ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
1083	6 снизу	u_α	u^α
1086	5 сверху	... $\overline{\nu}$.	... ν.
1113	10 сверху	... $\cos\theta \sin(2\overline{\varphi})$ ...	... $\cos\theta \sin(2\varphi)$ ...
табл. 1	10 сверху	... 0,2532 ...	... 0,02532 ...
1115 табл 3	1 сверху	β_1 0,1 ..	β_1 0,01 ...
	15 сверху	... $(ng)[jn]$ —	... $(ng)[\gamma n]$ —
1130	12 сверху	... $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik^\alpha x^x} dx$ ...	... $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^\alpha x^x} dx$ ...
1147	17 сверху	$\chi = \chi$	$\chi = \chi_0$
1177	11 сверху	($R_н = 70$ ом)	($R_н = 75$ ом)
1200	1 сверху	$... = \frac{2\varepsilon^{2/3} e^{-\varepsilon/kT_e}}{\sqrt{\pi (kT_e)^5}} =$.	$... = \frac{2\varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/kT_e}}{\sqrt{\pi (kT_e)^5}} =$ ...
1219	19 снизу	... $T_0 - T = 0 (\mu T_0)$.	... $T_0 - T = O (\mu T_0)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Разин В. А., Хрулев В. В. Деполяризация космического радиоизлучения из-за дисперсии фарадеевского вращения плоскостей поляризаций радиоволн . 1063
Андреев И. В. Среднее поле волны в среде со случайными неоднородностями 1069
Фукс И. М. Отражение и преломление волны произвольной формы на криволинейной границе раздела 1078
Бойкова Р. Ф. и Фрадкин Э. Е. Распространение сильного монохроматического излучения в средах с различными типами уширения спектральной линии 1089
Жевакин С. А., Наумов А. П. Некоторые вопросы расчета и измерений поглощения миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн в атмосферных парах воды 1100
Бажанова А. Е. Сложный допплер-эффект в плазме 1110
Калмыков А. И., Островский И. Е., Розенберг А. Д., Фукс И. М. О влиянии структуры морской поверхности на пространственные характеристики рассеянного ею радиоизлучения 1117
Чаевский Е. В. Энергетические характеристики поля, рассеянного шероховатой площадкой 1128
Алексин В. Ф., Пахомов В. И., Степанов К. Н. О некоторых особенностях излучения электромагнитных волн в анизотропных средах с дисперсией . . 1135
Литвак А. Г. О самофокусировке электромагнитных волн в плазме в сильном магнитном поле 1148
Бондарев Б. И. Индуцированное излучение при больших плотностях фотонов 1155
Малахов А. Н. Влияние естественных шумов автогенераторов на их взаимную синхронизацию 1160
Богатырев Ю. К. Образование и развитие ударных электромагнитных волн в линиях передачи с сегнетоэлектриками 1171
Мишустин Б. А. Излучение из раскрыва круглого волновода с бесконечным фланцем 1178
Булгаков А. К., Бусев Н. И., Рысаков В. М. Переходные процессы в линейных антеннах 1187
Сошников В. Н., Трехов Е. С. Об удельной мощности гармоник поля в высокочастотном разряде при учете их нелинейного взаимодействия 1196
Романов Ю. А. Коллективные потери в анизотропных кристаллах 1203
Гудзенко Л. И., Чертопруд В. Е. Анализ нерегулируемого синхронизованного автоколебательного объекта 1213
Кан В. Л. и Кельзон А. С. Качественное исследование траекторий пропорциональной навигации 1229

Краткие сообщения и письма в редакцию

Конторович В. М. Рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях скорости и излучение флуктуирующих сред во внешних полях 1244
Орлова Н. С. Электромагнитные волны, направляемые диэлектрическим слоем в плазменной среде 1246
Сараев С. И. Об измерении спектральной плотности колебаний генераторов СВЧ 1248
Дудник Р. А. Анализ дисперсионного уравнения лампы с поперечным взаимодействием типа «М» (случай широких систем) 1250
Эйнгорин М. Я. О нахождении длины дедуктивной цепочки рециркуляционных запоминающих устройств и генераторов 1252

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. V, № 4, 1965 1254
Содержание т. VIII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1965 г. 1256
Именной указатель т. VIII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1965 г. 1262

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 523.164.4 : 621.396.628

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ-ЗА ДИСПЕРСИЙ ФАРАДЕЕВСКОГО ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ РАДИОВОЛН

В. А. Разин, В. В. Хрулев

Рассматривается деполяризация космического радиоизлучения из-за дисперсии фарадеевского вращения плоскостей поляризации радиоволн и конечной ширины полосы пропускания аппаратуры. Получены общие выражения, связывающие позиционный угол и степень поляризации радиоизлучения с частотной характеристикой приемника. Для ряда распространенных схем результаты вычислений степени поляризации даны в виде формул и графиков. Пока степень поляризации имеет заметную величину ($\geqslant 0{,}05$), позиционный угол меняется всего лишь на несколько градусов при изменении ширины полосы пропускания приемника в пределах $1 \div 2\%$ от резонансной частоты.

При распространении линейно поляризованного радиоизлучения в межзвездной среде, межпланетном пространстве и земной ионосфере плоскости поляризации радиоволн испытывают вращение (эффект Фарадея). Угол поворота плоскости поляризации обратно пропорционален квадрату частоты; поэтому при достаточно большой величине фарадеевского вращения радиоволны с частотами в пределах полосы пропускания аппаратуры в месте приема оказываются поляризованными в разных плоскостях и радиоизлучение деполяризуется [1–3]. Знание того, насколько уменьшается при этом степень поляризации космического радиоизлучения, необходимо для правильного выбора ширины полосы пропускания приемной аппаратуры или нахождения пределов изменения ширины полосы пропускания, если поляризованные измерения проводятся методом модуляции последней [2, 3]. Кроме того, зная зависимость степени поляризации от ширины полосы пропускания аппаратуры, можно определить величину фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения на его пути от источников до наблюдателя [4].

Деполяризация радиоизлучения из-за дисперсии фарадеевского вращения обсуждалась в работах [2–5]. В этих работах рассмотрено несколько простейших случаев: частотная характеристика аппаратуры аппроксимировалась резонансной кривой одиночного контура [2, 3], гауссовой кривой [4], принималась прямоугольной [5], причем интенсивность излучения в полосе пропускания аппаратуры считалась постоянной. В настоящей статье этот вопрос анализируется более подробно. В частности, степень поляризации радиоизлучения вычисляется в предположении, что полоса пропускания аппаратуры определяется несколькими каскадами, настроенными на одну частоту, или группами из двух и трех взаимно расстроенных каскадов.

Вычислить фактор, определяющий деполяризацию космического радиоизлучения из-за дисперсии эффекта Фарадея, в общем виде довольно трудно, так как плоскости поляризации радиоволн, приходящих из разных направлений в пределах главного лепестка диаграммы

направленности антенны, поворачиваются на разные углы. Следует учесть, однако, что разность $\Delta\Psi$ углов поворота плоскостей поляризации волн с частотами, отличающимися на $\Delta\nu$, в случае, когда $\Delta\nu \ll \nu_0$ (ν_0 — средняя частота), равна $2\Psi_0\Delta\nu/\nu_0$ и много меньше Ψ_0 — угла поворота плоскости поляризации радиоизлучения с частотой ν_0. Различия порядка одного радиана в Ψ_0 мало сказываются на величине $\Delta\Psi$. Поэтому мы сделаем следующие упрощающие предположения: 1) в областях Галактики, генерирующих поляризованное радиоизлучение, фарадеевское вращение отсутствует; 2) диаграмма направленности антенны настолько узкая, что различием углов поворота плоскостей поляризации волн, приходящих из разных направлений, можно пренебречь. Будем еще предполагать, что эффективная ширина спектра принимаемого радиоизлучения

$$(\Delta\nu)_{\text{эфф}} \ll \nu_0.$$

Параметры Стокса для линейно поляризованного космического радиоизлучения в интервале частот $d\nu$ запишем в виде

$$\begin{aligned} dI &= F(\nu)\, T(\nu)\, d\nu, \\ dQ &= F(\nu)\, T(\nu) \cos(2\chi(\nu))\, d\nu, \\ dU &= F(\nu)\, T(\nu) \sin(2\chi(\nu))\, d\nu, \\ dV &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $F(\nu)$ — энергетическая частотная характеристика приемной аппаратуры, $T(\nu)$ — эквивалентная яркостная температура линейно поляризованной компоненты космического радиоизлучения на частоте ν, $\chi(\nu)$ — позиционный угол излучения на частоте ν. Параметры Стокса радиоизлучения, принимаемого аппаратурой, находятся путем интегрирования выражений (1) по частоте.

Учитывая сделанные выше предположения, а также полагая $T(\nu) \sim \nu^{-\alpha}$, где α — спектральный индекс, можно написать следующие выражения для $\chi(\nu)$ и $T(\nu)$:

$$\chi(\nu) \simeq \chi_0 - 2\Psi_0 \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}, \tag{2}$$

$$T(\nu) \simeq T_0 - \alpha T_0 \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}, \tag{3}$$

где χ_0 и T_0 — значения $\chi(\nu)$ и $T(\nu)$ на частоте ν_0. Введем обозначение

$$-2\Psi_0 \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \xi \tag{4}$$

и положим для простоты $\chi_0 = 0$. Интегральные параметры Стокса теперь можно записать в виде

$$I = \frac{\nu_0 T_0}{2\Psi_0} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \left(1 + \frac{\alpha\xi}{2\Psi_0}\right) d\xi = \frac{T_0\nu_0}{\Psi_0} \int_0^{\infty} F(\xi)\, d\xi; \tag{5}$$

$$Q = \frac{\nu_0 T_0}{2\Psi_0} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \left(1 + \frac{\alpha\xi}{2\Psi_0}\right) \cos(2\xi)\, d\xi = \frac{T_0\nu_0}{\Psi_0} \int_0^{\infty} F(\xi) \cos(2\xi)\, d\xi; \tag{6}$$

$$U = \frac{\nu_0 T_0}{2\Psi_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\left(1+\frac{\alpha\xi}{2\Psi_0}\right)\sin(2\xi)\,d\xi = \frac{T_0\nu_0\alpha}{2\Psi_0^2}\int\limits_{0}^{\infty} F(\xi)\,\xi\sin(2\xi)\,d\xi. \quad (7)$$

При переходе к окончательным выражениям (5) ÷ (7) предполагалось, что $F(\xi)$ — четная функция, достаточно быстро убывающая с увеличением ξ (это позволило считать пределы интегрирования бесконечно большими).

Позиционный угол χ и степень поляризации радиоизлучения P связаны с параметрами Стокса (5) ÷ (7) соотношениями (см., например, [6])

$$\operatorname{tg}(2\chi) = U/Q, \quad (8)$$

$$P = \sqrt{Q^2+U^2}/I. \quad (9)$$

В рассматриваемом нами случае формулы (8) и (9) можно сильно упростить, так как параметр $U \ll Q$ до тех пор, пока степень поляризации радиоизлучения имеет заметную величину. Проиллюстрируем это на примерах П-образной и гауссовой энергетических частотных характеристик аппаратуры. В примере с П-образной частотной характеристикой $F(\xi) = 1$ при $-\Delta\Psi/2 \leqslant \xi \leqslant \Delta\Psi/2$ и $F(\xi)=0$ при $|\xi| > \Delta\Psi/2$, где $\Delta\Psi$ — разность углов поворота плоскостей поляризации волн, имеющих крайние частоты в полосе пропускания аппаратуры ($\nu_0 \pm \Delta\nu/2$). Согласно формулам (5) ÷ (7),

$$I = \frac{T_0\nu_0\Delta\Psi}{2\Psi_0},$$

$$Q = \frac{T_0\nu_0}{2\Psi_0}\sin(\Delta\Psi),$$

$$U = \frac{T_0\nu_0\alpha}{8\Psi_0^2}\sin(\Delta\Psi)\,[1-\Delta\Psi\operatorname{ctg}(\Delta\Psi)].$$

Отношение

$$\frac{U}{Q} = \frac{\alpha}{4\Psi_0}[1-\Delta\Psi\operatorname{ctg}(\Delta\Psi)], \quad (10)$$

как нетрудно видеть, много меньше единицы при $\Psi_0 \gg 1$, $\Delta\Psi \sim 1$ и $\alpha \sim 3$, хотя при этом уже сказывается деполяризация излучения из-за дисперсии фарадеевского вращения.

В примере с гауссовой частотной характеристикой аппаратуры $F(\xi) = \exp(-a^2\xi^2)$, где $a^2 = \nu_0^2 \ln 2/4\Psi_0^2(\Delta\nu)^2$ — полуширина полосы пропускания на уровне 0,5 по мощности. В этом случае отношение

$$\frac{U}{Q} = \frac{\alpha}{\ln 2}(\Delta\Psi)_{0,5}\frac{\Delta\nu}{\nu_0}, \quad (11)$$

где $(\Delta\Psi)_{0,5} = 2\Psi_0\,\Delta\nu/\nu_0$, также мало при $(\Delta\Psi)_{0,5} \sim 1$, поскольку $\Delta\nu/\nu_0 \ll 1$.

Таким образом, для вычисления поляризационных характеристик излучения вместо формул (8) и (9) можно воспользоваться более простыми соотношениями:

$$\chi = \frac{1}{2}\frac{U}{Q}; \quad (12)$$

$$P = \left|\frac{Q}{I}\right| = \left|\int\limits_0^{\infty} F(\xi)\cos(2\xi)\,d\xi\right|\left(\int\limits_0^{\infty} F(\xi)\,d\xi\right)^{-1}. \quad (13)$$

Выражение (13) без подробного обоснования использовалось в работе [2].

В таблице 1 приведены результаты вычислений деполяризующего фактора по формуле (13) для ряда частотных характеристик аппаратуры, указанных в первом столбце таблицы. Во втором столбце таблицы приведены выражения для нормированных энергетических частотных характеристик аппаратуры. Величина $d = (\Delta\nu)_{эн}/\nu_0$, где $(\Delta\nu)_{эн}$ — энергетическая ширина полосы пропускания, равна по определению $\int_0^\infty F(\nu)d\nu$.

В третьем столбце таблицы 1 приведены формулы, определяющие фактор деполяризации P. Величина $\Delta\Psi$ равна разности углов поворота плоскостей поляризации волн, частоты которых отличаются на $(\Delta\nu)_{эн}$, т. е.

$$\Delta\Psi = 2\Psi_0 \frac{(\Delta\nu)_{эн}}{\nu_0} = 4{,}8\cdot 10^4 N H_\parallel l \frac{(\Delta\nu)_{эн}}{\nu_0^3}.$$

Здесь N — концентрация электронов в среде, вызывающей вращение, должна быть выражена в $см^{-3}$, продольная составляющая магнитного поля $H_\parallel$ — в эрстедах, протяженность области, занятой магнитоактивной средой в направлении распространения излучения l — в сантиметрах и резонансная частота аппаратуры ν_0 — в герцах. В последнем столбце таблицы 1 даны отношения ширины полосы пропускания аппаратуры на уровне 0,5 по мощности и энергетической ширины полосы, позволяющие переходить в формулах для P от $(\Delta\nu)_{эн}$ к $(\Delta\nu)_{0,5}$, так как обычно непосредственно измеряется именно $(\Delta\nu)_{0,5}$.

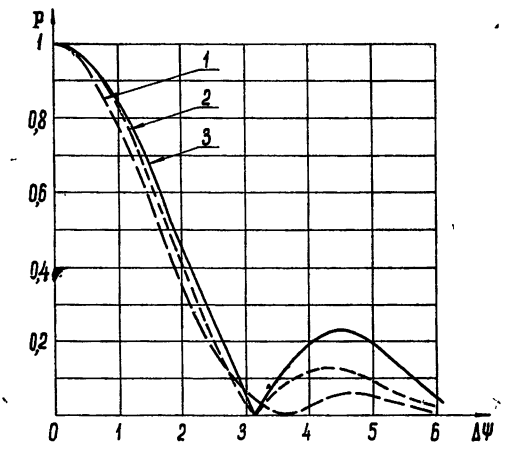


Рис. 1. Зависимость степени поляризации P от $\Delta\Psi$:

1—две пары расстроенных каскадов; 2—две тройки расстроенных каскадов; 3—П-образная частотная характеристика.

На рис. 1 и 2 показано, как меняется степень поляризации излучения в зависимости от $\Delta\Psi$. Если полоса пропускания аппаратуры определяется несколькими каскадами, настроенными на одну частоту, то для вычисления деполяризации излучения из-за дисперсии эффекта Фарадея частотную характеристику аппаратуры можно аппроксимировать гауссовой кривой. Если же имеется несколько групп взаимно расстроенных каскадов, то вполне удовлетворительной является аппроксимация П-образной характеристикой. Подчеркнем, что при сильной деполяризации излучения ($P \leqslant 0{,}05$) величины, вычисленные по формулам таблицы 1 и приведенные на рис. 1 и 2, могут сильно отличаться от точных значений, которые надо вычислять по формуле (9). Однако эти точные значения P не представляют интереса ввиду малости степени поляризации излучения.

Остановимся еще на вопросе о зависимости позиционного угла излучения χ от ширины полосы пропускания аппаратуры. Как видно из формул (10), (11) и (12), при значениях $P \geqslant 0{,}05$ и $\Delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-2}$ изменения угла χ не превосходят нескольких градусов. Таким образом, зависимостью χ от $\Delta\nu$ обычно можно пренебречь.

Таблица 1

Тип усилителя	Нормированная частотная характеристика	Фактор, определяющий деполяризацию P	$(\Delta\nu)_{0,5}/(\Delta\nu)_{эн}$
Одноконтурный каскад	$\left\{1+\left[\frac{\pi(\nu-\nu_0)}{\nu_0 d}\right]^2\right\}^{-1}$	$\exp\left(-\frac{2}{\pi}\Delta\Psi\right)$	$\frac{2}{\pi}=0{,}65$
Два одноконтурных каскада, настроенных на одну частоту	$\left\{1+\left[\frac{\pi(\nu-\nu_0)}{2\nu_0 d}\right]^2\right\}^{-2}$	$\exp\left(-\frac{4}{\pi}\Delta\Psi\right)\left(1+\frac{4}{\pi}\Delta\Psi\right)$	$\frac{4}{\pi}(\sqrt{2}-1)^{1/2}=0{,}81$
Четыре одноконтурных каскада, настроенных на одну частоту	$\left\{1+\left[\frac{5\pi}{16}\frac{(\nu-\nu_0)}{\nu_0 d}\right]^2\right\}^{-4}$	$\exp\left(-\frac{32}{5\pi}\Delta\Psi\right)\left[1+\frac{32}{5\pi}\Delta\Psi+\frac{2}{5}\left(\frac{32}{5\pi}\right)^2(\Delta\Psi)^2+\frac{1}{15}\left(\frac{32}{5\pi}\right)^3(\Delta\Psi)^3\right]$	$2\left(\sqrt[4]{2}-1\right)^{1/2}=0{,}89$
Гауссова частотная характеристика	$\exp\left\{-\left[\frac{\sqrt{\pi}(\nu-\nu_0)}{\nu_0 d}\right]^2\right\}$	$\exp\left[-\frac{(\Delta\Psi)^2}{\pi}\right]$	$\frac{2\ln 2}{\sqrt{\pi}}=0{,}94$
Два взаимно расстроенных каскада	$\left\{1+\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{(\nu-\nu_0)}{\nu_0 d}\right]^4\right\}^{-1}$	$\left\lvert\exp\left(-\frac{2}{\pi}\Delta\Psi\right)\left[\cos\left(\frac{2}{\pi}\Delta\Psi\right)+\sin\left(\frac{2}{\pi}\Delta\Psi\right)\right]\right\rvert$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=0{,}9$
Три взаимно расстроенных каскада	$\left\{1+\left[\frac{2\pi}{3}\frac{(\nu-\nu_0)}{\nu_0 d}\right]^6\right\}^{-1}$	$\left\lvert\frac{1}{2}\left\{\exp\left(-\frac{3}{\pi}\Delta\Psi\right)+\exp\left(-\frac{3}{2\pi}\Delta\Psi\right)\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\Delta\Psi\right)+\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\Delta\Psi\right)\right]\right\}\right\rvert$	$\frac{3}{\pi}=0{,}96$
Две пары взаимно расстроенных каскадов	$\left\{1+\left[\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\frac{(\nu-\nu_0)}{\nu_0 d}\right]^4\right\}^{-2}$	$\left\lvert\exp\left(-\frac{8}{3\pi}\Delta\Psi\right)\left[\sin\left(\frac{8}{3\pi}\Delta\Psi\right)+\cos\left(\frac{8}{3\pi}\Delta\Psi\right)\right]+\frac{16}{9\pi}\Delta\Psi\exp\left(-\frac{8}{3\pi}\Delta\Psi\right)\sin\left(\frac{8}{3\pi}\Delta\Psi\right)\right\rvert$	$\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}(\sqrt{2}-1)^{1/4}=0{,}96$
Две тройки взаимно расстроенных каскадов	$\left\{1+\left[\frac{5\pi}{9}\frac{(\nu-\nu_0)}{\nu_0 d}\right]^6\right\}^{-2}$	$\left\lvert\frac{1}{2}\left(1+\frac{18}{25\pi}\Delta\Psi\right)\exp\left(-\frac{18}{5\pi}\Delta\Psi\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{18}{50\pi}\Delta\Psi\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{18}{5\pi}\Delta\Psi\right)\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{9\sqrt{3}}{5\pi}\Delta\Psi\right)+\cos\left(\frac{9\sqrt{3}}{5\pi}\Delta\Psi\right)\right]-\frac{0{,}9\sqrt{3}}{5\pi}\Delta\Psi\exp\left(-\frac{9}{5\pi}\Delta\Psi\right)\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{9\sqrt{3}}{5\pi}\Delta\Psi\right)-\sin\left(\frac{9\sqrt{3}}{5\pi}\Delta\Psi\right)\right]\right\rvert$	$\frac{18}{5\pi}(\sqrt{2}-1)^{1/6}=0{,}99$
П-образная частотная характеристика	1 при $\lvert\nu-\nu_0\rvert<\frac{(\Delta\nu)_{эн}}{2}$ 0 при $\lvert\nu-\nu_0\rvert>\frac{(\Delta\nu)_{эн}}{2}$	$\left\lvert\frac{\sin\Delta\Psi}{\Delta\Psi}\right\rvert$	1

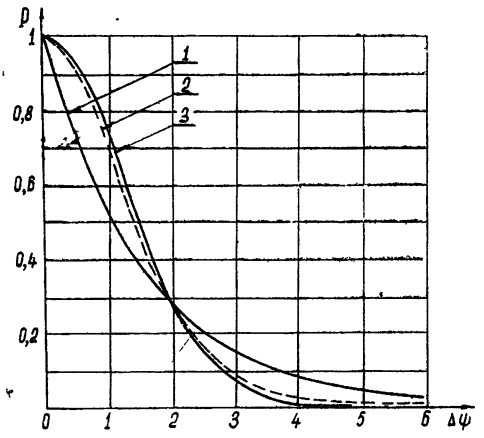


Рис. 2. Зависимость степени поляризации P от $\Delta\Psi$:

1—одноконтурный каскад, 2—четыре одноконтурных каскада, настроенных на одну частоту; 3—гауссова частотная характеристика

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Гетманцев, В А Разин, Труды 5 Совещания по вопросам космогонии, изд АН СССР, М, 1956, стр. 496.
2. В А. Разин, Радиотехника и электроника, **1**, 846 (1956).
3. В. А. Разин, Астрон. ж., **35**, 241 (1958).
4. В. А Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 395 (1964).
5. T. Hatanaka, Pabl. Astron. Soc. Japan, **8**, 73 (1956).
6 С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М, 1953

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 22 июня 1965 г.

DEPOLARIZATION IN COSMIC RADIATION DUE TO DISPERSION OF FARADAY ROTATION OF POLARIZATION PLANES

V. A. Razin, V. V. Khroulyov

Depolarization in cosmic radiation is considered caused by the dispersion of Faraday rotation of radio wave polarization planes and finite bandwidth of the receiver. The general expressions have been obtained, relating the position angle and the polarization degree with frequency characteristic of the receiver. For a number of known circuits the calculation results of polarization degree are given in formulae and graphs. While the degree of polarization has a considerable value ($\geqslant 0.05$), the position angle varies only by some degrees by changing the transmission bandwidth of the receiver of about $1 \div 2\%$ to the resonant frequency.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371.165

СРЕДНЕЕ ПОЛЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

И. В. Андреев

Вычислено среднее поле волны в среде со случайными неоднородностями и установлены пределы применимости полученных выражений.

1. В настоящей работе с помощью функции Грина для волнового уравнения в среде со случайными неоднородностями вычисляется среднее поле волны в виде ряда, отличного от ряда обычной теории возмущений; это позволяет уточнить результаты предыдущих работ [1–3]. Из сравнения последовательных членов разложения определяются условия, при которых можно ограничиться главным членом ряда: $\sigma^2 kl \ll 1$ при $kl \gg 1$ и $\sigma^2 (kl)^2 \ll 1$ при $kl \ll 1$ (здесь $\sigma^2 = \overline{\varepsilon^2}$ — среднеквадратичная флуктуация случайной части квадрата показателя преломления $1+\varepsilon$, k — волновой вектор и l — характерный размер неоднородностей). Найдены ограничения сверху и снизу для расстояний, на которых справедливо полученное решение. Оказывается, что оно применимо на более далеких расстояниях, чем обычная теория возмущений. Выяснена также связь используемых способов суммирования с часто применяемыми методом плавных возмущений и методом эквивалентного экрана. Всюду для простоты рассмотрение ограничивается скалярным волновым уравнением.

2. Рассмотрим волновое уравнение с точечным источником:

$$[\nabla_x^2 + k^2(1+\varepsilon'(x))]\, G(x, x') = -\delta(x-x'). \tag{1}$$

Здесь $1+\varepsilon'(x)$ — квадрат показателя преломления. Величина $\varepsilon'(x)$ будет в дальнейшем считаться случайной функцией координат, причем без ограничения общности среднее от нее по ансамблю можно положить равным нулю: $\overline{\varepsilon'(x)} = 0$.

Если решать уравнение (1) методом последовательных итераций, считая $k^2\varepsilon'(x)$ малой величиной, то для фурье составляющей по разности координат получим ряд теории возмущений:

$$G(p, x) = \frac{1}{p^2 - k^2 - i\delta} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int dq\, e^{iqx} \frac{k^2 \tilde{\varepsilon}'(q)}{(p^2-k^2-i\delta)[(p+q)^2-k^2-i\delta]} + \tag{2}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^6} \iint dq_1 dq_2 \exp[i(q_1+q_2)x] \times$$

$$\times \frac{k^4 \tilde{\varepsilon}'(q_1)\, \tilde{\varepsilon}'(q_2)}{(p^2-k^2-i\delta)[(p+q_1)^2-k^2-i\delta]\,[(p+q_1+q_2)^2-k^2-i\delta]} + \ldots$$

(здесь $\tilde{\varepsilon}'(q)$ — фурье-компонента $\varepsilon'(x)$; бесконечно малые добавки $i\delta$ в знаменателях, определяя способ обхода полюсов, отвечают выбору

запаздывающего решения; n-ый член разложения описывает n-кратное взаимодействие волны со средой, причем в каждом взаимодействии может передаваться импульс q_i.

Если бы удалось найти сумму ряда (2), это отвечало бы точному решению уравнения (1) с произвольной функцией $\varepsilon'(x)$, на что, конечно, трудно рассчитывать. Мы начнем с приближенного рассмотрения случая, когда передаваемые импульсы q_i гораздо меньше p (такой подход см. в работах [4–6]). Последнее эквивалентно предположению, что $\tilde{\varepsilon}'(q)$ отлична от нуля практически лишь при $q \ll p$, т. е. характерные расстояния, на которых изменяется $\varepsilon'(x)$, гораздо больше длины волны. При этом в первом приближении можно пренебречь всеми квадратичными по q_i членами в каждом из знаменателей (2) и учесть эти члены в первом порядке в качестве поправок. После этого ряд (2) можно просуммировать, в результате чего получим (аналогичное вычисление см. в [4]):

$$G(p, x)=i\int_0^\infty dt\,\exp\left[-it(p^2-k^2)+ik^2\int_0^t dt'\varepsilon'(2pt'-x)\right]\times$$
$$\times\left\{1-k^2\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\nabla^2\varepsilon'(2pt-2pt''-x)-ik^4\int_0^t dt'\times\right. \tag{3}$$
$$\left.\times\left[\int_0^{t'} dt''\,\nabla\varepsilon'(2pt-2pt''-x)\right]^2+\ldots\right\}.$$

Первое после единицы слагаемое в фигурной скобке (3) дает поправку по q_i^2, второе — по q_iq_j.

Разумеется, хотелось бы уточнить формулу (3), просуммировав ряд (2) по возможности более точно. На этом пути удается полностью учесть все члены типа q_i^2, сохранив разложение лишь по $q_iq_j(i\neq j)$. Такой способ суммирования развивался Фрадкиным [7,8]; он основан на том, что в разложение (2) $2pq_i$ входит в паре с q_i^2. Перейдем поэтому в (3) к фурье-представлению для $\varepsilon'(x)$, заменим $2pq$ на $2pq+q^2$ и отбросим поправки по q_i^2. В результате получим:

$$G(p, x)=i\int_0^\infty dt\,\exp\left[-it(p^2-k^2)\right]\exp\left[\frac{ik^2}{(2\pi)^3}\int_0^t dt'\int dq\,\tilde{\varepsilon}'(q)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(iqx-2ipqt'-iq^2t'\right)\right]\left\{1+\frac{ik^4}{(2\pi)^6}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt_1\int_0^{t'} dt_2\iint dq_1\,dq_2\times\right. \tag{4}$$
$$\left.\times\tilde{\varepsilon}'(q_1)\tilde{\varepsilon}'(q_2)\exp[i(q_1+q_2)x-i(2pq_1+q_1^2)(t-t_1)-i(2pq_2+q_2^2)(t-t_2)]+\ldots\right\}.$$

Разлагая экспоненты в (4) в ряд и интегрируя по t, t', можно убедиться, что получена сумма ряда (2), в каждом знаменателе которой произведено разложение по q_iq_j (фактическая проверка была проведена в трех первых порядках теории возмущений). Подчеркнем, что выражение (4) учитывает первый порядок теории возмущений точно, так как члены типа q_iq_j $(i\neq j)$ появляются лишь во втором и более высоких порядках.

Установим теперь связь описанных выше способов суммирования с обычным подходом. Мы сейчас покажем, что главные члены в (3) и (4), получающиеся при замене фигурных скобок единицей, эквивалентны выражениям, полученным методом эквивалентного экрана и методом плавных возмущений соответственно. Поскольку эти методы применяются обычно для вычисления поля плоской волны, падающей на полупространство, заполненное неоднородностями, нам надо перейти от функций Грина (3), (4) уравнения (1) к волновым функциям, удовлетворяющим уравнению

$$[\nabla_x^2 + k^2(1+\varepsilon'(x))]\,\psi(x)=0. \tag{5}$$

Вводя функцию $\varphi(p, x)$ согласно соотношению

$$\psi(x)=e^{ipx}\varphi(p, x), \tag{6}$$

получаем для нее уравнение

$$[\nabla_x^2 + 2ip\nabla_x - p^2+k^2+k^2\varepsilon'(x)]\varphi(p, x)=0. \tag{7}$$

Заметим теперь, что в случае, когда неоднородностями заполнено лишь правое полупространство, интегралы по t в (3) и (4) расходятся при $p^2 = k_\zeta^2$, т. е. соответствующие функции Грина имеют при $p^2 - k^2 = 0$ полюс. Сравнивая же уравнение для $G(p, x)$ с уравнением (7) и учитывая (6), убеждаемся, что

$$\psi(x) = \lim_{p^2-k^2\to 0} e^{ipx}(p^2-k^2)G(p, x). \tag{8}$$

Совершив предельный переход в (8), где в качестве $G(p, x)$ взят главный член выражения (4), находим, что соответствующая волновая функция равна

$$\psi(x)=ie^{ikx}\exp\left[\frac{ik^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dt\int d\tilde{q}\,\varepsilon'(q)\exp(iqx-2ipqt-iq^2t)\right]. \tag{9}$$

Вычислив (после перехода к координатному представлению для ε') интегралы по t и q в (9), получаем

$$\psi(x) = i\exp\left\{ikx + \frac{k^2}{4\pi}\int dy\,\varepsilon'(y)\frac{\exp[ik|x-y| - ik(x-y)]}{|x-y|}\right\}, \tag{10}$$

т. е. волновую функцию метода плавных возмущений. Такой же расчет, проведенный для гриновской функции, даваемой главным членом в (3), приводит к волновой функции

$$\psi(x)=i\exp\left[ikx+\frac{ik}{2}\int_0^x ds\,\varepsilon'(s)\right], \tag{11}$$

т. е. к полю в методе эквивалентного экрана.

3. Далее будет рассматриваться среднее поле точечного источника в среде со случайными неоднородностями, причем среда предполагается статистически однородной и изотропной. Величину. $\varepsilon'(x)$ теперь считаем случайной функцией в каждой точке x; сделаем обычное предположение, что значения $\varepsilon'(x)$ в различных точках определяются многомерным (бесконечномерным) нормальным распределением [3,9]. Вместе

с $\varepsilon'(x)$ нормально распределенными будут все величины, которые являются линейными функционалами от $\varepsilon'(x)$. В методах эквивалентного экрана и плавных возмущений такими величинами являются логарифм отношения амплитуд сигнала и его фаза, что отвечает общепринятым представлениям и соответствует экспериментальным данным [1,10].

Основное свойство нормального распределения состоит в том, что все корреляционные функции $\varepsilon'(x)$ (средние по ансамблю от произведений $\varepsilon'(x)$ в различных точках) распадаются на произведения парных корреляционных функций $\overline{\varepsilon'(x_1)\,\varepsilon'(x_2)} = B_\varepsilon(|x_1 - x_2|)$. Воспользуемся этим свойством (см. также [4]) и введем следующие обозначения: l — длина корреляции, определяемая соотношением

$$\int_0^\infty dx\, B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(0)\, l = \sigma^2 l,\quad B_\varepsilon(x) = \sigma^2 F(\xi),\quad \xi = x/l.$$

После усреднения формулы (3) получим

$$G(\boldsymbol{k}, p) = i\int_0^\infty dt\, \exp\left[-it(p^2-k^2)\right] \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^4 l^2}{4p^2}\int_0^{2pt/l} d\xi \left(\frac{2pt}{l}-\xi\right) F(\xi)\right] \times$$

$$\times\left\{1+\frac{i\sigma^2 k^4}{4p^2}\left[1-F\left(\frac{2pt}{l}\right)\right] t + \frac{i\sigma^4 k^8 l^3}{16p^5}\int_0^{2pt/l} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{2pt/l-\xi_1} d\xi_2 \times \right. \qquad (12)$$

$$\left. \times\left(\frac{2pt}{l}-2\xi_2\right) F(\xi_1)\, F(\xi_2) + \ldots\right\}.$$

Важной особенностью выражения (12) является то, что экспонента в подынтегральном выражении ведет себя как $e^{-\alpha t}$ при $t\to\infty$ $(\alpha > 0)$. При дальнейшем вычислении это приводит к экспоненциальному спаданию среднего поля на больших расстояниях от источника, так что никаких трудностей, приводящих к нарушению закона сохранения энергии, в методе эквивалентного экрана не возникает.

Не так, однако, обстоит дело с выражением (4) в методе плавных возмущений. Усреднив (4), обнаружим, что соответствующая экспонента не спадает при $t\to\infty$; это, в свою очередь, приводит к тому, что среднее поле не падает на больших расстояниях от источника, что противоречит, например, закону сохранения энергии. Это — известная трудность, для ликвидации которой иногда домножают формулу на затухающую с расстоянием экспоненту (см. [1], § 30). Процедуру, использованную в [11] и состоящую в том, что результатом усреднения величины $e^{i\chi}$ предлагается считать $\overline{\exp i(\chi-\bar{\chi})}$, нельзя считать последовательной. Члены, характеризующие затухание среднего поля, могут быть получены методом плавных возмущений, если до усреднения учесть следующий порядок по ε' [12]. Используемый ниже способ получения средних значений дает затухание уже в низшем порядке.

Чтобы получить выражение для среднего поля, соответствующее методу плавных возмущений, усредним сначала точное разложение (2):

$$\overline{G(\boldsymbol{p}, x\,|\,\varepsilon')} = G(\boldsymbol{k}, p) = \frac{1}{p^2-k^2} + \frac{k^4}{(2\pi)^3}\int dq\, \frac{\tilde{B}_\varepsilon(q)}{(p^2-k^2)[(p+q)^2-k^2]} +$$

$$+\frac{k^8}{(2\pi)^6}\int\int dq_1\,dq_2\,\frac{\tilde{B}_\varepsilon(q_1)\tilde{B}_\varepsilon(q_2)}{(p^2-k^2)^2}\left\{\frac{1}{[(p+q_1)^2-k^2](p^2-k^2)[(p+q_2)^2-k^2]}+\right.$$

$$+\frac{1}{[(p+q_1)^2-k^2][p+q_1+q_2)^2-k^2][(p+q_2)^2-k^2]}+ \qquad (13)$$

$$\left.+\frac{1}{[(p+q_1)^2-k^2]^2[(p+q_1+q_2)^2-k^2]}\right\}+\ldots$$

Ряд (13) может быть просуммирован, если в каждом знаменателе опять пренебречь перекрестными произведениями q_i. При этом существенно, что результат такого усреднения не совпадает с прямым усреднением (4). Иными словами, если сначала в гриновской функции G точно учесть члены q_i^2, отбросив q_iq_j, а затем усреднить, то результат будет отличен от того, что получается, если сначала точно усреднить G, а затем отбросить члены типа q_iq_j. Более последовательным является второй путь, который, как можно проверить, дает в каждом порядке теории возмущений более точные выражения. Он не приводит и к противоречию с законом сохранения энергии.

Соответствующая сумма равна

$$G(k,p)=i\int_0^\infty dt\,\exp[-it(p^2-k^2)]\,\exp\left\{-\frac{k^4}{(2\pi)^3}\int_0^t ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int dq\,\tilde{B}_\varepsilon(q)\times\right.$$

$$\left.\times\exp[-i(2pq+q^2)(s_1-s_2)]\right\}\left\{1-\frac{ik^8}{(2\pi)^6}\int_0^t dt'\left[\int_{t'}^t ds_1\int_0^{t'}ds_2\int dq\times\right.\right. \qquad (14)$$

$$\left.\left.\times q\tilde{B}_\varepsilon(q)\,\exp[-i(2pq+q^2)(s_1-s_2)]\right]^2+\ldots\right\}.$$

Далее на основе (12) и (14) будет вычисляться среднее поле точечного источника.

4. Среднее поле точечного источника частоты k в статистически однородной и изотропной среде описывается усредненной гриновской функцией $G(k, R)$:

$$G(k,R)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\,e^{ipR}\,G(k,p)=\frac{1}{2\pi^2R}\int_0^\infty dp\,p\sin(pR)\,G(k,p). \qquad (15)$$

В качестве $G(k, p)$ мы будем использовать выражения (12) и (14). Для волны, распространяющейся в пустоте, $G(k, p)=(p^2-k^2-i\delta)^{-1}$ и вклад в интеграл (15) дает лишь вычет в полюсе на вещественной оси комплексной плоскости p при $p=k$ (это соответствует невозмущенному распространению волны). При наличии среды со случайными неоднородностями этот полюс смещается в верхнюю полуплоскость, определяя измененное волновое число и затухание, которые мы и хотим теперь найти. Кроме того, надо будет вычислить не содержащую полюса часть выражения (15).

Начнем с более простого случая, когда $G(k, p)$ определяется формулой (12). Интегральное представление (12) дает аналитическое продолжение функции $G(k, p)$ при тех комплексных значениях p, при которых интеграл по переменной t сходится (подынтегральное выражение не

имеет особенностей по p). Так как сходимость определяется поведением подынтегрального выражения при больших t, то при отыскании полюса $G(k, p)$ можно взять асимптотические по t выражения, заменив, таким образом, (12) на

$$i\int_0^\infty dt\,\exp\left[-it\left(p^2-k^2-\frac{i\sigma^2k^4l}{2p}\right)+\frac{\sigma^2k^4l^2F_1}{4p^2}\right]\times \\ \times\left(1+\frac{i\sigma^2k^4t}{4p^2}+\frac{i\sigma^4k^8l^2t}{16p^4}+\ldots\right) \tag{16}$$

(через F_n будем обозначать величины $\int_0^\infty d\xi\,\xi^n F(\xi)$). Если отвлечься от поправок, даваемых квадратной скобкой, то полюс p легко находится из решения уравнения

$$p_n^2-k^2-\frac{i\sigma^2k^4l}{2p_n}=0. \tag{17}$$

Вычет в полюсе p_n дает

$$G(k, R)=\frac{e^{ip_nR}\exp\left(\sigma^2k^4l^2F_1/4p_n^2\right)}{4\pi R(1+i\sigma^2k^4l/4p_n^3)}. \tag{18}$$

Требуя малого затухания на длине волны: $\sigma^2kl\ll 1$, получаем из (17)

$$p_n=k\left(1+\frac{i\sigma^2kl}{4}+\frac{3}{32}\sigma^4k^2l^2+\ldots\right). \tag{19}$$

Перейдем к определению условий применимости метода эквивалентного экрана. Они сводятся к требованию малости поправок в квадратной скобке (16). Предполагая, что поправки мало влияют на результат, можно перенести их в показатели экспоненты. Роль поправок сведется при этом к изменению положения полюса, которое теперь определяется из дисперсионного уравнения

$$p_n^2-k^2-\frac{i\sigma^2k^4l}{2p_n}-\frac{\sigma^2k^4}{4p_n^2}-\frac{1}{16}\frac{\sigma^4k^8l^2}{p_n^4}=0. \tag{20}$$

При тех же условиях, что и раньше, получаем отсюда

$$p_n=k\left(1+\frac{i\sigma^2kl}{4}+\frac{\sigma^2}{8}+\frac{1}{8}\sigma^4k^2l^2+\ldots\right). \tag{21}$$

При дальнейшем уточнении в (21) появляются члены типа $\sigma^2/(kl)^m$, $(\sigma^2kl)^2/(kl)^m$, $(\sigma^2kl)^3$, ... (некоторые из них мнимые). Имея это в виду и сравнивая эти члены с (19), убеждаемся, что они мало сказываются на положении полюса, если выполнены условия

$$kl\gg 1,\quad \sigma^2kl\ll 1. \tag{22}$$

Заметим, что первое из этих условий легко было предвидеть, поскольку, как уже отмечалось, разложение (3) справедливо при малом изменении ε' на длине волны. Отметим также, что при выполнении более жестких

требований $kl \gg 1$, $\sigma^2(kl)^2 \ll 1$, которые были приняты Канером [2], наши формулы (18), (19) не отличаются от соответствующих выражений в [2].

Одних только условий (22), определяющих малость сдвига полюса p_n, недостаточно для того, чтобы можно было отбрасывать поправочные члены. Поскольку p_n входит в решение вида $(4\pi R)^{-1}\exp(ip_nR)$ и вклад от поправки накапливается с расстоянием (что соответствует росту по t поправок в (16)), должна быть мала величина поправки, умноженная на R, т. е. должны быть выполнены неравенства

$$\sigma^2 kR \ll 1, \quad \sigma^4 k^3 l^2 R \ll 1 \tag{23}$$

(напомним, что теория возмущений в обычной форме, соответствующей борновскому приближению, применима при более жестком условии $\sigma^2 k^2 lR \ll 1$ [1,13]).

Обратим, наконец, внимание на то, что все выписанные в (21) поправки уточняют лишь $\mathrm{Re}\, p_n$, т. е. являются поправками к фазе среднего поля. Если нас интересует не полный набег фазы, а лишь амплитуда среднего поля, то вместо (23) мы должны потребовать, чтобы $\mathrm{Im}\, p_nR \ll 1$. Вклад в $\mathrm{Im}\, p_n$, возникающий из-за поправок типа q_l^2, может быть выписан на основе решения (14), учитывающего все q_l^2 точно. Он оказывается равным $\sigma^2/(kl)^4$. Для вычисления вклада в $\mathrm{Im}\, p_n$ от членов типа q_iq_j надо выписать поправки следующего приближения. При этом могут появиться лишь величины, содержащие добавочные факторы $(kl)^{-1}$ или $\sigma^2 kl$, малые по сравнению с имеющимися, т. е. либо $\sigma^4(kl)^2/kl = \sigma^4 kl$, либо $(\sigma^2 kl)$.[3] Окончательно в справедливости основного решения для амплитуды среднего поля точечного источника мы можем быть уверены при выполнении сильнейшего из следующих ограничений на допустимые расстояния:

$$\sigma^2 kR/(kl)^4 \ll 1, \quad \sigma^4 k^2 lR \ll 1, \quad \sigma^6 k^4 l^3 R \ll 1. \tag{24}$$

Ограничения со стороны малых расстояний могут быть получены из рассмотрения части интеграла (15), не содержащей полюсов. Довольно громоздкие вычисления, выполненные методом перевала, приводят к выводу, что эти ограничения очень слабы: допустимо рассматривать расстояния R, лишь в несколько раз превышающие характерный размер неоднородности l.

Подчеркнем, что критерии применимости приближенных методов можно искать при различных постановках вопроса. Мы здесь исследуем применимость метода эквивалентного экрана и метода плавных возмущений для вычисления среднего поля. При вычислении других величин, например, среднеквадратичных флуктуаций уровня и фазы могут получиться другие критерии применимости этих методов (см., например, [13]).

Рассмотрим теперь случай, когда в качестве $G(k, p)$ берется выражение (14), и выясним область применимости метода, соответствующего для неусредненных величин методу плавных возмущений. Как и раньше, для нахождения вклада от полюсов нам нужно знать асимптотическое поведение подынтегрального выражения в (14) при $t \to \infty$. Оставляя не убывающие с ростом t члены, находим

$$i\int_0^\infty dt \exp\left[-it(p^2-k^2)\right] \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^4 l^2}{4p^2}\int_0^\infty d\xi \left(\frac{2pt}{l}-\xi\right)\times\right. \tag{25}$$

$$\left.\times (1-e^{2ipl\xi})\, F(\xi)\right]\left\{1+\frac{i\sigma^4 k^8 l^2 t}{16p^4}\left[1-\int_0^\infty d\xi(1-2ipl\xi)\, e^{2ipl\xi} F(\xi)\right]+\ldots\right\}.$$

Это снова дает дисперсионные уравнения для определения величины волнового вектора и поправки к ней, причем мы теперь уже не ограничены заранее требованием $kl \gg 1$. При $pl \gg 1$ выражение (25), очевидно, переходит в (16). Поэтому применение его вместо (16) при $kl \gg 1$ приводит лишь к небольшому уточнению p_n и к расширению области применимости решения (поскольку первое из неравенств в (23) и (24) перестает быть необходимым). Мы видим, что при вычислении среднего поля модифицированный метод плавных возмущений применим при более слабых ограничениях на расстояния, чем стандартная теория возмущений.

Вклад от полюса главного члена (25) в $G(k, R)$, как нетрудно подсчитать, равен

$$G(k, R)=\frac{e^{ip_nR}}{4\pi R}\exp\left[\frac{\sigma^2k^4l^2}{4p_n^2}\int_0^\infty d\xi\,\xi(1-e^{2ip_nl\xi})\,F(\xi)\right]\times$$
$$\times\left[1+\frac{i\sigma^2k^4l}{4p_n^3}\int_0^\infty d\xi\,(1-e^{2ip_nl\xi})\,F(\xi)-\frac{\sigma^2k^4l^2}{2p_n^2}\int_0^\infty d\xi\,\xi e^{2ip_nl\xi}\,F(\xi)\right]^{-1}, \tag{26}$$

где p_n определяется из дисперсионного уравнения

$$p_n^2-k^2-\frac{i\sigma^2k^4l}{2p_n}\int_0^\infty d\xi\,(1-e^{2ip_nl\xi})\,F(\xi)=0. \tag{27}$$

К сожалению, при $kl \ll 1$ разложение в фигурной скобке (25) теряет смысл. Поэтому для нахождения области применимости (26) и (27) в этом случае надо действовать иначе. Можно, например, прибегнуть к теории возмущений в уравнении для усредненной гриновской функции $G(k, R)$, как это делалось в [2,3], поскольку первое приближение при таком подходе в области его применимости практически совпадает с (27). Оценка следующего приближения приводит при этом к требованию

$$\sigma^2(kl)^2 \ll 1; \tag{28}$$

условие на допустимые расстояния, получаемое из неравенства $p_{n\,(\text{попр})}R \ll 1$, имеет вид

$$\sigma^4k^6l^5R \ll 1; \tag{29}$$

ограничения со стороны малых расстояний отсутствуют.

Выше речь шла о вычислении среднего поля. В принципе примененный метод пригоден и для нахождения среднего квадрата поля, а также всевозможных корреляций. При этом, однако, существенно возрастает сложность всех расчетов.

Автор благодарен Е. Л. Фейнбергу, а также В. И. Татарскому и Е. С. Фрадкину за многочисленные полезные обсуждения. Очень ценным было для меня сотрудничество с В. М. Финкельбергом, который помог разобраться в целом ряде вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958
2. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 827 (1959).

3. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **46**, 1399 (1964).
4. И. В. Андреев, ЖЭТФ, **48**, 1437 (1965).
5 Е. С. Фрадкин, Диссертация, ИТЭФ, 1960.
6. Г. А. Милехин, ЖЭТФ, **43**, 1012 (1962).
7. Е. С. Фрадкин, Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ, **2**, Дубна, 1964.
8. E. S. Fradkin, Nucl. Phys. (в печати).
9. K. Furutsu, J. Res. NBS, **67D**, 303 (1963).
10 В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
11. Т. А. Широкова, Акуст. ж., **5**, 485 (1959).
12. В. И. Татарский, Докторская диссертация, Горький, 1964.
13. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961

Физический институт им П Н Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
29 мая 1965 г.

AVERAGE WAVE FIELD IN MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

I. V. Andreev

An average wave field has been calculated in a medium with random inhomogeneities. The limits of applicability of the expressions obtained are determined.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371.16

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

И. М. Фукс

В приближении геометрической оптики решена задача об отражении и преломлении акустических и электромагнитных волн (с произвольной формой поверхности волнового фронта) на криволинейной границе раздела произвольной формы. Вычислены амплитуда и фаза отраженной (преломленной) волны, а также дифференциальные параметры кривизны волновых фронтов отраженного (преломленного) поля. Результаты представлены в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы криволинейных координат на поверхности.

При отыскании асимптотических представлений решений дифракционных задач с помощью метода, предложенного Келлером с сотрудниками [1], (см. также последующие работы Бабича и др. [2,3]), первым этапом является решение уравнения эйконала и определение кривизны фронтов отраженных (преломленных) волн, т. е. решение задачи в приближении геометрической оптики. Если фронт падающей волны и отражающее тело имеют простую форму (плоскость, цилиндр, шар и т. д.), то решение этой задачи не представляет особых трудностей. После этого нахождение следующих членов асимптотического разложения (поправок к полю лучевого приближения за счет поперечной, по отношению к лучам, диффузии) сводится к вычислению некоторых интегралов вдоль лучей от кривизны волновой поверхности [1]. Для более сложных объектов решение даже лучевой задачи становится нетривиальным. Общие результаты, полученные в этом направлении Фоком [4], для отражения волны произвольной формы от поверхности выпуклого тела произвольной формы в каждом конкретном случае приводят к громоздким и довольно сложным вычислениям детерминантов, элементами которых являются вторые ковариантные производные фазы падающей волны по криволинейным координатам на отражающей поверхности*.

В настоящей работе в приближении геометрической оптики получены формулы для амплитуды и параметров кривизны поверхности $\overline{S}_1(\widetilde{S}_1)$ фронта волны, отраженной (или преломленной) на криволинейной границе раздела двух сред. Окончательные результаты выражаются через инвариантные дифференциальные характеристики отражающей (преломляющей) поверхности S и поверхности фронта падающей волны $\overline{S}$ — гауссову (полную) кривизну, среднюю кривизну и т. д., — которые предполагаются известными.

1. Рассмотрим сначала отражение монохроматической скалярной волны $U_0(\boldsymbol{R}) = A_0(\boldsymbol{R}) \exp[ik\psi_0(\boldsymbol{R})]$ (множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем) от абсолютно жесткой $(\partial U/\partial n|_S = 0)$ поверхности S. Значение поля на поверхности в приближении Кирхгофа $U(\boldsymbol{r}) = 2U_0(\boldsymbol{r})$ $(\boldsymbol{r} \in S)$ подставим в формулу Грина и, ограничиваясь неисчезающими при $k \to \infty$ членами, получим представление отраженного поля $\overline{U}(\boldsymbol{R})$ в виде

* Частные случаи изучались ранее Фоком [5] и Келлером [6].

$$\bar{U}(\boldsymbol{R}) = -\frac{ik}{2\pi}\int_S \frac{n\bar{\nu}}{\rho} e^{ik\rho}\, U_0(\boldsymbol{r})\, dS; \quad \bar{\nu} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}; \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности S в точке $\boldsymbol{r}$, направленная в полупространство, содержащее источник и точку наблюдения $\boldsymbol{R}$.

Введем на поверхности S криволинейные координаты u^α ($\alpha = 1,2$) с началом в точке стационарной фазы интеграла (1), которая находится из условий

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left[\rho + \psi_0(\boldsymbol{r})\right] = 0. \tag{2}$$

Тем самым мы предполагаем, что решение уравнения (2) существует и единственно. Это соответствует наличию только одной точки зеркального отражения. Имея в виду получение результатов в инвариантной форме, не зависящей от свойств координатной сетки u^α, будем считать u^α геодезическими в начале координат, что значительно упрощает выкладки. Вынося медленно меняющиеся предэкспоненциальные множители за знак интеграла и разлагая показатель экспоненты в ряд, получим

$$\bar{U}(\boldsymbol{R}) = \frac{\cos\theta}{\rho}\sqrt{\frac{a}{C}}\, e^{ik\rho}\, U_0(\boldsymbol{r}),$$
$$C = \det C_{\alpha\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2(\rho + \psi_0)}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta}, \quad a = \det a_{\alpha\beta}, \quad \cos\theta = n\bar{\nu}, \tag{3}$$

$a_{\alpha\beta}$ — первая квадратичная форма поверхности; все величины относятся к точке стационарной фазы. Вычисление определителя C (см. Приложение) приводит к следующему результату:

$$\bar{U}(\boldsymbol{R}) = \frac{A_0(\boldsymbol{r})}{|\bar{K}_1\rho^2 - 2\bar{H}_1\rho + 1|^{1/2}} \exp\left\{ i\left[k\,(\rho + \psi_0) - \frac{\pi}{2}\,\sigma \right] \right\}; \tag{4}$$

$$\bar{K}_1 = \bar{K} + 4K + 2\cos\theta\,\bar{\varkappa}\,(2H - \varkappa) + 2\cos^{-1}\theta\,\varkappa\,(2\bar{H} - \bar{\varkappa}) + 2\operatorname{sgn}\varphi\,\operatorname{sgn}\bar{\varphi}\,[(2H\varkappa - \varkappa^2 - K)(2\bar{H}\bar{\varkappa} - \bar{\varkappa}^2 - \bar{K})]^{1/2}; \tag{5а}$$

$$\bar{H}_1 = \bar{H} + 2H\cos\theta + \varkappa\sin\theta\operatorname{tg}\theta. \tag{5б}$$

Здесь введены следующие обозначения: K — гауссова (полная) кривизна отражающей поверхности, H — средняя кривизна, $\varkappa$ — кривизна нормального сечения поверхности плоскостью падения, $-\pi/2 < \varphi \leqslant \pi/2$ — угол между плоскостью падения и направлением на поверхности с наибольшей кривизной (знак определяется по правилу винта относительно нормали $\boldsymbol{n}$); $\bar{K}, \bar{H}, \bar{\varkappa}, \bar{\varphi}$ и $\bar{K}_1, \bar{H}_1, \bar{\varkappa}_1, \bar{\varphi}_1$ — то же для поверхности волнового фронта падающей и отраженной волны соответственно, причем $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}_1$ определяются относительно нормалей к волновым поверхностям $\nu = \nabla\psi_0$ и $\bar{\nu} = \nabla\rho$; σ — сигнатура квадратичной формы под корнем, равная числу положительных корней $\rho_{1,2}$ уравнения

$$\bar{K}_1\rho_{1,2}^2 - 2\bar{H}_1\rho_{1,2} + 1 = 0, \tag{6}$$

лежащих в интервале от нуля до ρ. Совокупность решений этого уравнения определяет в параметрической форме

$$\rho_{1,2}=\rho_{1,2}(r)=\frac{\bar{H}_1(r)\pm[\bar{H}_1^2(r)-\bar{K}_1(r)]^{1/2}}{\bar{K}_1(r)} \tag{7}$$

две каустические поверхности отраженной волны; положительным корням соответствуют реальные каустики, отрицательным — мнимые. Из ограниченности отношения $\bar{K}(r)/\bar{K}_1(r)$ при $\bar{K}(r)\to\infty$ следует, что если r — каустическая точка падающей волны, то она является и каустической точкой отраженной волны ($r\in S$).

В следующих частных случаях из (4) получаем известные формулы:

а) $\bar{K}=\bar{H}=\bar{\varkappa}=0$ — отражение плоской волны от поверхности произвольной формы (Фок [5])

$$\bar{U}(R)=\left[\frac{\cos\theta}{4K\rho^2\cos\theta-2\rho(2H\cos^2\theta+\varkappa\sin^2\theta)+\cos\theta}\right]^{1/2}e^{ik\rho}U_0(r)\,. \tag{8}$$

б) $\bar{K}=\rho_0^{-2}$, $\bar{H}=\bar{\varkappa}=-\rho_0^{-1}$ — отражение сферической волны от поверхности произвольной формы (Конторович и Муравьев [7])

$$\bar{U}(R)=\left[\frac{\cos\theta}{4K\tilde{\rho}^2\cos\theta-2\tilde{\rho}(2H\cos^2\theta+\varkappa\sin^2\theta)+\cos\theta}\right]^{1/2}e^{ik\rho}U_0(r)\,,$$
$$\tilde{\rho}=\rho\rho_0(\rho+\rho_0)^{-1},\quad \rho=|R-r| \tag{9}$$

(ρ_0 — расстояние от точечного источника сферической волны до точки зеркального отражения r). При $K=a^{-2}$, $H=\varkappa=-a^{-1}$ последнее выражение переходит в формулу Фока [4] для отражения сферической волны от поверхности шара радиусом a.

Полученные выше результаты легко переносятся и на случай отражения электромагнитных волн. Так, для векторов напряженности электрического ($\bar{e}$) и магнитного ($\bar{h}$) полей волны, отраженной от идеально проводящей поверхности, получаем формулы, аналогичные (4):

$$\bar{e}_i(R)=\frac{e^{ik\rho}}{(\bar{K}_1\rho^2-2\bar{H}_1\rho+1)^{1/2}}\bar{T}_{ik}^{(e)}e_k^0(r);$$
$$\bar{h}_i(R)=\frac{e^{ik\rho}}{(\bar{K}_1\rho^2-2\bar{H}_1\rho+1)^{1/2}}\bar{T}_{ik}^{(h)}h_k^0(r). \tag{10}$$

Тензоры $\bar{T}_{ik}^{(e),(h)}$ учитывают деполяризацию отраженного поля и имеют вид [7]

$$\bar{T}_{ik}^{(e)}=-\bar{T}_{ik}^{(h)}=-\delta_{ik}+n_in_k\,. \tag{11}$$

2. Легко видеть, что требование абсолютной жесткости поверхности (или идеальной проводимости в электромагнитном случае) для получения предыдущих результатов несущественно. Действительно, имея в виду только получение результатов, асимптотически верных при $k\to\infty$, мы можем исходить не из точной формулы Грина и соответствующей ей в приближении Кирхгофа при $\partial U/\partial n|_S=0$ формулы (1), а сразу воспользоваться принципом Гюйгенса:

$$\bar{U}(R)=-\frac{ik}{2\pi}\int_S\frac{\bar{n}\bar{\nu}}{\rho}\exp\left[ik(\rho+\psi_0)\right]\bar{A}(r)\,dS. \tag{12}$$

Здесь $\bar{A}(\boldsymbol{r}) = V(\theta) A_0(\boldsymbol{r})$ — амплитуда отраженной волны на поверхности, $V(\theta)$ — коэффициент отражения плоской волны ($\cos\theta = \boldsymbol{n}\bar{\boldsymbol{\nu}}$). Формулы для скалярного поля, отраженного от поверхности с произвольным коэффициентом отражения $V(\theta)$, получаются из приведенных выше соотношений путем замены $A_0(\boldsymbol{r}) \to V(\theta) A_0(\boldsymbol{r})$. При отражении электромагнитной волны от границы раздела двух сред с комплексными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) тензоры $T_{ik}^{(e)}$ и $\bar{T}_{ik}^{(h)}$ в (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ik}^{(e)} &= N\delta_{ik} - \sin^{-2}\theta\,[(M\cos\theta + N)\,n_i n_k + \cos\theta\,(M+N)\,\nu_i n_k]\,; \\ \bar{T}_{ik}^{(h)} &= M\delta_{ik} - \sin^{-2}\theta\,[(N\cos\theta + M)\,n_i n_k + \cos\theta\,(M+N)\,\nu_i n_k]. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь M и N — коэффициенты отражения тангенциальных компонент электрического и магнитного поля, которые связаны с относительным показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ соотношениями (см., например, [9], § 66)

$$N = \frac{n^2\cos\theta - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{n^2\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}, \quad M = \frac{\cos\theta - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}.$$

При $N = 1$, $M = -1$, что соответствует отражению от идеально проводящей поверхности, приходим к формулам (10).

Дифференциальные параметры кривизны волновой поверхности на произвольном расстоянии от поверхности отражающего тела получены в Приложении.

3. Рассмотрим теперь преломление волны на границе раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2. Значение поля в точке $\boldsymbol{R}$, находящейся в среде 2, можно определить по формуле, аналогичной (12):

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\boldsymbol{R}) &= \frac{ikn_2}{2\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{n}\tilde{\boldsymbol{\nu}}}{\rho}\exp\,[ikn_1(\psi_0 + n\rho)]\,\tilde{A}(\boldsymbol{r})\,dS; \\ \tilde{\boldsymbol{\nu}} &= (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})/|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|; \quad n = n_2/n_1; \end{aligned} \tag{14}$$

ψ_0 — фаза волны, падающей на поверхность из среды 1, $\tilde{A}(\boldsymbol{r}) = W(\beta) A_0(\boldsymbol{r})$ — амплитуда преломленной волны на поверхности S, $W(\beta)$ — коэффициент прохождения ($\cos\beta = -\boldsymbol{n}\tilde{\boldsymbol{\nu}}$). Разлагая показатель экспоненты в ряд вблизи точки стационарной фазы*, которая определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(\psi_0 + n\rho) = 0, \tag{15}$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\boldsymbol{R}) &= \frac{n\cos\beta}{\rho}\sqrt{\frac{a}{D}}\,e^{ikn_2\rho}\,W(\beta)\,U_0(\boldsymbol{r}), \\ D &= \det D_{\alpha\beta}, \quad D_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}(n\rho + \psi_0), \\ U_0(\boldsymbol{r}) &= A_0(\boldsymbol{r})\exp\,[ikn_1\psi_0(\boldsymbol{r})]. \end{aligned} \tag{16}$$

* См. замечание после формулы (2).

Используя обозначения, введенные в Приложении при вычислении $C_{\alpha\beta}$, выразим $D_{\alpha\beta}$ через дифференциальные формы поверхности и волнового фронта падающей волны:

$$D_{\alpha\beta}=(n\cos\beta-\cos\theta)\,b_{\alpha\beta}+\frac{n}{\rho}\,(a_{\alpha\beta}-\lambda_\alpha\lambda_\beta\sin^2\beta)-$$

$$-\bar{a}^{\nu\sigma}\bar{b}_{\sigma\varepsilon}\frac{\partial x^k}{\partial v^\nu}\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}.$$

При этом мы воспользовались соотношением, следующим из (15):

$$n\tilde{\nu}=\nu+n\,(\cos\theta-n\cos\beta),\quad \sin\theta=n\sin\beta.$$

Вычисление определителя D по формуле $D=(a/2)\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta}$ приводит к сверткам, которые найдены в Приложении. Используя (П.6а)—(П.6и), получаем

$$\tilde{U}(\boldsymbol{R})=\frac{W(\beta)}{(\tilde{K}_1\rho^2-2\tilde{H}_1\rho+1)^{1/2}}\,e^{ikn_3\rho}U_0(\boldsymbol{r}). \tag{17}$$

Здесь $\tilde{K}_1$ — гауссова и $\tilde{H}_1$ — средняя кривизна волнового фронта преломленной волны на поверхности S в точке преломления $\boldsymbol{r}$; они связаны с соответствующими параметрами кривизны поверхности S и фронта падающей волны соотношениями

$$\tilde{K}_1=\frac{1}{n^2\cos^2\beta}\Big\{(n\cos\beta-\cos\theta)^2K+\cos^2\theta\,\bar{K}+(\cos\theta-n\cos\beta)\times$$

$$\times[\cos^2\theta\,\bar{\varkappa}\,(2H-\varkappa)+\varkappa(2\bar{H}-\bar{\varkappa})+2\cos\theta\,\operatorname{sgn}\varphi\,\operatorname{sgn}\bar{\varphi}\,[(2H\varkappa-\varkappa^2-K)\times$$

$$\times(2\bar{H}\bar{\varkappa}-\bar{\varkappa}^2-\bar{K})]^{1/2}]\Big\}; \tag{18а}$$

$$\tilde{H}_1=-\frac{1}{2n}\left[(n\cos\beta-\cos\theta)(2H+\varkappa\operatorname{tg}^2\beta)-2\bar{H}+\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\beta}-\operatorname{tg}^2\beta\right)\bar{\varkappa}\right]. \tag{18б}$$

Остальные дифференциальные характеристики поверхности фронта преломленной волны ($\tilde{\varkappa}_1$ и $\operatorname{sgn}\tilde{\varphi}_1$) могут быть найдены тем же путем, что и для отраженной волны, если исходить из параметрического представления волновой поверхности в среде 2:

$$X^i=x^i+\frac{1}{n}(\chi-\psi_0)\tilde{\nu}^i,\qquad x^i\in S,\ X^i\in\bar{S}_1.$$

Вычисления, не отличающиеся в принципе от приведенных в Приложении, дают (при $\rho=0$)

$$\tilde{\varkappa}_1=\frac{\cos^2\theta}{n\cos^2\beta}\,\bar{\varkappa}+\frac{\cos\theta-n\cos\beta}{n\cos^2\beta}\,\varkappa; \tag{18в}$$

$$\operatorname{sgn}\tilde{\varphi}_1\,(2\tilde{H}_1\tilde{\varkappa}_1-\tilde{\varkappa}_1^2-\tilde{K}_1^2)^{1/2}=\frac{\cos\theta-n\cos\beta}{n\cos\beta}\operatorname{sgn}\varphi\,(2H\varkappa-\varkappa^2-K)^{1/2}-$$

$$-\frac{\cos\theta}{n\cos\beta}\operatorname{sgn}\bar{\varphi}\,(2\bar{H}\bar{\varkappa}-\bar{\varkappa}^2-\bar{K})^{1/2}. \tag{18г}$$

Значение параметров $\tilde{K}_1$, $\tilde{H}_1$ и $\tilde{\varkappa}_1$ в точке R, находящейся на произвольном расстоянии ρ от соответствующей ей точки преломления $r \in S$, связано с их значением при $\rho=0$ (формулы (18а)—(18г)) теми же соотношениями (П. 19), что и в отраженной волне.

В случае преломления электромагнитных волн векторы $\tilde{e}, \tilde{h}$ преломленного поля связаны с напряженностью e^0, h^0 падающего поля на поверхности S соотношениями типа (10) (при очевидных переобозначениях $\bar{K}_1$, $H_1 \to \tilde{K}_1$, $\tilde{H}_1$); при этом тензоры $\tilde{T}_{ik}$ имеют вид

$$\tilde{T}_{ik}^{(e)} = R\delta_{ik} - \frac{1}{n\sin^2\theta}\{[nR - Q(n\sin^2\beta + \cos\beta\cos\theta)]\, n_i n_k + (R n\cos\theta - Q\cos\beta)\,\nu_i n_k\},$$
$$\tilde{T}_{ik}^{(h)} = Q\delta_{ik} - \frac{1}{\sin^2\theta}\{[Q - nR(n\sin^2\beta + \cos\beta\cos\theta)]\, n_i n_k + (Q\cos\theta - nR\cos\beta)\,\nu_i n_k\}, \tag{19}$$

R, Q — коэффициенты прохождения во вторую среду тангенциальных компонент электрического и магнитного поля соответственно:

$$R = 1 + M, \quad Q = 1 + N.$$

4. Полученные выше результаты относились к случаям однократного отражения (преломления) волны произвольной формы на криволинейной границе. В тех случаях, когда в точку наблюдения приходят лучи после ряда последовательных отражений (преломлений) в точках $r_1, r_2, \ldots, r_q$, приведенные формулы позволяют установить рекуррентные соотношения для амплитуды и дифференциальных параметров кривизны фронта волны после каждого отражения (преломления).

В заключение отметим, что наше рассмотрение, основанное на приближении Кирхгофа, перестает быть справедливым при приближении к границе геометрической тени, где невозможно представить поле в виде суммы падающей и отраженной волны, и внутри тени, где уравнения (2), (15) не имеют решений. Кроме того, мы предполагали, что уравнения (2), (15) не имеют бесконечного континуального множества решений, а определители C и D не обращаются в нуль. В противном случае, как следует из работы Повзнера и Сухаревского [8], точка наблюдения R находится на каустике отраженной (преломленной) волны и приближение геометрической оптики заведомо неприменимо. Если же существует несколько точек отражения (преломления), т. е. если уравнения (2), (15) имеют счетное множество решений, то полное поле представляется в виде суммы вкладов от каждой точки отражения (преломления).

Автор благодарит Ф. Г. Басса за руководство работой и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Наряду с системой криволинейных гауссовых координат u_α ($\alpha = 1, 2$) на поверхности, введем произвольную декартову прямоугольную систему координат x_i ($i = 1, 2, 3$) в пространстве. Латинскими индексами, принимающими значения 1, 2, 3, мы обозначим пространственные компоненты тензоров, а греческими, принимающими два значения 1 и 2 — поверхностные. При этом будем различать величины с верхними

и нижними греческими индексами — контравариантные и ковариантные составляющие тензоров на поверхности. По дважды повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование. В дальнейшем, по возможности, мы будем придерживаться обозначений, принятых в монографии Мак-Коннела [10].

1. Вычислим в точке зеркального отражения детерминант поверхностного тензора

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2(\rho + \psi_0)}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x^i} + \frac{\partial \rho}{\partial x^i}\right)\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \\ + \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \qquad (\text{П.I})$$

$$(x^i \in S).$$

Из уравнения для точки стационарной фазы (см. (2))

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(\rho + \psi_0) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = 0$$

следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x^i} = -2\cos\theta\, n_i, \quad \cos\theta = -n_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -n_i \frac{\partial \psi_0}{\partial x_i}. \qquad (\text{П.2})$$

Введем криволинейные координаты v^α на волновой поверхности $\bar{S}$ падающей волны, удовлетворяющие тем же условиям в точке зеркального отражения, что и u^α.

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{1}{\rho}(\delta_{ik} - \bar{\nu}_i \bar{\nu}_k), \quad \bar{\nu} = \frac{\rho}{\rho},$$

и используя (П. 2), получим для $C_{\alpha\beta}$ выражение

$$C_{\alpha\beta} = -2\cos\theta\, b_{\alpha\beta} + \frac{1}{\rho}[a_{\alpha\beta} - \sin^2\theta \lambda_\alpha \lambda_\beta] - \bar{a}^{\sigma\nu}\bar{b}_{\sigma\varepsilon}\frac{\partial x^k}{\partial v^\nu}\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}. \qquad (\text{П.3})$$

Здесь введены, согласно обычным определениям, принятым в дифференциальной геометрии, первая и вторая квадратичные формы отражающей поверхности S:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}, \quad b_{\alpha\beta} = n_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \quad (x^i \in S) \qquad (\text{П.4а})$$

и волновой поверхности $\bar{S}$:

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial v^\beta}, \quad \bar{b}_{\alpha\beta} = \nu_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \quad (x^i \in \bar{S}), \qquad (\text{П.4б})$$

а также единичный вектор λ_α касательной к поверхности S в плоскости падения:

$$\sin\theta\lambda_\alpha = \nu_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad \sin\theta\lambda^\alpha = \nu^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}. \qquad (\text{П.4в})$$

Кроме того, мы воспользовались соотношением [10]

$$\frac{\partial \nu_k}{\partial v^\varepsilon} = -\bar{a}^{\sigma\nu}\bar{b}_{\sigma\varepsilon}\frac{\partial x^k}{\partial v^\nu}.$$

Интересующий нас детерминант можно записать в виде свертки компонент $C_{\alpha\beta}$ с антисимметричными тензорами $\varepsilon^{\alpha\beta}$:

$$C = \frac{a}{2}\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}, \quad \varepsilon^{\alpha\gamma} = e^{\alpha\gamma}/\sqrt{a}, \qquad e^{11}=e^{22}=0, \quad e^{12}=-e^{21}=1. \tag{П.5}$$

Легко вычисляются простейшие свертки, возникающие при подстановке (П.3) в (П.5):

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}a_{\alpha\beta}\,a_{\gamma\delta} = 2, \tag{П.6а}$$

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}a_{\alpha\beta}\lambda_\gamma\lambda_\delta = 1, \tag{П.6б}$$

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}b_{\alpha\beta}\,b_{\gamma\delta} = 2(b/a) = 2K, \tag{П.6в}$$

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}b_{\alpha\beta}\,a_{\gamma\delta} = a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = 2H, \tag{П.6г}$$

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}b_{\alpha\beta}\lambda_\gamma\lambda_\delta = \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}b^\beta_\alpha\lambda_\gamma\lambda^\delta = b^\varkappa_\alpha\lambda_\gamma\lambda^\gamma - b^3_\alpha\lambda^\alpha\lambda_\beta = 2H - \varkappa. \tag{П.6д}$$

Используя соотношения

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^k} = \delta^i_k - n^i n_k, \quad \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} = a_{\beta\gamma}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^k} = a^{\gamma\beta}\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \tag{П.7}$$

(δ^i_k — символ Кронекера) и проводя обычные операции тензорного анализа, можно вычислить и более сложные свертки:

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}a_{\alpha\beta}\,\bar{b}^\nu_\varepsilon\frac{\partial x^k}{\partial v^\nu}\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\frac{\partial x^k}{\partial u^\delta} = 2\bar{H} - \sin^2\theta\,\bar{\varkappa}, \tag{П.6е}$$

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}\lambda_\alpha\lambda_\beta\,\bar{b}^\nu_\varepsilon\frac{\partial x^k}{\partial v^\nu}\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\frac{\partial x^k}{\partial u^\delta} = 2\bar{H} - \bar{\varkappa}, \tag{П.6ж}$$

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}\bar{b}^\nu_\varepsilon\bar{b}^\varphi_\xi\frac{\partial x^k}{\partial v^\nu}\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x^i}\frac{\partial x^m}{\partial v^\varphi}\frac{\partial v^\xi}{\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}\frac{\partial x^n}{\partial u^\gamma}\frac{\partial x^m}{\partial u^\delta} = 2\bar{K}\cos^2\theta. \tag{П.6з}$$

Необходимо вычислить еще одно слагаемое в (П.5), появляющееся при свертке первого и последнего члена в (П.3). Вычисления проведем в специальной системе координат. Введем единичные векторы $\boldsymbol{e}_{(1)}$ и $\boldsymbol{e}_{(2)}$ главных направлений на поверхности S так, что они в совокупности с $\boldsymbol{n}$ образуют правую тройку векторов в пространстве. Построим такую же систему $\bar{\boldsymbol{e}}_{(1)}$, $\bar{\boldsymbol{e}}_{(2)}$ и $\boldsymbol{\nu}$, связанную с поверхностью $\bar{S}$. Для определенности* всегда в дальнейшем будем так нумеровать орты главных направлений, что $\varkappa_2 \geqslant \varkappa_1$, $\bar{\varkappa}_2 \geqslant \bar{\varkappa}_1$. В выбранных таким способом базисах тензоры $b_{\alpha\beta}$ и $\bar{b}_{\alpha\beta}$ диагональны:

$$b^\beta_\alpha = \varkappa_{(1)}\delta^\beta_1\delta^1_\alpha + \varkappa_{(2)}\delta^\beta_2\delta^2_\alpha, \quad \bar{b}^\mu_\nu = \bar{\varkappa}_{(1)}\delta^\mu_1\delta^1_\nu + \bar{\varkappa}_{(2)}\delta^\mu_2\delta^2_\nu. \tag{П.8}$$

* После наложенных условий. все еще остается неоднозначность в выборе координат (одновременная замена $\boldsymbol{e}_{(1)} \to -\boldsymbol{e}_{(1)}$, $\boldsymbol{e}_{(2)} \to -\boldsymbol{e}_{(2)}$), однако, для дальнейшего это несущественно.

Обозначим через φ и $\bar{\varphi}$ углы между плоскостью падения и векторами $e_{(2)}$ и $\bar{e}_{(2)}$ соответственно ($-\pi/2<\varphi, \bar{\varphi} \leqslant \pi/2$). Знаки углов φ и $\bar{\varphi}$ определяются по правилу винта относительно соответствующих нормалей n и ν. Совокупность углов $\pi-\theta$, $\varphi-\pi$ и $\pi-\bar{\varphi}$ есть углы Эйлера при переходе от системы координат $e_{(1)}$, $e_{(2)}$, n к $\bar{e}_{(1)}$, $\bar{e}_{(2)}$, $\bar{\nu}$. Пользуясь (П.8) и известной [11] матрицей перехода от составляющих вектора в одной системе к составляющим в другой, получим после несложных, но громоздких вычислений формулу

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta} b_{\alpha\beta}\bar{b}^{\nu}_{\varepsilon}\frac{\partial x^m}{\partial v^{\nu}}\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial u^{\gamma}}\frac{\partial x^n}{\partial u^{\delta}} = \cos^2\theta\,\bar{\varkappa}\,(2H-\varkappa) + \\ +\varkappa(2\bar{H}-\bar{\varkappa})+(1/2)\cos\theta\sin(2\bar{\varphi})\sin(2\bar{\varphi})\,(\varkappa_{(2)}-\varkappa_{(1)})(\bar{\varkappa}_{(2)}-\bar{\varkappa}_{(1)}). \qquad (\text{П.6и})$$

Если воспользоваться формулой Эйлера для кривизны нормального сечения:

$$\varkappa=\varkappa_{(2)}\cos^2\varphi+\varkappa_{(1)}\sin^2\varphi,\quad \bar{\varkappa}=\bar{\varkappa}_{(2)}\cos^2\bar{\varphi}+\bar{\varkappa}_{(1)}\sin^2\bar{\varphi}, \qquad (\text{П.9})$$

то для C, как функции параметров $\varkappa_{(1)}$, $\varkappa_{(2)}$, φ, $\bar{\varkappa}_{(1)}$, $\bar{\varkappa}_{(2)}$, $\bar{\varphi}$ и θ, получаем из (П.6а)—(П.6и) выражение

$$\frac{C}{a\cos\theta} = \cos\theta\,(4\varkappa_{(1)}\varkappa_{(2)}+\bar{\varkappa}_{(1)}\bar{\varkappa}_{(2)})+2\cos^2\theta\,(\bar{\varkappa}_{(2)}\cos^2\bar{\varphi}+\bar{\varkappa}_{(1)}\sin^2\bar{\varphi})\times \\ \times(\varkappa_{(1)}\cos^2\varphi+\varkappa_{(2)}\sin^2\varphi)+2(\varkappa_{(1)}\sin^2\bar{\varphi}+\varkappa_{(2)}\cos^2\varphi)(\bar{\varkappa}_{(1)}\cos^2\bar{\varphi}+\bar{\varkappa}_{(2)}\sin^2\bar{\varphi})+ \\ +\cos\theta\sin(2\varphi)\sin(2\bar{\varphi})\,(\varkappa_{(2)}-\varkappa_{(1)})(\bar{\varkappa}_{(2)}-\bar{\varkappa}_{(1)})- \qquad (\text{П.10}) \\ \times\frac{2}{\rho}\Big[\cos^2\theta(\varkappa_{(1)}+\varkappa_{(2)})+\cos\theta\,\frac{\varkappa_{(1)}+\varkappa_{(2)}}{2}+ \\ +\sin^2\theta(\varkappa_{(2)}\cos^2\varphi+\varkappa_{(1)}\sin^2\varphi)\Big]+\frac{\cos\theta}{\rho^2}.$$

Предпочтительнее, однако, пользоваться другой совокупностью независимых параметров H, K, $\varkappa$, $\operatorname{sgn}\varphi$, $\bar{H}$, $\bar{K}$, $\bar{\varkappa}$, $\operatorname{sgn}\bar{\varphi}$ и θ, которые также дают полное описание дифференциальных свойств поверхностей S и $\bar{S}$ с учетом их взаимного расположения. При этом мы получаем вместо (П.10) формулы (4) и (5).

2. Исследуем теперь дифференциальные свойства волновой поверхности $\bar{S}_1$ отраженной волны. Однопараметрическое семейство волновых фронтов представим в виде [4]

$$X^i=x^i+[\chi-\psi_0]\,\bar{\nu}^i \quad (X^i\in\bar{S}_1,\quad x^i\in S), \qquad (\text{П.11})$$

где x^i — точка зеркального отражения, соответствующая точке X^i на волновой поверхности, $\chi=\rho+\psi_0$ — фаза отраженной волны в точке $X^i\in\bar{S}_1$.

Рассмотрим сначала свойства поверхности $\bar{S}_1$ при $\rho\to 0$, т. е. вблизи точки зеркального отражения. Используя связь, вытекающую из (П.2): $\bar{\nu}^i=\nu^i-2n^i n_k\nu_k$, получаем для квадратичных форм поверхности $\bar{S}_1$ при $\rho=0$ ($\chi=\text{const}$) формулы, совпадающие с результатами [4]:

$$\bar{a}^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial X^i}{\partial u^\beta} = a_{\alpha\beta} - \sin^2\theta\lambda_\alpha\lambda_\beta; \qquad (\text{П.12а})$$

$$\bar{b}^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial \bar{\nu}^i}{\partial u^\beta}\frac{\partial X^i}{\partial u^\alpha} = 2\cos\theta\, b_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^k\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}; \qquad (\text{П.12б})$$

$$\bar{a}^{\alpha\beta}_{(1)} = \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}\frac{a_{\gamma\delta} - \sin^2\theta\,\lambda_\alpha\lambda_\delta}{\cos^2\theta}; \quad \det\bar{a}^{(1)}_{\alpha\beta} = a\cos^2\theta = \bar{a}^{(1)}. \qquad (\text{П.12в})$$

Гауссова и средняя кривизна $\bar{K}_1$ и $\bar{H}_1$ поверхности $\bar{S}_1$ связаны с квадратичными формами соотношениями

$$\bar{K}_1 = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^{\alpha\gamma}_{(1)}\bar{\varepsilon}^{\beta\delta}_{(1)}\bar{b}^{(1)}_{\alpha\beta}\bar{b}^{(1)}_{\gamma\delta}, \quad \bar{H}_1 = \frac{1}{2}\bar{a}^{\alpha\beta}_{(1)}\bar{b}^{(1)}_{\alpha\beta}, \quad \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}_{(1)} = e^{\alpha\beta}/\sqrt{\bar{a}^{(1)}};$$

вычисление этих выражений при помощи (П.6а)—(П.6и) приводит к формулам (5а) и (5б).

Кривизна нормального сечения $\bar{\varkappa}_1$ поверхности $\bar{S}_1$ плоскостью падения (при $\rho = 0$) может быть вычислена по формуле

$$\bar{\varkappa}_1 = \bar{b}^{(1)}_{\alpha\beta}\bar{\lambda}^\alpha_{(1)}\bar{\lambda}^\beta_{(1)}, \qquad (\text{П.13})$$

где $\bar{\lambda}^\alpha_{(1)}$ — единичный контравариантный вектор, касательный к $\bar{S}_1$ в плоскости падения (этим он определяется с точностью до знака). Легко видеть, что $\bar{\lambda}^\alpha_{(1)}$ связан с введенными раньше λ^α соотношениями

$$\bar{\lambda}^\alpha_{(1)} = \frac{1}{\cos\theta}\lambda^\alpha, \quad \bar{\lambda}^{(1)}_\alpha = \cos\theta\,\lambda_\alpha. \qquad (\text{П.14})$$

Используя для вычисления свертки (П.13) формулы (П.4в), (П.7)—(П.9), получим

$$\bar{\varkappa}_1 = \bar{\varkappa} + 2\varkappa/\cos\theta. \qquad (\text{П.15})$$

Трех инвариантов $\bar{K}_1$, $\bar{H}_1$ и $\bar{\varkappa}_1$ еще недостаточно для полного описания дифференциальных свойств поверхности $\bar{S}_1$. Действительно, зная $\bar{K}_1$ и $\bar{H}_1$, мы можем найти главные кривизны из соотношений $\bar{K}_1 = \bar{\varkappa}^{(1)}_1\bar{\varkappa}^{(2)}_1$; $2\bar{H}_1 = \bar{\varkappa}^{(1)}_1 + \bar{\varkappa}^{(2)}_1$. Нормальная же кривизна $\bar{\varkappa}_1$, будучи связана с главными кривизнами соотношениями Эйлера (П.9), определяет угол $\bar{\varphi}_1$ между нормальным сечением и направлением с наименьшей кривизной на $\bar{S}_1$ лишь с точностью до $\operatorname{sgn}\bar{\varphi}_1$, который является четвертым независимым параметром.

Знак $\bar{\varphi}_1$ вычислим следующим путем. Из (П.9) следует, что

$$(\bar{\varkappa}^1_{(2)} - \bar{\varkappa}^1_{(1)})\sin\bar{\varphi}_1\cos\bar{\varphi}_1 = \operatorname{sgn}\bar{\varphi}_1(2\bar{H}_1\bar{\varkappa}_1 - \bar{\varkappa}_1^2 - \bar{K}_1)^{1/2}. \qquad (\text{П.16})$$

С другой стороны, имеем [10]

$$(\bar{\varkappa}^1_{(2)} - \bar{\varkappa}^1_{(1)})\sin\bar{\varphi}_1\cos\bar{\varphi}_1 = \bar{h}^{(1)}_{\alpha\beta}\bar{\lambda}^\alpha_{(1)}\bar{\lambda}^\beta_{(1)}, \quad \bar{h}^{(1)}_{\alpha\beta} = \bar{\varepsilon}^{\gamma\delta}_{(1)}\bar{a}^{(1)}_{\gamma\alpha}\bar{b}^{(1)}_{\delta\beta}. \qquad (\text{П.17})$$

Вычисляя свертки по формулам (П.6), приходим в результате к соотношению

$$\operatorname{sgn}\bar{\varphi}_1(2\bar{H}_1\bar{\varkappa}_1 - \bar{\varkappa}_1^2 - \bar{K}_1)^{1/2} = 2\operatorname{sgn}\varphi(2H\varkappa - \varkappa^2 - K)^{1/2} - \operatorname{sgn}\bar{\varphi}(2\bar{H}\bar{\varkappa} - \bar{\varkappa}^2 - \bar{K})^{1/2}. \qquad (\text{П.18})$$

Из простых геометрических соображений легко получить формулы для кривизны $\overline{K}_1$, $\overline{H}_1$ и $\overline{\varkappa}_1$ волновой поверхности и на любом расстоянии ρ (вдоль луча) от поверхности тела:

$$\overline{K}_1(R) = \frac{\overline{K}_1(r)}{\overline{K}_1(r)\rho^2 - 2\overline{H}_1(r)\rho + 1}, \quad \overline{H}_1(R) = \frac{\overline{H}_1(r) - \rho\overline{K}_1(r)}{\overline{K}_1(r)\rho^2 - 2\overline{H}_1(r)\rho + 1},$$

$$\overline{\varkappa}_1(R) = \frac{\overline{\varkappa}_1(r)}{1 - \rho\overline{\varkappa}_1(r)}, \quad r \in S, \quad R \in \overline{S}_1, \quad \rho = |R - r|. \tag{П.19}$$

Формулы (5), (П.15), (П.18) в совокупности с (П.19) дают полное описание дифференциальных свойств волновой поверхности $\overline{S}_1$ — ориентацию главных направлений и значение соответствующих им главных кривизна,— выражая их через параметры отражающей поверхности S и фронта падающей волны $\overline{S}$ в точке зеркального отражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Keller, R. M. Lewis, B. D. Seckler, Comm. Pure. Appl. Math., 9, 207 (1956).
2. В. М. Бабич, А. С. Алексеев, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 17 (1958).
3. В. М. Бабич, А. С. Алексеев, Б. Я. Гельчинский, Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, изд. ЛГУ, вып. 5, 1961
4. В. А. Фок, ЖЭТФ, **20**, 961 (1950).
5. В. А. Фок, УФН, **36**, 308 (1948).
6. J. B. Keller, H. B. Keller, J. Opt Soc. Amer., **40**, 48 (1950).
7. М. И. Контарович, Ю. К. Муравьев, ЖТФ, **22**, 394 (1952).
8. А. Я. Повзнер, И. В Сухаревский, Ж. вычисл. математ и мат. физики, **1**, 224 (1961).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
10. А. Дж. Мак-Коннел, Введение в тензорный анализ, Физматгиз, М., 1963.
11. Г. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
5 февраля 1965 г

REFLECTION AND REFRACTION OF ARBITRARY WAVE FRONTS ON CURVILINEAR INTERFACE

I. I. Fux

In the geometrical optics approximation the problem has been solved of acoustical and electromagnetic wave reflection and refraction (wave front surface being arbitrary) on a curvilinear interface of arbitrary form. The amplitude and phase of reflected (refracted) wave have been calculated as well as differential parameters of wave fronts curvature. The results are given in an invariant form independent of the choice of curvilinear coordinate system on the surface.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371.132.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИЛЬНОГО МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ УШИРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Р. Ф. Бойкова и Э. Е. Фрадкин

Рассматриваются нелинейные эффекты при прохождении сильного монохроматического излучения в диэлектрике. Получены законы поглощения (усиления) для однородного и неоднородного уширения спектральной линии поглощения (усиления) в среде.

1. ВЫВОД НЕЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ПОГЛОЩЕНИЯ (УСИЛЕНИЯ)

В настоящей работе рассматривается прохождение стационарного монохроматического излучения в полубесконечном диэлектрике. Распространение поля в среде описывается одномерным неоднородным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t}, \tag{1}$$

где D — вектор дипольного момента выделенного перехода в единице объема вещества.

Пусть на границу среды $z = 0$ падает монохроматическая волна $W = E_0 \cos(\omega t)$. В среде вдоль оси z, согласно принципу излучения, распространяется волна

$$W = E(z)\cos[\omega t - kz + \varphi(z)]. \tag{2}$$

В силу стационарности задачи амплитуда поля $E(z)$ и фаза $\varphi(z)$ не зависят от времени*.

Для монохроматической волны дипольный момент вещества может быть представлен в виде

$$4\pi D = \chi \frac{E(z)}{2} \exp\{i[\omega t - kz + \varphi(z)]\} + \text{к. с.}, \tag{3}$$

где $\chi = \chi' - i\chi''$ — комплексная макроскопическая поляризуемость среды. В общем случае χ является тензором. Однако в пренебрежении высшими временными гармониками «продольная» поляризация ($D \parallel z$) не оказывает влияния на распространение плоской волны [1]. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь «поперечную» поляризацию, т .е. считать $D \parallel E$ и χ — скаляром**. Соответственно уравнение (1) можно считать скалярным. Как известно, χ' описывает дисперсию,

---

* Условие, при котором можно пренебречь второй и более высокими временными гармониками, рассматриваются в дальнейшем (см. формулу (9)).

** Поворот вектора поперечной поляризации D при распространении поляризованной волны (2) в среде не может быть описан, если ограничиться двухуровневой схемой среды, как это сделано в разделе 2.

а χ'' — поглощение или усиление в среде на длине волны, причем в случае поглощения $\chi''>0$. В дальнейшем будет показано, что при достаточно сильных внешних полях χ' и χ'' являются функциями поля $E(z)$. Конкретный вид $\chi'(E)$ и $\chi''(E)$ зависит от типа уширения спектральной линии поглощения (усиления) и будет определен в разделе 3.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим стационарное уравнение для поля в нелинейной среде:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\left[1+\frac{\chi(E)}{\varepsilon_0}\right]\right\}E(z)\exp\{-i[kz-\varphi(z)]\}=0, \qquad (1a)$$

где $k=(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_0}$ — волновой вектор в среде без учета дисперсии на выделенном переходе. Разделяя вещественную и мнимую части в уравнении (1а), получим уравнения для амплитуды и фазы поля:

$$\begin{gathered}\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+2\frac{1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}E-\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2E=-\frac{\chi'}{\varepsilon_0}E;\\ \frac{2}{k}\left(1-\frac{1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial E}{\partial z}-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}E=-\frac{\chi''}{\varepsilon_0}E.\end{gathered} \qquad (4)$$

В большинстве практических случаев выполняется условие малости $\chi(|\chi|<1)$; поэтому можно решать уравнения методом последовательных приближений. Рассматривая среду с населенностью, не зависящей от z, с точностью до членов второго порядка малости по χ получим выражения

$$\begin{gathered}\frac{1}{k}\frac{\partial E}{\partial z}=-\frac{\chi''}{2\varepsilon_0}E+\frac{\chi''}{8\varepsilon_0^2}\frac{\partial}{\partial E}(\chi' E^2);\\ \frac{1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\chi'}{2\varepsilon_0}+\frac{1}{8}\left(\frac{\chi'}{\varepsilon_0}\right)^2-\frac{1}{16(\varepsilon_0)^2}\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial E}(\chi''E)^2.\end{gathered} \qquad (5)$$

С точностью до членов первого порядка малости уравнения (5) соответствуют усредненным на длине волны уравнениям для одной распространяющейся волны [2, 3, 10]. Члены следующих порядков малости можно трактовать как результат интерференции отраженной на оптических неоднородностях волны с проходящей волной. При усреднении отраженная волна для нулевых граничных условий пропадает полностью [3].

Из уравнений (5) получим выражения для изменения интенсивности потока:

$$\begin{gathered}S(z)=\frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi}E^2(z);\\ \frac{dS}{dz}=-\frac{k\chi''}{\varepsilon_0}S\left[1-\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial S}(\chi' S)\right].\end{gathered} \qquad (6)$$

При учете только члена первого порядка малости уравнение (6) соответствует уравнению переноса. С учетом членов второго порядка выражение (6) можно записать в виде

$$\frac{dS}{dz}=-\frac{k^2}{k'}\frac{\chi''}{\varepsilon_0}S;\quad \frac{k}{k'}=1-\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{d(\chi' S)}{dS}, \qquad (6a)$$

где k' — учитывает изменение длины волны в среде за счет нелинейной дисперсии на выделенном переходе. В линейном пределе $k'=k(1+\chi'/2\varepsilon_0)$

соответствует изменению длины волны за счет дисперсии $\lambda = (2\pi/k)(1 - \partial\varphi/kdz)^{-1}$ с точностью до членов первого порядка малости. Как будет показано в разделе 4, независимо от типа уширения спектральной линии при $S \to \infty d(\chi' S)/dS \to 0$ и, соответственно, $k/k' \to 1$, т. е. в случае сильной нелинейности влияние дисперсии ослабевает. Однако при этом и самое поглощение падает (при $S \to \infty$ $\chi'' \to 0$; см. раздел 4). Оба эффекта являются следствием выравнивания населенностей верхнего и нижнего уровней перехода, вызванного поглощением (или вынужденным излучением) интенсивного потока радиации.

2. ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ МОЛЕКУЛЫ

Чтобы получить выражение для макроскопической поляризуемости в явном виде, необходимо знать наведенный дипольный момент отдельной молекулы. Исходными уравнениями являются уравнения матрицы плотности среды, взаимодействующей с полем излучения. Учитывая релаксации феноменологически (через времена жизни отдельных переходов) и ограничиваясь рассмотрением двух энергетических уровней молекулы, приходим к уравнениям*

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} + v\frac{\partial \rho_{11}}{\partial z} + \Gamma_1 \rho_{11} = \frac{i}{\hbar}\rho_{12}(\mathcal{E}d_{21}) - \frac{i}{\hbar}\rho_{21}(\mathcal{E}d_{12}) + F_{11} + \Gamma_{21}\rho_{22};$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} + v\frac{\partial \rho_{22}}{\partial z} + \Gamma_2 \rho_{22} = \frac{i}{\hbar}\rho_{21}(\mathcal{E}d_{12}) - \frac{i}{\hbar}\rho_{12}(\mathcal{E}d_{21}) + F_{22}; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} + v\frac{\partial \rho_{12}}{\partial z} = i\omega_0 \rho_{12} - \Gamma\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}d_{12})R;$$

$$R = \rho_{11} - \rho_{22}; \qquad \rho_{12} = \rho_{21},$$

где d_{12} и d_{21} — матричные элементы дипольного перехода, $1/\Gamma_1$ и $1/\Gamma_2$ — полные времена жизни молекулы на нижнем (первом) и верхнем (втором) уровнях по отношению ко всем видам релаксаций, Γ_{21} — вероятность спонтанного и безызлучательного распада уровня 2 за счет переходов на уровень 1, $1/\Gamma$ — время когерентного взаимодействия молекулы с полем излучения ($1/\Gamma < 1/\Gamma_1$, $1/\Gamma_2$), ω_0 — частота перехода, F_{11} и F_{22} — скорости прихода молекул на 1 и 2 уровни за счет накачки, v — тепловая скорость молекулы.

Нужно отметить, что уравнения справедливы для газовых сред, где тепловые скорости могут стать сравнимыми со скоростями релаксационных переходов ($v \geqslant c\Gamma/\omega$). В твердых телах скорость частиц практически равна нулю, и в уравнениях (7) можно опустить член с производной от матрицы плотности по координате. Уравнения (7), как и все дальнейшее рассмотрение, применимы как в случае термодинамически равновесной среды, так и в случае неравновесной среды, включая активную среду.

Дипольный момент молекулы определяется через недиагональные элементы матрицы плотности:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{d}_{21}\rho_{12} + \boldsymbol{d}_{12}\rho_{21}. \qquad (8)$$

Будем считать, что молекулы среды поляризуются с частотой внешнего поля. В действительности поляризация среды может иметь высшие гармоники. Приближение разделяющихся гармоник накладывает ограни-

* При оптических переходах становится существенным учет разных времен жизни на верхнем и нижнем уровнях [4].

чение на интенсивность возбуждающего поля. Известно [5], что условием применимости этого приближения является неравенство

$$\frac{|E|^2 |d_{12}|^2}{\hbar^2 \omega^2} \ll 1, \tag{9}$$

которое, однако, не является сильным ограничением в оптической области частот. Стационарные решения уравнения (7) ($\partial \rho_{11}/\partial t = \partial \rho_{22}/\partial t = 0$) дают для дипольного момента молекулы следующее выражение:

$$P = \alpha \frac{E}{2} \exp\{i[\omega t - kz + \varphi(z)]\} + \text{к. с.},$$

где комплексная поляризуемость молекулы

$$\alpha = \frac{R_0 |d_{12}|^2}{\hbar} \frac{(\omega_0 - \omega + vk) - i\Gamma}{(\omega_0 - \omega + vk)^2 + \Gamma^2(1 + |d_{12}|^2 |E|^2 T/2\hbar^2\Gamma)}. \tag{10}$$

Здесь $R_0 = F_{11}/\Gamma_1 - (F_{22}/\Gamma_2)(1 - \Gamma_{21}/\Gamma_1)$ — стационарное значение R без поля,

$$T = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} - \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_1 \Gamma_2}.$$

Решение такого вида получается, как показано в Приложении, при условиях

$$\left|\frac{vk\chi''}{2\Gamma\varepsilon_0}\right| \ll 1, \qquad \left|\frac{Tvk\chi''}{2\varepsilon_0}\right| \ll 1. \tag{11}$$

В газовых средах при обычных температурах условия неравенства (11) всегда выполняются.

3. ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ СРЕДЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ УШИРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Макроскопическая поляризуемость изотропной среды связана с поляризуемостью частицы по формуле

$$\chi = N \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \frac{dn}{d\omega_0} d\omega_0, \tag{12}$$

где N — плотность частиц среды, взаимодействующих с излучением, $dn/d\omega_0$ — нормированная на единицу функция распределения частиц по собственным частотам перехода ω_0. Здесь возможны два принципиально различных случая. Первый, когда все молекулы среды находятся в одинаковых условиях, $dn/d\omega_0 = \delta(\bar{\omega} - \omega_0)$ ($\bar{\omega}$ — центр линии ансамбля частиц) и, следовательно, поляризуемость единицы объема совпадает по форме частотной и координатной зависимости с поляризуемостью отдельной молекулы. Это случай однородного уширения линии ансамбля частиц. Второй, когда центры спектральных линий отдельных излучателей сдвинуты друг относительно друга, $dn/d\omega_0 = f(\bar{\omega}, \omega_0)$ и, следовательно, поляризуемость χ зависит от вида функции распределения частиц по частотам, а линия излучения или поглощения ансамбля не совпадает по форме с линией отдельного излучателя. Это случай неоднородного уширения спектральной линии ансамбля частиц.

Причиной неоднородного уширения могут быть различия в молекулярных полях, действующих на частицу со стороны окружающих ее

молекул, такие столкновения частиц, которые приводят лишь к флуктуациям потенциальной энергии отдельной частицы, а также тепловое движение частиц, вызывающее вследствие эффекта Допплера сдвиги частот отдельных излучателей, пропорциональные их скоростям.

Рассмотрим модель среды, в которой распределение частиц по частотам является функцией Лоренца:

$$\frac{dn}{d\omega_0} = \frac{\Delta}{\pi} \frac{1}{(\bar{\omega}-\omega_0)^2+\Delta^2}, \tag{13}$$

где Δ — полуширина функции распределения ансамбля частиц. Лоренцовская функция распределения позволит получить контур неоднородно уширенной спектральной линии в аналитическом виде, что дает возможность выявить роль неоднородного уширения. Поляризуемость среды, согласно формуле (12), при подстановке выражений (10) с $v=0$ и (13) приобретает вид

$$\chi = \frac{NR_0|d_{12}|^2}{\hbar}\left[(\bar{\omega}-\omega) - i\left(\frac{\Delta}{\sqrt{1+|E|^2|d_{12}|^2\,T/2\hbar^2\Gamma}}+\Gamma\right)\right]\times$$
$$\times\left[(\bar{\omega}-\omega)^2+\left(\Delta+\Gamma\sqrt{1+|E|^2|d_{12}|^2\,T/2\Gamma\hbar^2}\right)^2\right]^{-1}. \tag{14}$$

Из формулы (14) видно, что полная полуширина контура складывается из неоднородной полуширины Δ и однородной полуширины с учетом насыщения $\Delta' = \Gamma\sqrt{1+|E|^2\cdot|d_{12}|^2\,T/2\Gamma\hbar^2}$. При сильных полях члены Δ и Δ' конкурируют, сравнимы по величине, так что в пределе очень сильных полей восстанавливается однородное уширение.

Для практических приложений интересно рассмотреть также функцию распределения вида

$$\frac{dn}{d\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}u}\exp-\left(\frac{\omega_0-\bar{\omega}}{u}\right)^2, \tag{15}$$

где u связано с полушириной неоднородного уширения по формуле

$$\Delta\omega = \sqrt{\ln 2}\,u.$$

Поляризуемость единицы объема для неоднородного уширения гауссова типа (15) имеет вид

$$\chi = \frac{NR_0|d_{12}|^2}{\hbar u}\left[Z_r(\zeta) - i\frac{Z_i(\zeta)}{\sqrt{1+|E|^2|d_{12}|^2\,T/2\Gamma\hbar^2}}\right], \tag{16}$$

где $Z_r(\zeta)$ и $Z_i(\zeta)$ — реальная и мнимая части специальной функции дисперсии плазмы [6, 7],

$$Z(\zeta) = 2i\int_{-\infty}^{i\zeta}\exp-(t^2+\zeta^2)\,dt.$$

Здесь параметр

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{\bar{\omega}-\omega}{u} + i\frac{\Gamma}{u}\sqrt{1+\frac{|E|^2|d_{12}|^2\,T}{2\hbar^2\Gamma}}.$$

Параметр ξ характеризует расстройку, т. е. разность частоты внешнего поля и центра линии ансамбля, а η — отношение однородного (с учетом насыщения) уширения к неоднородному:

$$\eta = \eta_0\sqrt{1+\frac{|E|^2|d_{12}|^2\,T}{2\hbar^2\Gamma}},$$

где $\eta_0 = \Gamma/u$. В газовых средах, где частицы обладают скоростями, распределенными по Максвеллу, усреднение поляризуемости молекулы по скоростям приводит к формуле (16) с заменой u на $u(\omega/\omega_0)$. При этом центр линии ансамбля частиц $\bar{\omega}$ совпадет с центром линии неподвижного излучателя ω_0, а u связано с температурой среды по формуле $u = (\omega_0/c)\sqrt{2kT/\mu}$, где μ — молекулярный вес, k — постоянная Больцмана.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАКОНОВ ПОГЛОЩЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ УШИРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ СРЕДЫ

Исходя из уравнения (6), для конкретного вида функции χ от стационарного потока интенсивности S легко получить дифференциальные законы поглощения (усиления) при различных типах уширения спектральной линии.

Для случая однородного уширения имеем

$$\frac{dS}{dz} = -\frac{k\chi'' S}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\chi'}{1+\sigma^2 S}\right), \tag{17}$$

где

$$\sigma^2 = \frac{4\pi |d_{12}|^2 T}{c\sqrt{\varepsilon_0}\hbar^2 \Gamma} \frac{\Gamma^2}{(\bar{\omega}-\omega)^2 + \Gamma^2}.$$

С точностью до членов первого порядка малости уравнение (17) имеет вид

$$\frac{dS}{S} = -\frac{k_0}{1+\sigma^2 S}\frac{\Gamma^2}{\Delta\bar{\omega}^2 + \Gamma^2} dz; \qquad \Delta\bar{\omega} \equiv \bar{\omega} - \omega, \tag{17a}$$

где $k_0 = NR_0|d_{12}|^2 k\hbar^{-1}\varepsilon_0^{-1}\Gamma^{-1}$ — линейный коэффициент поглощения для центра линии.

Уравнение (17а) для центра линии совпадает с формулой для нелинейного поглощения, полученной из феноменологической теории [8], причем $\sigma^2|_{\Delta\bar{\omega}=0} \equiv \beta$ соответствует параметру нелинейности в этой формуле. Коэффициент σ^2 уменьшается с увеличением расстройки, тем самым нелинейные эффекты сильнее всего проявляются в центре линии. Однако, из (17а) видно, что коэффициент поглощения также падает с увеличением расстройки, так что в целом дальность прохождения света растет.

Параметр нелинейности связан с силой осциллятора соответствующего перехода следующим образом:

$$\beta = \frac{6\pi e^2}{c\hbar m\bar{\omega}\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{T}{\Gamma} f_{12}. \tag{18}$$

Численное значение параметра β не всегда можно рассчитать из-за отсутствия спектроскопических данных. В работе [9] сделана попытка экспериментального определения этого параметра, опираясь на нелинейную формулу усиления феноменологической теории [8]. Однако для сред с разными типами уширения спектральных линий существенно меняется сам закон поглощения. По нашему мнению, необходимо более детальное, чем это сделано в работе [9], описание эксперимента*, чтобы

* В качестве монохроматического источника света для освещения кюветы с веществом можно использовать свет от многомодового лазера, если разность частот мод больше однородного уширения на каждой моде.

сделать выбор между тем или иным законом поглощения и определить величину параметра нелинейности.

Для неоднородного уширения типа Лоренца из (16) получается дифференциальное уравнение вида (см. (14))

$$\frac{dS}{dz} = -\frac{k\chi''}{\varepsilon_0} S\left\{1 - \frac{\chi'}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{\Gamma\beta S(\Delta/\sqrt{1+\beta S} + \Gamma)}{\Delta\bar{\omega}^2 + (\Delta + \Gamma\sqrt{1+\beta S})^2}\right]\right\}, \tag{19}$$

где β, определенное формулой (18), имеет тот же смысл параметра нелинейности.

Для неоднородного уширения Гауссова типа, согласно общему уравнению (6), имеем (см. также (16))

$$\frac{dS}{dz} = -\frac{k\chi''}{\varepsilon_0} S\left\{1 - \frac{\chi'}{2\varepsilon_0}\left[1 + \eta_0^2\beta S + \frac{\eta_0\xi\beta S}{\sqrt{1+\beta S}}\frac{Z_i(\zeta)}{Z_r(\zeta)}\right]\right\}. \tag{20}$$

Интересно рассмотреть случай поглощения в непрерывном спектре. Такой спектр может состоять из набора линий отдельных излучателей, распределенных в области частот, ширина которой много больше ширины линии отдельного излучателя, или из одной уширенной линии, соответствующей переходу с короткоживущего уровня или с уровня с малым временем когерентности $1/\Gamma$. В первом случае, соответствующем неоднородному уширению, закон поглощения можно получить из формул (19) или (20) предельным переходом к бесконечной ширине неоднородного уширения ($\Delta \to \infty$ или $u \to \infty$). При этом в (19) и (20) нужно выделить поглощение в центре линии в отсутствие нелинейности $dS/S = -k_0 dz$ и линейный коэффициент поглощения k_0 считать экспериментальным параметром, т. е. оставлять неизменным при предельном переходе. В формулах (14) и (16) этому соответствует условие нормировки $N/\Delta = \text{const}$ при $\Delta \to \infty$ или $N/u = \text{const}$ при $u \to \infty$. Тогда имеем

$$\frac{dS}{S} = -\frac{k_0 dz}{\sqrt{1+\beta S}}. \tag{21}$$

Это выражение не зависит от частоты, как и следовало ожидать для сплошного спектра.

В случае однородного уширения в сплошном спектре нужно устремить к нулю время когерентного взаимодействия молекул $1/\Gamma \to 0$ в формуле (17а). Тогда получим

$$\frac{dS}{S} = -\frac{k_0 dz}{1+\beta S}. \tag{22}$$

При предельном переходе должно выполняться условие нормировки $|d_{12}|^2/\Gamma = \text{const}$ при $\Gamma \to \infty$. Как видно из (21) и (22), неоднородное уширение уменьшает нелинейные эффекты при прохождении света в среде.

Формулы (21) и (22) использовались в работе [11] для расчетов коэффициента усиления и мощности газового лазера; однако там нет вывода формулы (21).

Приведем интегральные формы, соответствующие уравнениям (17), (20), (21) и (22). Для однородного уширения

$$-\frac{\Gamma^2}{\Delta\bar{\omega}^2+\Gamma^2}\bar{z} = \frac{\sigma^2}{2}(S - S_0) + \frac{1}{4(1-k_\lambda\Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1})}\left(\ln\frac{S}{S_0} - k_\lambda\Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}\times\right. \tag{23}$$

$$\times \ln \frac{\sigma^4 S^2+2\sigma^2 S+1-k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}}{\sigma^4 S_0^2+2\sigma^2 S_0+1-k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}}\Bigg) + \frac{1}{2}\left|k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}\right|^{3/2} \frac{1}{1-k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}} X,$$

причем

$$X = \operatorname{Arth} \frac{\sigma^2 S+1}{\sqrt{\left|k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}\right|}} - \operatorname{Arth} \frac{\sigma^2 S_0+1}{\sqrt{\left|k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}\right|}}$$

для $k_\lambda \Delta\bar{\omega} > 1$ и

$$X = \operatorname{arctg} \frac{\sigma^2 S_0+1}{\sqrt{\left|k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}\right|}} - \operatorname{arctg} \frac{\sigma^2 S+1}{\sqrt{\left|k_\lambda \Delta\bar{\omega}\varepsilon_0\Gamma^{-1}\right|}}$$

для $k_\lambda \Delta\bar{\omega} < 1$. Здесь $k_\lambda = k_0\Gamma^2(\Delta\bar{\omega}^2+\Gamma^2)^{-1}$ — линейный коэффициент поглощения с учетом расстройки, S_0 — интенсивность падающего на границу $z=0$ излучения, $\bar{z} = k_0 z$ — оптическая длина пути.

Формула (20) не может быть проинтегрирована в общем случае. Однако с точностью до членов первого порядка малости по χ можно получить ответ в аналитическом виде, используя разложения функции $Z(\zeta)$ в предельных случаях малых и больших значений параметра η. При $\eta<1$ с точностью до линейных членов по η получаем

$$-\bar{z} = \left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta_0\right)\left[\frac{1}{p}\ln\frac{\sqrt{1+\beta S}-1}{\sqrt{1+\beta S_0}-1} - \frac{1}{q}\ln\frac{\sqrt{1+\beta S}+1}{\sqrt{1+\beta S_0}+1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r}\ln\frac{e^{-\xi^2}-(2\eta_0/\sqrt{\pi})(1-2\xi L)\sqrt{1+\beta S}}{e^{-\xi^2}-(2\eta_0/\sqrt{\pi})(1-2\xi L)\sqrt{1+\beta S_0}}\right], \qquad (24)$$

где

$$p = e^{-\xi^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta_0(1-2\xi L),$$

$$q = e^{-\xi^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta_0(1-2\xi L),$$

$$r = \frac{\eta_0(1-2\xi L)}{\sqrt{\pi}\exp(-2\xi^2)}\left[e^{-2\xi^2} - \frac{4}{\pi}\eta_0^2(1-2\xi L)^2\right],$$

$$L = e^{-\xi^2}\int_0^\xi e^{x^2}\,dx.$$

При $\eta \gg 1$, ограничиваясь первым членом асимптотического разложения $Z(\zeta) = -1/\zeta$, получаем

$$S^{(\Delta\bar{\omega}\Gamma^{-1})^2+1}\, e^{\beta(S-S_0)} = e^{-\bar{z}}\, S_0^{(\Delta\bar{\omega}\Gamma^{-1})^2+1}. \qquad (25)$$

Эта формула соответствует случаю поглощения при однородном уширении, если ограничиться членами первого порядка малости. Отметим также, что при $\Delta\bar{\omega}=0$ получаем интегральную форму закона поглощения для однородно уширенного сплошного спектра.

Для неоднородно уширенного сплошного спектра

$$\frac{\sqrt{1+\beta S}-1}{\sqrt{1+\beta S}+1}\exp\left(2\sqrt{1+\beta S}\right) = e^{-\bar{z}}\exp\left(2\sqrt{1+\beta S_0}\right)\frac{\sqrt{1+\beta S_0}-1}{\sqrt{1+\beta S_0}+1}. \qquad (26)$$

На рис. 1—3 приведены результаты расчетов поглощения излучения разной интенсивности по формулам (24)—(26). Рассчитывалось относительное изменение интенсивности S/S_0 в зависимости от оптической длины пути $k_0 z$ для различных значений параметров βS_0 в пределах от 1,5 до $1{,}5 \cdot 10^6$. Для выяснения роли неоднородного уширения в поглощении проводились расчеты по формуле (24) для неоднородного уширения и по формуле (25) для случая однородного уширения спектральной линии при одинаковых ширинах контуров и одинаковых относительных параметрах расстройки (см. рис. 2 и 3). Для сравнения с результатами феноменологической теории были выполнены расчеты по формуле Степанова (25) для $\Delta\omega = 0$. На рис. 1 приведены кривые, рассчитанные как по формуле Степанова (a, b), так и по формуле (26) для неоднородного уширения в сплошном спектре.

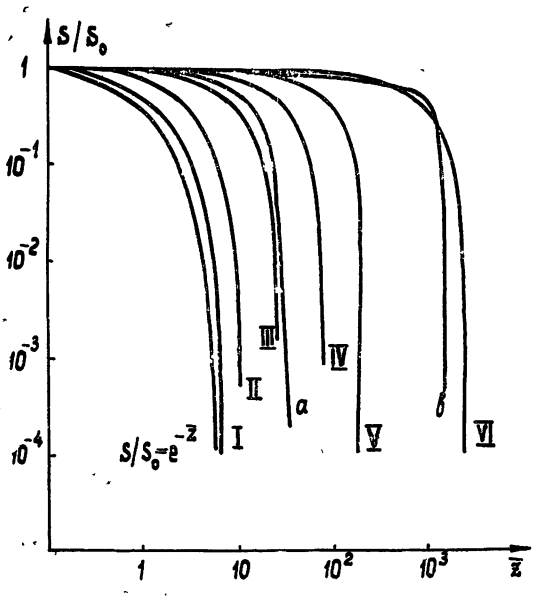


Рис. 1. Поглощение в сплошном спектре. Кривые I—VI—поглощение при неоднородном уширении (формула (26)) для значений параметров $\beta S_0 = 1{,}5$; 15; 150; $1{,}5 \cdot 10^3$; $1{,}5 \cdot 10^4$; $1{,}5 \cdot 10^6$ соответственно. Кривые a и b—поглощение при однородном уширении (формула Степанова) для $\beta S_0 = 1{,}5$ и $1{,}5 \cdot 10^3$ соответственно. Кривая $S/S_0 = e^{-z}$—закон Бугера.

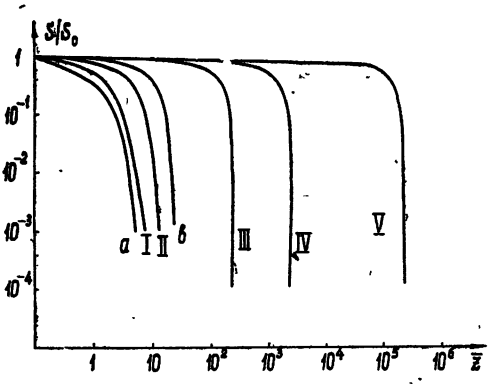


Рис. 2. Поглощение в среде с неоднородным уширением при малой расстройке. Кривые I—II рассчитаны по формуле (24) для значений $\beta S_0 = 1{,}5$; 15. Кривые III—V рассчитаны по формуле (26) для $\beta S_0 = 1{,}5 \cdot 10^3$; $1{,}5 \cdot 10^4$; $1{,}5 \cdot 10^6$; a—закон Бугера, b—поглощение при однородном уширении для $\beta S_0 = 15$.

Из графиков видно, что

1) нелинейные эффекты увеличивают дальность прохождения света по сравнению с рассчитанной по закону Бугера;

2) неоднородное уширение спектральных линий уменьшает роль нелинейных эффектов в поглощении по сравнению со случаем однородно-

го уширения при тех же значениях параметра βS_0 (ср. кривые II и *a*, IV и *b* на рис. I, II и *b* на рис. 2, II и *c* на рис. 3);

3) как уже было указано, с увеличением расстройки $\Delta\bar{\omega}$ поглощение падает, и дальность прохождения света увеличивается (ср. кривые II и III на рис. 3, III и III' на рис. 2 и 3).

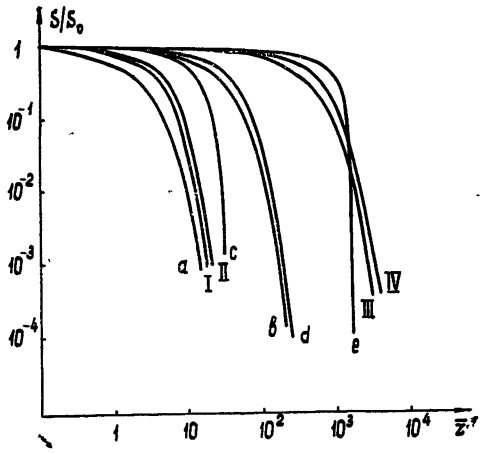


Рис. 3. Поглощение в среде с неоднородным уширением при большой расстройке ($\eta_0=0{,}1$, $\xi=1$ для кривой I и $\xi_0=0{,}1$, $\xi=5$ для кривой II). Кривая III рассчитана по формуле (24) для $\xi=5$ и $\beta S_0=1{,}5$; 15; 150. Кривая IV рассчитана по формуле (24) для $\xi=5$ и $\beta S_0=1{,}5\cdot 10^3$. Совпадение кривых поглощения для трех значений параметра βS_0 связано с уменьшением нелинейных эффектов при больших расстройках. Кривые *a* и *b*—законы Бугера для относительных расстроек $\Delta\bar{\omega}\Gamma^{-1}=1$ и $\Delta\bar{\omega}\Gamma^{-1}=5$ соответственно; кривая *c*—поглощение при однородном уширении $\Delta\bar{\omega}\Gamma^{-1}=1$ для $\beta S_0=15$; кривые *d* и *e*—поглощение при однородном уширении $\Delta\bar{\omega}\Gamma^{-1}=5$ для $\beta S_0=15$ и $\beta S_0=1{,}5\cdot 10^3$.

Интересно отметить, что для больших значений относительной расстройки (например, $\xi=\Delta\bar{\omega}\Gamma^{-1}=5$) начинает существенно сказываться форма контура. Поглощение на лоренцовом контуре однородного уширения становится больше, чем на гауссовом контуре неоднородного уширения из-за различной частотной зависимости на крыльях контуров (ср. кривые *d* и III, *e* и IV на рис. 3).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Будем искать решение уравнений (7) в виде

$$\rho_{12}=\sigma(z)\exp[i(\omega t-kz)],\qquad R=R(z),\tag{П.1}$$

где $\sigma(z)$ и $R(z)$ — медленно меняющиеся функции z. Поскольку имеется лишь бегущая в одном направлении электромагнитная волна, можно показать, что ρ_{12} содержит лишь первую пространственную гармонику, а R — нулевую. Из уравнения (7), отбрасывая член $v(d\sigma/dz)$, получим для $\sigma(z)$:

$$\sigma(z)=-\frac{i}{\hbar}\,\frac{R}{2}\,\frac{[E(z)e^{i\varphi}d_{12}]}{i(\Delta\bar{\omega}+vk)+\Gamma}.\tag{П.2}$$

Оценим вклад членов $v(d\sigma/dz)$ и $v(dR/dz)$ в уравнение для матрицы плотности. Заменяя R на $|R_{\max}|$ и $e^{i\varphi}$ на 1, получим

$$\left|\frac{d\sigma}{dz}\right|\leqslant\frac{|R_{\max}|\,d_{12}}{2\hbar\sqrt{(\Delta\bar{\omega}+vk)^2+\Gamma^2}}\left|\frac{dE}{dz}\right|.\tag{П.3}$$

Из уравнения (5) с точностью до членов первого порядка малости следует, что

$$\left|\frac{dE}{dz}\right|=\left|\frac{\chi''k}{2\varepsilon_0}\right|E.\tag{П.4}$$

Тогда, заменяя в знаменателе $\sqrt{(\Delta\bar{\omega}+vk)^2+\Gamma^2}$ минимальным значением Γ, получим

$$v\left|\frac{d\sigma}{dz}\right| \ll \frac{v|R_{\max}|\,d_{12}\,k|\chi''|\,E}{4\hbar\varepsilon_0\Gamma}. \qquad (\text{П}.5)$$

Из (П.5) видно, что $v|d\sigma/dz|$ меньше релаксационного члена матрицы плотности, а также члена взаимодействия с полем $F_{\text{вз}} = ie^{i\varphi}\hbar^{-1}(E(z)/2)d_{12}R$ при условии

$$\left|\frac{vk\chi''}{2\varepsilon_0\Gamma}\right| \ll 1. \qquad (\text{П}.6)$$

Для $v(dR/dz)$, используя выражение $\sigma(z)$ и оценку для $|d\sigma/dz|$, получаем

$$v\left|\frac{dR}{dz}\right| \ll \frac{vT|R_{\max}|\,|E|^2\,|d_{12}|^2\,|\chi''|\,k}{4\Gamma\hbar^2\varepsilon_0}. \qquad (\text{П}.7)$$

В уравнении для диагональных элементов член, характеризующий взаимодействие с полем, имеет вид

$$F_{\text{вз}} = \frac{i}{\hbar}\,\sigma^*(Ee^{i\varphi}d_{12}) - \frac{i}{\hbar}\,\sigma(Ee^{-i\varphi}d_{21});$$
$$|F_{\text{вз}}| \ll \frac{|R_{\max}|}{\hbar^2\Gamma}\,|E|^2\,|d_{12}|^2. \qquad (\text{П}.8)$$

Тогда $|v\,dR/dz| \ll |F_{\text{вз}}|$ при условии

$$\left|\frac{vk\chi''T}{2\varepsilon_0}\right| \ll 1. \qquad (\text{П}.9)$$

Сравнение с релаксационными членами приводит к тому же условию.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко, ЖЭТФ, **48**, 353 (1965).
2. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, **46**, 963 (1964).
3. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 682 (1964).
4. С. Г. Раутиан, ФТТ, **6**, 1857 (1964)
5. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М, 1964, стр. 90.
6. М. Борн, Оптика, ОНТИ, 1937.
7. B. D. Fried, S. D. Conte, The Plasma Dispersion Function, 1961.
8. В. И. Степанов, ДАН БССР, **5**, 489 (1961)
9. Е. Ф. Ищенко, М. В. Ладыгин, А. Н. Свиридов, Ж. прикл. спектр, **1**, 31 (1964).
10. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **7**, 1095 (1964).
11. W. W. Rigrod, J. Appl. Phys., **34**, 2602 (1963).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
8 мая 1965 г.

PROPAGATION OF STRONG MONOCHROMATIC RADIATION IN MEDIA WITH DIFFERENT TYPES OF SPECTRAL LINE BROUDENING

R. F. Boykova, E. E. Fradkin

The nonlinear effects are considered when a powerful monochromatic radiation propagates through a dielectric. The absorption (amplification) laws have been obtained for a homogeneous and inhomogeneous broudening of spectral absorption (amplification) line in a medium.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371.166.22

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА И ИЗМЕРЕНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ МИЛЛИМЕТРОВЫХ И СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРНЫХ ПАРАХ ВОДЫ

С. А. Жевакин, А. П. Наумов

Отмечается, что последние измерения коэффициента поглощения водяного пара в относительных окнах прозрачности субмиллиметровых волн ($\lambda > 60\mu$), выполненные рядом авторов, превышают ранее вычисленные нами значения в $\sim 1{,}5 \div 2$ раза, т. е. имеет место такое же расхождение между теорией поглощения и экспериментом, как и в миллиметровой области спектра ($2мм \leqslant \lambda \leqslant 8мм$). Кратко дискутируются вероятные причины этого расхождения. Обсуждаются возможности экспериментального исследования поглощения субмиллиметровых волн радиоастрономическими методами.

В работах [1–3] подробно изложены методика и результаты квантовомеханического расчета коэффициента поглощения γ водяных паров в атмосфере для диапазона волн $\lambda = 10\,\mu \div 32$ *см*. В упомянутых работах проводится также сравнение вычисленного коэффициента поглощения с экспериментальными результатами. В частности, в [1, 3] отмечается надежно установленное превышение в $\sim 1{,}5 \div 2$ раза измеренных значений γ над теоретическими в миллиметровой области спектра 2 *мм* $\leqslant \lambda \leqslant$ 8 *см*. Что касается субмиллиметрового диапазона, то в [1] не представлялось возможности сделать уверенных выводов о степени соответствия между теорией поглощения и экспериментом. вследствие недостаточного для этого диапазона количества измерений. За истекшее с тех пор время был выполнен ряд экспериментальных исследований поглощения водяными парами радиоволн в области $\lambda > 60\,\mu$ [4–7]. Сейчас можно констатировать, что и в субмиллиметровом диапазоне вне спектральных линий H_2O вычисленные в [1] значения коэффициентов поглощения водяного пара меньше экспериментальных примерно во столько же раз (в $1{,}5 \div 2$ раза)*.

Недостаточная разрешающая сила аппаратуры, использованной в работах [4, 6, 7], не позволила авторам этих работ измерить коэффициент поглощения в спектральных линиях водяного пара. Между тем

---

* В окне прозрачности, центрированном при $\lambda \simeq 0{,}87мм$, измерения [5], выполненные радиоастрономическим методом (по излучению Солнца) дали среднее значение полного поглощения Γ в столбе атмосферы выше $h \simeq 4$ *км*, равное 1,8 *дб* на 1 $г \cdot м^{-3}$ водяного пара. Для определения погонного коэффициента поглощения водяного пара на уровне моря авторы [5] использовали, согласно [8], значение характеристической высоты коэффициента поглощения $H_{H_2O} = 2{,}1$ *км*; при этом для абсолютной влажности $\rho = 7{,}5\ г \cdot м^{-3}$ они получили $\gamma = 8{,}5\ дб \cdot км^{-1}$. (Теоретическое значение коэффициента поглощения водяного пара при тех же атмосферных условиях на $\lambda \simeq 0{,}87$ *мм* составляет $\gamma \simeq 6{,}1\ дб \cdot км^{-1}$ [1].) Однако в эксперименте с активным источником [6] при распространении волны той же длины вдоль земли было получено $\gamma \simeq 12{,}5\ дб \cdot км^{-1}$. Это несоответствие в результатах [5, 6] устраняется, если считать характеристическую высоту коэффициента поглощения водяного пара $H_{H_2O} \simeq 1{,}5$ *км*, что представляется более правильным в настоящее время [9].

такие измерения могли бы внести значительную ясность в возможные причины расхождения между теорией поглощения в водяном паре и экспериментом в относительных окнах прозрачности. Радиоастрономический способ (см. [5]) определения величины γ по относительному изменению ослабленного атмосферой солнечного излучения при различных высотах Солнца над горизонтом может быть использован лишь в условиях такого поглощения радиоволн в атмосфере, когда антенная температура Солнца в данной полосе частот достаточно велика и заметно меняется при изменении зенитного угла. Так как даже в окнах прозрачности субмиллиметровых волн коэффициент поглощения водяного пара γ в десятки и сотни раз превышает резонансные значения γ на сантиметровых и миллиметровых волнах, то радиоастрономические методы измерения коэффициента поглощения (по излучению Солнца и собственному излучению атмосферы) имеют весьма ограниченную применимость в области $\lambda < 1$ *мм*. Для подтверждения сделанного вывода мы кратко остановимся на количественных характеристиках эффективного излучения Солнца и атмосферы в субмиллиметровом диапазоне, а в заключение продискутируем возможные причины отмеченного выше расхождения теории поглощения водяного пара с экспериментом на этих волнах.

1. На рис. 1, 2 изображена эффективная температура $T_C = T_\odot e^{-\tau}$ солнечного излучения, ослабленного в земной атмосфере, но без учета

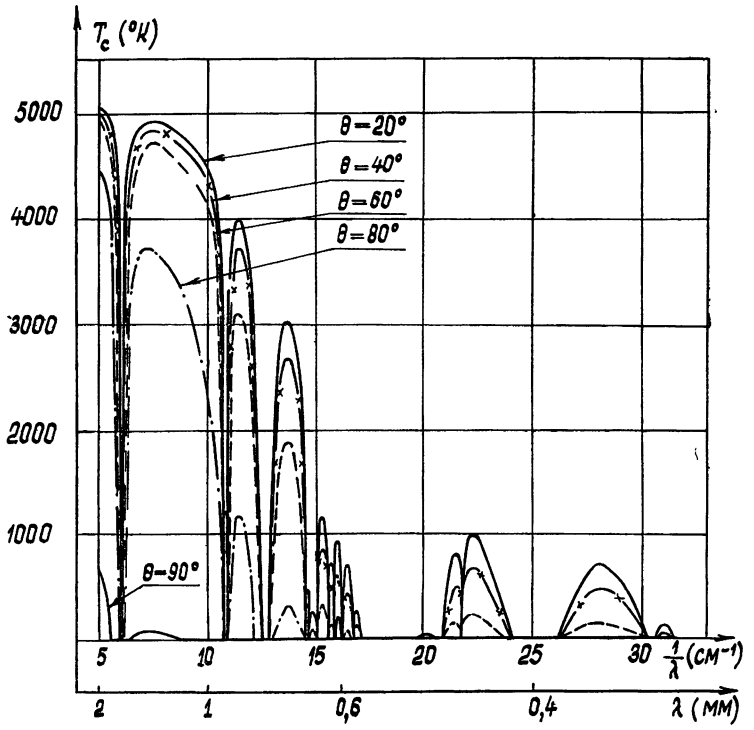


Рис. 1. Температура ослабленного атмосферой солнечного излучения T_C (без учета собственного излучения атмосферы) на высоте $h \simeq 4$ *км* (давление $P = 478$ *мм* рт. ст., абсолютная влажность $\rho = 1$ *г·м*$^{-3}$) при различных значениях зенитных углов θ. Эффективная температура Солнца $T_\odot$ в диапазоне $\lambda = 0{,}28 \div 2$ *мм* ($1/\lambda = 5 \div 35$ *см*$^{-1}$) принята равной 5200°К; температура атмосферы $T_A = 283$°К.

собственного излучения атмосферы (об относительной роли последнего см. ниже). Расчеты величины T_C выполнены в диапазоне $1/\lambda = 5 \div 35 см^{-1}$ ($\lambda \simeq 0{,}28 \div 2$ *мм*) для различных зенитных углов θ, если вести наблюдения с высоты $h \simeq 4$ *км* (давление $P = 478$ *мм* рт. ст., приземная абсолютная влажность $\rho = 1$ и 2 $г \cdot м^{-3}$), т. е. для условий, близких к имевшим место при измерениях [5]. При этом как в расчете T_C (рис. 1, 2), так и в расчете эффективной температуры атмосферы $T_{эфф}$ (рис. 4, 5) предполагалось, что поглощение радиоволн $\lambda \ll 2$ *мм* определяется только водяным паром. Из рис. 2 работы [30] и рис. 3 данной работы видно,

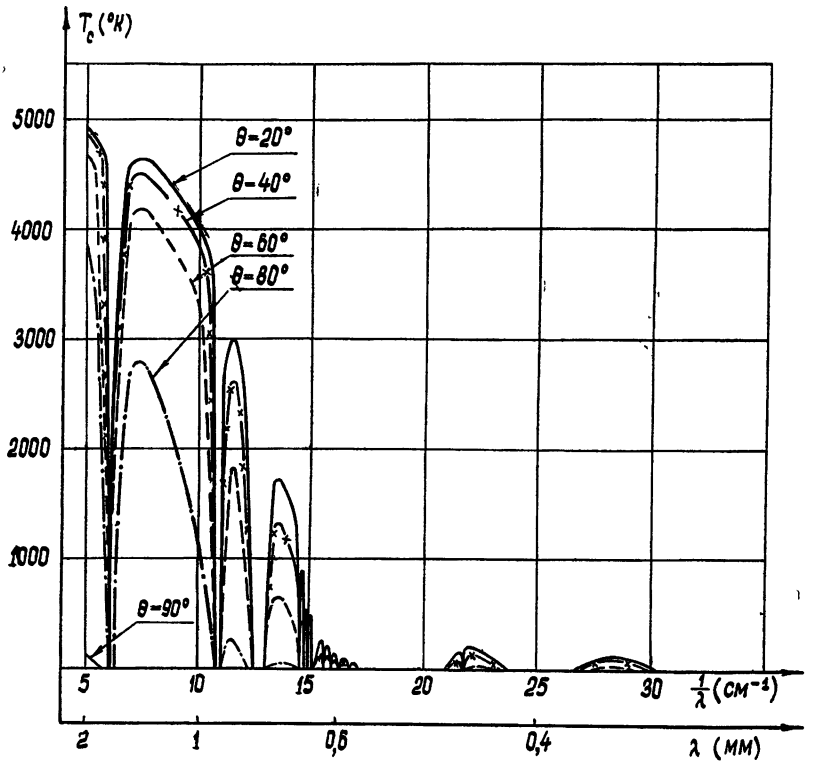


Рис. 2. Температура ослабленного атмосферой солнечного излучения T_C (без учета собственного излучения атмосферы) на высоте $h \simeq 4$ *км* (давление $P = 478$ *мм* рт. ст., абсолютная влажность $\rho = 2$ $г \cdot м^{-3}$) при значениях зенитных углов $\theta = 20°, 40°, 60°, 80°, 90°$. Эффективная температура Солнца T_O в диапазоне $\lambda = 0{,}28 \div 2$ *мм* ($1/\lambda = 5 \div 35 см^{-1}$) принята равной 5200°К; температура атмосферы $T_A = 283$°К.

что на уровне моря (абсолютная влажность $\rho = 7{,}5$ $г \cdot м^{-3}$) отношение коэффициентов поглощения молекулярного кислорода и водяного пара даже при $\lambda \simeq 1 \div 2$ *мм* равно $\simeq 0{,}04$*, т. е. сделанное предположение действительно выполняется. На высоте $h \simeq 4$ *км*, используя обычные правила пересчета, для отношения коэффициентов поглощения O_2 и H_2O (см. [1, 2, 30]) при $\rho = 1$ $г \cdot м^{-3}$ имеем $\simeq 0{,}1$. Однако, согласно измерениям [31] (см. их обработку в [32]), кислородное поглощение на волнах $\lambda \simeq 1 \div 2$ *мм* примерно на порядок превышает расчетные данные. Расхождение расчетных и экспериментальных коэффициентов поглощения

* На волне $\lambda \simeq 0{,}87$ *мм* (ближайшее со стороны субмиллиметровых радиоволн окно прозрачности) это отношение уменьшается еще в $\simeq 10$ раз.

O_2 для $\lambda \leqslant 2$ *мм* может быть обусловлено неточным учетом нерезонансного поглощения O_2 в расчете [30]. Если последующие экспериментальные исследования подтвердят столь высокое ($\gamma_{O_2} \simeq 0{,}17$ *дб/км*) значение коэффициента поглощения O_2 при $\lambda \simeq 1 \div 2$ *мм* на уровне моря, то на высоте $h \simeq 4$ *км* коэффициенты поглощения кислорода и водяного пара на волнах $\lambda \simeq 1 \div 2$ *мм* и для $\rho = 1$ *г·м*$^{-3}$ будут сравнимы между собой. Учет этого обстоятельства приведет, в свою очередь, к уменьшению расчетных значений T_C (см. рис. 1) в диапазоне $1/\lambda \simeq 6{,}3 \div 10$ *см*$^{-1}$ ($\lambda \simeq \simeq 1 \div 1{,}6$ *мм*) при $\theta = 20 \div 60°$ не более чем на $\simeq 25\%$ и к увеличению расчетных значений $T_{эфф}$ в том же диапазоне и $\theta = 20 \div 80°$ (см. рис. 4) в $\simeq 1{,}8$ раза*. Однако на субмиллиметровых волнах ($\lambda \leqslant 0{,}9$ *мм*) результаты расчета, представленные на рис. 1, 2, 4, 5, из-за явно преобладающего здесь поглощения водяными парами практически не изменятся (погрешность не превысит десятых долей процента).

При вычислении $T_C = T_\odot e^{-\tau}$ (приближение Рэлея—Джинса) пола-

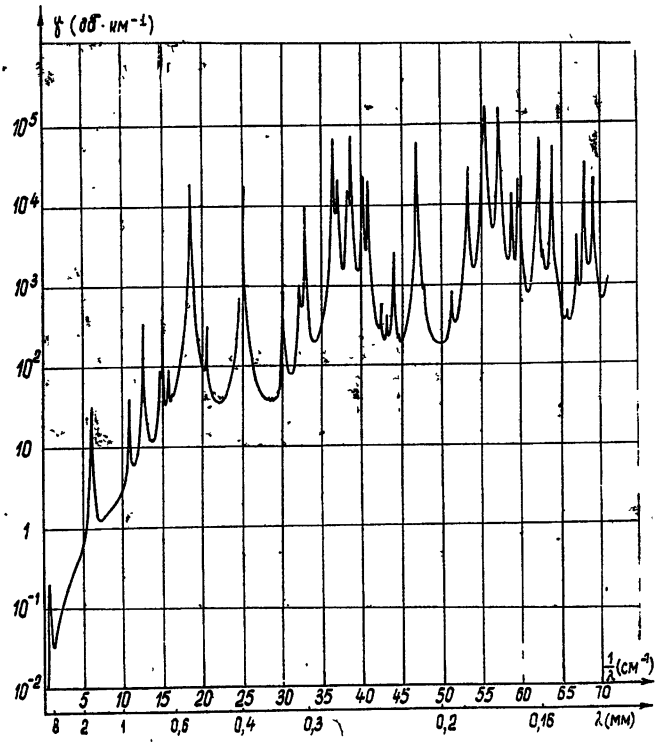


Рис. 3. Коэффициент поглощения γ атмосферного водяного пара в диапазоне $\lambda \simeq 0{,}14$ *мм* $\div 2$ *см* ($1/\lambda = 0{,}5 \div 70$ *см*$^{-1}$) при абсолютной влажности $\rho = 7{,}5$ *г·м*$^{-3}$, температуре $T_A = 293°$K и давлении $P = 760$ *мм* рт. ст.

галось, что эффективная температура Солнца во всем рассматриваемом диапазоне $\lambda = 0{,}28 \div 2$ *мм* $T_\odot = 5200°$K и непрозрачность $\tau = \bar{\gamma} l_2$, где $\bar{\gamma}$ — коэффициент поглощения водяного пара на высоте $h = 4$ *км*, выраженный в неперах, а l_2 — эффективная длина пути радиоволн в водяном паре, приведенная к условиям на поверхности Земли. Величина l_2 нахо-

* При $\rho = 2$ *г·м*$^{-3}$ соответствующие поправки на тех же волнах и $\theta = 20 \div 80°$ составляют $\simeq 12\%$ для T_C (см. рис. 2) и $\simeq 1{,}3$ раза для $T_{эфф}$ (см. рис. 5).

дилась с учетом рефракции радиоволн по методике, описанной в [8]. Единственное исключение состояло в том, что мы использовали характеристическую высоту коэффициента поглощения водяного пара H_{H_2O}, равную 1,5 *км* [9], а не 2,1 *км*, как это сделано в [8]*.

Вне резонансных частот паров H_2O, т. е. в наиболее интересных спектральных областях,

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{10\log_{10} e}\,\gamma(0)\,\frac{P}{760}\,\frac{\rho}{7{,}5}\,\frac{293}{T_A},$$

где $\gamma(0)$ — коэффициент поглощения водяного пара на уровне моря при $\rho = 7{,}5\ г\cdot м^{-3}$, выраженный в $дб\cdot км^{-1}$**. В данном расчете использовались значения $\gamma(0) = 1{,}5\,\gamma$, где γ — величина коэффициента поглощения на уровне моря при влажности $\rho = 7{,}5\ г\cdot м^{-3}$, полученная в расчете [1] (см. рис. 3). Введение множителя 1,5 всюду, за исключением узких частотных интервалов в резонансах порядка ширин спектральных линий $2\Delta\nu/c \simeq 0{,}2\ см^{-1}$ ($\Delta\nu$ — полуширина спектральной линии в герцах, c — скорость света), было сделано для устранения отмеченного выше расхождения между вычисленными и измеренными значениями коэффициента поглощения.

Здесь мы пользуемся случаем и на рис. 3 вновь приводим зависимость коэффициента поглощения водяного пара γ от длины волны в диапазоне $\lambda \simeq 0{,}14\ мм \div 2\ см$ на уровне моря, так как при расчете величины γ в [1, 2] была допущена ошибка в интенсивностях спектральных линий $9_8 - 10_6$ и $9_9 - 10_5$ ($1/\lambda_{ij} = 28{,}99\ см^{-1}$; λ_{ij} — резонансная длина волны), эта ошибка вместо значения $\gamma \simeq 40\ дб\cdot км^{-1}$ приводила в резонансе к значению $\gamma \simeq 5000\ дб\cdot км^{-1}$, что не согласовывалось с измерениями [6, 7, 10] (сравни рис. 3 в данной работе с рис. 1 в [1]). Выполненные сейчас расчеты находятся в полном качественном согласии с измерениями [4–7, 10]. Отмеченная ошибка влияет на расчеты коэффициента поглощения паров H_2O лишь в узкой спектральной полосе $1/\lambda \simeq 27 \div 30{,}2\ см^{-1}$ ($\lambda \simeq 0{,}33 \div 0{,}37\ мм$) и совершенно не меняет (расхождение меньше 0,1%) вычисленных результатов вне указанной полосы (см. рис. 1 — 15 в [1] и рис 2 — 13 в [2]).

Для расчета величины T_C было использовано значение $T_\odot = 5200°К$, которое получается при интерполяции результатов измерений эффективной температуры Солнца в инфракрасном и миллиметровом диапазонах (см. обзор литературы в § 8 монографии [11], а также работы [12–16])***. Если значение $T_\odot$ на субмиллиметровых волнах в дальнейшем будет уточнено, то в вычисленную нами величину T_C легко внести поправку, ибо T_C прямо пропорциональна $T_\odot$. В любом случае, однако, трудно ожидать, что выбранное значение $T_\odot$ более чем на 10% отличается от истинной величины, и, следовательно, по рис. 1, 2 можно достаточно точно оценить возможности радиоастрономических исследований в субмиллиметровом диапазоне.

Из рис. 1, 2 следует, в частности, что в относительных окнах про-

---

* Сезонные вариации величины H_{H_2O} не превышают примерно 5% [9]. В [9] показано также, что в относительных окнах прозрачности водяного пара соотношение $\bar{\gamma}(h) = \bar{\gamma}(0)\exp[-h/H_{H_2O}]$ ($\bar{\gamma}(0)$ — коэффициент поглощения на уровне моря) выполняется с достаточной степенью точности; поэтому представляется обоснованным использование в расчетах характеристической высоты коэффициента поглощения.

** Температурная зависимость $\bar{\gamma} \sim 1/T_A$ имеет место в относительных окнах прозрачности при $\lambda \gg 0{,}2\ мм$ [2].

*** Измерения величины $T_\odot$ на ближних субмиллиметровых волнах не проводились.

зрачности субмиллиметровых волн $1/\lambda \simeq 11{,}5$ *см*$^{-1}$ ($\lambda \simeq 0{,}87$ *мм*), $1/\lambda \simeq 13{,}5$ *см*$^{-1}$ ($\lambda \simeq 0{,}74$ *мм*) и $h = 4$ *км* разность солнечных температур ΔT_C с учетом атмосферного ослабления для различных зенитных углов θ ($\theta = 20 \div 60°$) и $\rho = 0{,}5 \div 2$ *г*·*м*$^{-3}$ составляет $\simeq 400 \div 500$°K при $\Delta\theta = 20°$. Такая разность температур излучения может быть зарегистрирована современными индикаторами, что позволяет успешно использовать радиоастрономический метод измерения атмосферного поглощения по Солнцу в этих окнах прозрачности*.

Из рис. 2 видно также, что солнечное излучение при абсолютной влажности $\rho = 2$ *г*·*м*$^{-3}$ на высоте 4 *км* и волнах $\lambda < 0{,}6$ *мм* практически полностью поглощается в столбе атмосферы, лежащем выше указанной высоты. Это поглощение происходит при величине $\gamma \geqslant 9$ *дб*·*км*$^{-1}$ на высоте $h = 4$ *км*, что соответствует на уровне моря при $\rho = 7{,}5$ *г*·*м*$^{-3}$ $\gamma \geqslant 60$ *дб*·*км*$^{-1}$. Таким значениям γ отвечают волны в диапазоне 27,4 $\mu < \lambda < 600\,\mu$ (см. рис. 3 в данной работе и рис. 2—15 в [1]).

С возрастанием абсолютной влажности величина ΔT_C быстро уменьшается в окнах прозрачности водяного пара. Так, расчеты, выполненные для нормальных атмосферных условий ($P = 760$ *мм* рт. ст., $\rho = 7{,}5$ *г*·*м*$^{-3}$), свидетельствуют о невозможности измерений поглощения по ослаблению солнечного излучения с уровня моря даже в окне

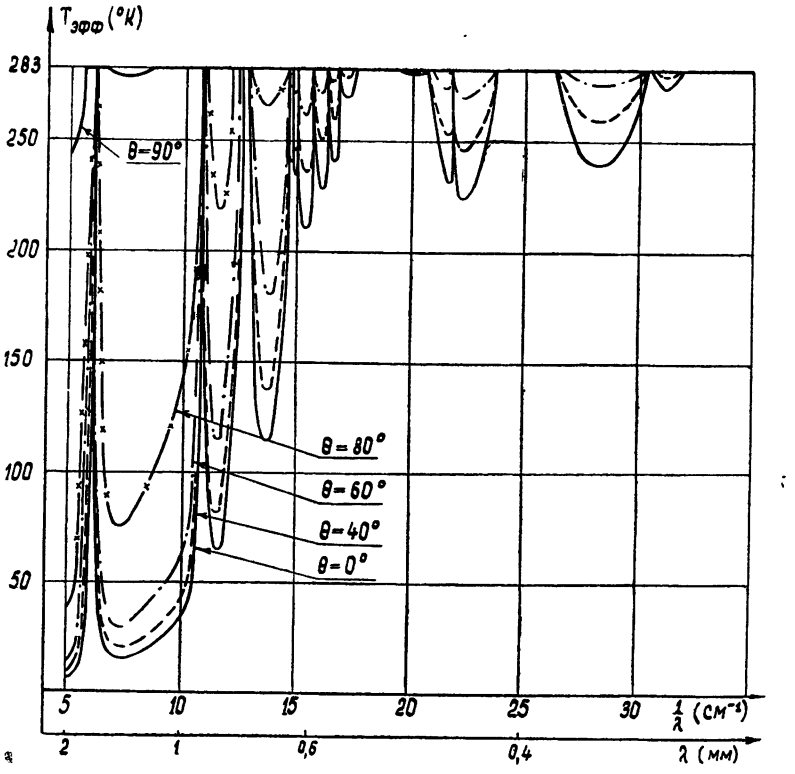


Рис. 4. Эффективная температура излучения атмосферы $T_{эфф}$ на высоте $h \simeq 4$ *км* (давление $P = 478$ *мм* рт. ст., абсолютная влажность $\rho = 1$ *г*·*м*$^{-3}$; температура $T_A = 283$°K) в диапазоне $\lambda \simeq 0{,}28 \div 2$ *мм* ($1/\lambda = 5 \div 35$ *см*$^{-1}$) при различных значениях зенитных углов θ.

* Учет собственного излучения атмосферы в рассматриваемых случаях может увеличить найденную разность не более чем на $\simeq 30$°K (см. рис. 4, 5).

прозрачности $1/\lambda \simeq 11{,}5$ *см*$^{-1}$ ($\lambda \simeq 0{,}87$ *мм*). Что касается эффективной температуры излучения атмосферы $T_{эфф} = T_A(1 - e^{-\tau})$, то и при малых влажностях $\rho = 1 \div 2$ *г*·*м*$^{-3}$ на высоте $h = 4$ *км* ($T_A = 283°$K) разность $\Delta T_{эфф}$, соответствующая $\Delta\theta = 40°$, не превышает $\simeq 100°$K на волнах $\lambda = 0{,}74$ *мм* и $\lambda = 0{,}87$ *мм* (см. рис. 4, 5)*. Следовательно, измерения поглощения по солнечному излучению в ближнем субмиллиметровом диапазоне явно предпочтительнее, нежели измерения по собственному излучению атмосферы, хотя и первый метод может быть использован лишь в особых условиях.

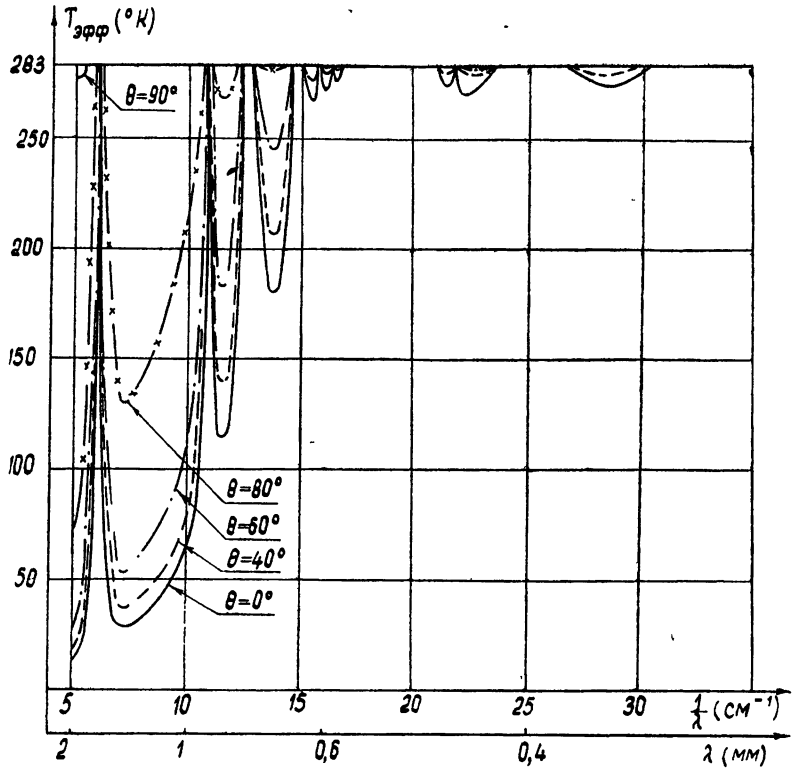


Рис. 5. Эффективная температура излучения атмосферы $T_{эфф}$ на высоте $h \simeq 4$ *км* (давление $P = 478$ *мм* рт. ст., абсолютная влажность $\rho = 2$ *г*·*м*$^{-3}$, температура $T_A = 283°$K) при различных значениях зенитных углов θ в диапазоне $\lambda \simeq 0{,}28 \div 2$ *мм* ($1/\lambda = 5 \div 35$ *см*$^{-1}$).

2. Возможные причины расхождения эксперимента с теорией поглощения миллиметровых и сантиметровых радиоволн в водяном паре неоднократно дискутировались в печати (см. [3]). Не исключено, что нераскрытые и неучитываемые в расчете поглощения миллиметровых волн факторы, приводящие к расхождению теории с экспериментом, являются столь же существенными и на ближних субмиллиметровых волнах. В [3] показано, что теоретические значения коэффициента поглощения паров H_2O можно приблизить к экспериментальным, применяя в расчете форму линии, полученную из решения кинетического урав-

* Оценки выполнены для изотермической атмосферы. Поправка на неизотермичность атмосферы меняет результаты не более чем на $\simeq 10°$K.

нения*, вместо формы линии Ван Флека—Вайскопфа. Однако при этом не удается добиться полного согласия между теорией и экспериментом в области $2\ мм \leqslant \lambda \leqslant 8\ мм$. На субмиллиметровых волнах разница в формах спектральных линий проявляется в окнах прозрачности лишь в ближней области ($\lambda = 0{,}74\ мм$, $\lambda = 0{,}87\ мм$) и при $\lambda < 27\ \mu$ (см. рис. 1 — 15 в [1]). В диапазоне $27\ \mu < \lambda < 600\mu$ расчеты с различными формами линий приводят к почти одинаковым результатам**. Отсутствие измерений коэффициента поглощения субмиллиметровых радиоволн на всех резонансных частотах паров H_2O затрудняет анализ причин расхождения теории поглощения с экспериментом в окнах прозрачности.

В самом деле, обусловлено ли превышение экспериментальных коэффициентов поглощения над расчетными дополнительными факторами поглощения (например, полимерными образованиями молекул H_2O [21])*** или оно является следствием каких-либо неточностей в описании вращательного спектра мономеров H_2O (например, неточное значение ширин спектральных линий), или это расхождение связано с одновременным наличием ряда причин, станет более ясным в случае расширения области экспериментальных исследований.

В последнее время появились некоторые сомнения [22] в точности полуширин спектральных линий паров H_2O, которые были вычислены Бенедиктом и Капланом [23] по теории Андерсона [24] и использовались нами в расчетах [1–3]. Известно, что основной вклад в уширение вращательных линий водяного пара в атмосфере дают молекулярные соударения $H_2O—N_2$ и полуширина линии (квантовый переход $i \to j$) в воздухе $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O—возд}$ составляет примерно 90% от соответствующей величины $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O—N_2}$ [1]. Детальные расчеты уширения линий водяного пара для соударений $H_2O—H_2O$ и $H_2O—O_2$, выполненные в [25], подтверждают справедливость этой оценки. Однако при расчете величин $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O—N_2}$ Бенедикт и Каплан [23] строго учитывали лишь дипольно-квадрупольное взаимодействие молекул $H_2O—N_2$. Последнее вместе с близкодействующими взаимодействиями (квадруполь—квадруполь, диполь—индуцированный диполь и т. д.) определяют параметр соударений b_m, равный расстоянию между соударяющимися молекулами при их наибольшем сближении. Значение b_m и квадрупольный момент молекулы азота подбирались в [23] из сопоставления рассчитанного указанным образом и экспериментального [26] значений полуширин-

---

* В структурном факторе для кинетического уравнения в [1] допущена опечатка. Формулу (7) в [1] следует читать так:

$$f(\nu, \nu_{ij}) = \frac{\nu^2}{\pi} \frac{4\Delta\nu_{ij}}{\left(\nu_{ij}^2 - \nu^2\right)^2 + 4\nu^2(\Delta\nu_{ij})^2}.$$

** Почти во всех геофизических расчетах, связанных с молекулярным поглощением радиации (см., например, монографии [17, 18]), применяется форма линии Лоренца. Критика исходной модели Лоренца содержится в работах [19, 20]. Однако дисперсионное соотношение Лоренца удовлетворительно описывает инфракрасные спектры атмосферных газов, по крайней мере, в областях, отстоящих от резонанса на несколько ширин линий. Интересно заметить, что коэффициент поглощения водяного пара в диапазоне $\lambda \simeq 10\mu \div 32\ см$, вычисленный нами с формой линии Лоренца, отличается от результатов [1], полученных с формой линии по кинетическому уравнению, не более чем на 5%. Поскольку форма линии из кинетического уравнения строго следует при определенных идеализациях, то только что отмеченное совпадение результатов позволяет использовать в расчетах и структурный фактор Лоренца в качестве удачной аппроксимации формы спектральной линии.

*** Мы имеем в виду факторы, определяющиеся абсолютной влажностью воздуха. Иные дополнительные факторы поглощения (например, примесные атмосферные газы CO, NO, N_2O, NO_2, O_3, SO_2), которые в принципе могут влиять на суммарный коэффициент поглощения атмосферы, частично рассмотрены в [1].

ны линии водяного пара $5_{-1} - 6_{-5}$ ($\lambda_{ij} \simeq 1{,}35$ *см*). Таким образом, все полуширины линий $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$, вычисленные в [23], нормированы на измеренную величину $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-возд}$ для перехода $5_{-1}-6_{-5}$.

В [22] отмечается, что полуширины трех интенсивных линий водяного пара ($1_1 - 2_1$, $1/\lambda_{ij} = 92{,}54$ *см*$^{-1}$; $3_1 - 4_1$, $1/\lambda_{ij} = 170{,}33$ *см*$^{-1}$; $4_0 - 5_0$, $1/\lambda_{ij} = 188{,}27$ *см* $^{-1}$), по-видимому, превышают соответствующие значения, даваемые Бенедиктом и Капланом, в $\sim 1{,}5 \div 1{,}8$ раза*. Если ширины и других спектральных линий (хотя бы наиболее интенсивных) во столько же раз больше вычисленных, то теоретические [1–3] и экспериментальные [4–7] коэффициенты поглощения водяного пара будут находиться в полном количественном согласии, ибо в относительных окнах прозрачности имеет место соотношение $\gamma \sim (\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$ (см. формулу (15) в [1]). На резонансной частоте, если вклад данной линии намного превышает суммарный вклад всех остальных линий, $\gamma \sim 1/(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$, т. е. при возможном уточнении ширин спектральных линий данные по поглощению водяными парами [1–3] в пиках спектральных линий легко привести к новым значениям $(\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2}$.

С другой стороны, следует указать, что ширины линий водяного пара в работе [22] непосредственно не измерялись, а лишь оценивались по величине интегрального поглощения в некоторой полосе. Между тем, спектроскопические измерения полуширины линии водяного пара 2_2-3_{-2} ($1/\lambda_{ij}=6{,}12$ *см*$^{-1}$) [29] дали в воздухе $(\Delta\nu/c)_{эксп} = 0{,}086$ *см*$^{-1}$ против теоретического значения Бенедикта—Каплана $(\Delta\nu/c)_{теор} = 0{,}091$ *см*$^{-1}$, т. е. расхождение для ширины указанной линии составляет всего лишь $\simeq 6\%$. Если в дополнение к этому совпадение расчетных и измеренных коэффициентов поглощения водяного пара в диапазоне $\lambda \simeq 10\mu$ также рассматривать как косвенное свидетельство надежности полуширин линий H_2O, вычисленных Бенедиктом—Капланом [23], то следует более внимательно подойти к поиску дополнительных агентов поглощения, спектр которых локализован на длинных субмиллиметровых и миллиметровых волнах. Можно, конечно, думать, что соответствие, существующее при $\lambda \approx 10\ \mu$ между теорией поглощения инфракрасных волн в водяных парах и экспериментом, достигается за счет неточностей в других параметрах спектра H_2O. Но другие возможные неточности (описание поглощения в крыльях спектральных линий, влияние нежесткости молекулы H_2O на интенсивность линий, вариации дипольного момента молекулы H_2O от линии к линии, вклад изотопов H_2O в поглощение) уже обсуждались в работах [1, 3]. В [1, 3] отмечается, что все упомянутые обстоятельства, по-видимому, не могут изменить вычисленный коэффициент поглощения паров H_2O более чем на 10% при $\lambda > 100\ \mu$ и более чем на 25% при $\lambda \leqslant 100\mu$.

В заключение заметим, что некоторые вопросы физики атмосферы и необходимость детального выяснения условий распространения микрорадиоволн в атмосфере требуют знания сезонных вариаций поглощения на различных высотах. Этот вопрос подробно обсуждается в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Жевакин, А П Наумов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **6**, 674 (1963).
2. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Геомагнетизм и аэрономия, **3**, 666 (1963).
3. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **9**, 1327 (1964).
4. Н. И. Фурашов, Материалы XV Всесоюзного совещания по спектроскопии, т. III, стр. 221, изд ВИНИТИ, АН СССР, М, 1965.

* Измерения [27] полуширины линий $6_5 - 5_1$($\lambda_{ij}=18{,}64\ \mu$) и $8_{-3} - 9_3$ ($\lambda_{ij}= 15{,}99\ \mu$) дали превышение над расчетными значениями [23] также в $\sim 1{,}5 \div 2$ раза, но оценка точности этих измерений затруднительна.

5. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, **9**, 943 (1964).
6. В. Я. Рядов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника (в печати).
7. Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия. (в печати).
8. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, **4**, 21 (1959).
9. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
10. H. A. Gebbie, Phys. Rev., **107**, 1194 (1957).
11. В. В Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
12. F. Saiedy, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 121, 5 (1960).
13. F. Saiedy, R. M. Goody, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., **119**, 213 (1959).
14. Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 655 (1963).
15. А И. Наумов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **6**, 848 (1963).
16. F. H. Murcray, D. G. Murcray, W. J. Williams, Applied Optics, **3**, 1373 (1964).
17. К. Я. Кондратьев, Лучистый теплообмен в атмосфере, Гидрометеоиздат, Л., 1956.
18. Р. М. Гуди, Физика стратосферы, Гидрометеоиздат, Л, 1958.
19. J. H. Van Vleck, V. E. Weiskopf, Rev. Mod. Phys., **17**, 227 (1945).
20. E. P. Gross, Phys. Rev., **97**, 395 (1955).
21. А. А. Викторова, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **7**, 415, 424 (1964).
22. R. B. Sanderson, N. Ginsburg, J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, **3**, 435 (1963).
23. W. S. Benedict, L. D. Kaplan, J. Chem. Phys., **30**, 388 (1959).
24. P. W. Anderson, Phys Rev, **76**, 647 (1949).
25. W. S. Benedict, J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, **4**, 453 (1964)
26. G E. Becker, S. H. Autler, Phys. Rev., **70**, 300 (1945).
27. A. Adel, Phys. Rev., **71**, 806 (1947).
28. E. J. Dutton, B. R. Bean, J. Res. NBS, **69D**, 885 (1965).
29. J. R. Rusk, J Chem. Phys., **42**, 493 (1965).
30. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, 987 (1965).
31. M. Cohn, F. L. Wentworth, J. C. Wiltse, Proc. IEEE, **51**, 1227 (1963).
32. А. П. Наумов, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **8**, 668 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 мая 1965 г.

SOME PROBLEMS OF CALCULATING AND MEASURING MILLIMETER AND SUBMILLIMETER RADIOWAVE ABSORPTION IN ATMOSPHERIC WATER VAPOURS

S. A. Zhevakin, A. P. Naumov

It is noted that the last measurements of the absorption coefficient of water vapours in relative windows of transparence of submillimeter waves ($\lambda > 60\,\mu$) carried out by a number of authors, exceeds our values calculated earlier $\sim 1{,}5 \div 2$ times, i. e. there is a discreapancy between the absorption theory and experiment as in millimeter region of the spectrum ($2\text{ mm} \lesssim \lambda \lesssim 8\text{ mm}$). The possible causes of this discreapancy are shortly discussed. The possibility of experimental investigation of submillimeter wave absorption by radioastronomical methods is studied.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 533.922

СЛОЖНЫЙ ДОППЛЕР-ЭФФЕКТ В ПЛАЗМЕ

А. Е. Бажанова

Рассматривается сложный допплер-эффект в сравнительно плотной «холодной» плазме, находящейся в магнитном поле. На основании численных расчетов показано, что излучение электрона, движущегося в плазме, происходит в основном вблизи двух частот, соответствующих циклотронному и плазменному резонансам. При этом интенсивность излучения в первой области порядка излучения в вакууме, а во второй превышает его на несколько порядков

Как известно [1], в средах, обладающих дисперсией, возможен сложный допплер-эффект, суть которого состоит в следующем. Так как при наличии дисперсии показатель преломления является функцией частоты, обычная формула для допплер-эффекта

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\beta N(\Theta, \omega)\cos\Theta}, \qquad (1)$$

превращается в уравнение относительно ω, которое может иметь при заданных ω_0, Θ и β сразу несколько решений. Можно сказать, что происходит расщепление допплеровской частоты на несколько компонент, т. е. сложный эффект Допплера.

Конкретным примером среды, где возможен сложный допплер-эффект, является плазма в магнитном поле. В этом случае роль излучателя может играть электрон, вращающийся в магнитном поле с частотой

$$\omega_B = \omega_B^0\sqrt{1-\beta^2}, \quad \omega_B^0 = eB_0/m_0c$$

и движущийся вдоль магнитного поля со скоростью v_z. При этом уравнение для допплеровских частот

$$\omega = \frac{\omega_B}{1-\beta_z N\cos\Theta}, \qquad (2)$$

где $\beta_z = v_z/c$.

Используя известное значение показателя преломления для плазмы, по формуле (2) можно определить возможные излучаемые частоты. Очевидно, возможность наблюдения расщепления частот зависит от величины интенсивности излучения. В данной работе произведен расчет интенсивности излучения электрона в плазме, находящейся в магнитном поле, и показано, что излучение происходит в основном вблизи двух частот, соответствующих циклотронному и плазменному резонансам.

1. РАСЧЕТ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

При расчете предполагалось, что скорость излучающего электрона значительно больше тепловых скоростей электронной плазмы. В этом случае можно использовать для расчетов показатель преломления «холодной» плазмы.

В этом случае интенсивность излучения электрона определяется формулой [2, 3]

$$I = \frac{e^2\omega_B^2}{c}\int_{-1}^{+1}\frac{x^2}{1+\alpha_x^2}\left[\left(\alpha_x^0\frac{\beta_1}{\lambda}+\alpha_z^0\beta_2\right)J_1(\lambda)-\beta_1 J_1'(\lambda)\right]^2 N\times \\ \times\left|1-\beta_2\mu\frac{\partial(xN)}{\partial x}\right|^{-1}d\mu\,, \tag{3}$$

где

$$\lambda=\beta_1 x N\sqrt{1-\mu^2},\quad \beta_1=v_\perp/c,\quad \beta_2=v_\parallel/c,$$

$$x=\frac{1}{1-\beta_2\mu N}=\frac{\omega}{\omega_B}=\frac{\omega}{\omega_B^0\sqrt{1-\beta_1^2-\beta_2^2}},$$

$$N^2=1-\frac{A^2}{x^2}\left[2(A^2-x^2)+x_0^2(1-\mu^2)\pm\sqrt{x_0^4(1-\mu^2)^2+4\frac{x_0^2}{x^2}(A^2-x^2)^2\mu^2}\right]\times \\ \times\left[2\left(A^2+x_0^2-x^2-\frac{A^2x_0^2\mu^2}{x^2}\right)\right]^{-1}, \tag{4}$$

$$\alpha_x^0=x\frac{N^2(x^2-x_0^2)-(x^2-x_0^2-A^2)}{A^2x_0},$$

$$\alpha_z^0=\frac{x^3N^2[(x^2-x_0^2)N^2-(x^2-x_0^2-A^2)]\mu\sqrt{1-\mu^2}}{A^2x_0[x^2N^2\sqrt{1-\mu^2}-(x^2-A^2)]}, \tag{5}$$

$$\alpha_x=\alpha_x^0\mu-\alpha_z^0\sqrt{1-\mu^2},\quad x_0=\omega_B^0/\omega_B,\quad A^2=\omega_0^2/\omega_B^2,\quad \omega_0^2=4\pi e^2n_0/m_0,$$

μ — косинус угла между силовой линией и нормалью к фронту изучаемой волны. Два значения квадрата показателя преломления N^2 относятся к двум типам волн, распространяющихся в анизотропной среде (обыкновенной и необыкновенной волнам). Интегрирование в [3] проводится по тем значениям μ, где $N^2>0$.

Сравнительно простую аналитическую формулу для интенсивности излучения электрона можно получить при малых λ (т. е. при сравнительно небольших скоростях движения электрона). Однако наиболее интересные результаты получаются в случае больших скоростей, когда $\lambda\gg1$. В этом случае не удается получить простых аналитических выражений и для определения интенсивности излучения приходится прибегнуть к численным расчетам.

Для определения области интегрирования в (3) было исследовано поведение квадрата показателя преломления для различных значений μ, β_1, β_2 и A^2. Были составлены таблицы и построены графики N^2 для различных значений μ при фиксированных значениях β_1, β_2, A^2 и графики зависимости N^2 от β_1, β_2, A^2 для одного и того же значения μ.

Квадрат показателя преломления N^2 «холодной» плазмы имеет четыре ветви (рис. 1) (ветви I-а и II-а относятся к обыкновенной волне и ветви I-б и II-б относятся к необыкновенной волне).

Расчеты показали, что для большинства значений A^2, β_1 и β_2 при любом μ ветвь I-а расположена в области $\omega<\omega_B$; поэтому для большинства значений β_1, β_2, A^2 интегрирование в (3) для ветви I-а нужно проводить только при $\mu<0$. Для тех значений β_1, β_2, A^2, для которых

ветвь I-а расположена и в области $\omega > \omega_B$, были построены графики функции

$$y(x) = \frac{1}{1-\beta_2 \mu N(x)} \tag{6}$$

при $\mu > 0$, где $N(x)$ определяется из (5). Тогда, очевидно, решение системы (4); (5) получим из (6), полагая

$$x = y. \tag{7}$$

Построение показало, что только при небольших значениях β_2, относительно больших β_1 и при $A^2 > 1$ система (4), (5) (для ветви I-а) имеет решение в некоторой области положительных значений μ: $a \leqslant \mu \leqslant 1$, где $a = a(\beta_1, \beta_2, A^2)$. Для $A^2 \leqslant 1$ при любых значениях β_1 и β_2 и любом μ ветвь I-а расположена в области $\omega < \omega_B$. Из (4) следует, что для $A^2 \leqslant 1$ интегрирование в (3) нужно проводить только для $\mu < 0$. Итак, для ветви I-а интегрирование в (3) нужно вести при $\mu < 0$, а для некоторых значений β_1, β_2, A^2 и в небольшой области положительных значений μ.

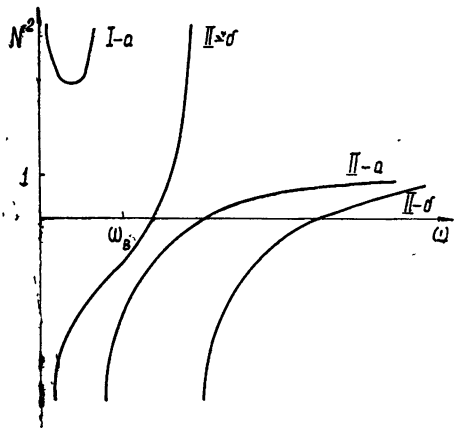


Рис. 1.

Для ветви II-а при $A^2 > 1$ и любых β_1, β_2 система (4), (5) решений не имеет. Для $A^2 = 1$ квадрат показателя преломления N^2 положителен только при $\omega > \omega_B$ и поэтому интегрирование в (3) в этом случае нужно проводить только для $\mu \geqslant 0$. Для $A^2 < 1$ величина N^2 обращается в нуль при $\omega < \omega_B$ и, следовательно, интегрирование в (3) нужно проводить как для положительных, так и для отрицательных значений μ.

Для ветви II-а и для ветви I-а при $\mu > 0$ система (4), (5) решалась методом итерации в том виде, как она записана. При $\mu < 0$ (ветвь I-а) итерации для системы (4), (5), записанной в таком виде, расходятся. Поэтому для отрицательных μ, близких к -1, система (4), (5) заменялась системой (5)—(7), а для малых по абсолютной величине значений μ система (4), (5) заменялась итерационной формулой для определения x:

$$x = |\mu| \Big\langle \Big\{ 2A^2 x_0^2 (x-1)^2 + \beta_2^2 x^2 \Big\{ 2[(A^2 + x_0^2 - x^2) x^2 - A^2 x_0^2 \mu^2] - $$

$$- A^2 \left[2(A^2 - x^2) + x_0^2 (1-\mu^2) + \sqrt{x_0^4 (1-\mu^2)^2 + 4 \frac{x_0^2}{x^2} (A^2 - x^2)^2 \mu^2} \right] \Big\} \Big\} \times$$

$$\times [2(x-1)^2 (A^2 + x_0^2 - x^2)]^{-1} \Big\rangle^{1/2}. \tag{8}$$

В свою очередь, N^2 определяется по формуле (5). В частности, из формулы (8) видно, что $x \to 0$ при $\mu \to 0$, т. е.

$$x = O(\mu) \tag{9}$$

при $\mu \ll 1$. Тогда из (4) имеем

$$N = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{\beta_2 \mu},$$

т. е. при $\mu \to 0$

$$N = O(\mu^{-2}), \tag{10}$$

а из (5) следует, что

$$A^2 - x^2 + x_0^2 - \frac{A^2 x_0^2}{x^2}\mu^2 = O(\mu^2).$$

Оценим подынтегральное выражение в (3) при $\mu \to 0$. На основании (9), (10)

$$\alpha_x^0 = O(\mu^{-3}), \quad \alpha_z^0 = O(\mu^{-2}), \quad \alpha_x = O(\mu^{-2}).$$

Кроме того,

$$\partial(xN)/\partial x = O(\mu^{-4}).$$

Учитывая приведенные оценки, для подынтегрального выражения F получим:

$$F = O(\mu^4).$$

Таким образом, интегрирование в (3) достаточно проводить до некоторого малого по абсолютной величине μ.

На рис. 2 в качестве примера построены графики подынтегральной функции для $\beta_1 = 0{,}2$, $A^2 = 10$ и некоторых значений β_2 (ветвь I-а). Графики соответствующих частот построены на рис. 3. Из сравнения этих графиков видно, что основная доля излучения приходится на сравнительно узкий диапазон частот вблизи некоторой оптимальной частоты $\omega = \omega_{опт}$.

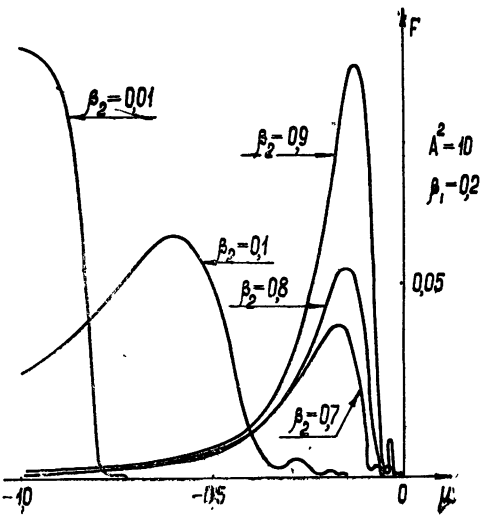


Рис. 2.

Расчеты показали, что $\omega_{опт}$ довольно сильно зависит от плотности плазмы. В таблице 1 для ветви I-а приведена зависимость $x = \omega_{опт}/\omega_B$ от A^2 (т. е. фактически от плотности плазмы) для некоторых значений β_1 и β_2 и отношение интенсивности излучения заряда к интенсивности дипольного излучения в вакууме f. Для тех значений β_1 и β_2, для которых интегрирование в (3) проводилось и в области положительных значений μ, даны два значения $\omega_{опт}/\omega_B$ соответствующие двум областям. В таблице 2 даны зависимости $x = \omega_{опт}/\omega_B$ от A^2 и отношение интенсивности излучения заряда к интенсивности дипольного излучения в вакууме f для ветви II-а.

Что касается ветви I-б, соответствующей необыкновенной волне, то расчеты показали, что при $A^2 \geqslant 1$ для большинства значений β_1, β_2

квадрат показателя преломления положителен, только когда $\omega > \omega_B$; согласно (4), интегрирование в (3) в этом случае нужно проводить только для $\mu > 0$. Для $A^2 \leqslant 1$ и при некоторых значениях β_1 и β_2 для $A^2 = 3$ интегрирование проводилось и в случае $\mu < 0$. При этом полученные значения интенсивности излучения в отрицательной области интегрирования μ значительно меньше соответствующих значений интенсивности излучения для $\mu > 0$.

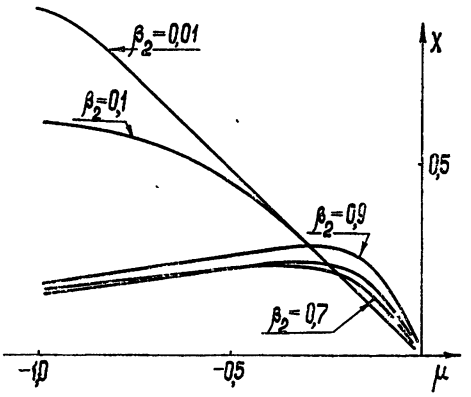


Рис. 3.

Для ветви I-б при малых μ итерации для системы (4), (5), записанной в таком виде, расходятся. Потому для малых μ система (4), (5) заменялась итерационной формулой для определения x:

$$x^2 = A^2 + x_0^2 - \frac{A^2 x_0^2}{x^2}\mu^2 + \frac{A^2}{2} \times$$

$$\times \left\{ \beta_2^2 \mu^2 \left[2(A^2 - x^2) + x_0^2 (1-\mu^2) - \right.\right. \tag{11}$$

$$\left.\left. - \sqrt{x_0^4 (1-\mu^2)^2 + 4\frac{x_0^2}{x^2}(A^2 - x^2)^2 \mu^2} \right] \right\} [(x-1)^2 - x^2 \beta_2^2 \mu^2]^{-1},$$

а показатель преломления определялся по формуле

$$N = (x-1)/\beta_2 \mu x, \tag{12}$$

полученной из (4). Из (11) и (12) следует, что при $\mu \to 0$

$$x = O(\sqrt{A^2 + x_0^2}), \quad N = O\left[\frac{1}{\beta_2 \mu} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^2 + x_0^2}} \right) \right].$$

Оценивая все входящие в подынтегральное выражение величины при $\mu \to 0$, получим для подынтегральной функции F следующую оценку:

$$F = O\left[\frac{2A^2 \cos^2(\lambda - 3\pi/4)}{\pi \beta_1 (\sqrt{A^2 + x_0^2} - 1)} \right].$$

Таким образом, подынтегральная функция при $\mu \to 0$ осциллирует и остается величиной ограниченной.

На рис. 4 в качестве примера построены графики подынтегральной функции для $\beta_1 = 0{,}2$, $A^2 = 10$ и некоторых значений β_2, указанных на рисунке. Графики соответствующих частот построены на рис. 5. Так же, как для ветви I-а, из графиков видно, что основная доля излучения приходится на сравнительно узкий диапазон частот вблизи некоторой оптимальной частоты $\omega = \omega_{опт}$, которая сильно зависит от плотности плазмы.

В таблице 3 даны зависимости $x = \omega_{опт}/\omega_B$ от A^2 и отношение интенсивности излучения заряда к интенсивности дипольного излучения

	β_1	0,01					0,1				
β_2	A^2	0,5	1	3	10	100	0,5	1	3	10	100
0,01	x	0,45	0,90	0,89	0,81	0,60	0,60	0,90	0,90	0,86	0,80
	f	10^{-2} 0,3388	0,06100	0,6379	2,188	11,06	10^{-3} 0,3144	$0,03685 \cdot 10^{-3}$	$0,4032\ 10^{-3}$	0,9952	1,498
0,1	x	0,20	0,35	0,18	0,15	0,09	0,50	0,72	0,55	0,45	0,30
	f	0,06765	0,4600	2,380	6,201	5,658	0,03245	0,2847	1,179	1,962	1,9199
0,7	x	0,09	0,10	0,09	0,07	0,04	0,10	0,10	0,14	0,16	0,09
	f	0,08224	0,2164	0,4126	0,3390	0,1674	0,05158	0,1208	0,1960	0,1529	0,04445
0,8	x	0,0055	0,0080	0,012	0,015	0,04	0,10	0,10	0,12	0,14	0,09
	f	0,04116	0,07165	0,2195	0,1990	0,08062	0,2532	0,03940	0,1033	0,08773	0,02664
0,9	x	0,0054	0,008	0,012	0,015	0,035	0,008	0,09	0,13	0,14	0,10
	f	0,01144	0,02057	0,07631	0,08933	0,04053	10^{-2} 0,6635	0,01072	0,03389	0,03587	0,01208
0,95	x	0,005	0,007	0,012	0,015	0,03	0,008	0,09	0,13	0,14	0,14
	f	10^{-2} 0,2990	10^{-2} 0,5664	0,02457	0,03882	0 02211	10^{-2} 0,1547	10^{-2} 0,2593	10^{-2} 0,9700	0,01345	10^{-2} 0,5571

	β_1	0,5					0,7				
β_2	A^2	0,5	1	3	10	100	0,5	1	3	10	100
0,01	x	0,60	0,92	$1 \pm 0,06$	0,91	0,82	0,63	0,98	0,96 1,07	0,95 1,11	0,86
	f	10^{-5} 0,2902	0,01725	0,2942	0,1812	0,09841	10^{-6} 0,3695	10^{-2} 0,7566	0,2177	0,1570	0,04675
0,1	x	0,60	0,74	0,70	0,63	0,35	0,62	0,82	0,76	0,68	0,39
	f	10^{-2} 0,4540	0,09452	0,2424	0,1702	0,04829	10^{-2} 0,1134	0,04055	0,09928	0,05878	0,01946
0,7	x	0,30	0,35	0,33	0,26	0,10	0,35	0,45	0,50	0,45	0,25
	f	10^{-2} 0,8004	0,01745	0,02388	0,01365	10^{-2} 0,9748	10^{-4} 0,3626	10^{-4} 0,9000	10^{-3} 0,1799	10^{-3} 0,1866	10^{-4} 0,2566

Таблица 1

0,2				
0,5	1	3	10	100
0,66	0,95	0,90	0,87	0,80
10^{-4} ·0,4749	0,03000	0,3194	0,5912	0,4275
0,54	0,75	0,60	0,52	0,33
0,01965	0,2564	0,7518	0,9311	0,2800
0,15	0,17	0,20	0,19	0,03
0,03742	0,08319	0,1230	0,05931	0,01482
0,15	0,20	0,20	0,18	0,09
0,01739	0,02579	0,06239	0,04809	10^{-2}·0,8584
0,12	0,18	0,20	0,20	0,12
10^{-2}·0,3771	10^{-2} 0,5753	0,01735	0,01701	10^{-2}·0,3474
0,10	0,16	0,20	0,22	0,17
10^{-3} 0,5409	10^{-3} 0,8742	10^{-2} 0,3137	10^{-2} 0,4275	10^{-2} 0,1210

0,9				
0,5	1	3	10	100
0,65	0,95	1±0,02	1±0,03	1±0,09
10^{-7} 0,1678	10^{-3}·0,8882	0,03948	0,02737	0,01990
0,65	0,80	0,84	0,77	0,51
10^{-4} 0,7575	10^{-2} 0,4918	1,24 0,02913	1,44 0,02684	10^{-2} 0,3493

β_1		0,01		0,1		0,2		0,5	
β_2 \ A^2		0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1
0,01	x	0,997 1,005	1,001	0,997 1,005	1,001	0,996 1,005	1,001	$1 \pm 0{,}004$	1,001
	f	10^{-4} 0,2500	10^{-7} 0,1768	$10^{-4} \cdot 0{,}2449$	10^{-6} 0,3157	$10^{-4} \cdot 0{,}2394$	10^{-5} 0,5519	$10^{-4} \cdot 0{,}4976$	$10^{-3} \cdot 0{,}1891$
0,1	x	0,997 1,05	1,05	0,997 1,05	1,06	$1 \pm 0{,}04$	1,04	$1 \pm 0{,}04$	1,04
	f	10^{-2} 0,2530	$10^{-3} \cdot 0{,}2195$	$10^{-2} \cdot 0{,}2467$	$10^{-3} \cdot 0{,}2352$	10^{-2} 0,2284	10^{-3} 0,2895	$10^{-2} \cdot 0{,}1268$	10^{-3} 0,8857
0,7	x	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
	f	0,1920	0,1358	0,1831	0,1299	0,1574	0,1129	0,03934	0,03078
0,8	x	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6		
	f	0,2742	0,2156	0,2561	0,2020	0,2062	0,1641		
0,9	x	3,5	4,0	3,5	4,0	3,5	4,0		
	f	0,3652	0,3173	0,3202	0,2791	0,2068	0,1819		
0,95	x	4,0	5,0	4,0	5,0	4,0	5,0		
	f	0,3924	0,3609	0,3020	0,2785	0,1127	0,1049		

Таблица 2

0,7		0,9	
0,5	1	0,5	1
$1 \pm 0{,}006$ $10^{-4}\ 0{,}8958$ $1 \pm 0{,}06$ $10^{-3}\ 0{,}5574$ 1,9 $10^{-3}\ 0{,}1559$	1,001 $10^{-3} \cdot 0{,}5464$ 1,03 $10^{-2}\ 0{,}1643$ 1,9 $10^{-3}\ 0{,}1426$	$1 \pm 0{,}007$ $10^{-4} \cdot 0{,}6302$ $1 \pm 0{,}04$ $10^{-4} \cdot 0{,}9877$	1,001 $10^{-3}\ 0{,}6076$ 1,05 $10^{-2}\ 0{,}1442$

	β_1	0,1					0,1				
β_2	A^2	0,5	1	3	10	100	0,5	1	3	10	100
0,1	x	1,23	1,42	2,00	3,32	10,05	1,23	1,42	2,0	3,32	10,05
	f	10^5 0,3661	10^5 0,6991	10^5 0,8319	10^5 0,3929	10^5 0,1989	10^3 0,3168	10^3 0,3017	10^2 0,8871	10^2 0,3852	10^2 0,1964
0,4	x	1,30	1,48	2,05	3,34	10,06	1,30	1,48	2,05	3,34	10,06
	f	10^4 0,6503	10^5 0,1321	10^5 0,3953	10^6 0,1241	10^6 0,2449	10^2 0,6244	10^3 0,1240	$10^3 \cdot 0{,}2386$	$10^3 \cdot 0{,}4371$	10^3 0,2353
0,7	x	1,57	1,72	2,23	3,46	10,1	1,58	1,73	2,23	3,45	10,1
	f	$10^4 \cdot 0{,}1391$	10^4 0,2781	10^4 0,8342	$10^5 \cdot 0{,}2771$	10^6 0,2088	$10^2 \cdot 0{,}1294$	10^2 0,2583	$10^2 \cdot 0{,}7609$	10^3 0,2219	10^3 0,3053
0,8	x	1,81	1,94	2,40	3,57	10,14	1,83	1,96	2,41	3,56	10,1
	f	10^3 0,6062	10^4 0,1213	10^4 0,3637	10^5 0,1210	$10^6 \cdot 0{,}1067$	5,546	$10^2 \cdot 0{,}1105$	10^2 0,3262	10^3 0,1003	10^3 0,2196
0,9	x	2,40	2,50	2,87	3,91	10,26	2,46	2,56	2,90	3,90	10,2
	f	10^3 0,1501	10^3 0,3001	10^3 0,9001	10^4 0,2996	10^5 0,2830	1,288	2,572	7,606	10^2 0,2401	$10^2 \cdot 0{,}8870$
0,95	x	3,28	3,36	3,64	4,50	10,5	3,45	3,52	3,76	4,50	10,4
	f	10^2 0,3740	10^2 0,7479	10^3 0,2243	10^3 0,7465	10^4 0,7225	0,2966	0,5630	1,666	5,321	$10^2 \cdot 0{,}2664$

	β_1	0,5					0,7				
β_2	A^2	0,5	1	3	10	100	0,5	1	3	10	100
0,1	x	1,30	1,50	2,08	3,37	10,07	1,55	1,65	2,23	3,46	10,1
	f	2,129	1,381	0,3976	0,1902	0,1025	0,1260	0,1331	0,06137	0,03561	0,02064
0,4	x	1,45	1,85	2,16	3,40	10,1	1,75	1,84	2,30	3,55	10,1
	f	0,8929	1,680	3,469	1,945	1,113	0,1079	0,2069	0,4534	0,2920	0,1792
0,7	x	2,0	2,15	2,5	3,6	10,2	7,0	7,0	7,0	7,5	12,0
	f	0,09499	0,1840	0,5143	0,9901	0,8290	10^{-3} 0,1357	10^{-3} 0,2841	$10^{-2} \cdot 0{,}1280$	10^{-2} 0,4687	10^{-2} 0,3986

Таблица 3

0,2				
0,5	1	3	10	100
1,23	1,42	2,01	3,32	10,05
10^2 0,6095	10^2 0,4071	10^2 0,1040	4,505	2,377
1,32	1,49	2,05	3,35	10,06
10^2 0,1361	10^2 0,2659	10^2 0,6598	10^2 0,5203	10^2 0,2755
1,62	1,76	2,23	3,44	10,1
2,686	5,313	10^2 0,1530	10^2 0,3760	10^2 0,3362
1,90	2,02	2,44	3,55	10,1
1,079	2,135	6,182	10^2 0,1708	10^2 0,2263
2,66	2,73	3,07	3,90	10,2
0,2023	0,4006	1,167	3,452	7,709
4,20	4,24	4,40	4,90	10,5
0,04218	0,06094	0,1431	0,4501	1,552

0,9				
0,5	1	3	10	100
2,46	2,55	2,92	3,94	10,3
10^{-3}·0,7932	10^{-2} 0,1373	10^{-2} 0,2549	10^{-2} 0,2471	10^{-2}·0,2038
5,81	5,84	6,02	6,40	11,5
10^{-4}·0,7335	10^{-3} 0,1484	10^{-3} 0,4658	10^{-2} 0,1935	10^{-2}·0,1610

в вакууме f для ветви I-б. Следует отметить, что в таблицах 1—3 указана интенсивность излучения электрона для некоторых значений β_1, β_2

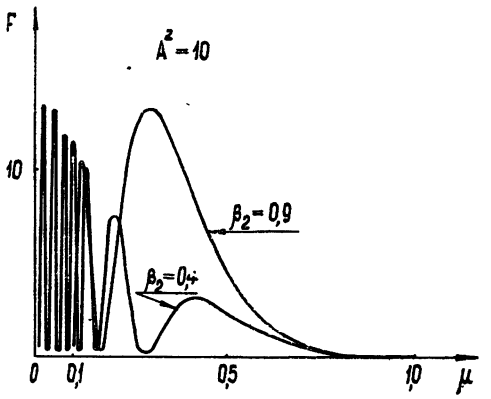


Рис. 4.

и A^2, выбор которых никак не связан с методом счета; можно брать любые значения A^2 и β_1, β_2 (лишь бы $\beta_1^2 + \beta_2^2 < 1$).

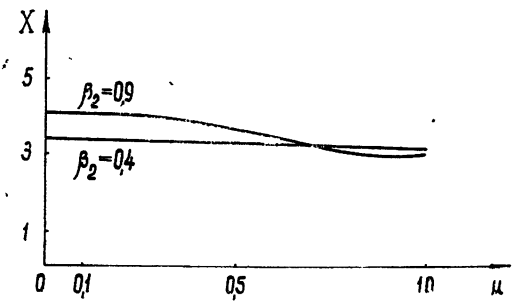


Рис. 5.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные расчеты показали, что циклотронное излучение электрона в плотной, «холодной» плазме происходит в основном в двух областях частот, где показатель преломления холодной плазмы обращается в бесконечность (и где, следовательно, фазовая скорость волн минимальна). Первая область частот соответствует циклотронному резонансу в плазме. Соответствующие частоты излучения несколько меньше циклотронной частоты; например, при $v_\parallel/c=0{,}7$, $v_\perp/c=0{,}1$, $\omega_0=\omega_B$

$$\omega_{\text{опт}} = 0{,}1\,\omega_B;$$

при $v_\parallel/c=0{,}1$, $v_\perp/c=0{,}2$, $\omega_0^2/\omega_B^2=3$

$$\omega_{\text{опт}} = 0{,}6\,\omega_B.$$

Интенсивность излучения меньше или порядка интенсивности излучения электрона в вакууме.

Вторая область соответствует плазменному резонансу. При $\omega_0 \gg \omega_B$ излучаемые частоты близки к плазменной частоте. Что касается интенсивности излучения, то она на несколько (5 ÷ 6) порядков превышает

излучение в вакууме и, как нетрудно убедится, близка по абсолютной величине к поляризационным потерям заряда в плазме.

Этот результат существенно отличается от результатов, полученных Железняковым [4], Пахомовым и Степановым [5] в дипольном приближении, когда интенсивность излучения электрона в плазме меньше интенсивности излучения в вакууме. Из полученных расчетов следует, что электрон, движущийся со скоростью, превышающей тепловую $v \gg v_T$, излучает в область, где неприменимо дипольное приближение в ряде случаев значительно больше (в $10^5 \div 10^6$ раз), чем в вакууме. При $\omega_0 \leqslant \omega_B$ существует третья область частот с $N^2 < 1$, где происходит излучение. Соответствующие частоты несколько больше циклотронной частоты (например, при $v_\parallel/c = 0{,}7$ $\omega_{опт} = 1{,}9\ \omega_B$). Интенсивность излучения меньше или порядка интенсивности излучения электрона в вакууме.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. Д. Шафранову за представление темы настоящей работы и постоянное внимание к ее выполнению.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., **6**, 3 (1942)
2. В. А. Эйдман, ЖЭТФ, **34**, 131 (1958); **36**, 1335 (1959)
3. А. Е. Бажанова, В. Д. Шафранов, ДАН СССР, **149**, 1049 (1963).
4. В. В Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 14 (1959).
5. В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **38**, 1564 (1960).

Поступила в редакцию
22 февраля 1965 г.

COMPLEX DOPPLER-EFFECT IN PLASMA

A. E. Bazhanova

A complex Doppler effect is considered in a rather dense cold magnetized plasma. On the basis of numerical calculations it is shown that radiation of an electron, moving in the plasma takes place mainly near two frequencies corresponding to cyclotron and plasma resonances. The radiation intensity in the first region is commensurable with that in vacuum and exceeds it by several orders in the second one.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 538.56 : 519.25

О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРЫ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯННОГО ЕЮ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс

С помощью радиолокационного коррелометра с большой разрешающей способностью по дистанции произведены измерения пространственного радиуса корреляции радиоизлучения, рассеянного взволнованной поверхностью моря. Установлена связь значений пространственных радиусов корреляции рассеянных радиосигналов с длиной морской волны. Показано, что результаты измерений находятся в хорошем согласии с расчетами, проведенными в предположении рассеяния радиоволн малыми неоднородностями, расположенными на крупных неровностях.

В большинстве работ, посвященных исследованию рассеяния радиоизлучения взволнованной поверхностью моря, рассматриваются энергетические характеристики рассеянного радиоизлучения (см., например, [1]). Вместе с тем очевидно, что для выяснения механизма рассеяния радиоволн на взволнованной поверхности моря необходимо изучить различные характеристики рассеянного сигнала Одной из таких характеристик является пространственный радиус корреляции рассеянного радиоизлучения и его связь с размерами неоднородностей морской поверхности. Настоящая работа посвящена теоретическому и экспериментальному рассмотрению этого вопроса. В основу расчетов положено предположение, что при рассеянии радиоволн сантиметрового диапазона рассеивающую поверхность можно рассматривать как совокупность* крупномасштабных образований, к которым применим принцип Кирхгофа [2, 3], и мелкой ряби, отражение от которой можно рассматривать методом возмущений [4, 5]. Результаты расчетов используются для интерпретации данных по измерению радиусов корреляции огибающих радиосигналов, рассеянных разнесенными участками моря. Измерения проведены в диапазоне волн от 8 *мм* до 4 *м* с помощью специально разработанного радиолокационного коррелометра с высокой разрешающей способностью по дальности. Одновременно с радиотехническими измерениями определялись характеристики морского волнения, что позволило сопоставить данные по радиусам корреляции радиосигналов с некоторыми параметрами морской поверхности.

1. ОТРАЖЕНИЕ ОТ КРУПНЫХ НЕРОВНОСТЕЙ, ПОКРЫТЫХ РЯБЬЮ

Рассмотрим отражение электромагнитной волны** $E_0 = gE_0 e^{ikR} R^{-1}$ от поверхности Σ, нормальные отклонения $\zeta(r)$ и углы наклона $\gamma \equiv \nabla\zeta(r)$ которой относительно средней поверхности S (рис. 1) малы:

$$\gamma^2 \ll 1; \quad 2k\zeta \ll 1. \tag{1}$$

* Такая модель поверхности была впервые рассмотрена в работе [6] в связи с отражением акустических волн.

** Источник в точке O множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем.

а) *Граничные условия на поверхности S.* Если поверхность Σ идеально проводящая, то граничные условия для электрического поля $\mathcal{E}$ имеют вид

$$[\nu\mathcal{E}]_\Sigma = 0 \tag{2}$$

(ν — нормаль к Σ). Используя неравенства (1), эти граничные условия можно перенести на среднюю поверхность S, заменяя в (2)

$$\mathcal{E}_\Sigma \to \mathcal{E}_S + \zeta(n\nabla)\mathcal{E}_S; \quad \nu \to n - \gamma \tag{3}$$

(n — нормаль к S).

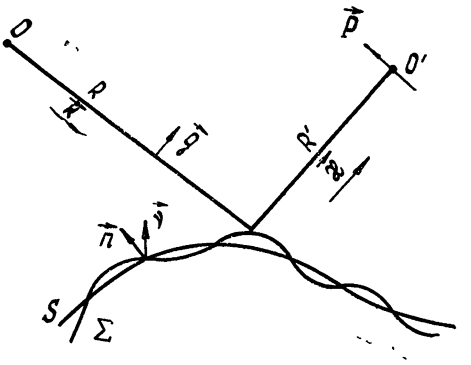


Рис. 1.

Рассеянное поле будем искать в виде суммы поля нулевого приближения $\mathcal{E}^0$ и поля E первого порядка малости по ζ и γ. Отделяя в (2) слагаемые разного порядка, приходим к системе граничных условий на поверхности S:

$$[n\mathcal{E}^0] = 0; \tag{4а}$$

$$[nE] = [\gamma\mathcal{E}^0] - \zeta[n\nabla]\mathcal{E}^0. \tag{4б}$$

Если предположить, что поверхность S достаточно гладкая, так что для нее применим принцип Кирхгофа, то из граничного условия (4а) получаем для поля нулевого приближения формулы

$$\mathcal{E}^0 = 2n(nE^0); \quad \frac{\partial\mathcal{E}^0}{\partial n} = 2i(kn)[n[E_0 n]]. \tag{5}$$

Здесь k — волновой вектор падающей волны E_0 и все величины относятся к поверхности S. Подставляя (5) в (4б), находим тангенциальные компоненты поля E на поверхности S:

$$[nE] = 2(nE_0)[\gamma n] - 2i\zeta(kn)[nE_0]. \tag{6}$$

б) *Отраженное поле.* В дальнейшем мы будем интересоваться только полем первого приближения E, так как для $\mathcal{E}^0$ можно сразу пользоваться результатами работ [3, 9]*. Рассеянное поле E в точке наблюдения O' может быть выражено через тангенциальные компоненты (6) на поверхности S по формуле, непосредственно вытекающей из теоремы взаимности (см., например, [7]):

* В некоторых случаях, например, при обратном рассеянии под малыми углами скольжения поле $\mathcal{E}^0$ экспоненциально мало и его можно не учитывать при расчете статистических характеристик полного поля.

$$(\boldsymbol{Ep}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S (\boldsymbol{G}_p[\boldsymbol{nE}])\,dS \tag{7}$$

($\boldsymbol{G}_p$ — векторная функция Грина, имеющая смысл напряженности магнитного поля, создаваемого единичным диполем $\boldsymbol{p}$, находящимся в точке наблюдения O', при условии, что тангенциальные составляющие электрического поля обращаются в нуль на поверхности S). Если попрежнему считать поверхность S достаточно гладкой, так что в каждой точке она может быть заменена касательной плоскостью (приближение Кирхгофа), то $\boldsymbol{G}_p$ представляется в виде суммы магнитного поля диполя $\boldsymbol{p}$ и его зеркального отображения в этой плоскости:

$$\boldsymbol{G}_p = 2i[\boldsymbol{n}[\boldsymbol{n}[\boldsymbol{\varkappa p}]]]e^{ikR'}/R', \quad \boldsymbol{\varkappa} = -k\nabla_S R' \tag{8}$$

(R' — расстояние между точкой наблюдения и переменной точкой на поверхности S, по которой происходит интегрирование в (7)).

Подставляя (6) и (8) в формулу (7) и считая, что источник O и точка наблюдения O' находятся в зоне Фраунгофера относительно S, получим

$$(\boldsymbol{Ep}) = \frac{i\exp[ik(R_0 + R_0')]}{\pi R_0 R_0'} E_0 \int\limits_S ([\boldsymbol{n}[\boldsymbol{n}[\boldsymbol{\varkappa p}]]],\ (\boldsymbol{ng})[\boldsymbol{jn}] - i\zeta(\boldsymbol{kn})[\boldsymbol{ng}])e^{i\boldsymbol{qr}}\,dS, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\varkappa}. \tag{9}$$

Если учесть, что расстояния l, на которых изменяется $\zeta(\boldsymbol{r})$ или $\gamma(\boldsymbol{r})$, значительно меньше характерных линейных размеров Λ крупных неровностей ($\Lambda \gg l$, k^{-1}), то в (9) можно заменить $\gamma \to -iq\zeta$. В этом легко убедиться, интегрируя в (9) по частям член, содержащий γ, и считая $S^{1/2} \gg l$. Выполняя несложные векторные преобразования, получаем окончательную формулу для напряженности отраженного поля с поляризацией $\boldsymbol{p}$:

$$(\boldsymbol{Ep}) = \frac{E_0\exp[ik(R_0 + R_0')]}{\pi R_0 R_0'} \int\limits_S ([\boldsymbol{p\varkappa}],\ k_n[\boldsymbol{ng}] - g_n[\boldsymbol{nq}])e^{i\boldsymbol{qr}}\zeta(\boldsymbol{r})dS, \quad k_n = \boldsymbol{kn}. \tag{10}$$

В частном случае одномерных неровностей с образующими, перпендикулярными к волновому вектору $\boldsymbol{k}$, при горизонтальной поляризации приемной и передающей антенн и для точки наблюдения, лежащей в плоскости падения, приходим к формуле, полученной в [6] для рассеяния звуковой волны на абсолютно мягкой поверхности:

$$E = -\frac{E_0\exp[ik(R_0 + R_0')]}{\pi R_0 R_0'} \int\limits_S k_n \varkappa_n e^{i\boldsymbol{qr}}\zeta(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}. \tag{11}$$

Во всех остальных случаях формулы для электромагнитного и скалярного волнового поля не совпадают.

Если поверхность S является плоскостью, а источник поля $\boldsymbol{E}_0$ — вертикальный или горизонтальный диполь, то из (10) вытекают все формулы работы [5] при соответствующих поляризациях приемной и передающей антенн.

В дальнейшем нас будет интересовать только радиолокационный сигнал, когда передача и прием ведутся на одну и ту же антенну, ось которой направлена по $\boldsymbol{k}$. Полагая в (10) $\boldsymbol{\varkappa} = -\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{g}$; $(\boldsymbol{kp}) = 0$, получаем для радиолокационного сигнала

$$(Ep) = \frac{E_0 e^{2ikR_0}}{\pi R_0^2} \int_S (2p_n^2 k^2 + k_n^2) e^{2ikr\zeta(r)} dr. \qquad (12)$$

2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ОГИБАЮЩЕЙ РАДИОСИГНАЛА

Для упрощения следующих ниже вычислений предположим, что, во-первых, рассеяние происходит на одномерных неровностях с образующими, перпендикулярными к волновому вектору $\boldsymbol{k}$ и, во-вторых, что освещенная часть поверхности (произведение формы импульса и диаграммы направленности антенны) есть прямоугольник* с размером $L = c\tau/2$ вдоль оси x (xz — плоскость падения, τ — длительность импульса). Уравнение поверхности S задано в виде $z = Z(x)$. Функции $Z(x)$ и $\zeta(x)$ будем считать независимыми стационарными случайными функциями, имеющими существенно различные радиусы корреляции Λ и l, такие, что $\Lambda \gg l$, k^{-1}. Величина $E_p \equiv (Ep)$, определяемая формулой (12), также является случайной величиной, так что принимаемая мощность $P_p \equiv |E_p|^2$ флуктуирует.

При выводе (10) мы предполагали, что $L \gg l$; флуктуациями, привносимыми случайной функцией $\zeta(x)$, можно пренебречь, поскольку

$$\langle\, |\langle E_p E_p^* \rangle - E_p E_p^*| \,\rangle \ll |\langle E_p E_p^* \rangle|^2 \qquad (13)$$

в силу малости отношения $(l/L)^{1/2}$ [8]. Скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\zeta(x)$.

Для мощности, принимаемой с участка L, находящегося на расстоянии D от источника, получаем из (12)

$$P_p(D) \simeq \langle E_p E_p^* \rangle = A \int_D^{D+L} dx f_p(x) \tilde{w}[k_\perp(x)]. \qquad (14)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{w}[k_\perp(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \zeta(x)\, \zeta(x+\xi) \rangle \exp[-2ik_\perp(x)\xi]\, d\xi; \qquad (15а)$$

$$f_p(x) = \frac{(2p_n^2 + \alpha_n^2)^2}{n_z} = \begin{cases} n_z[\cos^2\theta + \eta(x)\sin 2\theta + \eta^2(x)\sin^2\theta]^2 — \text{гориз. поляриз.} \\ n_z[1 + \sin^2\theta - \eta(x)\sin 2\theta + \eta^2(x)(1+\cos^2\theta)]^2 — \text{верт. поляриз.} \end{cases} \qquad (15б)$$

$$\alpha \equiv \frac{k}{k}; \qquad A \equiv \frac{E_0^2 k^2}{\pi^2 D^2}; \qquad \eta(x) = \frac{dZ(x)}{dx};$$

$k_\perp(x)$ — проекция вектора $\boldsymbol{k}$ на поверхность S в точке x, θ — угол падения ($k_x = k\sin\theta$; $k_z = -k\cos\theta$).

Обозначая чертой усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $Z(x)$ и пользуясь (14), найдем корреляционную функцию мощности сигналов, отраженных от двух участков поверхности, смещенных друг относительно друга на расстояние $\Delta \ll D$:

$$K_p(\Delta) = \overline{(P_p(D) - \overline{P_p})(P_p(D+\Delta) - \overline{P_p})} = A^2 \int_0^L dx_1 \int_\Delta^{L+\Delta} dx_2 R_p(x_1 - x_2). \qquad (16)$$

* Размер облучаемого участка в перпендикулярном направлении в данном случае не существен и считается равным единице.

Здесь введены обозначения

$$R_p(x_1 - x_2) = \overline{\delta F(x_1)\delta F(x_2)}; \quad \delta F_p(x) = F_p(x) - \overline{F_p(x)}; \qquad F_p(x) = f_p(x)w[k_\perp(x)]. \tag{17}$$

Связь функции $F_p(x)$ с наклонами поверхности $\eta(x)$ выражается формулами (17), (15) и, вообще говоря, является довольно сложной. Некоторые качественные результаты можно получить, рассмотрев предельный случай скользящего распространения $\theta \simeq \pi/2$ и считая $|kl\eta| \ll 1$. Для вертикальной поляризации это приводит к $\delta F_{\text{верт}} \sim c(\eta^2 - \overline{\eta^2})$. Для горизонтальной в этом случае $\delta F_{\text{гор}} \sim c(\eta^4 - \overline{\eta^4})$, но при не слишком скользящем распространении (когда $\pi/2 - \theta \gtrsim \eta$) $\delta F_{\text{гор}} \sim c(\eta^2 - \overline{\eta^2})$. Если учесть, что в этих случаях ($\theta \sim \pi/2$) освещаются только передние скаты крупных неровностей, то под радиусом корреляции возвышений $Z(x)$ следует понимать $\Lambda/2$ (Λ — длина морской волны). При этом угол наклона η существенно изменяется на расстояниях $\sim \Lambda/4$, а радиус корреляции квадратов углов наклона $\sim \Lambda/8$. Таким образом, $R(x_1 - x_2)$ убывает на расстояниях $\rho_0 \sim \Lambda/8$.

Вместо корреляционной функции $K_p(\Delta)$ можно рассматривать более грубую характеристику, например, радиус корреляции по половинному уровню $\delta_{0,5}$, который определяется как решение уравнения

$$K(\delta_{0,5}) = \frac{1}{2} K(0). \tag{18}$$

При $L \ll \rho_0$ из (16) непосредственно следует $K(\Delta) = R(\Delta)$, и следовательно, $R(\delta_{0,5}) = \frac{1}{2} R(0)$, т. е. $\delta_{0,5} \simeq \rho_0$. Для произвольного соотношения между ρ_0 и L решение уравнения (18) $\delta_{0,5} = \delta_{0,5}(L)$ при специальном виде функции корреляции $R(x)$ приведено на рис. 2. Кривая 1 соответствует функции Коши

$$R(x) = \frac{\rho_0^2}{x^2 + \rho_0^2},$$

а кривая 2 — ступенчатой функции корреляции:

$$R(x) = \begin{cases} 1 (|x| < \rho_0) \\ 0 (|x| > \rho_0) \end{cases}.$$

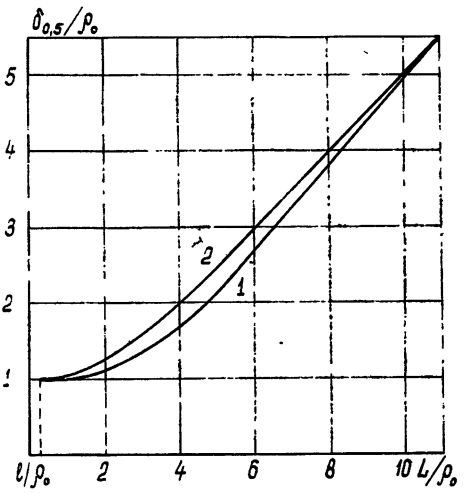


Рис. 2.

При достаточно малых L вне зависимости от конкретного вида функции корреляции $R(x)$ радиус корреляции мощности принимает постоянное значение $\delta_{0,5} \simeq \rho_0$. Размеры этого горизонтального участка на кривой $\delta_{0,5} = \delta_{0,5}(L)$ приближенно определяются неравенством $l \ll L \lesssim \Lambda$. При $L \gg \Lambda$ $\delta_{0,5}$ растет пропорционально длительности импульса (точнее, радиусу корреляции импульса).

Так как обычно измеряется амплитуда сигнала, а не мощность, то радиус корреляции амплитуды, соответствующей горизонтальному участку на кривой $\delta_{0,5}(L)$, имеет порядок $\delta_p \sim 2\rho_0 \sim \Lambda/4$.

3. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Исследование пространственных характеристик рассеянных морем сигналов производилось с помощью радиолокационного коррелометра с высокой разрешающей способностью по дистанции. Такой коррелометр состоит из многоволновой радиолокационной станции (рабочие длины волн $\lambda = 0{,}8$; 3,2; 10; 50 *см* и 4 *м*) с общим трактом промежуточной частоты и устройства для быстрого измерения коэффициента корреляции принятых сигналов. Применение узкоимпульсного модулятора и широкополосного приемного тракта (ширина полосы входных устройств и УПЧ свыше 60 *мгц*, видеоусилителя больше 30 *мгц*) позволило измерять коэффициенты корреляции сигналов, смещенных в пространстве на расстояния $\geqslant 1$ *м*.

Коррелометр (рис. 3) работает следующим образом. Продетектированный и усиленный видеоимпульс разветвляется на два канала, где происходит выделение (стробирование) сигналов по дальности; необходимый сдвиг между сигналами определяется параметрами линии задержки, включенной между генераторами стробирующих импульсов, и может меняться в пределах от 0 до 100 *м* через 1 *м*.

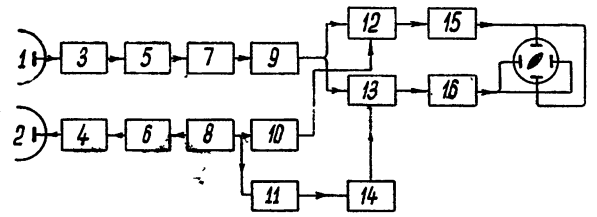


Рис. 3. Схема коррелометра:

1 — приемная антенна; 2 — передающая антенна; 3 — преобразователь; 4 — генератор; 5 — предварительный УПЧ; 6 — модулятор; 7 — УПЧ и детектор; 8 — генератор запуска; 9 — видеоусилитель; 10 — генератор строба 1; 11 — линия задержки; 12—строб-каскад 1; 13—строб-каскад 2; 14 — генератор строба 2, 15 — пиковый детектор 1; 16 — пиковый детектор 2.

Огибающие стробированных сигналов поступают на ортогональные пластины электронно-лучевого индикатора, на экране которого регистрируется (визуально или фотографированием) совместная функция распределения двух процессов. Точность такого метода определения коэффициента корреляции по корреляционному полю составляет $\pm 0{,}1$ (при градуировке по синусоидальным сигналам).

Измерения проводились летом и осенью 1964 г. на Черном море. Коррелометр располагался на берегу на высоте 100 *м*; облучались участки моря на расстоянии 300 $\div$ 1000 *м* от берега. Энергетический потенциал локатора обеспечивал значительное превышение принятого сигнала над шумами. На всех волнах исследовалась зависимость функции пространственной корреляции, снятой для различных значений длительности импульса передатчика (0,5 и 1,5 *мксек* для $\lambda = 4$ *м*, 0,035; 0,05; 0,08; 0,13; 0,2; 0,29; 0,5 *мксек* — для остальных длин волн), от состояния морской поверхности.

Параметры морского волнения определялись из показаний струнного волнографа, размещенного непосредственно у рассеивающего пятна. Проведенные измерения охватывают случаи, когда состояние моря менялось от 0 до 5 баллов (высота морских волн до 2 *м*).

4. ЗАВИСИМОСТЬ $\delta_{0,5}$ ОТ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ОБЛУЧАЮЩЕГО ИМПУЛЬСА

По измеренным функциям пространственной корреляции находились радиусы корреляции $\delta_{0,5}$; для каждого опыта была построена зависимость $\delta_{0,5}$ от длительности зондирующего импульса передатчика $\tau_и$. Всего было построено $30 \div 40$ зависимостей такого рода для каждой длины волны, исключая волны 8 *мм* и 4 *м*: опыты на этих волнах проводились эпизодически.

На рис. 4 в качестве иллюстрации такого построения приведены четыре характерные кривые $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$, полученные в различные дни на волне 10 *см*. Анализ зависимостей такого рода показал, что кривые $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ можно грубо подразделить на две группы: линейную зависимость $\delta_{0,5}$ от $\tau_и$ (кривая 1 рис. 4) и зависимость с уплощенной частью (кривые 2, 3, 4 рис. 4). Углы наклона линейной части кривых $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ для первой и второй групп, место и размер уплощения для опытов второй группы могут быть разными для различных опытов.

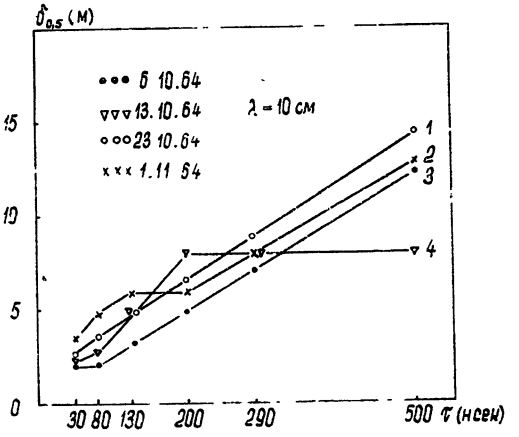


Рис. 4.

Сопоставление полученных зависимостей $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ с рассчитанными по формуле (16) и приведенными на рис. 2 свидетельствует о совпадении характера расчетных и экспериментальных кривых (для опытов второй группы); подтверждается физический смысл уплощения кривых $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$. Действительно, как следует из расчета, ордината уплощения соответствует значениям пространственного радиуса корреляции крупных неровностей морской поверхности $\delta_{0,5} = \delta_p$; размеры уплощения кривой $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ (расстояние между точками перегиба) ограничиваются значениями $\tau_и$ порядка радиусов корреляции малых рассеивателей и крупных неровностей.

Вариация этих параметров свидетельствует о том, что соотношения между величинами радиусов корреляции ряби и крупных неоднородностей меняется от опыта к опыту. Значения радиусов корреляции крупных неровностей находятся в пределах измеряемых величин, за исключением случаев линейной зависимости $\delta_{0,5}$ от $\tau_и$, где, по-видимому, реальные значения δ_p превышают измеренные значения $\delta_{0,5}$ даже для самого длинного импульса ($\delta_{0,5\,max} = 25$ *м*).

Таким образом, из зависимостей типа $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ при наличии уплощений могут быть получены данные о пространственных радиусах корреляции крупных неровностей морской поверхности.

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ δ_p И ПАРАМЕТРАМИ МОРСКОГО ВОЛНЕНИЯ

Представлялось интересным установить связь между радиусами корреляции крупных неровностей δ_p, определенными описанным выше способом по характеристикам рассеянного сигнала, и непосредственно измеренными параметрами морского волнения (пространственный радиус корреляции, период, высота и длина морской волны). Статистической обработкой записи показаний струнного волнографа определялись средние высота и период морской волны и временной радиус корреля-

ции; по этим значениям вычислялись длина морской волны Λ и пространственный радиус корреляции. Полученные значения параметров морского волнения сопоставлялись со значениями δ_p для всех опытов.

Несмотря на то, что вышеприведенные параметры морского волнения каким-то образом связаны между собой (с ростом волнения и, следовательно, высот волн увеличиваются их период, длина и радиус корреляции), прямую связь δ_p удалось установить только с длиной морской волны. На рис. 5 в качестве примера такой связи приведены усредненные зависимости пространственного радиуса корреляции крупных неровностей δ_p (по данным радиоизмерений) от длины морской волны Λ, снятые в диапазоне волн 3,2 и 10 *см*. Как видно из рисунка, кривые с достаточной степенью точности могут быть аппроксимированы прямой с углом наклона 45°, если положить $\delta_p = \Lambda/4$.

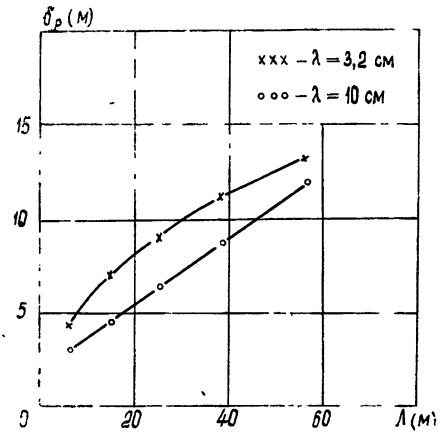


Рис. 5.

Установленный характер связи между крупными неровностями морской поверхности и рассеянным излучением хорошо согласуется с расчетом и свидетельствует о том, что радиосигнал декоррелирует на расстояниях порядка одного склона морской волны. Если такое предположение справедливо, должна наблюдаться зависимость δ_p от направления облучения по отношению к фронту морских волн вследствие анизотропии последних. К сожалению, непосредственных опытов по изучению зависимости δ_p от направления облучения провести не удалось ввиду ограниченности азимутального сектора обзора локатора.

Для выяснения такой зависимости были использованы косвенные данные: среди всех проведенных опытов были выбраны случаи облучения поперек и вдоль волны; выяснялось соотношение между опытами, обнаружившими уплощение в кривой $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ ($\delta_p \leqslant 25$ *м*) и опытами с линейной зависимостью $\delta_{0,5}$ от $\tau_и$ ($\delta_p > 25$ *м*). Оказалось, что облучение вдоль волны дает, как правило, большие значения δ_p. Так, например, при облучении вдоль волны для $\lambda = 50$ *см* только 1 кривая из 13 имеет уплощение, тогда как при облучении поперек волны 8 кривых из 12 имеют плоскую часть, т. е. радиус корреляции δ_p при облучении поперек волны уменьшается. Наблюдаемые закономерности могут быть в какой-то мере использованы для определения размера и направления морских волн по корреляционным характеристикам рассеянного ими радиосигнала.

6. ЗАВИСИМОСТЬ $\delta_{0,5}$ ОТ λ

Исследование зависимости пространственных характеристик сигнала от длины радиоволны особенно важно для выводов о границах применимости принятой модели рассеяния. Сопоставление опытов, проведенных на разных волнах в один и тот же день (практически одновременно) показало, что наряду с опытами, где кривые $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ совпадают для разных волн, имеются и такие, в которых наличие или отсутствие уплощений, их размеры, величина δ_p, углы наклона линейной части кривой $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ меняются в зависимости от длины волны ра-

диоизлучения. Какой-либо закономерности, связывающей эти отклонения с длиной радиоволны или параметрами волнения, найти не удалось.

Это указывает на то, что понятиями «мелкие рассеиватели» и «крупные неровности» следует пользоваться применительно к длине волны радиоизлучения; в ряде конкретных случаев (когда, например, наблюдается несколько систем волн) одни и те же образования на море могут играть разную роль в зависимости от длины радиоволны.

Тем не менее усредненные значения радиусов корреляции рассеянных морем сигналов от длины радиоволны не зависят. Это иллюстрируется рис. 6, на котором приведены кривые интегрального распределения радиусов корреляции $W(\delta_{0,5})$, полученные при различных значениях длительности импульса передатчика для всех длин волн. Из рисунка видно, что для определенной длительности импульса кривые $W(\delta_{0,5})$ достаточно хорошо совпадают; практически полное совпадение имеет место при малых значениях $\tau_и$.

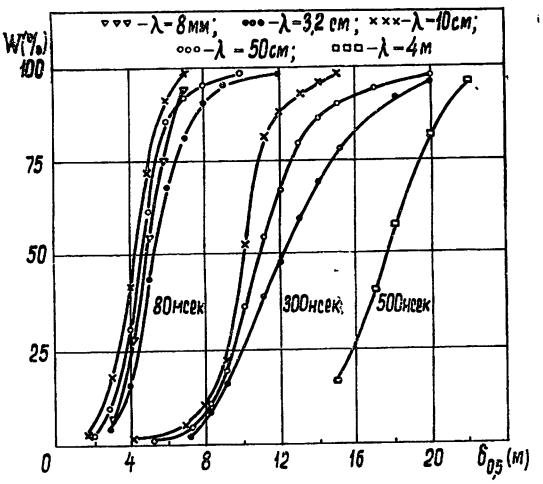


Рис. 6.

Независимость $\delta_{0,5}$ от λ в этом случае может быть понята, если предположить, что радиусы корреляции элементарных рассеивателей на поверхности моря достаточно малы (меньше разрешающей способности коррелометра). В этом случае измеренные значения $\delta_{0,5}$ должны соответствовать радиусам корреляции зондирующих импульсов. Можно показать, что для импульса колоколообразной формы $u(x) = \exp\left[-K\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$ при $K = 4$ радиус корреляции импульса $\delta_{0,5} \simeq L/3$, где $L = c\tau_и/2$.

Сопоставление измеренных значений радиусов корреляции 50% обеспеченности, взятых из кривых рис. 6, с расчетными для $\tau_и = 80$ *нсек*, дает очень хорошее совпадение. Расхождение в величинах $\delta_{0,5\,изм}$ и $\delta_{0,5\,расч}$, увеличивающееся по мере роста длительности импульса, объясняется появлением уплощения в исходных кривых $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ для значений $\tau_и$, соответствующих значениям радиусов корреляции крупных неровностей.

7. ВЛИЯНИЕ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕНОСТИ АНТЕНН

При рассмотрении пространственных характеристик рассеянного морем сигнала распределение неровностей на морской поверхности предполагалось одномерным; при этом изменение ширины диаграммы направленности антенн в азимутальной плоскости, или, что аналогично, изменение поперечного размера облучающего пятна не должно было влиять на измеряемые величины $\delta_{0,5}$ и δ_p. Учтем декорреляцию сигнала в поперечном направлении, для чего сопоставим средние значения $\delta_{0,5}$, измеренные антеннами с разными диаграммами направленности.

Такое сопоставление проводится на рис. 7, где нанесены кривые

интегрального распределения радиусов корреляции, полученные для разных антенн; данные приведены для волн $\lambda = 3{,}2$, 10 и 50 *см* при $\tau_и = 300$ *нсек*. Сравнивались результаты летних (пунктирные кривые; ширина диаграмм для волн 3,2 *см* и 10 *см* — 1° и 3,5° соответственно) и осенних опытов (сплошные кривые; ширина диаграмм 15° и 14° для волн 3,2 и 10 *см*). На волне 50 *см* ширина диаграммы направленности антенн летом и осенью оставалась неизменной — 18°. Это позволило учесть различие в значениях $\delta_{0,5}$ для летних и осенних измерений, обусловленное разными погодными условиями: как следует из рис. 7, кривые $W(\delta_{0,5})$ для λ=50 *см* смещены одна относительно другой приблизительно на 2 *м*. Сравнивая кривые для других длин волн с учетом этой поправки, получаем, что уширение диаграммы с 3,5° до 14° (в три раза на $\lambda = 10$ *см*) соответствует уменьшению $\delta_{0,5}$ 50% обеспеченности на 2 *м*, а с 1° до 15° (в пятнадцать раз на $\lambda = 3{,}2$ *см*) — на 5 *м*.

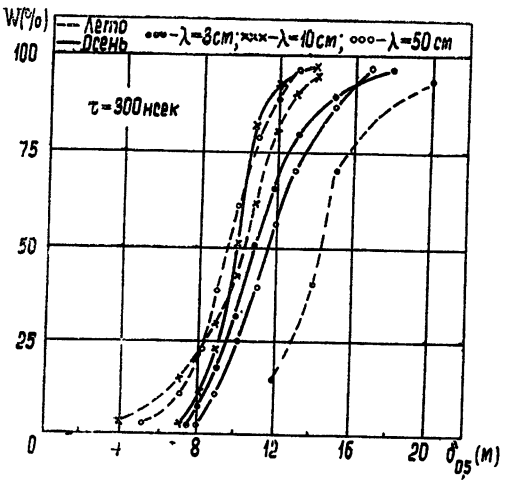


Рис. 7.

Следует отметить также, что кривые $W(\delta_{0,5})$ для разных длин волн, измерявшиеся осенью на одинаковых диаграммах (15°, 14°, 18°) хорошо совпадают друг с другом. Таким образом, сужение диаграммы направленности антенн приводит к увеличению измеряемого радиуса корреляции, что свидетельствует о наличии декорреляции сигнала в поперечном направлении.

Совпадение результатов измерений с данными расчетов, проведенных в предположении об отражении радиоволн малыми рассеивателями, расположенными на крупных неровностях, свидетельствует в пользу такой модели рассеивания. Независимость измеренных радиусов корреляции крупных неровностей от длины радиоволны служит дополнительным доказательством правильности такого взгляда.

Из измерений зависимости пространственного радиуса корреляции радиосигнала от длительности излучаемого импульса в случае, когда кривая $\delta_{0,5} = f(\tau_и)$ имеет уплощение, могут быть получены значения пространственного радиуса корреляции крупных неровностей морской поверхности.

Установлена связь между значениями радиусов корреляции крупных неровностей, полученными из радиоизмерений, и длиной и направлением морских волн.

Полученные данные могут быть использованы, по-видимому, для определения некоторых параметров морского волнения с помощью корреляционных измерений рассеянного радиосигнала.

Авторы выражают благодарность В. И. Зельдису за помощь при разработке аппаратуры и измерениях и Ф. Г. Бассу за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радиоокеанографические исследования морского волнения, Сб. под ред. С. Я. Брауде, изд. АН УССР, Киев, 1962.
2. Л. М. Бреховских, ЖЭТФ, **23**, 275 (1952).
3. М. А. Исакович, ЖЭТФ, **23**, 305 (1952).
4. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
5. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, **3**, 180 (1958).
6. Б. Ф. Курьянов, Акуст. ж., **8**, 325 (1962).
7. М. П. Свешникова, ЖРФХО, **59**, 453 (1927).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, из-во Наука, М., 1964.
9. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 101 (1964).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
5 апреля 1965 г.

ON THE EFFECT OF SEA SURFACE STRUCTURE UPON SPATIAL CHARACTERISTICS OF SCATTERED RADIATION

A. I. Kalmykov, I. E. Ostrovsky, A. D. Rosenberg, I. M. Fux

By means of radar correlometer with a great range resolution the measurements have been carried out of spatial correlation radius of radiation scattered by disturbed sea surface. The relation between the values of spatial correlation radius of the scattered radio signals and sea wavelength has been ascertained. The results are shown to be in a good agreement with calculations carried out under the assumption that small scale scatteres are imposed on large irregularities.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371 123

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОЩАДКОЙ

Е. В. Чаевский

Рассматривается рассеяние звуковых и электромагнитных волн пологими неровностями, высота которых велика по сравнению с длиной падающей волны. Показано, что при произвольных статистических закономерностях случайных отклонений каждая из энергетических характеристик рассеянного поля представима в виде асимптотического ряда по малому параметру; первому члену ряда соответствует лучевое приближение.

В работе [1] в рамках приближения Кирхгофа были рассчитаны энергетические характеристики поля, рассеянного плоской площадкой с пологими случайными неровностями. Рассеивающая поверхность предполагалась идеально отражающей; однако обобщение теории на случай произвольных коэффициентов отражения проводится элементарно [2]. В предлагаемой заметке выражения для энергетических характеристик поля, полученные в [1, 2], представлены в виде асимптотического ряда по параметру, пропорциональному отношению длины падающей волны к характерной высоте неровностей. Такое представление удобно при описании поля, рассеянного высокими по сравнению с длиной падающей волны неровностями.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯННОГО ПОЛЯ В ВИДЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Пусть в декартовой системе координат XYZ задан ансамбль отражающих поверхностей $z = \xi(x, y)$, характерные наклоны малы (затенения и переизлучения не учитываются), а характерная длина неровностей существенно меньше размеров отражающей площадки. Случайный процесс $\xi(x, y)$ считаем однородным, падающую волну — плоской. Предположим также, что наблюдатель расположен в зоне Фраунгофера.

В отраженном звуковом поле U и электромагнитном поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ будем рассматривать только флуктуационные компоненты. Расчет регулярных компонент, согласно [1], проводится элементарно. Если $\boldsymbol{P}_\delta$ — средний поток энергии, переносимый флуктуационной компонентой поля, $\delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} - \langle \boldsymbol{E} \rangle$, $\delta\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} - \langle \boldsymbol{H} \rangle$ ($\langle\,\rangle$ — знак усреднения по ансамблю отражающих поверхностей), $\boldsymbol{p}$ — единичный, произвольно ориентированный вектор, то, согласно [1, 2],

$$\boldsymbol{P}_\delta = |V(\theta)|^2 P_0 F \boldsymbol{\alpha}_2 \tag{1.1}$$

в случае звукового поля и

$$\boldsymbol{P}_\delta = |\boldsymbol{\varkappa}_1|^2 P_0 F \boldsymbol{\alpha}_2 = |\boldsymbol{\varkappa}_2|^2 P_0 F \boldsymbol{\alpha}_2, \tag{1.2}$$

$$\langle |\delta \boldsymbol{E}\boldsymbol{p}|^2 \rangle = |\boldsymbol{\varkappa}_1 \boldsymbol{p}|^2 |A|^2 F, \quad \langle |\delta \boldsymbol{H}\boldsymbol{p}|^2 \rangle = |\boldsymbol{\varkappa}_2 \boldsymbol{p}|^2 |A|^2 F \tag{1.3}$$

в случае электромагнитного поля. Здесь

$$F = \frac{k^2 s \cos^2\theta}{4\pi^2 \alpha_{0z}^2 R_0^2} G, \tag{1.4}$$

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty}\int [\langle e^{ik\alpha_z(\xi_3-\xi_1)}\rangle - |\langle e^{-ik\alpha_z\xi}\rangle|^2]\, e^{ik\alpha\rho}\, dxdy, \tag{1.5}$$

$$\xi_1 = \xi(0, 0), \quad \xi_3 = \xi(x, y), \quad \rho = xe_x + ye_y,$$

e_x, e_y — единичные векторы вдоль осей x, y, s — проекция отражающей поверхности на плоскость XY, A — амплитуда падающей волны, P_0 — модуль потока падающей энергии, k — волновое число, R_0 — расстояние от начала координат до наблюдателя, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_0 = \alpha\,|\alpha|^{-1}$, единичный вектор α_1 ориентирован в направлении передатчика, единичный вектор α_2 — в точку наблюдения, V — коэффициент отражения скалярных волн, $\theta = \arccos(\alpha_1\alpha_0)$.

Векторы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ описывают деполяризацию падающей волны при отражении от плоскости, нормаль к которой ориентирована вдоль α. Если M, Q — коэффициенты отражения Френеля для нормальной и тангенциальной компонент электрического поля соответственно, e_E, e_H — единичные векторы, описывающие поляризацию электрического и магнитного полей в падающей волне,

$$b_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\sin\theta}, \qquad b_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\sin(2\theta)}, \tag{1.6}$$

то

$$\varkappa_1 = M(\theta)\,(e_E\alpha_0)\,\alpha_0 - M(\theta)\,(e_E b_1)\,b_1 + Q(\theta)\,(e_E b_2)\,b_2, \tag{1.7}$$

$$\varkappa_2 = Q(\theta)\,(e_H\alpha_0)\,\alpha_0 - Q(\theta)\,(e_H b_1)\,b_1 + M(\theta)\,(e_H b_2)\,b_2. \tag{1.8}$$

В (1.1)—(1.3) статистические параметры отражающей поверхности входят лишь через посредство функции G. Поэтому изучение особенностей рассеяния при различных статистических свойствах отражающей поверхности фактически сводится к анализу функции G.

Для вычисления G при больших высотах неровностей используем функцию $\Phi(s, \rho)$, определенную следующим образом:

$$\Phi(s, \rho) = xy \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_1, \tag{1.9}$$

где $\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — трехточечная плотность вероятности случайных отклонений; координатами точек 1, 2, 3 в плоскости XY будут соответственно $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) и $\xi_2 = \xi_1 + xs_x$, $\xi_3 = \xi_1 + xs_x + ys_y$. Зависимость от s_z в $\Phi(s, \rho)$ отсутствует.

Как видно из (1.9), функция $\Phi(s, \rho)$ описывает распределение наклонов между плоскостью XY и плоскостью T, проведенной через точки $\rho_1 = \xi(0, 0)e_z$, $\rho_2 = xe_x + \xi(x, 0)e_z$, $\rho_3 = xe_x + ye_y + \xi(x, y)e_z$. Нормаль n_T к плоскости T выражается через s_x, s_y обычным соотношением

$$n_T = \frac{e_z - s_x e_x - s_y e_y}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}}. \tag{1.10}$$

Функцию $\Phi(s, \rho)$ можно непосредственно определить как совместную плотность распределения наклонов s_x, s_y.

Для фиксированной реализации

$$s_x = \frac{\xi(x, 0) - \xi(0, 0)}{x}, \qquad s_y = \frac{\xi(x, y) - \xi(x, 0)}{y}, \tag{1.11}$$

и, следовательно, при $x\to 0$, $y\to 0$

$$s_x \to \frac{\partial \xi}{\partial x} \equiv \xi_x, \qquad s_y \to \frac{\partial \xi}{\partial y} \equiv \xi_y. \tag{1.12}$$

Таким образом, если $W(\xi_x, \xi_y)$ — вероятностная плотность распределения наклонов на случайной поверхности, то

$$\Phi(s, 0) = W(s_x, s_y). \tag{1.13}$$

Интеграл (1.5) вполне определяется функцией $\Phi(s, \rho)$. Действительно, подынтегральная функция быстро убывает с ростом $|\rho|$ при всех α_x, α_y и потому G — непрерывная функция переменных α_x, α_y. С учетом этого обстоятельства ясно, что значения G в точках, где α_x, α_y обращаются в нуль, можно определить из условия непрерывности. При $\alpha_x \neq 0$, $\alpha_y \neq 0$ в силу однородности случайного процесса

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int |\langle e^{-ik\alpha_z\xi}\rangle|^2 e^{ik\alpha\rho}\,dxdy = |\langle e^{-ik\alpha_z\xi}\rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\alpha_x x}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\alpha_y y}dy = 0, \tag{1.14}$$

и так как $\xi_3 - \xi_1 = xs_x + ys_y$, из (1.5) получаем

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int dx\,dy\,ds_x\,ds_y\,\Phi(s, \rho)\exp\{ik[(\alpha_z s_x + \alpha_x)x + (\alpha_z s_y + \alpha_y)y]\}. \tag{1.15}$$

Представление функции G в виде (1.15) весьма удобно при анализе рассеяния волн высокими неровностями. Разложим $\Phi(s, \rho)$ в ряд по x, y. Учитывая инвариантность функции $\Phi(s, \rho)$ относительно преобразования $\rho \to -\rho$, имеем

$$\Phi(s, \rho) = \left[1 + \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{dy}\right)^2 + \ldots\right]\Phi(s, 0). \tag{1.16}$$

Подставим ряд (1.16) в (1.15). Представляя множители $x^n y^q \exp\{ik[(\alpha_z s_x + \alpha_x)x + (\alpha_z s_y + \alpha_y)y]\}$ в виде $\left(\frac{1}{ik\alpha_z}\right)^{n+q}\left(\frac{\partial}{\partial s_x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial s_y}\right)^q \times$ $\times \exp\{ik[(\alpha_z s_x + \alpha_x)x + (\alpha_z s_y + \alpha_y)y]\}$ и интегрируя по частям, получаем

$$G = \frac{4\pi^2}{\alpha_z^2 k^2}\left\{1 - \frac{1}{2\alpha_z^2 k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s_x \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial s_y \partial y}\right)^2 + \ldots\right\}\Phi\left(-\frac{\alpha}{\alpha_z}, 0\right). \tag{1.17}$$

Асимптотический ряд (1.17) хорошо описывает функцию G при высоких неровностях, когда безразмерный параметр $h = \alpha_z k\sigma$ (здесь $\sigma^2 \equiv \langle \xi^2 \rangle$) существенно больше единицы. Малым параметром, обеспечивающим убывание членов асимптотического ряда, является параметр h^{-2}. Действительно, если Λ — радиус корреляции случайных отклонений, то

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(s, \rho) \sim \frac{1}{\Lambda}\Phi(s, \rho), \quad \frac{\partial}{\partial s_x}\Phi(s, \rho) \sim \frac{\Lambda}{\sigma}\Phi(s, \rho),$$

$$\frac{1}{\alpha_z^2 k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s_x \partial x}\right)^2 \Phi(s, \rho) \sim \frac{1}{\alpha_z^2 k^2 \sigma^2}\Phi(s, \rho) = \frac{1}{h^2}\Phi(s, \rho)$$

и т. д. При описании G только первым членом ряда (1.17) из (1.4), (1.13) получаем

$$F = \frac{1}{\alpha_{0z}^4 R_0^2} W\left(-\frac{\alpha_x}{\alpha_z}, -\frac{\alpha_y}{\alpha_z}\right). \tag{1.18}$$

Функция $W(\xi_x, \xi_y)$ существенно отлична от нуля лишь при $|\xi_x|$, $|\xi_y|$ меньше или порядка σ/Λ; так как характерные наклоны на отражающей поверхности малы, $W(\xi_x, \xi_y) \sim 1$ лишь при $|\xi_x|, |\xi_y| \ll 1$. Далее, при малых $\alpha_x\alpha_z^{-1}$, $\alpha_y\alpha_z^{-1}$ величины $\alpha_x\alpha_z^{-1}$, $\alpha_y\alpha_z^{-1}$ пропорциональны отклонениям наблюдателя от направления, в котором рассеивалась бы энергия при зеркальном отражении от плоскости XY. Следовательно, для высоких неровностей независимо от конкретного вида случайного процесса $\xi(x, y)$ рассеяние флуктуационной компоненты поля происходит в конус шириной порядка σ/Λ вблизи направления зеркального отражения от средней плоскости и определяется в основном распределением наклонов на отражающей поверхности.

2. ЛУЧЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Как видно из (1.1)—(1.3), (1.17), (1.18), если пренебрегать поправками порядка h^{-2} функция F оказывается не зависящей от длины волны падающего излучения и волновые свойства явления в энергетических характеристиках рассеянного поля учитываются только посредством коэффициентов отражения. Покажем, что в этом приближении процесс рассеяния энергии описывается лучевой моделью, предложенной в [3].

Следуя [3], будем определять потоки энергии вблизи отражающей поверхности по законам Френеля, а траектории рассеянных лучей по законам Гамильтона. Будем считать, что ослабление потоков энергии по мере удаления от отражающей поверхности определяется только расходимостью лучей.

Рассмотрим сначала рассеяние звуковой волны. Разобьем отражающую поверхность на элементарные площадки $\Delta\Sigma_l$. Благодаря малости площадок каждую из них можно считать плоской и предполагать, что рассеяние лучей происходит только в направлении зеркального отражения. Будем описывать единичным вектором $\boldsymbol{\alpha}_3$ ориентацию лучей, отраженных площадкой $\Delta\Sigma_l$. Очевидно, если $\boldsymbol{n}$ — нормаль к $\Delta\Sigma_l$, то

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 2(\boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\alpha}_1. \tag{2.1}$$

На сфере единичного радиуса вблизи точки $\boldsymbol{\alpha}_2$, соответствующей ориентации радиус-вектора на наблюдателя, выделим элементарный участок $\Delta\Omega$. Вычислим среднее по экземплярам количество энергии, рассеиваемое за единицу времени элементом $\Delta\Sigma_l$ в телесный угол $\Delta\Omega$.

Когда конец случайного вектора $\boldsymbol{\alpha}_3$ попадает внутрь $\Delta\Omega$,

$$\boldsymbol{\alpha}_3 \simeq \boldsymbol{\alpha}_2, \qquad \boldsymbol{n} \simeq \boldsymbol{\alpha}_0 \tag{2.2}$$

и количество энергии $\Delta\varepsilon_l$, рассеиваемое за единицу времени в телесный угол $\Delta\Omega$, равно $|V(\theta)|^2 P_0 \cos\theta \Delta\Sigma_l$. Когда конец вектора $\boldsymbol{\alpha}_3$ попадает вне $\Delta\Omega$, величина $\Delta\varepsilon_l$ равна нулю. Следовательно, среднее количество энергии, рассеиваемое элементом $\Delta\Sigma_l$ за единицу времени в телесный угол $\Delta\Omega$, определяется соотношением

$$\langle \Delta\varepsilon_l \rangle = |V(\theta)|^2 P_0 \cos\theta \, \Delta\Sigma_l \, W'(\boldsymbol{\alpha}_2) \, \Delta\Omega, \tag{2.3}$$

где $W'(\boldsymbol{\alpha}_2)\Delta\Omega$ — вероятность попадания $\boldsymbol{\alpha}_3$ в область $\Delta\Omega$. Учитывая, что

$$\Delta\Sigma_l = \frac{(\Delta x \Delta y)_l}{\alpha_{0z}}, \tag{2.4}$$

и суммируя по всем отражающим элементам, имеем:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_i \langle \Delta\varepsilon_i \rangle = |V(\theta)|^2 P_0 \frac{s\cos\theta}{\alpha_{0z}} W'(\boldsymbol{\alpha}_2)\,\Delta\Omega. \qquad (2.5)$$

Однако, если $\langle P\rangle\,\boldsymbol{\alpha}_2$ — средний поток энергии в точке наблюдения, то

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle P \rangle R_0^2\,\Delta\Omega. \qquad (2.6)$$

Сравнивая (2.5) с (2.6), находим

$$\langle \boldsymbol{P} \rangle = |V(\theta)|^2 P_0 \frac{s\cos\theta}{\alpha_{0z} R_0^2} W'(\boldsymbol{\alpha}_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2. \qquad (2.7)$$

Из (2.1) можно выразить распределение по направлениям случайных векторов $\boldsymbol{\alpha}_3$ через распределение по направлениям нормали к случайной поверхности $\boldsymbol{n}$. Переходя затем к распределению по наклонам и учитывая, что $\langle \boldsymbol{P} \rangle \to \boldsymbol{P}_\delta$ при $h \to \infty$, запишем соотношение (2.7) в виде

$$\langle \boldsymbol{P} \rangle = \boldsymbol{P}_\delta = \frac{|V(\theta)|^2 P_0 s}{4\alpha_{0z}^4 R_0^2} W\left(-\frac{\alpha_x}{\alpha_z}, -\frac{\alpha_y}{\alpha_z}\right). \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) в точности совпадает с (1.1), если F описывать соотношением (1.18). Таким образом, первый член асимптотического ряда для $\boldsymbol{P}_\delta$, полученный в предыдущем разделе, допускает наглядное физическое объяснение.

Совершенно аналогично описывается и рассеяние электромагнитных волн. Пусть, например, задано электрическое поле падающей волны $e^{i\omega}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_E$ и требуется вычислить $\langle |\boldsymbol{Ep}|^2 \rangle$. Как отмечалось выше, элементарная площадка $\Delta\Sigma_i$ посылает лучи в точку наблюдения лишь при $\boldsymbol{n} \simeq \boldsymbol{\alpha}_0$. Для такой ориентации плоского элемента рассеянное поле $\boldsymbol{E}'$ на отражающей поверхности, согласно формулам Френеля, имеет вид

$$\boldsymbol{E}' = e^{i\omega} A[M(\theta)\,(\boldsymbol{e}_E\boldsymbol{\alpha}_0)\,\boldsymbol{\alpha}_0 - M(\theta)\,(\boldsymbol{e}_E\boldsymbol{b}_1)\,\boldsymbol{b}_1 + Q(\theta)\,(\boldsymbol{e}_E\boldsymbol{b}_2)\,\boldsymbol{b}_2] = e^{i\omega} A\,\boldsymbol{\varkappa}_1. \qquad (2.9)$$

Вдоль лучей в рассматриваемом приближении поляризация волн не меняется. Поэтому формула (2.9) определяет поляризацию поля в точке приема. Изменения среднего квадрата поля по мере удаления наблюдателя от отражающей поверхности определяются только расходимостью лучей и учитываются совершенно так же, как в случае звуковой волны. В результате получаем

$$\langle |\boldsymbol{Ep}|^2 \rangle = \langle |\delta\,\boldsymbol{Ep}|^2 \rangle = \frac{|\boldsymbol{\varkappa}_1\boldsymbol{p}|^2 |A|^2}{4\alpha_{0z}^4 R_0^2} W\left(-\frac{\alpha_x}{\alpha_z}, -\frac{\alpha_y}{\alpha_z}\right) \qquad (2.10)$$

в полном соответствии с (1.3), (1.18).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОПРАВОК ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЙ

Проиллюстрируем общую теорию на конкретном примере. Пусть случайные отклонения представляют собой нормальный процесс, и коэффициент корреляции $r(x, y)$ имеет вид

$$r(x, y) = \exp\left\{-\left[\frac{x^2}{\Lambda_{xx}} - 2\frac{xy}{\Lambda_{xy}} + \frac{y^2}{\Lambda_{yy}}\right]\right\}. \qquad (3.1)$$

По формуле (1.9) определяем $\Phi(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\rho})$. Выкладки существенно упроща-

ются, если в (1.9) подставлять не $\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в явном виде, а выражение этой функции через характеристическую функцию случайного процесса. В результате получаем:

$$\Phi(s, \rho) = \frac{xy}{2\pi\sigma^2\sqrt{m}} \exp\{-[\beta_{xx}s_x^2 + 2\beta_{xy}s_xs_y + \beta_{yy}s_y^2]\}, \tag{3.2}$$

где

$$\beta_{xx} = \frac{1-r(0, y)}{m\sigma^2}x^2, \qquad \beta_{xy} = \frac{1+r(x, y) - r(x, 0) - r(0, y)}{2m\sigma^2}xy,$$

$$\beta_{yy} = \frac{1-r(x, 0)}{m\sigma^2}y^2, \quad m = 4[1-r(x, 0)]\,[1-r(0, y)] - [1+r(x, y) - r(x, 0) - r(0, y)]^2.$$

Совершая в (3.2) предельный переход $x\to 0$, $y\to 0$, находим плотность распределения наклонов на случайной поверхности:

$$W(s_x, s_y) = \frac{\sqrt{D}}{4\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{D}{4\sigma^2}\left[\frac{s_x^2}{\Lambda_{yy}} + 2\frac{s_xs_y}{\Lambda_{xy}} + \frac{s_y^2}{\Lambda_{xx}}\right]\right\}, \tag{3.3}$$

где

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\Lambda_{xx}\Lambda_{yy}} - \frac{1}{\Lambda_{xy}^2}.$$

Функция $W(s_x, s_y)$ определяет лучевое приближение. Из (1.18) в полном соответствии с [1] получаем

$$F = \frac{\sqrt{D}}{16\pi\sigma^2\alpha_{0z}^4R_0^2}e^{-\gamma^2}, \tag{3.4}$$

где

$$\gamma^2 = \frac{D}{4\alpha_z^2\sigma^2}\left[\frac{\alpha_x^2}{\Lambda_{yy}} + 2\frac{\alpha_x\alpha_y}{\Lambda_{xy}} + \frac{\alpha_y^2}{\Lambda_{xx}}\right].$$

Для учета волновых поправок, согласно разделу 1, к функции (3.2) нужно применить оператор (1.16). В результате несложных вычислений находим

$$F = \frac{\sqrt{D}}{16\pi\sigma^2\alpha_{0z}^4R_0^2}\left[1 + \frac{1}{2h^2}(\gamma^4 - 4\gamma^2 + 2) + \ldots\right]e^{-\gamma^2}. \tag{3.5}$$

С ростом γ^2 функция F быстро убывает, поэтому представляет интерес рассмотрение волновой поправки лишь в области $\gamma^2 \sim 1$. Для конкретности ограничимся интервалом $\gamma^2 \leqslant 4$. Из (3.5) видно, что модуль отношения волновой компоненты к лучевой достигает в этом интервале максимума при $\gamma^2=0$, $\gamma^2=2$, $\gamma^2=4$. В точках $\gamma^2=0$, $\gamma^2=4$ волновая поправка положительна, в точке $\gamma^2=2$ — отрицательна.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А Исакович, ЖЭТФ, 23, 305 (1952).
2. М. А. Исакович, Отчет акустической лаборатории ФИАН, 1953.
3. В. А Фок, ЖЭТФ, 20, 961 (1960).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
19 апреля 1965 г.

ENERGY CHARACTERISTICS OF FIELD SCATTERED BV ROUGH AREA

E. V. Chaevsky

The sound and electromagnetic wave scattering by slope irregularities is considered, the height of which is large as compared to an incident wave length. For arbitrary statistical laws of random deviations each of the scattered field energy characteristics is shown to be representable as asymptotic series over a small parameter. The ray approximation coresponds to the first term of the series.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371.182

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

В. Ф. Алексин, В. И. Пахомов, К. Н. Степанов

Рассматривается поведение электромагнитного поля в волновой зоне в однородной анизотропной среде с дисперсией (магнитоактивной плазме), создаваемого внешним источником. Для некоторых особых направлений излучения, совпадающих либо с направлением магнитного поля, либо с образующими конуса излучения (границей области прозрачности), поле излучения сильно возрастает. Рассмотрено аналогичное возрастание корреляции флуктуационных электромагнитных полей в магнитоактивной плазме.

Как известно, электромагнитные поля, создаваемые внешним источником в однородной неограниченной анизотропной среде с дисперсией (магнитоактивной плазме), имеют особенности вблизи каустических поверхностей (границ области прозрачности). В частности, вблизи каустик обращается в бесконечность интенсивность теплового излучения в анизотропной среде [1]. Аналогичными особенностями обладают корреляции флуктуационных электромагнитных полей в магнитоактивной плазме [2]. Это связано с тем, что по этим направлениям излучения образуется «сгущение» лучей.

Такими особыми направлениями излучения $\chi = \chi_{cr}$ (χ — угол между групповой скоростью и внешним магнитным полем $\boldsymbol{H}_0$) являются:

1) направление $\chi = \chi_0$, вблизи которого направление групповой скорости перестает зависеть от направления фазовой скорости излучаемых волн,

2) направление $\chi = 0$, для которого групповая скорость становится параллельной магнитному полю, и

3) направление $\chi = \chi_0'$, для которого частота волны равна частоте продольных колебаний магнитоактивной плазмы.

При приближении χ к χ_{cr} геометрическая оптика становится неприменимой. Особенности излучения точечного электрического диполя, ориентированного вдоль $\boldsymbol{H}_0$, в холодной плазме были изучены при $\chi \simeq \chi_0$ и $\chi \simeq \chi_0'$ в работе [3]. В настоящей статье исследуется излучение произвольно распределенных внешних электрических токов при $\chi \simeq \chi_{cr}$ в холодной плазме; в случае плазменного резонанса ($\chi \simeq \chi_0'$) и электронного гирорезонанса произведен учет пространственной дисперсии плазмы; изучена также корреляция флуктуационных электромагнитных полей при $\chi \simeq \chi_{cr}$.

1. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Напряженность электрического и магнитного полей, создаваемых в плазме внешними электрическими токами с плотностью $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$, определяется с помощью функции Грина из соотношений

$$E_l(\boldsymbol{r}) = \int G_{lk}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, j_k(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}', \quad \boldsymbol{H} = -i\frac{c}{\omega}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}, \qquad (1)$$

где [4]

$$G_{ik}(\boldsymbol{r}) = g_1\delta_{ik} + g_2\rho_i\rho_k + g_3 h_i h_k + g_4\varepsilon_{ikl}h_l + g_5[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{h}]_l[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{h}]_k + \\ + g_6(\rho_i h_k + \rho_k h_i) + g_7(h_l[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{h}]_k - h_k[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{h}]_l) + g_8(\rho_l[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{h}]_k - \rho_k[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{h}]_l), \tag{2}$$

$$g_l(\boldsymbol{r}) = -\frac{i}{\pi}\int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_\parallel \frac{a_l}{\omega D} e^{ik_\parallel z}. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}_0/H_0$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_\perp/r_\perp$, $\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - z\boldsymbol{h}$ — проекция радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ на плоскость, перпендикулярную оси z. Коэффициенты a_l определяются формулами (14) работы [4], в которых нужно положить $z = 0$ и $n = 0$.

Если пространственная дисперсия несущественна, то тензор диэлектрической проницаемости плазмы и величина D имеют вид

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_1\delta_{ik} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)h_i h_k + i\varepsilon_2\varepsilon_{ikl}h_l, \\ D = \varepsilon_3(n_\parallel^2 - n_{\parallel 1}^2)(n_\parallel^2 - n_{\parallel 2}^2), \tag{4}$$

где

$$n_{\parallel j}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_3}\left[2\varepsilon_1\varepsilon_3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)n_\perp^2 \pm \sqrt{n_\perp^4(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + 4\varepsilon_3\varepsilon_2^2(\varepsilon_3 - n_\perp^2)}\right], \\ n_\parallel = k_\parallel c/\omega, \qquad n_\perp = k_\perp c/\omega. \tag{5}$$

Уравнение $D = 0$ определяет «продольные» показатели преломления $n_{\parallel j}(j = 1, 2)$ в зависимости от частоты и «поперечного» показателя преломления $n_\perp$. В этом случае коэффициенты a_l имеют вид

$$a_1 \equiv v_1 J_0 = (\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1 n_\perp^2 - \varepsilon_3 n_\parallel^2)J_0, \\ a_2 \equiv \frac{1}{2}v_2(J_0 - J_2) = \frac{1}{2}n_\perp^2(n^2 - \varepsilon_3)(J_0 - J_2), \\ a_3 \equiv v_3 J_0 = [n_\parallel^2(n^2 - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1^2]J_0, \\ a_4 \equiv v_4 J_0 = -i\varepsilon_2\varepsilon_3 J_0, \\ a_5 \equiv \frac{1}{2}v_5(J_0 + J_2) = \frac{1}{2}n_\perp^2(n^2 - \varepsilon_3)(J_0 + J_2), \\ a_6 \equiv iv_6 J_1 = in_\parallel n_\perp(n^2 - \varepsilon_1)J_1, \\ a_7 \equiv iv_7 J_1 = n_\parallel n_\perp \varepsilon_2 J_1, \\ a_8 \equiv v_8 J_0 = -i\varepsilon_2 n_\perp^2 J_0, \tag{6}$$

где $J_n = J_n(k_\perp r_\perp)$ — функция Бесселя, $n^2 = n_\parallel^2 + n_\perp^2$.

Интегрирование по $k_\parallel$ в (3) можно провести, используя теорему о вычетах:

$$g_l(\boldsymbol{r}) = -\sum_{j=1,2}\frac{(-1)^j\omega^2}{c^3\varepsilon_3}\int_0^\infty \frac{a_l n_\perp \exp(in_{\parallel j}\omega z/c)}{n_{\parallel j}(n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2)}dn_\perp. \tag{7}$$

При $r_\perp \to \infty$ можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя, входящих в a_l. В этом случае коэффициент g_5

будет мал по сравнению с остальными коэффициентами g_l, которые определяются следующими выражениями:

$$g_l(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1,2;\ \alpha=\pm 1} \eta_{li} J, \quad J = \int_0^\infty F_i(n_\perp) \exp\left[i \frac{r\omega}{c} f(n_\perp) \right] dn_\perp, \tag{8}$$

где $\eta_{li} = 1$ для $i = 1, 2, 3, 4, 8$, $\eta_5 = 0$, $\eta_6 = \eta_7 = \alpha$ и

$$F_i(n_\perp) = \frac{(-1)^{i-1}\omega^2}{c^3 \varepsilon_3} \sqrt{\frac{2n_\perp c}{\pi r \omega \sin\chi}} \frac{v_i}{n_{\parallel i}\left(n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2\right)} e^{-i\alpha\pi/4}, \tag{9}$$

$$f(n_\perp) = n_{\parallel i} \cos\chi + \alpha n_\perp \sin\chi,$$

$$\alpha = -\operatorname{sgn} \frac{dn_{\parallel i}}{dn_\perp}, \tag{10}$$

χ — угол между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{H}_0$ ($r_\perp = r\sin\chi$, $r_\parallel = z = r\cos\chi$).

Для больших значений z ($z \to \infty$) интегралы (8) нетрудно вычислить методом стационарной фазы:

$$J = \sum \sqrt{\frac{2\pi c}{r\omega}} \frac{F_i(n_\perp)}{\sqrt{|f''(n_\perp)|}} \exp\left[i \frac{r\omega}{c} f(n_\perp) + i\xi \frac{\pi}{4} \right], \tag{11}$$

где $\xi = \operatorname{sgn} f''(n_\perp)$, а суммирование производится по всем положительным решениям уравнения $f'(n_\perp) = 0$, которое можно представить в виде

$$\frac{dn_{\parallel i}}{dn_\perp} = -\alpha \operatorname{tg}\chi. \tag{12}$$

Выражения (8) и (11) определяют асимптотическое поведение функции Грина в волновой зоне на расстоянии $r \gg \bar{\lambda} = \lambda/2\pi$, где λ — длина волны в плазме.

Предполагая линейные размеры области с током малыми по сравнению с r, для напряженности электрического поля в волновой зоне получим из (1) следующее выражение:

$$E_l^{(i)}(\boldsymbol{r}) = -i\omega G_{ik}(\boldsymbol{r})\, d_k(\chi), \tag{13}$$

где

$$\boldsymbol{d}(\chi) = \frac{i}{\omega} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \exp\left[-i\psi(\boldsymbol{r}', \chi)\right] d\boldsymbol{r}', \tag{14}$$

$$\psi(\boldsymbol{r}', \chi) = \frac{\omega \boldsymbol{r}'}{c} \nabla(rf). \tag{15}$$

Если $a/\lambda \ll 1$, то $\psi \ll 1$. Вектор $\boldsymbol{d}$ в этом случае совпадает с дипольным моментом излучателя.

Для плазмы в отсутствие пространственной дисперсии выражение для функции Грина в волновой зоне, аналогичное (2), было также получено в работе [5] в виде некоторого дифференциального оператора, действующего на скалярную функцию $\sim g_1(\boldsymbol{r})$ (см. также [3] и цитированную там литературу).

Отметим, что обычно вместо переменных $n_\parallel$ и $n_\perp$ пользуются сферическими переменными $n = \sqrt{n_\parallel^2 + n_\perp^2}$ и углом $\theta = \operatorname{arctg}(n_\perp/n_\parallel)$ между

волновым вектором и магнитным полем ($n_\parallel = n\cos\theta$, $n_\perp = n\sin\theta$). В этом случае уравнение (12), определяющее точку стационарной фазы $\theta = \theta(\chi)$, принимает вид

$$\frac{1}{n(\theta)}\frac{dn}{d\theta} = -\operatorname{tg}(\chi \mp \theta),$$

где $n = n_j(\theta, \omega)$ — показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн, $\theta(\chi)$ — угол между $\boldsymbol{H}_0$ и направлением распространения плоской волны, групповая скорость которой направлена под углом χ к $\boldsymbol{H}_0$.

2. ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ $\chi \simeq \chi_0$

Как видно из формулы (11), функция Грина, поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и интенсивность излучения обращаются в бесконечность в направлении, для которого $f''(n_\perp) \sim d^2 n_{\parallel j}/dn_\perp^2 = 0$. Так как $d^2 n_{\parallel j}/dn_\perp^2 \sim \sin\chi\, d\chi/d\theta$, то $f''(n_\perp) = 0$ при $\chi = 0$ (излучение вдоль магнитного поля) или при $\chi = \chi_0$ (в случае $\chi = \chi_0$ направление групповой скорости перестает зависеть от направления фазовой скорости, поскольку $d\chi/d\theta = 0$). В этом разделе мы рассмотрим излучение при $\chi = \chi_0$*.

Типичное поведение функции $dn_{\parallel j}/dn_\perp$ в зависимости от $n_\perp$ при наличии такого угла показано на рис. 1 и 2. Угол $\chi = \chi_0$ является грани-

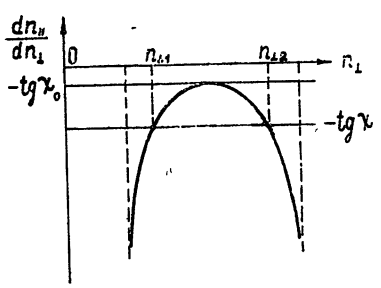


Рис. 1.

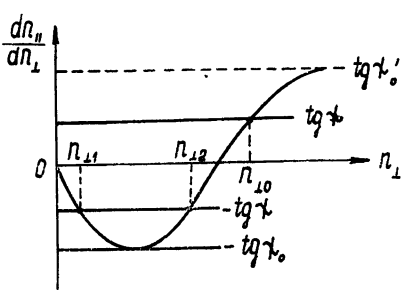


Рис. 2.

цей области прозрачности (распространение невозможно либо при $\chi < \chi_0$, либо при $\chi > \chi_0$). Анализ условий, при которых существует предельный угол, содержится в работе [2].

При $\chi \to \chi_0$ стационарные точки $n_{\perp 1}$ и $n_{\perp 2}$ приближаются друг к другу и выражением (11) в этом случае можно пользоваться только при $|\chi - \chi_0| \gg (\bar{\lambda}/r)^{2/3}$. Если это неравенство не выполняется, то, используя обобщение метода стационарной фазы на случай двух близко расположенных стационарных точек [6, 7], получим

$$J = \frac{2\sqrt{\pi}}{(r\omega/c)^{1/3}} e^{iar\omega/c}\left(p_0 + \frac{cq_0}{i\eta r\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right) v\left[-t\left(\frac{r\omega}{c}\right)^{2/3}\right], \qquad (16)$$

где

$$t = \frac{1}{4}\left[6\,|f(n_{\perp 2}) - f(n_{\perp 1})|\right]^{2/3},$$

$$\eta = \operatorname{sgn}\left[f(n_{\perp 2}) - f(n_{\perp 1})\right],$$

* В частном случае, когда источник излучения представляет собой электрический диполь, направленный вдоль $\boldsymbol{H}_0$, выражения для поля излучения при $\chi = \chi_0$ были получены в работе [3].

$$a = \frac{1}{2}[f(n_{\perp 1}) + f(n_{\perp 2})],$$

$$p_0 = \frac{t^{1/4}}{\sqrt{2}}\left[\frac{F(n_{\perp 1})}{\sqrt{|f''(n_{\perp 1})|}} + \frac{F(n_{\perp 2})}{\sqrt{|f''(n_{\perp 2})|}}\right],$$

$$q_0 = \frac{t^{-1/4}}{\sqrt{2}}\left[\frac{F(n_{\perp 2})}{\sqrt{|f''(n_{\perp 2})|}} - \frac{F(n_{\perp 1})}{\sqrt{|f''(n_{\perp 1})|}}\right],$$

$$v(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\tau x + \frac{1}{3}x^3\right)dx.$$

При $(r\omega/c)^{2/3}|t| \gg 1$ из (16) получим, используя асимптотику функций Эйри $v(\tau)$ при $|\tau| \to \infty$, выражение (11), которое находится обычным методом стационарной фазы. Если точки $n_{\perp 1}$ и $n_{\perp 2}$ настолько близки друг к другу, что $|t|(r\omega/c)^{2/3} \ll 1$, то

$$J = \frac{2\pi 6^{1/3}}{3\Gamma(2/3)}\frac{F(n_{\perp 1})}{[(r\omega/c)|f'''(n_{\perp 1})|]^{1/3}}\exp\left[i\frac{r\omega}{c}f(n_{\perp 1})\right]. \qquad (17)$$

Формулы (3), (9), (16) и (13) определяют поведение функции Грина и электромагнитного поля на большом расстоянии от источника вблизи конуса $\chi = \chi_0$. По порядку величины при $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \varepsilon_3 \sim n_\parallel^2 \sim n_\perp^2 \sim 1$ и χ, не близком к χ_0,

$$g_i \sim \omega/c^2 r.$$

Если $\chi \simeq \chi_0$, но $|\chi - \chi_0| \gg (\lambda/r)^{2/3}$, то

$$g_i \sim \frac{\omega}{c^2 r|\chi - \chi_0|^{1/4}}.$$

При $|\chi - \chi_0| \lesssim (\lambda/r)^{2/3}$ получим, учитывая (16) или (17), что

$$g_i \sim \frac{\omega}{c^2 r}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{1/6}.$$

Таким образом, при $\chi = \chi_0$ функция Грина и поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ убывают на больших расстояниях от источника $\sim r^{-5/6}$ в отличие от обычного закона убывания в волновой зоне $\sim r^{-1}$.

Вне конуса распространения величины g_i, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, согласно (11), экспоненциально малы. Формула (16) дает в окрестности каустики $\chi = \chi_0$ при заданном r равномерный переход для g_i, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, из области прозрачности в область непрозрачности (функция Эйри при $t < 0$ и $t|(r\omega/c)^{2/3} \gg 1$ становится экспоненциально малой).

3. ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Полученные в разделе 1 выражения для функции Грина в волновой зоне неприменимы при $\chi \to 0$, так как при этом нарушается условие $\boldsymbol{k}_\perp r_\perp \gg 1$, которое использовалось при вычислении интегралов (8).

При $\chi \to 0$ уравнение (12) для стационарной точки может иметь два решения: $n_\perp = 0$, либо $n_\perp = \tilde{n}_\perp$, где

$$\tilde{n}_\perp^2 = \{2\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_2^2 \pm [\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_2^2(\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2(\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1)(\varepsilon_2+\varepsilon_1-\varepsilon_3)]^{1/2}\} \times \times [\varepsilon_1(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]^{-1}. \quad (18)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $n_\perp \to 0$ при $\chi \to 0$ (в этом случае малым χ соответствуют малые θ). Учитывая, что вклад в интегралы (7) дают значения $n_\perp \ll 1$, в выражениях (6) для a_i можно положить $n_\perp = 0$. Тогда отличными от нуля будут только величины g_1, g_3 и g_4, для которых $a_i = v_i J_0(n_\perp r\chi\omega/c)$; здесь

$$v_1 = \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_3 n^2,$$
$$v_3 = n^2(n^2 - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1^2,$$
$$v_4 = -i\varepsilon_2\varepsilon_3,$$
$$n^2 = n_{\parallel j}^2(0) = \varepsilon_1 \pm |\varepsilon_2\varepsilon_3|/\varepsilon_3.$$

Тогда, учитывая, что [8]

$$\int_0^\infty e^{i\alpha x^2} J_0(\beta x)\, x dx = \frac{1}{2|\alpha|} e^{i\beta^2/2\alpha},$$

получим

$$g_i(r) = \frac{(-1)^{j-1}\omega^2|\varepsilon_3|v_i \operatorname{sgn} n_{\parallel j}(0)}{c^2 r|\varepsilon_2||\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 \pm |\varepsilon_2\varepsilon_3||} \exp\left[in_{\parallel j}(0)\frac{r\omega\cos\chi}{c} + i\gamma\right], \quad (19)$$

$$\gamma = -\frac{r\chi^2\omega\varepsilon_3^2 n_{\parallel j}(0)}{c(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 \pm |\varepsilon_2\varepsilon_3|)}.$$

Формула (19) не имеет особенностей при $\chi \to 0$. Она может быть получена также и из выражений (8) и (11). Этот результат не очевиден, так как при отыскании (19) не использовалось условие $n_\perp r\omega\chi/c \gg 1$, при котором получено выражение (11).

Перейдем теперь к исследованию случая, когда $n_\perp \to \tilde{n}_\perp$ при $\chi \to 0$ (так как при этом $n_\parallel \neq 0$, $n_\perp = \tilde{n}_\perp \neq 0$, то $\theta \to \theta_0 \neq 0$, $\pi/2$ при $\chi \to 0$). Нетрудно убедиться, что функция Грина (8), (11) в рассматриваемом случае стремится к бесконечности при $\chi \to 0$, как $1/\sqrt{\chi}$. Очевидно, выражением (11) можно пользоваться только при выполнении неравенства $\tilde{n}_\perp r_\perp \omega/c \sim r\chi\omega/c \gg 1$.

Если это условие не выполняется, то интегралы (7) можно вычислить методом стационарной фазы, не заменяя функции Бесселя $J_\nu(k_\perp r_\perp)$, входящие в a_i, их асимтотическими представлениями при $k_\perp r_\perp \gg 1$. Стационарная точка в этом случае определяется из условия $dn_{\parallel j}/dn_\perp = 0$. Интегралы (7) для волны j, имеющей особенность при $\chi = 0$, принимают вид

$$g_i(r) = \frac{(-1)^{j-1}\omega^2 v_i \eta_{ii} n_\perp}{c^3\varepsilon_3 n_{\parallel j}(n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2)} \sqrt{\frac{2\pi c}{r\omega|d^2 n_{\parallel j}/dn_\perp^2|}} \exp\left(i\frac{r\omega n_{\parallel j}\cos\chi}{c} + i\xi\frac{\pi}{4}\right), \quad (20)$$

где

$$\xi = \operatorname{sgn}\frac{d^2 n_{\parallel i}}{dn_\perp^2}, \quad \eta_{11} = \eta_{13} = \eta_{14} = \eta_{18} = J_0, \quad \eta_{12} = \frac{1}{2}(J_0 - J_2),$$

$$\eta_5 = \frac{1}{2}(J_0 + J_2),\ \eta_6 = \eta_7 = iJ_1,\ J_n \equiv J_n\left(\frac{\tilde{n}_\perp \omega r \chi}{c}\right).$$

При $\tilde{n}_\perp r\omega\chi/c \gg 1$ отсюда нетрудно получить выражения (8), (11) для $g_i(r)$. По порядку величины из (20) получаем

$$g_i \sim \frac{\omega}{c^2 r\sqrt{\chi}} \qquad \left(\frac{r\chi}{\lambda} \gg 1\right),$$

$$g_i \sim \frac{\omega\sqrt{\omega}}{c^2\sqrt{cr}} \qquad \left(\frac{r\chi}{\lambda} \ll 1\right).$$

Отсюда видно, что при малых χ функция Грина убывает как $1/\sqrt{r}$ в отличие от обычного закона убывания $\sim 1/r$.

4. ПЛАЗМЕННЫЙ РЕЗОНАНС

Выражение $d^2 n_{\parallel i}/dn_\perp^2$ может обращаться также в нуль при $n_\perp \to \infty$, если $\chi \to \chi_0'$, где

$$\operatorname{tg}\chi_0' = \sqrt{-\varepsilon_1/\varepsilon_3} \tag{21}$$

(см. рис. 2 и 3). При этом $n_\parallel$ также стремится к бесконечности: $n_\parallel \to n_\perp \operatorname{tg}\chi_0'$.

Так как $n_\parallel/n_\perp = \operatorname{ctg}\theta$, из (21) получим, что при $\chi \to \chi_0'$

$$\varepsilon_1 \sin^2\theta + \varepsilon_3 \cos^2\theta = 0.$$

Как известно, это уравнение определяет собственные частоты продольных колебаний плазмы в магнитном поле (частоты плазменных резонансов) в зависимости от угла θ.

Рассмотрим подробнее поведение функции Грина в области плазменного резонанса ($\chi \simeq \chi_0'$). При $n_\perp \to \infty$ получим из уравнения (5) для $n_\parallel$ выражения

$$n_\parallel = n_\perp \operatorname{tg}\chi_0' + \gamma/n_\perp, \tag{22}$$

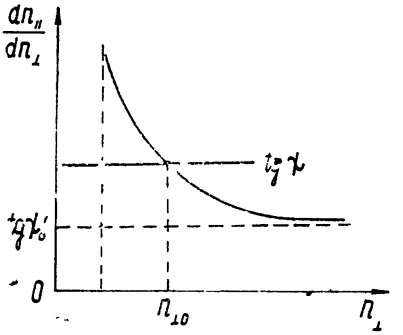


Рис. 3.

где

$$\gamma = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2^2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\operatorname{tg}\chi_0'}.$$

Уравнение (12) в этом случае имеет решение

$$n_\perp = n_{\perp 0} = \sqrt{\frac{\gamma\cos^2\chi}{\chi_0' - \chi}}. \tag{23}$$

С учетом (23) из (8) и (11) следует, что по порядку величины

$$g_i \sim \frac{\omega}{c^2 r|\chi_0' - \chi|^{3/2}}.$$

Эта оценка показывает, что функция Грина в области плазменного резонанса возрастает как $|\chi_0'-\chi|^{-3/2}$. Однако выражениями (8) и (11) можно пользоваться только при $r/\bar{\lambda} \gg 1/|\chi_0'-\chi|$, где $\bar{\lambda}\sim(c/\omega)\sqrt{|\chi_0'-\chi|}$ — длина волны в плазме (предполагаем для простоты, что $\varepsilon_i \sim 1$).

Нетрудно получить для $g_i(r)$ выражения, справедливые при $\chi \simeq \chi_0'$ на больших расстояниях ($r\omega/c \gg 1$) безотносительно к величине $(r\omega/c)|\chi_0'-\chi|^{1/2}$*. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что в рассматриваемом случае вклад в интеграл (11) дают значения $n_\perp \gg 1$, так что можно воспользоваться для $n_\parallel$ выражением (22). Подставляя (22) в (11) и оставляя в v_i только наибольшие слагаемые $\sim n_\perp^4$, получим

$$g_i(r) = \frac{(-1)^{i-1}\omega^2\tilde{\eta}_{li}}{c^3(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\operatorname{tg}\chi}\sqrt{\frac{2c}{\pi r\omega\sin\chi}}\,J, \tag{24}$$

где

$$J = e^{i\pi/4}\int_0^\infty n_\perp^{3/2}\exp\left[i\frac{\omega r}{c}f(n_\perp)\right]dn_\perp,$$

$$f(n_\perp) = -\frac{n_\perp(\chi_0'-\chi)}{\cos\chi} + \frac{\gamma\cos\chi}{n_\perp}, \tag{25}$$

$$\tilde{\eta}_{l2} = 1/\cos^2\chi,\quad \tilde{\eta}_{l3} = \sin^2\chi/\cos^4\chi,\quad \tilde{\eta}_{l6} = \sin\chi/\cos^3\chi,$$

$$\tilde{\eta}_{li} = 0 \qquad (i = 1, 4, 5, 7, 8).$$

Так как [8]

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}i\nu\pi\right)\int_0^\infty \exp\left[i\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

то

$$J = -i\pi n_{\perp 0}^{5/2} H_{-5/2}^{(1)}(z), \tag{26}$$

где

$$H_{-5/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{3}{z^2}-1-\frac{3i}{z}\right)e^{iz},$$

$$z = \frac{2r\omega n_{\perp 0}(\chi_0'-\chi_0)}{c\cos\chi} = \frac{2r\omega\sqrt{|\gamma(\chi_0'-\chi)|}}{c}\operatorname{sgn}\gamma.$$

При $|z|\gg 1$ из (24), (26) получаем выражение (8), (11), если в последних пренебречь величинами ~ 1 по сравнению с $n_{\perp 0}^2$. При $|z| \lesssim 1$ по порядку величины имеем

$$g_i(r) \sim \frac{\omega^2 n_{\perp 0}^{5/2}}{c^3 z^2}\sqrt{\frac{c}{r\omega z}} = \frac{\omega}{c^2 r}\sqrt{\frac{r\omega}{c}}\frac{n_{\perp 0}^{5/2}}{z^{5/2}} \sim \frac{1}{|\chi_0'-\chi|^{5/2}}.$$

Отсюда следует, что функция Грина возрастает при $\chi \to \chi_0'$ не только в области $|z| \gg 1$, но и для $|z| \ll 1$.

---

* Поле электрического диполя, направленного вдоль H_0, при $\chi = \chi_0'$ в случае «холодной» плазмы было определено в работе [3].

Выражения (24) и (26), определяющие поведение функции Грина в области плазменного резонанса в зависимости от r и $\chi_0' - \chi$, получены для холодной плазмы. Как известно [9], в случае высокотемпературной разреженной плазмы в области плазменного резонанса необходимо учитывать тепловое движение частиц плазмы, приводящее к ограничению показателя преломления волн и к появлению новой ветви колебаний (плазменной волны).

В области высокочастотных плазменных резонансов, когда можно не учитывать вклад ионов в тензор ε_{ij}, продольный показатель преломления при $\chi \simeq \chi_0'$ с учетом теплового движения электронов определяется выражением [10]

$$n_\parallel = n_\perp \operatorname{tg}\chi_0' + \frac{1-u-2v}{2(1-u)n_\perp \operatorname{tg}\chi} + \frac{\beta^2\zeta n_\perp^3}{2(1-v)\cos^4\chi \operatorname{tg}\chi}, \tag{27}$$

где

$$\zeta = v\left[3\cos^4\chi + \frac{6-3u+u^2}{(1-u)^3}\cos^2\chi\sin^2\chi + \frac{3\sin^4\chi}{(1-u)(1-4u)}\right],$$

$$\beta^2 = T_e/mc^2,\ u = (\omega_H/\omega)^2,\ v = (\Omega/\omega)^2,$$

T_e — температура электронов, ω_H — гирочастота, Ω — ленгмюровская частота.

С учетом теплового движения электронов функция Грина при $\chi \simeq \chi_0'$ по-прежнему определяется формулами (8), (24), где

$$f(n_\perp) = n_\perp(\cos\chi\operatorname{tg}\chi_0' - \sin\chi) + \frac{(1-u-2v)\cos\chi}{2(1-u)\operatorname{tg}\chi n_\perp} + \frac{\beta^2\zeta n_\perp^3}{2(1-v)\operatorname{tg}\chi\cos^3\chi}. \tag{28}$$

Вычисляя интеграл (25) при $r\omega/c \to \infty$ методом стационарной фазы, получим

$$J = \sum \frac{\sqrt{2\pi}\, n_{\perp j}^{3/2}}{\sqrt{|f''(n_{\perp j})|\, r\omega c^{-1}}} \exp\left[i\frac{\omega r}{c} f(n_{\perp j}) + i\alpha_j\frac{\pi}{4}\right], \tag{29}$$

где

$$n_{\perp j}^2 = \sqrt{\frac{\cos^2\chi(2v+u-1)(1-u)(1-v)}{3\beta^2|\zeta|}}\,\varphi_\pm(x), \tag{30}$$

$$\varphi_\pm(x) = \Delta\left(x \pm \sqrt{x^2+\Delta}\right),\ \Delta = \operatorname{sgn}\zeta, \tag{31}$$

$$x = \frac{(\chi-\chi_0')\sin\chi\cos\chi\sqrt{(1-u)(1-v)}}{\sqrt{3\beta^2|\zeta|(2v+u-1)}}\operatorname{sgn}(1-v),$$

$$f''(n_\perp) = \frac{3(1-u-2v)\cos\chi}{(1-u)n_\perp^3\operatorname{tg}\chi} + \frac{3\beta^2\zeta n_\perp}{(1-v)\operatorname{tg}\chi\cos^3\chi}. \tag{32}$$

При $|x| \sim |\chi_0' - \chi|/\beta \gg 1$ из (29) следует для одного из решений (30) выражение, полученное выше для холодной плазмы при $(r\omega/c)|\chi_0' - \chi|^{1/2} \gg 1$. Если $|\chi_0' - \chi| \leqslant \beta$, то $n_\parallel \sim n_\perp \sim 1/\sqrt{\beta}$ и

$$g_t(r) \sim \omega/c^2 r\beta^{3/2}.$$

Таким образом, наличие теплового движения электронов плазмы приводит к ограничению функции Грина при $\chi = \chi_0'$.

Выражения (27)—(32) получены в случае длинноволновых колебаний, для которых справедливы неравенства

$$\frac{\beta^2 n_\perp^2}{u} \ll 1, \quad \frac{|1 - l\sqrt{u}|}{\beta n_\parallel} \ll 1 \qquad (l = 0, 1, 2).$$

При выполнении этих условий черенковское и циклотронное затухание колебаний малы.

При удалении от резонансного угла $\chi = \chi_0'$ одно из решений (30), соответствующее плазменной волне, возрастает:

$$n_\perp^2 = \frac{2(\chi - \chi_0') \sin\chi \cos^3\chi (1 - u)(1 - v)}{3\beta^2\zeta} \qquad (1 \gg |\chi - \chi_0'| \gg \beta).$$

Соответствующий этой волне вклад в функцию Грина также возрастает:

$$g_i(r) \sim \frac{\omega |\chi_0' - \chi|^{1/2}}{c^2 r \beta^2}.$$

Однако при дальнейшем увеличении разности $|\chi - \chi_0'|$ вклад плазменной волны в функцию Грина становится экспоненциально малым, так как при увеличении $|\chi_0' - \chi|$ возрастает затухание волны: при $|\chi - \chi_0'| \sim 1$ получим, что $\mathrm{Re}\, n_\perp \sim \mathrm{Im}\, n_\perp \sim 1/\beta$ и $g_i \sim \exp(-\sigma\omega r/c\beta)$, где $\sigma \sim 1$.

5. ЭЛЕКТРОННЫЙ ГИРОРЕЗОНАНС

Если частота внешнего источника близка к гирочастоте электронов, то необходимо учитывать пространственную дисперсию плазмы. Для плазмы с достаточно большой плотностью, когда $\Omega^2/\omega^2\beta \gg 1$ (Ω — ленгмюровская частота, $\beta = v_e/c$, $v_e = \sqrt{T_e/m}$ — тепловая скорость электронов плазмы), в случае углов θ, не близких к нулю или к $\pi/2$, для функции Грина получим выражение (2), в котором

$$g_i = \frac{\omega^2}{c^3} \int_0^\infty \frac{a_i}{n_\parallel (n_\perp^2 - 2 + 2v)} \exp\left(i n_\parallel \frac{\omega z}{c}\right) n_\perp \, dn_\perp, \qquad (33)$$

$$a_1 = v_1 J_0 = (\varepsilon_3 - n_\perp^2 - \mu) J_0,$$

$$a_2 = v_2 J_0 = 2\mu J_0,$$

$$a_3 = v_3 J_0 = (1 - 2n_\parallel^2 + \mu) J_0,$$

$$a_4 = v_4 J_0 = i(\varepsilon_3 + \mu) J_0,$$

$$a_5 = v_5 J_0 = v_2 J_0,$$

$$a_6 = v_6 J_1 = -i n_\parallel n_\perp J_1,$$

$$a_7 = v_7 J_1 = -n_\parallel n_\perp J_1,$$

$$a_8 = v_8 J_0 = i(n_\perp^2 + \mu) J_0,$$

$$\varepsilon_3 = 1 - v, \quad \mu = vq(z_1)\,\mathrm{tg}^2\theta,$$

$$q(z) = 1 + i\sqrt{\pi} z w(z),\ w(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}\,dt\right),$$

$$z_1 = \frac{\omega - \omega_H}{\sqrt{2}k_\parallel v_e},\quad v = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2,\quad J_n \equiv J_n(k_\perp r_\perp).$$

Продольный показатель преломления определяется выражением [11]

$$n_\parallel^2 = \frac{(n_\perp^2 - \varepsilon_3)(n_\perp^2 - 1 - \varepsilon_3)}{2\varepsilon_3 - n_\perp^2}.$$

При $r\to\infty$, используя асимптотические выражения для функций Бесселя, входящих в a_i, представим коэффициенты g_i в виде (8), где

$$F_i = \frac{\omega^2}{2c^3}\sqrt{\frac{2n_\perp c}{\pi\omega r\sin\chi}}\,\frac{v_i}{n_\parallel(n_\perp^2 - 2 + 2v)}\,e^{-i\alpha\pi/4}. \tag{34}$$

Поскольку в рассматриваемом случае функция Грина определяется при $r\to\infty$ формулами (33), (34), аналогичными (8) и (9), то при $r_\perp\to\infty$ и $z\to\infty$ функцию Грина можно представить в виде (8), (11), где в качестве $F(n_\perp)$ нужно взять функции (34).

Если угол χ близок к предельному углу χ_0 (такой угол существует при $v < 4/3$ [11]), то интеграл (8) определяется формулой (16). При $\chi\to 0$ и θ, не близких к 0 или $\pi/2$ (это имеет место при $1 < v < 4/3$), для интегралов (33) получим выражения, аналогичные (20):

$$g_i = \frac{\omega^2 a_i n_\perp F_i(n_\perp)}{c^3 n_\parallel(n_\perp^2 - 2 + 2v)}\sqrt{\frac{2\pi c}{r\omega|\cos\chi\, d^2 n_\parallel/dn_\perp^2|}}\exp\left(i\frac{r\omega}{c}n_\parallel\cos\chi + i\xi\frac{\pi}{4}\right), \tag{35}$$

где $\xi = \operatorname{sgn} d^2 n_\parallel/dn_\perp^2$.

6. КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛАЗМЕ

В отсутствие пространственной дисперсии корреляционные функции флуктуационных электрических и магнитных полей можно, используя результаты работы [2], представить в виде

$$\begin{aligned}\langle E_i(\boldsymbol{r}_1,\omega)E_k(\boldsymbol{r}_2,\omega')\rangle &= \frac{T\delta(\omega+\omega')}{2\pi^2\omega}\varphi_{ik}(\boldsymbol{r}),\\ \langle H_i(\boldsymbol{r}_1,\omega)H_k(\boldsymbol{r}_2,\omega')\rangle &= \frac{T\delta(\omega+\omega')}{2\pi^2\omega}\psi_{ik}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{36}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$,

$$\begin{aligned}\varphi_{ik}(\boldsymbol{r}) = {} & C_1\delta_{ik} + C_2\frac{x_i x_k}{r_\perp^2} + C_3 h_i h_k + C_4\varepsilon_{ikl}h_l + \\ & + C_5\frac{[\boldsymbol{rh}]_i[\boldsymbol{rh}]_k}{r_\perp^2} + C_6\frac{x_i h_k + x_k h_i}{r_\perp} - C_7\frac{h_l[\boldsymbol{rh}]_k - h_k[\boldsymbol{rh}]_i}{r_\perp} - \\ & - C_8\frac{x_l[\boldsymbol{rh}]_k - x_k[\boldsymbol{rh}]_l}{r_\perp^2} - C_9\varepsilon_{ikl}\frac{x_l}{r_\perp}.\end{aligned} \tag{37}$$

Тензор $\psi_{ik}(r)$ здесь имеет вид (37) с заменой коэффициентов $C_i(r)$ на $D_i(r)$. Величины C_i и D_i запишутся в форме

$$C_i = \frac{2\pi\omega}{c} \sum_{j=1,2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn} D'' n_\perp dn_\perp}{\varepsilon_3 n_{\parallel j} (n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2)} \left(\eta_i' \cos \frac{\omega z n_{\parallel j}}{c} + i \eta_i'' \sin \frac{\omega z n_{\parallel j}}{c} \right),$$

$$D_i = \frac{2\pi\omega}{c} \sum_{j=1,2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn} D'' n_\perp dn_\perp}{\varepsilon_3 n_{\parallel j} (n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2)} \left(\sigma_i' \cos \frac{\omega z n_{\parallel j}}{c} + i \sigma_i'' \sin \frac{\omega z n_{\parallel j}}{c} \right),$$

где

$$\eta_1' = (\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_3 n_\parallel^2 - \varepsilon_1 n_\perp^2) J_0,$$

$$\eta_2' = \frac{1}{2} (n^2 - \varepsilon_3) n_\perp^2 (J_0 - J_2),$$

$$\eta_3' = [n_\parallel^2 (n^2 - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1^2] J_0 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2\chi\, n_\perp^2 (n^2 - \varepsilon_3)(J_0 - J_2),$$

$$\eta_3'' = 2i \operatorname{ctg}\chi\, n_\parallel n_\perp (n^2 - \varepsilon_1) J_1,$$

$$\eta_4' = i \varepsilon_2\varepsilon_3 J_0,$$

$$\eta_5' = \frac{1}{2} n_\perp^2 (n^2 - \varepsilon_3)(J_0 + J_2),$$

$$\eta_6' = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\chi\, n_\perp^2 (n^2 - \varepsilon_3)(J_0 - J_2),$$

$$\eta_6'' = -in_\parallel n_\perp (n^2 - \varepsilon_1) J_1,$$

$$\eta_7' = -i \operatorname{ctg}\chi\, n_\perp^2 \varepsilon_2 J_0,$$

$$\eta_7'' = n_\parallel n_\perp \varepsilon_2 J_1,$$

$$\eta_8' = in_\perp^2 \varepsilon_2 J_0,$$

$$\eta_9' = \eta_j'' = 0 \quad (j = 1, 2, 4, 5, 8, 9);$$

$$\sigma_1' = n^2 \eta_1',$$

$$\sigma_2' = \frac{1}{2} n_\perp^2 [-(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1 n_\perp^2 - \varepsilon_3 n_\parallel^2)(J_0 - J_2) + (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2^2)(J_0 + J_2)],$$

$$\sigma_3' = -n_\parallel^2 \eta_1' + \operatorname{ctg}^2\chi \sigma_2',$$

$$\sigma_3'' = -2i \operatorname{ctg}\chi\, n_\parallel n_\perp (\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1 n_\perp^2 - \varepsilon_3 n_\parallel^2) J_1,$$

$$\sigma_4' = -in_\parallel^2 \varepsilon_2\varepsilon_3 J_0,$$

$$\sigma_4'' = \varepsilon_2\varepsilon_3 n_\parallel n_\perp \operatorname{ctg}\chi\, J_1,$$

$$\sigma_5' = \frac{1}{2} n_\perp^2 [-(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1 n_\perp^2 - \varepsilon_3 n_\parallel^2)(J_0 + J_2) + (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2^2)(J_0 - J_2)],$$

$$\sigma_6' = -\operatorname{ctg}\chi \sigma_2',$$

$$\sigma_6'' = in_{\parallel} n_{\perp} (\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1 n_{\perp}^2 - \varepsilon_3 n_{\parallel}^2) J_1,$$

$$\sigma_9'' = -n_{\parallel} n_{\perp} \varepsilon_2\varepsilon_3 J_1,$$

$$\sigma_7' = \sigma_8' = \sigma_9' = \sigma_i'' = 0 \quad (i = 1, 2, 5, 7, 8).$$

Отсюда ясно, что величины C_l и D_l имеют вид, аналогичный (7). При $r \to \infty$ можно заменить функции Бесселя $J_n(k_{\perp} r \sin\chi)$ их асимптотическими разложениями и, если χ не близко к χ_0, χ_0' или 0, выполнить интегрирование по $n_{\perp}$ методом стационарной фазы Соответствующие выражения для корреляционных функций приведены в работе [2]. Поведение корреляционных функций в области плазменного резонанса с учетом теплового движения электронов исследовано в работе [12]*.

При $\chi \to \chi_0$ величины C_l и D_l нетрудно представить в виде, аналогичном (8), и провести интегрирование по $n_{\perp}$ методом, изложенным в разделе 2. Если $\chi \to 0$, то интегралы (37) вычисляются методом, изложенным в разделе 3.

Таким образом, вблизи особых направлений $\chi = \chi_0, \chi_0', 0$ имеет место увеличение пространственной корреляции флуктуационных электромагнитных полей. Корреляционные функции вдоль направлений $\chi = \chi$ и $\chi = 0$ убывают медленнее, чем $1/r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
2. В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, **6**, 297 (1963).
3. E. Arbel, L. B. Felsen, Electromagnetic Theorie and Antennas. Proc. Symp, held at Copenhagen, June 1962, Pergamon Press, 1963, p. 391, 421.
4. В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, ЖТФ, **34**, 1210 (1964).
5. В. Ф. Бункин, ЖЭТФ, **32**, 338 (1957)
6. C. Chester, B. Friedman, F. Ursell, Proc. Cambridge Phyl. Soc., **53** 147 (1957).
7. В. С Булдырев, Сб Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, IV, изд. ЛГУ, 1961, стр 153.
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
9. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
10. В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, ЖТФ, **33**, 43 (1963).
11. В. Ф. Алексин, В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, Сб. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза, вып. 2, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 40.
12. В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **6**, 480 (1963).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
18 января 1965 г.

ON SOME PECULIARITIES OF ELECTROMAGNETIC WAVE RADIATION IN ANISOTROPIC DISPERSIVE MEDIA

V. F. Aleksin, V. I. Pakhomov, K. N. Stepanov

The behaviour of electromagnetic wave field in a fare zone produced by an external source in a homogeneous anisotropic dispersive medium (magneto-active plasma) is considered. For some specific directions coinciding with magnetic field direction or with boundary of radiation cone (the boundary of transparence region), the radiation field greatly increases. Similar growth of acorelation in fluctuating electromagnetic fields in magnetoactive plasma is considered

* Пользуемся возможностью исправить вкравшиеся в работы [2], [12] ошибки в знаках: в выражениях для a_n, b_n, c_n и d_n нужно заменить J_1 на $-J_1$ и α на $-\alpha$, в формулах (22) из [2] и в (3) из [12] нужно заменить i на $-i$. Кроме того, в выражении для b_{ik} (формула (14) работы [12]) нужно заменить численные коэффициенты 9,3 и 6 соответственно на 1,1 и 2.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371.182

О САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Г. Литвак

Изучается продольное распространение электромагнитных волн в нелинейной плазме, помещенной в сильное магнитное поле. Показано, что в безграничной плазме возможна самофокусировка электромагнитного поля, сопровождающаяся вытеснением плазмы с оси и образованием волноводного канала. Учтено влияние нелинейности на распространение волны в цилиндрическом плазменном волноводе. С помощью метода возмущений найдены нелинейные поправки к структуре поля и фазовой скорости волны.

1. Как известно [1, 2, 10], при распространении сильных электромагнитных волн в нелинейной среде возможна их самофокусировка. В работе [2] этот эффект демонстрировался на примере двухмерной ТЕ-волны, распространяющейся в безграничной изотропной плазме Структура самосогласованного поля в этом случае такова, что под его действием происходит вытеснение плазмы с оси и образование самофокусирующегося волноводного канала. В магнитоактивной плазме наиболее простым является случай, когда разделяются ТЕ- и ТМ-волны и их можно рассматривать независимо. Это происходит при поперечном распространении волн и при продольном распространении в бесконечно сильном магнитном поле. В случае поперечного распространения, как показано в [3], также возможна самофокусировка, причем она может сопровождаться как вытеснением плазмы с оси, так и наоборот, фокусировкой плазмы (ТМ-волны при $\omega_H \gg \omega$). Ниже будет рассмотрено продольное распространение двухмерных волн в безграничной нелинейной плазме, на которую наложено бесконечно сильное магнитное поле.

Можно ожидать, что нелинейные эффекты приведут также к самофокусировке электромагнитных волн, распространяющихся в ограниченной плазме (плазменном волноводе). Решение самосогласованной задачи в этом случае связано со значительными вычислительными трудностями. Поэтому приходится ограничиваться методом возмущений для случая малой нелинейности, т. е. считать, что в нулевом приближении поле определяется формулами линейной теории, и находить в следующем приближении поправки к амплитуде и фазовой скорости волны. Ниже методом возмущений учтено влияние нелинейности на распространение электромагнитной волны в цилиндрическом плазменном волноводе в сильном магнитном поле.

2. Известно [4], что в слабонеоднородном высокочастотном электромагнитном поле и однородном постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0$ на заряженную частицу действует потенциальная усредненная сила, приводящая к перераспределению электронов и ионов плазмы. В стационарном состоянии* среднее (по периоду поля $T=2\pi/\omega$) распределение концентрации описывается больцмановской функцией распределения [5]:

$$N = N_0 \exp(-\Phi/2T). \qquad (1)$$

* Мы не рассматриваем вопроса о генерации гармоник и поэтому не интересуемся переменной составляющей концентрации. В общем случае генерация гармоник и перераспределение концентрации в среднем являются эффектами разного порядка [6].

В случае бесконечно сильного магнитного поля ($\omega_H \gg \omega$), направленного вдоль оси z, высокочастотный потенциал

$$\Phi(r) = \frac{e^2 |\tilde{E}_z(r)|^2}{4m\omega^2}. \tag{2}$$

Здесь T — температура плазмы, e и m — заряд и масса электрона, $\tilde{E}_z$ — продольная составляющая высокочастотного поля, N_0 — постоянная, либо определяемая из условий нормировки (закона сохранения полного числа частиц n в объеме)

$$N_0 \int_V \exp(-\Phi(r)/2T)\, dV = n, \tag{3}$$

либо равная концентрации плазмы в отсутствие поля (например, в случае безграничной плазмы).

3. В бесконечно сильном постоянном магнитном поле тензор диэлектрической проницаемости становится диагональным:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причем с учетом (1)

$$\varepsilon = 1 - q \exp(-|E_z|^2). \tag{5}$$

Здесь

$$q = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m}; \quad E = \frac{\tilde{E}}{E_p}; \quad E_p^2 = \frac{8T\omega^2 m}{e^2}.$$

Рассмотрим бегущую в направлении постоянного магнитного поля двухмерную ТМ-волну*:

$$E_z = E_z(x)\, e^{-ihz}; \quad E_x = E_x(x)\, e^{-ihz}; \quad H_y = H_y(x)\, e^{-ihz}. \tag{6}$$

Амплитуда $E_z(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \varepsilon(E_z^2)(k_0^2 - h^2) E_z = 0, \tag{7}$$

а амплитуды $E_x(x)$ и $H_y(x)$ выражаются через нее следующим образом:

$$E_x(x) = -\frac{ih}{k_0^2 - h^2} \frac{dE_z}{dx}; \quad H_y(x) = -\frac{ik_0}{k_0^2 - h^2} \frac{dE_z}{dx}. \tag{8}$$

Здесь $k_0 = \omega/c$, c — скорость света в вакууме.

Уравнение (7) имеет первый интеграл, который при условии, что $E_z \to 0$ при $x \to \pm\infty$, запишется в виде

$$\left(\frac{dE_z}{dx}\right)^2 = (h^2 - k_0^2)\left[E_z^2 + q\left(e^{-E_z^2} - 1\right)\right]. \tag{9}$$

---

* Легко показать, что в рассматриваемом случае уравнение для ТЕ-волны остается линейным.

Интегрируя (9) еще один раз, получим

$$k_0 x = \pm \int_{E_z}^{E_m} \frac{du}{\sqrt{(h^2 - k_0^2)\,[u^2 + q(e^{-u^2} - 1)]}}, \tag{10}$$

где E_m — достигаемое при $x = 0$ максимальное значение амплитуды поля, которое можно определить из (9) при $\frac{dE_z}{dx} = 0$:

$$E_m^2 = q\,(1 - e^{-E_m^2}). \tag{11}$$

Отметим, что E_m зависит лишь от величины диэлектрической проницаемости плазмы на бесконечности ε_∞. Уравнение (11) имеет действительное решение лишь при $q > 1$. Следовательно, самофокусировка возможна лишь в том случае, когда на бесконечности, где поле отсутствует, диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна:

$$\varepsilon_\infty = 1 - q < 0. \tag{12}$$

Именно этим случаем мы будем интересоваться.

Когда амплитуда поля не слишком велика: $E_m^2 \ll 1$, удается проинтегрировать (10) и получить зависимость амплитуд поля от координаты в явном виде:

$$E_z(x) = E_m \frac{1}{\operatorname{ch}(\varkappa x)}; \qquad E_x(x) = E_m \frac{ih\varkappa}{k_0^2 - h^2} \frac{\operatorname{sh}(\varkappa x)}{\operatorname{ch}^2(\varkappa x)}; \tag{13}$$

$$H_y(x) = E_m \frac{ik_0\varkappa}{k_0^2 - h^2} \frac{\operatorname{sh}(\varkappa x)}{\operatorname{ch}^2(\varkappa x)}; \tag{14}$$

$$\varkappa^2 = (k_0^2 - h^2)\,(q - 1).$$

Легко видеть из (13), что при $h^2 < k_0^2$ структура поля $E_z(x)$ соответствует образованию в плазме волноводного канала, так как плазма вытесняется из максимума продольного поля. Эффективная ширина канала зависит от постоянной распространения h, которая в свою очередь определяется мощностью волны P:

$$\tilde{P} = \int E_x H_y^*\, dx = \frac{2}{3} \frac{k_0^2 h (q-1)^{1/2}}{(k_0^2 - h^2)^{3/2}} E_m^2, \tag{15}$$

где $\tilde{P} = 4\pi k_0 P / c E_p^2$ — безразмерная мощность волны. Из (15) можно получить алгебраическое уравнение третьего порядка для величины $\eta = k_0^2 - h^2$:

$$\eta^3 + \frac{A k_0^2}{\tilde{P}}\eta - \frac{A k_0^4}{\tilde{P}} = 0; \quad A = \frac{16}{9}\frac{(q-1)^3}{q^2}, \tag{16}$$

которое при любом $\tilde{P}$ имеет положительное решение (два других корня комплексные). Следовательно, самофокусировка возможна при любой мощности волны, причем всегда фазовая скорость волны $v_\phi > c$.

Можно провести обобщение результатов, полученных для двухмерного поля, на трехмерное поле цилиндрического волнового пучка аксиально симметричного TM типа. В частности, для случая больших амплитуд поля, когда плазма почти полностью вытесняется из области, занятой полем, а диаметр волноводного канала велик, задача может быть решена как локально плоская двухмерная. Эффективная ширина канала, образующегося при заданном уровне мощности, в этом случае может быть найдена простым приравниванием электромагнитного и газокинетического давлений на резкой границе плазма—поле.

4. Нелинейная теория плазменного волновода для нелинейности другого типа, нежели (1), строилась методом возмущений в [7–9]. Авторы этих работ интересовались генерацией гармоник, зависимостью фазовой скорости волны от амплитуды поля, изменением амплитуды основной гармоники, но оставили без внимания вопрос о влиянии электромагнитного поля на распределение концентрации в плазменном волноводе. Этот аспект нелинейной теории несомненно представляет интерес в сильных полях, и к тому же легко может быть проверен экспериментально. В случае не слишком сильных полей $E_m^2 \ll 1$, когда можно пользоваться методом возмущений, считая, что распределение концентрации определяется полями линейной теории, изученной достаточно подробно, функция распределения (1) позволяет сразу дать ответ на этот вопрос. В симметричной цилиндрической волне, бегущей вдоль оси волновода в произвольном постоянном магнитном поле, высокочастотный потенциал имеет вид

$$\Phi = \Phi_\perp + \Phi_\parallel ;$$

$$\Phi_\perp(r) = \frac{e^2}{4m(\omega^2 - \omega_H^2)}\left(\tilde{E}_r^2 + \tilde{E}_\varphi^2 + 2\frac{\omega_H}{\omega}\tilde{E}_r\tilde{E}_\varphi \right); \qquad (17)$$

$$\Phi_\parallel(r) = e^2\tilde{E}_z^2/4m\omega^2.$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические кординаты, $\tilde{E}_\varphi(r)$, $\tilde{E}_r(r)$ и $\tilde{E}_z(r)$ — действительные амплитуды составляющих поля, $\omega_H = eH_0/mc$ — гирочастота электронов.

Выражения линейной теории для полей в случае произвольного магнитного поля весьма громоздки [9]; однако здесь можно провести качественный анализ. В частности, при $\omega_H \gtrless \omega$ концентрация в плазменном волноводе перераспределяется таким образом, что он превращается в полый плазменный цилиндр (концентрация на оси существенно меньше, чем на периферии). Этот эффект связан с тем, что при $\omega_H > \omega$ высокочастотный потенциальный рельеф $\Phi_\perp$, образованный поперечными составляющими поля, становится «обращенным», т. е. плазма теперь не выталкивается из максимума $|\Phi_\perp|$, а наоборот, втягивается туда, по-прежнему увлекаясь в минимум квадрата амплитуды продольного поля. В цилиндрическом плазменном волноводе на оси поперечное поле обращается в нуль, а продольное при $\omega_H > \omega$ имеет минимум. Если к тому же учесть, что при $\omega_H \simeq \omega$ $|\Phi_\perp|_{\max} \gg \Phi_{\parallel\max}$ и $\Phi_\perp(r) \leqslant 0$, то легко понять, что суммарный потенциальный рельеф имеет резко выраженный максимум на оси волновода, что и соответствует вытеснению плазмы на периферию*.

* Как нам стало известно, подобный эффект (образование полого плазменного цилиндра под действием в. ч. поля при $\omega_H \gtrsim \omega$) наблюдался в Физико-техническом институте АН УССР.

5. Получение нелинейных поправок к решению в случае произвольного магнитного поля является делом практически безнадежным (из-за громоздкости). Ниже мы займемся решением для случая бесконечного магнитного поля H_0. когда среда является одноосной, т. е. тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (4). Решение будем искать для цилиндрической аксиально симметричной волны ТМ типа:

$$E_z=E_z(r)\,e^{-ihz};\quad E_r=E_r(r)\,e^{-ihz};\quad H_\theta=H_\theta(r)e^{-ihz}. \tag{18}$$

Задача сводится к решению уравнения для амплитуды $E_z(r)$ нелинейного в плазме и линейного в вакууме:

$$\Delta_\perp E_z+(k_0^2-h^2)\,\varepsilon\,E_z=0;$$
$$H_\theta=-\frac{ik_0}{k_0^2-h^2}\frac{dE_z}{dr};\quad E_r=-\frac{ih}{k_0^2-h^2}\frac{dE_z}{dr}, \tag{19}$$

и удовлетворению граничных условий при $r=a$ (a — радиус волновода). В вакууме $\varepsilon=1$, а в плазме при не слишком больших амплитудах $E_z^2\ll 1$

$$\varepsilon=1-q+qE_z^2. \tag{20}$$

Здесь $\varepsilon_0=1-q$ — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы в линейном приближении. Представим поле в плазме в виде

$$E_z=E_z^0+E_z', \tag{21}$$

где E_z' — нелинейная поправка.

Решение (19) в линейном случае хорошо известно [9]:
в плазме (I)

$$E_z^0=E_{01}J_0(k_\perp r);$$
$$H_\theta^0=-\frac{ik_0k_\perp}{\varkappa^2}E_{01}J_1(k_\perp r); \tag{22}$$

в вакууме (II)

$$E_z=E_{02}K_0(\varkappa r);$$
$$H_\theta=-\frac{ik_0}{\varkappa}E_{02}K_1(\varkappa r). \tag{23}$$

Здесь

$$\varkappa^2=h^2-k_0^2;\quad k_\perp^2=-\varepsilon_0\varkappa^2. \tag{24}$$

Используя граничные условия на границе $r=a$:

$$E_z|_{\mathrm{I}}=E_z|_{\mathrm{II}};\quad H_\theta|_{\mathrm{I}}=H_\theta|_{\mathrm{II}}, \tag{25}$$

получим следующее дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в плазменном волноводе [9]:

$$-\varepsilon_0\frac{\varkappa}{k_\perp}\frac{J_1(k_\perp a)}{J_0(k_\perp a)}=\frac{K_1(\varkappa a)}{K_0(\varkappa a)}. \tag{26}$$

Рассмотрим случай, когда в волноводе распространяется лишь одна волна, для которой $|k_\perp^2a^2|\ll 1$. Уравнение для нелинейной поправки к аплитуде E_z^0 в плазме имеет вид

$$\Delta_\perp E'_z + k_\perp^2 E'_z = q\varkappa^2 E_{01}^3 J_0^3(k_\perp r). \tag{27}$$

При $|k_\perp^2 a^2| \ll 1$ достаточно найти решение (27) с точностью до членов порядка $k_\perp^2 r^2$:

$$E'_z = \frac{13}{4} qE_{01}^3 \frac{\varkappa^2}{k_\perp^2} - \frac{3}{4} qE_{01}^3 \varkappa^2 r^2. \tag{28}$$

Окончательно поле в плазме можно записать так:

$$E_z = E_{01}\left(1 - \frac{13}{4}\frac{qE_{01}^2}{\varepsilon_0}\right) - E_{01}\frac{k_\perp^2 r^2}{4}\left(1 - \frac{3qE_{01}^2}{\varepsilon_0}\right). \tag{29}$$

Далее можно пойти двумя путями: либо считать амплитуду поля на оси волновода той же, что и в линейном случае — это соответствует измененному уровню мощности волны; либо, наоборот, считать фиксированным уровень мощности и найти соответствующую амплитуду поля на оси. Мы рассмотрим первый случай. Тогда выражения для полей в плазме имеют вид

$$\begin{aligned} E_z &= E_0\left[1 - \frac{k_\perp^2 r^2}{4}\left(1 + \frac{q}{4\varepsilon_0}E_0^2\right)\right]; \\ E_r &= E_0 \frac{i\varepsilon_0 hr}{2}\left(1 + \frac{q}{4\varepsilon_0}E_0^2\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим соответствующее нелинейное дисперсионное уравнение:

$$\left[\varepsilon_0 - 1 - \frac{q}{4\varepsilon_0}E_0^2\right]\frac{\varkappa^2 a^2}{2}\ln(\varkappa a) = 1. \tag{31}$$

Легко видеть, что при $\varepsilon_0 > 0$ учет нелинейности приводит к убыванию $\varkappa^2$ и, следовательно, возрастанию фазовой скорости волны; при $\varepsilon_0 < 0$ нелинейность приводит к замедлению волны. Решение (31) можно представить в виде

$$\varkappa_н^2 = \varkappa_0^2\left(1 + \frac{q}{4\varepsilon_0(\varepsilon_0 - 1)}E_0^2\right), \tag{32}$$

где $\varkappa_0^2$ — поперечное волновое число линейной теории (24). Тогда выражение для амплитуды продольного поля

$$E_z^н = E_0\left[1 - \frac{k_{\perp 0}^2 r^2}{4}\left(1 - \frac{qE_0^2}{4(\varepsilon_0 - 1)}\right)\right] \tag{33}$$

можно сравнить с аналогичным выражением из линейной теории

$$E_z = E_0\left(1 - \frac{k_{\perp 0}^2 r^2}{4}\right). \tag{34}$$

Так как всегда $\varepsilon_0 - 1 < 0$, то нелинейность приводит к более медленному изменению поля при удалении от оси и к увеличению эффективной ширины электромагнитного пучка. Следовательно, для достижения той же амплитуды поля на оси, что и в линейном случае, необходима боль-

шая мощность волны. Соответственно, при фиксированном уровне мощности амплитуда поля на оси меньше, чем в линейной теории.

Автор признателен М. А. Миллеру и В. И. Таланову за обсуждение результатов и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Г. А Аскарьян, ЖЭТФ, **42**, 1567 (1962)
2. В. И. Таланов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **7**, 564 (1964).
3. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика (в печати).
4. А. В Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, **34**, 242 (1958).
5. А. Г. Литвак, М. И. Петелин, Е И Якубович, ЖТФ, **35**, 108 (1965)
6. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика (в печати).
7. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия, **6**, 447 (1959).
8. А Н. Кондратенко, ЖТФ, **33**, 1397 (1963); **34**, 606 (1964).
9. М. Ф. Горбатенко, Я. Б. Файнберг, ЖТФ, **29**, 549 (1959).
10. H. A H. Boot, S. A. Self, R. B. R. Harvie, J. El. Control, **4**, 434 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 апреля 1965 г.

ON ELECTROMAGNETIC WAVES SELF-FOCUSING IN PLASMA IN STRONG MAGNETIC FIELD

A. G. Litvak

The longitudinal electromagnetic wave propagation in nonlinear plasma in a strong magnetic field is studied. The electromagnetic wave self-focusing acompanying by plasma displacement from the axis and waveguide channel forming is shown to be possible in a boundless plasma. The effect of nonlinearity on wave propagating in a cylindrical plasma waveguide has been taken into account By using the perturbation method, nonlinear corrections have been found out for the field distribution and phase velocity of a wave.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 537.533.2 ; 621.378 325

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ПЛОТНОСТЯХ ФОТОНОВ

Б. И. Бондарев

Рассмотрено индуцированное излучение электрона в третьем порядке теории возмущений. Отмечен тот факт, что с ростом числа фотонов разложение в ряд теории возмущений становится все более некорректным. Показано, что в условиях газового лазера третий член теории возмущений при плотностях фотонов порядка 10^{10} *см*$^{-3}$ становится сравнимым с первым.

В последнее время в связи с развитием квантовых генераторов света были получены монохроматические пучки фотонов большой интенсивности; это дало возможность наблюдать различные многофотонные процессы [1, 2], являющиеся высшими приближениями теории возмущений. Обычно их вклад в матрицу рассеяния очень мал; однако поскольку каждый фотон, поглощенный в процессе рассеяния, добавляет в матричный элемент процесса множитель $\sqrt{N_{k,\omega}}$, а каждый испущенный фотон — множитель $\sqrt{N_{k,\omega}+1}$, где $N_{k,\omega}$ — число фотонов с данными импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$ и энергией $\hbar\omega$ до взаимодействия, то вероятность n-фотонного процесса будет, грубо говоря, пропорциональна произведению $\prod_{i=1}^{n} N_{k_i,\omega_i}$ и с ростом всех $N_{k,\omega}$ будет быстро расти. В результате может оказаться, что, начиная с некоторых $N_{k,\omega}$, все большее число членов ряда теории возмущений станут по порядку величины сравнимыми с первым членом. Это свидетельствует о том, что с ростом числа фотонов теория возмущений становится все более некорректной.

В настоящей статье рассмотрено индуцированное резонансное излучение атомов. Как известно, его обычно вычисляют, ограничиваясь первым порядком теории возмущений и получая для вероятности излучения фотона с импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$ и энергией $\hbar\omega$ за единицу времени и в телесный угол $d\Omega$ выражение [3]

$$W^{(1)}d\Omega = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{\omega^3 d\Omega}{2\pi c^2}|Q_{fl}|^2 \sin^2\Theta(N_{k,\omega}+1). \qquad (1)$$

Здесь Q_{if} — матричный элемент дипольного момента атома, а Θ — угол между дипольным моментом и направлением распространения $\boldsymbol{k}$. Второй член теории возмущений приведен в монографии [4] — это комптон-эффект на связанном электроне. Соответствующая вероятность $W^{(2)}d\Omega$ в случае резонансного излучения, когда энергии падающего и испущенного фотонов совпадают, имеет следующий вид:

$$W^{(2)}d\Omega \sim \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega^4 |Q_{if}|^2 |Q_{fl}|^2 d\Omega}{c\Gamma^2} \sin^2\Theta \sin^2\Theta_1 N_{k,\omega}(N_{k_1,\omega}+1), \qquad (2)$$

где Θ и Θ_1 — углы между дипольным моментом атома и направлением распространения падающего и испущенного фотонов соответственно, а Γ — ширина уровня промежуточного состояния атома.

Рассмотрим теперь третий член теории возмущений — это взаимодействие атомного электрона с внешним фотоном, в результате которого испускаются два фотона. В матричный элемент такого процесса, который мы будем называть двойным комптон-эффектом на связанном электроне, войдут 6 членов. Диаграмма Фейнмана одного из них приведена на рис. 1, остальные отличаются только перестановками фотонных линий. В начальном состоянии мы имеем фотон с частотой ω_i, волновым вектором $\boldsymbol{k}_i$ и поляризацией $\boldsymbol{e}_i$, который рассеивается связанным электроном, находящимся в состоянии $\psi_i(x) = \psi_i(\boldsymbol{r})e^{-iE_it}$. В результате рассеяния возникают два фотона $(\omega_1, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{e}_1)$ и $(\omega_2, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{e}_2)$, а электрон переходит в состояние $\psi_f(x) = \psi_f(\boldsymbol{r})e^{-iE_ft}$, которое также является решением уравнения Дирака для электрона в поле ядра.

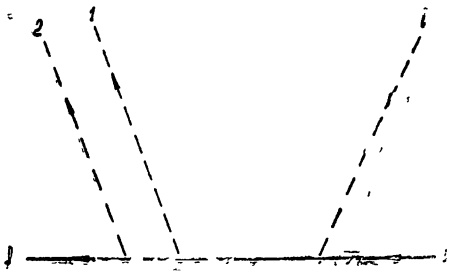


Рис. 1. Одна из диаграмм двойного комптон-эффекта (остальные диаграммы отличаются перестановками фотонных линий). Сплошная линия изображает связанный электрон, пунктирные линии—фотоны.

Согласно общим правилам [4], матричный элемент рассматриваемого процесса запишется в виде ($\hat{e} = \gamma e$; $c = \hbar = 1$):

$$M^{(3)} = \frac{i\pi e^3 \sqrt{N_{k,\omega}(N_{k_1,\omega_1}+1)(N_{k_2,\omega_2}+1)}\,\delta(E_i+\omega_i-E_f-\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{2\omega_i\omega_1\omega_2}} \times$$

$$\times \sum_{n,m} \left\{ \frac{(f|\hat{e}_2 e^{-ik_2r}|n)(n|\hat{e}_1 e^{-ik_1r}|m)(m|\hat{e}_i e^{ik_ir}|i)}{[E_n - E_f - \omega_2 + H_{nn}(E_f+\omega_2)][E_m - E_i - \omega_i + H_{mm}(E_i+\omega_i)]} + \right.$$

$$+ \frac{(f|\hat{e}_2 e^{-ik_2r}|n)(n|\hat{e}_i e^{ik_ir}|m)(m|\hat{e}_1 e^{-ik_1r}|m)}{[E_n - E_f - \omega_2 + H_{nn}(E_f+\omega_2)][E_m - E_i + \omega_1 + H_{mm}(E_i-\omega_1)]} + \qquad (3)$$

$$\left. + \frac{(f|\hat{e}_i e^{ik_ir}|n)(n|\hat{e}_2 e^{-ik_2r}|m)(m|\hat{e}_1 e^{-ik_1r}|i)}{[E_n - E_f + \omega_i + H_{nn}(E_f-\omega_i)][E_m - E_i + \omega_1 + H_{mm}(E_i-\omega_1)]} + (1 \rightleftarrows 2) \right\}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$(j|\hat{e}e^{\pm ikr}|l) = \int \bar{\psi}_j(\boldsymbol{r})\hat{e}e^{\pm ikr}\psi_l(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r},$$

$$H_{nn}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{nn}(t)e^{i\omega t}\,dt,$$

$$H_{nn}(t) = \int \bar{\psi}_n(\boldsymbol{r})M^{(e)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; t)\psi_n(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}',$$

$(1 \rightleftarrows 2)$ — те же члены, но с заменой индекса 1 на индекс 2 и наоборот, а $M^{(e)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; t)$ — массовый оператор электрона [4]. Величина $H_{nn}(E_n)$ определяет радиационное смещение и ширину уровня и в нашем случае равна $\delta E_n + i\Gamma_n$, где δE_n— радиационное смещение, а Γ_n — ширина уровня.

Практически интересен случай, когда E_i — верхний уровень системы, E_f — нижний, а их разность $E_i - E_f = \hbar\omega$ будет близка к частоте падающего фотона. Кроме того, для нашей задачи существенны частоты оптического диапазона; поэтому мы можем считать внутри атома $\exp(i\boldsymbol{kr}) \simeq \exp(i\boldsymbol{kR})$, где $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор центра атома. Все дальнейшие расчеты можно вести в нерелятивистском приближении, поскольку в оптической области энергии фотонов малы по сравнению с энергией покоя электрона m и энергии электронов тоже мало отличаются от его энергии покоя:

$$|E_i - m| \ll m, \quad |E_f - m| \ll m.$$

Учитывая это, мы можем в сумме по промежуточным состояниям различать члены, относящиеся к положительным частотам $m^{(+)}$, $n^{(+)}$, и члены, относящиеся к отрицательным частотам $m^{(-)}$, $n^{(-)}$. В последних соответствующую часть энергетического знаменателя заменим на $2m$ и введем проектировочный оператор $(1/2)(1 - \gamma_4)$, для которого в нашем приближении справедливы соотношения

$$(1/2)(1 - \gamma_4)\psi_n^{(+)} = 0, \quad (1/2)(1 - \gamma_4)\psi_n^{(-)} = \psi_n^{(-)}.$$

Сделанные предположения позволяют заменить γe на $(1/m)\boldsymbol{ep}$, равное под знаком матричного элемента $i(E_s - E_{s'})(\boldsymbol{re})_{ss'}$, если последний берется между состояниями s и s'. После всех преобразований получим:

$$M^{(3)} = \pi e^3 \exp[i(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{R}] \sqrt{N_{k,\omega}(N_{k_1,\omega_1}+1)(N_{k_2,\omega_2}+1)} \times$$
$$\times \delta(E_i + \omega_i - E_f - \omega_1 - \omega_2)\left(\sqrt{2\omega_i\omega_1\omega_2}\right)^{-1} \times$$
$$\times \Bigg\{ \sum_{n^{(+)}m^{(+)}} [(E_f - E_n)(E_n - E_m)(E_m - E_i)(f|\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{r}|n^{(+)})(n^{(+)}|\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{r}|m^{(+)})(m^{(+)}|\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{r}|i)] \times$$
$$\times [E_n - E_f - \omega_2 + H_{nn}(E_f + \omega_2)]^{-1}[E_m - E_i + \omega_1 + H_{mm}(E_i - \omega_1)]^{-1} +$$
$$+ \sum_{n^{(+)}} \frac{(E_f - E_n)(f|\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{r}|n^{(+)})(n^{(+)}|\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_1|i)}{2m[E_n - E_f - \omega_2 + H_{nn}(E_f + \omega_2)]} + \tag{4}$$
$$+ \sum_{m^{(+)}} \frac{(E_m - E_i)(f|\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_i|m^{(+)})(m^{(+)}|\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{r}|i)}{2m[E_m - E_i + \omega_1 + H_{mm}(E_i - \omega_1)]} + (1 \rightleftarrows 2) \Bigg\}.$$

Особенно интересен случай совпадения частот всех трех фотонов $\omega_i = \omega_1 = \omega_2 = \omega$. Теперь в матричном элементе $M^{(3)}$ имеется резкий резонанс и в сумме по всем промежуточным состояниям возбужденного электрона можно отбросить все члены, кроме резонансных. Останется всего два члена:

$$M^{(3)} = \{\pi e^3 \exp[i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{R}] \sqrt{N_{k,\omega}(N_{k_1,\omega}+1)(N_{k_2,\omega}+1)} \times$$
$$\times \sqrt{2\omega^3}\,\delta(E_i - E_f - \omega)\}[2H_{ii}(E_i)H_{ff}(E_f)]^{-1} \times \tag{5}$$
$$\times [(f|\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{r}|i)(i|\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{r}|f)(f|\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{r}|i) + (1 \rightleftarrows 2)].$$

Вероятность перехода за единицу времени связана с матричным элементом $M^{(3)}$ соотношением

$$W^{(3)}\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\Omega_1 d\Omega_2 = 2\pi |M^{(3)}|^2 \frac{d\boldsymbol{k}_1\,d\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^6}.$$

Интегрируя по ω_1, получим

$$W^{(3)}\,d\omega\,d\Omega_1\,d\Omega_2 = \frac{e^6\omega^7 N_{k,\omega}(N_{k_1,\omega}+1)(N_{k_2,\omega}+1)\,d\omega\,d\Omega_1\,d\Omega_2}{4(2\pi)^4\,|H_{ll}(E_l)|^2\,|H_{ff}(E_f)|^2}\times \tag{6}$$

$$\times\,|(f|e_2r|i)(i|e_1r|f)(f|e_1r|i)+(1\rightleftarrows 2)|^2.$$

Будем считать, что вырождение по l снято за счет спин-орбитального взаимодействия и что такое взаимодействие не изменяет существенным образом волновых функций.

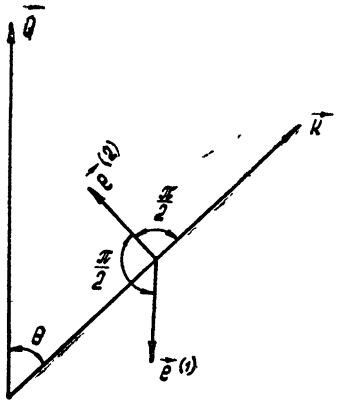


Рис 2. Углы между дипольным моментом атома Q и двумя независимыми направлениями поляризации фотона ($e^{(1)}$ лежит в плоскости чертежа, а $e^{(2)}$—перпендикулярно ей).

Выберем для каждого фотона два независимых направления поляризации

$$e = e^{(1)} + e^{(2)},$$

причем вектор $e^{(1)}$ расположен в той же плоскости, что и волновой вектор этого фотона k и дипольный момент системы, а $e^{(2)}$ — перпендикулярно этой плоскости. Тогда для всех трех фотонов

$$(Qe) = (Qe^{(1)}),$$

где $Q = (...|r|...)$. Угол между Q и $e^{(1)}$ теперь уже легко выразить через угол Θ между направлением распространения фотона и дипольным моментом атома. Как видно из рис. 2, он равен $\pi/2-\Theta$.

Отметим еще, что начальное, конечное и промежуточные состояния могут отличаться магнитным квантовым числом $m(\Delta m=0,\pm 1)$. При вычислении матричных элементов необходимо учитывать это обстоятельство.

Таким образом, мы получили

$$W^{(3)} = \frac{e^6\omega^7\,|Q_{fi'}|^2\,|Q_{i'f'}|^2\,|Q_{f'i}|^2\,N_{k,\omega}(N_{k_1,\omega}+1)(N_{k_2,\omega}+1)}{(2\pi)^4\,|H_{ll}|^2\,|H_{ff}|^2}\times \tag{7}$$

$$\times\,\sin^2\Theta\,\sin^2\Theta_1\,\sin^2\Theta_2,$$

где промежуточные состояния i', f' могут отличаться от i, f магнитным квантовым числом.

Расмотренный трехфотонный процесс, так же как и двухфотонный, отличается от однофотонного следующим. Если в формуле (1) не рассматривать спонтанное излучение, т. е. пренебречь единицей по сравнению с $N_{k,\omega}$, и, кроме того, считать, что в системе присутствуют фотоны только одного типа, то испущенный фотон будет иметь те же энергию и импульс, что и фотоны, присутствовавшие до взаимодействия. Что касается фотонов, испущенных в двух и трехфотонных процессах, то они могут отличаться от падающего фотона импульсом, т. е. направлением распространения. Однако в реальной ситуации, имеющей место в лазерах, число фотонов, распространяющихся строго в продольном направлении, на много порядков превышает число фотонов, распространяющихся в других направлениях. Поэтому вероятности $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$ велики только в случае, когда падающие и испущенные фотоны имеют не только одну и ту же энергию, но один и тот же импульс. Для оценок, которые мы сделаем

ниже, достаточно записать выражение (7) в следующем упрощенном виде ($\hbar$ и c теперь уже не равны единице):

$$W^{(3)}d\omega \sim \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{\omega^7 \sin^6\Theta |Q_{if}|^6}{c^3\Gamma^4} d\omega, \qquad (8)$$

где $\Gamma \simeq H(E_{if})$ — ширина уровня.

Оценим величины $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и $W^{(3)}d\omega$. Оценки имеют грубый характер и не претендуют на количественное подтверждение. Величину дипольного матричного элемента возьмем равной

$$|Q_{if}|^2 \simeq 3\hbar/2m\omega,$$

т. е. примерно $Q_{if} = 10^{-7}$ *см*, а $\Gamma \simeq 10^8$ *сек*$^{-1}$. Тогда будем иметь ($d\omega \simeq 1$ *сек*$^{-1}$):

$$W^{(1)} \sim 10^8 N \text{ сек}^{-1},\ W^{(2)} \sim 10^{-2}N^2 \text{ сек}^{-1},\ W^{(3)}d\omega \sim 10^{-12}N^3 \text{ сек}^{-1}. \qquad (9)$$

Определим плотность фотонов, которая достигается в газовых оптических генераторах. Будем считать, что энергия, излучаемая за единицу времени через отражающие пластины площадью 1 *см*^{2}, составляет примерно $5 \cdot 10^{-3}$ *вт*, а пропускание света через пластины составляет 1% [5]. Следовательно, первичный пучок лазера имеет интенсивность порядка $5 \cdot 10^6$ *эрг* $\cdot$ *сек*$^{-1} \cdot$ *см*$^{-2}$. Длина волны равна примерно 1 *мк*, так что указанная интенсивность соответствует потоку фотонов $2{,}5 \cdot 10^{18}$ фотон $\cdot$ *см*$^{-2} \cdot$ *сек*$^{-1}$ и плотности фотонов порядка 10^8 фотон $\cdot$ *см*$^{-3}$. Подставляя эту величину в (9), получим, что

$$W^{(1)} \simeq 10^{16} \text{ сек}^{-1},\ W^{(2)} \simeq 10^{14} \text{ сек}^{-1},\ W^{(3)}d\omega \simeq 10^{12} \text{ сек}^{-1}. \qquad (10)$$

Если же довести мощность лазера до $5 \cdot 10^{-1}$ *вт*, соответствующей плотности 10^{10} фотон $\cdot$ *см*$^{-3}$, то мы достигнем момента, когда $W^{(1)} \simeq W^{(2)} \simeq W^{(3)}d\omega$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что расчеты процессов взаимодействия фотонов с электронами при очень больших плотностях фотонов на основе теории возмущений становятся некорректными.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Болотовскому Б. М., Жаботинскому М. Е. и Перельману М. Е. за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Kleinman, Phys. Rev., **125**, 87 (1962).
2. R. Braunstein, Phys. Rev., **125**, 475 (1962).
3. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956
4. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Физматгиз, М., 1959.
5. A. Yariv, J. P. Gordon, Proc. IEEE, **51**, 30 (1963).

Поступила в редакцию
30 августа 1963 г

INDUCED RADIATION FOR LARGE DENSITIES OF PHOTONS

B. I. Bondarev

The induced electron radiation in the third order of the perturbation theory has been considered. It has been noted that the growth of the photon number being greater the expansion of the perturbation theory becomes more incorrect. For gas laser the third term of the perturbation theory is shown to be comparable with the first one, the photon density being about 10^{10} cm^{-3}.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.373.42.072.9

ВЛИЯНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ШУМОВ АВТОГЕНЕРАТОРОВ НА ИХ ВЗАИМНУЮ СИНХРОНИЗАЦИЮ

А. Н. Малахов

Рассмотрено влияние естественных шумов двух автогенераторов на их взаимную синхронизацию как в линейном, так и в нелинейном (с точки зрения фазовых флуктуаций) приближении. Найдены коэффициенты диффузии фаз, спектры флуктуаций частоты и ширина спектральных линий взаимносинхронизованных автогенераторов.

Имеющиеся в литературе исследования синхронизации автогенераторов посвящены главным образом случаям синхронизации генератора монохроматическим сигналом (см., например, [1–4]). Однако в действительности сигнал синхронизации всегда представляет собой колебания с флуктуирующей амплитудой и фазой, поэтому представляется интересным исследовать синхронизацию генератора квазимонохроматическим сигналом [5]. Еще более общей постановкой задачи является исследование взаимной синхронизации двух автогенераторов, каждый из которых обладает своими шумами. Настоящая работа как раз и посвящена этому вопросу.

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ И ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Рассмотрим систему двух взаимосвязанных изохронных автогенераторов, обладающих шумами. Их уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= 2\Delta_x\omega_0 x + F_x(x,\ \dot{x}) - \lambda_1\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2\mathcal{E}_1(t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y &= 2\Delta_y\omega_0 y + F_y(y,\ \dot{y}) - \lambda_2\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\mathcal{E}_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что у связанных автогенераторов существует устойчивый одночастотный режим автоколебаний со средней частотой ω_0 и медленно меняющимися фазами и амплитудами:

$$\begin{aligned} x &= R_x\cos(\omega_0 t + \varphi_x'), \qquad \dot{x} = -\omega_0 R_x\sin(\omega_0 t + \varphi_x'), \\ y &= R_y\cos(\omega_0 t + \varphi_y'), \qquad \dot{y} = -\omega_0 R_y\sin(\omega_0 t + \varphi_y'). \end{aligned}$$

Поскольку генераторы в общем случае обладают разными, но близкими парциальными частотами ω_{1x}, ω_{1y}, то существуют две расстройки

$$\Delta_x = \omega_0 - \omega_{1x}, \qquad \Delta_y = \omega_0 - \omega_{1y}, \tag{2}$$

которые считаем достаточно малыми ($|\Delta_x| \ll \omega_0$, $|\Delta_y| \ll \omega_0$).

Функции $F_x(x, \dot{x})$, $F_y(y, \dot{y})$ характеризуют малые потери и малые нелинейности генераторов. Величины λ_1, λ_2 — коэффициенты связи меж-

ду генераторами, которые также считаем достаточно малыми и в общем случае различными. Случайные дельта-коррелированные статистически независимые функции $\mathcal{E}_1(t)$ и $\mathcal{E}_2(t)$ представляют собой малые естественные шумы автогенераторов и обладают постоянными спектральными плотностями, равными соответственно c_1, c_2.

Применяя к уравнениям (1) метод усреднения (см. [6]), нетрудно получить уравнения для R_x, R_y, φ'_x, φ'_y. Представляя $R_x=R_{0x}(1+\alpha'_x)$, $R_y = R_{0y}(1 + \alpha'_y)$, где R_{0x}, R_{0y} — амплитуды автоколебаний свободных автогенераторов ($\lambda_1=\lambda_2=0$), и полагая, что $|\alpha'_x|\ll 1$, $|\alpha'_y|\ll 1$, найдем следующие уравнения для α'_x, α'_y, φ'_x, φ'_y:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha'_x}{dt} &= -p_x\alpha'_x - \omega_0\varepsilon_1(1+\alpha'_y)\sin(\varphi'_x-\varphi'_y) + \frac{\omega_0}{2R_{0x}}\mathcal{E}_{\perp 1}(t),\\
\frac{d\alpha'_y}{dt} &= -p_y\alpha'_y + \omega_0\varepsilon_2(1+\alpha'_x)\sin(\varphi'_x-\varphi'_y) + \frac{\omega_0}{2R_{0y}}\mathcal{E}_{\perp 2}(t),\\
\frac{d\varphi'_x}{dt} &= -\Delta_x - \omega_0\varepsilon_1\frac{1+\alpha'_y}{1+\alpha'_x}\cos(\varphi'_x-\varphi'_y) - \frac{\omega_0}{2R_{0x}}\mathcal{E}_{\parallel 1}(t),\\
\frac{d\varphi'_y}{dt} &= -\Delta_y - \omega_0\varepsilon_2\frac{1+\alpha'_x}{1+\alpha_y}\cos(\varphi'_x-\varphi'_y) - \frac{\omega_0}{2R_{0y}}\mathcal{E}_{\parallel 2}(t).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения: p_x, p_y — прочности предельных циклов свободных автогенераторов,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \lambda_1 R_{0y}/2R_{0x}, \qquad \varepsilon_2 = \lambda_2 R_{0x}/2R_{0y},\\
\mathcal{E}_{\parallel 1} &= e_{\parallel 1}\cos\varphi'_x + e_{\perp 1}\sin\varphi'_x,\\
\mathcal{E}_{\perp 1} &= e_{\perp 1}\cos\varphi'_x - e_{\parallel 1}\sin\varphi'_x,\\
\mathcal{E}_{\parallel 2} &= e_{\parallel 2}\cos\varphi'_y + e_{\perp 2}\sin\varphi'_y,\\
\mathcal{E}_{\perp 2} &= e_{\perp 2}\cos\varphi'_y - e_{\parallel 2}\sin\varphi'_y.
\end{aligned} \tag{4}$$

Величины $e_{\parallel 1}$, $e_{\perp 1}$ ($e_{\parallel 2}$, $e_{\perp 2}$) выражаются через $\mathcal{E}_1(t)$ ($\mathcal{E}_2(t)$) в соответствии с формулой (13) работы [6] и являются в нашем случае дельта-коррелированными, статистически независимыми стационарными случайными функциями со спектральной плотностью, равной $2c_1(2c_2)$.

2. Если шумы в автогенераторах отсутствуют, то детерминированные значения фаз и амплитуд взаимносинхронизованных генераторов α_{0x}, α_{0y}, φ_{0x}, φ_{0y} определяются, согласно (3), следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_{0x}}{dt} &= -p_x\alpha_{0x} - \omega_0\varepsilon_1(1+\alpha_{0y})\sin\Phi,\\
\frac{d\alpha_{0y}}{dt} &= -p_y\alpha_{0y} + \omega_0\varepsilon_2(1+\alpha_{0x})\sin\Phi,\\
\frac{d\varphi_{0x}}{dt} &= -\Delta_x - \omega_0\varepsilon_1\frac{1+\alpha_{0y}}{1+\alpha_{0x}}\cos\Phi,\\
\frac{d\varphi_{0y}}{dt} &= -\Delta_y - \omega_0\varepsilon_2\frac{1+\alpha_{0x}}{1+\alpha_{0y}}\cos\Phi,
\end{aligned} \tag{5}$$

где обозначено $\Phi = \varphi_{0x} - \varphi_{0y}$.

Уравнения (5) являются в общем случае достаточно сложными. Ограничиваясь такой слабой взаимосвязью, что $\omega_0|\varepsilon_1| \ll p_x$, $\omega_0|\varepsilon_2| \ll p_y$, можно для анализа этих уравнений применить метод Хохлова [7,8]. В результате получим, что

$$\alpha_{0x} = -\frac{\omega_0\varepsilon_1}{p_x}\sin\Phi, \qquad \alpha_{0y} = \frac{\omega_0\varepsilon_2}{p_y}\sin\Phi. \tag{6}$$

Используя это, нетрудно найти следующее уравнение для Φ:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_{1x} - \omega_{1y} - \omega_0\varepsilon\cos\Phi - \omega_0^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\frac{\varepsilon_1}{p_x}+\frac{\varepsilon_2}{p_y}\right)\sin(2\Phi). \tag{7}$$

Ограничимся случаем, когда $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ подчиняется неравенству

$$|\varepsilon| \gg \omega_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\frac{\varepsilon_1}{p_x}+\frac{\varepsilon_2}{p_y}\right). \tag{8}$$

Тогда в уравнении (7) можно пренебречь последним членом, а в (5) — величинами α_{0x}, α_{0y}, стоящими в последних слагаемых. Этот случай соответствует несимметричной взаимной синхронизации, когда генераторы неравноправны.

Пусть, для простоты, генераторы обладают одинаковыми мощностями и прочностями предельного цикла ($p_x = p_y = p$, $R_{0x} = R_{0y} = R_0$). Тогда для выполнения неравенства (8) коэффициенты связи между генераторами λ_1 и λ_2 должны быть различны и подчиняться условию

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \gg \frac{\omega_0}{2p}(\lambda_1+\lambda_2)^2.$$

При этом уравнения (5) принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_{0x}}{dt} &= -p\alpha_{0x} - \omega_0\varepsilon_1\sin\Phi,\\
\frac{d\alpha_{0y}}{dt} &= -p\alpha_{0y} + \omega_0\varepsilon_2\sin\Phi,\\
\frac{d\Phi}{dt} &= \omega_{1x} - \omega_{1y} - \omega_0\varepsilon\cos\Phi.
\end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда нетрудно видеть, что устойчивые значения стационарной разности фаз могут существовать лишь при $|\omega_{1x} - \omega_{1y}| < \omega_0|\varepsilon|$, а область их значений зависит от знака ε. Если $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, то стационарные значения фаз расположены в пределах $-\pi < \Phi < 0$. При этом, согласно (6), $\alpha_{0x} > 0$, $\alpha_{0y} < 0$. Это значит, что первый генератор захватывается вторым. Если $\varepsilon < 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, то $0 < \Phi < \pi$ и захватывающим генератором является первый.

Установившиеся значения α_{0x}, α_{0y}, Φ подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned}
p\alpha_{0x} &= -\omega_0\varepsilon_1\sin\Phi,\\
p\alpha_{0y} &= \omega_0\varepsilon_2\sin\Phi,\\
\Delta_x &= -\omega_0\varepsilon_1\cos\Phi,\\
\Delta_y &= -\omega_0\varepsilon_2\cos\Phi,
\end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая, что одна из установившихся фаз произвольна (например, φ_{0y}),

нетрудно видеть, что (2) и (10) однозначно определяют остальные величины φ_{0x}, α_{0x}, α_{0y}, Δ_x, Δ_y, ω_0.

Из последних уравнений (10) нетрудно получить, например, следующее уравнение для частоты синхронных автоколебаний:

$$(\omega_0 - \omega_{1x})(\omega_0 - \omega_{1y}) = \omega_0^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos^2 \Phi,$$

где $\Phi = \Phi(\omega_0)$. Это уравнение может иметь два положительных корня ω_{01}, ω_{02}, близких к ω_{1x}, ω_{1y}. На рис. 1 для случая $\omega_{1x} < \omega_{1y}$ показаны интервалы (они зачернены), в которых располагаются корни ω_{01}, ω_{02} для случаев $\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$. Последний случай в принципе также может иметь место — это несимметричная по знаку связь между автогенераторами. Из рис. 1 легко видеть, что корни ω_{01} и ω_{02} лежат всегда между парциальными (ω_{1x}, ω_{1y}) и нормальными ($\omega_{нx}$, $\omega_{нy}$) частотами системы. Из двух возможных частот синхронного режима реализуется та, которая расположена ближе к парциальной частоте захватывающего генератора [8].

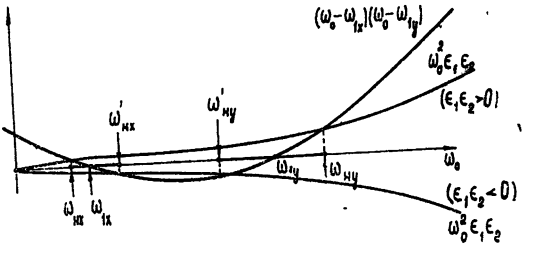


Рис. 1.

3. Обратимся теперь к случаю, когда в автогенераторах присутствуют шумы и $\mathcal{E}_1(t)$ и $\mathcal{E}_2(t)$ не равны тождественно нулю. Положим

$$\alpha_x' = \alpha_{0x} + \alpha_x, \quad \alpha_y' = \alpha_{0y} + \alpha_y, \quad \varphi_x' = \varphi_{0x} + \varphi_x, \quad \varphi_y' = \varphi_{0y} + \varphi_y.$$

Здесь флуктуации фаз и амплитуд φ_x, φ_y, α_x, α_y обязаны присутствию шумов в автогенераторах.

С помощью (3), (9) и (10) нетрудно получить следующие уравнения для флуктуаций:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_x}{dt} &= -p\alpha_x - p\alpha_{0x}[1-\cos(\varphi_x-\varphi_y)] + \Delta_x \sin(\varphi_x-\varphi_y) + \frac{\omega_0}{2R_0}\mathcal{E}_{\perp 1},\\
\frac{d\alpha_y}{dt} &= -p\alpha_y - p\alpha_{0y}[1-\cos(\varphi_x-\varphi_y)] + \Delta_y \sin(\varphi_y-\varphi_x) + \frac{\omega_0}{2R_0}\mathcal{E}_{\perp 2},\\
\frac{d\varphi_x}{dt} &= -\Delta_x[1-\cos(\varphi_x-\varphi_y)] - p\alpha_{0x}\sin(\varphi_x-\varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0}\mathcal{E}_{\parallel 1},\\
\frac{d\varphi_y}{dt} &= -\Delta_y[1-\cos(\varphi_x-\varphi_y)] - p\alpha_{0y}\sin(\varphi_y-\varphi_x) - \frac{\omega_0}{2R_0}\mathcal{E}_{\parallel 2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь в выражениях для $\mathcal{E}_{\perp 1}$, $\mathcal{E}_{\parallel 1}$, $\mathcal{E}_{\perp 2}$, $\mathcal{E}_{\parallel 2}$, заданных формулами (4), следует писать вместо φ_x', φ_y' соответственно $\varphi_{0x}+\varphi_x$, $\varphi_{0y}+\varphi_y$.

Полученные уравнения (11) с учетом (4) представляются достаточно сложными. Однако, используя тот факт, что $e_{\parallel 1}$, $e_{\parallel 2}$, $e_{\perp 1}$, $e_{\perp 2}$ суть дельта-коррелированные случайные функции, можно (11) несколько упростить. Применяя метод статистической эквивалентности [9], можно показать, что статистически эквивалентна следующая замена:

$$\mathcal{E}_{\parallel 1} \to e_{\parallel 1}, \quad \mathcal{E}_{\parallel 2} \to e_{\parallel 2}, \quad \mathcal{E}_{\perp 1} \to e_{\perp 1}, \quad \mathcal{E}_{\perp 2} \to e_{\perp 2}.$$

Окончательные флуктуационные уравнения, описывающие воздей-

ствие естественных шумов автогенераторов на их взаимную синхронизацию, получаются из (11) путем указанной выше замены.

В настоящей статье мы ограничимся анализом только флуктуаций фазы (или частоты), оставляя без внимания амплитудные флуктуации, поскольку именно фазовые флуктуации определяют основные флуктуационные характеристики синхронизации. Кроме того, ограничимся случаем равенства парциальных частот автогенераторов. Тогда, полагая для определенности $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, будем иметь: $\Delta_x = \Delta_y = 0$, $\Phi = -\pi/2$, $\alpha_{0x} = \omega_0\varepsilon_1/p$, $\alpha_{0y} = -\omega_0\varepsilon_2/p$.

Таким образом, будем рассматривать только два следующих уравнения:

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = -\omega_0\varepsilon_1 \sin(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 1}(t),$$
$$\frac{d\varphi_y}{dt} = -\omega_0\varepsilon_2 \sin(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 2}(t). \tag{12}$$

2. СИЛЬНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

1. Разность $\varphi_x - \varphi_y$ характеризует степень синхронизации фаз автогенераторов. Если разность тождественно равна нулю, это означает полную «привязку» фазы одного генератора к фазе другого, и можно сказать, что в этом случае мы имеем полную синхронизацию. Если же $\varphi_x - \varphi_y$ может со временем стать сколь угодно большой, можно считать, что синхронизация между генераторами практически отсутствует. Поэтому степень синхронизации целесообразно оценивать по характеристикам $\varphi_x - \varphi_y$.

Будем считать, что между автогенераторами имеет место сильная синхронизация, если $\langle (\varphi_x - \varphi_y)^2 \rangle \ll 1$ для достаточно больших промежутков времени. В этом случае уравнения для фаз линеаризуются:

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = -\omega_0\varepsilon_1(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 1},$$
$$\frac{d\varphi_y}{dt} = -\omega_0\varepsilon_2(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 2}. \tag{13}$$

Для $\theta = \varphi_x - \varphi_y$ отсюда нетрудно найти уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega_0\varepsilon\theta - \frac{\omega_0}{2R_0}(e_{\parallel 1} - e_{\parallel 2}).$$

Таким образом, для θ существует возвращающая сила $\omega_0\varepsilon$. Рассматривая достаточно большие моменты времени ($t \gg 1/\omega_0\varepsilon$), найдем дисперсию θ:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{D_1 + D_2}{2\omega_0\varepsilon}, \qquad D_1 = \frac{\pi\omega_0^2 c_1}{R_0^2}, \qquad D_2 = \frac{\pi\omega_0^2 c_2}{R_0^2}.$$

Коэффициенты D_1, D_2 имеют размерность частоты, характеризуют интенсивность естественных шумов автогенераторов и представляют собой коэффициенты диффузии фаз свободных автогенераторов.

Итак, за условие сильной синхронизации принимаем неравенство

$$\mu \equiv \frac{2\omega_0\varepsilon}{D_1 + D_2} \gg 1. \tag{14}$$

За условие слабой синхронизации естественно принять неравенство

$$\mu \ll 1.$$

Условие (14) может быть записано в форме

$$c_1\omega_0\varepsilon + c_2\omega_0\varepsilon \ll \frac{2}{\pi}(R_0\varepsilon)^2 = \frac{1}{2\pi}R_0^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2.$$

Выражение, стоящее слева, представляет собой сумму мощности шумов автогенераторов, существующих в полосе $\omega_0\varepsilon$ (фактически — в полосе синхронизации). Эти шумовые мощности и действуют в основном на фазы автогенераторов, т. е. слева стоит полная мощность фазоактивных шумов автогенераторов.

Величина $\frac{1}{2\pi}[R_0(\lambda_1 - \lambda_2)]^2$ есть, по-существу, мощность синхронизующего сигнала, действующая на один автогенератор от другого (это особенно ясно видно в том случае, когда синхронизация является односторонней и, например, $\lambda_2 = 0$). Тем самым, условие сильной синхронизации двух автогенераторов есть, по-существу, условие малости мощности фазоактивных шумов генераторов по сравнению с мощностью синхронизующего сигнала.

Интересна зависимость $\langle \theta^2 \rangle$ от ε. Сильная синхронизация может стать слабой, если связи между тождественными автогенераторами приближаются к симметричным и ε уменьшается. В этом случае генераторы становятся почти эквивалентными; какой из двух генераторов становится захватывающим, а какой захваченным, зависит от случая. Фактически это и означает, что эффективная связь между ними как бы пропадает.

2. Перейдем к рассмотрению поведения фазы каждого автогенератора. Полагая $\varphi_x(0) = \varphi_y(0) = \dot{\varphi}_x(0) = \dot{\varphi}_y(0) = 0$, можно найти следующее решение уравнений (13):

$$\varphi_{x,y}(t) = -\frac{1}{2R_0\varepsilon}\int_0^t (1 - e^{-\omega_0\varepsilon\xi})\left[\frac{de_{\parallel 1,2}}{dt} - \omega_0(\varepsilon_2 e_{\parallel 1} - \varepsilon_1 e_{\parallel 2})\right]_{t-\xi} d\xi.$$

Отсюда путем несложных вычислений можно определить дисперсию фаз для $t \gg 1/\omega_0\varepsilon$:

$$\langle \varphi_x^2(t) \rangle = \langle \varphi_y^2(t) \rangle = \frac{\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2}{\varepsilon^2} t. \tag{15}$$

Равенство дисперсий фаз обоих автогенераторов для случая сильной синхронизации вполне очевидно, если принять во внимание, что разность между фазами θ является достаточно малой (см. (14)), а сами фазы неограниченно возрастают по диффузионному закону с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2}{\varepsilon^2} \tag{16}$$

(см. (15)). Если синхронизация между генераторами отсутствует и генераторы являются свободными, то

$$\langle \varphi_x^2(t) \rangle = D_1 t, \qquad \langle \varphi_y^2(t) \rangle = D_2 t, \tag{17}$$

3. Диффузионный характер изменения фазы приводит, как известно (см., например, [10]), к существованию $\Delta\Omega$ — ненулевой ширины спектральной линии автогенератора, пропорциональной коэффициенту диффузии фазы. Если для свободных автогенераторов

$$\Delta\Omega_x = \Delta\Omega_1 = \pi D_1/2, \qquad \Delta\Omega_y = \Delta\Omega_2 = \pi D_2/2, \tag{18}$$

то, в соответствии с (16), ширина линии сильно синхронизованных автогенераторов будет равна

$$\Delta\Omega_x = \Delta\Omega_y = \frac{\varepsilon_2^2 \Delta\Omega_1 + \varepsilon_1^2 \Delta\Omega_2}{\varepsilon^2}. \tag{19}$$

Отсюда видно, что она зависит как от ширины спектральной линии каждого (свободного) автогенератора, так и от условия взаимосвязи автогенераторов. Вследствие нормального распределения флуктуаций фаз φ_x и φ_y (что, в свою очередь, имеет место при дельта-коррелированности $e_{\parallel 1}$ и $e_{\parallel 2}$) форма спектральной линии колебания взаимно синхронизованных генераторов имеет резонансную форму.

4. Рассматривая спектральные плотности флуктуаций частоты автогенераторов $\nu_x = d\varphi_x/dt$, $\nu_y = d\varphi_y/dt$, можно на основании (13) получить следующие выражения для $S_{\nu x}(\Omega)$ и $S_{\nu y}(\Omega)$:

$$S_{\nu x}(\Omega) = \frac{\omega_0^2(\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2) + \Omega^2 D_1}{2\pi(\omega_0^2\varepsilon^2 + \Omega^2)},$$
$$S_{\nu y}(\Omega) = \frac{\omega_0^2(\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2) + \Omega^2 D_2}{2\pi(\omega_0^2\varepsilon^2 + \Omega^2)}. \tag{20}$$

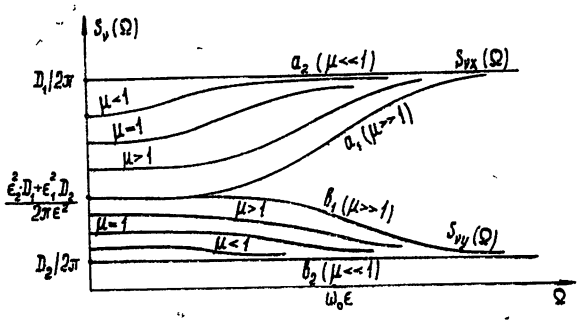


Рис. 2.

Графики этих спектральных плотностей изображены на рис. 2 для случая $D_1 > D_2$ (кривые a_1, b_1). Из этих графиков видно, что взаимная сильная синхронизация, уравнивающая спектральные плотности, сказывается лишь на частотах Ω, меньших $\omega_0\varepsilon$, а при $\Omega \gg \omega_0\varepsilon$ спектральные плотности синхронизованных автогенераторов равны соответственно $D_1/2\pi$, $D_2/2\pi$, т. е. совпадают со спектральными плотностями свободных автогенераторов (кривые a_2 и b_2):

$$S_{\nu 1}(\Omega) = D_1/2\pi, \qquad S_{\nu 2}(\Omega) = D_2/2\pi. \tag{21}$$

Таким образом, взаимная синхронизация имеет время инерции, равное $\omega_0\varepsilon)^{-1}$ и «работает» сравнительно медленно.

В рассматриваемом случае первый генератор (координата x) является захватываемым, а второй (координата y) — захватывающим. Поэтому кривые a_1 и b_1 показывают, что при сильной синхронизации медленные флуктуации частоты сильно шумящего захватываемого автогенератора уменьшаются, а флуктуации слабо шумящего захватывающего автогенератора увеличиваются. Это связано с тем, что первый генера-

тор синхронизуется вторым в то время, как во второй генератор попадают шумы от первого и несколько увеличивают его фазовые (и частотные) флуктуации.

3. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

1. Рассматривая сильную синхронизацию ($\mu \gg 1$), мы фактически попутно рассмотрели и слабую синхронизацию ($\mu \ll 1$), при которой в уравнениях (12) можно пренебречь нелинейными членами. Слабой синхронизации соответствуют уравнения свободных автогенераторов:

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = -\frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 1}(t), \qquad \frac{d\varphi_y}{dt} = -\frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 2}(t).$$

Для этого случая мы получили формулы (17), (18), (21), описывающие дисперсии фаз, спектральные плотности частоты и ширину спектральных линий автогенераторов.

Несравненно больший интерес представляет отыскание характеристик $\langle\theta^2\rangle$, $S_{\nu x}(\Omega)$, $S_{\nu y}(\Omega)$, $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$ для случая произвольной синхронизации, когда μ может принимать любое значение. Однако даже приближенный анализ этого случая достаточно сложен и громоздок. Не входя в его подробности (это будет сделано в другом месте), приведем лишь его результаты. Отметим только, что этот анализ, сводящийся к исследованию статистических характеристик решения нелинейных уравнений (12), был проведен методом, близким к методу Стратоновича [11].

2. Исследуя дисперсию разности фаз автогенераторов, можно обнаружить, что для достаточно больших времен она всегда подчиняется диффузионному закону независимо от значения μ:

$$\langle\theta^2\rangle = D_\infty t, \quad D_\infty = \frac{D_1 + D_2}{I_0^2(\mu)}, \tag{22}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя. Это обстоятельство означает, что условие $\langle\theta^2\rangle \ll 1$ при $\mu \gg 1$, вообще говоря, неверно, если не ограничиваться конечными промежутками времени. Эта ситуация полностью аналогична той, которая имеет место для синхронизации генератора монохроматическим сигналом (см. [11]).

Полагая $\mu \gg 1$, получим

$$D_\infty = 4\pi\omega_0\varepsilon\, e^{-2\mu}.$$

Это значит, что при сильной синхронизации коэффициент диффузии является чрезвычайно малой величиной; тогда, ограничиваясь временами T, для которых

$$T \ll \frac{1}{4\pi\omega_0\varepsilon} e^{2\mu},$$

мы действительно получим, что условие $\langle\theta^2\rangle \ll 1$ справедливо для всех $t \leqslant T$ и уравнения (12) могут быть линеаризованы.

Если рассматривать случай слабой синхронизации ($\mu \ll 1$), то из (22), как и должно быть, следует, что

$$\langle\theta^2\rangle = (D_1 + D_2)\, t,$$

т. е., что фазы автогенераторов независимы между собой.

Таким образом, поведение фаз в случае произвольного μ можно описать следующим образом. Представим колебания автогенераторов векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (рис. 3). Можно показать, что фазы векторов φ_x и φ_y

при любом μ подчиняются диффузионному закону (с коэффициентами, зависящими от μ) и, тем самым, могут сильно изменяться с течением времени. Разность фаз θ ведет себя по-разному при разных значениях μ. Если $\mu \gg 1$, то дисперсия фазы θ мала, и вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вращаются фактически как одно целое — это случай сильной синхронизации генераторов. При уменьшении μ связь между векторами становится все слабее и слабее, и они могут далеко уходить друг от друга. Если, наконец, $\mu \ll 1$, то вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вращаются фактически независимо друг от друга — случай слабой синхронизации.

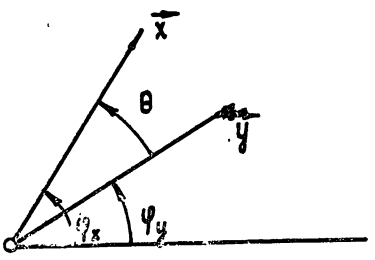


Рис. 3.

3. Рассматривая спектральные плотности флуктуаций частоты генераторов для произвольного μ, можно получить следующие приближенные значения $S_{\nu x}(\Omega)$ и $S_{\nu y}(\Omega)$:

$$S_{\nu x}(\Omega) = \langle \omega_0^2\{D_1[\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu)+\varepsilon_2^2[1-I_0^{-2}(\mu)]\,] + D_2\varepsilon_1^2[1 - I_0^{-2}(\mu)]\,\} + \\ + D_1\Omega^2 \rangle\, [2\pi(\omega_0^2\varepsilon^2 + \Omega^2)]^{-1},$$

$$S_{\nu y}(\Omega) = \langle \omega_0^2\,\{D_2[\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_1^2\,[1-I_0^{-2}(\mu)]\,] + D_1\varepsilon_2^2[1-I_0^{-2}(\mu)]\} + \\ + D_2\Omega^2 \rangle\, [2\pi(\omega_0^2\varepsilon^2 + \Omega^2)]^{-1}. \qquad (23)$$

Графики этих спектральных плотностей для $D_1 > D_2$ (D_1 соответствует захватываемому, а D_2 — захватывающему генератору) представлены на рис. 2 кривыми, расположенными между a_1a_2 и b_1b_2. При $\mu \gg 1$ и $\mu \ll 1$ формулы (23), как и должно быть, переходят соответственно в (20) и (21).

Из этих графиков видно, как влияет постепенное увеличение синхронизации между генераторами (увеличение μ) на ход спектральных плотностей флуктуаций частоты генераторов. Это влияние, во-первых, имеет место только на частотах, меньших или сравнимых с $\omega_0\varepsilon$ — полосой взаимной синхронизации (которая также зависит от μ при постоянных D_1 и D_2), во-вторых, приводит к тому, что в общем случае спектральные плотности флуктуаций частоты обоих генераторов различны.

Поскольку для спектра естественных флуктуаций частоты ширина спектральной линии генератора определяется значениями $S_\nu(\Omega)$ в точке $\Omega = 0$ (см., например, [12]), то из (23) нетрудно получить следующие приближенные значения для ширины спектральной линии каждого генератора:

$$\Delta\Omega_x = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\{[\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_2^2\,[1-I_0^{-2}(\mu)]\,]\,\Delta\Omega_1 + \varepsilon_1^2\,[1-I_0^{-2}(\mu)]\,\Delta\Omega_2\},$$

$$\Delta\Omega_y = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\{[\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_1^2[1-I_0^{-2}(\mu)]\,]\,\Delta\Omega_2 + \varepsilon_2^2[1-I_0^{-2}(\mu)]\,\Delta\Omega_1\}. \qquad (24)$$

Отсюда следует прежде всего, что в случае произвольного μ $\Delta\Omega_x$ и $\Delta\Omega_y$ различны и лишь в случае сильной синхронизации ($\mu \gg 1$) становятся одинаковыми. На рис. 4 показаны (для $D_1 > D_2$) зависимости ширины спектральных линий от степени взаимной синхронизации (формула (24)). В предельных случаях (24), как и должно быть, переходит в (18) и (19).

4. Рассмотрим, наконец, случай односторонней синхронизации, когда лишь второй (захватывающий) генератор действует на первый (захватываемый); при этом $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$. Этот случай является наиболее обычным при реальной синхронизации одного генератора другим.

Согласно (23), спектральные плотности флуктуаций частоты имеют вид

$$S_{\nu x}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_1^2 [D_1 I_0^{-2}(\mu) + D_2[1 - I_0^{-2}(\mu)]] + D_1\Omega^2}{2\pi(\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2)}, \tag{25}$$

$$S_{\nu y}(\Omega) = \frac{D_2}{2\pi}.$$

Эти зависимости показаны на рис. 5 (для $D_1 > D_2$).

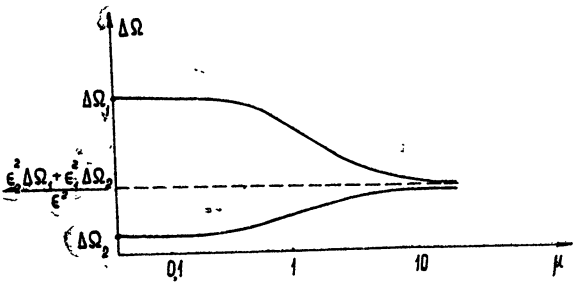


Рис. 4.

Как и должно быть, спектр флуктуаций частоты второго генератора не зависит от наличия синхронизации, в то время как спектр флуктуаций частоты первого генератора существенно зависит от степени синхронизации. Если синхронизация слабая, то синхронизуемый генератор почти не изменяет своих флуктуаций частоты (флуктуаций фазы) и, следовательно, сохраняет прежнее значение ширины спектральной линии. При увеличении степени синхронизации $S_{\nu x}(0)$ начинает уменьшаться и при сильной синхронизации, когда $\mu \gg 1$, $S_{\nu x}(0) = S_{\nu y}(0)$, второй генератор полностью навязывает первому свои (медленные) флуктуации частоты. Наличие шумов первого генератора приводит лишь к достаточно быстрым (несинхронизуемым) флуктуациям частоты.

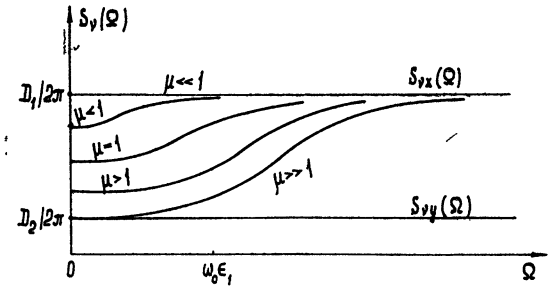


Рис. 5.

Если второй генератор является идеальным ($D_2 = 0$), т. е. дает монохроматический сигнал,

$$S_{\nu x}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 \varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \Omega^2}{\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2} \frac{D_1}{2\pi} \tag{26}$$

(см. (25)). Эта формула (где теперь $\mu = 2\omega_0\varepsilon_1/D_1$) дает, таким образом, зависимость спектра флуктуаций частоты генератора, синхронизуемого монохроматическим сигналом, от степени синхронизации. Из (26), а также из рис. 5 следует, что генератор можно считать полностью синхронизованным монохроматическим сигналом лишь при $\mu \gg 1$ (когда мощность фазоактивных шумов первого генератора много меньше мощности синхронизующего сигнала); в этом случае $S_{\nu x}(0)$ является достаточно малой величиной. Зависимость $\Delta\Omega_x$ от μ для случая односторонней синхронизации, согласно (24), имеет вид:

$$\Delta\Omega_x = \frac{\Delta\Omega_1}{I_0^2(\mu)} + [1 - I_0^{-2}(\mu)]\,\Delta\Omega_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, ЖЭТФ, **29**, 315 (1955).
2. Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника, **3**, 497 (1958).
3. И. Г. Акопян, П. С. Ланда, Радиотехника и электроника, **7**, 1285 (1962)
4. В. И. Тихонов, УФН, **83**, 665 (1964).
5. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **6**, 501 (1963)
6. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **6**, 495 (1963).
7. Р. В. Хохлов, ДАН СССР, **97**, 411 (1954).
8. Р. В Хохлов, Радиотехника и электроника, **1**, 88 (1956).
9. А. Н. Малахов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 710 (1964).
10. И. Л Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 145 (1950).
11. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов радио, М., 1961

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
26 июня 1965 г.

EFFECT OF NATURAL NOISES IN AUTO-OSCILLATOR UPON THEIR MUTUAL SYNCHRONIZATION

A. N. Malakhov

The effect has been considered of natural noises in two auto-oscillators on their mutual synchronization both in a linear and nonlinear (from the viewpoint of phase fluctuations) approximation. The phase diffusion coefficients, the frequency fluctuation spectra and spectral line width of mutual synchronized auto-oscillators have been found out.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371 : 621.391.814.2

ОБРАЗОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ УДАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАМИ

Ю. К. Богатырев

Приведены результаты теоретического и экспериментального исследования образования и развития ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным сегнетоэлектриком. Показано, что при быстром (динамическом) изменении поляризации сегнетоэлектрика существенную роль в процессе формирования ударных волн играет диссипация энергии, связанная с переполяризацией сегнетоэлектрика Рассмотрена структура стационарных ударных волн.

Большинство вопросов, связанных с образованием и развитием ударных электромагнитных волн, рассмотрено в настоящее время для систем, нелинейными элементами которых являются ферриты [1–3] и емкости $p-n$-перехода полупроводников [3, 4]. Вместе с тем значительный интерес представляет исследование ударных волн в линиях передачи с другими нелинейными материалами, например, сегнетоэлектриками, механизм поляризации которых (по крайней мере при небольших полях) существенно иной, нежели в феррите. Кроме того, такие линии перспективны с точки зрения практики, особенно в тех случаях, когда необходимо сформировать на высокоомной нагрузке большие (порядка нескольких киловольт) перепады напряжения с длительностью фронта $\sim 10^{-8} \div 10^{-9}$ *сек*. Формирующие линии с сегнетоэлектриками при этом обладают рядом преимуществ перед линиями с ферритовым заполнением, требующими мощных источников тока [3].

В настоящей работе проведено теоретическое и экспериментальное исследование образования, развития, а также структуры фронта стационарных ударных волн, распространяющихся в сегнетоэлектрической линии передачи с распределенными параметрами.

Процессы в такой линии описываются системой уравнений

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1}$$

с нелинейной связью между зарядом, погонной сегнетоэлектрической емкости Q и напряжением u (i — ток, Φ — погонный поток индукции). В общем случае уравнение связи является нелинейным функционалом $Q = Q\{i, u\}$, конкретный вид которого зависит от конструкции линии, а также механизма изменения поляризации. Наиболее простой вид уравнение связи имеет при достаточно медленных квазистатических процессах, когда значение Q однозначно определяется напряжением u (т. е. $Q = Q(u)$). Частное решение системы уравнений (1) в этом случае имеет вид простых (римановых) волн [1, 3]. Однако квазистатическая связь $Q(u)$ хорошо описывает процесс переполяризации сегнетоэлектрика лишь при скоростях, не превышающих $10^{10} \div 11^{11}$ *в·см*$^{-1}$*·сек*$^{-1}$. При более быстром изменении поля в области фронта ударной волны предположение о квазистатическом изменении поляризации

нарушается; необходимо пользоваться динамическими уравнениями связи, учитывающими релаксационные процессы в сегнетоэлектрике. Именно этот случай представляет наибольший интерес как с физической, так и с практической точки зрения.

Теория физических процессов при обратной поляризации сенетоэлектрика разработана еще не достаточно полно; существует ряд иногда противоречивых гипотез, основная часть которых изложена в работах [5–8]. Замечательно, однако, то, что несмотря на некоторую неопределенность в объяснении механизма переполяризации сегнетоэлектрика, феноменологическое описание процесса, как показали экспериментальные исследования, почти одинаково для всех предложенных моделей: поведение проекции электрического момента $\boldsymbol{P}$, отнесенного к единице объема плоского сегнетоэлектрика, на направление электрического поля $\boldsymbol{E}$ удовлетворительно описывается уравнением [5–8]

$$\frac{dP_z}{dt} = \frac{\beta}{P}(P^2 - P_z^2) f(E_z). \tag{2}$$

Здесь β — коэффициент, характеризующий особенности строения кристаллической решетки и равный $(0{,}4 \div 2{,}3)\cdot 10^7$ *сек*$^{-1}$ для различных кристаллов, $P = \text{const}$ — поляризация насыщения сегнетоэлектрика, E_z — проекция электрического поля на ось z, направленную перпендикулярно плоскости конденсатора*. Для слабых полей ($E \ll 15$ *кв·см*$^{-1}$) функция $f(E_z) = \exp(-\alpha_0/E_z)$; для сильных полей ($E > 15$ *кв·см*$^{-1}$) функция $f(E_z) = kE_z$ (k, α_0 — коэффициенты, зависящие от температуры и толщины кристалла).

Существенной особенностью уравнения (2) является то, что даже при сколь угодно медленных процессах (т. е. при стремлении скорости поляризации и величины электрического поля к нулю) оно не переходит в уравнение, определяющее однозначную квазистатическую зависимость $P_z(E_z)$ (а следовательно, $Q(u)$).

Считая поле $E_z = E$ однородным ($E = au$, a — коэффициент, зависящий от геометрии линии передачи), получим выражение для погонного заряда:

$$Q = C_0(u + 4\pi Pp/a). \tag{3}$$

Уравнения (1) и (2) с учетом связи (3) образуют систему третьего порядка. Исключая из (1)—(3) i и p, получим для u

$$\vartheta_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\pi P}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{b\exp\left[2\beta\int\limits_{-\infty}^{t} f(u)\,dt\right] - 1}{b\exp\left[2\beta\int\limits_{-\infty}^{t} f(u)\,dt\right] + 1}\right\}, \tag{4}$$

где $\vartheta_0^2 = (L_0C_0)^{-1}$, $b = (1+p_0)/(1-p_0)$, $p_0 = P_0/P$, P_0 — начальное значение величины $P(E)$.

1. ОБРАЗОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Интегрирование уравнения (4) в общем виде не представляется возможным. Поэтому особенности решения выясним для случая, когда правая часть (4), описывающая влияние сегнетоэлектрика на образование ударной волны, мала по сравнению с каждым из членов левой. Не конкретизируя, какой именно из коэффициентов является малым,

* В рассматриваемом нами случае плоского сегнетоэлектрического конденсатора $E_z = E$, $E_x = E_y = 0$.

положим, что правая часть (4) пропорциональна малому параметру μ и рассмотрим два случая, соответствующие уравнению связи (2) для электрических полей различной интенсивности.

Случай 1. Для сравнительно слабых полей имеем систему уравнений

$$\vartheta_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mu\beta (1 - p^2) \exp(-\alpha/u) \tag{5а}$$

$$(\alpha = \alpha_0/a),$$

которую исследуем методом, основанным на предположении, что искомое решение мало отличается от решения, соответствующего $\mu = 0$, и удовлетворяет уравнению первого порядка [2]:

$$\vartheta_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = \mu\varphi(z, t), \tag{6}$$

где $\varphi(z, t)$ — неизвестная функция. Интегрируя (6), нетрудно найти вид функции $\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial t}$; после этого уравнение (6) с учетом (5а) приводится к виду

$$\vartheta_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = -2\beta \frac{b \exp\left[2\beta \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(-\alpha/u)\, dt\right]}{\left\{b \exp\left[2\beta \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(-\alpha/u) dt\right] + 1\right\}^2} \exp(-\alpha/u). \tag{7}$$

Непосредственно отыскать решение (7) весьма затруднительно; поэтому исследуем его решение для таких u, которые удовлетворяют неравенству $\alpha/u \gg 1$ (т. е. $E \ll \alpha_0$, $\alpha_0 \sim 3 \div 5$ *кв·см*$^{-1}$). В этом случае $\int \exp(-\alpha/u)\, dt \to 0$, $\partial p/\partial t = 4\beta b \exp(-\alpha/u)/(1+b)^2$ и вид уравнения (7) значительно упрощается:

$$\vartheta_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2\beta b}{(1+b)^2} \exp(-\alpha/u). \tag{8}$$

Введя переменную $\eta = z - \vartheta_0 t$ и интегрируя (8), получим

$$u \exp(\alpha/u) + \alpha \int\limits_{\alpha/u}^{\infty} (e^x/x)\, dx = -\frac{2\beta b}{\vartheta_0 (1+b)^2} z + \Phi\left(t - \frac{z}{\vartheta_0}\right). \tag{9}$$

Задавая граничные условия $u(z = 0) = u_0$, окончательно имеем

$$[u_0 \exp(\alpha/u_0) - u \exp(\alpha/u)] + \alpha \int\limits_{\alpha/u_0}^{\alpha/u} (e^x/x)\, dx = 2\beta bz/\vartheta_0 (1+b)^2, \tag{10}$$

где $u_0 = u_0(t - z/\vartheta_0)$ — решение, соответствующее $\mu = 0$, т. е. линии без сегнетоэлектрика.

Можно показать, что производная левой части по u больше нуля, т. е. при $z > 0$ величина u уменьшается (волна затухает).

Случай 2. Для больших полей (больших u), как уже отмечалось, функция $f(u) = aku$. Решение уравнения (4) аналогичным методом приводит к формулам

$$\exp[2\beta b\psi/(1+b)] - \exp[-2\beta\psi/(1+b)] = \{\exp[2\beta b\psi_0/(1+b)] - \\ - \exp[-2\beta\psi_0/(1+b)]\} \exp[-\mu 8\pi\beta bPz/a(1+b)]; \tag{11}$$

$$\frac{u(z,t)}{u_0(t)} = \frac{b\exp(2\beta\psi_0)-1}{\exp(2\beta\psi_0)-1} \frac{\exp(2\beta\psi)-1}{b\exp(2\beta\psi)-1}, \tag{12}$$

где $\psi_0 = \psi(0, t) = \int_{-\infty}^{t} u_0 dt$, $u_0 = u(0, t)$.

Формулы (11) и (12) сводят отыскание напряжения бегущей волны к алгебраическим операциям и аналогичны выражениям, полученным и исследованным в работе [2]. Поэтому проводить здесь анализ решений (11) и (12) вряд ли целесообразно. Отметим лишь, что образование и развитие «разрыва» (ударной волны) происходит в рассматриваемом случае благодаря нелинейному процессу диссипации энергии на фронте волны и существенно отлично от эволюции простых волн.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Интегрирование уравнения (4) в общем виде может быть проведено для нахождения его стационарного решения вида $u = u(z - \vartheta_p t)$, представляющего собой волну напряжения, распространяющуюся с постоянной скоростью ϑ_p. Нетрудно видеть, что любые постоянные $u = \text{const}$, $p = \text{const}$ являются решениями системы (4); поэтому будем искать стационарные решения (стационарные ударные волны), удовлетворяющие следующим граничным условиям:

при $t \to -\infty$

$$p \to p_0, \quad u \to V_0 = 0, \quad dp/dt = du/dt \to 0; \tag{13}$$

при $t \to +\infty$

$$p \to 1, \quad u \to V, \quad dp/dt = du/dt \to 0. \tag{13а}$$

Для стационарных волн уравнение (4) приводится к виду

$$\left(\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_p^2} - 1\right)\frac{du}{dt} = \frac{4\pi P}{a}\frac{d}{dt}\left\{\frac{b\exp\left[2\beta\int_{-\infty}^{t} f(u)dt\right]-1}{b\exp\left[2\beta\int_{-\infty}^{t} f(u)dt\right]+1}\right\}, \tag{14}$$

где, согласно граничным условиям (14), $\vartheta_p^2/\vartheta_0^2 = 1+4\pi P(1-p_0)/aV$.

Для сравнительно слабых полей $f(u)=\exp(-\alpha/u)$ решение (14) с учетом граничных условий (13) находится в неявном виде:

$$\exp\left[-\frac{2\alpha}{(1+p_0)V}\right]\mathrm{Ei}\left[\frac{\alpha}{V}\left(\frac{V}{u}+\frac{1-p_0}{1+p_0}\right)\right] - \mathrm{Ei}\left[\frac{\alpha}{V}\left(\frac{V}{u}-1\right)\right] = \\ = 2\beta t\exp(-\alpha/u), \tag{15}$$

где $\mathrm{Ei}(...)$ — интегральная показательная функция.

В случае сильных полей $f(u) = ku$ решение (13) следующее:

$$\frac{u}{V}(1-p_0)\left(1+p_0+\frac{1-p_0}{V}u\right)^{(p_0-1)/2}\left(1-p_0-\frac{1-p_0}{V}u\right)^{-(p_0+1)/2} = \\ = \exp[\beta k(1+p_0)Vt]. \tag{16}$$

В частности, при $p_0 = 0$

$$u = V \exp(\beta kt)\,[1 + \exp(2\beta kt)]^{-1/2}. \qquad (16а)$$

Нетрудно видеть, что форма волны напряжения (следовательно, и форма волны тока i) в линии передачи с сегнетоэлектриком представляет функцию, монотонно изменяющуюся от $u = 0$ при $t \to -\infty$ до $u = V$ при $t \to +\infty$. Длительность фронта волны определяется свойствами сегнетоэлектрика, характеризуемыми параметрами β, α, состоянием его начальной поляризации p_0 и амплитудой напряжения V, установившейся далеко за фронтом волны.

Особенностью структуры стационарной ударной волны в линии передачи с сегнетоэлектриком по сравнению, например, со структурой ударной волны в линии с ферритом (см. [2]) является то, что в первой линии длительность начального участка фронта ударной волны (при одинаковых амплитудах волн) значительно больше, чем во второй. Это объясняется медленным движением стенок доменов в сегнетоэлектрике при обратной поляризации его сравнительно малым полем ударной волны (т. е. большей по сравнению с ферритом инерционностью).

Следует отметить, что уравнение связи (2) в области сравнительно слабых полей (т. е. перед фронтом ударной волны) не допускает линеаризации при малых u (все производные при $u \to 0$ стремятся к нулю). Поэтому приближенные количественные оценки ширины начального участка фронта ударной волны здесь не представляются возможным. Это обстоятельство существенно при исследовании более сложных волновых систем, например, дискретных линий передачи с сегнетоэлектрическими конденсаторами. Процессы в таких линиях описываются нелинейными дифференциально-разностными уравнениями и приближенные оценки длительности фронта ударной волны по линеаризованным уравнениям здесь являются, пожалуй, единственно возможными [9].

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальное исследование процесса образования и развития ударных волн проводилось на линиях, представляющих цепочки LC-звеньев с сегнетокерамическими конденсаторами марки ВК-2, ВК-2-0, ВК-3. На рис. 1 приведены графики зависимости длительности фронта $\tau_{фр}$ (измеренной на уровне 0,1—0,9 от амплитуды волны напряжения $V_н$, распространяющейся в линии*) от порядкового номера звена линии n. Видно, что в начале линии (на первых ячейках) происходит быстрое формирование ударной волны. В дальнейшем, начиная с $n \geqslant 5$, наблюдается установление конечной длительности фронта волны и тем быстрее, чем больше амплитуда волны. При этом постоянная величина, к которой стремится длительность

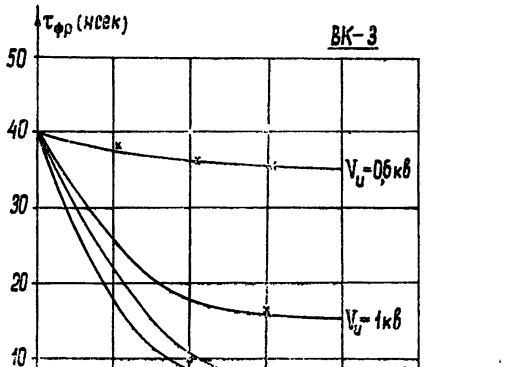


Рис. 1.

* $V_н = 1$ *кв* соответствует полю $E \sim 20$ *кв* · *см*$^{-1}$.

фронта $\tau_{фр}$ при малых $V_и$ (порядка 600 ÷ 1000 *в*), почти целиком определяется временем релаксации сегнетоэлектриков, так как в этом случае $\tau_{фр}$ в несколько десятков раз превышает постоянную времени ячейки $\tau_0 = (L_0C_0)^{1/2}$ и дисперсия волны, обусловленная дискретностью параметров линии, практически не сказывается. При больших амплитудах $V_и > 1500$ *в* длительность фронта импульсов на выходе линии равна приблизительно 4 *нсек* и соизмерима с $\tau_0 \simeq 1$ *нсек;* поэтому здесь установившееся значение $\tau_{фр}$ определяют как релаксационные процессы в сегнетоэлектрике, так и дисперсия линии (на последнее, в частности, указывают осцилляции, возникающие на вершине импульса; амплитуда их возрастает с увеличением $V_и$).

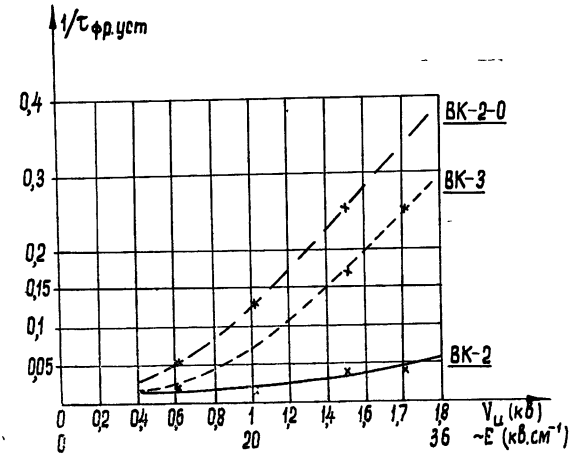


Рис. 2.

Более полно изменение длительности фронта $\tau_{фр}$ импульса на выходе линии при различных его амплитудах характеризуют графики рис. 2*.

Совмещенные осциллограммы импульса напряжения на входе в 5-ой, 10-ой, 15-ой и 20-ой ячейках линии с конденсаторами марки ВК-3 (амплитуда импульса $V_и \sim 1$ *кв*; период калибрационного сигнала равен 2 *нсек*) показаны на рис. 3. Из осциллограмм видно, что ударная волна в линии образуется сразу же на первых ячейках в виде перепада (разрыва), который развивается в дальнейшем по мере распространения импульса вдоль линии. Образование ударной волны здесь, как и в линии с ферритом, происходит благодаря сильной диссипации энергии на ее фронте (простых волн не образуется) и тем интенсивнее, чем больше амплитуда импульса. Последнее наглядно иллюстрирует осциллограмма рис. 4.

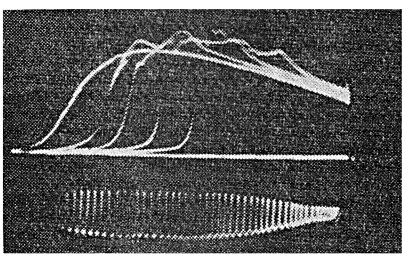


Рис. 3.

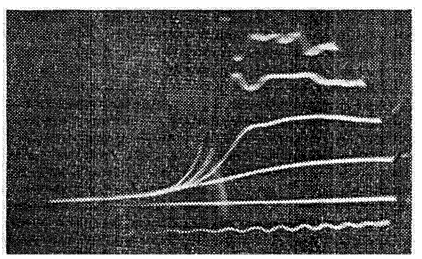


Рис. 4.

Таким образом, процесс образования и развития ударных волн в линии с сегнетоэлектриками в основном (разумеется, качественно) происходит так же, как и в линии с ферритом. Имеется, однако, интересная деталь, на которую было обращено внимание в теории, изложенной в начале работы. Было отмечено, что закон изменения напряжения на

* Аналогичные зависимости (правда, при более слабых электрических полях) приведены в работе [10].

начальном участке фронта стационарной волны (или близкой к стационарной) в линии с сегнетоэлектриками отличен от закона изменения напряжения в линии с ферритом, так как при малых электрических полях релаксационные процессы в сегнетоэлектрике, обусловленные в основном движением стенок доменов, длятся дольше, чем у ферритов (среда более вязкая). При больших полях (т. е. ближе к вершине импульса) форма ударной волны в обеих линиях качественно должна совпадать (см. (2) и (16)). Сказанное хорошо подтверждается экспериментально и наглядно иллюстрируется осциллограммами рис. 5а, б. На осциллограмме рис 5а изображен фронт импульса на оконечной нагрузке линии ($R_н = 70$ *ом*) с сегнетоэлектриком ($n = 20$), а на осциллограмме рис. 5б фронт импульса напряжения на той же нагрузке, но после линии с ферритом ($n = 20$)*.

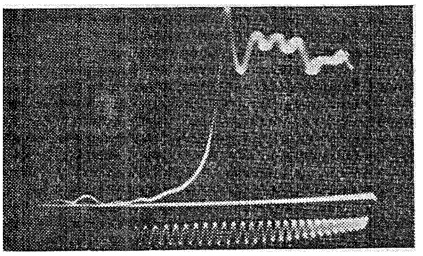


Рис. 5а.

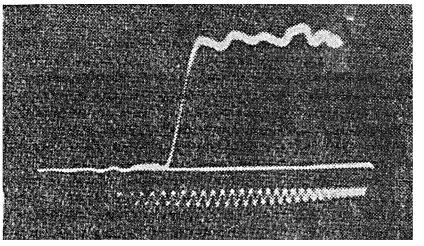


Рис. 5б.

Количественное сравнение длительности фронта ударной волны, рассчитанной по формулам (15), (16) и наблюдаемой экспериментально, не проводилось ввиду отсутствия данных о коэффициентах β, α_0 и k для исследованных сегнетоэлектриков.

В заключение автор выражает признательность А. В. Гапонову и Л. А. Островскому за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А В Гапонов, Г И. Фрейдман, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959)
2. Л. А. Островский, ЖТФ, **33**, 1080 (1963)
3. И Г. Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд Сов. радио, М., 1963
4. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, **6**, 917 (1961)
5. W. J. Merz, Phys. Rev., **95**, 960 (1954).
6. Charls F. Pulvari, W. Kuebler, J. Appl. Phys., **29**, 1315 (1958).
7. H. H. Wieder, J. Appl. Phys, **31**, 180 (1960).
8. M. E. Drougard, J. Appl. Phys., **31**, 352 (1960).
9. Ю К. Богатырев. Изв. высш уч зав —Радиофизика, **5**, 1130 (1962)
10. И. Г Катаев, А Д Литвинчук, Вопросы радиоэлектроники, сер. 6, № 1, 46 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 7 апреля 1965 г.

FORMATION AND EVOLUTION OF SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVES IN TRANSMISSION LINES WITH FERROELECTRICS

Yu. K. Bogatyryov

The results of theoretical and experimental investigation are given of electromagnetic wave formation and evolution in transmission lines with a unsaturated ferroelectric. It is shown that at a rapid (dynamic) change in ferroelectric polarization the energy dissipation connecting with ferroelectric reverse polarization plays an essential role in the process of shock wave formation. The structure of stationary shock waves has been studied.

* Период калибрационных меток 2 *нсек*.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.372.812

ИЗЛУЧЕНИЕ ИЗ РАСКРЫВА КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА С БЕСКОНЕЧНЫМ ФЛАНЦЕМ

Б. А. Мишустин

Найден коэффициент отражения волны H_{11} в круглом волноводе при излучении из раскрыва волновода с бесконечным фланцем. Расчет проведен для различных значений диэлектрической проницаемости среды за раскрывом, отличной в общем случае от диэлектрической проницаемости внутри волновода.

Теоретическое исследование излучения из раскрыва волновода связано с решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно напряженности электрического поля на раскрыве. Решение такого уравнения является сложной математической задачей, но некоторые параметры искомого электромагнитного поля, зависящие от решения, можно приближенно определить, не решая уравнения. Метод расчета, предложенный Левиным и Швингером [1], заключается в стационарном представлении этих параметров относительно решения интегрального уравнения, и достаточно точные результаты получаются уже при очень грубых приближениях к решению интегрального уравнения. В настоящей работе определяется коэффициент отражения волны типа H_{11} от раскрыва круглого волновода с бесконечным проводящим фланцем на основе стационарного представления эквивалентной проводимости раскрыва для этой волны.

Задача определения коэффициента отражения возникает при расчете антенн типа открытых отрезков волновода. Знание коэффициента отражения для различных параметров внешней по отношению к волноводу среды позволяет получить простой способ измерения параметров среды по распределению поля внутри волновода.

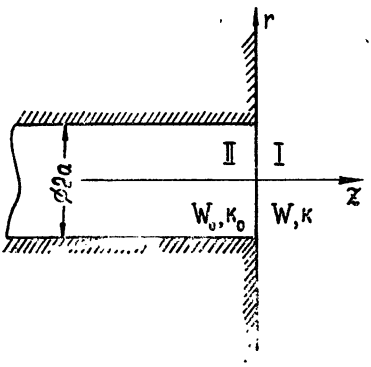


Рис. 1. Круглый волновод с фланцем.

Составим интегральное уравнение относительно тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля на раскрыве волновода. Пусть $E_t(r, \varphi)$ — искомое распределение напряженности на раскрыве в цилиндрической системе координат (рис. 1). Интегральное уравнение относительно E_t получается из условия непрерывности напряженности магнитного поля на раскрыве волновода.

Электромагнитное поле во внешней области I (рис. 1) удовлетворяет граничному условию

$$[l_z \times E^{\mathrm{I}}(r, \varphi, 0)] = \begin{cases} 0 & (r > a) \\ [l_z \times E_t(r, \varphi)] & (r < a) \end{cases} \qquad (1)$$

и может быть рассчитано как поле излучения листка магнитного тока

$$\boldsymbol{I}^{\text{м}}(r, \varphi) = -[\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{E}_t(r, \varphi)] \tag{2}$$

над бесконечной металлической плоскостью $z = 0$. (В формулах (1) и (2) $\boldsymbol{i}_z$ — орт оси z.) Используя принцип зеркального изображения и функцию Грина для свободного пространства, нетрудно найти поле тока $\boldsymbol{I}^{\text{м}}$. Запишем выражение для напряженности магнитного поля в области I:

$$\boldsymbol{H}^{\text{I}}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi j\omega\mu}(k^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_0^a \int_0^{2\pi} \boldsymbol{I}^{\text{м}}(\rho, \psi) \frac{e^{-jkR}}{R} \rho\, d\rho\, d\psi,$$
$$R = [r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi) + z^2]^{1/2}, \quad k = 2\pi/\lambda. \tag{3}$$

Электромагнитное поле внутри волновода (в области II; см. рис. 1) можно представить в виде суперпозиции собственных волн:

$$\boldsymbol{E}^{\text{II}} = \boldsymbol{E}_p + \gamma_{-p}\boldsymbol{E}_{-p} + \sum_s \gamma_{-s}\boldsymbol{E}_{-s}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}^{\text{II}} = \boldsymbol{H}_p + \gamma_{-p}\boldsymbol{H}_{-p} + \sum_s \gamma_{-s}\boldsymbol{H}_{-s}. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{E}_p$, $\boldsymbol{H}_p$ и $\boldsymbol{E}_{-p}$, $\boldsymbol{H}_{-p}$ — волны типа H_{11}, распространяющиеся соответственно в положительном и отрицательном направлении координаты z, а $\boldsymbol{E}_{-s}$, $\boldsymbol{H}_{-s}$ — высшие типы волн. Собственные волны в волноводе являются ортогональными, и для каждого типа волны можно ввести нормировку [2]:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} [\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_q]\, \boldsymbol{i}_z r dr d\varphi = \begin{cases} 0 & (s \neq q) \\ N_s & (s = q) \end{cases}. \tag{6}$$

Значения коэффициентов γ_{-p} и γ_{-s} определяются из граничного условия для напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}^{\text{II}}$ на раскрыве волновода:

$$[\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{E}^{\text{II}}(r, \varphi, 0)] = -\boldsymbol{I}^{\text{м}}(r, \varphi). \tag{7}$$

Собственные волны в волноводе, соответствующие индексам p и $-p$, всегда можно нормировать таким образом, что будут выполнены следующие равенства:

$$[\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{E}_p(r, \varphi, 0)] = [\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{E}_{-p}(r, \varphi, 0)], \tag{8}$$

$$[\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{H}_p(r, \varphi, 0)] = -[\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{H}_{-p}(r, \varphi, 0)]. \tag{9}$$

Умножая (4) скалярно на вектор $[\boldsymbol{H}_p \times \boldsymbol{i}_z]$ и интегрируя по поперечному сечению волновода, получаем, учитывая (6), (7) и (8):

$$1 + \gamma_{-p} = -\frac{1}{N_p} \int_0^a \int_0^{2\pi} \boldsymbol{I}^{\text{м}}(r, \varphi)\, \boldsymbol{H}_p(r, \varphi, 0)\, r dr d\varphi. \tag{10}$$

Аналогичная формула получается для коэффициентов γ_{-s}:

$$\gamma_{-s} = -\frac{1}{N_{-s}} \int_0^a \int_0^{2\pi} \boldsymbol{I}^{\text{м}}(r, \varphi)\, \boldsymbol{H}_{-s}(r, \varphi, 0)\, r\, dr\, d\varphi. \tag{11}$$

Если подставить значения γ_{-p} и γ_{-s} в равенство (5), получим выражения для напряженности магнитного поля $H^{II}(r, \varphi, z)$ внутри волновода. Приравнивая касательные раскрыву компоненты $\boldsymbol{H}_t^{I}$ и $\boldsymbol{H}_t^{II}$, получим интегральное уравнение относительно тока $I^{м}$,

$$\left[\boldsymbol{i}_z \times \left\{\frac{1}{2\pi j \omega\mu}(k^2+\text{grad div})\int_0^a\int_0^{2\pi} I^{м}(\rho, \psi)\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\rho\, d\rho\, d\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum \boldsymbol{H}_{-s}(r, \varphi, 0)\frac{1}{N_{-s}}\int_0^a\int_0^{2\pi} I^{м}(\rho, \psi)\,\boldsymbol{H}_{-s}(\rho, \psi, 0)\,\rho\, d\rho\, d\psi\right\}\right] - \tag{12}$$

$$-(1-\gamma_{-p})\,[\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{H}_p(r, \varphi, 0)] = 0,$$

$$R_0 = [r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi)]^{1/2}.$$

Касательная к раскрыву составляющая вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}_t(r, \varphi)$ взаимно однозначно связана с магнитным током $\boldsymbol{I}^{м}(r, \varphi)$:

$$\boldsymbol{I}^{м} = -[\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{E}_t], \quad \boldsymbol{E}_t = [\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{I}^{м}]. \tag{13}$$

Поэтому мы будем считать эти величины эквивалентными, и в тех выражениях, где будет участвовать магнитный ток, везде следует подразумевать вектор $\boldsymbol{E}_t$. В частности, интегральное уравнение для тока (12) также представляет собой уравнение относительно напряженности $\boldsymbol{E}_t$ на раскрыве волновода.

Интегральное уравнение (12) дает возможность получить для величины

$$(1-\gamma_{-p})(1+\gamma_{-p})^{-1} = Y$$

выражение, стационарное относительно вариаций тока $\boldsymbol{I}^{м}(r, \varphi)$. Руководствуясь общими принципами стационарных представлений [3], имеем

$$Y = \frac{1-\gamma_{-p}}{1+\gamma_{-p}} = \left[\frac{1}{N_p}\int_0^a\int_0^{2\pi} I^{м}(r, \varphi)\,\boldsymbol{H}_p(r, \varphi, 0)\,r\,dr d\varphi\right]^{-2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\pi j\omega\mu}\int_0^a\int_0^{2\pi} I^{м}(r, \varphi)\left[(k^2+\text{grad div})\int_0^a\int_0^{2\pi} I^{м}(\rho, \psi)\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\rho\, d\rho\, d\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_s \boldsymbol{H}_{-s}(r, \varphi, 0)\frac{1}{N_{-s}}\int_0^a\int_0^{2\pi} I^{м}(\rho, \psi)\,\boldsymbol{H}_{-s}(\rho, \psi, 0)\,\rho\, d\rho\, d\psi\right] r\, dr\, d\varphi\right\}. \tag{14}$$

Если нам известен магнитный ток $\boldsymbol{I}^{м}$, формула (14) позволяет вычислить точное значение Y — эквивалентной проводимости раскрыва. Благодаря стационарности выражение (14) является наиболее точной формулой для расчета Y при использовании приближенных значений $\boldsymbol{I}^{м}$. В качестве первого приближения удобно использовать распределение магнитного тока, соответствующее напряженности электрического поля волны H_{11}:

$$I_r^{м}(r, \varphi) = J_1'(\mu_1 r)\cos\varphi,$$

$$I_\varphi^{м}(r, \varphi) = -\frac{1}{\mu_1 r}J_1(\mu_1 r)\sin\varphi, \tag{15}$$

где μ_1 — первый корень уравнения $J_1'(\mu\, a) = 0$. С целью получить более точные значения Y вместо (15) можно попытаться использовать более сложное выражение, учитывающее высшие типы волн, например,

$$I_r^{\text{м}}(r, \varphi) = \left[J_1'(\mu_1 r) + B_1 J_1'(\mu_2 r) + B_2 \frac{1}{\lambda_1 r} J_1(\lambda_1 r) \right] \cos\varphi,$$

$$I_\varphi^{\text{м}}(r, \varphi) = -\left[\frac{1}{\mu_1 r} J_1(\mu_1 r) + B_1 \frac{1}{\mu_2 r} J_1(\mu_2 r) + B_2 J_1'(\lambda_1 r) \right] \sin\varphi$$

(λ_1 — первый корень уравнения $J_1(\lambda\, a) = 0$). Постоянные B_1 и B_2 в этом выражении определяются из условия стационарности, которое в данном случае формулируется в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial B_2} = 0.$$

Однако формула для расчета Y при сложной аппроксимации тока $\boldsymbol{I}^{\text{м}}$ получается очень громоздкой.

Перейдем к вычислению эквивалентной проводимости раскрыва Y, определив магнитный ток $\boldsymbol{I}^{\text{м}}(r, \varphi)$ равенствами (15).

Электромагнитное поле волны типа H_{11} имеет при $z = 0$ компоненты следующего вида:

$$E_r = \frac{1}{\mu_1 r} J_1(\mu_1 r) \sin\varphi, \quad E_\varphi = J_1'(\mu_1 r) \cos\varphi,$$

$$H_r = -\frac{1}{W_0}\left[1 - \left(\frac{\mu_1}{k_0}\right)^2 \right]^{1/2} J_1'(\mu_1 r) \cos\varphi, \tag{16}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{W_0}\left[1 - \left(\frac{\mu_1}{k_0}\right)^2 \right]^{1/2} \frac{1}{\mu_1 r} J_1(\mu_1 r) \sin\varphi, \quad H_z = \frac{1}{W_0} J_1(\mu_1 r) \sin\varphi.$$

Здесь W_0 и k_0 — соответственно волновое сопротивление и постоянная распространения в среде, заполняющей волновод. Норма N_p в соответствии с определением (6) имеет для волны H_{11} следующее значение:

$$N_p = \frac{\pi}{2W_0}\left[1 - \left(\frac{\mu_1}{k_0}\right)^2 \right]^{1/2} \left(a^2 - \frac{1}{\mu_1^2} \right) [J_1(\mu_1 a)]^2. \tag{17}$$

Первый сомножитель в выражении (14) равен единице, а бесконечная сумма по s обращается в нуль благодаря ортогональности магнитного тока, определенного равенствами (15), каждому из векторов $\boldsymbol{H}_{-s}(r, \varphi, 0)$. Поэтому выражение для Y можно записать в таком виде:

$$Y = \frac{2j}{kWN_p} \int_0^a \int_0^{2\pi} \boldsymbol{I}^{\text{м}}(r, \varphi) \left[(k^2 + \text{grad div}) \int_0^a \int_0^{2\pi} \boldsymbol{I}^{\text{м}}(\rho, \psi) \frac{e^{-jkR_0}}{4\pi R_0} \rho\, d\rho\, d\psi \right] \times$$
$$\times\, r dr d\varphi, \tag{18}$$

где W — волновое сопротивление, соответствующее области излучения; N_p определяется формулой (17).

Для вычисления интегралов в (18) функцию e^{-jkR_0}/R_0 представим в виде разложения в ряд Фурье по азимутальным гармоникам:

$$\frac{\exp\{-jk[r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi)]^{1/2}\}}{[r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi)]^{1/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m(\varphi - \psi) \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{J_m(\varkappa r) J_m(\varkappa\rho)}{\sqrt{\varkappa^2 - k^2}} \varkappa\, d\varkappa = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) A_m \cos m(\varphi - \psi). \tag{19}$$

Внутренний двойной интеграл в (18) представляет собой векторный потенциал магнитного тока $A^{м}(r, \varphi, 0)$. С учетом разложения (19) для составляющих вектора $A^{м}(r, \varphi, 0)$ получаются следующие выражения:

$$A_r^{м} = \frac{a^2}{2}\cos\varphi\,\frac{J_1(\mu_1 a)}{\mu_1 a}\int_0^{\infty}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-k^2}}\left\{\frac{J_1(\varkappa r)\,J_1(\varkappa a)}{\varkappa^2 ar} - \frac{\mu_1^2}{\varkappa^2-\mu_1^2}J_1'(\varkappa a)J_1'(\varkappa r)\right\}d\varkappa, \tag{20}$$

$$A_\varphi^{м} = -\frac{a^2}{2}\sin\varphi\,\frac{J_1(\mu_1 a)}{\mu_1 a}\int_0^{\infty}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-k^2}}\left\{\frac{J_1(\varkappa a)}{\varkappa a}J_1'(\varkappa r) - \frac{\mu_1^2}{\varkappa^2-\mu_1^2}\frac{J_1(\varkappa r)}{\varkappa r}J_1'(\varkappa a)\right\}d\varkappa. \tag{21}$$

Подставив в (18) эти выражения и выполнив векторные операции, получаем после интегрирования по r и φ

$$Y = 2j\frac{W_0}{Wk}\mu_1^2\left[1-\left(\frac{\mu_1}{k_0}\right)^2\right]^{-1/2}\frac{1}{(a^2\mu_1^2-1)}\left\{\frac{k^2}{\mu_1^2}\int_0^{\infty}\frac{[J_1(\varkappa a)]^2}{\varkappa\sqrt{\varkappa^2-k^2}}\,d\varkappa - \right.$$
$$\left. - (\mu_1 a)^2\int_0^{\infty}\frac{\varkappa\sqrt{\varkappa^2-k^2}}{(\varkappa^2-\mu_1^2)^2}\left[J_1'(\varkappa a)\right]^2 d\varkappa\right\}. \tag{22}$$

Если величину $W_0\left[1-(\mu_1/k_0)^2\right]^{-1/2}$ рассматривать как волновое сопротивление волновода, соответствующее волне типа H_{11}, то проводимость

$$Y_{вх} = \frac{Y}{W_0}\left[1-\left(\frac{\mu_1}{k_0}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{2j}{W(a^2\mu_1^2-1)}\left\{ka\int_0^{\infty}\frac{[J_1(\varkappa a)]^2}{\varkappa a\sqrt{\varkappa^2-k^2}}\,d\varkappa - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{ka}\int_0^{\infty}\varkappa a^3\sqrt{\varkappa^2-k^2}\left[\left(\frac{\varkappa}{\mu_1}\right)^2-1\right]^{-2}\left[J_1'(\varkappa a)\right]^2 d\varkappa\right\} \tag{23}$$

представляет собой проводимость нагрузки волновода, эквивалентной излучающему раскрыву.

Первый из интегралов в выражении (23) удается представить в относительно простом виде с помощью функции Бесселя и функции Струве:

$$ka\int_0^{\infty}\frac{[J_1(\varkappa a)]^2}{\varkappa a\sqrt{\varkappa^2-k^2}}\,d\varkappa = \frac{S_1(2ka)}{2ka} - j\left[\frac{1}{2} - \frac{J_1(2ka)}{2ka}\right] = D_1(ka). \tag{24}$$

Для вычисления второго интеграла в (23) приходится обратиться к методам приближенного интегрирования. Существенную трудность для численного интегрирования представляет осциллирующий характер подынтегральной функции. Поэтому имеет смысл преобразовать путь интегрирования, рассматривая $\varkappa$ как комплексную переменную таким образом, чтобы на новом пути интегрирования подынтегральная функция оказалась монотонной.

Прежде всего перейдем к интегрированию в бесконечных пределах, воспользовавшись следующими соотношениями между цилиндрическими функциями:

$$J_1'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}H_1^{(1)}(x) + \frac{d}{dx}H_1^{(2)}(x)\right],$$

$$\frac{d}{dx}H_1^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}H_1^{(1)}(xe^{i\pi}),$$

$H_1^{(1)}(x)$ и $H_1^{(2)}(x)$ — функции Ганкеля соответственно первого и второго рода. Для рассматриваемого интеграла получаем

$$\frac{1}{ka}\int_0^\infty \varkappa a^3\sqrt{\varkappa^2-k^2}\left[\left(\frac{\varkappa}{\mu_1}\right)^2-1\right]^{-2}[J_1'(\varkappa a)]^2\,d\varkappa = \tag{25}$$

$$= \frac{1}{2ka}\int_{C_1}\varkappa a^2\sqrt{\varkappa^2-k^2}\left[\left(\frac{\varkappa}{\mu_1}\right)^2-1\right]^{-2}\left[\frac{d}{d\varkappa}H_1^{(1)}(\varkappa a)\right]J_1'(\varkappa a)\,d\varkappa = D_2(ka).$$

Взаимное расположение пути интегрирования C_1 и особенностей подынтегральной функции показано на рис. 2.

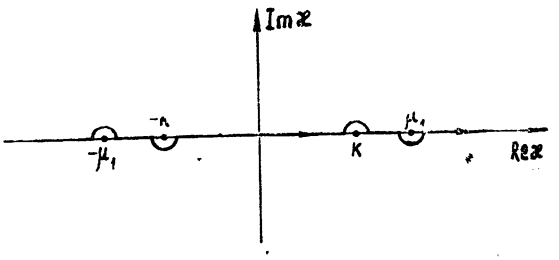


Рис. 2. Путь интегрирования C_1 в плоскости комплексного переменного $\varkappa$.

Контур C_1 можно дополнить полуокружностью бесконечного радиуса в верхней полуплоскости комплексного переменного $\varkappa$. Интеграл по этой полуокружности равен нулю в силу такой оценки:

$$\varkappa\sqrt{\varkappa^2-k^2}\left[\left(\frac{\varkappa}{\mu_1}\right)^2-1\right]^{-2}J_1'(\varkappa a)\frac{d}{d\varkappa}H_1^{(1)}(\varkappa a) = O\left(\frac{1}{\varkappa^3}\right)$$

при $|\varkappa| \to \infty$, $\operatorname{Im}\varkappa > 0$.

Внутри замкнутого контура интегрирования подынтегральная функция имеет полюс при $\varkappa = \mu_1$ и точку ветвления при $\varkappa = -k$ (рис. 2). Преобразуем контур интегрирования таким образом, чтобы он проходил по двум сторонам разреза, соответствующего точке ветвления, и охватывал полюс (рис. 3). Вычислив интеграл вокруг полюса и заменив должным образом переменную интегрирования на остальной части контура C_2, получаем

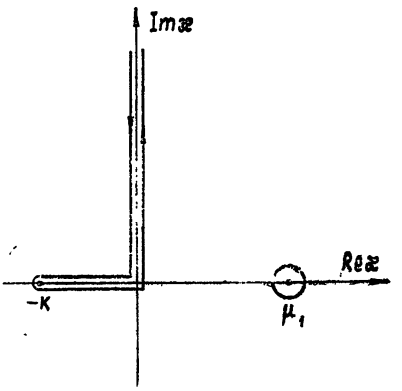


Рис. 3. Преобразованный контур интегрирования C_2.

$$D_2 = \frac{2}{\pi ka}\int_0^{\infty} t\sqrt{t^2+(ka)^2}\left[\left(\frac{t}{\mu_1 a}\right)^2+1\right]^{-2} I_1'(t)\,K_1'(t)\,dt + \\ + \frac{j}{ka}\int_0^{ka} t\sqrt{(ka)^2-t^2}\left[\left(\frac{t}{\mu_1 a}\right)^2-1\right]^{-2} J_1'(t)\left[\frac{d}{dt}H_1^{(2)}(t)\right]dt + \\ + \frac{\pi}{4}\left[(\mu_1 a)^3-\mu_1 a\right]\left[\left(\frac{\mu_1}{k}\right)^2-1\right]^{1/2} J_1(\mu_1 a)\,N_1'(\mu_1 a)\,h(\mu_1 a-ka) \qquad (26)$$

($I(t)$ и $K(t)$ — модифицированные цилиндрические функции, h — функция Хевисайда). Второй интеграл вычисляется в смысле главного значения.

Формула (26) справедлива только при вещественных значениях ka. В противном случае третье слагаемое более сложным образом зависит от соотношения между $\mu_1 a$ и ka, и необходимо обратиться к исходному выражению (25).

Проводимость $Y_{вх}$ определяется суммой $D_1 + D_2$. Подставив численное значение $\mu_1 a = 1{,}841$, получаем следующую расчетную формулу:

$$Y_{вх} = \frac{0{,}836}{W}\left\{\frac{1}{2} - \frac{J_1(2ka)}{2ka} + j\frac{S_1(2ka)}{2ka} - \frac{2j}{\pi ka}\int_0^{\infty}\frac{t\sqrt{t^2+(ka)^2}}{[0{,}295\,t^2+1]} I_1'(t)K_1'(t)\,dt + \right. \\ + \frac{1}{ka}\int_0^{ka}\frac{t\sqrt{(ka)^2-t^2}}{[0{,}295\,t^2-1]}\left[\frac{d}{dt}H_1^{(2)}(t)\right]J_1'(t)\,dt + \qquad (27) \\ \left. + \frac{j\pi}{4ka}\sqrt{3{,}389-(ka)^2}\;1{,}521\,h(1{,}841-ka)\right\}.$$

К интегралам в этом выражении уже несложно применить методы численного интегрирования и вычислить значение $Y_{вх}$ в рассматриваемом приближении с любой степенью точности.

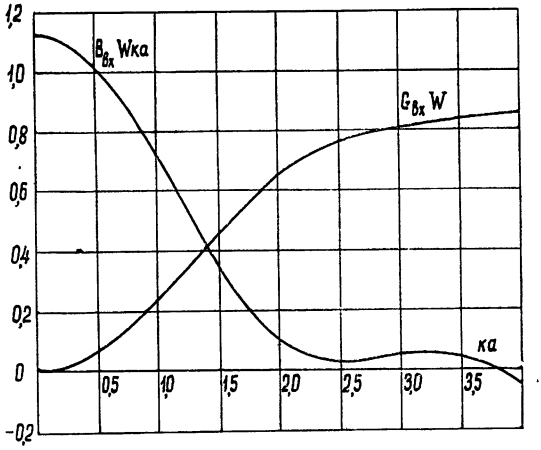


Рис. 4. Вещественная и реактивная составляющие безразмерной проводимости раскрыва $Y_{вх}W$ как функции электрического радиуса волновода ka. Реактивная составляющая представлена в виде произведения $B_{вх}Wka$ для пояснения характера особенности при $ka \to 0$.

На рис. 4 представлены результаты расчета проводимости $Y_{вх}W$ как функции электрического радиуса раскрыва ka (W и k — волновое сопротивление и постоянная распространения для внешней области). На рис. 5а, б показаны зависимости амплитуды и фазы коэффициента отражения γ_{-p} волны H_{11} от отношения диэлектрической проницаемости среды за раскрывом волновода к диэлектрической проницаемости во внутренней области.

Все расчеты коэффициента отражения и проводимости раскрыва в настоящей работе основывались на первом приближении распределения напряженности электрического поля на раскрыве (15). Попытка учесть следующие волноводные гармоники приводит, как уже говорилось, к слишком громоздким выражениям. Существует, однако, еще один вид аппроксимации напряженности на раскрыве, при котором формулы для проводимости $Y_{вх}$ получаются не многим сложнее, чем (27):

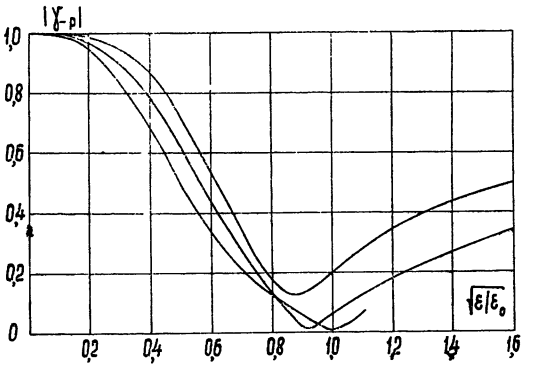


Рис. 5а. Модуль коэффициента отражения $|\gamma_{-p}|$ в зависимости от $\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$.

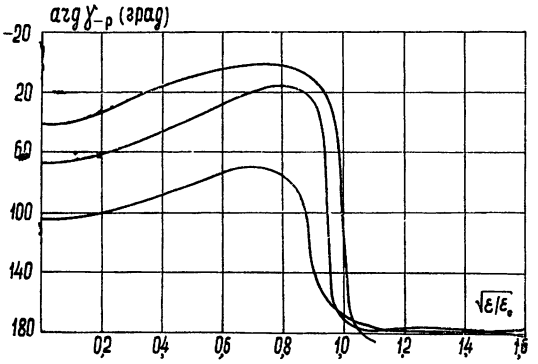


Рис. 5б. Фаза коэффициента отражения $\arg \gamma_{-p}$ в зависимости от $\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$.

$$I_r^м(r,\varphi)=\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\nu}\cos\varphi,$$

$$I_\varphi^м(r,\varphi)=-\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\nu-1}\sin\varphi. \qquad (28)$$

Недостатком такой аппроксимации является необходимость суммирования бесконечного ряда, возникающего при разложении магнитного тока (28) по волноводным гармоникам. Преимущество ее заключается в учете особенности напряженности электрического поля на краю раскрыва, если показатель степени ν выбран соответствующим образом. Например, $\nu = 2/3$ при одинаковой диэлектрической проницаемости внутри волновода и во внешней области ($\varepsilon_0 = \varepsilon$). В общем случае ν удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$(\varepsilon+\varepsilon_0)\sin\frac{3\pi\nu}{2}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\sin\frac{\pi\nu}{2}.$$

Следовательно, вид аппроксимации зависит от параметров среды во внешней области, что усложняет расчет эквивалентной проводимости $Y_{вх}$ как функции ka, и в рамках этой статьи мы ограничимся приближением (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Levin, J. Schwinger, Phys. Rev., 74, 948 (1948).
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
3. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
3 мая 1965 г.

RADIATION FROM APERTURE OF CIRCULAR WAVEGUIDE WITH INFINITE FLANGE

B. A. Mishoustin

The reflection coefficient of the wave H_{11} in a circular waveguide has been found out when radiating from the waveguide aperture with an infinite flange. The calculation has been carried out for some values of outer medium permittivity in general different from that inside the waveguide.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.396.671

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ АНТЕННАХ

А. К. Булгаков, Н. И. Бусев, В. М. Рысаков

Рассматривается переходный режим работы линейной антенны. Показано, что сопротивление излучения в нестационарном режиме (для бегущей расширяющейся волны тока) не зависит ни от формы приложенного возбуждения, ни от длины антенны, составляя в свободном пространстве 83 *ома*. Определяется длительность переходного процесса и показывается постепенный переход к излучению по стационарным законам. Выяснено, что поле бегущей расширяющейся волны на любых расстояниях имеет характер поля излучения, т. е. убывает с первой степенью расстояния. Отмечается, что переходный процесс в антенне существенно влияет на форму излученного импульса. Результаты экспериментов на реальной антенне хорошо согласуются с расчетными данными

1. Процессы нестационарного излучения электромагнитных колебаний привлекли к себе внимание только в последнее время. Однако большинство опубликованных статей [1–9] имеет теоретический характер. Исключение составляют лишь работы [10, 11], в которых переходные процессы изучались на моделях, причем в этом случае из-за трудностей моделирования не могли быть изучены существенные детали процесса.

С другой стороны, в теоретических исследованиях переходных процессов при распространении радиоволн* в качестве источника поля используется точечный диполь, т. е. по-существу не учитываются искажения импульса переходными процессами в излучающей антенне.

Все это вызвало необходимость экспериментального исследования переходных процессов при излучении и распространении радиоволн. Предварительные результаты исследования приведены в работе [13]**. Полученные к настоящему времени новые данные позволяют более детально объяснить наблюдаемые явления.

2. Как было показано Красильниковым [1,2], установление тока в тонких линейных антеннах в первом приближении протекает аналогично процессу установления тока в длинной линии. Отличие заключается в искажениях импульсов тока вблизи фронта за счет формирования цилиндрической структуры поля, что проявляется в некотором непостоянстве волнового сопротивления ρ во времени и по длине антенны.

В том же приближении поле на больших расстояниях от антенны в свободном пространстве пропорционально входному напряжению $V(t)$, пока фронт волны тока не достиг концов антенны (с точки зрения наблюдателя — в местном времени $t' = t - r/c$), а затем определяется линейной комбинацией функций, пропорциональных входному напряжению (с учетом запаздывания на время пробега вдоль антенны). Таким образом, для $\vartheta = 90°$

---

* Обзор этих работ с обширной библиографией см., например, в [12].

** Результаты экспериментального исследования переходных процессов при распространении радиоволн приведены в работе [14].

$$E(t')=-\frac{\mu c}{4\pi r\rho}\left[V(t')-(1+K)\,V\left(t'-\frac{l}{c}\right)+K(1-K_г)\,V\left(t'-\frac{2l}{c}\right)+\right.$$
$$\left.+KK_г(1+K)\,V\left(t'-\frac{3l}{c}\right)-K^2K_г\,(1-K_г)\,V\left(t'-\frac{4l}{c}\right)-\ldots\right], \quad (1)$$

где K — модуль коэффициента отражения от концов антенны, $K_г = (\rho - Z_i)(\rho + Z_i)^{-1}$ — коэффициент отражения от генератора, $V(t)$ — входное напряжение, $V(t)\neq 0$ при $t>0$, $V(t)\equiv 0$ при $t<0$,, μ — магнитная проницаемость свободного пространства, c — скорость света, Z_i — внутреннее сопротивление генератора, l — длина антенны, r, ϑ — сферические координаты, центр системы — в центре антенны.

Уменьшение амплитуды бегущей волны тока за счет излучения удобно учесть, считая коэффициент отражения от концов K меньшим единицы [1]. Если можно охарактеризовать потери мощности при излучении бегущей расширяющейся волной* некоторым сопротивлением излучения $R_{изл}$, то, как легко видеть**, в случае $R_{изл} \ll \rho$

$$K \simeq 1 - R_{изл}/\rho\,. \quad (2)$$

Таким образом, уменьшение амплитуды волны тока в e раз происходит за n пробегов волны вдоль антенны и обратно, причем

$$n = -1/\ln K. \quad (3)$$

3. Рассмотрим подробнее вопрос о сопротивлении излучения для бегущей расширяющейся волны. В этом случае в любом направлении поле будет иметь вид

$$E(t') = -\frac{\mu c}{4\pi r\rho}\,\frac{V(t')}{\sin\vartheta}\,. \quad (1a)$$

Следовательно, форма излученного импульса повторяет форму входного напряжения (и тока, если считать $\rho=\text{const}$). Мгновенные значения напряженности поля определяются соответствующими мгновенными значениями напряжения (тока) независимо от формы приложенного напряжения. Из этого можно заключить, что потеря энергии на излучение бегущей расширяющейся волной не зависит от формы приложенного напряжения, откуда следует весьма важный вывод о том, что сопротивление излучения для бегущей расширяющейся волны не зависит от формы приложенного напряжения (а также и от длины антенны). Очевидно, это утверждение справедливо с той же степенью точности, как и утверждение о независимости волнового сопротивления от времени.

Учитывая сказанное, вычислим $R_{изл}$ для импульса напряжения типа единичного толчка $V(t) = 1(t)$. Такое возбуждение особенно удобно потому, что стационарное сопротивление излучения в этом случае равно нулю и, следовательно, полученная величина будет характеризовать только излучение бегущей расширяющейся волны.

Как показано в работе [2], средний (за один цикл*** колебаний тока в антенне) поток вектора Пойнтинга

---

* Существующей до момента достижения фронтами тока концов антенны.

** Расчет ведется на один цикл процесса, определяемый пробегом фронта волны от генератора до концов антенны и обратно. Приведенное значение K учитывает потери энергии этими двумя бегущими волнами.

*** Т. е. за время пробега фронтом тока до концов и обратно до генератора.

$$\bar{P}(\vartheta)=\frac{30I^2}{\pi r^2}\left(\frac{1-|\cos\vartheta|}{\sin^2\vartheta}\right), \tag{4}$$

где I — ток на входе антенны. Осуществляя интегрирование по сфере, найдем полный поток энергии за один цикл:

$$W=120\ln 2\, I^2. \tag{5}$$

Таким образом, независимо от формы приложенного тока (напряжения) и независимо от длины антенны сопротивление излучения для бегущей расширяющейся волны

$$R_{\text{изл}}=W/I^2=120\ln 2\simeq 83\ \textit{ома}. \tag{6}$$

Незначительное отличие получившегося значения от сопротивления излучения полуволнового вибратора в стационарном случае (73 *ома*)* легко понять, если учесть, что, согласно (1), независимо от формы приложенного напряжения основная частота излученного сигнала равна собственной частоте антенны.

Знание сопротивления излучения дает возможность подсчитать (используя формулы (2) и (3)) время затухания переходного процесса в антенне только за счет излучения (в случае $Z_l=0$ или $Z_l=\infty$). Для обычных передающих заземленных антенн с $\rho\simeq 200$ *ом* ($l/a\simeq 100$) переходный процесс оканчивается через 6 периодов, для $\rho=600$ *ом* — через 15.

Число циклов n, за которое происходит затухание переходного процесса, не зависит ни от формы импульса, ни от длины антенны. Суммарный путь, который проходит фронт тока до момента затухания равен nl, т. е. определяется длиной антенны. Следовательно, можно считать, что основная потеря энергии волной происходит при ее отражении от концов антенны, а движение фронта вдоль антенны происходит практически без затухания. Таким образом, принятая ранее формально модель уменьшения амплитуды волны за счет коэффициентов отражения, по-видимому, соответствует физике процесса.

Обычно затухание переходного процесса в антенне происходит быстрее за счет неполного отражения от генератора. При согласовании генератора с антенной можно ожидать, что переходный процесс закончится за один период, если только не играет существенной роли зависимость волнового сопротивления от времени.

4. В соответствии с формулой (1) в начальные моменты времени поле пропорционально линейной комбинации функций, пропорциональных входному напряжению. В то же время в стационарном случае для коротких антенн ($l\ll\lambda/4$) поле в дальней зоне пропорционально второй производной от входного напряжения. Интересно проследить этот переход.

Будем считать, что поданный на антенну сигнал имеет достаточно крутой фронт, а затем он изменяется сравнительно медленно. Примером такого сигнала является один из наиболее интересных в практическом отношении импульс типа $1(t)e^{i\omega_0 t}$ (причем $l\ll\lambda_0/4$).

В случае согласованного генератора после первого отражения от концов антенны и достижения фронтом тока центра переходный процесс заканчивается и в выражении (1) остаются лишь три первых члена. Разлагая $V(t'-l/c)$ и $V(t'-2l/c)$ в ряд по степеням l/c и ограничиваясь членами второго порядка малости, получим**:

---

* Очевидно, что в случае вертикальной заземленной антенны сопротивление излучения, как и в стационарном случае, уменьшается в два раза.

** Как следует из (6), $K\simeq 1$; мы будем считать в первом приближении, что $K=1$.

$$E(t') = -\frac{\mu c}{4\pi r\rho} V''(t') \left(\frac{l}{c}\right)^2. \tag{7}$$

В случае воздействия типа $1(t)\, e^{i\omega_0 t}$ нетрудно убедиться, что для $t > 2l/c$ полученная формула совпадает с известной формулой для поля диполя в стационарном случае:

$$E = -i\, 60\pi \frac{I}{r} \frac{l}{\lambda_0} \tag{7а}$$

(так как $V''(t) = -\omega_0^2 V(t)$, $V(t) = I/i\omega_0 C_a$, а емкость антенны $C_a = \operatorname{tg}(2\pi l/\lambda_0)/\omega_0\rho \simeq l/c\rho$. К аналогичному результату приводит рассмотрение генератора с $Z_i \neq \rho$. Таким образом, поле излучения короткой антенны вначале пропорционально входному напряжению, а после окончания переходного процесса — второй производной от него. Следовательно, при подаче на антенну импульсного напряжения начало его будет искажено переходным процессом в антенне, причем в зависимости от внутреннего сопротивления генератора длительность этого переходного процесса может меняться от $2l/c$ до $(20 \div 30)\, l/c$. Только для сигналов с пологим фронтом, у которых за это время амплитуда практически не успевает нарасти, можно пренебречь переходным процессом в антенне и с самого начала приближенно заменять ее точечным диполем. В противном случае такая замена может привести к большим ошибкам в определении формы сигнала вблизи фронта.

5. До сих пор, так же как и во всех опубликованных работах, рассматривалось поле на больших расстояниях от антенны (в зоне «излучения»). Однако представляет интерес изучить переходные процессы и в ближней зоне антенны. Найдем связь между током в основании антенны и полем, используя векторный $\boldsymbol{A}$ и скалярный Φ потенциалы

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{I^*}{r'} dz',$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\rho^*}{r'} dz', \tag{8}$$

где ρ^* — плотность заряда. Как следует из уравнения непрерывности, в бегущей волне тока

$$|\rho^*(t'z')| = \frac{1}{c} I^*(t'z') \tag{9}$$

и интегралы в выражениях для $\boldsymbol{A}$ и Φ совпадают. Пределы интегрирования зависят от времени и координат* r, z точки наблюдения:

$$l_{1,2} = \pm \frac{(ct)^2 - r^2 - z^2}{2(ct \mp z)}. \tag{10}$$

Удобнее всего основные закономерности формирования поля выяснить на примере простейших воздействий типа единичного скачка $1(t)$ и линейно растущего напряжения $t\,1(t)$. Проведя несложные, но не-

* Вычисления производятся в цилиндрической системе координат; антенна направлена по оси z, центр системы — в центре антенны.

сколько громоздкие вычисления, можно показать, что в первом случае z-компонента поля

$$E_z = -\nabla_z \Phi - \mu \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{1(t')}{2\pi\varepsilon_0 c\sqrt{r^2+z^2}}, \tag{11}$$

а во втором

$$E_z = -\frac{t'\,1(t')}{2\pi\varepsilon_0 c\sqrt{r^2+z^2}}. \tag{11а}$$

Полученные результаты представляются несколько неожиданными в том отношении, что поле бегущей расширяющейся волны убывает с первой степенью расстояния на любых расстояниях от антенны. Иначе говоря, бегущая расширяющаяся волна возбуждает лишь поле излучения и не дает индукционных и статистических членов. Эти поля создаются после достижения (с точки зрения наблюдателя) фронтами концов антенны и окончательно сформировываются после окончания переходного процесса в антенне. Например, в случае воздействия $1(t)$ статическое поле зарядов, оставшихся на антенне после первого пробега волны в одну сторону*, будет (в плоскости $z = 0$)

$$E_{z\,\text{стат}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c}\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{\sqrt{r^2+l^2}}\right), \tag{12}$$

а волна, движущаяся к центру, создает только поле излучения, которое для случая $z = 0$ имеет вид

$$E_{z\,\text{изл}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{1}{\sqrt{r^2+l^2}}. \tag{13}$$

Рассмотрение процесса для следующих моментов времени можно провести аналогичным образом, выделяя бегущую расширяющуюся волну и оставшиеся статистические заряды. В частности, для случая $R_l = 0$ (и при пренебрежении затуханием за счет излучения) поля приведены на рис. 1а, а для случая $R_l = \rho$, когда переходный процесс заканчивается через время $2l/c$ — на рис. 1б.

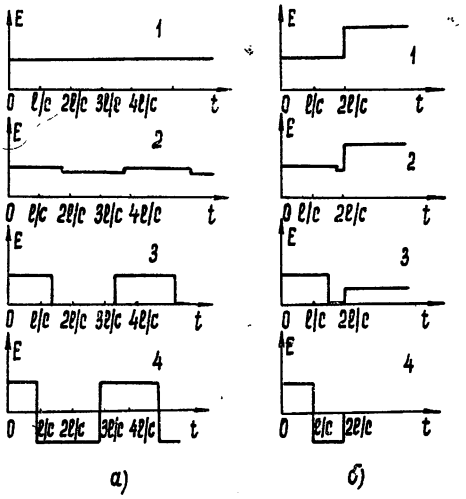
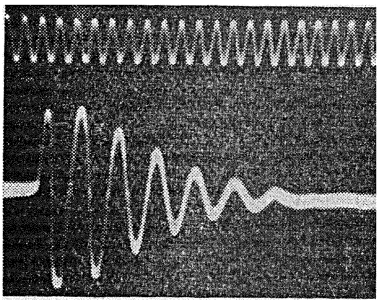


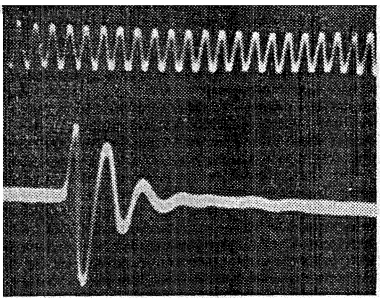
Рис. 1. Форма излученного импульса на разных расстояниях от антенны в случае генератора с ЭДС вида $-1(t)$:
1—$r=0$, 2—$r \ll l$, 3—$r \simeq l$, 4—$r \gg l$, ($а$)—для $R_l = 0$, б)—для $R_l = \rho$)

* Воздействия, отличающиеся по форме от $1(t)$, создадут в антенне бегущую (нерасширяющуюся) волну тока, которая приведет к появлению индукционного поля и поля излучения.

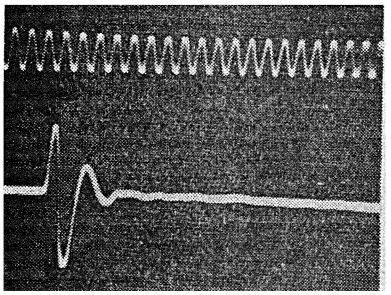
Отсутствие у бегущей расширяющейся волны индукционных и статических членов приводит к тому, что антенна конечной длины в нестационарном режиме, вообще говоря, не может быть заменена точечным диполем с эквивалентным дипольным моментом, не зависящим от расстояния. Такая замена возможна лишь в том случае, если представляют интерес только большие расстояния ($r \gg l$) или большие времена ($t' \gg l/c$).



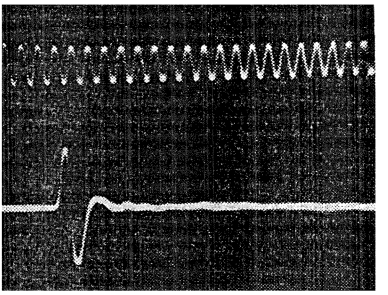
а



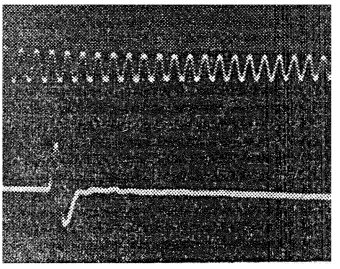
б



в



г



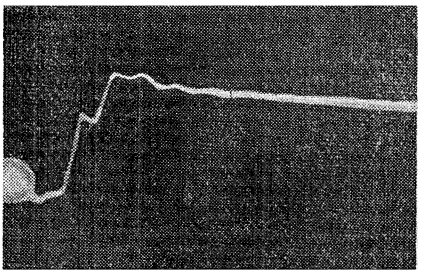
д

Рис. 2. Осциллограммы принятого импульса в дальней зоне для генератора с ЭДС вида $-1(t)$ при $R_i=0$ (*а*), $R_i=50$ *ом* (*б*), $R_i=100$ *ом* (*в*), $R_i=200$ *ом* (*г*), $R_i=380$ *ом* (*д*). На втором луче—метки времени с периодом 0,2 *мксек*.

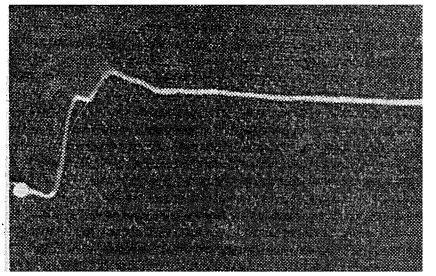
6. Были проведены специальные эксперименты по нестационарному возбуждению антенны. Результаты, полученные при напряжениях возбуждения, близких к единичному скачку с заполнением, описаны в предыдущей работе [13], В последнее время было исследовано поведение

передающей вертикальной антенны длиной 15 *м* ($l/a \simeq 100$) при возбуждении ее единичным скачком без заполнения. Приемная аппаратура и методика измерений, применяемые в работе, аналогичны описанным ранее [13].

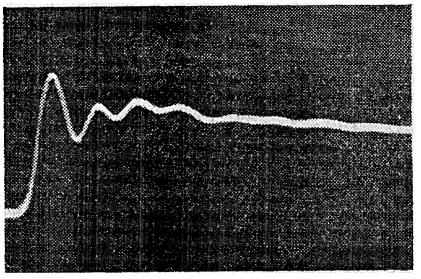
В первой серии экспериментов изучалась форма импульса в «дальней» зоне антенны в зависимости от внутреннего сопротивления генератора. Результаты для указанной антенны с волновым сопротивлением порядка 200 *ом* приведены на рис. 2. Из осциллограмм ясно видно, что при $R_i=0$ переходный процесс заканчивается за 6 циклов, как это и следует из приведенных расчетов. Это подтверждает вывод о том, что



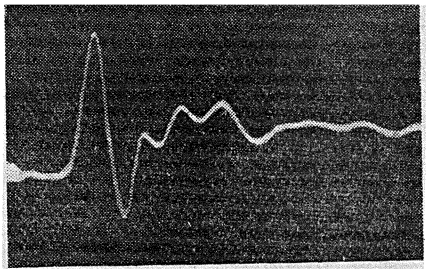
а



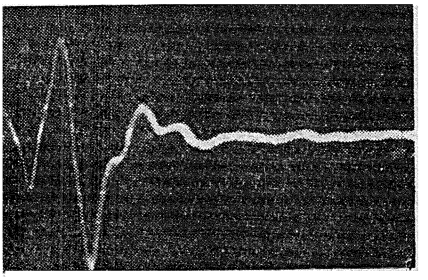
б



в



г



д

Рис. 3. Осциллограммы принятого импульса для генератора с ЭДС вида $-1(t)$ для $R_i=200$ *ом* при $r=1$ *м* (*а*), $r=10$ *м* (*б*), $r=25$ *м* (*в*), $r=50$ *м* (*г*), $r=150$ *м* (*д*).

сопротивление излучения для бегущей расширяющейся волны действительно составляет 41,5 *ом* (для заземленной антенны)*.

При нагрузке, примерно равной волновому сопротивлению (величина ее сравнительно мало критична), переходный процесс длится всего лишь один период. Это свидетельствует о том, что неоднородность антенны как длинной линии проявляется относительно слабо, и для практических целей в большинстве случаев можно не считаться с зависимостью ρ от времени и от длины.

Во второй серии экспериментов изучалась зависимость формы импульса от расстояния в «ближней» зоне антенны в случае согласованного генератора. Полученные результаты приведены на рис. 3. Непосредственно вблизи антенны форма импульса близка к сумме двух единичных ступенек, сдвинутых во времени (сравни рис. 1б). Однако с увеличением расстояния импульс постепенно приближается по форме к двухполярному симметричному виду. Как уже указывалось выше, это объясняется тем, что бегущая волна (во время пробега туда и обратно) дает лишь поле излучения, убывающее как $1/r$, а остающееся статическое поле убывает с расстоянием быстрее. Это подтверждается также амплитудными измерениями. На рис. 4 приведены графики (в двойном логарифмическом масштабе) зависимости амплитуды первой полуволны и статической части импульса от расстояния. Из кривых видно, что амплитуда первой полуволны действительно убывает с расстоянием как $1/r$. В то же время статическое поле на расстояниях, меньших длины антенны, также убывает как $1/r$, а с увеличением расстояния — значительно быстрее.

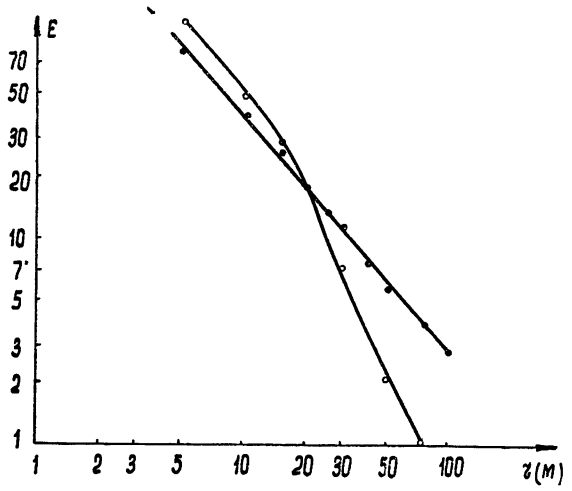


Рис. 4. Точками отмечено изменение с расстоянием амплитуды E поля бегущей расширяющейся волны (до момента времени l/c); светлые кружки характеризуют изменение поля с расстоянием после окончания переходного процесса (т. е. после момента $2l/c$).

Точно таким же образом могут быть интерпретированы описанные в предыдущей работе [13] результаты первой серии измерений, когда сигнал вблизи антенны был близок к $1(t)\sin(\omega_0 t)$, а за границей зоны индукции—к $-1(t)\sin(\omega_0 t)$, причем первый период его был изрезан высокочастотными осцилляциями, образованными бегущими по антенне волнами.

* При проведении экспериментов использовалась достаточно развитая сеть заземления. Поэтому сопротивление потерь в земле не могло играть существенной роли, тем более, что в нестационарном случае оно должно быть мало по сравнению не с $R_{изл}$, а с ρ.

7. Таким образом, все проведенные эксперименты показали, что в случае нестационарного возбуждения антенны первое приближение теории (замена антенны однородной длинной линией) достаточно хорошо описывает детали процесса. В частности, удается согласовать генератор с антенной; при этом переходный процесс заканчивается после двухкратного пробега фронтом тока вдоль антенны. Бегущая расширяющая волна действительно создает лишь поле излучения, что приводит к сильным искажениям формы импульса в пределах индукционно-статической зоны и не дает возможности заменить антенну точечным диполем с эквивалентным дипольным моментом, не зависящим от расстояния. Сопротивление излучения для такой волны не зависит ни от длины антенны, ни от формы питающего тока и составляет 83 *ома* (для симметричной антенны).

Переходные процессы при излучении существенно сказываются на форме импульса и пренебрегать ими, заменяя антенну точечным диполем, при рассмотрении задач о нестационарном распространении радиоволн, вообще говоря, нельзя. В противном случае результаты теоретических расчетов практически не могут быть сопоставлены с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. В Н Красильников, Г. И Макаров, Вестник ЛГУ, сер. физики-химии, № 16, 27 (1958).
2. В. Н. Красильников, Сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 2, 111 (1962).
3. E. A. Lewis, Electromagnetic Wave Propagation, Acad. Press., 1960, p. 335.
4. P. O. Brundel, Ericsson Technics, 16, 137 (1960).
5. D. Bolle, J. Jacobs, IRE Trans., AP-10, 787 (1962).
6. Wu Tai Tsun, J. Math. Phys., 2, 899 (1961).
7. S. P. Morgan, J. Math. Phys., 3, 564 (1962).
8. C. Polk, Proc. IRE, 48, 1281 (1960).
9. Wu Tai Tsun, R. King, IEEE Trans., AP-11, 17 (1963).
10. R. W. King, H. J. Schmitt, IRE Trans., AP-10, 22 (1962).
11. H. J. Schmitt, Proc. Inst. Electr. Engrs., 107 C, 292 (1960).
12. В. В. Новиков, Сб Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 2, 7 (1962).
13. А К. Булгаков, В. М. Рысаков, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, 5, 328 (1962).
14. А. К. Булгаков, В. М. Рысаков, Сб Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 1, 156 (1962).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
8 апреля 1964 г.

TRANSIENT PROCESSES IN LINEAR ANTENNAS

A. K. Boulgakov, N. I. Bousev, V. M. Rysakov

A transient regime in linear antenna is considered. The radiation impedance (for expanding traveling wave of the current) is shown to be independent in atransient regime neither of the form of applied excitation nor of the antenna length und to be equal to 83 ohm (in free space). The transient process duration is determined and the gradual transition to stationary radiation process is cleared up. The field of expanding traveling wave has the character of radiation field at any distances, i. e. decreases as inverse first power of distance. It is noted that the transient process in antenna considerably affects the form of radiated impulse. The experimental results for a real antenna are in a grood agreement with calculations.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 537.5 : 533 9

ОБ УДЕЛЬНОЙ МОЩНОСТИ ГАРМОНИК ПОЛЯ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РАЗРЯДЕ ПРИ УЧЕТЕ ИХ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В. Н. Сошников, Е. С. Трехов

В предположении $\omega/2\pi \ll \nu_0 \ll \nu_{ee} \ll \nu_c$, где ν_0 — частота неупругих, ν_c — частота упругих соударений электронов с молекулами, ν_{ee} — частота взаимных соударений электронов в неравновесной однородной слабоионизованной плазме, получена формула, определяющая электропроводность для слабой гармоники $E = E_{02}\cos(3\omega t)$ в плазме, существование которой определяется наличием сильного электрического поля $E = E_{01}\cos(\omega t)$ Применимость принятых идеализаций и методов расчета иллюстрируется численными оценками для молекулярного газа (азота)

При периодическом электрическом поле, поддерживающем разряд, концентрации электронов и их функция распределения по энергиям, вообще говоря, также периодически меняются с частотой колебаний поля. Подобное положение осуществляется, например, в условиях положительного столба высокочастотного разряда, при этом функцию распределения в первом приближении можно считать изотропной. При повышении частоты может возникнуть состояние, при котором концентрации электронов n_e практически будут постоянны во времени (время релаксации концентраций определяется вероятностями рекомбинации и ионизации, а также амбиполярной диффузией). Вместе с тем функция распределения будет испытывать колебания, поскольку скорость релаксации энергий электронов, определяемая соотношением сечений упругих и неупругих соударений электронов друг с другом и с тяжелыми частицами, как показывают оценки и эксперимент, обычно гораздо выше скорости релаксации концентраций.

В слабом электрическом поле проводимость слабоионизованной плазмы вычисляется по хорошо известным формулам, полученным Гинзбургом [1] и Маргенау [2]. В сильном поле эти формулы, вообще говоря, неприменимы, так как приходится учитывать, как будет показано ниже, нелинейные эффекты взаимного влияния гармоник приложенного поля, связанные при не слишком низких частотах с периодическим изменением энергии электронов (ср. [3]).

Задача может быть сформулирована как исследование зависимости электропроводности однородной слабоионизованной плазмы (при заданных n_e) относительно различного типа электрических полей. Простейшим случаем является случай двух гармоник ω_1 и ω_2 приложенного поля; при этом гармоника ω_1, обусловливающая существование разряда, считается сильной, а гармоника ω_2 слабой. Будет показано, что в этих условиях электропроводность плазмы для гармоники поля $E_2 = E_{02}\cos(\omega_2 t)$ зависит от соотношения частот ω_1 и ω_2; в случае $\omega_2 = 3\omega_1$ электропроводность определяется не упомянутыми выше формулами, а членом, зависящим от амплитуды E_{01}, т. е. зависимость ее от отношения ω_2/ω_1 носит резонансный характер (E_{01} и E_{02} считаются заданными). Удобно сформулировать задачу в терминах

удельной мощности той или иной гармоники, выделяемой в плазме; при этом в рассмотрение необходимо будет включить дифференциальные уравнения баланса энергии.

Поставленная задача реализуется, например, при внесении в область положительного столба достаточно мощного стационарного высокочастотного разряда частоты ω_1 электродов, к которым приложено слабое поле частоты ω_2, не возмущающее разряд существенным образом (при наличии измерительных приборов, настроенных на эту частоту), либо при использовании индукционных разрядов и т. п. Не ставя перед собой задачу исследования условий постановки соответствующего эксперимента, отметим, что выполненное ниже рассмотрение составляет необходимую часть более общего вопроса о расчете параметров высокочастотного разряда при заданном произвольном периодическом поле, приложенном к электродам. При такой постановке, однако, решение резко усложняется из-за необходимости специального исследования приэлектродных областей, обусловливающих сложный характер распределения потенциала вдоль разрядной трубки, и т. п.

Сформулированная выше ограниченная задача сводится к решению газокинетического уравнения с учетом упругих и неупругих соударений электронов друг с другом и тяжелыми частицами, однако и в такой постановке она практически трудно разрешима. Для получения аналитических выражений, имеющих все же достаточно общий характер, необходимо рассмотреть определенный интервал условий, в котором могут быть сделаны существенные упрощения; при этом в качестве иллюстрации выполнены численные оценки для молекулярного газа N_2.

1) В каждый момент времени распределение электронов считается максвелловским по крайней мере в «упругой» области энергий $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (ε_0 — порог возбуждения электронных состояний молекул или атомов), т. е.

$$\omega/2\pi \ll \nu_0 \ll \nu_{ee} \ll \nu_c, \tag{1}$$

где ν_{ee} — частота столкновений электронов друг с другом, ν_c — частота упругих соударений, ν_0 — частота неупругих соударений электронов с молекулами. Так, в случае азота N_2, полагая для сечений столкновений $\sigma_c \sim 10^{-15}$ *см*^{2}, $\sigma_0 \sim 3\cdot 10^{-17}$ *см*^{2} при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0 = 45000$ *см*$^{-1}$ ($\sim$5,6 *эв*) (см. [4]), вычисляя кулоновский логарифм в сечении σ_{ee} в соответствии с дебаевским радиусом экранирования и подставляя в относительно слабо зависящие от температуры члены $T_e \sim 3\cdot 10^4$°K, $T \sim 3\cdot 10^3$°K, получим условие (1) в форме

$$\omega/2\pi \ll 10^7 p e^{-72{,}0/T_e} \ll 5\cdot 10^{-6}\, n_e \ll 5\cdot 10^8 p, \tag{1а}$$

где p — давление газа в *мм* рт. ст., T_e и T — температура электронов и газа соответственно в тысячах °K. В соответствии с (1а) можно заключить, что потерями энергии электронов при упругих соударениях с молекулами можно полностью пренебречь; при $p \gtrsim 1$ и в зависимости от T_e интервал допустимых частот занимает полосу от 1 до ~ 100 *Мгц*, интервал концентраций n_e — от 10^{12} до 10^{16} *см*$^{-3}$*.

2) Предполагается, что $T \ll T_e$, и пренебрегается столкновениями второго рода с отдачей энергии возбуждения молекул электронам. Дезактивация молекул происходит либо за счет излучения, либо за счет безызлучательных столкновений молекул с переходом энергии возбуждения в кинетическую энергию (при газокинетических сечениях тушения последний процесс является основным).

---

* При высоких концентрациях n_e необходимо увеличить ν_c соответственно вкладу рассеяния электронов на ионах; наконец, при дальнейшем значительном повышении степени ионизации проводимое здесь рассмотрение вообще теряет смысл.

3) Процесс отдачи энергии электронов молекулам определяется эффективным сечением $\sigma_0 = \text{const}$, отличным от нуля при $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$. Такое приближение оправдывается тем, что при высокой температуре электронов T_e область вблизи порога ε_0, где сечение быстро растет, не столь существенна: эффективное сечение возбуждения складывается из средних значений сечений возбуждения ряда низколежащих электронных состояний (ср. расположение уровней энергии N_2 в [5], а также экспериментальные сечения возбуждения N_2 в [4]). Так, в случае N_2 при $T_e \geqslant 2 \cdot 10^4$°K баланс энергий определяется передачей энергии электронам внешним полем, с последующей отдачей ее молекулам при возбуждении электронных уровней и последующим переходом ее при безызлучательных соударениях молекул в энергию их поступательного, колебательного и вращательного движения. Затраты на непосредственное возбуждение колебаний молекул электронным ударом (при экспериментальных сечениях [5–7]) существенны лишь при более низких T_e. При $T_e \geqslant 1{,}5 \cdot 10^4$°K эти затраты уменьшаются с ростом температуры и не могут привести к установлению баланса по энергиям. Потери при возбуждении вращений и при упругих соударениях играют еще меньшую роль (ср. [8]).

Несмотря на частный характер выполненных оценок, принятые допущения, по-видимому, являются достаточно общими вследствие большого разнообразия конкретных условий высокочастотных разрядов в различных газах.

В соответствии с хорошо известным методом [3], ограничимся линейным членом разложения функции распределения электронов по полиномам Лежандра

$$f(v, t) = f_0(v, t) + v_x \Phi(v, t), \tag{2}$$

где x — направление приложенного поля $E(t)$; подставляя $f(v, t)$ в газокинетическое уравнение [9] и интегрируя по телесному углу, получим два уравнения для определения $f_0(v, t)$ и $\Phi(v, t)$, в частности,

$$\frac{\partial \Phi(v, t)}{\partial t} + \frac{eE(t)}{m} \frac{\partial f_0(v, t)}{v \partial v} = \Psi_{f_0, \Phi} - \frac{v}{\lambda} \Phi(v, t). \tag{3}$$

При этом в силу условия $\nu_c \gg \nu_{ee}$ можно пренебречь интегралом столкновений между электронами $\Psi_{f_0, \Phi}$, линейным относительно $f_0(v, t)$ $\Phi(v, t)$. Здесь λ — средняя длина свободного пробега электрона; при нахождении $\Phi(v, t)$ функция $f_0(v, t)$ считается заданной.

В соответствии с (1) предполагается, что интегралы столкновений электронов друг с другом для изотропной части функции распределения обращаются в нуль, т. е. $f_0(v, t)$ — максвелловская функция распределения, зависящая, как от параметра, от T_e. При этом газокинетическое уравнение

$$\frac{\partial f_0(v, t)}{\partial t} + \frac{eE(t)}{3m} \left[v \frac{\partial \Phi(v, t)}{\partial v} + \Phi(v, t) \right] = \Psi_{f_0, N} \tag{4}$$

определит изменение T_e во времени. Здесь $\Phi(v, t)$ считается заданным, функция $\Psi_{f_0, N}$ учитывает неупругие соударения электронов с молекулами, не нарушающие максвелловского характера распределения $f_0(v, t)$ (см. (1)). Решая (3) и подставляя $\Phi(v, t)$ в (4), получим уравнение баланса энергий, определяющее зависимость $T_e(t)$.

Переходя в (3) к распределению по энергиям ε, получим

$$\Phi(\varepsilon, t) = -\frac{em^{3/2}}{4\pi \sqrt{2\varepsilon}} \int_0^t e^{\nu_c (t' - t)} E(t') \left[\frac{n_e(t')}{2\varepsilon} - \frac{dn_\varepsilon(t')}{d\varepsilon} \right] dt', \tag{5}$$

где $n_\varepsilon(t)\,d\varepsilon\,d\Omega \equiv f_0(v, t)dv$, Ω—телесный угол в пространстве скоростей. Для простоты в качестве начальных условий принято $\Phi(\varepsilon, 0)=0$. В соответствии с (5) условие применимости разложения (2) сводится к неравенству

$$eE/2\pi\nu_c\sqrt{2m\varepsilon} \ll 1; \tag{6}$$

это неравенство в случае N_2 при указанных выше условиях выполняется для $E \lesssim (10^2 \div 10^3)в\cdot см^{-1}$. Это требование всегда может быть удовлетворено, поскольку в соответствии с (1) значения E существенно ограничены допустимыми концентрациями n_e*.

Согласно (5), для удельной мощности получим

$$W(t) = eE(t)\int v_x f(v, t)\,dv = \frac{4}{3}\pi eE(t)\int_0^\infty v^4\Phi(v, t)\,dv = \tag{7}$$

$$= \frac{2e^2E(t)}{3m}\int_0^\infty\int_0^t e^{\nu_c(t'-t)}E(t')\left[\frac{n_\varepsilon(t')}{2} - \frac{\varepsilon\,dn_\varepsilon(t')}{d\varepsilon}\right]d\varepsilon\,dt'.$$

Поскольку среднее значение скорости изменения энергии теплового движения определяется величиной

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{mv^2}}{2}n_e\right) = 2\pi m\int_0^\infty v^4\frac{df_0(v, t)}{dt}dv, \tag{8}$$

как нетрудно проверить, выражение (7) может быть также получено при подстановке в (8) $f_0(v, t)$ из уравнения (4), если в нем опустить член для неупругих потерь. При $n_\varepsilon(t)$, не зависящем от t и $E(t) = E_0\cos(\omega t)$, из (7) получим хорошо известную формулу (данную в [1, 2] в обозначениях комплексной проводимости)

$$\overline{W(t)} = \frac{e^2E_0^2n_e}{3m}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\nu_c}\right)_{ср} + \left(\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{\nu_c}\right)_{ср}\right\} \equiv \frac{e^2E_0^2n_e}{3m}\left[\overline{A(\varepsilon)} + \overline{B(\varepsilon)}\right]. \tag{9}$$

Здесь усреднение в правой части проводится по энергиям. Оба слагаемых, $\overline{A(\varepsilon)}$ и $\overline{B(\varepsilon)}$, для азота N_2 и, по-видимому, для других газов, как следует из таблицы 1, одного порядка величины. Согласно (7), при ν_c, не зависящем от ε, поле $E(t) = E_0\cos(\omega t)$ или $E_0\sin(\omega t)$

$$\overline{W(t)} = \frac{e^2E_0^2}{4m\nu_c}(b_0 \pm b_2) \simeq \frac{e^2E_0^2\overline{n_e(t)}}{2m\nu_c},$$

где b_l — коэффициенты разложения,

$$n_e(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\sin(k\omega t) + b_k\cos(k\omega t)].$$

При $E(t) = E_0\cos(\omega t)$ и $n_e = \text{const}$ в разложении

---

* В случае N_2 связь E с n_e, по-видимому, не может быть однозначно рассчитана ввиду отсутствия сведений о коэффициенте объемной рекомбинации при высоких T_e; использование же зависимости $\alpha(T_e) \sim T_e^{-3/2}$ [10] для экстраполяции экспериментальных данных при $T_e \sim 500°K$[11] представляется недостаточно обоснованным (ср [12]).

$$\frac{1}{n_e}\left[\frac{n_\varepsilon(t)}{2}-\frac{\varepsilon\, dn_\varepsilon(t)}{d\varepsilon}\right]=\frac{2\varepsilon^{2/3}e^{-\varepsilon/kT_e}}{\sqrt{\pi}(kT_e)^5}=\frac{\beta_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k\sin(k\omega t)+\beta_k\cos(k\omega t)] \tag{10}$$

наибольшую величину будут иметь члены β_0 и α_2, β_2, поскольку температура электронов изменяется с удвоенной частотой. Оставляя члены нулевого порядка, получим

$$W(t)\simeq\frac{n_e e^2E_0^2}{6m}\int_0^{\infty}\frac{\beta_0}{\nu_c}[1+\cos(2\omega t)]\,d\varepsilon, \tag{11}$$

где, согласно (9),

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\beta_0}{\nu_c}d\varepsilon=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\nu_c}\right)_{ср}+\left(\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{\nu_c}\right)_{ср}. \tag{12}$$

Полагая в (10) отличными от нуля только β_0 и β_2 ($\alpha_2=0$ в силу (11)) и оставляя члены, линейные по a_k, b_k, при наличии дополнительных слабых гармоник

$$E(t)=E_0\cos\omega t+\sum_{k=2}^{\infty}[a_k\sin(k\omega t)+b_k\cos(k\omega t)], \tag{13}$$

получим, согласно (7),

$$\overline{W(t)}=\frac{e^2n_e}{6m}\int_0^{\infty}\frac{1}{\nu_c}[E_0^2(\beta_0+\beta_2)+2E_0b_3\beta_2]\,d\varepsilon. \tag{14}$$

Член, пропорциональный E_0b_3 и соответствующий удельной мощности для гармоники 3ω, должен использоваться вместо обычного «нерезонансного» выражения

$$\overline{W(t)}\Big|_{3\omega}=\frac{n_e e^2b_3^2}{6m}\int_0^{\infty}\frac{\beta_0}{\nu_c}d\varepsilon. \tag{15}$$

Линейное по E_0 слагаемое (14), деленное на (15), определяет «коэффициент усиления» ζ гармоники частоты 3ω (ζ определяет, таким образом, параметрическое усиление силы тока на частоте 3ω). Следует подчеркнуть, что указанный частотный эффект изменения электропроводности и выделяемой удельной мощности для гармоники 3ω, определяющий искажение тока проходящего электрического сигнала, имеет место, несмотря на выполнение условия $\omega\ll\nu_c$ (1).

Поскольку при интегрировании по ε в (14) основной вклад дают области вблизи максимума функции распределения, можно воспользоваться разложением по параметру $1-\overline{T}_e/T_e$, где $\overline{T}_e$ — средняя электронная температура:

$$\frac{1}{n_e}\left(\frac{n_\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon\, dn_\varepsilon}{d\varepsilon}\right)\simeq\frac{2\varepsilon^{3/2}e^{-\varepsilon/k\overline{T}_e}}{\pi^{1/2}(k\overline{T}_e)^{5/2}}\left(-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{k\overline{T}_e}-\frac{\varepsilon}{kT_e}+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{2}\frac{k\overline{T}_e}{kT_e}\right)\equiv L(\varepsilon,\overline{T}_e)-M(\varepsilon,\overline{T}_e)\frac{1}{kT_e}. \tag{16}$$

Так, при $\overline{T}_e=2{,}5\cdot10^4$ и $T_e=(1{,}5\div4{,}0)10^4$ погрешность разложения при $\varepsilon\simeq k\overline{T}_e$ не превосходит 8%.

Для нахождения компонент Фурье от $1/T_e(t)$ воспользуемся уравнением баланса*

$$\frac{3}{2}\,k\frac{dT_e}{dt}=\frac{W(t)}{n_e}-N\sigma_0\sqrt{\frac{8}{\pi mkT_e}}\,e^{-\varepsilon_0/kT_e}\left[(\varepsilon_0+kT_e)^2+(kT_e)^2\right], \qquad (17)$$

где, согласно (11),

$$\frac{W(t)}{n_e}=C\cos(2\omega t)+H; \qquad (18)$$

C и $H=C$ не зависят от t и n_e. Чтобы резонанс был достаточно сильным, необходимо, чтобы колебания температуры были не слишком малы, составляя по крайней мере несколько тысяч градусов. Это означает, что $dT_e/dt\simeq 0$ в (17), за исключением области минимума $T_e(t)$, где слагаемые правой части (17) близки к нулю. Для учета этого следует положить в (17) $dT_e/dt\simeq 0$ всюду, но добавить одновременно к H небольшое постоянное слагаемое, зависящее от минимального значения $T_e(t)$. Последнее слагаемое должно быть получено при численном интегрировании (17) (оно зависит от численных значений σ_0; поскольку (12) сравнительно слабо зависит от T_e, как это ясно из таблицы 1, здесь может быть использован метод последовательных приближений). Таким образом,

$$H=C+r;\quad r>0;\quad C+r+C\cos(2\omega t)>0.$$

Согласно (17) и (18), получим

$$-\frac{1}{kT_e}\simeq\frac{1}{\varepsilon_0}\ln\left[C\cos(2\omega t)+C+r\right]+\ln\frac{\sqrt{\pi mk\overline{T}_e}}{2\sqrt{2}N\sigma_0\left[(\varepsilon_0+k\overline{T}_e)^2+(k\overline{T}_e)^2\right]}, \qquad (19)$$

откуда

$$\beta_2=\frac{M(\varepsilon,\,\overline{T}_e)}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\ln\left(C\cos\varphi+C+r\right)d\varphi. \qquad (20)$$

Интегрируя по частям и применяя теорию вычетов, получим

$$\beta_2=\frac{2M(\varepsilon,\,\overline{T}_e)}{C\varepsilon_0}\left[\frac{C^3+12Cr^2+9C^2r+4r^3}{C^2+2r^2+4Cr-2(C+r)\sqrt{2Cr+r^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{6C^3r+19C^2r^2+16Cr^3+4r^4}{(C^2+2r^2+4Cr)\sqrt{2Cr+r^2}-2(C+r)(2Cr+r^2)}\right]. \qquad (21)$$

Таблица 1

Величины A и B в единицах CGS (p=10 *мм* рт. ст., $T=3\cdot 10^3{}^\circ K$)

$T_e\,10^{-4}(^\circ K)$	$A(\bar{\varepsilon})\cdot 10^{10}$	$B(\bar{\varepsilon})\cdot 10^{10}$	$\overline{A(\varepsilon)}\cdot 10^{10}$	$\overline{B(\varepsilon)}\;10^{10}$	$[\overline{A(\varepsilon)}+\overline{B(\varepsilon)}]\cdot 10^{10}$
2	2,0	1,8	5,5	—2,3	3,2
3	3,2	3,5	4,6	—1,8	2,8
4	3,3	—1,5	4,0	—2	2

* Принимается, что при неупругом соударении электрон полностью теряет свою энергию ε.

Представляло бы интерес найти экспериментальное подтверждение рассмотренному выше явлению взаимодействия гармоник ω и 3ω.

Измерения ζ, по-видимому, могут быть использованы для грубых оценок эффективного сечения неупругих соударений. Максимальная чувствительность достигается при минимальных ω, допускаемых условием $n_e(t) = \text{const}$, и применимостью использованных разложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Ginsburg, J. Phys. USSR, **8**, 253 (1944).
2. H. Margenau, Phys. Rev., **69**, 508 (1946).
3. В. Гинзбург, А. Гуревич, УФН, **70**, 201, 393 (1960)
4. A. Engelhardt, A. Phelps, C. Risk, Phys. Rev., **135A**, 1566 (1964).
5. Р. Малликен, Сб. На пороге в космос, ИЛ, М., 1960, стр 235.
6. R. Haas, Z. Phys., **148**, 177 (1957).
7. G. Schulz, Phys. Rev., **125**, 229 (1962).
8. В. Кондратьев, Кинетика химических газовых реакций, изд. АН СССР, М, 1958.
9. H. Margenau, Phys. Rev., **73**, 297 (1948).
10. L. Loeb, Basic Processes of Gaseous Electronics, 2d ed., Berkeley—Los Angeles, Univ. of California press, 1960.
11. W. Kasner, W. Rogers, M. Biondi, Bull Amer. Phys. Soc., 7, 131 (1962)
12. D. Bates, Atomic and Molecular Processes, Academic Press, London, 1962.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
4 января 1965 г

ON SPECIFIC POWER OF FIELD HARMONICS IN HIGH-FREQUENCY DISCHARGE, THEIR NONLINEAR INTERACTION BEING TAKEN INTO ACCOUNT

V. N. Soshnikov, E. S. Trekhov

Under the assumption $\omega/2\pi \ll \nu_0 \ll \nu_{ee} \ll \nu_c$ where ν_0 is the frequency of non-elastic collisions, ν_c is the frequency of elastic electron collisions with molecules, ν_{ee} is the frequency of mutual electron collisions in non-equilibrium homogeneous weakly-ionized plasma, the formula has been obtained, determining the plasma electric conductivity for a weak field $\varepsilon = \varepsilon_{02}\cos(3\omega t)$. The existence of it depends upon the presence of a strong electric field $\varepsilon = \varepsilon_{01}\cos(\omega t)$. The applicability of accepted idealizations and calculation methods is illustrated by numerical estimations for molecular gas (nitrogen).

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 533.951

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ПОТЕРИ В АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Ю. А. Романов

Рассмотрены коллективные потери, обусловленные возбуждением объемных и поверхностных плазмонов в анизотропных плазменных слоях.

Плазма в кристаллах обладает рядом специфических особенностей, связанных с ее анизотропией. Некоторые из таких особенностей изучены Пафомовым при рассмотрении излучения Вавилова—Черенкова и переходного излучения в анизотропных средах. Здесь мы рассмотрим особенности коллективных потерь в анизотропных плазменных слоях. Мы покажем, что

1) в кубических кристаллах потери, обусловленные возбуждением объемных плазмонов, обладают угловой анизотропией;

2) вследствие несохранения суммарного импульса пролетающей частицы и возбуждаемого ей объемного плазмона коллективные потери в анизотропных плазменных слоях характеризуются энергетическим фоном, имеющим «пички» при $\omega \simeq \omega_{\parallel}$ ($\omega_{\parallel}$ — частота плазмона с волновым вектором, направленным вдоль главной оптической оси одноосного кристалла);

3) в анизотропном плазменном слое существуют две ветви поверхностных плазмонов, которые энергетически расположены ниже соответствующих ветвей объемных плазмонов;

4) потери, обусловленные возбуждением поверхностных плазмонов, в достаточно тонких слоях отличаются сильной угловой зависимостью.

1. ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА

Рассмотрим анизотропный плазменный слой толщины d (область $0 < x_3 < d$), граничащий по обе стороны с непоглощающей диэлектрической средой, проницаемость которой обозначим через ε_0. Для определенности будем считать, что анизотропия плазменного слоя обусловлена анизотропией эффективных масс составляющих ее зарядов. Пусть через этот слой пролетает частица, имеющая заряд e, массу M и достаточно большую скорость v (такую, что ее взаимодействие с частицами плазмы, которое ради простоты будем считать кулоновским, можно рассматривать методом возмущений). Вычислим просуммированную по конечным и статистически усредненную по начальным состояниям плазмы вероятность перехода в единицу времени налетающей частицы из состояния с импульсом $\boldsymbol{p}$ в состояние с импульсом $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}$. В первом порядке по указанному выше взаимодействию эта вероятность имеет вид [2]

$$W_{p \to p'} = 2e^2 \operatorname{Im} D^R(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}, \omega), \qquad (1)$$

где D^R — кулоновская запаздывающая функция Грина для слоя; $\omega = E_p - E_{p'}$, $E_p(E_{p'})$ — энергия налетающей (рассеянной) частицы.

Для нахождения функции D^R необходимо задать поведение плазменных электронов на границе плазмы. Мы будем предполагать, что электроны отражаются от поверхности зеркально. Точнее, будем счи-

тать, что нормальная к поверхности компонента скорости электрона (а не импульса) при отражении меняет знак на обратный. Задание таких граничных условий в рассматриваемом нами анизотропном случае наталкивается на определенные трудности. Именно, при таком отражении энергия и абсолютная величина импульса (в случае произвольной ориентации осей кристалла относительно его границ) не сохраняется, и возникает сомнение в какой-либо реальности указанных граничных условий. (Аналогичная трудность сохраняется, если считать, что при отражении меняет знак на обратный нормальная составляющая импульса, а не скорости.) Однако в случае одноосного кристалла с главной осью, ориентированной перпендикулярно его поверхности (именно этот случай в настоящей работе, главным образом, и рассматривается), подобные трудности, как легко видеть, не возникают.

При указанных граничных условиях нахождение функции D^R не представляет особого труда (см. [2]). Мы опустим соответствующие выкладки и приведем сразу результат для величины вероятности (1):

$$W = 4e^2\mathrm{Im}\Bigg\{\frac{1}{\alpha_c + (\varepsilon_0 k_\parallel)^{-1}}\Bigg[\frac{2k_\perp}{d}\sin\frac{k_\perp d}{2}\sum_{k_3^c}\frac{1}{(k_3^2 - k_\perp^2)k^2\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)} - \frac{k_\perp\sin(k_\perp d/2) - k_\parallel\cos(k_\perp d/2)}{k_\parallel(k_\perp^2 + k_\parallel^2)}\Bigg]^2 + \frac{1}{\alpha_a + (\varepsilon_0 k_\parallel)^{-1}}\Bigg[\frac{2k_\perp}{d}\times$$

$$\times\cos\frac{k_\perp d}{2}\sum_{k_3^a}\frac{1}{(k_3^2 - k_\perp^2)k^2\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)} - \frac{k_\perp\cos(k_\perp d/2) + k_\parallel\sin(k_\perp d/2)}{k_\parallel(k_\perp^2 + k_\parallel^2)}\Bigg]^2 - \frac{2k_\perp^2}{d}\Bigg[\sin^2(k_\perp d/2)\times \tag{2}$$

$$\times\sum_{k_3^c}\frac{1}{(k_3^2 - k_\perp^2)^2k^2\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)} + \cos^2(k_\perp d/2)\sum_{k_3^a}\frac{1}{(k_3^2 - k_\perp^2)^2k^2\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)}\Bigg]\Bigg\}.$$

Здесь $\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы, зависящая в рассматриваемом нами анизотропном случае как от величины, так и от направления волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Функция $\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)$ связана с тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)$ соотношением*

$$\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega) = (k_i k_j/k^2)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\omega). \tag{3}$$

Величины $k_\perp$ и $k_\parallel$ соответствуют перпендикулярной и параллельной поверхности слоя компонентам вектора $\boldsymbol{k}$. Наконец,

$$\alpha_{c,a} = \frac{2}{d}\sum_{k_3^{c,a}}\frac{1}{k^2\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)}; \tag{4}$$

$$k_3^c = 2n\pi/d, \quad k_3^a = (2n+1)\pi/d \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5}$$

Температурный множитель в (2) ради простоты опущен.

---

* Следует заметить, что введение одной функции $\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)$, так же как и в изотропном случае, возможно лишь без учета запаздывания взаимодействия. При изучении характеристических потерь последнее допустимо, так как наиболее существенной в этом случае является область $ck_\parallel \gg \omega$ (см. раздел 4). При этом мы, однако, полностью исключаем из рассмотрения волны, соответствующие в изотропной плазме поперечным плазмонам.

2. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

В этом разделе мы найдем входящую в (2) диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$. Для определенности будем иметь в виду электронный (дырочный) полупроводник и считать, что расстояния между зонами его электронного энергетического спектра достаточно велики, так что межзонными переходами можно пренебречь и принимать во внимание поведение электронов (дырок) лишь одной зоны. В этом случае диэлектрическая проницаемость определяется соотношением

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 + \frac{2e^2}{k^2} \int \frac{n_{p+k} - n_p}{\omega + \varepsilon_p - \varepsilon_{p+k}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{6}$$

где интегрирование ведется в пределах зоны Бриллюэна.

Входящую в (6) функцию распределения n_p для простоты будем считать максвелловской, а зависимость энергии электрона (дырки) ε^p от квазиимпульса полагать в виде

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} m_{ij}^{-1}(p_i - p_i^0)(p_j - p_j^0). \tag{7}$$

Здесь p_i^0 соответствует энергетическому минимуму или максимуму (их может быть несколько), m_{ij}^{-1} — тензор обратной эффективной массы, не являющийся, вообще говоря, изотропным даже в кубических кристаллах. Далее будем считать, что энергетические минимумы (максимумы) достаточно далеко удалены друг от друга, так что соответствующие функции распределения не перекрываются и интегрирование в (6) в силу быстрого спадания n_p можно распространить на все пространство $\boldsymbol{p}$. С учетом всего сказанного интеграл (6) легко вычисляется и мы получаем для диэлектрической проницаемости (с учетом квантовых эффектов) следующее выражение:

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 - i\sqrt{\pi}\, \frac{ne^2}{k^2\omega} \left\langle z_0[\Phi(z_1) - \Phi(z_2)] \right\rangle_m;$$

$$\Phi(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{z^2} dz\right); \tag{8}$$

$$z_{1,2} = \frac{\omega \pm k_i k_j / 2m_{ij}}{\sqrt{2\theta k_i k_j / m_{ij}}}; \quad z_0 = \omega / \sqrt{2\theta k_i k_j / m_{ij}}.$$

Здесь знак $\langle \ldots \rangle_m$ означает арифметическое усреднение по всем минимумам (максимумам), θ — температура плазмы.

В случае слабой пространственной дисперсии диэлектрическую проницаемость можно разложить в ряд по степеням $\boldsymbol{k}$. Ограничиваясь первыми слагаемыми, из (9) получим, в частности, для кубических кристаллов, что

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) \simeq \varepsilon(\omega)\delta_{ij} + \alpha_{ijlm} k_l k_m;$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(1 - \omega_0^2/\omega^2); \quad \omega_0^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_l m^x}; \quad \frac{1}{m^x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m_i}; \tag{9}$$

$$\alpha_{ijlm} = -\frac{3ne^2\theta\varepsilon_l}{\omega^4} \langle m_{ij}^{-1} m_{lm}^{-1} \rangle_m,$$

ε_l — неучитываемая ранее диэлектрическая проницаемость ионного остатка.

Вид тензора α_{ijlm} зависит от конкретной зонной структуры. Так, в случае электронного Si отличные от нуля компоненты в системе, связанной с главными осями симметрии кристалла, имеют вид

$$\alpha_{iiii} = -(ne^2\theta\varepsilon_l/\omega^4)(m_\parallel^{-2} + 2m_\perp^{-2});$$
$$\alpha_{iijj} = -(ne^2\theta\varepsilon_l/\omega^4)(m_\perp^{-2} + 2m_\parallel^{-1}m_\perp^{-1}) \quad (i \neq j); \tag{10}$$

в случае электронного Ge

$$\alpha_{iiii} = -(ne^2\theta\varepsilon_l/3\omega^4)(m_\parallel^{-1} + 2m_\perp^{-1})^2;$$
$$\alpha_{ijij} = -(ne^2\theta\varepsilon_l/3\omega^4)(m_\parallel^{-1} - m_\perp^{-1})^2 \quad (i \neq j). \tag{11}$$

Соответствующие значения продольных $|m_\parallel|$ и поперечных $|m_\perp|$ масс можно найти в [3]. В случае температурного вырождения в (9)—(11) нужно θ заменить на $\frac{2}{5}\mu$ (μ — химический потенциал).

Приведенные выражения интересны тем, что указывают на обусловленную пространственной дисперсией анизотропию таких кубических кристаллов, как Ge и Si. Ниже мы рассмотрим некоторые особенности такой анизотропии.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Из (1) видно, что потери энергии быстрой частицей при прохождении ею плазменного слоя происходит в полосах поглощения и на частотах, определяемых дисперсионными соотношениями

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 0, \tag{12}$$
$$\alpha_{c,a}(\boldsymbol{k}_\parallel, \omega) + k_\parallel^{-1} = 0. \tag{13}$$

Дисперсионное уравнение (12) соответствует объемным плазмонам в анизотропной неограниченной плазме. Для кубических кристаллов в случае слабой пространственной дисперсии оно дает (см. (9))*,

$$\omega^2 \simeq \frac{ne^2}{m^x\varepsilon_l}\left(1 - \frac{\alpha_{ijlm}k_ik_jk_lk_m}{k^2}\right). \tag{14}$$

Выражение (14) интересно тем, что указывает на зависимость энергии плазмона от направления его импульса в кубических кристаллах. В качестве примера на рис. 1 в полярной системе координат приведены кривые $\Delta\omega(\boldsymbol{k}) = \omega - \sqrt{ne^2/m^x}$ в плоскости (001) для Si и Ge, вычисленные на основании формулы (14). Указанная анизотропия приводит к аналогичной анизотропии величины характеристических потерь.

Дисперсионное уравнение (13) с $\alpha = \alpha_a$ соответствует нормальным или нечетным E-плазмонам. Описывающие их поля характеризуются следующей симметрией: $E_\perp$, $H_\parallel$ симметричны, а $E_\parallel$, $H_\perp$ антисимметричны относительно середины слоя. Дисперсионное уравнение (13) с $\alpha = \alpha_c$ соответствует тангенциальным или четным E-плазмонам. Поля, описывающие их, характеризуются следующей симметрией: $E_\perp$, $H_\parallel$ антисимметричны, а $E_\parallel$, $H_\perp$ симметричны относительно середины слоя.

---

* Отличие (13) от соответствующего выражения в [4] обусловлено некорректно проведенным там усреднением по энергетическим минимумам, в результате чего не была учтена анизотропия, связанная с пространственной дисперсией кубических кристаллов [5].

Переходя к количественному рассмотрению задачи, ограничимся случаем одноосных кристаллов, причем для простоты будем считать, что слой вырезан перпендикулярно его главной оптической оси. В этом случае пренебрегая пространственной дисперсией и учитывая дополнительно запаздывание взаимодействия, вместо (13) будем иметь

$$\frac{k_z}{\varepsilon_\perp(\omega)}\,\frac{1\mp\exp(ik_z d)}{1\pm\exp(ik_z d)}=\frac{k_z^0}{\varepsilon_0};$$

$$k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp(\omega)-k_\parallel^2\frac{\varepsilon_\perp(\omega)}{\varepsilon_\parallel(\omega)}}; \qquad (15)$$

$$k_z^0=-\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0-k_\parallel^2};\ \operatorname{Im}k_z^0<0,$$

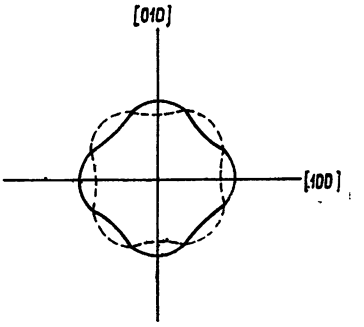


Рис. 1. Кривые зависимости изменения энергии плазмона от направления его импульса в плоскости (001); сплошная кривая для Si, пунктир—для Ge.

где верхний знак относится к нормальным, а нижний—к тангенциальным плазмонам; $\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp)$ — параллельная (перпендикулярная) главной оси кристалла компонента диэлектрической проницаемости.

Так же, как и в случае однородного плазменного слоя, уравнение (15) содержит бесконечное множество решений: две ветви поверхностных волн; бесконечное множество спектральных комплексных и неспектральных «вытекающих» волн; набор волн, аналогичных существующим в обычной диэлектрической пластинке (см., например, [6]), и измененные наличием границ объемные плазмоны*. Здесь нас интересует главным образом первый и последний тип решений.

Рассмотрим сначала случай толстых пленок. Полагая в (15) $d\to\infty$ и выбирая в качестве диэлектрических проницаемостей значения

$$\varepsilon_\parallel(\omega)=\varepsilon_\parallel^i(1-\omega_\parallel^2/\omega^2),\ \varepsilon_\perp(\omega)=\varepsilon_\perp^i(1-\omega_\perp^2/\omega^2), \qquad (16)$$

получим для частоты поверхностного плазмона следующее выражение:

$$\omega_s^2=\frac{1}{2}\left[\omega_\parallel^2+(1+\omega_\parallel^2/\omega_\perp^2)c^2k_\parallel^2-\sqrt{\left[\omega_\parallel^2+\left(1+\frac{\omega_\parallel^2}{\omega_\perp^2}\right)c^2k_\parallel^2\right]^2-4\omega_\parallel^2c^2k_\parallel^2}\right] \qquad (17)$$

при $\varepsilon_\parallel^i=\varepsilon_\perp^i=\varepsilon_0=1$ или

$$\omega_s^2\cong 2\omega_\perp^2\omega_\parallel^2\left[\omega_\parallel^2+\omega_\perp^2+\sqrt{(\omega_\perp^2-\omega_\parallel^2)^2+4(\varepsilon_0/\varepsilon_i)^2\omega_\perp^2\omega_\parallel^2}\right]^{-1}; \qquad (18)$$

$$\varepsilon_i^2=\varepsilon_\parallel^i\varepsilon_\perp^i \qquad (19)$$

при $ck_\parallel\gg\omega$. В случае $\varepsilon_i=\varepsilon_0=1$ (18) совпадает с соответствующим выражением работы [7].

При выполнении неравенства (19), как уже отмечалось, запаздывание взаимодействия несущественно. Однако при этих условиях, когда k сравнительно велики, может оказаться существенной пространственная дисперсия. Считая последнюю слабой, из (13) получим для рассматриваемого случая

---

* Для изучения последних в однородном плазменном слое необходимо учитывать пространственную дисперсию.

$$\omega_s \simeq \frac{\omega_\perp \omega_\parallel}{\sqrt{\omega_\perp^2+\omega_\parallel^2}} + 4\frac{\omega_\perp^4}{(\omega_\perp^2+\omega_\parallel^2)^2} a\left(\frac{\omega}{\omega_\parallel}\right)\sqrt{\frac{2\theta}{m_\parallel}}\, k_\parallel + i\gamma;$$

$$a\left(\frac{\omega}{\omega_\parallel}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{|\varepsilon_\parallel(z)|^2 - \varepsilon_\parallel(\omega)\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_\parallel(z)}{z^2|\varepsilon_\parallel(z)|^2} \sim 1; \qquad (20)$$

$$z = \omega/\sqrt{2k^2\theta/m_\parallel};\ \varepsilon(z) = \varepsilon(\boldsymbol{k},\ \omega)|_{k_\parallel=0}.$$

Эта частота в силу выбранной геометрии кристалла является изотропной. В более сложных случаях (наклонное расположение главных осей к поверхности кристалла, двухосные или даже кубические кристаллы и т. п.) она является анизотропной.

В случае конечных толщин решение уравнения (15) не выражается через элементарные функции. Однако при выполнении неравенства (19) его можно легко разрешить относительно $k_\parallel$. Соответствующие выражения имеют вид

$$\frac{k_\parallel d}{2} = \frac{in\pi - \mathrm{Arth}(\varepsilon_\parallel\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel})}{\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2,...;\ \mathrm{Re}\,k_\parallel > 0) \qquad (21)$$

для нормальных плазмонов и

$$\frac{k_\parallel d}{2} = \frac{in\pi - \mathrm{Arcth}(\varepsilon_\parallel\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel})}{\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2,...;\ \mathrm{Re}\,k_\parallel > 0) \qquad (22)$$

для тангенциальных плазмонов. При этом случай $n=0$ соответствует поверхностным плазмонам*, случай $n \neq 0$ при $\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp < 0$ соответствует измененным наличием границ объемным плазмонам. При этом всегда дисперсионные ветви поверхностных плазмонов расположены ниже дисперсионных ветвей объемных плазмонов.

4. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ПОТЕРИ В АНИЗОТРОПНОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ

При рассмотрении величины вероятности коллективных потерь, испытываемых быстрой частицей, будем считать выполненным соотношение

$$v_T k_\parallel \ll \omega \ll ck_\parallel \quad (v_T = \sqrt{2\theta/m^*}), \qquad (23)$$

позволяющим в первом приближении пренебречь запаздыванием взаимодействия и пространственной дисперсией. Используя законы сохранения энергии-импульса, легко получить ограничение, налагаемое неравенством (23) на угол рассеяния падающей частицы ϑ. В случае нормального падения оно имеет вид

$$\frac{\hbar\omega}{cp} \ll \vartheta \ll \frac{\hbar\omega}{v_T p}. \qquad (24)$$

Подставляя в (24) выражение для угла, соответствующего максимальной вероятности рассеяния [8], получаем следующее неравенство:

* Следует заметить, что поля, соответствующие волне, названной здесь нормальным поверхностным плазмоном, не носят поверхностного характера внутри пленки (они не прижаты к ее поверхности), хотя они становятся таковыми с ростом $k_\parallel d$. Более того, в пределе $k_\parallel d \to \infty$ эта волна так же, как и соответствующая (22) с $n=0$, переходит в волну (18). Поэтому мы и назвали этот тип решений поверхностными плазмонами.

$$v_T p \ll 2\sqrt{3}\,E \ll cp, \tag{25}$$

где E — кинетическая энергия падающей частицы. Во всех существующих экспериментах соотношение (25) довольно хорошо выполняется, что и оправдывает наши действия.

В случае (23) суммирование в (2) легко проводится и мы получаем для вероятности рассеяния следующее выражение:

$$W = 4e^2\mathrm{Im}\left\{\left[\frac{k_\perp\cos\beta}{k_\parallel}\left(\frac{\mathrm{th}\alpha}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)+\sin\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^2\times\right.$$

$$\times\frac{k_\parallel}{k^4[\varepsilon_\perp^{-1}\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}\,\mathrm{th}\alpha+\varepsilon_0^{-1}]}+\left[\frac{k_\perp\sin\beta}{k_\parallel}\left(\frac{\mathrm{cth}\,\alpha}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)-\right.$$

$$\left.-\cos\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^2\frac{k_\parallel}{k^4[\varepsilon_\perp^{-1}\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}\,\mathrm{cth}\alpha+\varepsilon_0^{-1}]}-\frac{\varepsilon_\parallel k_\perp^2}{\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}\,\varepsilon^2 k_\parallel k^4}\times$$

$$\left.\times(\cos^2\beta\,\mathrm{th}\,\alpha+\sin^2\beta\,\mathrm{cth}\,\alpha)-\frac{d}{2\varepsilon k^2}\right\}, \tag{26}$$

$$\varepsilon=(k_\perp^2\varepsilon_\parallel+k_\parallel^2\varepsilon_\perp)k^{-2},\quad \alpha=\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}\,k_\parallel d/2,\quad \beta=k_\perp d/2.$$

1. Рассмотрим сначала толстые пленки ($\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}\,k_\parallel d\gg 1$). В этом случае выражение (20) принимает вид

$$W=4e^2\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{k^4[(\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp)^{-1}+\varepsilon_0^{-1}]}\left[\frac{k_\perp^2}{k_\parallel}\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+k_\parallel\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right]-\frac{k_\perp^2}{k_\parallel k^4}\,\frac{\varepsilon_\parallel\sqrt{\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp}}{\varepsilon^2}-\frac{d}{2\varepsilon k^2}\right\}. \tag{27}$$

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем нормального падения заряда на плазменный слой. Кроме того, будем считать, что реальные части диэлектрических проницаемостей определяются соотношениями (16) с $\varepsilon^l_{\perp,\parallel}=\varepsilon_0=1$, а их мнимые части бесконечно малы. Последнее позволяет испытываемые частицей коллективные потери разделить на потери, обусловленные возбуждением поверхностных плазмонов, и потери, обусловленные возбуждением объемных плазмонов. Учитывая сказанное, получим следующее выражение для дифференциальной вероятности рассеяния, обусловленного возбуждением поверхностных плазмонов:

$$W_s(\vartheta)d\vartheta\simeq\frac{e^2\omega_s}{\pi v(\omega_\parallel^2+\omega_\perp^2)}\left[\frac{a^2k_\parallel^4k_\perp^2}{k^4}\,\frac{(1-a^{-2})^2}{(a^{-1}k_\parallel^2+ak_\perp^2)^2}+\right.$$

$$\left.+k_\parallel^2\left(\frac{1}{a^{-1}k_\parallel^2+ak_\perp^2}+\frac{1}{k^2}\right)^2\right]pd\vartheta, \tag{28}$$

$$k_\parallel\simeq p\vartheta,\quad k_\perp\simeq\omega_s/v,\quad a=\omega_\parallel^2/\omega_\perp^2.$$

Интегрируя (28) по углу рассеяния ϑ, получим полную вероятность возбуждения поверхностных плазмонов:

$$\int_l W_s(\vartheta)d\vartheta=\frac{ae^2}{(1+a)^2}\left[\frac{3}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a(1+a)}{1+a^2}\right]. \tag{29}$$

При $a = 1$ формулы (28) и (29) переходят в соответствующие выражения для изотропной плазмы [8].

Переходя к потерям на возбуждение объемных плазмонов, заметим, что в отличие от изотропного случая эти потери характеризуются непрерывным спектром, лежащим (при пренебрежении пространственной дисперсией и запаздыванием взаимодействия) в интервале $(\omega_\perp, \omega_\parallel)$. В неограниченной плазме эти потери описываются последним слагаемым в (27), показывающим, что они происходят при сохранении суммарного импульса электрона и плазмона. Благодаря этому существует однозначная связь между углом рассеяния и величиной потерь. (Эта зависимость рассмотрена в работе [7], и мы не будем на ней останавливаться.) При наличии границ пролетающий заряд часть своего импульса затрачивает на объемное возбуждение, а часть передает поверхности раздела, в результате чего перпендикулярная поверхности компонента суммарного импульса заряда и плазмона не сохраняется. Вследствие зависимости энергии плазмона от импульса указанный механизм приведет к тому, что наблюдаемое значение энергетических потерь при фиксированном угле рассеяния будет характеризоваться фоном шириной $\Delta\omega = |\omega_\parallel - \omega_\perp|$. Математически это обстоятельство связано с тем, что в области частот между $\omega_\parallel$ и $\omega_\perp$ $\varepsilon_\parallel(\omega)\varepsilon_\perp(\omega)<0$; последнее, как видно из (27), и приводит к появлению дополнительного фона. Вдали от областей $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 0$, $\varepsilon_{\parallel,\perp}(\omega)=0$ и при выполнении неравенства $k_\parallel > k_\perp$ (не очень малые углы рассеяния) интенсивность фона характеризуется величиной

$$\Delta W(\omega, \vartheta) \simeq \frac{4e^2 k_\parallel}{k^4} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+|\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp|^{-1/2})^2}. \tag{30}$$

Она имеет тот же порядок, что и величина уменьшения поляризационных потерь в изотропной плазме, обусловленная наличием ее границ [3]*. Соответствующее выражение для анизотропной плазмы имеет громоздкий вид, и мы не будем его приводить.

Итак, наличие границ плазмы приводит к уменьшению интенсивности и расширению линии потерь, обуловленных возбуждением объемных плазмонов.

2. Рассмотрим теперь слой произвольной толщины. Поступая так же, как и ранее, получим следующие выражения для вероятности потерь на возбуждение нормальных и тангенциальных плазмонов:

$$W_n(\omega, \vartheta)d\vartheta \simeq \frac{2e^2|\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp|\,\omega^3 k_\parallel^2}{\pi v\,|2\omega_\perp^2 + 2\omega_\parallel^2 - 4\omega_\parallel^2\omega_\perp^2/\omega^2 + (k_\parallel d/\varepsilon_\parallel)(1-\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp)(\omega_\perp^2 - \omega_\parallel^2)|} \times \tag{31}$$

$$\times \left\{\frac{k_\perp \cos\beta}{k_\parallel}\left(1 - \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon}\right) + \sin\beta\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}^2 \frac{p d\vartheta}{k^4};$$

* Из приведенных рассуждений ясно, что появление фона и связанное с ним расширение линии потерь существует при любой зависимости энергии объемного плазмона от его импульса. В частности, оно может быть обусловлено пространственной дисперсией и, следовательно, существует как в изотропной, так и в анизотропной плазме. В анизотропной плазме зависимость энергии объемного плазмона от направления импульса, как правило, сильнее, чем от его величины; поэтому при рассмотрении ширины линии и угловой зависимости величины плазменных потерь в анизотропной плазме пространственную дисперсию можно не учитывать. В изотропной же плазме, напротив, она является основной.

$$W_\tau(\omega, \vartheta)d\vartheta \simeq \frac{2e^2 |\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp| \omega^3 k_\parallel^2}{\pi v |2\omega_\perp^2 + 2\omega_\parallel^2 - 4\omega_\parallel^2 \omega_\perp^2/\omega^2 + (k_\parallel d/\varepsilon_\parallel)(1-\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp)(\omega_\perp^2 - \omega_\parallel^2)|} \times$$

$$\times \left\{ \frac{k_\perp \sin\beta}{k_\parallel} \left(1 - \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon}\right) + \cos\beta \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \right\}^2 \frac{pd\vartheta}{k^4}. \quad (32)$$

Входящие сюда величины $k_\parallel$, $k_\perp$ определяются теми же формулами, что и в (28), а частоты ω — соотношениями (21) и (22) соответственно для нормальных и тангенциальных плазмонов.

Анализ формул (31) и (32) показывает, что угловая зависимость вероятности потерь в основном определяется множителем $k_\parallel^2/k^4$, как и в случае изотропной плазмы. Наибольший интерес поэтому представляет зависимость величины энергии потерь от угла рассеяния электрона. Ее легко определить, используя формулы (15), (21), (22). В качестве примера рассмотрим случай $\omega_\parallel^2/\omega_\perp^2 = 10$, $d = 500$ Å, $v = 10^9$ *см/сек*$^{-1}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\parallel,\perp}^i = 1$. Соответствующая кривая изображена на рис. 2. Легко видеть, что угол, характеризующий максимальную вероятность рассеяния электрона при возбуждении им поверхностного плазмона и приближенно определяемый максимальным значением множителя $k_\parallel^2/k^4$, равен

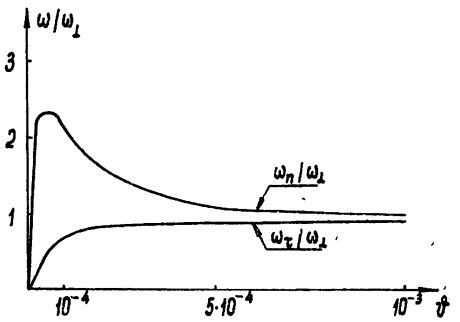


Рис. 2. Зависимость величины потерь, обусловленных возбуждением поверхностных плазмонов, от угла рассеяния ($v = 10^9$ *см* · *сек*$^{-1}$, $\omega_\parallel^2/\omega_\perp^2 = 10$, $d = 500$Å).

$$\vartheta_m \simeq \hbar\omega/2\sqrt{3}E. \quad (33)$$

Согласно (33), при $\omega_\parallel = 10^{15}$ *сек*$^{-1}$ $\vartheta_m \simeq 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ и, следовательно, этот пример является довольно благоприятным для экспериментального изучения зависимости величины энергетических потерь от угла рассеяния.

Особенностью потерь на возбуждение объемных плазмонов в рассматриваемом случае является то, что энергии последних (при фиксированном $k_\parallel$), как это видно непосредственно из (21) и (22), становятся дискретными. Приближенно уравнения (21) и (22) для объемных плазмонов можно записать в виде

$$|\sqrt{\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel}|\, k_\parallel d = n\pi \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (34)$$

Это уравнение есть не что иное, как уравнение (12) с дискретными значениями $k_\perp$, определяемыми равенством

$$k_\perp = n\pi/d \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (35)$$

Из этого следует, что потери на возбуждение объемных плазмонов в тонких пленках модулированы по энергиям и углам. Эти потери, как и в предыдущих случаях, сопровождаются фоном, который также является модулированным. Поскольку уравнение (34) содержит точку сгущения при $\omega = \omega_\parallel$, этот фон должен иметь небольшие «пички» в этой области. В силу неучитываемых здесь пространственной дисперсии и затухания плазмонов эти «пички», возможно, будут довольно размытыми.

Рассмотренные здесь особенности характеристических потерь заслуживают, на наш взгляд, экспериментального изучения. В частности, интересно было бы обнаружить анизотропию величины характеристических потерь в кубических кристаллах. Следует при этом заметить, что приведенные в разделе 3 выражения для энергии потерь в германии и кремнии учитывают лишь вклад электронов проводимости в образование плазмонов. В действительности же при прохождении быстрых электронов через пленки возбуждаются в основном плазмоны, в формировании которых принимают участие, по-видимому, несколько зон. Представляет также интерес изучение фона линии потерь в связи с рассмотренным в разделе 4 механизмом возбуждения объемных плазмонов в тонких пленках. Существующая точность эксперимента (см., например, [9]), на наш взгляд, позволяет обнаружить указанные эффекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Пафомов, Труды ФИАН, **16**, 94 (1961).
2. Ю. А. Романов, ЖЭТФ, **47**, 2119 (1964).
3. Сб. «Полупроводники» под ред. Н. В. Хинея, ИЛ, М., 1962, гл. VIII.
4. В. Л. Бонч-Бруевич, Ш. М. Коган, ФТТ, **1**, 1221 (1959); В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, Метод функций Грина в статистической механике, Физматгиз, М., 1961.
5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **34**, 1593 (1958).
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд-во Сов. радио, М, 1957.
7. И. О. Кулик, ЖЭТФ, **42**, 543 (1962).
8. Ю. А. Романов, Радиофизика, **7**, 242 (1964).
9. P. Schmüser, Zeit. f. Phys., **180**, 105 (1964); C. Kunz, Zeit. f. Phys., **180**, 127(1964).

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 26 января 1965 г.

COLLECTIVE LOSSES IN ANISOTROPIC CRYSTALS

Yu. A. Romanov

The collective losses have been considered, caused by volume and surface plasmon excitation in anisotropic plasma layers.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.373.42

АНАЛИЗ НЕРЕГУЛИРУЕМОГО СИНХРОНИЗОВАННОГО АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА

Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд

Обсуждается метод статистической обработки сигнала неавтономного объекта, позволяющий найти уравнения динамической системы, аппроксимирующей поведение сигнала на интервале его регистрации. Рассмотрены уравнения второго приближения по малым флуктуациям сигнала. Показано, что применение этого метода к анализу динамической структуры синхронизованного автогенератора позволяет отделить свойства, характеризующие поведение объекта в автономных условиях, от синхронизующего периодического воздействия.

Методике определения динамической структуры автоколебательного объекта по его сигналу в условиях, исключающих возможность влияния экспериментатора на установившееся движение объекта, посвящена статья [1]. Аналогичная задача, также являющаяся примером общей схемы «черного ящика без входа», обсуждается в данной работе, на этот раз применительно к автогенератору, синхронизованному периодическим воздействием. Интересующий нас здесь нерегулируемый объект состоит из двух энергетически слабо связанных частей, каждая из которых, взятая изолированно, является автогенератором. Эта работа стимулировалась предварительными результатами статистического исследования циклической активности Солнца [2], но рассмотрение имеет довольно общий характер.

Ограничимся случаем, когда для двух генераторов, составляющих нерегулируемый объект, парциальные периоды автоколебаний достаточно близки, а стабильности существенно различны. Влияние таких генераторов друг на друга качественно неодинаково. Действие стабильного генератора приводит к изменению динамики колебаний «грубого» генератора и их синхронизации, в то же время наличие «грубого» генератора практически не сказывается на динамических свойствах стабильного и сводится лишь к некоторому дополнительному шумовому возмущению колебаний последнего. Исходя из условия, что единственный доступный источник информации—это сигнал $x(t)$ синхронизованного генератора, обсудим возможность с помощью статистической обработки выделить парциальные динамические свойства этого генератора (т. е. характеристики его колебаний в изолированных от действия стабильного генератора условиях), а также оценить периодическое воздействие синхронизующего генератора.

1. СВЯЗЬ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛА С ДИНАМИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ ОБЪЕКТА

Остановимся сначала на общих соотношениях, связанных с анализом по схеме «черного ящика без входа» неавтономного объекта. Допустим для простоты, что среднестатистическое движение с хорошей точностью удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравне-

нию второго порядка. Тогда более подробному описанию поведения объекта можно придать вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(x, \frac{dx}{dt}, t; t\right).$$

Аргумент t входит в функцию Φ дважды: первый раз, отражая регулярную (например, периодическую) зависимость от времени, второй раз, отражая наличие быстрых и малых флуктуационных возмущений. Обозначив через $\varphi\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$ динамическую зависимость второй производной сигнала от времени, напишем:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, t) + F(t), \quad \langle F(t) \rangle = 0. \tag{1.1}$$

Удобно ввести специальные обозначения для решения динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, t), \tag{1.2}$$

аппроксимирующей поведение объекта при исчезающих значениях флуктуаций. Вдоль кривой

$$x = u(\theta), \quad y = v(\theta), \tag{1.3}$$

соответствующей интересующему нас решению этой системы, введем координату θ, совпадающую со временем динамического движения точки (1.3) от фиксированного ее положения $\theta = t = 0$: $\theta = \int_0^t (du/v)$.

Допустив для простоты, что кривая (1.3) не имеет особых точек (в частности—самопересечений*), перейдем в ее окрестности к локальным координатам—тангенциальной координате θ и ортогональному отклонению n (см. [1]). Для точки $x, y \parallel t$, соответствующей движению (1.1), близкому в пространстве (x, y, t) к (1.3), напишем:

$$x = u + n\sin\alpha, \quad y = v + n\cos\alpha, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\varphi}{v}\right), \quad \gamma = \theta - t.$$

Введем краткие обозначения для характеристик динамической системы, вычисленных на кривой (1.3) при $t = \theta$:

$$\varphi = \varphi(u, v, \theta), \quad \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial n}\varphi(u + n\sin\alpha, \ v + n\cos\alpha, \ \theta)_{n=0}$$

и аналогично

$$\varphi_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}, \quad \varphi_4 = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\,\partial\theta}, \quad \varphi_5 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}.$$

Будем предполагать, что действие флуктуационной силы F достаточно мало, и ограничимся учетом квадратичных по отклонениям от движения (1.3) членов, отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости. Считая θ аргументом и полагая $t = t(\theta)$ (таким образом,

* Движение (1.2) неавтономной системы однозначно определяется (при достаточно общих условиях, наложенных на φ) начальными условиями в трехмерном пространстве (x, y, t), а не на плоскости (x, y), где отображена лишь проекция такого движения.

t — момент прохождения изображающей точкой $x, y \parallel t$ тангенциальной координаты θ), перепишем (1.1) в виде

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(v + n\frac{d\alpha}{d\theta}\cos\alpha\right) + \frac{dn}{dt}\sin\alpha = n\left(1 - \frac{d\alpha}{d\theta}\right)\cos\alpha, \tag{1.4}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(\varphi - n\frac{d\alpha}{d\theta}\sin\alpha\right) + \frac{dn}{dt}\cos\alpha = n\left(\varphi_1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\sin\alpha\right) + \\ + \gamma\varphi_2 + n^2\varphi_3 + n\gamma\varphi_4 + \gamma^2\varphi_5 + F. \tag{1.5}$$

Для сокращенной записи формул, связывающих динамические характеристики φ_k с корреляционными функциями сигнала объекта, введем обозначения:

$$\xi^{(1)} = n, \quad \xi^{(2)} = \gamma, \quad \xi^{(3)} = n^2, \quad \xi^{(4)} = n\gamma, \quad \xi^{(5)} = \gamma^2.$$

Искомая система уравнений получается из (1,5) путем поочередных умножений на каждую из переменных $\xi^{(k)}$ и последующего статистического усреднения:

$$\sum_{k=1}^{5} L^{(i,\,k)}(\tau)\,\varphi_k = M^{(i)}(\tau) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{1.6}$$

Здесь

$$L^{(i,\,k)}(\tau) = \langle \xi^{(i)}(t-\tau)\,\xi^{(k)}(t)\rangle, \quad M^{(i)}(\tau) = \left\langle \xi^{(i)}(t-\tau)\frac{d\xi^{(1)}}{dt}(t)\right\rangle\cos\alpha + \\ + \varphi\left\langle \xi^{(i)}(t-\tau)\frac{d\xi^{(2)}}{dt}(t)\right\rangle - \frac{d\alpha}{d\theta}\left[\left\langle \xi^{(i)}(t-\tau)\times\right.\right. \tag{1.7}$$

$$\left.\left.\times\,\xi^{(1)}(t)\frac{d\xi^{(2)}}{dt}(t)\right\rangle + \langle \xi^{(i)}(t-\tau)\,\xi^{(1)}(t)\rangle\right]\sin\alpha - \langle \xi^{(i)}(t-\tau)\,F(t)\rangle.$$

Для широкого круга физических процессов интервал корреляции флуктуационной силы F весьма мал по сравнению с существенными временами $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$ установления аппроксимирующей объект динамической системы q-го порядка. Исходя из этого, здесь, как и в [1], предполагается, что $F(t)$ — коротко коррелированный случайный процесс:

$$\langle F(t)\,F(t+\tau)\rangle = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| > \Delta, \quad \Delta \ll \tau_1, \tau_2. \tag{1.8}$$

Поскольку отклик реального объекта определяется только предшествующими значениями возмущающей силы, в выражении (1.7) для $M^{(i)}(\tau)$ при $\tau > \Delta$ следует на основании (1.8) считать, что $\langle \xi^{(i)}(t-\tau)F(t)\rangle = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Так, из правых частей уравнений (1.6) исчезают члены, не определяемые непосредственно по сигналу объекта. Полученная при этом система уравнений дает возможность вычислить динамические характеристики $\varphi_k(\theta)$ по корреляционным функциям отклонений сигнала от регулярного движения (1.3); в обсуждаемой математической модели объекта такие отклонения являются результатом действия возмущающей динамическую систему и не зависящей от динамического состояния флуктуационной силы $F(t)$. Качество же аппроксимации поведения анализируемого объекта с помощью динамической системы q-го порядка, возмущаемой короткокоррелированным флуктуационным процессом, проще всего оценить тем, насколько решение $\varphi_k(\theta)$ системы (1.6) не зависит от выбора сдвига τ при выполнении условия

$$\Delta < |\tau| < \min(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q).$$

Учет квадратичных по n, γ членов позволяет указать определяемые интенсивностью флуктуаций регулярные поправки, отличающие среднестатистическую траекторию объекта от динамической схемы движения (1.3). Усреднение уравнений (1.4), (1.5) дает для средних значений $r = \langle n \rangle$, $g = \langle \gamma \rangle$ отклонений реального сигнала от схемы (1.3):

$$\frac{dg}{dt} = \frac{1}{p}\left[\left(\cos^2\alpha - \frac{d\alpha}{d\theta} - \varphi_1 \sin\alpha\right) - \varphi_2 g \sin\alpha - \frac{d\alpha}{d\theta}\left\langle n\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle - \right.$$
$$\left. -(\varphi_3\langle n^2\rangle + \varphi_4\langle n\gamma\rangle + \varphi_5\langle\gamma^2\rangle)\sin\alpha\right], \tag{1.9}$$

$$\frac{dr}{dt} = [(\varphi_1 - \sin\alpha)r + \varphi_2 g + \varphi_3\langle n^2\rangle + \varphi_4\langle n\gamma\rangle + \varphi_5\langle\gamma^2\rangle]\cos\alpha, \quad p = \sqrt{\varphi^2 + v^2}. \tag{1.10}$$

Поскольку коэффициенты в этой системе уравнений, а также корреляционные функции можно считать известными, отсюда при начальных условиях $r(0) = g(0) = 0$ получаем как отклонение $r(\theta)$, так и регулярное тангенциальное смещение $g(\theta)$ среднестатистического движения от динамического. Эти поправки связаны с детектированием нелинейной динамической системой внутренних флуктуаций.

Проведенное обсуждение показывает, что использование достаточно полного набора среднестатистических характеристик сигнала позволяет провести подробный анализ оптимальной динамической аппроксимации объекта. Учитываемое при таком рассмотрении число членов в разложениях функций по степеням малых отклонений n, γ сигнала от динамического движения определяется как практическими возможностями исследователя, так и потребностями анализа. Во многих задачах достаточно ограничиться линейным по n, γ рассмотрением; при этом уравнения (1.4), (1.5) существенно упрощаются:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{p^2}\left[\left(\frac{v^2}{p} - \frac{d\alpha}{d\theta}p + \varphi\varphi_1\right)n + \varphi_2\varphi\gamma + \varphi F\right], \tag{1.11}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{v}{p}\left[\left(\varphi_1 - \frac{\varphi}{p}\right)n - \varphi_2\gamma + F\right]. \tag{1.12}$$

Входящие сюда параметры φ, p, $\frac{d\alpha}{d\theta} \parallel \theta$ так же, как и производная вдоль траектории $\frac{d\varphi}{d\theta} \parallel \theta$, последовательно вычисляются очевидным образом из зависимостей $u, v \parallel \theta$, заданных среднестатистической траекторией, поскольку она в первом по n, γ приближении совпадает с динамической кривой (1.3). Домножая уравнения (1.11) и (1.12) соответственно на $n(t-\tau)$, $\gamma(t-\tau)$ при $\tau > \Delta$ и усредняя, получим два уравнения, из которых определяется $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$, $\varphi_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \parallel \theta$. После этого с помощью формул

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \cos\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sin\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{d\varphi}{dn} = \sin\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

можно найти $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$. Таким образом, расчет по простейшей схеме дает функции.

$$\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\ \|\ \theta,$$

определяющие линеаризованную по малым отклонениям от движения (1.3) динамическую структуру объекта.

Обсуждая общую схему анализа неавтономного объекта и не определяя даже качественно зависимость его характеристики $\varphi(x, y, t)$ от t, мы, конечно, ничего не можем сказать о виде нестационарности случайных процессов, описывающих сигнал объекта. До конкретизации характера неавтономности нельзя поэтому указать способ вычисления по единственной реализации случайного процесса его математического ожидания и корреляционной функции. В интересующей же нас здесь задаче анализа установившихся колебаний синхронизованного автогенератора речь будет идти о периодически нестационарных случайных процессах, для которых способ оценки средних статистических по одной достаточно длинной записи известен [3].

2. ОБРАБОТКА СИГНАЛА АВТОНОМНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА

Схема анализа динамической структуры нерегулируемого автогенератора в установившемся автономном режиме обсуждались в работе [1], исходя из линейного приближения относительно отклонений n, γ сигнала генератора от предельного цикла. Кратко остановимся на более подробной схеме расчета (учитывающей и квадратичные члены) в простейшем случае аппроксимации объекта динамической системой второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = y,\quad \frac{dy}{dt} = f_0(x, y) + F(t). \tag{2.1}$$

Пусть

$$x = u^{(0)}(\theta),\qquad y = v^{(0)}(\theta) \tag{2.2}$$

— устойчивый предельный цикл динамической системы с периодом T_0. Переходя к локальным координатам с помощью формул

$$x = u^{(0)} + n\sin\alpha^{(0)},\quad y = v^{(0)} + n\cos\alpha^{(0)},\quad \alpha^{(0)} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_0}{v^{(0)}}\right),$$

перепишем уравнения (2.1) в виде

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(v^{(0)} + n\frac{d\alpha^{(0)}}{d\theta}\cos^{(0)}\right) + \frac{dn}{dt}\sin\alpha^{(0)} = n\left(1 - \frac{d\alpha^{(0)}}{d\theta}\right)\cos\alpha^{(0)}, \tag{2.3}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(f_0 - n\frac{d\alpha^{(0)}}{d\theta}\sin\alpha^{(0)}\right) + \frac{dn}{dt}\cos\alpha^{(0)} = n\left(\frac{d\alpha^{(0)}}{d\theta}\sin\alpha^{(0)} + \frac{\partial f_0}{\partial n}\right) + \frac{n^2}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2} + F. \tag{2.4}$$

Учет квадратичных по n, γ членов позволяет подробнее проанализировать динамические свойства объекта и, в частности, оценить смещение среднестатистической траектории объекта от предельного цикла и регулярное изменение тангенциальной скорости изображающей точки $x, y \parallel t$ относительно динамического движения. Эти поправки характеризуют зависимость формы и периода среднестатистического объекта от интенсивности флуктуационной силы F. Сдвиг среднестатистической траектории $x = U_0(\theta)$, $y = V_0(\theta)$ относительно предельного цикла опреде-

ляется математическим ожиданием отклонения сигнала по нормали от цикла $r_0 = \langle n \rangle \parallel \theta$. Из (2.3), (2.4) имеем:

$$\frac{dr_0}{d\theta} + Nr_0 = \Psi_0, \tag{2.5}$$

где

$$N = -\left(\sin\alpha^{(0)} + \frac{\partial f_0}{\partial n}\right)\cos\alpha^{(0)}, \quad \Psi_0 = \frac{\langle n^2\rangle}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2}\cos\alpha^{(0)}.$$

При учете замкнутости предельного цикла и среднестатистической траектории отсюда получаем

$$r_0(\theta) = \frac{1}{W(\theta)}\left[\int_0^\theta \Psi_0(\xi)\, W(\xi)\, d\xi + \frac{1}{W(T_0)-1}\int_0^{T_0} \Psi_0(\xi)\, W(\xi)\, d\xi\right],$$
$$W(\theta) = \exp\left[\int_0^\theta N(\xi)\, d\xi\right]. \tag{2.6}$$

Обработка траектории изображающей точки объекта $x, y \parallel t$ позволяет построить на плоскости (x, y) среднестатистическую траекторию (см. [1, 2]). Последняя отличается от предельного цикла лишь во втором порядке малости: поэтому параметры $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, f_0, $\left(\frac{df_0}{d\theta}\right) \parallel \theta$ можно вычислять непосредственно по кривой U_0, $V_0 \parallel \theta$; аналогично вместо отклонений n, γ сигнала от динамического движения можно брать ортогональное и тангенциальное отклонения от средстатистической траектории. Определив N, $\Psi_0 \parallel \theta$, найдем $r(\theta)$, после чего предельный цикл в локальных координатах n', $\gamma' \parallel \theta'$, связанных с кривой U_0, $V_0 \parallel \theta$, определяется формулой $n'(\theta') = -r(\theta')$.

Из уравнений (2.3), (2.4) можно найти также регулярную поправку, оценивающую разницу тангенциальных скоростей динамического и среднестатистического движений. Полагая $\langle\gamma\rangle = g_0$, напишем

$$\frac{dg_0}{dt} = \Gamma_1\langle n^2\rangle + \Gamma_2\left\langle n\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle + Gr_0, \tag{2.7}$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{f_0}{2p_0^2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2}, \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{p_0}\frac{d\alpha^{(0)}}{d\theta}, \quad G = \frac{1}{p_0}\left[\frac{(v^{(0)})^2}{p_0^2} - \frac{d\alpha^{(0)}}{d\theta} + \frac{f_0}{p_0}\frac{\partial f_0}{\partial n}\right],$$
$$p_0 = \sqrt{f_0^2 + (v^{(0)})^2}.$$

В случае автономности анализируемого объекта, кроме характеристик динамического движения, вычисляемых непосредственно по кривой U_0, $V_0 \parallel \theta$, во втором приближении следует отыскать только две функции $\frac{\partial f_0}{\partial n}$, $\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2} \parallel \theta$. Систему двух уравнений, определяющих эти динамические характеристики, можно написать, умножая (2.4) по очереди на $n(\theta-\tau)$ и $\gamma(\theta-\tau)$ при $\tau > \Delta$ и проводя статистическое усреднение.

3. АНАЛИЗ СИНХРОНИЗОВАННОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

Вернемся теперь к задаче об определении динамической структуры синхронизованного генератора. Напишем две системы динамических уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f_0(x, y); \tag{3.1}$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y, \mu q(t)), \tag{3.2}$$

где $f_0(x, y) = f(x, y, 0)$, $\mu q(t) = \mu q(t+T)$ — синхронизующее периодическое воздействие ($0 < \mu \ll 1$). Уравнения (3.1) описывают динамику сигнала анализируемого объекта в автономных условиях; уравнения (3.2) написаны для динамической аппроксимации того же объекта при наличии энергетически слабого действия на него стабильного генератора. Обсуждаемая здесь задача заключается, прежде всего, в «восстановлении» динамических свойств автономного объекта, находящегося в режиме синхронизованных колебаний; помимо этого мы хотим найти и синхронизующее воздействие. Поскольку сигнал $x(t)$ объекта является здесь единственным источником информации, заранее ясно, что возможности предлагаемого метода ограничены.

Поясним это на примере. В то время как системы (3.1) и (3.2) качественно различны, возмущение динамической системы может и не менять характерные свойства объекта. Таково, например, возмущение системы (3.1), имеющее вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y, \mu q_0), \quad q_0 = \text{const} \tag{3.3}$$

и оставляющее объект автономным. Исследуя единственный сигнал такого объекта, можно получить с какой-то точностью уравнение (3.3), но это, очевидно, не позволяет, «сняв» возмущение, вернуться к невозмущенной системе ($\mu = 0$). Поэтому в рамках обсуждающейся здесь методики нельзя ответить и на вопрос о величине постоянной составляющей синхронизующего воздействия.

По предположению, автономная динамическая система имеет устойчивое периодическое решение $x = u^{(0)}(t)$ периода T_0, близкого к T, т. е. у системы (3.1) есть устойчивый предельный цикл

$$x = u^{(0)}(t), \quad y = v^{(0)}(t), \quad u_0(t+T_0) = u_0(t), \quad T_0 - T = 0(\mu T_0). \tag{3.4}$$

Допустим, что выполнены условия синхронизации, и система (3.2) имеет близкое к (3.4) периодическое решение $x = u(t)$. Решения уравнений (3.2) изображаются траекториями в трехмерном пространстве (x, y, t): проектируя траекторию, соответствующую периодическому решению, на плоскость (x, y), получим

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad u(t+T) = u(t). \tag{3.5}$$

Будем считать, что замкнутая кривая (3.5), подобно циклу (3.4), является гладкой кривой без особых точек в смысле дифференциальной геометрии. Предположим, что якобиан $J(\theta, n) = \partial(x, y)/\partial(\theta, n)$, где θ, n — локальные координаты, связанные с кривой (3.5), отличен от нуля в некоторой ее окрестности $|n| < n^* \| \theta$, из которой изображающая точка $x, y \| t$, соответствующая сигналу синхронизованного автогенератора в установившемся режиме, не выходит под действием малой флуктуационной силы F в течение всего времени регистрации сигнала. Линеаризация уравнений (3.2) по малому параметру μ дает

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f_0(x, y) + \mu q(t) f_1(x, y), \quad f_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial \mu} f(x, y, \mu = 0); \tag{3.6}$$

в дальнейшем при оценке динамических характеристик ограничимся первым по μ приближением.

Анализ динамической структуры по сигналу объекта во втором приближении относительно отклонений n, $\gamma = \theta - t$, помимо большого объема вычислительной работы, требует высокую точность регистрации (включая чистую фильтрацию сигнала от аддитивного шума, добавляющегося на пути от выхода автоколебательного объекта до непосредственной регистрации) и при данной интенсивности флуктуаций — достаточную длительность интервала времени регистрации сигнала. В некоторых случаях эти требования невыполнимы; в то же время ответ на ряд вопросов может быть получен уже в первом по n, γ приближении. Поэтому рассмотрим вначале, какую информацию дает статистическая обработка сигнала синхронизованного автоколебательного объекта в линеаризованном относительно n и γ приближении.

В соответствии с разделом 1, учет только линейных по n, γ членов дает в результате вычисления корреляционных функций и решения линейных уравнений функции φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \parallel \theta$. В нашем случае это

$$\varphi = f_0 + \mu q f_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial x} + \mu q \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f_0}{\partial y} + \mu q \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \mu \frac{dq}{d\theta} f_1. \quad (3.7)$$

Значение этих четырех функций, вобще говоря, не позволяет отделить автономные свойства автогенератора от синхронизующего воздействия. Для такого разделения нужны дополнительные сведения. Так, например, если бы из каких-либо соображений выяснилось, что синхронизующее воздействие на анализируемый объект не зависит от состояния автогенератора, так что искомые уравнения можно заранее писать в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f_0(x, y) + \mu q(t) f_1, \quad f_1 = \text{const},$$

то, исходя из системы функций (3.7), мы бы получили

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mu q(\theta) f_1 = \int_0^\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\xi)\, d\xi + C, \quad f_0 = \varphi - \int_0^\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\xi)\, d\xi - C.$$

Иными словами, в этом случае первое приближение по n, γ дало бы нужный результат. В интересующей же нас схеме анализа, когда кроме сигнала нет никаких источников информации, априорное предположение $f_1 = \text{const}$ произвольно и не может быть проверено, так что для решения поставленной здесь задачи учет второго по n, γ приближения необходим.

Для синхронизованного автогенератора вычисленные на кривой (3.5) частные производные динамической характеристики объекта $\varphi(x, y, t)$ (в обозначениях, использованных в первом разделе) имеют вид

$$\varphi_k = \varphi_k^{(0)} + \mu \varphi_k^{(1)} \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

(линейное по μ приближение). При этом

$$\varphi^{(0)} = f_0, \quad \varphi^{(1)} = q f_1, \quad \varphi_1^{(0)} = \frac{\partial f_0}{\partial n}, \quad \varphi_1^{(1)} = q \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}, \quad \varphi_2^{(0)} = 0,$$

$$\varphi_2^{(1)} = -\frac{dq}{d\theta} f_1, \quad \varphi_3^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2}, \quad \varphi_3^{(1)} = \frac{1}{2} q \frac{\partial^2 f_1}{\partial n^2}, \quad \varphi_4^{(0)} = 0,$$

$$\varphi_4^{(1)} = -\frac{dq}{d\theta}\frac{\partial f_1}{\partial n}, \quad \varphi_5^{(0)} = 0, \quad \varphi_5^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{d^2q}{d\theta^2}f_1,$$

где функции f_0, f_1 и их производные взяты при $n = 0$.

Когда все $\varphi_k(\theta)$ найдены, разделение динамических свойств объекта на автономные и определяемые воздействием синхронизующей силы достигается следующим образом. Для $s = \frac{dq}{d\theta}$ справедливо равенство $\varphi_5/\varphi_2 = -\frac{1}{2}\frac{d(\ln s)}{d\theta}$, откуда

$$s(\theta) = C_1\sigma(\theta), \quad q(\theta) = C_1\int_0^\theta \sigma(\xi)\,d\xi + C_2, \quad \sigma(\theta) = \exp\left[-2\int_0^\theta \frac{\varphi_5(\xi)}{\varphi_2(\xi)}\,d\xi\right].$$

Поскольку, как было отмечено, постоянная составляющая функции $q(\theta)$ данным методом не определяется, для сокращения выкладок положим $C_2 = 0$. Исходя из формулы $f_1 = -\varphi_2/\mu s$, имеем далее: $f_1(\theta) = -\varphi_2(\theta)/\mu C_1\sigma(\theta)$ и, следовательно,

$$\mu\, q(\theta)\, f_1(\theta) = -\frac{\varphi_2(\theta)}{\sigma(\theta)}\int_0^\theta \sigma(\xi)\,d\xi.$$

Используя соотношение $\frac{\partial f_1}{\partial n} = -f_4/\mu p$, получаем:

$$\frac{\partial f_0}{\partial n}(\theta) = \varphi_1(\theta) + \frac{\varphi_4(\theta)}{\sigma(\theta)}\int_0^\theta \sigma(\xi)\,d\xi.$$

и, наконец,

$$f_0(\theta) = \varphi(\theta) - \mu\, q(\theta)\, f_1(\theta) = \varphi(\theta) + \frac{\varphi_2(\theta)}{\sigma(\theta)}\int_0^\theta \sigma(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда ясно, что, исходя из функций $\varphi(\theta)$, $\{\varphi_k(\theta)$, $k=1, 2, 3, 4, 5\}$, удается получить отдельно характеристики автономной динамической системы и синхронизующего воздействия

$$f_0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial n}, \quad \mu qf_1, \quad \mu q\frac{\partial f_1}{\partial n} \parallel \theta.$$

Только функции $\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2}$ и $\frac{\partial^2 f_1}{\partial n^2}$, более детально характеризующие динамическую структуру, на основе второго по n приближения разделить еще нельзя. По всей видимости, в большинстве задач, связанных с анализом динамических свойств синхронизованного автогенератора, нецелесообразно привлекать для получения $\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2}\right)\theta$ третье относительно n приближение, исследование которого существенно сложнее. Для грубых оценок $\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2}$ можно воспользоваться нулевым приближением по μ, полагая

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial n^2} = 2\varphi_3, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial n^2} = 0.$$

Среднестатистическая траектория

$$x = U(t), \quad y = V(t) \tag{3.8}$$

синхронизованного генератора может быть построена на плоскости (x, y) тем же путем, что и в случае автономного колебательного объекта [1, 2]; она отличается от периодического решения (3.5) динамической системы во втором относительно n, γ порядке малости. В локальных координатах, связанных с кривой (3.5), траектория (3.8) является периодическим (с периодом T) решением $\langle\gamma\rangle = g(\theta)$, $\langle n\rangle = r(\theta)$ системы уравнений

$$\frac{dg}{dt} - \Theta r + Kg = \Psi_0' + \mu\Psi_1', \tag{3.9}$$

$$\frac{dr}{dt} + Nr + \mu L g = \Psi_0 + \mu\Psi_1. \tag{3.10}$$

В последней, согласно (1.9), (1.10),

$$\Theta = \frac{1}{p}\left(\cos^2\alpha - \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{d\alpha}{d\theta}\right), \quad K = -\frac{\mu}{p}\frac{dq}{d\theta} f_1 \sin\alpha, \quad N = \left(\sin\alpha - \frac{\partial f}{\partial n}\right)\cos\alpha,$$

$$L = -\frac{dq}{d\theta} f_1 \cos\alpha, \quad \Psi_0' = -\frac{1}{p}\left[\frac{d\alpha}{d\theta}\left\langle n\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle + \frac{\langle n^2\rangle}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\sin\alpha\right],$$

$$\Psi_0 = \frac{\langle n^2\rangle}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\cos\alpha,$$

$$\Psi_1' = -\frac{1}{p}\left(\langle n\gamma\rangle\frac{dq}{d\theta}\frac{\partial f_1}{\partial n} + \frac{\langle\gamma^2\rangle}{2}\frac{d^2q}{d\theta^2} f_1\right)\sin\alpha,$$

$$\Psi_1 = \left(\frac{\langle\gamma^2\rangle}{2}\frac{d^2q}{d\theta^2} f_1 - \langle n\gamma\rangle\frac{dq}{d\theta}\frac{\partial f_1}{\partial n}\right)\cos\alpha.$$

Подчеркнем, что среднестатистической траектории соответствует решение, периодическое не только для ортогонального отклонения (что тривиально, поскольку просто отражает замкнутость траектории), но и для тангенциальных сдвигов, т. е. $\int_0^T \frac{dg}{d\theta}(\xi)d\xi = 0$. Таким образом, в силу устойчивости решения (3.4) динамической системы, здесь не происходит среднего по периоду регулярного смещения частоты, вызванного флуктуациями. Детектирование флуктуаций в данном случае приводит лишь к периодически изменяющемуся во времени регулярному сдвигу фазы колебаний; это отличает синхронизованный генератор от автономного (см. (2.7)). Решение системы (3.9), (3.10) при условии $r(0) = r(T)$, $g(0) = g(T)$ получаем формальным (в соответствии с явно выделенным в записи (3.9), (3.10) малым параметром μ) методом последовательных приближений по μ, полагая

$$r = r_0 + \mu r_1, \quad g = g_0 + \mu g_1, \quad r_0(0) = r_0(T), \quad g_0(0) = g_0(T),$$

$$r_1(0) = r_1(T), \quad g_1(0) = g_1(T).$$

При этом r_0 определится непосредственно формулой (2.6); для g_0 в свою очередь имеем:

$$g_0(\theta) = \frac{1}{W'(\theta)}\left\{\int_0^{\theta}[\Psi_0'(\xi) - G(\xi)\, r_0(\xi)]\, W'(\xi)\, d\xi + \frac{1}{W'(T)-1}\int_0^{T}[\Psi_0'(\xi) -\right.$$

$$\left. - G(\xi)\, r_0(\xi)]\, W'(\xi)\, d\xi\right\},\quad W'(\theta) = \exp\left[\int_0^{\theta} K(\xi)\, d\xi\right].$$

Члены первого приближения определяются аналогично из уравнений

$$\frac{dr_1}{dt} + Nr_1 = \Psi_1 - Lg_0,\quad \frac{dg_1}{dt} + Kg_1 = \Psi_1' - Gr_1.$$

Построение предельного цикла автономной системы может быть в принципе осуществлено, исходя из вычисленных параметров $f_0, \frac{\partial f_0}{\partial n} \parallel \theta$. Значительно проще можно найти его положение, отправляясь от кривой (3.5). Оценим соответствующую поправку $h(\theta)$, где θ — тангенциальная координата, отсчитываемая вдоль (3.5). Для этого подставим формулы

$$u_0 = u + h\sin\alpha,\qquad v_0 = v + h\cos\alpha \parallel \theta$$

в уравнение автономной динамической системы

$$\frac{dv_0}{d\theta}\Big/\frac{du_0}{d\theta} = \frac{f_0(u_0,\, v_0)}{v_0}.$$

Ограничиваясь первым приближением по μ ($h \sim \mu$) и используя уравнения динамической системы (3.6), справедливые, очевидно, для ее периодического решения (3.5)

$$\frac{du}{d\theta} = v,\quad \frac{dv}{d\theta} = f(u,\, v) + \mu\, q(\theta)\, f_1(u,\, v),$$

получим

$$\frac{dh}{d\theta} + Nh = -\mu\, qf_1\cos\alpha \parallel \theta.$$

Смысл последней формулы ясен. Это уравнение возмущения предельного цикла синхронизующей силой, написанное для ортогональной составляющей; его решение имеет вид

$$h(\theta) = -\frac{\mu}{W(\theta)}\left[\int_0^{\theta} W(\xi)\, q(\xi)\, f_1(\xi)\cos\alpha(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{W(T)-1}\int_0^{T} W(\xi) q(\xi)\, f_1(\xi)\cos\alpha(\xi)\, d\xi\right].$$

4. ДИСПЕРСИЯ НАБЕГА ФАЗЫ АВТОГЕНЕРАТОРА

Обработка второго приближения для анализа автоколебательного объекта по схеме «черного ящика без входа» является значительно более трудоемкой задачей, чем расчет путем линеаризации флуктуаций. Однако, как было показано, рассмотрение первого приближения относительно отклонений сигнала синхронизованного объекта от его средне-

статистического движения не позволяет в общем случае отделить парциальные свойства автогенератора от действия синхронизующей силы. В то же время для исследования динамической структуры автономного генератора в обычных задачах достаточно провести статистическую обработку его сигнала в первом приближении по n, γ. Поэтому важно суметь отличить синхронизованный автоколебательный объект от автономного по какой-нибудь сравнительно простой характеристике. С этой целью кратко сравним статистические свойства сигнала генератора в автономном и синхронизованном режиме. Ограничиваясь линейным по n, γ приближением, напишем:

$$\frac{dn}{dt} + Nn - \mu L\gamma = F_n, \tag{4.1}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + K\gamma - \Theta n = F_\gamma; \tag{4.2}$$

при этом, как и раньше, $K = \mu \dfrac{dq}{d\theta} \dfrac{f_0 f_1}{p^2}$.

Из (4.1) видно, что в автономном случае ($\mu = 0$), как и в случае синхронизации слабым воздействием ($\mu \neq 0$, $|\mu| \ll 1$), флуктуации установившихся ортогональных отклонений имеют практически одинаковые ограниченные дисперсии; мало отличаются и интервалы их автокорреляции, определяющиеся средней жесткостью предельного цикла:

$$\tau_n \sim \frac{1}{N_0}, \quad N_0 = \frac{1}{T}\int_0^T N(\xi)\, d\xi.$$

Характер же решения, описывающего флуктуации тангенциальной координаты (или фазы сигнала) $\gamma(t)$ синхронизованного генератора принципиально отличается от автономного случая.

Интересуясь поведением набега фазы

$$\Delta\gamma(t, \tau) = \gamma(t + \tau) - \gamma(t)$$

при достаточно больших сдвигах τ, можно отбросить в первом приближении осцилляционные составляющие динамических характеристик N, K, L, $\Theta \parallel \theta$, учитывая лишь их средние по периоду значения, а также считать флуктуационные силы F_n, F_γ стационарными случайными процессами. При этом из (4.1), (4.2) получим:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + (N_0 + K_0)\frac{d\gamma}{dt} + [N_0 K_0 - \mu L_0 \Theta_0]\gamma = F_\gamma' + \Theta_0 F_n + N_0 F_\gamma$$

и соответственно

$$\gamma = A_1(t)\exp(\lambda_1 t) + A_2(t)\exp(\lambda_2 t),$$

где

$$A_m = \frac{(-1)^m}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_{-\infty}^{t} [(N_0 + \lambda_m) F_\gamma(\xi) + \Theta_0 F_n(\xi)] \exp(-\lambda_m \xi)\, d\xi,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[(N_0 + K_0) \pm \sqrt{(N_0 - K_0)^2 + 4\mu L_0 \Theta_0}\right],$$

$$K_0 = \frac{1}{T}\int_0^T K(\xi)\, d\xi.$$

Для упрощения выкладок и окончательных формул пренебрежем малым интервалом автокорреляции флуктуационных сил; усредняя по динамической траектории и вводя средние интенсивности D_γ, D_n, напишем:

$$\langle F_\gamma(\xi)\, F_\gamma(\eta)\rangle = D_\gamma\delta(\xi-\eta),\quad \langle F_n(\xi)F_n(\eta)\rangle = D_n\delta(\xi-\eta),\quad \langle F_n(\xi)\, F_\gamma(\eta)\rangle = 0.$$

Тогда корреляционная функция набега фазы приобретает вид

$$\langle\gamma(t-\tau)\,\gamma(t)\rangle = B_1\exp(\lambda_1\tau) + B_2\exp(\lambda_2\tau),$$

$$B_1 = \frac{D_\gamma}{2\lambda_1(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left(\lambda_1^2-N_0^2-\frac{D_n}{D_\gamma}\Theta_0^2\right),\quad B_2 = \frac{D_\gamma}{2\lambda_2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left(\lambda_2^2-N_0^2-\frac{D_n}{D_\gamma}\Theta_0^2\right).$$

Наконец, для дисперсии набега фазы, отбросив в выражениях λ_1 и λ_2 малый член $4\mu L_0\Theta_0$, находим:

$$\langle(\Delta\gamma_\tau)^2\rangle = \frac{D_\gamma}{K_0N_0^2}\left\{\left(N_0^2+\frac{D_n}{D_\gamma}\Theta_0^2\right)[1-\exp(-K_0\tau)]-\frac{K_0}{N_0}\frac{D_n}{D_\gamma}\Theta_0^2[1-\exp(-N_0\tau)]\right\}.$$

В случае $\mu = 0$ получаем аналогичным образом:

$$\langle(\Delta\gamma_\tau)^2\rangle = \left(D_\gamma+\frac{\Theta_0^2}{N_0^2}D_n\right)\tau-\frac{\Theta_0^2}{N_0^3}D_n[1-\exp(-N_0(\tau)].$$

Таким образом, зависимость дисперсии набега фазы от сдвига τ является удобной характеристикой, отличающей синхронизованный автогенератор от автономного. Необходимо, однако, отметить, что синхронизация генератора связана с рядом существенных осложнений, не учитываемых в приведенных здесь оценках. Прежде всего, стабильный генератор находится под действием как своих внутренних флуктуаций, так и шумов «грубого» генератора. Это приводит к диффузионному размытию фазы колебаний стабильного генератора, правда, со значительно меньшей, чем у «грубого», скоростью роста по τ дисперсии набега фазы. Кроме того, используемая здесь модель упругой привязки фазы сигнала синхронизованного генератора к фазе синхронизующего воздействия справедлива лишь на сравнительно малом интервале флуктуационных отклонений $|\gamma|\ll T$; редкие большие флуктуации могут перебрасывать изображающую точку через границы такого интервала, что приводит к невосстанавливаемому набегу фазы [4, 5]. Оба перечисленных эффекта приводят к тому, что дисперсия набега фазы реального синхронизованного автоколебательного объекта, как и для автономного генератора, неограниченно растет вместе с τ. Переход от участка быстрого роста дисперсии (со скоростью $\frac{d}{d\tau}\langle(\Delta\gamma_\tau)^2\rangle = D_\gamma$, соответствующей автономному режиму этого генератора) к последующему более медленному

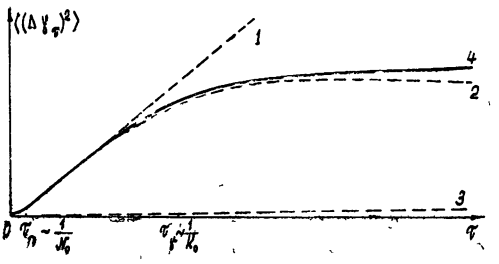


Рис. 1. Зависимость дисперсии набега фазы от сдвига в различных автогенераторах:

1—автономные колебания „грубого" генератора, 2—колебания „грубого" генератора при его идеальной синхронизации, 3—колебания стабильного генератора, 4—колебания реального синхронизованного генератора.

ее возрастанию характерен именно для синхронизованного автогенератора. Изображенный на рис. 1 график (4) зависимости дисперсии набега фазы синхронизованного генератора от сдвига τ наглядно иллюстрирует рассуждения, проведенные в этом разделе.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Уравнения, выписанные нами в самом начале работы, можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi(M, t).$$

В функции Φ в качестве первого аргумента входит положение $M\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$ изображающей точки сигнала объекта в фазовом пространстве динамической системы; второй аргумент t отражает неточность описания поведения объекта обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Уточняя динамическое описание, мы придали этой зависимости от t вид флуктуационной составляющей, написав

$$\Phi(M, t) = \varphi(M) + F(t), \quad \varphi(M) = \langle \Phi(M, t) \rangle. \tag{5.1}$$

При этом было без оговорки сделано существенное допущение о характере флуктуационного возмущения динамической системы. В общем случае следовало бы считать, что свойства флуктуационной силы зависят от состояния $M(t)$ объекта: $F = F(M, t)$. Но тогда при рассмотрении с точностью до второго порядка малости по отклонениям от динамического движения надо писать:

$$F(M(t), t) = F_0(t) + n(t)\frac{\partial F_0}{\partial n}(t) - \gamma(t)\frac{\partial F_0}{\partial \theta}(t), \tag{5.2}$$

где каждая из трех функций F_0, $\frac{\partial F_0}{\partial n}$, $\frac{\partial F_0}{\partial \theta}$ вычисляется на динамической траектории. Мы не проводили учета последних двух членов в разложении (5.2), интересуясь флуктуационной силой лишь как источником непрерывного возмущения динамического движения, позволяющим провести анализ динамической аппроксимации объекта по его сигналу. Допущение о возможности достаточно точного описания широкого класса объектов на основе схемы (5.1) нельзя считать вполне обоснованным. Поэтому кратко обсудим, что же изменится при учете новых членов возмущающей силы в методе статистической обработки и в основных выводах.

Прежде всего, с учетом новых членов возмущение $F(M(t), t)$ приобретает среднее значение, в общем случае достаточно малое, но отличное от нуля. Это приводит к необходимости изменить формулу (1.1) следующим образом:

$$\langle \Phi(M, t) \rangle = \varphi(M) + \left\langle n\frac{\partial F_0}{\partial n}(M, t) \right\rangle - \left\langle \gamma\frac{\partial F_0}{\partial \theta}(M, t) \right\rangle.$$

Отсюда следует, что в общем случае задача об оценке по сигналу $x(t)$ поправок, характеризующих отличие среднестатистической траектории от динамического движения, становится в рамках обсуждаемого здесь метода неразрешимой.

Важным свойством силы $F(t)$, всюду используемым в этой работе, была ее коротко-коррелированность; поэтому очень важное значение имеет то обстоятельство, что наличие дополнительных членов не увели-

чивает интервала корреляции возмущающей силы. Это можно показать, помня, что все рассмотрение ведется с точностью до третьего порядка малости, а сама возмущающая сила F, в соответствии с вызываемыми ею отклонениями движения от динамического, должна считаться малой первого порядка. Поэтому в выражениях $n\frac{\partial F_0}{\partial n}$ и $\gamma\frac{\partial F_0}{\partial \theta}$ достаточно учитывать лишь главные члены.

Оценим, например, интервал автокорреляции слагаемого $n\frac{\partial F_0}{\partial n}$. Будем считать, что в главном приближении $\left\{F_0(t),\ \frac{\partial F_0}{\partial n}(t)\right\}$ — компоненты многомерного гауссова процесса с малым интервалом корреляции, в частности,

$$\left\langle F_0(t)\frac{\partial F_0}{\partial n}(t+\tau)\right\rangle = 0 \qquad (5.3)$$

при $|\tau|>\Delta$. Главная часть отклонений n, γ сигнала от динамического движения описывается линеаризованными уравнениями; поэтому

$$n(t) = \int_{-\infty}^{t} H(t-\xi)\,F_0(\xi)\,d\xi.$$

Далее имеем:

$$\chi(t) = n(t)\frac{\partial F_0}{\partial n}(t), \quad \langle\chi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{t} H(t-\xi)\left\langle\frac{\partial F_0}{\partial n}(t)\,F_0(\xi)\right\rangle d\xi,$$

$$\langle\chi(t)\,\chi(t+\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{t} H(t-\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{t+\tau} H(t+\tau-\eta)\left\langle\frac{\partial F_0}{\partial n}(t)\times\right. \qquad (5.4)$$

$$\left.\times\frac{\partial F_0}{\partial n}(t+\tau)\,F_0(\xi)\,F_0(\eta)\right\rangle d\eta.$$

Для гауссова многомерного процесса $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ справедливо тождество

$$\langle F_1F_2F_3F_4\rangle = \langle F_1F_2\rangle\langle F_3F_4\rangle + \langle F_1F_3\rangle\langle F_2F_4\rangle + \langle F_1F_4\rangle\langle F_2F_3\rangle.$$

Поэтому из (5.4) при $|\tau|>\Delta$ с учетом (5.3) находим:

$$\langle\chi(t)\,\chi(t+\tau)\rangle = \langle\chi(t)\rangle\langle\chi(t+\tau)\rangle,$$

т. е. интервал автокорреляции процесса $\chi = n\frac{\partial F_0}{\partial n}$ не превышает в главном приближении интервала корреляции процесса $\left\{F_0,\ \frac{\partial F_0}{\partial n}\right\}$. Именно это мы и хотели показать. Из сказанного следует, что в общем случае, когда возмущающую силу F нельзя считать независимой от состояния анализируемого объекта, схема статистической обработки сигнала для определения динамических характеристик объекта во втором приближении по n, γ остается прежней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Гудзенко, Изв. высш уч. зав —Радиофизика, **5**, 572 (1962)
2. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Астрон. ж., **41**, 697 (1964).
3. Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 267 (1961).
4. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961
5. Л. И. Гудзенко, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 671 (1961).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
23 февраля 1965 г.

ANALYSIS OF UNCONTROLLED SYNCHRONIZED AUTO-OSCILLATION OBJECT

L. I. Goudzenko, V. E. Chertoproud

The statistical method of signal processing of nonautonomous object is discussed, permitting to derive equations for a dynamic system approximating signal behaviour during the period of its registration. The application of this method to the analysis of the dynamic structure of synchronized auto-oscillator is shown to permit to distinguish the object behaviour properties in autonomous conditions from synchronizing periodic action.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 531.1 ; 656.6

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

В. Л. Кан и А. С. Кельзон

Рассмотрен метод качественного построения относительных траекторий пропорциональной навигации. Исследована связь между характером траекторий и начальными параметрами, определяющими движение.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Метод пропорциональной навигации, предложенный Шпитцем [1], приводит [2,3] для прямолинейного движения точки A (рис. 1) к уравнениям

$$\dot{\psi} = b\dot{\eta}, \tag{1.1}$$

$$\dot{a} = v_s \cos\eta - v\cos\gamma, \tag{1.2}$$

$$a\dot{\eta} = v\sin\gamma - v_s\sin\eta. \tag{1.3}$$

Здесь a — дальность (расстояние между точками A и B), η — угол поворота линии визирования, ψ — угол поворота вектора скорости точки B, γ — угол упреждения, b — навигационная постоянная. Скорость точки A обозначим v_s, скорость точки B обозначена v. Задача состоит в нахождении относительной траектории точки B в предположении, что $v = \text{const}$ и $v_s = \text{const}$.

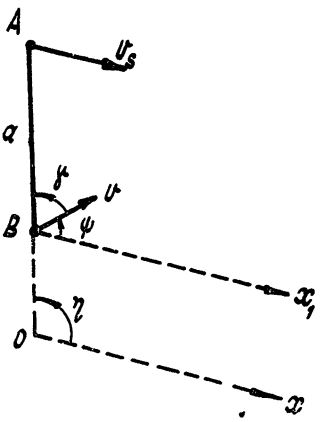


Рис. 1. Основные параметры пропорциональной навигации.

Как было показано в [3,4], для любого целочисленного (и аналогично для рационального) значения навигационной постоянной уравнение траектории может быть получено в явной форме. Однако сложный вид этого решения не позволяет исследовать форму траектории и ее зависимость от начальных условий. Дело в том, что замкнутое решение системы (1.1)—(1.3) выражается через корни функции $f(\eta)$, а последние существенно зависят от параметров системы. Поэтому в данной работе проводится качественное исследование траекторий для любого целого положительного $b > 2$, а в случае $b = 3$ дается полный перечень всех возможных случаев для любых начальных условий.

Уравнение (1.1) при начальных условиях η_0, ψ_0 имеет решение

$$\psi - \psi_0 = b(\eta - \eta_0). \tag{1.4}$$

Если ввести новый начальный параметр ε_0 при помощи соотношения

$$b\eta_0 - \psi_0 = (b-1)\,\varepsilon_0 \tag{1.5}$$

и учесть, что

$$\eta = \gamma + \psi, \tag{1.6}$$

то из (1.2) и (1.3) получим:

$$\dot{a} = v_s \{\cos\eta - p\cos[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)]\} = v_s F(\eta), \tag{1.7}$$

$$a\dot{\eta} = -v_s\{\sin\eta + p\sin[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)]\} = -v_s f(\eta), \tag{1.8}$$

где

$$p = v/v_s. \tag{1.9}$$

Из (1.7) и (1.8) имеем:

$$\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta} = -\frac{\cos\eta - p\cos[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)]}{\sin\eta + p\sin[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)]} = -\frac{F(\eta)}{f(\eta)}; \tag{1.10}$$

это — дифференциальное уравнение траектории, интегрирование которого при заданных a_0, η_0 и дает искомую траекторию (заметим, что начальное условие ψ_0 вошло в ε_0).

В дальнейшем будем рассматривать ориентированные относительные траектории, выбирая за положительное то направление, в котором движется точка B. В соответствии с (1.8) это направление для любого η будет определяться знаком $f(\eta)$, поскольку величина a всегда положительна (если же в процессе движения в какой-то момент a обратится в нуль, то дальнейшее движение не рассматриваем, считая, что в точке $a = 0$ движение заканчивается). При этом η растет при $f(\eta) < 0$ и убывает при $f(\eta) > 0$.

При исследовании траекторий будем использовать как уравнение (1.10), так и уравнения (1.7), (1.8).

В дальнейшем величины a и η будут интерпретироваться как полярные координаты. Следует отметить, что в соответствии с рис. 1 истинными полярными координатами точки B, если взять точку A за полюс, а направление $\boldsymbol{v}_s$ за начало отсчета, будут a и $\pi+\eta$, т. е. для получения истинной относительной траектории нужно либо повернуть линию $a=a(\eta)$ вокруг начала на π, либо считать, что полярная ось направлена противоположно $\boldsymbol{v}_s$. Поскольку это не влияет на характер траекторий, в дальнейшем указанное обстоятельство учитываться не будет.

При исследовании траекторий существенную роль играют вещественные корни функции $f(\eta)$, входящей в уравнение (1.8). Обозначая их через η_i, имеем

$$f(\eta_i) = 0. \tag{1.11}$$

Тогда соотношение

$$\eta = \eta_i \tag{1.12}$$

удовлетворяет уравнению (1.8) тождественно (независимо от a) и, таким образом, является частным решением этого уравнения (при любом t). Зависимость a от t при этом легко находится из (1.7). Соответствующее решение соответствует прямолинейной относительной траектории (параллельному сближению или удалению). Заметим, что никакие другие значения η не могут давать таких траекторий, так как из $\eta = \text{const}$ и $\dot{\eta}=0$, в соответствии с (1.8), следует равенство $f(\eta)=0$.

Поскольку система (1.7), (1.8) удовлетворяет условиям регулярности везде, кроме точки $a = 0$, к этой системе применима теорема единственности, из которой, как известно, следует, что интегральные кривые не могут пересекаться. Таким образом, если в начальный момент угол $\eta \neq \eta_i$, то он не может стать равным η_i ни в какой последующий

момент при $a \neq 0$. Поэтому прямые $\eta = \eta_i$ разбивают плоскость (a, η) на секторы, переход между которыми в процессе движения невозможен.

Другими значениями η, характеризующими траекторию, являются корни $F(\eta)$, определяющие положение точек $\dot{a} = 0$ (т. е. экстремумов a), и корни функции $\Omega(\eta)$, определяющие точки перегиба (см. ниже).

2. СЕПАРАТРИСЫ ФУНКЦИЙ $f(\eta)$ и $F(\eta)$

Как указано выше, для качественного исследования траекторий нужно найти число и расположение вещественных корней функции

$$f(\eta) = \sin\eta + p \sin[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)]. \tag{2.1}$$

Эти корни являются функциями величин p и ε_0, рассматриваемых как параметры. При целых положительных значениях $(b-1)$ корни, очевидно, являются периодическими функциями ε_0 (с периодом 2π) и, кроме того, могут рассматриваться без ограничения общности в полуоткрытом интервале $[0,2\pi)$ (поскольку значения, отличающиеся на 2π, соответствуют тем же точкам на плоскости). Иногда в целях сохранения непрерывности при переходе через значение $\eta=0$ (или 2π) удобнее брать другие интервалы.

Как было показано ранее [3,5,6], при $p > 1$ функция $f(\eta)$ в промежутке $[0,2\pi)$ имеет $2(b-1)$ вещественных корней, причем это — максимальное возможное число корней функции при любом p. При неограниченном возрастании p эти корни стремятся к предельным значениям

$$(\eta_i) = \varepsilon_0 + i\frac{2\pi}{b-1} \qquad (i=0,1,2,\ldots,(b-2)) \tag{2.2}$$

или отличным от них на 2π.

При $p = 1$ функция $f(\eta)$ также имеет $2(b-1)$ корней, которые легко найти непосредственно. Исключение составляют отдельные значения $\varepsilon_0 = \frac{2\pi k}{b-1} \pm \frac{\pi b}{2(b-1)}$ или отличающиеся от них на 2π.

При $p = 0$ вещественных корней у функции только два $(\eta = 0,\pi)$ то же число корней сохраняется (по непрерывности) и при p, близком к нулю. Таким образом, рассматривая каждый корень как функцию p (при данном ε_0), или точнее, как ветвь многозначной функции, определяемой соотношением

$$f(\eta, p) = \sin\eta + p \sin[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)] = 0 \tag{2.3}$$

(здесь явно отмечена зависимость η от p), находим, что при возрастании p от нуля до $p > 1$ число корней увеличивается от 2 до $2(b-1)$. Заметим, что случай $b = 2$, рассматриваемый Шпитцем, который основывал на этом единственном случае все выводы, относящиеся к пропорциональной навигации, является исключением, так как для него $2(b-1) = 2$ и число корней всегда равно двум.

Переход от одного числа корней к другому (т. е. «возникновение» или «исчезновение» корней) может, в соответствии со свойствами неявных функций, происходить только в точках, где

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'_\eta(\eta, p) = \cos\eta + p(b-1)\cos[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)] = 0. \tag{2.4}$$

В дальнейшем эта производная для сокращения записи обозначается как $f'(\eta)$.

Соотношения (2.3) и (2.4) определяют при каждом заданном ε_0 одно или несколько значений p, при которых может происходить (и фактически происходит) переход от одного числа корней к другому. Соответствующее геометрическое место точек в плоскости параметров (p, ε_0) будем называть сепаратрисой (или дискриминантной кривой). Таким образом, система уравнений (2.3), (2.4) представляет собой параметрические уравнения сепаратрисы, причем величину η можно рассматривать как параметр. Следует обратить внимание, что соответствующее значение η одновременно представляет собой кратный (не менее, чем двойной) корень функции $f(\eta)$, поскольку (при удовлетворяющих (2.3) и (2.4) значениях p и ε_0) $f(\eta)=0$ и $f'(\eta)=0$.

Исключение параметра η из уравнений (2.3) и (2.4) возможно, поскольку из них следует, что

$$p^2 = \sin^2\eta + \cos^2\eta\,(b-1)^{-2}. \tag{2.5}$$

Выразив отсюда $\cos\eta$, $\sin\eta$ и подставив их в (2.3) или (2.4), получим уравнение сепаратрисы. Оно имеет весьма сложный вид; в наиболее простом случае $b=3$ уравнение можно записать в следующей форме:

$$\operatorname{tg}(2\varepsilon_0)=\pm\frac{4p^2-1}{3}\sqrt{\frac{4p^2-1}{1-p^2}}\,. \tag{2.6}$$

Поэтому изучение сепаратрисы удобнее производить, исходя из параметрических уравнений. В дальнейшем будем считать $p\geqslant 0$ (значения $p<0$ смысла не имеют) и $0\leqslant\varepsilon_0<2\pi$ (ввиду очевидной периодичности сепаратрисы). Заметим, что при этом условии величина p однозначно определяется через η (см. (2.5)). Величина ε_0, однако, определяется неоднозначно, что легко видеть из уравнений (2.3) и (2.4), если их преобразовать к виду

$$\sigma=p\cos[(b-1)\varepsilon_0]=-\frac{1}{2(b-1)}\{b\cos[(b-2)\eta]-(b-2)\cos(b\eta)\}, \tag{2.7}$$

$$\tau=p\sin[(b-1)\varepsilon_0]=-\frac{1}{2(b-1)}\{b\sin[(b-2)\eta]-(b-2)\sin(b\eta)\}, \tag{2.8}$$

где введены две вспомогательных величины σ и τ.

Из (2.7) и (2.8) при заданном η (т. е. известном p) величина $(b-1)\varepsilon_0$ определяется по синусу и косинусу, т. е. однозначно в интервале $[0,2\pi)$. Следовательно, в интервале $[0,2\pi(b-1)]$, соответствующем выбранному интервалу для ε_0 имеем $(b-1)$ значений ε_0, соответствующих данному η. Все эти значения выражаются через наименьшее из них по формуле

$$\varepsilon_{0\,k}=(\varepsilon_0)_{\min}+2\pi k\,(b-1)^{-1}, \tag{2.9}$$

где $k=0,1,\ldots,(b-2)$. Таким образом, каждой точке сепаратрисы соответствует еще $(b-2)$ точек, получающихся из нее параллельным сдвигом на целое кратное величины $2\pi(b-1)^{-1}$.

Кроме того, если b — нечетное, то значения параметра η и $\eta+\pi$ приводят, в соответствии с (2.7) и (2.8), к значениям синуса и косинуса, отличающимся только знаком, т. е. для $(b-1)\varepsilon_0$ получаются значения, отличающиеся от указанных выше на π. Следовательно, для ε_0 получаются значения, отличающиеся от (2.9) на $\pi(b-1)^{-1}$, что дает еще $(b-1)$ точек, имеющих с каждой из точек сепаратрисы одинаковое p.

Для случая четного b замена η_l на $\pi+\eta_l$ приводит к тем же значениям τ и σ и, следовательно, не дает новых точек. Наконец, замена η

на $2\pi-\eta$ приводит к изменению знака τ, но не σ и дает еще $(b-1)$ или $2(b-1)$ точек (соответственно для четного и нечетного b).

Как нетрудно видеть из (2.5), других точек, соответствующих данному p, нет. В общем случае все указанные точки различны, и поэтому прямая $p=\text{const}$ пересекает сепаратрису соответственно в $2(b-1)$ и $4(b-1)$ точках. В частных случаях эти точки могут и совпадать (точки самопересечения сепаратрисы).

Таким образом, для построения сепаратрисы достаточно проследить изменение ε_0 и p от точки $\eta=0$, где сепаратриса имеет минимум $p_{\min}=(b-1)^{-1}$, до точки $\eta=\pi/2$, где сепаратриса имеет максимум $p_{\max}=1$ (см. (2.5)). При этом достаточно проследить изменение одного из возможных значений ε_0, поскольку остальные получаются из него сдвигом. Если исходить при $\eta=0$ от наименьшего возможного значения ε_0, соответствующего $\sin[(b-1)\varepsilon_0]=0$ и $\cos[(b-1)\varepsilon_0]=-1$, т. е. от значения $\varepsilon_0=\pi(b-1)^{-1}$, то вследствие монотонного возрастания ε_0 с возрастанием η при $\eta=\pi$, когда $\sin[(b-1)\varepsilon_0]=0$, нужно взять $(b-1)\varepsilon_0=\pi+(b-2)\pi$, т. е. $\varepsilon_0=\pi$. (Заметим, что монотонное возрастание ε_0 вместе с η следует из формулы

$$\frac{d\varepsilon_0}{d\eta}=\frac{b(b-2)\sin^2\eta}{(b-1)^2p^2}, \tag{2.10}$$

которую нетрудно получить из (2.3) и (2.4).)

Действительно, исследуя (2.8), получим, что величина τ при возрастании η от 0 до π обращается в нуль ровно $(b-3)$ раза. Таким образом, величина $(b-1)\varepsilon_0$, непрерывно возрастая, становится кратной $\pi(b-3)$ раза, каждый раз добавляя по π, и добавляя π еще раз при переходе от последнего нуля величины τ до $\eta=\pi$. Отсюда и следует приведенное выше выражение. В связи со сказанным можно построить одну дугу сепаратрисы, учитывая, что p монотонно возрастает от $\eta=0$ до $\eta=\pi/2$ и монотонно убывает при изменении $\eta=\pi/2$ до $\eta=\pi$.

Эта дуга имеет вид, указанный на рис. 2. Всю остальную сепаратрису можно получить из этой дуги сдвигами на целое кратное $\pi(b-1)^{-1}$ для нечетного b и на целое кратное $2\pi(b-1)^{-1}$ для четного b.

На рис. 3а представлена сепаратриса для случая $b=3$. Ее период, согласно общей формуле,

$$2\pi[2(b-1)]^{-1}=\pi/2.$$

В точках 1 сепаратрисы $\eta_*=\pi$; в точках 2 значение $\eta_*=0$ и в точках 3 величина $\eta_*=3\pi/2$.

На рис. 3б дана сепаратриса для $b=4$. Ее период равен

$$2\pi(b-1)^{-1}=2\pi/3.$$

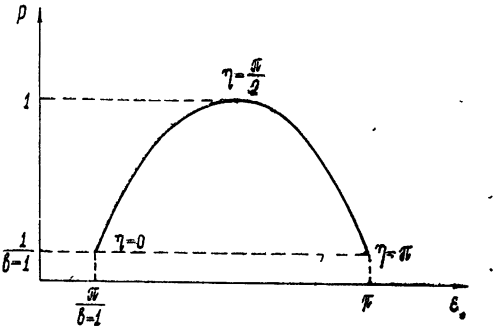


Рис. 2. Основная дуга сепаратрисы функции $f(\eta)$.

В точках 1 сепаратрисы $\eta_*=\pi$, $\eta_*=0$; в точках 2 значения $\eta_*=\pi/2$, $\eta_*=3\pi/2$.

На рис. 3в представлена сепаратриса для $b=5$. Ее период равен (для всей кривой)

$$2\pi[2(b-1)]^{-1}=\pi/4.$$

Для каждой из трех ветвей (сплошной, штриховой и штрих-пунктирной) период равен $3\pi/4$. В точках 1 сепаратрисы $\eta_*=\pi$; в точках 2 величина $\eta_*=0$; в точках 3 значение $\eta_*=\pi/2$ и в точках 4 угол $\eta_*=3\pi/2$.

На рис. 3г дана сепаратриса для $b = 6$. Ее период равен

$$2\pi(b-1)^{-1}=2\pi/5.$$

В точках 1 значение $\eta_*=0$, в точках 2 величина $\eta_*=\pi$ и в точках 3 угол $\eta_*=\pi/2$.

Таким образом, каждой точке полученной сепаратрисы соответствует единственное значение кратного корня η для нечетного b и два значения кратного корня для четного b, кроме точек самопересечения сепаратрисы (в которых совпадают значения ε_0, соответствующие η и $2\pi-\eta$), где таких значений соответственно два и четыре.

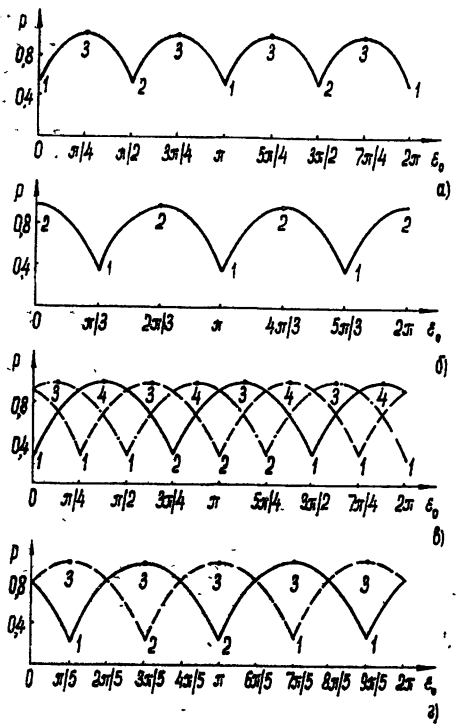


Рис. 3. Изменение сепаратрисы функции $f(\eta)$ с возрастанием навигационной постоянной b.

Указанные корни являются двойными во всех точках сепаратрисы, кроме минимумов (точек возврата), где они являются тройными. Поскольку из каждого корня могут возникнуть только два корня, и поскольку над каждой точкой оси η находится для b нечетного не более $(b-2)$ ветвей сепаратрисы, а для b четного не более $(b-2)/2$ ветвей сепаратрисы, то для перехода от двух корней при $p=0$ к $2(b-1)$ корням при $p>1$ должны использоваться все возможности (это можно показать и непосредственно). Следовательно, число корней в самой нижней подобласти равно двум, а в каждой вышележащей больше на два (для b нечетного) или на четыре (для b четного).

Сепаратриса функции $F(\eta)$ может быть исследована таким же образом, но проще с помощью преобразования параметра $\eta=\eta'+\pi/2$. В случае необходимости (в зависимости от значения b) одним из преобразований $\varepsilon_0=\varepsilon_0'-\pi(b-1)^{-1}$ или $\varepsilon_0=\varepsilon_0'\pm\pi[2(b-1)]^{-1}$ ее можно свести к сепаратрисе $f(\eta)$. При этом оказывается, что для $b=4m$ сепаратрисы $f(\eta)$ и $F(\eta)$ совпадают; для $b=4m+1$ сепаратриса $F(\eta)$ сдвинута относительно сепаратрисы $f(\eta)$ в положительную сторону на $\pi[2(b-1)]^{-1}$; для $b=4m+2$ сепаратриса $F(\eta)$ сдвинута относительно сепаратрисы $f(\eta)$ в отрицательную сторону на $\pi(b-1)^{-1}$; для $b=4m+3$ сепаратриса $F(\eta)$ сдвинута относительно сепаратрисы $f(\eta)$ в отрицательную сторону на $\pi[2(b-1)]^{-1}$.

Распределение числа корней $F(\eta)$ в подобластях, на которые сепаратриса $F(\eta)$ делит плоскость (p, ε_0) такое же, как и для $f(\eta)$. На рис. 4 дано разбиение на подобласти сепаратрисами функций $f(\eta)$ и $F(\eta)$ плоскости p, ε_0 для $b=3$.

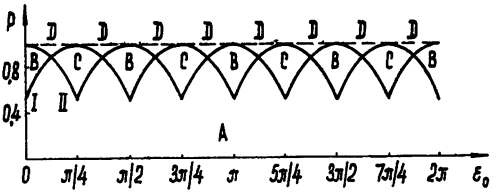


Рис. 4. Разделение плоскости $p \in (0,1)$; $\varepsilon_0 \in (0,2\pi)$ сепаратрисами функций $f(\eta)$ и $F(\eta)$ на области с одинаковым числом корней для $b=3$. Кривая I—сепаратриса $f(\eta)$, кривая II—сепаратриса $F(\eta)$.

3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ ФУНКЦИЙ $f(\eta)$ и $F(\eta)$ В РАЗЛИЧНЫХ ПОДОБЛАСТЯХ

Как указывалось выше, характер траекторий определяется числом и взаимным расположением корней функций $f(\eta)$ и $F(\eta)$. Это в свою очередь определяется тем, в какой подобласти плоскости параметров находится точка, соответствующая заданным p и ε_0. Для удобства разобьем эти подобласти на части, указанные для $b = 3$ на рис. 5.

Изучая сначала изменение двойного корня вдоль сепаратрисы (в соответствии с (2.10)), на каждой дуге сепаратрисы находим, что между

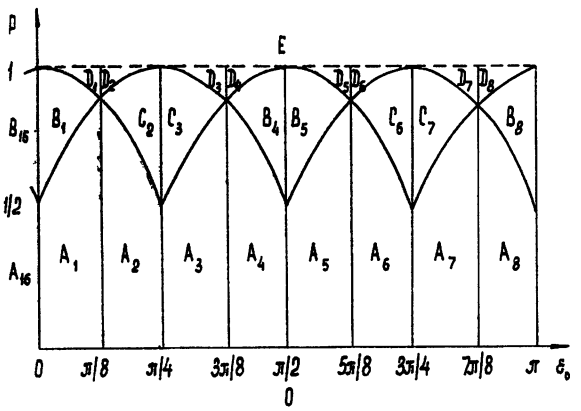


Рис. 5. Разбиение плоскости p, ε_0 на области, соответствующие различным типам распределения знаков $f(\eta)$ и $F(\eta)$ в зависимости от угла η.

экстремумами сепаратрисы этот двойной корень (или любой из двойных корней в случае четного b) изменяется монотонно (см., например, рис. 2). Дифференцируя соотношение (2.3) для простого корня при движении вдоль сепаратрисы, получим (если учесть выражения (2.3) и (2.4) для η^*):

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon_0} = \frac{p^2(b-1)\sin[(b-1)(\eta-\eta^*)]}{f'(\eta)\sin\eta^*}. \qquad (3.1)$$

Здесь η — рассматриваемый простой корень, η^* — двойной корень (параметр в уравнениях сепаратрисы). Исходя из (3.1), можно изучить изменение простых корней вдоль сепаратрисы. Результат исследования для $b = 3$ дан в таблице 1.

Таблица 1

Изменение корней $f(\eta)$ вдоль сепаратрисы (корень $\eta_{1,2}$ двойной)

ε_0	p	η_1, η_2	η_3	η_4	Примечание
0	1/2	180°	180°	0	Тройной корень $\eta_{1,2,3}$
(0; 13°18′)	$(1/2; \sqrt{5/8})$	возр.	убыв.	возр.	
13°18′	$\sqrt{5/8}$	225°	135°	8°8′	Корень η_3 переходит от убывания к возрастанию
45°	1	270°	150°	30°	
76°42′	$\sqrt{5/8}$	315°	171°52′	45°	Корень η_4 переходит от возрастания к убыванию
(76°42′; 90°)	$(1/2; \sqrt{5/8})$	возр.	возр.	убыв.	
90°	1/2	360°	180°	360°	Тройной корень $\eta_{1,2,4}$
(90°; 103°18′)	$(1/2; \sqrt{5/8})$	возр.	возр.	убыв.	
103°18′	$\sqrt{5/8}$	45°	188°8′	315°	Корень η_4 переходит от убывания к возрастанию
135°	1	90°	210°	330°	
166°42′	$\sqrt{5/8}$	135°	225°	351°52′	Корень η_3 переходит от возрастания к убыванию
(166°42′; 180°)	$(1/2; \sqrt{5/8})$	возр.	убыв.	возр	
180°	1/2	180°	180°	0°	Тройной корень $\eta_{1,2,3}$

Эта таблица построена следующим образом. Задаемся значением ε_0 и находим на сепаратрисе p. Далее определяем корни η_i.

Наконец, изучив расположение корней $f(\eta)$ в точках, расположенных на сепаратрисе, можно изучить и расположение корней $f(\eta)$ во всей плоскости параметров, начиная от известных значений $(0, \pi)$ на оси ε_0 и рассматривая изменение вдоль вертикальной прямой. Используем формулу

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{\sin\eta}{pf'(\eta)}, \tag{3.2}$$

которую нетрудно получить из (2.3) при постоянном ε_0. При пересечении сепаратрисы (т. е. при увеличении p) возникают новые корни, расположение которых определяется указанным выше исследованием и которые при дальнейшем возрастании p изменяются опять-таки в соответствии с (3.2). Результат этого исследования для $b = 3$ представлен на рис. 6, где показаны также знаки $f(\eta)$ в соответствующих секторах, существенные для дальнейшего. Точка p_0 лежит на сепаратрисе, где возникает двойной корень. Стрелки указывают на направление изменения корня при возрастании p.

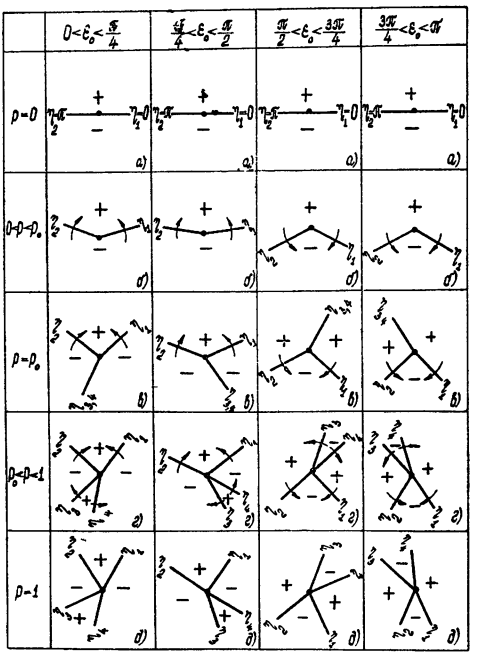


Рис. 6. Диаграмма изменения корней функции $f(\eta)$ при возрастании p и заданном ε_0.

Расположение корней функции $F(\eta)$ может быть получено из расположения корней функции $f(\eta)$ благодаря связи между этими функциями, указанной в предыдущем разделе. Наложив схемы расположения корней $f(\eta)$ и $F(\eta)$, получим разбиение плоскости (a, η) на сектора, в каждом из которых $f(\eta)$ и $F(\eta)$ (т. е. η и a) имеют постоянный знак, и следовательно, величины a и η изменяются монотонно. При этом каждой из подобластей в плоскости (p, ε_0) (и их границам) будет соответствовать определенная схема. Для случая $b = 3$ некоторые из этих схем даны на рис. 7.

На рис. 7 корни $f(\eta)$ отмечены сплошной линией, а корни $F(\eta)$ — штрих-пунктирной. Знаки $f(\eta)$ между корнями даны в кружках, а знаки $F(\eta)$ — в квадратах. Рис. 7а построен при $p = 0$; рис. 7б при $0 < p < p_0'$; рис. 7в при $p = p_0''$, точка на сепаратрисе функции $F(\eta)$; рис. 7г при $p_0'' < p < p_0'$; рис. 7д при $p = p_0'$, точка на сепаратрисе функции $f(\eta)$; рис. 7е при $p_0' < p < 1$; рис. 7ж при $p = 1$.

Соответствие схем, представленных на рис. 7 и соответствующих им подобластей рис. 5 характеризуется таблицей 2. Совершенно аналогично рис. 7 могут быть построены схемы для всех остальных случаев, приведенных в таблице.

Для полученных таким образом схем; охватывающих все возможные при $b = 3$ случаи, можно качественно построить траектории. При

Таблица 2

Таблица соответствия подобластей рис. 5 и схем рис. 7

Тип области	$\varepsilon_0=0$	$0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{8}$	$\varepsilon_0=\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}<\varepsilon_0\frac{\pi}{4}$	$\varepsilon_0=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<\varepsilon_0<\frac{3\pi}{8}$	$\varepsilon_0=\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}<\varepsilon_0<\frac{\pi}{2}$
OA	$OA_{16}A_1$	OA_1	OA_1A_2	OA_2	OA_2A_3	OA_3 рис. 7а	OA_3A_4	OA_4
A	$A_{16}A_1$	A_1	A_1A_2	A_2	A_2A_3	A_3 рис. 7б	A_3A_4	A_4
AB или AC	$A_{16}A_1B_1B_{16}$	A_1B_1	—	A_2C_2	$A_2A_3C_3C_2$	A_3C_3 рис. 7в	—	A_4B_4
B или C	B_1B_{16}	B_1	—	C_2	C_2C_3	C_3 рис. 7г	—	B_4
AD, BD или CD	—	B_1D_1	$A_1A_2D_2D_1$	C_2D_2	—	C_3D_3 рис. 7д	$A_3A_4D_4D_3$	B_4D_4
D	—	D_1	D_1D_2	D_2	—	D_3 рис. 7е	D_3D_4	D_4
BE, CE или DE	$B_1B_{16}E$	D_1E	D_1D_2E	D_2E	C_2C_3E	D_3E рис. 7ж	D_3D_4E	D_4E
E								

этом следует, что, как указывалось выше, траектории не переходят из одного сектора, ограниченного корнями функции $f(\eta)$, в другой, и имеют экстремумы при значениях η, соответствующих корням $F(\eta)$, если при

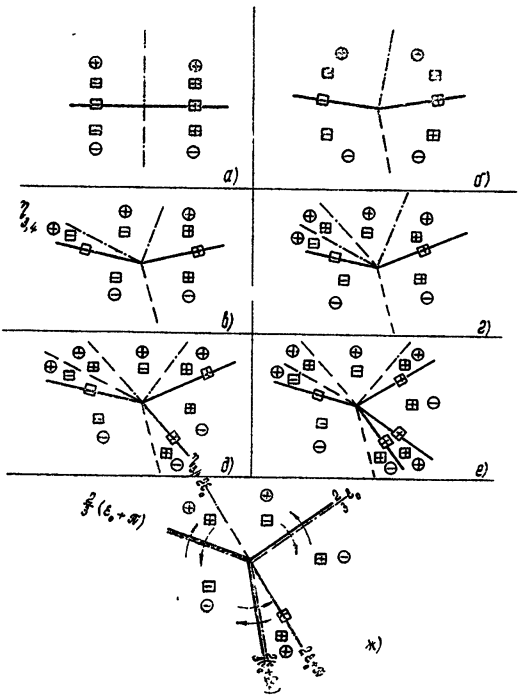


Рис. 7. Диаграмма взаимного расположения корней $f(\eta)$ и $F(\eta)$. Разбиение плоскости (a, η) на зоны при $\pi/4<\varepsilon_0<3\pi/8$.

этом функция $F(\eta)$ изменяет знак. Поскольку все траектории либо оканчиваются при η, равным корням функции $f(\eta)$, либо уходят в бесконечность при подходе η к соответствующим значениям, нужно выяснить характер поведения траекторий в этих точках.

4. ВИД ТРАЕКТОРИЙ В ОКРЕСТНОСТИ КОРНЕЙ $f(\eta)$

Для выяснения вида траекторий вблизи корней $f(\eta)$ разложим в ряд правые части уравнений (1.7) и (1.8). Обозначая через η_i корень функции $f(\eta)$, имеем:

$$\dot{a} = v_s\,[F(\eta_i) + F'(\eta_i)\,(\eta-\eta_i) + \dots\,], \tag{4.1}$$

$$a\dot{\eta} = -\,v_s\left[f(\eta_i)+f'(\eta_i)\,(\eta-\eta_i) + \frac{1}{2}f''(\eta_i)\,(\eta-\eta_i)^2+\dots\right]. \tag{4.2}$$

Поскольку величина $f(\eta_i)=0$, корни η_i можно классифицировать по знаку $f'(\eta_i)$ и по знаку $F(\eta_i)$.

Корни, для которых $f'(\eta_i)>0$, назовем устойчивыми (точнее, устойчивые корни — это те, для которых $f(\eta)<0$ при $\eta<\eta_i$ и $f(\eta)>0$ при $\eta>\eta_i$; при $f'(\eta_i)\neq 0$ сказанное совпадает с данным выше определением). Корни, для которых $f'(\eta_i)<0$, назовем неустойчивыми. Корни, для которых $f'(\eta_i)=0$, но $f''(\eta_i)\neq 0$, назовем полуустойчивыми. (Исключительные случаи, для которых $f'(\eta_i)$, $f''(\eta_i)=0$, также можно

включить в эту классификацию.) Принятые термины связаны с тем, что, как следует из (4.2) при $a > 0$ для всех точек, лежащих в окрестности $\eta = \eta_i$, в первом случае имеет место стремление η к η_i, во втором случае — удаление от η_i и в третьем случае стремление η к η_i для точек, находящихся с одной стороны, и удаление от η_i — с другой.

По знакам $F(\eta_i)$ классификацию можно произвести следующим образом (исключительные случаи не рассматриваем). Корни, для которых $F(\eta_i) < 0$, назовем сближающими. Корни, для которых $F(\eta_i) > 0$, назовем отдаляющими. Корни, для которых $F(\eta_i) = 0$, назовем безразличными. Последний случай возможен только при $p = 1$, так как только в этом случае корень функции $f(\eta)$ может быть корнем функции $F(\eta)$. Терминология связана с тем, что, как следует из (4.1), знак $F(\eta_i)$ определяет при $\eta = \eta_i$, и при η, близких к η_i, увеличивается или уменьшается расстояние a. Если же $F(\eta_i) = 0$, то все точки $\eta = \eta_i$, $a = a_0$ (т. е. все точки, лежащие на луче $\eta = \eta_i$) являются точками относительного покоя (устойчивыми или неустойчивыми в зависимости от знака $f'(\eta_i)$).

Комбинируя указанные выше возможности, получаем девять случаев. Сохраняя для каждого из них в правых частях (4.1) и (4.2) первые не обращающиеся в нуль члены, можно найти характер траекторий. Полученные результаты представлены на рис. 8.

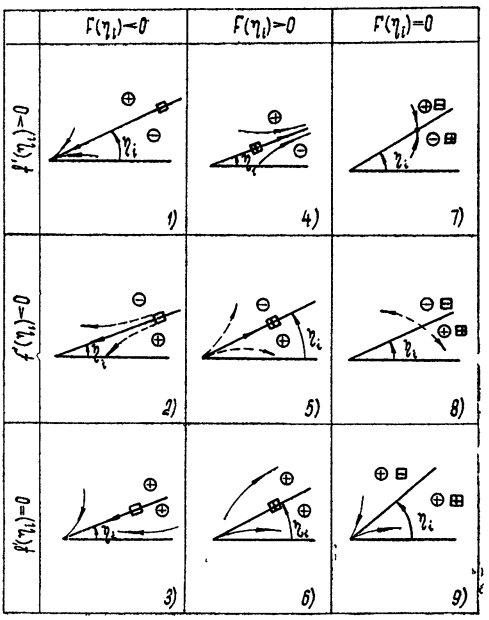


Рис. 8. Характер траекторий пропорциональной навигации при подходе к корням.

При построении этих схем учитывалась также кривизна траектории. Она может быть найдена, согласно [3], по формуле

$$k = \frac{|f(\eta)|\,[f^2(\eta) + F^2(\eta) + f(\eta)\,F'(\eta) - f'(\eta)\,F(\eta)]}{a[f^2(\eta) + F^2(\eta)]^{3/2}} = \frac{|f(\eta)|\,\Omega(\eta)}{a[f^2(\eta) + F^2(\eta)]^{3/2}}. \quad (4.3)$$

Эта формула по сравнению с приведенной в [3] несколько преобразована. Исходя из выражения для $f(\eta)$ и $F(\eta)$, можно получить (см. [3]), что

$$\Omega(\eta)=pb\,\{p-\cos[(b-1)(\eta-\varepsilon_0)+\eta]\}\,. \qquad (4.4)$$

Заметим, что здесь, в отличие от рассмотренного в [3] случае $p>1$, величина $\Omega(\eta)$ (т. е. кривизна) может быть и положительной.

5. КАЧЕСТВЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ

На основании результатов разделов 3 и 4 можно получить довольно хорошее представление о траекториях для всех возможных случаев (если учесть знаки кривизны и найти точки перегиба, т. е. значения η, для которых $\Omega(\eta)$ равно нулю). При этом нужно учитывать следующее.

1) Между корнями $f(\eta)$ величина η изменяется монотонно, т. е. траектории могут пересекать любой луч только один раз. При этом направление движения по траектории определяется знаком η (знаком $f(\eta)$, согласно (1.8)).

2) Экстремальные точки траектории находятся при значениях, для которых $\dot{a}=0$ (т. е. при $F(\eta)=0$; см. (1.7)), если $F(\eta)$ при прохождении этих значений меняет знак. При этом знак $F(\eta)$ определяет, возрастает или убывает расстояние a в соответствующем секторе.

3) Все траектории могут либо заканчиваться при $a=0$ и $\eta=\eta_i$, либо уходить в бесконечность (при $\eta\to\eta_i$), либо заканчиваться на лучах $\eta=\eta_i$, причем достижение этих лучей возможно только при $t\to\infty$. Это следует из рассуждений раздела 4, если к ним присоединить оценку времени, необходимого для достижения $a=0$, так как из основных уравнений (1.7) и (1.8) следует, что движение не может окончиться ни при каком $\eta\neq\eta_i$.

4) Кривизна траектории может изменить знак только при значениях, равных корням функции $\Omega(\eta)$ или корням функции $f(\eta)$ (в соответствии с (4.3)). Между этими корнями направление кривизны определяется знаком функции $\Omega(\eta)$.

5) При построении траектории нужно учесть, что, как следует из (1.10), все траектории центрально-подобны (поскольку подобное преобразование $a\to ka$ не изменяет уравнения (1.10)). Нужно, однако, заметить, что, как следует из (1.7) и (1.8), скорости изменения a и η (т. е. величины $\dot{a}$ и $\dot{\eta}$), на разных траекториях различны.

Не приводя полного перечисления случаев, ограничимся несколькими численными примерами.

Пример 1. При $b=3$, $\varepsilon_0=\pi/4$, $p=10/17$ находим:

корни $f(\eta)$: 23°35′; 156°25′;

корни $F(\eta)$: 58°12′; 90°; 121°48′; 270°;

корни $\Omega(\eta)$; 12°; 48°; 132°; 168°; 252°; 288°.

Если нанести на диаграмму эти значения вместе со знаками f, F и Ω (которые легко найти, например, исходя из знаков при $\eta=0$), то можно качественно построить траектории. Это сделано на рис. 9.

На рис. 9, 10 в кружках даны знаки $f(\eta)$, в квадратиках — знаки $F(\eta)$ и в треугольниках — знаки $\Omega(\eta)$. Сплошной линией показаны два корня $f(\eta)$, штрих-пунктирной линией — корни $F(\eta)$ и штриховой линией — корни $\Omega(\eta)$.

При построении этой траектории использованы все указанные выше замечания. В точках B, D, H находятся минимумы, в точке C — максимум расстояния a. В точках A, E, F, G, J, K — точки перегиба. Отметим, что в данном случае между минимумами в B и D имеется максимум в C. Поскольку, кроме того, кривая на всем участке BCD выпукла, можно

считать, что расстояние a изменяется мало. Все указанные свойства подтверждаются аналитическим решением.

Пример 2. Примем $b = 3$, $\varepsilon_0 = 20°$; $p = 0{,}95$. Тогда

корни $f(\eta)$: 13°5′; 134°24′; 222°52′; 249°39′;

корни $F(\eta)$: 18°25′; 35°32′; 132°24′; 253°37′;

корни $\Omega(\eta)$: 7°16′; 19°24′; 127°16′; 139°24′; 247°16′; 259°24′.

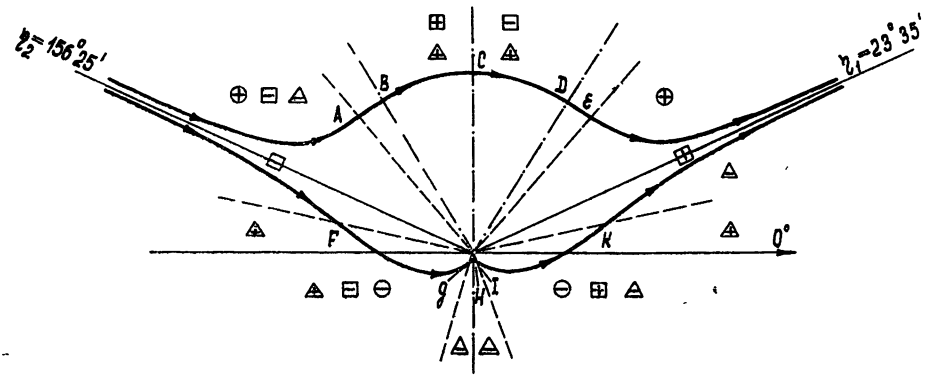


Рис. 9. Качественная картина траекторий при $p=10/17$; $\varepsilon_0=\pi/4$.

Нанеся их на чертеж, получим (в согласии с указанными правилами) рис. 10. Некоторые углы на рис. 10 (при сохранении качественного

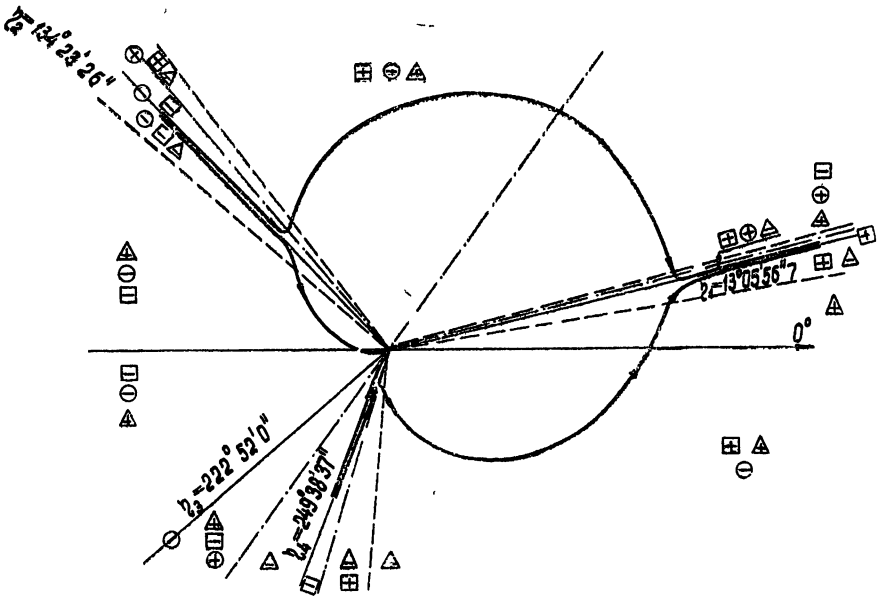


Рис. 10. Качественная картина траекторий при $p=0{,}95$; $\varepsilon_0=20°$.

характера кривой) изменены для большей наглядности чертежа. В точках B, F, J — минимумы a, в точке D — максимум a. В точках A, C, E, G, H, K — перегибы.

Интересно отметить, что между 134°26′ и 249°38′ находится сектор, из которого точка устойчиво сближается до нуля. Обычно полагали, что при $p < 1$ (т. е. при $v < v_s$) это невозможно. Аналитический подсчет подтверждает указанные результаты.

Пример 3. Примем $b = 3$; $\varepsilon_0 = 32°53'$; $p = 0{,}9702$. Точка лежит на сепаратрисе. Тогда

корни $f(\eta)$: 21°41′28″; 142°52′28″; 253°44′24″;

корни $F(\eta)$: 23°25′; 65°00′; 141°10′; 262°00′;

корни $\Omega(\eta)$: 17°16′; 26°35′; 137°16′; 146°35′; 257°16′; 266°35′.

Корень 21°41′28″ устойчивый удаляющий. Корень 142°52′28″ неустойчивый сближающий. Корень 253°44′24″ полуустойчивый: при подходе со стороны $\eta < 253°44'24''$ он устойчив, при подходе с противоположной стороны он неустойчив.

Таким образом, в первом примере встреча невозможна, так как к ней приводит только неустойчивый корень 156°25′. Во втором примере имеется широкая зона начальных углов η, расположенных между η_2 и η_4, ведущих к встрече, которая произойдет при устойчивом сближающем корне η_3. В третьем примере, когда точка (p, ε_0) выбрана точно на сепаратрисе функции $f(\eta)$, появляется полуустойчивый корень η_3, приводящий к встрече, если начальный угол η лежит между η_2 и η_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Spitz, Naval Res. Laboratory, USA Report, 1946
2 А С. Кельзон, Динамические задачи кибернетики, Судпромгиз, Л., 1959.
3. В. Л. Кан, А. С. Кельзон, Изв. высш. уч. зав.—Математика, № 1, 50 (1962).
4 В. Л. Кан, А. С. Кельзон, II Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Аннотации докладов, Изд. АН СССР, М., 1964.
5. В. Л. Кан, А. С. Кельзон, ДАН СССР, **130**, 1220 (1960).
6. В. Л. Кан, А. С. Кельзон, Науч. тр. Министерства Морского флота СССР, вып. 1, 77 (1964).

Поступила в редакцию
4 декабря 1964 г.

QUALITATIVE INVESTIGATION OF TRAJECTORY OF PROPORTIONAL NAVIGATION

V. L. Kan, A. S. Kel'son

The qualitative plotting method of relative trajectories of proportional navigation has been considered. The relation has been investigated between the character of trajectories and initial parameters determining the motion.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.371 165

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ФЛУКТУАЦИЯХ СКОРОСТИ И ИЗЛУЧЕНИЕ ФЛУКТУИРУЮЩИХ СРЕД ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

В. М. Конторович

1. Наряду с рассеянием на флуктуациях $\delta\varepsilon$ и $\delta\mu$ диэлектрической или магнитной проницаемости существует универсальный, хотя и более слабый (релятивистский) механизм рассеяния непосредственно на флуктуациях скорости движения среды*. Действительно, электрическая и магнитная индукции элемента объема среды, движущегося относительно лабораторной системы отсчета со скоростью $\boldsymbol{v}$, равны в этой системе [1]

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}], \qquad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{E}]. \tag{1}$$

Здесь ε и μ — проницаемости в собственной системе отсчета, $v \ll c$. Если $\boldsymbol{v}$ является случайной величиной, то вторые слагаемые в (1) представляют собой случайные дипольные моменты, ответственные за рассеяние электромагнитной волны, описываемой векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Уравнения для рассеянного поля ξ, h

$$\operatorname{rot}\xi = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{b}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{h} = -i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{d},$$
$$\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{h} + \boldsymbol{\beta}, \qquad \boldsymbol{d} = \varepsilon\xi + \boldsymbol{\delta}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\delta}$ — случайные индукции, приводят к следующему выражению для интенсивности дипольного излучения:

$$\frac{1}{V}\frac{dI}{do\,d\omega} = \frac{ck^4}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu}}\left\{\overline{(|\boldsymbol{\delta}|^2 - |\boldsymbol{n}\boldsymbol{\delta}|^2)}_{\omega,\,\boldsymbol{k}} + \frac{\varepsilon}{\mu}\left(\overline{|\boldsymbol{\beta}|^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \overline{|\boldsymbol{n}\boldsymbol{\beta}|^2}\right) + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\operatorname{Re}\left(\overline{[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}^*]\,\boldsymbol{n}}\right)\right\}_{\omega,\,\boldsymbol{k}}. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{k} = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}\,\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ — направление рассеяния, $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$; $\overline{|\boldsymbol{\delta}|^2}$ означает корреляционный тензор $\overline{\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{r}, t)\,\boldsymbol{\delta}^*(\boldsymbol{r}', t')}$, а индекс $\omega, \boldsymbol{k}$ — его фурье-компоненту (см. раздел 2).

С учетом релятивистского эффекта случайные индукции имеют вид**:

---

* Возможны и другие причины рассеяния на флуктуациях скорости; эффект Максвелла [1] $\left(\delta\varepsilon_{ik} = \lambda\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right)$, неинерциальность движения, пространственная и временная дисперсия, проводящие к рассеянию за счет аберрации и эффекта Допплера (см. следующую сноску) и т. п. «Микроскопический» механизм рассеяния на флуктуациях скорости обсуждался в случае плазмы [2]. Мы не учитываем упомянутые эффекты по той причине, что рассеяние на флуктуациях скорости здесь интересует нас лишь как механизм, ответственный за излучение флуктуирующей среды во внешнем магнитном поле (см. раздел 3). С целью упрощения мы ограничиваемся также случаем изотропной среды без пространственной дисперсии.

** Тем самым мы не выделяем из $\delta\varepsilon$ и $\delta\mu$ релятивистские слагаемые, связанные с эффектом Допплера, которые дали бы вклад лишь в скалярное рассеяние (с эффективной флуктуацией $\delta\varepsilon' = -(\partial\varepsilon/\partial\omega)\,\omega(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}/kc)$ и т. п.). Появление таких слагаемых связано с тем, что в собственной системе отсчета

$$\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \simeq \varepsilon(\omega) - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}.$$

$$\delta = \delta\varepsilon\, E + \hat{\gamma} H, \quad \beta \doteq \delta\mu\, H - \hat{\gamma} E, \quad \gamma_{lk} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\varepsilon_{llk} v_l. \tag{4}$$

Релятивистские члены приводят к тому, что рассеяние с малым изменением частоты становится несимметричным. В этом легко убедиться, выразив в (4) H через E (и обратно) для падающей плоской волны Так, учитывая, что $H = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,[n_0, E]$ ($\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(\omega_0)$, $n^0 = k^0/k_0$, ω_0 и k_0— частота и волновой вектор падающей волны), получим $\hat{\gamma} H = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,\hat{\alpha} E$, где $\alpha_{lk} = (\varepsilon\mu - 1)\, c^{-1}$, $(v_l n_k^0 - \delta_{lk}(vn^0))$ — несимметричный тензор Соответственно, $\hat{\gamma} E = -\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\hat{\alpha} H$. Ниже мы не будем, однако, пользоваться связью между полями E и H в падающей волне и сохраним возможность перейти в окончательных формулах к постоянному внешнему полю (раздел 3)

2. Удобно интенсивность рассеяния выразить через корреляционные функции $\delta\varepsilon$, $\delta\mu$ и v: $\overline{\delta\varepsilon\delta\varepsilon'} \equiv \overline{\delta\varepsilon(r, t)\delta\varepsilon(r', t')} = \overline{\delta\varepsilon^2}\, W^{\varepsilon}(r - r', t - t')$ и т. д., где множители типа $\overline{\delta\varepsilon^2}$ выделены для удобства оценок. Фурье-компонента корреляторa скорости $\overline{v_m(r, t)\, v_n(r', t')} = \overline{v^2} W_{mn}(r - r', t - t')$ в однородной изотропной среде может быть записана в виде

$$\overline{(v_m v')}_{k,\omega} = W_1(k, \omega)\,\delta_{mn} + W_2(k, \omega)\, n_m n_n. \tag{5}$$

Средние, входящие в выражение (3), в нашем случае (см. (4)) выражаются следующим образом ($E = E_0 \exp[i(k_0 r - \omega_0 t)]$, $\Omega = \omega - \omega_0$, $q = k - k_0$):

$$\overline{(|\delta|^2 - |n\delta|^2)}_{k,\omega} = \overline{\delta\varepsilon\delta\varepsilon'}_{q\Omega}(|E_0|^2 - |nE_0|^2) + 2\frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\operatorname{Re}\{\overline{\delta\varepsilon\, v'_{q\Omega}}\,[H_0^*\,[n[E_0, n]]]\} + \tag{6}$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\right)^2 \{\overline{vv'_{q\Omega}}\,|H_0|^2 - \overline{v_l v'_{kq\Omega}}\,(H_{0l}^*\, H_{0k} + [H_0 n]_l\,[H_0^* n]_k)\};$$

$$([\beta, \delta^*]\, n) = (\overline{\delta\mu\delta\varepsilon'})_{\Omega q}\,(n[H_0, E_0^*]) + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\{(\overline{\delta\mu\, v})_{\Omega q}\,[[H_0 n]H_0^*] + (\overline{\delta\varepsilon\, v})_{\Omega q}[[E_0^* n]E_0]\} + \tag{7}$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\right)^2 (\overline{(nv)\, v})_{\Omega q}\,[H_0^*, E_0].$$

Выражение для $|\beta|^2 - |n\beta|^2$ получается из (6) заменой $\delta \to \beta$, $\delta\varepsilon \to \delta\mu$, $E_0 \to H_0$, $H_0 \to -E_0$. Первые слагаемые в (6) и (7) описывают обычное рассеяние на флуктуациях $\delta\varepsilon$ и $\delta\mu$, третьи слагаемые—релятивистское рассеяние на флуктуациях скорости, вторые слагаемые представляют собой интерференционные члены, обусловленные корреляцией флуктуаций ε и μ с флуктуациями скорости. Например, для гидродинамических флуктуаций $\delta\varepsilon = (\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\,\delta\rho + (\partial\varepsilon/\partial T)_\rho\,\delta T$ и, как легко видеть,*

$$(\overline{\delta\varepsilon\, v})_{\omega k} = k\omega(\overline{\delta\varepsilon\,\delta\rho})_{\omega k}/\rho_0 k^2.$$

3. Отметим следующее очевидное, но важное на наш взгляд обстоятельство, на которое, по-видимому, ранее не обращали внимания. В формулах (3), (6), (7) частоту ω_0 и волновой вектор k_0 падающей волны можно положить равными нулю. Получающиеся выражения описывают «рассеяние» постоянных однородных полей E_0 и H_0, т. е. излучение флуктуирующих тел, находящихся во внешних постоянных полях. При этом $\Omega \to \omega$, $q \to k$, т. е. излучение происходит на собственных частотах флуктуирующей системы. Поэтому эффект излучения может стать существенным лишь в случае резонанса, когда на данной частоте совпадают фазовые скорости электромагнитных волн и возбуждений, определяющих корреляторы ε, μ или v. Такого сорта резонанс имеет место, например, для звуковых и электромагнитных волн в металлах, для спиновых и электромагнитных волн в ферромагнетиках, вблизи резонансных частот в плазме и т. п. Кроме того, рассматриваемое излучение должно возрастать вблизи точек фазовых переходов второго рода и критических точек, где существенно возрастают флуктуации.

Физическая природа излучения очевидна: при нестационарных флуктуациях во внешних постоянных полях возникают переменные дипольные моменты $\delta\varepsilon(t)E_0$,

---

* Действительно, линейными по диссипативным коэффициентам могут быть лишь корреляторы плотности и температуры с продольной составляющей скорости, равной $k\omega\delta\rho/k^2\rho_0$ в силу уравнения непрерывности. К этому же результату приводит непосредственное вычисление корреляторов с помощью общей теории гидродинамических флуктуаций [3].

$\delta\mu(t)\,\boldsymbol{H}_0$, $\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{H}_0]$, $-\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{E}_0]$, приводящие к излучению на частотах колебаний ε, μ и v. Релятивистское излучение, обусловленное флуктуациями скорости, интересно тем, что оно происходит в постоянном магнитном поле даже в случае, когда $\delta\mu = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
2. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, Харьков, 1965.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, 32, 618 (1957).

Институт радиофизики и электроники УССР

Поступила в редакцию 3 мая 1965 г.

УДК 621.371.18

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ В ПЛАЗМЕННОЙ СРЕДЕ

Н. С. Орлова

В работе исследуется дискретный спектр электромагнитных волн, возникающих при возбуждении щелью диэлектрического слоя, расположенного на идеально-проводящей плоскости в однородной поглощающей плазме с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_п' = \varepsilon_п(1-i\sigma_п/\omega\varepsilon_0\varepsilon_п)$ (рис. 1).

Векторный потенциал поля над диэлектрическим слоем имеет вид, аналогичный приведенному в статье [1]:

$$A_y^м = 2E_z \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{b}{2}h\right) h^{-1}\, T^{-1}(\varepsilon_п', \varepsilon_д, h) \exp(pl - p_п x - ihz)\, dh, \qquad (1)$$

$$p_п = \sqrt{h^2 - k_п^2}, \quad p = \sqrt{h^2 - k_д^2}, \qquad (2)$$

$$k_п = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_п\mu_0}, \quad k_д = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_д\mu_0}.$$

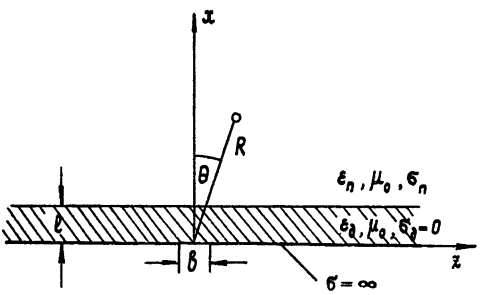


Рис. 1. Возбуждение диэлектрического слоя в плазменной среде.

Постоянные распространения h дискретных типов волн определяются из уравнения

$$T(\varepsilon_п', \varepsilon_д, h) = \frac{\varepsilon_п'}{\varepsilon_д} p\,\mathrm{sh}(pl) + p_п\,\mathrm{ch}(pl) = 0; \qquad (3)$$

они должны удовлетворять условию локальности, связанному с затухающим характером поля на бесконечности

$$\mathrm{Re}\, p_п > 0. \qquad (4)$$

Исследуем вещественные корни h уравнения (3), определяя их из решений этого уравнения относительно p или $p_п$ и считая сначала, что $\sigma_п = 0$.

Известно [2], что в случае положительной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_п$ внешней среды уравнение (3) имеет только чисто мнимые корни вида $p = ig$, и поверхностные волны являются ускоренными по отношению к скорости плоской волны в диэлектрике: $k_п < h < k_д$.

Случай возбуждения поверхностных волн в плазме с отрицательной диэлектрической проницаемостью имеет целый ряд особенностей. В этом случае уравнение (3), кроме чисто мнимых решений $p = ig$, имеет также чисто вещественные решения p. Интересно отметить, что поверхностные волны, соответствующие действительному p, как следует из (2), будут замедленными относительно скорости плоской волны в диэлектрике: $k_д < h < |k_п|$. Как следует из графического анализа уравнения (3), такие

замедленные поверхностные волны при $\varepsilon_п < 0$ могут существовать только при условии $|\varepsilon_п| > \varepsilon_д$ и при любой толщине l диэлектрического слоя

Для возбуждения поверхностных волн, соответствующих мнимым значениям корня $p = ig$, толщина l диэлектрика должна удовлетворять условию

$$(\pi/2)(2n + 1) < gl < \pi(n + 1),$$

что непосредственно следует из (3), а для существования только одного типа поверхностных волн—условию

$$\pi/2 < gl < \pi. \qquad (5)$$

При этом уравнение (3) одновременно может иметь два решения, которые определяются графическим методом Однако, как показывает непосредственный расчет, только одно из них, имеющее большее значение $p_п$, характеризует поверхностную волну, в то время как другое дает мнимое значение h, т. е. описывает нераспространяющийся тип волн. Условие (5) не является достаточным для возбуждения поверхностных волн с $p = ig$; существенную роль здесь играет соотношение между толщиной слоя диэлектрика l и значением диэлектрической проницаемости $\varepsilon_п$, которое, к сожалению, не может быть записано аналитически. Однако, как показал анализ графического решения, существование поверхностных волн возможно при любых значениях отрицательной диэлектрической проницаемости плазмы в том случае, если $l > \lambda_0/2\sqrt{2\varepsilon_д} \simeq 0{,}353\,\lambda_д$.

Результаты по определению постоянных распространения поверхностных волн над диэлектрическим слоем в плазме без потерь представлены на рис. 2

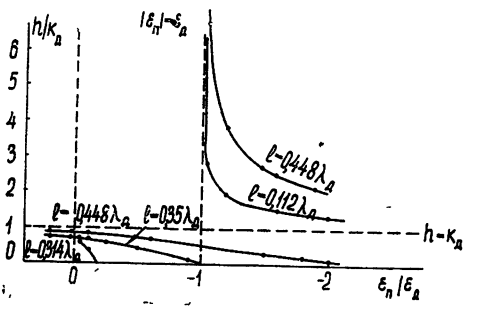


Рис. 2. Зависимость постоянной распространения h поверхностных волн от диэлектрической проницаемости плазмы $\varepsilon_п$.

Учет потерь в плазменной среде не вносит никаких особенностей в характер решений уравнения (3). Зависимость комплексной постоянной распространения поверхностных волн $h = h_R - ih_i$ от диэлектрической проницаемости и потерь плазменной среды (рис. 3) была получена из решений характеристического уравнения (3) методом последовательных приближений на электронной вычислительной машине.

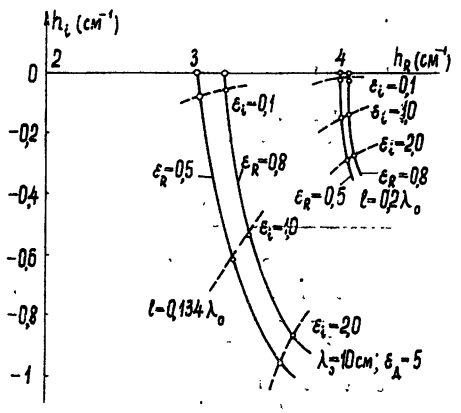


Рис. 3. Зависимость постоянной распространения h от параметров плазменной среды с потерями.

Помимо вещественных корней h, уравнение (3) даже при отсутствии потерь в плазме имеет комплексные корни, обусловливающие появление так называемых комплексных типов волн и волн утечки [3, 4].

Анализируя уравнение (3), легко выявить структуру возможных комплексных корней характеристического уравнения

$$p_п = m_2 \pm i|n_2|, \quad p = \pm(\pm|m_1| + in_1).$$

При этом оказывается, что в случае $\varepsilon_п > 0$ величина m_2 всегда отрицательна, т. е. имеют место комплексные корни вида $p_п = -|m_2| \pm i|n_2|$. Они не удовлетворяют условию (4) и соответствуют появлению вытекающих волн (волн утечки). При $\varepsilon_п < 0$ комплексные решения уравнения (3) существуют только при $m_2 > 0$. Поэтому $\mathrm{Re}\, p_п > 0$, а следовательно, вблизи источника возникают комплексные типы волн.

В заключение автор выражает благодарность Е. Н. Васильеву за руководство работой и за ряд ценных замечаний по написанию данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Шанников, Радиотехника, **15**, 27 (1960).
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М, 1957.
3. T. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEEE (русский перевод), **51**, 347 (1963).
4. E. S. Cassedy, M. Cohn, IRE Trans., **MTT-9**, 243 (1961).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
23 февраля 1965 г.

УДК 621.373.029.64

ОБ ИЗМЕНЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРОВ СВЧ

С. И. Сараев

Общепринятый метод измерения спектральной плотности колебаний генераторов СВЧ сводится к следующему. Сигналы двух генераторов СВЧ, относительно которых полагают, что они обладают одинаковыми статистическими свойствами, подаются на смеситель. Из получающегося при этом на разностной частоте сигнала с помощью режекторного фильтра вырезается часть спектра, прилегающая к несущей, после чего производится измерение спектральной плотности на «крыльях» спектра. Таким образом, измеряется суммарный спектр двух генераторов СВЧ, по которому судят о спектральной плотности каждого генератора. Изложенный метод обладает двумя недостатками: он требует, во-первых, применения высококачественного режекторного фильтра и, во-вторых, достаточно высокой стабильности измеряемых генераторов, чтобы разностная частота во время измерения не выходила за пределы полосы режекции.

Ниже описывается метод измерения спектральной плотности генераторов СВЧ, который не требует режекторного фильтра и в некоторых случаях свободен от второго недостатка, связанного с медленной нестабильностью генераторов. Метод основан на исключении из процесса измерения низкочастотной части флуктуаций фазы измеряемых колебаний с помощью системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) [3].

Блок-схема измерения приведена на рис. 1. С выхода смесителя (3) сигнал разностной частоты подается на амплитудный ограничитель (4) (вклад амплитудных флуктуаций в спектр сигнала реальных генераторов, как правило, пренебрежимо мал по сравнению с вкладом флуктуаций частоты). При разности фаз в 45° между измеряемым сигналом и гетеродином разностной частоты (8) спектр измеряемого сигнала с помощью синхронного детектора (5) переносится в нулевые частоты без искажений. Для синхронизации и фазирования колебаний гетеродина применяется астатическая система ФАП (6), (7), (12) [1] и фазовращатель (9). УНЧ (10) усиливает сигнал после его преобразования в синхронном детекторе и одновременно осуществляет функции режекторного фильтра на нулевой частоте, полоса которого подбором параметров усилителя может быть сделана как угодно узкой После УНЧ спектр сигнала анализируется обычным образом.

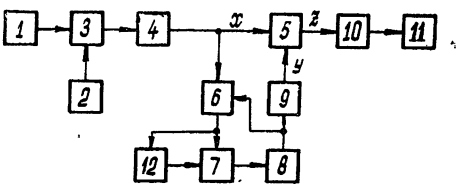


Рис. 1. Блок-схема измерений:

1, 2—исследуемые генераторы СВЧ; 3—смеситель; 4—амплитудный ограничитель; 5—синхронный детектор; 6—фазовый детектор; 7—управляющий элемент; 8—гетеродин разностной частоты; 9—фазовращатель; 10—усилитель низкой частоты; 11—анализатор спектра; 12—интегратор.

Рассмотрим подробнее преобразование спектра в синхронном детекторе. Синхронный детектор производит перемножение измеряемого сигнала x и колебаний гетеродина y. Достаточно рассмотреть лишь низкочастотную часть этого произведения. Будем полагать, что собственными флуктуациями гетеродина и схемы ФАП можно пренебречь Предварительно напомним, что о спектральной плотности сигналов генераторов имеет смысл рассуждать, лишь задавшись временем измерения T. Представим

флуктуации фазы измеряемого сигнала как сумму медленной части флуктуаций фазы $\varphi^{м}(t)$ с характеристическим временем изменения больше T и быстрой части $\varphi^{б}(t)$ с характеристическим временем меньше T. Перемножаемые сигналы запишем в виде

$$x(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi^{м}(t) + \varphi^{б}(t)],$$

$$y(t) = A_1 \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi_г(t)].$$

Здесь ω_0 — среднее значение разностной частоты измеряемых генераторов, $\varphi^{б}(t)$ определяет размытие спектральной линии генераторов за время T, $\varphi^{м}(t)$ характеризует медленную нестабильность генераторов, $\varphi_г(t)$ — флуктуирующая фаза гетеродина при замкнутой системе ФАП.

Если генераторы по своим статистическим свойствам идентичны, то $\varphi(t)$ обладает симметричной функцией распределения вероятностей При этом спектральная плотность измеряемого сигнала за время измерения T

$$G_x^T(\omega_0+\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi}\int_0^{\infty} \overline{\cos(\Delta\varphi_\tau^{б})}\cos(\Omega\tau)\,d\tau,$$

где $\Delta\varphi_\tau^{б} = \varphi^{б}(t+\tau) - \varphi^{б}(t)$. Черта сверху означает усреднение за время измерения. Напряжение на выходе синхронного детектора

$$z(t) = kA_0\cos(\varphi^{м} + \varphi^{б} - \varphi_0 - \varphi_г)$$

(k — коэффициент преобразования при детектировании). Обозначим $\varphi^{м} - \varphi_0 - \varphi_г = \psi_0$. Если постоянную времени ФАП выбрать равной T, то ФАП будет следить лишь за медленной частью флуктуаций фазы измеряемого сигнала При этом $\psi_0 = \text{const}$ С учетом сказанного функция корреляции $z(t)$ после некоторых промежуточных преобразований примет вид

$$R_z(\tau) = \frac{k^2A_0^2}{2}\left[\overline{\cos(\Delta\varphi_\tau^{б})} + \cos(2\psi_0)\,\overline{\cos(2\varphi^{б}+\Delta\varphi_\tau^{б})} - \sin(2\psi_0)\,\overline{\sin(2\varphi^{б}+\Delta\varphi_\tau^{б})}\right].$$

В силу симметричности функции распределения для $\varphi^{б}(t)$

$$\overline{\sin(2\varphi^{б}+\Delta\varphi_\tau^{б})} = 0.$$

Если разность фаз ψ_0 между сигналом и гетеродином поддерживать равной $\pi/4$, то

$$R_z(\tau) = \frac{k^2A_0^2}{2}\,\overline{\cos(\Delta\varphi_\tau^{б})},$$

и спектральная функция $z(t)$

$$G_z^T(\Omega) = \frac{1}{\pi}\,k^2A_0^2\int_0^{\infty}\overline{\cos(\Delta\varphi_\tau^{б})}\cos(\Omega\tau)\,d\tau$$

и

$$G_x^T(\omega_0+\Omega) = 2k^2\,G_z^T(\Omega).$$

Таким образом, при разности фаз $\pi/4$ между измеряемым сигналом и колебаниями гетеродина искомый спектр переносится в нулевые частоты без искажения.

Приведенный расчет сделан в предположении, что частотная характеристика ФАП является прямоугольной. Учет неидеальности частотной характеристики эквивалентен некоторому изменению постоянной времени ФАП, т. е. времени измерения T. Этой поправкой можно пренебречь, поскольку спектральная плотность мощности квазимонохроматического сигнала с фликерным характером флуктуаций частоты является медленной функцией T [2]. Если исследуемые генераторы позволяют осуществлять перестройку частоты, то целесообразно подстраивать фазу не гетеродина, а одного из измеряемых генераторов [3].

Автор благодарит М. Е. Жаботинского за обсуждение и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю Н. Бакаев, Радиотехника и электроника, 8, 513 (1963).
2. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 45 (1959)
3. Л. Маллинг, ТИРИ, 50, 7, 1702 (1962).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
1 апреля 1965 г.

УДК 621.385.64

АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМПЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ТИПА «М» (СЛУЧАЙ ШИРОКИХ СИСТЕМ)

Р. А. Дудник

В работе [1] в линейном приближении рассмотрены свойства простейшей плоской модели лампы с поперечным взаимодействием (ЛПВ) типа «М» в режиме усиления при достаточно узких двухмерных замедляющих системах. Однако для практического использования ЛПВ представляет определенный интерес исследование свойств приборов при достаточно широких замедляющих системах. Некоторые результаты такого анализа работы ЛПВ приводятся в настоящем сообщении.

Мы будем при синхронизме

$$h_e = \varkappa_{0_1}(1 + D\varepsilon) \tag{1}$$

искать решение дисперсионного уравнения (4) работы [1]* в виде

$$h = h_0(1 + D\Delta); \qquad \varkappa = \varkappa_{0_1}(1 + D\delta), \tag{2}$$

где ε — параметр расстройки, D — малый параметр, аналогичный параметру усиления Пирса [2, 3], при слабом токе пучка $D \ll 1$. В результате подстановки (1), (2) в дисперсионное уравнение получаем для двух близких корней следующее квадратное уравнение·

$$(\delta - \varepsilon)(\delta - g_1\Delta) + 1 = 0,$$

$$D^2 = \chi \frac{N}{2\pi n} \frac{-2\xi}{f}, \tag{3}$$

где χ — малый параметр (см. выражение (4а) работы [1]);

$$N = \varkappa_{0_1} d, \quad \xi = \frac{1}{\varkappa_{0_1}} \frac{\psi'}{\psi}, \quad f = \frac{h_H}{\varkappa_{0_1}}, \quad h_H = \frac{\omega_H}{v_0},$$

$\omega_H = \eta B_0$ — циклотронная частота. Удаленный корень, лежащий в окрестности $\varkappa_3 \sim \varkappa_{0_2}$, равен

$$\varkappa_3 = \varkappa_{0_2} + \varkappa_{0_1} D\delta_3, \quad \delta_3 = g_2\Delta + a,$$

$$a = -\frac{D}{2f\xi}\left(r^2 + \theta + \xi^2 - 2r\xi\frac{dh_H}{2\pi n}\right)\left[\left(\frac{2\pi n}{h_H d}\right)^2 - 1\right]^{-1}, \tag{4}$$

где $r = \varkappa_{0_2}/\varkappa_{0_1}$; $\theta = (h_0/\varkappa_{0_1})^2$; $g_{1,2} = (h_0/\varkappa_{0_1})\, k'_{1,2}(h_0)$ (см. выражение (11а) работы [1]). Как нетрудно показать, остальные корни дисперсионного уравнения, лежащие в окрестности $\varkappa_{4,5} \sim h_e \pm h_H$, соответствуют волнам с постоянными амплитудами и в дальнейшем нами не учитываются. Соотношения (3), (4) получены в предположении, что выполняются следующие неравенства·

$$\frac{2\pi n}{\varkappa_{0_1} d} \gg D\,|\delta - g_{1,2}\Delta|; \quad 2f \gg D\,|\delta - \varepsilon|, \tag{5}$$

которые выполняются тем лучше, чем больше фокусирующее магнитное поле и чем меньше линейная плотность тока I_0 ленточного электронного пучка.

Для анализа оказывается удобным введение новых переменных

$$\tilde{\delta} = \delta - \varepsilon; \quad \tilde{\Delta} = \Delta - \varepsilon/g_1, \tag{6}$$

при которых соотношения (3), (4) запишутся в виде

$$\tilde{\delta}^2 - g_1\tilde{\Delta}\,\tilde{\delta} + 1 = 0, \tag{7}$$

$$\tilde{\delta}_3 = g_2\tilde{\Delta} + a + \varepsilon\frac{1-q}{q}, \tag{8}$$

где $q = g_1/g_2$. Корни уравнений (7), (8) должны удовлетворять определенным требо-

* Это уравнение является алгебраическим уравнением пятого порядка относительно $\varkappa$; оно определяет поперечные волновые числа $\varkappa$ через другую неизвестную величину—продольное волновое число h.

ваниям, вытекающим из граничных условий задачи [1]. В рассматриваемом случае это дополнительное требование, согласно [1], можно записать в виде

$$\mathrm{Det} = \begin{vmatrix} e^{-jND\tilde{\delta}_1} & e^{-jND\tilde{\delta}_2} & e^{-jND\tilde{\delta}_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/\tilde{\delta}_1 & 1/\tilde{\delta}_2 & \alpha \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

где

$$\alpha = -\frac{D}{f\xi}\left(r + \theta - \xi\frac{h_H d}{2\pi n}\right)\left[\left(\frac{2\pi n}{h_H d}\right)^2 - 1\right]^{-1}. \tag{9а}$$

В общем случае совместное решение системы уравнений (7)—(9) не представляется возможным. Определенный интерес имеет попытка численного решения этой системы. Однако в интересующем нас предельном случае широких замедляющих систем (большие N) оказывается возможным нахождение решения системы уравнений (7)—(9).

Сделаем следующее основное предположение. Пусть среди корней уравнения (7) имеется корень, у которого

$$\mathrm{Im}\,\delta_1 > 0; \quad \mathrm{Im}\,\delta_1 > \mathrm{Im}\,\delta_2. \tag{10}$$

Тогда из уравнения (9) при достаточно больших DN можно получить приближенное соотношение между корнями уравнений (7) и (8):

$$\tilde{\delta}_1 \sim \tilde{\delta}_3. \tag{11}$$

Как нетрудно видеть, условие (11) представляет собой уравнение второго порядка относительно $\tilde{\Delta}$, решение которого можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\,\Delta = -\frac{2-q}{2g_2(1-q)}\left(a + \varepsilon\frac{1-q}{q}\right), \tag{12}$$

$$\mathrm{Im}\,\Delta = \frac{1}{g_2\sqrt{1-q}}\sqrt{1 - \frac{[aq + \varepsilon(1-q)]^2}{4(1-q)}}. \tag{13}$$

Из выражения (13) следует, что в рассматриваемой модели ЛПВ существует нарастающая по амплитуде волна вдоль оси x, постоянная нарастания которой зависит от параметра расстройки ε и ряда других параметров g_2, q и a, определяемых свойствами используемой двухмерной замедляющей системы. Учитывая выражение (3) для D, при оптимальном значении параметра расстройки $\varepsilon = -aq/(1-q)$ согласно (13), получаем следующее выражение для постоянной нарастания волны в ЛПВ;

$$\mathrm{Im}\,h_0 D\,\Delta = \frac{h_0}{g_2\sqrt{1-q}}\sqrt{\chi\frac{N}{2\pi n}\frac{-2\xi}{f}}. \tag{14}$$

Отметим, что в модели магнетронного усилителя с одномерной замедляющей системой постоянная нарастания волны равна [2, 3]

$$\mathrm{Im}\,h_0 D\,\Delta = h_0\sqrt{\chi - \xi/f}. \tag{15}$$

В этих двух случаях постоянные нарастания пропорциональны $\sqrt{I_0}$ и уменьшаются с увеличением магнитного поля B_0. Можно сказать, что при широких замедляющих системах постоянная нарастания волны в ЛПВ вдоль оси x определяется, в основном, одной волной, экспоненциально нарастающей по амплитуде в направлении движения электронного потока. Действительно, ЛПВ с поперечным потоком можно представить как набор «элементарных» ламп, включенных параллельно друг другу. Определенная часть мощности каждой элементарной лампы может поступать в волну, распространяющуюся вдоль оси ЛПВ. Величина этой мощности определяется параметрами g_2 и q, физический смысл которых можно пояснить, исходя из следующих соображений.

Согласно выражению (11а) работы [1], параметры $g_{1,2}$ пропорциональны величине $dk_{1,2}(h_0)/dh$, которую удобно представить в виде

$$\left|\frac{dk_{1,2}(h_0)}{dh}\right| = \frac{dk_{1,2}}{d\omega}\frac{d\omega}{dh} = \left(\frac{U_x}{U_y}\right)_{1,2}.$$

Здесь мы воспользовались определением для групповой скорости волны $U = \mathrm{grad}_{\Gamma}\,\omega$, где Γ — постоянная распространения, имеющая проекции $\Gamma_x = h_0$, $\Gamma_y = \varkappa_{0_{1,2}}$. Учитывая, что фазовые скорости определяются как $v_x = \omega/h_0$, $v_{y_{1,2}} = \omega/\varkappa_{0_{1,2}}$, получаем для $g_{1,2}$ и q следующие выражения:

$$g_{1,2} = -\frac{v_{y_1}}{v_x}\left(\frac{U_x}{U_y}\right)_{1,2}; \quad q = \left(\frac{U_x}{U_y}\right)_1\left(\frac{U_y}{U_x}\right)_2. \tag{16}$$

Таким образом, параметры g_2 и q определяются дисперсионными свойствами двухмерной замедляющей системы. В частности, в наиболее простом случае изотропной замедляющей системы, когда $U_{x_1} = U_{x_2}$ и $U_{y_1} = -U_{y_2}$, параметр $q = -1$

Из выражений (13), (14) и (16) видно, что постоянная нарастания волны в ЛПВ пропорциональна замедлению по групповой скорости вдоль оси $x(c/U_{x_1})$ и замедлению по фазовой скорости в направлении электронного потока (c/v_{y_1}), обратно пропорциональна замедлению по групповой скорости вдоль оси $y(U_{y_2}/c)$ и зависит от параметра q.

Автор благодарен А В. Гапонову, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему ряд важных замечаний

ЛИТЕРАТУРА

1 Р А Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 135 (1964)
2. Дж. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд Сов. радио, М., 1952
3. В. С. Стальмахов, Основы электроники СВЧ приборов со скрещенными полями, изд Сов. радио, М, 1963

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 28 мая 1965 г

УДК 681 142 65

О НАХОЖДЕНИИ ДЛИНЫ ДЕДУКТИВНОЙ ЦЕПОЧКИ РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ И ГЕНЕРАТОРОВ

М. Я. Эйнгорин

В работе «Теория рециркуляционных запоминающих устройств и генераторов» (Изв. высш. уч зав —Радиофизика, 7, № 5 (1964) следует более подробно остановиться на нахождении величин m_p $(p = 1, 2, ., r)$ и наибольших делителей $\prod_{p=k_i}^{f_i} m_p$, составленных из набора m_p величин n_i.

Величины m_p находятся из n_i $(i = 1, 2, ..., N)$ по следующим правилам

1. Выделение делителей m_p, входящих в наибольшее число величин n_i.

2. Делители m_p должны быть наибольшими из возможных при выполнении условия 1.

Это значит, что операция нахождения делителей m_p в первую очередь учитывает условие 1 (т. е. общность делителя для наибольшего числа n_i) и лишь во вторую— условие 2

После выделения первого делителя m_1 находится делитель m_2, входящий в другую группу n_i и их остатки, захватывающий также наибольшее (после m_1) число величин n_i и их остатков. Пусть конечное $p = r$. В этом случае при нахождении наибольшего делителя n_i в $\prod_{p=k_i}^{f_i} m_p$ входят все m_p, являющиеся делителями n_i, при которых остаток от деления W_i — целое число.

Можно дать другой алгоритм нахождения длины дедуктивной цепочки S, а именно в S в качестве сомножителей входят все наибольшие сомножители величин, образующих n_i $(i = 1, 2, ., N)$ и имеющих взаимно простые основания Иными словами,

все n_i разлагаются на сомножители вида $v_{\sigma_i}^{q_{\sigma_i}}$; при этом $n_i = \prod_{\sigma=1}^{\xi_i} v_{\sigma_i}^{q_{\sigma_i}}$, где все $v_{\sigma_i}(\sigma_i = 1, 2, ..., \xi_i)$ взаимно простые. В S входят все взаимно простые $v_{\sigma_i}(i = 1, 2, ..., N; \sigma = 1, 2, ..., \xi_i)$ с наибольшими степенями основания q_{σ_i}.

Если произведение сомножителей величины n_i, вошедших в S, обозначить через s_i, а оставшихся сомножителей — через p_i, то

$$S = \prod_{i=1}^{N} s_i, \quad M = \prod_{i=1}^{N} p_i, \quad s_i p_i = n_i.$$

При этом величины S_i и p_i определяются неоднозначно, поскольку один и тот же сомножитель, вошедший в S, может быть взят из различных $n_j(j=\alpha, \beta, ..., \gamma)$ (если этот сомножитель входит во все эти n_j). В величину же S входит лишь один из них, взятый из любого n_j с $j = \alpha, \beta, ..., \gamma$. На основе описанных алгоритмов при заданных S и M всегда могут быть подобраны величины N и n_i $(i = 1, 2, ., N)$ для построения необходимого генератора, счетчика или запоминающего устройства на принятых для моделирования элементах.

В отношении моделирования генераторов (раздел 3 работы) следует заметить, что для $\sigma_i \neq \sigma_j$ $(i, j = 1, 2, ..., N; i \neq j)$ восстановление может идти не по выбранной траектории (дедуктивной цепочке). Выбор траектории восстановления может быть выполнен на основе формы (2.9) по заданным начальному элементу траектории восстановления и фазе. Зная основную траекторию генератора и траекторию восстановления с ее фазой, легко можно определить элементы σ_i $(i = 1, 2, ..., N)$*.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 июня 1965 г.

---

* В заключение отметим ряд опечаток, имеющихся в указанной работе

1. Стр. 970, четырнадцатая строка снизу. Напечатано „—начальное слово, $1 \leqslant j_l \leqslant n_l$". Должно быть „—начальное слово $(1 \leqslant j_l \leqslant n_l)$, содержащее ненулевой элемент каждого из подалфавитов»

2. Стр. 972, четвертая строка снизу Напечатано n_2, должно быть n_3

3 В формуле (2.9) времена t, t_i° и t° взяты приведенными, т е t, t_i° и t_1° деленными на τ.

4. В формуле (2 9) $\bmod n_i$ можно опустить.

5. Стр. 974, девятая строка снизу. Напечатано $m_2 = 2$, должно быть $m_2 = 4$.

6 На рис. 3 цифру 21 на генераторе W_2 заменить на 2