=\alpha_0} \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}}.$$

Поскольку  $\omega_c$  определяется равенством  $A(\omega_c) = 0$ , то  $\Delta A = 0$  и

$$\frac{\delta \omega_c}{\omega_{c0}} = -20 \frac{1}{K_A^c} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial [\ln W(j\omega_{c0}, \alpha)]}{\partial (\ln \alpha_i)} \right\}_{\alpha=\alpha_0} \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}}, \quad (5)$$

где  $K_A^c = [\partial A(\omega, \alpha_0)/\partial (\lg \omega)]_{\omega=\omega_{c0}}$  — угловой коэффициент наклона логарифмической амплитудной частотной характеристики в точке  $\omega = \omega_{c0}$ .

Запас по фазе  $\varphi_3$  определяется выражением

$$\varphi_3 = \pi + \varphi(\omega_c, \alpha).$$

Изменение  $\varphi_3$  с учетом изменения  $\omega_c$  при вариациях параметров можно найти по формуле

$$\Delta \varphi_3 \approx -\frac{K_\varphi^c}{K_A^c} \sum_{i=1}^n u_i(\omega_{c0}, \alpha_0) \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}} + \sum_{i=1}^n v_i(\omega_{c0}, \alpha_0) \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}}, \quad (6)$$

где  $K_\varphi^c = [\partial \varphi(\omega, \alpha_0)/\partial (\lg \omega)]_{\omega=\omega_{c0}}$  — угловой коэффициент наклона логарифмической фазовой частотной характеристики в точке  $\omega = \omega_{c0}$ .

Аналогичным образом можно найти изменение запаса по амплитуде  $\Delta A_3$ :

$$\Delta A_3 \approx \sum_{i=1}^n u_i(\omega_{k0}, \alpha_0) \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}} - \frac{K_A^k}{K_\varphi^k} \sum_{i=1}^n v_i(\omega_{k0}, \alpha_0) \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}}, \quad (7)$$

где  $\omega_k$  определяется равенством  $\varphi(\omega_k) = -\pi$ ,  $\omega_{k0}$  — номинальное значение  $\omega_k$ ,  $K_A^k, K_\varphi^k$  — угловые коэффициенты наклона соответственно логарифмической амплитудной и фазовой характеристик в точке  $\omega_{k0}$ .

Полученные соотношения позволяют производить вероятностную оценку возможных изменений указанных характеристик системы.

## 2. О РАСЧЕТЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть рассматриваемая система управления является грубой [9]. Тогда изменение выходной величины  $y(t, \alpha)$  при малых вариациях  $\alpha$  может быть оценено по формуле

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^n h_i(t, \alpha_0) \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}},$$

где

$$h_i(t, \alpha_0) = \left[ \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)} \right]_{\alpha=\alpha_0}.$$

Изображение по Лапласу функции  $h_i(t)$  равно

$$H_i(p, \alpha) = \frac{\partial K(p, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)} X(p),$$

где  $K(p)$  — передаточная функция системы,  $x(t)$  — входное воздействие,  $X(p) \dot{=} x(t)$ ,  $H_i(p, \alpha) \dot{=} h_i(t, \alpha)$ . Отсюда видно, что функция  $h_i(t, \alpha)$  может быть определена по формуле

$$h_i(t, \alpha) = \int_{-\infty}^t k_i(t - \tau, \alpha) x(\tau) d\tau,$$

где

$$k_i(\tau, \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} K_i(j\omega, \alpha) \cos(\omega\tau) d\omega,$$

$$K_i(p, \alpha) = \frac{\partial K(p, \alpha)}{\partial (\ln \alpha_i)}.$$

Функцию  $k_i(\tau, \alpha)$  будем называть функцией влияния на весовую функцию системы.

Представим  $K_i(p, \alpha)$  в виде

$$K_i(p, \alpha) = \frac{\partial [\ln K(p, \alpha)]}{\partial [\ln W_i(p, \alpha)]} \frac{\partial [\ln W_i(p, \alpha)]}{\partial (\ln \alpha_i)} K(p, \alpha).$$

Из этого выражения ясно, что для определения  $\operatorname{Re} K_i(j\omega, \alpha)$  можно использовать метод логарифмических частотных характеристик. Порядок операций здесь такой же, как и при вычислении  $u_i(\omega, \alpha)$ .

В частности, если  $x(t)$  — единичная функция, то

$$h_i(t, \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} K_i(j\omega, \alpha) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega.$$

Отсюда можно найти изменение величины перерегулирования при вариациях параметра  $\alpha_i$ ; оно равно  $h_i(t_p, \alpha_0) \frac{\delta \alpha_i}{\alpha_{i0}}$ , где  $t_p$  — время перерегулирования номинальной системы.

Теперь примем, что входной сигнал  $x(t)$  состоит из двух слагаемых: детерминированного полезного сигнала  $f(t)$  и случайной помехи  $m(t)$ , являющейся реализацией стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием. Покажем, что в этом случае для оценки динамической точности можно применить частотные методы.

Найдем дисперсию процесса на выходе

$$D_y = M \left\{ \left| y(t, \alpha) - \int_{-\infty}^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau \right|^2 \right\} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau_1; \alpha) k(\tau_2; \alpha) R_m(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |K(j\omega, \alpha)|^2 S_m(\omega) d\omega,$$

где  $k(\tau, \alpha) \doteq K(p, \alpha)$ ,  $R_m(\tau)$  — корреляционная функция случайного процесса с реализацией  $m(t)$ ,  $S_m(\omega)$  — спектральная плотность того же процесса. Найдем дисперсию выходного процесса при случайных независимых вариациях параметров относительно номинальных значений  $\alpha_0$ :

$$D_y = M \left\{ [y(t, \alpha_0) + \Delta y(t) - \int_{-\infty}^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau]^2 \right\} = D_y(\alpha_0) + \Delta D_y,$$

где  $\Delta D_y = M[\Delta y^2]$ . Теперь оценим  $\Delta D_y$ , используя формулу (5):

$$\begin{aligned} \Delta D_y \simeq & \sum_{i=1}^n \{M[h_i(t)]\}^2 D_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n D_{\alpha_i} \int_0^\infty \int_0^\infty k_i(\tau_1, \alpha_0) k_i(\tau_2, \alpha_0) \times \\ & \times R_m(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \sum_{i=1}^n \{M[h_i(t)]\}^2 D_{\alpha_i} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n D_{\alpha_i} \int_0^\infty |K_i(j\omega, \alpha_0)|^2 S_m(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

В частности, если  $f(t)$  — единичная функция, то

$$\begin{aligned} \Delta D_y = & \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n D_{\alpha_i} \left[ \int_0^\infty \operatorname{Re} K_i(j\omega, \alpha_0) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \right]^2 + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n D_{\alpha_i} \int_0^\infty |K_i(j\omega, \alpha_0)|^2 S_m(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

*Пример.* Рассмотрим систему автоматического регулирования, прямая цепь которой состоит из последовательного соединения корректирующего звена и элемента с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{K}{p^2(T_1 p + 1)} \quad (K=50 \text{ сек}^{-2}, \quad T_1=0,04 \text{ сек}).$$

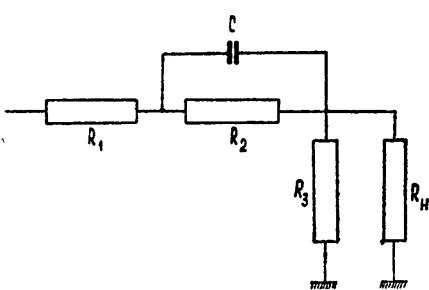


Рис. 1.

Оценим изменения логарифмической частотной характеристики системы в разомкнутом состоянии за счет возможного разброса параметров корректирующего звена с передаточной функцией

$$W_\Phi(p) = L \frac{T_2 p + 1}{T_3 p + 1} \quad (L^{-1}=6,4,$$

$$T_2=0,55 \text{ сек}, \quad T_3=0,12 \text{ сек}).$$

Корректирующее звено реализовано на  $RC$ -элементах (рис. 1) при следующих значениях параметров:

$$R_1 = 40 \text{ к}\Omega \quad (\pm 20\%), \quad R_2 = 500 \text{ к}\Omega \quad (\pm 5\%),$$

$$R_3 = 150 \text{ к}\Omega \quad (\pm 5\%), \quad R_H = 300 \text{ к}\Omega \quad (\pm 10\%),$$

$$C = 1,1 \text{ мкФ} \quad (\pm 20\%).$$

1) Построим функции влияния по  $R$ - и  $C$ -элементам. Для этого сначала найдем функции чувствительности по параметрам  $T_2, T_3, L$ :

$$\frac{\partial(\ln W)}{\partial(\ln T_2)} = \frac{\partial(\ln W_\Phi)}{\partial(\ln T_2)} = \frac{T_2 p}{T_2 p + 1}, \quad \frac{\partial(\ln W)}{\partial(\ln L)} = 1,$$

$$\frac{\partial(\ln W)}{\partial(\ln T_3)} = -\frac{T_3 p}{T_3 p + 1},$$

где  $W = W_1 W_\Phi$ . Соответствующие им функции влияния изображены на рис. 2.

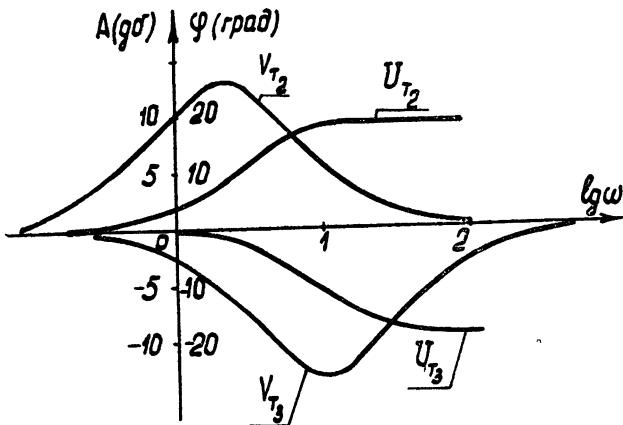


Рис. 2.

Определим значения логарифмических частных производных  $T_2, T_3, L$  по параметрам  $R_1, R_2, R_3, R_H, C$  с независимыми вариациями в точке  $R_1^0=40 \text{ ком}, R_2^0=500 \text{ ком}, R_3^0=150 \text{ ком}, R_H^0=300 \text{ ком}, C^0=1,1 \text{ мкФ}$ ,

$$T_2 = CR_2, \quad T_3 = T_2 \left[ 1 - LR_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_H} \right) \right],$$

$$L^{-1} = (R_1 + R_2) \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_H} \right) + 1.$$

Отсюда

$$\left[ \frac{\partial(\ln T_2)}{\partial(\ln R_2)} \right]_0 = \left[ \frac{\partial(\ln T_2)}{\partial(\ln C)} \right]_0 = 1, \quad \left[ \frac{\partial(\ln T_2)}{\partial(\ln R_1)} \right]_0 = \left[ \frac{\partial(\ln T_2)}{\partial(\ln R_3)} \right]_0 = \left[ \frac{\partial(\ln T_2)}{\partial(\ln R_H)} \right]_0 = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial(\ln T_3)}{\partial(\ln R_1)} \right]_0 = \left[ \frac{\partial(\ln T_3)}{\partial(\ln R_2)} \right]_0 = 0,22, \quad \left[ \frac{\partial(\ln T_3)}{\partial(\ln R_3)} \right]_0 = 0,38,$$

$$\left[ \frac{\partial(\ln T_3)}{\partial(\ln R_H)} \right]_0 = 0,19, \quad \left[ \frac{\partial(\ln T_3)}{\partial(\ln C)} \right]_0 = 1, \quad \left[ \frac{\partial(\ln L)}{\partial(\ln R_1)} \right]_0 = -0,064,$$

$$\left[ \frac{\partial(\ln L)}{\partial(\ln R_2)} \right]_0 = -0,78, \quad \left[ \frac{\partial(\ln L)}{\partial(\ln R_3)} \right]_0 = 0,57, \quad \left[ \frac{\partial(\ln L)}{\partial(\ln R_H)} \right]_0 = 0,29.$$

Функции чувствительности по элементам цепи определяем из формулы

$$S_{\alpha_l}^W(j\omega, \alpha_0) = \left[ \frac{\partial(\ln W)}{\partial(\ln T_2)} \frac{\partial(\ln T_2)}{\partial(\ln \alpha_l)} \right]_{\alpha=\alpha_0} + \\ + \left[ \frac{\partial(\ln W)}{\partial(\ln T_3)} \frac{\partial(\ln T_3)}{\partial(\ln \alpha_l)} \right]_{\alpha=\alpha_0} + \left[ \frac{\partial(\ln L)}{\partial(\ln \alpha_l)} \right]_{\alpha=\alpha_0},$$

где  $\alpha(R_1, R_2, R_3, R_H, C)$ .

Функции  $u_i(\omega, \alpha_0)$  и  $v_i(\omega, \alpha_0)$ , построенные согласно формулам (3) и (4), приведены на рис. 3.

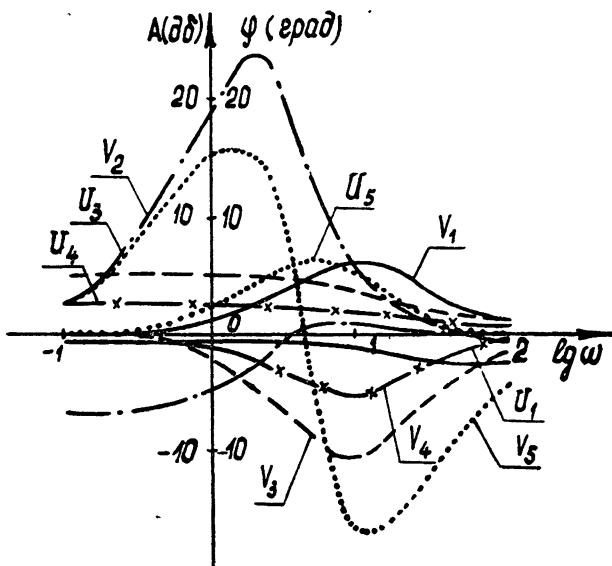


Рис. 3.

2) По формулам (1) и (2) находим значения  $\Delta A$  и  $\Delta \phi$  для двух случаев (рис. 4):

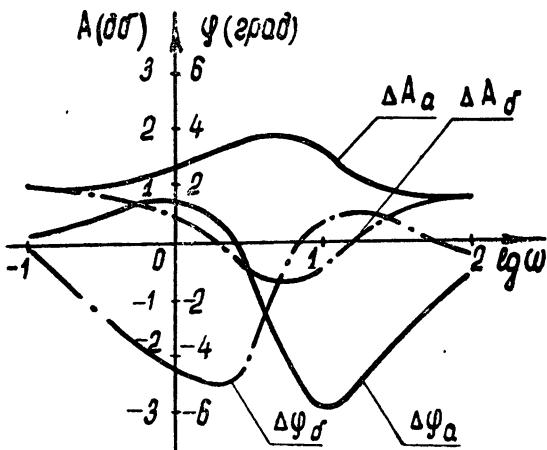


Рис. 4.

$$a) \frac{\delta R_1}{R_1^0} = -0,2, \quad \frac{\delta R_2}{R_2^0} = -0,05, \quad \frac{\delta R_3}{R_3^0} = 0,05, \quad \frac{\delta R_H}{R_H^0} = 0,1, \quad \frac{\delta C}{C^0} = 0,2;$$

$$б) \frac{\delta R_1}{R_1^0} = -0,2, \quad \frac{\delta R_2}{R_2^0} = -0,05, \quad \frac{\delta R_3}{R_3^0} = 0,05, \quad \frac{\delta R_H}{R_H^0} = 0,1, \quad \frac{\delta C}{C^0} = -0,2.$$

3) Вычисляем предельное изменение  $\omega_c$  относительно его номинального значения  $\omega_{c0}=3,7 \text{ сек}^{-1}$  по формуле (5) при  $K_A^c=27 \text{ дБ/дек}$ :

$$\frac{\Delta \omega_c \text{ пред}}{\omega_{c0}} = \pm 0,16.$$

Затем находим предельное изменение запасов по амплитуде и по фазе:

$$\Delta A_z \text{ пред} = \pm 4 \text{ дБ}, \quad \Delta \varphi_z \text{ пред} = \pm 5^\circ.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Быховский, Основы динамической точности электрических и механических цепей, изд. АН СССР, М., 1958.
2. Ш. Чанг, Синтез оптимальных систем автоматического управления, изд. Машиностроение, М., 1964.
3. Р. Томович, У. Карплюс, Быстродействующие аналоговые вычислительные машины, изд. Мир, М., 1964.
4. П. В. Кокотович, Автоматика и телемеханика, 25, 1670 (1964).
5. М. Л. Быховский, Техническая кибернетика, № 6, 130 (1964).
6. D. M. Mitrovic, AIEE Trans. Appl. and Industry, 77, 476 (1958).
7. D. D. Silijak, IEEE Trans. Appl. and Industry, 74, 314 (1964).
8. Г. Боде, Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ИЛ, М., 1948.
9. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
10. П. В. Кокотович, Р. С. Рутман, Автоматика и телемеханика, 26, 730 (1965).

Тульский политехнический институт

Поступила в редакцию  
17 июня 1965 г.

### ON FREQUENCY METHODS OF ANALYSIS OF CHARACTERISTICS SENSITIVITY FOR LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

*M. V. Morgulis, S. V. Shil'man*

The sensitivity is investigated of linear dynamic systems by the logarithmic frequency characteristics.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 538.56 : 519.25

### СРЕДНЕЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ С ХАОСТИЧЕСКИМИ АНИЗОТРОПНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин

В заметке обобщаются результаты работ [1–3] по электродинамике сильно-неоднородных хаотических сред на случай среды с анизотропными неоднородностями. (Отметим, что эффекты, связанные с анизотропией слабых неоднородностей, рассматривались в работе [4] методом возмущений.).

Среднее поле в случайно-неоднородной среде описывается с помощью эффективной диэлектрической проницаемости. Здесь мы рассмотрим случай изотропной среды с анизотропными неоднородностями. Исходя из результатов работ [2, 3], можно показать, что эффективная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega)$  выражается формулами

$$\begin{aligned}\epsilon_{11}^{\text{эфф}}(\omega) &= \epsilon_{22}^{\text{эфф}}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{2}{3} \xi_{11}^{\text{эфф}}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \xi_{11}^{\text{эфф}}\right)^{-1}, \\ \epsilon_{33}^{\text{эфф}}(\omega) &= \epsilon_0 \left(1 + \frac{2}{3} \xi_{33}^{\text{эфф}}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \xi_{33}^{\text{эфф}}\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь величина  $\epsilon_0$  определяется из уравнения [2]

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \xi = 3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}. \quad (2)$$

Формулы (1) получены в предположении, что функция корреляции  $B_\xi(r)$  флуктуаций величины  $\xi$  имеет два масштаба ( $l_1$  вдоль осей  $x$  и  $y$ ,  $l_2$  вдоль оси  $z$ ). Кроме того, в (1) мы пренебрегли пространственной дисперсией, связанной с неоднородностью среды [2]. Тензор  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$  определяется из выражения

$$\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k) = \frac{1}{k_0^2 \epsilon_0} \int Q_{ij}(r) e^{-ikr} dr, \quad (3)$$

где  $Q_{np}(r)$  выражается бесконечным рядом [2, 3]. Однако в случае мелкомасштабных неоднородностей ( $k_0 l \ll 1$ ) можно ограничиться первым членом ряда для  $Q_{np}(r)$  и записать

$$\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k=0) = -k_0^2 \epsilon_0 \langle \xi^2 \rangle (2\pi)^{-3} \int \Phi_\xi(p) G_{ij}^{0'}(p) dp. \quad (4)$$

В этом выражении  $G_{ij}^{0'}(p)$  — спектр регулярной части функции Грина электрического поля [2, 3, 5]:

$$G_{ij}^{0'}(p) = \frac{\delta_{ij}}{k_0^2 \epsilon_0 - p^2} - \frac{1}{4\pi k_0^2 \epsilon_0} \left( \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} - \frac{4\pi p_i p_j}{p^2 - k_0^2 \epsilon_0} \right) \quad (5)$$

( $\langle \xi^2 \rangle \Phi_\xi(p)$  — спектр корреляционной функции величины  $\xi(r)$ ;  $k_0 = \omega/c$ ).

В рассматриваемом приближении результаты фактически не зависят от конкретного вида функции корреляции величины  $\xi$ . Для простоты будем считать

$$B_\xi = \langle \xi^2 \rangle \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{l_1^2} - \frac{z^2}{l_2^2} \right),$$

$$\Phi_\xi(p) = \pi^{3/2} l_1^2 l_2 \exp \left[ -\frac{l_1^2}{4} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{l_2^2}{4} p_z^2 \right].$$

Подставляя это значение в (4), получаем

$$\begin{aligned}\xi_{11}^{\text{эфф}} &= \xi_{22}^{\text{эфф}} = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{3} \Phi_1(\alpha) + \frac{k_0^2 \varepsilon_0 l_1 l_2 \langle \xi^2 \rangle}{2} \Phi_2(\alpha) + i \sqrt{\pi} \frac{k_0^3 \varepsilon_0^{3/2} l_1^2 l_2 \langle \xi^2 \rangle}{6}, \\ \xi_{33}^{\text{эфф}} &= \frac{\langle \xi^2 \rangle}{3} \Phi_3(\alpha) + \frac{k_0^2 \varepsilon_0 l_1 l_2 \langle \xi^2 \rangle}{2} \Phi_4(\alpha) + i \sqrt{\pi} \frac{k_0^3 \varepsilon_0^{3/2} l_1^2 l_2 \langle \xi^2 \rangle}{6},\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha) &= \frac{3}{2} \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \left( \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} - \arccos \alpha \right) - \frac{1}{2}, \\ \Phi_2(\alpha) &= \frac{1}{2(1-\alpha^2)^{3/2}} (\arccos \alpha - \alpha \sqrt{1-\alpha^2}) + \frac{\arcsin \sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \\ \Phi_4(\alpha) &= \frac{2 \arcsin \sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{(1-\alpha^2)^{3/2}} (\alpha \sqrt{1-\alpha^2} - \arccos \alpha), \\ \Phi_3(\alpha) &= -2\Phi_1(\alpha), \quad \alpha = l_2/l_1.\end{aligned}$$

Отметим особенности полученных результатов.

1) Из оценок пределов применимости выражений (1)–(6) следует, что должно выполняться неравенство

$$|\xi_{ij}^{\text{эфф}}| \ll 1. \quad (7)$$

2) Выражение (6) представляет собой ряд по степеням малого параметра  $k_0 l$ . В отличие от случая изотропных неоднородностей в (6) имеется член с нулевой степенью этого параметра. Из (7) следует, что при наличии сильных флуктуаций ( $\langle \xi^2 \rangle \sim 1$ ) полученное решение справедливо лишь при слабой анизотропии неоднородностей. В этом случае параметр  $\alpha$  близок к единице и квазистатическая часть тензора  $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$  (члены, не зависящие от  $k_0 l$ ), вычисленная с точностью до членов порядка  $(\alpha-1)$ , имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{\text{эфф}} &= \varepsilon_{22}^{\text{эфф}} \simeq \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{2}{15} \langle \xi^2 \rangle \frac{l_2 - l_1}{l_1} \right), \\ \varepsilon_{33}^{\text{эфф}} &\simeq \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{4}{15} \langle \xi^2 \rangle \frac{l_2 - l_1}{l_1} \right).\end{aligned}$$

При слабых флуктуациях ( $\langle \xi^2 \rangle \simeq \langle \Delta \varepsilon^2 \rangle \langle \varepsilon \rangle^{-2} \ll 1$  [2]) формулы (1)–(6) описывают поле в условиях произвольной анизотропии. При этом возможны два случая:  $\alpha \gg 1$  и  $\alpha \ll 1$ . В первом случае имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{\text{эфф}} &= \varepsilon_{22}^{\text{эфф}} \simeq \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{6} \langle \xi^2 \rangle \right) \simeq \langle \varepsilon \rangle - \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}, \\ \varepsilon_{33}^{\text{эфф}} &\simeq \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \langle \xi^2 \rangle \right) \simeq \langle \varepsilon \rangle.\end{aligned}\quad (8)$$

В условиях, когда  $\alpha \ll 1$ , формулы (1) принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{\text{эфф}} &= \varepsilon_{22}^{\text{эфф}} \simeq \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \langle \xi^2 \rangle \right) \simeq \langle \varepsilon \rangle, \\ \varepsilon_{33}^{\text{эфф}} &\simeq \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{2}{3} \langle \xi^2 \rangle \right) \simeq \langle \varepsilon \rangle - \frac{\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}.\end{aligned}\quad (9)$$

3) Из формулы (1) следует, что анизотропия неоднородностей не влияет на продольные колебания, дисперсионное уравнение для которых имеет вид:  $\varepsilon_0(\omega) = 0$ . Существенное влияние она оказывает, прежде всего, на квазистатическую часть  $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ , которая может быть получена при решении соответствующей электростатической задачи [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 46, 1397 (1964).
2. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, 656 (1965).
3. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 39 (1966).
4. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 1015 (1959).

5. В. М. Финкельберг, ЖТФ, 34, 509 (1964).  
 6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
28 мая 1965 г.

УДК 533.951

## О ВОЗВУЖДЕНИИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

С. И. Ханкина, В. М. Яковенко

Низкочастотные электромагнитные колебания в полупроводниковой электронно-дырочной плазме, помещенной в постоянное электрическое поле, исследовались в [1]. Однако авторами работы [1] не учитывалась зависимость частоты соударений электронов от их энергии, т. е. от электрического поля  $E_0$ . Учет этой зависимости в ряде случаев приводит к возникновению отрицательной дифференциальной проводимости [2, 3]. В этом состоянии электроны проводимости при взаимодействии с переменным полем относительно низкой частоты ( $\omega \ll \delta$ , где  $\nu$  — средняя эффективная частота соударений,  $\delta$  — малый параметр порядка отношения массы носителя к массе решетки) отдают энергию полю и благодаря такому взаимодействию амплитуда поля усиливается.

Вопрос об усилении колебаний в результате появления в полупроводнике отрицательной дифференциальной проводимости обсуждался в [4]. В частности, в [4] показана возможность усиления (или генерации) продольных волн ( $k \parallel E_0$ ,  $k$  — волновой вектор) с законом дисперсии  $\omega = k\mathbf{v}_0 + 4\pi i\sigma_{\text{диф}}$  ( $\mathbf{v}_0$  — скорость дрейфа носителей,  $\sigma_{\text{диф}}$  — дифференциальная проводимость полупроводника).

При наложении постоянного магнитного поля  $H_0$ , перпендикулярного  $E_0$ , нормальные волны перестают быть чисто продольными и поперечными. Для получения спектра колебаний и величины затухания этих нормальных волн (при  $k \parallel E_0$ ) воспользуемся дисперсионным соотношением:

$$\left| k^2 \delta_{lk} - k_l k_k - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{lk} \right| = 0, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{lk} = \epsilon \delta_{lk} + 4\pi i \omega^{-1} \sigma_{lk}$ ,  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная решетки,  $\sigma_{lk}$  — проводимость среды, обусловленная электронами,  $\sigma_{lk}$  определяется из решения кинетического уравнения при учете зависимости частоты соударений электронов с различного рода объектами (фононы, заряженные примеси и т. д.) от энергии [3, 4].

Выбирая систему координат таким образом, что  $H_0 \parallel 0z$ ;  $k \parallel E_0 \parallel 0y$ , для тензора проводимости получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_0 \frac{q-r}{q+r} \Gamma^2 \left( \frac{5}{2} \right) \left[ k^2 v_0^2 - \omega^2 \frac{\nu^2}{\omega_H^2} \frac{q+r}{q-r} \frac{\Gamma^2(5/2-q)}{\Gamma^2(5/2)} \right] \times \\ &\quad \times \left[ \Gamma \left( \frac{5}{2} - q \right) \Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega (k\mathbf{v}_0 - \omega) \right]^{-1}, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_0 \frac{\nu}{\omega_H} \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2+q)} \left( \frac{2q}{r+q} k\mathbf{v}_0 - \omega \right) (k\mathbf{v}_0 - \omega)^{-1}, \\ \sigma_{yx} &= \sigma_0 \frac{\nu}{\omega_H} \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2+q)} \left( \omega - \frac{2r}{r+q} k\mathbf{v}_0 \right) (k\mathbf{v}_0 - \omega)^{-1}, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_0 \frac{q-r}{q+r} \frac{\nu^2}{\omega_H^2} \frac{\Gamma(5/2-q)}{\Gamma(5/2+q)} \frac{\omega}{k\mathbf{v}_0 - \omega}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{\sigma_0}{\omega} \left( \omega - k\mathbf{v}_0 \frac{\Gamma^2(5/2)}{\Gamma(5/2+q) \Gamma(5/2-q)} \right), \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\sigma_0 = e^2 n_0 / m \nu$ ,  $v_0 = \frac{\sigma_0}{e n_0} \frac{\nu^2}{\omega_H^2} \frac{\Gamma(5/2-q)}{\Gamma(5/2)}$ ,  $E_0$  — дрейфовая скорость электронов,  $\omega_H = e H_0 / mc$  — циклотронная частота,  $e$  — заряд,  $m$  — эффективная масса.

тивная масса,  $n_0$  — концентрация,  $\nu = \nu_0(T)(T/\theta_0)^q$  — эффективная частота соударений электронов,  $T$  — температура решетки,  $\theta_0$  — температура электронов, определяемая из уравнения баланса энергии в стационарном состоянии ( $\theta_0 \gg T$ ) [3]:

$$\sigma_{ik}^0 E_{0l} E_{0k} = n_0 \frac{2A(T)}{\nu^\pi T} \left( \frac{\theta_0}{T} \right)^r \Gamma \left( r + \frac{3}{2} \right), \quad (2a)$$

где  $A(T)(\theta_0/T)^r$  — коэффициент диффузии,  $\sigma_{ik}^0$  — тензор проводимости среды в стационарном состоянии (выражения для  $\sigma_{ik}^0$  можно получить из формулы (2) при  $k=0$ ),  $q$  и  $r$  — числа, зависящие от характера рассеяния электронов в пространстве импульсов и энергии [3]. Выражения для  $\sigma_{ik}$  получены при условии, что

$$eE_0/\theta_0 \gg k, \quad kv_0, \omega \ll \delta\nu, \quad \nu \ll \omega_H.$$

При  $k^2 \gg \omega^2 c^{-2} \epsilon$  дисперсионные соотношения имеют вид

$$\omega_1 = kv_0 \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2-q)} - i \frac{k^2 c^2}{4\pi\sigma_0}, \quad (3)$$

$$\omega_2 = kv_0 - \frac{ik^2 c^2}{4\pi\sigma_0} \frac{r-q}{r+q} \frac{\Gamma(5/2-q)\Gamma(5/2+q)}{\Gamma^2(5/2)}. \quad (4)$$

Если  $r+q > 0, r-q < 0$  (условие возникновения отрицательной дифференциальной проводимости), то происходит нарастание колебаний (4) с инкрементом

$$\xi = \left| \frac{ik^2 c^2}{4\pi\sigma_0 v_0} \frac{r-q}{r+q} \frac{\Gamma(5/2-q)\Gamma(5/2+q)}{\Gamma^2(5/2)} \right|. \quad (5)$$

Величина  $\xi \ll 1$ , поскольку  $4\pi\sigma_0 v_0 c^{-2} \gg k$ . Условие  $r+q > 0, r-q < 0$  может быть реализовано, например, в полупроводниках типа  $\text{InSb}$ , когда передача энергии происходит при рассеянии на оптических фононах ( $r = -1/2$ ), а импульса — на заряженных примесях ( $q = 3/2$ ) [3].

Следует отметить, что в некоторых случаях к появлению новых волн приводит учет двух типов носителей. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда внешнее магнитное поле отсутствует, а  $k \parallel E_0$ . Тогда дисперсионное уравнение для продольной волны имеет вид

$$\epsilon + 4\pi i \sum_{\alpha} \frac{\sigma^{\alpha}}{\omega - k v_0^{\alpha}} = 0, \quad (6)$$

где

$$\sigma^{(\alpha)} = \sigma_0^{(\alpha)} \frac{\Gamma(5/2+q_{\alpha})}{\Gamma(5/2)} \frac{r_{\alpha}+q_{\alpha}}{r_{\alpha}-q_{\alpha}},$$

$$v_0^{(\alpha)} = \frac{e_{\alpha} n_{\alpha}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha}} E_0,$$

значения  $\alpha = 1, 2$  — характеризуют тип носителей.

Решая уравнение (6) относительно  $\omega$ , получим

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{1}{2\epsilon} \left[ k \left( v_0^{(1)} + v_0^{(2)} \right) \epsilon - 4\pi i (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \right] \pm \\ &\pm \frac{1}{2\epsilon} \left[ k^2 \epsilon^2 (v_0^{(1)} - v_0^{(2)})^2 - 8\pi i \epsilon k (v_0^{(1)} - v_0^{(2)}) (\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}) - 16\pi^2 (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)})^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае крупномасштабных пульсаций ( $k \approx 2\pi n/a$ ,  $n$  — целое число,  $a$  — размер об разца)

$$|kv_0^{(1)}|, |kv_0^{(2)}| \ll |4\pi i (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)})|,$$

$$\omega_1 = \frac{k (v_0^{(1)} \sigma^{(2)} + v_0^{(2)} \sigma^{(1)})}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}} - i \frac{k^2 \epsilon (v_0^{(1)} - v_0^{(2)})^2}{16\pi (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)})}, \quad (8)$$

$$\omega_2 = \frac{k (v_0^{(1)} \sigma^{(1)} + v_0^{(2)} \sigma^{(2)})}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}} - 4\pi i (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}). \quad (9)$$

Если  $\sigma^{(1)} < 0$  (это реализуется при  $r^{(1)} + q^{(1)} > 0, r^{(1)} - q^{(1)} < 0$  и  $|\sigma^{(1)}| > \sigma^{(2)}$ ), то колебания, описываемые (8), (9), становятся нарастающими. Из выражений (8), (9)

видно, что коэффициент нарастания колебаний (8) значительно меньше коэффициента нарастания колебаний (9). В связи с этим в реальных условиях наблюдение колебаний (8), по-видимому, затруднено.

Совершенно аналогичная картина возникает, когда  $\sigma^{(1)} > 0$ ,  $\sigma^{(2)} < 0$  и  $|\sigma^{(2)}| > \sigma^{(1)}$ .

Для мелкомасштабных пульсаций ( $|k\psi_0^{(1)}|, |k\psi_0^{(2)}| \gg |4\pi i(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)})|$ ) дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega_{1,2} = k\psi_0^{(1,2)} - \frac{4\pi i}{e} \sigma^{(1,2)}; \quad (10)$$

В этом случае при  $\sigma^{(1)} < 0$  или  $\sigma^{(2)} < 0$  колебания нарастают с малым инкрементом.

Таким образом, если  $\sigma^{(1)} < 0$ ,  $\sigma^{(2)} > 0$  и  $|\sigma^{(2)}| > |\sigma^{(1)}|$ , то, как это следует из формул (8), (9), крупномасштабные пульсации затухают со временем, а мелкомасштабные усиливаются.

В заключение авторы благодарят Ф. Г. Басса за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Баканов, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 48, 1656 (1965).
2. Ш. М. Коган, ФТТ, 4, 2474 (1962).
3. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ, 48, 275 (1965).
4. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, ЖЭТФ (в печати).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
16 августа 1965 г.

УДК 621.385.622

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛЕМ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В СТРОФОТРОНЕ

П. А. Бородовский, А. Ф. Булыгин

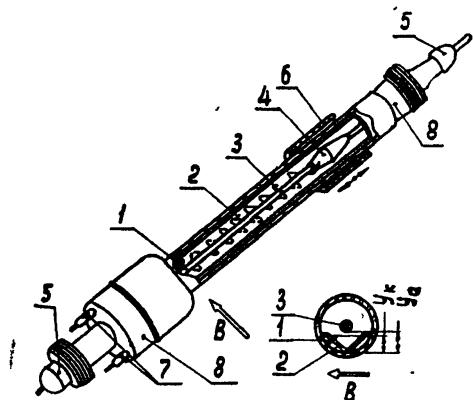
Взаимодействие электронного потока с полем бегущей волны в строфotronе рассмотрено в работах [1, 2]. В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального исследования макета строфотрона с переменной длиной пространства взаимодействия (рис. 1). Изменение длины пространства взаимодействия в пределах 20  $\div$  145 мм осуществляется перемещением коллектора вдоль лампы магнитным полем небольшого соленоида, надетого на баллон лампы.

Как показано в работе [1], при отборе ускоренных электронов на отражатель высокочастотная электронная мощность

$$P_e = \frac{2}{\pi} I_0 U_0 F(\xi_L),$$

Рис. 1. Строфotron с бегущей волной:

1—катод (ториевый вольфрам 0,15x3 мм);  
2—отражатель из константа толщиной 0,5 мм;  
3—ускоряющий электрод, молибден  $\varnothing=2$  мм,  
4—передвижной коллектор (коварп); 5—высокочастотные выводы энергии; 6—соленоид для перемещения коллектора; 7—выводы накала катода; 8—коваровые переходы.



где  $I_0$ ,  $U_0$  — ток и напряжение пучка,  $F(\xi_L) = \sinh \xi_L [1 - \sinh \xi_L \arccos (\tanh \xi_L)]$  при нулевом потенциале отражателей относительно катода,  $\xi_L = \frac{\omega_e}{4v_z} \int_0^L \alpha(z) dz$ , где  $\omega_e$  — угловая

частота колебания электронов,  $v_z$  — скорость продольного дрейфа,  $\alpha(z) = \tilde{U}(z)/U_0$ ,  $\tilde{U}(z)$  — амплитуда ВЧ напряжения поля бегущей волны.

Величина параметра  $\xi_L$  зависит от напряжения на электродах лампы, тока пучка и длины пространства взаимодействия  $L$ . Функция  $F(\xi_L)$  имеет максимум при  $\xi_L \approx 0,61$ ; таким образом, при заданных напряжении и токе пучка максимальная мощность имеет место при некоторой оптимальной длине  $L_{\text{опт}}$ .

На рис. 2 приведены зависимости выходной мощности от длины пространства взаимодействия при различных токах пучка. С увеличением длины мощность возрастает и достигает максимума при определенной длине  $L_{\text{опт}}$ , а затем начинает уменьшаться. С увеличением тока пучка  $L_{\text{опт}}$  уменьшается. Ток коллектора  $I_{\text{кол}}$  с увеличением длины пространства взаимодействия вначале круто, а затем плавно уменьшается вследствие попадания на отражатель электронов, ускоренных высокочастотным полем:

$$I_{\text{кол}} = I_0 \frac{\pi - 2\theta}{2\pi}, \quad \theta = \arcsin \left[ \tanh \xi_L - \frac{\alpha_k}{\sinh(2\xi_L)} \right]$$

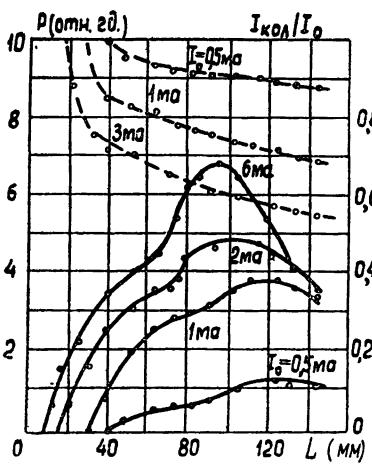


Рис. 2. Пунктирные кривые—зависимость  $I_{\text{кол}}/I_0$  от  $L$ , сплошные—зависимость  $P$  от  $L$  для  $B=1600$  Гц,  $U_a=700$  в,  $U_k=55$  в,  $f=1300$  МГц.

( $\alpha_k = U_k/U_0$ , где  $U_k$  — напряжение между катодом и отражателем). Поскольку отражатель находится под отрицательным потенциалом — 55 в относительно катода, генерация возникает с некоторой конечной длины  $L_0$ , когда появляется отбор электронов на отражатель. Величина «пусковой длины»  $L_0$  зависит от тока пучка  $I_0$  и при изменении  $I_0$  от 0,5 до 6 мА уменьшается от 40 до 10 мм.

Генерация возможна как на прямой, так и на встречной волне. Переход из режима работы на прямой волне к режиму работы на встречной волне сопровождается изменением частоты генерации на величину  $\omega_e \pi^{-1} 2v_z c^{-1}$ . Небольшие провалы в кривых мощности на рис. 2 обусловлены переходом из режима прямой волны в режим встречной волны.

Зависимости выходной мощности и частоты от напряжения между ускоряющим электродом и отражателем  $U_a$  приведены на рис. 3. При постоянном потенциале катода  $U_k = 100$  в с увеличением  $U_a$  мощность непрерывно возрастает. При изменении  $U_a$  за счет изменения потенциала катода мощность имеет ярко выраженный максимум. Как видно из рис. 3, оптимальный потенциал катода, при котором мощность максимальна, приблизительно равен 100 в для кривых при  $U_a - U_k = 1000; 1250; 1500$  в. Такая зависимость мощности от напряжения между катодом и отражателем в основном обусловлена тем, что при изменении  $U_k$  нарушается «нормальное» распределение электростатического поля в области катода и происходит расфокусировка электронного пучка. Ток на ускоряющий электрод при этом увеличивается за счет попадания электронов, вылетающих из катода, и мощность уменьшается.

Зависимость частоты от напряжения  $U_a$  при  $U_k = 100$  в удовлетворительно совпадает с расчетной:

$$f = \frac{2\omega_e}{2\pi} \approx 18,9 \frac{\sqrt{U_a}}{y_a} (\text{МГц}),$$

где  $U_a$  — в вольтах,  $y_a$  — в сантиметрах (см. рис. 1).

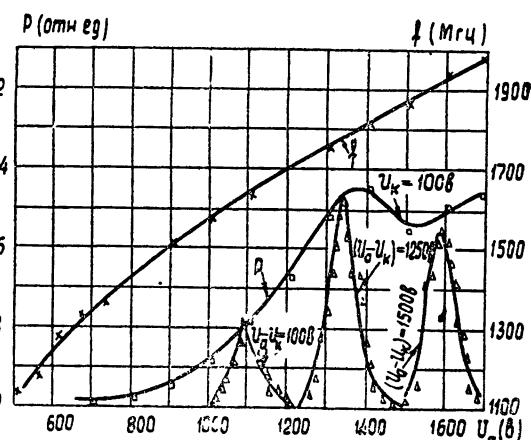


Рис. 3. Зависимости выходной мощности  $P$  и частоты  $f$  от ускоряющего напряжения  $U_a$  для  $B=1500$  Гц,  $L=80$  мм,  $I_0=1-3$  мА.

При токе пучка ниже пускового тока генерации лампа работает как узкополосный усилитель на частоте, удовлетворяющей условию синхронизма электронов с полем бегущей волны ( $\omega = 2\omega_e(1 \pm v_z/c)^{-1}$ ). Пусковой ток зависит от напряжения, магнитного поля и длины пространства взаимодействия. С увеличением длины пусковой ток должен уменьшаться обратно пропорционально  $L^2$  [2]. Эта зависимость хорошо подтверждается экспериментально (рис. 4) в области 20–80 м.м. При дальнейшем увеличении длины пусковой ток практически не меняется. Последнее объясняется тем, что при достижении некоторой оптимальной длины высокочастотная электронная мощность изменяется очень мало с увеличением длины до бесконечности [1, 3].

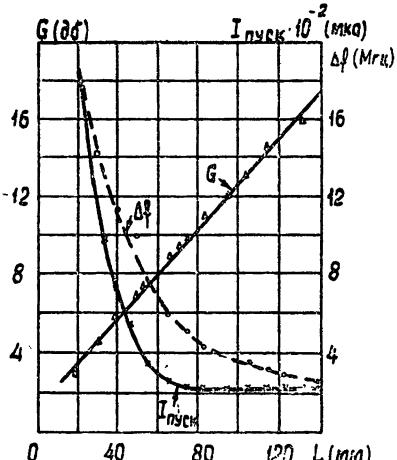


Рис. 4. Зависимости пускового тока  $I_{\text{пуск}}$ , коэффициента усиления  $G$  и полосы частот  $\Delta f$  от длины  $L$  для  $B = 1600 \text{ Гц}$ ,  $U_a = 775 \text{ в}$ ,  $U_k = 100 \text{ в}$ ,  $f = 1481 \text{ МГц}$ .

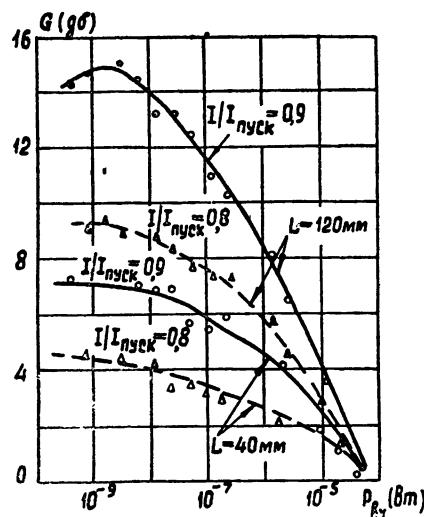


Рис. 5 Зависимость усиления  $G$  от мощности входного сигнала  $P$  для  $B = 1600 \text{ Гц}$ ,  $U_a = 775 \text{ в}$ ,  $U_k = 100 \text{ в}$ ,  $f = 1481 \text{ МГц}$ .

Усиление строфотрона с бегущей волной сильно зависит от тока, частоты и длины пространства взаимодействия. Как показано на рис. 4, коэффициент усиления  $G$  (в децибелах) линейно возрастает с увеличением длины, а полоса усиления  $\Delta f$  изменяется обратно пропорционально длине. Это соответствует теоретическим зависимостям, приведенным в работе [2]. Зависимости усиления от мощности входного сигнала при длинах пространства взаимодействия  $L = 40, 120 \text{ м.м.}$  и отношениях  $I_{\text{пуск}}/I_0 = 0,8; 0,9$  приведены на рис. 5. В области малых сигналов коэффициент усиления практически не зависит от мощности входного сигнала; при  $P_{\text{вх}} > 10^{-8} \text{ вт}$  с увеличением мощности входного сигнала коэффициент усиления падает до нуля.

Следует отметить, что при работе в режиме малого входного сигнала отбора электронов на отражатель не наблюдалось и усиление было обусловлено неизохронностью колебаний электронов [2]. Параметр неизохронности  $M \approx \gamma$ , где  $\gamma$  — коэффициент нелинейности, учитывающий отклонение распределения электростатического поля в плоскости колебаний от параболического закона. Для использованной нами системы электродов  $\gamma = 0,15$ .

Авторы выражают благодарность А. И. Щекотову за изготовление лампы.

## ЛИТЕРАТУРА

- П. А. Бородовский, Изв. Сиб. отд. АН СССР, № 11, 3 (1959).
- В. М. Боков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 826 (1960).
- С. И. Тетельбаум, Радиотехника и электроника, 2, 705 (1957).

## О ПРИВЕДЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ В КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ НА ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

М. А. Чубаров

Многочлен от нескольких переменных находится в канонической форме [1], если он не имеет подобных членов и расположен в лексикографическом порядке [2]. Приведение многочленов в каноническую форму используется при выполнении алгебраических и дифференциальных операций над ними, а также при расчете определителя с буквенными элементами [3].

Рассмотрим алгоритм для приведения многочленов в каноническую форму. Будем считать, что каждый одночлен записан в двух ячейках памяти, в первой из которых находится коэффициент со знаком, а во второй — показатели степеней букв этого одночлена [4]. Пусть имеется массив из  $N$  одночленов, находящийся в канонической форме («приведенный» массив), и «приводимый» одночлен, вторую ячейку которого обозначим через  $a$ . Пронумеровав вторые ячейки  $a_k$  одночленов приведенного массива, будем искать первое  $k$  ( $k=1 \dots N$ ), при котором  $[a] \geq [a_k]$ . Если такого  $k$  не существует, то приводимый одночлен пересыпается в ячейки, непосредственно следующие за последним одночленом приведенного массива. В случае, когда  $[a]$  равно некоторому  $[a_k]$ , коэффициент приводимого одночлена прибавляется к коэффициенту  $k$ -го одночлена; если получаемая сумма обращается в нуль, одночлены с  $(k+1)$ -го до  $N$ -го сдвигаются на две ячейки в сторону меньших номеров ячеек. При  $[a] > [a_k]$  одночлены с  $k$ -го до  $N$ -го сдвигаются на две ячейки в сторону больших номеров ячеек, и на освободившееся место засыпается приводимый одночлен.

Оценим среднее число сравнений  $c_1$  и среднее число пересылок кодов  $c_2$ , необходимых для приведения многочленов в каноническую форму в соответствии с описанным алгоритмом.

Рассмотрим множество всех одночленов  $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ , где показатели степеней  $r_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) не превышают некоторых целых чисел  $p_i$ . Поставим в соответствие каждому одночлену число  $a = r_1 r_2 \dots r_n$  (назовем его условно «степением» одночлена), записанное в системе счисления,  $i$ -ый разряд которой имеет основание  $p_i + 1$ . Очевидно, что количество различных одночленов равно  $m = \prod_{i=1}^n (p_i + 1)$ , а вероятность  $p$  существования для некоторого одночлена, подобного в приведенном массиве, составляет

$$p = \binom{l}{N-1} / \binom{m}{N} = \frac{N}{m},$$

где  $l = m - 1$ , а  $N \leq m$ .

Допустим, что в приведенном массиве имеется одночлен, подобный приводимому. Вероятность нахождения одночлена «степени»  $a$  на  $k$ -ом месте в приведенном массиве равна

$$p_k(a) = \binom{a}{N-k} \binom{l-a}{k-1} / \binom{l}{N-1},$$

т. е. распределение по «степеням»  $a$  гипергеометрическое [5]. Среднее число сравнений определяется выражением

$$c_1 = \frac{1}{l+1} \sum_{a=0}^l \sum_{k=1}^N (k+1) p_k(a).$$

Воспользовавшись соотношением

$$\sum_{k=1}^N k p_k(a) = N - a \frac{N-1}{l},$$

справедливость которого можно доказать по индукции, получим, что  $c_1 = (N+3)/2$ . Если при сложении коэффициентов приводимого и  $k$ -го приведенного одночленов ( $k = 1 \dots N$ ) сумма обращается в нуль, то среднее число пересылок кодов

$$c_2 = \frac{1}{l+1} \sum_{a=0}^l \sum_{k=1}^N 2(N-a) p_k(a) = N-1,$$

Предположим теперь, что приведенный массив не содержит одночлена, подобного приводимому. В этом случае

$$c_1 = \frac{1}{l+1} \sum_{a=0}^l \left\{ \sum_{k=1}^N (k+1) \binom{a}{N-k+1} \binom{l-a}{k-1} \binom{l}{N}^{-1} + N \binom{l-a}{N} \binom{l}{N}^{-1} \right\} = \\ = \frac{N+4}{2} - \frac{2}{N+1},$$

$$c_2 = \frac{1}{l+1} \sum_{a=0}^l \sum_{k=1}^N 2(N-k+1) \binom{a}{N-k+1} \binom{l-a}{k-1} \binom{l}{N}^{-1} = N - \frac{2N}{N+1}.$$

Считая одинаковыми времена выполнения операций сравнения и пересылок кодов, получим, что среднее число операций равно  $3N/2$ .

Заметим, что числа  $c_1$  и  $c_2$  зависят только от количества одночленов в приведенном массиве.

Число операций, необходимых для приведения многочлена в каноническую форму, максимально, когда многочлен не содержит подобных членов. В этом случае требуется в среднем  $3M(M-1)/4$  операций, где  $M$  — число членов в многочлене.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. S. Brown, B.S.T.J., 42, 2081 (1963).
2. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Гостехиздат, М., 1956.
3. М. А. Чубаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 615 (1965).
4. Л. А. Люстерник, А. А. Абрамов, В. И. Шестаков, М. Р. Шура-Бура,  
Решение математических задач на автоматических цифровых машинах, изд АН  
СССР, М., 1952.
5. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, изд. Мир, М., 1964.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
22 февраля 1965 г.